М.С.Салоҳитдинов, Ғ.Н.Насритдинов

2

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

"ЎЗБЕКИСТОН"

М. С. Салоҳитдинов, Ғ. Н. Насритдинов

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги университетларнинг ҳамда педагогика олийгоҳларининг талабалари учун дарслик сифатида тавсия этган

Қайта ишланган иккинчи нашри

Махсус муҳаррир ЎзР ФА нинг мухбир-аъзоси,
физика-математика фанлари доктори,
профессор **Н. Ю. Сатимов**

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
1994

22.161.6
С26

Такризчилар:

Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг ҳақиқий аъзоси,
физика-математика фанлари доктори, профессор **Т. Д. Жўраев,**
физика-математика фанлари доктори, профессор **Х. Р. Латипов**

Муҳаррирлар:

Р. Каримов, Ю. Музаффархўжаев

Салоҳитдинов М. С., Насритдинов Ғ. Н.
С 26 Оддий дифференциал тенгламалар: Ун-тларнинг ҳамда пед. олийгоҳларининг талабалари учун дарслик сифатида тавсия этилган (Махсус муҳаррир Н. Ю. Сатимов.) — 2-қайта ишланган нашри.— Т. : Ўзбекистон, 1994.— 383 б.
I. Автордош.
ISBN 5-640-01657-4

Ушбу дарслик университетларнинг «математика» ва «амалий математика» ихтисосликлари бўйича таълим олаётган талабалари учун мўлжалланган бўлиб, ундан педагогика олийгоҳлари, олий техника ўқув юртлари талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Дарсликда дифференциал тенгламалар назариясини баён қилиш билан бирга, унинг амалий масалаларни ечишга татбиқ этилишига ҳам катта эътибор берилган.

Салахитдинов М. С., Насритдинов Г. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

ББК 22.161.6я 73

$$\text{С}\ \frac{1602070100-04}{\text{М}351\ (04)\ 94}\ 94$$

Биринчи нашрга сўз боши

Дифференциал тенгламаларга бағишланган китоблар рус, инглиз ва бошқа тилларда кўплаб чоп этилган. Улар ичида математик олимлар Л. С. Понтрягин, В. В. Степанов, И. Г. Петровскийлар томонидан яратилган дарсликларни алоҳида қайд қилиб ўтиш лозим. Ўзбек тилида илк дарслик академик Т. Н. Қори-Ниёзий томонидан 40 йилларда ёзилган. Ўтган давр ичида дифференциал тенгламалар назарияси ва унинг татбиқ доираси кенгайиб, янада бойиди. Шу муносабат билан ўзбек тилида ҳозирги замон талабларига жавоб берадиган, амалдаги дастурларга мос келадиган дарслик ёзиш зарурати вужудга келди. Мазкур китоб шу йўлда қўйилган илк қадам бўлиб, унга муаллифларнинг Тошкент Давлат университети математика ҳамда амалий математика ва механика факультетларида узоқ йиллар давомида ўқиган лекциялари асос қилиб олинди. Дарслик университетларнинг «математика» ва «амалий математика» ихтисосликлари талабалари учун мўлжалланган, лекин ундан педагогика олийгоҳлари, олий техника ўқув юртлари талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Дарсликда дифференциал тенгламалар назариясини баён қилиш билан бирга уларнинг амалий масалаларни ечишга татбиқ этилишига ҳам катта эътибор берилди. Бу соҳада Л. С. Понтрягиннинг рус тилида чоп этилган китобидан кенг фойдаланилди.

Физика, иқтисодиёт, биология, кимё, тиббиёт ва бошқа фанларда учрайдиган кўплаб жараёнлар дифференциал тенгламалар ёрдамида тавсифланади. Шу тенгламаларни ўрганиш билан тегишли жараёнлар ҳақида бирор маълумотга, тасаввурга эга бўламиз. Ўша дифференциал тенгламалар ўрганилаётган жараённинг математик моделидан иборат бўлади. Бу модель қанча мукаммал бўлса, дифференциал тенгламаларни ўрганиш натижасида олинган маълумотлар жараёнларни шунча тўла тавсифлайди. Шуниси қизиқки, табиатда учрайдиган турли жараёнлар бир хил дифференциал тенгламалар билан тавсифланиши мумкин. Бу эса «бир ўқ билан икки қарғани отиш» имконини беради, яъни агар бирор математик моделни тўла ўрганилса, тегишли натижадан турли жараёнларни тушунтиришда фойдаланса бўлади. Айтилган фикрлар дифференциал тенгламаларнинг умумий назарияси ва амалий масалаларни ечишга татбиқи муҳим аҳамият касб этишини англатади.

Дарслик олий ўқув юртларининг дифференциал тенгламалар бўйича мавжуд дастурлари асосида ёзилган бўлиб, баён этилган материал тилининг равонлигига, математик жиддийлигига катта эътибор берилди. Кўпчилик мавзулар баёнига ижодий ёндашилди. Жумладан, дифференциал тенглама (тенгламалар системаси) ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги, ε-тақрибий ечим, чегаравий масалалар, чизиқли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламаларни (системаларни) ўрганишда Грин функциясидан фойдаланиш, лимит давралар, ечимларнинг турғунлиги каби қатор мавзуларни санаб ўтиш мумкин.

Китобдаги биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга оид материални академик М. С. Салоҳитдинов, оддий дифференциал тенгламаларга оид материални эса проф. Ғ. Насритдинов ёзди.

Муаллифлар китоб қўлёзмасини синчиклаб ўқиб чиқиб, ўз фикр-мулоҳазаларини билдирган китобнинг илмий муҳаррири Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг мухбир аъзоси, физика-математика фанлари доктори, профессор Нўъмон Юнусович Сатимовга, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг ҳақиқий аъзоси, физика-математика фанлари доктори, профессор Т. Д. Жўраевга ва физика-математика фанлари доктори, профессор Х. Р. Латиповга ўзларининг чуқур миннатдорчиликларини изҳор этадилар.

Иккинчи нашрга сўз боши

Дарсликнинг иккинчи нашрида аввало унинг дастлабки нашрида учраган айрим ноаниқликлар тўғриланди. Ундан ташқари баъзи материаллар бошқача баён этилди. Баъзилари эса янги материаллар билан алмаштирилди. Айрим материалларни қисқартириш мақсадга мувофиқ деб топилди.

Иккинчи нашрни тайёрлаш жараёнида ўз фикр ва мулоҳазаларини билдирган ҳамкасб дўстларимизга миннатдорчилик изҳор қиламиз.

ДАРСЛИКДА УЧРАЙДИГАН АСОСИЙ БЕЛГИЛАР

$\mathbf{R}$ (ёки $\mathbf{R}^1$) — барча ҳақиқий сонлар тўплами.

$\mathbf{R}_+$ (ёки $\mathbf{R}_-$) — барча мусбат (манфий) ҳақиқий сонлар тўплами.

$\mathbf{R}^2$ — сонлар текислиги, яъни $\mathbf{R}^2=\{(a, b) : a\in \mathbf{R}, b\in \mathbf{R}\}$.

I — $\mathbf{R}$ тўпламнинг қисми бўлиб, у очиқ, ёпиқ, ярим очиқ, ярим ёпиқ, чекли ёки чексиз интервалдан иборат.

I_x — x нинг ўзгариш интервали.

$C(\mathbf{R})$ — $\mathbf{R}$ тўпламда узлуксиз бўлган функциялар синфи.

$C(I)$ — I интервалда узлуксиз бўлган функциялар синфи.

$C^1(\mathbf{R})$ (ёки $C^1(I)$) — $\mathbf{R}$ тўпламда (ёки I интервалда) узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфи.

$\varphi(x)\in C(\mathbf{R})$ (ёки $\varphi(x)\in C(I)$) — $\varphi(x)$ функция $\mathbf{R}$ тўпламда (ёки I интервалда) узлуксиз функциялар синфига тегишли.

$\varphi(x)\in C^1(\mathbf{R})$ (ёки $\varphi(x) \in C^1(I)$) — $\varphi(x)$ функция $\mathbf{R}$ тўпламда (ёки I интервалда узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфига тегишли.

Γ — $\mathbf{R}^2$ текисликнинг қисмидан иборат бўлган соҳа.

$C(\Gamma)$ — Γ соҳада узлуксиз бўлган функциялар синфи.

$C^1(\Gamma)$ — Γ соҳада узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфи.

$f(x, y)\in C^1(\Gamma)$ — $f(x, y)$ функция Γ соҳада узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфига тегишли.

$\mathbf{R}^3=\{(a, b, c) : a\in \mathbf{R}^1, b\in \mathbf{R}^1, c\in \mathbf{R}^1\}$.

$\mathbf{R}^k=\{(a_1, a_2,\ldots,a_k) : a_i\in \mathbf{R}^1, i=1, 2,\ldots, k\}$.

D_3 — $\mathbf{R}^3$ фазонинг қисмидан иборат соҳа.

D_k — $\mathbf{R}^k$ фазонинг қисмидан иборат соҳа.

$C^n(I)$ — I интервалда n марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфи.

$\varphi(x)\in C^n(I)$ — $\varphi(x)$ функция I интервалда n марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфига тегишли.

ҚИРИШ

1-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Табиатда учрайдиган турли жараёнлар (автомобиль ҳаракати, тайёранинг учиши, физик, химик ва биологик жараёнлар ва ҳ. к.) ўз ҳаракат қонунларига эга. Баъзи жараёнлар бир хил қонун бўйича содир бўлиши мумкин, бу ҳол эса уларни ўрганиш ишини енгиллаштиради. Аммо жараёнларни тавсифлайдиган қонунларни тўғридан-тўғри топиш ҳар доим ҳам мумкин бўлавермайди. Характерли миқдорлар ва уларнинг ҳосилалари ёки дифференциаллари орасидаги муносабатни топиш табиатан енгил бўлади. Бунда номаълум функция ёки вектор-функция ҳосила ёки дифференциал ишораси остида қатнашган муносабат ҳосил бўлади. Жумладан, $\frac{dy}{dx}=$ $=f(x, y)$ *биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама* дейилади $F(x,y,y')=0$ — *биринчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилмага оддий дифференциал тенглама дейилса,* $y^{(n)}=f(x, y, y', \dots ,y^{(n-1)})$ $F(x, y, y', \dots ,y^{(n)})=0$ — *n-тартибли оддий дифференциал тенглама дейилади.* $y^{(n)}=f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$ — *n-тартибли юқори тартибли ҳосилага нисбатан ечилган оддий дифференциал тенглама* дейилади Агар $f(x, y, \dots ,y^{(n-1)})$ ёки $F(x, y, y', \dots , y^{(n)})$ лар $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ва $y^{(n)}$ аргументларга нисбатан чизиқли функциялар бўлса, тегишли дифференциал тенглама *чизиқли* дейилади. Юқоридаги дифференциал тенгламаларда номаълум функция бир аргументли деб қаралади Аслида номаълум функция кўп аргументли бўлган ҳоллар ҳам тез-тез учрайди. Бундай ҳолда дифференциал тенглама *хусусий ҳосилали* дейилади. Ушбу $F\left(u,\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$ тенглама биринчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламалардан,

$$\Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

тенглама эса иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалардан иборат. Қуйидаги

$\frac{\partial u}{\partial x}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *(иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси),*

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ *(Лаплас тенгламаси),*

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y)$ *(Пуассон тенгламаси)* тенгламалар иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг муҳим хусусий ҳоллари ҳисобланади, уларда номаълум функция икки аргументлидир.

2-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАГА ОЛИБ КЕЛИНАДИГАН БАЪЗИ МАСАЛАЛАР

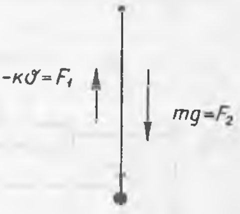
1-масала. Массаси m бўлган жисм $v(0)=v_0$ бошланғич тезлик билан бирор баландликдан ташлаб юборилган. Жисм тезлигининг ўзгариш қонунини топинг (1-чизма).

Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра:

$$m\frac{dv}{dt}=F,$$

бу ерда F — жисмга таъсир этаётган кучларнинг йиғиндиси (тенг таъсир этувчиси). Жисмга фақат иккита куч таъсир этиши мумкин деб ҳисоблайлик: ҳавонинг қаршилик кучи $F_1=-kv$, $k>0$; ернинг тортиш кучи $F_2=mg$. Шундай қилиб, математик нуқтаи назардан F куч

а) F_2 га; б) F_1 га; в) F_1+F_2 га тенг бўлиши мумкин.



1- чизма

а) $F=F_2$ бўлсин. Унда биринчи тартибли $m\frac{dv}{dt}=mg$ дифференциал тенгламага эгамиз. Оддий ҳисоблашлар бу тенгламада номаълум функция $v_1(t)=gt+C$ (C — ихтиёрий ўзгармас сон) кўринишда бўлишини кўрсатади. $v(0)=v_0$ бўлгани учун $C=v_0$ деб олиш мумкин, у ҳолда изланган қонун $v_1(t)=gt+v_0$ кўринишда бўлади.

б) Агар $F=F_1$ бўлса, $m\frac{dv}{dt}=-kv$, бунда $v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$ экани равшан.

в) $F=F_1+F_2$ бўлсин. Бу ҳолда ушбу $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$ $(k>0)$ дифференциал тенгламага келамиз. Номаълум функция v

$$v(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k};\ v(0)=v_0,\quad v_2(t)=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$$

кўринишда бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

Равшанки, $\lim\limits_{k\to0}v_2(t)=v_1(t)$. Ҳақиқатан,

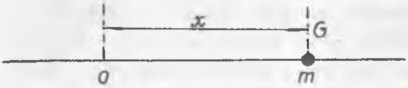
$$\lim_{k\to0}v_2(t)=\lim_{k\to0}\left[\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}\right]=v_0\lim_{k\to0}e^{-\frac{k}{m}t-}-$$

$$-mg\lim_{k\to0}\left(\frac{e^{-\frac{k}{m}t}+1}{-\frac{k}{m}t}\right)\left(-\frac{t}{m}\right)=v_0+gt=v_1(t).$$

2-масала. Массаси m бўлган моддий нукта тўғри чизикл
ҳаракат қилмокда. Унинг ҳаракат қонунини топинг.

Ҳар бир моментда G нуқтадан координата бошигача бўлга
масофа x бўлса (2-чизма), нуқтанинг тезлиги $\dot{x}\left(\dot{x}=\frac{dx}{dt}\right)$ булад
Моддий нуқтага икки ташқи куч: ишқаланиш кучи $-b\dot{x}$, $b>0$ в
таранглик кучи $-kx$, $k>0$ таъсир этади дейлик. Ньютонни
иккинчи қонунига асосан G нуқтанинг ҳаракати

$$m\ddot{x}=-b\dot{x}-kx$$

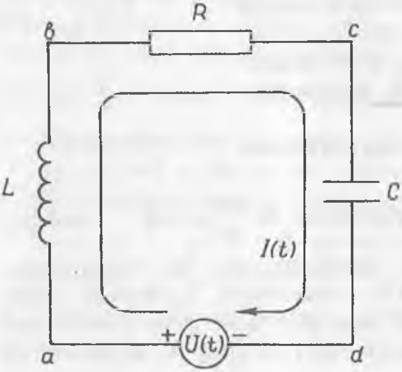


2-чизма

қонун билан содир бўлади. Бу икки
чи тартибли дифференциал тенглам
дир. Агар моддий нуқта двигател
билан таъминланган бўлиб, двиг
телнинг G нуқтага таъсир куч
F бўлса, у ҳолда G нинг ҳарака
қонуни

$$m\ddot{x}=-b\dot{x}-kx+F$$

бўлади. Кўпинча F миқдор $|F|$
$\leqslant F_0=\text{const}$ муносабатга бўйсунад



3-чизма

3-масала. Тўртта икки қут
ликлардан тузилган ёпиқ элект
занжири берилган (3-чизма). Ик
қутбликлар: ab — индуктивлик (L
bc — қаршилик (R), cd — сиғим (C
кучланиш манбаи ($U(t)$) — da. Ва
ўтиши билан ёпиқ электр занжири
электр токи $I(t)$ нинг ўзгариш қон
нини топинг.

Кирхгофнинг биринчи қонунига кўра ([1], 83—84-бетлар)

$$I_{ab}(t)+I_{cb}(t)=0, \qquad I_{ab}(t)=I_{bc}(t).$$

Шунга ўхшаш,

$$I_{bc}(t)=I_{cd}(t), \qquad I_{da}(t)=I_{ab}(t),$$

яъни

$$I_{ab}(t)=I_{bc}(t)=I_{cd}(t)=I_{da}(t)=I(t).$$

Кирхгофнинг иккинчи қонунига кўра:

$$U_{ab}(t)+U_{bc}(t)+U_{cd}(t)+U_{da}(t)=0.$$

Энди

$$U_{ab}(t)=L\frac{dI(t)}{dt},\ U_{bc}(t)=RI(t).$$

$$U_{cd}(t)=\frac{1}{C}\int I(t)\,dt, \quad U_{da}(t)=-U(t)$$

муносабатлардан фойдалансак:

$$L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)+\frac{1}{C}\int I(t)\,dt-U(t)=0.$$

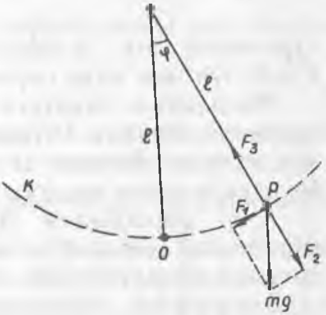
Агар $U(t)\in C^1$ (C^1 — бир марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфи) бўлса, у ҳолда юқоридаги тенгламанинг ҳар бир ҳадини t бўйича дифференциаллаб, $I(t)$ нинг ўзгариш қонунини ифодаловчи

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=\frac{dU(t)}{dt}$$

тенгламага келамиз. Албатта, бу масалада ҳам турли хусусий ҳолларни кўриш мумкин эди.

4-масала. Математик тебрангич (маятник)нинг ҳаракат тенгламасини келтириб чиқаринг.

Вертикал текисликда ётган l радиусли K айлана бўйлаб оғирлик кучи таъсири остида ҳаракат қилувчи m массага эга бўлган P нуқта математик тебрангични тасвирлайди (4-чизма). Ҳар бир моментда P нуқтанинг ўрни $\varphi(t)$ бурчак билан тўла аниқланади. Масаланинг шарти бўйича P нуқта фақат оғирлик кучи таъсири остида ҳаракат қилади. Аммо бу ҳаракатда айлананинг роли бор. У P нуқтани айлана бўйлаб ҳаракат қилишга мажбур этади, яъни P нуқтага айлананинг ички нормали бўйича йўналган F куч билан таъсир этади. Агар тортиш кучи mg ни иккита ташкил этувчига ажратсак: $F_1=-mg\sin\varphi$, $F_2=-mg\cos\varphi$, у ҳолда $F_3+F_2=0$ бўлади. Шундай қилиб, P га таъсир этаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси $F=F_1+F_2+F_3=F_1=-mg\sin\varphi$. Демак, P нуқтанинг ҳаракат тенгламаси Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан



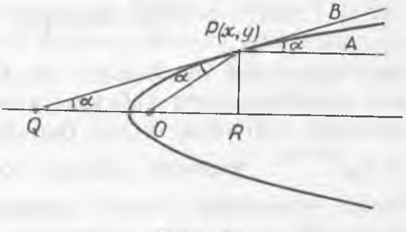
4- чизма

$$ml\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi \text{ ёки } l\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0$$

кўринишда бўлади.

5-масала. Агар ёруғлик манбаи O нуқтага ўрнатилган бўлса, кўзгунинг шакли ундан қайтган нурлар горизонтал ўққа параллел бўлиши учун қандай бўлиши керак?

Горизонтал ўқни Ox, вертикал ўқни Oy дейлик. Кўзгу сиртини xOy текислиги билан кесишдан ҳосил бўлган эгри чизиқни кўрамиз. $P(x, y)$ — шу чизиқдаги ихтиёрий нуқта бўлиб, унда олинган эгри чизиққа ўтказилган уринма билан Ox ўқининг кесишган нуқтаси O бўлсин (5-чизма). Равшанки, $\angle ORQ=\angle OQP$ (чунки нурнинг тушиш ва қайтиш бурчаклари тенг бўлади, яъни $\angle APB=\angle ORQ=\alpha$). Шу сабабли, $|OQ|=|OP|=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$, $y=RP$. Агар $y>0$ десак,



5- чизма

$$\frac{dy}{dx}=\frac{|PR|}{|QR|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \quad \text{ёки} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}.$$

Бундан

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$$

дифференциал тенглама келиб чиқади. Унда номаълум функция $y(x)$ ушбу

$$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right),\ C=\text{const},\ y>0$$

кўринишга эга эканини текшириб кўриш қийин эмас. Бу эса $C\neq 0$ бўлгани учун параболадан иборат.

Масаланинг шартига кўра, шу эгри чизиқ Ox ўқига нисбатан симметрик бўлади. Шунинг учун юқоридаги функцияда $y<0$ бўлиши ҳам мумкин. Шундай қилиб, қўйилган масалани текисликда кўрсак, ёруғлик манбаи параболанинг фокусида бўлади.

Агар параболани Ox ўқи атрофида айлантирсак, айланма параболоид ҳосил бўлади. Демак, кўзгу формаси айланма параболоиддан иборат бўлиб, O нуқта унинг фокусида ётади.

6-масала. Ҳайвонларнинг бирор тури ўзгармас муҳитда алоҳида яшасин дейлик. Урчиш ва ўлишнинг даврийлигини ҳисобга олмай кўрилаётган тур индивидуумлари сонининг ўзгариш қонунини топинг.

Масаланинг шартига кўра вақтнинг берилган кичик интервалида урчиш ва ўлишлар сони берилган моментда индивидуумлар сонига пропорционал бўлади. N индивидуумлар сонининг ўсиши кўрилаётган интервалда N сонига пропорционал бўлиб, бу ўсиш интервал кичик бўлганда унинг узунлигига ҳам пропорционал бўлади. Шундай қилиб, N сон t нинг функцияси ва унинг ўсиши $\left(\text{яъни } \frac{dN}{dt}\right)$ $N(t)$ га пропорционалдир. $N(t)$ функцияни узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи деб қарасак, ушбу

$$\frac{dN(t)}{dt}=\varepsilon N(t), \qquad N(t_0)=N_0>0$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз, бу ерда ε — пропорционаллик коэффициенти («ўсиш» коэффициенти). Урчиш қонуни дифференциал тенглама билан берилган функциянинг кўриниши $N(t)=$ $=N_0e^{\varepsilon(t-t_0)}$ эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Бундан келиб чиқадики, вақт арифметик прогрессия бўйича ўзгарса, индивидуумлар сони геометрик прогрессия бўйича ўзгаради. Агар $\varepsilon>0$ бўлса, N ўсади; агар $\varepsilon<0$ бўлса, N камаяди. $\varepsilon=0$ бўлганда $N=\text{const}$ бўлиб, урчиш ўлишни тўла қоплайди.

Бу масалада муҳитни ўзгарувчан деб ҳисоблаш ва бу муҳитда ҳайвонларнинг бир неча тури яшаяпти деб қараш, сўнгра турларнинг орасидаги баъзи муносабатларга қараб ҳар бир тур индивидуумлари сонининг ўзгариш қонунини топиш масаласини ҳам қўйиш мумкин. Биз бунга тўхталмаймиз.

1-боб

ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛГАН БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1.1-§. ЕЧИМ ТУШУНЧАСИ. ҚОШИ МАСАЛАСИНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

Даставвал биз биринчи тартибли битта дифференциал тенгламани кўрамиз. Юқорида

$$F(x,\ y,\ y')=0 \tag{1.1'}$$

тенгламани биринчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилмаган оддий дифференциал тенглама деб атадик, унда x — эркли ўзгарувчи, y — унинг номаълум функцияси, $y'=\frac{dy}{dx}$ эса номаълум функциянинг ҳосиласи. (1.1′) кўринишда ёзиладиган тенгламаларни биз 3-бобда ўрганамиз. Ҳозир (1.1′) нинг муҳим хусусий ҳолига тўхталамиз. (1.1′) тенглама учта x, y ва y' ўзгарувчини боғлайди. Баъзи ҳолларда бу тенглама y' ни x ва y нинг функцияси сифатида аниқлайди. Бу ҳолда (1.1′) тенглама ушбу

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{1.1}$$

дифференциал тенгламага тенг кучли бўлади. (1.1) тенглама, одатда, *ҳосилага нисбатан ечилган* дейилади. Кўп ҳолларда (1.1) кўринишдаги тенгламаларни ўрганишнинг қулайлиги бор. Энди биз (1.1) тенглама (1.1′) ни y' га нисбатан ечиш натижасида ҳосил бўлган деб қарамасдан, балки (1.1) да $f(x,\ y)$ функция Г соҳада[*)] берилган деб қараймиз. Мазкур бобда ана шундай дифференциал тенгламаларни ўрганамиз.

1.1-таъриф. (1.1) *тенглама берилган бўлиб, унда* $f(x,\ y)$ *функция* $\mathbf{R}^2$ *текисликнинг* Г *соҳасида аниқланган бўлсин. Агар* I *(очиқ, ёпиқ ёки ярим очиқ) интервалда аниқланган* $y=\varphi(x)$ *функция учун қуйидаги уч шарт:*

$$\left.\begin{aligned}
&1^\circ.\ (x,\varphi(x))\in\Gamma,\Gamma\subset\mathbf{R}^2,x\in I,\\
&2^\circ.\ \varphi(x)\in C^1(I)^{**)},\\
&3^\circ.\ \frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\ \varphi(x)),\ x\in I
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

[*)] Соҳа дейилганда бўш бўлмаган очиқ боғланган тўпламни тушунилади. Қайд қиламизки, агар берилган Г тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи ва шу тўпламга тегишли бирор синиқ чизиқ мавжуд бўлса, у ҳолда Г тўплам *боғланган* дейилади.

[**)] Агар I интервал ёпиқ бўлса, у ҳолда унинг чап учида ўнг ҳосила, ўнг учида эса чап ҳосила назарда тутилади. Аниқ ҳолларда: I ёпиқ бўлса, *оралиқ* сўзини, у очиқ ёки ярим очиқ бўлса, *интервал* сўзини ишлатамиз.

бажарилса, у ҳолда бу функция I интервалда (1.1) дифференциал тенгламанинг ечими дейилади.

Агар $y=\varphi(x)$, $x\in I$ функция (1.1) тенгламанинг ечими бўлса, у (1.1) тенгламани *қаноатлантиради,* деб ҳам айтилади.

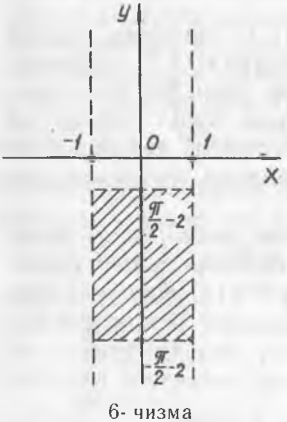
(1.1) дифференциал тенгламанинг ҳар бир $y=\varphi(x)$ ечимига мос келган эгри чизиқ (яъни $y=\varphi(x)$ функциянинг графиги) шу тенгламанинг *интеграл эгри чизиғи* (ёки соддагина, *интеграл чизиғи*) дейилади.

Ушбу $\frac{dy}{dx}=2x$ тенглама учун $\Gamma=\mathbf{R}^2$ бўлиб, $\varphi(x)=x^2+1$ функция $\mathbf{R}^1$ тўпламда (яъни $-\infty<x<+\infty$ интервалда) ечим бўлади. Ҳақиқатан, таърифга кўра:

$$1^\circ.\ (x,\ x^2+1)\in\mathbf{R}^2,\ x\in\mathbf{R}^1;\ 2^\circ.\ (x^2+1)\in C^1(\mathbf{R}^1);\ 3^\circ.\ \frac{d(x^2+1)}{dx}\equiv 2x.$$

Шунга ўхшаш, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ тенглама учун $I=(-1,\ 1)$ бўлиб, $\varphi(x)=\arcsin x-2$ функция шу $(-1,\ 1)$ интервалда ечим бўлади. Бу ҳолда $\Gamma=\left\{(x,\ y):-1<x<1,\ -\frac{\pi}{2}-2<y<\frac{\pi}{2}-2\right\}$ (6- чизма).

(1.1) тенгламанинг ечими баъзи ҳолларда ошкормас $\Phi(x,\ y)=0$ кўринишда бўлса, баъзи ҳолларда параметрик $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_0<t<t_1$, $x'(t)\neq 0$ кўринишда бўлиши мумкин. Хулоса қилиб айтганда, тенгламанинг берилишига қараб унинг ечими қуйидаги



6- чизма

$$y=\varphi(x);\qquad \Phi(x,\ y)=0$$
$$x=x(t),\qquad y=y(t)$$

кўринишлардан бирортаси орқали ёзилади.

Коши масаласининг қўйилиши: (1.1) тенглама берилган бўлиб, унда $f(x,\ y)$ функция $\mathbf{R}^2$ текисликнинг Γ соҳасида аниқланган, узлуксиз ва I интервал x ўқидаги интервал бўлсин, x_0 ни ўз ичига оладиган I интервални ва шу I интервалда аниқланган узлуксиз дифференциалланувчи ҳамда ушбу

$$\left.\begin{aligned}&1^\circ.\ (x,\ \varphi(x))\in\Gamma\,(x\in I),\\&2^\circ.\ \varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x))\,(x\in I),\\&3^\circ.\ \varphi(x_0)=y_0,(x_0,y_0)\in\Gamma\end{aligned}\right\}\qquad(1.3)$$

шартларни қаноатлантирувчи $y=\varphi(x)$ функцияни топиш талаб этилади. Бу масала қисқача

$$y'=f(x,\ y),\qquad y(x_0)=y_0$$

каби ёзилади ва (1.1) тенглама учун *Коши масаласи* (ёки *бошланғич масала*) деб аталади. Юқоридаги 1°, 2° ва 3° шартларни қаноатлантирадиган функция I интервалда (К) *Коши масаласининг ечими* дейилади. Яна (К) масаланинг ечими $y=\varphi(x)$ x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга ёки $\varphi(x_0)=y_0$ бошланғич шартни қаноатлантиради, деб юритилади.

Энди Г соҳанинг (K) масала ягона ечимга эга бўладиган (x, y) нуқталаридан тузилган қисмини $D_2^*\subset\Gamma$ $(D_2=\Gamma)$ деб белгилайлик. Шунга кўра D_2^* тўпламнинг ҳар бир (x, y) нуқтасидан (1.1) тенгламанинг ягона интеграл чизиғи ўтади.

1.2-таъриф. (1.1) *дифференциал тенглама ва x, C ўзгарувчиларнинг бирор ўзгариш соҳасида аниқланган ҳамда x бўйича узлуксиз дифференциалланувчи*

$$y=\varphi(x, C) \qquad (1.4)$$

функция берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $(x, y)\in D_2^*$ *нуқта учун* (1.4) *муносабат C нинг*

$$C=\psi(x, y) \qquad (1.4')$$

қийматини бир қийматли аниқласа ва бу қийматни ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\varphi_x'(x, C) \qquad (1.4'')$$

тенгликка қўйиш натижасида (1.1) *тенглама ҳосил бўлса, у ҳолда* (1.4) *функция* (1.1) *тенгламанинг D_2^* тўпламда аниқланган умумий ечими дейилади.*

(1.4) функция ихтиёрий ўзгармас C га боғлиқ ва демак, (1.4) га чизиқлар оиласининг тенгламаси деб қараш мумкин. Баъзида C ни параметр деб ҳам юритилади.

1.3-таъриф. (1.1) *тенглама ва* (1.4) *чизиқлар оиласи берилган бўлсин. Агар: 1) $\varphi(x, C)$ функция I интервалда x бўйича узлуксиз ҳосилага эга бўлса; 2) ҳар бир $(x, y)\in D_2^*$ нуқта учун* (1.4) *муносабат C нинг* (1.4′) *қийматини бир қийматли аниқласа; 3) $y=\varphi(x, \psi(x, y))$ функция* (1.1) *тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда* (1.4) *функция* (1.1) *тенгламанинг умумий ечими дейилади.*

Дифференциал тенгламалар назариясида (1.1) тенгламанинг барча ечимларини топиш асосий масала ҳисобланади. Барча ечимларни топиш жараёни дифференциал тенгламани интеграллаш (ечиш) дейилади. Агар (1.1) тенгламанинг ечимини элементар функциялар ва уларнинг интеграллари ёрдамида ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда дифференциал тенглама *квадратураларда интегралланади* дейилади.

Агар

$$\Phi(x, y, C)=0 \qquad (1.4''')$$

муносабат D_2^* тўпламда $y=\varphi(x, C)$ умумий ечимни аниқласа, у ҳолда (1.4‴) ни (1.1) дифференциал тенгламанинг *умумий интеграли* дейилади. Шундай қилиб, биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y=\varphi(x, C)$ битта ихтиёрий ўзгармас сонни ўз ичига олади. Бир параметрли силлиқ чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламаси биринчи тартибли дифференциал тенгламадан иборат.

Ҳақиқатан, (1.4) силлиқ чизиқлар оиласи берилган, яъни $\varphi(x, C)$ функциянинг аниқланиш соҳасида узлуксиз $\varphi'_x(x, C)$ ва $\varphi'_C(x, C)$ ҳосилалар мавжуд бўлсин. (1.4) ни x бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y'=\varphi_x'(x, C). \qquad (1.4'')$$

Агар (1.4″) нинг ўнг томони C га боғлиқ бўлмаса, биз C ни чиқариб ташладик деб ҳисоблаб,

$$y' = \varphi'_x(x)$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Агар (1.4″) нинг ўнг томони C га боғлиқ бўлса, (1.4) нинг ўнг томони ҳам C га боглиқ бўлади, яъни $\varphi'_C(x, C) \neq 0$. Шунинг учун (x_0, C_0) нуқтанинг бирор атрофида C ни x ва y нинг функцияси $C = \psi(x, y)$ сифатида аниқлашимиз мумкин. Равшанки, x ва C лар бўйича $\psi(x, \varphi(x, C)) \equiv C$ айният ўринли. C учун топилган қийматни (1.4″) га қўйиб,

$$y' = \varphi'_x(x, \psi(x, y))$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламага эга бўламиз. (1.4) функция ихтиёрий C учун шу дифференциал тенгламанинг ечими эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Юқоридаги мулоҳазалар берилган силлиқ чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламасини топиш йўлини ҳам кўрсатади.

Масалан, $y = Ce^x$ чизиқлар оиласи берилган бўлсин. У ҳолда $y' = Ce^x = y$. Изланган дифференциал тенглама $y' = y$ бўлади. Равшанки, бу тенгламанинг умумий ечими: $y = Ce^x$.

(1.1) дифференциал тенгламанинг (1.4) муносабат ўз ичига олмаган ечимлари ҳам бўлиши мумкин. Биз уларга кейинроқ тўхталамиз.

Агар умумий ечим маълум бўлмаса, Коши масаласини ечиш қийинлашади. Бунда дифференциал тенглама тақрибий интеграллаш усуллари ёрдамида ечилади. Биз бу усулларга тўхталмаймиз. 2-бобда ε- тақрибий ечимни қуриш билан танишамиз холос.

Мисоллар. 1. $y = \sin(x + C)$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < C < +\infty$ чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламаси топилсин.

$$\begin{cases} y' = \cos(x + C), \\ y = \sin(x + C) \end{cases}$$

муносабатлардан $y'^2 + y^2 = 1$, $-\infty < x < +\infty$ дифференциал тенглама келиб чиқади.

2. $y' = y\,\mathrm{ctg}\,x$, $0 < x < \pi$, $-\infty < y < +\infty$ дифференциал тенгламанинг $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ шартни қаноатлантирадиган ечими топилсин.

Берилган тенгламанинг умумий ечими $y = C\sin x$ бўлиб, ундан шартга кўра $2 = C\sin\frac{\pi}{6}$ ёки $C = 4$ бўлади. Демак, $\varphi(x) = 4\sin x$ функция изланган ечимдир.

1.2- §. МАВЖУДЛИК ВА ЯГОНАЛИК ТЕОРЕМАЛАРИ

«Ҳар бир (1.1) кўринишдаги дифференциал тенглама учун Коши масаласи ((1.1), (1.3)) нинг ечими борми? Агар бундай ечим бор бўлса, ягонами?» — деган саволларга жавоб бериш керак бўлади.

Юқоридаги саволларга жавоб берадиган теоремалар мавжудлик ва ягоналик теоремалари деб юритилади. Қуйида улардан асосийларини келтирамиз.

1.1-теорема (Коши теоремаси). *Агар $f(x, y)$ функция Γ соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг y бўйича хусусий ҳосиласи*

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *бирор* $Q(Q\subset\Gamma)$ *соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда:*

1°. (1.1) *тенгламанинг* x_0 *ни ўз ичига оладиган бирор интервалда аниқланган ва ҳар бир берилган* $(x_0,\ y_0)\in Q$ *нуқта учун* $y(x_0)=y_0$ *бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуд.*

2°. *Агар* (1.1) *тенгламанинг иккита* $y=\varphi(x)$ *ва* $y=\psi(x)$ *ечимлари* x_0 *да устма-уст тушса, яъни* $\varphi(x_0)=\psi(x_0)=y_0$ *бўлса, у ҳолда бу* $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$ *ечимлар аниқланиш соҳаларининг умумий қисмида устма-уст тушади.*

1.4-таъриф. *Агар* $f(x,\ y)$ *функция* Γ *соҳада аниқланган бўлиб, шу функция учун шундай* $L\geqslant 0$ *сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрий* $(x,\ y_1)\in\Gamma$, $(x,\ y_2)\in\Gamma$ *нуқталар учун ушбу*

$$|f(x,\ y_1)-f(x,\ y_2)|\leqslant L|y_2-y_1| \qquad (L)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x,\ y)$ *функция* Γ *соҳада* y *бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради дейилади,* L *эса Липшиц ўзгармаси дейилади.*

1.2-теорема (Коши-Пикар-Линделеф теоремаси). *Агар* $f(x,\ y)$ *функция* Γ *соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб,* Γ *соҳада* y *бўйича Липшиц шартини қаноатлантирса, у ҳолда ҳар бир* $(x_0,\ y_0)\in\Gamma$ *учун шундай ўзгармас* $h>0$ *сон топиладики, натижада* (1.1) *тенгламанинг* (1.3) *бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва* $I=\{x:|x-x_0|\leqslant h\}$ *оралиқда аниқланган ягона ечими мавжуд бўлади.*

1.3-теорема (Пеано теоремаси). *Агар* $f(x,\ y)$ *функция* Γ *соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда* Γ *соҳанинг берилган* $(x_0,y_0)\in\Gamma$ *нуқтаси учун* (1.1) *тенгламанинг* (1.3) *шартни қаноатлантирадиган камида битта ечими мавжуд бўлади.*

Юқоридаги теоремаларнинг қўлланилишига доир мисол кўрайлик. Ушбу

$$\begin{cases} y'=y^{\frac{2}{3}}, \\ y(-2)=1 \end{cases}$$

Коши масаласида $\Gamma=\mathbf{R}^2$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$ га кўра $Q=\mathbf{R}^2\backslash\{(x,\ y)$: $y=0,\ x\in R^1\}$, $Q\subset R^2$ экани келиб чиқади. Равшанки, $\Gamma=Q\bigcup\{x,\ y)$: $y=0,\ x\in R^1\}$ ва $(<2,1)\in Q\cdot y'=y^{\frac{2}{3}}$ тенгламанинг умумий ечими $y=\left(\frac{x+C}{3}\right)^3$ — кўбик параболалардан иборат. Бундан $x=-2$; $y=1$ бўлганда $C=5$ келиб чиқади. Демак, Коши масаласининг ечими $y=\left(\frac{x+5}{3}\right)^3$ бўлиб, бу ечим Q да ягонадир. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун, масалан, Коши теоремасининг шартлари берилган дифференциал тенглама учун бажарилишини текшириб чиқиш кифоя.

Ушбу

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}}, \\ y(-2) = 0 \end{cases}$$

Коши масаласини кўрсак, унда $\Gamma = \mathbf{R}^2$ ва $(-2{,}0) \in \Gamma$. Аммо $(-2{,}0)$ нуқтада $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \ \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$ функция узлуксиз эмас. Демак, Коши теоремасининг шарти бажарилмайди. Шунинг учун ягоналикни тасдиқлаб бўлмайди. Аслида $(-2,\ 0)$ нуқтадан ўтадиган интеграл чизиқлар сони саноқсиз (континуум) тўпламни ташкил этади. Ҳақиқатан, $(-2,\ 0)$ нуқтадан $y = \left(\frac{x+2}{3}\right)^3$ кубик парабола ўтади ва у интеграл чизиқдан иборат. Шу $(-2,\ 0)$ нуқтадан $y = 0$ интеграл чизиқ ҳам ўтади. Шунинг учун, масалан, ушбу

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+2}{3}\right)^3, & \text{агар } x \leqslant -2 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } -2 \leqslant x \leqslant -k,\ -k > -2 \text{ бўлса,} \\ \left(\frac{x+k}{3}\right)^3, & \text{агар } x \geqslant -k \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция берилган тенгламанинг $\mathbf{R}^2$ да аниқланган ечими бўлади. Бундан k нинг ҳар бир қийматида унга мос ечим ҳосил қилиш мумкин. k нинг $-k > -2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлари саноқсиз тўпламни ташкил этгани учун юқоридаги тасдиқнинг тўғрилиги келиб чиқади.

Қурилган масалада $f(x,\ y) = y^{\frac{2}{3}}$ функция $\mathbf{R}^2$ да узлуксиз. Пеано теоремаси бўйича $\mathbf{R}^2$ нинг ихтиёрий тайинланган нуқтасидан берилган дифференциал тенгламанинг камида битта интеграл чизиғи ўтиши керак. Юқоридаги мулоҳазаларга кўра $\mathbf{R}^2$ нинг ихтиёрий тайинланган нуқтасидан саноқсиз интеграл чизиқлар ўтади, аммо Q тўпламда қаралган $y' = y^{\frac{2}{3}}$ дифференциал тенгламанинг бу тўпламнинг ҳар бир тайинланган нуқтасидан ягона интеграл чизиғи ўтади.

Ушбу

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \Gamma = \{(x,\ y): -1 < x < 1,\ -\infty < y < +\infty\}$$

дифференциал тенглама учун $y(-2) = 0$ шартни қаноатлантирувчи ечим мавжуд эмас, чунки $(-2,\ 0) \in \Gamma$.

Мавжудлик ва ягоналик теоремаларида $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ ечимлар ўзлари аниқланган интервалларнинг умумий қисмида бир хил бўлиши ҳақида гап боради. Жумладан, агар $y = \varphi(x)$ функция $I_r = \{x: r_1 < x < r_2\}$ да, $y = \psi(x)$ функция $I_s = \{x:\ s_1 < x < s_2\}$ да аниқланган ва $x_0 \in I_r \cap I_s$ учун $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ бўлса у ҳолда

$$\varphi(x) \equiv \psi(x),\ x \in I_r \cap I_s.$$

Лекин бу тасдиқдан зинҳор $I_r = I_s$ экани келиб чиқмайди. Агар $I_r \supset I_s$ бўлса, I_r да аниқланган $y=\varphi(x)$ ечим $y=\psi(x)$ ечимнинг *давоми* дейилади. Бизни, албатта, давом эттириш мумкин бўлмаган ечимлар қизиқтиради. Бундай ечимларни *давомсиз ечимлар* деб юритамиз.

Аниқроғи, *агар* $y=\varphi(x)$ *функция* (1.1) *тенгламанинг* I_r *интервалда аниқланган ечими бўлиб, шу ечимнинг давомидан иборат бўлган ҳеч қандай ечим мавжуд бўлмаса, у ҳолда* $y=\varphi(x)$ *ечим давомсиз ечим дейилади.*

Давомсиз ечимларнинг аниқланиш интервали I шу ечимлар *аниқланишининг максимал интервали* дейилади. Кейинроқ (1.12- § га қаранг) ҳар бир ечим давомсиз ечимгача давом эттирилиши мумкинлиги исботланади.

Бундан кейинги мулоҳазаларда интеграл чизиқ сифатида давомсиз ечимнинг графиги тушунилади.

Қайд қиламизки, $y=\varphi(x)$ ечимнинг геометрик маъноси сифатида $\varphi(x)$ функциянинг графиги тушунилган эди. Энди (1.1) тенгламанинг геометрик маъносига тўхталамиз: Г соҳанинг ҳар бир (x, y) нуқтасидан $f(x, y)$ бурчак коэффициентли $l(x, y)$ тўғри чизиқни ўтказамиз. Сўнгра ҳар бир (x, y) нуқтада тегишли $l(x, y)$ тўғри чизиқ бўйлаб йўналган, Ox ўқ билан $\operatorname{arctg} y'$ бурчак ташкил этадиган стрелкаларни қўйиб чиқамиз. Натижада (1.1) тенгламага мос *йўналишлар майдони ҳосил бўлади.*

Ҳар бир $y=\varphi(x)$ интеграл чизиқ ўзининг ҳар бир $(x, \varphi(x))$ нуқтасида $l(x, \varphi(x))$ тўғри чизиққа уринади. Бу эса (1.1) дифференциал тенглама билан унинг ечими орасидаги боғланишни беради.

1.3- §. ИЗОКЛИНАЛАР

(1.1) дифференциал тенгламани кўрайлик. Ҳар бир $(x, y) \in \Gamma$ нуқта учун $f(x, y)$ миқдор (x, y) нуқтадан ўтадиган интеграл чизиққа (агар у мавжуд бўлса) ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини ифодалайди. Бундан интеграл чизиқларни тахминан чизишда фойдаланиш мумкин. Шу мақсадда изоклина тушунчасини киритамиз.

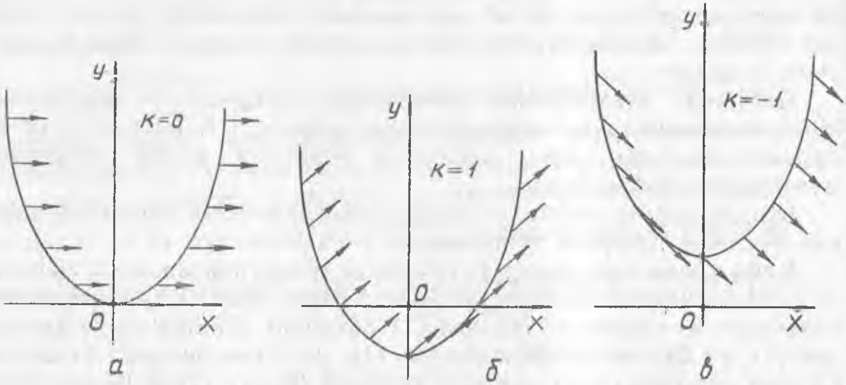
1.5-таъриф. *Изоклина деб текисликдаги шундай нуқталарнинг геометрик ўрнига айтиладики, у нуқталарда берилган* (1.1) *дифференциал тенглама интеграл чизиқларига ўтказилган уринмалар Ox ўқининг мусбат йўналиши билан бир хил бурчак ташкил этади.*

Таърифга кўра, изоклина тенгламаси

$$f(x, y) = k, \ k = \text{const}$$

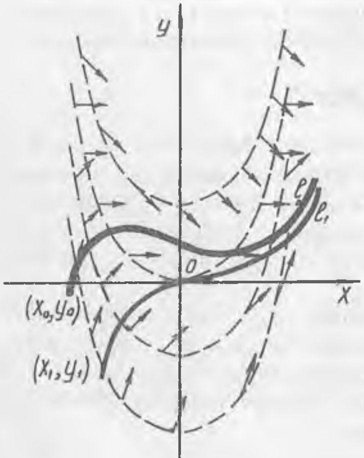
кўринишда бўлади. Аввал шу таърифга доир мисол кўрамиз.

Ушбу $y' = x^2 - y$ дифференциал тенглама берилган бўлсин. Бунда $\Gamma = \mathbf{R}^2$ бўлиб, ихтиёрий $(x, y) \in \Gamma$ учун $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -1$. Коши теоремасига кўра $\mathbf{R}^2$ текисликнинг ихтиёрий (x, y) нуқтаси орқали берилган дифференциал тенгламанинг ягона интеграл чизиғи ўтиши келиб чиқади. Демак, интеграл чизиқларни чизиш ҳақида мулоҳаза юритиш маънога эга. Изоклина тенгламаси $x^2 - y = k$, $k = \text{const}$. Бу $\mathbf{R}^2$ текисликда ботиқлиги юқорига қараган параболалар оиласидан иборат. k нинг ҳар бир қийматида тегишли изоклинага эгамиз. Жумладан, $k=0$ да $y=x^2$, $k=1$ да $y=x^2-1$, $y=-1$ да $y=x^2+1$ ва бошқалар. Равшанки, $y=x^2$ параболани интеграл чизиқлар кесади ва кесишиш нуқталарида интеграл чизиқлар горизонтал уринмаларга



7- чизма

эга бўлади (7,а-чизма). Шунга ўхшаш, $y=x^2-1$ параболани кесадиган интеграл чизиқларнинг ҳар бир нуқтасида уринманинг бурчак коэффициенти 1 га, $y=x^2+1$ учун эса тегишли бурчак коэффициент — 1 га тенг (7, б, в-чизма). Ҳар бир изоклина кесиб ўтишдаги йўналишларни стрелкалар билан кўрсатамиз. Натижада текисликда йўналишлар майдони ҳосил бўлади. Текисликда ихтиёрий (x, y) нуқтани олайлик. Бу нуқтадан ўтадиган шундай эгри чизиқ чизамизки, бу чизиқ ўзининг ҳар бир нуқтасида тегишли майдон йўналишига эга бўлсин. Бу чизиқ (x, y) нуқтадан ўтадиган интеграл чизиқни тахминан тасвирлайди (8-чизма).



8- чизма

Машқ. Ушбу дифференциал тенгламаларнинг интеграл чизиқларини изоклиналар ёрдамида тахминан чизинг:

1. $y'=a$, $a=\text{const}$;
2. $y'=2x-1$;
3. $y'=\frac{y}{x}$;
4. $y'=\frac{x}{y}$.

1.4-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ СОДДА ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Биз бу параграфда содда дифференциал тенгламаларнинг икки турини интеграллаш билан шуғулланамиз.

1. $\frac{dy}{dx}=f(x)$ **кўринишдаги тенгламани интеграллаш.** $f(x)$ функция бирор I интервалда узлуксиз бўлсин. Бу ҳолда умумий ечим

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi+C,\ x\in I,\ x_0\in I,\ (C\ \text{— ихтиёрий ўзгармас})$$

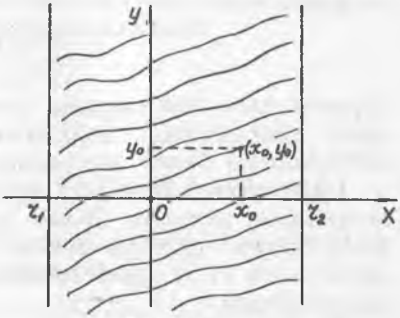
кўринишда ёзилади. Ундан $y'=f(x)$. C нинг $C=0$ қиймати тенгламанинг $y(x_0)=0$ шартни, $C=y_0$ қиймати эса $y(x_0)=y_0$ шартни қаноатлантирувчи ечимига мос келади.

Берилган дифференциал тенглама учун

$\Gamma=\{(x,\ y):x\in I,\ -\infty<y<+\infty\}$

(9-чизмага қаранг), унда $I=\{x:r_1<x<r_2\}$.

Энди Г соҳанинг ихтиёрий $(x_0,$ $y_0)$ нуқтасини олайлик. Унга $C=y_0$ тўғри келади. Бундан Г соҳанинг ихтиёрий нуқтасидан берилган дифференциал тенгламанинг фақат битта интеграл чизиғи ўтиши келиб чиқади.



9- чизма

Машқ. Ушбу.

1. $\frac{dy}{dx}=3x^2,\ x\in\mathbf{R}$; 2. $\frac{dy}{dx}=\cos x,\ x\in\mathbf{R}$; 3. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbf{R}$

дифференциал тенгламаларни интегралланг ва интеграл чизиқларини чизинг.

2. $\frac{dy}{dx}=g(y)$ **кўринишдаги тенгламани интеграллаш.** Бу тенгламада $g(y)$ функция I_y интервалда узлуксиз ва нолга айланмайди дейлик. Агар берилган тенглама ўрнига

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{g(y)}$$

тенгламани кўрсак, бу ҳолда $F(y)=\frac{1}{g(y)}$ функция ҳам I_y интервалда узлуксиз бўлади. Шундай экан, охирги тенглама учун аввалги пунктдаги мулоҳазаларни юритиш мумкин. Бошқача айтганда, тегишли тенгламанинг умумий ечими

$$x(y)=\int_{y_0}^{y}\frac{1}{g(\xi)}d\xi+C,\ y\in I_y,\ y_0\in I_y\ (C\text{ — ихтиёрий ўзгармас})$$

кўринишда ёзилади.

Эслатма. Юқорида кўрилган содда дифференциал тенгламаларда $f(x)$ ва $g(y)$ функциялар тегишли интервалда узлуксиз ҳамда $g(y)$ нолга айланмайди деб қаралади. Агар $f(x)$ функция I_x интервалда битта ёки бир нечта нуқтада 1-тур ёки 2-тур узилишга эга бўлса, бу ҳолда берилган дифференциал тенглама учун ечим ва умумий ечим тушунчасини киритиб, «интеграл чизиқлар» устида гапириш мумкин эди. Шунга ўхшаш, $g(y)$ функция I_y интервалда узлуксиз ва битта ёки бир нечта нуқталарда нолга айланган ҳолда ҳам ечим тушунчаси ва «интеграл чизиқлар» ҳақида фикр юритиш мумкин эди. Биз бунга тўхталмаймиз.

1.5-§. ЎЗГАРУВЧИЛАРИ АЖРАЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)\tag{1.5}$$

кўринишдаги тенгламалар *ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар* дейилади. (1.5) дифференциал тенгламани интеграллаш билан шуғулланамиз.

1.4-теорема. *Агар $f(x)$ функция I_x интервалда, $g(y)$ функция I_y интервалда узлуксиз бўлиб, $g(y)\neq 0$, $y\in I_y$ бўлса, $Q=\{(x,\ y):x\in I_x,\ y\in I_y\}$ тўғри тўртбурчакнинг ихтиёрий берилган ички $(x_0,\ y_0)$ нуқтасидан* (1.5) *дифференциал тенгламанинг фақат битта интеграл чизиғи ўтади.*

Исбот. Теоремани исботлаш учун (1.5) дифференциал тенгламанинг $(x_0,\ y_0)\in Q$ нуқтадан ўтадиган интеграл чизиғи борлигини ва унинг ягоналигини кўрсатиш кифоя. (1.5) тенгламанинг $\varphi(x_0)=y_0$ шартни қаноатлантирадиган $y=\varphi(x)$ ечими бор деб фараз этамиз. У ҳолда

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x)g(\varphi(x)),\qquad (x,\varphi(x))\in Q.$$

Бундан

$$\frac{d\varphi(x)}{g(\varphi(x))}=f(x)dx,\ \ (x,\varphi(x))\in Q,$$

чунки $g(y)\neq 0$, $y\in I_y$. Охирги тengликнинг икки томонини x_0 дан x гача интеграллаймиз:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi'(\xi)d\xi}{g(\varphi(\xi))}=\int_{x_0}^{x}f(\xi)\,d\xi$$

ёки

$$\int_{\varphi(x_0)=y_0}^{\varphi(x)}\frac{d\varphi(\xi)}{g(\varphi(\xi))}=\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi.$$

Агар $\Phi(y)$ функция $\frac{1}{g(y)}$ учун, $F(x)$ функция эса $f(x)$ учун бирор бошланғич функция бўлса, у ҳолда тенглик бундай ёзилади:

$$\Phi(\varphi(x)) - \Phi(y_0) = F(x) - F(x_0). \tag{1.6}$$

$g(y) \neq 0$, $y \in I_y$ га кўра $\Phi(y)$ функция I_y интервалда монотон функциядир, чунки $\Phi'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$. Шунинг учун (1.6) тенгликни $\varphi(x)$ га нисбатан бир қийматли ечиш мумкин:

$$\varphi(x) = \Phi^{-1}[\Phi(y_0) + F(x) - F(x_0)], \tag{1.7}$$

бунда Φ^{-1} функция Φ га тескари функциядир. Демак, тегишли ечим бор деб фараз этилса, у ечимнинг ягоналиги ва (1.7) формула билан ёзилиши исбот этилади.

Энди (1.5) дифференциал тенгламанинг $\varphi(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирадиган $y = \varphi(x)$ ечими борлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан, (1.7) формула билан ифодаланган $\varphi(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида (1.5) дифференциал тенгламанинг ечими бўлади. Бунинг учун (1.6) ни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d\Phi(\varphi(x))}{d\varphi(x)} \varphi'(x) = F'(x),$$

бундан

$$\frac{1}{g(\varphi(x))} \varphi'(x) = f(x) \quad \text{ёки} \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x) g(\varphi(x)).$$

Равшанки, $\varphi(x_0) = \Phi^{-1}[\Phi(y_0)] = y_0$. Шундай қилиб, (1.7) функция изланган ечимдир. 1.1-теорема тўла исбот бўлди.

Эслатма. Юқоридаги мулоҳазалар (1.5) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ёзишга имкон беради. Агар 1.1-теореманинг шартлари бажарилса, у ҳолда (1.5) нинг ҳамма ечимлари ушбу

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + C, \tag{1.8}$$

формула (C — ихтиёрий ўзгармас) ёрдамида ифодаланади. Ҳақиқатан $\varphi(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирган $y = \varphi(x)$ ечим учун (1.8) дан $C = 0$ келиб чиқади. Шунга ўхшаш ҳар бир ихтиёрий олинган $(x_1, y_1) \in Q$, $(x_1, y_1) \neq (x_0, y_0)$ нуқтага C нинг фақат битта қиймати мос келади.

Мисол. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \ Q = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, \ -\infty < y < +\infty\}$$

дифференциал тенглама интеграллансин.

Бу (1.5) кўринишдаги дифференциал тенгламадан иборат. (1.8) формулага кўра

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{1+\xi^2} + C$$

ёки

$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_0 = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x_0 + C.$$

Бундан

$$y=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y_0-\operatorname{arctg}x_0+C).$$

Ихтиёрий $(x, y)\in Q$ нуқтадан ўтувчи интеграл чизиқ учун

$$y=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+C)$$

деб ёзиш мумкин.

Машқ. Ушбу дифференциал тенгламалар интеграллансин:

1. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+1}{y-1}$, $y>1$;
2. $\frac{dy}{dx}=(1+x^2)\sqrt{1-y^2}$, $|y|<1$;
3. $\frac{dy}{dx}=e^y\sin x$, $(x, y)\in\mathbf{R}^2$;
4. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-y^2}}{y}x\cos x$, $y>0$;
5. $\frac{dy}{dx}=y^2\cos x$, $y>0$.

1.6-§. БИР ЖИНСЛИ ВА УНГА КЕЛТИРИЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Бир жинсли тенгламалар.

1.6-таъриф. *Ушбу*

$$\frac{dy}{dx}=h\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.9}$$

кўринишда ёзиладиган тенглама бир жинсли дифференциал тенглама дейилади.

(1.9) тенгламада $h\left(\frac{y}{x}\right)$ функция фақат $\frac{y}{x}$ нисбатнинг функцияси бўлиб, у нолинчи тартибли бир жинсли функциядир*).

$h(u)$ функция $a<u<b$ интервалда аниқланган дейлик. ($a\leqslant u<b$, $a<u\leqslant b$, $a\leqslant u\leqslant b$ интерваллар учун ҳам мулоҳазалар шунга ўхшаш бўлади.) $x>0$ бўлганда $h\left(\frac{y}{x}\right)$ функция $ax<y<bx$ тенгсизликлар билан аниқланган соҳада, $x<0$ бўлганда эса $bx<y<ax$ тенгсизликлар билан аниқланган соҳада берилган бўлади. Икки ҳолда ҳам бу соҳани Г деймиз.

1.5-теорема. *Агар $h(u)$ функция $a<u<b$ интервалда узлуксиз бўлиб, шу интервалнинг барча нуқталарида $h(u)\neq u$* бўлса, ҳар бир $(x_0, y_0)\in\Gamma$ *нуқтадан* (1.9) *дифференциал тенгламанинг фақат битта интеграл чизиғи ўтади.*

Исбот. $y=ux$ десак, (1.9) тенглама

$$xu'+u=h(u)$$

кўринишда ёзилади. Ундан ушбу

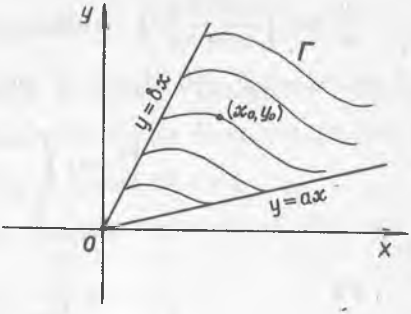
$$\frac{du}{dx}=\frac{h(u)-u}{x}$$

ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келамиз.

---

*) Агар ушбу $M(k\xi, k\eta)=k^mM(\xi, \eta)$, $m\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{R}$ муносабат барча (ξ,η) лар учун ўринли булса, $M(\xi, \eta)$ функция *m-тартибли бир жинсли функция дейилади.* $m=0$ бўлганда $M(\xi,\eta)=M\left(1,\frac{\eta}{\xi}\right)=M^*\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$ деб ёзиш мумкин. Бир жинсли функциялар таърифини Л. Эйлер киритган.

5-§ даги белгилашларга кўра $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(u)=h(u)-u$ ва $g(u)\neq 0$, $a<u<b$. Демак, Г соҳанинг ихтиёрий берилган (x_0, y_0) нуқтасидан битта интеграл чизиқ ўтади (10-чизма). Умумий ечим эса (1.8) формулага кўра топилади. Ноаниқ интеграл кўринишидаги ушбу



10- чизма

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{h(u)-u}$$

муносабатдан умумий ечим формуласи

$$\ln|x|=\Phi(u)+C \text{ ёки } \ln|x|=\Phi\left(\frac{y}{x}\right)+C$$

келиб чиқади. Бу ерда $\Phi(u)$ функция $\frac{1}{h(u)-u}$ функциянинг бирор бошланғичи. Агар $h\left(\frac{y}{x}\right)\equiv\frac{y}{x}$ бўлса, $h(u)\equiv u$ ва $g(u)\equiv 0$ бўлади. Агар $h(u)=u$, $u=u_1, \ldots, u_n$ бўлса, $\int\limits_{u_0}^{u}\frac{d\xi}{h(\xi)-\xi}$ интегралнинг $u\to u_s (s=1, 2, \ldots, n)$ да яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишига қараб $u=u_s$ (яъни $y=u_s x$, $s=1, 2, \ldots, n$) чизиқларнинг ҳар бир нуқтасидан чексиз кўп ёки битта интеграл чизиқ ўтади (11, а, б-чизма). Бунда ҳар бир $y=u_s x (s=1, 2, \ldots, n)$ чизиқ (1.9) дифференциал тенгламанинг интеграл чизиғи эканини ҳисобга олиш лозим.

Машк. Дифференциал тенгламаларни интегралланг ва интеграл чизикларини чизинг.

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$;
2. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$;
3. $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$;
4. $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$;
5. $\frac{dy}{dx}=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$;
6. $\frac{dy}{dx}=\cos^2\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$;

2. Бир жинсли тенгламага келтириладиган тенгламалар.

А. Ушбу

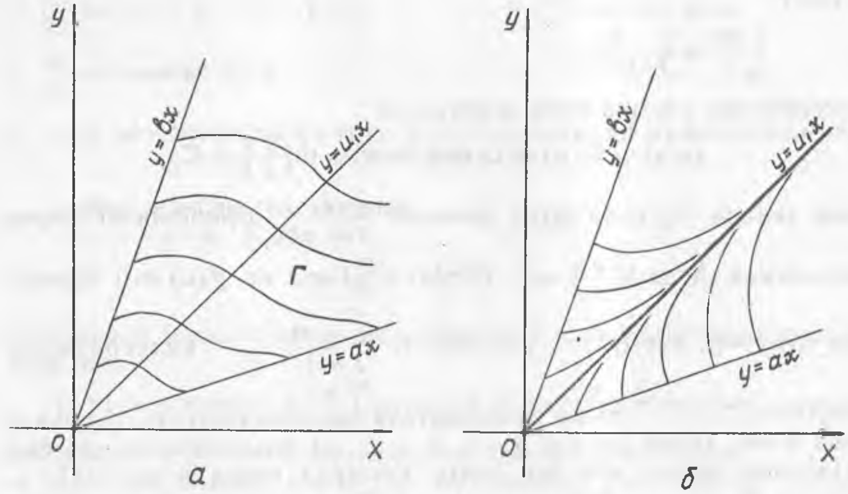
$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{1.10}$$

дифференциал тенгламада $f(u)$ функция бирор $a<u<b$ интервалда узлуксиз бўлсин. У ҳолда (1.10) тенгламани ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келтириш мумкин бўлган ҳолларни ўрганамиз.

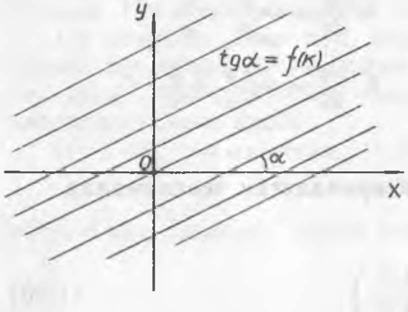
I. $c_1=c_2=0$ бўлган ҳол.

$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)$ дифференциал тенгламага эгамиз. Ага $\Delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ бўлса, бу тенглама (1.9) кўринишга келади, чунк

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=f^*\left(\frac{y}{x}\right).$$



11- чизма



12- чизма

Агар $\Delta=0$ бўлса $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$ ёк $a_1=a_2k$, $b_1=b_2k$ деймиз. Бунд $\frac{dy}{dx}=f(k)$ га келамиз. Бу дифференциал тенгламанинг умуми ечими $y=f(k)x+C$ бўлиб, бурча коэффициенти $f(k)$ га тенг бўлга тўғри чизиқлар оиласидан ибора (12-чизма).

II. $c_1^2+c_2^2\neq 0$, яъни c_1 ва c лардан камида биттаси нолда фарқли бўлган ҳол.

Агар $\Delta=0$ бўлса, у ҳолда $a_1=a_2k$, $b_1=b_2k$ га кўра:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{k(a_2x+b_2y)+C_1}{a_2x+b_2y+C_2}\right).$$

Ушбу

$$z=a_2x+b_2y \tag{1.11}$$

алмаштиришни бажарамиз, унда z — янги номаълум функция. (1.11) дан $\frac{dz}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}$, кўрилаётган ҳолда $b_2=0$ шарт 1.4- § да кўрилган ҳолга олиб келади. Энди $b_2\neq 0$ бўлсин.

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_2}\frac{dz}{dx}-\frac{a_2}{b_2}$ ни охирги дифференциал тенгламага қўйсак,

$$\frac{1}{b_2}\frac{dz}{dx}-\frac{a_2}{b_2}=f\left(\frac{kz+c_1}{z+c_2}\right)$$

ёки

$$\frac{dz}{dx}=a_2+b_2f\left(\frac{kz+c_1}{z+c_2}\right)$$

дифференциал тенгламага келамиз.

$\Delta\neq 0$ бўлсин. Ушбу

$$\begin{cases} x=\xi+x_0, \\ y=\eta+y_0 \end{cases} \tag{1.12}$$

алмаштиришни бажарамиз.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi},$$

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta+a_1x_0+b_1y_0+c_1}{a_2\xi+b_2\eta+a_2x_0+b_2y_0+c_2}\right). \tag{1.13}$$

(1.12) алмаштиришда x_0 ва y_0 сифатида

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

системанинг ечимини оламиз. Бу система ягона ечимга эга, чунки $\Delta\neq 0$. Шундай қилиб, (1.13) бундай кўринишга келади:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right).$$

Бу тенглама $\Delta\neq 0$ бўлган ҳол учун мазкур параграфнинг I қисмида кўрилган.

Хулоса қилиб айтганда, (1.10) кўринишдаги дифференциал тенглама Δ нинг қийматига қараб, масалан, $\Delta=0$ бўлганда ё (1.11), ёки (1.12) алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага олиб келинади.

Б. Битта сунъий усулга тўхталамиз. (1.1) дифференциал тенгламада

$$y=z^m \tag{1.14}$$

алмаштириш бажарамиз, бу ерда z — янги номаълум функция, m — бирор ҳақиқий сон:

$$\frac{dy}{dx}=mz^{m-1}\frac{dz}{dx}, \qquad (mz^{m-1})\frac{dz}{dx}=f(x,z^m),$$

бундан

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{m}z^{1-m}f(x,z^m)=g(x,z). \tag{1.15}$$

Агар m нинг бирор қийматида $g(x, z)$ функция бир жинсли бўлса, у ҳолда (1.14) алмаштириш маънога эга бўлади.

Мисол.

$$\frac{2}{3}xyy'=\sqrt{x^6-y^4}+y^2,\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ |x^3|\geqslant y^2$$

дифференциал тенглама интеграллансин. Бу тенгламани интеграллаш учун аввал (1.14) алмаштиришни бажарамиз. Содда ҳисоблашлар

$$\frac{2}{3}x\cdot z^m mz^{m-1}\frac{dz}{dx}=\sqrt{x^6-z^{4m}}+z^{2m}$$

ёки

$$\frac{dz}{dx}=\frac{3}{2m}\,\frac{3\sqrt{x^6-z^{4m}}+z^{2m}}{x\cdot z^{2m-1}}$$

бўлишини кўрсатади. Бу дифференциал тенглама бир жинсли бўлиши учун $m=\frac{3}{2}$ бўлиши равшан. Шундай қилиб, $y=z^{\frac{3}{2}}$. Бундан $y=\sqrt{z^3}=z\sqrt{z}$, $y^2=|z^3|$. Берилган дифференциал тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\sqrt{x^6-z^6}+z^3}{xz^2}.$$

$z=ux$ алмаштириш натижасида

$$\frac{u^2du}{\sqrt{1-u^6}}=\frac{dx}{x}$$

дифференциал тенгламага келамиз. Уни интеграллаб, аввал $u=\frac{z}{x}$ дан, сўнгра $z=y^{\frac{2}{3}}$ дан фойдалансак, дифференциал тенгламанинг умумий ечимини

$$\arcsin\frac{y^2}{|x^3|}=\ln Cx^3$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлади (ҳисоблашларни тўла бажариш китобхонга топширилади).

1.7-§. ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1.7-таъриф. *Ушбу*

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x) \tag{1.16}$$

кўринишдаги тенглама биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама дейилади.

(1.16) тенгламада $a(x)$ ва $b(x)$ функциялар бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Демак, Γ соҳа текисликда y ихтиёрий бўлганда x га қўйилган $x \in I$ шарт билан аниқланади, яъни $\Gamma = \{(x,y): x \in I, \ -\infty < y < +\infty\}$. Бу тўплам интервалнинг қандай бўлишига қараб тасма (кенглик), ярим текислик ва текисликдан иборат бўлиши мумкин.

1.6-теорема. Агар $a(x)$ *ва* $b(x)$ *функциялар* I *интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда* Γ *соҳанинг ихтиёрий олинган* $(x_0, \ y_0)$, $x_0 \in I$ *нуқтасидан* (1.16) *тенгламанинг* I *интервалда аниқланган битта интеграл чизиғи ўтади ва* y

$$y = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau\right) e^{A(x)}, \quad A(x) = \int_{x_0}^{x} a(\tau)\, d\tau \tag{1.17}$$

формула билан ифодаланади.

Исбот. Аввало $(x_0, \ y_0)$ нуқтадан ўтадиган интеграл чизиқнинг мавжудлигини текширайлик. Ҳақиқатан, (1.16) дифференциал тенгламада $f(x, \ y) = a(x)y + b(x)$ бўлиб, бу функция Γ соҳада аниқланган ва узлуксиз. Ундан ташқари $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = a(x)$ ҳосила I интервалда узлуксиз. Демак, Коши теоремасига кўра Γ соҳанинг ихтиёрий олинган $(x_0, \ y_0)$ нуқтасидан ўтадиган интеграл чизиқ мавжуд ва ягонадир. Энди ўша интеграл чизиқни ифодаловчи функцияни излаймиз. (1.17) функция изланган функция эканини исбот этамиз. Бу функция учун $y(x_0) = y_0$ экани равшан. Унинг ҳосиласини ҳисоблайлик:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-A(x)} b(x) e^{A(x)} + \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau\right) a(x) e^{A(x)} = b(x) + a(x) y$$

.

Шундай қилиб, (1.17) функция учун ечим ҳақидаги 1.4-таърифнинг шартлари ўринлидир. (1.17) формулада иштирок этган функциялар I интервалда аниқланганлигини қайд қиламиз. Демак, (1.17) функция I интервалда аниқланган ва давомсиз ечим бўлади. Бу чизиқли дифференциал тенгламаларнинг муҳим хоссасидир. Теорема исбот бўлди.

1.7-теорема. (1.16) *дифференциал тенгламанинг умумий ечими*

$$y = \left(C + \int_{x_0}^{x} e^{-A(\tau)} b(\tau)\, d\tau\right) e^{A(x)}, \quad (C \text{ — ихтиёрий ўзгармас}) \tag{1.17$'$}$$

формула билан ифодаланади.

Исбот. Равшанки, (1.17′) функция (1.16) тенгламанинг ечимидир. Энди (1.17′) формула ҳамма ечимларни ўз ичига олишини кўрсатамиз. $y = \varphi(x)$ функция (1.16) дифференциал тенгламанинг бирор I_x интервалда аниқланган ечими бўлиб, $\xi_0 = \varphi(\tau_0)$, $\tau_0 \in I_x$, бўлсин. Юқоридаги мулоҳазалардан (1.6-теоремага қаранг) $I_x \subset I$ экани келиб чиқади. (1.17) формуладан C ни танлаш усули билан шу $y = \varphi(x)$ ечимни ҳосил қилиш мумкинлигини исботлаймиз. Унинг учун

$$\left(C+\int_{x_0}^{\tau_0}e^{-A(\tau)}b(\tau)\,d\tau\right)e^{A(\tau_0)}=\xi_0$$

тенглама C га нисбатан битта ечимга эга бўлиши зарур. Кўриниб турибдики:

$$C=\xi_0e^{-A(\tau_0)}\int_{x_0}^{\tau_0}e^{-A(\tau)}b(\tau)\,d\tau.$$

Энди $y=\varphi(x)$ ечим учун

$$\varphi(x)=\left(\xi_0e^{-A(\tau_0)}\int_{x_0}^{\tau_0}e^{-A(\tau)}b(\tau)\,d\tau+\int_{x_0}^{x}e^{-A(\tau)}b(\tau)\,d\tau\right)e^{A(x)}$$

формулага эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

Юқорида исботланган (1.17) формулани иккинчи усул билан исботлайлик. Агар (1.16) дифференциал тенгламада $b(x)\equiv0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y$$

тенглама (1.16) га мос *бир жинсли дифференциал тенглама дейилади;* $b(x)\not\equiv0$ бўлганда (1.16) тенглама *биринчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама дейилади.* (1.18) тенгламанинг бир жинсли деб юритилиши (1.16) да $b(x)\equiv0$ бўлиши билан боғланган бўлиб, (1.9) бир жинсли дифференциал тенгламага алоқаси йўқ.

(1.18) дифференциал тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир (5- § га қаранг). Унинг умумий ечими.

$$y=Ce^{A(x)}\quad(C\text{ — ихтиёрий ўзгармас})\tag{1.19}$$

кўринишда ёзилади. Энди (1.16) тенгламанинг умумий ечимини

$$y=\psi(x)e^{A(x)}\tag{1.20}$$

кўринишда излаймиз. $\psi(x)$ бу ерда I интервалда аниқланган изланадиган функция. Тавсия этилган усулни *ўзгармасни вариациялаш усули* деб юритилади. Фаразга кўра, (1.20) функция (1.16) дифференциал тенгламани айниятга айлантириши лозим:

$$\psi'(x)e^{A(x)}+\psi(x)a(x)e^{A(x)}=a(x)\psi(x)e^{A(x)}+b(x)$$

ёки

$$\psi'(x)e^{A(x)}=b(x).$$

Бундан

$$\psi(x)=C+\int_{x_0}^{x}e^{-A(\tau)}b(\tau)\,d\tau\qquad(C\text{ — ихтиёрий ўзгармас}).$$

$\psi(x)$ функция учун топилган ифодани (1.20) га қўйсак (1.17′) формула келиб чиқади.

Мисол. 1. $y'+y\mathrm{tg}x=\sec x$, $\Gamma=\{(x, y): -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\ -\infty<y<+\infty\}$, дифференциал тенглама интеграллансин.

Бу тенгламада $a(x)=-\mathrm{tg}x$, $b(x)=\sec x$. Унинг умумий ечими (1.17′) га кўра

$$y=\left(C+\int e^{\int \mathrm{tg}x dx}\sec x dx\right)e^{-\int \mathrm{tg}x dx}=\left(C+\int\frac{dx}{\cos^2 x}\right)\cos x=C\cos x+\sin x.$$

Демак, $y=C\cos x+\sin x$.

2. Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-x\mathrm{tg}y+\sec y},\quad \Gamma=\{(x,y): -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},\ -\infty<x<+\infty\}$$

дифференциал тенглама интеграллансин. Бу тенгламада y — номаълум функция бўлиб, x эркли ўзгарувчидир. Кўриниб турибдики, берилган тенглама чизиқли эмас. Агар x ва y ларнинг ролларини алмаштирсак, 1-мисолдаги дифференциал тенгламага келамиз.

1.8- §. БЕРНУЛЛИ ВА РИККАТИ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1. Бернулли тенгламаси.

1.8-таъриф. *Ушбу*

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)y^{\alpha} \tag{1.21}$$

тенглама Бернулли тенгламаси дейилади. Бу тенгламада $a(x)$ ва $b(x)$ лар бирор I интервалда аниқланган функциялар, α — бирор ҳақиқий сон ($\alpha\in R$). Равшанки, агар $\alpha=0$ бўлса, (1.16) дифференциал тенгламага эга бўламиз, агар $\alpha=1$ бўлса.

$$\frac{dy}{dx}=\{a(x)+b(x)\}y$$

тенгламага келамиз. Бу эса ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Демак, Бернулли тенгламаси $\alpha=0$, $\alpha=1$ бўлганда бизга маълум дифференциал тенгламаларга айланади. Энди $\alpha\neq0$, $\alpha\neq1$ деб фараз этамиз.

1.8-теорема. *Агар $a(x)$, $b(x)$ функциялар I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\alpha>1$ бўлса, у ҳолда $\Gamma=\{(x,y): x\in I, -\infty<y<+\infty\}$ соҳанинг ихтиёрий олинган (x_0, y_0) нуқтасидан (1.21) тенгламанинг I интервалда аниқланган битта интеграл чизиғи ўтади.*

Исбот. (1.21) тенгламада $f(x, y)=a(x)y+b(x)y^{\alpha}$ ва $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=a(x)+\alpha b(x)y^{\alpha-1}$. $\alpha>1$ бўлгани учун бу функция Γ да узлуксиз. Демак, Коши теоремасига кўра, Γ соҳанинг ихтиёрий (x_0, y_0) нуқтасидан (1.21) дифференциал тенгламанинг битта интеграл чизиғи ўтади.

Агар $y_0=0$ бўлса, $\alpha>1$ бўлганда Бернулли тенгламасининг ечими $y=0$, $x\in I$ бўлади. Бу хусусий ечимдир. Аммо $\alpha<1$ бўлганда $\frac{\partial f}{\partial y}$ функция $y=0$ да узилишга эга ва $(x_0, 0)$ нуктада ечимнинг ягоналиги бузилиши мумкин. Агар $0<\alpha<1$ бўлса, $y=0$, $x\in I$ функция махсус ечим бўлади, яъни $y=0$ нинг ҳар бир нуктаси орқали камида битта (кўрилаётган ҳолда бирдан ортиқ) интеграл чизиқ ўтади. Буни кўрсатиш учун аввал (1.21) ни $n\neq 0$; 1 да квадратураларда интеграллаймиз. $y\neq 0$ дейлик. Дифференциал тенгламанинг барча ҳадларини y^{α} га бўлиб

$$y^{1-\alpha}=z \tag{1.22}$$

алмаштиришни бажарамиз:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx},$$

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}=a(x)y^{1-\alpha}+b(x),$$

$$\frac{dz}{dx}=(1-\alpha)a(x)z+(1-\alpha)b(x). \tag{1.23}$$

Бу (1.23) тенглама z га нисбатан биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама. Унинг умумий ечими

$$z=\left(C+\int e^{-\int(1-\alpha)a(x)dx}(1-\alpha)b(x)dx\right)e^{\int(1-\alpha)a(x)dx}=CA(x)+B(x)$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда $A(x)$, $B(x)$ лар I интервалда узлуксиз функциялар. (1.21) дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y=(CA(x)+B(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Агар $x=x_0$, $y=y_0=0$ ва $0<\alpha<1$ бўлса, бу формула ёрдамида ушбу

$$y=(C\cdot A(x_0)+B(x_0))^{\frac{1}{1-\alpha}}=0.$$

тенгламадан C нинг ягона қийматини топа оламиз, яъни $C=-\frac{B(x_0)}{A(x_0)}$. Шундай қилиб, $(x_0, 0)$ нуқтадан $y=\left(-\frac{B(x_0)}{A(x_0)}\quad A(x)+\right.$ $\left.+B(x)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\not\equiv 0$ интеграл чизиқ ўтади.

Равшанки, $0<\alpha<1$ бўлганда (1.21) тенглама $y\equiv 0$, $x\in I$ ечимга ҳам эга. Бу ечим ҳам $(x_0, 0)$ нуқтадан ўтадиган интеграл чизиқни ифодалайди. Демак, 1) Бернулли тенгламаси квадратураларда интегралланади; 2) Бернулли тенгламаси $0<\alpha<1$ бўлганда $y\equiv 0$, $x\in I$ махсус ечимга эга.

2. Риккати тенгламаси.

1.9-таъриф. *Ушбу*

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y^2+b(x)y+c(x) \tag{1.25}$$

тенглама Риккати тенгламаси дейилади. Бунда $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ функциялар бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\Gamma=\{(x,y);\, x\in I,\ -\infty<y<+\infty\}$. Равшанки, агар (1.25) да $a(x)\equiv 0$, $x\in I$ бўлса, чизиқли тенгламага, $c(x)\equiv 0$, $x\in I$ бўлса, Бернулли тенгламасига эга бўламиз. Шунинг учун кейинги мулоҳазаларда I интервалда $a(x)\not\equiv 0$, $c(x)\not\equiv 0$ деб фараз этилади.

(1.25) дифференциал тенгламанинг ўнг томони Г соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, y бўйича узлуксиз дифференциалланувчи (чунки $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2a(x)y+b(x)$). Демак, Г соҳада Коши теоремасининг шартлари ўринли. Г соҳанинг ихтиёрий олинган (x_0, y_0) нуқтасидан Риккати тенгламасининг битта интеграл чизиғи ўтади.

Шуни қайд қиламизки, умуман айтганда, Риккати тенгламаси квадратураларда интегралланмайди. Қуйида битта хусусий ҳолни келтирамиз.

1.9-теорема. *Агар Риккати тенгламасининг битта хусусий ечими маълум бўлса, бу тенглама квадратураларда интегралланади.*

Исбот. $y=\varphi(x), x\in I$ функция (1.25) тенгламанинг бирор хусусий ечими бўлсин. $y=\varphi(x)+z$ алмаштириш бажарамиз:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{dz}{dx}=a(x)[\varphi(x)+z]^2+b(x)[\varphi(x)+z]+c(x).$$

Бундан, $\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv a(x)[\varphi(x)]^2+b(x)\varphi(x)+c(x)$, $x\in I$ эканини ҳисобга олсак, ушбу

$$\frac{dz}{dx}=[2a(x)\varphi(x)+b(x)]z+a(x)z^2$$

Бернулли тенгламаси келиб чиқади. Бу тенглама эса квадратураларда интегралланади. 1.9-теорема исбот бўлди.

Мисоллар кўришда баъзи ҳолларда Риккати тенгламаси учун хусусий ечимни бирор кўринишда излаш ва уни топиш мумкин бўлади. Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=-y^2+2xy+(5-x^2)$$

тенглама Риккати тенгламаси бўлиб, унинг хусусий ечимини $\varphi(x)=ax+b$ кўринишда излаш мақсадга мувофиқдир. Бундан

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=a,\ a=-(ax+b)^2+2x(ax+b)+(5-x^2)\ \text{ва}\ a=1,\ b=\pm 2$$

келиб чиқади. Текшириш кўрсатадики, $\varphi(x)=x+2$ ҳам, $\varphi(x)=x-2$ ҳам хусусий ечим бўлади. Агар $\varphi(x)=x+2$ ни олсак, тегишли Бернулли тенгламаси

$$\frac{dz}{dx}=-4z-z^2$$

кўринишда бўлади ($y=\varphi(x)+z=x+2+z$ алмаштириш бажарилган).

Энди $z=\frac{1}{u}$ десак, $\frac{du}{dx}=4u+1$ тенгламага келамиз. Бу ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Унинг умумий ечими $4u+1=Ce^{4x}$ кўринишда бўлиб, $u=\frac{1}{z}$ ва $z=y-(x+2)$ алмаштиришлар ёрдамида берилган Риккати тенгламасининг*) умумий ечимини ёзамиз:

$$y=x+2+\frac{4}{Ce^{4x}-1}.$$

---

*) Биз юқорида Риккати тенгламасини тўла ўрганмадик. Унинг турли хоссалари ҳақида, иккита ёки учта хусусий ечими маълум бўлгандаги квадратуралар ҳақида тўлароқ маълумотни В. В. Степановнинг китобидан [3] ўқиш мумкин.

1.9-§. ТЎЛИҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Ҳар бир (1.1) кўринишдаги тенгламани символик равишда $dy-f(x, y)dx=0$ кўринишда ёзишни келишиб оламиз. Биз ҳатто бундан умумийроқ

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \qquad (1.26)$$

тенгламани кўрамиз. Уни биринчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилган *дифференциал тенгламанинг дифференциал шакли* деб юритилади. (1.26) да $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар Γ соҳада аниқланган ва узлуксиз.

1.10-таъриф. *Агар* (1.26) *тенгламанинг чап томони бирор* $U(x, y)$, $U(x, y)\in C^1(\Gamma)$ *функциянинг тўлиқ дифференциалидан иборат бўлса, у ҳолда* (1.26) *тўлиқ дифференциалли тенглама дейилади.*

Агар (1.26) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлса, у ҳолда (1.26) тенгламанинг (аниқроғи, $\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, $N(x, y)\neq 0$, $(x, y)\in\Gamma$ тенгламанинг) ҳар бир $y=\varphi(x)$ ечими учун $U(x, \varphi(x))=\text{const}$ айният ўринли. Аксинча, бирор интервалда аниқланган ва

$$U(x, y)=C \qquad (1.27)$$

тенгламадан ошкормас функция сифатида аниқланадиган ҳар бир $y=\varphi(x)$ функция (1.26) тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан, $y=\varphi(x)$ (1.26) тенгламанинг I интервалда аниқланган ечими бўлсин. Бунда қуйидагига эгамиз:

$$M(x, \varphi(x))+N(x, \varphi(x))\varphi'(x)=0 \text{ ёки } \frac{d}{dx}U(x, \varphi(x))=0,\ x\in I.$$

Бундан $U(x, \varphi(x))=\text{const}$ экани келиб чиқади. Энди $y=\varphi(x)$ функция $U(x, y)=C$ тенгламанинг ечими бўлсин, яъни $U(x, \varphi(x))=C$. Буни x бўйича дифференциаллаб, топамиз:

$$M(x, \varphi(x))+N(x, \varphi(x))\varphi'(x)=0.$$

Бундан $y=\varphi(x)$ функция (1.26) нинг ечими экани келиб чиқади. Юқоридаги (1.26) тенгламанинг чап томони $U(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциалидан иборат бўлганда (1.27) муносабат (1.26) нинг *умумий ечими (умумий интеграли)*, $U(x, y)$ функция эса (1.26) нинг *интеграли* дейилади. Аммо ҳар доим ҳам

$$dU(x, y)=M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy \qquad (1.28)$$

муносабат ўринли бўлавермайди.

1.10-теорема. *Агар бир боғламли**) Γ *соҳада* $M(x, y)$, $N(x, y)$ *функциялар аниқланган бўлиб, шу соҳада* $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ *функциялар узлуксиз ҳамда шу* Γ *да* $M^2+N^2\neq 0$ *бўлса,*

---

*) Агар Γ соҳада ҳамма нуқталари билан жойлашган, ўзаро кесишмайдиган ихтиёрий ёпиқ синиқ чизиқнинг барча ички нуқталари ҳам шу Γ соҳага тегишли бўлса, Γ соҳа *бир боғламли* дейилади. Бир боғламли соҳа албатта боғланган соҳа бўлади, аммо ҳар бир боғланган соҳа ҳам бир боғламли бўлавермайди.

у ҳолда (1.26) дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли бўлиши учун

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.29}$$

айният ўринли бўлиши зарур ҳам етарли.[*)]

Исбот. Зарурлиги. (1.26) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлсин. У ҳолда Г соҳада аниқланган бирор $U(x, y)$ функция учун (1.28) муносабат ўринли бўлади. Шунинг учун:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \qquad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = N(x, y)\ .$$

Теореманинг шартига кўра

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial y}$$

тенгликлардан Г соҳада (1.29) айниятнинг тўғрилиги келиб чиқади.

Етарлилиги. Энди (1.29) айният Г соҳада тўғри бўлсин. (1.26) дифференциал тенгламанинг тўлиқ дифференциалли эканини исбот этамиз. $M(x, y)$ функция Г соҳада бирор $U(x, y)$ функциядан x бўйича олинган ҳосилага тенг деб қарашимиз мумкин, яъни

$$M(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{1.30}$$

Энди $U(x, y)$ функцияни шундай танлаймизки, $N(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}$ тенглик ҳам ўринли бўлсин. Унинг учун (1.30) ни x_0 дан x гача интеграллаймиз:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)\,dt + \varphi(y), \qquad (x, y) \in \Gamma,\ x_0 \in I. \tag{1.31}$$

Бу $U(x, y)$ функция учун (1.30) бажарилади. Энди (1.31) ни y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t, y)}{\partial y}\,dt + \varphi'(y), \qquad (x, y) \in \Gamma,\ x_0 \in I.$$

(1.29) айниятдан фойдалансак:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t, y)}{\partial y}\,dt + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y).$$

Агар $\varphi'(y) = N(x_0, y)$ деб танланса мақсадга эришамиз. Бу содда дифференциал тенглама бўлиб, $N(x_0, y)$ функция ихтиёрий $(x_0, y) \in \Gamma$ нуқтада узлуксиз бўлгани учун (x_0, y) нуқтадан ягона интеграл чизиқ ўтади. Масалан, $\varphi(y_0) = 0$ шартни қаноатлантирадиган ягона ечим

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, s)\,ds, \quad (x_0, y_0) \in \Gamma, \quad (x_0, y) \in \Gamma$$

[*)] (1.29) шартни Л. Эйлер (1707—1783) топган.

формула билан ёзилади. Топилган ифодани (1.31) га қўйиб, $U(x, y)$ функция учун

$$U(x,\ y)=\int_{x_0}^{x} M(t,\ y)\,dt+\int_{y_0}^{y} N(x_0,\ s)\,ds$$

ифодани ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди. Теореманинг етарлилигини исботлаш бир вақтда тўлиқ дифференциалли тенгламаларни интеграллаш усулини ҳам беради.

Етарлиликнинг исботида интеграллаш аслида $(x_0, y_0)\in\Gamma$, $(x, y)\in\Gamma$ нуқталарни туташтирувчи ихтиёрий эгри чизиқ бўйича олиб борилди. Бу Γ соҳа бир боғламли бўлгандагина мумкин.

Мисол. Ушбу $(x^2+2y)\,dx+(2x+y^2)\,dy=0$ дифференциал тенгламанинг тўлиқ дифференциалли экани текширилсин ва интеграллансин.

Тенгламада $M=x^2+2y$, $N=2x+y^2$. Бундан $\frac{\partial M}{\partial y}=2$, $\frac{\partial N}{dx}=2$. Демак, тенглама тўлиқ дифференциалли. Энди уни интеграллаймиз.

$\frac{\partial U}{\partial x}=x^2+2y$ дан $U=\frac{x^3}{3}+2yx+\varphi(y)$, $\frac{\partial U}{\partial y}=2x+\varphi'(y)=2x+y^2$, $\varphi'(y)=y^2$, $\varphi(y)=\frac{y^3}{3}+C_1$ келиб чиқади. Топилган натижани ўрнига қўйсак ($C_1=0$ деб),

$$U(x,\ y)=\frac{x^3}{3}+2xy+\frac{y^3}{3}=C$$

умумий ечимни топамиз.

Ушбу

$$M(x)\,dx+N(y)\,dy=0$$

дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли, чунки $\frac{\partial M}{\partial y}=$ $=\frac{\partial N}{\partial x}=0$. Содда ҳисоблашлар ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x),\quad \frac{\partial U}{\partial y}=N(y),\quad U=\int M(x)\,dx+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi'(y),\quad \varphi'(y)=N(y).$$

Дифференциал тенгламанинг интеграли

$$U=\int M(x)\,dx+\int N(y)\,dy$$

функциядан иборат. Умумий интеграл эса

$$\Phi_1(x)+\Phi_2(y)=C$$

кўринишда бўлади, бу ерда $\Phi_1(x)$ функция $M(x)$ нинг бирор бошланғич функцияси бўлса, $\Phi_2(y)$ функция $N(y)$ нинг бирор бошланғич функциясидир.

Агар (1.5) тенгламада $f(x)=M(x)$, $g(y)=-\frac{1}{N(y)}$, $N(y)\neq 0$ дейилса, юқорида кўрилган тўлиқ дифференциалли тенгламага келамиз. Демак, кўрилган дифференциал тенгламага ўзгарувчилари ажраладиган ва тўлиқ дифференциалли деб қарасак ҳам бўлаверади.

1.11-теорема. (1.26) *дифференциал тенгламада* $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$ ва $\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ *функциялар* $P=\{(x, y): x\in I_x, y\in I_y\}$, $P\subset\Gamma$ *тўғри тўртбурчакда узлуксиз бўлиб,* $N(x, y)\neq 0$, $(x, y)\in P$ *ва* $\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}$, $(x, y)\in P$ *бўлса, у ҳолда* P *тўпламнинг ҳар бир берилган* (x_0, y_0) *нуқтасидан* (1.26) *тенгламанинг фақат битта интеграл чизиғи ўтади.*

Исбот. Теореманинг шартига кўра дифференциал тенгламанинг чап томони тўлиқ дифференциалдир, яъни $M(x, y)\equiv\frac{\partial u}{\partial x}$, $N(x, y)\equiv\equiv\frac{\partial u}{\partial y}$. $N(x, y)\neq 0$, $(x, y)\in P$ га кўра (1.26) дифференциал тенгламани

$$M(x, y)+N(x, y)y'=0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ундан

$$\frac{du(x, y)}{dx}=0$$

ҳосил бўлади $\left(\frac{du}{dx}\right.$ ҳосила $u(x, y)$ дан олинган тўлиқ ҳосила). Энди $y(x)$, $x\in I_x$ функция (1.26) тенгламанинг ечими бўлиши учун

$$u(x, y(x))=C, \qquad x\in I_x \tag{1.32}$$

бўлиши зарур ва етарли. Фаразга кўра $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x, y)\neq 0$, $(x, y)\in P$. Шу сабабли, (1.32) ни $y(x)$ га нисбатан бир қийматли ечиш мумкин. C нинг $u(x_0,y_0)=C$ муносабат билан аниқланган қиймати (1.26) тенгламанинг (x_0, y_0) нуқтадан ўтадиган ягона интеграл чизиғини белгилайди ва у

$$u(x, y)=u(x_0, y_0)$$

формула ёрдамида ифодаланади. $u(x, y)$ функцияни излаш усули эса аввалги теоремада берилган.

1.10-§. ИНТЕГРАЛЛОВЧИ ҚЎПАЙТУВЧИ

1. Γ соҳада аниқланган бирорта ҳам $U(x, y)$ функция учун (1.28) тенглик ўринли бўлмасин, яъни (1.26) дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли бўлмасин.

1.11-таъриф. *Агар* Γ *соҳада берилган* $M(x, y)$, $N(x, y)$ *ва бирор* $\mu(x, y)\neq 0$ *функциялар учун ушбу*

$$\mu(x, y)M(x, y)dx+\mu(x, y)N(x, y)dy=0 \tag{1.33}$$

тенглама тўлиқ дифференциалли бўлса, (1.26) *дифференциал тенглама тўлиқ дифференциаллига келтириладиган тенглама,* $\mu(x, y)$ *функция эса унинг интегралловчи кўпайтувчиси дейилади.*

Бундан кейин юритиладиган мулоҳазалар кўрсатадики, $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар Γ соҳада дифференциалланувчи бўлса, интегралловчи кўпайтувчи $(x_0, y_0)\in\Gamma$ нуқтанинг етарли кичик атрофида албатта мавжуд бўлади.

1.12- теорема. *Агар $0\neq\mu(x, y)\in C^1(\Gamma)$, $M(x, y)\in C^1(\Gamma)$, $N(x, y)\in C^1(\Gamma)$ бўлиб, $y=y(x)$, $y(x_0)=y_0$ функция I интервалда аниқланган ҳамда* (1.33) *тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда ўша функция* (1.26) *тенгламанинг ҳам шу I интервалда аниқланган ечими бўлади.*

Исбот. Шартга кўра, $\mu(x, y(x))\neq 0$, $x\in I$ ва $y(x)$ функция (1.33) нинг ечими. Демак, ушбу

$$\mu(x, y(x))M(x, y(x))+\mu(x, y(x))N(x, y(x))y'(x)\equiv 0,\ x\in I$$

айният ўринли. Ундан $M(x, y(x))+N(x, y(x))y'(x)\equiv 0$, $x\in I$ айният келиб чиқади. Бу эса $y(x)$ функция (1.26) тенгламанинг ечими эканини билдиради. Бу теоремадан (1.26) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлмаган ҳолда тегишли интегралловчи кўпайтувчи $\mu(x, y)\neq 0$ ёрдамида ҳосил қилинган тўлиқ дифференциалли тенгламанинг умумий интеграли $u(x, y)=C$ берилган (1.26) тенгламанинг ҳам умумий интеграли бўлиши келиб чиқади.

2. Энди интегралловчи кўпайтувчини тўлароқ ўрганамиз. (1.33) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлсин. У ҳолда Γ соҳада

$$\frac{\partial(\mu(x, y)M(x, y))}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu(x, y)N(x, y))}{\partial x},\ (x, y)\in\Gamma \tag{1.34}$$

айният ўринли. Бундан ҳосилаларни ҳисобласак

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

ёки

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

ёки $\mu(x, y)>0$, $(x, y)\in\Gamma$ десак,

$$M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y} \tag{1.35}$$

муносабатга келамиз. Бу $\ln\mu(x, y)$ функцияга нисбатан биринчи тартибли хусусий ҳосилали бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама (12.2- ва 12.3- § ларга қаранг). Биз учун шу (1.35) тенгламанинг бирор хусусий ечимини билиш етарли. Бундай ечим $(x_0, y_0)\in\Gamma$ нуқтанинг етарли кичик атрофида M, N, $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ функциялар Γ соҳада узлуксиз бўлгани учун доим мавжуд (12.1-теоремага қаранг).

1.13-теорема. *Агар* (1.26) *дифференциал тенглама $U(x, y)=C$ умумий интегралга эга бўлса, у ҳолда бу тенглама учун интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлади.*

Исбот. Равшанки, $\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}dx+\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}dy=0$ ёки $\frac{\partial U}{\partial y}\neq 0$, $(x, y)\in\Gamma$ десак, $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$. Қайд қиламизки, агар $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}=0$, $(x, y)\in\Gamma$ бўлса, $0\cdot dx+0\cdot dy=0$ тенгламадан текисликнинг ихтиёрий нуқтаси ечим бўла олиши келиб чиқади, яъни бу ҳолда интегралланувчи дифференциал тенгламага эга бўламиз. Агар

$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\neq 0$, масалан, $\frac{\partial U}{\partial x}\neq 0$, $\frac{\partial U}{\partial y}=0$, $(x, y)\in\Gamma$ бўлса, биз $dx=0$ ёки $x=\text{const}$ га эга бўламиз. Бу ҳолда ихтиёрий вертикал $x=$ $=\text{const}$ тўғри чизиқ интеграл чизиқ бўлади.

Иккинчи томондан, (1.26) га кўра

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}.$$

Шунинг учун

$$\frac{M}{N}=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} \text{ ёки } \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M}=\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N}.$$

Бундан

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\mu M,\ \frac{\partial U}{\partial y}=\mu N$$

тенгликлар орқали Γ соҳада аниқланган $\mu(x, y)$ функцияни киритиш мумкин. Энди

$$\mu(Mdx+Ndy)=\mu Mdx+\mu Ndy=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=dU=0$$

муносабатлардан μ (x, y) функция (1.26) дифференциал тенглама учун интегралловчи кўпайтувчи экани келиб чиқади.

Қуйида иккита теоремани исботсиз келтирамиз.

1.14- теорема. *Агар* μ (x, y), $(x, y)\in\Gamma$ (1.26) *дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиси бўлиб,* U (x, y) *функция шу тенгламанинг интеграли бўлса, у ҳолда ихтиёрий*

$$\mu_1\ (x, y)=\mu\ (x, y)\Phi(U),\ \Phi(U(x, y))\in C^1(\Gamma) \tag{1.36}$$

функция ҳам интегралловчи кўпайтувчи бўлади.

1.15- теорема. (1.26) *дифференциал тенгламанинг ихтиёрий интегралловчи кўпайтувчиси ушбу*

$$\mu_1\ (x, y)=\Phi(U)\mu(x, y) \tag{1.36$'$}$$

формула билан берилади, бунда $\mu(x, y)$ *бирор интегралловчи кўпайтувчи,* Φ *эса (1.26) тенглама интеграли* U *нинг ихтиёрий узлуксиз функцияси.*

Қайд қиламизки, бу теоремадан икки қатъий фарқ қилувчи μ ва μ_1 интегралловчи кўпайтувчилар маълум бўлганда дифференциал тенгламанинг умумий интеграли $\frac{\mu_1}{\mu}=\text{const}$ экани келиб чиқади.

3. Интегралловчи кўпайтувчини топишнинг баъзи хусусий ҳолларига тўхталамиз. Шубҳасиз $\mu(x, y)\neq 0$, $\mu(x, y)\neq\text{const}$. Интегралловчи кўпайтувчи фақат x нинг ёки y нинг функцияси бўлган ҳоллар энг содда ҳоллар ҳисобланади.

а) $\mu(x, y)=\mu(x)$ бўлсин. Бунда (1.35) тенглама соддалашади $\left(\text{чунки } \frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=0\right)$:

$$-N\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

ёки
$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \qquad (1.37)$$

$\mu(x, y)$ функция учун юқорида қилинган фараз (1.37) нинг ўн томони фақат x нинг функцияси бўлишидан иборатдир. (1.37) нинг икки томонини x_0 дан x гача интеграллаймиз:

$$\mu(x)=Ce^{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx} \qquad (1.38)$$

Бизни бирорта интегралловчи кўпайтувчи қизиқтираётгани учун $C=1$ деса бўлади.

б) Энди $\mu(x, y)=\mu(y)$ бўлсин, (1.36) тенглама бундай кўринишга келади:

$$M\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}.$$

Ундан y_0 дан y гача интеграллаш натижасида $((x, y_0)\in\Gamma$ $(x, y)\in\Gamma)$

$$\mu(y)=Ce^{\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy} \qquad (1.39)$$

ифодани топамиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)$$

чизиқли дифференциал тенглама берилган бўлсин. Уни

$$[a(x)y+b(x)]dx-dy=0$$

кўринишда ёзамиз. Бунда $M(x, y)=a(x)y+b(x)$, $N(x, y)=-1$. Равшанки,

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=a(x),\ \frac{a(x)}{N}=-a(x).$$

Демак, $\mu=\mu(x)$. (1.38) га кўра:

$$\mu(x)=e^{-\int\limits_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi} \qquad (1.40$$

Шундай қилиб, биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиси (1.40) кўринишда бўлади.

2. Ушбу

$$(xy^2-y)\,dx+xdy=0$$

дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли эмас, чунки:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2xy-1,\ \frac{\partial N}{\partial x}=1,\ \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Аммо

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{2(xy-1)}{xy^2-y}=\frac{2}{y}.$$

Демак, $\mu=\mu(y)$ бўлади. Шунинг учун

$$\mu(y)=e^{-\int\limits_{y_0}^{y}\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln\frac{y}{y_0}}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-2}$$

ёки $y_0=1$ деб $\mu(y)=\frac{1}{y^2}$ интегралловчи кўпайтувчига эга бўламиз.

Берилган тенгламани интеграллаш жараёнини охирига етказиб қўямиз. Уни $\frac{1}{y^2}$ га кўпайтириб, тўлиқ дифференциалли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\left(x-\frac{1}{y}\right)dx+\frac{x}{y^2}dy=0.$$

Бу тенглама учун

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{y}=C$$

умумий ечим бўлади.

в) $\mu(x,\ y)=\mu_1(x)\mu_2(y)$ дейлик. (1.26) дифференциал тенглама шу кўринишда интегралловчи кўпайтувчига эга бўлиши шартини чиқарамиз. (1.36) дан

$$M\cdot\frac{1}{\mu_2}\frac{d\mu_2}{dy}-N\frac{1}{\mu_1}\frac{d\mu_1}{dx}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

ёки

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\psi_1(x)-M\psi_2(y) \qquad (1.41)$$

га эгамиз, бу ерда

$$\psi_2(y)=\frac{1}{\mu_2}\frac{d\mu_2}{dy},\ \psi_1(x)=\frac{1}{\mu_1}\frac{d\mu_1}{dx}. \qquad (1.42)$$

Шундай қилиб, агар $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ ифода (1.41) кўринишда ёзилиши мумкин бўлса, у ҳолда (1.26) тенглама $\mu=\mu_1(x)\mu_2(y)$ кўринишда интегралловчи кўпайтувчига эга бўлади, бунда $\mu_1(x)$ ва $\mu_2(y)$ функциялар (1.42) формулалар ёрдамида топилади:

$$\mu_1(x)=e^{\int\psi_1(x)dx},\ \mu_2(y)=e^{\int\psi_2(y)dy}.$$

Мисоллар. 1. Ушбу

$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0,$$
$$M_2(y)\neq0,\ N_1(x)\neq0,\ (x,\ y)\in\Gamma,\ x\in I_x,\ y\in I_y$$

дифференциал тенглама $\mu_1(x)$ $\mu_2(y)$ кўринишда интегралловчи кўпайтувчига эга. Ҳақиқатан, агар $M(x, y) = M_1(x) \cdot M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x) N_2(y)$ десак,

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = M_1(x) \frac{dM_2(y)}{dy} - N_2(y) \frac{dN_1(x)}{dx} =$$

$$= M_1(x) M_2(y) \frac{1}{M_2(y)} \frac{dM_2(y)}{dy} - N_1(x) N_2(y) \frac{1}{N_1(x)} \frac{dN_1(x)}{dx} =$$

$$= M(x,y) \frac{1}{M_2(y)} \frac{dM_2(y)}{dy} - N(x,y) \frac{1}{N_1(x)} \frac{dN_1(x)}{dx}.$$

Бундан

$$\psi_1(x) = -\frac{1}{N_1(x)} \frac{dN_1(x)}{dx}, \quad \psi_2(y) = -\frac{1}{M_2(y)} \frac{dM_2(y)}{dy}$$

ёки

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{d\mu_1}{dx} = -\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dx}, \frac{1}{\mu_2} \frac{d\mu_2}{dy} = -\frac{1}{M_2(y)} \frac{dM_2}{dy}$$

ёки

$$\mu_1 = \frac{1}{N_1(x)}, \quad \mu_2 = \frac{1}{M_2(y)}.$$

Демак,

$$\mu(x,y) = \frac{1}{N_1(x) \ M_2(y)}.$$

Берилган тенгламанинг икки томонини шу функцияга кўпайтирсак, ўзгарувчилари ажраладиган

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \frac{N_2(x)}{M_2(x)} dy = 0$$

дифференциал тенгламага келамиз. Унинг умумий интеграли

$$\int_{x_0}^{x} \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{N_2(y)}{M_2(y)} dy = C.$$

2. Ушбу

$$(y^4 - 4xy) dx + (2xy^3 - 3x^2) dy = 0, \ x > 0, \ y > 0, \ \frac{1}{4} y^3 < x < \frac{2}{3} y^3$$

дифференциал тенглама интеграллансин.

Бу тенглама тўлиқ дифференциалли эмас, чунки

$$M = y^4 - 4xy, \ N = 2xy^3 - 3x^2 \text{ ва } \frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 - 4x, \ \frac{\partial N}{\partial x} = 2y^3 - 6x$$

муносабатлардан $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ тенгсизлик келиб чиқади.

Берилган дифференциал тенглама $\mu(x, y) = \mu_1(x) \mu_2(y)$ кўринишдаги интегралловчи кўпайтувчига эга, чунки

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4y^3 - 4x - (2y^3 - 6x) = (2xy^3 - 3x^2) \cdot \frac{2}{x} - (y^4 - 4xy) \cdot \frac{2}{y} =$$

$$= N \frac{2}{x} - M \frac{2}{y}.$$

Бундан $\psi_1(x)=\frac{2}{x}$, $\psi_2(y)=\frac{2}{y}$, ва $\mu_1(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2$, $\mu_2(y)=e^{\int\frac{2}{y}dy}=y^2$.

Демак, интегралловчи кўпайтувчи $\mu(x, y)=x^2y^2$ кўринишга эга (берилган тенгламани $\mu=x^2y^2$ бўлганда тўлиқ дифференциаллига келтириб, сўнгра уни интеграллаш китобхонга мустақил иш ўрнида топширилади).

Машқ бажараётганда баъзи ҳолларда интегралловчи кўпайтувчи

$$\mu(x, y)=\mu(x^0, y),\ \mu(x, y)=\mu\left(\frac{y}{x}\right),\ \mu(x, y)=\mu(x^2-y^2)$$

ва бошқа кўринишларда изланиши мумкин.

г) (1.26) дифференциал тенгламада $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар Г соҳада аниқланган, дифференциалланувчи ва m-тартибли бир жинсли бўлсин. У ҳолда (1.26) тенглама

$$\mu(x, y)=\frac{1}{xM+yN} \tag{1.43}$$

кўринишда интегралловчи кўпайтувчига эга. Ҳақиқатан,

$$M(x, y)=x^mM\left(1, \frac{y}{x}\right),\ N(x,y)=x^mN\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

ва

$$x^mM\left(1, \frac{y}{x}\right)dx+x^mN\left(1, \frac{y}{x}\right)dy=0.$$

Агар $\frac{y}{x}=u$ десак, $x^mM(1, u)\,dx+x^mN(1, u)\,(xdu+udx)=0$ ёки

$$[x^mM(1, u)+ux^mN(1, u)]dx+x^{m+1}N(1, u)\,du=0.$$

Бундан интегралловчи кўпайтувчи учун

$$\mu_1(x,y)=\frac{1}{x^{m+1}[M(1,u)+uN(1,u)]}$$

формула келиб чиқади. Берилган тенглама учун аввалги белгилашларга қайтиб, (1.43) формулани ҳосил қиламиз.

д) 1.15-теоремага кўра, (1.26) дифференциал тенгламанинг ихтиёрий интегралловчи кўпайтувчиси $\mu_1(x, y)=\Phi(U)\mu(x, y)$ формула билан ёзилиши мумкин. Бу формула интегралловчи кўпайтувчини топиш учун аввалги бўлимларда баён этилган усуллардан фарқ қиладиган усулни қўллашга олиб келади. Янги усул қуйидагидан иборат: (1.26) тенгламани шартли равишда иккига бўламиз:

$$[M_1(x, y)dx+N_1(x, y)dy]+[M_2(x, y)dx+N_2(x, y)dy]=0,$$

бунда $M_1+M_2=M$, $N_1+N_2=N$. Сўнгра ушбу

$$M_1dx+N_1dy=0,\ M_2dx+N_2dy=0$$

тенгламаларни айрим-айрим кўрамиз. Албатта, бу дифференциал тенгламалар учун интегралловчи кўпайтувчини нисбатан осонлик билан топа оламиз, деб ҳисоблаймиз. Тегишли тенгламаларнинг интегралловчи кўпайтувчиларни мос равишда μ_1 ва μ_2, интегралларини эса U_1 ва U_2 дейлик. У ҳолда юқоридаги формулага асосан ҳар бир дифференциал тенглама учун ихтиёрий интегралловчи кўпайтувчини

$$\mu_1^* = \mu_1 \Phi_1(U_1), \; \mu_2^* = \mu_2 \Phi_2(U_2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Φ_1 ва Φ_2 ларнинг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, уларни шундай танлаймизки, ушбу

$$\mu_1^* = \mu_2^* = \mu$$

муносабат ўринли бўлсин. У ҳолда μ функция берилган (1.26) дифференциал тенглама учун интегралловчи кўпайтувчи бўлади. Амалда Φ_1 ёки Φ_2 функцияни 1 га тенг қилиб олиш мумкин.

Мисол. Ушбу $(xy^2 + y^4)\,dx + (x^2 - xy^3)\,dy = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $x > y^3$ дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиси топилсин.

Бу тенгламани

$$d(xy) + \frac{y^3}{x}(ydx - xdy) = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ундан $\mu_1^* = \mu_1 \Phi_1(xy) = \Phi_1(xy)$. $\frac{y^3}{x}(ydx - xdy) = 0$ тенглама учун $\mu_2 = \frac{1}{x^2y^2}$ эканини в) бўлимдаги усул билан исботлаш мумкин. Энди $\mu_1^* = \mu_2^*$ бўлиши учун $\Phi_2 = 1$ десак,

$$\mu_2^* = \Phi_1(xy) = \frac{1}{x^2y^2} = \mu$$

келиб чиқади. Демак, $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$ функция берилган дифференциал тенглама учун интегралловчи кўпайтувчи бўлади.

1.11-§. ПИКАР ТЕОРЕМАСИНИНГ ИСБОТИ

Аввал (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $|x - x_0| \leqslant h$ оралиқда аниқланган ечимнинг мавжудлигини, сўнгра бу ечимнинг ягоналигини исботлаймиз.

Исботга бевосита ўтишдан аввал баъзи ёрдамчи тасдиқларга тўхталамиз. **Г** соҳада маркази $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуқтада бўлган ҳамда чегараси билан бутунлай шу соҳада жойлашган бирор **P** тўғри тўртбурчак чизиш мумкин (бунинг исботи ўқувчига ҳавола этилади). Унинг горизонтал томони узунлигини $2a$, вертикал томони узунлигини эса $2b$ деб белгилайлик, бунда a ва b лар мусбат чекли сонлар. Шундай қилиб, $\mathbf{P} = \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant a, \; |y - y_0| \leqslant b\}$, $P \subset \Gamma$ бўлиб, P— ёпиқ чегараланган тўплам.

Г да узлуксиз бўлган $f(x, y)$ функция P да ҳам узлуксиз бўлади. P ёпиқ, чегараланган бўлгани учун $f(x, y)$ унда чегараланган бўлади, яъни $\max\limits_{(x, y) \in P} |f(x, y)| = M$, $M \geqslant 0$. Агар $M = 0$ бўлса, $f(x,y) \equiv O \; \forall \, (x,y) \in \mathrm{P}$ бўлади. Бу ҳолда $(x, y) \in P$ учун (1.1) тенглама соддагина $\frac{dy}{dx} = 0$ кўринишни олади. Бу тенгламанинг $y(x_0) = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими $y(x) \equiv y_0$, $|x - x_0| \leqslant a$ каби ёзилади. Бундай ечим ягона экани равшан.

---

*) Э. Пикар (1856—1941) мавжудлик теоремасини 1893 йилда кетма-кет яқинлашиш усули билан исбот қилган.

Энди $$\max_{(x,\ y)\in P} |f(x,\ y)| = M,\ M > 0$$

бўлсин. Шу P тўғри тўртбурчакнинг ихтиёрий $(x,\ y_1)$ ва $(x,\ y_2)$ нуқталари учун ҳам (L) тенгсизликнинг бажарилиши равшан (1.2- теореманинг шартига кўра). Қайд қиламизки, $(x_0,\ y_0)\in P$ нукта P тўғри тўртбурчакнинг марказидан иборат. Энди (1.1) дифференциал тенгламанинг (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $|x-x_0|\leqslant h,\ h\leqslant a$ ораликда аниқланган ягона ечимининг мавжудлигини исботлаймиз. Бунинг учун биринчи қадам дифференциал тенгламадан *интеграл тенгламага* ўтишдан иборат.

I. $y=\varphi(x)$ (1.1) тенгламанинг $|x-x_0|\leqslant h$ ораликда аниқланган бирор ечими бўлиб, у (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирсин. Шундай экан, биз ушбу

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,\ \varphi(x)) \tag{1.44}$$

айниятга эгамиз. Бу ҳолда $\varphi(x)$ функция учун $|x-x_0|\leqslant h$ ораликда

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,\ \varphi(\tau))\,d\tau \tag{1.45}$$

интеграл айният ўринли. Аксинча, агар бирор узлуксиз $\varphi(x)$ функция учун $|x-x_0|\leqslant h$ ораликда (1.45) айният ўринли бўлса, у ҳолда $y=\varphi(x)$ функция дифференциалланувчи, (1.1) тенгламанинг ечими ва (1.3) бошланғич шартни қаноатлантиради. Бошқача айтганда, (1.45) интеграл тенглама (1.3) бошланғич шарт билан бирга олинган (1.1) тенгламага *эквивалент*. Бу тасдиқ *эквивалентлик леммаси* деб юритилади. Уни исботлайлик.

(1.45) муносабат ўринли бўлсин. Унда $x=x_0$ деб $\varphi(x_0)=y_0$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, (1.45) дан (1.3) бошланғич шарт келиб чиқади. Равшанки, (1.45) айниятнинг ўнг томони x бўйича дифференциалланувчи, шунинг учун унинг чап томони ҳам x бўйича дифференциалланувчи бўлади. (1.45) ни дифференциаллаш натижасида (1.44) айниятни ҳосил қиламиз.

Энди (1.3) ва (1.44) муносабатлар ўринли бўлсин. (1.44) ни x_0 дан x гача интеграллаб

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(\tau,\ \varphi(\tau))\,d\tau$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан (1.3) га кўра (1.45) ни ҳосил қиламиз. Тасдиқ исботланди.

II. (1.1) дифференциал тенгламанинг (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $|x-x_0|\leqslant h$ ораликда аниқланган ечимининг мавжудлигини кўрсатиш (1.45) интеграл тенгламанинг худди шундай ечимининг мавжудлигини кўрсатишга келтирилди. Тавсия этиладиган усул ёрдамида аввало ечимнинг мавжудлиги исботланса, кейин у ечимни берилган аниқликда тақрибан қуриш мумкинлиги ҳам кўрсатилади.

Бошланғич (нолинчи) яқинлашиш сифатида y_0 ни қабул қиламиз. Қуйидаги

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\,d\xi,$$

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\,d\xi, \qquad (1.46)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\,d\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

қоида билан $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, ... функцияларни қурамиз. Улар «маълум маънода» тақрибий ечимлар бўлади. Бу функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

1) Равшанки, $y_k(x_0)=y_0 (k=1,2, \ldots)$. Демак, ҳар бир $y=y_k(x)$, $k=1,2, \ldots$ функциянинг графиги (x_0, y_0) нуқтадан ўтади.

2) Агар $h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ бўлса, $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган $y_k(x)$, $k=1,2, \ldots$ функцияларнинг графиги P тўғри тўртбурчакдан чиқиб кетмайди. Ҳақиқатан, элементар мулоҳазалар ёрдамида h нинг аниқланишига кўра қуйидаги тенгсизликларни ҳосил қиламиз:

$$|y_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\,d\xi\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_0)|\,d\xi\right|\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant b,$$

$$|y_2(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(\xi,y_1(\xi))\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} |f(\xi,y_1(\xi))|\,d\xi\right|\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant b,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|y_n(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_{n-1}(\xi))|\,d\xi\right|\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant b,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Энди $y_s(x)$ функциянинг графиги P дан чиқмайди, дейлик. Унда $\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_s(\xi))\,d\xi$ интеграл аниқланган ва $|y_s(x)-y_0|\leqslant b$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга асосан

$$|y_{s+1}-y_0|=|\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_s(\xi))\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant |\int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi, y_s(\xi))|\,d\xi| \leqslant M|x-x_0| \leqslant Mh \leqslant b$$

муносабатга эга бўламиз. Шундай қилиб, агар бирор натурал s сони учун $y_s(x)$ функциянинг графиги P дан чиқмаса, яъни $(x, y_s(x)) \in P$, у ҳолда $s+1$ учун ҳам $(x, y_{s+1}(x)) \in P$ бўлади. Демак, қўлланилган математик индукция усули $(x, y_k(x)) \in P$, $k=1,2, \ldots$ эканини исбот этади.

3) $y_k(x)$ $(k=1,2, \ldots)$ функциялар $|x-x_0| \leqslant h$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз. Ҳақиқатан, равшанки,

$$y_1(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\,d\xi$$

функция $|x-x_0| \leqslant h$ оралиқда узлуксиз, чунки $f(x, y)$ функция ўша оралиқда узлуксиз. Шунга ўхшаш, $f(x, y_1(x))$ функция ҳам $|x-x_0| \leqslant h$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун $y_2(x)=y_0+$ $+\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\,d\xi$ функция ҳам ўша оралиқда узлуксиз бўлади. Қолган $y_3(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ функцияларнинг тегишли оралиқда аниқланганлиги ва узлуксизлиги математик индукция усули билан осонгина исботланиши мумкин.

III. (1.46) функциялардан тузилган $\{y_k(x)\}$ функционал кетма-кетлик $|x-x_0| \leqslant h$, $h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ оралиқда текис яқинлашади. Буни исботлаш учун

$$y_0+[y_1(x)-y_0]+[y_2(x)-y_1(x)]+\ldots+[y_n(x)-y_{n-1}(x)]+\ldots \quad (1.47)$$

функционал қаторни кўрамиз. Равшанки, k- хусусий йиғинди $S_k(x)=$ $=y_k(x)$. Агар (1.47) қатор текис яқинлашувчи бўлса, ундан $\{y_k(x)\}$ кетма-кетликнинг тегишли оралиқда текис яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Энди (1.47) қаторнинг ҳар бир ҳадини баҳолаймиз:

$$|y_1(x)-y_0| \leqslant M|x-x_0|,$$

$$|y_2(x)-y_1(x)| \leqslant |\int\limits_{x_0}^{x} [f(\xi, y_1(\xi))-f(\xi, y_0)]d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant |\int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi, y_1(\xi))-f(\xi, y_0)|\,d\xi|.$$

Интеграл остидаги айирма учун Липшиц шартини қўллаймиз[*] ва $|y_1(x)-y_0|$ учун топилган баҳодан фойдаланамиз:

---

[*] Агар $L=0$ бўлса, $|x-x_0| \leqslant h$ оралиқда $y_1(x)=y_2(x)=\ldots=y_n(x)=\ldots$ бўлади. Агар $Y(x)=y_i(x)$, $i=1,2, \ldots$ десак, $y_n(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_n(\tau))d\tau$ дан $n\to\infty$ да $y=$ $=Y(x)$ функция (1.1) тенгламанинг ечими экани келиб чиқади.

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|y_1(\xi)-y_0|\,d\xi\right|\leqslant LM\left|\int_{x_0}^{x}|\xi-x_0|\,d\xi\right|=LM\frac{|x-x_0|^2}{2!}$$

Шунга ўхшаш,

$$|y_3(x)-y_2(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\ y_2(\xi))-f(\xi,\ y_1(\xi))]d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\ y_2(\xi))-f(\xi,\ y_1)(\xi))|\,d\xi\right|\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|y_2(\xi)-y_1(\xi)-d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant L^2M\left|\int_{x_0}^{x}\frac{|\xi-x_0|^2}{2}\,d\xi\right|=\frac{L^2M}{3!}|x-x_0|^3.$$

Математик индукция усули ёрдамида ихтиёрий натурал n учун қуйидаги тенгсизликни топамиз:

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant\frac{L^{n-1}M}{n!}|x-x_0|^n. \tag{1.48}$$

$|x-x_0|\leqslant h$ оралиқдан олинган x лар учун

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant Mh,$$
$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant ML\frac{h^2}{2!},$$
$$|y_3(x)-y_2(x)|\leqslant ML^2\frac{h^3}{3!},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant ML^{n-1}\frac{h^n}{n!},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

муносабатларга келамиз. Бундан кўринадики, (1.47) функционал қаторнинг ҳар бир ҳади мусбат ҳадли

$$|y_0|+\sum_{k=1}^{\infty}ML^{k-1}\frac{h^k}{k!} \tag{1.49}$$

сонли қаторнинг тегишли ҳадидан катта эмас. (1.49) қатор эса Даламбер аломатига кўра яқинлашувчи, чунки

$$\lim_{k\to\infty}ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}\cdot\frac{(k-1)!}{h^{k-1}}\cdot\frac{1}{ML^{k-2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{Lh}{k}=0<1.$$

Шу сабабли, (1.47) қатор Вейерштрасс аломатига кўра $|x-x_0|\leqslant$ $\leqslant h$ оралиқда текис яқинлашувчи ва демак, $\{y_k(x)\}$ кетма-кетлик ҳам текис яқинлашувчи бўлади. Бу кетма-кетлик ўша оралиқда бирор узлуксиз $Y(x)$ функцияга текис яқинлашади, яъни

$$\lim_{k\to\infty}y_n(x)=Y(x),\ \ x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h.$$

Энди $Y(x_0)=y_0$, $(x,\ Y(x))\in P$, $|x-x_0|\leqslant h$ эканини исбот этамиз.

Ҳақиқатан,

$$Y(x_0)=\lim_{k\to\infty} y_k(x_0)=\lim_{k\to\infty} y_0=y_0, \text{ яъни } Y(x_0)=y_0.$$

Ушбу $|y_k(x)-y_0|\leqslant b$ тенгсизликда ($k\to\infty$ да) лимитга ўтамиз: $|Y(x)-y_0|\leqslant b$. Бундан $(x, Y(x))\in P$ келиб чиқади.

IV. $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган $Y(x)$ функция (1.45) интеграл тенгламанинг ечими эканини исботлаймиз.

Юқорида исбот этилгани бўйича $\{y_k(x)\}$ кетма-кетлик $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда $Y(x)$ функцияга текис яқинлашади. Демак, ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $N=N(\varepsilon)$ натурал сон топиладики, k нинг $k>N(\varepsilon)$ қийматлари учун $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда ушбу

$$|y_k(x)-Y(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Липшиц шартидан фойдалансак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_k(\xi))\,d\xi-\int_{x_0}^{x} f(\xi), Y(\xi))\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_k(\xi))-f(\xi, Y(\xi))|\,d\xi\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} L|y_k(\xi)-Y(\xi)|\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant L\varepsilon|x-x_0|\leqslant L\varepsilon h\to 0, \text{ агар } \varepsilon\to 0 \text{ бўлса.}$$

Шунинг учун $k\to\infty$ да ихтиёрий x учун ушбу

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_k(\xi))\,d\xi\to\int_{x_0}^{x} f(\xi, Y(\xi))\,d\xi,\ |x-x_0|\leqslant h$$

муносабат ўринли. Энди (1.46) да ($n\to\infty$ да) лимитга ўтамиз:

$$Y(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi), Y(\xi))\,d\xi,\ |x-x_0|\leqslant h.$$

Бундан $Y(x)$ функциянинг (1.45) интеграл тенгламанинг ёки унга эквивалент бўлган (1.1) дифференциал тенгламанинг $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган ва $Y(x_0)=y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими экани келиб чиқади.

V. Энди $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган ва $Y(x_0)=Y_0$ шартни қаноатлантирадиган $y=Y(x)$ ечим ягона эканини исбот этамиз. Фараз қилайлик, $y=Z(x)$ — ушбу $Z(x_0)=y$; бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва бирор $|x-x_0|\leqslant d$, $d\leqslant a$ оралиқда аниқланган ечим бўлсин. $|x-x_0|\leqslant h$ ва $|x-x_0|\leqslant d$ оралиқлар умумий x_0 нуқтага эга. Уларнинг умумий қисмини $|x-x_0|\leqslant h^*$, $h^*=\min\{h, d\}$ деймиз. Биз шу $|x-x_0|\leqslant h^*$ оралиқда $Y(x)\equiv Z(x)$ айниятнинг ўринли эканини исбот этамиз. Бунинг учун $|x-x_0|\leqslant h^*$ оралиқда аниқланган $u(x)=|Y(x)-Z(x)|\geqslant 0$ функцияни қурамиз. Сўнгра шундай мусбат сон ε ни оламизки, у $\varepsilon<\min\left(h^*, \frac{1}{L}\right)$, $L>0$ тенгсизликни қаноатлантирсин*). Биз $Y(x)\equiv Z(x)$ айниятнинг

---

*) Агар $L=0$ бўлса $u(x)=|Y(x)-Z(x)|\leqslant 0$ бўлади. Ундан $[x_0, x_0+\varepsilon]$ оралиқда $Y(x)\equiv Z(x)$ экани келиб чиқади.

тўғрилигини $[x_0, x_0+\varepsilon]$ оралиқда кўрсатамиз. Бу оралиқнинг бирор τ нуқтасида $u(x)$ функция ўзининг максимумига эришади. Уни m дейлик, яъни

$$\max u(x)=u(\tau)=m,\ x\in[x_0,\ x_0+\varepsilon].$$

Содда алмаштиришлар ёрдамида ушбуни топамиз $(x\in[x_0,\ x_0+\varepsilon])$:

$$u(x)=|Y(x)-Z(x)|=|\int_{x_0}^{x}f(\xi,Y(x))d\xi-\int_{x_0}^{x}f(\xi,Z(\xi))d\xi|\leqslant$$

$$\leqslant|\int_{x_0}^{x}\varepsilon\ {}_0|f(\xi,Y(\xi))-f(\xi,Z(\xi))|d\xi|\leqslant L|\int_{x_0}^{x}|Y(\xi)-Z(\xi)|d\xi|\leqslant$$

$$\leqslant L|\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}u(\xi)d\xi|\leqslant Lm\varepsilon,$$

яъни

$$u(x)\leqslant Lm\varepsilon,\ x\in[x_0,\ x_0+\varepsilon]. \qquad (1.50)$$

Агар $m=0$ бўлса, бундан $u(x)\leqslant 0$ келиб чиқади. Аммо $u(x)\geqslant 0$ (киритилиши бўйича) тенгсизликни қаноатлантиргани учун $[x_0,\ x_0+\varepsilon]$ дан олинган барча x лар учун охирги икки тенгсизликдан $u(x)\equiv 0$ экани келиб чиқади. Агар $m>0$ бўлса, (1.50) да $x=\tau$ деб, $m\leqslant Lm\varepsilon$ ёки $L\varepsilon\geqslant 1$ га эга бўламиз. Аммо ε нинг танланишига кўра $L\varepsilon<1$. Биз шу тенгсизликка зид бўлган тенгсизликка келиб қолдик. Демак, фақат $m=0$ бўлиши мумкин. Биз $[x_0,\ x_0+\varepsilon]$ оралиқда $Y(x)\equiv Z(x)$ айниятни исбот этдик. Жумладан $Y(x_0+\varepsilon)=Z(x_0+\varepsilon)$. Бу қийматни y_ε дейлик. Равшанки, $x_0+\varepsilon<x_0+h^*$. Биз $\varepsilon>0$ ни шундай танлашимиз мумкинки, $x_0+2\varepsilon<x_0+h^*$ бўлади. Энди $[x_0+\varepsilon,\ x_0+2\varepsilon]$ интервалда ҳам $Y(x)\equiv Z(x)$ айният ўринли эканини кўрсатиш мумкин. Мулоҳазалар худди юқоридагидек бўлади. Шунга ўхшаш $\varepsilon>0$ ни кичиклаштириб бориш ҳисобига x_0+h^* га етарли яқин бўлган $x_0+k\varepsilon$ (k — натурал сон) сонни ҳосил қилиш ва $[x_0+(k-1)\varepsilon,\ x_0+k\varepsilon]$ оралиқда бир хил $Y(x_0+(k-1)\varepsilon)=Z(x_0(k-1)\varepsilon)=y_{(k-1)\varepsilon}$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган $Y(x)$ ва $Z(x)$ ечимлар устма-уст тушишини исботлаш мумкин. Шундай қилиб, $[x_0,\ x_0+h^*]$ оралиқда $Y(x)\equiv Z(x)$ айниятнинг ўринли экани исбот этилди. Худди шундай мулоҳазаларни $[x_0-h^*,\ x_0]$ оралиқда ҳам татбиқ этиш мумкин. Демак, $|x-x_0|\leqslant h^*$ оралиққа $Y(x)\equiv Z(x)$ экани исботланди.

Эслатиб ўтамизки, $h^*=h$ бўлганда ягоналик исбот этилди дейиш мумкин. $h^*=d$ бўлсин дейлик. Бу ҳолда $d<h$ бўлади. Агар $Y(x)$ ва $Z(x)$ лар $Y(x_0+d)=Z(x_0+d)=y_d$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимлар бўлса, унда $[x_0+d,\ x_0+h]$ оралиқда $Y(x)\equiv Z(x)$ айният ўринли бўлади. Буни кўрсатиш учун яна юқоридагидек мулоҳаза юритиш лозим бўлади, фақат $\varepsilon<\min\left(h,\ \frac{1}{L}\right)$ дейилса етарли. Шундай мулоҳаза $[x_0-h,\ x_0-d]$ оралиқ учун юритилиши мумкин. Шундай қилиб, $|x-x_0|\leqslant h$

оралиқда аниқланган ва $Y(x_0)=y_0$ шартни қаноатлантирадиган ечим ягона бўлади.

VI. Биз ечимнинг мавжудлигини ва ягоналигини $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқ учун исботладик. Агар бу оралиқ $y=\varphi(x)$, $\varphi(x_0)=y_0$ ечим аниқланишининг максимал оралиғидан иборат *бўлмаса*, у ҳолда бу ечимни *давом эттириш* мумкин. Ҳақиқатан $\varphi(x_0+h)=y_0^{(1)}$ дейлик. Равшанки, $(x_0+h,\ y_0^{(1)})$ нуқта Г соҳанинг ичида ётади. Бу ҳолда чегараси билан бутунлай Г да жойлашган

$$\mathrm{P}^{(1)}=\{(x,y):|x-x_0^{(1)}|\leqslant a_1,\ |y-y_0^{(1)}|\leqslant b_1\}$$

тўғри тўртбурчак қуриш мумкин. $0\leqslant M_1=\max\limits_{(x,y)\in P^1}|f(x,y)|$ деймиз. $M_1=0$ бўлган ҳол равшан. $M_1>O$ бўлсин. Агар бошланғич қийматлар сифатида $x_0^{(1)}$, $y_0^{(1)}$ ни қабул қилсак, исбот этилганига кўра (1.1) тенглама $|x-x_0^{(1)}|\leqslant h_1$, $h_1=\min\left\{a_1,\ \frac{b_1}{M}\right\}$ оралиқда аниқланган ва $y(x_0^{(1)})=y_0^{(1)}$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга бўлади. $I=[x_0-h,\ x_0+h]$ оралиқнинг учи билан $I_1=[x_0^{(1)}-h_1,\ x_0^{(1)}+h_1]$ оралиқнинг ўртаси устма-уст тушади (чунки $x_0^{(1)}=x_0+h$). Шу нуқтада ҳар икки қурилган ечимлар бир хил қиймат қабул қилади. Ягоналикка кўра бу ечимлар $I\cap I_1$ оралиқда устма-уст тушади. Аммо I_1 оралиқнинг ярми $(x_0^{(1)},\ x_0^{(1)}+h_1)$ I дан ташқарида ётади. Қурилган ечим шу оралиқда аввал I оралиқда қурилган ечимнинг *давоми* бўлади, деймиз. Агар $\varphi(x_0^{(1)}+h_1)=y^{(2)}$ десак, $(x_0^{(2)},\ y_0^{(2)})\in\Gamma$, $x_0^{(2)}=x_0^{(1)}+h_1$ бўлганда $x_0^{(2)}$, $y_0^{(2)}$ бошланғич қийматларга эга бўлган ва $I_2=[x_0^{(2)}-h_2,\ x_0^{(2)}+h_2]$, $h_2=\min\left(a_2,\ \frac{b_2}{M}\right)$ оралиқда олинган ягона ечимни қуриш мумкин, I_2 ҳам I_1 га нисбатан I_1 ва I оралиқларга ўхшаш жойлашган бўлади. $I_1\cap I_2$ да янги ечим аввалги (I_1 да аниқланган) ечим билан бир хил бўлади. I_2 нинг иккинчи ярмида эса аввалги ечимнинг давомига эга бўламиз. Шунга ўхшаш мулоҳазалар x нинг камаювчи қийматлари учун ҳам олиб борилиши мумкин. Кўрсатиш мумкинки, шундай давом эттиришлар ёрдамида Г соҳанинг чегарасига исталганча яқин бориш мумкин, яъни ечим мавжудлигининг максимал интервалини топиш мумкин.

Шундай қилиб, 1.2- теорема тўла исбот бўлди.

VII. Энди кетма-кет яқинлашиш ёрдамида дифференциал тенгламанинг аниқ ечимини унга m- яқинлашиш билан ($y_m(x)$ билан) берилган аниқликда алмаштиришга тўхталамиз. Ушбу

$$y_m(x)+[y_{m+1}(x)-y_m(x)]+[y_{m+2}(x)-y_{m+1}(x)]+\ldots$$

функционал қаторни кўрайлик. II бўлимдаги мулоҳазаларга кўра ((1.48) тенгсизликларга қаранг) бу қатор $Y(x)$ функцияга $|x-x_0|\leqslant h$ да текис яқинлашади. Демак, $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда

$$Y(x)=y_m(x)+[y_{m+1}(x)-y_m(x)]+[y_{m+2}(x)-y_{m+1}(x)]+\dots$$

Бундан, (1.48) тенгсизликлардан фойдалансак:

$$|Y(x)-y_m(x)|\leqslant \frac{L^mM}{(m+1)!}|x-x_0|^{m+1}+\frac{L^{m+1}M}{(m+2)!}|x-x_0|^{m+2}+\dots$$

ёки

$$|Y(x)-y_m(x)\leqslant L^mM\,|x-x_0|^{m+1}\left[\frac{1}{(m+1)!}+\right.$$

$$\left.+\frac{L}{(m+2)!}|x-x_0|+\frac{L^2}{(m+3)!}|x-x_0|^2+\dots\right] \qquad (1.51)$$

келиб чиқади. Бу (1.51) тенгсизлик $y_m(x)$ функциянинг аниқ ечим $Y(x)$ дан фарқини баҳолайди. Агар $|x-x_0|\leqslant h$ эканини ҳисобга олсак, $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқнинг ҳар бир нуқтасида ушбу

$$|Y(x)-y_m(x)|\leqslant L^mMh^{m+1}\left[\frac{1}{(m+1)!}+\frac{Lh}{(m+2)!}+\frac{L^2h^2}{(m+3)!}+\dots\right] \qquad (1.52)$$

муносабат ўринли. (1.52) да M, L ва h — маълум миқдорлар, m эса талаб этилган аниқликдан топилади. Агар ҳар бир $x\in[x_0-h,\ x_0+h]$ нуқтада $[Y(x)-y_m(x)|\leqslant\varepsilon$ тенгсизлик бажарилиши талаб этилса, у ҳолда m ни топиш учун

$$L^mMh^{m+1}\left[\frac{1}{(m+1)!}+\frac{Lh}{(m+2)!}+\frac{L^2h^2}{(m+3)!}+\dots\right]\leqslant\varepsilon \qquad (1.53)$$

тенгсизликни ечиш лозим бўлади. Амалда қўлланиш учун (1.51) ва (1. 52) тенгсизликлар ўрнига уларга нисбатан қўполроқ, лекин қулайроқ тенгсизликлардан фойдаланилади. Ушбу

$$\varepsilon_m(x)=|Y(x)-y_m(x)|,\ m=0,1,\ \dots$$

белгилашни киритамиз. Равшанки, $m\geqslant 1$ бўлганда:

$$\varepsilon_m(x)=|Y(x)-y_m(x)|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,Y(\xi))-f(\xi,y_{m-1}(\xi))]d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,Y(\xi))-f(\xi,y_{m-1}(\xi))|d\xi\right|\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon_{m-1}(\xi)\,d\xi\right|.$$

Бундан

$$\varepsilon_1(x)\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon_0(\xi)\,d\xi\right|\leqslant LM\left|\int_{x_0}^{x}|\xi-x_0|\,d\xi\right|=L^1M\frac{|x-x_0|^2}{2!}.$$

$$\varepsilon_2(x)\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon_1(\xi)\,d\xi\right|\leqslant L^2M\left|\int_{x_0}^{x}\frac{|\xi-x_0|^2}{2!}\,d\xi\right|=L^2M\frac{|x-x_0|^3}{3!}.$$

. . . .

$$\varepsilon_m(x)\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon_{m-1}(\xi)\,d\xi\right|\leqslant L^mM\frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!},\ m=1,2,\dots\ .$$

Шундай қилиб, ушбу

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_0(x)&\leqslant M|x-x_0|,\\ \varepsilon_m(x)&\leqslant L^m M\frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)},\ \ m=1,2,\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(1.54)$$

тенгсизликларга эгамиз. Бундан $|x-x_0|\leqslant h$ ораликда $m\to\infty$ да $\varepsilon_m(x)\to 0$ келиб чиқади.

Мисол. Кетма-кет яқинлашиш усули ёрдамида

$$\frac{dy}{dx}=x-y,\ \Gamma=P=\{(x,\ y):\ 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$$

дифференциал тенгламанинг $y(o)=1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган тақрибий ечими топилсин ва 4-яқинлашишнинг хатоси ҳисоблансин.

$y_0(x)=1$ дейлик,

$$y=1+\int_0^x(\xi-y)\,d\xi$$

дан

$$y_1=1+\int_0^x(\xi-1)\,d\xi=1-x+\frac{x^2}{2!},$$

$$y_2=1+\int_0^x\left(\xi-1+\xi-\frac{\xi^2}{2}\right)d\xi=1-x+x^2-\frac{x^3}{3},$$

$$y_3=1-x+x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{24},$$

$$y_4=1-x+x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^5}{120}$$

ларни ҳосил қиламиз. Берилган дифференциал тенгламанинг ўнг томони x ва y ларнинг ихтиёрий қийматларида аниқланган, узлуксиз ва y бўйича узлуксиз дифференциалланувчи. Шунинг учун бирор P тўғри тўртбурчакни олайлик:

$$P=\{(x,\ y):0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

У ҳолда $h=\min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}$, $M=\max\limits_{(x,\ y)\in P}|f(x,\ y)|$ га кўра

$$M=2,\ h=\min\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}.$$

Бунга ўхшаш $\frac{\partial_f}{\partial_y}=-1$ бўлганидан $L=\max\limits_{(x,\ y)\in P}\left|\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right|=1$ бўлади. Шундай қилиб, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, $x_0=0$ ораликда ушбу

$$\varepsilon_4(x)=|Y(x)-y_4(x)|\leqslant 1^4\cdot 2\cdot\frac{x^5}{5!}=\frac{x^5}{60}$$

муносабат ўринли. Шу интервалда хатоликни топамиз:

$$\varepsilon_4\doteq\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}}\varepsilon_4(x)=\frac{1}{60\cdot 32}=\frac{1}{1920}\approx 0{,}0005.$$

Кўриниб турибдики, 4-яқинлашиш билан аниқ ечим $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ интервалда ҳар бир x учун кўпи билан $\frac{1}{1920}$ га фарқ қилар экан. Демак, 0,0005 хатолик билан $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ ораликда аниқ ечим ўрнида 4- яқинлашиш $y_4(x)$ ни олиш мумкин.

Машқ. 1. $\frac{dy}{dx} = 3x - \frac{y}{x}$ дифференциал тенгламанинг $P\{(x, y): \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ тўпламда $y(1) = 1$ шартни каноатлантирадиган ечими учун иккинчи яқинлашиш $y_2(x)$ топилсин ва хатолик ҳисоблансин.

2. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ дифференциал тенглама учун

$$P = \{(x, y): -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$$

тўпламда $y(0) = 0$ шартни қаноатлантирувчи иккинчи яқинлашиш $y_2(x)$ топилсин ва хатолик ҳисоблансин.

3. $\frac{dy}{dx} = x - y^2$ дифференциал тенглама учун $P = \{(x, y): 0\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad -1 \leqslant \leqslant y \leqslant 1\}$ тўпламда $y(0) = 0$ шартни қаноатлантирувчи учинчи яқинлашиш $y_3(x)$ топилсин ва хатолик ҳисоблансин.

4. $\frac{dy}{dx} = y, \ -\infty < y < \infty$ дифференциал тенглама учун $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x) \ldots$ кетма-кетлик тузилсин ва $Y(x) = \lim\limits_{m \to \infty} y_m(x)$ топилсин.

1.12- §. ДАВОМСИЗ ЕЧИМЛАР

1.16- теорема. (1.1) *дифференциал тенглама берилган бўлиб,* $f(x, y)$ ва $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *функциялар* R^2 *текисликнинг* **Г** *соҳасида аниқланган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда: 1)* (1.1) *дифференциал тенгламанинг* **Г** *соҳадан олинган ихтиёрий берилган* x_0, y_0 *бошланғич қийматларга эга бўлган давомсиз ечими мавжуд; 2) агар (1.1) дифференциал тенгламанинг бирор давомсиз ечими унинг бирор бошқа ечими билан x нинг ҳеч бўлмаса битта қийматида устма-уст тушса, у ҳолда давомсиз ечим ўша ечимнинг давоми бўлади; 3) агар (1.1) дифференциал тенгламанинг икки давомсиз ечими x нинг ҳеч бўлмаганда битта қийматида устма-уст тушса, у ҳолда бу ечимлар айнан устма-уст тушади, яъни улар умумий аниқланиш интервалига эга бўлади.*

Исбот. (x_0, y_0) нуқта **Г** соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган шундай $y = \varphi(x)$ ечимни курамизки, бу ечим (1.1) дифференциал тенгламанинг шу бошланғич қийматларга эга бўлган ихтиёрий ечимининг давоми бўлади. Бу билан теореманинг 1- қисми исбот этилган бўлади.

(1.1) дифференциал тенгламанинг x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга ҳар бир ечими учун ўз аниқланиш интервали бор. Бундай ечимларнинг аниқланиш интервалининг чап учлари тўпламини $r_1{}^*$, ўнг учлари тўпламини эса $r_2{}^*$ дейлик. $m_1 = inf r_1{}^*$, $m_2 = sup r_2{}^*$ ($m_1 = -\infty$, $m_2 + \infty$ ҳоллар ҳам бўлиши мумкин). Энди x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга ва $m_1 < x < m_2$ интервалда аниқланган $y = \tilde{\varphi}(x)$

ечимни қурамиз. x^* нуқта шу интервалнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Аниқлик учун $x_0 \leqslant x^*$ дейлик. m_2 сон тўпламнинг аниқ юқори чегараси бўлгани учун (1.1) дифференциал тенгламанинг x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган ва аниқланиш интервали x^* ни ўз ичига олган $y=\psi(x)$ ечими мавжуд. Энди $\tilde{\varphi}(x^*)=\psi(x^*)$ деймиз. x^* да $\tilde{\varphi}(x)$ функциянинг қиймати тасодифан танланган $\psi(x)$ ечимга боғлиқ эмас. Ҳақиқатан, агар $y=\psi(x)$ ўрнига $y=\chi(x)$, $\chi(x_0)=y_0$ фунцияни олсак ва x^* бу функциянинг аниқланиш интервалига тегишли бўлса, у ҳолда Коши теоремасига кўра $\psi(x^*)=$ $=\chi(x^*)$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, $y=\tilde{\varphi}(x)$ функция $m_1<$ $<x<m_2$ интервалда бир қийматли аниқланган. Шу билан бирга $y=\tilde{\varphi}(x)$ функция учун $\tilde{\varphi}(x_0)=y_0$ ва бу функция (1.1) тенгламанинг ечими, чунки қурилишга кўра $y=\tilde{\varphi}(x)$ функция $m_1<x<m_2$ интервалнинг ҳар бир x^* нуқтасига яқин нуқталарда (1.1) тенгламанинг бирор ечими билан бир хил бўлади.

Энди $y=\varphi(x)$ функция (1.1) дифференциал тенгламанинг x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган ва $r_1<x<r_2$ интервалда аниқланган ечими бўлсин. У ҳолда $r_1 \in r_1{}^*$, $r_2 \in r_2{}^*$ ва $m_1 \leqslant r_1, r_2 \leqslant m_2$, $\varphi(x_0)=\tilde{\varphi}(x_0)$ бўлгани учун Коши теоремасига кўра $r_1<x<r_2$ интервалда $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$. Бундан $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечим $y=\varphi(x)$ ечимнинг $r_1<x<r_2$ интервалдан ташқарига ($m_1<x<m_2$ интервалгача) давоми экани келиб чиқади.

Қурилган $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечим давомсиздир. Бундай бўлмасин дейлик. ($y=\psi(x)$ ечим $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечимнинг давоми бўлсин. Унда x_0, y_0 ни $y=$ $=\psi(x)$ ечим учун бошланғич қийматлар қилиб олиш мумкин. Юқоридаги исботга кўра $y=\varphi(x)$ ечим $y=\psi(x)$ ечимнинг давоми $y=\tilde{\varphi}(x)$ нинг қурилишига эътибор беринг!) Бу мулоҳазалардан $y=$ $=\tilde{\varphi}(x)$ ечим $y=\psi(x)$ нинг ва аксинча, $y=\psi(x)$ ечим $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечимнинг давоми экани келиб чиқади. Демак, $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечим *ягона давомсиз ечим*. Теореманинг 1) қисми исбот бўлди.

$y=\tilde{\varphi}(x)$ давомсиз ечим бўлиб, бирор бошқа $y=\varphi(x)$ ечим билан бирор x^* нуқтада устма-уст тушсин: $\varphi(x^*)=\tilde{\varphi}(x^*)$. У ҳолда x^*, y^* давомсиз $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечим учун ҳам, $y=\varphi(x)$ учун ҳам бошланғич қийматлар бўлади. Шунинг учун юқорида исбот этилганига кўра $y=$ $=\tilde{\varphi}(x)$ ечим $y=\varphi(x)$ ечимнинг давоми бўлади. Бу билан теореманинг 2) қисми исботланди.

Агар $y=\varphi(x)$ ечим давомсиз бўлса, у ечим юқоридаги мулоҳазаларга кўра $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечимнинг давоми бўлади. Шунинг учун $\varphi(x)$ ва $\tilde{\varphi}(x)$ ечимлар тўла устма-уст тушади. 3) қисм ҳам исбот бўлди. Демак, 1.16- теорема тўла исбот этилди.

Натижалар. 1) (1.1) *дифференциал тенгламанинг ихтиёрий бошланғич қийматларга эга бўлган* $y=\varphi(x)$ *ечими Коши теоремасининг шартлари бажарилганда давомсиз* $y=\tilde{\varphi}(x)$ *ечимгача давом эттирилиши мумкин. Шу маънода давомсиз ечимлар дифференциал тенгламанинг барча ечимларини ўз ичига олади;*

2) *агар* **Г** *соҳа чегараланган бўлса,* m_1 *ва* m_2 *лар чекли бўлади;*

3) *агар Пикар теоремасининг шартлари фақат ҳамма нуқталари билан* **Г** *соҳада ётган Р тўғри тўртбурчакда ўринли бўлиб қолмай, балки ихтиёрий* P^*, $P^* \subset$ **Г** *тўғри тўртбурчакда ўринли бўлса, у ҳолда* $|x-x_0| \leqslant h$ *оралиқда аниқланган ва* x_0, y_0 *бошланғич*

қийматларга эга бўлган $y=\varphi(x)$ *ечимни давомсиз ечимгача давом эттириш мумкин.* Бунинг исботи юқоридаги теореманинг исботига асосланади;

4) *агар* $y=\varphi(x)$ (1.1) *дифференциал тенгламанинг давомсиз ечими бўлиб, унинг мавжудлигининг максимал интервали* $m_1<x<<m_2$ *бўлса, у ҳолда* $y=\varphi(x)$ *ечим* $x\to m_1$ *ва* $x\to m_2$ *да* **Г** *соҳанинг чегарасига интилади.*

Мисол. Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2-1},\ -1<y<1$$

дифференциал тенгламанинг $\varphi(0)=0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган давомсиз ечими қурилсин.

Аввало

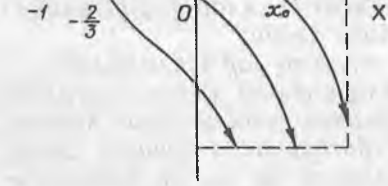
$$f(x,\ y)=\frac{1}{y^2-1}\ \text{ва}\ F(y)=\int\limits_0^y(\xi^2-1)\,d\xi.$$

Берилган тенгламанинг барча ечимлари

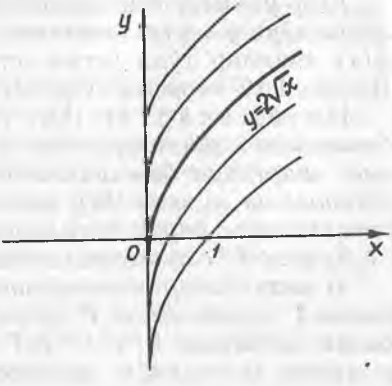
$$F(y)=x+C\ \text{ёки}\ \frac{y^3}{3}-y=x+C$$

муносабат билан ёзилади. Бошланғич шартга кўра $C=0$. Равшанки, $y^2-1=0$ дан $y=\pm1$, $F(-1)=\frac{2}{3}$, $F(1)=-\frac{2}{3}$. Энди $m_1=-\frac{2}{3}$, $m_2=\frac{2}{3}$ дейлик. Агар x ушбу $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ интервалда ўзгарса, y ушбу $-1<x<1$ интервалда ўзгаради. Шу $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ интервал $\frac{y^3}{3}-y=x$ ечим учун аниқланишнинг максимал интервали бўлади. Демак, $\frac{y^3}{3}-y=x$ ечим $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ интервалда давомсиз ечим бўлади.

Агар $\varphi(x_0)=0$, $x_0\neq0$ бўлса, $C\neq0$ ва $C=-x_0$. Бу ҳолда $\frac{y^3}{3}-y=x-x_0$ ечим



13- чизма



14- чизма

узунлиги $\frac{4}{3}$ га тенг бўлган аниқланиш интервалига эга, яъни $-\frac{2}{3}-x_0<x<$ $<\frac{2}{3}-x_0$. $m_1=-\frac{2}{3}-x_0$, $m_2=\frac{2}{3}-x_0$. Шундай қилиб, $\frac{y^3}{3}-y=x-x_0$ ечим $-\frac{2}{3}-x_0<x<\frac{2}{3}-x_0$ интервалда давомсиз ечимдир (13- чизма).

Қурилган мисолда m_1 ва m_2 лар чекли.

Машқ. Ушбу $\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{1}{2}}$, $x>0$ дифференциал тенгламанинг $\varphi(0)=0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган давомсиз ечими топилсин ва унинг аниқланиш интервали учун $m_1=0$, $m_2=+\infty$ экани кўрсатилсин (14- чизмага қаранг).

ε- ТАҚРИБИЙ ЕЧИМ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

2.1- §. ε- ТАҚРИБИЙ ЕЧИМ. ЭЙЛЕР СИНИҚ ЧИЗИҒИ

1. (1.1) дифференциал тенглама берилган бўлиб, унда $f(x,y)$ функция Γ соҳада узлуксиз бўлсин.

2.1- таъриф. *Агар бирор I (очиқ, ёпиқ, ярим очиқ) интервалда аниқланган $y=\varphi(x)$ функция учун ушбу тўртта шарт:*

1°. $(x,\varphi(x))\in\Gamma$, $x\in I$;

2°. $\varphi(x)\in C(I)$, $\varphi(x)\in C^1(I\setminus S)$ *(бунда S тўплам $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ функция 1- тур узилишга эга бўлган ёки мавжуд бўлмаган нуқталар тўплами);*

3°. $\left|\frac{d\varphi(x)}{dx}-f(x,\ \varphi(x))\right|\leqslant\varepsilon$, $x\in I\setminus S$;

4°. *S — чекли тўплам,*

ўринли бўлса, у ҳолда $y=\varphi(x)$ функция I интервалда (1.1) *дифференциал тенгламанинг ε- тақрибий ечими дейилади.*

Таърифдан кўринадики, $\varepsilon=0$ ва $S=\varnothing$ бўлганда $\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$, $x\in I$ бўлади. Бу ҳолда 1.4- таърифда берилган ечим таърифини ҳосил қиламиз.

Қуйида биз ε- такрибий ечимнинг мавжудлиги масаласига тўхталамиз.

2.1- теорема. *Агар $f(x,\ y)$ функция чегараси билан бутунлай Γ соҳада ётган $P=\{(x,\ y):|x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}$ (a ва b лар чекли мусбат сонлар) ёпиқ тўғри тўртбурчакда узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий мусбат ε учун (1.1) дифференциал тенгламанинг $|x-x_0|\leqslant$ $\leqslant h$, $h=\min\left(a,\ \frac{b}{M}\right)$, $M=\max\limits_{(x,y)\in P}|f(x,y)|\geqslant0$, оралиқда $\varphi(x_0)=y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ε-тақрибий ечими мавжуд.*

Исбот. Агар $M=0$ бўлса, теореманинг тўғрилиги равшан. Тегишли ечим $|x-x_0|\leqslant a$ оралиқда аниқланган бўлади. Энди $M>$ >0 бўлган ҳолни кўрамиз. $\varepsilon>0$ берилган бўлсин, $x_0\leqslant x\cdot x_0+h$ оралиқда ε- тақрибий ечимни қурамиз ($x_0-h\leqslant x\leqslant x_0$ оралиқда тегишли ечим шунга ўхшаш қурилади). Ушбу

$$P_h = \{(x,\ y) : |x - x_0| \leqslant h,\ |y - y_0| \leqslant b\},$$
$$P_h^+ = \{(x,y) : x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h,\ |y - y_0| \leqslant b\}$$

тўғри тўртбурчакларни қурамиз. Равшанки, $P_h \subset P$, $P_h^+ \subset P$. $f(x,\ y)$ функция ёпиқ P тўпламда узлуксиз бўлгани учун шу тўпламда текис узлуксиз бўлади. Демак, берилган $\varepsilon > 0$ бўйича шундай $\delta(\varepsilon) > > 0$ топиладики, агар $(x,\ y) \in P$, $(\tilde{x},\ \tilde{y}) \in P$ нуқталар учун

$$|x - \tilde{x}| \leqslant \delta(\varepsilon),\ |y - \tilde{y}| \leqslant \delta(\varepsilon)$$

тенгсизликлар ўринли бўлса,

$$|f(x,\ y) - f(\tilde{x},\ \tilde{y})| \leqslant \varepsilon \qquad (2.1)$$

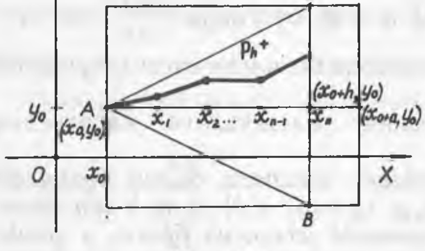
тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу мулоҳазадан кейинроқ фойдаланамиз.

Энди x_1, x_2, ..., x_{n-1} нуқталар ёрдамида $[x_0,\ x_0 + h]$ оралиқни шундай n та бўлакка бўламизки, ҳар бир $[x_{k-1},\ x_k]$ оралиқнинг узунлиги ушбу

$$\max|x_k - x_{k-1}| \leqslant \min\left(\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M}\right),\ k = 1,2,\ \ldots\ ,\ n;\ x_n = x_0 + h$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

$(x_0,\ y_0)$ нуқтадан бурчак коэффициенти M ва $-M$ га тенг бўлган икки тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Бу тўғри чизиқлар учун $M = \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{h}$ бўлсин. Агар $h = a$ бўлса, $M = \frac{b}{a}$; $h = \frac{b}{M}$ бўлганда $M = \frac{b}{h} = \frac{b}{\frac{b}{M}} > \frac{b}{a}$ бўлади. Демак $M \geqslant \frac{b}{a}$. Бундан келиб чиқадики, P_h^+ тўғри тўртбурчакда $(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ўтувчи M ва $-M$ бурчак коэффициентли тўғри чизиқлар $y = = y_0 - b$ ва $y = y_0 + b$ горизонтал тўғри чизиқлари билан абсциссаси $x \leqslant x_0 + a$, $x = x_0 + h$ бўлган нуқталарда кесишишади. У нуқталарни B ва C, $(x_0,\ y_0)$ нуқтани эса A дейлик (15-чизма). Ҳосил бўлган ABC учбурчакни P_h^{+1}, $P_h^{+1} \subset P_h^+$ деб белгилаймиз.



15-чизма

$(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ўтувчи $f(x_0,\ y_0)$ бурчак коэффициентли тўғри чизиқнинг $[x_0,\ x_1]$ оралиққа мос кесмасини чизамиз. Тўғри чизиқнинг чизилган бу бўлаги P_h^{+1} учбурчакда ётиши равшан. Унинг тенгламаси $y - y_0 = f(x_0,\ y_0)\quad(x - x_0)$ кўринишда, $x = x_1$ тўгри чизиқ билан кесишиш нуқтасининг координаталари эса

$$(x_1,\ y_1) = (x_1,\ y_0 + f(x_0,\ y_0)\ \ (x_1 - x_0))$$

бўлади. Сўнгра $(x_1,\ y_1)$ нуқтадан ўтувчи $f(x_1,\ y_1)$ бурчак коэффициентли тўғри чизиқнинг $[x_1,\ x_2]$ оралиққа мос кесмасини чизамиз. Унинг тенгламаси $y-y_1=f(x_1, y_1)(x-x_1)$ кўринишда, $x=x_2$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси координаталари эса

$$(x_2, y_2)=(x_2, y_1+f(x_1, y_1)\ (x_2-x_1))$$

каби бўлади.

Шу усулда давом этсак, $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ оралиқда аниқланган графиги P_h^{+1} учбурчакдан чиқмайдиган синиқ чизиқ чизиш мумкин. Унинг учларини $A_0=A$, $A_1=(x_1, y_1)$, ..., $A_{n-1}=(x_{n-1}, y_{n-1})$, $A_n=(x_n, y_n)=(x_0+h, y_n)$ деб белгилаймиз. Ҳосил бўлган $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ синиқ чизиқни $\varphi_n(x)$ дейлик. Бу функция изланган, қурилиши лозим бўлган ε-тақрибий ечимдир. Шуни исбот этамиз. 2.1-таърифнинг шартларини текширамиз.

1° шарт бажарилади, чунки $(x, \varphi_n(x))\in P_h^{+1}\subset P_h^{+}\subset P$. Агар $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ тўпламни S десак, 2° шарт $[x_0, x_0+h]\setminus S$ тўпламда бажарилади.

Энди 3° шартни текшириш қолди. $[x_{k-1}, x_k]$ оралиқни кўрамиз, $k=1, 2, \ldots n$. Агар ҳар бир $[x_{k-1}, x_k]$ оралиқда 3° шарт бажарилса, у ҳолда $[x_0, x_0+h]$ оралиқда $y=\varphi_n(x)$ функция учун 3° шарт бажарилади. Равшанки, $[x_{k-1}, x_k]$ оралиқда

$$|x-x_{k-1}|\leqslant\max|x_k-x_{k-1}|\leqslant\min\left(\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M}\right)\leqslant\delta(\varepsilon).$$

$x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k$ оралиқдан бирор $\tilde{x}$ ни олайлик. Шу оралиқ учун

$$\varphi_n^{(k)}(x)=\varphi_n^{(k)}(x_{k-1})+f(x_{k-1}, y_{k-1})(x-x_{k-1}),$$

$$\varphi_n^{(k)}(\tilde{x})=\varphi_n^{(k)}(x_{k-1})+f(x_{k-1}, y_{k-1})(\tilde{x}-x_{k-1})\ . \tag{2.2}$$

Бундан

$$|\varphi_n^{(k)}(x)-\varphi_n^{(k)}(\tilde{x})|=|f(x_{k-1}, y_{k-1})|\cdot|x-\tilde{x}|\leqslant M|x-\tilde{x}|.$$

Агар $\tilde{x}=x_{k-1}$ бўлса,

$$|\varphi_n^{(k)}(x)-\varphi_n^{(k)}(x_{k-1})|\leqslant M|x-x_{k-1}|\leqslant M\min\left(\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M}\right)=$$

$$=\min(M\delta(\varepsilon),\delta(\varepsilon))\leqslant\delta(\varepsilon).$$

Демак,

$$|\varphi_n^{(k)}(x)-\varphi_n^{(k)}(x_{k-1})|\leqslant\delta(\varepsilon).$$

Маълумки, $x_{k-1}<x<x_k$ интервалда

$$\frac{d}{dx}\varphi_n^{(k)}(x)=f(x_{k-1}, \varphi_n(x_{k-1})).$$

Энди $\left|\frac{d}{dx}\varphi_n^{(k)}(x)-f(x, \varphi_n^{(k)}(x))\right|$ ифодани баҳолаймиз. $x_{k-1}<x<x_k$ интервалда (2.1) га кўра

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi_n^{(k)}(x)-f(x,\varphi_n^{(k)}(x))\right|=$$

$$=|f(x_{k-1}, \varphi_n^{(k)}(x_{k-1}))-f(x, \varphi_n^{(k)}(x))|\leqslant\varepsilon$$

келиб чиқади. k га 1, 2, ..., n қийматлар берсак ҳам шу тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $[x_0, x_0+h]\setminus S$ тўпламда 3° шарт бажарилади. 4° шарт ўз-ўзидан бажарилган.

Юқорида қурилган $A_0\ A_1\ \dots\ A_n$ синиқ чизиқ $\varphi_n(x)$ — ε тақрибий ечим бўлиб, уни *Эйлер синиқ чизиғи* дейилади.

Синиқ чизиқнинг $A_0\ A_1,\ A_1\ A_2,\ \dots\ ,\ A_{n-1}\ A_n$ бўлакларини

$$\varphi_n^{(1)}(x),\ \varphi_n^{(2)}(x),\ \dots\ ,\ \varphi_n^{(n)}(x)$$

деб белгиласак, $\varphi_n(x) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \varphi_n^{(j)}(x)$ бўлади. Ҳар бир $\varphi_n^{(j)}(x)$ ни топиш учун (2.2) формула қўлланилади. $\varphi_n(x)$ ечимни қулайлик учун ε_n-тақрибий ечим деб атаймиз.

Биз ε_n-тақрибий ечимни P_n^+ тўғри тўртбурчакда қурдик. Тегишли ечим $P_n^- = \{(x,\ y) : x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0,\ |y - y_0| \leqslant b\}$ тўпламда ҳам қурилиши мумкин. Шундай қилиб, P_h тўпламда $\varphi_n(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирадиган ε_n-тақрибий ечимни қурилди деса бўлади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Машқ. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ дифференциал тенглама берилган бўлиб, $P = \left\{(x,\ y) : |x| \leqslant \leqslant \pi,\ |y| \leqslant \dfrac{5\pi}{6}\right\}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ бўлсин. $h = \min\left(a,\ \dfrac{b}{M}\right) = \min\left(\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$ бўлгани учун $P_h = \left\{(x,\ y) : |x| \leqslant \dfrac{5\pi}{6},\ |y| \leqslant \dfrac{5\pi}{6}\right\}$. $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{6}$ оралиқни $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$, $x_3 = \dfrac{\pi}{3}$, $x_4 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_5 = \dfrac{2\pi}{3}$ нуқталар билан бўлайлик. Масала бундай қўйилади:

Теоремада келтирилган усул билан $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{6}$ оралиқда Эйлер синиқ чизиғи $\varphi_6(x)$ қурилсин ва $x = \dfrac{3\pi}{4}$ нуқтада хатолик ҳисоблансин.

2.2-таъриф. *Агар $|x - x_0| \leqslant h$ оралиқда аниқланган функцияларнинг*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots\ ,\ f_n(x),\ \dots \tag{2.3}$$

функционал кетма-кетлиги учун шундай b ўзгармас сон топилсаки, барча натурал n сонлар ва $|x - x_0| \leqslant h$ оралиқ учун

$$|f_n(x)| \leqslant b$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда (2.3) кетма-кетлик $|x - x_0| \leqslant h$ оралиқда текис чегараланган дейилади.

2.3-таъриф. *Агар ёпиқ $|x - x_0| \leqslant h$ оралиқда аниқланган функциялардан тузилган (2.3) кетма-кетлик берилган бўлиб ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топилсаки, барча n лар учун $|x' - - x''| < \delta$ тенгсизлик бажарилганда ушбу*

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда (2.3) кетма-кетлик текис даражали узлуксиз дейилади.

2.2-теорема (Асколи — Арцел теоремаси). *Агар (2.3) кетма-кетлик чекли $|x - x_0| \leqslant h$ оралиқда текис чегараланган ва текис даражали узлуксиз бўлса, у ҳолда (2.3) кетма-кетликдан ўша оралиқда текис яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.*

2.3-теорема. *Агар ёпиқ $|x - x_0| \leqslant h$ оралиқда узлуксиз бўлган функцияларнинг (2.3) кетма-кетлиги шу оралиқда текис яқинла-*

шувчи бўлса, у ҳолда бу кетма-кетлик текис чегараланган ва текис даражали узлуксиз бўлади.

Бу теоремаларнинг исботи математик анализ дарсликларида бор бўлганидан унга тўхталмаймиз. Аммо бу теоремалардан келгусида фойдаланамиз.

Энди ε- тақрибий ечим тушунчасидан фойдаланиб, 1- бобдаги Пеано теоремасини (1.3- теоремани) исботлаймиз.

1.3- теореманинг исботи. Шундай $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n>0$ сонлар кетма-кетлигини оламизки, $n\to\infty$ да $\varepsilon_n\to 0$ бўлади, 2.1- теоремага кўра (1.1) дифференциал тенгламанинг $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган $\varphi_n(x)=y_0$ бошлангич шартни қаноатлантирадиган ва графиги P_h тўпламдан чиқмайдиган ε_n- тақрибий ечими бор ва бирор $\bar{x}$, $x_0-h\leqslant$ $\leqslant\bar{x}\leqslant x_0+h$ учун

$$|\varphi_n(x)-\varphi_n(\bar{x})|\leqslant M|x-\bar{x}| \tag{2.4}$$

ўринли. Энди $\bar{x}=x_0$ дейлик. У ҳолда $|x-x_0|\leqslant h\leqslant\frac{b}{M}$. Шунинг учун

$$|\varphi_n(x)-\varphi_n(x_0)|\leqslant M|x-x_0|\leqslant M\frac{b}{M}=b.$$

Ушбу

$$|\varphi_n(x)-y_0|\geqslant|\varphi_n(x)|-|y_0|$$

тенгсизликдан

$$|\varphi_n(x)|\leqslant|y_0|+b$$

келиб чиқади. Бу $\{\varphi_n(x)\}$ кетма-кетликнинг текис чегараланганлигини тасдиқлайди. Юқоридаги мулоҳазалардан $\{\varphi_n(x)\}$ кетма-кетликка 2.2- теоремани қўллаш мумкин.

$\{\varphi_{n_k}(x)\}$ кетма-кетлик $\{\varphi_n(x)\}$ кетма-кетликдан ажратилган ва бирор узлуксиз $\varphi(x)$ функцияга текис яқинлашувчи бўлсин. Қулайлик учун $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ қисмий кетма-кетлик учун ҳам $\{\varphi_n(x)\}$ белгини ишлатаверамиз.

(2.4) дан $n\to\infty$ да $|\varphi(x)-\varphi(\bar{x})|\leqslant M|x-\bar{x}|$. ε_n- тақрибий ечим учун тегишли интеграл тенгламани ёзамиз:

$$\varphi_n(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}(f(\xi,\varphi_n(\xi))+\Delta_n(\xi))\,d\xi, \tag{2.5}$$

бу ерда $|\Delta_n(x)|=\left|\frac{d\varphi_n(x)}{dx}-f(x,\varphi_n(x))\right|\leqslant\varepsilon_n$, $x\in\{|x-x_0|\leqslant$ $\leqslant h\}\setminus S$, $\Delta_n(x)=0$, $x\in S$. Энди $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ қисмий кетма-кетликни олайлик: $\varphi_{n_k}(x)\,k\to\infty\,\varphi(x)$. (2.5) га асосан $\varphi_{n_k}(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}(f(\xi,\varphi_{n_k}(\xi)+$ $+\Delta_{n_k}(\xi))\,d\xi$ ни ва $k\to\infty$ да $\varepsilon_n\to\infty$ эканини ҳисобга олсак:

$$\varphi(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi.$$

Бундан $\varphi(x_0)=y_0$. $f(x,y)$ функция P да узлуксиз бўлганидан $\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\ \varphi(x))$. Демак $\varphi(x)$ функция $\varphi(x_0)=y_0$ шартни қаноатлантиради ва $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда (1.1) дифференциал тенгламанинг ечими. Теорема исбот бўлди.

2. **2.4-теорема.** (1.1) *дифференциал тенгламада* $f(x,\ y)$ *функция* $P(P\subset\Gamma)$ *тўғри тўртбурчакда* y *бўйича* L *константа билан Липшиц шартини қаноатлантирсин. Агар* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *функциялар* I *интервалда* (1.1) *тенгламанинг мос равишда* ε_1- *ва* ε_2- *тақрибий ечимлари бўлиб,* I *интервалдан олинган бирор* τ *учун ва ҳақиқий сон* $\delta\geqslant 0$ *учун*

$$|\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)|\leqslant\delta \tag{2.6}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда I *интервалнинг барча нуқталарида ушбу*

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\leqslant\delta e^{L|x-\tau|}+\frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L|x-\tau|}-1\right),\ \ \varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2 \tag{2.7}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот: Аввал $\tau\leqslant x$, $x\in I$ интервални кўрайлик ($x\leqslant\tau$, $x\in I$ ҳолда мулоҳазалар шунга ўхшаш бўлади). $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар ε_1- ва ε_2- тақрибий ечим бўлгани учун $\{x:\tau\leqslant x,\ x\in I\}\backslash S$ тўпламда

$$\left|\frac{d\varphi_1(x)}{dx}-f(x,\ \varphi_1(x))\right|\leqslant\varepsilon_1,$$

$$\left|\frac{d\varphi_2(x)}{dx}-f(x,\ \varphi_2(x))\right|\leqslant\varepsilon_2$$

ўринли бўлади. Бу тенгсизликларнинг икки томонини τ дан x гача интеграллаймиз:

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_1(\tau)-\int_\tau^x f(\xi,\varphi_1(\xi))\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_\tau^x\left|\frac{d\varphi_1(\xi)}{d\xi}-f(\xi,\ \varphi_1(\xi))\right|d\xi\right|\leqslant\varepsilon_1(x-\tau),$$

$$\left|\varphi_2(x)-\varphi_2(\tau)-\int_\tau^x f(\xi,\varphi_2(\xi))\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_\tau^x\left|\frac{d\varphi_2(\xi)}{d\xi}-f(\xi,\ \varphi_2(\xi))\right|d\xi\right|\leqslant\varepsilon_2(x-\tau).$$

Ҳар икки тенгсизликнинг ўнг ва чап томонларини ҳадма-ҳад қўшиб, $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$, $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\tilde{q}(x)$, $|\tilde{q}(x)|=q(x)$ десак ва маълум $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$ тенгсизликдан фойдалансак, қуйидагига эга бўламиз:

$$|\tilde{q}(x)-\tilde{q}(\tau)-\int_\tau^x[f(\xi,\ \varphi_1(\xi))-f(\xi,\ \varphi_2(\xi))]d\xi|\leqslant\varepsilon(x-\tau).$$

Бундан

$$|\tilde{q}(x)|-|\tilde{q}(\tau)|-\left|\int_\tau^x[f(\xi,\ \varphi_1(\xi))-(\xi,\varphi_2(\xi))]d\xi\right|\leqslant\Bigg|\ q(x)-$$

$$-q(\tau)-\int_{\tau}^{x}[f(\xi,\ \varphi_1(\xi))-f(\xi,\ \varphi_2(\xi))]d\xi\Big|$$

тенгсизлик ўринли бўлгани учун

$$q(x)\leqslant q(\tau)+\int_{\tau}^{x}|f(\xi,\ \varphi_1(\xi))-f(\xi,\ \varphi_2(\xi))|d\xi+\varepsilon(x-\varepsilon)$$

муносабат келиб чиқади. $f(x,\ y)$ функция Липшиц шартини қаноатлантиради. Шунинг учун $q(x)\leqslant q(\tau)+L\int_{\tau}^{x}q(\xi)\,d\xi+\varepsilon(x-\tau)$.

Агар охирги тенгсизликда $\psi(x)=q(\tau)+\varepsilon(x-\tau)$, $\varphi(\xi)=q(\xi)$, $\chi=L$ деб, кейинги параграфда исботланадиган (2.9) тенгсизликни қўлласак ва $q(\tau)\leqslant\delta$ эканини ҳисобга олсак, ушбу $q(x)\leqslant\leqslant\delta e^{L(x-\tau)}+\frac{\varepsilon}{L}(e^{L(x-\tau}-1)$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Биз (2.7) муносабатни $\tau\leqslant x$, $x\in I$ ҳол учун исботладик. Агар $x\leqslant\tau$, $x\in I$ бўлса, тегишли интеграллашлар x дан τ гача олиб борилади ва

$$q(x)\leqslant\delta e^{-L(x-\tau)}+\frac{\varepsilon}{L}(e^{-L(x-\tau)}-1)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Икки ҳолни умумлаштириб ёзсак, (2.7) муносабатга келамиз. 2.4- теорема исбот бўлди.

1- натижа. *Агар* ε_1- *тақрибий ечим учун* $\varphi_1(x)\equiv Y(x)$, $x\in I$ $(\varepsilon_1=0)$ *бўлиб,* $Y(x)$ (1.1) *дифференциал тенгламанинг аниқ ечими бўлса, у ҳолда* $\delta\to0$, $\varepsilon_2\to0$ *да* $\varphi_2(x)\to Y(x)$ бўлади.

Хақиқатан (2.7) дан $\Big|Y(x)-\varphi_2(x)\Big|\leqslant\ \delta e^{L|x-\tau|}+\frac{\varepsilon_2}{L}(e^{L|x-\tau|}-1)$. Агар $\delta\to0$, $\varepsilon_2\to0$ бўлса, изланган муносабат ҳосил бўлади.

2- натижа. (2.7) *тенгсизликдан ягоналикни исботлашда фойдаланиш мумкин.*

Ушбу $y=\varphi_1(x)$ ва $y=\varphi_2(x)$ функциялар (1.1) дифференциал тенгламанинг бир хил x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган ва тегишли I_1, I_2 интервалларда аниқланган икки аниқ ечими бўлсин. Равшанки, $x_0\in I_1\cap I_2$, $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)$. Шунинг учун $|\varphi_1(x_0)-\varphi_2(x_0)|\leqslant\delta$ дан $\delta=0$ экани, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ларнинг аниқ ечимлигидан $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$ экани келиб чиқади (2.7) га кўра $I_1\cap I_2$ интервалда $\varphi_1(x)\equiv\varphi_2(x)$.

2.2- §. ИНТЕГРАЛ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Мазкур бандда баъзи муҳим интеграл тенгсизликлар ва уларнинг қўлланилиши билан шуғулланамиз.

1. 2.5-теорема. *Агар* $r_1\leqslant x\leqslant r_2$ *оралиқда аниқланган ва узлуксиз* $\varphi(x)\geqslant0$, $\psi(x)\geqslant0$ *ва* $\chi(x)\geqslant0$ *функциялар учун*

$$\varphi(x)\leqslant\psi(x)+\int_{r_1}^{x}\chi(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\qquad(2.8)$$

муносабат ўринли бўлса, улар учун $r_1\leqslant x\leqslant r_2$ *оралиқда ушбу*

$$\varphi(x)\leqslant\psi(x)+\int_{r_1}^{x}\chi(\xi)\psi(\xi)\ \exp\left(\int_{\xi}^{x}\chi(u)\,du\right)d\xi\qquad(2.9)$$

мунособат ўринли бўлса, улар учун $r_1 \leqslant (x) \leqslant r_2$ *оралиқда ушбу*

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) + \int_{r_1}^{x} \chi(\xi)\psi(\xi)\ \exp\left(\int_{\xi}^{x} \chi(u)\,du\right) d\xi \tag{2.9}$$

муносабат ҳам ўринли бўлади. (2.9) *тенгсизлик Гронуолл-Беллман тенгсизлиги деб аталади.*

Исбот. $q(x) = \int_{r_1}^{x} \chi(\xi)\varphi(\xi)d\xi$ деб белгилаймиз. Равшанки, $q(r_1)=0$. Бундан $\frac{dq(x)}{dx} = \chi(x)\varphi(x)$ келиб чиқади. Энди

$$\begin{cases} \frac{dq(x)}{dx} = \chi(x)\varphi(x), \\ \chi(x)q(x) = \chi(x)\int_{r_1}^{x} \chi(s)\varphi(s)\,ds \end{cases}$$

системани кўрайлик. Биринчи тенгламанинг чап ва ўнг томонларидан мос равишда иккинчисини айириб, (2.8) дан фойдалансак,

$$\frac{dq(x)}{dx} - \chi(x)q(x) \leqslant \chi(x)\psi(x).$$

Бу тенгсизликнинг икки томонини $\exp\left(\int_{s}^{\tau} \chi(u)\,du\right)$ га кўпайтириб, r_1 дан x гача интеграллаймиз:

$$\int_{r_1}^{x} \frac{dq(\xi)}{d\xi} e^{\int_{\xi}^{\tau} \chi(u)du} d\xi - \int_{r_1}^{x} \chi(\xi)q(\xi)e^{\int_{\xi}^{\tau} \chi(u)du} d\xi \leqslant \int_{r_1}^{x} \chi(\xi)\psi(\xi)e^{\int_{\xi}^{x} \chi(u)du} d\xi.$$

Чап томондаги биринчи интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$q(\xi)e^{\int_{\xi}^{\tau} \chi(u)du}\Bigg|_{r_1}^{x} + \int_{1}^{x} q(\xi)\chi(\xi)e^{\int_{\xi}^{\tau} \chi(u)du} d\xi -$$

$$\int_{r}^{x} \chi(\xi)q(\xi)e^{\int_{\xi}^{\tau} \chi(u)du} d\xi \leqslant \int_{r}^{x} \chi(\xi)\psi(\xi)\cdot e^{\int_{\xi}^{\tau} \chi(u)du} d\xi.$$

Бундан

$$q(x)e^{\int_{x}^{\tau} \chi(u)du} \leqslant \int_{r_1}^{x} \chi(\xi)\psi(\xi)e^{\int_{x}^{\tau} \chi(u)du} d\xi$$

келиб чиқади. Энди бу тенгсизликнинг икки томонини $e^{\int_{x}^{\tau} \chi(u)du}$ га бўлсак,

$$q(x)\leqslant e^{-\int\limits_x^\tau \chi(u)du}\int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\psi(\xi)e^{\int\limits_\xi^\tau \chi(u)du}d\xi=\int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\psi(\xi)e^{\int\limits_\xi^\tau \chi(u)du-\int\limits_x^\tau \chi(u)du}d\xi=$$

$$=\int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\psi(\xi)e^{\int\limits_\xi^\tau \chi(u)du+\int\limits_\tau^x \chi(u)du}d\xi=\int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\psi(\xi)e^{\int\limits_\xi^x \chi(u)du}d\xi.$$

Шундай қилиб,

$$q(x)\leqslant\int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\psi(\xi)e^{\int\limits_\xi^x \chi(u)du}d\xi.$$

(2.8) дан $q(x)\geqslant\varphi(x)-\psi(x)$ бўлгани учун охирги муносабат (2.9) нинг ўзидир.

Биз қуйида Гронуолл — Беллман тенгсизлигининг тез-тез учраб турадиган икки хусусий ҳолини таъкидлаб ўтамиз.

2.6-теорема. *Агар $r_1\leqslant x\leqslant r_2$ оралиқда аниқланган, узлуксиз $\varphi(x)\geqslant 0$, $\chi(x)\geqslant 0$ функциялар ва бирор ўзгармас сон $C\geqslant 0$* учун

$$\varphi(x)\leqslant C+\int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{2.10}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда шу $r_1\leqslant x\leqslant r_2$ оралиқда

$$\varphi(x)\leqslant C\ \exp\int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)d\xi \tag{2.11}$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу тенгсизлик *Гронуолл тенгсизлиги* деб юритилади.

2.7-теорема. *Агар $r_1\leqslant x\leqslant r_2$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз $\varphi(x)$ функция учун $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ ихтиёрий ўзгармас бўлганда*

$$\varphi(x)\leqslant\int\limits_{r_1}^x (\alpha\varphi(\xi)+\beta)d\xi \tag{2.12}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $r_1\leqslant x\leqslant r_2$ оралиқда

1) $\varphi(x)\leqslant\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(x-r_1)}-1)$ *(агар $\alpha>0$, $\beta>0$ бўлса);* (2.13)

2) $\varphi(x)\leqslant\beta(x-r_1)$ *(агар $\alpha=0$, $\beta>0$* бўлса*)* (2.14)

тенгсизликлар ҳам ўринли бўлади.

2. Энди Гронуолл тенгсизлиги қўлланиладиган ягоналикни исботлашга доир масала кўрайлик. Бирор $r_1\leqslant x\leqslant r_2$ *оралиқда* аниқланган $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар мос равишда ушбу бўлади, шунинг учун $Q < Q$. Бу зиддиятлик теоремани исбот этади.

2.3- §. БИТТА МУҲИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГСИЗЛИК ҲАҚИДА

Бизга ушбу

$$\dot{x} \leqslant a(t)x + b(t) \tag{2.17}$$

дифференциал тенгсизлик берилган бўлсин, унда $a(t) \in C(I)$, $b(t) \in C(I)$, $I = \{t : t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$.

2.4-таъриф. *Агар I оралиқда аниқланган $x = \varphi(t)$* функция учун

1°. $\varphi(t) \in C^1(I)$,
2°. $\dot{\varphi}(t) \leqslant a(t)\varphi(t) + b(t)$

шартлар ўринли бўлса, шу $x = \varphi(t)$ функция (2.17) дифференциал тенгсизликнинг I да аниқланган ечими дейилади.

2.8- теорема. *Агар $x = \varphi(t)$, $\varphi(t_0) \leqslant x_0$, функция* (2.17) *дифференциал тенгсизликнинг I оралиқда аниқланган ечими бўлса, у ҳолда шу ечим учун ушбу*

$$\varphi(t) \leqslant \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi} d\tau \right) e^{\int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi} \tag{2.18}$$

тенгсизлик ўринли.

Исбот. Ушбу $\xi(t) \leqslant 0 \, \forall t \in I$, $\xi(t) \in C(I)$ шартларни қаноатлантирадиган шундай $\xi(t)$ функция мавжудки,

$$\dot{\varphi}(t) = a(t)\varphi(t) + [b(t) + \xi(t)]$$

тенглик ўринли бўлади. Бу эса биринчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама. Уни интеграллаб топамиз $(\varphi(t_0) = x_0)$:

$$\varphi(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} [b(\tau) + \xi(\tau)] e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi} d\tau \right) e^{\int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi} =$$

$$= \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi} d\tau \right) e^{\int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi} + \left(\int_{t_0}^{t} \xi(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi} d\tau \right) e^{\int_{t_0}^{t} a(\xi)d}$$

Бундан $\xi(t)$ функция номусбат бўлгани учун изланган (2.18) тенгсизлик келиб чиқади.

Мазкур (2.18) тенгсизликни бошқа усул билан исботласа ҳам бўлади. Унинг учун (2.17) нинг икки томонини $e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$ га кўпайтириб, t_0 дан t гача интеграллаш етарли.

2.4-§. $\frac{dy}{dx}=f(x)$ КЎРИНИШДАГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАНИ ГРАФИК ИНТЕГРАЛЛАШ

Мазкур бандда дифференциал тенгламани бевосита интеграллаш билан эмас, балки унинг ечимининг баъзи хоссаларини дифференциал тенгламанинг ўнг томонига қараб ўрганамиз. Бу соҳада француз математиги Анри Пуанкаре [7], рус математиги А. М. Ляпунов [8] ва бошқалар «Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси» деб аталган назария яратганлар. 10—11-бобларда «сифат» назариясига доир баъзи маълумотлар берилади.

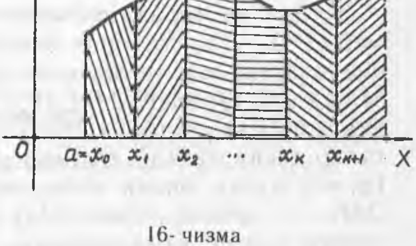
Ҳозир биринчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилган оддий дифференциал тенгламанинг ўнг томони фақат эркли ўзгарувчига боғлиқ бўлиб, *у функция ўз графиги билан берилган ҳолда* дифференциал тенглама ечимининг хоссаларини ўрганамиз.

1. Аввал функцияларни график интеграллаш билан шуғулланамиз. Бу аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш мавзусига мансубдир.

Масаланинг қўйилиши: Бирор $a \leqslant x \leqslant b$ оралиқда узлуксиз $f(x)$ функциянинг графиги бўйича бошланғичининг, яъни $F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(x)dx$, $a < x \leqslant b$ функциянинг графиги чизилсин.

Бошқача айтганда, шундай $y = F(x)$ чизиқни ясаш лозимки, унинг ҳар бир x га мос келган ординатаси асоси $[a, x]$ кесмадан иборат ва $y = f(x)$ чизиғи билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг бўлсин.

Ушбу $F(a) = 0$ тенгликка кўра, қурилиши лозим бўлган функция графиги $x = a$ нуқтада абсцисса ўқини кесиб ўтади. Бу $F(x)$ нинг графиги ҳақида дастлабки маълумот.



16- чизма

Энди $[a, x]$ кесмани $a = x_0, x_1, \ldots$ $(x_0 < x_1 < \ldots)$ нуқталар билан бўлакларга бўламиз. Бўлиш нуқталари тўпламига $f(x)$ функциянинг характерли нуқталарини (экстремум ва бурилиш нуқталарини, нолларини, бурчакли нуқталарини) киритиш лозим. Бўлиш нуқталаридан ордината ўқига параллел чизиқлар ўтказамиз. Улар $y=f(x)$ чизиғи билан кесишиб, эгри чизиқли трапециялар ҳосил қилади (16-чизма). Ўрта қиймат ҳақида теоремага кўра $[x_k, x_{k+1}]$ кесмада шундай ξ_{k+1} нуқта топиладики,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx=f(\xi_{k+1})(x_{k+1}-x_k),\ k=0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .$$

муносабат ўринли бўлади. Шунга асосан қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\begin{aligned} F(x_1) &= \int_a^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + F(x_0) = F(x_0) + f(\xi_1)(x_1-x_0), \\ F(x_2) &= \int_a^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_1) + f(\xi_2)(x_2-x_1), \\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad\qquad (2.19) \\ F(x_i) &= \int_a^{x_i} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_{i-1}} f(x)\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \\ &= F(x_{i-1}) + f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}), \\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \end{aligned}$$

Равшанки, ҳар бир $F(x_{i-1})$, $i=1,\ 2,\ .\ ..$ миқдор учун $F(x_i)$ миқдорни топиш мумкин. Энди бошланғич $F(x)$ функциянинг x_0, x_1, ..., x_k, . . . нуқталардаги қийматларини топиб, $(x_0, F(x_0))$, $(x_1, F(x_1))$, ..., $(x_k, F(x_k))$. . . нуқталарни ясаймиз ва уларни тўғри чизиқ кесмаси билан туташтирамиз. Синиқ чизиқ ҳосил бўлади. Шу синиқ чизиқ бошланғич функциянинг тахминий графиги бўлади. $[a, x]$ кесманинг бўлиш нуқталари тўпламига $f(x)$ функциянинг характерли нуқталари киритилгани учун $F(x)$ функциянинг тахминий графиги ҳам тегишли характерли нуқталарга эга бўлади. Қайд қиламизки, бўлиш нуқталарини қанча яқин қилиб олинса, $F(x)$ функциянинг графиги шунча аниқ бўлади.

Қўйилган масала ечимини охирига етказиш учун $(x_i, F(x_i))$, $i=0,\ 1,\ 2,\ ...$ нуқталарни ясаш билан шуғулланамиз. ξ_1, ξ_2, ..., ξ_k, ... нуқталарга мос келган ва $y=f(x)$ чизиқда ётувчи нуқталарни $M_1(\xi_1, f(\xi_1))$, $M_2(\xi_2, f(\xi_2))$, ... деб белгилайлик. Уларни ордината ўқига проекциялаймиз. Натижада $M_1'(0, f(\xi_1))$, $M_2'(0, f(\xi_2))$, . . . нуқталар ҳосил бўлади. Бу нуқталарни *қутб* деб аталувчи Q, $Q=(1, q)$, $|q|=1$ нуқта билан туташтирамиз. Ҳосил бўлган нурларни QM_1', QM_2', . . . деймиз. Энди $F(x)$ функция графигини $N_0N_1N_2$. . . синиқ чизиғи билан алмаштирамиз. Бу ерда $N_0=N_0(x_0,\ 0)$, $N_1=N_1(x_1,$

$F(x_1))$, $N_2=N_2(x_2, F(x_2))$, ... Синиқ чизиқнинг *бўйинлари* мос нурларга параллелдир, яъни $N_0N_1||QM_1'$; $N_1N_2||QM_2'$, ...Ҳақиқатан, N_iN_{i+1} бўғиннинг бурчак коэффициенти (2.19) га кўра

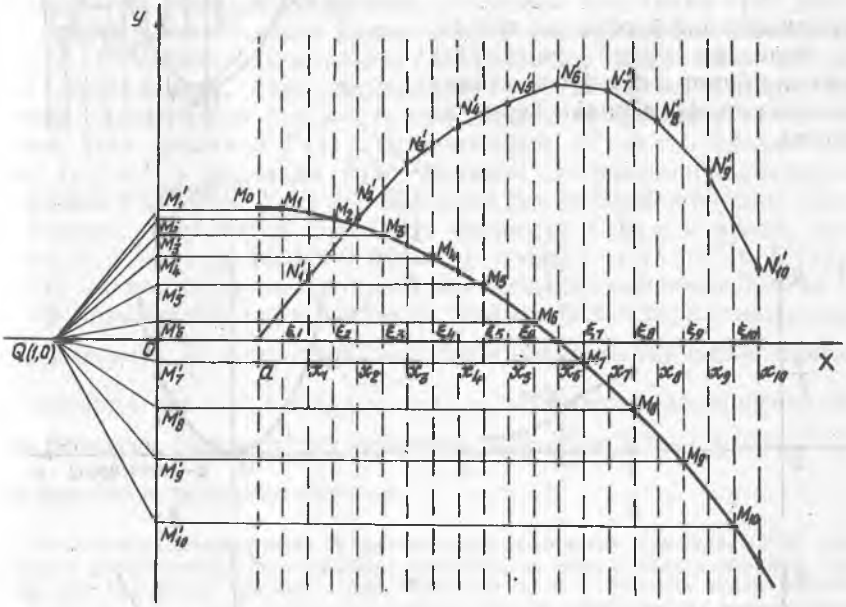
$$k_i=\frac{F(x_{i+1})-F(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=f(\xi_{i+1}).$$

Ясашга кўра эса QM_{i+1}' нурнинг бурчак коэффициенти

$$k_i'=\frac{f(\xi_{i+1})}{1}=f(\xi_{i+1}).$$

Демак, $QM_{i+1}'||N_iN_{i+1}$ (17- чизма).

18,19-чизмаларда икки функция учун бошланғич функциянинг графиги тахминий чизилган



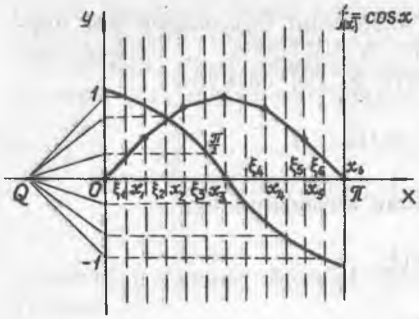
17- чизма.

Машқ. $f(x)$ функциянинг қуйидаги берилган графиклари бўйича $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ функциянинг графиги чизилсин (20, а, б, в, г- чизмалар).

Эслатма. Қутб Q ни абсцисса ўқида O нуқтадан чапда ёки ўнгда танлашнинг аҳамияти йўқ. Бизнинг мулоҳазалар учун ординатадан ўнгда жойлашган график учун Q нуқта ундан чапда, чапда жойлашган графикни чизиш учун эса Q нуқта ўнгда танланиши машқда қулай бўлади. Акс ҳолда тегишли нурларни (синиқ чизиқ бўғинларини) α бурчак остида эмас, $\pi-\alpha$ бурчак остида ўтказиш лозим бўлади.

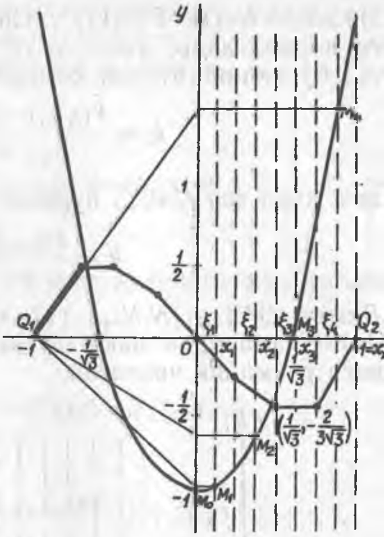
2. Энди

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{2.20}$$

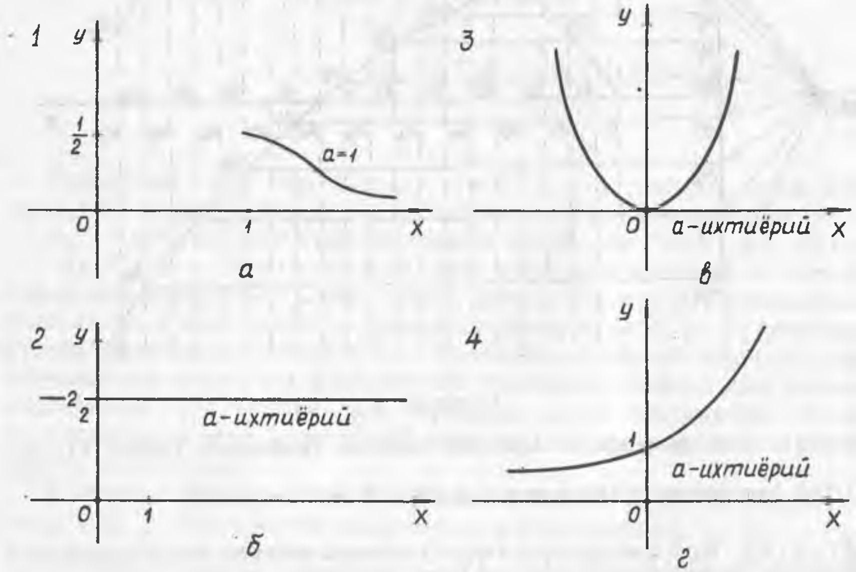


18- чизма

кўринишда дифференциал тенглама берилган бўлиб, унда $f(x)$ функция бирор $a \leqslant x \leqslant b$ ораликда узлуксиз графиги билан берилган бўлсин.



19- чизма



20- чизма.

Масаланинг қўйилиши: (2.20) дифференциал тенгламанинг I $= (x, y): a \leqslant x \leqslant b, -\infty < y < +\infty\}$ соҳанинг (x_0, y_0) нуктаси ўтадиган интеграл чизиғи тахминан чизилсин ва бу интегр чизиқнинг характерли хоссалари текширилсин.

Масалани ечиш учун аввал $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x)=\int\limits_a^x f(\xi)d\xi$, $a<x\leqslant b$ ни чизиш керак. Буни биз биламиз. Сўнгра $F(x_0)=\int\limits_a^{x_0} f(\xi)d\xi$ бўлганидан $y(x)=\int\limits_a^x f(\xi)d\xi+C_0$ формулада $C_0=y_0-\int\limits_a^{x_0} f(\xi)d\xi$ бўлади. Шундай қилиб, $y(x)=C_0+F(x)$ дан кўринадики, $F(x)$ функциянинг чизилган графигини ордината ўқи бўйича C_0 ўзгармасга силжитсак, (2.20) дифференциал тенгламанинг (x_0, y_0) нуқтадан ўтадиган интеграл чизиғи тахминий чизилган бўлади. Агар $x_0=a$ бўлса, $C_0=y_0$ бўлади.

Чизилган интеграл чизиқнинг экстремум нуқталари $f(x)$ функция графигининг абсцисса ўқини кесиб ўтган нуқталарига мос келади (18, 19-чизмаларга қаранг). $f(x)$ функция графигининг экстремум нуқталарига $F(x)$ функциянинг бурилиш нуқталари мос келади. Агар бирор $r_1<x<r_2$ оралиқда $f(x)$ функция камаювчи бўлса, ўша оралиқда $f'(x)<0$, бинобарин, $F''(x)<0$ бўлади. Демак, $r_1<x<r_2$ оралиқда $F(x)$ функция графигининг қавариқлиги юқорига қараган. $f'(x)>0$ бўлганда эса тескариси бўлади. Шунга ўхшаш, агар бирор $r_1<x<r_2$ оралиқда $f'(x)<0$ бўлиб, $r_1<x<r_1^*$, $r_1^*<r_2$ да $f(x)>0$ бўлса, у ҳолда $r_1<x<r_2^*$ да $F'(x)=f(x)>0$ ва $F(x)$ функция ўсувчи, акс ҳолда эса камаювчи бўлади.

18- чизмада $0\leqslant x\leqslant\pi$ оралиқда графиги билан берилган $y=\cos x$ функция учун $\frac{dy}{dx}=\cos x$, $y(0)=0$ Коши масаласи тақрибан ечилган. 19- чизмада эса $r_1<x<r_2, r_1<-1$, $r_2>1$ интервалда графиги билан берилган $f(x)=3x^2-1$ функция учун $\frac{dy}{dx}=3x^2-1, y(0)=0$ Коши масаласи тахминан ечилган.

Эслатма. Аниқлик катта бўлмагани учун баён этилган усул билан (2.20) кўринишдаги дифференциал тенгламаларни интеграллаш унча мақсадга мувофиқ эмас. Аммо кўп соҳаларда (физика, химия, биология ва б.) функция турли асбоблар ёрдамида график усулда аниқланиши мумкин. Шунда дифференциал тенгламаларни график интеграллашга тўғри келади. Албатта, техникада айтилган масалаларни кўзда тутиб турли *интеграторлар* яратилган, улар $f(x)$ функциянинг графиги бўйича дарҳол $F(x)=\int\limits_a^x f(\xi)d\xi$ функциянинг графигини чизиб беради. Интеграторларнинг конструкцияси (2.20) кўринишдаги дифференциал тенгламаларни график интеграллаш назариясига асосланган.

Машқ. Ўнг томони 20(а, б, в, г)-чизмада берилган чизиқлардан иборат бўлган $\frac{dy}{dx}=f(x)$ дифференциал тенгламани график интегралланг (унда $a=x_0$ дейилиши қулай).

3-боб

ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛМАГАН БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

3.1-§. ЕЧИМ ВА УМУМИЙ ЕЧИМ ТУШУНЧАСИ. ҚОШИ МАСАЛАСИ

1. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли одди дифференциал тенгламалар ушбу

$$F(x,\ y,\ y')=0 \qquad (3.1$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда F уч аргументли функция бўлиб, у ўлчовли фазонинг очиқ D_3 тўпламида (D_3 соҳада) аниқланган. Ага бу тўпламни $\mathbf{R}^2$ текислигига ортогонал проекцияласак, $\mathbf{R}^2$ да биро очиқ Γ тўплам (Γ соҳа) ҳосил бўлади.

3.1-таъриф. (3.1) *дифференциал тенглама берилган бўлиб* $F(x,y,y')$ *функция* $\mathbf{R}^3$ *фазонинг* D_3 *соҳасида аниқланган бўлсин. Ага* I *(очиқ, ёпиқ ёки ярим очиқ) интервалда аниқланган* $y=\varphi(x$ *функция учун қуйидаги учта шарт:*

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ.\ (x,\ \varphi(x))\in\Gamma,\ x\in I,\ (x,\ \varphi(x),\varphi'(x))\in D_3,\ \Gamma\subset\mathbf{R}^2,\ D_3\subset\mathbf{R}^3; \\ 2^\circ.\ \varphi(x)\in C^1(I); \\ 3^\circ.\ F(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x))\equiv 0,\ x\in I \end{array}\right\} \qquad (3.2$$

бажарилса, бу функция I *интервалда* (3.1) *дифференциал тенглама нинг ечими дейилади.* (3.1) *тенгламанинг ечимига мос эгри чизи (яъни* $y=\varphi(x)$ *функциянинг графиги) унинг интеграл эгри чизиғ (ёки соддагина интеграл чизиғи) дейилади.*

Агар параметрик кўринишда берилган $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in$ *(*I_t *— параметр* t *нинг ўзгариш соҳаси ёпиқ, очиқ, ярим очи интервалдан иборат) функция учун* $x'(t)\neq 0$, $t\in I_t$ *бўлиб, қуйидаг учта шарт:*

$$1^\circ.\ (x(t),\ y(t))\in\Gamma,\ \left(x(t),\ y(t),\ \frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\in D_3,\ t\in I_t;$$

$$2^\circ.\ y(t)\in C^1(I_t),\ x(t)\in C^1(I_t);$$

$$3^\circ.\ F\left(x(t),\ \ y(t),\ \ \frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\equiv 0,\ t\in I_t$$

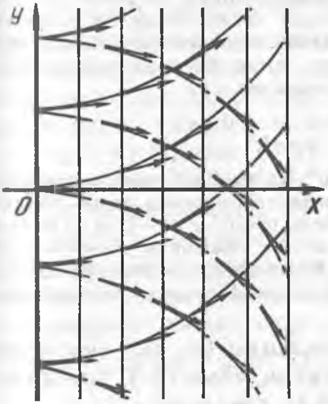
бажарилса, у ҳолда $x=x(t)$, $y=y(t)$ *функция* I_t *интервалд* (3.1) *дифференциал тенгламанинг ечими дейилади. Баъзи ҳоллард ечимни шу кўринишда излаш ёки ёзиш қулай бўлади.*

(3.1) дифференциал тенглама учун ҳам (1.1) дифференциа тенглама учун айтилганидек ечим уч: $y=\varphi(x)$; $\Phi(x,\ y)=0$; $x=x(t$ $y=y(t)$ $(t\in I_t)$ кўринишдан биттаси орқали изланади.

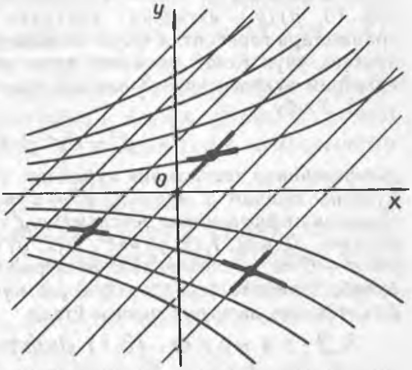
Агар (3.1) дифференциал тенглама y га нисбатан бир қийматл ечилиши мумкин бўлса, у ҳолда (1.1) дифференциал тенгламаг келамиз ва 1-бобдаги барча мулоҳазалардан фойдаланишими мумкин. Аммо (3.1) доим бир қийматли ечилавермайди.

(3.1) дифференциал тенглама очиқ Г тўпламнинг ҳар бир (x, y) нуқтасида y' нинг битта ёки бир нечта қийматларини аниқласин дейлик. Ҳар бир (x, y) нуқтада y' дан фойдаланиб битта ёки бир нечта бирлик вектор чизамиз. Натижада йўналишлар майдони ҳосил бўлади. Энди интеграл чизиқларнинг тақрибий тасвирини олишимиз мумкин. Ечим тушунчасини мустаҳкамлаш учун мисоллар кўрайлик:

Мисоллар. 1. Ушбу $y'^2 - x^2 = 0$, $D_3 = \{(x, y, y') : 0 \leqslant x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty\}$ дифференциал тенглама учун $y' = \pm x$, $0 \leqslant x < +\infty$. Ордината ўқига нисбатан ўнг ярим текисликнинг ҳар бир (x, y) нуқтасидан $y' = x$ ва $y' = -x$ дифференциал тенгламаларнинг фақат биттадан интеграл чизиқлари ўтади (21-чизма). Аввал йўналишлар майдонини чизиш қийин эмас. Бирлик векторни $y' = x$ учун *туташ чизиқлар* билан, $y' = -x$ учун эса пунктирлар билан белгилаймиз (21-чизма).



21- чизма



22- чизма

Сўнгра бу йўналишлар бўйича интеграл чизиқларни чизамиз. Албатта қулайлик учун аввал ($x = k$ ва $x = -k$, k — ҳақиқий сон) изоклиналарни чизиб чиқиш керак. $y = \frac{x^2}{2} + C$, $y = -\frac{x^2}{2} + C$ функциялар C нинг ҳар бир қийматида 3.1-таърифнинг барча шартларини қаноатлантиришини ва ечим бўлишини текшириш қийин эмас.

2. Ушбу

$$y'^2 - (1+y)y' + y = 0,\ D_3 = \{(x, y, y') : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty\}$$

дифференциал тенглама учун $y' = 1$ ва $y' = y$. Улардан биринчиси бурчак коэффициенти 1 га тенг тўғри чизиқлар оиласини ифодаласа, иккинчиси $y = Ce^x$ экспоненциал функциялар оиласини ифодалайди (22-чизма). $y = x + C$ ва $y = Ce^x$ функциялар C нинг ҳар бир қийматида 3.1-таърифнинг шартларини қаноатлантиришини осонгина текшириш мумкин.

Умумий ечим тушунчасини киритишдан аввал (3.1) тенглама учун Коши масаласини қўямиз.

Коши масаласи: (3.1) *дифференциал тенгламанинг* $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in \Gamma$ *бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин ёки геометрик нуқтаи назардан,* (3.1) *дифференциал тенгламанинг* $(x_0, y_0) \in \Gamma$ *нуқтадан ўтувчи интеграл чизиғи кўрсатилсин.*

(3.1) дифференциал тенглама y' га нисбатан ечилиши мумкин дейлик. У ҳолда (x_0, y_0) нуқтанинг бирор атрофида y' учун бир неча ҳақиқий қийматларни (ҳақиқий функцияларни) топамиз:

$$y' = f_k(x, y), \ k = 1, 2, \dots, m. \tag{3.3}$$

Агар ҳар бир $f_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ функция бирор мавжудлик ва ягоналик теоремасининг шартларини қаноатлантирса, у ҳолда (x_0, y_0) нуқтадан (3.1) дифференциал тенгламанинг m та интеграл чизиғи ўтади. Баъзи $f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_{2n}}$ $(k_{2n} \leqslant m)$ функциялар комплекс бўлса, у ҳолда биз фақат $f_{k_{2n+1}}, \dots, f_m$ функциялар билан иш кўрамиз. Бу ҳолда (x_0, y_0) нуқтадан тегишли дифференциал тенгламанинг $m - k_{2n}$ та интеграл чизиғи ўтади.

Агар (3.1) дифференциал тенгламанинг ҳақиқий $f_1(x, y), \dots, f_k(x, y)$ $(k \leqslant m)$ функцияларга мос келган ва (x_0, y_0) нуқтада унинг интеграл чизиқларига ўтказилган уринмалар турли бурчак коэффициентларига эга бўлса, у ҳолда Коши масаласи ягона ечимга эга дейилади.

Масалан. 1-мисолда кўрилган $y'^2 - x^2 = 0$ дифференциал тенглама учун ҳар бир $(0, y)$ (y — ихтиёрий) нуқтадан иккита интеграл чизиқ ўтади ва уларнинг уринмалари горизонтал тўғри чизиқлардан иборат. Демак, ордината ўқининг ихтиёрий нуқтаси учун Коши масаласи ягона ечимга эга эмас. Аммо ўнг ярим текисликнинг ихтиёрий нуқтаси учун Коши масаласининг ечими ягонадир.

3. Ушбу

$$y'^3 - e^x y'^2 + x^2 y' - x^2 e^x = 0, \ D_3 = \mathbf{R}^3$$

дифференциал тенгламани кўрайлик. Уни $(y' - e^x)(y'^2 + x^2) = 0$ кўринишга келтириш мумкин. Бундан $y' - e^x = 0$, $y'^2 + x^2 = 0$ дифференциал тенгламалар келиб чиқади. Иккинчи дифференциал тенгламани y' га нисбатан ечсак: $y' = ix$, $y' = -ix$ (i — мавҳум бирлик). Демак, $f_1(x, y) = e^x$, $f_2(x, y) = ix$, $f_3(x, y) = -ix$. Равшанки, $y' - e^x = 0$ дан $y = e^x + C$ ва тенгсизликнинг ихтиёрий нуқтаси учун Коши масаласи ягона ечимга эга бўлиб, ихтиёрий берилган (x_0, y_0) нуқтадан берилган дифференциал тенгламанинг фақат ягона интеграл чизиғи ўтади.

3.2-таъриф. *(3.1) дифференциал тенглама (x_0, y_0) нуқтанинг бирор атрофида y' га нисбатан ечилиши мумкин, яъни (3.3) тенгламаларга ажралади дейлик. Агар ҳар бир (3.3) тенглама*

$$y = \varphi_k(x, C), \ k = 1, 2, \dots, m \tag{3.4}$$

умумий ечимга ёки

$$\Phi_k(x, y) = C, \ k = 1, 2, \dots, m, \ C \text{ — ихтиёрий ўзгармас} \tag{3.5}$$

умумий интегралга эга бўлса, у ҳолда (3.4) умумий ечимлар тўплами (ёки (3.5) умумий интеграллар тўплами) берилган (3.1) дифференциал тенгламанинг умумий ечими (ёки умумий интеграли) дейилади.

Киритилган таъриф (3.1) тенглама y' га нисбатан чексиз кўп ечимга эга бўлган ҳол учун ҳам ўринли бўлади 1-мисолда $y'^2 - x^2 = 0$ эди. Ундан $0 \leqslant x < +\infty$ интервалда $y' = x$, $y' = -x$ бўлиб, биринчисининг умумий ечими $y = \frac{x^2}{2} + C$, иккинчисиники эса $y = -\frac{x^2}{2} + C$ бўлади. Берилган тенгламанинг умумий ечими $y = \frac{x^2}{2} + C$, $y = -\frac{x^2}{2} + C$ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\sin y' = 0, \ D_3 = \mathbf{R}^3$$

дифференциал тенгламани кўрайлик. Ундан $y'=k\pi$ (k — бутун) ва $y=k\pi x+C$ келиб чиқади. Умумий ечим ушбу

$y=C,\ y=-\pi x+C,\ y=\pi x+C,\ \dots,\ y=-n\pi x+C,\ y=n\pi x+C,\ \dots$ (n — натурал сон) чексиз кўп функциялар тўпламидан иборат.

3.3-таъриф. *Агар (3.1) тенгламанинг бирор I интервалда аниқланган $y=\varphi(x)$ ечимининг ҳар бир нуқтасида Коши масаласи ягона ечимга эга бўлса, у ҳолда $y=\varphi(x)\ (x\in I)$ ечим берилган тенгламанинг хусусий ечими* дейилади. 1- ва 2-мисолларда мос равишда $y=-\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{x^2}{2}$, $y=x$, $y=e^x$ функциялар тегишли дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларидир.

Юқоридаги таърифлар муносабати билан *махсус ечим* тушунчасини киритиш лозим бўлади.

3.4-таъриф. *Агар $y=\varphi(x)$, функция (3.1) тенгламанинг I интервалда аниқланган ечими бўлиб, $y=\varphi(x)$, $x\in I$ функция билан тавсифланадиган интеграл чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан $y=\varphi(x)$, $x\in I$ интеграл чизиқдан ташқари шу нуқтада у билан бир хил йўналишга эга бўладиган, аммо ўша нуқтанинг ихтиёрий атрофида ундан фарқ қиладиган яна бошқа интеграл чизиқ ўтса, у ҳолда $y=\varphi(x)$, $x\in I$ ечим (3.1) тенгламанинг I интервалда аниқланган махсус ечими дейилади.*

Махсус ечимларга 3.4-§ да алоҳида тўхталамиз.

1-мисолни $-\infty<x<+\infty$ интервалда кўрсак, ордината ўқининг ҳар бир нуқтасидан горизонтал уринмага эга бўлган икки интеграл чизиқ ўтади. Аммо Oy ўқи берилган дифференциал тенгламанинг ечими эмас. Демак, ўша мисолда махсус ечим йўқ.

Мисол. $(y')^3=y^2$, $D_3=\{(x, y, y'): -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,\ 0\leqslant y'<+\infty\}$ дифференциал тенгламани $y'=y^{\frac{2}{3}}$ кўринишда ёзиш мумкин. Маълумки, абсцисса ўқи (яъни $y=0$ чизиқ) ва $y=\frac{(x+C)^3}{27}$ кубик параболалар бу тенглама учун интеграл чизиқ бўлиб хизмат қилади. Аммо $y=0$ чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан бир хил йўналишда иккита интеграл чизиқ ўтади. Шунинг учун $y=0$ махсус ечимдир.

3.2-§. КВАДРАТУРАЛАРДА ИНТЕГРАЛЛАНУВЧИ БАЪЗИ ТЕНГЛАМАЛАР

1. n-даражали биринчи тартибли дифференциал тенглама

$$F(x, y, y')=a_0(x, y)(y')^n+a_1(x, y)(y')^{n-1}+\dots+a_{n-1}(x, y)y'+ +a_0(x, y)=0, \qquad (3.6)$$

$a_0(x, y)\neq 0$ кўринишда ёзилади. Бу y' га нисбатан n-даражали тенгламадир. Агар $n=1$ бўлса, $a_0(x, y)y'+a_1(x, y)=0$ ёки $a_0(x, y)\neq\neq 0$ бўлгани учун $y'=\frac{a_1(x, y)}{a_0(x, y)}=f(x, y)$ бўлади, яъни (1.1) дифференциал тенгламага келамиз. Албатта, (3.6) дифференциал тенгламада $a_0(x, y)$, $a_1(x, y)$, ..., $a_n(x, y)$ функциялар бирор очиқ Г тўпламда аниқланган ва узлуксиз. Энг содда ҳолда $a_i(x, y) = b_i = \text{const}\,(i=0, 1, \dots, n)$ бўлиб, ушбу

$$F(y') = b_0(y')^n + b_1(y')^{n-1} + \dots + b_{n-1}y' + b_n = 0$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг y' га нисбатан ҳақиқий ечимларини $k_j\,(j=1, 2, \dots, m,\ m \leqslant n)$ дейлик. У ҳолда $y' = k_j$ дан $y = k_j x + C$ ёки $k_j = \frac{y-C}{x}$ келиб чиқади. Шунинг учун $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$ берилган дифференциал тенгламанинг умумий интеграли бўлади.

Агар $a_0(x, y), \dots, a_n(x, y)$ функциялар очиқ Γ тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда (3.6) тенгламани y' га нисбатан ечиб, улардан ҳақиқий қийматларни олсак, қуйидаги

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, m, \ m \leqslant n$$

дифференциал тенгламаларга эга бўламиз. Кейинги мулоҳазалар $f_k(x, y)$ функцияларга боғлиқ бўлади. Бу функциялар учун Γ тўпламда Коши теоремасининг шартлари бажарилади дейлик. Унда бу тўпламнинг ҳар бир нуқтасида Коши масаласи ягона ечимга эга бўлади. Шуни қайд қиламизки, Γ тўплам $f_1, f_2, \dots, f_m$ функциялар аниқланиш соҳалари $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ нинг кесишмасидан иборат, яъни

$$\Gamma = \bigcap_{j=1}^{m} \Gamma_j.$$

Мисоллар. 1. $(y')^5 + \sqrt{3}\,(y')^4 - y' - \sqrt{3} = 0$ дифференциал тенгламани кўрайлик. У y' га нисбатан 5- даражали. Бу тенгламани $((y')^2+1)((y')^2-1)\cdot(y'+\sqrt{3}) = 0$ кўринишда ёзиш мумкин. Равшанки, унинг ҳақиқий ечимлари $y' = 1$, $y' = -1$, $y' = -\sqrt{3}$ бўлади. Аммо дифференциал тенгламанинг интегралини битта

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^5 + \sqrt{3}\left(\frac{y-C}{x}\right)^4 - \left(\frac{y-C}{x}\right) - \sqrt{3} = 0$$

формула билан ёзиш мумкин. Бунда $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \mathbf{R}^2$, $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \mathbf{R}^2$. Демак, юқоридаги тенглама учун R^2 текисликнинг ихтиёрий (x_0, y_0) нуқтасида Коши масаласи ягона ечимга эга.

2. Ушбу y' га нисбатан иккинчи даражали

$$(y')^2 - (2x + \cos x)y' + 2x\cos x = 0$$

дифференциал тенгламадан

$$y' = 2x, \qquad y' = \cos x$$

келиб чиқади. Бундан берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = x^2 + C, \qquad y = \sin x + C$$

бўлади. 2- мисолда $\Gamma_1 = \mathbf{R}^2$, $\Gamma_2 = \mathbf{R}^2$ ва $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \mathbf{R}^2$.$\mathbf{R}^2$ да ягоналик хоссаси ўринли. Худди шунингдек,

$$(y')^2 - \left(e^x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)y' + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \ D = \{(x, y):\ -1 < x < 1,\ -\infty < y < +\infty\}$$

$(DC\mathbf{R}^2)$ дифференциал тенглама учун $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \mathbf{R}^2 \cap D = D$ эканлигини кўрсатиш қийин эмас.

Агар $F(y') = 0$ дифференциал тенгламанинг y' га нисбатан илдизлари бирор интервални тўла қопласа, у ҳолда тегишли дифференциал тенглама $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$

интегралдан фарқли ечимларга ҳам эга бўлиши мумкин. Жумладан, $y'-|y'|=0$ дифференциал тенглама учун $0\leqslant k>-\infty$ интервалда $y'=k$. Ундан $y=kx+C(0\leqslant k<+\infty)$ келиб чиқади. Бу интеграл чизиқлардан фарқли яна $y=x^{\alpha}(0\leqslant x<+\infty, \alpha>1)$ интеграл чизиқлар ҳам мавжуд.

2. Номаълум функцияни ўз ичига олмаган

$$F(x, y')=0 \tag{3.7}$$

кўринишдаги дифференциал тенгламаларни кўрамиз. Агар (3.7) тенгламани y' га нисбатан ечиш мумкин бўлса, у ҳолда бирор I интервалда узлуксиз $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ функциялар учун $y'=f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$. тенгламаларга келамиз. Ундан $y=\int f_k(x)dx+C(k=1, 2, \ldots)$. Бу ечимлар тўплами умумий ечим бўлади.

Баъзи ҳолларда (3.7) тенгламани y' га нисбатан ечишга қараганда x га нисбатан ечиш осонроқ бўлади. Бунда $x=\psi_i(y')$ $(i=1, 2, \ldots)$ дифференциал тенгламага келамиз. Уни интеграллаш учун қуйидагича иш кўрамиз: аввал $y'=p$ деймиз. Равшанки, $dy=y'dx=pdx$, $dx=d(\psi_i(p))=\psi_i'(p)dp$. Шунинг учун $dy=d\psi_i'(p)dp$ бўлади. Бундан

$$\begin{cases} y=\int p\psi_i'(p)dp+C, \\ x=\psi_i(p), \ i=1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.8}$$

келиб чиқади. (3.8) формулада p — параметр вазифасини ўтаяпти. Демак, (3.8) ечим умумий ечим бўлади.

Мисоллар. 1. $(y')^2-\frac{1}{1-x^2}=0$, $|x|<1$ дифференциал тенгламани кўрайлик. Уни y' га нисбатан ечиш осонроқ. Шунинг учун ушбуга эгамиз:

$$y'=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x|<1.$$

Ундан $y=\arcsin x+C$, $y=-\arcsin x+C$ ни ҳосил қиламиз. Бу умумий ечимлар тўплами берилган дифференциал тенглама учун умумий ечим бўлади.

2. Ушбу $e^{1+(y')^2}-x^2=0$ дифференциал тенгламани x га нисбатан ечайлик:

$$x=\pm e^{\frac{1+(y')^2}{2}}.$$

Содда ҳисоблашларни бажариб,

$$dx=\pm pe^{\frac{1+p^2}{2}}dp, \ dy=\pm p^2e^{\frac{1+p^2}{2}}dp, \ y=\pm(pe^{\frac{1+p^2}{2}}-\int e^{\frac{1+p^2}{2}}dp)+C$$

ларни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, ушбу

$$x=e^{\frac{1+p^2}{2}}, \quad y=pe^{\frac{1+p^2}{2}}-\int e^{\frac{1+p^2}{2}}dp+C;$$

$$x=-e^{\frac{1+p^2}{2}}, \quad y=-pe^{\frac{1+p^2}{2}}+\int e^{\frac{1+p^2}{2}}dp+C;$$

умумий ечимлар тўплами берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади.

3. Эркли ўзгарувчини ўз ичига олмаган

$$F(y, y')=0 \qquad (3.9)$$

кўринишдаги дифференциал тенгламалар ҳам ё y' га ёки y г нисбатан осонроқ ечилади дейлик. Биринчи ҳолда $y'=f_k(y)$ $(k=1,$ 2, ...) дифференциал тенгламаларга келамиз. Агар $f_k(y)\neq 0$, $y\in I$ бўлса, $\int\frac{dy}{f_k(y)}=x+C\,(k=1,\ 2,\ \ldots)$ ечимларга эга бўламиз. Агар $f_k(y)=0$ тенглама $y=b_m(m=1, 2, \ldots)$ илдизларга эга бўлса, у ҳолда $y=b_m$, $m=1, 2, \ldots$ функциялар ҳам (3.9) нинг ечими бўлади.

Энди (3.9) тенглама y га нисбатан ечилган бўлсин: $y=\psi_l(y')$, $l=1, 2, \ldots$. Яна $y'=p$ деймиз ва $dx=\frac{1}{p}dy$, $dy=\psi_l'(p)\,dp$ ни ҳосил қиламиз. Шунинг учун $p\neq 0$ бўлганда $dx=\frac{1}{p}\psi_l'(p)\,dp$ бўлади. Буни интеграллашдан ҳосил бўлган

$$x=\int\frac{1}{p}\psi_l'(p)\,dp+C, \quad y=\psi_l(p), \quad l=1, 2, \ldots, \qquad (3.10)$$

ечимлар тўплами (3.9) тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Агар $p=0$ ёки $y'=0$, демак, $y=\alpha_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ лар тенгламанин ҳақиқий илдизлари бўлса, юқорида $dy=pdx$ ни p га бўлиб, $y=\alpha$ ечимларни йўқотган бўлар эдик. Аммо $y=\alpha_i$ ечимлар (3.10) ечимлар орасида йўқ ва демак, улар махсус ечим бўлиши мумкин. Агар $p\to+0\,(p\to-0)$ бўлганда $\int\limits_{p_1}^{p}\frac{1}{\xi}\psi_l'(\xi)\,d)\left(\text{ёки } \int\limits_{p}^{p_2}\frac{1}{\xi}\psi_l'(\xi)\,d\xi\right)$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $y=\alpha_i$ ечимлар махсус бўлади. Ак ҳолда, яъни юқоридаги икки интеграл узоқлашувчи бўлганда тегишли ечимлар махсус бўлмайди.

Мисоллар. 1. Ушбу $ye^{y'}=(y')^2$ дифференциал тенгламани y га нисбатан ечамиз. Бундан $y=(y')^2e^{-y'}$, $y'=p$, $y=p^2e^{-p}$, $dy=(2pe^{-p}-p^2e^{-p})\,dp$ $dx=\frac{dy}{p}=(2e^{-p}-pe^{-p})\,dp$. Охирги муносабатни интеграллсак, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x=e^{-p}(p-1)+C, \\ y=p^2e^{-p}. \end{cases}$$

Агар $y^2e^{2y'}=(y')^4$ дифференциал тенглама берилган бўлса, ундан $y=\pm(y')^2$ $e^{-y'}$ келиб чиқади. Бу ҳолда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$\begin{cases} x=e^{-p}(p-1)+C, \\ y=p^2e^{-p} \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x=-e^{-p}(p-1)+C, \\ y=-p^2e^{-p} \end{cases}$$

умумий ечимлар тўпламидан иборат бўлади.

2. $(y')^2e^{2y}=y^{-2}$ дифференциал тенглама қуйидаги $y'=+y^{-1}e^{-y}$ в $y'=-y^{-1}e^{-y}$ дифференциал тенгламаларга эквивалент. Бундан $ye^ydy=\pm dx$ ёк $(y-1)e^y=\pm x+C$ умумий ечимга эга бўламиз.

4. Энди (3.1) дифференциал тенглама ё x га ёки y га нисбатан осонлик билан ечиладиган ҳолларни кўрайлик.

а) (3.1) тенгламани ушбу

$$x=\Phi_k(y,\ y'),\ k=1,\ 2,\ \ldots \tag{3.11}$$

кўринишда ёзилган бўлсин. Яна $y'=p$ деб параметр киритамиз. (3.11) муносабатнинг икки томонини y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\partial\Phi_k}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_k}{\partial p}\,\frac{dp}{dy},\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\frac{1}{p}.$$

Бундан

$$\frac{dp}{dy}=\frac{\dfrac{1}{p}-\dfrac{\partial\Phi_k}{\partial y}}{\dfrac{\partial\Phi_k}{\partial p}},\qquad \frac{\partial\Phi_k}{\partial p}\neq 0. \tag{3.12}$$

(3.12) тенгламанинг ўнг томони y ва p нинг функцияси, демак, биз $\frac{dp}{dy}=f_k(y,p)$ кўринишдаги дифференциал тенгламага келдик. Унинг умумий ечими $p=\psi_k(y,\ C)$ дейилса, (3.11) дан $x=\Phi_k(y,\ \psi_k(y,\ C))$ ҳосил бўлади. Бу ечимлар тўплами умумий ечим бўлади.

б) (3.1) тенглама

$$y=\Phi_k(x,\ y'),\ k=1,\ 2,\ \ldots \tag{3.13}$$

кўринишда ёзилган дейлик. $y'=p$ деб, ундан ва (3.12) дан

$$p=\frac{\partial\Phi_k}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_k}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx},\ \frac{dp}{dx}=\frac{p-\dfrac{\partial\Phi_k}{\partial x}}{\dfrac{\partial\Phi_k}{\partial p}},\ \frac{\partial\Phi_k}{\partial p}\neq 0$$

га эга бўламиз. Охирги тенглама $\frac{dp}{dx}=f_k(x,\ p)$ кўринишдаги тенглама бўлиб, унинг умумий ечимини $p=\psi_k(x,\ C),\ k=1,\ 2,\ \ldots$ деб ёзамиз. (3.13) га кўра берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y=\Phi_k(x,\ \psi_k(x,\ C))$ каби ёзилади.

Кўрилган а) ва б) ҳолларда $x=\Phi_k(y')$, $y=\Phi_k(y')$ тенгламалар хусусий ҳол бўлиб, улар учун мулоҳазалар янада содда бўлишини аввалги бандларда кўрдик.

Мисоллар. **1.** $x(y')^2=y,\ x>0$ дифференциал тенглама y га нисбатан ечилган. $p=y',\ y=xp^2,\ p=p^2+2xp\frac{dp}{dx}$ десак, ўзгарувчилари ажраладиган $\frac{dp}{dx}=\frac{1-p}{2x}$ $(p\neq 0)$ дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Уни интеграллаб $\left(p=1-\frac{C}{\sqrt{x}}\right)$, берилган тенгламага қўйсак, унинг умумий ечими: $y=x\left(1-\frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2$ кўринишда ёзилади. Равшанки, $y=0$ ҳам ечим бўлиб, у махсус ечимдир.

2. $y(y')^3+x-1=0,\ y\neq 0$ дифференциал тенгламани x га нисбатан ечамиз: $x=1-y(y')^3\cdot y'=p(y)$ десак, ҳисоблашлар

$$x=1-y(y')^3,\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=-p^3-3p^2y\frac{dp}{dy},\ \frac{dp}{dy}=-\frac{1+p^4}{3p^3y}$$

бўлишини кўрсатади. Бу дифференциал тенгламани интеграллаймиз:

$$\frac{1}{4}\frac{d(1+p^4)}{1+p^4}=-\frac{dy}{3y},\ \frac{1}{4}\ln(1+p^4)=-\frac{1}{3}\ln|y|+\ln C$$

ёки $(1+p^4)^{\frac{1}{4}}=\frac{C}{\sqrt[3]{|y|}}$. Бундан $p^3=\sqrt[4]{\left(\frac{C^4}{\sqrt[3]{y^4}}.-1\right)^3}$ ни ҳосил қиламиз. Энди берилган тенгламага p^3 учун топилган ифодани қўйсак,

$$(1-x)^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{y^4}=C_0,\ C_0=C^4$$

умумий ечимга келамиз.

5. (3.1) дифференциал тенгламада $F(x, y, y')$ функция x ва y га нисбатан m-даражали бир жинсли функция бўлса, у ҳолда (3.1) ни бундай ёзиш мумкин:

$$x^mF\left(\frac{y}{x},\ y'\right)=0 \text{ ёки } F\left(\frac{y}{x},\ p\right)=0,\ p=\frac{dy}{dx}. \tag{3.14}$$

Бу тенгламани p га нисбатан ечиш осон бўлган ҳолга тўхталмаймиз.

(3.14) да y ўрнига янги номаълум функция $z(x)$ ни $y=xz(x)$ каби киритсак, $F(z, p)=0$ тенглама ҳосил бўлади. Уни z га нисбатан ечиш қулай бўлсин дейлик: $z=\psi_k(p)$, $k=1, 2, \ldots$. Ушбу

$$dy=zdx+xdz,\ dy=\psi_k(p)\,dx+x\psi_k'(p)\,dp,$$
$$dy=pdx,\ pdx=\psi_k'(p)\,dx+x\psi_k'(p)\,dp$$

ҳисоблашлардан сўнг x ва p ларга нисбатан $\frac{dx}{x}=\frac{\psi_k'(p)\,dp}{p-\psi_k(p)}$ дифференциал тенгламага келамиз. Агар $\frac{\psi_k'(p)}{p-\psi_k(p)}$ функциянинг бошланғич функцияси $\chi_k(p)$ дейилса, охирги дифференциал тенгламадан $x=Ce^{\chi_k(p)}$. ҳосил бўлади. $z(x)=\frac{y}{x}$ бўлганидан $y=x\psi_k(p)$, $x=Ce^{\chi_k(p)}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ муносабатлар берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ифодалайди.

Мисол. 4-банддаги 1-мисолда $x(y')^2=y$, $x>0$ дифференциал тенглама кўрилган эди. Бу тенгламани $F(x, y, y')=x(y')^2-y=0$ кўринишда ёзсак, F (x, y, y') функция x ва y га нисбатан 1-даражали бир жинсли функция экани кўриниб турибди. Энди бу дифференциал тенгламани шу 5-банддаги усул билан интеграллаймиз. Тенгламани

$$x\left[(y')^2-\frac{y}{x}\right]=0 \text{ ёки } x\left(p^2-\frac{y}{x}\right)=0,\ p=y'$$

кўринишда ёзамиз. $y=xz$ десак, $p^2-z=0$ га келамиз. Ундан $z=p^2=\psi(p)$, $\psi'(p)=2p$ ни ҳосил қиламиз. Энди тегишли

$$\frac{dx}{x}=\frac{2pdp}{p-p^2} \text{ ёки } \frac{dx}{x}=\frac{2dp}{1-p},\ p\neq 1$$

дифференциал тенгламага эгамиз. Интеграллаш натижасида $p=1-\frac{C}{\sqrt{x}}$ формулани, ундан $y=x\left(1-\frac{C}{\sqrt{x}}\right)^2$, $x>0$ умумий ечимни топамиз.

6. Юқоридаги бандларда $y'=p$ деб параметр киритдик. Умуман айтганда, параметрни янада умумийроқ усул билан киритиш қулай бўлган холлар ҳам бўлади. Шу муносабат билан *параметр киритишнинг умумий усули* билан танишамиз.

Маълумки, $Ax+By+Cy'+D=0$ дифференциал тенглама x, y, y' ўзгарувчиларнинг фазоси R^3 да текисликни, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(y')^2}{c^2}-1=0$ дифференциал тенглама шу R^3 да эллипсоидни аниқлайди. Баъзи ҳолларда берилган сиртнинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзиш мумкин бўлади. $F(x, y, y')=0$ сирт тенгламаси ушбу $x=\psi(u, v)$, $y=\chi(u, v)$, $y'=\omega(u, v)$ (u, v — параметрлар) параметрик кўринишда ёзилган бўлсин. У ҳолда

$$F(\psi(u, v), \chi(u, v), \omega(u, v))\equiv 0$$

тенгламага эгамиз. Агар ψ, χ, ω функциялар бирор очиқ T тўпламда аниқланган ва дифференциалланувчи бўлса, унда

$$dx=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv,\ dy=\frac{\partial\chi}{\partial u}du+\frac{\partial\chi}{\partial v}dv$$

бўлади. Энди $\frac{dy}{dx}=\omega(u,v)$ бўлгани учун

$$\frac{\partial\chi}{\partial u}du+\frac{\partial\chi}{\partial v}dv=\omega(u,v)\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right]$$

тенглама u ва v параметрлар орасидаги дифференциал боғланишни тасвирлайди. Бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}-\omega\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)du=\left(\omega\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)dv.$$

Агар $\frac{\partial\chi}{\partial u}-\omega\frac{\partial\psi}{\partial u}\neq 0$ бўлса, u ни номаълум функция, v ни эса эркли ўзгарувчи деб, ушбу

$$\frac{du}{dv}=\left(\omega\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)\Big/\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}-\omega\frac{\partial\omega}{\partial u}\right) \qquad (3.15)$$

ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенгламага келамиз. Шунга ўхшаш, агар $\omega\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\neq 0$ бўлса, у ҳолда ушбу

$$\frac{dv}{du}=\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}-\omega\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)\Big/\left(\omega\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\right) \qquad (3.15')$$

дифференциал тенгламага келамиз.

Агар (3.15) ёки (3.15′) дифференциал тенглама квадратураларда интегралланса, у ҳолда берилган (3.1) дифференциал тенглама ҳам интегралланади. Ҳақиқатан, агар (3.15) тенгламанинг умумий ечими $u=u(v, c)$ бўлса,

$$\begin{cases} u=u(v,C), \\ x=\psi(u(v,C),v), \\ y=\chi(u(v,C),v) \end{cases}$$

(бу ерда v — параметр, C — ихтиёрий ўзгармас) (3.1) тенглама ечимининг параметрик кўриниши бўлади. (3.15′) учун умумий ечим

$$\begin{cases} v=v(u,\ C), \\ x=\psi(u,\ v(u,\ C)), \\ y=\chi(u,\ v(u,\ C)) \end{cases}$$

кўринишда (бу ерда u — параметр, C — ихтиёрий ўзгармас) бўлади.

Масалан, $F(x,y,y')=0$ тенглама $y=f(x,y')$ кўринишда ёзилиши мумкин бўлганда $u=x$, $v=y'$; $x=f(y,y')$ кўринишда ёзилганда эса $u=y$, $v=y'$ дейилиши лозим. Биринчи ҳолда ($x=x$, $y=f(x,\ v)$, $y'=v$) $\dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{v-\dfrac{\partial f}{\partial x}}$ дифференциал тенгламага, иккинчи ҳолда эса ($x=f(y,\ v)$, $y=y$, $y'=v$)

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{v\dfrac{\partial f}{\partial v}}{1-v\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз.

7. Параметр киритишнинг умумий усулини қўллашга доир муҳим мисол кўрамиз. *Агар* $\psi(y')$, $\chi(y')$ *функциялар бирор интервалда дифференциалланувчи бўлса,*

$$y=x\psi(y')+\chi(y') \tag{3.16}$$

дифференциал тенглама Лагранж тенгламаси деб юритилади. Бу тенглама квадратураларда интегралланади. Ҳақиқатан, $y'=p$ десак, $y=x\psi(p)+\chi(p)$ бўлади. Энди буни x бўйича дифференциаллаб,

$$p=\psi(p)+x\psi'(p)\frac{dp}{dx}+\chi'(p)\frac{dp}{dx}$$

ёки

$$p-\psi(p)=[x\psi'(p)+\chi'(p)]\frac{dp}{dx} \tag{3.17}$$

га эга бўламиз. Агар $\dfrac{dp}{dx}=0$ бўлса, у ҳолда $p=p_i (p_i=\text{const})$. Бу юқоридаги дифференциал тенглама $p=\psi(p)$ кўринишга келганда содир бўлади. Демак, $p=p_i$ бўлганда $p-\psi(p)=0$ тенглама шу $p=p_i$ ечимга эга бўлади ва ушбу $y=x\psi(p_i)+\chi(p_i)$, $i=1,\ 2,\ \ldots$ тўғри чизиқларни ҳосил қиламиз.

Агар $\dfrac{dp}{dx}\neq 0$ бўлса, (3.17) тенглама номаълум x га нисбатан ушбу

$$\frac{dx}{dp}=\frac{\psi'(p)}{p-\psi(p)}x+\frac{\chi'(p)}{p-\psi(p)} \tag{3.18}$$

биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламадан иборат. Унинг умумий ечими $\Phi(x,\ p,\ C)=0$ бўлади. Берилган дифференциал тенглама умумий ечимининг параметрик кўриниши бундай:

$$\begin{cases}\Phi(x,\ p,\ C)=0,\\ y=x\psi(p)+\chi(p),\ p\text{ — параметр.}\end{cases}$$

Агар $p-\psi(p)\neq 0$ бўлса, у ҳолда (3.16) тенгламада параметрларни

$$x=x,\ y=\psi(p)+\chi(p),\ y'=p$$

каби киритсак, (3.15) дифференциал тенглама ўрнида (3.18) дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

Агар $p-\psi(p)\equiv 0$ бўлса, тенгламани $\frac{dp}{dx}$ га бўлганда $p=C(C=$ $=\mathrm{const})$ ечим (яъни $y=\psi(C)+\chi(C)$ ечим) йўқотилади. Аммо бу ҳолда берилган дифференциал тенглама ушбу

$$y=xy'+\chi(y') \tag{3.19}$$

кўринишга келади. Бу тенглама *Клеро тенгламаси* деб юритилади. Унинг икки томонини x бўйича дифференциалласак, $p=p+x\frac{dp}{dx}+$ $+\chi'(p)\frac{dp}{dx}$ ёки $(x+\chi'(p))\frac{dp}{dx}=0$ га эга бўламиз. Бундан ё $\frac{dp}{dx}=0$ (демак, $p=C$) ёки $x+\chi'(p)=0$ келиб чиқади. Биринчи ҳолда умумий ечим $y=Cx+\chi(C)$ кўринишда ёзилса, иккинчи ҳолда эса

$$\begin{cases}y=xp+\chi(p),\\ x+\chi'(p)=0,\ p\text{ — параметр}\end{cases} \tag{3.20}$$

кўринишда бўлади. $y=Cx+\chi(C)$ тўғри чизиқлар оиласининг ўрамаси (3.20) чизиқдан иборат (3.5- таърифга қаранг).

Мисоллар. 1. $y=xy'-y'$ Клеро тенгламаси берилган бўлсин. Унинг умумий ечими, яъни бир параметрли интеграл тўғри чизиқлар оиласи $y=Cx-C$ кўринишда бўлади. $y=C(x-1)$ дан кўринадики, бу (1,0) нуқтадан ўтадиган тўғри чизиқлар дастаси бўлиб, унинг ўрамаси шу (1,0) нуқтанинг ўзи (агар $y=Cx+\chi(C)$ тўғри чизиқлар оиласи дастани ташкил этса, ўрама битта нуқтадан иборат бўлиши ҳам мумкин) бўлади (3.5- таърифга қаранг).

2. Энди ушбу $y=2xy'-y'$ Лагранж тенгламасини кўрайлик. Агар $y'=p$ десак, $y=2xp-p$ бўлади. Ундан

$$p=2p+2x\frac{dp}{dx}-\frac{dp}{dx},\ (2x-1)\ \frac{dp}{dx}=-p$$

келиб чиқади, уни $\frac{dp}{dx}$ га бўлсак:

$$-p\frac{dx}{dp}=2x-1\ \text{ёки}\ \frac{dx}{dp}=-\frac{2}{p}x+\frac{1}{p},\ p\neq 0.$$

Уни интеграллсак: $x=\frac{C}{p^2}+\frac{1}{2}$. Демак, берилган тенглама умумий ечимининг параметрик ёзилиши бундай бўлади:

$$\begin{cases} x=\dfrac{C}{p^2}+\dfrac{1}{2}, \\ y=2xp-p. \end{cases}$$

Биз $p=0$ ҳолни кўрайлик, ундан $y=C$ (берилган тенгламага кўра $C=0$), яъни $y=0$ келиб чиқади. Бу $y=0$ ечим махсус бўлиши эҳтимоли бор. Уни 3. 4- § да кўрамиз.

3.3- §. ЕЧИМНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ

3.1- теорема. *Агар (3.1) дифференциал тенгламада* $F(x, y, y')$ *функция учун ушбу иккита шарт:*

1°. $F(x_0, y_0, y')=0$ (3.21)

тенгламанинг бирор ҳақиқий илдизи y_0' *учун* $(x_0, y_0, y_0')\in D_3((x_0, y_0)\in\Gamma)$ *нуқтанинг бирор* D_3^0 *атрофида* $F(x, y, y')$ *функция узлуксиз ва биринчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга;*

2°. $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0')\neq 0$

бажарилса, у ҳолда шундай $h>0$ *мавжуд бўладики,* (3.1) *дифференциал тенгламанинг* $|x-x_0|\leqslant h$ *оралиқда аниқланган* $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$ *шартларни қаноатлантирувчи ягона* $y=y(x)$ *ечими мавжуд.*

Исбот. Ошкормас функциялар ҳақидаги маълум теоремага кўра (3.1) тенглама D_3^0 да y' ни бир қийматли функция сифатида аниқлайди, яъни

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{3.22}$$

бунда $f(x, y)$ функция ёпиқ $\bar{\Gamma}_0$ ($\bar{\Gamma}_0\subset\Gamma$) тўпламда узлуксиз, биринчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва $f(x_0, y_0)=y_0'$, $(x_0, y_0)\in\bar{\Gamma}_0$. Шунинг учун $f(x, y)$ функция ёпиқ $\bar{\Gamma}_0$ тўпламда y бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради. Демак, (3.22) дифференциал тенглама Пикар теоремасига асосан $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган ягона $y=y(x)$ ечимга эга бўлиб, $y(x_0)=y_0$ бўлади. Худди шу ечимга (3.1) тенглама ҳам эга. Энди $y'(x_0)=y_0$ эканини кўрсатайлик. Ҳақиқатан, (3.22) тенглама $y=y(x)$ учун айниятга айланади: $\dfrac{dy(x)}{dx}\equiv f(x, y(x))$, $|x-x_0|\leqslant h$.

Агар $x=x_0$ бўлса, $y'(x_0)=f(x_0, y(x_0))=f(x_0, y_0)=y_0'$.

3.1- натижа. 3.1- *теореманинг шартига кўра* (x_0, y_0, y_0') *нуқтанинг* $\bar{D}_3^0$ *атрофида* $\dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}\neq 0$, $\left|\dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial x}\right|\leqslant A$, $0<$ $<A=\text{const}$.

3.2-натижа. Агар (3.21) тенглама бир неча ҳақиқий $y_i'(=1,2, \ldots, m)$ илдизларга эга бўлса, ҳар бир (x_0, y_0, y_i') нуқтанинг ёпиқ $\bar{D}_{3i}^0$ атрофида (3.1) дифференциал тенглама y' ни бир қийматли аниқлайди, яъни $y'=f_i(x, y)$. Шу билан бирга ҳар бир $i(1\leqslant i\leqslant m)$ учун тегишли дифференциал тенглама $(x_0, y_0)\in\Gamma_{0i}$ нуқтадан ўтувчи ягона интеграл чизиққа эга. Бошқача айтганда, (x_0, y_0) нуқтадан m та йўналиш бўйича фақат m та интеграл чизиқ ўтади.

Агар (x_0, y_0) нуқтада Коши масаласи ягона ечимга эга бўлса, у нуқтани *оддий нуқта* дейилади. Бу нуқтага мос ечимни *оддий ечим,* интеграл чизиқни эса *оддий интеграл чизиқ* дейилади.

Шунга ўхшаш, агар (x_0, y_0) нуқтада Коши масаласи учун ягоналик ўринли бўлмаса (3.4- таърифга қаранг), у ҳолда бу нуқта (3.1) дифференциал тенгламанинг *махсус нуқтаси* дейилади. Махсус нуқталар тўплами *махсус ечим* бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин. Махсус ечим графиги *махсус интеграл чизиқ* дейилади.

Демак, (x_0, y_0, y'_0) нуқтанинг етарли кичик ёпиқ атрофида 3.1- теореманинг бирор шарти бузилганда махсус нуқтага эга бўлишимиз мумкин. 3.1- теорема фақат етарли шартни белгилагани учун (x_0, y_0, y'_0) нуқта айтилган ҳолда махсус бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин. Шу муносабат билан махсус нуқта ва махсус ечим тушунчаларига мукаммал тўхталамиз.

3.4- §. МАХСУС НУҚТА ВА МАХСУС ЕЧИМ

1. Аввал махсус нуқта тушунчасига тўхталамиз. Бунда (3.1) дифференциал тенглама y' га нисбатан ечилиши мумкин деб қараймиз: $y'=f(x, y)$. Агар $f(x, y)$ функция P ёпиқ тўғри тўртбурчакда узлуксиз бўлиб, y бўйича Липшиц шартини қаноатлантирса, у ҳолда Пикар теоремасига кўра $(x_0, y_0) \in P$ нуқтадан ягона интеграл чизиқ ўтади.

Энди $f(x, y)$ функция P нинг (x_0, y_0) дан бошқа ҳамма нуқталарида узлуксиз бўлиб, (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз бўлмасин. Унда қуйидаги ҳоллар рўй беради:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A$, A — чекли ҳақиқий сон;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=\infty$ (аниқ ишорали чексиз);

3) $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада лимитга эга эмас.

1) ҳолда $f(x_0, y_0)=A$ деб, $f(x, y)$ функция қийматларини тўлдирсак, P да узлуксиз функцияга келамиз.

2) ҳолда эса $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x, y)}$ тенгламани ҳам кўриб $\frac{1}{f(x_0, y_0)}=0$ деб, $\frac{1}{f(x, y)}$ функциянинг қийматини тўлдирамиз. Бунда яна Пикар теоремасини қўллаш мумкин ва дифференциал тенгламанинг интеграл чизиғи (x_0, y_0) нуқтада вертикал уринмага эга бўлади.

3) ҳолда (x_0, y_0) нуқта яккаланган *махсус нуқта* дейилади. Шундай нуқталар атрофида интеграл чизиқларнинг сифат хоссаларини ўрганиш мумкин бўлиб, бу дифференциал тенгламалар назарияси қўлланиладиган барча соҳаларда керак бўлади. Яккаланган нуқталар атрофида интеграл чизиқларни ўрганиш ҳар жиҳатдан мураккаб. $f(x, y)$ функция каср-чизиқли бўлганда баъзи интеграл чизиқларни чизамиз. Шундай қилиб, ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cx+dy}{ax+by} \tag{3.23}$$

(бунда a, b, c ва d лар — ҳақиқий сонлар) дифференциал тенгламани кўрайлик. Ўнг томондаги функция учун $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$ бўлганда (0,0) нуқта яккаланган махсус нуқтадир. Унинг атрофида интеграл чизиқларни текширамиз. Δ ни (3.23) тенгламанинг детерминанти деб юритамиз.

Агар $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0$ характеристик тенглама ҳар хил ҳақиқий λ_1, λ_2 ечимларга эга бўлиб, $\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0$ бўлса (масалан, $\lambda_1\neq\neq 0$ бўлса), у ҳолда (3.23) тенгламани чизиқли махсусмас алмаштириш ёрдамида

$$\frac{dv}{du}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{v}{u} \tag{3.24}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ундан

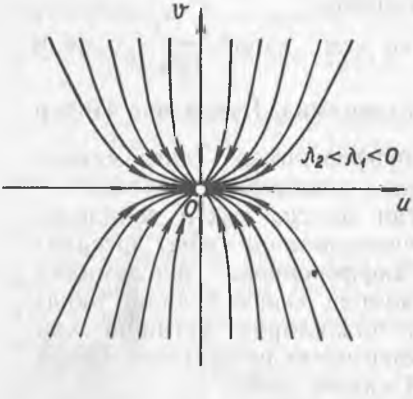
$$v=C|u|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (C \text{ — ихтиёрий ўзгармас}) \tag{3.25}$$

келиб чиқади. λ_1 ҳамда λ_2 ларнинг ҳар бири нолдан фарқли ва бир хил ишорали ёки турли ишорали бўлишига қараб мос равишда *тугун* ёки *эгар* расмларига эга бўламиз (23- ва 24- чизмалар). Агар $\lambda_1<<0$ бўлганда $\lambda_2=0$ бўлса, $v=c$ горизонтал интеграл чизиқларга эга бўламизки, (0, C) нуқталар тўплами махсус нуқталар тўплами бўлади (25- чизма).

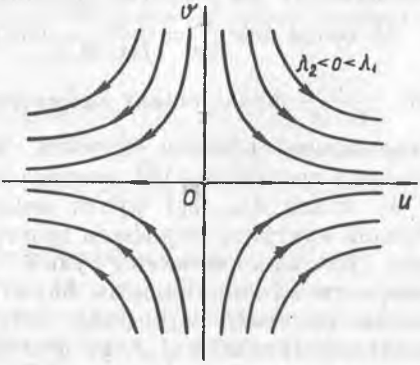
Юқоридаги 23-, 24-, 25- чизмалар λ_1 ва λ_2 ларнинг маълум қийматлари учун келтирилган.

Характеристик тенглама бир жуфт қўшма комплекс $\alpha\pm i\beta$ илдизга эга бўлсин. У ҳолда (3.23) тенгламани

$$\frac{dv}{du}=\frac{\beta u+\alpha v}{\alpha u-\beta v} \tag{3.26}$$



23- чизма



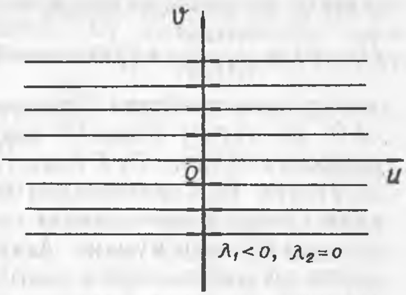
24- чизма

кўринишга келтириш мумкин. Бу бир жинсли дифференциал тенглама бўлиб, уни интеграллаш мумкин:

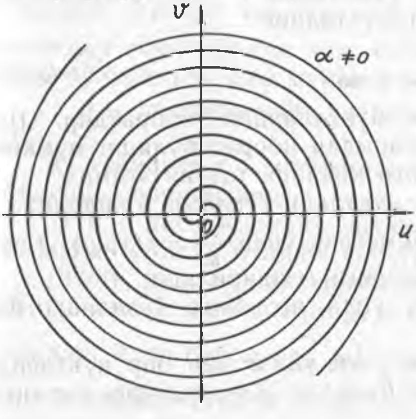
$$r = Ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\varphi},$$

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{v}{u}, \ C > 0.$$

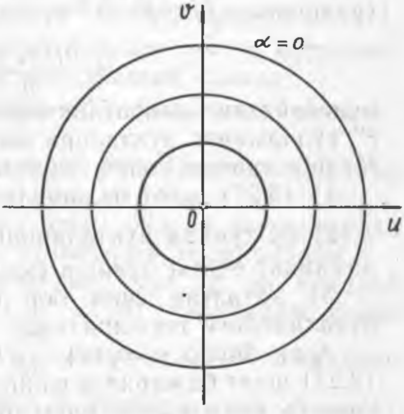
Бу формула $\alpha \neq 0$ бўлганда логарифмик спиралларни, $\alpha = 0$ бўлганда эса, концентрик айланаларни белгилайди (26, 27- чизмалар). Яна $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ ҳоллар учун ҳам чизмаларни келтириш мумкин.



25- чизма



26- чизма



27- чизма

Агар $f(x, y)$ функция каср чизиқли бўлмаса, яккаланган махсус нуқта атрофида интеграл чизиқларни ўрганиш масаласи анча мураккаб бўлиб, у «дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси» да ўрганилади.

2. Энди биринчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенгламаларнинг махсус ечимларини чуқурроқ ўрганамиз.

Маълумки, агар $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ тенгламада $f(x, y)$ функция бирор ёпиқ чегараланган $P(P \subset \Gamma)$ тўпламда узлуксиз ва y бўйича узлуксиз хусусий ҳосилага эга бўлиб, шу P да $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ функция ҳам узлуксиз бўлса,

$$\max_{(x, y) \in P} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| = L < +\infty$$

га эгамиз ва Пикар теоремасига кўра ҳар бир $(x_0, y_0) \in P$ нуқтадан дифференциал тенгламанинг ягона интеграл чизиғи ўтади. Демак, P тўпламда махсус интеграл чизиқ бўлмайди. Масалан, P тўғри тўртбурчакда аниқланган $f(x, y)$ функция y бўйича кўпҳад бўлиб,

y шу P да узлуксиз бўлса, P тўпламда махсус ечим бўлмайди. Агар $f(x, y)=\frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$ кўринишда бўлиб, $f_1(x, y)$ ва $f_2(x, y)$ функциялар x ва y ларга нисбатан кўпҳад ва P тўпламда узлуксиз (яна $f_2(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in P$) бўлса, у ҳолда P тўпламда фақат оддий интеграл чизиқлар бўлади. Бу P ёпиқ тўғри тўртбучакда Пикар теоремасининг шартлари бажарилишидан келиб чиқади. Шундай қилиб, махсус ечим Пикар теоремасининг шартлари бузилган нуқталар тўпламида мавжуд бўлиши мумкин. Агар $f(x, y)$ функция P тўпламда y бўйича чекли хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция P да y бўйича Липшиц шартини қаноатлантиришини 1-бобда айтиб ўтган эдик. Энди P тўпламда $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ ҳосила чегараланмаган нуқталар ҳам бор бўлсин дейлик. Бундай нуқталар тўпламини P' деб белгилаймиз (равшанки, $P' \subset P$). P' тўпламнинг нуқталари

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| = +\infty \tag{3.27}$$

муносабатни қаноатлантирадиган нуқталардан иборатдир. Шу P' тўпламнинг нуқталари махсус ечимдан иборат бўлиши мумкин. Махсус ечимни топиш учун қуйидаги қоидани тавсия этамиз:

1) (3.27) шарт бажариладиган нуқталар тўплами топилади;

2) бу тўплам нуқталарининг геометрик ўрни $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ тенгламанинг ечими бўлиши ёки бўлмаслиги текширилади;

3) айтилган ечим бор бўлса, унда ягоналик бузилиши ёки бузилмаслиги текширилади.

Агар бирор $y=\varphi(x)$, $x \in I$ ечим учун унинг ҳар бир нуқтасида (3.27) шарт бажарилса ва ягоналик бузилса (3.4-таърифга қаранг), унда бу ечим махсус ечим бўлади.

Мисоллар. **1.** 1-бобда кўрилган $y'=y^{\frac{2}{3}}$ дифференциал тенглама учун $(a, 0)$ нуқтада (a — ихтиёрий ҳақиқий сон) $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\frac{2}{3}\left|y^{-\frac{1}{3}}\right|$ ҳосила чегараланмаган. Шу ҳосила чегараланмаган нуқталар тўплами $P'=\{(x, y) : y=0,\ x$ — ихтиёрий$\}$ дан иборат бўлиб, $y=0$ берилган тенгламанинг ечимидан иборат. Бу ечимнинг ҳар бир нуқтасида ягоналик бузилишини кўрсатган эдик. Демак, $y=0$ (абсцисса ўқи) берилган дифференциал тенглама учун *махсус ечим* бўлади.

2. Ушбу $y'=y^{\frac{2}{3}}+1$, $-\infty<y<+\infty$ дифференциал тенглама учун ҳам $(a, 0)$ нуқта атрофида $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\frac{2}{3}\left|y^{-\frac{1}{3}}\right|$ чегараланмаган, аммо $y=0$ ечим эмас. У ҳолда $y=0$ чизиқ махсус ечим ҳам бўла олмайди, демак, берилган тенгламанинг махсус ечими йўқ.

3. Бу бандда хосилага нисбатан ечилмаган дифференциал тенгламалар учун махсус ечим мавжудлиги масаласи билан шуғулланамиз.

Биз махсус ечимни топишнинг икки усули билан танишамиз:

а) (3.1) тенглама учун 3.1-теорема шартларидан камида биттаси бажарилмаган, б) (3.1) дифференциал тенгламанинг умумий ечими маълум.

а) Асосан $F(x, y, y')$ функция D_3 соҳада узлуксиз ва узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда махсус ечим 3.1- теореманинг 2- шарти бузиладиган нуқталар тўпламидан иборат бўлиши мумкин. Бошқача айтганда, $p=\frac{dy}{dx}$ параметрни киритсак, махсус ечим ушбу

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ p)=0, \\ F'_p(x,\ y,\ p)=0 \end{cases} \tag{3.28}$$

системани қаноатлантирадиган (x, y) нуқталар тўпламидан иборат бўлиши мумкин. Бу тўпламни D_3^p дейлик. Агар (3.28) системанинг тенгламалари *биргаликда* бўлмаса, у ҳолда D_3^p тўплам бўш бўлади (яъни $D_3^p=\varnothing$). Агар $D_3^p\neq\varnothing$ бўлса, бу тўплам нуқталарининг геометрик ўрнини текшириш керак. Шу геометрик ўрин (3.1) дифференциал тенгламанинг *p — дискриминант чизиғи дейилади.* Уни $\varphi_i^p(x)$ $(i=1,\ 2,\ \dots,\ m)$ деб белгилайлик. $\varphi_i^p(x)$ чизиқлар ечим бўлиши ҳам, қисман ечим бўлиши ҳам ва бутунлай ечим бўлмаслиги ҳам мумкин. Бундай қоида келиб чиқади:

1) p — дискриминант чизиқлар (яъни $\varphi_i^p(x)$ чизиқлар) топилади;

2) топилган p — дискриминант чизиқлар ечим (ёки қисман ечим) бўлиши текширилади.

3) p — дискриминант чизиқларнинг ечим бўлган шохчаларида ягоналик ўринли бўлиши ёки ўринли бўлмаслиги текширилади.

(3.28) дан p — дискриминант чизиқлар учун (p ни чиқариб ташлагандан кейин) $\psi_i(x, y)=0$ $(i=1,\ 2,\ \dots,\ m)$ тенгламалар келиб чиқади. Агар бирор (x_0, y_0) нуқтада $\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\neq 0$ бўлса, тенгламаларни шу нуқтанинг етарли кичик атрофида y га нисбатан ечиб, $y=\varphi_i(x)$ кўринишда ёзиш мумкин.

Агар бирор $y=\varphi_i(x)$ функция ёки $\psi_i(x, y)=0$ ошкормас тенглама p — дискриминант чизиқларни белгилаб, бу чизиқ (3.1) дифференциал тенгламанинг ечими бўлса ва унинг ҳар бир нуқтасида ягоналик хоссаси бузилса, у ҳолда тегишли чизиқ махсус интеграл чизиқ бўлади.

Мисоллар. 1. $(y')^2=y^{\frac{4}{3}}$ дифференциал тенглама учун ушбу

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ p)=p^2-y^{\frac{4}{3}}=0, \\ \frac{\partial F}{\partial p}=2p=0 \end{cases}$$

системага эгамиз. Ундан $y=0$ келиб чиқади. Бу p — дискриминант чизиқдир. Содда мулоҳазалар кўрсатадики, бу чизиқ берилган тенгламанинг ечими бўлиб, унинг ҳар бир нуқтасидан бир йўналишда камида икки интеграл чизиқ (3.4- таърифга қ.) ўтади (биттаси — $y=0$, иккинчиси — кубик парабола). Шундай қилиб, $y=0$ махсус ечимдир.

2. Аввал 3.2- § да кўрилган $y=2xy'-y'$ Лагранж тенгламасини оламиз. Бу тенгламанинг махсус ечими йўқлигини кўрсатамиз. Тегишли

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ p)=y-2xp+p=0, \\ \frac{\partial F}{\partial p}=-2x+1=0 \end{cases}$$

системадан $y=0$, $x=\frac{1}{2}$ келиб чиқади. Бу нуқта $y=0$ ечимда ётади ва $y=0$ ечим ихтиёрий x лар учун аниқланган. Аммо юқоридаги система x нинг $x=\frac{1}{2}$ қиймати-дагина биргаликда бўлади. Демак, $y=0$ ечим махсусмас.

3. Энди $y-2xy'+(y')^2=0$ тенглама берилган бўлсин. Ушбу

$$\begin{cases} y-2xp+p^2=0, \\ -2x+2p=0 \end{cases}$$

системадан $p=x$ келиб чиқади. p дискриминант чизиғининг тенгламаси $y-2x\cdot x+x^2=$ $=0$ ёки $y=x^2$ бўлади. Аммо бу парабола берилган тенгламанинг интеграл чизиғи эмас, чунки $x^2-2x(x^2)'+((x^2)')^2\neq 0$.

Демак, $y=x^2$ парабола махсус ечим бўла олмайди. Берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$\begin{cases} x=\frac{C}{p^2}+\frac{2}{3}p, \\ y=2xp-p^2 \quad (p \text{ — параметр, } C \text{ — ихтиёрий ўзгармас}) \end{cases}$$

кўринишда ёзилади.

3.2- теорема. *Агар* $F(x, y, p)$, $p=\frac{dy}{dx}$ *функция бирор ёпиқ* $\bar{D}_3^0(\bar{D}_3^0\subset D_3)$ *тўпламда аниқланган, узлуксиз ва биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, шу* $\bar{D}_3^0$ да $\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial y}\neq 0$ *бўлса, у ҳолда* (3.1) *дифференциал тенгламанинг* p — *дискриминант чизиғи шу тенгламанинг ечими бўлиши учун ушбу*

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial x}+p\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial y}=0 \tag{3.29}$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. p — дискриминант чизиқ ечим бўлсин ва унинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзиш мумкин деб фараз этайлик, яъни

$$x=x(p),\ y=y(p)\ (p \text{ — параметр}),$$

бу ерда $x(p)$, $y(p)$ функциялар дифференциалланувчи. Биз ушбу

$$F(x, y, p)=0,\ \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p}=0,\ p=\frac{dy}{dx}$$

муносабатларга эгамиз. Юқоридаги фаразга кўра $F(x(p), y(p), p)=$ $=0$. Ундан p бўйича тўлиқ ҳосила олсак,

$$\frac{\partial F(x(p), y(p), p)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dp}+\frac{\partial F(x(p), y(p), p)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dp}+$$
$$+\frac{\partial F(x(p), y(p), p)}{\partial p}=0 \tag{3.30}$$

ёки $\frac{\partial F}{\partial p}=0$ бўлгани учун (3.29) келиб чиқади.

Етарлилиги. $F=0$, $\frac{\partial F}{\partial p}=0$, $\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial p}=0$ муносабатлар ўринли бўлсин. Биринчи иккитасидан y ва p ларни x нинг функцияси сифатида топамиз: $y=y(x)$, $p=p(x)$. Бу $y(x)$ функция (3.1) тенгламанинг ечими эканини кўрсатамиз. Унинг учун $F=0$ ни яна x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial F(x,\ y(x),\ p(x))}{\partial x}+\frac{\partial F(x,\ y(x),\ p(x))}{\partial y}\frac{dy}{dx}+$$

$$+\frac{\partial F(x,\ y(x),\ p(x))}{\partial p}\frac{dp}{dx}=0.$$

Бундан (3.29) ни ҳисобга олсак, $\frac{dy(x)}{dx}=p(x)$ келиб чиқади. Шу билан бирга: $F(x,\ y(x),\ p(x))=F\left(x,\ y(x),\ \frac{dx(x)}{dx}\right)=0$, Демак, $y=y(x)$ функция ечим экан.

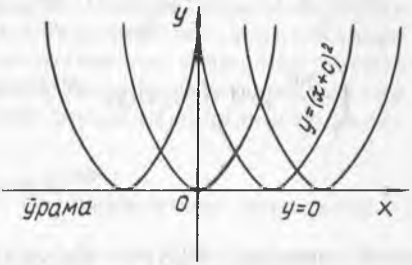
4. 3- мисолда кўрилган $y-2xy'+(y')^2=0$ дифференциал тенглама учун $y=x^2-p$ парабола дискриминант чизиқ бўлиб, ечим эмас эди. Буни ҳозирги усул билан текширайлик. Ҳақиқатан, $F(x,\ y,\ p)=y-2xp+p^2$, $\frac{\partial F}{\partial p}=-2x+2p$, $\frac{\partial F}{\partial y}=1$, $\frac{\partial F}{\partial x}=-2p$ муносабатларга кўра $\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial y}=-2p+p\cdot 1=-p\neq 0$. 3.2- теореманинг шарти бажарилмади. 1- мисолда кўрилган $(y')^2-y^{\frac{4}{3}}=0$ дифференциал тенглама учун $F=p^2-y^{\frac{4}{3}}$, $\frac{\partial F}{\partial p}=2p$, $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{4}{3}y^{\frac{1}{3}}$ ва $\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial y}=0+p\left(-\frac{4}{3}y^{\frac{1}{3}}\right)$. Аммо $\frac{\partial F}{\partial p}=2p=0$ дан $p=0$ келиб чиқади. Шунинг учун охирги ифода айнан нолга тенг. Демак, $y=0$ (p — дискриминант чизиқ) махсус ечим бўлади.

б) 3.5- таъриф. *Ушбу*

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0 \qquad (3.31)$$

бир параметрли силлиқ чизиқлар оиласи берилган бўлиб, $C\in[C_1,\ C_2]$ бўлсин. Агар бирор l чизиқ ўзининг ҳар бир нуқтасида (3.31) оила чизиқларидан бирортаси билан умумий уринмага эга бўлса, у ҳолда l чизиқ (3.31) оиланинг ўрамаси дейилади.

Ушбу $y=(x+C)^2$ параболалар оиласи учун $y=0$ чизиғи ўрама бўлади (28- чизма). Аммо ҳар қандай силлиқ чизиқлар оиласи ҳам ўрамага эга бўлавермайди.



28- чизма

3.3- теорема. (3.31) *бир параметрли силлиқ чизиқлар оиласи берилган бўлиб, $\Phi(x,\ y,\ C)$ функция бирор $\bar{D}_3^0$, $\bar{D}_3^0\subset D_3$ тўпламда аниқланган, узлуксиз ва биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга ҳамда*

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\neq 0 \tag{3.31'}$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда тенгламаси

$$x=x(t),\ y=y(t),\ x(t)\in c^1[t_1,\ t_2],\ y(t)\in c^1[t_1,\ t_2] \tag{3.32}$$

параметрик кўринишда берилган чизиқ (3.31) силлиқ чизиқлар оиласининг ўрамаси бўлиши учун унинг ҳар бир нуқтасида ушбу

$$\begin{cases}\Phi(x(t),\ y(t),\ C)=0,\\ \dfrac{\partial\Phi(x(t),\ y(t),\ C)}{\partial C}=0\end{cases} \tag{3.33}$$

тенгламалар қанотлантирилиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. (3.31) оила тенгламаси (3.32) билан ёзилган ўрамага эга бўлсин. t параметр $[t_1,\ t_2]$ ораликда ўзгарганда ўрама (3.31) оиланинг турли чизиқларига уриниб боради, яъни t ўзгариши билан C ўзгариб боради. Шунинг учун $C=C(t)$ деб қараш лозим. Албатта, $t\in[t_1,\ t_2]$ да $C'(t)\neq 0$, акс ҳолда (яъни $C'(t)=0$, $t\in[t_1^0,\ t_2^0]\subset[t_1,\ t_2]$бўлса)$[t_1^0,\ t_2^0]\subset[t_1,\ t_2]$ ораликдан олинган t қийматларида ўрама тегишли оиланинг фақат битта чизиғига уринади. Демак, $[t_1^0,\ t_2^0]$ ўрама ўша чизиқ билан устма-уст тушади. Бу (3.32) чизиқнинг ўрама эканига зид. Шундай қилиб, $C'(t)\neq 0$, $t\in[t_1,\ t_2]$. Энди (3.32) ни (3.31) га қўйсак, $\Phi(x(t),\ y(t),\ C(t))\equiv\equiv 0$ айният ҳосил бўлади. Айниятнинг чап томонидаги функциядан t бўйича тўлиқ ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial C}\frac{dC}{dt}=0. \tag{3.34}$$

Энди (3.31) оила чизиғига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини k деб, уни топайлик. Равшанки, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}\neq 0$ бўлганда

$$\frac{\partial\Phi(x,\ y,\ C)}{\partial x}+\frac{\partial\Phi(x,\ y,\ C)}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \text{ дан } \frac{dy}{dx}=k=-\frac{\dfrac{\partial\Phi(x,\ y,\ C)}{\partial x}}{\dfrac{\partial\Phi(x,\ y,\ C)}{\partial y}}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\neq 0 \text{ бўлганда } \frac{\partial\Phi(x,\ y,\ C}{\partial x}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial\Phi(x,\ y,\ C)}{\partial y}=0 \text{ дан } \frac{dx}{dy}=k'=-\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}\right)$$

келиб чиқади. (3.31′) тенгсизликка кўра бурчак коэффициент аниқланган. Шунга ўхшаш, ўрамага ўтказилган уринма бурчак коэффициентини k_1 десак,

$$k_1=\frac{dy(t)}{dx(t)}=\frac{y'(t)}{x'(t)}\left(k_1'=\frac{x'(t)}{y'(t)}\right)$$

бўлади. Аммо $k=k_1$ бўлгани учун (3.31) ни ҳисобга олиб

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'(t)=0$$

муносабатга эга бўламиз. Бу тенглик ва $C'(t)\neq 0$, $t\in[t_1,\ t_2]$ га кўра (3.34) дан $\frac{\partial\Phi(x(t),\ y(t),\ C(t))}{\partial C}=0$ келиб чиқади. Зарурлик исбот этилди.

Етарлилиги. Агар бирор (3.32) чизиқнинг нуқталарида (3.31′) тенгсизлик ўринли бўлиб, (3.33) муносабатлар қаноатлантирилса, у ҳолда (3.32) чизиқ (3.31) оиланинг ўрамаси бўлади. Шуни исбот этамиз.

Ҳақиқатан, $\frac{\partial\Phi(x(t),\ y(t),C)}{\partial y}\neq 0$, $t\in[t_1,\ t_2]$ дейлик. Энди (3.33) система тенгламаларидан биринчисини t бўйича дифференциаллаймиз. Натижада (3.33) нинг иккинчи айниятини ҳисобга олиб,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'(t)=0$$

ёки

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}=-\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}$$

муносабатга келамиз. Бундан тегишли нуқтада (3.32) чизиқ (3.31) оиланинг чизиғи билан бир хил бурчак коэффициентига эга экани келиб чиқади. Етарлилиги исбот этилди.

(3.33) система аниқлайдиган чизиқ (3.31) оиланинг *C — дискриминант чизиғи* дейилади.

Берилган силлиқ чизиқлар оиласининг ўрамасини топиш учун қуйидаги қоида келиб чиқади:

1) (3.33) системадан C ни чиқариб ташлаб, C — дискриминант чизиқ топилади;

2) топилган C — дискриминант чизиқдан

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \tag{3.35}$$

тенгламаларни қаноатлантирадиган $(x,\ y)$ нуқталарни чиқариб ташланади. C — дискриминант чизиқнинг қолган қисми берилган оиланинг ўрамаси бўлади. Агар (3.35) системанинг тенгламалари биргаликда бўлмаса, у ҳолда C — дискриминант чизиқ тўлалигича ўрамадан иборат бўлади. Агар C — дискриминант чизиқнинг ҳар бир нуқтасида (3.35) ўринли бўлса, у ҳолда берилган оиланинг ўрамаси мавжуд эмас.

Мисол. $y=\sqrt[3]{\frac{(y')^2}{4y}}\left(x\sqrt[3]{\frac{(y')^2}{4y}}-1\right)^2$ дифференциал тенглама берилган бўлсин. Уни интеграллаш учун x га нисбатан ечиш осон. Бу ҳолда тегишли усул билан ҳисоблашлар олиб борсак, умумий ечим ушбу $y-C^3x^2+2C^2x-C=0$ кўринишда топилади. C — дискриминант чизиқни топайлик. Ушбу

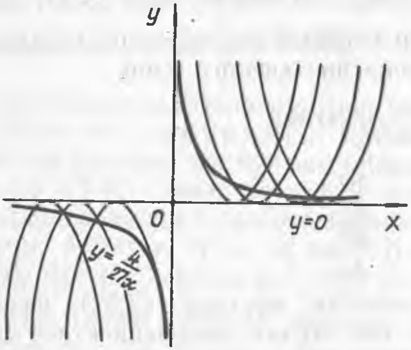
$$\begin{cases} y-C^3x^2+2C^2x-C=0,\\ -3C^2x^2+4Cx-1=0 \end{cases}$$

системанинг иккинчи тенгламасидан $x\neq 0$ бўлганда $C=\frac{1}{3x}$ ва $C=\frac{1}{x}$. Энди C учун топилган икки ифодани ҳам системанинг биринчи тенгламасига қўйсак, икки C — дискриминант чизиқ, яъни

$$y=0,\ x\neq 0;\ y=\frac{4}{27x};\ x\neq 0 \qquad (3.36)$$

чизиқлар ҳосил бўлади. Улардан бири абсцисса ўқи бўлса, иккинчиси шохчалари 1- ва 3- квадрантларда жойлашган гиперболадан иборат (29- чизма).

Энди топилган (3.36) C — дискриминант чизиқлар ўрама ёки ўрама эмаслигини текширамиз. Кўрилаётган ҳолда $\Phi=y-C^3x^2+2C^2x-C$. Ундан $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\ \ 2C^3x+$ $+2C^2$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}=1\neq 0$. Демак, (3.36) даги ҳар икки чизиқ ҳам ўрамадир.



29- чизма

3.4- теорема. (3.31) *силлиқ чизиқлар оиласи* (3.1) *дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлиб, ўша чизиқлар оиласи ўрамага эга бўлса, у ҳолда бу ўрама* (3.1) *тенгламанинг махсус ечими бўлади.*

Исбот. Ўраманинг тенгламаси $F_1(x, y)=0$ (ёки $y=F_2(x)$) кўринишда бўлсин. Унда ихтиёрий (x_0, y_0) нуқтани оламиз, яъни $(x_0, y_0)\in l$, l — ўрама. Олинган нуқтада ўрамага ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти k шу нуқтадан ўтувчи интеграл чизиқлардан бирортасига ўтказилган уринма бурчак коэффициенти k_1 билан устма-уст тушади. Демак, l — ўрама (3.1) дифференциал тенгламанинг ечими бўлади. Шундай қилиб, (x_0, y_0) ихтиёрий бўлгани учун l — ўраманинг ҳар бир нуқтасидан шу l чизиғи ва (3.31) оиланинг битта чизиғи ўтади. Бундан l — ўрама (3.1) дифференциал тенгламанинг махсус ечими экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Юқорида кўрилган мисолда умумий ечим $y-C^3x^2+2C^2x-C=$ $=0$ кўринишда бўлиб, шу чизиқлар оиласи учун $y=0$, $y=\frac{4}{27x}$ чизиқлар ўрама экани кўрсатилган эди. Демак, бу чизиқлар тегишли диффереинал тенгламанинг махсус ечимлари бўлади (29- чизма).

Юқоридаги мулоҳазалардан равшанки, дифференциал тенгламанинг барча ечимларини топиш учун унинг умумий ечимини ва агар мавжуд бўлса, махсус ечимларини топиш лозимдир.

Машқ. Ушбу дифференциал тенгламаларнинг барча ечимлари топилсин:

1. $y'=\sqrt{1-y^2}$, $|y|<1$;
2. $y'=\sqrt[3]{(y-x)^2+5}$, $D_3=R^3$;
3. $x-y=\frac{4}{9}(y')^2-\frac{8}{27}(y')^3$, $D_3=R^3$
4. $(2xy'-y)^2-4x^3=0, x\geqslant 0$;
5. $x^2(y')^2-2xyy'+2xy=0, xy\leqslant 0$, $x\neq 0$, $y'\leqslant 1$.

3.5-§. ИЗОГОНАЛ ВА ОРТОГОНАЛ ТРАЕКТОРИЯЛАР

3.6-таъриф. *Агар текисликда бир параметрли силлиқ l чизиқлар оиласи*

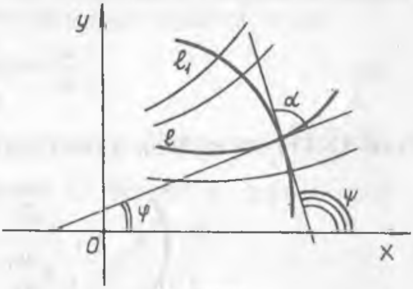
$$\Phi(x,\ y,\ a)=0 \quad (a — параметр) \tag{3.37}$$

берилган бўлса, у ҳолда бу оила чизиқларини ўзгармас α бурчак остида кесиб ўтувчи l_1 чизиқ берилган (3.37) *оиланинг изогонал траекторияси дейилади.* Таърифга кўра l ва l_1 чизиқларнинг кесишган нуқтасида уларга ўтказилган уринмалар орасидаги бурчак α га тенг.

Агар $\alpha=\frac{\pi}{2}$ бўлса, изогонал траектория *ортогонал траектория* деб юритилади.

Энди берилган (3.37) оиланинг изогонал траекторияларини топиш билан шуғулланамиз. Шуни қайд қилиб ўтамизки, $\alpha=0$ бўлганда биз тегишли оила учун ўрамага эга эдик ва бу ўрамалар мавжуд бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин эди. Қурилаётган ҳолда (яъни $\alpha\neq 0$ бўлганда) берилган силлиқ чизиқлар оиласининг изогонал траекториялари мавжуд ва бу траекториялар тўплами чексиз тўпламдир. Бу тўпламни Φ_i, (3.37) чизиқлар оиласини эса Φ_a деб белгилаймиз.

Аввал $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ бўлсин. Φ_i тўпламдан бирор l_1 чизиқни олайлик. Унда ўзгарувчи координаталар x_1, y_1 бўлсин. (3.37) оиланинг дифференциал тенгламаси тузилади. Уни биз биламиз. $\mathrm{tg}\alpha=k$ дейлик. Агар $\mathrm{tg}\varphi$ (3.37) оила чизиғига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти бўлса,



30- чизма

$$\mathrm{tg}(\psi-\varphi)=\mathrm{tg}\alpha=k \text{ ёки } \frac{\frac{dy_1}{dx_1}-\frac{dy}{dx}}{1+\frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy}{dx}}=k \tag{3.38}$$

бўлади (30- чизма). Бундан

$$\frac{\frac{\partial\Phi(x_1,\ y_1,\ a)}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx_1}+\frac{\partial\Phi(x_1,\ y_1,\ a)}{\partial x_1}}{\frac{\partial\Phi(x_1,\ y_1,\ a)}{\partial y_1}-\frac{\partial\Phi(x_1,\ y_1,\ a)}{\partial x_1}\frac{dy_1}{dx_1}}=k. \tag{3.39}$$

Агар $\Phi(x_1,\ y_1,\ a)=0$ ва (3.39) муносабатлардан параметр a ни чиқариб ташласак,

$$F\left(x_1,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx_1}\right)=0 \tag{3.40}$$

дифференциал тенгламага келамиз. Бунда $x_1=x$, $y_1=y$ дейиш мумкин. (3.40) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини формула билан ёзилади. Топилган ифодани (1.31) га қўйиб, $U(x, y)$ функция учун

$$U(x, y)=\int_{x_0}^{x} M(t, y)\,dt+\int_{y_0}^{y} N(x_0, s)\,ds$$

ифодани ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди. Теореманинг етарлилигини исботлаш бир вақтда тўлиқ дифференциалли тенгламаларни интеграллаш усулини ҳам беради.

Етарлиликнинг исботида интеграллаш аслида $(x_0, y_0)\in\Gamma$, $(x, y)\in\Gamma$ нуқталарни туташтирувчи ихтиёрий эгри чизиқ бўйича олиб борилди. Бу Γ соҳа бир боғламли бўлгандагина мумкин.

Мисол. Ушбу $(x^2+2y)\,dx+(2x+y^2)\,dy=0$ дифференциал тенгламанинг тўлиқ дифференциалли экани текширилсин ва интеграллансин.

Тенгламада $M=x^2+2y$, $N=2x+y^2$. Бундан $\frac{\partial M}{\partial y}=2$, $\frac{\partial N}{dx}=2$. Демак, тенглама тўлиқ дифференциалли. Энди уни интеграллаймиз.

$\frac{\partial U}{\partial x}=x^2+2y$ дан $U=\frac{x^3}{3}+2yx+\varphi(y)$, $\frac{\partial U}{\partial y}=2x+\varphi'(y)=2x+y^2$, $\varphi'(y)=y^2$, $\varphi(y)=\frac{y^3}{3}+C_1$ келиб чиқади. Топилган натижани ўрнига қўйсак ($C_1=0$ деб),

$$U(x, y)=\frac{x^3}{3}+2xy+\frac{y^3}{3}=C$$

умумий ечимни топамиз.

Ушбу

$$M(x)\,dx+N(y)\,dy=0$$

дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли, чунки $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=0$. Содда ҳисоблашлар ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x),\quad \frac{\partial U}{\partial y}=N(y),\quad U=\int M(x)\,dx+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi'(y),\quad \varphi'(y)=N(y).$$

Дифференциал тенгламанинг интеграли

$$U=\int M(x)\,dx+\int N(y)\,dy$$

функциядан иборат. Умумий интеграл эса

$$\Phi_1(x)+\Phi_2(y)=C$$

кўринишда бўлади, бу ерда $\Phi_1(x)$ функция $M(x)$ нинг бирор бошланғич функцияси бўлса, $\Phi_2(y)$ функция $N(y)$ нинг бирор бошланғич функциясидир.

Агар (1.5) тенгламада $f(x)=M(x)$, $g(y)=-\frac{1}{N(y)}$, $N(y)\neq 0$ дейилса, юқорида кўрилган тўлиқ дифференциалли тенгламага келамиз. Демак, кўрилган дифференциал тенгламага ўзгарувчилари ажраладиган ва тўлиқ дифференциалли деб қарасак ҳам бўлаверади.

1.11-теорема. (1.26) *дифференциал тенгламада* $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$ ва $\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ *функциялар* $P=\{(x, y): x\in I_x,\ y\in I_y\}$, $P\subset\Gamma$ *тўғри тўртбурчакда узлуксиз бўлиб,* $N(x, y)\neq 0$, $(x, y)\in P$ *ва* $\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}$, $(x, y)\in P$ *бўлса, у ҳолда* P *тўпламнинг ҳар бир берилган* (x_0, y_0) *нуқтасидан* (1.26) *тенгламанинг фақат битта интеграл чизиғи ўтади.*

Исбот. Теореманинг шартига кўра дифференциал тенгламанинг чап томони тўлиқ дифференциалдир, яъни $M(x, y)\equiv\frac{\partial u}{\partial x}$, $N(x, y)\equiv\equiv\frac{\partial u}{\partial y}$. $N(x, y)\neq 0$, $(x, y)\in P$ га кўра (1.26) дифференциал тенгламани

$$M(x, y)+N(x, y)y'=0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ундан

$$\frac{du(x, y)}{dx}=0$$

ҳосил бўлади $\left(\frac{du}{dx}\right.$ ҳосила $u(x, y)$ дан олинган тўлиқ ҳосила). Энди $y(x)$, $x\in I_x$ функция (1.26) тенгламанинг ечими бўлиши учун

$$u(x, y(x))=C, \qquad x\in I_x \tag{1.32}$$

бўлиши зарур ва етарли. Фаразга кўра $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x, y)\neq 0$, $(x, y)\in P$. Шу сабабли, (1.32) ни $y(x)$ га нисбатан бир қийматли ечиш мумкин. C нинг $u(x_0,y_0)=C$ муносабат билан аниқланган қиймати (1.26) тенгламанинг (x_0, y_0) нуқтадан ўтадиган ягона интеграл чизиғини белгилайди ва у

$$u(x, y)=u(x_0, y_0)$$

формула ёрдамида ифодаланади. $u(x, y)$ функцияни излаш усули эса аввалги теоремада берилган.

1.10-§. ИНТЕГРАЛЛОВЧИ КЎПАЙТУВЧИ

1. Γ соҳада аниқланган бирорта ҳам $U(x, y)$ функция учун (1.28) тенглик ўринли бўлмасин, яъни (1.26) дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли бўлмасин.

1.11-таъриф. *Агар* Γ *соҳада берилган* $M(x, y)$, $N(x, y)$ *ва бирор* $\mu(x, y)\neq 0$ *функциялар учун ушбу*

$$\mu(x, y)M(x, y)dx+\mu(x, y)N(x, y)dy=0 \tag{1.33}$$

тенглама тўлиқ дифференциалли бўлса, (1.26) *дифференциал тенглама тўлиқ дифференциаллига келтириладиган тенглама,* $\mu(x, y)$ *функция эса унинг интегралловчи кўпайтувчиси дейилади.*

Бундан кейин юритиладиган мулоҳазалар кўрсатадики, $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар Γ соҳада дифференциалланувчи бўлса, интегралловчи кўпайтувчи $(x_0, y_0)\in\Gamma$ нуқтанинг етарли кичик атрофида албатта мавжуд бўлади.

1.12- теорема. *Агар* $0 \neq \mu(x, y) \in C^1(\Gamma)$, $M(x, y) \in C^1(\Gamma)$, $N(x, y) \in C^1(\Gamma)$ *бўлиб,* $y = y(x)$, $y(x_0) = y_0$ *функция* I *интервалда аниқланган ҳамда* (1.33) *тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда ўша функция* (1.26) *тенгламанинг ҳам шу* I *интервалда аниқланган ечими бўлади.*

Исбот. Шартга кўра, $\mu(x, y(x)) \neq 0$, $x \in I$ ва $y(x)$ функция (1.33) нинг ечими. Демак, ушбу

$$\mu(x, y(x)) M(x, y(x)) + \mu(x, y(x)) N(x, y(x)) y'(x) \equiv 0, \ x \in I$$

айният ўринли. Ундан $M(x, y(x)) + N(x, y(x)) y'(x) \equiv 0$, $x \in I$ айният келиб чиқади. Бу эса $y(x)$ функция (1.26) тенгламанинг ечими эканини билдиради. Бу теоремадан (1.26) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлмаган ҳолда тегишли интеграллoвчи кўпайтувчи $\mu(x, y) \neq 0$ ёрдамида ҳосил қилинган тўлиқ дифференциалли тенгламанинг умумий интеграли $u(x, y) = C$ берилган (1.26) тенгламанинг ҳам умумий интеграли бўлиши келиб чиқади.

2. Энди интеграллoвчи кўпайтувчини тўлароқ ўрганамиз. (1.33) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлсин. У ҳолда Γ соҳада

$$\frac{\partial(\mu(x, y) M(x, y))}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu(x, y) N(x, y))}{\partial x}, \ (x, y) \in \Gamma \qquad (1.34)$$

айният ўринли. Бундан ҳосилаларни ҳисобласак

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

ёки

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

ёки $\mu(x, y) > 0$, $(x, y) \in \Gamma$ десак,

$$M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} - N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \qquad (1.35)$$

муносабатга келамиз. Бу $\ln\mu(x, y)$ функцияга нисбатан биринчи тартибли хусусий ҳосилали бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама (12.2- ва 12.3- § ларга қаранг). Биз учун шу (1.35) тенгламанинг бирор хусусий ечимини билиш етарли. Бундай ечим $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуқтанинг етарли кичик атрофида M, N, $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ функциялар Γ соҳада узлуксиз бўлгани учун доим мавжуд (12.1-теоремага қаранг).

1.13-теорема. *Агар* (1.26) *дифференциал тенглама* $U(x, y) = C$ *умумий интегралга эга бўлса, у ҳолда бу тенглама учун интеграллoвчи кўпайтувчи мавжуд бўлади.*

Исбот. Равшанки, $\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy = 0$ ёки $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$, $(x, y) \in \Gamma$ десак, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$. Қайд қиламизки, агар $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$, $(x, y) \in \Gamma$ бўлса, $0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0$ тенгламадан текисликнинг ихтиёрий нуқтаси ечим бўла олиши келиб чиқади, яъни бу ҳолда интегралланувчи дифференциал тенгламага эга бўламиз. Агар

$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\neq 0$, масалан, $\frac{\partial U}{\partial x}\neq 0$, $\frac{\partial U}{\partial y}\equiv 0$, $(x, y)\in\Gamma$ бўлса, биз $dx=0$ ёки $x=\text{const}$ га эга бўламиз. Бу ҳолда ихтиёрий вертикал $x=\text{const}$ тўғри чизиқ интеграл чизиқ бўлади.

Иккинчи томондан, (1.26) га кўра

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}.$$

Шунинг учун

$$\frac{M}{N}=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} \text{ ёки } \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M}=\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N}.$$

Бундан

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\mu M,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\mu N$$

тенгликлар орқали Г соҳада аниқланган $\mu(x, y)$ функцияни киритиш мумкин. Энди

$$\mu(Mdx+Ndy)=\mu Mdx+\mu Ndy=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=dU=0$$

муносабатлардан $\mu\ (x, y)$ функция (1.26) дифференциал тенглама учун интегралловчи кўпайтувчи экани келиб чиқади.

Қуйида иккита теоремани исботсиз келтирамиз.

1.14- теорема. *Агар* $\mu\ (x, y)$, $(x, y)\in\Gamma$ (1.26) *дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиси бўлиб,* $U\ (x, y)$ *функция шу тенгламанинг интеграли бўлса, у ҳолда ихтиёрий*

$$\mu_1\ (x, y)=\mu\ (x, y)\Phi(U),\ \Phi(U(x, y))\in C^1(\Gamma) \tag{1.36}$$

функция ҳам интегралловчи кўпайтувчи бўлади.

1.15- теорема. (1.26) *дифференциал тенгламанинг ихтиёрий интегралловчи кўпайтувчиси ушбу*

$$\mu_1\ (x, y)=\Phi(U)\mu(x, y) \tag{1.36$'$}$$

формула билан берилади, бунда $\mu(x, y)$ *бирор интегралловчи кўпайтувчи,* Φ *эса (1.26) тенглама интеграли* U *нинг ихтиёрий узлуксиз функцияси.*

Қайд қиламизки, бу теоремадан икки қатъий фарқ қилувчи μ ва μ_1 интегралловчи кўпайтувчилар маълум бўлганда дифференциал тенгламанинг умумий интеграли $\frac{\mu_1}{\mu}=\text{const}$ экани келиб чиқади.

3. Интегралловчи кўпайтувчини топишнинг баъзи хусусий ҳолларига тўхталамиз. Шубҳасиз $\mu(x, y)\neq 0$, $\mu(x, y)\neq\text{const}$. Интегралловчи кўпайтувчи фақат x нинг ёки y нинг функцияси бўлган ҳоллар энг содда ҳоллар ҳисобланади.

а) $\mu(x, y)=\mu(x)$ бўлсин. Бунда (1.35) тенглама соддалашади $\left(\text{чунки } \frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=0\right)$:

$$-N\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

ёки

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{1.37}$$

$\mu(x, y)$ функция учун юқорида қилинган фараз (1.37) нинг ўнг томони фақат x нинг функцияси бўлишидан иборатдир. (1.37) нинг икки томонини x_0 дан x гача интеграллаймиз:

$$\mu(x)=Ce^{\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx} \tag{1.38}$$

Бизни бирорта интегралловчи кўпайтувчи қизиқтираётгани учун $C=1$ деса бўлади.

б) Энди $\mu(x, y)=\mu(y)$ бўлсин, (1.36) тенглама бундай кўринишга келади:

$$M\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}.$$

Ундан y_0 дан y гача интеграллаш натижасида $((x, y_0)\in\Gamma$, $(x, y)\in\Gamma)$

$$\mu(y)=Ce^{\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy} \tag{1.39}$$

ифодани топамиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)$$

чизиқли дифференциал тенглама берилган бўлсин. Уни

$$[a(x)y+b(x)]dx-dy=0$$

кўринишда ёзамиз. Бунда $M(x, y)=a(x)y+b(x)$, $N(x, y)=-1$. Равшанки,

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=a(x),\ \frac{a(x)}{N}=-a(x).$$

Демак, $\mu=\mu(x)$. (1.38) га кўра:

$$\mu(x)=e^{-\int\limits_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi} \tag{1.40}$$

Шундай қилиб, биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиси (1.40) кўринишда бўлади.

2. Ушбу

$$(xy^2-y)dx+xdy=0$$

дифференциал тенглама тўлиқ дифференциалли эмас, чунки:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2xy-1,\ \frac{\partial N}{\partial x}=1,\ \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Аммо

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{2(xy-1)}{xy^2-y}=\frac{2}{y}.$$

Демак, $\mu=\mu(y)$ бўлади. Шунинг учун

$$\mu(y)=e^{-\int\limits_{y_0}^{y}\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln\frac{y}{y_0}}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-2}$$

ёки $y_0=1$ деб $\mu(y)=\frac{1}{y^2}$ интегралловчи кўпайтувчига эга бўламиз.

Берилган тенгламани интеграллаш жараёнини охирига етказиб қўямиз. Уни $\frac{1}{y^2}$ га кўпайтириб, тўлиқ дифференциалли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\left(x-\frac{1}{y}\right)dx+\frac{x}{y^2}dy=0.$$

Бу тенглама учун

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{y}=C$$

умумий ечим бўлади.

в) $\mu(x, y)=\mu_1(x)\mu_2(y)$ дейлик. (1.26) дифференциал тенглама шу кўринишда интегралловчи кўпайтувчига эга бўлиши шартини чиқарамиз. (1.36) дан

$$M\cdot\frac{1}{\mu_2}\frac{d\mu_2}{dy}-N\frac{1}{\mu_1}\frac{d\mu_1}{dx}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

ёки

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\psi_1(x)-M\psi_2(y) \qquad (1.41)$$

га эгамиз, бу ерда

$$\psi_2(y)=\frac{1}{\mu_2}\frac{d\mu_2}{dy},\ \psi_1(x)=\frac{1}{\mu_1}\frac{d\mu_1}{dx}. \qquad (1.42)$$

Шундай қилиб, агар $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ ифода (1.41) кўринишда ёзилиши мумкин бўлса, у ҳолда (1.26) тенглама $\mu=\mu_1(x)\mu_2(y)$ кўринишда интегралловчи кўпайтувчига эга бўлади, бунда $\mu_1(x)$ ва $\mu_2(y)$ функциялар (1.42) формулалар ёрдамида топилади:

$$\mu_1(x)=e^{\int\psi_1(x)dx},\ \mu_2(y)=e^{\int\psi_2(y)dy}.$$

Мисоллар. 1. Ушбу

$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0,$$
$$M_2(y)\neq0,\ N_1(x)\neq0,\ (x, y)\in\Gamma,\ x\in I_x,\ y\in I_y$$

дифференциал тенглама $\mu_1(x)$ $\mu_2(y)$ кўринишда интегралловчи кўпайтувчига Ҳақиқатан, агар $M(x, y)=M_1(x)\cdot M_2(y)$, $N(x, y)=N_1(x)N_2(y)$ десак,

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=M_1(x)\frac{dM_2(y)}{dy}-N_2(y)\frac{dN_1(x)}{dx}=$$

$$=M_1(x)M_2(y)\frac{1}{M_2(y)}\frac{dM_2(y)}{dy}-N_1(x)N_2(y)\frac{1}{N_1(x)}\frac{dN_1(x)}{dx}=$$

$$=M(x,y)\frac{1}{M_2(y)}\frac{dM_2(y)}{dy}-N(x,y)\frac{1}{N_1(x)}\frac{dN_1(x)}{dx}.$$

Бундан

$$\psi_1(x)=-\frac{1}{N_1(x)}\frac{dN_1(x)}{dx},\quad \psi_2(y)=-\frac{1}{M_2(y)}\frac{dM_2(y)}{dy}$$

ёки

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{d\mu_1}{dx}=-\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dx},\ \frac{1}{\mu_2}\frac{d\mu_2}{dy}=-\frac{1}{M_2(y)}\frac{dM_2}{dy}$$

ёки

$$\mu_1=\frac{1}{N_1(x)},\quad \mu_2=\frac{1}{M_2(y)}.$$

Демак,

$$\mu(x,y)=\frac{1}{N_1(x)\ M_2(y)}.$$

Берилган тенгламанинг икки томонини шу функцияга кўпайтирсак, ўзгарувчил ажраладиган

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(x)}{M_2(x)}dy=0$$

дифференциал тенгламага келамиз. Унинг умумий интеграли

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=C.$$

2. Ушбу

$$(y^4-4xy)dx+(2xy^3-3x^2)dy=0,\ x>0,\ y>0,\ \frac{1}{4}y^3<x<\frac{2}{3}y^3$$

дифференциал тенглама интеграллансин.

Бу тенглама тўлиқ дифференциалли эмас, чунки

$$M=y^4-4xy,\ N=2xy^3-3x^2 \text{ ва } \frac{\partial M}{\partial y}=4y^3-4x,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2y^3-6x$$

муносабатлардан $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ тенгсизлик келиб чиқади.

Берилган дифференциал тенглама $\mu(x, y)=\mu_1(x)\mu_2(y)$ кўринишдаги интег ловчи кўпайтувчига эга, чунки

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4y^3-4x-(2y^3-6x)=(2xy^3-3x^2)\cdot\frac{2}{x}-(y^4-4xy)\cdot\frac{2}{y}=$$

$$=N\frac{2}{x}-M\frac{2}{y}.$$

Бундан $\psi_1(x)=\frac{2}{x}$, $\psi_2(y)=\frac{2}{y}$, ва $\mu_1(x)=e^{\int \frac{2}{x}dx}=x^2$, $\mu_2(y)=e^{\int \frac{2}{y}dy}=y^2$.

Демак, интегралловчи кўпайтувчи $\mu(x, y)=x^2y^2$ кўринишга эга (берилган тенгламани $\mu=x^2y^2$ бўлганда тўлиқ дифференциаллига келтириб, сўнгра уни интеграллаш китобхонга мустақил иш ўрнида топширилади).

Машқ бажараётганда баъзи ҳолларда интегралловчи кўпайтувчи

$$\mu(x, y)=\mu(x^0, y), \ \mu(x, y)=\mu\left(\frac{y}{x}\right), \ \mu(x, y)=\mu(x^2-y^2)$$

ва бошқа кўринишларда изланиши мумкин.

г) (1.26) дифференциал тенгламада $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар Г соҳада аниқланган, дифференциалланувчи ва m- тартибли бир жинсли бўлсин. У ҳолда (1.26) тенглама

$$\mu(x, y)=\frac{1}{xM+yN} \tag{1.43}$$

кўринишда интегралловчи кўпайтувчига эга. Ҳақиқатан,

$$M(x, y)=x^mM\left(1, \frac{y}{x}\right), \ N(x,y)=x^mN\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

ва

$$x^mM\left(1, \frac{y}{x}\right)dx+x^mN\left(1, \frac{y}{x}\right)dy=0.$$

Агар $\frac{y}{x}=u$ десак, $x^mM(1, u)\,dx+x^mN(1, u)\,(xdu+udx)=0$ ёки

$$[x^mM(1, u)+ux^mN(1, u)]dx+x^{m+1}N(1, u)\,du=0.$$

Бундан интегралловчи кўпайтувчи учун

$$\mu_1(x,y)=\frac{1}{x^{m+1}[M(1,u)+uN(1,u)]}$$

формула келиб чиқади. Берилган тенглама учун аввалги белгилашларга қайтиб, (1.43) формулани ҳосил қиламиз.

д) 1.15- теоремага кўра, (1.26) дифференциал тенгламанинг ихтиёрий интегралловчи кўпайтувчиси $\mu_1(x, y)=\Phi(U)\,\mu(x, y)$ формула билан ёзилиши мумкин. Бу формула интегралловчи кўпайтувчини топиш учун аввалги бўлимларда баён этилган усуллардан фарқ қиладиган усулни қўллашга олиб келади. Янги усул қуйидагидан иборат: (1.26) тенгламани шартли равишда иккига бўламиз:

$$[M_1(x, y)\,dx+N_1(x, y)\,dy]+[M_2(x, y)\,dx+N_2(x, y)\,dy]=0,$$

бунда $M_1+M_2=M$, $N_1+N_2=N$. Сўнгра ушбу

$$M_1dx+N_1dy=0, \ M_2dx+N_2dy=0$$

тенгламаларни айрим-айрим кўрамиз. Албатта, бу дифференциал тенгламалар учун интегралловчи кўпайтувчини нисбатан осонлик билан топа оламиз, деб ҳисоблаймиз. Тегишли тенгламаларнинг интегралловчи кўпайтувчиларни мос равишда μ_1 ва μ_2, интегралларини эса U_1 ва U_2 дейлик. У ҳолда юқоридаги формулага асосан ҳар бир дифференциал тенглама учун ихтиёрий интегралловчи кўпайтувчини

$$\mu_1^* = \mu_1 \Phi_1(U_1), \quad \mu_2^* = \mu_2 \Phi_2(U_2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Φ_1 ва Φ_2 ларнинг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, уларни шундай танлаймизки, ушбу

$$\mu_1^* = \mu_2^* = \mu$$

муносабат ўринли бўлсин. У ҳолда μ функция берилган (1.26) дифференциал тенглама учун интегралловчи кўпайтувчи бўлади. Амалда Φ_1 ёки Φ_2 функцияни 1 га тенг қилиб олиш мумкин.

Мисол. Ушбу $(xy^2 + y^4)dx + (x^2 - xy^3)dy = 0,\ x > 0,\ y > 0,\ x > y^3$ дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиси топилсин.

Бу тенгламани

$$d(xy) + \frac{y^3}{x}(ydx - xdy) = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ундан $\mu_1^* = \mu_1 \Phi_1(xy) = \Phi_1(xy)$. $\frac{y^3}{x}(ydx - xdy) = 0$ тенглама учун $\mu_2 = \frac{1}{x^2y^2}$ эканини в) бўлимдаги усул билан исботлаш мумкин. Энди $\mu_1^* = \mu_2^*$ бўлиши учун $\Phi_2 = 1$ десак,

$$\mu_2^* = \Phi_1(xy) = \frac{1}{x^2y^2} = \mu$$

келиб чиқади. Демак, $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$ функция берилган дифференциал тенглама учун интегралловчи кўпайтувчи бўлади.

1.11-§. ПИКАР ТЕОРЕМАСИНИНГ ИСБОТИ

Аввал (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $|x - x_0| \leqslant h$ оралиқда аниқланган ечимнинг мавжудлигини, сўнгра бу ечимнинг ягоналигини исботлаймиз.

Исботга бевосита ўтишдан аввал баъзи ёрдамчи тасдиқларга тўхталамиз. Γ соҳада маркази $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуқтада бўлган ҳамда чегараси билан бутунлай шу соҳада жойлашган бирор $\mathbf{P}$ тўғри тўртбурчак чизиш мумкин (бунинг исботи ўқувчига ҳавола этилади). Унинг горизонтал томони узунлигини $2a$, вертикал томони узунлигини эса $2b$ деб белгилайлик, бунда a ва b лар мусбат чекли сонлар. Шундай қилиб, $\mathbf{P} = \{(x, y): |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$, $P \subset \Gamma$ бўлиб, P — ёпиқ чегараланган тўплам.

Γ да узлуксиз бўлган $f(x, y)$ функция P да ҳам узлуксиз бўлади. P ёпиқ, чегараланган бўлгани учун $f(x, y)$ унда чегараланган бўлади, яъни $\max\limits_{(x, y) \in P} |f(x, y)| = M$, $M \geqslant 0$. Агар $M = 0$ бўлса, $f(x,y) \equiv 0\ \forall\ (x,y) \in \mathrm{P}$ бўлади. Бу ҳолда $(x, y) \in P$ учун (1.1) тенглама соддагина $\frac{dy}{dx} = 0$ кўринишни олади. Бу тенгламанинг $y(x_0) = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими $y(x) \equiv y_0$, $|x - x_0| \leqslant a$ каби ёзилади. Бундай ечим ягона экани равшан.

---

*) Э. Пикар (1856—1941) мавжудлик теоремасини 1893 йилда кетма-кет яқинлашиш усули билан исбот қилган.

Энди
$$\max_{(x,\ y)\in P} |f(x,\ y)|=M,\ M>0$$
бўлсин. Шу P тўғри тўртбурчакнинг ихтиёрий $(x,\ y_1)$ ва $(x,\ y_2)$ нуқталари учун ҳам (L) тенгсизликнинг бажарилиши равшан (1.2- теореманинг шартига кўра). Қайд қиламизки, $(x_0,\ y_0)\in P$ нуқта P тўғри тўртбурчакнинг марказидан иборат. Энди (1.1) дифференциал тенгламанинг (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $|x-x_0|\leqslant h,\ h\leqslant a$ оралиқда аниқланган ягона ечимининг мавжудлигини исботлаймиз. Бунинг учун биринчи қадам дифференциал тенгламадан *интеграл тенгламага* ўтишдан иборат.

I. $y=\varphi(x)$ (1.1) тенгламанинг $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган бирор ечими бўлиб, у (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирсин. Шундай экан, биз ушбу
$$\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,\varphi(x)) \tag{1.44}$$
айниятга эгамиз. Бу ҳолда $\varphi(x)$ функция учун $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда
$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,\ \varphi(\tau))\,d\tau \tag{1.45}$$
интеграл айният ўринли. Аксинча, агар бирор узлуксиз $\varphi(x)$ функция учун $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда (1.45) айният ўринли бўлса, у ҳолда $y=\varphi(x)$ функция дифференциалланувчи, (1.1) тенгламанинг ечими ва (1.3) бошланғич шартни қаноатлантиради. Бошқача айтганда, (1.45) интеграл тенглама (1.3) бошланғич шарт билан бирга олинган (1.1) тенгламага *эквивалент*. Бу тасдиқ *эквивалентлик леммаси* деб юритилади. Уни исботлайлик.

(1.45) муносабат ўринли бўлсин. Унда $x=x_0$ деб $\varphi(x_0)=y_0$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, (1.45) дан (1.3) бошланғич шарт келиб чиқади. Равшанки, (1.45) айниятнинг ўнг томони x бўйича дифференциалланувчи, шунинг учун унинг чап томони ҳам x бўйича дифференциалланувчи бўлади. (1.45) ни дифференциаллаш натижасида (1.44) айниятни ҳосил қиламиз.

Энди (1.3) ва (1.44) муносабатлар ўринли бўлсин. (1.44) ни x_0 дан x гача интеграллаб
$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(\tau,\ \varphi(\tau))\,d\tau$$
ни ҳосил қиламиз. Бундан (1.3) га кўра (1.45) ни ҳосил қиламиз. Тасдиқ исботланди.

II. (1.1) дифференциал тенгламанинг (1.3) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган ечимининг мавжудлигини кўрсатиш (1.45) интеграл тенгламанинг худди шундай ечимининг мавжудлигини кўрсатишга келтирилди. Тавсия этиладиган усул ёрдамида аввало ечимнинг мавжудлиги исботланса, кейин у ечимни берилган аниқликда тақрибан қуриш мумкинлиги ҳам кўрсатилади.

Бошланғич (нолинчи) яқинлашиш сифатида y_0 ни қабул қиламиз. Қуйидаги

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\,d\xi,$$

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\,d\xi, \tag{1.46}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\ y_{n-1}(\xi))\,d\xi,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

қоида билан $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, ... функцияларни қурамиз. Улар «маълум маънода» тақрибий ечимлар бўлади. Бу функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

1) Равшанки, $y_k(x_0)=y_0(k=1,2, \dots)$. Демак, ҳар бир $y=y_k(x)$, $k=1,2, \dots$ функциянинг графиги (x_0, y_0) нуқтадан ўтади.

2) Агар $h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ бўлса, $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган $y_k(x)$, $k=1,2, \dots$ функцияларнинг графиги P тўғри тўртбурчакдан чиқиб кетмайди. Ҳақиқатан, элементар мулоҳазалар ёрдамида h нинг аниқланишига кўра қуйидаги тенгсизликларни ҳосил қиламиз:

$$|y_1(x)-y_0|=|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\,d\xi|\leqslant|\int_{x_0}^{x}|f(\xi, y_0)|\,d\xi|\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant b,$$

$$|y_2(x)-y_0|=|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\,d\xi|\leqslant$$

$$\leqslant|\int_{x_0}^{x}|f(\xi, y_1(\xi))|\,d\xi|\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant b,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|y_n(x)-y_0|=|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant|\int_{x_0}^{x}|f(\xi, y_{n-1}(\xi))|\,d\xi\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant b,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Энди $y_s(x)$ функциянинг графиги P дан чиқмайди, дейлик. Унда $\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_s(\xi))\,d\xi$ интеграл аниқланган ва $|y_s(x)-y_0|\leqslant b$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга асосан

$$|y_{s+1}-y_0| = |\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_s(\xi))\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant |\int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi, y_s(\xi))|\, |d\xi| \leqslant M|x-x_0| \leqslant Mh \leqslant b$$

муносабатга эга бўламиз. Шундай қилиб, агар бирор натурал s сони учун $y_s(x)$ функциянинг графиги P дан чиқмаса, яъни $(x, y_s(x)) \in P$, у ҳолда $s+1$ учун ҳам $(x, y_{s+1}(x)) \in P$ бўлади. Демак, қўлланилган математик индукция усули $(x, y_k(x)) \in P$, $k=1,2, \ldots$ эканини исбот этади.

3) $y_k(x)$ $(k=1,2, \ldots)$ функциялар $|x-x_0| \leqslant h$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз. Ҳақиқатан, равшанки,

$$y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\, d\xi$$

функция $|x-x_0| \leqslant h$ оралиқда узлуксиз, чунки $f(x, y)$ функция ўша оралиқда узлуксиз. Шунга ўхшаш, $f(x, y_1(x))$ функция ҳам $|x-x_0| \leqslant h$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун $y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi$ функция ҳам ўша оралиқда узлуксиз бўлади. Қолган $y_3(x)$, ..., $y_n(x)$, ... функцияларнинг тегишли оралиқда аниқланганлиги ва узлуксизлиги математик индукция усули билан осонгина исботланиши мумкин.

III. (1.46) функциялардан тузилган $\{y_k(x)\}$ функционал кетма-кетлик $|x-x_0| \leqslant h$, $h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ оралиқда текис яқинлашади. Буни исботлаш учун

$$y_0 + [y_1(x) - y_0] + [y_2(x) - y_1(x)] + \ldots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \ldots \qquad (1.47)$$

функционал қаторни кўрамиз. Равшанки, k- хусусий йиғинди $S_k(x) = y_k(x)$. Агар (1.47) қатор текис яқинлашувчи бўлса, ундан $\{y_k(x)\}$ кетма-кетликнинг тегишли оралиқда текис яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Энди (1.47) қаторнинг ҳар бир ҳадини баҳолаймиз:

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant M|x-x_0|,$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant |\int\limits_{x_0}^{x} [f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_0)]d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant |\int\limits_{x_0}^{x} |f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_0)|\, d\xi|.$$

Интеграл остидаги айирма учун Липшиц шартини қўллаймиз[*] ва $|y_1(x) - y_0|$ учун топилган баҳодан фойдаланамиз:

---

[*] Агар $L=0$ бўлса, $|x-x_0| \leqslant h$ оралиқда $y_1(x) = y_2(x) = \ldots = y_n(x) = \ldots$ бўлади. Агар $Y(x) = y_i(x)$, $i=1,2, \ldots$ десак, $y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_n(\tau))\, d\tau$ дан $n \to \infty$ да $y = Y(x)$ функция (1.1) тенгламанинг ечими экани келиб чиқади.

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant L|\int\limits_{x_0}^{x}|y_1(\xi)-y_0|d\xi|\leqslant LM|\int\limits_{x_0}^{x}|\xi-x_0|d\xi|=LM\frac{|x-x_0|^2}{2!}$$

Шунга ўхшаш,

$$|y_3(x)-y_2(x)|=|\int\limits_{x_0}^{x}[f(\xi,\ y_2(\xi))-f(\xi,\ y_1(\xi))]d\xi|\leqslant$$

$$\leqslant|\int\limits_{x_0}^{x}|f(\xi,\ y_2(\xi))-f(\xi,\ y_1)(\xi))|d\xi|\leqslant L|\int\limits_{x_0}^{x}|y_2(\xi)-y_1(\xi)-d\xi|\leqslant$$

$$\leqslant L^2M|\int\limits_{x_0}^{x}\frac{|\xi-x_0|^2}{2}d\xi|=\frac{L^2M}{3!}|x-x_0|^3.$$

Математик индукция усули ёрдамида ихтиёрий натурал n учун қуйидаги тенгсизликни топамиз:

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant\frac{L^{n-1}M}{n!}|x-x_0|^n. \tag{1.48}$$

$|x-x_0|\leqslant h$ оралиқдан олинган x лар учун

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant Mh,$$

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant ML\frac{h^2}{2!},$$

$$|y_3(x)-y_2(x)|\leqslant ML^2\frac{h^3}{3!},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant ML^{n-1}\frac{h^n}{n!},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

муносабатларга келамиз. Бундан кўринадики, (1.47) функционал қаторнинг ҳар бир ҳади мусбат ҳадли

$$|y_0|+\sum_{k=1}^{\infty}ML^{k-1}\frac{h^k}{k!} \tag{1.49}$$

сонли қаторнинг тегишли ҳадидан катта эмас. (1.49) қатор эса Даламбер аломатига кўра яқинлашувчи, чунки

$$\lim_{k\to\infty}ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}\cdot\frac{(k-1)!}{h^{k-1}}\cdot\frac{1}{ML^{k-2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{Lh}{k}=0<1.$$

Шу сабабли, (1.47) қатор Вейерштрасс аломатига кўра $|x-x_0|\leqslant\leqslant h$ оралиқда текис яқинлашувчи ва демак, $\{y_k(x)\}$ кетма-кетлик ҳам текис яқинлашувчи бўлади. Бу кетма-кетлик ўша оралиқда бирор узлуксиз $Y(x)$ функцияга текис яқинлашади, яъни

$$\lim_{k\to\infty}y_n(x)=Y(x),\ x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h.$$

Энди $Y(x_0)=y_0$, $(x,\ Y(x))\in P$, $|x-x_0|\leqslant h$ эканини исбот этамиз.

Ҳақиқатан,

$$Y(x_0)=\lim_{k\to\infty} y_k(x_0)=\lim_{k\to\infty} y_0=y_0, \text{ яъни } Y(x_0)=y_0.$$

Ушбу $|y_k(x)-y_0|\leqslant b$ тенгсизликда ($k\to\infty$ да) лимитга ўтамиз: $|Y(x)-y_0|\leqslant b$. Бундан $(x, Y(x))\in P$ келиб чиқади.

IV. $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган $Y(x)$ функция (1.45) интеграл тенгламанинг ечими эканини исботлаймиз.

Юқорида исбот этилгани бўйича $\{y_k(x)\}$ кетма-кетлик $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда $Y(x)$ функцияга текис яқинлашади. Демак, ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $N=N(\varepsilon)$ натурал сон топиладики, k нинг $k>N(\varepsilon)$ қийматлари учун $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда ушбу

$$|y_k(x)-Y(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Липшиц шартидан фойдалансак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_k(\xi))d\xi-\int_{x_0}^{x} f(\xi), Y(\xi))d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi, y_k(\xi))-f(\xi, Y(\xi))|d\xi\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}L|y_k(\xi)-Y(\xi)|d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant L\varepsilon|x-x_0|\leqslant L\varepsilon h\to 0, \text{ агар } \varepsilon\to 0 \text{ бўлса.}$$

Шунинг учун $k\to\infty$ да ихтиёрий x учун ушбу

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_k(\xi))d\xi\to\int_{x_0}^{x} f(\xi, Y(\xi))d\xi, \; |x-x_0|\leqslant h$$

муносабат ўринли. Энди (1.46) да ($n\to\infty$ да) лимитга ўтамиз:

$$Y(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi), Y(\xi))d\xi, \; |x-x_0|\leqslant h.$$

Бундан $Y(x)$ функциянинг (1.45) интеграл тенгламанинг ёки унга эквивалент бўлган (1.1) дифференциал тенгламанинг $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган ва $Y(x_0)=y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими экани келиб чиқади.

V. Энди $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган ва $Y(x_0)=Y_0$ шартни қаноатлантирадиган $y\equiv Y(x)$ ечим ягона эканини исбот этамиз. Фараз қилайлик, $y=Z(x)$ — ушбу $Z(x_0)=y$; бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва бирор $|x-x_0|\leqslant d$, $d\leqslant a$ оралиқда аниқланган ечим бўлсин. $|x-x_0|\leqslant h$ ва $|x-x_0|\leqslant d$ оралиқлар умумий x_0 нуқтага эга. Уларнинг умумий қисмини $|x-x_0|\leqslant h^*$, $h^*=\min\{h, d\}$ деймиз. Биз шу $|x-x_0|\leqslant h^*$ оралиқда $Y(x)\equiv Z(x)$ айниятнинг ўринли эканини исбот этамиз. Бунинг учун $|x-x_0|\leqslant h^*$ оралиқда аниқланган $u(x)=|Y(x)-Z(x)|\geqslant 0$ функцияни кўрамиз. Сўнгра шундай мусбат сон ε ни оламизки, у $\varepsilon<\min\left(h^*, \frac{1}{L}\right)$, $L>0$ тенгсизликни қаноатлантирсин*). Биз $Y(x)\equiv Z(x)$ айниятнинг

---

*) Агар $L=0$ бўлса $u(x)=|Y(x)-Z(x)|\leqslant 0$ бўлади. Ундан $[x_0, x_0+\varepsilon]$ оралиқда $Y(x)\equiv Z(x)$ экани келиб чиқади.

тўғрилигини $[x_0, x_0+\varepsilon]$ оралиқда кўрсатамиз. Бу оралиқнинг бирор τ нуқтасида $u(x)$ функция ўзининг максимумига эришади. Уни m дейлик, яъни

$$\max u(x) = u(\tau) = m, \ x \in [x_0, \ x_0+\varepsilon].$$

Содда алмаштиришлар ёрдамида ушбуни топамиз $(x \in [x_0, x_0+\varepsilon])$:

$$u(x) = |Y(x) - Z(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(\xi, Y(x))\, d\xi - \int_{x_0}^{x} f(\xi, Z(\xi))\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} \varepsilon_{0} |f(\xi, Y(\xi)) - f(\xi, Z(\xi))|\, d\xi \right| \leqslant L \left| \int_{x_0}^{x} |Y(\xi) - Z(\xi)|\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant L \left| \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} u(\xi)\, d\xi \right| \leqslant Lm\varepsilon,$$

яъни

$$u(x) \leqslant Lm\varepsilon, \ x \in [x_0, \ x_0+\varepsilon]. \tag{1.50}$$

Агар $m=0$ бўлса, бундан $u(x) \leqslant 0$ келиб чиқади. Аммо $u(x) \geqslant 0$ (киритилиши бўйича) тенгсизликни қаноатлантиргани учун $[x_0, x_0+\varepsilon]$ дан олинган барча x лар учун охирги икки тенгсизликдан $u(x) \equiv 0$ экани келиб чиқади. Агар $m > 0$ бўлса, (1.50) да $x = \tau$ деб, $m \leqslant Lm\varepsilon$ ёки $L\varepsilon \geqslant 1$ га эга бўламиз. Аммо ε нинг танланишига кўра $L\varepsilon < 1$. Биз шу тенгсизликка зид бўлган тенгсизликка келиб қолдик. Демак, фақат $m=0$ бўлиши мумкин. Биз $[x_0, x_0+\varepsilon]$ оралиқда $Y(x) \equiv Z(x)$ айниятни исбот этдик. Жумладан $Y(x_0+\varepsilon) = Z(x_0+\varepsilon)$. Бу қийматни y_ε дейлик. Равшанки, $x_0+\varepsilon < x_0+h^*$. Биз $\varepsilon > 0$ ни шундай танлашимиз мумкинки, $x_0+2\varepsilon < x_0+h^*$ бўлади. Энди $[x_0+\varepsilon, x_0+2\varepsilon]$ интервалда ҳам $Y(x) \equiv Z(x)$ айният ўринли эканини кўрсатиш мумкин. Мулоҳазалар худди юқоридагидек бўлади. Шунга ўхшаш $\varepsilon > 0$ ни кичиклаштириб бориш ҳисобига x_0+h^* га етарли яқин бўлган $x_0+k\varepsilon$ (k — натурал сон) сонни ҳосил қилиш ва $[x_0+(k-1)\varepsilon, x_0+k\varepsilon]$ оралиқда бир хил $Y(x_0+(k-1)\varepsilon) = Z(x_0(k-1)\varepsilon) = y_{(k-1)\varepsilon}$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган $Y(x)$ ва $Z(x)$ ечимлар устма-уст тушишини исботлаш мумкин. Шундай қилиб, $[x_0, x_0+h^*]$ оралиқда $Y(x) \equiv Z(x)$ айниятнинг ўринли экани исбот этилди. Худди шундай мулоҳазаларни $[x_0-h^*, x_0]$ оралиқда ҳам татбиқ этиш мумкин. Демак, $|x-x_0| \leqslant h^*$ оралиққа $Y(x) \equiv Z(x)$ экани исботланди.

Эслатиб ўтамизки, $h^*=h$ бўлганда ягоналик исбот этилди дейиш мумкин. $h^*=d$ бўлсин дейлик. Бу ҳолда $d<h$ бўлади. Агар $Y(x)$ ва $Z(x)$ лар $Y(x_0+d) = Z(x_0+d) = y_d$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимлар бўлса, унда $[x_0+d, x_0+h]$ оралиқда $Y(x) \equiv Z(x)$ айният ўринли бўлади. Буни кўрсатиш учун яна юқоридагидек мулоҳаза юритиш лозим бўлади, фақат $\varepsilon < \min\left(h, \frac{1}{L}\right)$ дейилса етарли. Шундай мулоҳаза $[x_0-h, x_0-d]$ оралиқ учун юритилиши мумкин. Шундай қилиб, $|x-x_0| \leqslant h$

оралиқда аниқланган ва $Y(x_0)=y_0$ шартни қаноатлантирадиган ечим ягона бўлади.

VI. Биз ечимнинг мавжудлигини ва ягоналигини $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқ учун исботладик. Агар бу оралиқ $y=\varphi(x)$, $\varphi(x_0)=y_0$ ечим аниқланишининг максимал оралиғидан иборат *бўлмаса*, у ҳолда бу ечимни *давом эттириш* мумкин. Ҳақиқатан $\varphi(x_0+h)=y_0^{(1)}$ дейлик. Равшанки, $(x_0+h,\ y_0^{(1)})$ нуқта Г соҳанинг ичида ётади. Бу ҳолда чегараси билан бутунлай Г да жойлашган

$$\mathrm{P}^{(1)}=\{(x,y):|x-x_0^{(1)}|\leqslant a_1,\ |y-y_0^{(1)}|\leqslant b_1\}$$

тўғри тўртбурчак қуриш мумкин. $0\leqslant M_1=\max\limits_{(x,y)\in P^1}|f(x,y)|$ деймиз. $M_1=0$ бўлган ҳол равшан. $M_1>O$ бўлсин. Агар бошланғич қийматлар сифатида $x_0^{(1)}$, $y_0^{(1)}$ ни қабул қилсак, исбот этилганига кўра (1.1) тенглама $|x-x_0^{(1)}|\leqslant h_1$, $h_1=\min\left\{a_1,\ \frac{b_1}{M}\right\}$ оралиқда аниқланган ва $y(x_0^{(1)})=y_0^{(1)}$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга бўлади. $I=[x_0-h,\ x_0+h]$ оралиқнинг учи билан $I_1=[x_0^{(1)}-h_1,\ x_0^{(1)}+h_1]$ оралиқнинг ўртаси устма-уст тушади (чунки $x_0^{(1)}=x_0+h$). Шу нуқтада ҳар икки қурилган ечимлар бир хил қиймат қабул қилади. Ягоналикка кўра бу ечимлар $I\cap I_1$ оралиқда устма-уст тушади. Аммо I_1 оралиқнинг ярми $(x_0^{(1)},\ x_0^{(1)}+h_1)$ I дан ташқарида ётади. Қурилган ечим шу оралиқда аввал I оралиқда қурилган ечимнинг *давоми* бўлади, деймиз. Агар $\varphi(x_0^{(1)}+h_1)=y^{(2)}$ десак, $(x_0^{(2)},\ y_0^{(2)})\in\Gamma, x_0^{(2)}=x_0^{(1)}+h_1$ бўлганда $x_0^{(2)}$, $y_0^{(2)}$ бошланғич қийматларга эга бўлган ва $I_2=[x_0^{(2)}-h_2,\ x_0^{(2)}+h_2]$, $h_2=\min\left(a_2,\frac{b_2}{M}\right)$ оралиқда олинган ягона ечимни қуриш мумкин, I_2 ҳам I_1 га нисбатан I_1 ва I оралиқларга ўхшаш жойлашган бўлади. $I_1\cap I_2$ да янги ечим аввалги (I_1 да аниқланган) ечим билан бир хил бўлади. I_2 нинг иккинчи ярмида эса аввалги ечимнинг давомига эга бўламиз. Шунга ўхшаш мулоҳазалар x нинг камаювчи қийматлари учун ҳам олиб борилиши мумкин. Кўрсатиш мумкинки, шундай давом эттиришлар ёрдамида Г соҳанинг чегарасига исталганча яқин бориш мумкин, яъни ечим мавжудлигининг максимал интервалини топиш мумкин.

Шундай қилиб, 1.2- теорема тўла исбот бўлди.

VII. Энди кетма-кет яқинлашиш ёрдамида дифференциал тенгламанинг аниқ ечимини унга m- яқинлашиш билан ($y_m(x)$ билан) берилган аниқликда алмаштиришга тўхталамиз. Ушбу

$$y_m(x)+[y_{m+1}(x)-y_m(x)]+[y_{m+2}(x)-y_{m+1}(x)]+\dots$$

функционал қаторни кўрайлик. II бўлимдаги мулоҳазаларга кўра ((1.48) тенгсизликларга қаранг) бу қатор $Y(x)$ функцияга $|x-x_0|\leqslant\leqslant h$ да текис яқинлашади. Демак, $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда

$$Y(x)=y_m(x)+[y_{m+1}(x)-y_m(x)]+[y_{m+2}(x)-y_{m+1}(x)]+\dots\ .$$

Бундан, (1.48) тенгсизликлардан фойдалансак:

$$|Y(x)-y_m(x)|\leqslant\frac{L^mM}{(m+1)!}|x-x_0|^{m+1}+\frac{L^{m+1}M}{(m+2)!}|x-x_0|^{m+2}+\dots$$

ёки
$$|Y(x)-y_m(x)\leqslant L^mM\,|x-x_0|^{m+1}\left[\frac{1}{(m+1)!}+\right.$$
$$\left.+\frac{L}{(m+2)!}|x-x_0|+\frac{L^2}{(m+3)!}|x-x_0|^2+\dots\right]\qquad(1.51)$$

келиб чиқади. Бу (1.51) тенгсизлик $y_m(x)$ функциянинг аниқ ечим $Y(x)$ дан фарқини баҳолайди. Агар $|x-x_0|\leqslant h$ эканини ҳисобга олсак, $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқнинг ҳар бир нуқтасида ушбу

$$|Y(x)-y_m(x)|\leqslant L^mMh^{m+1}\left[\frac{1}{(m+1)!}+\frac{Lh}{(m+2)!}+\frac{L^2h^2}{(m+3)!}+\dots\right]\qquad(1.52)$$

муносабат ўринли. (1.52) да M, L ва h — маълум миқдорлар, m эса талаб этилган аниқликдан топилади. Агар ҳар бир $x\in[x_0-h,\ x_0+$ $+h]$ нуқтада $|\,[Y(x)-y_m(x)|\leqslant\varepsilon$ тенгсизлик бажарилиши талаб этилса, у ҳолда m ни топиш учун

$$L^mMh^{m+1}\left[\frac{1}{(m+1)!}+\frac{Lh}{(m+2)!}+\frac{L^2h^2}{(m+3)!}+\dots\right]\leqslant\varepsilon\qquad(1.53)$$

тенгсизликни ечиш лозим бўлади. Амалда қўлланиш учун (1.51) ва (1. 52) тенгсизликлар ўрнига уларга нисбатан қўполроқ, лекин қулайроқ тенгсизликлардан фойдаланилади. Ушбу

$$\varepsilon_m(x)=|Y(x)-y_m(x)|,\ m=0,1,\ \dots$$

белгилашни киритамиз. Равшанки, $m\geqslant1$ бўлганда:

$$\varepsilon_m(x)=|Y(x)-y_m(x)|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\,Y(\xi))-f(\xi,\,y_{m-1}(\xi))]d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,Y(\xi))-f(\xi,\,y_{m-1}(\xi))|\,d\xi\right|\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon_{m-1}(\xi)\,d\xi\right|.$$

Бундан

$$\varepsilon_1(x)\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon_0(\xi)\,d\xi\right|\leqslant LM\left|\int_{x_0}^{x}|\xi-x_0|\,d\xi\right|=L^1M\frac{|x-x_0|^2}{2!}.$$

$$\varepsilon_2(x)\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon_1(\xi)\,d\xi\right|\leqslant L^2M\left|\int_{x_0}^{x}\frac{|\xi-x_0|^2}{2!}\,d\xi\right|=L^2M\frac{|x-x_0|^3}{3!}.$$

. . . .

$$\varepsilon_m(x)\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon_{m-1}(\xi)\,d\xi\right|\leqslant L^mM\frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!},\ m=1,2,\dots\ .$$

Шундай қилиб, ушбу

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_0(x)\leqslant M|x-x_0|,\\ &\varepsilon_m(x)\leqslant L^m M\frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)},\ m=1,2,\dots \end{aligned}\right\}\qquad(1.54)$$

тенгсизликларга эгамиз. Бундан $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда $m\to\infty$ да $\varepsilon_m(x)\to 0$ келиб чиқади.

Мисол. Кетма-кет яқинлашиш усули ёрдамида

$$\frac{dy}{dx}=x-y,\ \Gamma=P=\{(x,\ y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$$

дифференциал тенгламанинг $y(o)=1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган тақрибий ечими топилсин ва 4-яқинлашишнинг хатоси ҳисоблансин.

$y_0(x)=1$ дейлик,

$$y=1+\int_0^x(\xi-y)\,d\xi$$

дан

$$y_1=1+\int_0^x(\xi-1)\,d\xi=1-x+\frac{x^2}{2!},$$

$$y_2=1+\int_0^x\left(\xi-1+\xi-\frac{\xi^2}{2}\right)d\xi=1-x+x^2-\frac{x^3}{3},$$

$$y_3=1-x+x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{24},$$

$$y_4=1-x+x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^5}{120}$$

ларни ҳосил қиламиз. Берилган дифференциал тенгламанинг ўнг томони x ва y ларнинг ихтиёрий қийматларида аниқланган, узлуксиз ва y бўйича узлуксиз дифференциалланувчи. Шунинг учун бирор P тўғри тўртбурчакни олайлик:

$$P=\{(x,\ y):0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

У ҳолда $h=\min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}$, $M=\max\limits_{(x,\ y)\in P}|f(x,\ y)|$ га кўра

$$M=2,\ h=\min\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}.$$

Бунга ўхшаш $\frac{\partial_f}{\partial_y}=-1$ бўлганидан $L=\max\limits_{(x,\ y)\in P}\left|\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right|=1$ бўлади. Шундай қилиб, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, $x_0=0$ оралиқда ушбу

$$\varepsilon_4(x)=|Y(x)-y_4(x)|\leqslant 1^4\cdot 2\cdot\frac{x^5}{5!}=\frac{x^5}{60}$$

муносабат ўринли. Шу интервалда хатоликни топамиз:

$$\varepsilon_4=\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}}\varepsilon_4(x)=\frac{1}{60\cdot 32}=\frac{1}{1920}\approx 0{,}0005.$$

Кўриниб турибдики, 4-яқинлашиш билан аниқ ечим $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ интервалда ҳар бир x учун кўпи билан $\frac{1}{1920}$ га фарқ қилар экан. Демак, 0,0005 хатолик билан $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ оралиқда аниқ ечим ўрнида 4- яқинлашиш $y_4(x)$ ни олиш мумкин.

Машқ. 1. $\frac{dy}{dx}=3x-\frac{y}{x}$ дифференциал тенгламанинг $P\{(x,\ y):\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2\}$ тўпламда $y(1)=1$ шартни қаноатлантирадиган ечими учун иккинчи яқинлашиш $y_2(x)$ топилсин ва хатолик ҳисоблансин.

2. $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ дифференциал тенглама учун

$$P=\{(x,\ y):-1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$$

тўпламда $y(0)=0$ шартни қаноатлантирувчи иккинчи яқинлашиш $y_2(x)$ топилсин ва хатолик ҳисоблансин.

3. $\frac{dy}{dx}=x-y^2$ дифференциал тенглама учун $P=\{(x,\ y):0\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\quad -1\leqslant\leqslant y\leqslant 1\}$ тўпламда $y(0)=0$ шартни қаноатлантирувчи учинчи яқинлашиш $y_3(x)$ топилсин ва хатолик ҳисоблансин.

4. $\frac{dy}{dx}=y,\ -\infty<y<\infty$ дифференциал тенглама учун $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_m(x)\ \ldots$ кетма-кетлик тузилсин ва $Y(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\ y_m(x)$ топилсин.

1.12- §. ДАВОМСИЗ ЕЧИМЛАР

1.16- теорема. (1.1) *дифференциал тенглама берилган бўлиб,* $f(x,\ y)$ ва $\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}$ *функциялар* R^2 *текисликнинг* $\mathbf{\Gamma}$ *соҳасида аниқланган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда: 1)* (1.1) *дифференциал тенгламанинг* $\mathbf{\Gamma}$ *соҳадан олинган ихтиёрий берилган* x_0, y_0 *бошланғич қийматларга эга бўлган давомсиз ечими мавжуд; 2) агар (1.1) дифференциал тенгламанинг бирор давомсиз ечими унинг бирор бошқа ечими билан x нинг ҳеч бўлмаса битта қийматида устма-уст тушса, у ҳолда давомсиз ечим ўша ечимнинг давоми бўлади; 3) агар (1.1) дифференциал тенгламанинг икки давомсиз ечими x нинг ҳеч бўлмаганда битта қийматида устма-уст тушса, у ҳолда бу ечимлар айнан устма-уст тушади, яъни улар умумий аниқланиш интервалига эга бўлади.*

Исбот. $(x_0,\ y_0)$ нуқта $\mathbf{\Gamma}$ соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган шундай $y=\varphi(x)$ ечимни қурамизки, бу ечим (1.1) дифференциал тенгламанинг шу бошланғич қийматларга эга бўлган ихтиёрий ечимининг давоми бўлади. Бу билан теореманинг 1- қисми исбот этилган бўлади.

(1.1) дифференциал тенгламанинг x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга ҳар бир ечими учун ўз аниқланиш интервали бор. Бундай ечимларнинг аниқланиш интервалининг чап учлари тўпламини $r_1{}^*$, ўнг учлари тўпламини эса $r_2{}^*$ дейлик. $m_1=inf r_1{}^*$, $m_2=sup r_2{}^*$ ($m_1=-\infty$, $m_2+\infty$ ҳоллар ҳам бўлиши мумкин). Энди x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга ва $m_1<x<m_2$ интервалда аниқланган $y=\widetilde{\varphi}(x)$

ечимни қурамиз. x^* нуқта шу интервалнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Аниқлик учун $x_0 \leqslant x^*$ дейлик. m_2 сон тўпламнинг аниқ юқори чегараси бўлгани учун (1.1) дифференциал тенгламанинг x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган ва аниқланиш интервали x^* ни ўз ичига олган $y=\psi(x)$ ечими мавжуд. Энди $\tilde{\varphi}(x^*)=\psi(x^*)$ деймиз. x^* да $\tilde{\varphi}(x)$ функциянинг қиймати тасодифан танланган $\psi(x)$ ечимга боғлиқ эмас. Ҳақиқатан, агар $y=\psi(x)$ ўрнига $y=\chi(x)$, $\chi(x_0)=y_0$ фунцияни олсак ва x^* бу функциянинг аниқланиш интервалига тегишли бўлса, у ҳолда Коши теоремасига кўра $\psi(x^*)=\chi(x^*)$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, $y=\tilde{\varphi}(x)$ функция $m_1<x<m_2$ интервалда бир қийматли аниқланган. Шу билан бирга $y=\tilde{\varphi}(x)$ функция учун $\tilde{\varphi}(x_0)=y_0$ ва бу функция (1.1) тенгламанинг ечими, чунки қурилишга кўра $y=\tilde{\varphi}(x)$ функция $m_1<x<m_2$ интервалнинг ҳар бир x^* нуқтасига яқин нуқталарда (1.1) тенгламанинг бирор ечими билан бир хил бўлади.

Энди $y=\varphi(x)$ функция (1.1) дифференциал тенгламанинг x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган ва $r_1<x<r_2$ интервалда аниқланган ечими бўлсин. У ҳолда $r_1 \in r_1{}^*$, $r_2 \in r_2{}^*$ ва $m_1 \leqslant r_1$, $r_2 \leqslant m_2$, $\tilde{\varphi}(x_0)=\varphi(x_0)$ бўлгани учун Коши теоремасига кўра $r_1<x<r_2$ интервалда $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$. Бундан $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечим $y=\varphi(x)$ ечимнинг $r_1<x<r_2$ интервалдан ташқарига ($m_1<x<m_2$ интервалгача) давоми экани келиб чиқади.

Қурилган $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечим давомсиздир. Бундай бўлмасин дейлик. ($y=\psi(x)$ ечим $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечимнинг давоми бўлсин. Унда x_0, y_0 ни $y=\psi(x)$ ечим учун бошланғич қийматлар қилиб олиш мумкин. Юқоридаги исботга кўра $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечим $y=\psi(x)$ ечимнинг давоми $y=\tilde{\varphi}(x)$ нинг қурилишига эътибор беринг!) Бу мулоҳазалардан $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечим $y=\psi(x)$ нинг ва аксинча, $y=\psi(x)$ ечим $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечимнинг давоми экани келиб чиқади. Демак, $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечим *ягона давомсиз ечим*. Теореманинг 1) қисми исбот бўлди.

$y=\tilde{\varphi}(x)$ давомсиз ечим бўлиб, бирор бошқа $y=\varphi(x)$ ечим билан бирор x^* нуқтада устма-уст тушсин: $\varphi(x^*)=\tilde{\varphi}(x^*)$. У ҳолда x^*, y^* давомсиз $y=\tilde{\varphi}(x)$ ечим учун ҳам, $y=\varphi(x)$ учун ҳам бошланғич қийматлар бўлади. Шунинг учун юқорида исбот этилганига кўра $y= =\tilde{\varphi}(x)$ ечим $y=\varphi(x)$ ечимнинг давоми бўлади. Бу билан теореманинг 2) қисми исботланди.

Агар $y=\varphi(x)$ ечим давомсиз бўлса, у ечим юқоридаги мулоҳазаларга кўра $y=\varphi(x)$ ечимнинг давоми бўлади. Шунинг учун $\varphi(x)$ ва $\tilde{\varphi}(x)$ ечимлар тўла устма-уст тушади. 3) қисм ҳам исбот бўлди. Демак, 1.16- теорема тўла исбот этилди.

Натижалар. 1) (1.1) *дифференциал тенгламанинг ихтиёрий бошланғич қийматларга эга бўлган* $y=\varphi(x)$ *ечими Коши теоремасининг шартлари бажарилганда давомсиз* $y=\tilde{\varphi}(x)$ *ечимгача давом эттирилиши мумкин. Шу маънода давомсиз ечимлар дифференциал тенгламанинг барча ечимларини ўз ичига олади;*

2) *агар* **Г** *соҳа чегараланган бўлса,* m_1 *ва* m_2 *лар чекли бўлади;*

3) *агар Пикар теоремасининг шартлари фақат ҳамма нуқталари билан* **Г** *соҳада ётган* P *тўғри тўртбурчакда ўринли бўлиб қолмай, балки ихтиёрий* P^*, $P^* \subset$ **Г** *тўғри тўртбурчакда ўринли бўлса, у ҳолда* $|x-x_0| \leqslant h$ *оралиқда аниқланган ва* x_0, y_0 *бошланғич*

қийматларга эга бўлган $y=\varphi(x)$ ечимни давомсиз ечимгача давом эттириш мумкин. Бунинг исботи юқоридаги теореманинг исботига асосланади;

4) *агар $y=\varphi(x)$ (1.1) дифференциал тенгламанинг давомсиз ечими бўлиб, унинг мавжудлигининг максимал интервали $m_1<x<m_2$ бўлса, у ҳолда $y=\varphi(x)$ ечим $x\to m_1$ ва $x\to m_2$ да* **Г** *соҳанинг чегарасига интилади.*

Мисол. Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2-1}, \quad -1<y<1$$

дифференциал тенгламанинг $\varphi(0)=0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган давомсиз ечими қурилсин.

Аввало

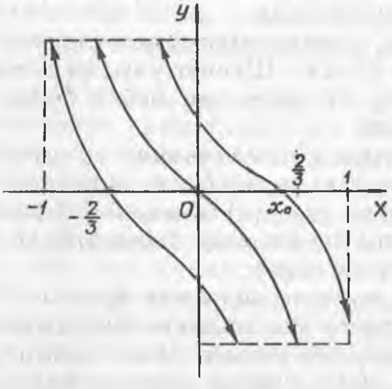
$$f(x, y)=\frac{1}{y^2-1} \text{ ва } F(y)=\int_0^y(\xi^2-1)\,d\xi.$$

Берилган тенгламанинг барча ечимлари

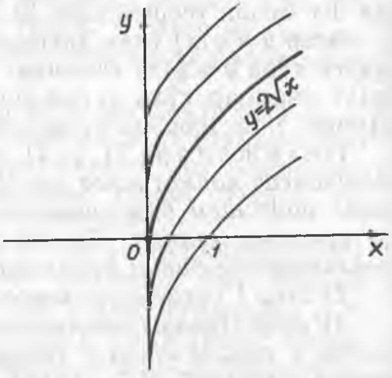
$$F(y)=x+C \text{ ёки } \frac{y^3}{3}-y=x+C$$

муносабат билан ёзилади. Бошланғич шартга кўра $C=0$. Равшанки, $y^2-1=0$ дан $y=\pm1$, $F(-1)=\frac{2}{3}$, $F(1)=-\frac{2}{3}$. Энди $m_1=-\frac{2}{3}$, $m_2=\frac{2}{3}$ дейлик. Агар x ушбу $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ интервалда ўзгарса, y ушбу $-1<x<1$ интервалда ўзгаради. Шу $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ интервал $\frac{y^3}{3}-y=x$ ечим учун аниқланишнинг максимал интервали бўлади. Демак, $\frac{y^3}{3}-y=x$ ечим $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$ интервалда давомсиз ечим бўлади.

Агар $\varphi(x_0)=0$, $x_0\neq0$ бўлса, $C\neq0$ ва $C=-x_0$. Бу ҳолда $\frac{y^3}{3}-y=x-x_0$ ечим



13- чизма



14- чизма

узунлиги $\frac{4}{3}$ га тенг бўлган аниқланиш интервалига эга, яъни $-\frac{2}{3}-x_0<x<$ $<\frac{2}{3}-x_0$. $m_1=-\frac{2}{3}-x_0$, $m_2=\frac{2}{3}-x_0$. Шундай қилиб, $\frac{y^3}{3}-y=x-x_0$ ечим $-\frac{2}{3}-x_0<x<\frac{2}{3}-x_0$ интервалда давомсиз ечимдир (13- чизма).

Қўрилган мисолда m_1 ва m_2 лар чекли.

Машқ. Ушбу $\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{1}{2}}$, $x>0$ дифференциал тенгламанинг $\varphi(0)=0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган давомсиз ечими топилсин ва унинг аниқланиш интервали учун $m_1=0$, $m_2=+\infty$ экани кўрсатилсин (14- чизмага қаранг).

ε- ТАҚРИБИЙ ЕЧИМ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

2.1- §. ε- ТАҚРИБИЙ ЕЧИМ. ЭЙЛЕР СИНИҚ ЧИЗИҒИ

1. (1.1) дифференциал тенглама берилган бўлиб, унда $f(x,y)$ функция Γ соҳада узлуксиз бўлсин.

2.1- таъриф. *Агар бирор I (очиқ, ёпиқ, ярим очиқ) интервалда аниқланган $y=\varphi(x)$ функция учун ушбу тўртта шарт:*

1°. $(x,\varphi(x))\in\Gamma$, $x\in I$;

2°. $\varphi(x)\in C(I)$, $\varphi(x)\in C^1(I\backslash S)$ *(бунда S тўплам $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ функция 1- тур узилишга эга бўлган ёки мавжуд бўлмаган нуқталар тўплами)*;

3°. $\left|\frac{d\varphi(x)}{dx}-f(x,\ \varphi(x))\right|\leqslant\varepsilon,\ x\in I\backslash S$;

4°. *S — чекли тўплам,*

ўринли бўлса, у ҳолда $y=\varphi(x)$ функция I интервалда (1.1) *дифференциал тенгламанинг ε- тақрибий ечими дейилади.*

Таърифдан кўринадики, $\varepsilon=0$ ва $S=\varnothing$ бўлганда $\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$, $x\in I$ бўлади. Бу ҳолда 1.4- таърифда берилган ечим таърифини ҳосил қиламиз.

Қуйида биз ε- такрибий ечимнинг мавжудлиги масаласига тўхталамиз.

2.1- теорема. *Агар $f(x,\ y)$ функция чегараси билан бутунлай* **Г** *соҳада ётган $P=\{(x,y):|x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}$ (a ва b лар чекли мусбат сонлар) ёпиқ тўғри тўртбурчакда узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий мусбат ε учун (1.1) дифференциал тенгламанинг $|x-x_0|\leqslant$ $\leqslant h$, $h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$, $M=\max\limits_{(x,y)\in P}|f(x,y)|\geqslant0$, оралиқда $\varphi(x_0)=y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ε-тақрибий ечими мавжуд.*

Исбот. Агар $M=0$ бўлса, теореманинг тўғрилиги равшан. Тегишли ечим $|x-x_0|\leqslant a$ оралиқда аниқланган бўлади. Энди $M>$ >0 бўлган ҳолни кўрамиз. $\varepsilon>0$ берилган бўлсин, $x_0\leqslant x\cdot x_0+h$ оралиқда ε- тақрибий ечимни қурамиз ($x_0-h\leqslant x\leqslant x_0$ оралиқда тегишли ечим шунга ўхшаш қурилади). Ушбу

$$P_h=\{(x,\ y):|x-x_0|\leqslant h,\ |y-y_0|\leqslant b\},$$
$$P_h^+=\{(x,y):x_0\leqslant x\leqslant x_0+h,\ |y-y_0|\leqslant b\}$$

тўғри тўртбурчакларни қурамиз. Равшанки, $P_h\subset P$, $P_h^+\subset P$. $f(x,\ y)$ функция ёпиқ P тўпламда узлуксиз бўлгани учун шу тўпламда текис узлуксиз бўлади. Демак, берилган $\varepsilon>0$ бўйича шундай $\delta(\varepsilon)>>0$ топиладики, агар $(x,\ y)\in P$, $(\tilde{x},\ \tilde{y})\in P$ нуқталар учун

$$|x-\tilde{x}|\leqslant\delta(\varepsilon),\ |y-\tilde{y}|\leqslant\delta(\varepsilon)$$

тенгсизликлар ўринли бўлса,

$$|f(x,\ y)-f(\tilde{x},\ \tilde{y})|\leqslant\varepsilon \qquad (2.1)$$

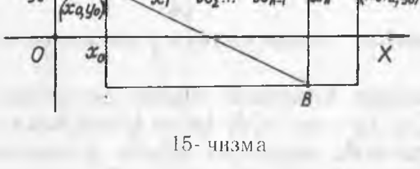
тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу мулоҳазадан кейинроқ фойдаланамиз.

Энди $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$ нуқталар ёрдамида $[x_0,\ x_0+h]$ оралиқни шундай n та бўлакка бўламизки, ҳар бир $[x_{k-1},\ x_k]$ оралиқнинг узунлиги ушбу

$$\max|x_k-x_{k-1}|\leqslant\min\left(\delta(\varepsilon),\ \frac{\delta(\varepsilon)}{M}\right),\ k=1,2,\ \ldots\ ,\ n;\ x_n=x_0+h$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

$(x_0,\ y_0)$ нуқтадан бурчак коэффициенти M ва $-M$ га тенг бўлган икки тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Бу тўғри чизиқлар учун $M=\mathrm{tg}\alpha=\frac{b}{h}$ бўлсин. Агар $h=a$ бўлса, $M=\frac{b}{a}$; $h=\frac{b}{M}$ бўлганда $M=\frac{b}{h}=\frac{b}{\frac{b}{M}}>\frac{b}{a}$ бўлади. Демак $M\geqslant\frac{b}{a}$. Бундан келиб чиқадики, P_h^+ тўғри тўртбурчакда $(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ўтувчи M ва $-M$ бурчак коэффициентли тўғри чизиқлар $y==y_0-b$ ва $y=y_0+b$ горизонтал тўғри чизиқлари билан абсциссаси $x\leqslant x_0+a$, $x=x_0+h$ бўлган нуқталарда кесишишади. У нуқталарни B ва C, $(x_0,\ y_0)$ нуқтани эса A дейлик (15- чизма). Ҳосил бўлган ABC учбурчакни P_h^{+1}, $P_h^{+1}\subset P_h^+$ деб белгилаймиз.



15- чизма

$(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ўтувчи $f(x_0,\ y_0)$ бурчак коэффициентли тўғри чизиқнинг $[x_0,\ x_1]$ оралиққа мос кесмасини чизамиз. Тўғри чизиқнинг чизилган бу бўлаги P_h^{+1} учбурчакда ётиши равшан. Унинг тенгламаси $y-y_0=f(x_0,\ y_0)\quad(x-x_0)$ кўринишда, $x=x_1$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасининг координаталари эса

$$(x_1,\ y_1)=(x_1,\ y_0+f(x_0,\ y_0)\ \ (x_1-x_0))$$

бўлади. Сўнгра $(x_1,\ y_1)$ нуқтадан ўтувчи $f(x_1,\ y_1)$ бурчак коэффициентли тўғри чизиқнинг $[x_1,\ x_2]$ оралиққа мос кесмасини чизамиз. Унинг тенгламаси $y-y_1=f(x_1, y_1)(x-x_1)$ кўринишда, $x=x_2$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси координаталари эса

$$(x_2, y_2)=(x_2, y_1+f(x_1, y_1)\ (x_2-x_1))$$

каби бўлади.

Шу усулда давом этсак, $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ оралиқда аниқланган графиги P_h^{+1} учбурчакдан чиқмайдиган синиқ чизиқ чизиш мумкин. Унинг учларини $A_0=A$, $A_1=(x_1, y_1)$, ... , $A_{n-1}=(x_{n-1}, y_{n-1})$, $A_n=(x_n, y_n)=(x_0+h, y_n)$ деб белгилаймиз. Ҳосил бўлган $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ синиқ чизиқни $\varphi_n(x)$ дейлик. Бу функция изланган, қурилиши лозим бўлган ε- тақрибий ечимдир. Шуни исбот этамиз. 2.1- таърифнинг шартларини текширамиз.

1° шарт бажарилади, чунки $(x, \varphi_n(x))\in P_h^{+1}\subset P_h^{+}\subset P$. Агар $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ тўпламни S десак, 2° шарт $[x_0, x_0+h]\backslash S$ тўпламда бажарилади.

Энди 3° шартни текшириш қолди. $[x_{k-1}, x_k]$ оралиқни кўрамиз, $k=1, 2, \dots n$. Агар ҳар бир $[x_{k-1}, x_k]$ оралиқда 3° шарт бажарилса, у ҳолда $[x_0, x_0+h]$ оралиқда $y=\varphi_n(x)$ функция учун 3° шарт бажарилади. Равшанки, $[x_{k-1}, x_k]$ оралиқда

$$|x-x_{k-1}|\leqslant\max|x_k-x_{k-1}|\leqslant\min\left(\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M}\right)\leqslant\delta(\varepsilon).$$

$x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k$ оралиқдан бирор $\tilde{x}$ ни олайлик. Шу оралиқ учун

$$\varphi_n^{(k)}(x)=\varphi_n^{(k)}(x_{k-1})+f(x_{k-1}, y_{k-1})(x-x_{k-1}),$$
$$\varphi_n^{(k)}(\tilde{x})=\varphi_n^{(k)}(x_{k-1})+f(x_{k-1}, y_{k-1})(\tilde{x}-x_{k-1}). \tag{2.2}$$

Бундан

$$|\varphi_n^{(k)}(x)-\varphi_n^{(k)}(\tilde{x})|=|f(x_{k-1}, y_{k-1})|\cdot|x-\tilde{x}|\leqslant M|x-\tilde{x}|.$$

Агар $\tilde{x}=x_{k-1}$ бўлса,

$$|\varphi_n^{(k)}(x)-\varphi_n^{(k)}(x_{k-1})|\leqslant M|x-x_{k-1}|\leqslant M\min\left(\delta(\varepsilon), \frac{\delta(\varepsilon)}{M}\right)=$$
$$=\min(M\delta(\varepsilon),\delta(\varepsilon))\leqslant\delta(\varepsilon).$$

Демак,

$$|\varphi_n^{(k)}(x)-\varphi_n^{(k)}(x_{k-1})|\leqslant\delta(\varepsilon).$$

Маълумки, $x_{k-1}<x<x_k$ интервалда

$$\frac{d}{dx}\varphi_n^{(k)}(x)=f(x_{k-1}, \varphi_n(x_{k-1})).$$

Энди $\left|\frac{d}{dx}\varphi_n^{(k)}(x)-f(x, \varphi_n^{(k)}(x))\right|$ ифодани баҳолаймиз. $x_{k-1}<x<x_k$ интервалда (2.1) га кўра

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi_n^{(k)}(x)-f(x,\varphi_n^{(k)}(x))\right|=$$
$$=|f(x_{k-1}, \varphi_n^{(k)}(x_{k-1}))-f(x, \varphi_n^{(k)}(x))|\leqslant\varepsilon$$

келиб чиқади. k га 1, 2, ... , n қийматлар берсак ҳам шу тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $[x_0, x_0+h]\backslash S$ тўпламда 3° шарт бажарилади. 4° шарт ўз-ўзидан бажарилган.

Юқорида қурилган $A_0\ A_1\ \dots\ A_n$ синиқ чизиқ $\varphi_n(x)$ — ε тақрибий ечим бўлиб, уни *Эйлер синиқ чизиғи* дейилади.

Синиқ чизиқнинг $A_0\ A_1,\ A_1\ A_2,\ \dots,\ A_{n-1}\ A_n$ бўлакларини

$$\varphi_n^{(1)}(x),\ \varphi_n^{(2)}(x),\ \dots,\ \varphi_n^{(n)}(x)$$

деб белгиласак, $\varphi_n(x)=\bigcup\limits_{j=1}^{n}\varphi_n^{(j)}(x)$ бўлади. Ҳар бир $\varphi_n^{(j)}(x)$ ни топиш учун (2.2) формула қўлланилади. $\varphi_n(x)$ ечимни қулайлик учун ε_n- тақрибий ечим деб атаймиз.

Биз ε_n- тақрибий ечимни P_n^+ тўғри тўртбурчакда қурдик. Тегишли ечим $P_n^-=\{(x,\ y): x_0-h\leqslant x\leqslant x_0,\ |y-y_0|\leqslant b\}$ тўпламда ҳам қурилиши мумкин. Шундай қилиб, P_h тўпламда $\varphi_n(x_0)=y_0$ шартни қаноатлантирадиган ε_n- тақрибий ечимни қурилди деса бўлади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Машқ. $\frac{dy}{dx}=\cos x$ дифференциал тенглама берилган бўлиб, $P=\left\{(x,\ y): |x|\leqslant\leqslant\pi,\ |y|\leqslant\frac{5\pi}{6}\right\}$, $x_0=0,\ y_0=0$ бўлсин. $h=\min\left(a,\ \frac{b}{M}\right)=\min\left(\pi,\ \frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}$ бўлгани учун $P_h=\left\{(x,y): |x|\leqslant\frac{5\pi}{6},\ |y|\leqslant\frac{5\pi}{6}\right\}$. $0\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$ ораликни $x_1=\frac{\pi}{6},\ x_2=\frac{\pi}{4},\ x_3=\frac{\pi}{3},\ x_4=\frac{\pi}{2},\ x_5=\frac{2\pi}{3}$ нуқталар билан бўлайлик. Масала бундай қўйилади:

Теоремада келтирилган усул билан $0\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$ оралиқда Эйлер синиқ чизиғи $\varphi_6(x)$ қурилсин ва $x=\frac{3\pi}{4}$ нуқтада хатолик ҳисоблансин.

2.2- таъриф. *Агар $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган функцияларнинг*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x),\ \dots \tag{2.3}$$

функционал кетма-кетлиги учун шундай b ўзгармас сон топилсаки, барча натурал n сонлар ва $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқ учун

$$|f_n(x)|\leqslant b$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда (2.3) *кетма-кетлик $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда текис чегараланган дейилади.*

2.3- таъриф. *Агар ёпиқ $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган функциялардан тузилган* (2.3) *кетма-кетлик берилган бўлиб ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ топилсаки, барча n лар учун $|x'-x''|<\delta$ тенгсизлик бажарилганда ушбу*

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда (2.3) *кетма-кетлик текис даражали узлуксиз дейилади.*

2.2- теорема (Асколи — Арцел теоремаси). *Агар* (2.3) *кетма-кетлик чекли $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда текис чегараланган ва текис даражали узлуксиз бўлса, у ҳолда* (2.3) *кетма-кетликдан ўша оралиқда текис яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.*

2.3- теорема. *Агар ёпиқ $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда узлуксиз бўлган функцияларнинг* (2.3) *кетма-кетлиги шу оралиқда текис яқинла-*

шувчи бўлса, у ҳолда бу кетма-кетлик текис чегараланган ва текис даражали узлуксиз бўлади.

Бу теоремаларнинг исботи математик анализ дарсликларида бор бўлганидан унга тўхталмаймиз. Аммо бу теоремалардан келгусида фойдаланамиз.

Энди ε- тақрибий ечим тушунчасидан фойдаланиб, 1- бобдаги Пеано теоремасини (1.3- теоремани) исботлаймиз.

1.3- теореманинг исботи. Шундай $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n>0$ сонлар кетма-кетлигини оламизки, $n\to\infty$ да $\varepsilon_n\to 0$ бўлади, 2.1- теоремага кўра (1.1) дифференциал тенгламанинг $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган $\varphi_n(x)=y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва графиги P_h тўпламдан чиқмайдиган ε_n- тақрибий ечими бор ва бирор $\tilde{x}$, $x_0-h\leqslant$ $\leqslant\tilde{x}\leqslant x_0+h$ учун

$$|\varphi_n(x)-\varphi_n(\tilde{x})|\leqslant M|x-\tilde{x}| \qquad (2.4)$$

ўринли. Энди $\tilde{x}=x_0$ дейлик. У ҳолда $|x-x_0|\leqslant h\leqslant\frac{b}{M}$. Шунинг учун

$$|\varphi_n(x)-\varphi_n(x_0)|\leqslant M|x-x_0|\leqslant M\frac{b}{M}=b.$$

Ушбу

$$|\varphi_n(x)-y_0|\geqslant|\varphi_n(x)|-|y_0|$$

тенгсизликдан

$$|\varphi_n(x)|\leqslant|y_0|+b$$

келиб чиқади. Бу $\{\varphi_n(x)\}$ кетма-кетликнинг текис чегараланганлигини тасдиқлайди. Юқоридаги мулоҳазалардан $\{\varphi_n(x)\}$ кетма-кетликка 2.2- теоремани қўллаш мумкин.

$\{\varphi_{n_k}(x)\}$ кетма-кетлик $\{\varphi_n(x)\}$ кетма-кетликдан ажратилган ва бирор узлуксиз $\varphi(x)$ функцияга текис яқинлашувчи бўлсин. Қулайлик учун $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ қисмий кетма-кетлик учун ҳам $\{\varphi_n(x)\}$ белгини ишлатаверамиз.

(2.4) дан $n\to\infty$ да $|\varphi(x)-\varphi(\tilde{x})|\leqslant M|x-\tilde{x}|$. ε_n- тақрибий ечим учун тегишли интеграл тенгламани ёзамиз:

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}(f(\xi,\varphi_n(\xi))+\Delta_n(\xi))\,d\xi, \qquad (2.5)$$

бу ерда $|\Delta_n(x)|=\left|\frac{d\varphi_n(x)}{dx}-f(x,\varphi_n(x))\right|\leqslant\varepsilon_n$, $x\in\{|x-x_0|\leqslant$ $\leqslant h\}\backslash S$, $\Delta_n(x)=0$, $x\in S$. Энди $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ қисмий кетма-кетликни олайлик: $\varphi_{n_k}(x)\,k\to\infty\,\varphi(x)$. (2.5) га асосан $\varphi_{n_k}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}(f(\xi,\varphi_{n_k}(\xi)+$ $+\Delta_{n_k}(\xi))\,d\xi$ ни ва $k\to\infty$ да $\varepsilon_n\to\infty$ эканини ҳисобга олсак:

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\ \varphi(\xi))\,d\xi.$$

Бундан $\varphi(x_0)=y_0$. $f(x,y)$ функция P да узлуксиз бўлганидан $\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\ \varphi(x))$. Демак $\varphi(x)$ функция $\varphi(x_0)=y_0$ шартни каноатлантиради ва $|x-x_0|\leqslant h$ ораликда (1.1) дифференциал тенгламанинг ечими. Теорема исбот бўлди.

2. **2.4-теорема.** (1.1) *дифференциал тенгламада $f(x,\ y)$ функция $P(P\subset\Gamma)$ тўғри тўртбурчакда y бўйича L константа билан Липшиц шартини қаноатлантирсин. Агар $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ функциялар I интервалда* (1.1) *тенгламанинг мос равишда ε_1- ва ε_2- тақрибий ечимлари бўлиб, I интервалдан олинган бирор τ учун ва ҳақиқий сон $\delta\geqslant 0$ учун*

$$|\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)|\leqslant\delta \tag{2.6}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда I интервалнинг барча нуқталарида ушбу

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\leqslant\delta e^{L|x-\tau|}+\frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L|x-\tau|}-1\right),\quad \varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2 \tag{2.7}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот: Аввал $\tau\leqslant x$, $x\in I$ интервални кўрайлик ($x\leqslant\tau$, $x\in I$ ҳолда мулоҳазалар шунга ўхшаш бўлади). $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар ε_1- ва ε_2- тақрибий ечим бўлгани учун $\{x:\tau\leqslant x,\ x\in I\}\setminus S$ тўпламда

$$\left|\frac{d\varphi_1(x)}{dx}-f(x,\ \varphi_1(x))\right|\leqslant\varepsilon_1,$$

$$\left|\frac{d\varphi_2(x)}{dx}-f(x,\ \varphi_2(x))\right|\leqslant\varepsilon_2$$

ўринли бўлади. Бу тенгсизликларнинг икки томонини τ дан x гача интеграллаймиз:

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_1(\tau)-\int_\tau^x f(\xi,\varphi_1(\xi))\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_\tau^x\left|\frac{d\varphi_1(\xi)}{d\xi}-f(\xi,\ \varphi_1(\xi))\right|d\xi\right|\leqslant\varepsilon_1(x-\tau),$$

$$\left|\varphi_2(x)-\varphi_2(\tau)-\int_\tau^x f(\xi,\varphi_2(\xi))\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_\tau^x\left|\frac{d\varphi_2(\xi)}{d\xi}-f(\xi,\ \varphi_2(\xi))\right|d\xi\right|\leqslant\varepsilon_2(x-\tau).$$

Ҳар икки тенгсизликнинг ўнг ва чап томонларини ҳадма-ҳад қўшиб, $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$, $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\tilde{q}(x)$, $|\tilde{q}(x)|=q(x)$ десак ва маълум $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$ тенгсизликдан фойдалансак, қуйидагига эга бўламиз:

$$|\tilde{q}(x)-\tilde{q}(\tau)-\int_\tau^x[f(\xi,\ \varphi_1(\xi))-f(\xi,\ \varphi_2(\xi))]d\xi|\leqslant\varepsilon(x-\tau).$$

Бундан

$$|\tilde{q}(x)|-|\tilde{q}(\tau)|-\left|\int_\tau^x[f(\xi,\ \varphi_1(\xi))-(\xi,\varphi_2(\xi))]d\xi\right|\leqslant\Big|\ q(x)-$$

$$-q(\tau)-\int_{\tau}^{x}[f(\xi,\ \varphi_1(\xi))-f(\xi,\ \varphi_2(\xi))]d\xi\Big|$$

тенгсизлик ўринли бўлгани учун

$$q(x)\leqslant q(\tau)+\int_{\tau}^{x}|f(\xi,\ \varphi_1(\xi))-f(\xi,\ \varphi_2(\xi))|d\xi+\varepsilon(x-\varepsilon)$$

муносабат келиб чиқади. $f(x,\ y)$ функция Липшиц шартини қаноатлантиради. Шунинг учун $q(x)\leqslant q(\tau)+L\int_{\tau}^{x}q(\xi)d\xi+\varepsilon(x-\tau)$.

Агар охирги тенгсизликда $\psi(x)=q(\tau)+\varepsilon(x-\tau)$, $\varphi(\xi)=q(\xi)$, $\chi=L$ деб, кейинги параграфда исботланадиган (2.9) тенгсизликни қўлласак ва $q(\tau)\leqslant\delta$ эканини ҳисобга олсак, ушбу $q(x)\leqslant$ $\leqslant\delta e^{L(x-\tau)}+\frac{\varepsilon}{L}(e^{L(x-\tau}-1)$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Биз (2.7) муносабатни $\tau\leqslant x$, $x\in I$ ҳол учун исботладик. Агар $x\leqslant\tau$, $x\in I$ бўлса, тегишли интеграллашлар x дан τ гача олиб борилади ва

$$q(x)\leqslant\delta e^{-L(x-\tau)}+\frac{\varepsilon}{L}(e^{-L(x-\tau)}-1)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Икки ҳолни умумлаштириб ёзсак, (2.7) муносабатга келамиз. 2.4- теорема исбот бўлди.

1- натижа. *Агар* ε_1- *тақрибий ечим учун* $\varphi_1(x)\equiv Y(x)$, $x\in I$ $(\varepsilon_1=$ $=0)$ *бўлиб,* $Y(x)$ (1.1) *дифференциал тенгламанинг аниқ ечими бўлса, у ҳолда* $\delta\to0$, $\varepsilon_2\to0$ *да* $\varphi_2(x)\to Y(x)$ бўлади.

Ҳақиқатан (2.7) дан $\left|Y(x)-\varphi_2(x)\right|\leqslant\ \delta e^{L|x-\tau|}+\frac{\varepsilon_2}{L}(e^{L|x-\tau|}-1)$. Агар $\delta\to0$, $\varepsilon_2\to0$ бўлса, изланган муносабат ҳосил бўлади.

2- натижа. (2.7) *тенгсизликдан ягоналикни исботлашда фойдаланиш мумкин.*

Ушбу $y=\varphi_1(x)$ ва $y=\varphi_2(x)$ функциялар (1.1) дифференциал тенгламанинг бир хил x_0, y_0 бошланғич қийматларга эга бўлган ва тегишли I_1, I_2 интервалларда аниқланган икки аниқ ечими бўлсин. Равшанки, $x_0\in I_1\cap I_2$, $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)$. Шунинг учун $|\varphi_1(x_0)-$ $-\varphi_2(x_0)|\leqslant\delta$ дан $\delta=0$ экани, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ларнинг аниқ ечимлигидан $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$ экани келиб чиқади (2.7) га кўра $I_1\cap I_2$ интервалда $\varphi_1(x)\equiv\varphi_2(x)$.

2.2- §. ИНТЕГРАЛ ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Мазкур бандда баъзи муҳим интеграл тенгсизликлар ва уларнинг қўлланилиши билан шуғулланамиз.

1. 2.5-теорема. *Агар* $r_1\leqslant x\leqslant r_2$ *оралиқда аниқланган ва узлуксиз* $\varphi(x)\geqslant0$, $\psi(x)\geqslant0$ *ва* $\chi(x)\geqslant0$ *функциялар учун*

$$\varphi(x)\leqslant\psi(x)+\int_{r_1}^{x}\chi(\xi)\varphi(\xi)d\xi \qquad (2.8)$$

муносабат ўринли бўлса, улар учун $r_1\leqslant x\leqslant r_2$ *оралиқда ушбу*

$$\varphi(x)\leqslant\psi(x)+\int_{r_1}^{x}\chi(\xi)\psi(\xi)\ \exp\left(\int_{\xi}^{x}\chi(u)du\right)d\xi \qquad (2.9)$$

муносабат ўринли бўлса, улар учун $r_1 \leqslant (x) \leqslant r_2$ *оралиқда ушбу*

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) + \int_{r_1}^{x} \chi(\xi)\psi(\xi) \exp\left(\int_{\xi}^{x} \chi(u)du\right) d\xi \qquad (2.9)$$

муносабат ҳам ўринли бўлади. (2.9) *тенгсизлик Гронуолл-Беллман тенгсизлиги деб аталади.*

Исбот. $q(x) = \int_{r_1}^{x} \chi(\xi)\varphi(\xi)d\xi$ деб белгилаймиз. Равшанки, $q(r_1) = 0$. Бундан $\frac{dq(x)}{dx} = \chi(x)\varphi(x)$ келиб чиқади. Энди

$$\begin{cases} \frac{dq(x)}{dx} = \chi(x)\varphi(x), \\ \chi(x)q(x) = \chi(x)\int_{r_1}^{x} \chi(s)\varphi(s)ds \end{cases}$$

системани кўрайлик. Биринчи тенгламанинг чап ва ўнг томонларидан мос равишда иккинчисини айириб, (2.8) дан фойдалансак,

$$\frac{dq(x)}{dx} - \chi(x)q(x) \leqslant \chi(x)\psi(x).$$

Бу тенгсизликнинг икки томонини $\exp\left(\int_{s}^{\tau}\chi(u)du\right)$ га кўпайтириб, r_1 дан x гача интеграллаймиз:

$$\int_{r_1}^{x} \frac{dq(\xi)}{d\xi} e^{\int_{\xi}^{\tau}\chi(u)du} d\xi - \int_{r_1}^{x} \chi(\xi)q(\xi)e^{\int_{\xi}^{\tau}\chi(u)du} d\xi \leqslant \int_{r_1}^{x} \chi(\xi)\psi(\xi)e^{\int_{\xi}^{x}\chi(u)du} d\xi.$$

Чап томондаги биринчи интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$q(\xi)e^{\int_{\xi}^{\tau}\chi(u)du}\Big|_{r_1}^{x} + \int_{1}^{x} q(\xi)\chi(\xi)e^{\int_{\xi}^{\tau}\chi(u)du} d\xi -$$

$$\int_{r}^{x} \chi(\xi)q(\xi)e^{\int_{\xi}^{\tau}\chi(u)du} d\xi \leqslant \int_{r}^{x} \chi(\xi)\psi(\xi)\cdot e^{\int_{\xi}^{\tau}\chi(u)du} d\xi.$$

Бундан

$$q(x)e^{\int_{x}^{\tau}\chi(u)du} \leqslant \int_{r_1}^{x} \chi(\xi)\psi(\xi)e^{\int_{x}^{\tau}\chi(u)du} d\xi$$

келиб чиқади. Энди бу тенгсизликнинг икки томонини $e^{\int_{x}^{\tau}\chi(u)du}$ га бўлсак,

$$q(x) \leqslant e^{-\int\limits_x^\tau \chi(u)du} \int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\psi(\xi) e^{\int\limits_\xi^\tau \chi(u)du} d\xi = \int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\psi(\xi) e^{\int\limits_\xi^\tau \chi(u)du - \int\limits_x^\tau \chi(u)du} d\xi =$$

$$= \int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\psi(\xi) e^{\int\limits_\xi^\tau \chi(u)du + \int\limits_\tau^x \chi(u)du} d\xi = \int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\psi(\xi) e^{\int\limits_\xi^x \chi(u)du} d\xi.$$

Шундай қилиб,

$$q(x) \leqslant \int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\psi(\xi) e^{\int\limits_\xi^x \chi(u)du} d\xi.$$

(2.8) дан $q(x) \geqslant \varphi(x) - \psi(x)$ бўлгани учун охирги муносабат (2.9) нинг ўзидир.

Биз қуйида Гронуолл — Беллман тенгсизлигининг тез-тез учраб турадиган икки хусусий ҳолини таъкидлаб ўтамиз.

2.6-теорема. *Агар* $r_1 \leqslant x \leqslant r_2$ *оралиқда аниқланган, узлуксиз* $\varphi(x) \geqslant 0$, $\chi(x) \geqslant 0$ *функциялар ва бирор ўзгармас сон* $C \geqslant 0$ учун

$$\varphi(x) \leqslant C + \int\limits_{r_1}^x \chi(\xi)\varphi(\xi) d\xi \qquad (2.10)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда шу $r_1 \leqslant x \leqslant r_2$ *оралиқда*

$$\varphi(x) \leqslant C \exp \int\limits_{r_1}^x \chi(\xi) d\xi \qquad (2.11)$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бу тенгсизлик *Гронуолл тенгсизлиги* деб юритилади.

2.7-теорема. *Агар* $r_1 \leqslant x \leqslant r_2$ *оралиқда аниқланган ва узлуксиз* $\varphi(x)$ *функция учун* $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ *ихтиёрий ўзгармас бўлганда*

$$\varphi(x) \leqslant \int\limits_{r_1}^x (\alpha\varphi(\xi) + \beta) d\xi \qquad (2.12)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $r_1 \leqslant x \leqslant r_2$ *оралиқда*

1) $\varphi(x) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(x-r_1)} - 1)$ *(агар* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *бўлса);* (2.13)

2) $\varphi(x) \leqslant \beta(x - r_1)$ *(агар* $\alpha = 0$, $\beta > 0$ бўлса*)* (2.14)

тенгсизликлар ҳам ўринли бўлади.

2. Энди Гронуолл тенгсизлиги қўлланиладиган ягоналикни исботлашга доир масала кўрайлик. Бирор $r_1 \leqslant x \leqslant r_2$ *оралиқда* аниқланган $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар мос равишда ушбу

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\ x(t_0)=x_0,$$

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y),\ y(t_0)=y_0,\ t_0\leqslant t\leqslant T$$

Қоши масалаларининг ечими бўлсин, бунда $f(t,\ x)\in C(\Gamma)$. Бу ҳолда ушбу

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\,ds,$$

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y(s))\,ds$$

интеграл айниятлар ўринли. Бундан куйидагига эга бўламиз:

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x_0-y_0|+\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,\ x(s))-f(s,\ y(s))|\,ds\right|.$$

$(C$, Lip$)$ деб $t_0\leqslant t\leqslant T$ ораликда узлуксиз ва иккинчи аргументи бўйича Липшиц шартини қаноатлантирадиган икки аргументли функциялар тўпламини белгилайлик. Агар $f(t,\ x)\in(C,\ \mathrm{Lip})$, яъни $k>0$ ва $(t,\ x_1)\in\Gamma$, $(t,\ x_2)\in\Gamma$ учун

$$|f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда юқоридаги тенгсизликни

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x_0-y_0|+\left|\int_{t_0}^{t}k|x(s)-y(s)|\,ds\right|$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар $|x_0-y_0|=z(t_0)=C$, $|x(s)-y(s)|=$ $=z(s)$, $|x(t)-y(t)|=z(t)$ десак, $t\geqslant t_0$ бўлгани учун

$$z(t)\leqslant C+\int_{t_0}^{t}kz(s)\,ds$$

тенгсизликка Гронуолл тенгсизлигини татбиқ этиб, ушбу

$$z(t)\leqslant Ce^{\int_{t_0}^{t}k\,d\tau}=Ce^{k(t-t_0)}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бундан $x(t_0)=y(t_0)=x_0$, $|x_0-y_0|=$ $z(t_0)=C=0$ ва охирги тенгсизликдан $z(t)\equiv0$, яъни $x(t)\equiv y(t)$ айният келиб чиқади.

Агар $t_0\leqslant t\leqslant T$ ораликда шундай узлуксиз $k(t)\geqslant0$ функция мавжуд бўлсаки, $(t,\ x_1)\in\Gamma$, $(t,\ x_2)\in\Gamma$ нуқталар учун ушбу

$$|f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\leqslant k(t)|x_1-x_2|$$

тенгсизлик ўринли бўлса, аввалгидек мулоҳазалар ёрдамида

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x_0-y_0|+\int_{t_0}^{t}k(\tau)|x(s)-y(s)|\,ds$$

тенгсизликка келамиз. Бундан Гронуолл тенгсизлигини татбиқ этиб

$u=\left(\frac{y}{\varphi_1(x)}\right)'$ (бунда u — янги номаълум функция) алмаштириш бажарамиз. Унинг учун $z=\frac{y}{\varphi_1(x)}$ ёки $y=\varphi_1(x)z$ дейлик. Энди охирги алмаштиришни бажарсак 5.2-§ да айтилганидек, тенглама яна n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламага келади:

$$\varphi_1(x)z^{(n)}+q_1'(x)z^{(n-1)}+\ldots+q'_{(n-1)}(x)z'+L[\varphi_1(x)]z=0$$

Аммо $L[\varphi_1(x)]\equiv0$ бўлгани учун, $z'=u$ деб тенгламанинг ҳамма ҳадларини $\varphi_1(x)$ га бўлсак, u га нисбатан $(n-1)$-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама

$$u^{(n-1)}+q_1(x)u^{(n-2)}+\ldots+q_{n-1}u=0 \qquad (5.22)$$

ҳосил бўлади. Бу (5.22) тенглама $(r-1)$ та чизиқли эркли ечимларга эга. Улар қуйидагича ёзилади:

$$\left(\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\right)', \left(\frac{\varphi_3(x)}{\varphi_1(x)}\right)', \ldots, \left(\frac{\varphi_r(x)}{\varphi_1(x)}\right)'.$$

Ҳақиқатан, улар чизиқли боғлиқ бўлсин дейлик. Унда $\sum\limits_{i=2}^{r}\alpha_i^2\neq0$ бўлганда

$$\alpha_2\left(\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\right)'+\alpha_3\left(\frac{\varphi_3(x)}{\varphi_1(x)}\right)'+\ldots+\alpha_r\left(\frac{\varphi_r(x)}{\varphi_1(x)}\right)'=0.$$

бўлади. Энди бу тенгликни интегралласак:

$$\alpha_2\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}+\alpha_3\frac{\varphi_3(x)}{\varphi_1(x)}+\ldots+\alpha_r\frac{\varphi_r(x)}{\varphi_1(x)}=-\alpha_1,$$

муносабатга келамиз (бунда α_1 — интеграллаш ўзгармаси). Буни $\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_r\varphi_n(x)=0$, $x\in I$ деб ёзсак, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ функцияларнинг чизиқли эрклилиги ҳақидаги фаразга зид бўлади. Шундай қилиб, (5.22) тенглама $(r-1)$ та чизиқли эркли ечимларга эга.

(5.22) дифференциал тенгламага яна юқоридаги мулоҳазаларни қўллаб, тартибини биттага камайтирамиз. Шу усул билан берилган тенгламанинг тартибини r га камайтириш мумкин. Теорема исботланди.

Мисол. Агар $\varphi_1(x)=\cos\omega x$, $-\frac{\pi}{2\omega}<x<\frac{\pi}{2\omega}$ $(\omega>0)$ хусусий ечим бўлса, $y''+\omega^2y=0$ тенгламанинг умумий ечими топилсин. $y=(\cos\omega x)z$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда.

$$y'=(\cos\omega x)z'-\omega(\sin\omega x)z,$$

$$y''=(\cos\omega x)z''-\omega(\sin\omega x)z'-\omega(\sin\omega x)z'-\omega^2(\cos\omega x)z.$$

Бу ифодаларни берилган тенгламага қўямиз:

$$(\cos\omega x)z''-2\omega(\sin\omega x)z'-\omega^2(\cos\omega x)z+\omega^2(\cos\omega x)z=0.$$

Энди $z'=u$ десак, ушбу

$$(\cos\omega x)u'-2\omega(\sin\omega x)u=0$$

биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламага келамиз. Уни интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{u'}{u}=2\omega\operatorname{tg}\omega x,$$

$\ln|u|=2\omega\int(\operatorname{tg}\omega x)\,dx+\ln C_1'=-2\ln|\cos\omega x|+\ln C_1'$; $u=\frac{C_1'}{\cos^2\omega x}\cdot z'=u$ бўлгани учун $z'=\frac{C_1'}{\cos^2\omega x}$ дан $z=\frac{C_1'}{\omega}\operatorname{tg}\omega x+C_2$. Агар $\frac{C_1'}{\omega}=C_1$ десак, $y=(\cos\omega x)z=C_1\sin\omega x+$ $+C_2\cos\omega x$ келиб чиқади. Бу берилган тенгламанинг умумий ечимидир (6-банддаги 1- мисолга қаранг).

5.3- §. n- ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР

1. n-тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламалар бир жинсли тенгламалардан ўнг томонида $g(x)$ функция борлиги билан фарқ қилади. Шунинг учун (5.1) тенгламанинг умумий ечими ҳақида фикр юритишда (5.2) тенглама ечимлари ҳақидаги тасдиқлардан фойдаланамиз.

5.10- теорема. *Агар* $y=\psi(x)$, $x\in I$ *функция* (5.1) *бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирор хусусий ечими бўлиб,* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... , $\varphi_n(x)$, $x\in I$ *функциялар тегишли* (5.2) *бир жинсли тенгламанинг фундаментал системаси бўлса, у ҳолда бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими унинг хусусий ечими* $\psi(x)$ *билан тегишли бир жинсли тенгламанинг умумий ечими* $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x)$ *йиғиндисидан иборат бўлади, яъни:*

$$y=\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x)+\psi(x). \qquad (5.23$$

Исбот. $\psi(x)$ функция (5.1) нинг ечими бўлгани учу $L[\varphi(x)]=g(x)$ бўлади. Энди (5.1) тенгламада

$$y=z+\psi(x) \qquad (5.24$$

алмаштириш бажарайлик. Бундан:

$$g(x)=L[y]=L[z+\psi(x)]=L[z]+L[\psi(x)]=L[z]+g(x).$$

Демак, $L[z]=0$. Бу (5.1) га мос бир жинсли тенгламадир. Агар $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$, ... , $\varphi_n(x)$, $x\in I$ функциялар фундаментал система бўлса $z=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x)$ ечим (5.2) тенгламанинг умумий ечими бўлади

У ҳолда (5.1) тенгламанинг умумий ечимини топиш учун (5.24) ал машртиришда z ўрнига ифодасини қўйиш кифоя.

Ҳақиқатан, $y=\chi(x)$ (5.1) тенгламанинг I да аниқланган ва ихтиёрий бошланғич шартни (яъни $\chi(x_0)=y_0$, $\chi'(x_0)=y'_0$, ... $\chi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ муносабатларни) қаноатлантирадиган ечими бўлсин. (5.23) формуланинг икки томонидан $(n-1)$-тартибгача ҳосилалар олиб, ушбуга эга бўламиз ($x=x_0$ да):

$$\begin{cases} y_0=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_{i0}+\psi_0, \\ y_0'=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_{i0}'+\psi'_0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_0^{(n-1)}=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_{i0}^{(n-1)}+\psi_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{5.25}$$

Агар $y_0^{(i)}=\psi_0^{(i)}$, $i=0, 1, \dots, n-1$ бўлса, (5.25) дан $W(x_0)\neq 0$ бўлгани учун $C_1=C_2=\dots=C_n=0$ келиб чиқади. Бу бир жинсли тенгламанинг тривиал ечимига тўғри келади. Шунинг учун $\chi(x)\equiv\psi(x)$, $x\in I$ бўлади. Бу ҳол қизиқ эмас. Энди $y_0^{(i)}\neq\psi_0^{(i)}$ $0\leqslant i\leqslant n-1$ бўлсин. Равшанки, бир жинсли бўлмаган тенглама тривиал ечимга эга эмас, шу сабабдан $y_0^{(i)}\neq 0$, $i=0, 1, \dots,$ $n-1$. Демак, (5.25) тенглама $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларга нисбатан n та биринчи тартибли алгебраик тенгламаларнинг бир жинсли бўлмаган системасидан иборат. Бу системанинг детерминанти $W(x_0)\neq 0$. Шунинг учун у ягона $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ ечимга эга. Демак, ушбу

$$\chi(x)\equiv\sum_{i=1}^{n} C_i^0\psi_i(x)+\varphi(x),\ x\in I$$

айниятга эга бўламиз. Шундай қилиб, $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ бошланғич қийматлар ихтиёрий бўлганидан (5.23) формула умумий ечимдан иборат бўлади. Теорема исбот бўлди.

5.3-натижа. *Агар чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг битта хусусий ечими маълум бўлса, уни интеграллаш масаласи тегишли бир жинсли дифференциал тенгламани интеграллашга келади.*

5.4-натижа. *Агар чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг r та хусусий ечими $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_r(x), x\in I$ маълум бўлиб,*

$$\psi_1(x)-\psi_k(x),\ \psi_2(x)-\psi_k(x),\ \dots,\ \psi_{k-1}(x)-\psi_k(x),\ \psi_{k+1}(x)-\\-\psi_k(x),\ \dots,\ \psi_r(x)-\psi_k(x),\ 1\leqslant k\leqslant r$$

функциялар чизиқли эркли бўлса, бир жинсли бўлмаган тенгламани интеграллаш $(n-r+1)$-тартибли бир жинсли тенгламани интеграллашга келади.

Исбот. $y=\psi_k(x)+z$ десак, $z=y-\psi_k(x)$ бўлади. Бунда z бир жинсли тенгламанинг ечими. Шунинг учун $y=\psi_1(x)$, $y=\psi_2(x)$, ... , $y=\psi_{k-1}(x)$, $y=\psi_{k+1}(x)$, ... , $y=\psi_r(x)$ десак, бир жинсли тенгламанинг $r-1$ та ечимини, яъни

$$z_1=\psi_1(x)-\psi_k(x),\ z_2=\psi_2(x)-\psi_k(x),\ \dots,\ z_{k-1}=\psi_{k-1}(x)-\psi_k(x),$$

$$z_{k+1}=\psi_{k+1}(x)-\psi_k(x),\ \dots,\ z_r=\psi_r(x)-\psi_k(x)$$

ечимларни ҳосил қиламиз. Бу ечимлар чизиқли эркли бўлганда тегишли бир жинсли тенгламанинг тартиби $r-1$ га камайтирилиши мумкин. Натижа исбот этилди.

Мисоллар. 1. Ушбу $y''+\omega^2y=ax$, $\omega\neq0$, $a\neq0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечими ёзилсин.

Мос бир жинсли тенглама $y''+\omega^2y=0$ аввал қурилган бўлиб, унинг фундаментал системаси $\cos\omega x$, $\sin\omega x$ функциялардан иборат ва демак, умумий ечими $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$ эди. Бир жинсли бўлмаган тенглама учун $y=\frac{a}{\omega^2}x$ функция хусусий ечим бўлади. Бунга бевосита ҳисоблаб кўриб ишониш мумкин. 5.10- теоремага кўра берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x+\frac{a}{\omega^2}x.$$

1- мисолда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини ўзгармасни вариациялаш усули билан топайлик. Ечим $y=\sigma_1(x)\cos\omega x+\sigma_2(x)\sin\omega x$ кўринишда изланади. $\sigma_1'(x)$, $\sigma_2'(x)$ лар учун система бундай ёзилади:

$$\begin{cases}\sigma_1'(x)\cos\omega x+\sigma_2'(x)\sin\omega x=0,\\ -\sigma_1'(x)\omega\sin\omega x+\sigma_2'(x)\omega\cos\omega(x)=ax\end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases}\sigma_1'(x)\cos\omega x+\sigma_2'(x)\sin\omega x=0,\\ \sigma_1'(x)\sin\omega x-\sigma_2'(x)\cos\omega x=-\frac{ax}{\omega}\end{cases}$$

Бундан

$$\sigma_1'(x)=-\frac{ax}{\omega}\sin\omega(x),\quad \sigma_2'(x)=\frac{ax}{\omega}\cos\omega x.$$

Интеграллаш натижасида ушбу

$$\begin{cases}\sigma_1(x)=\frac{ax}{\omega^2}\cos\omega x-\frac{a}{\omega^3}\sin\omega x+\overline{C_1},\\ \sigma_2(x)=\frac{ax}{\omega^2}\sin\omega x+\frac{a}{\omega^3}\cos\omega x+\overline{C_2}\end{cases}$$

функцияларни топамиз. Энди бу ифодаларни ўз ўрнига қўйсак, аввалдан маълум формулага келамиз:

$$y=\left(\frac{ax}{\omega^2}\cos\omega x-\frac{a}{\omega^3}\sin\omega x+\overline{C_1}\right)\cos\omega x+\left(\frac{ax}{\omega^2}\sin\omega x+\frac{a}{\omega^3}\cos\omega x+\overline{C_2}\right)\sin\omega x=$$

$$=\overline{C_1}\cos\omega x+\overline{C_2}\sin\omega x+\frac{ax}{\omega^2}.$$

Бундан хусусий ечим яна $\frac{ax}{\omega^2}$ дан иборатлиги кўриниб турибди.

2. Юқоридаги мисолда хусусий ечимни танлаш мумкин эди. Аммо ҳамма ҳолларда ҳам бу осон бўлавермайди. Ўшанда ўзгармасни вариациялаш усулининг аҳамияти алоҳида кўринади. Шу мақсадда ушбу

$$y''+(\operatorname{tg}x)y'=\frac{1}{\cos x},\quad -\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$$

дифференциал тенгламани олайлик. Унга мос

$$y''+(\operatorname{tg}x)y'=0$$

бир жинсли тенглама осонгина интегралланади. Агар уни $\frac{y''}{y'}=-\operatorname{tg}x$ ёки $\frac{d}{dx}(\ln y')=-\operatorname{tg}x$ деб ёзсак, биринчи интеграл $\ln|y'|=\ln|\cos x|+\ln C_1$ ёки $y'=C_1\cos x$ кўринишда ёзилади. Энди умумий ечимни (бир жинсли тенглама учун) топа оламиз: $y=C_1\sin x+C_2$. Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини топиш учун ечимни $y=\sigma_1(x)\sin x+\sigma_2(x)$ кўринишда излаймиз. Бу холда $\varphi_1(x)=\sin x$, $\varphi_2(x)=1$. Шунинг учун $\varphi_1'(x)=\cos x$, $\varphi_2(x)=0$. Энди $\sigma_1'(x)$, $\sigma_2'(x)$ лар учун системани ёзамиз:

$$\begin{cases} \sigma_1'(x)\sin x+\sigma_2(x)\cdot 1=0, \\ \sigma_1'(x)\cos x+\sigma_2'(x)\cdot 0=\frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Бундан $\sigma_1'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\sigma_2'(x)=-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ келиб чиқади.

Энди $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ лар учун ушбу

$$\sigma_1(x)=\operatorname{tg}x+\overline{C_1},\sigma_2(x)=-\frac{1}{\cos x}+\overline{C_2}$$

ифодаларни топамиз. Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий ечими бундай ёзилади:

$$y=\sigma_1(x)\sin x+\sigma_2(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}+\overline{C_1}\sin x+\overline{C_2}=-\cos x+\overline{C_1}\sin x+\overline{C_2}.$$

3. Энди бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топишнинг *Коши* усули билан танишамиз.

Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама (5.1) нинг коэффициентлари $p_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ ва ўнг томони $g(x)$ бирор $a\leqslant x\leqslant b$ оралиқда узлуксиз бўлсин. Мос бир жинсли тенгламанинг фундаментал системаси маълум бўлсин деб фараз этамиз. У ҳолда бир жинсли тенгламанинг ξ параметрга боғлиқ бўлган шундай $K(x,\ \xi)$ ечимини тузиш мумкинки, у ечим ушбу

$$K(\xi,\ \xi)=0,\ K_x'(\xi,\ \xi)=0,\ \ldots,\ K_{x^{n-2}}^{(n-2)}(\xi,\ \xi)=0,\ K_{x^{n-1}}^{(n-1)}(\xi,\ \xi)=1 \quad (5.30)$$

бошланғич шартни қаноатлантиради. Шу $K(x,\ \xi)$ ечим орқали бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими

$$\psi(x)=\int_a^x K(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi \qquad (5.31)$$

формула ёрдамида топилиши мумкин. Буни исбот этиш учун $L|\psi(x)]=g(x)$ эканини кўрсатиш лозим. Ҳақиқатан, $\psi(x)$ функциядан кетма-кет ҳосилалар олиб, (5.30) шартдан фойдаланамиз:

$$\psi'(x)=K(x,\ x)\,g(x)+\int_a^x K_x'(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi=\int_a^x K_x'(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

$$\psi''(x)=K_x'(x,\ x)\,g(x)+\int_a^x K_{x^2}''(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi=\int_a^x K_{x^2}''(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi,$$

. . . .

$$\psi^{(n-1)}(x)=K^{(n-1)}_{x^{(n-2)}}(x,x)g(x)+\int\limits_a^x K^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,\xi)g(\xi)\,d\xi=$$

$$=\int\limits_a^x K^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,\xi)g(\xi)\,d\xi,$$

$$\psi^{(n)}(x)=K^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,x)g(x)+\int\limits_a^x K^{(n)}_{x^n}(x,\xi)g(\xi)\,d\xi=$$

$$=g(x)+\int\limits_a^x K^{(n)}_{x^n}(x,\xi)g(\xi)\,d\xi.$$

Топилган ифодаларни (5.1) тенгламанинг чап томонига қўямиз:

$$g(x)+\int\limits_a^x K^{(n)}_{x^n}(x,\xi)g(\xi)\,d\xi+p_1(x)\int\limits_a^x K^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,\xi)g(\xi)\,d\xi+$$

$$+\ldots+p_n(x)\int\limits_a^x K(x,\xi)g(\xi)\,d\xi=g(x)+\int\limits_a^x [K^{(n)}_{x^n}(x,\xi)+$$

$$+p_1(x)K^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,\xi)+\ldots+p_n(x)K(x,\xi)]g(\xi)\,d\xi.$$

Қавс ичидаги ифода нолга тенг, чунки $K(x,\xi)$ функция мос би жинсли тенгламанинг хусусий ечими. Бундан $\psi(x)$ функциянинг би жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими экани келиб чиқади Равшанки, $\psi(x)$ ва унинг ҳосилалари учун ушбу

$$\psi(a)=0,\ \psi^{(i)}(a)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

шарт бажарилади. Бу шарт бир жинсли тенглама тривиал ечими учу ёзиладиган шартдан фарқ қилмаса-да, бир жинсли бўлмага тенгламада $\psi(x)\not\equiv 0$, $a\leqslant x\leqslant b$ бўлади. Акс ҳолда $g(x)\not\equiv 0$ тенгсиз лик билан зиддият ҳосил бўлади.

Энди (5.31) формулани бошқача кўринишда ёзамиз. Унинг учу ушбу

$$G(x,\xi)=\begin{cases}0, & a\leqslant x\leqslant\xi,\\ K(x,\xi), & \xi\leqslant x\leqslant b\end{cases}\qquad(5.32$$

функцияни киритамиз. Равшанки, $G(\xi,\ \xi)=0$, $a\leqslant\xi\leqslant b$. Унда ташқари $x=\xi$ нуқтада (5.30) шартга кўра:

$$G^{(i)}_{x^i}(\xi+0,\ \xi)=G^{(i)}_{x^i}(\xi-0,\ \xi)=0, i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,$$

$$G^{(n-1)}_{x^{n-1}}(\xi+0,\xi)+G^{(n-1)}_{x^{n-1}}(\xi-0,\xi)=1.$$

Охирги муносабатда (5.32), (5.30) га асосан:

$$G^{(n-1)}_{x^{n-1}}(\xi+0,\xi)=1,\quad G^{(n-1)}_{x^{n-1}}(\xi-0,\xi)=0.$$

Чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар учун келтирилган хоссаларга эга бўлган $G(x,\xi)$ функция Қоши масаласи учун *Грин функцияси* дейилади. (5.32) формуладан фойдаланиб, (5.31) формулани аниқ интеграл шаклида бундай

$$\psi(x)=\int\limits_a^b G(x,\xi)\,g(\xi)\,d\xi \qquad (5.33)$$

ёзиш мумкин. Бу формула *Коши формуласи* дейилади.

Мисол. Ушбу $y''+(\mathrm{tg}x)y'=\frac{1}{\cos x}$, $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$ дифференциал тенгламанинг хусусий ечими Грин функцияси ёрдамида топилсин. Маълумки, (2-банддаги 2- мисол) мос бир жинсли тенгламанинг фундаментал системаси 1, $\sin x$ лардан иборат бўлиб, умумий ечими эса $y=C_1+C_2\sin x$. Энди тегишли $K(x,\xi)$ ечимни

$$K(x,\xi)=\psi_1(\xi)\cdot 1+\psi_2(\xi)\sin x$$

кўринишда излаймиз, бунда $K(\xi,\xi)=0$, $K'_x(\xi,\xi)=1$ бўлиб, $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$ларни шу шартдан фойдаланиб топиш лозим.

Ҳақиқатан: $K(\xi,\xi)=\psi_1(\xi)+\psi_2(\xi)\sin\xi=0,$
$K'_x(\xi,\xi)=\psi_2(\xi)\cos\xi=1.$

Бу системани ечиб, ушбуни топамиз:

$$\psi_2(\xi)=\frac{1}{\cos\xi},\quad \psi_1(\xi)=-\mathrm{tg}\xi.$$

Шундай қилиб, $K(x,\xi)=-\mathrm{tg}\xi+\frac{1}{\cos\xi}\sin x.$

Энди (5.31) формула бўйича хусусий ечимни топамиз:

$$\psi(x)=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{x}\left[-\mathrm{tg}\xi+\frac{1}{\cos\xi}\sin x\right]\frac{1}{\cos\xi}d\xi=-\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{x}\frac{\sin\xi}{\cos^2\xi}d\xi+\sin x\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{x}\frac{d\xi}{\cos^2\xi}=$$

$$=-\frac{1}{\cos\xi}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{x}+\sin x\,\mathrm{tg}\,\xi\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{x}=-\left[\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\right]+$$

$$+\sin x\left[\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}-\cos x+\sin x.$$

Машк. $y''+\omega^2y=ax$, $\omega\neq0$, $a\neq0$ бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими Грин функцияси ёрдамида топилсин.

4. Агар (5.1) тенгламада ўнг томонидаги $g(x)$ функция ушбу

$$g(x)=\sum_{i=1}^{s}f_i(x),\quad f_i(x)\in C(I)$$

кўринишда бўлса, $L[y]=\sum\limits_{i=1}^{s} f_i(x)$ тенгламанинг хусусий ечимини топиш учун s та $L[y]=f_1(x)$, $L[y]=f_2(x)$, ... , $L[y]=f_s(x)$ тенгламанинг ҳар бири учун алоҳида-алоҳида хусусий ечим топамиз. Улар мос равишда $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... , $\psi_s(x)$ функциялардан иборат бўлсин. У ҳолда берилган тенгламанинг хусусий ечимини $\sum\limits_{i=1}^{s} \psi_i(x)$ деб ёзиш мумкин. Ҳақиқатан, фараз бўйича $L[\psi_i]=f_i(x)$, $i=1,2,\ ...,s$. Шунинг учун $L\left[\sum\limits_{i=1}^{s} \psi_i(x)\right]=\sum\limits_{i=1}^{s} L[\psi_i]=\sum\limits_{i=1}^{s} f_i(x)=g(x)$. Демак, $\sum\limits_{i=1}^{s} f_i(x)$ — бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими.

Машқ. 1. Агар мос бир жинсли тенгламанинг фундаментал системаси e^x ва e^{-x} бўлса, ушбу $y''-y=e^{2x}+x-1$ тенгламанинг хусусий ва умумий ечимлари топилсин.

2. Агар мос бир жинсли тенгламанинг фундаментал системаси 1, $\cos x$, $\sin x$ бўлса, ушбу $y'''+y'=x+\cos 2x$ тенгламанинг хусусий ва умумий ечимлари топилсин.

6-боб

n-ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС ҚОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар чизиқли дифференциал тенгламаларнинг муҳим хусусий ҳоли бўлиб, улар элементар функцияларда охиригача интегралланади. Мазкур бобда чизиқли ўзгармас коэффициентли тенгламаларни ва унга келтириладиган ўзгарувчи коэффициентли чизиқли тенгламаларни ўрганамиз. Аввал комплекс дифференциал тенгламаларга тўхталамиз.

6.1-§. КОМПЛЕКС ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Агар чизиқли дифференциал тенгламаларда коэффициентлари ҳақиқий функциялар бўлса, тенглама *ҳақиқий чизиқли дифференциал тенглама* дейилади. Қоэффициентлари комплекс функциялардан иборат бўлса, тегишли тенглама *комплекс чизиқли дифференциал тенглама* деб юритилади. Кўпинча, коэффициентлари ўзгармас бўлган чизиқли дифференциал тенгламаларнинг комплекс ечимларини топиб, сўнгра ундан ҳақиқий ечимларни ажратиб олиш қулайроқ бўлади. Шу муносабат билан баъзи тушунчалар киритамиз.

6.1-таъриф. *Агар бирор I интервалда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ ҳақиқий аргументли ҳақиқий функциялар берилган бўлиб, шу интервалдан олинган t нинг ҳар бир қийматига ушбу*

$$\chi(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$$

комплекс сон мос қўйилган бўлса, у ҳолда I интервалда ҳақиқий аргументли комплекс функция $\chi(t)$ берилган дейилади. $\varphi(t)$ функция

$\chi(t)$ *функциянинг ҳақиқий қисми,* $\psi(t)$ *функция эса унинг мавҳум қисми дейилади.*

Агар $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар I интервалда узлуксиз бўлса, у ҳолда комплекс функция $\chi(t)$ ҳам I интервалда узлуксиз дейилади. Комплекс функциянинг дифференциалланувчилиги тушунчаси ҳам шунга ўхшаш киритилади. Аниқроғи, агар I да $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялар дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $\chi(t)$ функция ҳам I да *дифференциалланувчи* дейилади ва $\dot\chi(t)=\varphi(t)+i\dot\psi(t)$ деб ҳисобланади. Бунда функция ишорасининг устидаги нуқта t бўйича ҳосилани билдиради. Равшанки, комплекс функциялар учун ҳам ушбу

$$\frac{d}{dt}(\chi_1(t)+\chi_2(t))=\dot\chi_1(t)+\dot\chi_2(t),$$

$$\frac{d}{dt}(\chi_1(t)\cdot\chi_2(t))=\dot\chi_1(t)\chi_2(t)+\chi_1(t)\dot\chi_2(t),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\chi_1(t)}{\chi_2(t)}\right)=\frac{\dot\chi_1(t)\chi_2(t)-\chi_1(t)\dot\chi_2(t)}{\chi_2^2(t)},\quad \chi_2(t)\neq 0$$

формулалар ўринли. Бунга бевосита ҳисоблаш йўли билан ишониш мумкин. Ушбу n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама

$$\overset{(n)}{z}+a_1\overset{(n-1)}{z}+\ldots+a_{n-1}\dot z+a_nz=0 \tag{6.1}$$

берилган бўлиб, коэффициентлари I интервалда аниқланган ва узлуксиз функциялар бўлсин.

6.2-таъриф. *Агар* $z=\chi(t)$ *функция* $I_1\subset I$ *интервалда аниқланган бўлиб, қуйидаги икки шарт:*

1°. $\chi(t)\in C^n(I_1)$,

2°. $\overset{(n)}{\chi}(t)+a\overset{(n-1)}{\chi}(t)+\ldots+a_{n-1}\dot\chi(t)+a_n\chi(t)\equiv0,\ t\in I_1$

бажарилса, у ҳолда $z=\chi(t)$ *функция* I_1 *интервалда* (6.1) *тенгламанинг ечими дейилади.*

6.1-теорема. t_0, z_0, $\dot z_0$, ..., $\overset{(n-1)}{z_0}$ *лар бошланғич қийматларнинг ихтиёрий системаси бўлсин. У ҳолда* 1) (6.1) *тенгламанинг ушбу* $\chi(t_0)=z_0$, $\dot\chi(t_0)=\dot z_0$, ..., $\overset{(n-1)}{\chi}(t_0)=\overset{(n-1)}{z_0}$ *бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва* I *интервалда аниқланган ягона* $z=\chi(t)$ *ечими мавжуд;* 2) *бир хил бошланғич шартни қаноатлантирадиган ихтиёрий икки* $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ *ечим* I *интервалда устма-уст тушади.*

Бу теореманинг исботи 4.1-теореманинг исботидан келиб чиқади. Ҳақиқатан, $z=x+iy$ алмаштириш бажарайлик. У ҳолда (6.1) тенглама ушбу иккита n-тартибли

$$\begin{cases}\overset{(n)}{x}=f(t,\ x,\ \dot x,\ \ldots,\ \overset{(n-1)}{x},\ y,\ \dot y,\ \ldots,\ \overset{(n-1)}{y}),\\ \overset{(n)}{y}=g(t,\ x,\ \dot x,\ \ldots,\ \overset{(n-1)}{x},\ y,\ \dot y,\ \ldots,\ \overset{(n-1)}{y})\end{cases} \tag{6.2}$$

дифференциал тенгламага ажралади. Унда f ва g функциялар $x, \dot{x}, \ldots, \overset{(n-1)}{x}, y, \dot{y}, \ldots, \overset{(n-1)}{y}$ ўзгарувчиларга нисбатан коэффициентлари узлуксиз чизиқли функциялардир. Аниқроғи, (6.1) да $a_1=a_1'+ia_1''$, ... , $a_n=a_n'+ia_n''$ десак, f ва g функциялар бундай

$$f=-\sum_{i=1}^{n}(a_i'\overset{(n-i)}{x}-a_i''\overset{(n-i)}{y}),$$

$$g=-\sum_{i=1}^{n}(a_i''\overset{(n-i)}{x}+a_i'\overset{(n-i)}{y})$$

кўринишга эга бўлади. 9-бобда кўрамизки, a_i', a_i'', $i=1, 2, \ldots, n$ функциялар I интервалда узлуксиз бўлгани учун $\frac{\partial f}{\partial x^{(n-i)}}$, $\frac{\partial g}{\partial x^{(n-i)}}$, $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-i)}}$, $\frac{\partial g}{\partial y^{(n-i)}}$, $i=1, 2, \ldots, n$ функциялар ҳам шу интервалда узлуксиз бўлганидан (6.2) система тегишли бошланғич шартни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга.

Иккинчи томондан, агар $a_i'\in C^n$, $a_i''\in C^n$ бўлса, (6.2) системанинг, масалан, биринчи тенгламасини кетма-кет n марта дифференциаллаб, системанинг иккинчи тенгламасидан фойдалансак, $\overset{(n)}{x}, \overset{(n+1)}{x}, \ldots, \overset{(2n)}{x}$ ва $\overset{(n)}{y}$ лар учун ёзилган $(n+2)$ та тенгламага эга бўламиз. Агар тегишли якобиан нолдан фарқли бўлса, $(n+2)$ та муносабатдан $y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, \overset{(n)}{y}$ ($(n+1)$ та) ўзгарувчиларни чиқариш мумкин бўлади. Натижада x га нисбатан $2n$)-тартибли чизиқли дифференциал тенгламага келамиз. Агар a'_i, a''_i лар ўзгармас бўлса, у ҳолда тегишли якобиан ўзгармас детерминантдан иборат бўлади.

2. Қуйида экспоненциал комплекс функцияларнинг баъзи хоссалари билан танишамиз. Аввал $\omega=u+iv$ ихтиёрий комплекс функция бўлганда $e^{\omega}=e^{u}(\cos v+i\sin v)$ деб ёзамиз. Бу формулани ушбу

$$e^{\omega}=1+\omega+\frac{\omega^2}{2!}+\ldots+\frac{\omega^n}{n!}+\ldots$$

қатор ёрдамида исботлаш мумкин. Равшанки, $\overline{e^{\omega}}=e^{\omega}$. Ҳақиқатан,

$$\overline{e^{\omega}}=e^{u}(\cos v-i\sin v)=e^{u-iv}=e^{\bar{\omega}}.$$

Энди ушбу

$$e^{\omega_1}e^{\omega_2}=e^{\omega_1+\omega_2},\ \omega_1=u_1+iv_1,\ \omega_2=u_2+iv_2 \tag{6.3}$$

формулани исбот этамиз. Содда ҳисоблашлар

$$e^{\omega_1}e^{\omega_2}=e^{u_1}(\cos v_1+i\sin v_1)\cdot e^{u_2}(\cos v_2+i\sin v_2)=$$
$$=e^{u_1+u_2}[(\cos v_1\cos v_2-\sin v_1\sin v_2)+i(\sin v_1\cos v_2+\cos v_1\sin v_2)]=$$
$$=e^{u_1+u_2}[\cos(v_1+v_2)+i\sin(v_1+v_2)]=e^{(u_1+u_2)+i(v_1+v_2)}=e^{\omega_1+\omega_2}$$

бўлишини кўрсатади. Ушбу

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}=\lambda e^{\lambda t},\ \lambda=\mu+i\nu \tag{6.4}$$

муҳим формулани исбот этайлик. Аввал $\lambda = i\nu$ бўлсин. У ҳолда:

$$\frac{d}{dt}e^{i\nu t} = \frac{d}{dt}(\cos\nu t + i\sin\nu t) = -\nu\sin\nu t + i\nu\cos\nu t =$$
$$= i\nu(\cos\nu t + i\sin\nu t) = i\nu e^{i\nu t}.$$

Энди $\lambda = \mu + i\nu$ бўлсин. Унда (6.3) формуладан фойдалансак:

$$\frac{d}{dt}e^{(\mu+i\nu)t} = \frac{d}{dt}e^{\mu t}e^{i\nu t} = \frac{d}{dt}(e^{\mu t})\cdot e^{i\nu t} + e^{\mu t}\frac{d}{dt}(e^{i\nu t}) =$$
$$= \mu e^{\mu t}e^{i\nu t} + e^{\mu t}\cdot i\nu e^{i\nu t} = (\mu + i\nu)e^{\mu t + i\nu t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

Исбот этилган (6.3) ва (6.4) формуладан кейинги мулоҳазаларимизда тез-тез фойдаланамиз.

3. Ушбу

$$\dot{z} = \lambda z,\ \lambda = \mu + i\nu, \qquad z = x + iy$$

тенглама учун $z = Ce^{\lambda t}$ (C — ихтиёрий комплекс ўзгармас) функция ечим бўлади. Агар $z(0) = z_0$ деса, $C = z_0$ ва $z = z_0e^{\lambda t}$ бўлади. $z_0 = re^{i\alpha}$, $r \geqslant 0$ (α — ҳақиқий сон) бўлганда

$$z = re^{i\alpha}e^{\lambda t} = re^{\lambda t + i\alpha}.$$

Берилган тенгламани бундай ёзамиз:

$$\dot{x} + i\dot{y} = (\mu + i\nu)(x + iy) = (\mu x - \nu y) + i(\nu x + \mu y)$$

ёки

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - \nu y, \\ \dot{y} = \nu x + \mu y. \end{cases} \tag{6.5}$$

Бу системанинг ихтиёрий $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ечими комплекс тенгламанинг ихтиёрий ечими билан қуйидагича боғланган бўлади:

$$\varphi(t) + i\psi(t) = re^{\lambda t + i\alpha} = re^{(\mu+i\nu)t + i\alpha} = re^{\mu t + i(\nu t + \alpha)} =$$
$$= re^{\mu t}[\cos(\nu t + \alpha) + i\sin(\nu t + \alpha)].$$

Бундан:

$$x = \varphi(t) = re^{\mu t}\cos(\nu t + \alpha),\ y = \psi(t) = re^{\mu t}\sin(\nu t + \alpha).$$

Шунга ўхшаш $\dot{z} = iz^2$ комплекс дифференциал тенглама содда ҳисоблашлар ёрдамида қуйидаги икки ҳақиқий

$$\dot{x} = -2xy,\ \dot{y} = x^2 - y^2$$

дифференциал тенгламага ажралади.

6.2- §. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

4- бобда n- тартибли дифференциал тенгламаларнинг баъзи интегралланувчи турларини кўрганда кўпинча $\frac{dy}{dx} = p$ белгилашдан фойдаланган эдик. Бунда y — номаълум ҳақиқий функция эди. Энди номаълум функция сифатида ҳақиқий агрументли ихтиёрий z (ҳақиқий ёки комплекс) функцияни оламиз. Масалан, ҳақиқий аргументни t десак, $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($x(t)$, $y(t)$ — ҳақиқий функциялар) деб ёзилиши мумкин. Агар бирор I интервалда $y(t) \equiv 0$ бўлса, шу оралиқда $z(t) = x(t)$ функция ҳақиқий бўлади.

Ушбу бобда z функциядан t бўйича олинган ҳосилани $pz=\frac{d}{dt}z$ деб, дифференциаллаш операторини символик равишда $\frac{d}{dt}=p$ деб белгилаймиз. Худди шундай $\frac{d^2}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right)=p^2, \ldots, \frac{d^k}{dt^k}=p^k$ символларни киритсак, шу символлар ёрдамида $\frac{dz}{dt}=pz$, $\frac{d^2z}{dt^2}=$ $=p^2z, \ldots, \frac{d^kz}{dt^k}=p^kz$ муносабатларга эга бўламиз. (6.1) дифференциал тенгламанинг чап томонини $L(z)$ деб белгиласак, уни киритилган символлар орқали ёзиш мумкин (унда $a_i=\text{const}$, $i=\overline{1, n}$ деймиз):

$$L(z)=\overset{(n)}{z}+a_1\overset{(n-1)}{z}+\ldots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz=$$

$$=\overset{n}{p}z+a_1p^{n-1}z+\ldots+a_{n-1}pz+a_nz=$$

$$=(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n)z=L(p)z.$$

Шундай килиб, (6.1) тенгламани

$$L(p)z=0 \tag{6.1'}$$

деб ёзамиз, бунда $a_i=\text{const}$ бўлгани учун $L(p)$ n-тартибли алгебраик кўпҳад.

Қуйида дифференциаллаш оператори p га нисбатан $L(p)$ кўпҳаднинг икки хоссаси билан танишамиз.

А) *$L(p)$ ва $M(p)$ — дифференциаллаш операторлари p га нисбатан ихтиёрий кўпҳад, z_1, z_2, z лар эса t нинг функциялари бўлса, у ҳолда ушбу*

1. $L(p)(z_1+z_2)=L(p)z_1+L(p)z_2,$
2. $(L(p)+M(p))z=L(p)z+M(p)z,$
3. $L(p)(M(p)z)=(L(p)M(p))z$

айниятлар ўринли. Бевосита ҳисоблашларни бажариб, бунга ишониш мумкин.

Б) *Агар $L(p)$ кўпҳад p га нисбатан бирор кўпҳад бўлса, ушбу*

$$L(p)e^{\lambda t}=L(\lambda)e^{\lambda t} \tag{6.6}$$

формула ўринли, бунда λ — ҳақиқий ёки комплекс сон.

Исбот. Биз юқорида $\frac{d}{dt}e^{\lambda t}=\lambda e^{\lambda t}$ формулани исбот этган эдик.

Демак, $pe^{\lambda t}=\lambda e^{\lambda t}$. Равшанки, $p^2e^{\lambda t}=p(pe^{\lambda t})=p(\lambda e^{\lambda t})=$ $=\lambda^2e^{\lambda t}, \ldots, p^ke^{\lambda t}=\lambda^ke^{\lambda t}$. Шунинг учун $L(p)e^{\lambda t}=p^ne^{\lambda t}+$ $+a_1p^{n-1}e^{\lambda t}+\ldots+a_{n-1}pe^{\lambda t}+a_ne^{\lambda t}=\lambda^ne^{\lambda t}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda t}+\ldots+$ $+a_{n-1}\lambda e^{\lambda t}+a_ne^{\lambda t}=e^{\lambda t}(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n)=L(\lambda)e^{\lambda t}.$

(6.6) формула исбот этилди.

Агар λ сон $L(p)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, (6.6) формулага кўра $e^{\lambda t}$ функция (6.1′) тенгламанинг ечими бўлади. Шу муносабат билан $L(p)$ кўпҳад (6.1′) тенгламанинг *характеристик кўпҳади дейилади.*

Энди (6.1′) тенгламанинг умумий ечимини (комплекс ечимини) ёзишга тўхталайлик. Бунда икки ҳол юз беради: I. Характеристик кўпҳад оддий илдизларга эга (яъни каррали илдизлар йўқ.). II. Характеристик кўпҳад илдизлари орасида карралилари ҳам бор. Ҳар бир ҳолни алоҳида кўрамиз.

I. *$L(p)$ кўпҳаднинг илдизлари оддий.* Бу ҳолда асосий натижа қуйидаги теорема билан берилади.

6.2- теорема. *Агар $L(p)$ кўпҳаднинг илдизлари $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ оддий бўлса, у ҳолда (6.1) тенгламанинг барча ечимлари ушбу*

$$z=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\dots+C_ne^{\lambda_n t} \tag{6.7}$$

формула билан ифодаланади, бунда $C_1, C_2, \dots, C_n$ ихтиёрий ўзгармаслар.

Исбот. Аввало $z_1=e^{\lambda_1 t}, z_2=e^{\lambda_2 t}, \dots, z_n=e^{\lambda_n t}$ функциялар $-\infty < t < +\infty$ интервалда аниқланган бўлиб, улар (6.1) тенгламанинг ечимидир. Қолаверса, (6.7) функция ҳам (6.1) тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан, $C_1, C_2, \dots, C_n$ лар ўзгармас бўлгани учун $L(\lambda_i)=0$, $i=1,2, \dots, n$ тенгламаларга кўра:

$$L(p)z=L(p)(C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\dots+C_ne^{\lambda_n t})=$$
$$=C_1L(p)e^{\lambda_1 t}+C_2L(p)e^{\lambda_2 t}+\dots+C_nL(p)e^{\lambda_n t}=$$
$$=C_1L(\lambda_1)e^{\lambda_1 t}+C_2L(\lambda_2)e^{\lambda_2 t}+\dots+C_nL(\lambda_n)e^{\lambda_n t}\equiv 0,\ -\infty<t<\infty.$$

Энди $z=z^*(t)$ функция (6.1) тенгламанинг

$$z^*(0)=z_0,\ \dot{z}^*(0)=\dot{z}_0,\ \dots,\ \overset{(n-1)}{z^*}(0)=\overset{(n-1)}{z_0} \tag{6.8}$$

бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими бўлсин. Албатта, бу ечим $-\infty<t<+\infty$ интервалда аниқланган. (6.7) формуладан комплекс ўзгармасларнинг бирор қийматида шу $z=z^*(t)$ ечимни ҳосил қила олиш мумкинлигини кўрсатамиз. (6.8) шартга кўра (6.7) дан ҳосилалар олиб $t=0$ да ушбу

$$\begin{cases} C_1+C_2+\dots+C_n=z_0, \\ C_1\lambda_1+C_2\lambda_2+\dots+C_n\lambda_n=\dot{z}_0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_1\lambda_1^{n-1}+C_2\lambda_2^{n-1}+\dots+C_n\lambda^{n-1}=\overset{(n-1)}{z_0} \end{cases} \tag{6.9}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. $z^*(t)$ тривиал ечим бўлмагани учун (6.9) система $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларга нисбатан бир жинсли эмас. Бу системанинг детерминанти ушбу

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = (\lambda_n-\lambda_1)\ \dots\ (\lambda_n-\lambda_{n-1})(\lambda_{n-1}- \\ -\lambda_1)\ \dots\ (\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2})\ \dots\ (\lambda_2-\lambda_1)\neq 0$$

Вандермонд детерминантидан иборат бўлиб, у нолдан фарқли, шунга кўра (6.9) дан $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларни топа оламиз. $C_1^\circ, C_2^\circ, \dots, C_n^\circ$ лар (6.9) системанинг ечими бўлсин. У ҳолда

$$z^*(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i^\circ e^{\lambda_i t}$$

бўлади. Олинган $z = z^*(t)$ ечим ихтиёрий бўлгани учун (6.7) формула умумий ечим формуласи экани келиб чиқади.

Агар (6.1) тенгламанинг $a_1, a_2, \dots, a_n$ коэффициентлари *ҳақиқий* бўлса, шу тенгламанинг барча комплекс ечимлари ичидан ҳақиқий ечимларини ажратиб олиш масаласини қўямиз.

(6.1) дифференциал тенгламанинг $L(p) = 0$ нинг илдизларига, яъни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\lambda_k \neq \lambda_j$, $k \neq j$ ларга мос келган ечимларини

$$z_1 = e^{\lambda_1 t},\ z_2 = e^{\lambda_2 t},\ \dots,\ z_n = e^{\lambda_n t} \tag{6.10}$$

дейлик. Бизни (6.7) формула ҳақиқий ечимларни бериши учун комплекс ўзгармасларнинг қабул қиладиган қийматлари қизиқтиради.

Фараз этайлик: $\overline{z_1} = z_2, \dots, \overline{z}_{2k-1} = z_{2k};\quad \overline{z_j} = z_j, j = 2k+1, \dots n.$

Бошқача айтганда, (6.10) функциялардан $2k$, $k \leqslant \frac{n}{2}$ таси қўшма комплекс функция бўлиб, қолган $(n-2k)$ таси ҳақиқий функциялардир.

6.1-лемма. *Агар (6.7) формулада қўшма комплекс ечимлар олдидаги коэффициентлар ҳам қўшма комплекс бўлиб, ҳақиқий ечимлар олдидаги коэффициентлар ҳақиқий бўлса, у ҳолда тегишли формула ҳақиқий ечимни аниқлайди.*

Исбот. Бирор $\overline{z}_{2S-1} = z_{2S}$ $(1 \leqslant S \leqslant k)$ муносабатни олайлик. У ҳолда $z_{2S} = e^{\lambda_{2S} t}$ бўлади. Агар $\lambda_{2S} = \mu_{2S} + i\nu_{2S}$ десак:

$$z_{2S} = e^{\mu_{2S} t}(\cos\nu_{2S} t + i\sin\nu_{2S} t), \quad z_{2S-1} = e^{\mu_{2S} t}(\cos\nu_{2S} t - i\sin\nu_{2S} t).$$

Энди $C_{2S} = C'_{2S} + iC''_{2S}$, $C_{2S-1} = C'_{2S} - iC''_{2S}$ бўлса,

$$C_{2S-1} e^{\lambda_{2S-1} t} + C_{2S} e^{\lambda_{2S} t} = (C'_{2S} - iC''_{2S}) e^{\mu_{2S} t}(\cos\nu_{2S} t - i\sin\nu_{2S} t) +$$
$$+ (C'_{2S} + iC''_{2S}) e^{\mu_{2S} t}(\cos\nu_{2S} t + i\sin\nu_{2S} t) =$$
$$= e^{\mu_{2S} t}[C'_{2S}\cos\nu_{2S} t - C''_{2S}\sin\nu_{2S} t + i(C'_{2S}\sin\nu_{2S} t + C''_{2S}\cos\nu_{2S} t) +$$
$$+ C'_{2S}\cos\nu_{2S} t - C''_{2S}\sin\nu_{2S} t - i(C'_{2S}\sin\nu_{2S} t + C''_{2S}\cos\nu_{2S} t)] =$$

$= e^{\mu_{2S} t}(2C'_{2S}\cos\nu_{2S} t - 2C''_{2S}\sin\nu_{2S} t)$ бўлади. Охирги ифода ҳақиқий функциядир. Бундан ушбу

$$\sum_{S=1}^{k} (C_{2S-1} e^{\lambda_{2S-1} t} + C_{2S} e^{\lambda_{2S} t}) = \sum_{S=1}^{k} e^{\mu_{2S} t}(2C_{2S}\cos\nu_{2S} t - 2C'_{2S}\sin\nu_{2S} t) \tag{6.11}$$

муносабатнинг ўринли экани ва унинг ўнг томонидаги функция ҳақиқий экани келиб чиқади. $\lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n$ лар ҳақиқий бўлгани учун ҳақиқий $C_{2k+1}, \ldots, C_n$ коэффициентлар орқали тузилган

$$C_{2k+1}e^{\lambda_{2k+1}t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}$$

йиғинди ҳам ҳақиқий бўлади.

Шундай қилиб, ушбу

$$z = \sum_{i=1}^{k} (C_{2S-1}e^{\lambda_{2S-1}t} + C_{2S}e^{\lambda_{2S}t}) + \sum_{i=2k+1}^{n} C_S e^{\lambda_S t} \qquad (6.12)$$

функция ҳақиқийдир. Лемма исбот этилди.

Ҳақиқий $C'_2, C'_{2\cdot2}, \ldots, C'_{2k}, C''_2, C''_{2\cdot2}, \ldots, C''_{2k}$ коэффициентлар ихтиёрий бўлгани учун (6.11) муносабатдан фойдаланиб, (6.12) формулани қуйидаги

$$z = \sum_{i=1}^{k} e^{\mu_i t}(C_i \cos v_i t + C''_i \sin v_i t) + \sum_{i=2k+1}^{k} C_i e^{\lambda_i k} \qquad (6.13)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Унда n та ихтиёрий ҳақиқий

$$C'_1, C'_2, \ldots, C'_k, C''_1, C''_2, \ldots, C''_k, \quad C_{2k+1}, \ldots, C_n$$

ўзгармаслар қатнашган.

Бу (6.13) формулага (6.1′) тенгламанинг коэффициентлари ҳақиқий бўлганда унинг фундаментал системасини топиш йўли билан ҳам келиш мумкин. Текшириш қийин эмаски, ушбу

$$\left.\begin{array}{l} e^{\mu_2 t}\cos v_2 t,\ e^{\mu_4 t}\cos v_4 t,\ \ldots,\ e^{\mu_{2k} t}\cos v_{2k} t, \\ e^{\mu_2 t}\sin v_2 t,\ e^{\mu_4 t}\sin v_4 t,\ \ldots,\ e^{\mu_{2k} t}\sin v_{2k} t, \\ e^{\mu_{2k+1} t},\ e^{\mu_{2k+2} t},\ \ldots,\ e^{\mu_n t} \end{array}\right\} \qquad (6.14)$$

функциялар $-\infty < t < +\infty$ интервалда (6.1′) тенгламанинг чизиқли эркли ечимларидан иборат. Демак, улар (6.1′) тенгламанинг фундаментал системасини ташкил этади. Шунинг учун умумий ечимни (6.13) кўринишда ёзса бўлади.

Равшанки, характеристик тенгламанинг барча илдизлари ҳақиқий оддий бўлганда умумий ечим $z = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}$ (C_i — ҳақиқий, λ_i — ҳақиқий) кўринишда ёзилади.

6.1-эслатма. (6.13) *формуладаги биринчи йиғиндини* $\sum\limits_{i=1}^{k} \rho_i e^{\mu_i t}\cos(\nu_i t + \alpha_i)$, $\rho_i > 0$ *каби ёзиш ҳам мумкин. Унда* α_i ($i = 1, 2, \ldots, k$)*лар ихтиёрий ўзгармас. Баъзи ҳолларда шу кўриниш қулайроқ бўлади.*

Мисоллар. 1. Ушбу $z - z = 0$ тенгламанинг умумий ечими топилсин. Аввал умумий комплекс ечимни топайлик. Характеристик тенглама $p^2 - 1 = 0$ кўринишда бўлиб, илдизлари $p_1 = -1$, $p_2 = 1$ бўлади.

Берилган тенгламанинг ихтиёрий комплекс ечими $z = Ce^{-t} + de^{t} = (C_1 + iC_2)e^{-t} + (d_1 + id_2)e^{t}$ (C_1, C_2, d_1, d_2 — ихтиёрий ҳақиқий) кўринишда ёзилади. Ҳақиқий ечим эса характеристик тенгламанинг илдизлари $p_1 = -1$, $p_2 = 1$ ҳақиқий бўлгани учун $z = C_1e^{-t} + d_1e^{t}$ (C_1, d_1 — ҳақиқий) кўринишда бўлади.

2. Ушбу $\overset{(4)}{z} - z = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ҳақиқий ечими топилсин.

Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси $p^4 - 1 = 0$ бўлиб, унинг илдизлари $p_{1,2} = \pm i$, $p_{3,4} = \pm 1$. Умумий комплекс ечим

$$z = C_1e^{it} + C_2e^{-it} + C_3e^{-t} + C_4e^{t} \quad (C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \text{ — комплекс})$$

кўринишга эга. Умумий ҳақиқий ечим эса (6.13) формулага кўра

$$z = C_1^0\cos t + C_2^0\sin t + C_3^0e^{-t} + C_4^0e^{t} \quad (C_1^0,\ C_2^0,\ C_3^0,\ C_4^0 \text{ — ҳақиқий})$$

каби ёзилади. 1-эслатмага асосан, уни яна

$$z = \rho\cos(t + \alpha) + C_3^0e^{-t} + C_4^0e^{t} \quad (\rho > 0,\ \alpha,\ C_3^0,\ C_4^0 \text{ — ҳақиқий})$$

кўринишда ёзиш мумкин.

2. $L(p)$ кўпҳаднинг баъзи илдизлари каррали. Характеристик кўпҳад $L(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$ турли илдизларга эга бўлган ҳолда $L(p)z = 0$ тенгламанинг n та чизиқли эркли ечимларини кўрсатиш мумкин бўлган эди. Агар $L(p)$ кўпҳаднинг баъзи илдизлари каррали бўлса, турли илдизлар сони $m < n$ бўлади. Шунинг учун $e^{\lambda t}$ кўринишда m та ечим ёзилса, қолган $n - m$ та ечимнинг кўринишини излаш лозим бўлади. Қуйидаги теорема бу масалани ечиб беради.

6.3- теорема. *Бизга n-тартибли чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли (6.1′) тенглама берилган бўлиб, тегишли характеристик $L(p)$ кўпҳад турли λ_1, λ_2, ..., λ_m илдизларга эга бўлсин. Бунда λ_j илдиз k_j — каррали ($j = 1, 2, \ldots, m$) бўлсин десак, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ бўлади.*

Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = e^{\lambda_1 t},\ z_2 = te^{\lambda_1 t},\ \ldots,\ z_{k_1} = t^{k_1 - 1}e^{\lambda_1 t}, \\ z_{k_1+1} = e^{\lambda_2 t},\ z_{k_1+2} = te^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ z_{k_1+k_2} = t^{k_2 - 1}e^{\lambda_2 t}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_{k_1+\ldots+k_m+1} = e^{\lambda_m t},\ \ldots,\ z_n = t^{k_m - 1}e^{\lambda_m t} \end{array}\right\} \qquad (6.15)$$

функциялар $-\infty < t < +\infty$ интервалда аниқланган бўлиб, (6.1′) тенгламанинг ечими бўлади. Шунга ўхшаш

$$z = C_1z_1 + C_2z_2 + \ldots + C_nz_n \qquad (6.16)$$

функция ихтиёрий комплекс C_1, C_2, ..., C_n ўзгармаслар учун (6.1′) тенгламанинг умумий комплекс ечими бўлади.

Теоремани исбот этиш учун аввал иккита леммани келтирамиз.

6.2-лемма. *Агар $L(p)$ — ихтиёрий n-тартибли кўпҳад, λ — ихтиёрий комплекс сон, $f(t)$ — етарли марта дифференциалланувчи ихтиёрий функция бўлса, у ҳолда ушбу*

$$L(p)(e^{\lambda t}f(t)) = e^{\lambda t}L(p + \lambda)f(t) \qquad (6.17)$$

формула ўринли. У силжиш формуласи дейилади.

Исбот. Бу формулани $L(p) \equiv p$ булганда осонгина чиқариш мумкин. Ҳақиқатан,

$$p(e^{\lambda t}f(t)) = \lambda e^{\lambda t}f(t) + e^{\lambda t}\dot{f}(t) = e^{\lambda t}(\lambda f(t) + pf(t)) = e^{\lambda t}(p + \lambda)f(t).$$

Агар $L(p) \equiv ap+b$, $a \neq 0$ бўлса ҳам шундай иш тутамиз:

$$(ap+b)(e^{\lambda t}f(t)) = ap(e^{\lambda t}f(t)) + be^{\lambda t}f(t) = ae^{\lambda t}(p+\lambda)f(t) + \\ + be^{\lambda t}f(t) = e^{\lambda t}[a(p+\lambda)+b]f(t).$$

Шундай қилиб, (6.17) формула $L(p)$ кўпҳад тартиби $n=1$ бўлганда исбот этилди. n-тартибли кўпҳад учун (6.17) ни исбот этиш учун математик индукцияни қўллаймиз. Ўша формула $(n-1)$-тартибли $(n \geqslant 2)$ кўпҳад учун ўринли бўлсин, дейлик. У ҳолда n-тартибли $L(p)$ кўпҳад учун (6.17) формулани исбот этамиз. $L(p)$ кўпҳадни $L(p) = L_1(p)L_2(p)$ кўринишда ёзамиз. Бунда $L_1(p)$ кўпҳад биринчи тартибли, $L_2(p)$ эса $(n-1)$-тартибли кўпҳад. Фараз бўйича $L_1(p)$ ва $L_2(p)$ кўпҳадлар учун формула тўғри. Шу сабабли қуйидагига эгамиз:

$$L(p)(e^{\lambda t}f(t)) = L_1(p)L_2(p)(e^{\lambda t}f(t)) = L_1(p)(e^{\lambda t}L_2(p+\lambda)f(t)) = \\ = L_1(p)(e^{\lambda t}F(t)),\ F(t) = L_2(p+\lambda)f(t)$$

ёки

$$L(p)(e^{\lambda t}f(t)) = L_1(p)(e^{\lambda t}F(t)) = e^{\lambda t}L_1(p+\lambda)F(t) = \\ = e^{\lambda t}L_1(p+\lambda)L_2(p+\lambda)f(t) = e^{\lambda t}L(p+\lambda)f(t).$$

(6.17) формула исбот бўлди.

6.3-лемма. *Агар $L(p)$ кўпҳад p символга нисбатан ихтиёрий кўпҳад, $\omega_r(t)$ эса ушбу $\omega_r(t) = L(p)t^re^{\lambda t}$* ($\lambda$ — комплекс сон) *формула билан аниқланган ҳақиқий аргумент t нинг функцияси бўлиб, λ сон $L(p)$ кўпҳаднинг k каррали илдизи бўлса, у ҳолда $\omega_0(t) \equiv 0$, $\omega_1(t) \equiv 0$, ... , $\omega_{k-1}(t) \equiv 0$ айниятлар ўринли; аксинча, агар $\omega_0(t)$, $\omega_1(t)$, ... , $\omega_{k-1}(t)$ функциялар t нинг $t=t_0$ қийматида нолга тенг, яъни*

$$\omega_0(t_0) = \omega_1(t_0) = \ldots = \omega_{k-1}(t_0) = 0 \qquad (6.18)$$

бўлса, у ҳолда λ сон $L(p)$ кўпҳаднинг $s(s \geqslant k)$ каррали илдизи бўлади.

Исбот. 6.2-леммага кўра $f(t) = t^r$ бўлганда

$$\omega_r(t) = L(p)t^re^{\lambda t} = e^{\lambda t}L(p+\lambda)t^r \qquad (6.19)$$

лемманинг биринчи қисмини исбот этамиз. λ сони $L(p)$ кўпҳаднинг k каррали илдизи бўлсин. Унда $L(p)$ ни $L(p) = M(p)(p-\lambda)^k$ ($M(p)$ — тартиби $(n-k)$ бўлган кўпҳад) кўринишида ёзиш мумкин. Агар p ни $p+\lambda$ га алмаштирсак,

$$L(p+\lambda) = M(p+\lambda)p^k \qquad (6.20)$$

формулага келамиз. $L(p+\lambda)$ учун топилган бу ифодани (6.19) га қўямиз:

$$\omega_r(t) = e^{\lambda t}M(p+\lambda)(p^kt^r),\ r=0,1,\ \ldots\ ,\ k-1.$$

Аммо $p^kt^r = 0$, чунки $r < k$. Шунинг учун $\omega_r(t) \equiv 0$, $r = 0,1, \ldots , k-1$.

Энди лемманинг иккинчи қисмини исбот этайлик. (6.18) сонли тенгликлар ўринли бўлсин. Равшанки, $L(p+\lambda) = (p+\lambda)^n + a_1(p+\lambda)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(p+\lambda) + a_n$. Қавсларни очиб чиқиб, ҳосил бўлган кўпҳадни

$$L(p+\lambda) = b_0 + b_1p + \ldots + b_{n-1}p^{n-1} + p^n,\ b_n = 1 \qquad (6.21)$$

кўринишда ёзамиз. Энди $p=0$ бўлсин. У ҳолда $t=t_0$ да (6.19) дан

$$\omega_0(t_0)=e^{\lambda t_0}L(p+\lambda)\cdot 1,\ f(t)=1$$

ёки $L(p+1)\cdot 1=b_0$ бўлгани учун ((6.21) га кўра)

$$\omega_0(t_0)=e^{\lambda t_0}b_0.$$

Аммо (6.18) га кўра $\omega_0(t_0)=0$. Демак, $b_0=0$. Шунга ўхшаш, $b_0=b_1=\ldots=b_{r-1}=0$, $r\leqslant k-1$ бўлсин дейлик. У ҳолда (6.19) ва (6.21) ларга кўра:

$$\omega_r(t_0)=e^{\lambda t_0}r!b_r$$

Бундан (6.18) га асосан $b_r=0$ келиб чиқади. Шундай қилиб,

$b_0=b_1=\ldots=b_{k-1}=0$ ва $L(p+\lambda)$ кўпҳад ушбу $L(p+\lambda)=$
$=b_kp^k+b_{r+1}p^{k+1}+\ldots+b_np^n=(b_k+b_{k+1}p+\ldots+$
$+b_np^{n-k})p^k=M_1(p)p^k$

кўринишга эга. Энди p ни $p-\lambda$ га алмаштирамиз:

$$L(p)=M_1(p-\lambda)(p-\lambda)^k.$$

Бу ифодадан $p=\lambda$ сон $L(p)$ кўпҳаднинг карраси k дан кам бўлмаган илдизи экани келиб чиқади. Қайд қиламизки, $M_1(p-\lambda)$ кўпҳад учун λ яна илдиз бўлиши эҳтимоли бор. Бу, масалан, $b_k=0$ бўлганда содир бўлади. Лемманинг иккинчи қисми ҳам исбот этилди. Демак, лемма тўла исботланди.

Энди 6.3-теореманинг исботига ўтамиз. 6.3-лемманинг биринчи қисмига асосан (6.15) функциялар $L(p)z=0$ тенгламанинг ечими бўлади. (6.16) формула умумий комплекс ечим эканини исбот этамиз. $z=z^*(t)$ функция (6.1′) тенгламанинг $z^*(t_0)=z_0, \dot{z}^*(t_0)=\dot{z}_0, \ldots,$ $\overset{(n-1)}{z^*}(t_0)=\overset{(n-1)}{z_0^*}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими бўлсин. Бу ечим $-\infty<t<+\infty$ интервалда аниқланган. $C_1, C_2, \ldots, C_n$ комплекс ўзгармасларни топиш учун ушбу

$$C_1\overset{(s)}{z_1}(t_0)+C_2\overset{(s)}{z_2}(t_0)+\ldots+C_n\overset{(s)}{z_n}(t_0)=\overset{(s)}{z_0},$$
$$s=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \tag{6.22}$$

системага эгамиз. Бу системадан $C_1, \ldots, C_n$ ларнинг ягона қийматларини топиш учун унинг детерминанти

$$d=\begin{vmatrix} z_1(t_0) & z_2(t_0) & \ldots & z_n(t_0) \\ \dot{z}_1(t_0) & \dot{z}_2(t_0) & \ldots & \dot{z}_n(t_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n-1)}{z_1}(t_0) & \overset{(n-1)}{z_2}(t_0) & \ldots & \overset{(n-1)}{z_n}(t_0) \end{vmatrix}$$

нолдан фарқли бўлиши етарли. Фараз этайлик, $d=0$ бўлсин, яъни шу детерминантнинг, масалан, йўллари чизиқли боғлиқ. У ҳолда бу детерминантни шундай ўзгартириш мумкинки, натижада ҳосил бўлган детерминантнинг у ёки бу йўл элементлари нолга тенг бўлади. Ҳақиқатан, шундай $1=b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} b_i^2 \neq 0$ ўзгармасларни оламизки, 1-йўл элементларини b_{n-1} га, 2-йўл элементларини b_{n-2} га, ..., охирги йўл элементларини $b_0 (b_0=1)$ га кўпайтириб қўшсак, натижада ҳосил бўлган детерминантнинг, масалан, 1-йўл элементлари нолга тенг бўлади. 1-йўл j-устун элементини ёзайлик:

$$\overset{(n-1)}{z_j}(t_0)+b_1 \overset{(n-2)}{z_j}(t_0)+\dots+b_{n-2}\overset{\circ}{z}_j(t_0)+b_{n-1}z_j(t_0)=0.$$

Бу сонли тенгликни яна

$$M(p)z_j|_{t=t_0}=0,\ j=1,2,\ \dots,\ n \tag{6.23}$$

деб ёзса бўлади. Унда $M(p)=p^{n-1}+b_1p^{n-2}+\dots+b_{n-2}p+b_{n-1}$. 6.3-леммага кўра (6.23) дан $j=1,2, \dots, k_1$ бўлганда λ_1 сон $M(p)$ кўпҳаднинг камида k_1 каррали, $j=k_1+1, k_1+2, \dots, k_1+k_2$ бўлганда λ_2 сони $M(p)$ нинг камида k_2 каррали илдизи, шунга ўхшаш мулоҳаза билан , λ_m сони $j=k_1+k_2+\dots+k_{m-1}+1, \dots, k_1+k_2+\dots+k_{m-1}+$ $+k_m=n$ бўлганда $M(p)$ кўпҳаднинг камида k_m каррали илдизи экани келиб чиқади. Бундан $M(p)$ кўпҳад тартиби $n-1$ бўлишига қарамасдан камида n та илдизи бор деган хулосага келамиз. Бу зиддият $d=0$ деган фараздан чиқди. Демак, (6.22) системанинг ечимини $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ десак,

$$z^*(t)=\sum_{j=1}^{n} C_j^0 z_j(t)$$

формулага келамиз. Теорема исбот этилди.

6.2-эслатма. (6.1$'$) *тенгламанинг умумий комплекс ечими* (6.16) *формула билан ёзилса ҳам уни амалда қулай кўринишда, яъни*

$$z(t)=f_1(t)e^{\lambda_1 t}+f_2(t)e^{\lambda_2 t}+\dots+f_m(t)e^{\lambda_m t} \tag{6.24}$$

шаклда ёзиш мумкин. Бунда $f_l(t)$ — тартиби k_l-1 дан юқори бўлмаган кўпҳад бўлиб, унинг коэффициентлари ҳар бир ечим учун тўла аниқланади.

Агар $L(p)z=0$ тенгламанинг коэффициентлари *ҳақиқий ўзгармас* бўлса, кўрилаётган ҳолда ҳам тенгламанинг комплекс ечимлари ичидан *ҳақиқий ечимларни* ажратиб олиш масаласини қўйиш мумкин. *Бунда 6.1-леммага ўхшаш леммани келтириш ва исботлаш мумкин.* Қуйидаги мулоҳазалар фикримизни тасдиқлайди.

Фараз этайлик,

$$\bar{\lambda}_1=\lambda_2,\ \bar{\lambda}_3=\lambda_4,\ \dots,\ \bar{\lambda}_{2s-1}=\lambda_{2s},$$
$$\bar{\lambda}_{2s+1}=\lambda_{2s+1},\ \dots,\ \bar{\lambda}_m=\lambda_m.$$

Кўриш қийин эмаски, ушбу $t^\delta e^{\lambda_{2j-1}t}$ ва $t^\delta e^{\lambda_{2j}t}$, $\delta=0,1, \dots, k_{2j-1}-1$ $(j=1, 2, \dots, s)$ функциялар ўзаро қўшма комплекс ечимларни ташкил этади. Агар 6.1-леммада айтилганидек, шу қўшма комплекс ечимлар олдидаги коэффициентлар ҳам қўшма комплекс сон бўлса, у ҳолда $z=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i z^i$ формула ҳақиқий ечимни беради. Ҳақиқатан, $\lambda_{2j-1}=\mu_{2j-1}+i\nu_{2j-1}$, $C_{2j-1}=C'_{2j-1}+iC''_{2j-1}$, $\overline{C_{2j-1}}=C_{2j}=C'_{2j-1}-$ $-iC''_{2j-1}$ бўлса, содда ҳисоблашлар

$$C_{2j-1}t^{\delta}e^{\lambda_{2j-1}t}+\overline{C}_{2j-1}t^{\delta}e^{\overline{\lambda}_{2j-1}t}=$$
$$=t^{\delta}e^{\lambda_{2j-1}t}(2C'_{2j-1}\cos\nu_{2j-1}t-2C''_{2j-1}\sin\nu_{2j-1}t)$$

эканини кўрсатади. Бу охирги ифода ҳақиқий функция. Демак, (6.1′) тенглама учун қурилаётган ҳолда ушбу

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{\delta=0}^{k_{2j-1}}(C_{2j-1}t^{\delta}e^{\lambda_{2j-1}t}+\overline{C}_{2j-1}t^{\delta}e^{\overline{\lambda}_{2j-1}t})=$$
$$=\sum_{j=1}^{s}\sum_{\delta=0}^{k_{2j-1}}t^{\delta}e^{\mu_{2j-1}t}(2C'_{2j-1}\cos\nu_{2j-1}t-2C''_{2j-1}\sin\nu_{2j-1}t) \tag{6.25}$$

формула ўринли. Энди умумий ҳақиқий ечимни ёзиш мумкин:

$$z=\sum_{j=1}^{s}\sum_{\delta=0}^{k_{2j-1}}t^{\delta}e^{\mu_{2j-1}t}(2C'_{2j-1}\cos\nu_{2j-1}t-2C''_{2j-1}\sin\nu_{2j-1}t)+$$
$$+\left[f_{k_{2s+1}}(t)e^{\lambda_{2s+1}t}+f_{k_{2s+2}}(t)e^{\lambda_{2s+2}t}+\ldots+f_{k_m}(t)e^{\lambda_m t}\right], \tag{6.26}$$

бундай f_{k_q} функция тартиби k_q-1, $q=2s$, ... , m дан юқори бўлмаган ҳақиқий коэффициентли кўпҳад.

Бу формулани яна ушбу

$$z=\sum_{j=1}^{s}\sum_{\delta=0}^{k_{2j-1}}t^{\delta}e^{\mu_{2j-1}t}\rho_{2j-1}\cos(\nu_{2s-1}t+\alpha_{2j-1})+$$
$$+\sum_{j=2s+1}^{m}f_{k_j}(t)e^{\lambda_j t},\ \rho_{2s-1}>0 \tag{6.27}$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

(6.26) формулада n та ҳақиқий ўзгармас қатнашган, чунки ундаги биринчи йиғиндида $2k_1+2k_3+\ldots+2k_{2s-1}$ та, ўрта қавс ичида эса $k_{2s+1}+k_{2s+2}+\ldots+k_m$ та ихтиёрий ўзгармас бўлиб, $k_1+k_2+\ldots+$ $+k_m=n$ ва $k_1=k_2$, $k_3=k_4$, ... , $k_{2s-1}=k_{2s}$ бўлгани учун $2k_1+2k_3+\ldots+2k_{2s-1}+k_{2s+1}+k_{2s+2}+\ldots+k_m=n$ бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\dddot{z}+2\ddot{z}+\dot{z}=0$$

тенгламанинг умумий комплекс ва ҳақиқий ечимлари топилсин.

Характеристик тенглама

$$L(p)=p^3+2p^2+p=0$$

кўринишга эга. Ундан $\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=-1$, демак, умумий комплекс ечим: $z=C_1+(C_2+C_3t)e^{-t}$, C_1, C_2, C_3 — комплекс сонлар, чунки $\lambda=-1$ икки каррали илдиз ва ечимлар системаси:

$$z_1=1,\ z_2=te^{-t},\ z_3=e^{-t}.$$

Умумий ҳақиқий ечим ҳам шунга ўхшаш $z=C_1'+(C_2'+C_3't)e^{-t}$ (C_1', C_2', C_3' — ҳақиқий сонлар) кўринишда ёзилади.

2. Ушбу

$$\overset{(5)}{z}+2\overset{(3)}{z}+\dot{z}=0$$

тенгламанинг умумий комплекс ва ҳақиқий ечимлари топилсин.

Мос характеристик тенглама

$$L(p)=p^5+2p^3+p=0$$

бўлиб, $L(p)=p(p^2+1)^2$ дан унинг илдизлари $p_1=0$, $p_2=i$, $p_3=-i$. Бунда $p_2=i$ ва $p_3=-i$ илдизлар икки каррали. Энди умумий комплекс ечимни ёзамиз:

$$z=C_1+(C_2+C_3t)e^{it}+(C_4+C_5t)e^{-it}.$$

Умумий ҳақиқий ечим эса (6.26) , (6.27) формулага асосан

$$z=C_1+(C_2'+C_3't)\cos t+(C_4'+C_5't)\sin t$$

ёки

$$z=C_1+\rho_1\cos(t+\alpha_1)+t\rho_2\cos(t+\alpha_2),\ \rho_1>0,\ \rho_2>0$$

кўринишда ёзилади.

6.3-§. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу

$$\overset{(n)}{z}+a_1\overset{(n-1)}{z}+\ldots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz=F(t) \tag{6.28}$$

дифференциал тенгламада a_1, a_2, ... , a_n ўзгармас коэффициентлар бўлиб, $F(t)$ функция I интервалда аниқланган узлуксиз функция бўлсин. У ҳолда, биламизки, берилган тенгламанинг ихтиёрий ечими мавжудлигининг максимал интервали шу I интервалдан иборат бўлади. Бу бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини топиш усуллари бизга маълум. Агар (6.28) тенгламанинг бирор хусусий ечимини билсак, шу тенгламанинг умумий ечимини ёза оламиз. Ҳақиқатан, тегишли бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини доим топа оламиз, чунки унинг коэффициентлари ўзгармас ва $L(p)=0$ тенгламанинг илдизларини топа оламиз. Энди 5.10-теоремани қўллаш қолади. Мазкур параграфда (6.28) тенгламанинг ўнг томони, яъни $F(t)$ функция махсус кўринишда бўлганда хусусий ечимни излаш билан шуғулланамиз. Аниқроғи, $F(t)$ функция *квазикўпҳад* (квазиполином) бўлган ҳолни кўрамиз.

Агар λ_1, λ_2, ... , λ_m комплекс сонлар, $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... , $f_m(t)$ функциялар t га нисбатан кўпҳадлар бўлса, у ҳолда ушбу

$$F(t)=f_1(t)e^{\lambda_1t}+f_2(t)e^{\lambda_2t}+\ldots+f_m(t)e^{\lambda_mt} \tag{6.29}$$

функция *квазикўпҳад* дейилар эди (117-бетга қ.).

Энди $F(t)$ квазикўпҳад бўлганда

$$L(p)z=F(t) \tag{6.28'}$$

тенгламанинг хусусий ечимини $z^*(t)$ десак, бу ечим ушбу

$$L(p)z=f_j(t)e^{\lambda_jt},\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m \tag{6.30}$$

тенгламаларнинг мос хусусий ечимлари $z_1^*(t)$, $z_2^*(t)$, ... , $z^*{}_m(t)$ йиғиндисидан иборат, яъни $z^*(t)=\sum_{j=1}^{m} z_j^*(t)$. Шунинг учун мулоҳазаларни $F(t)=f(t)e^{\lambda t}$ бўлган ҳолда олиб бориш етарли. Асосий натижа қуйидаги теорема билан берилади.

6.4-теорема. *Ушбу*

$$L(p)z=f(t)e^{\lambda t} \tag{6.31}$$

бир жинсли бўлмаган тенгламани кўрайлик, унда $f(t)$ кўпҳад t га нисбатан r-тартибли кўпҳад, λ — комплекс сон. Агар $L(\lambda)\neq 0$ бўлса, $k=0$ ва $L(\lambda)=0$ бўлса, λ сони k каррали илдиз бўлсин. У ҳолда (6.31) тенгламанинг

$$z=t^k g(t)e^{\lambda t} \tag{6.32}$$

кўринишда хусусий ечими мавжуд, унда $g(t)$ кўпҳад r-тартибли номаълум коэффициентли кўпҳад. Бу $g(t)$ кўпҳаднинг коэффициентлари номаълум коэффициентлар усули билан топилиши мумкин.

Исбот. $f(t)$ ва $g(t)$ кўпҳадларни

$$f(t)=a_0t^r+f^*(t), \tag{6.33}$$
$$f^*(t)=a_1t^{r-1}+\ldots+a_{r-1}t+a_r,$$
$$g(t)=b_0t^r+g^*(t),$$
$$g^*(t)=b_1t^{r-1}+\ldots+b_{r-1}t+b_r \tag{6.34}$$

кўринишда ёзамиз. Энди λ сон $L(\lambda)=0$ тенгламанинг k каррали илдизи бўлгани учун $L(p)$ кўпҳадни

$$L(p)=M(p)(p-\lambda)^k \tag{6.35}$$

каби ёзиш мумкин. Фаразга кўра $M(\lambda)\neq 0$. Акс ҳолда, λ сони k дан кўпроқ каррали бўлар эди. Агар (6.32) функция (6.31) тенгламанинг ечими бўлса, $L(p)(e^{\lambda t}t^k g(t))=e^{\lambda t}L(p+\lambda)t^k \quad g(t)\equiv e^{\lambda t}f(t)$ шарт бажарилиши лозим. Бу шартни яна

$$L(p+\lambda)t^k g(t)=f(t) \tag{6.36}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Энди $M(p)$ да p ни $p+\lambda$ га алмаштирсак, $M(p+\lambda)$ кўпҳадга эга бўламиз. Равшанки, $M(p+\lambda)|_{p=0}=M(\lambda)\neq$ $\neq 0$. Шунинг учун $M(p+\lambda)$ ни

$$M(p+\lambda)=M(\lambda)+M^*(p)p \tag{6.37}$$

деб ёзамиз. (6.35) да p ни $p+\lambda$ га алмаштирсак,

$$L(p+\lambda)=M(p+\lambda)p^k=M(\lambda)p^kM^*(p)p^{k+1} \tag{6.38}$$

муносабатга келамиз. (6.33), (6.34), (6.38) лардан фойдаланиб, (6.36) шартни қуйидагича ёзамиз. Аввал (6.36) нинг чап томонини ўзгартирамиз:

$$\begin{gathered}L(p+\lambda)t^k \ g(t)=L(p+\lambda)t^k(b_0t^r+g^*(t))= \\ =L(p+\lambda)t^kb_0t^r+L(p+\lambda)t^kg^*(t)= \\ =b_0[M(\lambda)p^k+M^* \ (p)p^{k+1}]t^k\cdot t^r+L(p+\lambda)t^kg^*(t)= \\ =b_0M(\lambda)p^kt^{k+r}+b_0M^*(p)p^{k+1}t^{k+r}+L(p+\lambda)t^kg^*(t).\end{gathered}$$

Шундай қилиб, (6.36) шарт бундай ёзилади:

$$b_0M(\lambda)p^kt^{k+r}+b_0M^*(p)p^{k+1}t^{k+r}+L(p+\lambda)t^kg^*(t)= \\ =a_0t^r+f^*(t) \qquad (6.39)$$

Ўнг томонда t^r нинг коэффициенти a_0. Чап томонда $p^kt^{k+r}=(k+r)(k+r-1)\dots(r+1)t^r$ бўлгани учун тегишли коэффициент $b_0M(\lambda)(k+r)(k+r-1)\dots(r+1)$ бўлади. Бу коэффициентларни тенглаштириб $b_0M(\lambda)(k+r)(k+r-1)\dots(r+1)=a_0$ ни, ундан $M(\lambda)\neq 0$ бўлгани учун b_0 ни бир қийматли топамиз, яъни:

$$b_0=\frac{a_0}{(k+r)(k+r-1)\dots(r+1)M(\lambda)}. \qquad (6.40)$$

Агар b_0 шу (6.40) формула билан топилди десак, (6.39) муносабат ушбу

$$b_0M^*(p)p^{k+1}t^{k+r}+L(p+\lambda)t^kg^*(t)=f^*(t)$$

ёки

$$L(p+\lambda)g^*(t)=f^*(t)-b_0M^*(p)p^{k+1}t^{k+r} \qquad (6.41)$$

кўринишни олади. Бу тенгликнинг ўнг томонида $(r-1)$-тартибли маълум кўпҳад, чап томонида эса $(r-1)$-тартибли номаълум кўпҳад турибди. Шу (6.41) муносабатга яна аввалги (6.36) муносабат учун бажарилган амалларни қўлласак, t^{r-1} нинг олдидаги коэффициентларни тенглаб b_1 ни бир қийматли топамиз. Шунга ўхшаш, b_2, ..., b_{r-1} ларни ҳам бир қийматли топиш мумкин. Бу мулоҳазалар (6.31) тенгламанинг (6.32) кўринишда ечими борлигини исботлайди.

Мисоллар. 1. Ушбу $\ddot{z}+z=2t^2-1$ тенгламанинг хусусий ечими топилсин.

Тенгламанинг ўнг томони иккинчи тартибли кўпҳад бўлиб, у квазикўпҳаднинг хусусий кўринишидир. Бунда $f(t)=2t^2-1$, $\lambda=0$. Мос бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламаси $L(p)=p^2+1=0$. Ушбу $\lambda_{1,2}=\pm i$ илдизларга эга. 6.4-теоремага кўра $k=0$, $\lambda=0$, $r=2$ ва хусусий ечим

$$z=b_0t^2+b_1t+b_2$$

кўринишда изланиши лозим. (6.36) шарт қуйидагича ёзилади:

$$[(p+\lambda)^2+1](b_0t^2+b_1t+b_2)=2t^2-1$$

ёки

$$(p^2+1)(b_0t^2+b_1t+b_2)=2t^2-1$$

ёки

$$2b_0+b_0t^2+b_1t+b_2=2t^2-1.$$

Бундан $2b_0+b_2=-1$, $b_1=0$, $b_0=2$ келиб чиқади. Шундай қилиб, $b_0=2$, $b_1=0$, $b_2=-5$ ва хусусий ечим $z=2t^2-5$ функциядан иборат. Берилган тенгламанинг умумий ҳақиқий ечими

$$z=C_1\cos t+C_2\sin t+2t^2-5$$

кўринишда ёзилади.

2. Ушбу $\ddot{z}-z=2e^t$ тенгламанинг хусусий ечими топилсин.

Бу тенгламада $F(t)=2e^t$ бўлиб, $f(t)=2$, $\lambda=1$. Мос бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламаси $L(p)=p^2-1=0$ бўлиб, $\lambda_{1,2}=\pm 1$. 6.4-теоремага кўра $k=1$, $r=0$, $\lambda=1$. Шунинг учун хусусий ечим

$$z=b_0te^t,\ g(t)=b_0$$

кўринишда изланади. Бу ҳолда (6.36) шарт қуйидагича ёзилади:

$$[(p+1)^2-1]b_0t=2 \text{ ёки } b_0(p^2+2p)t=2 \text{ ёки } 2b_0=2.$$

Бундан $b_0=1$. Демак, $z=te^t$. Шунинг учун берилган тенгламанинг ҳақиқий умумий ечими

$$z=C_1e^{-t}+C_2e^t+te^t$$

каби ёзилади.

3. Ушбу $\ddot{z}+z=t\cos^2\frac{t}{2}$ тенгламанинг хусусий ечими топилсин.

Тенгламанинг ўнг томонини ўзгартирамиз:

$$F(t)=t\cos^2\frac{t}{2}=t\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t\cos t.$$

Аввал $L(p)z=\frac{1}{2}t$ тенгламанинг, сўнгра $L(p)z=\frac{1}{2}t\cos t$ тенгламанинг хусусий ечимларини топамиз. $F_1(t)=\frac{1}{2}t$ бўлсин. Равшанки, $L(p)=0$ тенгламанинг илдизлари $\lambda_{1,2}=\pm i$. 6.4-теоремага кўра $k=0$, $\lambda=0$, $r=1$, $f(t)=\frac{1}{2}t$. Шунинг учун хусусий ечим

$$z_1=b_0t+b_1$$

кўринишда изланади. (6.36) шарт бу ҳолда қуйидагини беради:

$$[(p+0)^2+1](b_0t+b_1)=\frac{1}{2}t.$$

Бундан $b_0t+b_1=\frac{1}{2}t$ ёки $b_0=\frac{1}{2}$, $b_1=0$. Демак, $z_1=\frac{1}{2}t$.

Энди $F_2(t)=\frac{1}{2}t\cos t$ бўлсин. Бу ҳолда функциянинг кўринишини Эйлер формуласидан фойдаланиб ўзгартирамиз. Маълумки:

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2},\ \sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}.$$

Демак, $F_2(t)=\frac{1}{4}te^{it}+\frac{1}{4}te^{-it}=F_2'(t)+F_2''(t)$. Агар $z(t)$ функция $L(p)z=F_2'(t)$, $L(p)=p^2+1$ тенгламанинг ечими бўлса, $\bar{z}(t)$ ($z(t)$ нинг қўшмаси) функция ҳам

$$L(p)z=F_2''(t)$$

тенгламанинг ечими бўлади. Бу равшан. Шунинг учун бу тенгламалардан биринчисини кўриш етарли. Шундай қилиб,

$$\ddot{z}+z=\frac{1}{4}te^{it}$$

тенгламани кўрамиз. Бу ҳолда $r=1$, $k=1$, $\lambda=i$, $f(t)=\frac{1}{4}t$. Демак, 6.4-теоремага кўра хусусий ечимни

$$z_2'=t(b_0t+b_1)e^{it}$$

кўринишда излаймиз. (6.36) шарт қуйидаги кўринишни олади:

$$[(p+i)^2+1]t(b_0t+b_1)=\frac{1}{4}t$$

ёки

$$(p^2+2pi)(b_0t^2+b_1t)=\frac{1}{4}t$$

Қавсларни очиб чиқсак:

$$2b_0+4b_0it+2b_1i=\frac{1}{4}t,$$

бундан

$$b_0=-\frac{1}{16}i,\ b_1=\frac{1}{16}.$$

Шундай қилиб, $z_2'=t\left(-\frac{1}{16}it+\frac{1}{16}\right)e^{it}$. Равшанки, $L(p)z=F_2''(t)$ тенгламанинг хусусий ечими $z_2''=\bar{z}_2=t\left(\frac{1}{16}it+\frac{1}{16}e^{-it}\right)$ бўлади. Энди $F_2=\frac{1}{2}t\cos t$ бўлган ҳолда хусусий ечимни топиш учун z_2' ва z_2'' ларни қўшиш лозим:

$$z_2'+z_2''=\frac{1}{16}(t-t^2i)e^{it}+\frac{1}{16}(t+t^2i)e^{-it}=$$

$$=\frac{1}{16}t(e^{it}+e^{-it})-\frac{1}{16}t^2i(e^{it}-e^{-it})=$$

$$=\frac{t}{8}\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}+\frac{t^2}{8}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{t}{8}\cos t+\frac{t^2}{8}\sin t.$$

Шундай қилиб:

$$z_2=\frac{t}{8}\cos t+\frac{t^2}{8}\sin t.$$

Демак, берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$z=z_1+z_2=\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}t\cos t+\frac{1}{8}t^2\sin t,$$

умумий ҳақиқий ечими эса,

$$z=C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}t\cos t+\frac{1}{8}t^2\sin t.$$

6.3-эслатма. *Агар $F(t)$ функция қуйидаги*

$$F(t)=\sin t\cdot\cos 2t\cdot e^{4t}$$

кўринишда бўлса, бу функцияни квазикўпҳаднинг умумий шаклида ёзамиз:

$$F(t)=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\cdot\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}e^{4t}=$$

$$=-\frac{1}{4}ie^{(4+3i)t}-\frac{1}{4}ie^{(4-i)t}+\frac{1}{4}ie^{(4+i)t}+\frac{1}{4}ie^{(4-3i)t}.$$

Бу мулоҳазалар $L(p)z=F(t)$ тенгламада $F(t)$ функция келтирилган ва шунга ўхшаш кўринишларда бўлганда хусусий ечимни топишга 6.4-теоремани қўллаш имконини беради.

Машқ. Ушбу дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечими топилсин:

1. $\ddot{z}+z=\cos t\cdot e^{3t}$;
2. $\ddot{z}-\dot{z}=\sin t\cdot\cos 2t$;
3. $\dddot{z}-3\ddot{z}+3\dot{z}-z=(t^2+t)\sin t\cdot e^t$:
4. $\overset{(4)}{z}-z=t\cos te^t$.

6.4- §. КОМПЛЕКС АМПЛИТУДАЛАР УСУЛИ

Биз 6.3- § да (6.28) тенгламанинг хусусий ечимини танлаш усули билан танишдик. Бунда тенгламанинг ўнг томонидаги $F(t)$ функциянинг кўриниши асосий роль ўйнайди. Агар тенгламанинг коэффициентлари ҳақиқий бўлиб, $F(t)$ функция гармоник бўлса, яъни $F(t)=r\cos(\omega t+\alpha)$ бўлса, у ҳолда

$$L(p)x=r\cos\ (\omega t+\alpha),\ r\geqslant 0 \tag{6.42}$$

тенгламанинг хусусий ечимини излаш учун *комплекс амплитудалар* усулни қўллаш мумкин.

Маълумки, ушбу

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0\ (x \text{ — ҳақиқий функция}) \tag{6.43}$$

тенглама *гармоник осциллятор тенгламаси* деб аталади ва умумий ечими гармоник функциядан иборат бўлади, яъни:

$$x=r\cos(\omega t+\alpha),\ r\geqslant 0, \tag{6.44}$$

Бунда r — тебраниш амплитудаси, α — унинг бошланғич фазаси, ω — хос тебраниш частотаси дейилади. Бир секунддаги тебранишлар сони $\nu=\frac{\omega}{2\pi}$. (6.44) функция *гармоник тебраниш* жараёнини ифодалайди. Тебраниш жараёнлари техника ва физиканинг, биология ва химиянинг ҳамда бошқа фанларнинг турли бўлимларида муҳим роль ўйнайди. Шунинг учун гармоник жараёнларни чуқурроқ ўрганиш мақсадида комплекс амплитудалар усулининг баёнига ўтамиз.

1. Ҳақиқий гармоник функция (6.44) билан бирга унга мос комплекс гармоник функцияни, яъни ушбу

$$\rho e^{i\omega t} \tag{6.45}$$

функцияни ҳам кўрамиз, унда:

$$\rho=re^{i\alpha},\ r\geqslant 0. \tag{6.46}$$

Равшанки, $r=|\rho|$, $\rho e^{i\omega t}=re^{i(\omega t+\alpha)}=r\cos(\omega t+\alpha)+ir\sin(\omega t+\alpha)$, яъни (6.45) нинг ҳақиқий қисми (6.44) функция билан устма-уст тушади. (6.46) комплекс сон *комплекс амплитуда* дейилади.

Энди $L(p)$ кўпҳаднинг коэффициентлари ҳақиқий бўлсин. (6.42) тенгламани ечиш учун аввал

$$L(p)z=\rho e^{i\omega t} \tag{6.47}$$

тенгламани ечиш тавсия этилади. Агар $z=x+iy$ шу (6.47) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда x ҳам (6.42) тенгламанинг ечими бўлади. $L(i\omega)\neq 0$ деб фараз этиб, (6.47) тенгламанинг хусусий ечимини комплекс гармоник функция, яъни

$$z=\sigma e^{i\omega t},\ \sigma=se^{i\beta} \tag{6.48}$$

кўринишда излаймиз. Бу функцияни (6.47) тенгламага қўямиз. (6.6) формулага кўра:

$$\sigma L(i\omega)e^{i\omega t}=\rho e^{i\omega t},$$

бундан

$$\sigma=\frac{\rho}{L(i\omega)}. \tag{6.49}$$

Равшанки

$$s=|\sigma|=\frac{|\rho|}{|L(i\omega)|}=\frac{r}{|L(i\omega)|}.$$

Энди (6.49) га σ ва ρ нинг ифодаларини қўйсак,

$$se^{i\beta}=\frac{re^{i\alpha}}{L(i\omega)}$$

формулага келамиз. Ундан s ўрнига қийматини қўйиб, сўнгра β ни топиш мумкин. Демак, (6.48) функция тўла аниқланди. Комплекс амплитудалар усули ана шундан иборат. Энди ҳақиқий ечимни, яъни (6.42) тенгламанинг ҳақиқий хусусий ечимини ажратиб олиш учун (6.48) функцияни бундай ёзамиз:

$$z=\sigma e^{i\omega t}=se^{i\beta}e^{i\omega t}=se^{i(\omega t+\beta)}=s\cos(\omega t+\beta)+is\sin(\omega t+\beta).$$

Бундан кўринадики, (6.42) тенгламанинг хусусий ечими

$$x=\frac{r}{|L(i\omega)|}\cos(\omega t+\beta)$$

кўринишда изланиши лозим экан.

2. Баён этилган усулни ташқи гармоник куч таъсиридаги гармоник осцилляторнинг тенгламасига татбиқ этамиз. Айтилган осциллятор тенгламаси ушбу

$$\ddot{x}+\omega_1^2x=r\cos(\omega t+\alpha) \tag{6.50}$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгламанинг ўрнига тегишли комплекс тенгламани кўрамиз:

$$\ddot{z}+\omega_1^2z=re^{i(\omega t+\alpha)}. \tag{6.51}$$

а) $\omega\neq\omega_1$. У ҳолда (6.51) тенглама $z=\sigma e^{i\omega t}$ кўринишда хусусий ечимга эга. (6.49) формулага кўра $\sigma=\frac{\rho}{L(i\omega)}=\frac{re^{i\alpha}}{\omega_1^2-\omega^2}$, $s=\frac{r}{|\omega_1^2-\omega^2|}$.

Шунинг учун (6.50) тенгламанинг хусусий ечими

$$x=\frac{r}{|\omega_1^2-\omega^2|}\cos(\omega t+\beta) \tag{6.52}$$

кўринишда ёзилади. Бунда β сон қуйидагича аниқланади. Ушбу

$$\frac{r}{|\omega_1^2-\omega^2|}e^{i\beta}=\frac{r}{\omega_1^2-\omega^2}e^{i\alpha}$$

тенгликдан 1) $\omega_1>\omega$ бўлса, $\alpha=\beta$ бўлади; 2) $\omega_1<\omega$ бўлса, $\frac{r}{\omega^2-\omega_1^2}e^{i\beta}=\frac{r}{\omega^2-\omega_1^2}e^{i(\alpha+\pi)}$ дан $\beta=\alpha+\pi$ келиб чиқади.

Бу ҳолда (6.50) тенгламанинг умумий ечими

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|} \cos(\omega t + \beta)$$

каби ёзилади, унда $r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$ — мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими.

б) $\omega = \omega_1$. Бу ҳолда 6.4-теоремага кўра хусусий ечимни $z = \sigma_1 t e^{i\omega t}$ (σ_1 — комплекс сон) кўринишда излаш лозим. (6.36) шарт $f(t) = re^{i\alpha}$, $k = 1$, $\lambda = i\omega$, $g(t) = \sigma_1$ бўлгани учун қуйидагича ёзилади:

$$[(p + i\omega)^2 + \omega^2]\sigma_1 t = re^{i\alpha},$$

бундан:

$$\sigma_1 = \frac{re^{i\alpha}}{2i\omega}.$$

Демак, тегишли хусусий ечим бундай ёзилади:

$$z = \frac{rte^{i(\omega t + \alpha)}}{2i\omega} = -\frac{rtie^{i(\omega t + \alpha)}}{2\omega} = \frac{rt}{2\omega}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \times$$

$$\times e^{i(\omega t + \alpha)} = \frac{rt}{2\omega} e^{-\frac{\pi}{2}i} \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} = \frac{rt}{2\omega} e^{i\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Бундан (6.50) тенгламанинг $\omega = \omega_1$ бўлганда хусусий ечими келиб чиқади, яъни

$$x = \frac{rt}{2\omega} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{rt}{2\omega} \sin(\omega t + \alpha).$$

Бу формуладан кўринадики, t вақт ортган сари $\frac{rt}{2\omega}$ амплитуда чексиз ортиб боради. Аммо реал ҳолатларда амплитуда чексиз ортиб бора олмаса-да, асбобнинг ёки бошқа бир қурилманинг конструкциясига қараб кўнгилсиз ҳодисалар ҳам бўлиши мумкин. Бу ҳодиса *резонанс ҳодисаси* дейилади.

6.5- §. ТЕБРАНМА ЭЛЕКТР ЗАНЖИРИ

1.2- § да кўрилган 3-масала электр занжирига тегишли эди. Унда тўртта икки қутбликлардан ташкил топган ёпиқ электр занжири кўрилиб, занжирда электр токи $I(t)$ нинг ўзгариш қонунини топиш масаласи қўйилган эди. $I(t)$ функция учун ушбу

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dU(t)}{dt} \tag{6.53}$$

иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламага эгамиз. Бу тенгламада L, R, C лар мусбат ўзгармаслар бўлиб, мос равишда индуктивлик, қаршилик ва сиғимни билдиради. $U(t)$ функция эса кучланиш манбаидир.

Дифференциаллаш оператори ёрдамида (6.53) тенгламани ёзамиз:

$$\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)I(t) = pU(t)^{*)}. \tag{6.53'}$$

---

*) (6.53′) тенгламада индуктивлик L билан оператор $L(p)$ ни фарқ қилиш керак.

Бунда $L(p)=Lp^2+Rp+\frac{1}{C}$. Ушбу $z(p)=\frac{L(p)}{p}=Lp+R+\frac{1}{C_p}$ функция *операцион қаршилик,* унга тескари функция, яъни $C(p)=\frac{1}{z(p)}=\frac{Cp}{LCp^2+RCp+1}$ функция эса *операцион ўтказувчанлик* дейилади.

Агар электр занжирида актив элемент, яъни кучланиш манбаи олиб ташланса, пассив электр занжири ҳосил бўлади ва ток кучининг ўзгаришини текшириш учун ушбу

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)I(t)=0 \tag{6.54}$$

тенгламага эга бўламиз. Албатта, аввал электр занжирида ток кучи бўлмаган бўлса, бу тенглама учун ечим тривиал, яъни $I(t)\equiv 0$ бўлади. Агар мазкур электр занжирида ток бор деб фараз этилса, у ҳолда вақт ўтиши билан бу токнинг ўзгаришини ўрганишимиз мумкин. Ҳақиқатан, (6.54) тенгламага мос

$$Lp^2+Rp+\frac{1}{C}=0 \tag{6.55}$$

характеристик тенглама илдизларини λ_1, λ_2 дейлик. У ҳолда:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}.$$

Дискриминантни Δ деб белгилаймиз. Уни $\Delta=\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}$ деб ёзса бўлади. Агар $\Delta<0$ бўлса, (6.54) тенгламанинг ечимлари *тебранма* характерга эга бўлади, $\Delta>0$ бўлганда эса *апериодик* бўлади.

$\Delta<0$ бўлган ҳолга мос келган электр занжири *тебранма электр занжири* деб юритилади. Бундай электр занжирида қаршилик бўлмаган ҳол (фақат назарий) айниқса қизиқдир. Агар шундай фараз этсак, электр занжири тенгламаси

$$\left(p^2+\frac{1}{LC}\right)I(t)=0 \tag{6.56}$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$I(t)=r_1\cos(\omega_1 t+\beta),\ \omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

каби ёзилади. Бундан кўринадики, пассив электр занжирида қаршилик бўлмаса, *сўнмас тебранишлар* юз беради. Сўнмас тебранишлар частотаси, яъни 2π секунддаги тебранишлар сони $\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ бўлади. Шунинг учун ω_1 миқдор пассив электр занжирининг *хос частотаси* дейилади.

Энди электр занжирида актив элемент бор бўлсин. Тебранма электр занжирида кучланиш манбаи $U(t)$ функция гармоник функция бўлган ҳолни кўрамиз, яъни $U(t)=r\cos\omega t$, $r>0$ (бунда r — ҳақиқий амплитуда). Комплекс амплитудалар усулини қўллаш учун $U(t)=re^{i\omega t}$ деймиз. У ҳолда (6.53′) тенгламанинг ўнг томони $pU(t)=p(re^{i\omega t})=ir\omega e^{i\omega t}$, яъни комплекс амплитудали гармоник функция бўлади. Хусусий ечимни $I(t)=\sigma e^{i\omega t}$ кўринишда излаймиз. Бунда комплекс амплитуда σ қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\sigma=\frac{\rho}{L(i\omega)}=\frac{ir\omega}{iR\omega+\left(-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)}=\frac{r}{R+i\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}.$$

Бундан ҳақиқий амплитуда S учун ушбу

$$S=|\sigma|=\frac{r}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

ифода келиб чиқади. Агар $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ бўлса, S амплитуда ўзининг максимумига эришади. Бу ҳолда S ва r орасида ушбу $S=\frac{r}{R}$ муносабат бўлади. Бошқа ҳолларда $S<\frac{r}{R}$ бўлади. Бу ҳодиса ҳам *резонанс* деб аталиб, у билан дастлаб аввалги параграфда танишган эдик.

6.6- §. ЎЗГАРМАС ҚОЭФФИЦИЕНТЛИГА КЕЛТИРИЛАДИГАН ТЕНГЛАМАЛАР

1. Ўзгармас коэффициентлига келтириладиган чизиқли дифференциал тенгламаларнинг барча синфлари маълум эмас. Албатта, тенгламани ўзгармас коэффициентлига келтириш учун шундай алмаштириш бажариш керакки, натижада чизиқлилик бузилмай қолсин. Бундай алмаштиришлар, биламизки, ё номаълум функцияни $y=u(x)z$ деб ёки эркли ўзгарувчини $x=\chi(t)$ $(\tau=\psi(x))$ деб алмаштиришдан иборат бўлиши мумкин. Биз қуйида тенглама ўзгармас коэффициентлига келиши учун зарурий шарт билан танишамиз. Бу шартни чиқариш учун $\tau=\psi(x)$ алмаштириш бажарамиз. Содда ҳисоблашлар қуйидагича бўлишини кўрсатади:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\tau}\psi'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{d\tau^2}(\psi'(x))^2+\frac{dy}{d\tau}\psi''(x),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^ny}{d\tau^n}(\psi'(x))^n+\ldots+\frac{dy}{d\tau}\psi^{(n)}(x).$$

Топилган ифодаларни ушбу

$L(p)y=g(x)$, $L(p)y=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y$ тенгламага қўйсак, $\psi'(x)\neq 0$, $x=\psi^{-1}(\tau)$ бўлганда

$$\frac{d^ny}{d\tau^n}+Q_1(x)\frac{d^{n-1}y}{d\tau^{n-1}}+\dots+Q_{n-1}(x)\frac{dy}{d\tau}+\frac{a_n(x)}{(\psi'(x))^n}y=g(x)$$

тенгламага эга бўламиз. Унда $Q_1(x)$, ... , $Q_{n-1}(x)$, $a_n(x)$, $g(x)$ функцияларнинг аргументи x ўрнига $x=\psi^{-1}(\tau)$ ифода қўйилиши керак. Агар берилган $L(p)y=g(x)$ тенглама $\tau=\psi(x)$ алмаштириш билан ўзгармас коэффициентлига келиши мумкин бўлса, у ҳолда қуйидаги

$$Q_1(x)=\text{const},\ Q_2(x)=\text{const},\ \dots,\ Q_{n-1}(x)=\text{const},$$

$$Q_n(x)=\frac{a_n(x)}{(\Psi'(x))^n}=A^{-n}=\text{const}$$

муносабатлар ўринли бўлади. Охирги муносабатдан

$$\tau=\psi(x)=A\int\sqrt[n]{a_n(x)}\,dx \tag{6.57}$$

формула келиб чиқади.

6.5-теорема. *Эркли ўзгарувчи x ни $\tau=\psi(x)$, $\psi'(x)\neq 0$ алмаштириш натижасида $L(p)y=g(x)$ тенглама ўзгармас коэффициентлига келиши учун* (6.57) *формуланинг ўринли бўлиши зарур.*

Ҳақиқатан, (6.57) формула ўринли бўлганда $Q_n(x)=A^{-n}=\text{const}$ бўлади. Аммо $Q_1(x)$, ... , $Q_{n-1}(x)$ функциялар ўзгармас бўлиши шарт эмас. Баъзи чизиқли ўзгарувчи коэффициентли тенгламалар учун бу (6.57) формула билан алмаштириш барча $Q_1(x)$, ... , $Q_{n-1}(x)$, $Q_n(x)$ коэффициентларнинг ўзгармас бўлишининг ҳам зарурий, ҳам етарли шарти бўлади. Бундай тенгламаларга Эйлернинг бир жинсли ҳамда бир жинсли бўлмаган тенгламалари, Чебишев тенгламаси ва бошқалар мисол бўла олади.

Аввал қуйидаги

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0$$

Чебишев тенгламасини кўрайлик. Агар $x\neq\pm 1$ бўлса, уни яна бундай

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{1-x^2}\,\frac{dy}{dx}+\frac{n^2}{1-x^2}\,y=0$$

ёзиш мумкин. Бунда $a_1(x)=-\frac{x}{1-x^2}$, $a_2(x)=\frac{n^2}{1-x^2}$. Энди (6.57) формулага кўра

$$\tau=\psi(x)=A\int\sqrt{\frac{n^2}{1-x^2}}\,dx=An\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=An\arcsin x+C.$$

Соддалик учун $A=1$, $C=0$ дейлик. Бу ҳолда $\tau=\psi(x)=$ $=n\arcsin x$. Иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенглама

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0$$

учун $\tau=\psi(x)$ алмаштириш натижасида ҳосил бўладиган

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+Q_1(x)\frac{dy}{d\tau}+Q_2(x)y=0$$

тенглама коэффициентлари қуйидаги

$$Q_1(x)=\frac{\psi''(x)+a_1(x)\psi'(x)}{(\psi'(x))^2},\quad Q_2(x)=\frac{a_2(x)}{(\psi'(x))^2} \qquad (6.58$$

формула билан ёзилади. Буни бевосига ҳисоблаб чиқиш мумки Кўрилаётган ҳолда:

$$\psi'(x)=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \psi''(x)=\frac{nx}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Шунинг учун:

$$Q_1(x)=\frac{\frac{nx}{(1-x^2)^{3/2}}+\left(-\frac{x}{1-x^2}\right)\cdot\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{n^2}{1-x^2}}=0,$$

$$Q_2(x)=\frac{n^2}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^2}{n^2}=1$$

Демак, $\tau=n\arcsin x$ алмаштириш натижасида Чебишев тенгламаси

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+y=0$$

кўринишга келади. Бу тенгламанинг фундаментал системас $y_1(\tau)=\cos\tau$, $y_2(\tau)=\sin\tau$ бўлиб, $\tau=n\arcsin x$ бўйича эски эркл ўзгарувчига қайтсак, $y_1(x)=\cos n\arcsin x$, $y_2(x)=\sin n\arcsin x$ бўлади. Амалда кўпроқ $A=-1$, $C=0$ деб олинади. Бунд $\psi(x)=n\arccos x$ келиб чиқади. Шунинг учун фундаментал системани

$$y_1(x)=\cos n\arccos x,\quad y_2(x)=\sin n\arccos x$$

деб ёзиш мумкин. Чебишев тенгламасининг умумий ечими

$$y(x)=C_1\cos n\arccos x+C_2\sin n\arccos x$$

каби ёзилади.

Маълумки, $\cos\arccos x=x$ ва $\cos n\varphi$ функция n бутун бўлганд $\cos\varphi$ нинг n-тартибли кўпҳади кўринишида ёзилади. Шунинг учу $\cos n\arccos x$ функция n бутун бўлса, x га нисбатан n-тартибл кўпҳад бўлади. Бу кўпҳад *Чебишев кўпҳади* дейилади ва

$$T_n(x) = \cos n \arccos x$$

тарзда белгиланади.

Эйлер тенгламаларига ўтишдан аввал таъкидлаб ўтамизки, номаълум функцияни $y = u(x)z$ алмаштириш натижасида ўзгармас коэффициентлига келадиган тенгламалар учун (6.57) турдаги зарурий шарт мавжуд эмас. Шунинг учун 6.5-теорема натижа бермаганда фақат танлаш йўли билан турли алмаштиришлар бажариб, берилган тенгламани текшириб кўрилади.

Қуйидаги

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0, \ x > 0$$

тенглама *Бессель тенгламаси* деб юритилади. Агар $n = \frac{1}{2}$ бўлса, $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ алмаштириш бу тенгламани

$$z'' + z = 0$$

кўринишга олиб келади. Унинг фундаментал системаси $z_1 = \cos x$, $z_2 = \sin x$ бўлиб, эски номаълум функцияга қайтганда $y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $y_2 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ бўлади. Демак, $n = \frac{1}{2}$ бўлганда Бессель тенгламаси ўзгармас коэффициентлига келади ва умумий ечими

$$y = C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

кўринишда ёзилади.

2. Бу бўлимда ўзгармас коэффициентлига келадиган тенгламаларнинг *Эйлер тенгламаси* деб аталувчи *синфини* кўрамиз.

Ушбу

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} + a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}x\frac{dy}{dx} + a_ny = 0, \ x > 0 \qquad (6.59)$$

(бунда $a_i = \text{const}$, $i = 1, 2 \ldots , n$) n-тартибли чизиқли ўзгарувчи коэффициентли махсус тенглама *Эйлернинг бир жинсли тенгламаси* дейилади.

(6.57) формула бўйича (6.59) тенгламани x^n га бўлиб юбориб,

$$\tau = \psi(x) = A\int\frac{\sqrt[n]{a_n}}{x}dx = A\sqrt[n]{a_n}\ln x + C$$

ни ҳосил қиламиз. Агар $C = 0$, $A = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ бўлса, энг содда

$$\tau = ln\, x \qquad (6.60)$$

алмаштиришга эга бўламиз. (6.60) дан $x = e^{\tau}$. Агар $x < 0$ бўлса $\tau = \ln|x|$ ва $x = -e^{\tau}$ деб ёзамиз. Биз $x > 0$ ҳолни кўрамиз.

Эйлернинг бир жинсли тенгламаси $x=e^{\tau}$ алмаштириш натижасида ўзгармас коэффициентли тенгламага келади. Ҳақиқатан, аввал $\frac{d^my}{dx^m}$, $m=1,2, \ldots , n$ ҳосилаларни τ бўйича олинган ҳосилалар билан ифодалаймиз:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\tau}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{d\tau}}=e^{-\tau}\frac{dy}{d\tau},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\tau}\frac{dy}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dx}=e^{-2\tau}\left(\frac{d^2y}{d\tau^2}-\frac{dy}{d\tau}\right).$$

m-тартибли ҳосила учун ушбу

$$\frac{d^my}{dx^m}=e^{-m\tau}\left(\frac{d^my}{d\tau^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{d\tau^{m-1}}+\ldots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{d\tau}\right)$$

формула ўринли бўлишини кўрсатиш қийинмас, унда $\alpha_1\ldots , \alpha_{m-1}$ лар ўзгармас. Уни индукция йўли билан исботлайлик. $m=s$ учун ўша формула ўринли бўлса, $m=s+1$ учун ҳам ўринли эканини кўрсатамиз. Равшанки,

$$\frac{d^{s+1}y}{dx^{s+1}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^sy}{dx^s}\right)=\frac{d}{d\tau}\left[e^{-st}\left(\frac{d^sy}{d\tau^s}+\alpha_1\frac{d^{s-1}y}{d\tau^{s-1}}+\ldots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha_{s-1}\frac{dy}{d\tau}\right)\right]\frac{d\tau}{dx}=e^{-(s+1)\tau}\left[\frac{d^{s+1}y}{d\tau^{s+1}}+(\alpha_1-s)\frac{d^sy}{d\tau^s}+\ldots+(-1)s\alpha_{(s-1}\frac{dy}{d\tau}\right]$$

Ҳосил бўлган ифода юқоридаги фикрни исботлайди.

Энди ҳар бир $\frac{d^my}{dx^m}$ $(m=1,2, \ldots , n)$ ҳосила учун топилган ифодани (6.59) тенгламага қўйсак, тегишли ҳад

$$a_{n-m}x^m\frac{d^my}{dx^m}=a_{n-m}e^{m\tau}e^{-m\tau}\left(\frac{d^my}{d\tau^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{d\tau^{m-1}}+\ldots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{d\tau}\right)=$$

$$=a_{n-m}\left(\frac{d^my}{d\tau^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{d\tau^{sm1}}+\ldots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{d\tau}\right)$$

кўринишда ёзилади. Бундан кўринадики, натижада биз ўзгармас коэффициентли тенгламага келамиз.

Шундай қилиб, Эйлернинг бир жинсли тенгламаси ўзгармас коэффициентлига келиши учун эркли ўзгарувчини (6.57) формула ёрдамида алмаштириш зарур ва етарли. Ҳосил бўладиган тенгламани

$$\frac{d^ny}{d\tau^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{d\tau^{n-1}}+\ldots+b_{n-1}\frac{dy}{d\tau}+b_ny=0 \qquad (6.61)$$

($b_1, \ldots , b_n$ лар ўзгармас) кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламанинг хусусий ечимлари характеристик тенгламанинг каррали илдизлари бўлмаса, $e^{m\tau}=(e^{\tau})^m=x^m$ кўринишда бўлади. m ни топиш учун

$$m^n+b_1m^{n-1}+\ldots+b_{n-1}m+b_n=0$$

тенгламани ечиш керак. Аммо $b_1, b_2, \dots, b_n$ коэффициентларни топиш анча ҳисоблашни талаб қилади. Бу амалда қулай эмас. Қулай усулни кўрсатайлик.

(6.59) тенгламанинг хусусий ечимини $y=x^k$ кўринишда излаймиз. Ундан ҳосилалар олиб, яъни

$$x^m\frac{d^m(x^k)}{dx^m}=k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)x^k,\quad m\leqslant k,$$

сўнгра (6.59) га қўйсак, қуйидаги алгебраик тенглама ҳосил бўлади:

$$k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)+\quad a_1k(k-1)\dots(k-n+2)+\dots+ \\ +a_{n-2}k(k-1)+a_{n-1}k+a_n=0. \tag{6.62}$$

Бу k га нисбатан n-тартибли бўлиб, уни *Эйлер тенгламасининг характеристик тенгламаси* дейилади. Агар $x^k=e^{k\ln x}$ эканини ҳисобга олсак, характеристик тенгламанинг илдизларига қараб аввал Эйлер тенгламасининг комплекс ечимини, сўнгра ҳақиқий ечимини ёзишимиз мумкин. Агар фақат умумий ҳақиқий ечим сўралган бўлса, умумий комплекс ечимни ёзиб ўтирмасдан бирданига умумий ҳақиқий ечимни ҳам ёзиш мумкин. Буни 6.5- § дан биламиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0$$

Эйлер тенгламасининг умумий ҳақиқий ечими топилсин.

Характеристик тенгламани ёзамиз:

$$k(k-1)(k-2)+3k(k-1)-2k+3=0$$

ёки

$$(k+2)(k-1)^2=0.$$

Бундан $k_1=-2$, $k_{2,3}=1$. Демак, $k=1$ — икки каррали илдиз. Берилган дифференциал тенгламанинг фундаментал системаси:

$$x^{-2},\ x,\ x\ln x\,(e^{-2\tau},\ e^{\tau},\ \tau e^{\tau}).$$

Шунинг учун умумий ҳақиқий ечим

$$y=C_1\cdot\frac{1}{x^2}+C_2x+C_3x\ln x$$

каби ёзилади.

6.4-эслатма. *Қуйидаги*

$$(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

кўринишдаги тенглама ҳам $ax+b=e^{\tau}$, $\tau=\ln(ax+b)$, $ax+b>0$ *алмаштириш ёрдамида коэффициентлари ўзгармас тенгламага келтирилади.*

6.5-эслатма. Ушбу

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=F(x),\ x>0 \tag{6.63}$$

тенглама Эйлернинг бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаси дейилади. Юқорида баён этилган усул билан, яъни эркли ўзгарувчини $\tau=\ln x$, $x=e^{\tau}$ алмаштириш ёрдамида бу бир жинсли бўлмаган тенглама ҳам коэффициентлари ўзгармас бир жинсли бўлмаган тенгламага келтирилади. Фарқи шундаки, ўнг томондаги $F(x)$ функция аргументида x ўрнига e^{τ} қўйилади.

2. Ушбу

$$x^2y''-xy'+2y=x\ln x,\ x>0$$

тенгламанинг умумий ҳақиқий ечими топилсин.

Мос бир жинсли тенглама

$$x^2y''-xy'+2y=0$$

каби, характеристик тенглама эса

$$k(k-1)-k+2=0$$

каби ёзилади. Бундан $k^2-2k+2=0$ келиб чиқади. Унинг илдизлари $k_{1,2}=1\pm i$. Бир жинсли тенгламанинг умумий ҳақиқий ечими:

$$y=e^{\tau}(C_1\cos\tau+C_2\sin\tau)=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x).$$

Энди бир жинсли бўлмаган тенгламани кўрайлик. Унда $F(x)=x\ln x$ бўлиб, $F(e^{\tau})=\tau e^{\tau}$ бўлади. Равшанки, хусусий ечимни $y=(a\tau+b)e^{\tau}=x(a\ln x+b)$ кўринишда излаш лозим. Тегишли ҳосилаларни ҳисоблаб, берилган тенгламага қўямиз:

$$y'=a\ln x+b+x\cdot\frac{a}{x}=a\ln x+b+a,\ y''=\frac{a}{x},$$

$$x^2\left(\frac{a}{x}\right)-x(a\ln x+b+a)+2x(a\ln x+b)=x\ln x$$

ёки

$$ax-ax\ln x-(a+b)x+2ax\ln x+2bx=x\ln x$$

ёки

$$ax\ln x+bx=x\ln x.$$

Бундан $a=1$, $b=0$ келиб чиқади. Шундай қилиб хусусий ечим $y=x\ln x$ функциядан иборат. Демак, берилган бир жинсли бўлмаган Эйлер тенгламасининг умумий ҳақиқий ечими

$$y=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x)+x\ln x$$

каби ёзилади.

6.6-эслатма. *Юқоридаги 2-мисолда бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини ўнг томонга қараб изладик ва топдик.*

Қайд қиламизки, агар (6.63) тенгламанинг ўнг томонидаги $F(x)$ функция (6.29) *функция каби қуйидаги*

$$F(x)=\sum_{i=1}^{m}f_j(\ln x)x^{\lambda j}$$

кўринишда ёзилган квазикўпҳаддан иборат бўлса, у ҳолда 6.4-теоремадан фойдаланиб хусусий ечимни излаш мумкин.

7-боб

ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА ЕЧИМЛАРИНИНГ НОЛЛАРИ ҲАҚИДА. ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

7.1-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ КЎРИНИШИНИ СОДДАЛАШТИРИШ

Иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламаларни

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{7.1}$$

ёки

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{7.1'}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $P(x)$, $Q(x)$, $a_0(x)\neq 0$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ функциялар бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз. Маълумки, бу тенгламалар $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0, x_0\in I$ шартни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга. Шу ечимнинг хоссаларини чуқурроқ ўрганиш учун кўпинча тенгламани «соддалаштириш», аниқроғи, бошқача кўринишда ёзиш қулай бўлади.

Ушбу

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx})+q(x)y=0, \tag{7.2}$$

$p(x)\in C^1(I)$, $q(x)\in C(I)$ тенглама *иккинчи тартибли ўзига қўшма дифференциал тенглама* дейилади.

7.1-лемма. *Ҳар қандай иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани x нинг бирор $\mu(x)$, $x\in I$ функциясига кўпайтириш йўли билан ўзига қўшма кўринишга келтириш мумкин.*

Исбот. (7.2) тенгламада ҳосилани очиб ёзсак:

$$p(x)y''+p'(x)y'+q(x)y=0$$

тенглама ҳосил бўлади. Унда y' олдидаги коэффициент y'' олдидаги коэффициентнинг ҳосиласидан иборат. Бу ўзига қўшма тенгламаларнинг ўзига хос хоссасидир. Биз шундан фойдаланамиз.

(7.1′) тенгламанинг чап ва ўнг томонини мос равишда I интервалда узлуксиз дифференциалланувчи бирор $\mu(x)$ функцияга кўпайтирамиз:

$$\mu(x)a_0(x)y''+\mu(x)a_1(x)y'+\mu(x)a_2(x)y=0.$$

Ҳосил бўлган тенглама ўзига қўшма бўлиши учун

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)a_0(x))=\mu(x)a_1(x),\ x\in I$$

айният ўринли бўлиши зарур ва етарли. Бу равшан. Топилган айният $\mu(x)$ функцияга нисбатан биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламадан иборат. Уни интеграллаймиз. Унинг учун тенгламани

$$a_0(x)\frac{d\mu}{dx}+a_0'(x)\mu=\mu a_1(x)$$

ёки

$$a_0(x)\frac{d\mu}{dx}=(a_1(x)-a_0'(x))\mu$$

каби ёзамиз ($a_0(x)\neq 0,\ x\in I$). У ҳолда биз ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага эга бўламиз. Интеграллаш натижасида

$$\mu(x)=\frac{1}{a_0(x)}e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} \qquad (7.3$$

функцияни топамиз. Буни тегишли тенгламага қўйсак,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{a_2(x)}{a_0(x)}e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}y=0$$

муносабат ҳосил бўлади. (7.2) тенглама таққослаш қуйидагич бўлишини кўрсатади:

$$p(x)=e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}>0,\ q(x)=\frac{a_2(x)}{a_0(x)}e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Лемма исбот бўлди.

7.2-лемма. *Эркли ўзгарувчини алмаштириш усули била ихтиёрий иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламани ушбу*

$$y''+Q(x)y=0 \qquad (7.$$

кўринишга келтириш мумкин, бунда $Q(x)\in C(I)$.

Исбот. 7.1-леммага кўра ихтиёрий иккинчи тартибли чизиқл бир жинсли тенглама (7.2) кўринишга келтирилган деб қарашими мумкин. Энди (7.2) да $p(x)>0,\ x\in I$ бўлгани учун

$$d\xi=\frac{dx}{p(x)}\ \text{ёки}\ \xi=\int\frac{dx}{p(x)}$$

алмаштиришни бажарамиз. Бу алмаштириш формуласида $\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{p(x)}>0$ бўлгани учун ξ ўзгарувчи x нинг монотон ўсувч функциясидир. Бундан чиқадики, x ҳам ξ нинг узлуксиз в дифференциалланувчи функцияси сифатида I интервалга мос келга I_ξ интервалда аниқланади. Уни $x=\chi(\xi)$ десак, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{p(x)}\frac{d}{d}$ бўлади. Равшанки:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\xi}\left(p(x)\frac{dy}{d\xi}\cdot\frac{1}{p(x)}\right)\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{p(x)}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dy}{d\xi}\right).$$

Шунинг учун (7.2) тенгламани

$$\frac{1}{p(x)}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)+q(x)y=0\ \text{ёки}\ \frac{d^2y}{d\xi^2}+Q(\xi)y=0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $Q(\xi)=p(\chi(\xi))q(\chi(\xi))$. Аввалги (7.1′) тенглама коэффициентлари орқали қуйидагини ёзамиз:

$$d\xi=e^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx,\ Q(\xi)=\frac{a_2(x)}{a_0(x)}e^{2\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx\,\Big|_{x=\chi(\xi)}.$$

Лемма исбот бўлди.

7.3-лемма. *Номаълум функцияни чизиқли алмаштириш усули билан ихтиёрий иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани (7.4) кўринишга келтириш мумкин.*

Исбот. (7.1) тенгламада

$$y=u(x)z \tag{7.5}$$

алмаштиришни бажарамиз. Бу функциянинг ҳосилаларини ҳисоблайлик:

$$y'=u(x)z'+u'(x)z,\qquad y''=u(x)z''+2u'(x)z'+u''(x)z.$$

Топилган ифодаларни (7.1) тенгламага қўямиз:

$$u(x)z''+(2u'(x)+P(x)u(x))z'+$$
$$+(u''(x)P(x)u'(x)+Q(x)u(x))z=0.$$

Энди z' олдидаги коэффициентни нолга тенглаштириб, ушбу

$$2u'+P(x)u=0$$

бирнчи тартибли дифференциал тенгламага келамиз. Уни интеграллаб, ушбу

$$u(x)=e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}$$

функцияни топамиз. Содда ҳисоблашлар

$$u'(x)=\frac{-1}{2}P(x)e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx},$$

$$u''(x)=\Big(\frac{1}{4}P^2(x)-\frac{1}{2}P'(x)\Big)e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}$$

бўлишини кўрсатади. Энди бу ифодаларни z га нисбатан тенгламага қўйиб, соддалаштирсак

$$z''+\Big(-\frac{1}{4}P^2(x)-\frac{1}{2}P'(x)+Q(x)\Big)z=0 \tag{7.6}$$

тенгламага эга бўламиз. Бу (7.4) кўринишдаги тенгламадир. (7.6) тенгламада $I(x)=-\frac{1}{4}P^2(x)-\frac{1}{2}P'(x)+Q(x)$ функция (7.1) тенгламанинг *инварианти* дейилади. Лемма исбот бўлди.

7.1-эслатма. (7.5) *алмаштириш ёрдамида n — тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламаларни янги номаълум функцияга нисбатан ($n-1$) — тартибли ҳосила қатнашмайдиган n — тартибли чизиқли бир жинсли тенгламага келтириш мумкин.*

Мисол. Ушбу

$$xy''+\frac{1}{2}y'-y=0$$

тенгламани ўзига қўшма тенгламага келтирилсин.

Бу ҳолда $a_0(x)=x,\ a_1(x)=\frac{1}{2},\ a_2(x)=-1,\ -\infty<x<\infty.$

Биз тенгламанинг коэффициентларини x нинг $x>0$ қийматларида кўрамиз (7.3) формулага кўра $x>0$ бўлганда

$\mu(x)=\frac{1}{x}e^{\int\frac{1}{2x}dx}=\frac{1}{x}e^{\ln\sqrt{x}+\ln C}=\frac{C\sqrt{x}}{x}=\frac{C}{\sqrt{x}}.$ Бунда соддалик учун $C=1$ десак

$\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ бўлади. Берилган тенгламанинг чап ва ўнг томонларини шу

$\mu(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ функцияга кўпайтирсак,

$$\sqrt{x}\,y''+\frac{1}{2\sqrt{x}}y'-\frac{1}{\sqrt{x}}y=0 \text{ ёки } (\sqrt{x}\,y')'-\frac{1}{\sqrt{x}}y=0$$

тенгламага келамиз. Энди тенгламани (7.4) кўринишга келтирайлик. Унинг учун $p(x)=\sqrt{x}$, $q(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}$ бўлганидан $d\xi=\frac{dx}{\sqrt{x}}$ ёки $\xi=2\sqrt{x}$ алмаштиришни бажарамиз. Равшанки:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}=\frac{dy}{d\xi}\cdot\frac{2}{\xi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{2}{\xi}\frac{d^2y}{d\xi^2}-\frac{2}{\xi^2}\frac{dy}{d\xi}\right)\frac{2}{\xi}.$$

Бу ифодаларни тенгламага қўйсак, $\frac{d^2y}{d\xi^2}-y=0$ тенгламага келамиз. Унинг умумий ҳақиқий ечими $y=C_1e^{\xi}+C_2e^{-\xi}$ ёки аввалги эркли ўзгарувчига қайтсак $y=C_1e^{2\sqrt{x}}+C_2e^{-2\sqrt{x}}$, $x>0$ кўринишда ёзилади.

Кўрилган мисолда тенгламани икки марта ўзгартириш уни квадратураларда интегралланувчи тенгламага олиб келди. Аммо буни аввалдан билиш қийин.

7.2-§. ТЕБРАНУВЧИ ВА ТЕБРАНМАС ЕЧИМЛАР

7.1-таъриф. *Агар оддий дифференциал тенгламанинг I интервалда аниқланган тривиалмас ечими шу интервалда биттадан ортик нолга эга бўлмаса, у ҳолда бу ечим I интервалда тебранмас ечим дейилади, акс ҳолда тегишли ечим тебранувчи ечим дейилади.*

Мисол сифатида аввал гармоник осциллятор тенгламаси $y''+\omega^2y=0$ ни кўрайлик ((6.43) га қаранг). Бу тенгламанинг ихтиёрий ечими $y=r\cos(\omega x+\alpha)\,(r\geqslant0)$ ((6.44) га қаранг) билан берилади $\cos(\omega x+\alpha)=0$ тригонометрик тенгламанинг барча ечимлари $\omega x_k+\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k — бутун) ёки $x_k=\frac{\pi}{2\omega}+\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\alpha}{\omega}$ формула билан ёзилади. Бундан $x_{k+1}-x_k=\frac{\pi}{\omega}$. Демак, гармоник функциянинг ноллари ўзаро тенг узоқлашган бўлиб, ихтиёрий кетма-кет келган ноллари орасидаги масофа $\frac{\pi}{\omega}$ га тенг. Шуни ҳам айтиш керакки, гармоник функция ноллари чексиз тўпламни, аниқроғи, саноқли *) тўпламни ташкил этади. Узунлиги $\frac{\pi}{\omega}$ дан ортиқ бўлган интервалда ечимнинг камида битта ноли, узунлиги $\frac{\pi}{\omega}$ дан кам бўлган интервалда эса (ошиб борса) битта ноли, узунлиги $\frac{2\pi}{\omega}$ дан ортиқ бўлган интервалда камида 2 та ноли бор ва ҳ. к.

Агар гармоник осциллятор тенгламасини $r_1<x<r_2$, $r_2-r_1<\frac{\pi}{\omega}$ интервалда кўрилса, унинг ечими шу интервалда тебранмас бўлади. $r_1<x<r_2$, $r_2-r_1\geqslant\frac{2\pi}{\omega}$ интервалда эса ечим тебранувчи бўлади.

Энди $y''-\omega^2y=0$, $\omega\geqslant 0$ тенгламани олайлик. Унинг умумий ҳақиқий ечими $y=C_1e^{\omega x}+C_2e^{-\omega x}$ (C_1, C_2 — ҳақиқий сонлар) каби ёзилади. Бу ечим $-\infty<x<+\infty$ интервалда аниқланган бўлиб, шу интервалда биттадан ортиқ нолга эга эмас. Бунда тривиалмас ечимлар, яъни $C_1^2+C_2^2\neq 0$ бўлган ҳол назарда тутилади. Агар $\omega>0$, $C_1\cdot C_2<0$ бўлса, $C_1e^{\omega x}+C_2e^{-\omega x}=0$ тенглама ушбу $x=\frac{1}{2\omega}\ln\left|-\frac{C_2}{C_1}\right|$ ечимга эга бўлади. Акс ҳолда кўрсатилган тенглама ечимга эга эмас. Шундай қилиб, кўрилаётган дифференциал тенгламанинг ихтиёрий тривиалмас ечими тебранмас ечим бўлади.

Юқорида кўрилган иккита дифференциал тенгламани битта $y''+qy=0$, $q=\text{const}$ тенглама шаклида ёзсак $q\leqslant 0$ бўлса, тенгламанинг тривиалмас ечимлари ихтиёрий интервалда тебранмас бўлиб, $q>0$ бўлганда етарли катта интервалда тебранувчи бўлади. Бу мулоҳазаларни $y''+Q(x)y=0$ тенгламага татбиқ этиб, умумлаштирамиз ((7.4) га қаранг).

7.1-теорема. *Агар x нинг I интервалдан олинган барча қийматларида $Q(x)\leqslant 0$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда* (7.4) *тенглама ечимлари шу интервалда тебранмас бўлади.*

Исбот. (7.4) тенгламанинг бирор $y=\varphi(x)$ ечими I интервалда камида иккита нолга эга бўлсин дейлик. $\varphi(x)$ функциянинг кетма-кет келган ноллари $x_0\in I$, $x_1\in I$, $x_0<x_1$ бўлсин. Демак, $\varphi(x)\neq 0$, $x_0<x<x_1$. Шуни айтиб ўтамизки, тривиалмас $y=\varphi(x)$ ечимнинг ноллари *яккаланган* бўлади. Бошқача айтганда, бу ечимнинг ҳар бир x^* ноли шундай $(x^*-\varepsilon,\ x^*+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ интервалга эгаки, бу интервалда ечимнинг бошқа ноллари бўлмайди. Акс ҳолда x^* нуқтада $\varphi(x^*)=0$ бўлиб, x^* нуқта нолларнинг қуюқланиш (лимит) нуқтаси бўлар эди. Бунда ушбу

---

*) Агар бирор A тўпламнинг элементларига натурал сонлар тўплами N нинг элементлари ўзаро бир қийматли мос келтирилиши мумкин бўлса, A тўплам *саноқли тўплам* дейилади.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*, \quad \frac{\varphi(x_n)-\varphi(x^*)}{x_n-x^*}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(x_n)-\varphi(x^*)}{x_n-x^*}=$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\varphi(x^*+h)-\varphi(x^*)}{h}=\varphi'(x^*)=0\,(\lim_{n\to\infty}(x_n-x^*)=\lim_{h\to0}h=0)$$

муносабатларга эга бўламиз. Демак, (7.4) тенгламанинг $y=\varphi(x)$ ечими $\varphi(x^*)=0$, $\varphi'(x^*)=0$ бошланғич шартни қаноатлантиради ва шунинг учун I интервалда $\varphi(x)\equiv0$ бўлади. Бу $\varphi(x)\neq0$, $x\in I$ деган фаразга зид.

Энди $\varphi(x)>0$, $x_0<x<x_1$ дейлик ($\varphi(x)<0$, $x_0<x<x_1$ ҳол шунга ўхшаш кўрилади). $\varphi(x_0)=0$ бўлгани учун $\varphi'(x_0)>0$ бўлади. (7.4) тенгламада $Q(x)\leqslant0$, $x\in I$ ва демак,

$$Q(x)\leqslant 0,\ x_0<x<x_1,\ \varphi'(x)=-Q(x)\varphi(x)\geqslant0,\ x_0<x<x_1.$$

Бундан $\varphi'(x)$ функция $x_0<x<x_1$ интервалда камаймайдиган функция экани келиб чиқади. Чекли айирмалар ҳақидаги теоремага кўра $\varphi(x_1)\geqslant\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x_1-x_0)=\varphi'(x_0)(x_1-x_0)>0$, яъни $\varphi(x_1)>0$. Бу тенгсизлик x_1 нуқта $\varphi(x)$ функциянинг ноли эканига зид. Теорема исбот бўлди.

Мисол сифатида ушбу $y''-xy=0$ Эйри тенгламасини олайлик. Унда $Q(x)=-x$ бўлиб, $0\leqslant x<+\infty$ интервалда унинг барча ечимлари тебранмас бўлади.

7.2- теорема (Штурм теоремаси) *Агар x_0 ва x_1 нуқталар бирор иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама ечимининг кетма-кет келган иккита ноли бўлса, у ҳолда бу ечим билан чизиқли эркли ихтиёрий бошқа ечимнинг шу x_0 ва x_1* ноллар орасида аниқ битта ноли бўлади.

Исбот. x_0 ва x_1 нолларга эга бўлган ечимни $\varphi_1(x)$, бу $\varphi_1(x)$ ечим билан чизиқли эркли ечимни $\varphi_2(x)$ деймиз. Аввал $\varphi_2(x)$ ечим x_0 ва x_1 лар орасида нолга эга эмас деб фараз қиламиз, яъни $\varphi_2(x)\neq0$, $x\in(x_0, x_1)$. Маълумки, $\varphi_1(x_0)=\varphi_1(x_1)=0$. Шартга кўра $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар чизиқли эркли бўлгани учун $\varphi_2(x_0)\neq0$, $\varphi_2(x_1)\neq0$. $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функцияларнинг вронскианини тузамиз:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = W(x)$$

ёки $\varphi_1(x)\varphi_2'(x)-\varphi_1'(x)\varphi_2(x)=W(x)$, $W(x)\neq0$. Бу тенгликнинг икки томонини $\varphi_2^2(x)$ га бўламиз:

$$-\frac{\varphi_1'(x)\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\varphi_2'(x)}{\varphi_2^2(x)}=\frac{W(x)}{\varphi_2^2(x)}$$

ёки

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\right)=\frac{W(x)}{\varphi_2^2(x)}.$$

Ундан x_0 дан x_1 гача интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$-\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{W(x)}{\varphi_2^2} dx.$$

Бу тенгликнинг чап томони $\varphi_1(x_0)=\varphi_1(x_1)=0$, $\varphi_2(x)\neq 0$, $x\in[x_0, x_1]$ бўлгани учун нолга тенг, аммо ўнг томони нолдан фарқли. Ҳақиқатан, $W(x)\neq 0$ ва демак, (x_0, x_1) интервалда ўз ишорасини сақлайди, шунингдек $\varphi_2^2(x)>0$: $x\in[x_0, x_1]$. Шундай қилиб, зиддиятга келдик. Бу эса (x_0, x_1) интервалда $\varphi_2(x)$ функция камида битта нолга эга деган натижани беради. Энди шу функция (x_0, x_1) да иккита нолга эга бўла олмаслигини исбот этамиз. Шу мақсадда (x_0, x_1) интервалда $\varphi_2(x)$ функция иккита нолга эга бўлсин дейлик, яъни $\varphi_2(\tau_0)=$ $=\varphi_2(\tau_1)=0$, $x_0<\tau_0<\tau_1<x_1$. Теореманинг исбот этилган биринчи қисмига кўра $\varphi_2(x)$ билан чизиқли эркли $\varphi_1(x)$ ечимнинг (τ_0, τ_1) интервалда ва демак (x_0, x_1) интервалда камида битта ноли бўлиши лозим. Бу зиддият, чунки $\varphi_1(x)$ учун x_0 ва x_1 лар иккита кетма-кет келган ноллар бўлиб, (x_0, x_1) интервалда $\varphi_1(x)\neq 0$. Худди шу сабабли $\varphi_2(x)$ функция (x_0, x_1) интервалда иккитадан ортиқ нолга ҳам эга бўла олмайди. Теорема исбот бўлди.

7.1-**натижа.** *Агар бирор I интервалда чизиқли бир жинсли тенгламанинг бирор ечими иккитадан ортиқ нолга эга бўлса, у ҳолда тегишли тенгламанинг барча ечимлари шу I интервалда камида иккита нолга эга бўлади, демак, барча ечимлар шу интервалда тебранувчи бўлади.*

7.2-теорема ва 7.1-натижа ушбу $y''+\omega^2 y=0$ тенгламанинг ечимларида осонгина текширилади.

Исбот. Бир жинсли тенгламанинг тривиалмас ечими $y_1(x)$ I интервалда иккитадан ортиқ нолга эга бўлсин. Масалан, $y_1(x)$ ечимнинг ноллари учта x_0, x_1 ва x_2 бўлсин, яъни $y_1(x_0)=y_1(x_1)=$ $=y_1(x_2)=0$ ва $x_0\in I$, $x_1\in I$, $x_2\in I$. Энди бир жинсли тенгламанинг тривиалмас ва $y_1(x)$ дан фаркли ихтиёрий ечимини $y_2(x)$ дейлик. Агар $y_2(x)$ ечим $y_1(x)$ ечим билан чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)\equiv 0$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, $x\in I$ бўлади. Аммо $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимлар тривиалмас ечим бўлгани учун $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_2\neq 0$, чунки агар $\alpha_1=0$ бўлса, $\alpha_2 y_2(x)\equiv 0$, $x\in I$ айниятдан $\alpha_2=0$ келиб чиқади; шунга ўхшаш, агар $\alpha_2=0$ бўлса, $a_1 y_1(x)\equiv 0$, $x\in I$ айниятдан $\alpha_1=0$ келиб чиқади. Бу эса $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$ муносабатга зид. Шундай қилиб, $\alpha_1\neq 0$. $\alpha_2\neq 0$. Шунинг учун $y_2(x)\equiv -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}y_1(x)$, $x\in I$. Бундан $y_2(x)$ ечимнинг ноллари $y_1(x)$ ечимнинг ноллари билан устма-уст тушиши келиб чиқади. Демак, $y_1(x)$ тебранувчи бўлганидан $y_2(x)$ ечим ҳам тебранувчи бўлади.

Энди $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимлар чизиқли эркли бўлсин. У ҳолда Штурм теоремасига кўра $y_2(x)$ ечим (x_0, x_1) ва (x_1, x_2) интервалларда биттадан нолга, яъни $y_2(x)$ ечим I интервалда иккита нолга эга бўлади. Демак, $y_2(x)$ ечим I интервалда тебранувчи. Агар $y_1(x)$ ечимнинг ноллари учтадан кўп бўлса, у ҳолда шу ечимдан фарқли ихтиёрий тривиалмас ечим I интервалда иккитадан кўп нолга эга бўлади. 7.1- натижа исбот бўлди.

7.3- теорема (таққослаш теоремаси). *Агар ушбу иккита*

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q_1(x)y=0,\ x\in I, \tag{7.7}$$

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q_2(x)y=0,\ p(x)>0,\ x\in I \tag{7.8}$$

дифференциал тенглама берилган бўлиб, I интервалда $q_1(x)\leqslant \leqslant q_2(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда (7.7) тенгламанинг бирор ечимининг кетма-кет келган иккита ноли орасида (7.8) тенглама ихтиёрий ечимининг камида битта ноли ётади.

Исбот. (7.7) тенгламанинг бирор $y=\varphi_1(x)$, $x\in I$ ечимининг кетма-кет келган ноллари $x_0\in I$, $x_1\in I$, $x_0<x_1$ бўлсин. Шартга кўра, $[x_0, x_1]\subset I$ оралиқда ҳам $q_1(x)\leqslant q_2(x)$ тенгсизлик бажарилади. Фараз этайлик, $\varphi_2(x)$, $x\in I$ функция (7.8) тенгламанинг $[x_0, x_1]$ оралиқда бирорта ҳам ноли бўлмаган ечими бўлсин, яъни $\varphi_2(x)\neq 0$, $x\in[x_0, x_1]$. Аниқлик учун $\varphi_2(x)>0$, $x\in[x_0, x_1]$, $\varphi_1(x)\geqslant 0$, $x\in[x_0, x_1]$ дейлик (бошқа ҳоллар шунга ўхшаш кўрилади). $\varphi_1(x_0)=\varphi_1(x_1)=0$, $\varphi_1(x)\geqslant 0$, $x\in[x_0, x_1]$ бўлгани учун $\varphi_1'(x_0)>0$, $\varphi_1'(x_1)<0$ тенгсизликлар ўринли. Акс ҳолда, яъни агар $\varphi_1'(x_0)=0$ бўлса, $\varphi_1(x_0)= =0$ бўлганидан $\varphi_1(x)\equiv 0$ га эга бўлар эдик.

Энди (7.7) ва (7.8) тенгламаларда мос равишда $y\equiv\varphi_1(x)$ ва $y\equiv \equiv\varphi_2(x)$ деймиз. Ҳосил бўлган айниятларнинг чап ва ўнг томонларини мос равишда $\varphi_2(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функцияларга кўпайтириб, иккинчисидан биринчисини айирамиз:

$$[q_2(x)-q_1(x)]\varphi_1(x)\varphi_2(x)=\varphi_2(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_1(x)}{dx}\right]-\varphi_1(x)\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right]=\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(\varphi_2(x)\frac{d\varphi_1(x)}{dx}-\varphi_1(x)\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right)\right]. \tag{7.9}$$

Ҳосил бўлган тенгликнинг икки томонини x_0 дан x_1 гача интеграллаймиз:

$$\int_{x_0}^{x_1}[q_2(x)-q_1(x)]\varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx=$$

$$=p(x_1)\varphi_2(x_1)\frac{d\varphi_1(x_1)}{dx}-p(x_0)\varphi_2(x_0)\frac{d\varphi_1(x_0)}{dx}. \tag{7.10}$$

Бу тенгликнинг чап томони манфий эмас, аммо ўнг томони манфий. Зиддиятга келдик. Теорема исбот бўлди.

Шуни айтиб ўтамизки, исбот этилган теоремадан аввалги Штурм теоремасини келтириб чиқариш мумкин. Бунинг учун (7.7) тенгламанинг ечими шу ечим билан чизиқли эркли бўлган бошқа ечими билан таққосланиши етарлидир.

Машк. Таққослаш теоремасини тенглама (7.4) кўринишда ёзилганда ҳам исбот этинг (унда $Q_1(x) \leqslant Q_2(x)$, $y''+Q_1(x)y=0$, $y''+Q_2(x)y=0$).

7.2- натижа. *Агар (7.7) ва (7.8) тенгламалар учун мос равишда $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ ечимлар умумий x_0 нолга эга бўлиб, $\varphi_1(x)$ ечимнинг x_0 дан кейинги навбатдаги ноли x_1, $x_0 \leqslant x_1$ орасидаги интервалда $q_2(x) > q_1(x)$ тенгсизлик ўринли бўладиган нуқталар мавжуд бўлиб, қолган нуқталарда $q_2(x) \geqslant q_1(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\varphi_2(x)$ ечимнинг навбатдаги ноли x_1 нуқтадан чапда жойлашган бўлади.*

Исбот. $\varphi_2(x)$ нинг x_0 дан ўнгдаги навбатдаги нолини x_1^* дейлик. Агар $x_1^*=x_1$ бўлсин десак, (7.10) формулада зиддият ҳосил бўлади, чунки $\varphi_2(x_1^*)=0$, $\varphi_2(x_0)=0$ дан формуланинг ўнг томони нолга тенг, чап томони эса мусбат бўлади. Энди $x_1^*>x_1$ бўлсин. Бу ҳолда $\varphi_2(x_1^*)=0$, $\varphi_2(x_1)>0$ ва (7.10) нинг ўнг томони манфий, чап томони эса мусбат сондан иборат. Яна зиддиятга эгамиз. Натижа исбот бўлди.

7.4- теорема (Сонли таққослаш теоремаси). *Агар бирор I интервалда $q_1(x)<q_2(x)$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар шу интервалда аниқланган ва мос равишда (7.7), (7.8) тенгламаларнинг бир хил бошланғич шартни, яъни*

$$\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)=y_0, \qquad \varphi_1'(x_0)=\varphi_2'(x_0)=y_0' \tag{7.11}$$

муносабатларни қаноатлантирадиган ечимлари бўлса, у ҳолда x_0 дан ўнгда $\varphi_2(x)$ ечим нолга айланмайдиган интервалда ушбу

$$|\varphi_1(x)|>|\varphi_2(x)| \tag{7.12}$$

тенгсизлик ўринли. Шунингдек, $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ функция $x=x_0$ бўлганда қабул қиладиган 1 қийматидан бошлаб ўсади.

Исбот. (7.11) бошланғич шартга кўра

$$p(x_0)\left[\varphi_2(x_0)\frac{d\varphi_1(x_0)}{dx}-\varphi_1(x_0)\frac{d\varphi_2(x_0)}{dx}\right]=0.$$

Энди (7.9) айниятни x_0 дан x гача $(x>x_0)$ интеграллаймиз:

$$p(x)\left[\varphi_2(x)\frac{d\varphi_1(x)}{dx}-\varphi_1(x)\frac{d\varphi_2(x)}{dx}\right]=$$

$$=\int_{x_0}^{x}[q_2(x)-q_1(x)]\varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx. \tag{7.13}$$

Бу муносабатнинг ўнг томони мусбатлигини кўрсатамиз. (7.11) шартга кўра $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ нолга тенг бўла олмайди ва x_0 билан $x(x>x_0)$ орасида ишорасини ўзгартирмайди. $x=x_0$ нуқтада $\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)=y_0\cdot$ $\cdot y_0=y_0^2$. Бундан, агар $y_0\neq 0$ бўлса, $\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)$ функция $x=x_0$ нуқтадан ўнгдаги етарли кичик атрофда мусбат бўлиши келиб чиқади. Агар $y_0=0$ бўлса, $\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)=0$ бўлади. Бу ҳолда албатта $y_0'\neq 0$ ва x_0 дан ўнгдаги бирор етарли кичик атрофда яна $\varphi_1(x)\varphi_2(x)>0$ эканини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан, $x>x_0$ бўлганда ушбу $\frac{\varphi_1(x)\varphi_2(x)}{(x-x_0)^2}$ функцияни олайлик. Бу функциянинг $x\to x_0+0$ да лимитини ҳисоблаймиз $(\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)=y_0=0)$:

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{\varphi_1(x)\varphi_2(x)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{\varphi_1(x)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0+0}\frac{\varphi_2(x)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0+0}\frac{\varphi_1(x)-\varphi_1(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0+0}\frac{\varphi_2(x)-\varphi_2(x_0)}{x-x_0}=\varphi_1'(x_0)\cdot\varphi_2'(x_0)=(y_0')^2>0.$$

Бундан юқоридаги тасдиқнинг исботи келиб чиқади.

Шундай қилиб, (7.13) муносабатнинг ўнг томони x_0 нинг бирор ўнг атрофида мусбат. Шунинг учун x_0 дан ўнгда $p(x)>0$ бўлгани учун:

$$\varphi_2(x)\frac{d\varphi_1(x)}{dx}-\varphi_1(x)\frac{d\varphi_2(x)}{dx}>0 \quad \text{ёки} \quad \varphi_2^2(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\right)>0.$$

Бундан $\varphi_2(x)\neq0$, $x>x_0$ бўлгани учун $\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\right)>0$ экани, яъни $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ функциянинг $x>x_0$ да ўсувчи экани келиб чиқади.

Равшанки, $y_0\neq0$ бўлганда $\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi_2(x)}=1$ ва $y_0=0$ бўлганда эса

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)}=\frac{y_0'}{y_0'}=1.$$

Демак, агар $x>x_0$ бўлса, $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}>1$. Бундан (7.12) тенгликнинг исботи келиб чиқади.

7.2- эслатма. *Агар x_0 дан ўнгда бирор интервалда $q_1(x)$ ва $q_2(x)$ функциялар айнан нолга тенг бўлмаса, $q_2(x)>q_1(x)$ тенгсизликни ундан кучсизроқ $q_2(x)\geqslant q_1(x)$ тенгсизлик билан алмаштириш мумкин.*

7.3- эслатма. *7.4- теоремадан 7.2- натижанинг исботи кўриниб туради.*

7.5- теорема*. *Агар дифференциал тенглама*

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \tag{7.14}$$

кўринишда берилган бўлиб, $a_1(x)$, $a_2(x)$ коэффициентлар бирор $r_1\leqslant\leqslant x\leqslant r_2$ оралиқда узлуксиз ва

$$|a_1(x)|\leqslant M_1,\ |a_2(x)|\leqslant M_2 \tag{7.15}$$

бўлса, у ҳолда (7.14) тенгламанинг ҳар бир тривиалмас ечимининг кетма-кет ихтиёрий иккита ноли орасидаги масофа h учун

---

* Мазкур теорема муаллифларга тегишли. Бу теоремадан $\sigma=6$ бўлганда Валле Пуссен теоремаси ([15], 122- бетга каранг) келиб чиқади.

$$h \geqslant \frac{\sqrt{\sigma^2 M_1^2 + 16\sigma M_2} - \sigma M_1}{4M_2}, \text{ агар } M_2 > 0,$$

$$0 < \sigma \leqslant \pi^2 \text{ бўлса,} \qquad (7.16)$$

$$h \geqslant \frac{2}{M_1}, \text{ агар } M_2 = 0 \text{ бўлса,} \qquad (7.16')$$

$$h \geqslant \sqrt{\frac{\sigma}{M_2}}, \text{ агар } M_1 = 0 \text{ бўлса,} \qquad (7.16'')$$

$$h = +\infty, \text{ агар } M_1 = 0,\ M_2 = 0 \text{ бўлса.} \qquad (7.16'')$$

Исбот. Аввал $M_1 = 0$, $M_2 = 0$ ҳолни кўрайлик. Бунда биз (7.14) тенглама ўрнига $y'' = 0$ га эгамиз. Унинг умумий ечими $y = C_1 x + C_2$ (C_1, C_2 — ўзгармаслар) каби ёзилади. Агар $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ бўлса, бу ечим тривиалмас. Агар $C_1 = 0$ ва $C_2 \neq 0$ бўлса, $y_2 = C_2$ ечим битта ҳам нолга эга эмас. Агар $C_1 \neq 0$, (C_2 — ихтиёрий) бўлса, у ҳолда $y = C_1 x + C_2$ ечим горизонтал бўлмаган тўғри чизиқни тасвирлайди. Бу чизиқ фақат битта нуқтада абсцисса ўқини кесиб ўтади, яъни тегишли чизиқли функция фақат битта нолга эга. Ҳар икки кўрилган ҳолда $h = +\infty$ деб ёзишга келишамиз.

(7.16) (7.16′) ва (7.16″) тенгсизликлар h учун қуйи баҳони беради. Уларни исботлаш учун ёрдамчи мулоҳазалар юритамиз. Бошқача айтганда, $[0, h]$ оралиқда узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи $\varphi(x)$ функция учун қуйидаги

$$h\varphi(x) = \int_0^x \xi\varphi'(\xi)\,d\xi - \int_x^h (h-\xi)\,\varphi'(\xi)\,d\xi + \int_0^h \varphi(\xi)\,d\xi \qquad (7.17)$$

айниятнинг ўринли эканини кўрсатамиз. Равшанки,

$$\int_0^x \xi\varphi'(\xi)\,d\xi = x\varphi(x) - \int_0^x \varphi(\xi)\,d\xi,$$

$$\int_0^h (h-\xi)\,\varphi'(\xi)\,d\xi = -(h-x)\,\varphi(x) + \int_x^h \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Бу тенгликларнинг биринчисидан иккинчисини мос равишда айирсак, (7.17) келиб чиқади.

Энди (7.14) тенгламанинг бирор $y(x)$ ечимини олайлик. $x = 0$ ва $x = h$ унинг кетма-кет келган иккита ноли бўлсин (нолларни ихтиёрий қилиб (яъни $x_0 \neq 0$, $x_1 = x_0 + h$) танланса ҳам мулоҳазалар шунга ўхшаш бўлади). Агар (7.17) айниятда $\varphi(x) \equiv y'(x)$ бўлса, $y(0) = y(h) = 0$ бўлгани учун

$$\int_0^h \varphi(\xi)\,d\xi = \int_0^h y'(\xi)\,d\xi = y(h) - y(0) = 0$$

ўринли ва ушбу

$$hy'(x) = \int_0^x \xi y''(\xi)\,d\xi - \int_x^h (h-\xi)\,y''(\xi)\,d\xi$$

айниятга эга бўламиз. Бундаги $y''(\xi)$ ўрнига (7.14) дан $y''(\xi)=-a_1(\xi)y'(\xi)-a_2(\xi)\ y(\xi)$ ифодани қўямиз:

$$hy'(x)=-\int\limits_0^x \xi a_1(\xi)y'(\xi)\,d\xi+\int\limits_x^h (h-\xi)a_1(\xi)y'(\xi)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^x \xi a_2(\xi)y(\xi)\,d\xi+\int\limits_x^h (h-\xi)a_2(\xi)y(\xi)\,d\xi. \qquad (7.18)$$

$\max\limits_{x\in[0,\ h]}|y'(x)|=\mu$ деб белгилаймиз. $y(x)$ функция $x=0$ ва $x=h$ да нолга айлангани учун $[0,\ h]$ оралиқда бир вақтда

$$|y(\xi)|\leqslant\mu\xi,\ |y(\xi)\leqslant\mu(h-\xi)$$

тенгсизликларнинг ҳар бири бажарилади. Ҳақиқатан, $y(x)$ функция учун $x=0$ ва $x=h$ нуқта атрофида Лагранж формасида қолдиқ ҳад билан Тейлор формуласини ($y(0)=y(h)=0$ эканини ҳисобга олган ҳолда) ёзамиз:

$$y(x)=y'(\theta x)x,\qquad 0<\theta<1,$$
$$y(x)=y'(h+\theta(x-h))(x-h),\qquad 0<\theta<1.$$

Бундан

$$|y(x)|=y'(\theta x|\,|x|\leqslant\mu x,\qquad x\in[0,\ h],$$

$$|y(x)|=|y'(h+\theta(x-h))|\,|x-h|\leqslant\mu(h-x),\qquad x\in[-,\ h]$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликлардан $[0,\ h]$ оралиқда ушбу

$$|y(\xi)|\leqslant\mu\min(\xi,\ h-\xi)\begin{cases}\mu\xi, & \text{агар } 0\leqslant\xi\leqslant\frac{h}{2} \text{ бўлса,}\\ \mu(h-\xi), & \text{агар } \frac{h}{2}\leqslant\xi\leqslant h \text{ бўлса}\end{cases}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди (7.18) ифоданинг охирги икки ҳадини баҳолайлик:

$$\left|\int\limits_0^x \xi a_2(\xi)y(\xi)\,d\xi\right|+\left|\int\limits_x^h (h-\xi)a_2(\xi)y(\xi)\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_2\mu\left[\int\limits_0^{\frac{h}{2}}\xi_2\,d\xi+\int\limits_{\frac{h}{2}}^h(h-\xi)^2\,d\xi\right]=M_2\mu\cdot\frac{h^2}{12}.$$

Шунга кўра (7.18) учун ушбу тенгсизликка келамиз:

$$|y'(x)|\leqslant M_1\mu\frac{h}{2}+M_2\mu\frac{h_2}{12}\ (0\leqslant x\leqslant h).$$

Охирги тенгсизлик $y'(x)$ га максимум берадиган нуқтада ҳам ўринли. Шунинг учун

$$\mu \leqslant M_1\mu\frac{h}{2}+M_2\mu\frac{h^2}{12}\leqslant M_1\mu\frac{h}{2}+M_2\mu\frac{h^2}{\sigma},\ 0<\sigma\leqslant\pi^2<12$$

ёки

$$M_2\frac{h^2}{\sigma}+M_1\frac{h}{2}-1\geqslant 0 \qquad (7.19)$$

тенгсизликка эгамиз. $M_2\frac{h^2}{\sigma}+\frac{M_1}{2}h-1=0$ квадрат тенглама ушбу

$$\frac{-\sigma M_1-\sqrt{\sigma^2M_1^2+16\sigma M_2}}{4M_2},\quad \frac{-\sigma M_1+\sqrt{\sigma^2M_1^2+16\sigma M_2}}{4M_2}$$

илдизларга эга. Юқоридаги квадрат тенгсизликнинг ечими ($h>0$)

$$h\geqslant\frac{\sqrt{\sigma^2M_1^2+16\sigma M_2}-\sigma M_1}{4M_2}$$

кўринишда ёзилади. Агар $M_2=0$ бўлса, (7.19) дан (7.16′) тенгсизлик келиб чиқади. Агар $M_1=0$, $M_2>0$ бўлса, (7.19) дан $h\geqslant\sqrt{\frac{\sigma}{M_2}}$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Эслатиб ўтамизки, $M_1=0$, $M_2=0$ бўлганда $y''=0$ тенгламага келинади. Аммо унинг ечимлари $y=C_1x+C_2$ тўғри чизиқлардан иборат бўлиб, $y\neq 0$, яъни $C_1^2+C_2^2\neq 0$ бўлганда $y=C_1x+C_2$ тўғри чизиқ биттадан ортиқ нолга эга бўла олмайди. Демак, ечим тебранмас бўлади. Биз кўраётган масала эса тебранувчи ечимларга тегишлидир. Теорема исбот этилди.

Мисол. Гармоник осциллятор тенгламасини, яъни ушбу $y''+\omega^2y=0$ тенгламани олайлик. Унинг умумий ҳақиқий ечими $y=r\cos(\omega t+\alpha)$ $(r>0)$ функциядан иборат. Ноллари орасидаги масофалар тенг бўлиб, $\frac{\pi}{\omega}$ дан иборат. Ҳақиқатан, $\cos(\omega t+\alpha)$ функциянинг ноллари $t_k=\frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi-\alpha\right)$, формула билан ёзилади (k — бутун сон). Бундан $t_{k+1}-t_k=\frac{\pi}{w}$. Бу тенгламада $M_1=0$, $M_2=\omega^2$. Шунинг учун (7.16″) тенгсизликка кўра

$$\frac{\pi}{\omega}=h\geqslant\sqrt{\frac{\sigma}{M_2}}=\frac{\sqrt{\sigma}}{\omega}$$

келиб чиқади.

Исбот этилган теорема кетма-кет келган ноллар орасидаги масофани бир томондан — қуйидан баҳолайди. Штурм теоремасидан фойдаланиб, айтилган масофа учун икки томонлама экстремал (кучайтириб бўлмайдиган) баҳо чиқариш мумкин.

7.6- теорема. *Ушбу*

$$y''+Q(x)y=0 \qquad (7.4)$$

дифференциал тенгламада $Q(x)$ функция I интервалда аниқланган, узлуксиз ва

$$m^2 \leqslant Q(x) \leqslant M^2,\ m > 0,\ M > 0 \tag{7.20}$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда (7.14) тенглама ечимининг кетма-кет келган иккита ноли орасидаги масофа h учун

$$\frac{\pi}{M} \leqslant h \leqslant \frac{\pi}{m} \tag{7.21}$$

тенгсизлик ўринли.

Исбот. Бу теоремани исботлашда таққослаш теоремасидан кенг фойдаланамиз. Унинг учун аввал қуйидаги

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0 \text{ ва } \frac{d^2y}{dx^2} + M^2y = 0 \tag{7.22}$$

ўзгармас коэффициентли тенгламаларни оламиз. Уларнинг умумий ечимлари мос равишда

$$y = A_1 \sin m(x - \alpha_1), \qquad y = A_2 \sin M(x - \alpha_2)$$

кўринишда ёзилади. Фараз этайлик, $x_0 = \alpha_1 = \alpha_2$ нуқта (7.4), (7.22) тенгламаларнинг бирор ечимларининг ноли бўлсин, яъни у ечимларни мос равишда $\varphi(x)$, $\varphi_m(x)$, $\varphi_M(x)$ деб белгиласак, $\varphi(x_0) = \varphi_m(x_0) = \varphi_M(x_0) = 0$ бўлади. $\varphi_m(x)$ ва $\varphi_M(x)$ ечимларнинг навбатдаги ноллари мос равишда $x_0 + \frac{n\pi}{m}$, $x_0 + \frac{n\pi}{M}$ (n — бутун сон) формулалар билан топилади. $\varphi(x)$ функциянинг x_0 дан ўнгдаги навбатдаги нолини x_1 дейлик. Унда $x_1 - x_0 = h$ бўлади. (7.20) тенгсизликдан таққослаш теоремасига кўра (7.4) тенглама $\varphi(x)$ ечимининг ихтиёрий кетма-кет келган иккита x_0, x_1 ($x_0 < x_1$) ноллари орасида $\varphi_M(x)$ функциянинг камида битта ноли ётади. Аммо $\varphi_M(x)$ функциянинг x_0 дан ўнгдаги навбатдаги ноли $x_0 + \frac{\pi}{M}$ бўлгани учун $x_0 + \frac{\pi}{M} \leqslant x_1$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунга ўхшаш, $\varphi_m(x)$ ечимнинг x_0 ва $x_0 + \frac{\pi}{m}$ ноллари орасида $\varphi(x)$ функциянинг камида битта ноли бўлади, яъни $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_0 + \frac{\pi}{m}$. Топилган икки тенгсизликни бирлаштириб, $\frac{\pi}{M} \leqslant x_1 - x_0 \leqslant \frac{\pi}{M}$ ни, яъни (7.21) тенгсизликни ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

(7.21) тенгсизликни янада кучайтириш мумкин эмас, яъни $\left[\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{m}\right]$ оралиқни кичрайтириш мумкин эмас. Бунинг боиси, $Q(x)$ функция ўзгармас бўлганда (7.21) тенгсизлик ўрнига $h = \frac{\pi}{M} = \frac{\pi}{m}$ тенгликка эришамиз.

Мисол сифатида яна гармоник тебранишларни олсак, $M = m = \omega$ бўлгани учун (7.21) дан $h = \pi/\omega$ келиб чиқади.

Берилган тенглама ечимлари тебранувчи бўлса, кўрилаётган оралиқда ечимнинг ноллари сони ҳақида фикр юритиш мумкин.

7.7-теорема (Кнезер теоремаси). *Агар (7.4) тенгламада* $Q(x)$ *функция* $x_0 \leqslant x < +\infty$ *интервалда* $0 < Q(x) \leqslant \frac{1}{4x^2}$ *тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда (7.4) тенгламанинг ихтиёрий тривиалмас ечими* $x_0 \leqslant x < +\infty$ *интервалда чексиз кўп нолларга эга бўла олмайди; агар* $x_1 \leqslant x < +\infty$ *интервалда* $Q(x)$ *функция* $\frac{1+\alpha}{4x^2} < Q(x)$ $(\alpha = \text{const} > 0)$ *тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда ихтиёрий тривиалмас ечим* $x_1 \leqslant x < +\infty$ *интервалда чексиз кўп нолларга эга бўлади.*

Исбот. Таққослаш теоремасини қўллаш мақсадида

$$y'' + \frac{a^2}{x^2} y = 0 \quad (a \neq 0,\ x > 0) \tag{7.23}$$

Эйлер тенгламасини олайлик. Бунда $Q(x) = \frac{a^2}{x^2} > 0$ бўлгани учун (7.23) тенглама ечимлари тебранма характерга эга бўлиши ҳам мумкин. Тегишли характеристик тенглама $k(k-1) + a^2 = 0$ ёки $k^2 - k + a^2 = 0$, унинг илдизлари эса $k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}$. Бундан кўринадики, $a^2 > \frac{1}{4}$ бўлганда Эйлер тенгламасининг ечимлари тебранма характерга эга бўлади. Шу ҳолда умумий ечим

$$y = C_1 \sqrt{x} \cos\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x\right) +$$
$$+ C_2 \sqrt{x} \sin\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x\right),\ 1 < x < +\infty$$

кўринишда ёзилади. Шундай қилиб, (7.23) тенгламанинг ечимлари $a^2 \leqslant \frac{1}{4}$ бўлганда $(1, +\infty)$ интервалда тебранмас, $a^2 > \frac{1}{4}$ бўлганда эса шу интервалда тебранувчи ва чексиз кўп нолларга эга бўлади.

Энди ушбу

$$y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0 (x \geqslant x_0), \tag{7.24}$$

$$y'' + \frac{1+\alpha}{4x^2} y = 0 \qquad (\alpha > 0,\ x \geqslant x_1) \tag{7.25}$$

тенгламаларни кўрамиз. Улардан биринчисида (7.23) га кўра $a^2 = \frac{1}{4}$, иккинчисида эса $a^2 = \frac{1+\alpha}{4} > \frac{1}{4}$.

Агар $0 < Q(x) \leqslant \frac{1}{4x^2} (x \geqslant x_0)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда (7.4) тенглама ихтиёрий ечимининг кетма-кет келган иккита ноли орасида (7.24) тенглама ечимининг камида битта ноли ётиши лозим.

Бу бўлиши мумкин эмас, чунки (7.24) тенгламанинг ечимлари тебранмас. Демак, бу ҳолда $x_0 \leqslant x < +\infty$ интервалда (7.4) тенглама ечими чексиз кўп нолларга эга бўла олмайди.

Агар $Q(x) > \frac{1+\alpha}{4x^2}$, $\alpha > 0$, $x \geqslant x_1$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда ечимлари тебранувчи бўлган (7.25) тенглама ихтиёрий ечимининг кетма-кет келган иккита ноли орасида (7.4) тенглама ечимининг камида битта ноли ётади. Бундан $(x_1, +\infty)$ интервалда (7.4) тенглама ечимлари чексиз кўп нолларга эга экани келиб чиқади.

7.4-эслатма. *Кнезер теоремасидан кўринадики, агар $0 < Q(x) \leqslant \frac{1}{4x^2}$ тенгсизликда $x \to \infty$ да $Q(x)$ функция нолга етарлича тез яқинлашса, у ҳолда тегишли ечимлар тебранмас бўлади. Аммо агар $Q(x) \equiv 0$ бўлса, равшанки, $y'' = 0$ тенгламанинг фундаментал системаси $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_{12}(x) = x$ функциялардан иборат. Агар $Q(x)$ функция $x \to \infty$ да нолга етарлича тез яқинлашса, $Q(x)$ функциянинг ишорасидан қатъи назар x нинг етарлича катта қийматларида $y'' + Q(x)y = 0$ тенгламанинг фундаментал системаси $\{\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x\}$ системадан «кам» фарқ қилади. Бу Шпет теоремаси деб юритилади.*

Мисол. Ушбу $y'' + \frac{y}{x^4} = 0$ тенгламада $Q(x) = \frac{1}{x^4}$ бўлиб, унинг фундаментал системаси $\{1, x\}$ га x нинг етарлича катта қийматларида яқин эканини кўрсатамиз.

Бу тенгламада $y = e^{-\int z dx}$, $\frac{y'}{y} = -z$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада $z' = z^2 + \frac{1}{x^4}$ Риккати тенгламасига келамиз. Унинг умумий ечими $z = -\frac{1}{x^2} \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right) - \frac{1}{x}$ ([3] га қаранг). $\frac{y'}{y} = -z$ бўлгани учун

$$y = Ax \sin\left(\frac{1}{x} + C\right) = C_1 x \sin\frac{1}{x} + C_2 x \cos\frac{1}{x}.$$

Равшанки:

$$x \sin\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{5!}\frac{1}{x^4} - \ldots = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$x \cos\frac{1}{x} = x - \frac{1}{2!}\frac{1}{x} + \frac{1}{4!}\frac{1}{x^3} - \ldots = x + 0\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

бу ерда $0\left(\frac{1}{x^2}\right)$ функция учун $0\left(\frac{1}{x^2}\right) \Big/ \frac{1}{x^2}$ каср $x \to \infty$ да чегараланган. Шундай қилиб, фундаментал система сифатида

$$\varphi_1(x) = 1 + 0\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \varphi_2(x) = x + 0\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

функцияларга эгамиз.

7.3-§. ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

1. Чегаравий масалаларнинг қўйилиши. Биз аввалги бобларда биринчи ва юқори тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи билан шуғулландик. Бу масаланинг геометрик маъноси берилган нуқтадан ўтадиган интеграл чизиқни излашдан иборат эди. Шу интеграл чизиқ яна бошқа шартларни қаноатлантирадими ёки йўқми, бу бизни қизиқтирмас эди.

Агар I интервалда аниқланган $y=\varphi(x)$ функция $y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ $(n\geqslant 1)$ дифференциал тенгламанинг ушбу

$$\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi'(x_0)=y_0', \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\ x_0\in I \tag{7.26}$$

шартни қаноатлантирадиган ечими бўлса, тенгламанинг шу $y=\varphi(x)$ ечими яна

$$\begin{aligned}\varphi(x_1)=y_1,\ \varphi'(x_1)=y_1', \dots,\ \varphi^{(n-1)}(x_1)=\\ =y^{(n-1)},\ x_0\neq x_1,\ x\in I\end{aligned} \tag{7.27}$$

шартни ҳам қаноатлантирадими, деган савол туғилади. Бунда $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функциянинг аниқланиш соҳаси очиқ D_{n+1} тўпламдан иборат бўлиб, $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})\in D_{n+1}$, $(x_1, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})\in D_{n+1}$ шартлар албатта бажарилади. Акс ҳолда қўйилган саволнинг маъноси бўлмайди.

Саволга жавоб бериш учун (7.26) шарт билан тўла аниқланган маълум $y=\varphi(x)$ функция ва унинг ҳосилаларини $x=x_1$ нуқтада ҳисоблаб, (7.27) шартни текшириш лозим. Савол доим юқоридаги каби қўйилмаслиги ҳам мумкин. Номаълум функция ва ҳосилаларининг $x=x_0$ ва $x=x_1$ нуқталардаги қийматларидан тузилган n та муносабат бажарилишини талаб этиш ҳам мумкин. Шу муносабат билан қуйидаги масалани қўямиз.

Чегаравий масаланинг қўйилиши: агар ушбу

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{4.2}$$

тенглама ва

$$\begin{aligned}g_i(x_0, y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0);\ x_1,\ y(x_1),\\ \dots, y^{(n-1)}(x_1))=0\end{aligned} \tag{7.28}$$

$(x_0\in I,\ x_1\in I,\ x_0\neq x_1,\ i=1, 2, \dots, n)$ муносабатлар берилган бўлса, (4.2) тенгламанинг шу (7.28) муносабатларни қаноатлантирадиган ечимини излаш *чегаравий масала* дейилади. Бу масала Коши масаласига қараганда умумий бўлиб, ундан $g_i=y^{(i-1)}(x_0)-y^{(i-1)}_{(x_1)}=0$, $i=1,2, \dots, n$ бўлганда Коши масаласи келиб чиқади. Агар $n=2$ бўлиб,

$$\left.\begin{aligned}g_1=y(x_0)-y_0=0,\\ g_2=y(x_1)-y_1=0\end{aligned}\right\} \tag{7.29}$$

бўлса, иккинчи тартибли тенгламанинг интеграл чизиғи *бошланғич* $y(x_0)=y_0$ ва *тугал* $y(x_1)=y_1$ *шартни* қаноатлантириши лозим бўлади. Яна, агар $n=2$ бўлиб

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \\ g_2 &= \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.30)$$

бўлса, бу ҳам тез-тез учрайдиган чегаравий масаланинг шартидан иборат. Баъзи ҳолларда *ечим даврийлигининг чегаравий шарти* деб юритилувчи ($n=2$)

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= y(x_0) - y_0 = 0, \\ g_2 &= y(x_1) - y_0 = 0 \qquad y_1 = y_0 \neq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.31)$$

шарт ҳам учрайди.

Мисол сифатида 4.5-§ да кўрилган масалани олиш мумкин. У масалада абсцисса ўқи бўйлаб унинг мусбат йўналишида ҳаракат қилаётган объект (нуқта) I чоракда ҳаракат қилиши мумкин бўлган нуқта томонидан қувланиши кўрилган эди. Қувловчининг тезлиги v, қочувчиники эса a эди. Агар $v > a$ бўлса, чекли T вақтда қувловчи қочувчини қувиб етиши исбот этилган. Қувловчининг дифференциал тенгламаси эса

$$y'' = \frac{a}{v} \frac{(y')^2}{y} \sqrt{1 + (y')^2}, \quad y > 0 \qquad (4.29)$$

кўринишда. Агар $y(x_0) = y_0 > 0$, $y(x_1) = 0$, $x_1 = x_0 + y_0 \frac{av}{v^2 - a^2}$ десак, чегаравий масалага (қувловчи учун) келамиз. (4.29) тенгламанинг умумий ечими

$$x = \frac{1}{2C_1\left(1 + \frac{a}{v}\right)} (C_1 y)^{1+\frac{a}{v}} - \frac{1}{2C_1\left(1 - \frac{a}{v}\right)} (C_1 \ y)^{1-\frac{a}{v}} + C_2.$$

бўлгани учун чегаравий шартлардан $C_1 = \frac{1}{y_0}$, $C_2 = y_0 \frac{av}{v^2 - a^2} + x_0$ келиб чиқади. Демак,

$$x = \frac{y_0}{2\left(1 + \frac{a}{v}\right)} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}} - \frac{y_0}{2\left(1 - \frac{a}{v}\right)} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}} + y_0 \frac{av}{v^2 - a^2} + x_0$$

ечим чегаравий масала шартларини қаноатлантиради.

2. Бир жинсли чегаравий масала. Чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги муҳим роль ўйнайди. Бу мавзуга тегишли баъзи маълумотларни баён этиш учун (7.28) муносабатларда g функциялар ўз аргументларига нисбатан чизиқли шаклдан иборат бўлган ҳолни кўрамиз. Аниқроғи g_i функциялар қуйидаги

$$\begin{aligned} g_i(y) &= \alpha_0^{(i)} y(x_0) + \alpha_1^{(i)} y'(x_0) + \ldots + \alpha_{n-1}^{(i)} y^{(n-1)}(x_0) + \\ &+ \beta_0^{(i)} y(x_1) + \beta_1^{(i)} y'(x_1) + \ldots + \beta_{n-1}^{(i)} y^{(n-1)}(x_1) - A_i = \\ &\qquad g_i^0(y) + A_i = 0 \end{aligned} \qquad (7.32)$$

(бунда $\alpha_j^{(i)}$, $\beta_j^{(i)}$, A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, n-1$ — ўзгармас) кўринишда бўлсин. Агар $A_i=0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ бўлса, қўйилган масала *бир жинсли чегаравий масала* дейилади. Агар $\sum_{i=1}^{n} A_i^2 \neq 0$ бўлса, у *бир жинсли бўлмаган масала* бўлади.

n- тартибли чизиқли бир жинсли

$$L(p)y=0 \tag{*}$$

тенглама ва (7.32) чегаравий шартлар берилган бўлсин, (*) ва (7.32) муносабатларни $A_i=0$ бўлганда қаноатлантирадиган $y(x)\in C^{(n)}$ функцияни топиш масаласи (*) тенглама учун *бир жинсли чегаравий масала* дейилади.

Равшанки, ҳар бир бир жинсли чегаравий масала камида битта тривиал ечимга, яъни $y(x)\equiv 0$, $x\in[x_0,\ x_1]$ ечимга эга. Аммо бир жинсли чегаравий масала тривиал бўлмаган ечимларга ҳам эга бўлиши мумкин. Шу муносабат билан қуйидаги теоремани келтирамиз.

7.8- теорема. *Агар $y_1(x), y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x), x\in[x_0, x_1])$ функциялар (*) тенгламанинг чизиқли эркли ечимлари бўлса, у ҳолда $L(p)y=0$, $g_i^0(y)=0$ масала тривиалмас ечимга эга бўлиши учун*

$$D=\begin{vmatrix} g_1^0(y_1) & g_1^0(y_2) & \ldots & g_1^0(y_n) \\ g_2^0(y_1) & g_2^0(y_2) & \ldots & g_2^0(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_n^0(y_1) & g_n^0(y_2) & \ldots & g_n^0(y_n) \end{vmatrix} \tag{7.33}$$

детерминантнинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Теореманинг шартига кўра $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ функциялар $[x_0,\ x_1]$ ораликда чизиқли эркли ечимлар. Шунинг учун $\sum_{i=1}^{n} C_i^2\neq 0$ бўлганда (*) тенгламанинг барча ечимлари

$$y=\sum_{i=1}^{n} C_j y_j(x)$$

формула билан берилади. Жумладан, $g_i^0(y)=0,\ i=1,2,\ \ldots,\ n$ шартни қаноатлантирувчи ечими ҳам шу формула билан берилади. Шу сабабли

$$g_i^0\left(\sum_{i=1}^{n} C_j\, y_j(x)\right)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{7.34}$$

муносабатларга эгамиз, яъни

$$\sum_{j=1}^{n} C_j\, g_i^0(y_j(x))=0$$

ёки

$$\left.\begin{array}{l} C_1g_1^0(y_1)+C_2g_1^0(y_2)+\ldots+C_ng_1^0(y_n)=0,\\ C_1g_2^0(y_1)+C_2g_2^0(y_2)+\ldots+C_ng_2^0(y_n)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1g_n^0(y_1)+C_2g_n^0(y_2)+\ldots+C_ng_n^0(y_n)=0. \end{array}\right\} \qquad (7.35)$$

Энди бир жинсли тенглама бир жинсли чегаравий шартни қаноатлантирадиган тривиалмас ечимга эга дейлик. Унда $\sum\limits_{j=1}^{n} C_j^2 \neq 0$ бўлади. Шунинг учун (7.35) дан $D=0$ экани келиб чиқади. Агар $D=0$ бўлса, у ҳолда (7.35) дан $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} C_j^2 \neq 0$ ўзгармаслар топилади. Демак, ушбу

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n} C_j^0 y_j(x)$$

функция тривиалмас бўлиб, бир жинсли чегаравий масала шартларини қаноатлантиради. Теорема исботланди.

7.5-эслатма. *Агар $g_i^0(y)=0$ чегаравий шартда $i=1, 2, \ldots, m$, $m<n$ бўлса, у ҳолда бир жинсли чегаравий масала тривиалмас ечимга эга; агар (D) матрица ранги r, $r<n (i=1, 2, \ldots, n)$ бўлса, у ҳолда бир жинсли чегаравий масала $C_1, C_2, \ldots C_n$ ларга нисбатан қатъий $(n-r)$ та чизиқли эркли ечимга эга бўлади.* Бу тасдиқларнинг исботи равшан.

7.6-эслатма. *(D) матрицанинг ранги фундаментал система $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ни танлашга боғлиқ эмас.* Ҳақиқатан, бир $y_1, y_2, \ldots, y_n$ фундаментал системадан иккинчи $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ фундаментал системага ўтиш чизиқли алмаштириш ёрдамида, яъни ушбу

$$\bar{y}_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j, \ i=1, 2, \ldots, n$$

формула билан амалга оширилади, бунда a_{ij} лардан тузилган детерминант нолдан фарқли. Алмаштириш натижасида (D) матрица (a_{ij}) матрицага кўпайтирилади. Шунинг учун (D) матрицанинг ранги ўзгармайди. (D) матрица ранги *чегаравий масала ранги* дейилади.

3. Бир жинсли чегаравий масала учун Грин функцияси. Дифференциал ифода $L(p)y$ қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$L(p)y=a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y, \qquad (7.36)$$

$$a_0(x)\neq 0, \ x\in I.$$

7.2-таъриф. *Ушбу*

$$L(p)y=0, \ g_i^0(y)=0, \ i=1, 2, \ldots, n \qquad (7.37)$$

чегаравий масала учун Грин функцияси деб шундай $G(x, \xi)$ функцияга айтиладики, у функция $\{(x, \xi): x_0\leqslant x\leqslant x_1, x_0\leqslant \xi\leqslant x_1\}$ ёпиқ соҳада *аниқланган бўлиб,* $[x_0, x_1]$ *оралиқдан олинган ҳар бир* ξ *учун* x *нинг функцияси сифатида қуйидаги шартларни қаноатлантиради:*

1°. $G(x, \xi)$ *функция* x *ва* ξ бўйича $[x_0, x_1]$ *оралиқда узлуксиз,* x *бўйича* $(n-2)$*-тартибгача узлуксиз дифференциалланувчи;*

2°. $[x_0, x_1]$ *дан олинган ихтиёрий тайинланган* ξ *учун* $G(x,\xi)$ *функция* x *бўйича* $[x_0, \xi]$ *ва* $[\xi, x_1]$ *оралиқларнинг ҳар бирида* $(n-1)$*-ва* n*-тартибли ҳосилаларга ҳам эга, аммо* $(n-1)$*-тартибли ҳосиласи* $x=\xi$ *нуқтада чекли узилишга эга, яъни:*

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\ \xi)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\ \xi)=\frac{1}{a_0(\xi)}; \tag{7.38}$$

3°. $[x_0, \xi)$ ва $(\xi, x_1]$ *интервалларнинг ҳар бирида* x *нинг функцияси сифатида* $G(x, \xi)$ *функция (7.37) муносабатларни қаноатлантиради, яъни* $L(p)G(x, \xi)\equiv 0$, $g_i^0(G(x, \xi))\equiv 0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

7.9- теорема. *Агар (7.37) чегаравий масала фақат тривиал ечимга эга бўлса, у ҳолда шу масала учун ягона Грин функцияси мавжуд.*

Исбот. $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $x\in[x_0, x_1]$ функциялар $L(p)y=0$ тенгламанинг чизиқли эркли ечимлари бўлсин. У ҳолда бу тенгламанинг барча ечимлари $y=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ формула билан ёзилади. Шунинг учун $C_1, C_2\ldots, C_n$ ларнинг бирор қийматида бу формуладан $G(x, \xi)$ функцияни ҳосил қила олсак, теорема исбот бўлган бўлади. Агар Грин функцияси мавжуд бўлса, $x_0\leqslant x<\xi$ интервалда

$$G(x, \xi)=a_1(\xi)y_1(x)+a_2(\xi)y_2(x)+\ldots+a_n(\xi)y_n(x),$$

$\xi<x\leqslant x_1$ интервалда эса

$$G(x, \xi)=b_1(\xi)y_1(x)+b_2(\xi)y_2(x)+\ldots+b_n(\xi)y_n(x)$$

муносабатлар ўринли бўлиши керак. Бундан $(n-2)$-тартибгача ҳосилалари узлуксиз бўлгани учун $x=\xi$ бўлганда ушбу

$$[a_1(\xi)y_1(\xi)+\ldots+a_n(\xi)y_n(\xi)]-[b_1(\xi)y_1(\xi)+\ldots+b_n(\xi)y_n(\xi)]=0,$$

$$[a_1(\xi)y_1'(\xi)+\ldots+a_n(\xi)y_n'(\xi)]-[b_1(\xi)y_1'(\xi)+\ldots+$$
$$+b_n(\xi)y_n'(\xi)]=0,$$

. . . .

$$[a_1(\xi)y_1^{(n-2)}(\xi)+\ldots+a_n(\xi)y_n^{(n-2)}(\xi)]-$$
$$-[b_1(\xi)y_1^{(n-2)}(\xi)+\ldots+b_n(\xi)y_n^{(n-2)}(\xi)]=0$$

тенгликларга эга бўламиз; $(n-1)$-тартибли ҳосила учун эса

$$[a_1(\xi)y_1^{(n-1)}(\xi)+\ldots+a_n(\xi)y_n^{(n-1)}(\xi)]-$$
$$-[b_1(\xi)y_1^{(n-1)}(\xi)+\ldots+b_n(\xi)y_n^{(n-1)}(\xi)]=-\frac{1}{a_0(\xi)}$$

тенгликка эгамиз. Агар $C_v(\xi)=b_v(\xi)-a_v(\xi)$ десак, юқоридаги тенгликлар қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} C_1(\xi)y_1(\xi)+\ldots+C_n(\xi)y_n(\xi)=0, \\ C_1(\xi)y_1'(\xi)+\ldots+C_n(\xi)y_n'(\xi)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1(\xi)y_1^{(n-2)}(\xi)+\ldots+C_n(\xi)y_n^{(n-2)}(\xi)=0, \\ C_1(\xi)y_1^{(n-1)}(\xi)+\ldots+C_n(\xi)y_n^{(n-1)}(\xi)=\frac{1}{a(\xi)}. \end{cases} \tag{7.39}$$

Бу системанинг детерминанти чизиқли эркли $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$ функциялар вронскианининг $x=\xi$ нуқтадаги қийматидан иборат. Маълумки, бу ҳолда $W(\xi)\neq 0$. Шунинг учун (7.41) система детерминанти нолдан фарқли бир жинсли бўлмаган система сифатида ягона ечимга эга. Шу ечимни $C_1^0(\xi)$, $C_2^0(\xi), \ldots, C_n^0(\xi)$ деб белгилаймиз. Демак, (7.41) система $C_v(\xi)$ ларни бир қийматли аниқлайди. Энди $C_v^0(\xi)=b_v^0(\xi)-a_v^0(\xi)$ бўлгани учун $b_v^0(\xi)$ ва $a_v^0(\xi)$ ларни аниқлаш билан шуғулланамиз. Бу коэффициентларни чегаравий шартлардан фойдаланиб топамиз. Унинг учун $g_i^0(y)$ ни бундай ёзамиз:

$$g_i^0(y)=g_{i\alpha}^0(y)+g_{i\beta}^0(y), \tag{7.40}$$

бу ерда

$$g_{i\alpha}^0(y)=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j^{(i)}y^{(j)}(x_0),\ g_{i\beta}^0(y)=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}y^{(j)}(x_0),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Агар (7.40) да y ўрнига $G(x,\xi)$ функцияни қўйсак,

$$g_i^0(G(x,\xi))=a_1(\xi)g_{i\alpha}^0(y_1(x))+\ldots+a_n(\xi)g_{i\alpha}^0(y_n(x))+$$
$$+b_1(\xi)g_{i\beta}^0(y_1(x))+\ldots+b_n(\xi)g_{i\beta}^0(y_n(\xi))=0$$

тенгликка келамиз. Бунда a_k лар ўрнига $b_k-C_k^0$ ларни қўямиз:

$$b_1(\xi)g_{i\beta}^0(y_1(x))+\ldots+b_n(\xi)g_{i\beta}^0(y_n(x))+(b_1(\xi)-$$
$$-C_1^0(\xi))g_{i\alpha}^0(y_1(x))+\ldots+(b_n(\xi)-C_n^0(\xi))g_{i\alpha}^0(y_n(x))=0.$$

Бундан (7.40) га кўра

$$b_1(\xi)g_i^0(y_1(x))+\ldots+b_n(\xi)g_i^0(y_n(x))=$$
$$=C_1^0(\xi)g_{i\alpha}^0(y_1(x))+\ldots+C_n^0(\xi)g_{i\alpha}^0(y_n(x)) \tag{7.41}$$

келиб чиқади. Агар $i=1,2,\ldots,n$ десак, (7.41) дан $b_1, b_2, \ldots b_n$ ларга нисбатан n та чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу бир жинсли бўлмаган система, чунки $\sum\limits_{i=1}^{n}(C_i^0(\xi)^2\neq 0$ ва $g_{i\alpha}^0(y_j(x))\neq 0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Агар $g_{i\alpha}^0(y_i(x))=0$

бўлса, (7.41) дан $b_v^0(\xi)=C_v^0(\xi)$, $a_v^0(\xi)=0$ келиб чиқади. Бу ҳолда теореманинг исботи равшан. Энди $g_{i\alpha}^0(y_i(x))\not\equiv 0$ ҳолни кўрайлик. Бунда 7.8-теоремага кўра (7.41) системанинг детерминанти (b_1, $b_2, \ldots$, b_n ларга нисбатан) нолдан фарқли. Демак, $b_1(\xi)$, ... , $b_n(\xi)$ ларнинг ягона қийматини топа оламиз. Ўша қийматларни $b_1^0(\xi)$, $b_2^0(\xi)$, ... , $b_n^0(\xi)$ десак, $a_1^0(\xi)$, $a_2^0(\xi)$, ... , $a_n^0(\xi)$ лар $a_i^0(\xi)=b_i^0(\xi)-C_i^0(\xi)$ формулалар билан топилади. $a_i(\xi)$ ва $b_i(\xi)$, $i=1, 2, \ldots, n$ лар учун топилган қийматларни тегишли ифодага қўйсак, $G(x, \xi)$ учун

$$G(x, \xi)=\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^0(\xi)y_i(x).x_0\leqslant x<\xi, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^0(\xi)y_i(x).\xi_0\leqslant x<x_1, \end{cases} \tag{7.42}$$

формулага эга бўламиз. Шундай қилиб, Грин функциясининг мавжудлиги ва ягоналиги исбот этилди. Бу теореманинг исботи тегишли Грин функциясини қуриш усулини ҳам ўз ичига олади.

Бир жинсли чегаравий масала чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама учун қўйилган бўлсин, яъни ушбу

$$L(p)y=f(x), \qquad g_i^0(y)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{7.43}$$

масала кўрилаётган бўлсин. Бу масаланинг ечимини қуйидаги теорема беради

7.10-теорема. *Агар (7.37) масала фақат тривиал ечимга эга бўлса, у ҳолда* $[x_0, x_1]$ *оралиқда узлуксиз бўлган ихтиёрий* $f(x)$ *функция учун (7.43) масаланинг ечими мавжуд. Бу ечим ушбу*

$$y(x)=\int_{x_0}^{x_1} G(x,\ \xi)f(\xi)d\xi(G(x,\ \xi)\ \textit{(Грин функцияси)} \tag{7.44}$$

формула билан ифодаланади

Исбот. (7.44) формула билан аникланган бирор $y(x)$ функцияни олайлик. Бу функция (7.43) масаланинг ечими эканини, яъни ушбу

$$L(p)y(x)\equiv f(x) \tag{7.45}$$

$$g_i^0(y(x))\equiv 0,\ i=1,2,\ \ldots,\ n \tag{7.46}$$

айниятлар ўринли эканини исботлаймиз. Аввал (7.46) ни кўрсатайлик. $G(x, \xi)$ функциянинг таърифига кўра олинган $y(x)$ функция $(n-2)$-тартибгача узлуксиз дифференциалланувчи. Шунинг учун ҳосилаларни

$$y^{(v)}(x)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^v G(x,\ \xi)}{\partial x^v}f(\xi)d\xi,\ v=1, 2\ldots,\ n-2 \tag{7.47}$$

каби ёзиш мумкин. (7.47) формулани $v=n-2$ да қуйидагича ёзамиз:

$$y^{(n-2)}(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n-2}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-2}}f(\xi)\,d\xi+\int\limits_{x}^{x_1}\frac{\partial^{n-2}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-2}}f(\xi)\,d\xi.$$

Бундан яна x бўйича ҳосила оламиз:

$$y^{(n-1)}(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n-1}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)\,d\xi+\left(\frac{\partial^{n-2}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-2}}\right)\Big|_{\xi=x-0}f(x)+$$

$$+\int\limits_{x}^{x_1}\frac{\partial^{n-1}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)\,d\xi-\left(\frac{\partial^{n-2}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-2}}\right)\Big|_{\xi=x+0}f(x).$$

Аммо $\dfrac{\partial^{n-2}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-2}}$ функция $x=\xi$ нуқтада узлуксиз бўлгани учун охирги ифода соддалашади:

$$y^{(n-1)}(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n-1}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)\,d\xi+\int\limits_{x}^{x_1}\frac{\partial^{n-1}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^{n-1}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)\,d\xi. \qquad (7.48)$$

Бу формуладан яна бир марта дифференциаллаб, қуйидаги ифодани топамиз:

$$y^{(n)}(x)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n}}f(\xi)\,d\xi+\left(\frac{\partial^{n-1}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-1}}\right)\Big|_{\xi=x-0}f(x)+$$

$$+\int\limits_{x}^{x_1}\frac{\partial^{n}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n}}f(\xi)\,d\xi-\left(\frac{\partial^{n-1}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n-1}}\right)\Big|_{\xi=x+0}f(x)=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^{n}G(x,\ \xi)}{\partial x^{n}}f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{a_0(x)}f(x). \qquad (7.49)$$

Маълумки, $g_i^0(y)$ ифода $y(x)$ ва унинг $(n-1)$-тартибгача ҳосилаларининг $x=x_0$ ва $x=x_1$ нуқтадаги қийматларини ўз ичига олади. Шунга кўра, (7.44) (7.47), (7.48) лардан содда ўзгартиришлар ёрдамида қуйидагига эга бўламиз:

$$g_i^0(y)=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j^{(i)}y^j(x_0)+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}y^j(x_1)=0+\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}y^j(x_1)=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^{j}G(x,\ \xi)}{\partial x^{j}}f(\xi)\,d\xi=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j^{(i)}\frac{\partial^{j}G(x,\ \xi)}{\partial x^{j}}\right)f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x_1}g_i^0(G(x,\ \xi))f(\xi)\,d\xi.$$

$G(x, \xi)$ функция таъриф бўйича $g_i^0(y)=0$ $(i=1, 2, \dots, n)$ чегаравий шартни қаноатлантиради, яъни $g_i^0(G(x,\xi))\equiv 0$. Шунинг учун охирги интеграл нолга тенг ва $g_i^0(y(x))\equiv 0$, $i=1, 2 \dots, n$ муносабатларга эгамиз. Бундан олинган $y(x)$ функция $[x_0, x_1]$ оралиқда. чегаравий шартларни қаноатлантириши келиб чиқади. Демак, (7.46) исбот этилди. Энди (7.45) ни исбот этамиз. Теореманинг шартига кўра (7.37) масала фақат тривиал ечимга эга. 7.9- теоремадан $L(p)\,G(x, \xi)\equiv 0$ экани чиқади. Шунинг учун олинган $y(x)$ функция ҳосилаларининг ўрнига (7.47), (7.48), (7.49) формулалардан фойдаланиб, ўз ифодасини $L(p)y$ дифференциал ифодага қўямиз:

$$L(p)y(x)=a_0(x)\left[\int_{x_0}^{\xi}\frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{a_0(x)}f(x)\right]+$$

$$+a_1(x)\int_{x_0}^{\xi}\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)\,d\xi+\ldots+$$

$$+a_{n-1}(x)\int_{x_0}^{\xi}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}f(\xi)\,d\xi+a_n(x)\int_{x_0}^{\xi}G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi=$$

$$=\int_{x_0}^{\xi}\left[a_0(x)\frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}+a_1(x)\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+a_{n-1}(x)\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}+a_n(x)\,G(x,\xi)\right]f(\xi)\,d\xi+f(x)=$$

$$=\int_{x_0}^{\xi}\underbrace{(L(p)\,G(x,\xi))}_{\equiv\,0}f(\xi)\,d\xi+f(x)=f(x).$$

Демак, (x_0, ξ) интервалда $L(p)y(x)\equiv f(x)$ айният ўринли. Шунга ўхшаш (ξ, x_1) интервалда ҳам шу айният ўринли экани кўрсатилади. Шундай қилиб, $[x_0, x_1]$ интервалда узлуксиз $f(x)$ функция учун олинган $y(x)$ функция (7.43) чегаравий масаланинг ечими бўлади. Теорема исбот бўлди.

4. Бир жинсли бўлмаган чегаравий масала. (7.32) формулада $\sum\limits_{i=0}^{n} A_i^2\neq 0$ бўлсин. Биз бир жинсли бўлмаган чегаравий масалани кўрайлик. Бу ҳолда асосий хулосани қуйидаги теорема ифода этади.

7.11- теорема. *Ушбу $L(p)y=0$ тенглама бир жинсли бўлмаган шартни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга бўлиши учун мос бир жинсли чегаравий масала фақат тривиал ечимга эга бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. Бир жинсли бўлмаган чегаравий масаланинг ечими $y(x)$ функция бўлсин. Унда $L(p)y(x)\equiv 0$, $x\in[x_0,$

$x_1 g_i(y(x)) - A_i \equiv 0$ айниятлар ўринли бўлади. Бир жинсли дифференциал тенгламанинг фундаментал системаси $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функциялардан иборат бўлсин. У ҳолда ихтиёрий ечим $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ формула билан ёзилади. Ўзгармас $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларнинг бирор қийматида $y(x)$ ечим ҳосил бўлсин дейлик, яъни $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i^0 y_i(x)$. Бу функцияни бир жинсли бўлмаган чегаравий шартга қўямиз. Содда ўзгартиришлар натижасида қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^{(i)} \left(\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu^0 y_\nu(x_0) \right)^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(i)} \left(\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu^0 y_\nu(x_1) \right)^{(j)} - A_i =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^{(i)} \left(\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu^0 y_v^{(j)}(x_0) \right) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(i)} \left(\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu^0 y_v^{(j)}(x_1) \right) - A_i =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu^0 \left[\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^{(i)} y_\nu^{(i)}(x_0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(i)} y_\nu^{(j)}(x_1) \right] - A_i = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu^0 g_i^0(y_\nu) - A_i.$$

Демак, ушбу

$$\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu^0 g_i^0(y_\nu) = A_i, \ i = 1, 2, \dots, n \qquad (7.50)$$

системага эгамиз. Бу системанинг детерминанти $D \neq 0$ ((7.33) га қаранг), чунки $\sum_{i=1}^{n} (C_i^0)^2 \neq 0$, $\sum_{i=1}^{n} A_i^2 \neq 0$. Аммо $D \neq 0$ бўлганда мос бир жинсли чегаравий масала 7.8-теоремага кўра фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Етарлилиги. Бир жинсли чегаравий масала фақат тривиал ечимга эга бўлсин. У ҳолда $D \neq 0$ бўлади. Демак, (7.50) га кўра бир жинсли бўлмаган чегаравий масала ягона тривиалмас ечимга эга, чунки (7.50) дан $\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu^2 \neq 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $C_1, C_2, \dots, C_n$ ўзгармаслар бир қийматли топилади. Теорема тўла исбот бўлди.

7.3-натижа. *Агар бир жинсли бўлмаган чегаравий масала иккита $y = \varphi_1(x)$ ва $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) \not\equiv \varphi_2(x)$ ечимга эга бўлса, у ҳолда $y = \varphi_i(x) - \varphi_2(x)$ функция мос бир жинсли чегаравий масаланинг тривиалмас ечими бўлади; аксинча, агар бир жинсли чегаравий масала тривиалмас ечимларга эга бўлса, у ҳолда бир* *жинсли бўлмаган чегаравий масала ё биронта ҳам ечимга эга бўлмайди ёки чексиз кўп ечимларга эга бўлади.*

Исбот. Аввал натижанинг биринчи қисмини исботлаймиз.

Равшанки, $L(p)\varphi_1(x)\equiv 0$, $L(p)\varphi_2(x)\equiv 0$ ва демак, $L(p)(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))\equiv 0$, яна шунга ўхшаш $g_i^0(\varphi_1(x))=A_i$, $g_i^0(\varphi_2(x))=A_i$ $(i=1, 2, \dots, n)$ муносабатлардан $g_i^0(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))\equiv 0$ келиб чиқади. Шунинг учун $y=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ функция бир жинсли чегаравий масала $L(p)y=0$, $g_i^0(y)=0$ учун тривиалмас ечим бўлади.

Энди, агар бир жинсли чегаравий масала тривиалмас $y=y(x)\not\equiv 0$, $x\in[x_0, x_1]$ ечимга эга бўлса, $D=0$ бўлади ((7.33) га қаранг). У ҳолда (7.50) система ё ечимга эга бўлмайди ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади. Натижа исбот этилди.

Энди чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламани олайлик, яъни $L(p)y=f(x)$, шу билан бирга бир жинсли бўлмаган чегаравий шарт ҳам берилган бўлсин. Бошқача айтганда, ушбу

$$\begin{cases} L(p)y=f(x), \\ g_i^0(y)=A_i, \ \sum\limits_{i=1}^{n} A_i^2\neq 0, \ i=1,\ 2\ \dots,\ n \end{cases} \qquad (7.51)$$

бир жинсли бўлмаган чегаравий масалани кўрайлик. Бу масаланинг ечими ҳақида фикр юритиш учун аввал $g_i^0(\eta(x))=A_i$ шартни қаноатлантирадиган ихтиёрий $\eta(x)\in C^n[x_0, x_1]$ функцияни оламиз. Сўнгра $z(x)=y(x)-\eta(x)$ алмаштиришни бажарамиз. Бу $\varphi(x)$ функция учун

$$g_i^0(z(x))=g_i^0(y(x)-\eta(x))=g_i^0(y(x))-g_i^0(\eta(x))\equiv 0,$$

яъни

$$g_i^0(z(x))=0 \qquad (7.52)$$

бир жинсли чегаравий шартга эга бўламиз. Берилган дифференциал тенглама ($z(x)$ функцияга нисбатан)

$$L(p)(\eta(x)+z(x))=f(x)$$

ёки

$$L(p)z(x)=f(x)-L(p)\eta(x)=F(x) \qquad (7.53)$$

кўринишга келади. Энди (7.53), (7.52) бир жинсли чегаравий масалани кўриш мумкин. 7.10-теоремага кўра, агар $L(p)z(x)=0$, $g_i^0(z(x))=0$ масала фақат тривиал ечимга эга бўлса, у ҳолда $[x_0, x_1]$ оралиқда узлуксиз бўлган ихтиёрий $F(x)=f(x)-L(p)\eta(x)$ функция учун (7.53), (7.52) масаланинг ечими мавжуд ва

$$Z(x)=\int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,\ \xi)F(\xi)\,d\xi \qquad (7.54)$$

кўринишда ёзилади. Агар $\eta(x)$ функция мос бир жинсли тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда $L(p)\eta(x)\equiv 0$, $F(x)=f(x)$ бўлади ва

(7.54) формула $z(x)=\int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,\ \xi)f(\xi)d\xi$ кўринишда ёзилиши мумкин.

Шундай қилиб қуйидаги теорема исбот этилди.

7.12- теорема. *Бизга (7.51) бир жинсли бўлмаган чегаравий масала берилган бўлсин.* $[x_0,\ x_1]$ *оралиқда узлуксиз бўлган ва* $g_i^0(y)=A_i$ *бир жинсли бўлмаган чегаравий шартни қаноатлантирадиган ихтиёрий функцияни* $\eta(x)$ *дейлик. У ҳолда, агар* $L(p)(y(x)-\eta(x))=0,\ g_i^0(y(x)-\eta(x))=0$ *масала фақат тривиал ечимга эга бўлса, у ҳолда (7.51) масала ечимга эга ва бу ечим ушбу*

$$y(x)=\eta(x)+\int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,\ \xi)F(\xi)d\xi \tag{7.54'}$$

(бунда $F(x)=f(x)-L(p)\eta(x)$*) формула билан берилади. Агар* $L(p)\eta(x)\equiv 0,\ g_i^0(\eta(x))=A_i(i=1,\ 2,\ \dots\ n)$ *муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда* $F(x)=f(x)$ *ва (7.51) масаланинг ечими*

$$y(x)=\eta(x)+\int\limits_{x_0}^{x_1} G(x,\ \xi)f(\xi)d\xi \tag{7.54''}$$

кўринишда ёзилади

7.4- §. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ОПЕРАТОРНИНГ ХОС ҚИЙМАТЛАРИ ВА ХОС ФУНКЦИЯЛАРИ

1. Бир жинсли чизиқли тенглама учун хос қиймат ва хос функция тушунчаси.

7.3- таъриф. *Агар шундай* $0\neq y(x)\in C^n(I)$ *функция топилсаки, бу функция учун ушбу*

$$L(p)y(x)\equiv\lambda y(x),\qquad x\in I \tag{7.55}$$

айният ўринли бўлса, у ҳолда λ *сон* $L(p)$ *операторнинг хос қиймати,* $y(x)$ *функциянинг ўзи эса* $L(p)$ *операторнинг хос функцияси дейилади.*

Ушбу бир жинсли чегаравий масалани, яъни

$$L(p)y=\lambda y,\qquad g_i^0(y)=0,\ i=1,\ 2,\ \dots,\ n \tag{7.56}$$

масалани кўрайлик. Шу масаланинг тривиалмас ечимларига мос келган λ нинг қийматлари $L(p)$ операторнинг *хос қийматлари,* тегишли тривиалмас ечимлар эса *хос функциялари* дейилади.

Агар $y_1(x)$ ва $y_2(x)$, $x\in I$ функциялар λ нинг битта қийматига мос келган тривиалмас ечим, яъни хос функциялар бўлса, у ҳолда бу фунцияларнинг чизиқли комбинацияси ҳам λ га мос келган хос функция бўлади. Ҳақиқатан, агар

$$L(p)y_1(x)\equiv\lambda y_1(x),\ L(p)y_2(x)\equiv\lambda y_2(x),\ x\in I$$

айниятлар ўринли бўлса, ундан

$$L(p)\,(C_1y_1(x)+C_2y_2(x))\equiv\lambda(C_1y_1(x)+C_2y_2(x))$$

келиб чиқади. Аммо $L(p)y=\lambda y$ бир жинсли тенглама чизиқли эркли ечимлари n та (n — тенгламанинг тартиби) бўлгани учун ушбу

$$L(p)\left(\sum_{j=1}^{k} C_iy_i\right)\equiv\lambda\left(\sum_{j=1}^{k} C_jy_j(x)\right),\ x\in I$$

айният k нинг $k\leqslant n$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлари учун тўғри бўлади. Агар $k>n$ бўлса, чизиқли бир жинсли тенгламанинг ихтиёрий $n+1$ та, демак k та $(k>n)$ ечими чизиқли боғлиқ бўлгани учун $\sum\limits_{j=1}^{k} C_jy_j(x)\equiv 0,\ x\in I$ айниятга келамиз. Бундан олинган λ сонга тривиал ечим мос келиши чиқади. Бу эса хос қиймат ва хос функция таърифига зид.

7.8- теоремага кўра, (7.56) масала тривиалмас ечимга эга бўлиши учун ушбу

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} g_1^0(y_1) & g_1^0(y_2) & \dots & g_1^0(y_n)\\ g_2^0(y_1) & g_2^0(y_2) & \dots & g_2^0(y_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ g_n^0(y_1) & g_n^0(y_2) & \dots & g_n^0(y_n)\end{vmatrix}\tag{7.57}$$

((7.33) га қаранг) детерминант нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Бунда $D(\lambda)$ функция λ га нисбатан бутун аналитик функция бўлиб *), у $L(p)$ операторнинг *характеристик детерминанти* дейилади. Бу ўринда тушунарли бўлиши учун (7.55) тенгламанинг

$$y_j^{(\nu-1)}(x_0,\ \lambda)=\begin{cases}0, \text{ агар } j\neq\nu,\\ 1, \text{ агар } j=\nu\end{cases}\tag{7.58}$$

(бунда $j,\ \nu=1,\ 2,\ \dots,\ n$) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи фундаментал системасини

$$y_1(x,\ \lambda),\ y_2(x,\ \lambda),\ \dots,\ y_n(x,\ \lambda)\tag{7.59}$$

деб белгилайлик. У ҳолда I интервалдан олинган x нинг ҳар бир тайин (муайян) қийматларида (7.59) функциялар λ нинг бутун аналитик функциялари бўлади. Шу сабабдан $D(\lambda)$ ҳам аналитик функциядир.

Юқоридаги фикрлар ва мураккаб бўлмаган мулоҳазалар ёрдамида ушбу теореманинг ўринли эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

7.13- теорема. 1) *$D(\lambda)$ функциянинг ноллари $L(p)$ операторнинг хос қийматларидан иборат; 2) агар $D(\lambda)$ функция айнан нолга тенг*

---

*) Агар бирор I интервалда аниқланган $\chi(x)$ функция шу интервалнинг ҳар бир x_0 нуқтаси атрофида $x-x_0$ нинг даражалари бўйича шу функцияга яқинлашувчи даражали қаторга ёйилса, у ҳолда $\chi(x)$ функция I интервалда *аналитик функция* дейилади.

бўлмаса, у ҳолда $L(p)$ операторнинг хос қийматлари саноқли тўплам бўлиб, улар чекли лимит нуқтага эга бўла олмайди.

Айтиб ўтамизки, агар $D(\lambda)$ функциянинг ноли бўлмаса, у ҳолда $L(p)$ оператор хос қийматларга эга бўла олмайди. Аммо λ хос қиймат $D(\lambda)$ нинг каррали ноли бўлиши мумкин.

Агар λ_0 сон $D(\lambda)$ функциянинг оддий ноли бўлса, бу λ_0 сон $L(p)$ операторнинг *оддий хос қиймати* дейилади.

2. Бир жинсли бўлмаган чизикли тенглама учун хос қиймат ва хос функция тушунчаси. Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} L(p)y=\lambda y+f(x), \\ g_i^0(y)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{array}\right\} \qquad (7.60)$$

масалани кўрайлик, бунда λ — бирор параметр, $f(x)$ функция $L(p)$ оператор коэффициентларининг аниқланиш интервалида аниқланган ва узлуксиз. Бу масала учун хос қиймат ва хос функция тушунчаси тегишли (7.56) масала учун киритилган тушунчанинг ўзгинаси бўлади. Бу ҳолда асосий натижа куйидаги теорема билан ифодаланади.

7.14- теорема. *λ нинг хос қийматлардан фарқ қиладиган барча қийматлари учун $f(x)$ ихтиёрий узлуксиз бўлганда* (7.60) *масала ечимга эга.*

Исбот. Теореманинг шарти бўйича аввал $L(p)y=\lambda y$, $g_i^0(y)=0$ масалани кўриб, тегишли $\lambda_j^0 (j=1,\ 2,\ \ldots)$ ларни топайлик. У ҳолда $L(p)y_i\ (x)=\lambda_i^0(y_j(x),\quad g_i^0\ \ (y_j(x))=0$ бўлади. Энди $\lambda\neq\lambda_j^0$ учун (7.60) масала ечимга эга экани равшан, чунки у (7.45) (7.46) масалага келади. Ҳақиқатан:

$$L(p)y-\lambda y=a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+$$
$$+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y-\lambda y=a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+$$
$$+\ldots+a_{n-1}(x)y'+(a_n(x)-\lambda)y=L_0(p)y,$$

бунда

$$L_0(p)=a_0(x)p^n+\ldots+a_{n-1}(x)p+(a_n(x)-\lambda).$$

Шундай қилиб, $\lambda\neq\lambda_j^0$ бўлганда (7.60) масала ушбу

$$\left.\begin{array}{l} L_0(p)y=f(x) \\ g_i^0(y)=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{array}\right\} \qquad (7.45_0)$$

масалага келади. Демак, 7.10- теоремага кўра (7.60) масала ечимга эга. Теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$-y''=\lambda y,\ y(0)=y(1),\ y'(0)=y'(1),\ 0\leqslant x\leqslant 1$$

чегаравий масалани ечайлик.

Берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

каби ёзилади. Бундан чегаравий шартлардан фойдаланиб, хос қийматларни ва хос функцияларни топишимиз мумкин. Чегаравий шартларни бундай ёзайлик:

$$g_1^0(y)=y(0)-y(1)=0,$$

$$g_2^0(y)=y'(0)-y'(1)=0.$$

Берилган дифференциал тенгламанинг фундаментал системаси $y_1=\cos\sqrt{\lambda}\ x$, $y_2=\sin\sqrt{\lambda}\,x$ функциялардан иборат. Шунинг учун қуйидагиларга эгамиз:

$$g_1^0(y_1)=y_1(0)-y_1(1)=1-\cos\sqrt{\lambda},$$

$$g_1^0(y_2)=y_2(0)-y_2(1)=-\sin\sqrt{\lambda},$$

$$g_2^0(y_1)=y_1'(0)-y_1'(1)=\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda},$$

$$g_2^0(y_2)=y_2'(0)-y_2'(1)=\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda},$$

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\cos\sqrt{\lambda} & -\sin\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}=0.$$

Охирги тенгламадан $(1-\cos\sqrt{\lambda})^2+\sin^2\sqrt{\lambda}=0$ ёки $\cos\sqrt{\lambda}=1$ келиб чиқади. Бундан $\sqrt{\lambda}=2k\pi$ ёки $\lambda_k=(2k\pi)^2(k=0, 1, 2, \ldots)$. Демак, $k\neq0$ бўлганда ҳар бир хос қиймат λ_k учун икки чизиқли эркли хос функция $\cos(2k\pi)x$, $\sin(2k\pi)x$ тўғри келади, яъни ҳар бир хос қиймат λ_k икки каррали хос қийматдир. Агар $k=0$ бўлса, $\lambda_0=0$ бўлади. Бу хос қийматга ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида $y\equiv1$ хос функция тўғри келади, яъни $\lambda_0=0$ бир каррали хос қийматдир.

2. Ушбу

$$-y''=\lambda y+f(x),\ y(0)=A_0,\ y(l)=A_1,\ 0\leqslant x\leqslant l$$

чегаравий масалани кўрайлик. Мос бир жинсли дифференциал тенгламанинг фундаментал системаси $y_1(x)=\cos\sqrt{\lambda}\,x$, $y_2(x)=\sin\sqrt{\lambda}\,x$ функциялардан иборат. $D(\lambda)$ детерминантни тузамиз. Агар $g_1^0(y)=y(0)$, $g_2^0(y)=y(l)$ эканини ҳисобга олсак:

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(l) & y_2(l) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda}\,l & \sin\sqrt{\lambda}\,l \end{vmatrix}=\sin\sqrt{\lambda}\,l.$$

Бундан $D(\lambda)=0$ тенгламанинг илдизлари $\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k=1, 2, \ldots$. Шу хос қийматлар учун берилган масалада ($f(x)\neq0$ ҳолда) ё мавжудлик бузилади ёки ечимнинг ягоналиги бузилади. 7.14-теоремага кўра λ нинг $\lambda\neq\lambda_k$ қийматлари учун берилган масала ечимга эга. Энди

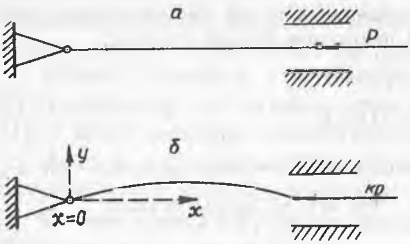
$$-y''=\lambda y,\ y(0)=0,\ y(l)=0$$

бир жинсли чегаравий масалани ечамиз.

Маълумки, берилган тенгламанинг умумий ечими $y=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$ кўринишда ёзилади. Ундан

$$C_1=0,\ C_1\cos\sqrt{\lambda}\,l+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$$

ёки $C_1=0$, $C_2\neq0$ бўлиши лозимлиги туфайли $\sin\sqrt{\lambda}\,x=0$ дан яна $\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k=1, 2, \ldots$ келиб чиқади. Шунинг учун берилган чегаравий масаланинг ечими $y=C_2\sin\frac{k\pi}{l}x$ (C_2 — ихтиёрий ўзгармас) функциядан иборат бўлади. Равшанки, агар $l=\pi$ бўлса, $\lambda_k=k^2$ бўлади. Ечимнинг кўриниши $y=C_2\sin kx$ каби бўлади.



35- чизма

Кўрилган масалага олиб келадиган амалий масала баёнига тўхталамиз.

Узунлиги l бўлган бир жинсли таранг стержень горизонтал x ўқи бўйлаб жойлашган бўлиб, P куч таъсирида қисиляпти. Бунда стерженнинг бир учи силжимайди, иккинчи учи эса x ўқида қолса-да, мустаҳкамланган нуқта атрофида эркин бурилиши мумкин (35, а- чизма). P кучнинг миқдори $P_{кр}$ (критик миқдор) га етганда стержень эгила бошлайди (35, б- чизма). Агар y деб стержень нуқтасининг кўндаланг силжиши белгиланса, бу x нинг функцияси бўлади, яъни $y=y(x)$, $0<x\leqslant l$. Иккита учи маҳкамланган (кўндалангига силжимайдиган) бўлгани учун $y(0)=y(l)=0$ бўлади. Материаллар қаршилиги курсидан маълумки, $y(x)$ функция катта аниқликда ушбу $y''+\frac{P}{EI}y=0$ дифференциал тенгламани қаноатлантиради. Унда E ва I — мос равишда стержень материалининг *Юнг модули* ва кўндаланг кесимининг *инерция моменти.*

Бу тенгламани ва чегаравий шартни

$$-y''=\frac{P}{EI}y,\ y(0)=y(l)=0$$

кўринишда ёзсак, бир жинсли чегаравий масалага келамиз.

Таърифга кўра, $\frac{P}{EI}<\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ бўлганда юқоридаги масала фақат тривиал ечимга эга, яъни бу ҳолда стерженнинг эгилиши рўй бермайди. P кучни орттира бориб, $\frac{P_{кр}}{EI}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ тенгликка эришилса, қўйилган масала фақат тривиал ечимгагина эга бўлиб қолмай, тривиалмас ечимга ҳам эга бўлади; ўша ечим $y=C\sin\frac{\pi}{l}x$ кўринишда бўлади. Бу ҳолда стерженнинг эгилиши рўй беради. $P_{кр}$ кучни топиб ўрнига қўямиз:

$$P_{кр}=EI\left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Бу ифода 1757 йилда Л. Эйлер томонидан топилган.

8- боб

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

8.1- §. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ НОРМАЛ СИСТЕМАСИ. УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР

n- тартибли оддий дифференциал тенгламалар 4- бобда кўрилган эди. Унда номаълум функция битта $y(x)$ бўлиб, тенгламада унинг ҳосилалари иштирок этар эди ((4.1) ва (4.2) ларга қаранг). Агар номаълум функциялар n та бўлиб, улар битта эркли ўзгарувчининг функциялари бўлса, қуйидаги n та дифференциал тенгламани кўриш мумкин:

$$F_i(x,\ y_1,\ y_1',\ldots,\ y_1^{(m_1)};\ldots;\ y_i,\ y_i',\ldots,$$
$$y_i^{(m_i)};\ldots;\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y_n^{(m_n)})=0,\ i=1,\ 2,\ldots,\ n, \tag{8.1}$$

бунда $F_1, F_2, \ldots, F_n$ функциялар $(m_1+m_2+\ldots+m_n+n+1)$ ўлчовли фазонинг бирор $D_{m_1+m_2+\ldots m_n+n+1}$ соҳасида аниқланган. Бу (8.1) система $y_1^{(m_1)},\ y_2^{(m_2)},\ \ldots,\ y_n^{(m_n)}$ ҳосилаларга нисбатан ечилади деб қарасак, ушбу

$$y_i^{(m_i)}=f_i(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(m_1-1)};\ \ldots;\ y_n,\ y_n',\ \ldots,$$
$$y_n^{(m_n-1)}),\ i=1,\ 2,\ldots,\ n \tag{8.2}$$

системага келамиз. Равшанки, f_i функциялар $m_1+m_2+\ldots+m_n+$ $+1$ ўлчовли фазонинг бирор $D_{m_1+m_2+\ldots m_n+1}$ соҳасида аниқланган деб қараш лозим. Шу (8.2) тенгламалар системаси дифференциал тенгламаларнинг *каноник системаси* деб аталади. Каноник системаларни яна бошқа кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Дифференциал тенгламаларнинг икки системаси бир хил ечимларга эга бўлса, бу системалар *эквивалент* дейилади. Энди каноник системаларни унга эквивалент система кўринишига келтирамиз:

(8.2) системада бундай белгилашларни бажарамиз:

$$y_1=y_{10},\ y_1'=y_{10}'=y_{11},\ y_1''=y_{11}'=y_{12},\ \ldots,\ y_1^{(m_1-1)}=y_{1m_1-1},$$
$$y_2=y_{20},\ y_2'=y_{20}'=y_{21},\ y_2''=y_{21}'=y_{22},\ \ldots,\ y_1^{(m_2-1)}=y_{2m_2-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n=y_{n0},\ y_n'=y_{n0}'=y_{n1},\ y_n''=y_{n1}'=y_{n2},\ \ldots,\ y_n^{(m_n-1)}=y_{nm_n-1}.$$

Белгилашлар натижасида n та $y_1, y_2, \ldots, y_n$ номаълум функциялар ўрнига $m=m_1+m_2+\ldots+m_n$ та номаълум функцияга эгамиз. Берилган (8.2) система бундай ёзилади:

$$y_{10}'=y_{11},$$
$$y_{11}'=y_{12},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{1m_1-2}'=y_{1m_1-1},$$
$$y_{1m_1-1}'=f_1(x,\ y_{10},\ y_{11},\ \ldots,\ y_{1m_1-1};\ y_{20},\ y_{21},\ \ldots,$$
$$y_{y_{2m_2-1}};\ \ldots;\ y_{n0},\ y_{n1},\ \ldots,\ y_{nm_n-1});$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{n0}'=y_{n1},$$
$$y_{n1}'=y_{n2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{nm_n-2}'=y_{nm_n-1},$$
$$y_{nm_n-1}'=f_n(x,\ y_{10},\ y_{11},\ \ldots,\ y_{1m_1-1};\ y_{20},\ y_{21},\ \ldots,$$
$$y_{2m_2-1};\ \ldots;\ y_{n0},\ y_{n1},\ \ldots,\ y_{nm_n-1}).$$

Биз биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системасига эгамиз. Бундай системалар текшириш, интеграллаш учун анча қулай хусусиятларга эга. Биз юқорида ушбу

$$\left.\begin{array}{l} y'_1=f_1(x,y_1,y_2,\ \dots,\ y_n), \\ y'_2=f_2(x,y_1,y_2,\ \dots,\ y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_n=f_n(x,y_1,y_2,\ \dots,\ y_n) \end{array}\right\} \tag{8.3}$$

системанинг хусусий кўринишига келдик. Шу (8.3) система кўринишида n- тартибли дифференциал тенгламани, яъни ушбу

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \dots,\ y^{(n-1)})$$

тенгламани ҳам ёзиш мумкин. Унинг учун

$$y=y_1,\ y'=y'_1=y_2,\ y''=y'_2=y_3,\ \dots,\ y^{(n-1)}=y_n,$$

$$y^{(n)}=y'_n=f(x,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n)$$

белгилашларни бажариш етарли.

Шу муносабат билан биз асосан (8.3) кўринишдаги системаларни ўрганамиз. Бундай системалар *оддий дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси* дейилади. (8.3) системада n — системанинг *тартиби* дейилади.

n та биринчи тартибли тенгламаларнинг нормал системаси маълум шартлар бажарилганда битта n- тартибли тенгламага келтирилиши мумкин. Юқоридаги (8.3) системани y_1 га нисбатан n- тартибли тенгламага келтирамиз. Бунинг учун аввало $f_1, f_2, \dots, f_n$ функциялар $y_1, y_2, \dots, y_n$ лар бўйича n марта узлуксиз дифференциалланувчи деб қараймиз. (8.3) нинг биринчи тенгламасини дифференциаллаймиз:

$$y''_1=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}y'_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}y'_2+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}y'_n$$

ёки

$$y''_1=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}f_2+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n=F_2(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n).$$

Агар ҳосил бўлган муносабатни яна дифференциалласак,

$$y'''_1=\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial F_2}{\partial y_2}f_2+\dots+\frac{\partial F_2}{\partial y_n}f_n=F_3(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n).$$

Шунга ўхшаш топамиз:

$$y_1^{(n-2)}=F_{n-2}(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n),$$

$$y_1^{(n-1)}=\frac{\partial F_{n-2}}{\partial x}+\frac{\partial F_{n-2}}{\partial y_1}f_1+\dots+\frac{\partial F_{n-2}}{\partial y_n}f_n=F_{n-1}(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n),$$

$$y_1^{(n)}=\frac{\partial F_{n-1}}{\partial x}+\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1}f_1+\dots+\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}f_n=F_n(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n).$$

Шундай қилиб, қуйидагига эгамиз:

$$\begin{cases} y_1' = F_1(x, y_1, \dots, y_n), \ F_1 = f_1, \\ y_1'' = F_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(x, y_1, \dots, y_n), \\ \quad y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \tag{8.4}$$

Эслатиб ўтамизки, кетма-кет дифференциаллаш мумкин бўлиши учун $f_1, f_2, \dots, f_n$ функциялар барча аргументлари бўйича $(n+1)$ ўлчовли бирор D_{n+1} соҳада $(n-1)$ марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиши етарли. Энди $y_2, y_3, \dots, y_n$ ларни номаълум деб қараб, уларга нисбатан ушбу системани қурайлик:

$$\left.\begin{array}{r} y_1' = f_1, \\ y_1'' = F_2, \\ \dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)} = F_{n-1}. \end{array}\right\} \tag{8.5}$$

Бу система $y_2, y_3, \dots, y_n$ ларга нисбатан ечилиши мумкин бўлиши учун ушбу

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \dots, y_n)}$$

якобиан $y_2, y_3, \dots, y_n$ ларнинг $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in D_{n+1}$ шартни қаноатлантирадиган қийматлари соҳасидан олинган $(y_2^0, y_3^0, \dots, y_n^0)$ нуқтанинг бирор атрофида нолдан фарқли бўлиши етарли. Шундай бўлсин дейлик. У ҳолда (8.5) системадан топамиз:

$$y_2 = \psi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \dots, y_n = \\ = \psi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}).$$

Бу ифодаларни (8.4) системанинг охирги тенгламасига қўйсак, n-тартибли юқори ҳосилага нисбатан ечилган битта

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, \psi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \dots, \\ \psi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \tag{8.6}$$

тенгламага келамиз.

Агар $y_1 = \varphi_1(x)$, $x \in I$ функция (8.6) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда $y_2, \dots, y_n$ лар учун ушбу

$$y_2 = \varphi_2(x) \equiv \psi_2(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \dots, \varphi_1^{(n-1)}(x)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x) \equiv \psi_n(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \dots, \varphi_1^{(n-1)}(x))$$

муносабатларни топамиз. Кейинги мулоҳазаларда зарур бўлган (8.3) системанинг ечими тушунчасини киритайлик.

8.1- таъриф. *Бизга (8.3) система берилган бўлиб, унда $f_1, \ldots, f_n$ функциялар $(n+1)$ ўлчовли фазонинг D_{n+1} соҳасида аниқланган бўлсин. Агар бирор I интервалда аниқланган*

$$y_1=\varphi_1(x),\ y_2=\varphi_2(x),\ \ldots,\ y_n=\varphi_n(x) \tag{8.7}$$

функциялар системаси учун қуйидаги учта шарт:

1°. $\varphi_i(x)\in C^1(I),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$

2°. $(x,\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x))\in D_{n+1},\ x\in I;$

3°. $\varphi_i'(x)\equiv f_i(x,\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)),\ x\in I,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$

ўринли бўлса, у ҳолда (8.7) функциялар системаси (8.3) системанинг ечими дейилади; (8.3) системанинг ҳар бир (8.7) ечимининг графиги унинг интеграл эгри чизиғи ёки соддагина интеграл чизиғи дейилади.

Энди юқоридаги мулоҳазаларни давом эттирамиз, яъни

$$y_1=\varphi_1(x),\ y_2=\psi_2,\ \ldots,\ y_n=\psi_n$$

функциялар (8.3) системанинг ечими эканини кўрсатамиз. Равшанки, ушбу

$$\varphi_1'(x)\equiv f_1(x,\ \varphi_1(x),\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n),\ x\in I$$

$$\varphi''_1(x)\equiv\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1+\ \ldots\ +\frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n$$

айниятлар ўринли. Улардан биринчисини x бўйича дифференциалласак:

$$\varphi''_1(x)\equiv F_2\equiv\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\varphi_1'+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\psi_2'+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\psi_n'.$$

Бундан охирги айниятларнинг иккинчисини ҳадма-ҳад айирамиз:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\varphi_1'-f_1)+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\varphi_2'-f_2)+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\varphi_n'-f_n)\equiv 0.$$

Шунга ўхшаш ҳисоблашлар ёрдамида қуйидагиларни топамиз:

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1}(\varphi_1'-f_1)+\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\varphi_2'-f_2)+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial y_n}(\varphi_n'-f_n)\equiv 0,$$

$$\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1}(\varphi_1'-f_1)+\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2}(\varphi_2'-f_2)+\ldots+\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}(\varphi_n'-f_n)\equiv 0.$$

Аммо $\varphi_1'(x)\equiv f_1$ бўлгани учун қуйидаги системага келамиз:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}(\varphi_2'-f_2)+\ldots+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}(\varphi_n'-f_n)\equiv 0,\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2}(\varphi_2'-f_2\equiv)+\ldots+\dfrac{\partial F_2}{\partial y_n}(\varphi_n'-f_n)\equiv 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2}(\varphi_2'-f_2)+\ldots+\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}(\varphi_n'-f_n)\equiv 0.\end{cases} \tag{8.8}$$

Бу системани $\varphi_2'-f_2,\ \ldots,\ \varphi_n'-f_n$ ларга нисбатан қаралса, унинг детерминанти шартга кўра нолдан фарқли. Шунинг учун (8.8) система фақат тривиал ечимга эга, яъни ушбу

$$\varphi_2' \equiv f_2,\ \varphi_3' \equiv f_3,\ \ldots,\ \varphi_n' \equiv f_n$$

айниятга эгамиз. Энди $\varphi_1' \equiv f_1$ бўлгани учун $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ функциялар системаси (8.3) системанинг ечими экани келиб чиқади. Демак, (8.3) система билан (8.6) тенглама эквивалентдир.

Қайд қилиб ўтамизки, агар (8.3) системада f_1 функция y_2, $y_3, \ldots, y_n$ ларга боғлиқ бўлмаса, бу системани y_1 га нисбатан n- тартибли битта дифференциал тенгламага келтириб бўлмайди. Бу ҳолда $y_1' = f_1(x, y_1)$ бўлганидан

$$f_1(x, y_1) = F_1(x, y_1),\ y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 = F_2(x, y_1),\ \ldots,$$

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1)$$

ларга эгамиз. Аммо бу $F_1, F_2, \ldots, F_n$ функциялар $y_2, y_3, \ldots, y_n$ ларга боғлиқ бўлмагани учун,

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \ldots, y_n)} \equiv 0$$

айниятга келамиз. Тўғри, $y_1^{(n)} = F_n(x, y_1)$ тенглама y_1 га нисбатан n- тартибли, аммо у (8.3) системага эквивалент эмас! Бундан кўринадики, берилган системани ихтиёрий $y_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ га нисбатан n- тартибли битта тенгламага келтириш, умуман айтганда, мумкин эмас. Агар бирор y_i учун

$$\frac{D(F_1, F_2 \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)} \neq 0$$

бўлса, у ҳолда шу y_i функцияга нисбатан n- тартибли битта дифференциал тенгламани ҳосил қила оламиз.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

система учун $y_1 = \cos x$, $y_2 = -\sin x$ функциялар системаси ечим бўлади. Бу ҳолда $D_3 = R^3$ бўлиб, 8.1- таърифнинг шартлари $\cos x$ ва $-\sin x$ лар учун $-\infty < x < \infty$ интервалда бажарилади. Берилган системани битта иккинчи тартибли тенгламага келтириш осон. Унинг учун системанинг биринчи тенгламасини дифференциаллаймиз ва иккинчисидан фойдаланамиз:

$$y_1'' = y_2' = -y_1 \text{ ёки } y_1'' + y_1 = 0.$$

Равшанки, $F_1 = y_2$, $F_2 = y_2'(= -y_1)$ бўлганидан $\dfrac{D(F_1)}{D(y_2)} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} = 1 \neq 0$ ва $y_1' = F$ (яъни $y_1' = y_2$) дан y_2 учун ифодани $y_1'' = F_2$ ёки $y_1'' = y_2'$ тенгламага қўйиш лозим. Шу сабабли юқоридаги $y_1'' + y_1 = 0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламанинг умумий ечими $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $y_2 = +y_1'$ бўлгани учун $y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$ келиб чиқади. Шундай қилиб, берилган системанинг ихтиёрий ечими

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}$$

формула билан ёзилади.

Кўрилган мисолда ихтиёрий ечим формуласи топилди. Бу умумий ечим тушунчасига олиб келади. Шу муносабат билан умумий ечимнинг қатъий таърифини келтирамиз. Мулоҳазаларни осонлаштириш учун аввал Қоши масаласини кўрамиз.

Қоши масаласининг қўйилиши: (8.3) система берилган бўлиб, унинг ўнг томонидаги $f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n$ функциялар D_{n+1}, $D_{n+1}\subset R^{n+1}$ соҳада аниқланган бўлсин. Агар $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)\in D_{n+1}$ нуқта тайинланган бўлса, у ҳолда (8.3) системанинг

$$y_1(x_0)=y_1^0,\ y_2(x_0)=y_2^0,\ \dots,\ y_n(x_0)=y_n^0 \tag{8.9}$$

шартларни қаноатлантирадиган ечими топилсин. Бошқача айтганда, Қоши масаласи D_{n+1} соҳанинг тайинланган $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ нуқтасидан ўтадиган интеграл чизиқни топишдан иборат. Шуни таъкидлаб ўтамизки, Қоши масаласида ечимнинг аниқланиш интервали кўрсатилмайди. $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ нуқтадан (8.3) системанинг битта, иккита ёки ундан кўп интеграл чизиқлари ўтиши мумкин. Кейинги мулоҳазаларни назарда тутиб D_{n+1}^* билан шундай нуқталар соҳасини белгилаймизки, бу соҳанинг ҳар бир нуқтасидан (8.3) системанинг ягона интеграл чизиғи ўтади. Равшанки, $D_{n+1}^*\subset D_{n+1}$.

8.2-таъриф. *Ҳар бири n та $C_1, C_2, \dots, C_n$ ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ бўлган n та ихтиёрий узлуксиз дифференциалланувчи*

$$\left.\begin{aligned} y_1&=\varphi_1(x,\ C_1,\ \dots,\ C_n),\\ y_2&=\varphi_2(x,\ C_1,\ \dots,\ C_n),\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ y_n&=\varphi_n(x,\ C_1,\ \dots,\ C_n) \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

функцияни олайлик. Агар D_{n+1}^* соҳанинг ҳар бир $(x, y_1, \dots, y_n)$ нуқтаси учун (8.10) система $C_1, C_2, \dots, C_n$ ларга нисбатан

$$C_k=\psi_k(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n),\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n \tag{8.11}$$

ечимга эга бўлиб, бу ψ_k функцияларни қуйидаги

$$\frac{dy_k}{dx}=\varphi_k'(x,\ C_1,\ \dots,\ C_n).\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n \tag{8.12}$$

тенгламаларга қўйганда (8.3) система ҳосил бўлса, яъни ушбу

$$\frac{dy_k}{dx}=\varphi_k'(x,\ \psi_1(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n),\ \dots,\ \psi_n(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n))=$$
$$=f_k(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n) \tag{8.13}$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда (8.10) функциялар системаси (8.3) системанинг D_{n+1}^* соҳада аниқланган умумий ечими дейилади.

Мисол. Биз юқорида кўрилган мисолда $y_1'=y_2$, $y_2'=-y_1$ системанинг ихтиёрий ечими учун $y_1=C_1\cos x+C_2\sin x$, $y_2=-C_1\sin x+C_2\cos x$ формулага эга эдик. Бу формула умумий ечимни беради. Ҳақиқатан, C_1 ва C_2 га нисбатан ёзилган

$$\begin{cases} C_1\cos x + C_2\sin x = y_1, \\ C_1\sin x - C_2\cos x = -y_2 \end{cases}$$

бир жинсли бўлмаган чизиқли алгебраик тенгламалар системасидан (унинг детерминанти (-1) га тенг) $C_1 = y_1\cos x - y_2\sin x$, $C_2 = y_2\cos x + y_1\sin x$ га эгамиз. Бу ифодаларни $y_1' = -C_1\sin x + C_2\cos x$, $y_2' = -C_1\cos x - C_2\sin x$ тенгликларга қўямиз:

$$\begin{gathered} y_1' = -(y_1\cos x - y_2\sin x)\sin x + (y_2\cos x + y_1\sin x)\cos x = \\ = -y_1\cos x\ \sin x\ \ + y_2\sin^2 x + y_2\cos^2 x + y_1\sin x\cos x = y_2; \\ y_2' = -(y_1\cos x - y_2\sin x)\cos x - (y_2\cos x + y_1\sin x)\sin x = \\ = -y_1\cos^2 x + y_2\sin x\cos x - y_2\cos x\sin x - y_1\sin^2 x = -y_1. \end{gathered}$$

Бундан кўринадики, берилган система келиб чиқди.

Юқорида киритилган D^*_{n+1} соҳанинг ҳар бир нуктасидан (8.3) системанинг ягона интеграл чизиғи ўтади. Умумий ечим таърифига кўра $C_1, C_2, \dots, C_n$ ўзгармасларнинг турли қийматларида биз системанинг тегишли ечимларини ҳосил қиламиз. Бу ечимларни *хусусий ечим* дейилади. Ҳар бир хусусий ечим учун, яъни

$$y_1 = \varphi_1(x,\ C_1^0,\ \dots,\ C_n^0),\ y_2 = \varphi_2(x,\ C_1^0,\ \dots,\ C_n^0),\ \dots,$$
$$y_n = \varphi_n(x,\ C_1^0,\ \dots,\ C_n^0)$$

ечим учун ушбу $f(x, \varphi_1, (x, C_1^0, \dots, C_n^0), \dots, \varphi_n(x, C_1^0 \dots, C_n^0)) \in D^*_{n+1}$ *тегишлилик шарти* бажарилади. $(n+1)$ ўлчовли D^*_{n+1} соҳа хусусий ечимларнинг графикларидан иборат бўлган интеграл чизиқлар билан қопланган, яъни D^*_{n+1} соҳанинг ихтиёрий $(x, y_1, \dots, y_n)$ нуқтасидан ягона интеграл чизиқ ўтади (таъриф бўйича).

Энди D_{n+1} соҳанинг D^*_{n+1} соҳага тегишли бўлмаган нуқталарини, яъни ушбу $D_{n+1} \setminus D^*_{n+1} = D^0$ соҳанинг нуқталарини текширайлик. Бу D^0 соҳанинг нуқталаридан ё битта ҳам интеграл чизиқ ўтмайди, ёки биттадан ортиқ интеграл чизиқ ўтади. Аммо биз (8.3) системанинг ўнг томони D_{n+1} соҳада узлуксиз бўлган ҳолни кўраяпмиз. Бу ҳолда ҳар бир $(x, y_1, \dots, y_n) \in D_{n+1}$ нуқтадан, демак, ҳар бир $(x, y_1, \dots, y_n) \in D^0$ нуқтадан камида битта интеграл чизиқ ўтади. Биз кўраётган ҳолда D° соҳанинг ҳар бир нуқтасидан биттадан ортиқ интеграл чизиқ ўтади, яъни D° соҳанинг ҳар бир нуқтасида ечимнинг ягоналиги шарти бузилади. Ҳар бир нуқтасида ечимнинг ягоналиги хоссаси бузиладиган ечимлар системанинг *махсус ечими* дейилади (система учун ҳам 3.4- таърифга ўхшаш таъриф киритиш мумкин).

$f_k(x, y_1, \dots, y_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$ функциялар ёпиқ $D^*_{n+1} = \overline{D^*}_{n+1}$ тўпламда қаралянти дейлик. Ечимнинг ягоналиги бузиладиган нуқталар шу тўпламнинг чегарасида ётади, чунки белгилаш бўйича D^*_{n+1} тўпламда умумий ечим аниқланган ва демак, бу тўпламнинг биронта ҳам ички нуқтасидан махсус ечимнинг графиги* ўт-

---

*) Умумий ва махсус ечимлар ҳақидаги тўла маълумотни Н. П. Еругиннинг китобидан ўқиш мумкин [12].

майди. Агар $\partial\overline{D}_{n+1}$ деб $\overline{D}_{n+1}$ тўпламнинг чегарасини белгиласак, юқорида киритилган D° тўплам асосан шу $\partial\overline{D}_{n+1}$ дан иборат бўлади, яъни $D^\circ=\partial\overline{D}_{n+1}$. Бу ҳолда $D^*_{n+1}=D_{n+1}$ (очиқ тўплам), $D^\circ=\overline{D}_{n+1}\setminus D^*_{n+1}$. Махсус ечим ихтиёрий ўзгармасларни ҳам ўз ичига олиши мумкин. Аммо у ечимлар $(n+1)$ ўлчовли тўплам чегарасида ётгани учун ихтиёрий ўзгармаслар сони n дан кам бўлади.

Мисол. Ушбу $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{y}$, $\frac{dx}{dt}=y$, $y\geqslant 0$

системанинг умумий ва махсус ечимлари топилсин.

Бу системанинг умумий ечими

$$y=(t+C_1)^2,\ x=\frac{(t+C_1)^3}{3}+C_2$$

формула билан ёзилади. Буни таърифга кўра бевосита ҳисоблаб билиш мумкин. Аммо $y=0$, $x=C$ (C — ихтиёрий ўзгармас) функциялар ҳам ечим ва умумий ечим формуласидан C_1 ва C_2 ларнинг биронта ҳам қийматида ҳосил бўлмайди. Демак, $y=0$, $x=C$ — махсус ечимдир. $f_1(t,x,y)=2\sqrt{y}$, $f_2(t,x,y)=y$ функциялар учун $\overline{D}_2=\{(t,x,y):\ -\infty<x<\infty,\ y\geqslant 0\}$. Бу тўплам ёпиқ, унинг чегараси $\partial\overline{D}_2=\{y=0\}$. Махсус ечим шу чегарада ётади ва битта ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олади.

Яна D^*_{n+1} соҳага қайтайлик. Шу соҳага тегишли ҳар бир $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)\in D^*_{n+1}$ нуқта учун ягона $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ қийматлар мос келади, ва аксинча, $x=x_0$ бўлганда $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ ларга ягона $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ лар мос келади. Шунинг учун баъзи ҳолларда ечимни

$$y_k=\varphi_k(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)\ \ k=1, 2, \ldots, n \tag{8.14}$$

кўринишда ҳам ёзилади. Бу ерда $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ лар ихтиёрий бўлгани учун (8.14) кўринишда ёзилган ечимни *Коши формасида ёзилган умумий ечим* дейилади.

8.2-§. НОРМАЛ СИСТЕМА УЧУН МАВЖУДЛИК ВА ЯГОНАЛИК ТЕОРЕМАЛАРИ

Биз (8.5) система учун мавжудлик ва ягоналик теоремалари билан танишамиз. Аввал (8.3) системани (ёзувни анча қулайлаштирадиган) вектор шаклда ёзамиз:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{8.15}$$

бунда $y=\begin{pmatrix} y_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_n\end{pmatrix}$ $f=\begin{pmatrix} f_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n\end{pmatrix}$ $\frac{dy}{dx}=\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{dy_n}{dx}\end{pmatrix}$ лар устун векторлар. Баъзи ҳолларда яна координаталар ёрдамида ёзишга қайтамиз. Вектор шаклда умумий ечим

$$y=\varphi(x,\ C)\ \text{ёки}\ y=\varphi(x,\ x_0,\ y^0)$$

кўринишда, хусусий ечим эса $y=\varphi(x)$ ёки x_0, y^0 лар тайинланган бўлса, $y=\varphi(x, x_0, y^0)$ кўринишда ёзилади. $f(x, y)$ вектор-функциядан y вектор бўйича олинган ҳосила $\frac{\partial f}{\partial y}$ ушбу

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

матрицадан иборат.

8.1- теорема (Коши теоремаси). *Агар* (8.3) *системада* $f_1, \dots , f_n$ *функциялар* $(n+1)$ *ўлчовли* D_{n+1} *соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, бу функцияларнинг* $y_1, \dots, y_n$ *лар бўйича ҳосиласи, яъни* $\frac{\partial f_i(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)}{\partial y_j}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ *функциялар* $Q_{n+1}(Q_{n+1}\subset D_{n+1})$ *соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда:*

1°. (8.3) *системанинг бирор* I *интервалда аниқланган ва ихтиёрий тайинланган* $(x_0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_n^0)\in Q_{n+1}$ *нуқта учун* $\varphi_i(x_0)=y_i^0$ $(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ *шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуд;*

2°. *Агар* $\varphi(x), x\in I_1$ *ва* $\psi(x), x\in I_2$ *вектор-функцияларнинг ҳар бири* (8.15) *тенгламанинг ечими бўлиб,* $\varphi(x_0)=\psi(x_0)=y^0$, $y^0=(y_1^0,\ \dots,\ y_n^0)$ * *шарт бажарилса, у ҳолда бу* $y=\varphi(x)$ *ва* $y=\psi(x)$ *ечимлар аниқланиш интервалларининг умумий қисмида устма-уст тушади, яъни*

$$\varphi(x)\equiv\psi(x),\ x\in I_1\cap I_2.$$

8.3-таъриф. *Агар* $f_1(x, y_1, \dots, y_n), f_2(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$ *функциялар* D_{n+1} *соҳада аниқланган бўлиб, шу функциялар учун шундай* $L\geqslant 0$ *сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрий икки* $(x,\ y^{(1)})\in D_{n+1}$, $(x,y^{(2)})\in D_{n+1}$ *нуқта учун ушбу*

$$|f_i(x,\ y^{(1)})-f_i(x,\ y^{\ (2)})|\leqslant L\ \left(\sum_{j=1}^{n}\ |y_j^{(1)}-y_j^{(2)}|\right),$$
$$i=1,\ 2,\ \dots,\ n \tag{8.16}$$

тенгсизликлар ўринли бўлса, у ҳолда тегишли функциялар D_{n+1} *соҳада* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *лар бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради* дейилади, L эса *Липшиц ўзгармаси дейилади* (4.3- таърифга қаранг).

8.2- теорема (Коши — Пикар — Линделёф теоремаси). Агар $f(x, y)$ *вектор-функция* D_{n+1} *соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб,* *шу* D_{n+1} *соҳада* $y_1, \ldots, y_n$ *лар бўйича Липшиц шартини қаноатлантирса, у ҳолда ҳар бир* $(x_0, y^0)\in D_{n+1}$ *учун шундай ўзгармас* $h>0$ *сон топиладики, натижада* (8.3) *системанинг* $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)\in D_{n+1}$ *бўлганда* $\varphi(x_0)=y^0$ *бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва* $I=\{x: |x-x_0|\leqslant h\}$ ораликда аниқланган ягона ечими мажуд бўлади.

8.3- теорема (Пеано теоремаси). *Агар* $f(x, y)$ *вектор-функция* $(n+1)$ *ўлчовли* D_{n+1} *соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб,* $(x_0, y^0)\in D_{n+1}$ *бўлса, у ҳолда* (8.15) *тенгламанинг* $y(x_0)=y^0$ *шартни қаноатлантирадиган камида битта ечими мавжуд бўлади.*

Қуйида биз 8.2- теореманинг исботига тўхталамиз. Бунда 1- бобнинг 11- § идаги скаляр тенглама учун Пикар теоремасининг исботида юритилган мулоҳазалар умумлаштирилади.

D_{n+1} соҳада маркази $(x_0, y^0)\in D_{n+1}$ нуқтада бўлган ва чегараси билан бутунлай шу соҳада жойлашган бирор $(n+1)$ — тартибли P_{n+1} параллелепипед (гиперпараллелипипед) чизиш мумкин (исботи ўқувчига ҳавола). Унинг абсцисса ўқига параллел қирраси узунлигини $2a$, қолган n та ўқларга параллел қирралари узунлигини мос равишда $2b_1, \ldots, 2b_n$ деб белгилаймиз, бунда a ва b_i, $i=\overline{1, n}$ лар чекли мусбат сонлар. Шундай қилиб,

$$P_{n+1}=\{(x, y_1, \ldots, y_n): |x-x_0|\leqslant a,\ |y_i-y_i^0|\leqslant b_i,\ i=\overline{1, n}\},$$

$P_{n+1}\subset D_{n+1}$ ва P_{n+1} — ёпиқ, чегараланган тўплам. D_{n+1} соҳада узлуксиз бўлган $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ (қисқача, $f_i(x, y)$), $i=\overline{1, n}$ функциялар P_{n+1} да ҳам узлуксиз бўлади. P_{n+1} ёпиқ, чегараланган бўлгани учун $f_i(x, y)$ функция унда чегараланган бўлади, яъни $\max\limits_{(x,\ y)\in P_{n+1}} |f_i(x, y)|=M_i$, $M_i\geqslant 0$. Агар барча $M_1, M_2, \ldots, M_n$ сонлар бараварига *нолга* тенг бўлса, $f_i(x, y)\equiv 0$, $(x,y)\in P_{n+1}$ бўлади ҳамда (8.3) система содда $\frac{dy_1}{dx}=0$, $\frac{dy_2}{dx}=0, \ldots, \frac{dy_n}{dx}=0$ кўринишда ёзилади. Ундан $y_1(x)=C_1$, $y_2(x)=C_2, \ldots, y_n(x)=C_n$ келиб чиқади. (8.9) шартни қаноатлантирадиган ечим эса, вектор кўринишда $y(x)\equiv y^0$ каби ёзилади. Демак, (8.3) системанинг $|x-x_0|\leqslant a$ оралиқда аниқланган ва (8.9) шартни қаноатлантирадиган ечими мавжуд ва ягона. Теорема бу ҳолда исбот этилди.

Энди $M_1, M_2, \ldots, M_n$ сонлар бараварига нолга тенг бўлмасин. Ушбу $M=\max\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, $h=\min\left\{a, \frac{b_1}{M}, \ldots, \frac{b_n}{M}\right\}$ белгилашларни киритамиз. Бу ҳолда теореманинг исботи бир неча босқичда амалга оширилади.

I. Агар $y=\varphi(x)$, $|x-x_0|\leqslant h$, вектор-функция (8.15) вектор-тенгламанинг (8.9) шартни қаноатлантирадиган ечими бўлса, у ҳолда $|x-x_0|\leqslant h$ ораликда $\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,\ \varphi(x))$ вектор-айният ўринли бўлади. Бу ҳолда $|x-x_0|\leqslant h$ ораликда ушбу

$$\varphi(x)\equiv y^0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,\ \varphi(\tau))\,d\tau \qquad (8.17)$$

вектор — айният ҳам ўринли бўлади ва аксинча, агар бирор узлуксиз $y=\varphi(x)$ вектор-функция учун $|\ x-x_0\ \varepsilon\leqslant h$ ораликда (8.17) айният ўринли бўлса, унда $y=\varphi(x)$ вектор-функция дифференциалланувчи бўлади, шу билан бирга у (8.15) вектор-тенгламанинг (8.9) бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими бўлади. Шундай қилиб, (8.15) вектор-тенглама (8.9) шарт билан бирга олинган (8.17) айниятга эквивалент. Бу тасдиқларнинг исботи 1-бобдаги скаляр дифференциал тенгламага оид тегишли тасдиқларнинг исботига ўхшаш.

II. Теоремани Пикарнинг кетма-кет яқинлашиш усули билан исботлаймиз. Бунда аввал «ечимга яқинлашишлар» деб аталадиган вектор-функциялар қурилади.

Бошланғич яқинлашиш сифатида y^0 векторни оламиз. Кейинги яқинлашишлар (вектор-функциялар) қуйидагича қурилади:

$$y^j(x)=y^0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,\ y^{j-1}(\tau))\,d\tau,\ j=1,\ 2,\ \ldots,y^0(x)\equiv y^0\ . \qquad (8.18)$$

Қурилган $y^1(x),\ y^2(x),\ \ldots,\ y^n(x),\ \ldots$, вектор-функциялар маълум хоссаларга эга:

1. $y^j(x_0)=y^0,\ j=1,\ 2,\ \ldots$, яъни ҳар бир $y^j(x)$ вектор-функция (8.9) шартни қаноатлантиради;

2. Ҳар бир $y=y^j(x),\ j=1,\ 2,\ \ldots$, функциянинг графиги $|x-x_0|\leqslant h$ ораликда P_{n+1} дан чиқиб кетмайди. Ҳақиқатан,

$$|y_i^j(x)-y_i^0|=|\int_{x_0}^{x} f_i(\tau,\ y^{j-1}(\tau))\,d\tau\,|\leqslant|\int_{x_0}^{x}|f_i(\tau,\ y^{j-1}(\tau))\,|d\tau|\leqslant$$

$$\leqslant M_i|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant M\frac{b_i}{M}=b_i,\ i=\overline{1,\ n};\ j=1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Математик индукция усули билан ихтиёрий s сон учун $|y_i^s(x)-y_i^0|\leqslant b_i$ тенгсизлик ўринли бўлганда $s+1$ сон учун $|y_i^{s+1}(x)-y_i^0|\leqslant b_i$ тенгсизлик ҳам ўринли эканини кўрсатиш мумкин. Шундай қилиб, $(x,\ y^j(x))\in P_{n+1},|x-x_0|\leqslant h,\ j=1,\ 2,\ \ldots$.

3. $y=y^j(x),\quad j=1,\quad 2,\quad \ldots\quad,$ вектор-функциялар $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда узлуксиз. Бу тасдиқ 1-бобдаги тегишли тасдиққа ўхшаш исботланади.

III. Энди (8.18) вектор-функциялардан n та $\{y_i^k(x)\},\ i=\overline{1,\ n},$

функционал кетма-кетлик тузамиз. Улар $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда текис яқинлашувчи. Буни кўрсатиш учун ушбу n та $(i=1, n)$

$$y_i^0+(y_i^1(x)-y_i^0)+(y_i^2(x)-y_i^1(x))+\ldots+$$
$$+(y_i^k(x)-y_i^{k-1}(x))+\ldots \qquad (8.19)$$

функционал қатор тузамиз. Бу қаторларнинг ҳар бири $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда текис яқинлашади.

Ҳақиқатан, (8.19) қаторнинг хусусий йиғиндиси $s_i(x)=y_i^k(x)$. Агар биз (8.19) қаторнинг $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда текис яқинлашувчи эканини кўрсатсак, бундан $\{y_i^k(x)\}$, $i=\overline{1, n}$, кетма-кетликнинг ҳам шу оралиқда текис яқинлашувчилиги келиб чиқади. Шу мақсадда (8.19) қаторнинг ҳар бир ҳадини баҳолаймиз:

$$|y_i^1(x)-y_i^0|=|\int_{x_0}^{x}f_i(\tau,\ y^0)\,d\tau|\leqslant M_i;\ |x-x_0|;$$

$$|y_i^2(x)-y_i^1(x)=|\int_{x_0}^{x}[f_i(\tau,\ y_i^1(\tau))-f_i(\tau,y_i^0)]d\tau|\leqslant$$

$$\leqslant|\int_{x_0}^{x}|f_i(\tau,\ y_i^1(\tau))-f_i(\tau,\ y_i^0)|d\tau|\leqslant L|\int_{x_0}^{x}\sum_{j=1}^{n}|y_j^1(\tau)-y_j^0|d\tau|\leqslant$$

$$\leqslant L(\sum_{i=1}^{n}M_i)|\int_{x_0}^{x}|\tau-x_0|d\tau|=LM_0\frac{|x-x_0|^2}{2!},$$

бу ерда $M_0=\sum_{i=1}^{n}M_i$;

$$|y^3(x)-y^2(x)|\leqslant M_0L(nL)\frac{|x-x_0|^3}{3!};$$

$$|y^k(x)-y^{k-1}(x)|\leqslant M_0L(nL)^{k-2}\frac{|x-x_0|^k}{k!},\ k=2,3,\ \ldots\ .$$

Ушбу

$$(|y_i^0|+M_ih)+\sum_{k=2}^{\infty}M_0L(nL)^{k-2}\frac{h^k}{k!},\ i=\overline{1,\ n},$$

сонли қаторни кўрамиз. Бу қатор Даламбер аломатига кўра яқинлашувчи. Ҳақиқатан,

$$a_k=M_0L(nL)^{k-2}\frac{h^k}{k!},\ \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{nLh}{k+1}=0<1.$$

Шу сабабли Вейерштрасс теоремасига кўра кўрилаётган (8.19) функционал қатор ва демак, $\{y_i^k(x)\}$, $i=\overline{1,\ n}$, функционал кетма-кетлик ҳам $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда бирор узлуксиз $Y_i(x)$ функцияга текис яқинлашади. Шундай қилиб,

$$\lim_{k\to\infty} y_i^k(x)=Y_i(x),\ i=\overline{1,\ n}, \tag{8.20}$$

муносабатни ёзиш мумкин; (8.18) тенгликларга кўра $Y_i(x_0)=y_i^0$. Агар $|y_i^k(x)-y_i^0|\leqslant b_i$ тенгсизликда $k\to\infty$ да лимитга ўтсак, $|Y_i(x)-\ y_i^0|\leqslant b_i$ тенгсизлик келиб чиқади. Агар $Y_1(x),\ \dots\ ,\ Y_n(x)$ функциялардан тузилган вектор-функцияни $Y(x)$ деб белгиласак, юқоридаги тенгсизлик $(x,\ Y(x))\in P_{n+1}$ *тегишлилик* ўринли эканини кўрсатади.

IV. Топилган $y=Y(x)$ вектор-функция (8.17) тенгламанинг ечими эканини исбот этамиз. Аввало қайд қилиб ўтамизки, $\{y_i^k(x)\}$, $i=\overline{1,\ n}$, кетма-кетлик $|x-x_0|\leqslant h$ оралиқда $y=Y_i(x)$ функцияга текис якинлашади. Шунинг учун ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон берилганда ҳам шундай $N=N(\varepsilon)>0$ сон топиладики, k нинг $k>N(\varepsilon)$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча қийматлари учун $|x-x_0|\leqslant$ $\leqslant h$ оралиқда

$$\cdot|y_i^k(x)-Y_i(x)|<\varepsilon, i=\overline{1,\ n},$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди бундан фойдаланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$|\int_{x_0}^{x} f_i(\tau,\ y^k(\tau))d\tau-\int_{x_0}^{x} f_i(\tau,\ Y(\tau))\,d\tau|\leqslant$$

$$\leqslant|\int_{x_0}^{x}|f_i(\tau,\ y^k(\tau))-f_i(\tau,\ Y(\tau))\,|d\tau|\leqslant$$

$$\leqslant L|\int_{x_0}^{x}\sum_{j=1}^{n}|y_j^k(\tau)-Y_j(\tau)\,|d\tau|\leqslant Lnh\varepsilon.$$

Бундан $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_i(\tau,\ y^k(\tau))\,d\tau=\int_{x_0}^{x} f_i(\tau,\ Y(\tau))\,d\tau$ келиб чиқади. Шунинг учун (8.18) да $j\to\infty$ да лимитга ўтсак,

$$Y(x)=y^0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,\ Y(\tau))\,d\tau,\ |x-x_0|\leqslant h,$$

тенгликка эга бўламиз. Бу эса, $y=Y(x)$ вектор-функция (8.17) вектор-тенгламанинг ёки, барибир, (8.15) вектор-тенгламанинг $|x-$ $-x_0|\leqslant h$ оралиқда аниқланган ва $Y(x_0)=y^0$ шартни қаноатлантирадиган ечими эканини англатади.

Агар $L=0$ бўлса ҳам мулоҳазалар ўринли, фақат $y_i^k(x)\equiv Y_i(x)$ ва $\lim\limits_{k\to\infty} y_i^k(x)=Y_i(x)$ бўлади ва тегишли $y=Y(x)$ вектор-функция ечим бўлади.

V. Ниҳоят, топилган $y=Y(x)$ ечим ягона эканини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $y=Y(x)$, $|x-x_0|\leqslant h$ ечимдан фарқ қиладиган яна битта $y=Z(x)$, $|x-x_0|\leqslant d$, $d\neq h$, $d\leqslant a$, $Z(x_0)=y^0$ ечим бор бўлсин. $h_*=\min\{h, d\}$ дейлик. Биз $|x-x_0|\leqslant h_*$ оралиқда $y=Y(x)$ ва $y=Z(x)$ вектор-функцияларни кўрамиз. Танлашга кўра $Y(x)\not\equiv Z(x)$, $|x-x_0|\leqslant h_*$. Ушбу $u(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}|Y_i(x)-Z_i(x)|\geqslant 0$ функцияни қараймиз. $\varepsilon<\min\left(h_*, \frac{1}{nL}\right)$, $L>0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $\varepsilon>0$ сонни оламиз. $[x_0, x_0+\varepsilon]$ оралиқда ($[x_0-\varepsilon, x_0]$ оралиқда ҳам мулоҳазалар шунга ўхшаш) узлуксиз бўлган $u(x)$ функция шу оралиқнинг бирор δ нуқтасида ўзининг энг катта қийматига эришади, яъни $u(\delta)=\max\limits_{x\in[x_0,\, x_0+\varepsilon]} u(x)=m\geqslant 0$. Содда ҳисоблашлар ёрдамида топамиз:

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}|Y_i(x)-Z_i(x)|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_0}^{x}[f_i(\tau, Y(\tau))-\right.$$

$$\left.-(\tau, Z(\tau))]d\tau\right|\leqslant L\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\left(\sum_{j=1}^{n}|Y_i(\tau)-Z_i(\tau)|\right)d\tau\leqslant\right.$$

$$\leqslant L\sum_{i=1}^{n}(m\varepsilon)=Lnm\varepsilon.$$

(агар $L=0$ бўлса, $Y_i(x)\equiv Z_i(x)$, $x\in[x_0, x_0+\varepsilon]$ бўлади).

Демак,

$$u(x)\leqslant Lnm\varepsilon,\ x\in[x_0, x_0+\varepsilon]. \tag{8.21}$$

Агар $m=0$ бўлса, $u(x)\leqslant 0$ бўлади. Аммо $u(x)\geqslant 0$ бўлгани учун $u(x)\equiv 0$ бўлади. Агар $m>0$ бўлса, (8.21) да $x=\delta\in[x_0, x_0+\varepsilon]$ деб, $m\leqslant Lnm\varepsilon$ ёки $Ln\varepsilon\geqslant 1$ тенгсизликка эга бўламиз. Ундан $\varepsilon\geqslant\frac{1}{nL}$ келиб чиқади. Бу эса, юқорида ε соннинг танланишига зид.

Демак, m сон учун фақат $m=0$ ҳол содир бўлиши мумкин. Шундай қилиб, $[x_0, x_0+\varepsilon]$ оралиқда $u(x)\equiv 0$, яъни $Y_i(x)\equiv Z_i(x)$ ўринли. Бу эса дастлабки фаразга зид. Демак, $y=Y(x)$ ечимдан фарқ қиладиган ва $Y(x_0)=Z(x_0)=y^0$ шартни қаноатлантирадиган иккинчи $y=Z(x)$ ечим мавжуд эмас экан. Худди шундай мулоҳазаларни $[x_0-\varepsilon, x_0]$ оралиқ учун ҳам олиб бориш мумкин. Шундай қилиб, $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ оралиқда ягоналик исбот этилди. Ечимни давом эттириш ёрдамида $|x-x_0|\leqslant h_*$ оралиқда ҳам ягоналикни исботлаш мумкин.

Шу билан 8.2- теорема тўлиқ исбот этилди.

8.3-§. НОРМАЛ СИСТЕМА УЧУН ε-ТАҚРИБИЙ ЕЧИМ

Нормал система учун ҳам ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли битта тенгламадаги каби ε-тақрибий ечим тушунчасини киритамиз. Аввал вектор-функция нормасини киритайлик.

Агар $y=\varphi(x)$ вектор-функция бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлса, унинг нормаси $\|\varphi(x)\|$ қуйидагича

$$\|\varphi(x)\|=\max_{x\in I}|\varphi(x)|$$

аниқланади.

8.4-таъриф. (8.15) *вектор-тенглама берилган бўлиб, унда* $f(x,y)$ *вектор-функция* D_{n+1} *соҳада узлуксиз бўлсин. Агар бирор* I *интервалда аниқланган* $y=\varphi(x)$ *вектор-функция учун ушбу тўртта шарт:*

1°. $(x,\ \varphi(x))\in D_{n+1},\ x\in I$;

2°. $\varphi(x)\in C^1,\ x\in I\backslash S$, *бунда* S *тўплам* $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ *ҳосила 1-тур узилишга эга бўлган ёки мавжуд бўлмаган нуқталар тўплами;*

3°. $\left\|\frac{d\varphi(x)}{dx}-f(x,\ \varphi(x))\right\|\leqslant\varepsilon,\ x\in I\backslash S$;

4°. S — *чекли тўплам,*

ўринли бўлса, у ҳолда $y=\varphi(x)$ *вектор-функция* I *интервалда* (8.15) *вектор-тенгламанинг* ε-*тақрибий ечими дейилади.*

Бу таърифдан кўринадики, агар $\varepsilon=0$ ва $S=\varnothing$ бўлса, $\varphi(x)\in C^1$, $x\in I$ ва $\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,\varphi(x))$, $x\in I$ бўлади. Бу ҳолда биз система учун ечим таърифига эга бўламиз.

8.4-теорема. *Агар* (8.15) *вектор-тенгламада* $f(x,\ y)$ *вектор-функция ҳамма нуқталари билан* D_{n+1} *соҳада жойлашган* $(n+1)$ — *тартибли чегараланган* P_{n+1} *параллелепипедда* (8.2-теоремага қ.) *узлуксиз бўлса, у ҳолда* $\varepsilon>0$ *сон қандай бўлмасин* (8.15) *вектор-тенгламанинг* $|x-x_0|\leqslant h$ $\left(h=\min\left(a,\ \frac{b_1}{M},\ \ldots,\ \frac{b_n}{M}\right),\ M=\max\{M_1,\ M_2,\ \ldots M_n\},\ M_i=\max\limits_{(x,\ y)\in P_{n+1}}|f_i(x,\ y)|,\ \sum\limits_{i=1}^{n}M_i^2\neq0\right)$ *оралиқда* $\varphi(x_0)=y_0$ *бошланғич шартни қаноатлантирадиган* ε-тақрибий ечими $y=\varphi(x)$ *мавжуд.*

Исботи скаляр тенглама учун айтилган 2.1-теореманинг исботига ўхшаш.

8.4-§. ЕЧИМНИНГ БОШЛАНҒИЧ ҚИЙМАТ ВА ПАРАМЕТРЛАРГА УЗЛУКСИЗ БОҒЛИҚЛИГИ

1. Дастлабки маълумотлар. Аввалги параграфда бошланғич қийматлари x_0, y^0 бўлган ечимни $\varphi(x,\ x_0,\ y^0)$ деб белгиладик. Бу вектор-функция $(n+2)$ ўлчовли соҳада аниқланган бўлиб, x, x_0, y_1^0,

... , y_n^0 ларнинг функциясидир, x бўйича тегишли интервалда узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи бўлган бу вектор-функция x_0 ва y_1^0, ... ,y_n^0 ларга қандай боғланган? — деган савол туғилади.

Ушбу

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (8.15) \\ y(x_0) = y^0 & (8.9) \end{cases}$$

Коши масаласида $x = \xi - x_0$, $y = \eta - y^0$ алмаштиришни бажарамиз, натижада юқоридаги масала қуйидаги

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{d\xi} = f(\xi - x_0, \eta - y^0), \\ \eta(0) = 0 \end{cases}$$

Коши масаласига келади, бунда бошланғич қийматлар тайинланган; $\xi = 0$, $\eta = 0$. (8.15) вектор-тенгламани $\frac{d\eta}{d\xi} = f(\xi - x_0, \eta - y^0)$ каби ёзиб, x_0, y^0 ларни параметрлар деб қараб, ечимнинг шу параметрларга боғлиқлигини текшириш мумкин. Шу усул билан ечимнинг бошланғич қийматларга боғлиқлигини текшириш тегишли ечимнинг параметрларга боғлиқлигини текширишга келтирилади.

2. Ечимнинг параметрларга узлуксиз боғлиқлиги. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu), \tag{8.22}$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)^*, \ \mu = (\mu_1, \dots, \mu_e)^*,$$

вектор дифференциал тенглама берилган бўлиб, унинг ўнг томони $f(x, y, \mu)$ вектор-функция $(n + l + 1)$ ўлчовли R^{n+l+1} фазонинг бирор очиқ D_{n+l+1} соҳасида аниқланган ва узлуксиз, шу билан бирга

$$\frac{\partial f_i(x, y, \mu)}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \tag{8.23}$$

функциялар ҳам ўша D_{n+l+1} соҳада узлуксиз. R^{n+l+1} фазонинг нуқталарини (x, y, μ) деб белгилаймиз. x_0 ва y^0 бошланғич қийматларни тайинлаймиз. M билан μ параметрнинг шундай қийматлари тўпламини белгилаймизки, (x_0, y^0, μ) нуқта D_{n+l+1} соҳага тегишли бўлади. Демак, агар $\mu \in M$ бўлса, у ҳолда $(x_0, y^0, \mu) \in D_{n+l+1}$ бўлади ва аксинча, агар $(x_0, y^0, \mu) \in D_{n+l+1}$ бўлса, у ҳолда $\mu \in M$ бўлади.

Киритилган M тўплам очиқ. Ҳар бир $(\mu_1, \dots, \mu_l) \in M$ нуқтага (8.41) вектор-тенгламанинг x_0, y^0 бошланғич қийматларга эга бўлган ва $m_1(\mu) < x < m_2(\mu)$ интервалда аниқланган давомсиз ечими $\varphi(x, \mu)$ мос келади (1-боб, 12-§ даги мулоҳазалар вектор-тенглама учун ҳам ўринли). Шу $\varphi(x, \mu)$ ечим аниқланган тўпламни T дейлик. Бу тўплам x, μ жуфтликлар тўплами бўлиб, унда $\varphi(x, \mu)$ аниқланган.

Демак, T тўпламнинг нуқталари учун $\mu \in M$, $m_1(\mu) < x < m_2(\mu)$ муносабатлар ўринли. M тўплам l ўлчовли, T тўплам эса $(l+1)$ ўлчовлидир. Энди ечимнинг параметрларга узлуксиз боғлиқлиги ҳақида теоремани баён этамиз:

8.6- теорема. *T тўплам очиқ тўпламдир. Вектор-функция $\varphi(x, \mu)$ эса T тўпламда узлуксиздир.*

Теореманинг исботини [1] китобдан ўқишни тавсия қиламиз.

3. Ечимнинг бошланғич қийматларга узлуксиз боғлиқлиги. Бизга (8.15) вектор-дифференциал тенглама берилган бўлиб, унинг ўнг томонидаги $f(x, y)$ вектор-функция $(n+1)$ ўлчовли R^{n+1} фазонинг бирор D_{n+1} соҳасида аниқланган ва хусусий ҳосилалари $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ билан шу D_{n+1} соҳада узлуксиз бўлсин. D_{n+1} соҳанинг ҳар бир (ξ, n) нуқтасига (8.15) вектор-тенгламанинг $x_0 = \xi$, $y_0 = \eta$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ва $m_1(\xi, \eta) < x < m_2(\xi, \eta)$ интервалда аниқланган давомсиз ечими $\varphi(x, \xi, \eta)$ мос келади. $x, \xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ўзгарувчилар фазосининг D_{n+1} соҳага тегишли (ξ, η) нуқталарга ва $m_1(\xi, \eta) < x < m_2(\xi, \eta)$ тенгсизликни қаноатлантирадиган x ларга мос келган (x, ξ, η) нуқталардан тузилган тўпламини S деб белгилаймиз. Энди ечимнинг бошланғич қийматларга узлуксиз боғлиқлиги ҳақида теоремани келтирамиз.

8.7- теорема. (8.15) *вектор тенгламанинг ξ, η бошланғич қийматларга эга бўлган давомсиз ечими $\varphi(x, \xi, \eta)$ аниқланган S тўплам $x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n$ ўзгарувчилар фазосида очиқдир. $\varphi(x, \xi, \eta)$ вектор-функция барча аргументлари бўйича S тўпламда узлуксиздир.*

Бу теоремани исбот этиш ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида тайинланган бошланғич қийматларга эга бўлган ечимнинг параметрларга боғлиқлигини текширишга олиб келинади, сўнгра 8.6- теоремани қўлланилади.

8.5- §. ЕЧИМНИНГ БОШЛАНҒИЧ ҚИЙМАТ ВА ПАРАМЕТРЛАР БЎЙИЧА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНУВЧИЛИГИ

1. Ечимнинг параметрлар бўйича дифференциалланувчилиги. Бизга (8.22) вектор-дифференциал тенглама берилган бўлиб,

$$f_i(x, y, \mu), \ \frac{\partial f_i(x, y, \mu)}{\partial y_j}, \ \frac{\partial f_i(x, y, \mu)}{\partial \mu_k}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$
$$k = 1, 2, \dots, l$$

функциялар $(n + l + 1)$ ўлчовли очиқ D_{n+l+1} соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

8.8- теорема. *Агар* (8.22) *вектор-дифференциал тенгламада $f(x, y, \mu)$ вектор-функция ва унинг y ва μ лар бўйича барча хусусий ҳосилалари $(n+l+1)$ ўлчовли D_{n+l+1} соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда берилган тенгламанинг T тўпламда аниқланган $\varphi(x, \mu)$ ечими учун $\frac{\partial \varphi_i(x, \mu)}{\partial \mu_k}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, l$ хусусий* *ҳосилалар шу тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлади. Ундан ташқари* $\frac{\partial^2 \varphi_i(x, \mu)}{\partial x \partial \mu_k}$, $i=1, 2, \ldots, n$, $k=1, 2, \ldots l$ *аралаш ҳосилалар ҳам T тўпламда аниқланган, узлуксиз ва дифференциаллаш тартибига боғлиқ бўлмайди.*

Теореманинг исботини [1] китобдан ўқишни тавсия қиламиз.

2. Ечимнинг бошланғич қийматлар бўйича дифференциалланувчилиги. Аввалги параграфдаги каби (8.15) вектор тенгламани кўрамиз. Унинг ўнг томони, яъни $f(x, y)$ вектор-функция очиқ D_{n+1} соҳада аниқланган ва хусусий ҳосилалари $\frac{\partial f_i}{\partial y_i}$, $i, j=1,2, \ldots, n$ билан шу D_{n+1} соҳада узлуксиз. D_{n+1} соҳада олинган (ξ, n) нуқта учун ξ ни $\xi=x_0$ деб тайинлаймиз, η эса ўзгарувчи бўлиб қолаверади.

8.9- теорема. (8.15) *вектор тенглама берилган бўлиб,* $\varphi(x, x_0, \eta) = \varphi(x, \eta) = (\varphi_1(x, \eta), \ldots, \varphi_n(x, \eta))$ *функция унинг* (x_0, η) *бошланғич қийматларга эга бўлган давомсиз ечими бўлсин. У ҳолда 8.7- теоремадан* $\varphi(x, \eta)$ *функциянинг* $x, \eta_1, \ldots, \eta_n$ *ўзгарувчилар фазосининг бирор очиқ* S' *тўпламида аниқланган ва узлуксизлиги келиб чиқади. Шу билан бирга* S' *тўпламда ушбу* $\frac{\partial \varphi_i(x, \eta)}{\partial \eta_j}$; $i, j=1, 2, \ldots, n$ *хусусий ҳосилалар мавжуд ва узлуксиз; бундан ташқари, шу* S' *тўпламда* $\frac{\partial^2 \varphi_i(x, \eta)}{\partial x \partial \eta_j}$, $i, j=1, 2, \ldots, n$ *аралаш ҳосилалар узлуксиз ва дифференциаллаш тартибига боғлиқ эмас.*

Бу теоремани исбот этиш ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида ечимнинг параметрлар бўйича дифференциалланувчилиги ҳолини исбот этишга келтирилади ва 8.8- теорема қўлланилади.

3. Вариацияли тенгламалар системаси. (8.15) вектор тенглама берилган бўлиб, $\varphi(x, \eta) = (\varphi_1(x, \eta), \varphi_2(x, \eta), \ldots, \varphi_n(x, \eta))$ вектор-функция шу тенгламанинг (x_0, η) бошланғич қийматларга эга бўлган ва $\eta=y_0$ бўлганда $m_1<x<m_2$ интервалда аниқланган давомсиз ечими бўлсин. 8.9- теоремага асосан $\eta=y_0$ нуқтада ҳисобланган ва $m_1<x<m_2$ интервалда аниқланган хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j} \varphi_i(x, y^0,) = \psi_i^{(j)}(x) \tag{8.24}$$

мавжуд. Ушбу

$$f_i^j(x, y) = \frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y_j}, \quad f_i^j(x) = f_i^j(x, \varphi(x, y^0))$$

белгилашларни киритамиз. Бунда $f_i^j(x)$ функциялар $m_1<x<m_2$ интервалда аниқланган. Қуйидаги

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} f_i^j(x) z_j, \quad i=1, 2, \ldots, \tag{8.25}$$

чизиқли тенгламалар системаси $m_1 < x < m_2$ интервалда аниқланган бўлиб, *вариацияли тенгламалар системаси* (бошланғич қийматлар бўйича) дейилади. Ушбу $z_1=\psi_1^j(x), \dots, z_n=\psi_n^j(x)$ функциялар (8.25) системанинг

$$\psi_j^j(x_0)=\delta_i^j,\ \delta_i^j=0,\ i\neq j,\ \delta_i^j=1,\ i=j \tag{8.26}$$

бошланғич қийматларга эга бўлган ечими бўлади, бунда δ_i^j — *Кронеккер символи* деб юритилади. Бу тасдиқни исботлаш бевосита ҳисоблаш билан олиб борилади. Аниқроғи, $y=\varphi(x, \eta)$ функция (8.15) га қўйилади, сўнгра ҳосил бўлган айниятни η_i лар бўйича дифференциалланади. Кронеккер символи (8.26) ушбу (8.24) ва $\varphi_i(x, \eta)=\eta_i$ муносабатлардан келиб чиқади.

8.6-§. НОРМАЛ СИСТЕМАНИНГ ИНТЕГРАЛЛАРИ

1. Системанинг биринчи интеграллари. (8.15) вектор-дифференциал тенглама берилган бўлиб, унинг ўнг томонидаги $f(x, y)$ вектор-функция $(n+1)$ ўлчовли R^{n+1} фазонинг бирор D_{n+1} соҳасида аниқланган ва хусусий ҳосилалари $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, \ j=1, \dots, n$, билан бирга D_{n+1} соҳада узлуксиз бўлсин.

8.5-тариф. *D_{n+1} соҳада унинг қисмидан иборат бўлган бирор очиқ G_1 тўплам олинган бўлсин. Агар $u(x, y_1, \dots, y_n)=u(x,y)$ функция шу G тўпламда аниқланган ва хусусий ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлиб,* (8.15) *тенгламанинг графиги G тўпламда жойлашган ихтиёрий $y=\varphi(x)$ ечимини шу $u(x, y)$ функция аргументига қўйганда x бўйича ўзгармас ҳосил бўлса (яъни $u(x, \varphi(x))$ функция x га эмас, $\varphi(x)$ функциянинг танланишига боғлиқ бўлса), у ҳолда $u(x, y)$ функция* (8.15) *вектор-тенгламанинг биринчи интеграли дейилади.*

Демак, агар $u(x, y)$ биринчи интеграл бўлиб, $\varphi(x)$, $(x, \varphi(x))\subset G$, вектор-функция ечим бўлса, у ҳолда

$$u(x, \varphi(x))=C_\varphi (C_\varphi=\text{const})$$

деб ёзиш мумкин. Одатда ўзгармас соннинг индекси φ ни ёзиб ўтирилмайди.

Агар $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y)$ функцияларнинг ҳар бири (8.15) тенгламанинг биринчи интеграли бўлиб, $u_i(x, y)=C_i$, $(x, y)\in G$ муносабатлар $y_i=\varphi_i(x, C_1, \dots, C_n)$, $i=1, \dots, n$ — умумий ечимни аниқласа, у ҳолда шу функциялар системаси берилган тенгламанинг *умумий интеграли* дейилади. Умумий интеграл учун ушбу

$$\begin{cases} u_1(x, \varphi(x))=C_1, \\ u_2(x, \varphi(x))=C_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_n(x, \varphi(x))=C_n \end{cases} \tag{8.27}$$

муносабатлар ўринли (бунда $y=\varphi(x)$, $x\in I$, $(x, \varphi(x))\in G$,— ихтиёрий ечим).

8.10- теорема. *Хусусий ҳосилалари билан G тўпламда аниқланган ва узлуксиз $u(x, y)$ функция (8.15) тенгламанинг биринчи интеграли бўлиши учун қуйидаги*

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x, y)}{\partial y_i}f_i(x, y)=0 \tag{8.28}$$

муносабатнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. $u(x, y)$ функция (8.15) тенгламанинг биринчи интеграли бўлсин. Бу функция учун (8.28) шартнинг бажарилишини кўрсатамиз. Шундай ихтиёрий тайинланган $\eta=(\eta_1, \ldots, n_n)$ векторни оламизки, $(x, \eta)\in G$ бўлиб, $y=\varphi(x, \eta)$ функция (8.15) тенгламанинг $\varphi(\xi, \eta)=\eta$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими бўлсин. У ҳолда $u(x, \varphi(x, \eta))$ функцияни дифференциаллаб, $u(x, \varphi(x, \eta))=C$ эканини ҳисобга олиб, $x=\xi$ да қуйидагини топамиз:

$$0=\frac{d}{dx}u(x, \varphi(x, \eta))\Big|_{x=\xi}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u(x,\varphi(x,\eta))}{\partial y_1}\cdot\frac{d\varphi_1(x, \eta)}{dx}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{\partial u(x, \varphi(x, \eta))}{\partial y_n}\cdot\frac{d\varphi_n(x, \eta)}{dx}\right)\Big|_{x=\xi}=$$

$$=\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial y_i}f_i(\xi, \eta).$$

(ξ, η) нукта G тўпламнинг ихтиёрий нуқтаси бўлгани учун G тўпламда (8.28) муносабат бажарилади.

Етарлилиги. Энди (8.28) муносабат $u(x, y)$ функция учун ўринли бўлиб, $y=\varphi(x)$ — (8.15) тенгламанинг графиги G тўпламда жойлашган ечими бўлсин. У ҳолда $u(x, y)$ га $y=\varphi(x)$ ни қўйиб, яъни $v(x)=u(x, \varphi(x))$, ҳосил бўлган функцияни дифференциаллаймиз ва (8.28) ни ҳисобга оламиз:

$$\frac{dv(x)}{dx}=\frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x\ \varphi(x))}{\partial y_i}f_i(x, \varphi(x))=0.$$

Бундан $v(x)=u(x, \varphi(x))$ функция x га боғлик эмаслиги келиб чиқади, яъни $u(x, \varphi(x))=C$. Теорема исбот бўлди.

Энди *биринчи интегралларнинг нуқтада эрклилиги* тушунчасини киритамиз.

8.6- таъриф. *Агар* (8.15) *тенгламанинг G тўпламда аниқланган k та* $u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots, u_k(x, y)$ *биринчи интеграллари* $(a, b)\in G$, $f(a, b)\neq 0$ *нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, ушбу*

$$\left(\frac{\partial u_i(a, b)}{\partial y_i}\right), \ i=1, 2, \ldots, k;\ j=1, 2, \ldots, n$$

функционал матрицанинг ранги k га тенг бўлса, у ҳолда $u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y)$ биринчи интеграллар (a, b) нуқтада эркли бўлади.

Кейинги мулоҳазаларда биз ушбу

$$\frac{dy}{dx}=f(y),\ y\in\overline{G}$$

кўринишдаги мухтор вектор-тенгламанинг биринчи интегралларини $f(b)\neq 0$ бўлганда b, $b\in\overline{G}$ нуқтанинг бирор атрофида фақат локал ўрганамиз.

8.11-теорема. (8.29) *вектор-тенгламанинг b нуқтанинг бирор атрофида $(n-1)$ та эркли биринчи интеграли мавжуд.*

Исбот. $(f_1(b), \ldots, f_n(b))^*=f(b)\neq 0$ бўлгани учун бу вектор координаталаридан камида биттаси нолдан фарқли. Масалан, $f_n(b)\neq 0$ дейлик. $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, b_n)$ нуқта b нуқтага яқин бўлиб, $y=\varphi(x, \xi)$ эса (8.29) тенгламанинг $(0, \xi)$ бошланғич қийматларга эга бўлган ечими бўлсин. Бу ечимни яна $y=\varphi(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, b_n)=$ $=\varphi(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, яъни

$$y_i=\varphi_i(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}),\ i=\overline{1,, n}, \tag{8.30}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу (8.30) функциялар системасини x, $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ ларга нисбатан тенгламалар системаси деб қараймиз. Агар $y_1=b_1$, $y_2=b_2$, $\ldots$, $y_n=b_n$ бўлса,

$$\left.\begin{array}{l} b_1=\varphi_1(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_n=\varphi_n(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \end{array}\right\} \tag{8.31}$$

система ушбу $\xi_1=b_1, \ldots, \xi_{n-1}=b_{n-1}$, $x=0$ ечимга эга ва (8.30) системанинг якобиани нолдан фарқли. Ҳақиқатан, $\varphi_i(0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})=\xi_i$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, $\varphi_n(0, \xi_1 \ldots, \xi_{n-1})=b_n$. Шунинг учун

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi_i(0, b_1, \ldots, b_{n-1})}{\partial\xi_i}=\delta_i^j,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n; \\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1; \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi_n(0,\ b_1,\ \ldots,\ b_{n-1})=f_n(b)\neq 0, \end{array}\right\} \tag{8.32}$$

бунда δ^j_i — Кронеккер символи.

Энди $\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})}$ якобианни тузиб, b нуқтада ҳисоблаймиз. Равшанки,

$$\left.\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})}\right|_{y=b} = \begin{vmatrix} f_1(b) & \delta_1^1 & \delta_1^2 & \dots & \delta_1^{n-1} \\ f_2(b) & \delta_2^1 & \delta_1^2 & \dots & \delta_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n-1}(b) & \delta_{n-1} & \delta_{n-1}^2 & \dots & \delta_{n-1}^{n-1} \\ f_n(b) & \delta_n^1 & \delta_n^2 & \dots & \delta_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(b) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_2(b) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n-1}(b) & 0 & 0 & \dots & 1 \\ f_n(b) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} f_n(b) \underbrace{\left.\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}\right\}}_{(n-1) \text{ та устун}} (n-1) \text{ та йў}$$

$$= (-1)^{n+1} f_n(b) \neq 0.$$

Шу сабабли (8.31) система $y \neq b$ бўлганда ҳам ечимга эга. Уни қуйидагича ёзамиз:

$$\xi_1 = u_1(y), \ \xi_2 = u_2(y), \ \dots, \ \xi_{n-1} = u_{n-1}(y), \ x = v(y). \qquad (8.33)$$

Шу $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ функциялар (8.29) тенгламанинг биринчи интеграллари бўлиб, b нуқтада эркли интеграллардир. Ҳақиқатан $\frac{D(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})}{D(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})}$ якобианни b нуқтада текширайлик. (8.30) системанинг якобианини b нуқтада ҳисоблаганмиз. Бу якобиан эса b нуқтада бирга тенг, чунки $\left(\frac{D(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})}{D(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})}\right)$ матрица бирлик матрицадан иборат. Демак, $u_1, \dots, u_{n-1}$ функциялар b нуқтада эркли. Энди бу функциялар (8.29) тенгламанинг биринчи интеграллари эканини исботлаймиз. (8.33) муносабатлардан

$$u_i(\varphi(x, \xi)) = \xi_i, \ i = 1, 2, \dots, n-1. \qquad (8.34)$$

Аммо ҳосил бўлган $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ миқдорлар x га боғлиқ эмас. Демак, u_i функциялар биринчи интеграллардир. Теорема исбот бўлди.

8.12- теорема. *Ушбу*

$$u_{k+1}(y), \ \dots, \ u_n(y) \qquad (8.35)$$

функциялар (8.29) вектор-тенгламанинг b, $b \in \overline{G}$ нуқтада $(n-k)$ та эркли биринчи интеграллари бўлсин. Шу (8.35) функциялар ёрдамида (8.29) тенгламанинг тартибини $(n-k)$ га камайтириш, яъни берилган (8.29) тенгламани тартиби k бўлган нормал системага келтириш мумкин.

Исбот. (8.35) биринчи интеграллар эркли бўлгани учун ушбу $\left(\frac{\partial u_i(b)}{\partial y_j}\right)$, $i = k+1, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$ функционал матрица ранги $(n-k)$ га тенг бўлган квадрат матрицага эга. Аниқлик учун $\left(\frac{\partial u_i(b)}{\partial y_j}\right)$, $i, j=k+1, \dots, n$ матрицанинг ранги $(n-k)$ дейлик. Шу матрицанинг детерминанти нолдан фарқли. Энди b нуқта атрофида янги ўзгарувчиларни киритамиз:

$$z_1=y_1, \dots, z_k=y_k, \; z_{k+1}=u_{k+1}(y), \dots, z_n=u_n(y). \tag{8.36}$$

(8.29) вектор-тенглама янги $z_1, \dots, z_n$ ўзгарувчилар ёрдамида бундай ёзилади:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dz_1}{dx}=\frac{dy_1}{dx}=\\
&=f_1(z_1, \dots, z_k, \psi_{k+1}(z_{k+1}, \dots, z_n), \dots, \psi_n(z_{k+1}, \dots, z_n)),\\
&\frac{dz_2}{dx}=\frac{dy_2}{dx}=\\
&=f_2(z_1, \dots, z_k, \psi_{k+1}(z_{k+1}, \dots, z_n), \dots, \psi_n(z_{k+1}, \dots, z_n)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dz_k}{dx}=\frac{dy_k}{dx}=\\
&=f_k(z_1, \dots, z_k, \psi_{k+1}(z_{k+1}, \dots, z_n), \dots, \psi_n(z_{k+1}, \dots, z_n)),\\
&\frac{dz_{k+1}}{dx}=\\
&=\frac{\partial u_{k+1}(z_1, \dots, z_k, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n)}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_{k+1}(z_1, \dots, z_k, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n)}{\partial y_j},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dz_n}{dx}=\\
&=\frac{\partial u_n(z_1, \dots, z_k, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n)}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_n(z_1, \dots, z_k, \psi_{k+1}, \dots, \psi_n)}{\partial y_j}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.37}$$

Бу системада $\psi_{k+1}(z_{k+1}, \dots, z_n)=y_{k+1}, \dots, \psi_n(z_{k+1}, \dots, z_n)=y_n$ лар (8.36) функцияларнинг охирги $(n-k)$ тасидан топилган. (Бу $\psi_{k+1}, \dots, \psi_n$ функцияларнинг аргументлари (8.37) системада қисқалик учун ёзилмаган). (8.37) системани қисқача

$$\frac{dz_i}{dx}=g_i(z_1, z_2, \dots, z_n), \; i=1, 2, \dots, n \tag{8.38}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Теореманинг шартига кўра (8.36) дан $i=k+1, \dots, n$ бўлганда

$$\frac{dz_i}{dx}=\frac{d}{dx}u_i(y)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i(y)}{\partial y_j}f_j(y)=0,$$

яъни $i=k+1, \ldots, n$ бўлганда $\frac{dz_i}{dx}=0$ бўлади. Демак, (8.38) система ўрнига қуйидаги k- тартибли системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx}=g_1(z_1, z_2, \ldots, z_k, C_{k+1}, \ldots, C_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dz}{dx}=g_k(z_1, z_2, \ldots, z_k, C_{k+1}, \ldots, C_n) \end{cases}$$

Теорема исбот бўлди.

2. **Интегралланувчи комбинациялар.** Дифференциал тенгламаларнинг нормал системасини интеграллаш учун иложи борича кўпроқ биринчи интегрални топиш керак. Ҳар бир биринчи интегрални топиш учун интегралланувчи дифференциал тенгламани излаш зарур бўлади. Берилган нормал системанинг натижасидан иборат бўлган, аммо осон интегралланувчи дифференциал тенглама *интегралланувчи комбинация* деб юритилади. Хусусан, $d\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)=$ $=0$ тенглама нормал системадан ҳосил бўлган бўлса, у интегралланувчи комбинация бўлади. Ундан $\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)=C_1$ битта биринчи интеграл топилади. Қизиғи шундаки, биринчи интеграл геометрик нуқтаи назардан $(n+1)$ ўлчовли фазода жойлашган n ўлчовли сиртдан иборат. Агар бирор интеграл чизиқ шу сирт билан битта умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда шу интеграл чизиқ *барча нуқталари билан айтилган сиртда ётади*. Нормал системанинг биринчи интеграллари ўзаро кесишмайдиган n ўлчовли сиртлардан иборат. Биринчи интегралларга мос келган сиртларни нормал системанинг *сатҳ сиртлари* деб ҳам аталади.

Мисол. Ушбу

$$\frac{dy_1}{dx}=y_3-y_2, \quad \frac{dy_2}{dx}=y_1-y_3, \quad \frac{dy_3}{dx}=y_2-y_1 \tag{8.39}$$

системанинг биринчи интеграллари ва умумий интеграли топилсин.

Бу системанинг иккита эркли биринчи интегралларини топиш осон. Унинг учун система тенгламаларини мос равишда қўшамиз:

$$\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}+\frac{dy_3}{dx}=0 \text{ ёки } \frac{d}{dx}(y_1+y_2+y_3)=0.$$

Бундан

$$u_1=y_1+y_2+y_3=C_1 \tag{8.40}$$

битта *биринчи интеграл* топилади. Энди система тенгламаларини мос равишда y_1, y_2 ва y_3 ларга кўпайтириб, қўшамиз:

$$y_1\frac{dy_1}{dx}+y_2\frac{dy_2}{dx}+y_3\frac{dy_3}{dx}=0 \text{ ёки } \frac{d}{dx}\ (y_1^2+y_2^2+y_3^2)=0.$$

Бундан

$$u_2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=C_2 \tag{8.41}$$

иккинчи *биринчи интеграл* топилади. Топилган биринчи интеграллар эркли. Ҳақиқатан, $y_1^2+y_2^2+y_3^2\neq 0$, чунки бизни тривиалмас ечим қизиқтиради. Шунинг учун ушбу

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_3} \end{matrix}\right| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \end{pmatrix}$$

матрицанннг ранги 2 га тенг. Агар (8.39) системанинг биринчи тенгламасини y_2 га, иккинчисини y_1 га кўпайтириб, қўшсак,

$$\frac{d}{dx}(y_1,\ y_2) = y_2y_3 - y_2^2 + y_1^2 - y_1y_3$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш

$$\frac{d}{dx}(y_1,\ y_3) = y_3^2 - y_2y_3 + y_1y_2 - y_1^2,\quad \frac{d}{dx}(y_2,\ y_3) = y_1y_3 - y_3^2 + y_2^2 - y_1y_2$$

муносабатларни ҳам ҳосил қилиш мумкин. Топилган тенгликларни мос равишда қўшсак:

$$\frac{d}{dx}(y_1\ y_2 + y_1\ y_3 + y_2\ y_3) = 0,$$

яъни

$$u_3 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = C_3, \tag{8.42}$$

яна битта биринчи интегралга эга бўламиз. Энди топилган учта биринчи интеграл эрклими ёки йўқми,— шуни текширамиз. Унинг учун ушбу якобианни ҳисоблаймиз:

$$\frac{D(u_1,\ u_2,\ u_3)}{D(y_1,\ y_2,\ y_3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \\ y_2+y_3 & y_1+y_3 & y_1+y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2y_1 & 2(y_2-y_1) & 2(y_3-y_1) \\ y_2+y_3 & y_1-y_2 & y_1-y_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ y_1-y_2 & y_1-y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} y_1-y_2 & y_1-y_3 \\ y_1-y_2 & y_1-y_3 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Демак, $\dfrac{D(u_1,\ u_2,\ u_3)}{D(y_1,\ y_2,\ y_3)} \equiv 0$. Шундай қилиб топилган учта биринчи интеграл эркли эмас экан. Шунинг учун улар умумий интеграл бўла олмайди. Учинчи эркли биринчи интегрални топиш учун (8.40) ва (8.41) лардан y_1, y_2 ларни топамиз:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(C_1 - y_3 - \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1\ y_3 - 3y_3^2}\right),$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(C_1 - y_3 + \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1\ y_3 - 3y_3^2}\right).$$

Бу ифодаларни (8.39) системанинг охирги тенгламасига қўямиз:

$$\frac{dy_3}{dx} = \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1y_3 - 3y_3^2}\ .$$

Бу биринчи тартибли квадратурада интегралланадиган дифференциал тенглама. Уни интеграллаб, топамиз:

$$\arcsin\frac{3y_3-C_1}{\sqrt{6C_2-2C_1^2}}-\sqrt{3}\;x=C_3.$$

Энди C_1 ва C_2 лар ўрнига (8.40) ва (8.41) лардан ўз ифодасини қўйсак,

$$u_3=\arcsin\frac{2y_3-y_1-y_2}{2\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_1y_2-y_1y_3-y_2y_3}}-\sqrt{3}\,x=C_3 \tag{8.43}$$

учинчи биринчи интегрални топиш мумкин. Текшириш қийин эмаски, (8.40), (8.41) ва (8.43) муносабатлар билан аниқланган биринчи интегараллар эркли бўлади. Демак, шу учта биринчи интеграл (8.39) системанинг умумий интегралини беради

2 **Нормал системанинг симметрик кўриниши.** Нормал системанинг симметрик кўриниши деб ушбу

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)}=\frac{dx_2}{F_2(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)}=\dots=$$
$$=\frac{dx_n}{F_n(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)} \tag{8.44}$$

системага айтилади. Бу системада ҳамма $x_1, x_2,\ \dots,\ x_n$ ўзгарувчилар номаълум функция бўлиб, улар *тенг ҳуқуқлидир.* Аммо бизга таниш бўлган

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n),\\ \dfrac{dy_2}{dx}=f_2(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n),\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)\end{cases} \tag{8.45}$$

системада ҳамма ўзгарувчилар *тенг ҳуқуқли эмас.* Унда x — эркли ўзгарувчи, $y_1,\ \dots,\ y_n$ лар эса номаълум функциялардир. Шундай бўлса ҳам (8.45) нормал системани симметрик кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{f_1(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)}=\frac{dy_2}{f_2(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)}=\dots=$$
$$=\frac{dy_n}{f_n(x_1,\ y_1,\ \dots,\ y_n)}. \tag{8.46}$$

Бу (8.46) системани *нормал системага мос келган симметрик кўринишдаги система* дейилади. Бу (8.46) системада энди ҳамма ўзгарувчилар тенг ҳуқуқлидир.

Нормал системанинг симметрик кўриниши берилган нормал системанинг интегралланувчи комбинацияларини, шу билан бирга биринчи интегралларини топишда муҳим роль ўйнайди. Бу жараёнда ҳамма ўзгарувчилар тенг ҳуқуқли бўлгани учун энг қулайини эркли ўзгарувчи деб эълон қилинади. Шунга мос равишда биринчи интеграллар топилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}$$

системанинг умумий интеграли топилсин.

Кўпинча симметрик кўринишда ёзилган нормал системаларни интеграллашда тенг касрларнинг ушбу элементар хоссасидан фойдаланиш мумкин бўлади:

Агар $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_p}{b_p}=\delta$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий k_1, k_2, ... , k_p лар учун қуйидаги

$$\frac{k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_pa_p}{k_1b_1+k_2b_2+\ldots+k_pb_p}=\delta$$

муносабат ўринли. Бунинг исботи содда. Агар $a_1=\delta b_1$, ... , $a_p=\delta b_p$ эканини ҳисобга олсак,

$$\frac{k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_pa_p}{k_1b_1+k_2b_2+\ldots+k_pa_p}=\frac{\delta(k_1b_1+k_2b_2+\ldots+k_pb_p)}{k_1b_1+k_2b_2+\ldots+k_pa_p}=\delta.$$

Берилган системани интеграллашда шу хоссадан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Содда ҳисоблашлар ёрдамида

$$\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{d(y-z)}{y-z} \text{ ва } \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}=-\frac{d(x-y)}{x-y}$$

тенгламаларга эга бўламиз. Улардан иккита биринчи интеграллар топиш мумкин:

$$x-y=C_1(y-z),$$

$$(x+y+z)(x-y)^2=C_2.$$

Бу биринчи интеграллар симметрик кўринишда ёзилган иккинчи тартибли системанинг умумий интегралини беради.

2. Қуйидаги

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

система берилган бўлса,

$$\frac{x+y}{z+x}=C_1, \ \frac{z-y}{x+y}=C_2$$

функциялар биринчи интеграллар экани кўрсатилсин ва уларнинг эркли ёки эркли эмаслиги текширилсин.

Агар берилган системада *x ни эркли ўзгарувчи деб эълон қилсак,* у системани ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}, \ \frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}$$

нормал система кўринишида ёзиш мумкин. Бу системанинг тенгламалари ўзгарувчилари ажраладиган биринчи тартибли тенгламалардир. Интеграллаш натижасида

$$y=\overline{C}_1x, \ z=\overline{C}_2x$$

ларни топамиз. Биз иккита биринчи интегрални топдик. Улар эркли, чунки $u_1=\frac{y}{x}$, $u_2=\frac{z}{x}$ ва $x\neq 0$ да

$$\frac{D\,(u_1,\,u_2)}{D\,(y_1,\,y_2)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{vmatrix}=\frac{1}{x^2}\neq 0.$$

Демак, топилган биринчи интеграллар умумий интегралдан иборат.

Энди юқорида ёзилган $\bar{u}_1=\frac{x+y}{z+x}$ ва $\bar{u}_2=\frac{z-y}{x+y}$ функциялар ҳам биринчи интегра

эканини кўрсатамиз. Бу функциялардан берилган системани ҳисобга олиб, x бўйич ҳосила оламиз:

$$\frac{d\bar{u}_1}{dx}=\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)(z+x)-(x+y)\left(\frac{dz}{dx}+1\right)}{(z+x)^2}=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{y}{x}\right)(z+x)-(x+y)\left(\frac{z}{x}+1\right)}{(z+x)^2}=\frac{(x+y)-(x+y)}{x\,(z+x)}=0,$$

$$z+x\neq 0,\ x\neq 0,$$

$$\frac{d\bar{u}_2}{dx}=\frac{\left(\frac{dz}{dx}-\frac{dy}{dx}\right)(x+y)-(z-y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{z}{x}-\frac{y}{x}\right)(x+y)-(z-y)\left(1+\frac{y}{x}\right)}{(x+y)^2}=\frac{(z-y)\,[(x+y)-(x+y)]}{x\,(x+y)^2}=0,$$

$$x+y\neq 0,\ x\neq 0.$$

Бундан кўринадики, $\bar{u}_1$ ва $\bar{u}_2$ функциялар биринчи интегралдир. Энди б функцияларнинг эркли эканлигини исботлаймиз. Унинг учун тегишли якобианн ҳисоблаймиз:

$$\frac{D\,(\bar{u}_1\,(x,y,z),\,\bar{u}_2\,(x,y,z))}{D\,(y,z)}=\begin{vmatrix} \frac{z+x}{(z+x)^2} & -\frac{x+y}{(z+x)^2} \\ \frac{-(x+y)-(z-y)}{(x+y)^2} & \frac{x+y}{(x+y)^2} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{1}{z+x} & -\frac{x+y}{(z+x)^2} \\ -\frac{x+z}{(x+y)^2} & \frac{1}{x+y} \end{vmatrix}=\frac{1}{(x+y)\ (z+x)}-\frac{(x+y)\ (x+z)}{(x+y)^2\,(z+x)^2}=0.$$

Демак, $\bar{u}_1$ ва $\bar{u}_2$ биринчи интеграллар эркли эмас. Кўриш қийин эмаски, улар орасида $\bar{u}_1=\frac{1}{\bar{u}_2+1}$ муносабат ўринли. Ҳақиқатан: $\bar{u}_2+1=\frac{z-y}{x+y}+1=\frac{z+x}{x+y}=\frac{1}{\bar{u}_1}$.

9- б о б

ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ НОРМАЛ СИСТЕМАСИ

Агар 8- бобда ўрганилган дифференциал тенгламаларнинг нормал системасида $f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$ функциялар $y_1, y_2, \ldots, y_n$ аргументлари бўйича чизиқли, яъни $f_i(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j + b_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ кўринишда бўлса, биз нормал системаларнинг муҳим хусусий кўринишига эга бўламиз. Бундай системаларни *чизиқли дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси,* қисқача, *чизиқли система* деб юритилади.

9.1- § . УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР, МАВЖУДЛИК ВА ЯГОНАЛИК ТЕОРЕМАСИ

Ушбу

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + b_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{9.1}$$

система *чизиқли дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси* дейилади. Бунда $a_{ij}(x)$ функциялар *системанинг коэффициентлари,* $b_i(x)$ функциялар эса *озод ҳадлари* дейилади. Барча $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, i, $j = 1, 2, \ldots, n$ функциялар бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз. Агар $a_{ij}(x) = a_{ij} = \text{const}$ бўлса, у ҳолда (9.1) система *чизиқли ўзгармас коэффициентли* деб юритилади. Бундай системаларни алоҳида ўрганамиз. Қулайлик учун ушбу белгилашларни киритамиз:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \ldots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$$b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n(x) \end{pmatrix} = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^* \tag{9.2}$$

(бунда * белги транспонирлашни англатади). Шу $A(x)$ матрица ва $b(x)$ устун-вектор ёрдамида (9.1) система

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y+b(x) \tag{9.3}$$

кўринишда ёзилади. Агар система (9.3) кўринишда ёзилган бўлса, у *вектор-матрица кўринишида* берилган дейилади.

Агар $b(x) \not\equiv 0,\ x \in 1$ муносабат ўринли бўлса, (9.3) тенглама *чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама* дейилади.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=A(x)\ y \tag{9.4}$$

тенглама эса чизиқли бир жинсли бўлмаган (9.3) тенгламага *мос чизиқли бир жинсли тенглама* дейилади.

Агар $A(x)$ матрицанинг барча элементлари, яъни $a_{ij}(x), i, j=1, 2, \ldots, n$ функциялар бирор I интервалда узлуксиз бўлса, у ҳолда $A(x)$ матрица шу I интервалда узлуксиз дейилади. Яна $b(x)$ векторнинг координаталари бирор I интервалда узлуксиз бўлганда, шу $b(x)$ вектор I интервалда узлуксиз деб юритилади.

9.1-теорема. *Бизга (9.3) вектор-матрицали чизиқли система берилган бўлиб, $A(x)$ матрица ва $b(x)$ вектор-функция бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда ихтиёрий бошланғич қийматлар*

$$x_0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_n^0, x_0 \in I \text{ ёки қисқача } x_0,\ y^0,\ x_0 \in I \tag{9.5}$$

учун (9.3) тенгламанинг шу бошланғич қийматларга эга бўлган ва I интервалда аниқланган ягона ечими мавжуд.

Хусусан, агар $A(x)$ ва $b(x)$ лар $-\infty < x < +\infty$ интервалда узлуксиз бўлса, у ҳолда ҳам ихтиёрий (9.5) бошланғич қийматларга эга бўлган ва шу $-\infty x < +\infty$ интервалда аниқланган ягона ечим мавжуд бўлади.

Исбот. Бу теореманинг исботи 8.1-теоремадан келиб чиқади. Ундаги $f(x, y)$ вектор-функция кўрилаётган ҳолда $f(x, y)=A(x)y+$ $+b(x)$ вектор-функциядан иборат. Равшанки, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=A(x)$ $\left(\frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y_j}=a_{ij}(x),\ i,\ j=\overline{1,\ n}\right)$ ва $A(x)$ матрицанинг барча $a_{ij}(x)$ элементлари I интервалда узлуксиз.

Шуниси муҳимки, чизиқли системалар учун ечимнинг аниқланиш интервали $A(x)$ ва $b(x)$ ларнинг аниқланиш интервали билан бир хил. Демак, шу I интервал ечим мавжудлигининг максимал интервали бўлади.

Бошқача айтганда, (9.1) системанинг ечими I интервалда аниқланган давомсиз ечим бўлади. Бу чизиқли системаларнинг муҳим хоссаларидан биридир.

Мисол. Ушбу

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2, \qquad \frac{dy_2}{dx}=-y_1$$

иккинчи тартибли чизиқли система берилган бўлиб, бошланғич қийматлар $y_1(0)=0$, $y_2(0)=1$ бўлсин. Теоремада қўлланилган усул билан шу Коши масаласининг ечимини топамиз. Содда ҳисоблашлар кўрсатадики, $\varphi^{(0)}=\begin{pmatrix}\varphi_1^{(0)}\\ \varphi_2^{(0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ десак, қуйидагиларга эга бўламиз: $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,

$$\varphi^{(1)}(x)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix};$$

$$\varphi^{(2)}(x)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ 1\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}1\\ -\tau\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\ -\frac{x^2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 1-\frac{x^2}{2!}\end{pmatrix};$$

$$\varphi^{(3)}(x)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ 1-\frac{\tau^2}{2!}\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}1-\frac{\tau^2}{2!}\\ -\tau\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}x-\frac{x^3}{3!}\\ -\frac{x^2}{2!}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-\frac{x^3}{3!}\\ 1-\frac{x^2}{2!}\end{bmatrix};$$

$$\varphi^{(4)}(x)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\int_{x_0}^x\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau-\frac{\tau^3}{3!}\\ 1-\frac{\tau^2}{2!}\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+$$

$$+\int_0^x\begin{pmatrix}1-\frac{\tau^2}{2!}\\ -\tau+\frac{\tau^2}{3!}\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}x-\frac{x^3}{3!}\\ 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{X^4}{4!}\end{pmatrix};$$

. . . .

$$\varphi^{(2i)}(x)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau-\frac{\tau^3}{3!}+\ldots+(-1)^{i-1}\frac{\tau^{2i-1}}{(2i-1)!}\\ 1-\frac{\tau^2}{2!}+\ldots+(-1)^i\frac{\tau^{2i-2}}{(2i-2)!}\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\begin{pmatrix}x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{i-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}\\ 1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}\end{pmatrix};$$

$$\varphi^{(2i+1)}(x)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int\limits_0^x\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau-\frac{\tau^3}{3!}+\ldots+(-1)^{i-1}\frac{\tau^{2i-1}}{(2i-1)!}\\1-\frac{\tau^2}{2!}+\ldots+(-1)^i\frac{\tau^{2i}}{(2i)!}\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\begin{pmatrix}x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\\1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}\end{pmatrix}.$$

Бу ифодалардан

$$\lim_{i\to\infty}\varphi^{(i)}(x)=\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\end{pmatrix}.-\infty<x<x+\infty$$

келиб чиқади. $\varphi(x)=\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\end{pmatrix}$ функция тегишли бошланғич шартни қаноатлантиради: $\sin 0=0$, $\cos 0=1$.

9.2- §. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ СИСТЕМАЛАР

1. Чизиқли оператор ва унинг хоссалари. Мазкур параграфда (9.4) кўринишда ёзилган системаларни, яъни чизиқли бир жинсли системаларни ўрганамиз.

Кейинги мулоҳазаларнинг қулайлиги учун L операторни

$$L(y)=\frac{dy}{dx}-A(x)\,y \tag{9.6}$$

тенглик ёрдамида киритамиз. Агар $p=\frac{d}{dx}$ ва E — бирлик $n\times n$ матрица бўлса, (9.6) ни яна ушбу

$$L(p)y=(pE-A(x))y$$

кўринишда ёзиш мумкин. Киритилган L оператор ёрдамида (9.4) тенглама ушбу содда:

$$L(y)=0 \text{ ёки } L(p)\,y=0 \tag{9.4$'$}$$

кўринишда ёзилади.

Аввал $L(p)$ операторнинг хоссаларини ўрганамиз:

1-хосса. *Агар C — ихтиёрий ўзгармас сон бўлса,*

$$L(Cy)=CL(y)$$

айният ўринли.

Ҳақиқатан,

$$L(Cy)=\frac{d(Cy)}{dx}-A(x)(Cy)=C\frac{dy}{dx}-CA(x)\,y=CL(y).$$

2-хосса. *Агар C_1, C_2, . . . , C_m — ихтиёрий ўзгармас сонлар бўлса,*

$$L\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y^{(i)}\right)=\sum_{i=1}^{m} C_i L\left(y^{(i)}\right)$$

айният ўринли, бунда $y^{(1)}, y^{(2)},\ldots,y^{(m)}$ — *бирор вектор-функциялар.*

Ҳақиқатан, содда мулоҳазалар ёрдамида топамиз:

$$L\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y^{(i)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y^{(i)}\right)-A(x)\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y^{(i)}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} C_i\left(\frac{d}{dx}y^{(i)}\right)-\sum_{i=1}^{m} C_i\left(A(x)y^{(i)}\right)=\sum_{i=1}^{m} C_i\left(\frac{d}{dx}y^{(i)}-A(x)y^{(i)}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} C_i L\left(y^{(i)}\right).$$

Бу хоссалардан фойдаланиб қуйидаги теоремаларни исботлаймиз.

9.2- теорема. *Агар* $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots, \varphi^{(m)}(x)$ *вектор-функцияларнинг ҳар бири бирор* I *интервалда* (9.4) *тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг чизиқли комбинацияси ҳам ечим бўлади.*

Исбот. Теореманинг шартига кўра $L(\varphi^{(i)}(x))=0,\ x\in I,\ i=1, \ldots, m$. Шунинг учун 2- хоссадан фойдалансак:

$$L\left(\sum_{i=1}^{m} C_i \varphi^{(i)}(x)\right)=\sum_{i=1}^{m} C_i L\left(\varphi^{(i)}(x)\right)\equiv 0.$$

9.3- теорема. *Агар* $y=\varphi(x)$ *вектор-функция (9.4) тенгламанинг бирор* I *интервалда аниқланган ва* $\varphi(x_0)=0, x_0\in I$ *бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими бўлса, у ҳолда* I *интервалда* $\varphi(x)$ *функция айнан нолга тенг бўлади, яъни* $\varphi(x)=0,\ x\in I$.

Исбот. (9.4) тенгламанинг тривиал $y=0$ ечими мавжуд. Аммо теореманинг шартида қайд қилинган $y=\varphi(x)$ ечим шу тривиал ечим билан бир хил бошланғич қийматларга эга. Шунинг учун чизиқли системалар учун мавжудлик ва ягоналик теоремасига кўра $y=\varphi(x)$ ечим тривиал ечим билан бутун I интервалда устма-уст тушади, яъни $\varphi(x)\equiv 0,\ x\in I$.

9.4- теорема. *Агар* (9.4) *тенгламада* $A(x)$ *матрица ҳақиқий бўлиб, шу тенглама* $y=\varphi(x)+ig(x), x\in I$ *комплекс ечимга эга бўлса, у ҳолда ҳар бир* $\varphi(x), g(x), x\in I$ *ҳақиқий вектор-функциялар ҳам* (9.4) *тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан, шарт бўйича $L(\varphi(x)+ig(x))\equiv 0,\ x\in I$. Бундан 1- ва 2- хоссаларга кўра

$$L(\varphi(x)+ig(x)\ =L(\varphi(x))+iL(g(x))=0,\ x\in I.$$

Аммо комплекс функция нолга тенг бўлиши учун унинг ҳақиқий ва мавҳум қисми нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Шунинг учун $L(\varphi(x))\equiv 0,\ L(g(x))\equiv 0,\ x\in I$.

2. Вектор функцияларнинг чизиқли боғлиқлиги ва эрклилиги. Кейинги мулоҳазаларда муҳим роль ўйнайдиган вектор-функцияларнинг чизиқли боғлиқлиги ва эрклилиги тушунчасини киритамиз.

9.1-таъриф. *Агар бир вақтда нолга тенг бўлмаган шунда $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ўзгармас сонлар мавжуд бўлсаки, улар учун бирор I интервалда ушбу $\alpha_1\varphi^{(1)}(x)+\alpha_2\varphi^{(2)}(x)+\dots+\alpha_k\varphi^{(k)}(x)\equiv0$ айният ўринли бўлса, у ҳолда*

$$\varphi^{(1)}(x),\ \varphi^{(2)}(x),\ \dots,\ \varphi^{(k)}(x), \varphi^{(i)}(x)=\begin{bmatrix}\varphi_1^{(i)}(x)\\ \vdots\\ \varphi_n^{(i)}(x)\end{bmatrix}$$

вектор-функциялар I интервалда чизиқли боғлиқ дейилади. Агар юқоридаги айният фақат $\alpha_1=\dots=\alpha_k=0$ бўлгандагина ўринли бўлса, у ҳолда $\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)$ вектор-функциялар I интервалда чизиқли эркли дейилади.

9.1-таърифдан кўринадики, агар $\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)$ вектор-функциялардан бирортаси, масалан $\varphi^{(i)}(x)$, $1\leqslant i\leqslant k$ вектор-функция ноль вектор-функция бўлса, у ҳолда $\varphi^{(1)}(x),\dots, \varphi^{(k)}(x)$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлади. Буни исбот этиш учун $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_{i-1}=\alpha_{i+1}=\dots\alpha_k=0$, $\alpha_i\neq0$ деб танлаш етарли.

Мисол. Ушбу $\varphi^{(1)}(x)=\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$, $\varphi^{(2)}(x)=\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$ векторлар ихтиёри I интервалда чизиқли эркли. Ҳақиқатан, улар чизиқли боғлиқ бўлсин дейлик. У ҳолда α_1, α_2, $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq0$ сонлар учун I интервалда $\alpha_1\varphi^{(1)}(x)+\alpha_2\varphi^{(2)}(x)\equiv0$ $x\in I$ ёки

$$\begin{cases}\alpha_1\cos x-\alpha_2\sin x\equiv0, & x\in I;\\ \alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x\equiv0, & x\in I\end{cases}$$

айниятлар ўринли бўлиши керак. Аммо I интервалдан олинган ихтиёрий x учун α_1ва α_2ларга нисбатан ушбу

$$\begin{cases}\alpha_1\cos x-\alpha_2\sin x=0,\\ \alpha_1\sin x+\alpha_2\cos x=0\end{cases}$$

система матрицасининг детерминанти 1 га тенг. Шунинг учун бу система ихтиёрий $x\in I$ учун фақат тривиал ечимга эга бўлади, яъни $\alpha_1=\alpha_2=0$. Бу тегишли вектор-функциялар чизиқли боғлиқ бўлсин деган фараздан келиб чиққан зиддият. Демак, олинган вектор-функциялар чизиқли эркли.

Энди ушбу

$$\varphi^{(1)}(x),\ \varphi^{(2)}(x),\dots,\ \varphi^{(m)}(x),\ \psi^{(j)}(x)=\begin{bmatrix}\varphi_1^{(j)}(x)\\ \vdots\\ \varphi_n^{(j)}(x)\end{bmatrix},\ j=1,2,\dots,\ m \tag{9.7}$$

вектор-функциялар бирор I да аниқланган бўлиб, (9.4) тенгламанинг ечимлари бўлсин. Қуйидаги теорема ўринли.

9.5- теорема. *Агар x нинг I интервалдан олинган камида битта x_0, $x_0\in I$ қиймати учун*

$$\varphi^{(1)}(x_0),\ \varphi^{(2)}(x_0),\dots,\ \varphi^{(m)}(x_0) \tag{9.8}$$

векторлар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда (9.7) ечимлар I интервалда чизиқли боғлиқ бўлади. Бошқача айтганда, агар (9.7) ечимлар

I да чизиқли эркли бўлса, у ҳолда x нинг I интервалдан олинган биронта ҳам қийматида (9.7) ечимлар чизиқли боғлиқ бўлмайди.

Исбот. (9.8) векторлар чизикли боғлик бўлсин, яъни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \neq 0$ сонлар учун

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(x_0) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x_0) + \dots + \alpha_m \varphi^{m}(x_0) = 0$$

тенглик ўринли. Энди.

$$\varphi(x) = \alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + \dots + \alpha_m \varphi^{(m)}(x)$$

деб белгилайлик. 9.2- теоремага кўра шу $\varphi(x)$ вектор-функция ҳам (9.4) тенгламанинг ечими бўлади. Аммо $\varphi(x)$ функция теореманинг шартига кўра $x = x_0$ нуқтада нолга тенг. Шунинг учун 9.3- теоремага кўра $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in I$, яъни $\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \dots + \alpha_m \varphi^{(m)}(x) \equiv 0$, $x \in I$. Теорема исбот бўлди.

3. Ечимларнинг фундаментал системаси.

9.2- таъриф. *Агар бирор I интервалда аниқланган*

$$\varphi^{(1)}(x),\ \varphi^{(2)}(x),\ \dots\ \varphi^{(n)}(x),\ \varphi^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)}(x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(i)}(x) \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n \quad (9.9)$$

вектор-функциялар системаси (9.4) тенгламанинг чизиқли эркли вектор ечимлари системасини ташкил этса, у ҳолда бу система ечимларнинг фундаментал системаси, ёки қисқача, фундаментал система дейилади.

9.6- теорема. *Дифференциал тенгламаларнинг чизиқли бир жинсли системаси учун фундаментал система мавжуд.*

Исбот. Чизиқли бир жинсли (9.4) системани оламиз. Яна бирор $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ ўзгармас векторлар системаси чизиқли эркли бўлсин. Ўзгармас векторларнинг бундай системаси мавжуд. Буни кўрсатиш учун $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $a^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ деб танлаш етарли, чунки бу векторлардан тузилган матрица детерминанти нолдан фарқли (1 га тенг). Энди ушбу

$$\varphi^{(1)}(x_0) = a^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}(x_0) = a^{(n)}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган (9.9) ечимлар системасини кўрамиз. Танлашга кўра $\varphi^{(1)}(x_0), \dots, \varphi^{(n)}(x_0)$ векторлар чизиқли эркли. Демак, 9.5- теоремага асосан (9.9) ечимлар системаси чизиқли эркли, яъни шу ечимлар системаси фундаментал системани ташкил этади.

9.7- теорема (умумий ечим ҳақида). *Агар* (9.9) *ечимлар фундаментал системани ташкил этса, у ҳолда барча ечимлар ушбу*

$$\varphi(x)=C_1\varphi^{(1)}(x)+C_2\varphi^{(2)}(x)+\ldots+C_n\varphi^{(n)}(x) \qquad (9.10)$$

формула билан топилади, бунда $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — *ихтиёри ўзгармаслар.*

Исбот. Бирор $\varphi^*(x)$ функция I интервалда аниқланган бўлиб (9.4) тенгламанинг $\varphi^*(x_0)=\varphi_0^*=y^0$, $x_0\in I$ бошланғич шартн қаноатлантирадиган ечими бўлсин. Ушбу

$$C_1\varphi^{(1)}(x_0)+C_2\varphi^{(2)}(x_0)+\ldots+C_n\varphi^{(n)}(x_0)=y^0 \qquad (9.11$$

вектор тенгламани кўрайлик. Бу $C_1, C_2, \ldots C_n$ ларга нисбатан чизиқл алгебраик тенгламалар системасидан иборат. Агар $y^0=0$ бўлса (9.11) дан $\varphi^{(1)}(x_0),\ldots,\varphi^{(n)}(x_0)$ векторлар чизиқли эркли бўлгани учу $C_1=C_2=\ldots=C_n=0$ келиб чиқади. Бунда $\varphi^*(x)$ — тривиал ечим бўлади. Энди $y^0\neq0$ бўлсин. У ҳолда (9.11) система *бир жинсли эмас* Унинг детерминанти $\varphi^{(1)}(x_0), \ldots, \varphi^{(n)}(x_0)$ вектордан тузилга бўлиб, теореманинг шартига кўра улар чизиқли эркли ва демак улардан тузилган детерминант нолдан фарқли. Шунинг учу (9.11) дан ягона $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ ларни топамиз. Демак, $\varphi^*(x)$ ечимн бундай

$$\varphi^*(x)\equiv C_1^0\varphi^{(1)}(x)+C_2^0\varphi^{(2)}(x)+\ldots+C_n^0\varphi^{(n)}(x)$$

ёзиш мумкин. Шундай қилиб, (9.4) тенгламанинг ихтиёрий ечим учун тегишли $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ўзгармасларни ягона усул билан танла мумкин. Бу таърифга кўра, (9.10) формула (9.4) тенгламанин умумий ечими эканини исботлайди. Теорема исбот бўлди.

4. Вронский детерминанти. (9.4) тенгламанинг I интервалд аниқланган n та ечими $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ берилган бўлсин. Б вектор-функциялардан ушбу

$$Z(x)=\begin{Vmatrix} \varphi_1^{(1)}(x)\ldots\varphi_1^{(k)}(x)\ldots\varphi_1^{(n)}(x) \\ \varphi_2^{(1)}(x)\ldots\varphi_2^{(k)}(x)\ldots\varphi_2^{(n)}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_n^{(1)}(x)\ldots\varphi_n^{(k)}(x)\ldots\varphi_n^{(n)}(x) \end{Vmatrix} \qquad (9.12$$

матрицани тузамиз. Унда биринчи устунда $\varphi^{(1)}(x)$ векторнинг координаталари, k — устунда $\varphi^{(k)}(x)$, $k=2, \ldots, n$ векторнинг координаталари жойлашган. Шу матрицанинг детерминанти (9.4) система учун *Вронский детерминанти* дейилади ва $W(x)$ ёк $W[\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}]$ деб белгиланади, яъни $\det Z(x)=W(x)$ ((5.10) г таққосланг).

Равшанки, агар $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ ечимлар чизиқли эркл бўлса, у ҳолда Вронский детерминанти x нинг I дан олинган биронта ҳа қийматида нолга айланмайди. Ҳақиқатан, $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$, $x \in I$ вектор-функциялар чизиқли эркли бўлгани учун ушбу

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \ldots + \alpha_n \varphi^{(n)}(x) \equiv 0, \ x \in I$$

айният фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ бўлгандагина ўринли. I интервалдан олинган ихтиёрий тайинланган x учун $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_j^{(i)}(x) = 0$, $j = 1, \ldots, n$ системани ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ларга нисбатан) кўрайлик. У бир жинсли бўлиб, фақат тривиал $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ ечимга эга. Демак, бу системанинг детерминанти учун $W(x) \neq 0$, $x \in I$ муносабат ўринли. Бу мулоҳазалардан юқоридаги ечимлар чизиқли боғлиқ бўлса, $W(x) \equiv 0$, $x \in I$ айният ўринли бўлиши келиб чиқади. Ечимлар фундаментал системани ташкил этса, тегишли (9.12) матрица *интеграл матрица* ёки *фундаментал матрица* деб юритилади.

Энди $Z(x)$ матрицанинг устунлари (9.4) тенгламанинг ечимлари бўлгани учун шу $Z(x)$ матрица ушбу

$$\frac{dZ}{dx} = A(x) Z \tag{9.13}$$

матрицали тенгламанинг ечими бўлади. Агар (9.13) матрицали тенгламанинг детерминанти нолдан фарқли матрицали ечимини топсак, бу билан (9.4) вектор-матрицали тенгламанинг фундаментал системасини топган бўламиз. Аввал (9.13) матрицали тенгламанинг битта хоссасини келтирамиз:

9.1-лемма. *Агар $Z^*(x)$ матрица (9.13) тенгламанинг I интервалда аниқланган бирор матрицали ечими бўлса, у ҳолда тартиби n бўлган ихтиёрий ўзгармас C матрица учун $Z^*(x)C$ матрица ҳам ечим бўлади.*

Исботи жуда содда. Ҳақиқатан, (9.13) тенгламанинг икки томонини ўнгдан C матрицага кўпайтирамиз:

$$\frac{dZ^*(x)}{dx} C \equiv A(x) Z^*(x) C$$

ёки $C = \mathrm{const}$ бўлгани учун

$$\frac{d(Z^*(x)C)}{dx} \equiv A(x)\,(Z^*(x)\,C).$$

Бундан 9.1-лемманинг исботи келиб чиқади.

Эслатма. (9.13) *матрицали тенгламанинг ихтиёрий матрицали ечими ZC (C — ихтиёрий $n \times n$-матрица) фундаментал матрица бўлавермайди.*

9.8-теорема. *Агар $Z(x)$ матрица I интервалда аниқланган узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланадиган ихтиёрий $\varphi^{(j)}(x)$, $j = 1, \ldots, n$ вектор ечимлардан тузилган бўлиб, детерминанти I да нолдан фарқли бўлса, у ҳолда бу $Z(x)$ матрица (9.4) чизиқли тенгламанинг I интервалда аниқланган фундаментал системаси бўлади.*

Исбот. Аввало $\det Z(x) \neq 0$, $x \in I$. Шунинг учун $Z(x)$ матрица фундаментал бўлади. $Z(x)$ матрица ечим бўлгани учун ушбу

$$\frac{dZ(x)}{dx} \equiv A(x)\,Z(x),\ x \in I \tag{9.14}$$

айниятга эгамиз. Бунда $Z(x)$ матрицанинг детерминанти шарт бўйича нолдан фарқли. Шунинг учун бу матрицага тескари $Z^{-1}(x)$ матрица мавжуд, яъни ушбу

$$Z(x)\,Z^{-1}(x) = Z^{-1}(x)\,Z(x) = E$$

(E- бирлик матрица) тенгликни қаноатлантирадиган $Z^{-1}(x)$ матрица мавжуд. Бунда $Z^{-1}(x)$ матрица, масалан,

$$Z^{-1}(x) = \frac{1}{\det Z(x)} \cdot \begin{Vmatrix} Z_{11}(x) & \dots & Z_{n1}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Z_{1n}(x). & \dots & Z_{nn}(x) \end{Vmatrix} \tag{9.15}$$

формула билан топилиши мумкин, бунда $Z_{ij}(x)$ — $Z(x)$ матрицанинг $\varphi_i^j(x)$, $i, j = 1, \ . \ . \ . \ , n$ элементининг *алгебраик тўлдирувчиси.* Энди (9.14) айниятнинг икки томонини ўнгдан $Z^{-1}(x)$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{dZ(x)}{dx} \cdot Z^{-1}(x) \equiv A(x). \tag{9.16}$$

Бу айниятдан $A(x)$ матрицанинг $a_{ij}(x)$ элементлари ягона усул билан аниқланади. $\frac{dZ(x)}{dx}$ ва $Z^{-1}(x)$ матрицаларнинг элементлари I интервалда узлуксиз бўлгани учун $A(x)$ матрицанинг элементлари ҳам шу интервалда узлуксиз. Теорема исбот этилди.

5. Остроградский — Лиувилль формуласи.

9.9- теорема. *Агар* (9.13) *матрицали тенгламада* $A(x)$ *матрица* I *интервалда узлуксиз бўлиб,* $Z(x)$ *матрица* (9.13) *тенгламанинг шу интервалда аниқланган матрицали ечими бўлса, у ҳолда* I *интервалдан олинган ихтиёрий* x *ва* x_0 *лар учун ушбу*

$$\det Z(x) = \det Z(x_0)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} SpA(\tau)\,d\tau} \tag{9.17}$$

формула ўринли. Бунда $SpA(\tau)$ *белги* $A(\tau)$ *матрицанинг бош диагонал элементлари йиғиндисидан иборат бўлиб,* $A(\tau)$ *матрицанинг изи дейилади.*

(9.17) формулани *Остроградский — Лиувилль *) формуласи* деб юритилади. Уни Вронский детерминанти орқали ҳам ёзиш мумкин:

---

* Остроградский — Лиувилль формуласи иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар учун 1827 йилда Н. Абель томонидан, n-тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар учун 1838 йилда Ж. Лиувилль томонидан, системалар учун умумий ҳолда М. В. Остроградский томонидан чиқарилган.

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} SpA(\tau)\,d\tau} \qquad (9.17)$$

Исбот. (9.17) формулани исботлаш учун $W(x)$ детерминантдан x бўйича ҳосила оламиз. Анализдан маълумки, $W(x)$ нинг ҳосиласи

$$\frac{dW(x)}{dx} = W_1(x) + \ldots + W_n(x) \qquad (9.18)$$

формула билан ҳисобланади. Бу формулада W_i — n-тартибли детерминант бўлиб, $W(x)$ детерминантдан i-йўли билан фарқ қилади. Бу i-йўл эса $W(x)$ нинг i-йўл элементларини дифференциаллаш билан ҳосил қилинади. Албатта, i-йўл ўрнига i-устун тўғрисида гапирсак ҳам мулоҳазалар ўринли бўлаверади. Энди $W_i(x)$ ни ёзайлик:

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \ldots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \ldots & z_{2n}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z'_{i1}(x) & z'_{i2}(x) & \ldots & z'_{in}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \ldots & z_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Бунда i-йўлдаги ҳосилалар ўрнига (9.13) матрицали тенгламанинг координаталар орқали ёзилишини назарда тутиб, тегишли ифодаларни қўямиз:

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \ldots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \ldots & z_{2n}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} z_{j1}(x) & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} z_{j2}(x) & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} z_{jn}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \ldots & z_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Энди i-дан бошқа ҳар бир k-йўл, $k=1,2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ элементларини тегишли a_{ik} га кўпайтириб, i-йўл элементларидан айириб ташлаймиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$W_i(x) = \begin{vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \ldots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \ldots & z_{2n}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{ii}\, z_{i1}(x) & a_{ii}\, z_{i2}(x) & \ldots & a_{ii}\, z_{in}(x) \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \ldots. & z_{nn}(x) \end{vmatrix} = a_{ii} W(x), \quad i=1,2, \ldots, n.$$

Шундай қилиб, (9.18) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{dW\ (x)}{dx} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right) W\ (x) \ \text{ёки}\ \frac{dW\ (x)}{dx} = (S_p\, A)\ W\ (x). \qquad (9.1$$

Биз Вронский детерминанти учун биринчи тартибли бир жинсл дифференциал тенгламани ҳосил қилдик. Бу ўзгарувчилари ажрала диган тенглама. Шунинг учун (9.19) тенгламанинг $W\ (x_0) = W$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ягона ечими (9.17) формул билан ёзилади. Демак, Остроградский — Лиувилль формуласи исбо бўлди.

9.10- теорема. *Бирор $Z\ (x)$, $n \times n$ матрица (9.13) тенгламанин I интервалда аниқланган ечими бўлсин. Бу $Z\ (x)$ матрица фунда ментал бўлиши учун ушбу*

$$\det Z(x) = W(x) \neq 0,\ x \in I$$

муносабатнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

9.1- натижа. *Агар $Z\ (x)$ матрица (9.13) тенгламанинг I интер валда аниқланган фундаментал матрицаси бўлса, у ҳолда ихтиёри махсусмас (яъни детерминанти нолдан фарқли) C $n \times n$-матрица учу $Z\ (x) C$ матрица ҳам (9.13) тенгламанинг фундаментал матрицас бўлади.*

Исбот. $\det Z(t)\ C = \det Z(t)\ \det C \neq 0$ (9.1- леммага қаранг).

9.2- натижа. *Агар* $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n \end{pmatrix}$ *ихтиёрий $(n \times 1)$-вектор бўлс фундаментал матрица орқали (9.4) вектор-матрицали тенгламанин умумий ечими*

$$y\ (x) = Z\ (x) C$$

кўринишда ёзилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y'_1 = -y_2,\ y'_2 = y_1$$

система учун

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \ \text{ва}\ y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

вектор-функциялар $-\infty < x < +\infty$ интервалда ечим бўлади. Буни бевоси текшириб кўриш мумкин, $y^{(1)}\ (x)$ ва $y^{(2)}\ (x)$ ечимлар фундаментал системани та кил этади. Ҳақиқатан, бу ечимлардан Вронский детерминантини тузамиз:

$$W\ (x) = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Демак, $W\ (x) \neq 0$, $-\infty < x < +\infty$. Шунинг учун $y^{(1)}\ (x)$ ва $y^{(2)}\ (x)$ ечимлар фу даментал системани ташкил этади. Берилган системада $A\ (x)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Шундай қилиб, $\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$ матрица

$$\frac{dZ}{dx}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}Z \tag{9.21}$$

матрицали тенгламанинг фундаментал матрицаси бўлади. Энди фундаментал матрицаси

$$Z\ (x)=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$$

бўлган чизиқли бир жинсли системани тузайлик. Равшанки,

$$\frac{dZ\ (x)}{dx}=\begin{pmatrix}-\sin x & -\cos x\\ \cos x & -\sin x\end{pmatrix}.$$

Энди $Z^{-1}\ (x)$ матрицани топамиз: аввало

$\det Z\ (x)=\begin{vmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1,$ алгебраик тўлдирувчилар

$$A_{11}=\cos x,\ A_{21}=\sin x,\ A_{12}=-\sin x, A_{22}=\cos x.$$

Шунинг учун $Z^{-1}(x)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}$. Бундан

$$A\ (x)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\frac{dZ\ (x)}{dx}Z^{-1}\ (x)=$$

$$=\begin{pmatrix}-\sin x & -\cos x\\ \cos x & -\sin x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Шундай қилиб, берилган фундаментал матрицага ягона матрицали дифференциал тенглама мос келади ва у (9.21) тенглама билан устма-уст тушади. (9.21) матрицали тенгламанинг умумий ечими $Z\ (x)=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}C$ кўринишда, берилган нормал системанинг умумий ечими эса $\begin{pmatrix}y_1\ (x)\\ y_2\ (x)\end{pmatrix}=y\ (x)=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}C=$

$=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\cos x-C_2\sin x\\ C_1\sin x+C_2\cos x\end{pmatrix}$ кўринишда ёзилади.

2. Қуйидаги $y_1'=y_2,\ y_2'=-y_1+2y_2$ система учун

$$y^{(1)}\ (x)=\begin{pmatrix}e^x\\ e^x\end{pmatrix},\ y^{(2)}\ (x)=\begin{pmatrix}xe^x\\ (x+1)\ e^x\end{pmatrix}$$

вектор-функциялар $-\infty<x<+\infty$ интервалда ечим бўлади. Шу билан бирга бу вектор-функциялар фундаментал системани ташкил этади, чунки улардан тузилган вронскиан нолдан фарқли:

$$W\ (x)=\begin{vmatrix}e^x & xe^x\\ e^x & (x+1)\ e^x\end{vmatrix}=e^{2x}\neq 0.$$

Шунинг учун умумий ечим

$$y(x)=C_1\begin{pmatrix}e^x\\ e^x\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}xe^x\\ (x+1)e^x\end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилади. Берилган система ўрнига матрицали тенгламани, яъни

$$\frac{dZ}{dx}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}Z \qquad (9.22)$$

тенгламани кўрамиз. Энди фундаментал матрицаси $Z(x)=\begin{pmatrix}e^x & xe^x\\ e^x & (x+1)e^x\end{pmatrix}$ бўлган матрицали тенглама тузамиз. Равшанки, $\det Z(x)=e^{2x}$, $A_{11}(x)=(x+1)e^x$, $A_{12}(x)=-e^x$, $A_{21}(x)=-xe^x$, $A_{22}(x)=e^x$. Шунинг учун

$$A(x)=\frac{dZ(x)}{dx}Z^{-1}(x)=\begin{pmatrix}e^x & (x+1)e^x\\ e^x & (x+2)e^x\end{pmatrix}\frac{1}{e^{2x}}\begin{pmatrix}(x+1)e^x & -xe^x\\ -e^x & e^x\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & x+1\\ 1 & x+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1 & -x\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Демак, $A(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Шундай қилиб, (9.22) тенглама берилган фундаментал матрицанинг ягона дифференциал тенгламасидир.

Энди берилган фундаментал матрица бўйича *чизиқли системани тузиш йўлини* кўрсатамиз.

Ушбу $y^{(1)}(x)$, $y^{(2)}(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$ функциялар I интервалда чизиқли эркли функциялар бўлиб, шу интервалда дифференциалланувчи функция бўлсин. Яна $y(x)$ ҳам I интервалда аниқланган, узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлсин. Агар $y^{(k)}(x)$, $k=1$, ..., n ва $y(x)$ функциялар бирор чизиқли системанинг ечими бўлса, у ҳолда қуйидаги айниятларни ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+\dots+a_{1n}(x)y_n,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dy_n}{dx}&=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+\dots+a_{nn}(x)y_n\end{aligned}\right\}\begin{matrix}(0_1)\\ \vdots\\ (0_n)\end{matrix}\ (0)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1^{(1)}}{dx}&=a_{11}y_1^{(1)}+a_{12}y_2^{(1)}+\dots+a_{1n}y_n^{(1)}\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dy_n^{(1)}}{dx}&=a_{n1}y_1^{(1)}+a_{n2}y_2^{(1)}+\dots+a_{nn}y_n^{(1)},\end{aligned}\right\}\begin{matrix}(1_1)\\ \vdots\\ (1_n)\end{matrix}\ (1)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1^{(n)}}{dx}&=a_{11}y_1^{(n)}+a_{12}y_2^{(n)}+\dots+a_{1n}y_n^{(n)}\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dy_n^{(n)}}{dx}&=a_{n1}y_1^{(n)}+a_{n2}y_2^{(n)}+\dots+a_{nn}y_n^{(n)}\end{aligned}\right\}\begin{matrix}(n_1)\\ \vdots\\ (n_n)\end{matrix}\ (n)$$

$(a_{ij}=a_{ij}(x))$. Ёзилган (0), (1), ... , (n) системаларнинг биринчи тенгламаларини олиб система тузамиз:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx}=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n,\\
&\frac{dy_1^{(1)}}{dx}=a_{11}y_1^{(1)}+a_{12}y_2^{(1)}+\ldots+a_{1n}y_n^{(1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dy_1^{(n)}}{dx}=a_{11}y_1^{(n)}+a_{12}y_2^{(n)}+\ldots+a_{1n}y_n^{(n)}.
\end{aligned}\right\}$$

Бу системанинг чап томонини ҳам ўнг томонга ўтказиб, тегишли ҳосилалар олдидаги коэффициентлар (-1) га тенг бўлгани учун уларни a_{10} $(a_{10}=-1)$ деб белгилаймиз. Натижада a_{10}, $a_{11}, \ldots$ a_{1n} ларга нисбатан ушбу

$$\left.\begin{aligned}
&a_{10}\frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=0,\\
&a_{10}\frac{dy_1^{(1)}}{dx}+a_{11}y_1^{(1)}+a_{12}y_2^{(1)}+\ldots+a_{1n}y_n^{(1)}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{10}\frac{dy_1^{(n)}}{dx}+a_{11}y_1^{(n)}+a_{12}y_2^{(n)}+\ldots+a_{1n}y_n^{(n)}=0
\end{aligned}\right\}$$

системага эга бўламиз. Бу система тривиалмас ечимга эга, чунки $a_{10}=-1\neq 0$. Шунинг учун унинг детерминанти нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$\begin{vmatrix}
\frac{dy_1}{dx} & y_1 & y_2\ldots & y_n\\
\frac{dy_1^{(1)}}{dx} & y_1^{(1)} & y_2^{(1)}\ldots & y_n^{(1)}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{dy_1^{(n)}}{dx} & y_1^{(n)} & y_2^{(n)}\ldots & y_n^{(n)}
\end{vmatrix}=0,\quad x\in I.$$

Шунга ўхшаш, (0), (1), . . . , (n) системаларнинг мос равишда k-тенгламаларини олиб, тегишли мулоҳаза юритсак, қуйидаги

$$\begin{vmatrix}
\frac{dy_k}{dx} & y_1 & y_2 & \ldots & y_n\\
\frac{dy_k^{(1)}}{dx} & y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \ldots & y_n^{(1)}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{dy_k^{(n)}}{dx} & y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)}
\end{vmatrix}=0,\quad x\in I,\ k=1,2\ \ldots,\ n \tag{9.23}$$

муносабатларга келамиз. Биз k нинг ҳар бир $1\leqslant k\leqslant n$ қийматида битта биринчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламага эгамиз. Демак, $k=1, 2, \ldots, n$

бўлганда (9.23) муносабатлар ҳосиласи олдидаги коэффициенти Вронский детерминантидан иборат биринчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламалар системасидир.

Юқорида қурилган 1- ва 2- мисоллар учун берилган фундаментал системага мос чизиқли системани шу усул билан чиқариш мумкин.

9.3-§. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН СИСТЕМАЛАР

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=A\ (x)\ y+b\ (x) \tag{9.3}$$

система берилган бўлсин. Бунда $A\ (x)$ квадрат матрица ва $b\ (x)\not\equiv\not\equiv 0$ устун вектор I интервалда аниқланган ва узлуксиз. Чизиқли L оператори ёрдамида (9.3) система

$$L\ (y)=b\ (x) \tag{9.3 ′}$$

кўринишда ёзилади.

9.11-теорема. *Агар $\psi\ (x)$, $x\in I$ вектор-функция бир жинсли бўлмаган (9.3) тенгламанинг бирор ечими бўлиб, $\varphi\ (x)$, $x\in I$ вектор-функция унга мос бир жинсли (9.4) тенгламанинг бирор ечими бўлса, у ҳолда шу вектор-функциялар йиғиндиси $\varphi\ (x)+\psi\ (x)$ бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. Бевосита $L\ (\varphi\ (x)+\psi\ (x))$ ни ҳисоблаймиз. $L(\varphi(x))\equiv 0$. $L(\psi(x))\equiv b(x)$ эканини ҳисобга олсак, ушбу $L\ (\varphi(x)+\psi(x))=L(\varphi(x))+L(\psi(x))\equiv 0+b(x)$ айният теоремани исбот этади.

9.12-теорема (умумий ечим ҳақида). *Чизиқли бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечими унинг бирор хусусий ечими билан мос бир жинсли система умумий ечимининг йиғиндисидан иборат.*

Исбот. Агар бир жинсли (9.4) системанинг фундаментал матрицасини $Z\ (x)$, бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимини $\psi(x)$ десак, теореманинг тасдиқи бўйича бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечими

$$y\ (x)=Z\ (x)\ C+\psi\ (x)$$

(C — ихтиёрий ўзгармас устун вектор) кўринишда ёзилади. 9.11-теоремага кўра $Z\ (x)\ C+\psi\ (x)$ вектор-функция (9.3) тенгламанинг ечими. Энди бу ечим умумий эканини исботлаймиз. $y=y^0\ (x)$, $x\in I$ вектор-функция (9.3) тенгламанинг $\psi\ (x)$ дан фарқли ихтиёрий ечими бўлсин. У ҳолда ягона C° ўзгармас вектор учун I интервалда

$$y^\circ\ (x)\equiv Z\ (x)\ C^\circ+\psi\ (x)$$

айният ўринли эканини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан, $y^\circ\ (x)$ функция $y^\circ\ (x_0)=y^\circ$, $\psi\ (x)$ функция $\psi\ (x_0)=\psi^\circ$ бошланғич шартни қаноатлантирсин. Ушбу

$$y^\circ=Z\ (x_0)\ C+\psi^\circ$$

ёки

$$Z\ (x_0)\ C=y^0-\psi_0,\quad \sum_{i=1}^{n}\ (y_i^0-\psi_i^0)^2\neq 0$$

вектор-тенгламани кўрамиз. Бундан $Z(x_0)$ матрицага тескари матрица мавжудлиги учун (чунки $\det Z(x_0) = W(_0) \neq 0$) ягона C° ни топамиз:

$$C^0 = Z^{-1}(x_0)(y^0 - \psi_0).$$

Шундай қилиб, $y^0(x)$ функция учун

$$y^0(x) \equiv Z(x) Z^{-1}(x_0)(y^0 - \psi^0) + \psi(x)$$

формулага эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

Машқда муҳим роль ўйнайдиган яна икки теоремани келтирамиз.

9.13- теорема. *Агар ушбу*

$$L(y) = \sum_{m=1}^{k} b^{(m)}(x), \quad \begin{pmatrix} b_1^{(m)}(x) \\ \vdots \\ b_n^{(m)}(x) \end{pmatrix} = b^{(m)}(x) \in C(I) \tag{9.24}$$

бир жинсли бўлмаган тенглама берилган бўлиб, $\psi^{(1)}(x)$, $\psi^{(2)}(x)$, ..., $\psi^{(k)}(x)$ *вектор-функциялар* I *интервалда мос равишда*

$$L(y) = b^{(1)}(x), \ L(y) = b^{(2)}(x), \ ..., \ L(y) = b^{(k)}(x) \tag{9.25}$$

тенгламаларнинг ечимлари бўлса, у ҳолда I *интервалда*

$$\psi(x) = \psi^{(1)}(x) + \psi^{(2)}(x) + ... + \psi^{(k)}(x) \tag{9.26}$$

вектор-функция берилган (9.24) *тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. Теореманинг шарти бўйича қуйидаги

$$L(\psi^{(m)}(x)) \equiv b^{(m)}(x), \ x \in I, m = 1, 2, ..., k$$

айниятларга эгамиз. L операторнинг хоссасига асосан топамиз:

$$L(\psi(x)) = L\left(\sum_{m=1}^{k} \psi_{(m)}(x)\right) = \sum_{m=1}^{k} L(\psi^{(m)}(x)) \equiv \sum_{m=1}^{k} b^{(m)}(x).$$

Теорема исбот бўлди.

9.14- теорема. *Агар* $b(x) = b^{(1)}(x) + ib^{(2)}(x)$, $x \in I$ *комплекс вектор-функция бўлиб, ушбу*

$$L(y) = b^{(1)}(x) + ib^{(2)}(x)$$

тенглама чизиқли оператор L *нинг коэффициентлари ҳақиқий бўлганда* $y = \psi^{(1)}(x) + i\psi^{(2)}(x)$ *комплекс вектор-ечимга эга бўлса, у ҳолда* $\psi^{(1)}(x)$ *ва* $\psi^{(2)}(x)$ *вектор-функциялар мос равишда*

$$L(y) = b^{(1)}(x), \ L(y) = b^{(2)}(x)$$

тенгламаларнинг ечими бўлади.

Исбот. Биз ушбу

$$L\ (\psi^{(1)}\ (x)+i\psi^{(2)}\ (x))\equiv b^{(1)}\ (x)+ib^{(2)}\ (x),\ x\in I$$

айниятга эгамиз. Бундан

$$L\ (\psi^{(1)}\ (x))+iL\ (\psi^{(2)}\ (x))\equiv b^{(1)}\ (x)+ib^{(2)}\ (x)$$

ёки

$$L\ (\psi^{(1)}\ (x))\equiv b^{(1)}\ (x),\ L\ (\psi^{(2)}\ (x))\equiv b^{(2)}\ (x)$$

айниятлар келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

1. **Ўзгармасни вариациялаш усули. Қоши формуласи.** Бу усулни Ж. *Лагранж* номи билан аталади. Унинг мазмунини баён қиламиз.

Ушбу

$$\varphi^{(1)}\ (x),\ \varphi^{(2)}\ (x),\ ...,\ \varphi^{(n)}\ (x)$$

функциялар I интервалда (9.4) тенгламанинг фундаментал системаси бўлсин. (9.3) тенгламанинг (яъни бир жинсли бўлмаган тенгламанинг) ечимини қуйидаги

$$y=\sigma_1\ (x)\ \varphi^{(1)}\ (x)+\sigma_2\ (x)\ \varphi^{(2)}\ (x)+...+\sigma_n\ (x)\ \varphi^{(n)}\ (x) \qquad (9.27)$$

($\sigma_i\ (x),\ x\in I,\ i=1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ n$-бирор номаълум скаляр функциялар) кўринишда излаймиз. Бу (9.27) функция (9.3) тенгламанинг ечими бўлиши учун аввало $\sigma_i\ (x), i=1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ n$ функциялар I интервалда дифференциалланувчи бўлиши зарур. Қолган шартларни (9.27) функция ечим бўлиши шартидан чиқарамиз. Шунинг учун (9.27) функцияни (9.3) тенгламага қўямиз:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\sigma_i\ (x)}{dx}\varphi^{(i)}\ (x)+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\ (x)\ L\ (\varphi^{(i)}\ (x))=b\ (x).$$

Аммо $L\ (\varphi^{(i)}\ (x))\equiv 0$ бўлганидан қуйидагига эгамиз:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\ \sigma_i\ (x)}{dx}\varphi^{(i)}\ (x)=b\ (x). \qquad (9.28)$$

Топилган вектор-тенглама скаляр функциялар $\frac{d\ \sigma_1\ (x)}{dx}, ..., \frac{d\sigma_n\ (x)}{dx}$ учун чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламадир. Унинг детерминанти вронскиандан иборат. $\varphi^{(1)}\ (x),\ ...\ ,\ \varphi^{(n)}\ (x)$ вектор-функциялар I да фундаментал системани ташкил этгани учун бу вронскиан нолдан фарқли. Демак, (9.28) вектор-тенгламадан $\frac{d\ \sigma_i\ (x)}{dx},\ i=1,\ 2,\ ...\ ,\ n$ функцияларнинг ягона ифодасини топамиз:

$$\frac{d\ \sigma_i\ (x)}{dx}=\delta_i\ (x),\ i=1,\ 2,\ ...\ ,\ n,\ x\in I.$$

Бундан

$$\sigma_i\ (x)=\int_{x_0}^{x}\delta_i\ (\tau)\ d\tau+\overline{C}_i,\ x\in I,\ x_0\in I,\ i=1,\ 2,\ ...\ ,\ n$$

($\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$-ихтиёрий ўзгармаслар). Топилган ифодаларни (9.27) га қўямиз:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i \varphi^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \varphi^{(i)}(x) \int_{x_0}^{x} \delta_i(\tau)\, d\tau. \tag{9.29}$$

Топилган ифодада $\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_n$ лар ихтиёрий ўзгармас бўлгани учун $\sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i \varphi^{(i)}(x) = \varphi(x)$ вектор-функция (9.4) тенгламанинг умумий ечими бўлади. $\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^{(i)}(x) \int_{x_0}^{x} \delta_i(\tau)\, d\tau$ вектор-функция эса бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимидир.

Шундай қилиб, умумий ечим ҳақидаги 9.12-теоремага асосан (9.29) формула (9.3) тенгламанинг умумий ечимини ифодалайди.

Ўзгармасни вариациялаш усулидан бир жинсли бўлмаган тенглама учун Коши масаласини ҳал қилишда ҳам фойдаланиш мумкин. Ҳақиқатан, бизга ушбу

$$\frac{dy}{dx} = A(x)\, y + b(x), \quad x \in I, \quad y(x_0) = y^0 \tag{9.30}$$

масала берилган бўлсин. (9.4) тенгламанинг $x = x_0$ бўлганда бирлик матрицага айланувчи фундаментал матрицасини $Z(x, x_0)$ дейлик. Демак, $Z(x_0, x_0) = E$. Бундай матрица (9.4) тенгламанинг *нормал фундаментал матрицаси* дейилади. Агар узлуксиз дифференциалланувчи номаълум $\sigma(x)$ вектор-функция учун $\sigma(x_0) = y^0$ тенглик бажарилсин десак, (9.30) масаланинг ечимини

$$y(x) = Z(x, x_0)\, \sigma(x) \tag{9.31}$$

кўринишда излаш мумкин. Аввало $y(x_0) = Z(x_0, x_0)\, \sigma(x_0) = Ey^0 = y^0$. Энди (9.31) вектор-функциядан ҳосила олиб, (9.30) га қўямиз:

$$\frac{dZ(x, x_0)}{dx} \sigma(x) + Z(x, x_0) \frac{d\sigma(x)}{dx} = A(x)\, Z(x, x_0)\, \sigma(x) + b(x).$$

Бундан

$$\frac{dZ(x, x_0)}{dx} \equiv A(x)\, Z(x, x_0)$$

айниятга кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$Z(x, x_0) \frac{d\sigma(x)}{dx} = b(x).$$

Бу тенгликнинг икки томонини чапдан $Z^{-1}(x, x_0)$ матрицага кўпайтирамиз:

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = Z^{-1}(x, x_0)\, b(x).$$

Энди x_0 дан x гача ($x \in I$, $x_0 \in I$) интеграллаб топамиз:

$$\sigma(x) = \sigma(x_0) + \int_{x_0}^{x} Z^{-1}(\tau, x_0)\, b(\tau)\, d\tau. \tag{9.32}$$

Ёзилган системанинг детерминанти 1 га тенг. Шунинг учун:

$$\frac{d\sigma_1}{dx}=\begin{vmatrix} 1 & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos x+\sin^2 x,$$

$$\frac{d\sigma_2}{dx}=\begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ \sin x & \sin x \end{vmatrix}=\sin x\cos x-\sin\ x;$$

$$\sigma_1\ (x)=\int(\cos x+\sin^2 x)\ dx=\int\left(\cos x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=$$

$$=\sin x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C_1.$$

$$\sigma_2\ (x)=\int(\sin x\cos x-\sin x)\ dx=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 2x+\cos x+C_2.$$

Энди берилган системанинг умумий ечимини ёзиш мумкин:

$$y\ (x)=\left(\sin x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}+\left(-\frac{1}{4}\cos 2x+\right.$$

$$\left.+\cos x\ \right)\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}.$$

9.4-§. ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ БИР ЖИНСЛИ СИСТЕМАЛАР

1. Характеристик тенглама. (9.4) тенгламада A матрица ўзгарма бўлсин. Бу ҳолда биз ушбу

$$\frac{dy}{dx}=Ay,\qquad A=\text{const} \tag*{(9.38}$$

чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли вектор-матрицал тенгламага эгамиз. Агар $L=A-pE$, $p=\frac{d}{dx}$ оператордан фойдалан сак, (9.38) тенгламани ушбу

$$(A-pE)\ y=0 \tag*{(9.39}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда E — бирлик матрица. Равшанк $A-pE=L\ (p)$ ва бу $L\ (p)$ оператор p га нисбатан n — тартибл матрицадан иборат. Уни координаталарда ёзамиз:

$$L\ (p)=\begin{vmatrix} a_{11}-p & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-p & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-p \end{vmatrix}. \tag*{(9.40}$$

Демак, (9.38) ни яна

$$L\ (p)\ y=0 \tag*{(9.41}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Энди $\det L(p) = D(p)$ деб белгилаймиз. Шу $D(p)$ детерминант ёрдамида тузилган тенглама (9.38) тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади. Кейинги мулоҳазаларимиз характеристик тенгламанинг илдизларига қараб (9.38) тенгламанинг n та чизиқли эркли вектор-ечимларини топишга бағишланган бўлади. Бунинг учун биз аввал (9.38) тенгламага ёки барибир, $L(p)y = 0$ тенгламага нисбатан умумийроқ чизиқли бир жинсли системани интеграллаш усули билан шуғулланамиз. Бу усул *чиқариш* усули номи билан аталади.

2. Чиқариш усули. Ушбу

$$L(p) = \begin{pmatrix} L_{11}(p) & L_{12}(p) & \dots & L_{1n}(p) \\ L_{21}(p) & L_{22}(p) & \dots & L_{2n}(p) \\ . & . & . & . \\ L_{n1}(p) & L_{n2}(p) & \dots & L_{nn}(p) \end{pmatrix} \tag{9.42}$$

матрица берилган бўлиб, унда ҳар бир $L_{is}(p)$ элементларга нисбатан бирор тартибли кўпҳад бўлсин. Жумладан, агар $L_{is}(p) = a_{is}$, $i \neq s$,. $L_{ii}(p) = a_{ii} - p$ бўлса, (9.42) матрица юқорида кўрилган (9.40) матрица билан устма-уст тушади. Энди

$$L(p)\,y = f(x) \tag{9.43}$$

вектор-матрицали тенгламани кўрамиз, унда

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

бўлиб $f(x)$ вектор-функция бирор I интервалда аниқланган ва кераклича дифференциалланувчи. (9.43) тенглама координаталарда ёзилса, $L_{is}(p)y_s$ ифода y_s ва унинг ҳосилаларининг чизиқли комбинациясидан иборат. Номаълум функциялар сони тенгламалар сонига тенг. Агар бирор $L_{is}(p) \not\equiv 0$ бўлиб, (9.42) матрицанинг қолган элементлари айнан нолга тенг бўлса, у ҳолда биз y_s га нисбатан бирор тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган (ўнг томони $f_s(x)$ бўлган) битта тенгламага эга бўламиз. Бу ҳолни 6- бобда тўла ўрганамиз. Берилган (9.43) тенгламанинг тартиби бундай аниқланади. $L_{11}(p)$, $L_{21}(p)$, ... , $L_{n1}(p)$ кўпҳадларнинг энг катта тартиби q_1, $L_{12}(p)$, $L_{22}(p)$, ... , $L_{n2}(p)$ кўпҳадларнинг энг катта тартиби q_2 ва ҳ. к. $L_{1n}(p)$, $L_{2n}(p)$, ... , $L_{nn}(p)$ кўпҳадларнинг энг катта тартиби эса q_n дейилса, системанинг тартиби $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ формула билан аниқланади.

$L(p)$ матрицанинг детерминантини $D(p)$, $L_{is}(p)$ элементнинг алгебраик тўлдирувчисини (яъни тегишли ишораси билан олинган минорини) $M_{is}(p)$ дейлик. У ҳолда олий алгебра курсидан маълумки, $D(p)$ детерминант алгебраик тўлдирувчилар орқали бундай ёзилади:

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ji}\ (p)\ L_{sj}\ (p) = \delta_{si}\, D\ (p), \tag{9.44}$$

бунда δ_{si} — Кронеккер символи ((8.32) га қаранг). (9.43) тенгламани координаталарда ёзамиз:

$$\sum_{s=1}^{n} L_{sj}\ (p)\ y_s = f_j\ (x),\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n. \tag{9.43'}$$

Энди $y(x)$ вектор-функция шу (9.43′) системанинг бирор ечими бўлиб, етарлича тартибгача дифференциалланувчи бўлсин. (9.43′) системанинг икки томонини ҳар бир j учун $M_{ji}\ (p)$ га кўпайтириб, j бўйича йиғиндисини оламиз:

$$\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{s=1}^{n} M_{ji}\ (p)\ L_{sj}\ (p)\ y_s\ (x) = \sum_{j=1}^{n} M_{ji}\ (p)\ f_i\ (x).$$

(9.44) формулага кўра қуйидагига эгамиз:

$$D\ (p)\ y_i\ (x) = \sum_{j=1}^{n} M_{ji}\ (p)\ f_j\ (x),\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ n. \tag{9.45}$$

Бу системанинг ўнг томонида $f_1\ (x),\ f_2\ (x) \dots,\ f_n\ (x)$ функцияларнинг ва уларнинг маълум тартибгача ҳосилаларининг йиғиндиси турибди, уни $F_i\ (x)$ дейлик. У ҳолда

$$D\ (p)\ y_i\ (x) = F_i\ (x) \tag{9.46}$$

тенгламага келамиз, бунда $F_i\ (x)$ функция I интервалда аниқланган узлуксиз функция деб қаралади. Равшанки, $D\ (p)$ — бирор кўпҳад (р га нисбатан). Бу $D\ (p)$ — чизиқли дифференциал оператордан иборат. Шунинг учун (9.46) тенглама y_i га нисбатан бирор тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламадир. Бундай тенгламаларни интеграллашни биз биламиз. Баён этилган усул берилган (9.43) системани ҳар бири биттадан номаълум функцияни ўз ичига олган n та чизиқли дифференциал тенгламалар системасига келтиради. Чиқариш усулининг мазмуни ана шундан иборат.

(9.43) тенгламанинг ҳар бир ечими $y\ (x)$ учун $y_i\ (x)$ функция (9.46) тенгламанинг ечими бўлади. Аммо шу (9.46) тенгламаларнинг ихтиёрий ечими (9.43) тенгламанинг ечими бўлиши шарт эмас.

Амалда ҳар бир (9.46) тенглама умумий ечими орасидан интеграллаш формуласини танлаш ҳисобига (9.43) тенгламанинг ечими топилади.

Чиқариш усулини $f\ (x) \equiv 0,\ x \in I$ бўлган ҳолга, яъни ушбу

$$L\ (p)\ y = 0 \tag{9.47}$$

(бунда $L\ (p)$ — (9.42) матрица) бир жинсли системани интеграллашга татбиқ этамиз. $L\ (p)$ матрицанинг детерминанти $D\ (p)$ айнан нолга тенг бўлмасин ва λ — $D\ (p)$ кўпҳаднинг k каррали илдизи бўлсин. У ҳолда (9.47) тенгламанинг ечимини

$$y = g\ (x)\ e^{\lambda x}, \tag{9.48}$$

$$g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

кўринишда излаймиз, бунда $g_1(x)$, ... , $g_n(x)$ функциялар тартиби $(k-1)$, коэффициентлари номаълум бўлган кўпҳадлардир. Энди (9.48) функцияни (9.47) тенгламага қўямиз:

$$0=L(p)\,g(x)\,e^{\lambda x}=e^{\lambda x}\,L(p+\lambda)\,g(x). \tag{9.49}$$

Бу муносабатнинг тўғрилиги (6.17) формуладан келиб чиқади. Фақат (6.17) формулада $L(p)$ кўпҳад эди. Бизнинг ҳолда $L(p)$ — элементлари кўпҳадлардан иборат матрица. Шу $L(p)$ матрицани $g(x)e^{\lambda x}$ векторга кўпайтириб, ҳосил бўлган векторнинг ҳар бир координатасига ўша (6.17) формулани татбиқ этилса, юқоридаги муносабат чиқади. Энди (9.49) дан, $e^{\lambda x}$ га қисқартириб, топамиз:

$$L(p+\lambda)\,g(x)=0. \tag{9.50}$$

Шундай қилиб, (9.48) вектор-функция (9.47) тенгламанинг ечими бўлиши учун $g_1(x)$, ... , $g_n(x)$ кўпҳадлар (9.50) муносабатни каноатлантириши зарур ва етарли. Агар (9.50) ни координаталарда ёзсак:

$$\sum_{s=1}^{n} L_{sj}(p+\lambda)\,g_s(x)=0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{9.51}$$

Ҳар бир j, $1\leqslant j\leqslant n$ учун (9.51) тенгламада чап томони $k-1$- тартибли кўпҳаддан иборат. x нинг барча даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштириб, $g_j(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари учун k та чизиқли бир жинсли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Демак, чиқариш усули бир жинсли (9.47) тенгламанинг ечимини излаш масаласини чизиқли бир жинсли алгебраик тенгламалар системасини ечишга олиб келади.

(9.47) тенгламанинг умумий ечимини излаш масаласини қуйидаги теорема ечиб беради.

9.15- теорема. (9.47) *тенглама берилган бўлиб, унда* $D(p)=\det L(p)$ *детерминант айнан нолга тенг бўлмасин ва* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — $D(p)$ *кўпҳаднинг мос равишда* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *каррали турли илдизлари бўлсин. У ҳолда* (9.47) *тенгламанинг умумий ечими қуйидаги*

$$y=g^{(1)}(x)\,e^{\lambda_1 x}+g^{(2)}(x)\,e^{\lambda_2 x}+\ldots+g^{(m)}(x)\,e^{\lambda_m x} \tag{9.52}$$

кўринишда ёзилади, бунда $g^{(i)}(x)=(g_1^{(i)}(x),\ldots,\ g_n^{(i)}(x))^*$ ва $g_j^{(i)}(x)$ — тартиби, k_i-1 *бўлган кўпҳад. Бундан кўринадики,* (9.47) *тенгламанинг ҳар бир ечими x нинг барча қийматларида, яъни* $-\infty<x<+\infty$ *оралиқда аниқланган бўлади.*

Исбот. Равшанки, ҳар бир (9.48) кўринишдаги ечим $-\infty<x<+\infty$ интервалда аниқланган. Шунинг учун (9.52) формула билан ёзилган ечим ҳам шу $-\infty<x<+\infty$ интервалда аниқланган бўлади. Энди (9.52) формула умумий ечимни ифода этишини кўрсатамиз. Аввал (9.52) функция ечим эканини исботлаймиз. Бунинг учун (9.52) функцияни (9.47) тенгламага қўямиз. Агар ҳар бир $g^{(s)}(x)e^{\lambda_s x}$ вектор-функцияни (9.48) га кўра ечим эканини ҳисобга олсак,

$$L\ (p)\ (g^{(1)}\ (x)\ e^{\lambda_1 x}+...+g^{(m)}\ (x)\ e^{\lambda_m x})=$$

$$=e^{\lambda_1 x}L(p+\lambda_1)g^{(1)}(x)+...+e^{\lambda_m x}L(p+\lambda_m)g^{(m)}(x)=0$$

тенгликка келамиз. Энди (9.52) формула умумий ечимлигини кўрсатиш қолди.

Бирор I интервалда аниқланган $y\ (x)$ вектор-функция (9.47) тенгламанинг ечими бўлсин. У ҳолда уни (9.52) кўринишда ёзиш мумкин. Ҳақиқатан, $y\ (x)$ функциянинг ҳар бир координатаси $D\ (p)\ y_s\ (x)=$ $=0$ тенгламани қаноатлантиради ва демак, (6.24) формулага асосан $y_s\ (x)$ функция ушбу

$$y_s\ (x)=\sum_{i=1}^{m} g_{is}\ (x)\ e^{\lambda_i x},\quad s=1,\ 2,\ ...\ ,\ n \tag{9.53}$$

кўринишда ёзилиши мумкин, бунда $y_{is}\ (x)$ кўпҳад (k_i-1)-тартибли, λ_1-характеристик тенгламанинг (яъни $D\ (p)=0$ тенгламанинг) k_i каррали илдизи. Шундай қилиб, ҳар бир координатаси (9.53) кўринишда ёзиладиган $y\ (x)$ вектор-функция ҳам (9.52) кўринишда ёзилади. Теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y'_1+y_1-y_2=0,\ y''_1-y'_2-y_2=0$$

системани чиқариш усули билан ечамиз. Уни

$$\begin{cases}(p+1)\ y_1-y_2=0,\\ p^2\ y_1-(p+1)\ y_2=0\end{cases}$$

кўринишда ёзсак, $D\ (p)$ детерминант учун топамиз:

$$D\ (p)=\begin{vmatrix}p+1 & -1\\ p^2 & -(p+1)\end{vmatrix}=-(p+1)^2+p^2=-2p-1.$$

Кўринадики, $D(p)$ — биринчи тартибли кўпҳад. Унинг илдизи $\lambda=-\frac{1}{2}$. Демак, берилган системанинг ечимини $y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ae^{-\frac{1}{2}x}\\ Be^{-\frac{1}{2}x}\end{pmatrix}$ кўринишда излаш лозим.

Тегишли ҳосилалар олиб системага қўямиз:

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}Ae^{-\frac{1}{2}x}+Ae^{-\frac{1}{2}x}-Be^{-\frac{1}{2}x}=0,\\ \frac{1}{4}Ae^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}x}-Be^{-\frac{1}{2}x}=0.\end{cases}$$

Бундан $e^{-\frac{1}{2}x}$ га қисқартириб топамиз:

$$\frac{A}{2}-B=0,\quad \frac{1}{4}A-\frac{1}{2}B=0.$$

Бу икки тенгламадан бири иккинчисидан ҳосил қилиниши мумкин Шунинг учун биз битта икки номаълумли тенгламага эгамиз. Унда $B=C$ — ихтиёрий ўзгармас қилиб танланса, $A=2\ C$ бўлади. Демак, берилган системанинг умумий ечими

$$y=\begin{pmatrix}2\,Ce^{-\frac{1}{2}x}\\ Ce^{-\frac{1}{2}x}\end{pmatrix}$$ (C — ихтиёрий ўзгармас) кўринишга эга.

2. Яна бундай

$$\begin{cases} y_1''+5\,y_1'+2y_2'+y_2=0,\\ 3y_1''+5y_1+y_2'+3y_2=0\end{cases}$$

системани ҳам кўрайлик. Уни

$$\begin{cases}(p^2+5p)\,y_1+(2p+1)\,y_2=0,\\ (3p^2+5)y_1+(p+3)y_2=0\end{cases}$$

кўринишда ёзиб, детерминантини топамиз:

$$D\,(p)=\begin{vmatrix}p^2+5p & 2p+1\\ 3p^2+5 & p+3\end{vmatrix}=(p^2+5p)\ (p+3)-(2p+1)\ (3p^2+5)=$$
$$=p^3+8p^2+15p-6p^3-3p^2-10\,p-5=-5p^3+5p^2+5p-5=$$
$$=-5(p-1)^2(p+1).$$

Бундан $D(p)$ кўпҳаднинг илдизларини топамиз: $\lambda_1=1$ (икки каррали), $\lambda_2=-1$. Кўринадики, $y^{(1)}$ ва $y^{(2)}$ векторларни қуйидагича излаш лозим:

$$y^{(1)}=\begin{pmatrix}y_1^{(1)}\\ y_2^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a_1+b_1x)\,e^x\\ (a_2+b_2x)\,e^x\end{pmatrix};\quad y^{(2)}=\begin{pmatrix}y_1^{(2)}\\ y_2^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1e^{-x}\\ d_2e^{-x}\end{pmatrix}.$$

Содда ҳисоблашлар ёрдамида шуни топамиз:

$$y^{(1)}\,(x)=\begin{pmatrix}(C_1+C_2x)\,e^x\\ (-2C_1-C_2-2C_2x)e^x\end{pmatrix};\quad y^{(2)}\,(x)=\begin{pmatrix}C_3e^{-x}\\ -4C_2e^{-x}\end{pmatrix}.$$

Демак, умумий ечим

$$y\,(x)=\begin{pmatrix}(C_1+C_2x)\,e^x+C_3e^{-x}\\ (-2C_1-C_2-2C_2x)e^x-4C_2e^{-x}\end{pmatrix}$$

каби ёзилади.

3. Чиқариш усулининг чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли нормал системани интеграллашга татбиқи. Чиқариш усулини (9.38) тенгламани интеграллашга татбиқ этамиз. Бу ҳолда $L\ (p)$ матрица (9.40) кўринишда бўлиб,

$$L_{sj}\,(p)=a_{sj}-p\delta_{sj},\ j,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

δ_{sj} — Кронеккер символи ва $D\ (p)$ детерминант $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \dots, n)$ матрицанинг характеристик детерминанти (ёки тегишли характеристик тенгламаси) бўлади. Кейинги мулоҳазалар $D\ (p)$ кўпҳаднинг илдизлари оддий ва каррали бўлишига боғлик. Шунинг учун қуйидаги икки ҳолни алоҳида кўрамиз.

1) *$D\ (p)$ кўпҳаднинг илдизлари ҳар хил.* Шу кўпҳаднинг илдизлари $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ бўлсин. У ҳолда бу илдизлар *оддий*, яъни ҳар хил бўлгани учун λ_i илдизга мос ечим

$$y^{(i)} = g^{(i)} e^{\lambda_i x} \tag{9.54}$$

кўринишда изланади, бунда $g^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_n^{(i)})$ *— устун ўзгармас вектор бу $y^{(i)}$ векторни (9.38) тенгламага қўямиз:

$$\lambda_i g^{(i)}\ e^{\lambda_i x} = A g^{(i)} e^{\lambda_i x}.$$

Энди $e^{\lambda_i x}$ га қисқартириб, топамиз: $A g^{(i)} = \lambda_i g^{(i)}$. Бундан $g^{(i)}$ вектор A матрицанинг λ_i хос сонига*) (характеристик сонига) мос хос вектори экани келиб чиқади. Юқоридаги тенглик $g^{(i)}$ векторга коллинеар бўлган барча векторлар учун бажарилади. Шунинг учун бирор тайинланган $h^{(i)}$ векторни олиб, $g^{(i)} = C_i h^{(i)}$ (C_i — ихтиёрий ўзгармас) каби танлаймиз. 9.7- теоремага кўра кўрилаётган ҳолда чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли системанинг умумий ечими

$$y = C_1 h^{(1)}\ e^{\lambda_1 x} + C_2 h^{(2)}\ e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n h^{(n)}\ e^{\lambda_n x} \tag{9.55}$$

кўринишда ёзилади. Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот этилди:

9.16- теорема. (9.38) *тенгламада A матрицанинг хос сонлари* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *лар ҳар хил бўлиб,* $h^{(1)}, \dots, h^{(n)}$ *— уларга мос хос векторлар бўлсин. У ҳолда* (9.55) *вектор-функция* (9.38) *тенгламанинг умумий ечимини ифода этади.*

Эслатма. Юқоридаги мулоҳазаларда A матрица, умуман айтганда, комплекс элементларга эга эди. Агар A матрица ҳақиқий бўлса, у ҳолда хос векторларни шундай танлаш лозимки, ҳақиқий хос сонларга ҳақиқий хос векторлар, қўшма-комплекс хос сонларга қўшма-комплекс хос векторлар мос келсин. Бу ҳолда натижада қўшма-комплекс ечимлар олдидаги ихтиёрий ўзгармасларни қўшма-комплекс, ҳақиқий ечимлар олдидаги коэффициентларни ҳақиқий қилиб танланса, ҳақиқий умумий ечимга эга бўламиз.

Келгусида биз A матрица ҳақиқий бўлган ҳолни кўрамиз.

---

*) Агар ўзгармас A матрица учун $Ah = \lambda h$ тенглик бажарилса, у ҳолда λ сон A матрицанинг хос сони, h вектор эса λ га мос хос вектор дейилади [1].

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y_1'=y_2,\ y_2'=y_1$$

системани интеграллаш сўралган бўлсин. Бунда

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ D(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1.$$

Бу $D(\lambda)$ кўпҳаднинг илдизлари $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$ — ҳақиқий ва ҳар хил. Шунинг учун

$$y^{(1)}=h^{(1)}e^{-x},\ y^{(2)}=h^{(2)}\ e^{x},\ h^{(1)}=\begin{pmatrix}h_1^{(1)}\\h_2^{(1)}\end{pmatrix},\ h^{(2)}=\begin{pmatrix}h_1^{(2)}\\h_2^{(2)}\end{pmatrix}$$

ечимларни излаймиз, бунда $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ ҳақиқий хос векторлар. Равшанки, $Ah^{(1)}=\lambda_1 h^{(1)}$ тенглик қуйидаги системага эквивалент:

$$\begin{cases}-\lambda_1h_1^{(1)}+h_2^{(1)}=0,\\ h_1^{(1)}-\lambda_1h_2^{(1)}=0\end{cases}\quad \text{ёки}\quad \begin{cases}h_1^{(1)}+h_2^{(1)}=0,\\ h_1^{(1)}+h_2^{(1)}=0.\end{cases}$$

Ҳар икки тенглама бир хил бўлгани учун $h_1^{(1)}=1$ десак, $h_2^{(1)}=-1$ бўлади. Демак, $h^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Шунга ўхшаш $Ah^{(2)}=\lambda_2h^{(2)}$ ўрнига

$$\begin{cases}-h_2h_1^{(2)}+h_2^{(2)}=0,\\ h_1^{(2)}-\lambda_2h_2^{(2)}=0\end{cases}\quad \text{ёки}\quad \begin{cases}-h_1^{(2)}+h_2^{(2)}=0,\\ h_1^{(2)}-h_2^{(2)}=0\end{cases}$$

системага эгамиз. Бундан $h_1^{(2)}=1,\ h_2^{(2)}=1$ деб танланса бўлади. Демак, $h^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Шундай қилиб, берилган системанинг умумий ечими

$$y=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-x}+C_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{x}=\begin{pmatrix}C_1e^{-x}+C_2e^{x}\\-C_1e^{-x}+C_2e^{x}\end{pmatrix}$$

каби ёзилади, бунда C_1 ва C_2 — ҳақиқий ихтиёрий ўзгармас сонлар.

2. Энди қуйидаги

$$y_1'=y_2,\ y_2'=-y_1$$

системани интеграллайлик. Унда A матрица ҳақиқий бўлиб,

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad D(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1.$$

$D(\lambda)$ кўпҳаднинг илдизлари $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i,\ \lambda_1=i$ хос сонга мос $h^{(1)}$ хос векторни

$$\begin{cases}-ih_1^{(1)}+h_2^{(1)}=0,\\ -h_1^{(1)}-ih_2^{(1)}=0\end{cases}$$

системадан топамиз. Бу системанинг тенгламалари эквивалент бўлгани учун $-h_1^{(1)}-ih_2^{(1)}=0$ дан $h_2^{(1)}=1,\ h_1^{(1)}=-i$ дейиш мумкин. Демак,

$$h^{(1)}=\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix},\ h^{(2)}=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}.$$

Умумий ҳақиқий ечимни назария бўйича

$$y=(C_1+iC_2)\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}e^{ix}+(C_1-iC_2)\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}e^{-ix}$$

кўринишда ёзилади. Бу ифодани соддалаштириб чиқилса (e^{ix} ва e^{-ix} учун Эйлер формуласидан фойдаланиб),

$$y=\begin{pmatrix}2C_1\sin x+2C_2\cos x\\2C_1\cos x-2C_2\sin x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar C_2\cos x+\bar C_1\sin x\\\bar C_1\cos x-\bar C_2\sin x\end{pmatrix},\ \bar C_1=2C_1,\ \bar C_2=2C_2$$

вектор-функцияни ҳосил қиламиз. Амалда бирорта хос векторни, масалан, $\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ни олиб, тегишли экспоненциал функцияга (бизда e^{-ix} га) кўпайтириб чиқилади:

$$\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}e^{-ix}=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}(\cos x-i\sin x)=\begin{pmatrix}\sin x+i\cos x\\\cos x-i\sin x\end{pmatrix}.$$

Бундан $\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\end{pmatrix}$ ва $\begin{pmatrix}\cos x\\-\sin x\end{pmatrix}$ вектор-функциялар ечим экани келиб чиқади, чунки $\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\cos x\\-\sin x\end{pmatrix}$— комплекс вектор-функция ечим. Демак, умумий ечим

$$y=C_1\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\cos x\\-\sin x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\sin x+C_2\cos x\\C_1\cos x-C_2\sin x\end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилади.

2) *$D(p)$ кўпҳаднинг илдизлари каррали.* Шу кўпҳаднинг турли илдизларини $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, $m<n$ дейлик. Бунда λ_1 илдиз q_1 каррали, λ_2-q_2 каррали, . . . , λ_m-q_m каррали бўлсин. Равшанки, $q_1+q_2+\ldots+q_m=n$ бўлади.

9.15- теоремага асосан умумий ечим (9.52) формула билан ёзилади. Бу формулада ҳар бир $g^{(j)}(x)$ вектор-функция координаталари тартиби (q_j-1) га тенг бўлган кўпҳадлардан иборат. Бу кўпҳаднинг q_j та коэффициентларини $g^{(j)}(x)\,e^{\lambda_j x}$ функция чизиқли бир жинсли системанинг ечими эканидан фойдаланиб топамиз. Бошқача айтганда, $g^{(j)}(x)$ кўпҳаднинг коэффициентларини ўзгармас коэффициентлар усули билан топамиз. Масалан, $g^{(j)}(x)$-вектор-функцияни бундай ёзайлик:

$$g_{(x)}^{(j)}=\begin{bmatrix}g_1^{(j)}(x)\\g_2^{(j)}(x)\\\vdots\\g_n^{(j)}(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{10}^{(j)}+\alpha_{11}^{(j)}x+\ldots+\alpha_{1q_{j-1}}^{(j)}x^{q_j-1}\\\alpha_{20}^{(j)}+\alpha_{21}^{(j)}x+\ldots+\alpha_{2q_{j-1}}^{(j)}x^{q_j-1}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\alpha_{n_0}^{(j)}+\alpha_{n_1}^{(j)}x+\ldots+\alpha_{nq_{j-1}}^{(j)}x^{q_j-1}\end{bmatrix}=$$

$$=\alpha_0^{(j)}+\alpha_1^{(j)}x+\ldots+\alpha_{q_{j-1}}^{(j)}x^{q_j-1}.$$

Энди $g^{(j)} e^{\lambda_j x}$ ни (9.38) га қўямиз:

$$\frac{d}{dx}(g^{(j)}(x))\, e^{\lambda_j x} + g^{(j)}(x)\, \lambda_j\, e^{\lambda_j x} = A\, (\alpha_0^{(j)} x + \ldots + \\ + \alpha_{q_{j-1}}^{(j)} x^{q_j - 1}), \tag{9.56}$$

$$\alpha_k^{(j)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1k}^{(j)} \\ \alpha_{2k}^{(j)} \\ \vdots \\ \alpha_{nk}^{(j)} \end{pmatrix}, \; k = 0,\ 1,\ \ldots,\ q_{q-1}.$$

Ҳосил бўлган (9.56) вектор-тенгламанинг икки томонида x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштирсак, $g^{(j)} x$ векторнинг ҳар бир координатаси ролини ўйнаётган кўпҳаднинг коэффициентларини топамиз. Бу коэффициентлар учун чизиқли бир жинсли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз.

Аслида (*) вектор-кўпҳаднинг тартиби $q_j - 1$ дан кам бўлиши мумкин. Агар q_i каррали λ_i илдизга m_i $(m_j < q_i)$ та чизиқли эркли хос векторлар мос келса, у ҳолда $g^j(x)$ ни ушбу

$$g^{(j)}(x) = \alpha_0^{(j)} + \alpha_1^{(j)} x + \ldots + \alpha_{q_j - m_j}^{(j)} x^{q_j - m_j} \tag{* *}$$

кўринишда излаш лозим. Тегишли хос векторлар сонини топиш учун $D(\lambda_j)$ детерминантни ёзамиз. Унинг тартиби n. Тегишли матрица ранги r бўлсин. Шубҳасиз $r < n$, чунки $D(\lambda_i) = 0$. Шунинг учун $m_i = n - r$ булади. Агар q_i каррали λ_i илдизга q_i та чизиқли эркли хос векторлар мос келса, $m_i = n - r$ бўлади ва (*) ҳолга эга бўламиз ([3], 288—289 бетларга каранг).

Мисол. Ушбу

$$y_1' = -y_1, \qquad y_2' = y_1 - y_2$$

системанинг матрицаси $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, характеристик детерминанти $D(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^2$. Демак, $D(\lambda) = 0$; тенглама $\lambda_{1,2} = -1$ — битта икки каррали илдизга эга. Ундай бўлса, ечимни $y_1 = (ax+b)e^{-x}$, $y_2 = (cx+d)e^{-x}$ кўринишда изланади. Тегишли ҳосилаларни олиб, берилган системага қўямиз ва e^{-x} га ҳосил бўлган тенгликларнинг икки томонини бўлиб юборамиз:

$$\begin{cases} a - (ax+b) = -(ax+b), \\ c - (cx+d) = (ax+b) - (cx+d). \end{cases}$$

Бу системадан

$$\begin{cases} a - b = -b, \\ -a = -a \end{cases} \text{ва} \begin{cases} c - d = b - d, \\ -c = a - c \end{cases}$$

тенгликларни топамиз. Булардан $a = 0$, $b = c = C_1$, $d = C_2$ (C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас) қийматларга эга бўламиз. Шундай қилиб, берилган системанинг умумий ечими

$$y_1 = C_1 e^{-x}, \quad y_2 = (C_1 x + C_2)\, e^{-x}$$

кўринишда ёзилади.

Машқ. 1. Ушбу $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1, \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$

система интеграллансин. Бунда $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$ бўлган ҳоллар алоҳида текширилсин.

2. Қуйидаги

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_2, \\ y_2' = by_1 + ay_2. \end{cases}$$

система интеграллансин (унда $b \neq 0$).

9.5-§. ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН СИСТЕМАЛАР

Чизиқли бир жинсли бўлмаган системаларда A матрица ўзгармас бўлган ҳолни алоҳида ўрганамиз. Бизга ушбу

$$\frac{dy}{dx} = Ay + b(x), \quad A = \text{const} \tag{9.57}$$

чизиқли ўзгармас коэффициентли (ўзгармас матрицали) вектор-матрицали тенглама берилган бўлсин. Унда $b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$ вектор-функция бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз функция. Бу ҳолда (9.57) системага мос бир жинсли системанинг умумий ечимига кўра Лагранжнинг ўзгармасни вариациялаш усули ёрдамида бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечимини топиш мумкин. Қолаверса, (9.57) системани интеграллаш учун Коши формуласини қўллаш мумкин ((9.33) формулага қаранг).

Агар бир жинсли бўлмаган системада $b(x)$ вектор-функция ихтиёрий бўлмай, унинг ҳар бир координатаси квазикўпҳаддан иборат бўлса, у ҳолда бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимини топиш ва 9.12- теоремадан фойдаланиб умумий ечимини ёзиш мумкин. Биз мазкур параграфда хусусий ечимни топиш (танлаш) билан шуғулланамиз.

Биз квазикўпҳаднинг таърифини 6- бобда берган эдик ((6.29) га қ.).

Энди $b(x)$ вектор-функциянинг ҳар бир $b_j(x)$, $j = 1,2, \ldots, n$ координатаси квазикўпҳад бўлсин, яъни

$$b_j(x) = b_j^{(1)}(x)\, e^{\lambda_1 x} + b_j^{(2)}(x)\, e^{\lambda_2 x} + \ldots + b_j^{(m)}(x)\, e^{\lambda_m x}, \tag{9.58}$$

бунда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ лар ўзаро ҳар хил ҳақиқий ёки комплекс сонлар, $b_j^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, m$-бирор кўпҳад. Агар 9.13- теорема кўзда тутилса, $b_j(x) = P_{m_j}(x)\, e^{\gamma x}$, $P_{m_j}(x)$, $j = 1,2, \ldots, n$ тартиби m_j бўлган кўпҳад деб мулоҳазалар юритиш етарли.

Хусусий вектор-ечимнинг кўринишини ёзиш учун $\max(m_1, m_2, \ldots, m_n) = m$ дейлик.

1) γ сон мос бир жинсли системанинг матрицаси учун хос сон эмас, яъни $L(\gamma) \neq 0$. Бу ҳолда хусусий ечим қуйидаги

$$\psi_j(x) = y_j(x) = Q_m^{(j)}(x)\, e^{\gamma x},\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{9.59}$$

($Q_m^{(j)}(x)$ — m-тартибли кўпҳад) кўринишда изланади. Номаълум $Q_m^{(j)}(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ кўпҳаднинг коэффициентлари номаълум коэффициентлар усули билан топилади.

2) γ сони мос бир жинсли системанинг характеристик тенгламаси учун s каррали илдиз.

Хусусий ечим ушбу

$$\psi_j(x) = Q_{m+s}^{(j)}(x)\, e^{\gamma x},\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{9.60}$$

($Q_{m+s}^{(j)}(x)$-тартиби $(m+s)$ га тенг кўпҳад) кўринишда изланади. Қайд қилиб ўтамизки, хусусий ечим $\psi_j(x) = x^s Q_m^{(j)}(x)\, e^{\gamma x}$ кўринишда эмас, (9.60) кўринишда изланиши лозим. Бу ҳолда ҳам кўпҳаднинг коэффициентлари аниқмас коэффициентлар усули билан топилади *.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + xe^{3x}, \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

система интеграллансин. Характеристик тенгламани ёзамиз:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Бундан $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Демак, $\lambda = 3$-икки каррали илдиз. Мос бир жинсли системани олайлик:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

Қурилаётган ҳолда бу бир жинсли системанинг ечимини

$$y_1 = (ax + b)\, e^{3x}, \quad y_2 = (cx + d)\, e^{3x}$$

кўринишда излаймиз. Олдин ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$y_1' = ae^{3x} + 3\,(ax + b)\, e^{3x} = e^{3x}\,(3ax + a + 3b),$$

$$y_2' = e^{3x}\,(3cx + c + 3d).$$

Бу ифодаларни бир жинсли системага қўямиз:

$$e^{3x}\,(3ax + a + 3b) = 2\,(ax + b)\, e^{3x} - (cx + d)\, e^{3x},$$
$$e^{3x}(3cx + c + 3d) = (ax + b)e^{3x} + 4(cx + d)e^{3x}.$$

Натижада қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$3\,ax + (a + 3b) = (2a - c)\, x + (2b - d),$$
$$3\,cx + (c + 3d) = (a + 4\,c)\, x + (b + 4d).$$

---

*) Мос равишда (9.59) ёки (9.60) кўринишдаги хусусий ечимларнинг мавжудлиги бевосита ҳисоблашлар ёрдамида исботланади.

Бундан

$$\begin{cases} 3a=2a-c, \\ a+3b=2b-d, \\ 3c=a+4c \\ c+3d=b+4d \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} a=-c, \\ a+b=-d, \\ a=-c. \\ c=b+d \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} a=C_1, \\ c=-C_1 \\ b=C_2, \\ d=-(C_1+C_2), \end{cases}$$

бу ерда C_1, C_2 — ихтиёрий ҳақиқий ўзгармаслар.

Шундай қилиб, бир жинсли системанинг умумий ечими

$$\begin{cases} y_1=(C_1\,x+C_2)\,e^{3x}, \\ y_2=-(C_1x+C_1+C_2)\,e^{3x} \end{cases}$$

каби ёзилади.

Энди бир жинсли бўлмаган системани текширамиз. Бу системада $b\,(x)=\begin{pmatrix} b_1\,(x) \\ b_2\,(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xe^{3x} \\ 0 \end{pmatrix}$ ва (9.58) квазикўпҳад учун бизнинг ҳолда $\lambda_1=\lambda_2=3$, $m_1=1$. $\gamma=3$ сон характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи ва $m+s=$ $=3$ бўлгани учун бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимини

$$\begin{cases} y_1=(a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)\,e^{3x}, \\ y_2=(b_1x^3+b_2x^2+b_3\,x+b_4)\,e^{3x} \end{cases}$$

кўринишда излаймиз. Аввал биринчи тартибли ҳосилалар оламиз:

$$y_1'=e^{3x}\,(3a_1x^3+3a_2x^2+3a_3x+3a_4+3a_1x^2+2a_2x+a_3),$$
$$y_2'=e^{3x}\,(3b_1x^3+3b_2x^2+3b_3x+3b_4+3b_1x^2+2b_2x+b_3).$$

Бу ифодаларни берилган бир жинсли бўлмаган системага қўямиз ва ҳосил бўлган тенгликларнинг икки томонини e^{3x} га қисқартирамиз:

$$\begin{cases} 3a_1x^3+(3a_2+3a_1)x^2+(3a_3+2a_2)x+(3a_4+a_3)= \\ =(2a_1-b_1)x^3+(2a_2-b_2)x^2+(2a_3-b_3+1)x+(2a_4-b_4), \\ 3b_1x^3+(3b_2+3b_1)x^2+(3b_3+2b_2)x+(3b_4+b_3)= \\ =(a_1+4b_1)x^3+(a_2+4b_2)x^2+(a_3+4b_3)x+(a_4+4b_4). \end{cases}$$

Энди тенгликларда x нинг бир хил даражалари олдидаги (чап ва ўнг томонда) коэффициентларни тенглаштирамиз:

$$\begin{cases} 3a_1=2a_1-b_1, \\ 3a_2+3a_1=2a_2-b_2, \\ 3a_3+2a_2=2a_3-b_3+1. \\ 3a_4+a_3=2a_4-b_4, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3b_1=a_1+4b_1, \\ 3b_2+3b_1=a_2+4b_2. \\ 3b_3+2b_2=a_3+4b_3, \\ 3b_4+b_3=a_4+4b_4 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} a_1=-b_1, \\ a_2+3a_1=-b_2 \\ a_3+2a_2=-b_3+1, \\ a_4+a_3=-b_4. \end{cases} \qquad \begin{cases} 0=a_1+b_1, \\ 3b_1=a_2+b_2, \\ 2b_2=a_3+b_3, \\ b_3=a_4+b_4. \end{cases}$$

Бу икки чизиқли системанинг биринчи ва иккинчи тенгламаларидан

$$a_1=-b_1,\quad a_2+b_2=-3a_1\quad a_2+b_2=3b_1,\quad a_1=-b_1$$

келиб чиқади, учинчи тенгламалардан $a_3+b_3=2b_2$, $a_3+b_3=1-2a_2$ ёки $2b_2=1-2a_2$, $a_2+b_2=\frac{1}{2}$ ни топамиз. Шунинг учун юқоридаги муносабатлардан фойдалансак, $-3a_1=\frac{1}{2}$, $a_1=-\frac{1}{6}$ ва $b_1=\frac{1}{6}$ бўлади. Энди ушбу $a_4+b_4=-a_3$, $a_4+b_4=b_3$ тенгликлардан $-a_3=b_3$ ёки $a_3+b_3=0$ экани келиб чиқади. Бу ҳолда $a_3+b_3=1-2a_2$, $a_3+b_3=2b_2$ лардан $b_2=0$, $a_2=\frac{1}{2}$ ни топиш мумкин. Аммо $a_3+b_3=0$ дан бошқа шу миқдорларни боғлайдиган муносабат қолмагани учун улардан бирини ихтиёрий, яъни хусусан (бизга бошқа қийматларнинг кераги ҳам йўқ) $b_3=0$, демак, $a_3=0$ деб танлаймиз. Шунинг учун $a_4+b_4=0$ бўлади. Бундан юқоридагига ўхшаш $a_4=b_4=0$ деб оламиз. Хулоса қилиб ёзамиз:

$$a_1=-\frac{1}{6},\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=a_4=0,$$

$$b_1=\frac{1}{6},\quad b_2=0,\qquad b_3=b_4=0.$$

Шундай қилиб, бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечими

$$y_1=\left(-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^{3x},\quad y_2=\frac{1}{6}x^3e^{3x},$$

умумий ечими эса

$$\begin{cases} y_1=(C_1\ x+C_2)\ e^{3x}+\left(-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}, \\ y_2=-(C_1x+C_1+C_2)e^{3x}+\frac{1}{6}x^3e^{3x} \end{cases}$$

кўринишга эга.

2. Ушбу

$$\begin{cases} y_1'=2y_1-y_2+e^{3x}\sin x, \\ y_2'=y_1+4y_2+xe^{3x}\cos x \end{cases}$$

система интеграллансин.

1- мисолда мос бир жинсли системанинг умумий ечими топилган. Энди бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимини топиш билан шуғулланамиз. Қурилаётган ҳолда $b\ (x)=\begin{pmatrix} e^{3x}\sin x \\ xe^{3x}\cos x \end{pmatrix}$ ва $m_1=1$, $\gamma\neq\lambda_1=3$, чунки $\gamma=3+i$. Шунинг учун тегишли ҳақиқий хусусий ечим

$$y_1=e^{3x}\,[\,(a_1x+a_2)\ \cos x+(a_3\ x+a_4)\ \sin x],$$

$$y_2=e^{3x}\ (b_1x+b_2)\cos x+(b_3\ x+b_4)\sin x]$$

кўринишда изланиши мумкин.

Энди номаълум коэффициентлар усули билан a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 ларни топамиз. Агар y_1 ва y_2 лардан ҳосила олиб, берилган бир жинсли бўлмаган системага қўйсак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} 3[(a_1x+a_2)\cos x+(a_3x+a_4)\sin x]+a_1\cos x-(a_1x+a_2)\sin x+ \\ +a_3\sin x+(a_3x+a)\cos x=2[(a_1x+a_2)\cos x+(a_3x+a_4)\sin x]- \\ -[(b_1x+b_2)\cos x+(b_3x+b_4)\sin x]+\sin x, \\ 3[(b_1x+b_2)\cos x+(b_3x+b_4)\sin x]+b_1\cos x-(b_1x+b_2)\sin x+ \\ +b_3\sin x+(b_3x+b_4)\cos x=(a_1x+a_2)\cos x+(a_3x+a_4)\sin x+4[(b_1x+ \\ +b_2)\cos x+(b_3x+b_4)\sin x]+x\cos x. \end{cases}$$

Агар бу тенгликларнинг чап ва ўнг томонларида $\cos x$ ва $\sin x$ лар олдидаги коэффициентларни тенглаштирсак, яна бундай системага келамиз:

$$\begin{cases} 3(a_1x+a_2)+a_1+a_3x+a_4=2(a_1x+a_2)-(b_1x+b_2), \\ 3(a_3x+a_4)-(a_1x+a_2)+a_3=2(a_3x+a_4)-(b_3x+b_4)+1, \\ 3(b_1x+b_2)+b_1+(b_3x+b_4)=(a_1x+a_2)+4(b_1x+b_2)+x, \\ 3(b_3x+b_4)-(b_1x+b_2)+b_3=(a_3x+a_4)+4(b_3x+b_4). \end{cases}$$

Энди бу тенгликларнинг чап ва ўнг томонларида x нинг олдидаги коэффициентларни ўзаро ва озод ҳадларни ҳам ўзаро тенглаштирамиз:

$$\begin{cases} 3a_1+a_3=2a_1-b_1, \\ 3a_2+a_1+a_4=2a_2-b_2, \\ 3a_3-a_1=2a_3-b_3, \\ 3a_4-a_2+a_3=2a_4-b_4+1, \\ 3b_1+b_3=a_1+4b_1+1, \\ 3b_2+b_1+b_4=a_2+4b_2, \\ 3b_3-b_1=a_3+4b_3, \\ 3b_4-b_2+b_3=a_4+4b_4 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{array}{l} (1)\ \ a_1+b_1=-a_3, \\ (2)\ \ a_2+b_2=-a_1-a_4, \\ (3)\ \ a_3+b_3=a_1 \\ (4)\ \ a_4+b_4=1+a_2-a_3, \\ (5)\ \ a_1+b_1=b_3-1, \\ (6)\ \ a_2+b_2=b_1+b_4, \\ (7)\ \ a_3+b_3=-b_1, \\ (8)\ \ a_4+b_4=-b_2+b_3. \end{array}\right\}$$

Охирги системада (1) ва (5) дан $a_3+b_3=1$, шунинг учун (7) дан $b_1=-1$, (3) дан $a_1=1$ келиб чиқади. Бундан равшанки, $a_1+b_1=0$, демак, (1) дан $a_3=0$. Энди (3) дан $b_3=a_1=1$. (2) билан (6) дан $a_4+b_4=0$ демак, (4) дан $a_2=-1$, (8) дан $b_2==1$ келиб чиқади. (6) дан $b_4=1$ ва $a_4+b_4=0$ дан $a_4=-1$ ни топамиз. Шундай қилиб,

$$a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=0,\ a_4=-1,$$
$$b_1=-1,\ b_2=1,\ b_3=1,\ b_4=1.$$

Хусусий ечимни ёзамиз:

$$y_1=e^{3x}[(x-1)\cos x-\sin x],$$
$$y_2=e^{3x}[(-x+1)\cos x+(x+1)\sin x].$$

Берилган бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечимини ҳам ёзамиз:

$$\begin{cases} y_1 = +(C_1x+C_2)\,e^{3x} + [(x-1)\cos x - \sin x]\,e^{3x}, \\ y_2 = -(C_1\,x + C_1 + C_2)\,e^{3x} + [(-x+1)\cos x + (x+1)\sin x]\,e^{3x}. \end{cases}$$

3. Ушбу

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 - y_2 + x\,e^{3x} + e^{3x}\cdot\sin x, \\ y'_2 = y_1 + 4y_2 + x\cdot e^{3x}\cos x \end{cases}$$

система интеграллансин. Бу ҳолда вектор-квазикўпҳад

$$b\,(x) = \begin{pmatrix} b_1^{(1)}\,(x) \\ b_2^{(1)}\,(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{(2)}\,(x) \\ b_2^{(2)}\,(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{3x} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3x}\sin x \\ xe^{3x}\cos x \end{pmatrix}$$

кўринишга эга. Ҳар бир $b^{(1)}(x)$, $b^{(2)}(x)$ лар учун тегишли хусусий ечимлар топилган. Шунинг учун берилган бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечимини ёза оламиз:

$$\begin{cases} y_1 = (C_1x+C_2)\,e^{3x} + \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{3x} + [\,(x-1)\cos x - \sin x\,]\,e^{3x}, \\ y_2 = -(C_1x + C_1 + C_2)\,e^{3x} + \frac{1}{6}x^3\,e^{3x} + [\,(-x+1)\cos x + (x+1)\sin x\,]\,e^{3x}. \end{cases}$$

9.6-§. ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ НОРМАЛ СИСТЕМАСИ УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

1. Масаланинг қўйилиши. Чизиқли нормал системалар учун ҳам n-тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалаларни кўриш мумкин.

Ушбу

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\,(x,\ y_1,\ldots,y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\,(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \end{cases} \qquad (9.61)$$

нормал система берилган бўлиб, $f_1, \ldots, f_n$ функциялар $(n+1)$ ўлчовли фазонинг бирор D_{n+1} соҳасида аниқланган ва узлуксиз бўлсин. D_{n+1} соҳадан икки нуқта оламиз:

$$(x_0,\ y_1(x_0),\ \ldots,\ y_n(x_0)) \in D_{n+1},\quad (x_1,\ y_1(x_1),\ \ldots,\ y_n(x_1)) \in D_{n+1}.$$

Чегаравий масаланинг қўйилиши: агар (9.61) нормал система учун

$$g_i(x_0,\ y_1(x_0),\ \ldots,\ y_n(x_0);\ y_1(x_1),\ \ldots,\ y_n(x_1)) = 0,\quad i=1,\ \ldots,\ n \qquad (9.62)$$

муносабатлар берилган бўлиб, системанинг (9.62) шартни қаноатлантирадиган ечимини излаш талаб этилса, у ҳолда нормал система учун *чегаравий масала қўйилган* дейилади.

Агар

$$g_i = y_i(x_0) - y_i^0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

бўлса, (9.62) чегаравий шарт Коши масаласининг шартига айланади.

2. Бир жинсли чегаравий масала. Энди (9.62) муносабатларда g_i функциялар қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(y) = (\alpha_1^{(1)},\ y(x_0)) + (\alpha_2^{(1)},\ y(x_1)) - A_1 = g_1^0(y) - A_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(y) = (\alpha_1^{(n)},\ y(x_0)) + (a_2^{(n)},\ y(x_1)) - A = g_n^0(y) - A_n, \end{array}\right\} \qquad (9.63)$$

бунда $\alpha_i^{(j)} = (\alpha_{i_1}^{(j)},\ \alpha_{i_2}^{(j)},\ \ldots,\ \alpha_{i_n}^{(j)})^*$, $i = 1,\ 2;\ j = 1,\ \ldots,\ n$ ўзгармас векторлар, $A_1, \ldots, A_n$ — ўзгармас сонлар, $(\alpha,\ y)$ қавслар скаляр кўпайтмани билдиради. Агар $A_1 = \ldots = A_n = 0$ бўлса, масала *бир жинсли чегаравий масала* дейилади. Акс ҳолда биз *бир жинсли бўлмаган чегаравий масалага* эгамиз.

Кейинги мулоҳазаларни чизиқли тенгламаларнинг нормал системаси учун юритамиз. Бизга ушбу

$$L(p)\,y = 0 \qquad (9.4')$$

бир жинсли нормал система берилган бўлиб, чегаравий шарт

$$g_s^0(y) = 0,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (9.64)$$

кўринишда бўлсин. Бошқача айтганда, бир жинсли нормал система учун бир жинсли чегаравий масала қўйилган бўлсин. Муҳим теоремани келтирайлик.

9.17- теорема. *Агар* $y^{(1)}(x),\ y^{(2)}(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)$ *вектор-функциялар бирор* I интервалда (9.4) *тенгламанинг чизиқли эркли ечимлари бўлса, у ҳолда* $L(p)y = 0$, $g_s^0(y) = 0$, $s = 1, \ldots, n$ *чегаравий масала тривиалмас ечимга эга бўлиши учун ушбу*

$$D = \begin{vmatrix} g_1^0(y^{(1)}) & g_1^0(y^{(2)}) \ldots & g_1^0(y^{(n)}) \\ g_2^0(Y^{(1)}) & g_2^0(y^{(2)}) \ldots & g_2^0(y^{(n)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n^0(y^{(1)}) & g_n^0(y^{(2)}) \ldots & g_n^0(y^{(n)}) \end{vmatrix}$$

детерминантнинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Теореманинг исботи 7.8- теореманинг исботи каби.

Бир жинсли чегаравий масала ҳақида яна 7.5 ва 7.6- эслатмаларни бир жинсли система учун ҳам айтиш мумкин. 7- бобдаги каби бир жинсли чегаравий масала учун Грин функциясини киритиш мумкин. Бир жинсли бўлмаган системанинг хусусий ечимини шу Грин функцияси орқали ёзиш ҳам мумкин. Шунга ўхшаш, чизиқли вектор-дифференциал оператор L учун хос сонлар ва хос вектор-функциялар тушунчасини киритиш, қолаверса, бир жинсли бўлмаган чегаравий масалаларни ҳам ўрганишимиз мумкин эди. Аммо бу масалаларни кўришда мулоҳазалар 7-бобдаги каби бўлиб, 7-бобда тегишли масалалар атайин тўларок ўрганилгани учун, биз бу ерда мулоҳазаларни қайтариб ўтирмаймиз.

10-боб

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ МУХТОР СИСТЕМАСИ

Мухтор системалар дифференциал тенгламалар системасининг муҳим хусусий ҳолидир. Жуда кўп амалий масалаларни ечиш мухтор системаларни ўрганишга олиб келади.

10.1-§. МУХТОР СИСТЕМАЛАР

1. 10.1-таъриф. *Агар оддий дифференциал тенгламалар системасига эркли ўзгарувчи ошкор кирмаса, бундай система мухтор система дейилади ва қуйидагича ёзилади:*

$$F_i(y_1,\ y_1',\ \dots,\ y_1^{(m_1)};\ \dots;\ y_n, y_n',\ \dots,\ y_n^{(m_n)})=0, \qquad (10.1)$$

бунда

$$y_j^{(k)}=\frac{d^k y_j}{dx^k},\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n,\ k=1,\ 2,\ \dots,\ m_j.$$

Мухтор системаларнинг физика ва техника масалаларидан келиб чиқиш маъносига қараб эркли ўзгарувчи сифатида t вақт олинади. Бундан кейин биз шу белгилашни қабул қиламиз. Таърифдан кўринадики, мухтор системалар билан тасвирланадиган номаълум функцияларнинг ўзгариш қонуни вақт ўтиши билан ўзгармайди. Физикавий қонунларда одатда шундай бўлади.

Нормал мухтор система ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1=f_1(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n), \\ \dot{x}_2=f_2(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n), \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \dot{x}_n=f_n(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n), \end{cases} \qquad (10.2)$$

$$\dot{x}_i=\frac{dx_i}{dt}$$

кўринишда ёки

$$\dot{x}=f(x) \qquad (10.3)$$

векторли кўринишда ёзилади.

Агар бу (10.2) системада эркли ўзгарувчи t сифатида вақтни тушунилса, бу система *динамик система* деб аталади. Кейинги мулоҳазаларда биз асосан динамик системалар билан иш кўрамиз.

Биз қуйида баён этадиган хоссалар ва тасдиқлар умуман (10.1) кўринишдаги мухтор системалар учун ўринли. Аммо биз уларни (10.2) кўринишдаги нормал мухтор системалар учун исбот этамиз.

Бундан кейинги мулоҳазаларимизда (10.3) вектор-тенглама $f(x)$ вектор-функция бирор D_n соҳада аниқланган ва биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан узлуксиз деб фараз этамиз.

10.1-теорема. *Агар* (10.3) *нормал мухтор вектор-тенглама берилган бўлиб,* $x=\varphi(t)$ *вектор-функция унинг бирор ечими бўлса, у ҳолда ихтиёрий ўзгармас С лар учун* $x=\varphi_*(t)=\varphi(t+C)$ *вектор-функция ҳам* (10.3) *тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси бўйича содда ҳисоблашлар ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$\dot{\varphi}_*(t)=\frac{d}{dt}\varphi_*(t)=\frac{d}{dt}\varphi(t+C)=\frac{d}{d(t+C)}\varphi(t+C)\frac{d(t+C)}{dt}=$$
$$=\dot{\varphi}(t+C)\cdot 1=\varphi(t+C).$$

Энди $\varphi_*(t)$ функция (10.3) тенгламанинг ечими эканини исботлаймиз. Теореманинг шартига кўра $x=\varphi(t)$ функция (10.3) тенгламанинг бирор ечими, демак, ушбу $\dot{\varphi}(t)\equiv f(\varphi(t))$ айният ўринли. Бунда t ни $t+C$ га алмаштирсак, $\varphi(t+C)=f(\varphi(t+C))$ айниятга эга бўламиз. Топилган муносабатдан

$$\dot{\varphi}_*(t)=\dot{\varphi}(t+C)=f(\varphi(t+C))=f(\varphi_*(t)).$$

Шу билан теорема исбот бўлди.

2. Мухтор системаларнинг, жумладан, (10.2) системанинг ҳар бир $x=\varphi(x)$ вектор-ечимига n-ўлчовли фазода $(x_1, \dots , x_n)=x$ нуқтанинг ҳаракатини мос келтирамиз. Ҳаракат давомида x нуқта ўша фазода бирор чизиқ чизади. Шу чизиқни x нуқтанинг *ҳаракат траекторияси* деб атаймиз. Мухтор системаларда нуқтанинг ҳаракати тўғрисида тўлиқ маълумотга эга бўлиш учун нуқтанинг фақат траекториясини бериш етарли эмас, бунинг учун траекторияда, ҳеч бўлмаса, ҳаракат йўналишини ҳам бериш лозим (36-чизма).

36- чизма

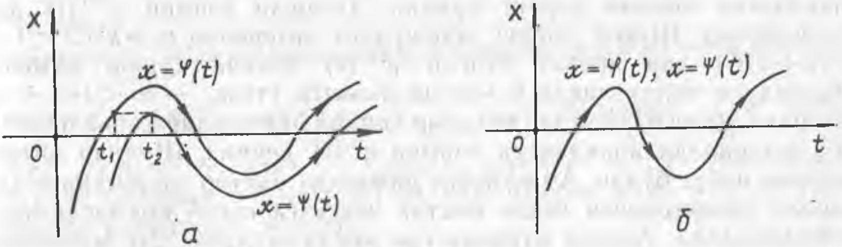
10.2-теорема. *Агар* $x=\varphi(t)$ *ва* $x=\psi(t)$ *вектор-функциялар* (10.3) *тенгламанинг икки ихтиёрий ечими бўлса, у ҳолда бу ечимлар ё бирорта ҳам нуқтада кесишмайди ёки бутунлай устма-уст тушади. Бошқача айтганда, агар* $t_1\neq t_2$ *бўлиб,* $\varphi(t_1)=\psi(t_2)$ *бўлса, у ҳолда* $\psi(t)\equiv\varphi(t+C)$, $C=t_1-t_2$ *муносабат ўринли бўлади* (37-а, б чизма).

Исбот. Теоремани исбот этиш учун $\varphi(t)$ ечим билан бирга $\varphi_*(t)=\varphi(t+C)$, $C=t_1-t_2$ ечимни ҳам кўрамиз. Бундан

$$\varphi_*(t_2)=\varphi(t_2+C)=\varphi(t_2+t_1-t_2)=\varphi(t_1)=\psi(t_2),$$

яъни

$$\varphi_*(t_2)=\psi(t_2).$$



37- чизма

Шундай қилиб, (10.3) тенгламанинг иккита $x=\varphi_*(t)$ ва $x=\psi(t)$ ечимлари бир хил бошланғич қийматларга эга. Демак, Коши теоремасининг *шартлари* бажарилади ва ягоналик ўринли, яъни $x=\varphi_*(t)$, $x=\psi(t)$ ечимлар устма-уст тушади (аниқланиш интервалларининг умумий қисмида). Бу эса теоремани исбот этади. Агар $t_1=t_2$ бўлса, теореманинг натижаси тривиал бўлади.

10.2-§. МУХТОР СИСТЕМА ТРАЕКТОРИЯСИНИНГ МУҲИМ ХОССАСИ

Мухтор системанинг алоҳида олинган битта $x=\varphi(t)$ траекторияси ўз-ўзини кеса оладими, яъни 38-чизмада кўрсатилган ҳол юз берадими ёки йўқми, деган савол қўяйлик. Бу саволга жавоб мухтор системанинг учинчи муҳим хоссасини очиб беради.

10.3-теорема. *$x=\varphi(t)$ функция (10.3) тенгламанинг $r_1<t<r_2$ интервалда аниқланган бирор ечими бўлсин. Агар $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, $t_1\neq t_2$ ва $r_1<t_1<r_2$, $r_1<t_2<r_2$ бўлса, у ҳолда шу $x=\varphi(t)$ ечимни $-\infty<t<+\infty$ интервалга давом эттириш мумкин.*

Исбот. 10.1-теоремага кўра $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ бўлгани учун $x=\varphi(t+C)$, $C=t_1-t_2$ функция ҳам ечим бўлади ва ушбу $\varphi(t)\equiv\varphi(t+C)$, $r_1<t<r_2$ айният ўринли. Бу айниятдан $\varphi(x)$ функция $r_1<t<r_2$ интервалда аниқлангани учун $\varphi(t+C)$ функция $r_1-|C|<t<r_2+|C|$ интервалда аниқланган бўлади. Ҳақиқатан, $r_1<t+C<r_2$ тенгсизликдан $C>0$ бўлганда $r_1-C<t<r_2$ ва демак, ечимни r_1 дан чапга C миқдорга давом эттириш мумкин; шунга ўхшаш, $C<0$ бўлганда $r_1<t<r_2-C$, яъни ечимни r_2 дан ўнгга $-C=|C|$ миқдорга давом эттириш мумкин бўлади. Ҳар икки ҳолни бирлаштириб ечимни $r_1-|C|<t<r_2+|C|$ интервалга давом эттириш мумкинлигини қайд қиламиз. Шу интервалда аниқланган $\varphi^{(1)}(t)$ ечим учун барибир $\varphi^{(1)}(t)\equiv\varphi^{(1)}(t+C)$ айният ўринли. $\varphi^{(1)}(t+C)=\varphi_*^{(1)}(t)$ десак, $\varphi_*^{(1)}(t_1)=\varphi^{(1)}(t_1+C)=\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, яъни $\varphi_*^{(1)}(t_1)=\varphi(t_2)$, бундан аввалгидек $\varphi_*^{(1)}(t+C)\equiv\varphi_*^{(1)}(t)$ экани келиб чиқади. $\varphi_*^{(1)}(t)$ функция $r_1-|C|<t<r_2+|C|$ интервалда аниқланган бўлгани учун охирги айниятдан фойдаланиб мавжудлик интервалини янада кенгайтириш мумкин. Бошқача айтганда, $r_1-2|C|<t<r_2+2|C|$ интервалда

38- чизма

аниқланган ечимни қуриш мумкин. Тегишли ечимни $\varphi^{(2)}(t)$ деб белгилаймиз. Шунга ўхшаш, мавжудлик интервали $r_1-k|C|<t<<r_2+k|C|$ дан иборат бўлган $\varphi^{(k)}(t)$ ечимни қуриш мумкин. Юқоридаги тенгсизликда $k\to\infty$ да лимитга ўтсак, $-\infty<t<+\infty$ интервал ҳосил бўлади (r_1 ва r_2 лар қандай бўлишидан қатъи назар). Шу интервалда аниқланган ечимни $\varphi^{\circ}(t)$ деймиз. Шундай қилиб, теорема исбот бўлди. Аммо исбот давомида мухтор системанинг ҳар қандай траекторияси чекли вақтда чексизга кетиб қолмаслигидан фойдаланилди. Аслида қурилаётган ҳолда шундай. Шу муносабат билан қуйида етарли шартни берадиган лемма келтирамиз.

10.1-лемма. *Агар* D_n соҳада $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$ *функциялар барча аргументлари бўйича чекланган хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда* (10.3) *мухтор системанинг ҳеч қандай траекторияси чекли вақтда чексизга кетиб қолмайди, яъни ушбу*

$$\lim_{t\to\tau}|\varphi(x)|=\infty,\ |\varphi(t)|=\sqrt{\varphi_1^2(t)+\ \ldots\ +\varphi_n^2(t)}$$

муносабат ўринли бўла олмайди.

Исбот. Лемманинг шартига кўра $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\leqslant M, i,j=1, 2, \ldots, n,$ $0<M$ — чекли сон. Энди $f_i(x)$ функция учун $x=0$ нуқта атрофида Лагранж формуласини ёзамиз:

$$f_i(x)=f_i(0)+\frac{\partial f_i(\theta_i\cdot x)}{\partial x_1}x_1+\ldots+\frac{\partial f_i(\theta_i\cdot x)}{\partial x_n}x_n,\quad i=1, 2, \ldots, n,\quad \text{бунда}$$

$0<\theta_i<1$, $\theta_i x=y\in D_n$. $|f(0)|=C$ деймиз. $\left|\frac{\partial f(\theta_i\cdot x)}{\partial x_i}\right|$ модулни баҳолайлик:

$$\left|\frac{\partial f(\theta_i\cdot x)}{\partial x_i}\right|=+\sqrt{\left(\frac{\partial f_1(\theta_i\cdot x)}{\partial x_i}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f_n(\theta_i\cdot x)}{\partial x_i}\right)^2}\leqslant\sqrt{n}\,M.$$

Бундан фойдаланиб, $f(x)$ вектор-функциянинг модулини баҳолаш мумкин. Ҳақиқатан, равшанки

$$|f_j(x)|\leqslant C+\sqrt{n}\,M\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leqslant c\cdot\sqrt{n}+\sqrt{n}\,M\sum_{i=1}^{n}|x_i|=$$
$$=\sqrt{n}\left(C+M\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)\leqslant N\sqrt{n}\left(1+\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right),$$

бунда $N=\max\ (C, M)$. Бу тенгсизликдан фойдаланиб топамиз:

$$|f(x)|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}f_j^2(x)}\leqslant\sqrt{n^2N^2\left(1+\sum_{j=1}^{n}|x_i|\right)^2}=$$
$$=nN\left(1+\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right).$$

Фараз этайлик, $r_1<x<r_2+\sum\limits_{m=1}^{k}|C_m|$ интервалда аниқланган ва $t\to\tau=r_2+\sum\limits_{m=1}^{k}|C_m|$ да чексизликка интилувчи $x=\varphi(t)$ ечим мавжуд, яъни $t\to\tau$ да $|\varphi(t)|\to\infty$ $\left(\tau=r_1-\sum\limits_{m=1}^{k}|C_m|\right.$ бўлганда ҳам исбот шунга ўхшаш бўлади). У ҳолда шундай $\tau_*<\tau$ топиладики, $\tau_*\leqslant t<\tau$ интервалда $|\varphi(t)|>1$ бўлади. Шунинг учун $\tau_*\leqslant t<\tau$ интервалда қуйидагига эгамиз:

$$|\dot{\varphi}(t)|\leqslant|\dot{\varphi}_1(t)|+|\dot{\varphi}_2(t)|+\ldots+|\dot{\varphi}_n(t)|\leqslant$$
$$\leqslant Nn\sqrt{n}\left(1+\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(t)|\right)\leqslant n(n+1)N\sqrt{n}\,|\varphi(t)|.$$

Бундан

$$\frac{\frac{d}{dt}|\varphi(t)|}{|\varphi(t)|}\leqslant\frac{|\dot{\varphi}(t)|}{|\varphi(t)|}\leqslant n(n+1)N\sqrt{n},\ \tau_*\leqslant t<\tau.$$

Бу тенгсизликнинг икки томонини τ_* дан t гача интеграллаб топамиз:

$$|\varphi(t)|\leqslant|\varphi(\tau_*)|e^{n(n+1)N\sqrt{n}\,(t-\tau_*)},\ \tau_*<t<\tau.$$

Аммо

$$t\to\tau \text{ да } |\varphi(\tau)|\leqslant|\varphi(\tau_*)|e^{n(n+1)N\sqrt{n}\,(\tau-\tau_*)}$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, унинг ўнг томонидаги ифода мусбат чекли сондир. Бу эса фаразимизга зид. Демак, чекли вақтда $x=\varphi(x)$ траектория чексизга кета олмайди. Лемма исбот этилди.

Кейинги мулоҳазаларда шу лемманинг шартлари ёки бошқа етарли шарт бажарилган деб қараб, $x=\varphi(t)$ ечим $-\infty<t<+\infty$ интервалда аниқланган деб ҳисобланади. Хусусан, 10.3-теоремада

$$\varphi(t_1)=\varphi(t_2),\ t_1\neq t_2$$

бўлгани учун

$$\varphi(t)\equiv\varphi(t+C_1)\equiv\ldots\equiv\varphi\left(t+\sum_{i=1}^{k}C_i\right)$$

айният бажарилади ва $\varphi(t)$ функция $t\to\tau$ (τ-чекли сон) да чексизга интилмайди. Аслида $\varphi(t)$ ечим чекли вақтда чексизга интилмаслиги учун $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, $t_1\neq t_2$ муносабатнинг бажарилиши ҳам етарли шартлардан биридир.

Навбатдаги теоремада ҳам мухтор системанинг ечими $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, $t_1\neq t_2$ бўлганда $-\infty<x<+\infty$ интервалда аниқланган деб ҳисобланади.

10.4-теорема (мувозанат ҳолат ва ёпиқ траекториялар ҳақида). *Агар* (10.3) *тенгламанинг бирор* $\varphi(t)$ *ечими учун* $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ $t_1\neq t_2$ *тенглик бажарилса, қуйидаги бири иккинчисини инкор этадиган икки ҳол юз бериши мумкин:*

1) *барча t лар учун*

$$\varphi(t) \equiv a,\ a = \text{const},\ a \in D_n;$$

2) *шундай мусбат сон T мавжудки, ихтиёрий t учун*

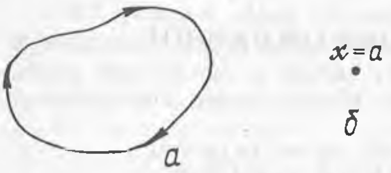
$$\varphi(t+T) = \varphi(t)$$

тенглик бажарилиб, $0 < |\tau_1 - \tau_2| < T$ *бўлганда*

$$\varphi(\tau_1) \neq \varphi(\tau_2)$$

тенгсизлик ўринли.

1) ҳолда вақт ўтиши билан $\varphi(t)$ нуқта ҳаракат қилмайди, у доим D_n тўпламнинг a нуқтасида бўлади. Шу $\varphi(t)$ ечим ва a нуқта (10.3) тенгламанинг, яъни нормал мухтор системанинг *мувозанат ҳолати* ёки *мувозанат нуқтаси* дейилади. Баъзида уни *тинчланиш нуқтаси* деб ҳам аталади (39, б-чизма);



39- чизма

2) ҳолда $x = \varphi(t)$ ечим даврий ечим, унинг графиги *ёпиқ траектория* ёки *цикл (давра)* деб аталади (39, а-чизма).

10.4-теореманинг исботи. Ушбу

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C) \tag{10.4}$$

айният ўринли бўладиган ҳар бир $C \neq 0$ сон $x = \varphi(t)$ *ечимнинг даври* дейилади. Шу $x = \varphi(t)$ ечимнинг барча даврларидан тузилган тўплам F бўлсин. Ҳозир бу сонли тўпламнинг баъзи хоссаларини текширамиз.

1°. Агар $C \in F$ бўлса,— $C \in F$ бўлади. Ҳақиқатан (10.4) да t ни $t - C$ га алмаштирамиз: $\varphi(t-C) \equiv \varphi(t)$. Бундан $-C \in F$ келиб чиқади.

2°. Агар $\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $C_i \in F$ бўлса, у ҳолда $\varphi(t) \equiv \varphi\left(t + \sum\limits_{i=1}^{k} C_i\right)$, яъни $\sum\limits_{i=1}^{k} C_i \in F$ бўлади. Ҳақиқатан,

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_1),$$
$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_2) \equiv \varphi(t+C_1+C_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_{k-1}) \equiv \varphi(t+C_{k-2}+C_{k-1}) \equiv \ldots \equiv \varphi\left(t + \sum_{i=1}^{k-1} C_i\right),$$
$$\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_k) \equiv \ldots \equiv \varphi\left(t + \sum_{i=1}^{k} C_i\right).$$

3°. F тўплам ёпиқ. Ҳақиқатан, ушбу $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$ кетма-кетлик F тўплам элементларидан тузилган бўлиб, бирор C_0 га яқинлашувчи бўлсин. $C_0 \in F$ эканини кўрсатамиз. Равшанки, $\varphi(t) \equiv \varphi(t+C_k)$.

Шунинг учун $\varphi(t)$ функциянинг узлуксизлигига кўра аргументда лимитга ўтиш мумкин, яъни қуйидаги амаллар ўринли:

$$\varphi(t)=\lim_{k\to\infty}\varphi(t)=\lim_{k\to\infty}\varphi(t+C_k)=\varphi(t+\lim_{k\to\infty}C_k)=\varphi(t+C_0)$$

Демак, $C_0\in F$ ва F — ёпиқ.

4°. F тўплам нолдан фарқли сонларни ўз ичига олади, чунки (10.4) да $C\neq 0$ $(t_1\neq t_2)$.

Энди теореманинг исботига ўтайлик. F тўплам учун қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

1) F тўплам барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат;

2) F тўпламда шундай кичик мусбат T сон мавжудки, у тўплам шу T сонга бутун каррали сонлардан иборат.

Бошқа ҳоллар бўла олмайди. Буни исбот этамиз. F тўпламда мусбат сонлар бор, чунки $0\notin F$ бўлиб, $C, -C$ лар унинг элементи.

F тўпламда энг кичик мусбат сон бўлмасин, яъни ихтиёрий мусбат $\varepsilon>0$ учун шундай C давр топиладики, $C<\varepsilon$ бўлади. 2° хоссага кўра m-бутун бўлса, mC ҳам давр бўлади. $C<\varepsilon$ бўлгани учун ихтиёрий ҳақиқий C_0 учун шундай бутун m топиладики, $|C_0-mC|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади. Бундан ихтиёрий C_0 сон F тўпламнинг лимит нуқтаси экани келиб чиқади. Шу билан бирга F тўплам ёпиқ бўлгани учун у барча ҳақиқий сонлар тўплами билан устма-уст тушади.

Энди F тўплам барча ҳақиқий сонлар тўплами билан устма-уст тушмасин, дейлик. Юқорида исботланганига кўра бу ҳолда F тўпламда энг кичик мусбат сон T мавжуд. C — ихтиёрий давр бўлсин. У ҳолда шундай бутун сон m ни танлаш мумкинки, ушбу $|C-mT|<T$ тенгсизлик бажарилади. Бунда $C-mT\neq 0$ дейлик. Аммо C ва mT лар давр бўлгани учун $C-mT$ ҳам давр бўлади. Демак, $|C-mT|$ ҳам давр бўлади. Шунинг учун $|C-mT|>0$ ва $|C-mT|<T$ тенгсизликлардан F тўпламнинг T дан кичик бўлган мусбат даври мавжуд. Бу бўлиши мумкин эмас, чунки T сон F тўпламда энг кичик мусбат давр эди. Зиддият $C=mT$ бўлиши кераклигини исботлайди. Демак, $C=mT$. Шундай қилиб, кўрилаётган ҳолда F тўплам T га каррали сонлардан иборат. Натижа қилиб айтганда, даврлардан тузилган F тўплам ё барча ҳақиқий сонлардан иборат, ё унда энг кичик мусбат сон $T>0$ мавжуд ва F тўплам шу T га каррали сонлардан ташкил топган.

Биринчи ҳолда $\varphi(t)$ ечим учун ихтиёрий ҳақиқий сон давр бўлади; бу фақат $\varphi(t)$ вектор-функция ўзгармас вектордан иборат бўлгандагина мумкин, яъни агар $\varphi(t)=a$, $a\in D_n$ бўлса, у ҳолда C — ихтиёрий ҳақиқий сон бўлса ҳам $\varphi(t+C)=a$ тенглик бажарилаверади. Биз мувозанат ҳолатига эгамиз. Иккинчи ҳолда F тўпламнинг энг кичик мусбат T сони $\varphi(t)$ ечимнинг даври (энг кичик мусбат даври) бўлади. Биз даврий ечимга эгамиз. Шундай қилиб, теорема тўлиқ исбот бўлди.

10.3-§. МУХТОР СИСТЕМАНИНГ ҲОЛАТЛАР ФАЗОСИ

1. Ҳолатлар фазоси. Мухтор система (10.2) нинг ўнг томонидаги функциялар n-ўлчовли фазонинг бирор очиқ Δ тўпламида аниқланган. Шу тўпламнинг ҳар бир $(x_1^0, \dots, x_n^0)=x^0$ нуқтасига ушбу

$$f_1(x^0),\ f_2(x^0),\ \dots,\ f_n(x^0)$$

n та сонлар кетма-кетлигини мос келтириш мумкин. Уларни n ўлчовли фазонинг x^0 нуқтасидан чиқарилган $f(x^0)$ векторнинг координаталари деб қараш мумкин. Бундан кўринадики, мухтор системага очиқ Δ тўпламда аниқланган *вектор майдон* мос келади.

x° нуқта Δ тўпламнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Мухтор системанинг геометрик маъноси нуқтаи назаридан шу x^0 нуқтага ундан чиқадиган $f(x^0)$ вектор мос келтирилган. Мавжудлик ва ягоналик теоремасига кўра (10.2) системанинг $\varphi(t_0)=x^0$ шартни қаноатлантирадиган $x=\varphi(t)$ ечими мавжуд. Бу ечимга $t=t_0$ да траекторияси x^0 нуқтадан ўтадиган нуқтанинг *ҳаракати* мос келади. Ҳаракати давомида $x=\varphi(t)$ ечимни белгилайдиган нуқтанинг t_0 моментдаги тезлиги $f(x^0)$ вектор билан ифодаланади, яъни $\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\Big|_{t=t_0}=f(x_0)$ Энди *ҳолатлар фазоси* тушунчасини киритамиз.

10.2-таъриф. (10.2) *мухтор системанинг ҳолатлар фазоси деб шундай n ўлчовли фазога айтиладики, унда шу системанинг ечимлари траекториялар билан, системанинг ўзи эса вектор майдон билан тавсифланади. Траекториялар ҳолат траекториялари деб, векторлар ҳолат тезликлари деб аталади.*

10.5- теорема. *Ушбу* $a=(a_1, \dots, a_n)\in D_n\,(D_n=\Delta)$ *нуқта* (10.2) *системанинг мувозанат ҳолати бўлиши учун, яъни шу системанинг* $\varphi(t)\equiv a$, $a=\text{const}$ *айният ўринли бўладиган* $x=\varphi(t)$ *ечими мавжуд бўлиши учун* D_n *соҳанинг* a *нуқтасида ҳолат тезлиги нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурлиги. $a\in D_n$ нуқта мувозанат ҳолати дейлик. У ҳолда (10.2) системанинг $\varphi(t)\equiv a$ айният ўринли бўладиган $x=\varphi(t)$ ечими мавжуд. Шунинг учун $f(a)=\frac{d}{dt}\varphi(t)\equiv\frac{d}{dt}a=0.$ Демак, $f(x)$ ҳолат тезлиги $x=a$ нуқтада нолга айланади.

Етарлилиги. $a\in D_n$ нуқтада $f(a)=0$. Бу ҳолда $\varphi(t)\equiv a$ функция (10.2) системанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан, $\varphi(t)\equiv a\in C^1$, $a\in D_n$, $\dot{\varphi}(t)=\frac{da}{dt}\equiv 0$ ва $f(a)=0$. Теорема исбот бўлди.

10.1-натижа. (10.2) *мухтор системанинг мувозанат ҳолатлари (нуқталари) ушбу*

$$\begin{array}{c} f_1(a_1, \dots, a_n)=0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(a_1, \dots, a_n)=0 \end{array} \tag{10.5}$$

чекли тенгламалар системасининг (унга ҳосилалар кирмайди) ечимларидан иборат. Хусусан, $\frac{dx}{dt}=(x-1)^3$ тенгламанинг мувозанат нуқтаси $x=1$ нуқтадан иборат, чунки $(x-1)^3=0$ тенглама шу ечимга эга, $\frac{dx}{dt}=(x-1)^3(x+2)$ тенглама иккита $x=1$, $x=-2$ мувозанат нуқтасига эга. Яна ушбу

$$\dot{x}_1=\lambda_1 x_1,$$
$$\dot{x}_2=\lambda_2 x_2$$

($\lambda_1\neq\lambda_2$, λ_1, λ_2 — ҳақиқий, $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$) системанинг мувозанат ҳолати координата бошидан иборат бўлиб, D_2 соҳа бутун текисликдир. Шунга ўхшаш

$$\dot{x}_1=ax_1-bx_2,\ \dot{x}_2=bx_1+ax_2\quad (b\neq 0,\ a \text{ — ҳақиқий сонлар})$$

системанинг мувозанат ҳолати ҳам координата бошидан иборат, чунки

$$\begin{cases} ax_1-bx_2=0, \\ bx_1+ax_2=0 \end{cases}$$

система фақат тривиал ечимга эга (системанинг детерминанти $a^2+b^2\neq 0$). Мувозанат нуқталари саноқли ёки саноқсиз бўлиши мумкин. Хусусан, $\dot{x}=\sin x$ учун $x=k\pi$ (k — бутун сон) нуқталар мувозанат нуқталари бўлиб, саноқли тўпламни ташкил қилади. $\begin{cases} \dot{x}_1=0, \\ \dot{x}_2=x_1 \end{cases}$ система учун $x_1=0$ чизиқ (x_2 ўқ) мувозанат ҳолатини беради. Биз саноқсиз тўпламга эгамиз. Агар $\dot{x}_i=0$, $i=1, \dots, n$ система берилган бўлса, мувозанат нуқталари n ўлчовли фазодан иборат. Агар $\dot{x}_i=0$, $\dot{x}_k=a_k\neq 0$, $i=1, \dots, n$, $1\leqslant k\leqslant n$, $i\neq k$ система берилган бўлса, унинг мувозанат нуқтаси мавжуд эмас, чунки $f\neq 0$.

2. Скаляр мухтор тенгламанинг ҳолатлар тўғри чизиғи ва мувозанат ҳолати. Ушбу

$$\dot{x}=f(x) \tag{10.6}$$

скаляр мухтор тенгламани кўрамиз. Бунда $f(x)$ — бутун R^1 тўғри чизиқда узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи функция. Яна қўшимча фараз этамизки, $f(x)$ функциянинг ноллари (улар берилган мухтор тенгламанинг мувозанат нуқталаридир) лимит нуқтага эга бўлмасин. Бу фаразга кўра $f(x)$ нинг ноллари бутун тўғри чизиқни чекли ёки саноқли сондаги интервалларга бўлади. Энг чап интервалнинг (агар у мавжуд бўлса) чап охири $-\infty$, энг ўнг интервалнинг (агар у мавжуд бўлса) ўнг охири $+\infty$ бўлади. Шу интерваллар системасини Σ билан белгилаймиз. Агар $f(x)$ функция R^1 тўғри чизиқда битта ҳам нолга эга бўлмаса, Σ система битта $(-\infty, +\infty)$ интервалдан иборат бўлиб, $f(x)$ — битта x_0 нолга эга бўлган Σ система иккита $(-\infty, x_0)$, $(x_0, +\infty)$ интервалдан иборат бўлади.

10.6-теорема. *Σ системанинг бирор интервалини (a, b) дейлик, яъни $(a, b)\in\Sigma$, яна $x_0\in(a, b)$ бўлсин. Агар $x=\varphi(t)$, $r_1<t<r_2$,*

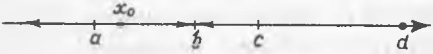
берилган тенгламанинг $(\theta,\ x_0)$, $r_1 < \theta < r_2$, *бошланғич қийматларга эга бўлган давомсиз ечими бўлса, у ҳолда* $f(x_0) > 0$ *бўлганда ушбу*

$$a < \varphi(t) < b,\ r_1 < t < r_2; \tag{10.7}$$

$$\lim_{t\to r_1} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t\to r_2} \varphi(t) = b \tag{10.8}$$

муносабатлар ўринли; шу билан бирга, агар a (ёки b) *чекли бўлса, у ҳолда* r_1 (ёки r_2) *чексиз бўлади. Шундай қилиб, ҳар бир* $(a,\ b)$ *интервал битта ҳолат траекториясидан иборат.*

Исбот. $f(x_0) > 0$, $x_0 \in (a,\ b)$ бўлгани учун (теоремани $f(x_0) < 0$ бўлганда ҳам тегишлича баён этиб, исботлаш мумкин), $(a,\ b)$ интервалда $f(x) > 0$ ва $\dot{x} > 0$ бўлади. Бундан $(a,\ b)$ да ҳолат нуқтаси чапдан ўнгга ҳаракат қилиб, ҳолат траекториясини чизиши келиб чиқади (40-чизма). Демак, t ўсиши билан $\varphi(t)$ нуқта $(a,\ b)$ интервалдан фақат ўнг охири орқали чиқиб кетиши мумкин (агар бу мумкин бўлса). Дейлик, $t = t_1$ бўлганда $\varphi(t_1) = b$ бўлсин. Эслатиб ўтамизки, $f(b) = 0$ ва b — мувозанат нуқтаси, бу b нуқта ҳам 10.4-теоремага кўра мустақил траекториядан иборат. Аммо юқоридаги фаразга кўра $x = b$ ва $x = \varphi(t)$ траекториялар $t = t_1$ да кесишади. $f(x)$ функция узлуксиз дифференциалланувчи бўлгани учун (10.6) тенглама ихтиёрий тайинланган бошланғич шартни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга. Шунинг учун биз зиддиятга келдик. Демак, t ўсиши билан $\varphi(t)$ нуқта $(a,\ b)$ интервалдан чиқиб кета олмайди. $\varphi(t)$ нуқта t камайиши билан $(a,\ b)$ интервалдан чап охири орқали чиқиб кета олмаслиги ҳам худди шундай кўрсатилади. Демак, ушбу $a < \varphi(t) < b$ тенгсизлик ўринли. Шундай қилиб, (10.7) муносабатлар исботланди.



40- чизма

Энди (10.8) муносабатларни исботлаймиз. Бунинг учун $\lim\limits_{t\to r_2} \varphi(t) = b$ ни исботлаш етарли. Қолган муносабат шунга ўхшаш исботланади.

$$\lim_{t\to r_2} \varphi(t) \neq b, \text{ яъни } \lim_{t\to r_2} \varphi(t) = c^* < b$$

деб фараз этамиз. $(a,\ b)$ интервалда $f(x) > 0$ бўлгани учун $f(c^*) > 0$ бўлади. (10.6) тенгламанинг $(0,\ c^*)$ бошланғич қийматларга эга бўлган ечимини $\psi(t)$ дейлик. Демак, $\psi(0) = c^*$, $\dot{\psi}(t) \equiv f(\psi(t))$. Бундан $f(c^*) > 0$ бўлгани учун бирор $t = t_* < 0$, $t_* \in (r_1,\ r_2)$ бўлганда $\psi(t_*) \equiv c^*$ келиб чиқади. Иккинчи томондан, $t \to r_2$ да $\varphi(t) \to c_*$ бўлгани учун $\varphi(t_*) < c^*$, $t_* < r_2$ бўлади. Бу тенгсизликларга асосан $\psi(t_*) = \varphi(t_*) = x_*$, $a < x_* < c^* < b$ деб танлаш мумкин. Бошқача айтганда, (10.6) тенгламанинг иккита $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ ечимлари бир хил бошланғич шартни қаноатлантиряпти. Бу ечимнинг ягоналигига зид. Шундай қилиб, (10.8) муносабатлар исботланди деса бўлади.

Теореманинг охирги тасдиғини исботлаш қолди. Бунинг учун b чекли бўлсин дейлик, яъни $b<+\infty$; $r_2=+\infty$ эканини исботлаймиз. Фараз этайлик, $r_2<+\infty$. Ушбу функцияни киритамиз:

$$\chi(t)=\begin{cases}\varphi(t), & r_1<t<r_2,\\ b, & t\geqslant r_2.\end{cases}$$

Бу функция (10.6) тенгламанинг ечими, аммо бунинг бўлиши мумкин эмас. Акс ҳолда икки ечим $x=\chi(t)$ ва $x=b$ лар $t=r_2$ бўлганда бир хил қийматларга эга бўлади. Шундай қилиб, $r_2=\infty$. Худди шунга ўхшаш $a>-\infty$ бўлганда $r_1=-\infty$ экани исботланади. Теорема тўлиқ исбот бўлди.

Келтирилган теорема (10.6) тенглама ечимларининг муҳим хоссасини беради. Навбатдаги хоссани баён этишдан аввал баъзи тушунчаларни киритамиз.

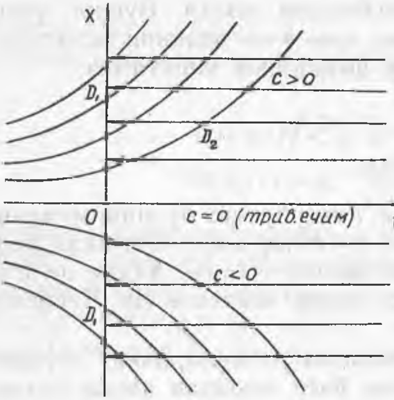
Берилган (10.6) тенгламанинг бирор мувозанат нуқтасини b, ундан чап ва ўнг томондаги энг яқин мувозанат нуқталарни a ва c дейлик. Агар (a, b) интервал Σ системанинг энг чап, (b, c) эса унинг энг ўнг интервали бўлса, у ҳолда $a=-\infty$, $c=+\infty$ бўлади. Қуйидаги мулоҳазалар шу ҳолларда ҳам ўринли. Демак, $(a, b)\in\Sigma$, $(b, c)\in\Sigma$. Ҳар бир (a, b) ёки (b, c) интервалда $f(x)\neq 0$. Шу $f(x)$ функциянинг мусбат ё манфийлигига қараб (a, b) ва (b, c) интервалларда ҳолат нуқтаси t ортиши билан ё b га яқинлашади, ё ундан узоқлашади.

Агар ҳар икки (a, b) ва (b, c) интервалларда ҳам ҳолат нуқтаси t ортиши билан b га яқинлашса, у ҳолда нуқта (мувозанат нуқтаси) *турғун* дейилади; агар t ортиши билан ҳар икки интервалда ҳам ҳолат нуқтаси b нуқтадан узоқлашса, у ҳолда b нуқта нотурғун *(турғунмас)* дейилади; агар t ортиши билан ҳолат нуқта бир интервалда b га яқинлашиб, иккинчи интервалда ундан узоқлашса, у ҳолда b нуқта *ярим турғун* дейилади.

$\dot{x}=x$ тенгламанинг битта $x=0$ мувозанат нуқтаси бор. Демак, $b=0$ ва Σ система иккита $(-\infty, 0)$ ҳамда $(0, +\infty)$ интерваллардан ташкил топган. Равшанки, $(-\infty, 0)$ интервалда ҳолат нуқтаси b дан узоқлашади, яъни $x<0$ бўлгани учун ҳаракат ўнгдан чапга бўлади. $(0, +\infty)$ интервалда эса ҳаракат чапдан ўнгга бўлади, яъни ҳолат нуқтаси вақт ўтиши билан b нуқтадан яна узоқлашади. Шундай қилиб, $\dot{x}=x$ тенглама учун $b=0$ нуқта нотурғун мувозанат нуқтадир. Шунга ўхшаш, агар $\dot{x}=-x$ тенглама кўрилса, $x=0$ нуқта турғун мувозанат нуқта эканини кўрсатиш мумкин.

Мулоҳазаларни интеграл чизиқлар ёрдамида ҳам олиб бориш мумкин эди. Хусусан $\dot{x}=x$ тенглама учун $x=0$ мувозанат нуқтасига (t, x) текисликдаги тривиал ечим, яъни t ўқи мос келади. Бу горизонтал ўқнинг юқори ва пастки қисмидаги интеграл чизиқлар t ортиши билан борган сари шу ўқдан узоқлашиб кетади (41-чизма). $\dot{x}=-x$ тенгламада эса бунинг акси бўлади.

Шундай қилиб, (10.6) тенглама учун b мувозанат нуқтанинг атрофида, аникроғи (a, b) ва (b, c) интервалларда ҳолат нуқтасининг ҳаракати тўғрисида қуйидаги теорема ўринли.



41- чизма

10.7-теорема. (10.6) *тенгламанинг мувозанат нуқтаси b турғун бўлиши учун $(a,\ b)$ интервалда $f(x)>0$ ва $(b,\ c)$ интервалда $f(x)<0$ бўлиши зарур ва етарли; мувозанат нуқта b нотурғун бўлиши учун $(a,\ b)$ да $f(x)<0$, $(b,\ c)$ да $f(x)<0$ бўлиши зарур ва етарли; ниҳоят, b нуқта ярим турғун бўлиши учун $f(x)$ функциянинг ишораси $(a,\ b)$ ва $(b,\ c)$ интервалларда бир хил бўлиши зарур ва етарли.*

Бу теореманинг исботи юқоридаги мулоҳазалар ва таърифларга асосан равшан.

Шуни эслатамизки, бу теоремада фойдаланиш учун функциянинг ишорасини у ёки бу интервалларда текшириш лозим. Агар $f(x)$ функциянинг ҳосилаларидан фойдалансак, текшириш осонлашади. Шу муносабат билан қуйидаги теоремани келтирамиз.

10.8-теорема. (10.6) *тенглама учун b мувозанат нуқта бўлиб, $f(x)$ функция шу нуқтада $2s+1$ (s — натурал сон)-тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. Агар ушбу*

$$f'(b)=\ldots=f^{(2s-1)}(b)=0,\quad f^{(2s)}(b)\neq 0 \tag{10.9}$$

муносабатлар бажарилса, b нуқта ярим турғун мувозанат нуқта бўлади; шунга ўхшаш, агар ушбу

$$f'(b)=\ldots=f^{(2s)}(b)=0,\ f^{(2s+1)}(b)\neq 0 \tag{10.10}$$

муносабатлар бажарилиб

а) $f^{(2s+1)}(b)<0$ *бўлса, b- турғун,* (10.10′)

б) $f^{(2s+1)}(b)>0$ *бўлса, b- нотурғун* (10.10″)

мувозанат нуқта бўлади.

Исбот. (10.6) тенгламада $f(x)$ функция бирор k-тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция учун $x=b$ нуқтанинг атрофида Лагранж формуласини ёзамиз:

$$f(x)=f(b)+\frac{f'(b)}{1!}(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k+0((x-b)^k),\ ^{*)}$$

бунда $\lim\limits_{y\to 0}\frac{0(y)}{y}=0$. Энди $k=2s$ бўлсин. У ҳолда (10.9) муносабатлардан фойдалансак,

---

*) $0(\alpha)$ (0 кичик αдан) — α га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор.

$$f(x)=\frac{f^{(2s)}(b)}{(2s)!}\cdot(x-b)^{2s}+0((x-b)^{2s})$$

формулага эга бўламиз. $x\in(a,\ b)$ дейлик. Бу ҳолда $x-b<0$; шунингдек, $x\in(b,\ c)$ бўлса, $x-b>0$. Аммо $(x-b)^{2s}>0$ бўлади. Шунинг учун формуланинг ўнг томонидаги $0((x-b)^{2s})$ ифода $\frac{f^{2S}(b)}{(2s)!}(x-b)^{2s}$ ҳаднинг ишорасига таъсир эта олмаганидан

$$\operatorname{sign} f(x)=\operatorname{sign}\frac{f^{(2s)}(b)}{(2s)!},\ x\in(a,\ b),\ x\in(b,\ c)$$

муносабат ўринли. Лекин $f^{(2s)}(b)\neq0$. Шунинг учун $f(x)$ функция (a, b) ва $(b,\ c)$ интервалларда бир хил ишорага эга. Демак, (10.9) муносабатлар бажарилганда b нуқта ярим турғун бўлади.

Энди (10.10) муносабатлар ўринли бўлсин дейлик. У ҳолда Лагранж формуласида $k=2s+1$, $s=0,1,\ \ldots$ деб топамиз:

$$f(x)=\frac{f^{(2s+1)}(b)}{(2s+1)!}(x-b)^{2s+1}+0((x-b)^{2S+1}).$$

Бу формулада ўнг томоннинг ишораси биринчи ҳад билан аниқланади, ишорага $0((x-b)^{2s+1})$ ҳад таъсир эта олмайди. Аввал $(a,\ b)$ интервални кўрайлик. Унда $x-b<0$, демак, $(x-b)^{(2s+1)}<0$. Бундан (a, b) ва $f(x)$ нинг ишораси $f^{(2s+1)}(b)$ нинг ишорасига тескари бўлиб чиқади, яъни $(a,\ b)$ интервалда

$$\operatorname{sign} f(x)=-\operatorname{sign}\frac{f^{(2s+1)}(b)}{(2s+1)!},\ x\in(a,\ b). \tag{10.11}$$

$(b,\ c)$ интервал учун $x-b>0,\cdot(x-b)^{2s+1}>0$ ва $(b,\ c)$ да

$$\operatorname{sign} f(x)=\operatorname{sign}\frac{f^{(2s+1)}(b)}{(2s+1)!}\ ,\ x\in(b,\ c). \tag{10.12}$$

Топилган (10.11) ва (10.12) муносабатлардан $f^{(2s+1)}(b)<0$ бўлса, $f(x)>0, x\in(a,\ b), f(x)<0, x\in(b, c)$ тенгсизликлар келиб чиқади. Бу ҳолда таъриф бўйича b нуқта турғун бўлади. Агар $f^{(2s+1)}(b)>0$ бўлса, ушбу $f(x)<0,\ x\in(a,\ b)$; $f(x)>0,\ x\in(b,\ c)$ тенгсизликларга эгамиз. Бу ҳолда эса b нуқта нотурғун бўлади. Теорема исбот бўлди.

Ҳозир исботланган теоремада келтирилган (10.9) ва (10.10), (10.10′), (10.10″) шартлар мувозанат нуқтасининг ярим турғун, турғун ва нотурғун бўлиши учун етарли шарт вазифасини бажаряпти. Аслида бу шартлар *зарур* ва *етарлидир*. Заруралигининг исботи ҳам юқоридаги каби бўлади.

Мисоллар. 1. Аввал $x=x$ тенгламани олайлик. Унда $f(x)=x$ бўлиб, $f'(0)=1>0$. Демак. 10.8-теоремага кўра $x=0$ нуқта нотурғун. Агар $\dot{x}=-x$ тенгламани олсак, унда $f(x)=-x$ ва $f'(0)=-1<0$. Бу ҳолда $x=0$ нуқта турғун бўлади. Энди $\dot{x}=p(x-1)(x+1)(x+2)$, $0\neq p=\text{const}$ тенгламани кўрайлик. Унда $f(x)=p(x-1)(x+1)(x+2)$ бўлиб, $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-2$ нуқталар мувозанат нуқталаридан иборат. Ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$f'(x)=p[(x+1)(x+2)+(x-1)(x+2)+(x-1)(x+1)].$$

Кўриниб турибдики, $f'(1)=6p$, $f'(-1)=-2p$, $f'(-2)=3p$ ва $p\neq 0$ бўлгани учун бу ҳосилалар нолдан фаркли. Биз $2s+1=1$ бўлган ҳолга эгамиз. Агар $p>0$ бўлса, $6p>0$ ва $x_1=1$ нукта нотурғун; $-2p>0$ ва $x_2=-1$ нуқта турғун; $3p<0$ ва $x_3=-2$ нуқта нотурғун бўлади (42-чизма).

42- чизма

2. Ушбу $\dot{x}=\sin x$ тенглама учун мувозанат нукталари $\sin x=0$ тенгламанинг илдизларидан иборат. Илдизлар $x=n\pi$ (n — бутун сон) кўринишда ёзилади. Бу ҳолда $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$ бўлиб:

$$\cos x\begin{cases} >0, \text{ агар } x=2k\pi, \ k \text{ — бутун сон,} \\ <0, \text{ агар } x=(2k+1)\pi, \ k \text{ — бутун сон.} \end{cases}$$

10.8-теоремага кўра, $x=2k\pi$ кўринишдаги нуқталар нотурғун, $x=(2k+1)\pi$ кўринишдаги нуқталар эса турғун бўлади. Қайд қилиб ўтамизки, берилган тенгламанинг мувозанат нуқталари саноқли бўлиб, лимит нуқтага эга эмас.

3. Мухтормас системанинг ҳолатлар фазосига мисол. Ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1=a, \\ \dot{x}_2=3bt^2, \ a>0, \ b>0 \end{cases} \tag{10.13}$$

Мухтормас системани олайлик. Унинг умумий ечими

$$\begin{cases} x_1=at+c_1, \\ x_2=bt^3+c_2 \end{cases} \tag{10.14}$$

кўринишда ёзилади. Берилган системада $n=2$ бўлиб, $f_1=a$, $f_2=3bt^2$ функциялар t, x_1 ва x_2 лар бўйича узлуксиз дифференциалланувчи. Коши теоремасига кўра, (t, x_1, x_2) ўзгарувчиларнинг фазосида ихтиёрий тайинланган $(t_0, x_1^0, x^0{}_2)$ нуқтадан берилган системанинг ягона интеграл чизиғи ўтади. Бу бир томондан. Энди системанинг ечимини ҳолатлар фазосида тасвирлашни кўрайлик. Унинг учун (10.14) дан t параметрни чиқариб ташлаймиз:

$$x_2=\frac{b}{a^3}(x-c_1)^3+c_2, \tag{10.15}$$

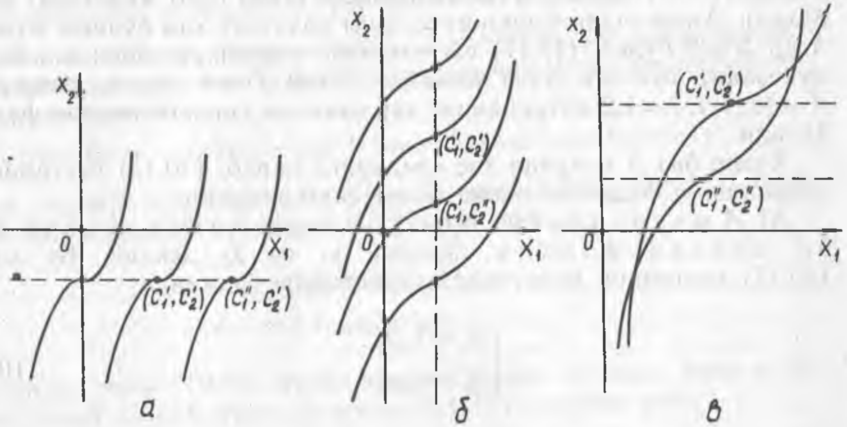
Бу кубик параболалардан иборат бўлиб, (c_1, c_2) нуқтадан ўтади ва $x_2=c_2$ чизиқдан пастда қавариқлиги юқорига, шу чизиқдан юқорида эса қавариқлиги пастга қараган бўлади. Шу билан бирга y чизиқ $x=c_1$ чизиққа уринади ҳам. Агар ё $c_1'=c_1''$, $c_2'\neq c_2''$, ёки $c_1'\neq c_1''$, $c_2'=c_2''$ бўлса, тегишли кубик параболалар ўзаро кесишмайди (43-чизма). Буни аналитик усулда исботлаш қийин эмас. Параболалар кесишади дейлик. У ҳолда

$$y=\frac{b}{a^3}(x-c_1')+c_2', \qquad y=\frac{b}{a^3}(x-c_1'')+c_2''$$

лардан

$$A(c_1''-c_1')=c_2''-c_2', \qquad A=\frac{b}{a^3}>0 \tag{10.16}$$

тенгликка эгамиз. Агар $c_1'=c_1''$, $c_2'\neq c_2''$ ёки $c_1''\neq c_1'$, $c_2'=c_2''$ муносабатларни кўрсак, юқорида зиддиятга келамиз. Демак, кубик параболалар кесиша олмайди.



43- чизма

Энди $c_1'=c_1''$, $c_2'\neq c_2''$ бўлсин. У ҳолда тегишли кубик параболалар (10.16) тенглик ўринли бўлганда ўзаро кесишади. Демак, (x_1, x_2) текисликнинг ҳар бир нуқтасидан ягона кубик парабола ўтмайди (43, в-чизма). Аммо (t, x_1, x_2) фазода ягоналик ўринли эди. Шундай қилиб, бу мисолдан кўринадики, мухтормас системаларни уларнинг ҳолатлар фазосида текшириш мақсадга мувофиқ эмас.

Машқ. Ушбу системаларнинг ечимлари ҳолатлар фазосида тасвирлансин:

1. $\begin{cases} \dot{x}_1=-\omega x_2, \\ \dot{x}_2=\omega x_1, \ \omega>0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1=a, \ a>0, \\ \dot{x}_2=bt, \ b>0; \end{cases}$

3. $\dot{x}=(x-1)^3(x+2)$ (мувозанат нуқталари ҳам текширилсин);
4. $\dot{x}=(x-2)^2$ (мувозанат нуқтаси ҳам текширилсин).

10.4-§. ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ БИР ЖИНСЛИ СИСТЕМАНИНГ ҲОЛАТЛАР ТЕКИСЛИГИ

1. Системанинг каноник кўриниши. Бизга ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{cases} \qquad (10.17)$$

чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли система берилган бўлсин. Бу системанинг детерминанти:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

бўлиб, (10.17) система учун координата боши (0,0) мувозанат нуқта бўлади. Аммо ундан бошқа мувозанат ҳолатлар ҳам бўлиши мумкин. Агар $D\neq 0$ бўлса, (10.17) системанинг координата бошидан бошқа мувозанат нуқтаси бўла олмайди. Агар $D\neq 0$ бўлса, равшанки, $A=(a_{ij})$, i, $j=1,2$ матрицанинг ҳар икки хос сонлари нолдан фарқли бўлади.

Ҳозир биз A матрица хос сонларига қараб, (10.17) системанинг кўринишини соддалаштириш билан шуғулланамиз.

А) A матрицанинг хос сонлари ҳақиқий, ҳар хил ва нолдан фарқли. Уларни λ_1 ва λ_2 дейлик. Бу ҳолда (10.17) системани махсусмас алмаштириш ёрдамида

$$\begin{cases} \dot{y}_1=\lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2=\lambda_2 y_2 \end{cases} \tag{10.18}$$

кўринишга келтириш мумкин.

Шу муносабат билан қуйидаги алмаштиришни бажарайлик:

$$\begin{cases} y_1=\alpha x_1+\beta x_2, \\ y_2=\gamma x_1+\delta x_2, \end{cases} \tag{10.19}$$
$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0.$$

Ҳосилаларни ҳисоблаб, (10.17) дан фойдаланамиз:

$$\dot{y}_1=\alpha\dot{x}_1+\beta\dot{x}_2=(a_{11}\alpha+a_{21}\beta)x_1+(a_{12}\alpha+a_{22}\beta)x_2,$$
$$\dot{y}_2=\gamma\dot{x}_1+\delta\dot{x}_2=(a_{11}\gamma+a_{21}\delta)x_1+(a_{12}\gamma+a_{22}\delta)x_2.$$

Бу ифодаларни мос равишда $\lambda_1 y_1$ ва $\lambda_2 y_2$ ларга тенглаштирамиз:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha+a_{21}\beta)x_1+(a_{12}\alpha+a_{22}\beta)x_2=\lambda_1(\alpha x_1+\beta x_2), \\ (a_{11}\gamma+\alpha_{21}\delta)x_1+(a_{12}\gamma+a_{22}\delta)x_2=\lambda_2(\gamma x_1+\delta x_2). \end{cases}$$

Энди x_1 ва x_2 лар олдидаги коэффициентларни тенглаштирсак, ушбу

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)\alpha+a_{21}\beta=0, \\ a_{12}\alpha+(a_{22}-\lambda_1)\beta=0; \end{cases} \tag{10.20}$$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_2)\gamma+a_{21}\delta=0, \\ a_{12}\gamma+(a_{22}-\lambda_2)\delta=0 \end{cases} \tag{10.21}$$

системаларни ҳосил қиламиз. Равшанки λ_1 ва λ_2 учун

$$D(\lambda_i)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i \end{vmatrix}=0,\ i=1,2,\ \text{бунда}\ D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Шунинг учун $D^*(\lambda_i)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda_i \end{vmatrix}=0$ бўлади. Бу тенгликка асосан (10.20) ва (10.21) системалар α, β ва γ, δ ларга нисбатан тривиал бўлмаган ечимларга ҳам эга. Хусусан,

$$\alpha=a_{21},\ \beta=-(a_{11}-\lambda_1);\ \gamma=a_{21},\ \delta=-(a_{11}-\lambda_2) \qquad (10.22)$$

деб танласа бўлади. Агар (10.22) тенгликлардан фойдалансак, (10.19) алмаштириш махсусмас бўла оладими? Шуни текширайлик. Қуйидагига эгамиз:

$$\alpha\delta-\beta\gamma=-a_{21}(a_{11}-\lambda_2)+(a_{11}-\lambda_1)a_{21}=a_{21}(\lambda_2-\lambda_1).$$

Бундан $a_{21}\neq0$ бўлганда $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$ экани келиб чиқади. Агар $a_{21}=0$ бўлса, $a_{12}=0$ бўлганда (10.17) система

$$\begin{cases} \dot{x}_1=a_{21}\ x_1, \\ \dot{x}_2=a_{22}\ x_2 \end{cases}$$

кўринишда, яъни (10.18) кўринишида ёзилган бўлади. Энди агар $a_{21}=0$ бўлиб, $a_{12}\neq0$ бўлса, у ҳолда (10.17) система ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2=a_{22}\ x_2 \end{cases}$$

кўринишни олади. Бунда x_1 ва x_2 лар ролини алмаштирсак,

$$\begin{cases} \dot{x}_1=a_{22}\,x_1, \\ \dot{x}_2=a_{12}x_1+a_{11}x_2 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Энди бу системада a_{21} ўрнида a_{12} турибди. Шунинг учун $a_{21}\neq0$ бўлгандаги мулоҳазалар $a_{12}\neq0$ бўлганда ҳам ўтади. Шундай қилиб, (10.17) системани унинг матрицаси ҳақиқий, ҳар хил ва нолдан фарқли хос сонларга эга бўлганда (10.18) кўринишда ёзиш мумкин. Бу (10.18) система кўрилаётган ҳолда (10.17) системанинг *каноник* кўриниши дейилади.

б) A матрицанинг хос сонлари қўшма комплекс. Уларни $\lambda_1=\mu+i\nu$, $\lambda_2=\mu-i\nu$, $\nu\neq0$ дейлик. Аввало (10.22) қийматлардан фойдалансак, (10.19) алмаштиришни бундай ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} y_1=a_{21}x_1-(a_{11}-\lambda_1)x_2, \\ y_2=a_{21}x_1-(a_{11}-\lambda_2)x_2. \end{cases}$$

Шу алмаштириш формулалари λ_1, λ_2 лар комплекс бўлганда ҳам ўринли. λ_1 ва λ_2 лар ўрнига ўз ифодаларини қўямиз:

$$\begin{cases} y_1=a_{21}x_1-(a_{11}-\mu-i\nu)x_2, \\ y_2=a_{21}x_1-(a_{11}-\mu+i\nu)x_2. \end{cases} \qquad (10.23)$$

Бундан, агар

$$\begin{cases} y_1 = u_1 + iu_2, \\ y_2 = u_1 - iu_2 \end{cases}$$

деб белгиласак,

$$\begin{cases} u_1 = a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu)x_2, \\ u_2 = \nu x_2 \end{cases} \tag{10.24}$$

келиб чиқади. Содда ҳисоблашлар ёрдамида (10.18), (10.23) ва (10.24) ларга кўра қуйидагига эгамиз:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{du_1}{dt} + i\frac{du_2}{dt} = (\mu + i\nu)y_1,$$

$$\frac{du_1}{dt} + i\frac{du_2}{dt} = (\mu + i\nu)[a_{21}x_1 - (a_{11} - \mu - i\nu)x_2] =$$
$$= (\mu u_1 - \nu u_2) + i(\nu u_1 + \mu u_2).$$

Шундай қилиб, ушбу

$$\frac{du_1}{dt} + i\frac{du_2}{dt} = (\mu u_1 - \nu u_2) + i(\nu u_1 + \mu u_2)$$

тенгликдан

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = \mu u_1 - \nu u_2, \\ \dfrac{du_2}{dt} = \nu u_1 + \mu u_2 \end{cases} \tag{10.25}$$

муносабатларни ҳосил қиламиз. Шу (10.25) система берилган системанинг хос сонлар комплекс бўлган ҳолда каноник кўринишидан иборат.

Албатта, (10.25) системани интеграллаб, (10.24) формулалар орқали $x_1(t)$ ва $x_2(t)$ ечим топилади.

В) *А* матрицанинг хос сонлари ўзаро тенг ва нолдан фарқли. Қўрилаётган ҳолда $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$. $D(\lambda) = 0$ тенгламадан $\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$ экани келиб чиқади. Бу ҳолда ҳам *а*) ҳолдаги каби мулоҳазалар юритиб, берилган системани унинг коэффициентларига қараб хусусан ушбу

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_1 (y_1 + y_2) \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_1 y_2 \end{cases} \tag{10.26}$$

каноник кўринишга келтириш мумкин.

г) *А* матрицанинг хос сонлари тенг ва нолдан иборат, яъни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Бу ҳолда $D(\lambda_{1,2}) = 0$ муносабатдан $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12}a_{21} = 0$, $a_{11} = a_{21} = -a_{12} = -a_{22} = a$ экани келиб чиқади. Бу ҳолда каноник кўриниш қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = a(x_1 - x_2) \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \left[\begin{array}{l} \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ y_1 = y_2 = x_1 - x_2 \end{array}\right],$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{12} x_2, \\ \dot{x}_2 = 0, \\ a_{21} = 0, \ a_{12} \neq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = a_{21} x_1, \\ a_{12} = 0, \ a_{21} \neq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0, \\ a_{12} = a_{21} = 0. \end{cases} \tag{10.27}$$

Юқорида биз чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли системанинг кўринишини унинг хос сонларига қараб соддалаштириш билан шуғулландик. Энди каноник кўринишда ёзилган иккинчи тартибли чизиқли системаларнинг траекторияларини ҳолатлар текислигида ўрганамиз.

2. Иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли системанинг ҳолатлар текислиги. Хос сонлар ҳақиқий ва комплекс бўлган ҳолларни алоҳида текширамиз.

А. *А матрицанинг хос сонлари ҳақиқий, ҳар хил ва нолдан фарқли.* Хос сонларни λ_1 ва λ_2 десак, уларга мос келган чизиқли эркли хос векторларни топиш мумкин (9-боб, 4-§ га қаранг). Шунинг учун (10.17) системанинг умумий ечими

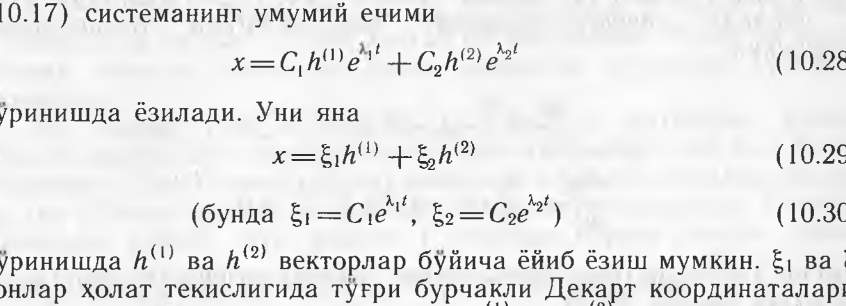
$$x = C_1 h^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 h^{(2)} e^{\lambda_2 t} \tag{10.28}$$

кўринишда ёзилади. Уни яна

$$x = \xi_1 h^{(1)} + \xi_2 h^{(2)} \tag{10.29}$$

$$(\text{бунда } \xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \ \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}) \tag{10.30}$$

кўринишда $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар бўйича ёйиб ёзиш мумкин. ξ_1 ва ξ_2 сонлар ҳолат текислигида тўғри бурчакли Декарт координаталаридан иборат бўлиши шарт эмас, бу $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар бўйича йўналган ўқларга боғлиқ. Ҳолатлар текислигини P дейлик. Унда ξ_1 ва ξ_2 ўқлар $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар бўйича йўналган бўлади (44-чизма). Аффин алмаштириш ёрдамида P ҳолат текислигини шундай



44-чизма

P^* текисликка акслантириш мумкинки, унда $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар ўзаро перпендикуляр e_1 ва e_2 бирлик векторларга ўтади, P текисликнинг (ξ_1, ξ_2) нуқтаси P^* текисликнинг тўғри бурчакли декарт координаталарига ўтади, яъни P да $x=\xi_1 h^{(1)}+\xi_2 h^{(2)}$ бўлса, P^* да $x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2$, $e_1 \perp e_2$ бўлади. Қурилаётган ҳолда (10.17) системани каноник кўринишда ёзиш мумкин ((10.18) га қаранг). (10.18) системанинг траекториялари P^* текисликда чизилади, чунки унинг хос векторлари (1,0) ва (0,1) дан иборат.

Энди (10.18) системанинг траекторияларини тасвирлашга ўтамиз. Аввал $|\lambda_1|<|\lambda_2|$ ва $\lambda_2<\lambda_1<0$ ёки $\lambda_2>\lambda_1>0$ тенгсизликлар ўринли бўлсин. (10.30) дан кўриниб турибдики, биринчи чоракда чизилган траекториялар ёрдамида қолган чоракдаги траекторияларни ҳам ёзиш мумкин. Ундан ташқари, $\lambda_2<\lambda_1<0$ бўлган ҳолда $C_1\neq 0$, $C_2=0$ бўлса, $\xi_1=C_1e^{\lambda_1 t}$, $\xi_2=0$, яъни ξ_1 ўқига эгамиз. Унда $C_1>0$ бўлганда ҳаракат ўнгдан чапга, $C_1<0$ бўлганда эса чапдан ўнгга бўлади. Бошқача айтганда, $t\to+\infty$ да C нинг ишорасидан қатъи назар, $\lim\limits_{t\to+\infty}\xi_1=\lim\limits_{t\to+\infty}C_1e^{\lambda_1 t}=0$ ва координата бошидан икки томонда ҳаракат шу нуқтага йўналган бўлади. Худди шу хусусият ξ_2 ўқига ҳам тегишли (45-чизма). Энди $C_1>0$, $C_2>0$ бўлганда, яъни I чоракда траекторияларнинг қавариқлигини текширайлик. Равшанки,

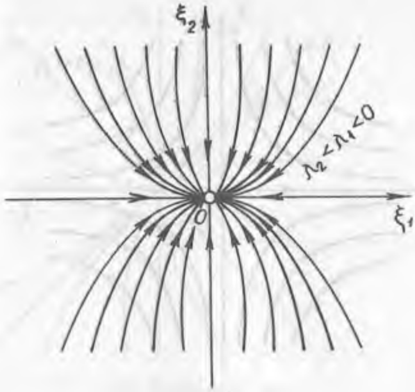
$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1}=\frac{C_2}{C_1}(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t},$$

$$\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2}=\frac{C_2}{C_1}(\lambda_2-\lambda_1)^2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}>0.$$

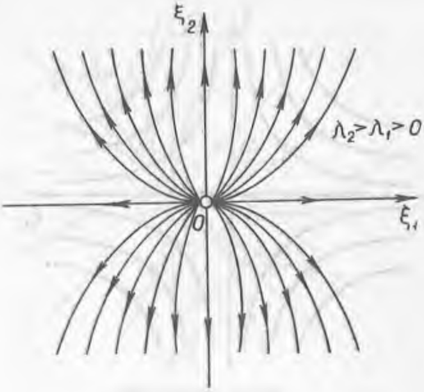
Бундан I чоракда траекторияларнинг қавариқлиги пастга қараганлиги келиб чиқади. Ушбу

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{d\xi_2}{d\xi_1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{C_2}{C_1}(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}=0$$

муносабатдан $t\to+\infty$ да траекториялар абсцисса ўқига уриниши чиқади. I чоракда $\frac{d\xi_1}{dt}=C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}<0$, $\frac{d\xi_2}{dt}=C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}<0$ бўлгани учун ξ_1 ва ξ_2 лар t ортиши билан камаяди ва демак, ҳаракат юқоридан пастга ҳамда ўнгдан чапга йўналган бўлади (45-чизма). Траекториялар чекли вақтда координата бошига кела олмайди. Координата боши берилган система учун ягона мувозанат нуқтасидан иборат бўлиб, у мустақил ечимдир. Қолган чораклардаги траекторияларни шу чизилган траекториялардан уларни ξ_1 ва ξ_2 ўқларга нисбатан симметрик айлантириш ёрдамида ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, бутун текисликда траекториялар чизилди дейиш мумкин (45-чизма). $\lambda_2>\lambda_1>0$ бўлганда ҳам худди шу усул билан траекториялар чизилади. Траекториялар аввалгисидан фарқ қилмаса-да, уларда



45- чизма



46- чизма

йўналиш тескари бўлади (46-чизма). Хос сонларнинг $\lambda_2<\lambda_1<0$ қийматларига мос манзара (45-чизма) *турғун тугун*, $\lambda_2>\lambda_1>0$ қийматларига мос манзара эса (46-чизма) *нотурғун тугун* дейилади. Эслатиб ўтамизки, траекториялар $\lambda_2<\lambda_1<0$ бўлганда эса $t\to+\infty$ да, $\lambda_2>\lambda_1>0$ бўлганда эса $t\to-\infty$ да P^* текисликда ξ_1 ўқига уринади; P текисликда бу ҳол λ_1 га мос келган хос векторнинг йўналиши билан боғлиқ бўлади. Айтилган хосса мисоллар қуришда қулайлик туғдиради.

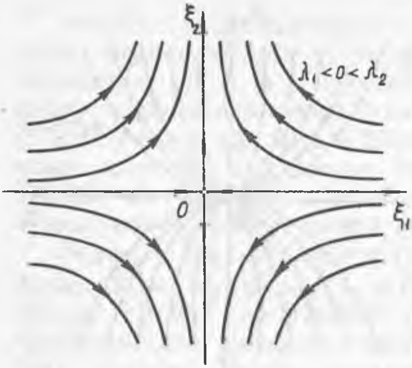
Хос сонлар учун $\lambda_1<0<\lambda_2$ $(\lambda_2<0<\lambda_1)$ тенгсизлик ўринли бўлсин дейлик. Бу ҳолда хос сонлар турли ишораларга эга. $\lambda_1<0<\lambda_2$ бўлганда ξ_1 ўқи бўйича ҳаракат координата бошига йўналган бўлиб, ξ_2 ўқи бўйича ҳаракат координата бошидан узоқлашади. Траекторияларни қуриш учун уларни I чоракда қуриш етарли. Аввал қавариқликни текширайлик. $\lambda_2-\lambda_1>0$ бўлгани учун $\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2}>0$ бўлади, демак, I чоракда қавариқлик пастга қараган. Шунга ўхшаш ушбу

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{d\xi_2}{d\xi_1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{C_2}{C_1}(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}=+\infty,$$

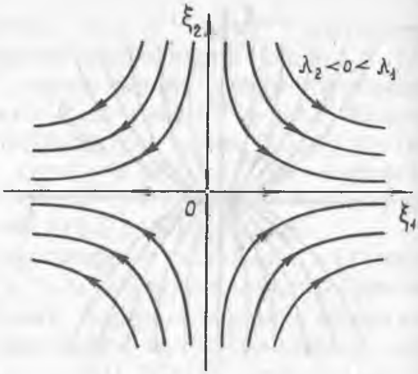
$$\lim_{t\to-\infty}\frac{d\xi_2}{d\xi_1}=\lim_{t\to-\infty}\frac{C_2}{C_1}(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}=0,\qquad \lim_{t\to+\infty}\xi_1(t)=0,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\xi_2(t)=+\infty$$

муносабатларга эгамиз. Бундан I чоракдаги траекториялар параболаларга ўхшашлиги ва уларда ҳаракат ўнгдан чапга ва пастдан юқорига йўналганлиги келиб чиқади (47-чизма). Акслантириш ёрдамида траекторияларни бошқа чоракларда ҳам чизамиз. Агар хос сонлар $\lambda_2<0<\lambda_1$ тенгсизликни қаноатлантирса, юқоридаги усул билан яна траекторияларни қуриш мумкин (48-чизма). Ҳар икки ҳолда ҳам ҳосил бўлган манзара *эгар* дейилади.



47- чизма



48- чизма

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1+x_2\\ \dot{x}_2=4x_1-3x_2\end{cases}$$

системанинг траекториялари чизилсин ва мувозанат нуқтаси атрофидаги манзара аниқлансин. А матрицани ёзамиз: $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & -3\end{pmatrix}$. Бу матрицанинг хос сонларини топамиз: $\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0$ ёки $(3+\lambda)^2-4=0$. Бундан $3+\lambda=\pm 2$ ёки $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-5$. Равшанки, $\lambda_2<\lambda_1$, $|\lambda_2|>|\lambda_1|$. Хос сонлар ҳар хил ва манфий бўлгани учун биз *турғун тугунга* эгамиз. Энди шу манзарани чизайлик. Унинг учун хос векторларни топиш керак. $\lambda_1=-1$ га мос хос вектор $h^{(1)}=\begin{pmatrix}h_1^{(1)}\\ h_2^{(1)}\end{pmatrix}$ ушбу $Ah^{(1)}=(-1)h^{(1)}$ ёки $\begin{pmatrix}-3h_1^{(1)}+h_2^{(1)}\\ 4h_1^{(1)}-3h_2^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-h_1^{(1)}\\ -h_2^{(1)}\end{pmatrix}$ системадан топилади. Равшанки, биз $-2h_1^{(1)}+$ $+h_2^{(1)}=0$ тенгламага эгамиз ва ундан $h_1^{(1)}=1$, $h_2^{(1)}=2$ деб олиш мумкин. Агар $h_1^{(1)}=-1$, $h_2^{(1)}=-2$ десак ҳам ўша йўналиш чиқарилади. Шунга ўхшаш $\lambda_2=-5$ хос сонга мос хос вектор топилади:

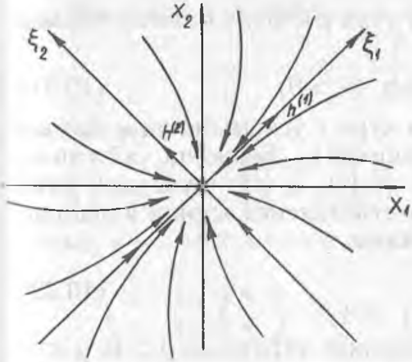
$$h^{(2)}=\begin{pmatrix}h_1^{(2)}\\ h_2^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}.$$

Энди текисликда координата бошидан шу векторлар йўналишида тўғри чизиқлар ўтказамиз. Абсолют қиймати бўйича кичик хос сон $\lambda_1=-1$ бўлгани учун траекториялар шу хос сонга мос $h^{(1)}$ вектор йўналишига $t\to+\infty$ да уринади (49-чизма).

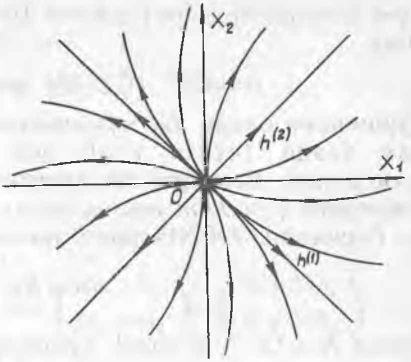
2. Ушбу

$$\begin{cases}\dot{x}_1=3x_1+x_2\\ \dot{x}_2=4x_1+3x_2\end{cases}$$

система учун $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ ва хос сонлари $\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$ тенгламадан топилади: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$. $\lambda_1=1$ га мос хос вектор $h^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$ ва $\lambda_2=5$ га мос хос вектор эса



49- чизма



50- чизма

$h^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ дан иборат. Хос сонлар турли ва мусбат бўлгани учун биз нотурғун *тугунга* эгамиз. Траекториялар $t\to-\infty$ да $h^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ вектор йўналишига координата бошида уринади (50-чизма).

Б. *А матрицанинг хос сонлари комплекс.* Бу ҳолда хос сонлар қўшма комплекс бўлиб, уларни $\lambda=\mu+i\nu$, $\bar{\lambda}=\mu-i\nu$, $\nu\neq0$ деб белгилаймиз. ν ни доим $\nu>0$ деб қараш мумкин. Шу хос сонларга мос хос векторлар ҳам қўшма комплекс бўлади. Агар $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ лар ҳақиқий вектор бўлса, мос хос векторларни h ва h деб белгиланади ва бундай аниқланади:

$$h=\frac{1}{2}(h^{(1)}-ih^{(2)}),$$

бунда $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ лар чизиқли эркли, акс ҳолда h ва $\bar{h}$ лар чизиқли боғлиқ бўлар эди. Шунинг учун $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ ҳақиқий векторларни P текисликда хос йўналишлар деб қараш мумкин.

Энди P^* текисликда траекторияларни қурамиз. Қурилаётган ҳолда берилган системанинг каноник шакли маълум. Уни ёзайлик ((10.25) га қаранг):

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1=\mu\xi_1-\nu\xi_2,\\ \dot{\xi}_2=\nu\xi_1+\mu\xi_2.\end{cases}\qquad(10.25)$$

Бу системанинг умумий ечими

$$\begin{cases}\xi_1(t)=Ce^{\mu t}\cos(\nu t+\gamma),\\ \xi_2(t)=Ce^{\mu t}\sin(\nu t+\gamma)\end{cases}$$

кўринишда ёзилади (C ва γ — ихтиёрий ўзгармаслар). Унда t ни параметр деб қарасак, биз траекторияларнинг параметрик тенгламасига эгамиз. Уларни қуриш учун қутб координаталарига ўтиш қулайлик туғдиради. Шу мақсадда $\xi_1=\rho\cos\varphi$, $\xi_2=\rho\sin\varphi$ (ρ, φ —

Охирги икки тенглик ўзаро эквивалент. Шунинг учун $h_1=10$, $h_2=1+3i$ деб танланиши мумкин. Энди $h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ вектор учун қуйидагига эгамиз:

$$h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 1+3i \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right].$$

Бундан ҳақиқий хос векторлар сифатида

$$h^{(1)}=\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

векторларни, ёки бари бир,

$$h^{(1)}=\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

векторни олиш мумкин.

В. *А матрицанинг хос сонлари тенг ва нолдан фарқли.* A матрицанинг хос сонини λ дейлик. Унга мос хос векторлар учун икки ҳол юз бериши мумкин:

1-ҳол. P текисликда шундай иккита чизиқли эркли $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар мавжудки, улар учун ушбу

$$Ah^{(1)}=\lambda h^{(1)}, \ Ah^{(2)}=\lambda h^{(2)} \tag{10.33}$$

тенгликлар ўринли.

2-ҳол. P текисликда шундай иккита чизиқли эркли $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ векторлар мавжудки, улар учун ушбу

$$Ah^{(1)}=\lambda h^{(1)}, \ Ah^{(2)}=\lambda h^{(2)}+h^{(1)} \tag{10.34}$$

тенгликлар ўринли.

Шу (10.33) ёки (10.34) тенгликларни қаноатлантирадиган $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ чизиқли эркли векторларнинг (базиснинг) мавжудлигини кўрсатамиз.

$h^{(1)}$ — A матрицанинг хос вектори бўлиб, $h^{(2)}$ — унга коллинеар бўлмаган ихтиёрий вектор бўлсин. У ҳолда

$$Ah^{(1)}=\lambda h^{(1)} \text{ ва } Ah^{(2)}=\alpha h^{(1)}+\beta h^{(2)}$$

тенгликларга эгамиз. Улардан $h^{(1)}$ ва $h^{(2)}$ ларни топиш учун система сифатида фойдаланиш мумкин. Бу системанинг матрицаси

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

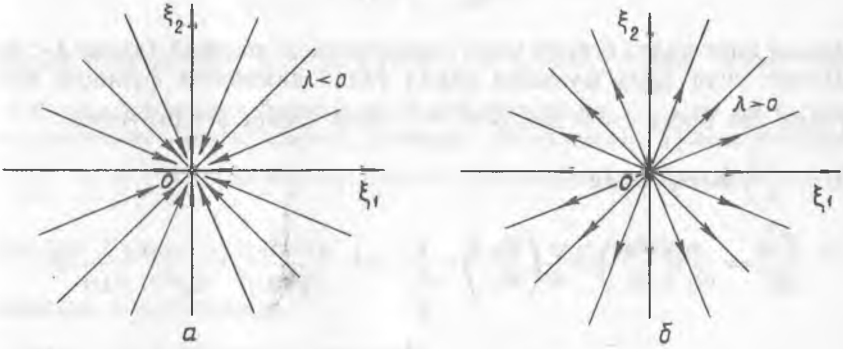
бўлиб, хос сонлари λ ва β дан иборат. Шунинг учун $\beta=\lambda$. Агар $\alpha=0$ бўлса, (10.33) тенгликларга эгамиз. $\alpha\neq0$ бўлганда эса (10.34) тенгликларда $h^{(1)}$ векторни унга коллинеар $\alpha h^{(1)}$ билан алмаштирамиз. Шу билан (10.33) ёки (10.34) ларни қаноатлантирадиган базис векторларнинг мавжудлиги исбот этилди.

1-ҳолда умумий ечим

$$x=C_1h^{(1)}e^{\lambda t}+C_2h^{(2)}e^{\lambda t}=x^0e^{\lambda t} \tag{10.35}$$

кўринишда ёзилади.

Бу ечим учун $x(0)=x^0$. Биз $\lambda\neq0$ ҳолни кўраётганимиз учун (10.35) ечим координата бошидан чиқадиган ярим тўғри чизиқларни ифодалайди. Уларда ҳаракат $\lambda<0$ бўлганда координата бошига йўналган бўлиб, $\lambda>0$ бўлганда эса йўналиш бунинг акси бўлади (54-чизма).



54- чизма

Юқорида кўрилган ҳолларда $\lambda<0$ бўлганда *турғун туғилма тугун*, $\lambda>0$ бўлганда эса *нотурғун туғилма тугун* манзараларига эгамиз.

2- ҳолда умумий ечим

$$x=C_1h^{(1)}e^{\lambda t}+C_2(h^{(1)}t+h^{(2)})e^{\lambda t}$$

кўринишда ёзилади. Буни яна базислар бўйича ёйиб ёзиш ҳам мумкин:

$$x=(C_1+C_2t)e^{\lambda t}h^{(1)}+C_2e^{\lambda t}h^{(2)}.$$

Бундан P текисликда траекториялар тенгламасини топамиз:

$$\xi_1=(C_1+C_2t)e^{\lambda t},\qquad \xi_2=C_2e^{\lambda t}. \qquad (10.36)$$

Бу траекторияларни P^* текисликда қурамиз.

Аввал $\lambda<0$ бўлсин. (10.36) формулалардан C_1 ни $-C_1$ га, C_2 ни $-C_2$ га алмаштирсак, координата бошига нисбатан симметрия ҳосил бўлади. Шунинг учун траекторияларни юқори ярим текисликда чизамиз. Сўнгра ундан пастки ярим текисликдаги траекторияларни ҳосил қилиш мумкин.

Дастлаб $C_2=0$, $C_1\neq0$ дейлик. У ҳолда (10.36) дан $\xi_1=C_1e^{\lambda t}$, $\xi_2=0$. Бундан $\lambda<0$ бўлгани учун $C_1<0$ бўлганда чап ярим абсцисса ўқига, $C_1>0$ бўлганда эса ўнг ярим абсцисса ўқига траектория сифатида эгамиз. Чап ярим ўқда ҳаракат чапдан ўнгга, ўнг ярим ўқда эса ўнгдан чапга йўналган бўлади.

Энди $C_1=0$, $C_2<0$ бўлсин. (10.36) дан ушбуга

$$\xi_1=C_2te^{\lambda t},\ \xi_2=C_2e^{\lambda t},\ C_2>0 \qquad (10.37)$$

эгамиз. Агар $t=0$ бўлса, бундан $(0,\ C_2)$ нуқтани топамиз. Энди t ўзгарувчи $t>0$ қийматларни қабул қила бошласа, $(\xi_1,\ \xi_2)$

нуқтанинг ҳаракатини ва демак, траекториясини аниқлаймиз. Албатта, (10.37) дан кўриниб турибдики, t нинг нолга етарли яқин қийматларида $\xi_1>0$, $\xi_2>0$ ва (ξ_1, ξ_2) нуқта $(0, C_2)$ нуқтадан ўнгга ҳаракат қилиб, I чоракка киради. Қуйидаги

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1}=\frac{\lambda}{1+\lambda t}$$

ифода t нинг нолга етарли яқин қийматларида манфий (чунки $\lambda<0$). Шунинг учун $\xi_2(t)$ функция аввал ўзини камаювчи функция каби тутади. Бу хосса $t=0$ дан $t_*=-\frac{1}{\lambda}$ гача давом этади. Аммо $\left(0,\ -\frac{1}{\lambda}\right)$ интервалда

$$\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2}=\frac{d}{d\xi_1}\left(\frac{d\xi_2}{d\xi_1}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi_2}{d\xi_1}\right)\cdot\frac{1}{\frac{d\xi_1}{dt}}=-\frac{\lambda^2}{(1+\lambda t)^2}\cdot\frac{1}{C_2e^{\lambda t}(1+\lambda t)}=$$

$$=-\frac{\lambda^2}{C_2(1+\lambda t)^3e^{\lambda t}}<0$$

бўлгани учун шу интервалда қавариқлик юқорига қараган бўлади. Равшанки, $t_*=-\frac{1}{\lambda}$ моментга мос нуқтада траекторияга ўтказилган уринма вертикал. Шундай қилиб, $(0, C_2)$ нуқтадан $t=0$ да ҳаракат бошланиб, I чоракда чапдан ўнгга ва юқоридан пастга йўналган бўлади, бу харакат $(\xi_1(t^*), \xi_2(t^*))=\left(-\frac{C_2}{\lambda}e^{-1}, C_2e^{-1}\right)$ нуқтагача давом этади.

Ниҳоят, $t>-\frac{1}{\lambda}$ бўлганда нуқтанинг ҳаракатини ўрганамиз. (10.37) га кўра $\lambda<0$ бўлгани учун ξ_2 функция камаювчи. Бу хосса t нинг барча $t>0$ қийматларида тўғри. Энди ξ_1 нинг t бўйича ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\frac{d\xi_1}{dt}=C_2e^{\lambda t}(1+lt).$$

Бундан

$$\frac{d\xi_1}{dt}\begin{cases}>0, \text{ агар } 0\leqslant t<-\frac{1}{\lambda},\\ <0, \text{ агар } t>-\frac{1}{\lambda}.\end{cases}$$

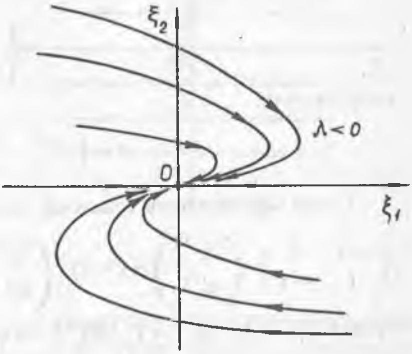
Демак, $t_*=-\frac{1}{\lambda}$ моментдан бошлаб, (ξ_1, ξ_2) нуқта ўнгдан чапга ва юқоридан пастга ҳаракат қилади. Қуйидаги лимитларни ҳисоблаймиз (Лопиталь қоидасини қўллаб):

$$\lim_{t\to+\infty}\xi_1(t)=\lim_{t\to+\infty}C_2te^{\lambda t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{C_2t}{e^{-\lambda t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{C_2}{-\lambda e^{-\lambda t}}=0;$$

$$\lim_{t\to+\infty}\xi_2(t)=\lim_{t\to+\infty}C_2e^{\lambda t}=0.$$

Бундан кўринадики, (ξ_1, ξ_2) нуқта вақт $t_*=-\frac{1}{\lambda}$ дан ортиб борган сари координата бошига яқинлаб боради ва $t\to+\infty$ да ξ_1 ўқига нуқтанинг траекторияси уринади (55-чизма). Траекториянинг $\left(-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right)$ интервалга мос келган бўлагининг қавариқлиги пастга қараган. Бунинг тўғрилиги $\left(-\frac{1}{\lambda}, +\infty\right)$ интервалда $\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2}>0$ эканидан келиб чиқади.

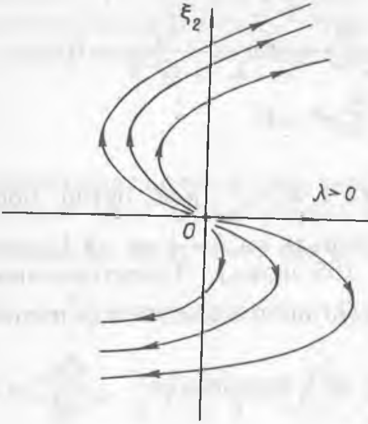
Энди $t<0$ бўлганда траекторияни текширайлик. Равшанки, бу ҳолда t ўзгарувчи 0 дан $-\infty$ гача камайиб борса, нуқта ҳам орқага, яъни ўнгдан чапга ва пастдан юқорига II чоракда ҳаракат қилади. (10.37) га кўра ўнгдан чапга пастдан юқорига қараганда тезроқ ҳаракат қилади (55-чизма). Энди агар C_2 га барча мусбат қийматлар берсак, тегишли траекториялар юқори ярим текисликни тўла қоплайди (55- чизма).



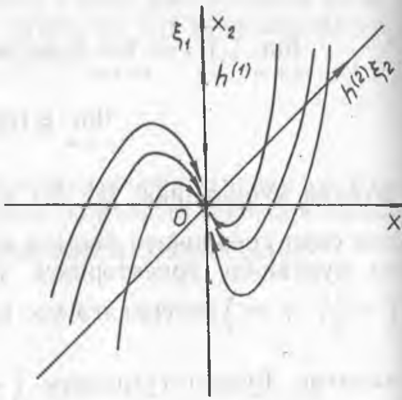
55- чизма

Агар (10.36) формулаларда C_1 ихтиёрий бўлса ҳам худди шу мулоҳазалар ўринли бўлади, яъни $(C_1+C_2t)e^{\lambda t}$ ва $C_2te^{\lambda t}$ функцияларнинг дифференциал хоссалари бир хил. Хусусан, бу ҳолда ҳаракат (C_1, C_2) нуқтадан бошланади. $\left(-\infty, -\frac{C_2+\lambda C_1}{\lambda C_2}\right)$ интервалда қавариқлик юқорига, $\left(-\frac{C_2+\lambda C_1}{\lambda C_2}, +\infty\right)$ интервалда эса пастга қараган бўлади. C_1 ва $C_2>0$ ларга ихтиёрий қийматлар берсак, мос равишда қурилган траекториялар юқори ярим текисликни тўлдиради.

Агар $C_2<0$ ва C_1 — ихтиёрий ўзгармаслар учун юқоридагидек мулоҳазалар юритсак, пастки ярим текисликда траекториялар қурилади. Шундай қилиб, P^* текисликни тўла қоплайдиган траекториялар чизилади. Бу ҳолда биз *турғун туғилма тугун* манзарасига эгамиз. Агар $\lambda>0$ бўлса ҳам мулоҳазалар ўхшаш (56-чизма). Бунда нотурғун *туғилма тугун* манзараси қурилади.



56- чизма



57- чизма

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

система учун

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ва } \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Содда ҳисоблашлар ёрдамида топамиз:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{ёки} \quad \begin{pmatrix} -h_1^{(1)} \\ h_1^{(1)} - h_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1^{(1)} \\ -h_2^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Бундан $h_1^{(1)} = 0$, $h_2^{(1)} = 1$ ($h_2^{(1)}$— ихтиёрийлигидан). Демак,

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

вектори ушбу

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

тенгликдан топилади. Уни соддалаштирсак,

$$\begin{pmatrix} -h_2^{(2)} \\ h_1^{(2)} - h_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1^{(2)} \\ -h_2^{(2)} + 1 \end{pmatrix}$$

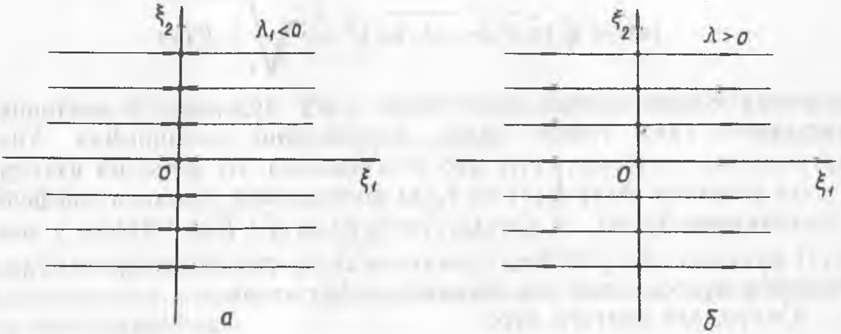
тенгликка келади. Бундан $h_1^{(2)} = 1$, $h_2^{(2)} = 1$ ($h_2^{(2)}$— ихтиёрийлигидан). Демак, $h^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Шундай қилиб, базис сифатида $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ва $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ векторларга эгамиз. $\lambda = -1$ бўлгани учун бу базислар асосида турғун туғилма тугун манзарасини чизамиз (57- чизма).

Г. *А матрицанинг хос сонларидан камида биттаси нолга тенг.* Бунда икки ҳолни алоҳида кўрамиз.

1-ҳол. Фақат битта хос сон нолга тенг, хусусан, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда ечимни

$$x = \xi_1 h^{(1)} + \xi_2 h^{(2)}$$

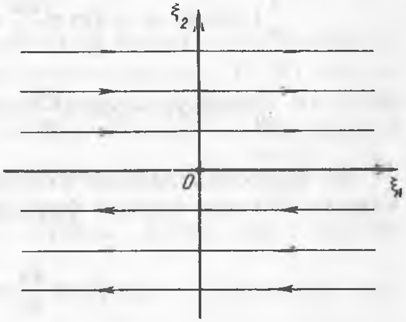
кўринишда ёзилади ва $\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$; $\xi_2 = C_2 = \text{const}$. Агар $\lambda_1 < 0$ бўлса, ҳаракат $\xi_2 = C_2$ горизонтал чизиғи бўйлаб ҳар икки томондан ξ_2 ўқига томон йўналган бўлади. ξ_2 ўқининг, яъни $\xi_1 = 0$ тўғри чизиғининг ҳамма нуқталари мувозанат ҳолатидан иборат (58, а-чизма).



58- чизма

Агар $\lambda_1 > 0$ бўлса, ҳаракат юқоридагига қараганда тескари йўналган бўлади (58, б-чизма). Бу ҳолда ҳам $\xi_1 = 0$ тўғри чизиғи мувозанат ҳолатида бўлади. Ҳар икки ҳолда ҳам $\xi_1 = 0$ бўлганда $x = C_2 h^{(2)} = \text{const}$ га эгамиз. Бундан юқоридаги фикримизнинг далили кўриниб турибди.

2-ҳол. Икки хос сон ҳам нолга тенг. Бу ҳолда ечим 1) $x = C_1 h^{(1)} + C_2 h^{(2)} = \text{const}$ каби ёзилади. Биз P текисликнинг барча нуқталари мувозанат нуқтаси бўлган ҳолга эгамиз. Бу A матрицанинг барча элементлари нолга тенг бўлгандагина содир бўлади. 2) $x = (C_1 + C_2 t) h^{(1)} + C_2 h^{(2)}$, $\xi_1 = C_1 + C_2 t$, $\xi_2 = C_2$ каби ёзилади. Агар $C_2 = 0$ бўлса ξ_1 ўқи мувозанат нуқталаридан иборат бўлади. ξ_1 ўқдан юқорида $C_2 > 0$ ва ҳаракат чапдан ўнгга, пастда эса $C_2 < 0$ ва ҳаракат ўнгдан чапга йўналган бўлади (59- чизма).



59- чизма

10.5-§. МУХТОР СИСТЕМА ҲОЛАТ ТЕЗЛИГИ ВЕКТОРИНИНГ ҲАРАКАТИ ҲАҚИДА

Мазкур параграфда иккинчи тартибли мухтор системаларни ўрганишда муҳим роль ўйнайдиган ҳолат тезлиги векторининг ҳаракатини текширамиз. Бу вектор вақт ўтиши билан, умуман айтганда, ё у ёки бу йўналишда бурилади, узунлигини ҳам ўзгартиради. (10.2) системани кўрайлик. Унда $\dot{x}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}$ вектор ҳолат тезлиги векторидир. Унинг модули ҳар бир моментда

$$|\dot{x}|=\sqrt{(\dot{x}_1)^2+\ldots+(\dot{x}_n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x)}$$

формула билан аниқланади. Энди $n=2$ бўлганда $\dot{x}$ векторнинг аргументи вақт ўтиши билан бурилишини текширамиз. Унинг аргументини $\alpha(t)=\arg\dot{x}(t)$ деб белгилаймиз. Бу функция ихтиёрий t учун узлуксиз. Агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, $(\dot{x}_1)^2+(\dot{x}_2)^2\neq 0$, яъни $f_1^2+f_2^2\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\alpha(t)$ функция ҳам (t бўйича) узлуксиз дифференциалланувчи бўлади. Кейинги мулоҳазалар шу тасдиқни исбот этади.

Юқоридаги белгига кўра

$$\cos\alpha=\frac{f_1}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}},\qquad \sin\alpha=\frac{f_2}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}.$$

Содда ҳисоблашлар ёрдамида $\cos\alpha$ ва $\sin\alpha$ ларни дифференциаллаб, топамиз:

$$\frac{d}{dt}(\cos\alpha)=-\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}=\frac{f_2(\dot{f}_1f_2-f_1\dot{f}_2)}{(f_1^2+f_2^2)^{3/2}}=\quad\sin\alpha\frac{f_1\dot{f}_2-\dot{f}_1f_2}{f_1^2+f_2^2},$$

$$\frac{d}{dt}(\sin\alpha)=\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}=\frac{f_2(f_1\dot{f}_2-\dot{f}_1f_2)}{(f_1^2+f_2^2)^{3/2}}=\cos\alpha\frac{f_1\dot{f}_2-\dot{f}_1f_2}{f_1^2+f_2^2},$$

Бу муносабатлардан ихтиёрий t моментда $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ лардан камида биттаси нолдан фарқли. Шунинг учун қуйидаги

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}=-\sin\alpha\frac{f_1\dot{f}_2-\dot{f}_1f_2}{f_1^2+f_2^2},$$

$$\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}=\cos\alpha\,\frac{f_1\dot{f}_2-\dot{f}_1f_2}{f_1^2+f_2^2}$$

тенгликлардан бирортасида ё $\sin\alpha$ га ё $\cos\alpha$ га қисқартириш мумкин. Натижада изланган формулага келамиз:

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{d}{dt}\arg\dot{x}=\frac{\dot{x}_1\ddot{x}_2-\ddot{x}_1\dot{x}_2}{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}=\frac{f_1\dot{f}_2-\dot{f}_1f_2}{f_1^2+f_2^2}.$$

Бу формула бўйича баъзи системалар учун ҳолат тезлик векторини ўрганайлик.

Ушбу

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda_1x_1,\\ \dot{x}_2=\lambda_2x_2,\ \lambda_1\neq\lambda_2\end{cases}$$

система учун $\ddot{x}_1=\lambda_1\dot{x}_1$, $\ddot{x}_2=\lambda_2\dot{x}_2$ ва

$$\frac{d}{dt}\alpha=\frac{d}{dt}\arg\dot{x}=\frac{\dot{x}_1(\lambda_2\dot{x}_2)-(\lambda_1\dot{x}_1)\dot{x}_2}{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}=$$

$$=(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}=(\lambda_2-\lambda_1)\cos\alpha\sin\alpha.$$

Шундай қилиб, $\alpha=\arg\dot{x}$ учун дифференциал тенгламага эгамиз:

$$\dot{\alpha}=(\lambda_2-\lambda_1)\cos\alpha\sin\alpha \tag{10.38}$$

ёки

$$\dot{\alpha}=\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)\sin 2\alpha.$$

Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама ҳосил бўлди. Уни интеграллаймиз:

$$\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}\alpha|=\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1)t+\frac{1}{2}\ln|C|$$

ёки

$$\operatorname{tg}\alpha=Ce^{(\lambda_2-\lambda_1)t}.$$

Қўллашга (10.38) тенглама қулайдир. Агар бирор $t=t_0$ моментда $\alpha(t_0)=0$ (ёки $\alpha(t_0)=\pi$) бўлса, шу бошланғич шартни (10.38) тенгламанинг $\alpha(t)\equiv0$, $(\alpha(t)\equiv\pi)$ $t>t_0$ ечими қаноатлантиради. Бу *тугун* манзарасида x_1 ўқдаги ҳаракатга мос келади. Ҳақиқатан, горизонтал ўқда ҳаракат қилинса, унда $\alpha(t)=\mathrm{const}(\alpha(t)\equiv\pi)$ ва $\frac{d\alpha(t)}{dt}\equiv0$. Агар $t=t_0$ да $\alpha(t_0)=\frac{\pi}{2}\left(\alpha(t_0)=\frac{3\pi}{2}\right)$ бўлса, $t>t_0$ да $\alpha(t)\equiv\equiv\frac{\pi}{2}\left(\alpha(t)\equiv\frac{3\pi}{2}\right)$ бўлади. Бу ечимлар x_2 ўқдаги ҳаракатга мос келади. Шундай қилиб, агар бирор $t=t_0$ моментда нуқта абсцисса ўқида (ордината ўқида) ётган бўлса, у ҳолда бу нуқта t нинг t_0 дан катта барча қийматларида шу ўқда ҳаракат қилади. Бундан у ёки бу чоракда жойлашган нуқта вақт ўтиши билан шу чоракдан чиқиб кета олмаслиги келиб чиқади. $\lambda_2<\lambda_1<0$ бўлганда, равшанки, I, III чоракда $\dot{\alpha}<0$, II, IV чоракда $\dot{\alpha}>0$ тенгсизликлар ўринли. Бу турғун тугун манзарасига мансуб. Нотурғун тугун манзарасида тенгсизликлар тескари бўлади.

Энди ушбу

$$\begin{cases} \dot{x}_1=\mu x_1-\nu x_2, \\ \dot{x}_2=\nu x_1+\mu x_2, \quad \nu\neq 0 \end{cases}$$

система учун $\dot{\alpha}$ ни ҳисоблаймиз. Содда ҳисоблашлар кўрсатадики,

$$\dot{\alpha}=\frac{d}{dt}\arg\dot{x}=\frac{\dot{x}_1\ddot{x}_2-\ddot{x}_1\dot{x}_2}{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}=\frac{\dot{x}_1(\nu\dot{x}_1+\mu\dot{x}_2)-(\mu\dot{x}_1-\nu\dot{x}_2)\dot{x}_2}{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}=$$

$$=\nu\frac{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}=\nu.$$

Демак, $\dot{\alpha}=\nu\neq 0$. Шундай қилиб, кўрилаётган ҳолда $\nu>0$ бўлса, ҳолат тезлик вектори доим соат мили ҳаракатига қарши йўналишда бурилади, акс ҳолда бунга тескари йўналишда бурилади. Бу турғун ва нотурғун фокус манзараларини чизишда қўл келади.

11-боб

ТУРҒУНЛИК НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

11.1-§. ТУРҒУНЛИК ҲАҚИДА

1. Қисқача тарихий маълумот. Оддий дифференциал тенгламаларни интеграллашнинг элементар усуллари *XVIII* асрда ўз равнақини топган классик математик анализдан мерос бўлиб қолди. Тенгламаларни квадратураларда интеграллаш билан шуғулланиш И. Ньютон, Г. Лейбниц ишларидан бошланиб, XIX асрнинг иккинчи ярмида С. Ли ишлари билан якунланди. XIX асрнинг биринчи ярмида дифференциал тенгламаларнинг умумий назарияси*), сўнгра дифференциал тенгламаларни тақрибий интеграллаш усуллари ривожлантирилди. Бу борада Пикарнинг кетма-кет яқинлашиш усулидан кенг фойдаланилди. Амалий математиканинг зарурати билан яратилган тақрибий интеграллаш усуллари мутахассисларни қаноатлантирмас эди, чунки ҳар бир Коши масаласи битта нуқтадан ўтадиган интеграл чизиқни тақрибий ясашдан иборат бўлиб, янги нуқта учун ҳисоблашларни такрорлашга тўғри келар эди. Шунинг учун ҳам бу усул билан дифференциал тенгламаларнинг умумий назариясини ривожлантириш мумкин эмас эди.

XIX асрнинг охирларида дифференциал тенгламаларнинг умумий назариясини равожлантириш йўлида янги усуллар яратилди. Бу усуллар биргаликда «дифференциал тенгламаларнинг сифат наза-

---

*) Дифференциал тенгламаларнинг умумий назариясини яратишда О. Коши, А. Пуанкаре, П. Пенлеве, Э. Пикар, Э. Линделёфларнинг қилган ишлари асосий ролни ўйнаган.

рияси» деб аталиб, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов номи билан чамбарчас боғланган. А. Пуанкаре нормал дифференциал тенгламани (системани) интегралламасдан, унинг ўнг томонига қараб интеграл чизиқларнинг хоссаларини ўрганишдек умумий масалани ўртага ташлади. Бу масала дифференциал тенгламалар сифат назариясининг асосий масаласи ҳисобланади.

Дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси жуда кенг бўлиб, биз ҳаракатнинг турғунлиги масаласинигина ўрганамиз.

2. Турғунлик. Турғунлик тушунчаси ҳаётда ҳар қадамда учрайди, масалан, велосипедчи ҳаракатини олайлик, у ҳаракати давомида йиқилмаслик учун рулни гоҳ чапга, гоҳ ўнгга буриб туришга мажбур бўлади. Шунга ўхшаш, дорбоз арқон устида юраётганда ўз мувозанатини сақлаш учун қўлидаги лангар чўпини қимирлатиб туради.

Ҳар икки мисолда баён этилган жараён ҳам турғунлик тушунчаси билан боғланган бўлиб, ҳаракат бирида велосипед рули билан, иккинчисида лангар чўп билан бошқарилиб туради. Агар шу бошқариш бўлмаса, велосипедчи ҳам, дорбоз ҳам албатта йиқилади*).

Велосипедчи ва дорбознинг ҳаракати дифференциал тенглама билан ифодаланиши мумкин, шунингдек, кўплаб қурилмаларнинг (машиналарнинг, асбобларнинг ва бошқаларнинг) иши ҳам дифференциал тенгламалар билан тавсифланади. Ҳамма ҳолда ҳам маъноси бўйича ўша тенгламалар чексиз кўп ечимга эга бўлса-да, тегишли жараён бирор битта ечимга мос келади. Унда мос жараённи *режим* деб юритилади. Гарчи бошланғич қийматлар шу режимга мос келмаса-да, жараён етарли узоқ давом этса, бошланғич қийматлар ўз мавқеини йўқотади ва қурилма ўз ишини маълум режимга тушириб олади. Бу режимни *стационар режим* дейилади. Мисол сифатида скаляр $\dot{x}=f(x)$ тенглама учун мувозанат ҳолатининг турғунлигини, иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли системалардаги турғун, турғун фокус ва турғун туғилма ҳолларни келтириш мумкин. Бундан ташқари, биз қуйида математик маятник ва соат маятниги ҳаракатларини шу нуқтаи назардан тушунтирамиз.

Математик маятник қуйидагидан иборат: массаси m га тенг бўлган P нуқта ўз оғирлик кучи таъсирида l радиусли K айлана ёйи бўйлаб ҳаракат қилади, бу айлана вертикал текисликда жойлашган. l — маятникнинг узунлиги дейилади. K айланада координата киритамиз, унинг энг пастки нуқтасини координата боши деб ҳисоблаймиз. P нуқтанинг ўзгарувчи координатасини $\varphi=\varphi(t)$, $\varphi(t_0)=\varphi_0$, $0<\varphi_0\leqslant\pi$ деб белгилаймиз. Шу нуқта $F=mg$ — оғирлик кучи таъсирида бўлади. Маълумки, $F=mg$ куч вертикал йўналган. Бу кучни икки ташкил этувчига ажратиш мумкин: бири K айлана нормали бўйича йўналган бўлиб, иккинчиси айлана уринмаси бўйлаб йўналган. Охирги ташкил этувчи $-mg\sin\varphi$ (бунда мусбат йўналиш

---

*) Келтирилган жараёнлар *«Оптимал бошқариш»* курсида қурилиши мумкин. Аммо велосипед рулини ёки лангарчўпнинг маълум ҳолатига мос келган ҳаракатни ўрганиш тургунлик тушунчаси билан боғланган.

φ бурчагининг ўсишига мос қилиб олинади). Агар ишқаланиш ва ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинмаса, математик маятник тенгламаси Ньютон қонунига асосан қуйидагича (60-чизма) ёзилади:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

ёки

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0. \tag{11.1}$$

Бу иккинчи тартибли чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламадан иборат. Янги ўзгарувчиларни киритиб, уни иккинчи тартибли нормал мухтор система кўринишида ёзайлик ($\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$):

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2 = -\frac{g}{l}\sin\varphi_1. \end{cases} \tag{11.2}$$

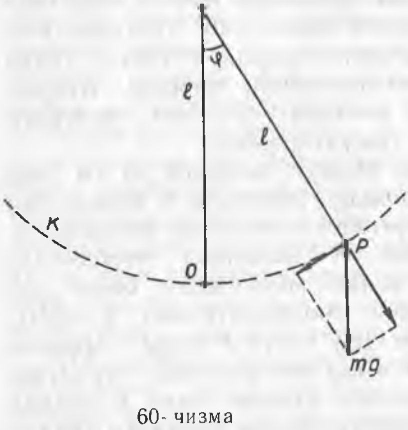
(11.2) системанинг мувозанат ҳолати

$$\begin{cases} \varphi_2 = 0, \\ \sin\varphi_1 = 0 \end{cases} \tag{11.3}$$

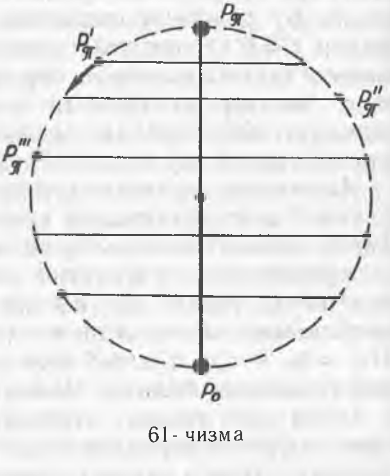
тенгламалардан аниқланади. Шу (11.3) системанинг ечимлари $(k\pi, 0)$ (k — бутун сон) кўринишда бўлади. Агар $k=0$, $k=1$ бўлса, биз ушбу

$$(0,0) \text{ ва } (\pi, 0)$$

икки мувозанат ҳолатига (нуқтасига) эга бўламиз. Улардан биринчиси маятникнинг энг қуйи P_0 ҳолатига (координата боши), иккинчиси энг юқори P_π ҳолатига мос келади (61-чизма). Назарий жиҳатдан математик маятник P_π ҳолатда туриши мумкин. Аммо P_π нуқта ўрнига унга K айлана бўйича исталганча яқин турган P'_π нуқтани олсак, бу нуқтадан маятник *ўз оғирлик кучи таъсири остида* K айлана бўйлаб пастга ҳаракат қила бошлайди. Шу куч сабабли P'_π



60- чизма



61- чизма

нуқта K айлана бўйлаб P_π нуқтага етиб кела олмайди (P'_π нуқтага бошланғич тезлик берилмайди деб қаралянти). У P''_π ҳолатга келиб, яна пастга ҳаракат қилади. Бунда P''_π нинг ҳолати P'_π дан пастрокда бўлади. Шу йўл билан ҳар бири аввалгисидан пастроқ ҳолатда жойлашган нуқталар кетма-кетлиги ҳосил бўлади:

$$P_\pi,\ P'_\pi,\ P''_\pi,\ \dots,\ P_\pi^{(\mu)},\ \dots$$

Шубҳасиз, вакт ўтиши билан $P_\pi^{(\mu)} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} P_0$ муносабат ўринли бўлади. Бошқача айтганда, P нуқта қуйи мувозанат ҳолатга интилади. Бу мулоҳазаларга асосан юқори мувозанат ҳолат нотурғун, қуйи мувозанат ҳолат *турғун* деб атаймиз. Демак, агар P нуқта юқори мувозанат ҳолатдан бир оз силжитилса, у яна шу ҳолатга қайтиб келмайди; P нуқта қуйи мувозанат ҳолатдан силжитилганда эса у *чекли* вақт давомида яна шу ҳолатни эгаллайди.

Энди *соат маятниги* ҳаракатини ўрганайлик. Осма соатлар маятникнинг маълум *қулочи* билан юради. Агар соатни юргизишда унинг маятнигини етарли секин силжитилса, маятник озроқ тебраниб тўхтаб қолади. Агар маятникни каттароқ қулочга силжитилса, қисқа вақтдан кейин маятник аниқ қулоч бўйлаб, маълум амплитуда билан етарлича узоқ вақт ёки чексиз узоқ вақт ҳаракат қилади. Соат ҳаракатини ифода этадиган тенгламалар системаси икки стационар ҳолатга эга бўлиб, бири — ҳаракат бўлмайдиган мувозанат ҳолатидан, иккинчиси эса соатнинг нормал юришига мос *даврий* ечимдан иборат. Тенгламалар системасининг ихтиёрий бошқа ечимлари шу икки ечимдан бирига тез яқинлашади ва фарқ қилмай қолади. Демак, ҳолатлар фазоси бу ҳолда икки соҳага бўлинади. Уни *тортилиш соҳалари* деб юритилади. Бир тортилиш соҳасидан бошланган ҳаракат мувозанат ҳолатига яқинлашса, иккинчисидан бошлангани эса даврий ечимга яқинлашади.

11.2- §. ТУРҒУН КЎПҲАДЛАР

1. Кўпҳадларнинг турғунлик шартлари.

11.1-таъриф. *Агар коэффициентлари ҳақиқий бўлган*

$$L(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\dots+a_{n-1}p+a_n \tag{11.4}$$

кўпҳаднинг барча илдизлари (ноллари) манфий ҳақиқий қисмга эга бўлса, у ҳолда (11.4) кўпҳад турғун кўпҳад дейилади.

Турғун кўпҳадларнинг илдизлари комплекс ўзгарувчининг текислигида мавҳум ўқдан чапда жойлашган бўлади. Кўпҳад турғунлигини текширишнинг Раус-Гурвиц белгиси билан танишамиз. Умумий ҳолни кўришдан аввал $n=1$, 2, 3 бўлган ҳолларга алоҳида тўхталамиз. $n=1$ бўлганда (11.4) кўпҳад $a_0p+a_1=L(p)$ кўринишни олади. Бу икки ҳад ягона $p=-\frac{a_1}{a_0}$, $a_0\neq 0$ илдизга эга. $-\frac{a_1}{a_0} < 0$ бўлиши учун a_0 ва a_1 ($a_1\neq 0$) коэффициентлар бир хил ишорали бўлиши зарур ва етарли. Демак, биринчи тартибли чизиқли тенгламанинг илдизи манфий бўлиши учун унинг коэффициентлари бир хил ишорали бўлиши зарур ва етарли. Бу тасдиқнинг исботи равшан. Агар $a_0>0$ дейилса, $a_1>0$ бўлганда биринчи тартибли кўпҳад *турғун* бўлади.

Энди $n=2$ бўлсин. Бунда биз иккинчи тартибли

$$L(p)=a_0p^2+a_1p+a_2,\ a_0>0$$

кўпҳадга эгамиз. Юқорида $a_0>0$ деб олдик. Агар $a_0<0$ бўлганда $-L(p)=L_*(p)$ деб белгиласак, $L_*(p)$ учун p^2 олдидаги коэффициент мусбат бўлади. $L(p)$ ва $L_*(p)$ кўпҳадлар эквивалент бўлгани учун $L_*(p)$ кўпҳад билан иш кўриш мумкин. Бу мулоҳаза n-тартибли кўпҳадлар учун ҳам айтилиши мумкин. Шунинг учун доим $a_0>0$ деб олинса бўлади.

Юқоридаги квадрат учҳаднинг илдизлари ушбу

$$p_{1,2}=-\frac{a_1}{2a_0}\pm\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2-\frac{a_2}{a_0}}$$

формулалар билан ҳисобланади. Бундан дискриминант нолдан кичик бўлганда илдизларнинг ҳақиқий қисми $-\frac{a_1}{2a_0}$ дан иборат бўлади. $a_1>0$ бўлганда $-\frac{a_1}{2a_0}<0$ $(a_0>0)$ ва кўпҳад турғун бўлади. Агар $a_1\leqslant 0$ бўлса, $-\frac{a_1}{2a_0}\geqslant 0$ бўлади. Бу ҳолда кўпҳад турғун бўла олмайди. Агар дискриминант нолга тенг ёки нолдан катта бўлса, $a_1>0$, $a_2>0$ бўлганда $p_{1,2}<0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ҳолда кўпҳад яна турғун бўлади. Бошқа ҳолларда кўпҳад турғун бўла олмайди. Агар кўпҳад турғун бўлса, илдизлар формуласидан $a_1>0$, $a_2>0$ келиб чиқади.

Шундай қилиб, квадрат учҳад турғун бўлиши учун унинг коэффициентлари мусбат бўлиши зарур ва етарли.

11.1-теорема. *Ушбу* $L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$ *кўпҳад турғун бўлиши учун унинг* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *коэффициентлари мусбат бўлиши зарур.*

Исбот. $L(p)$ кўпҳаднинг коэффициентлари ҳақиқий бўлгани учун унинг илдизлари сони каррали илдизларнинг карраси ҳам ҳисобга олинганда n та бўлади. Шу билан бирга кўпҳаднинг k та илдизи комплекс бўлса, унда унинг яна k та илдизи мос равишда қўшма комплекс бўлади. Уларни $\mu_j\pm i\nu_j$, $j=1,2,\ldots,k$, λ_ρ, $\rho=1,2,\ldots,n-2k$ деб белгилаймиз. Шартга кўра кўпҳад турғун. Шунинг учун $\mu_j<0$, $j=1,2,\ldots,k$; $\lambda_\rho>0$, $\rho=1,2,\ldots,n-2k$. Энди $L(p)$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$L(p)=\prod_{j=1}^{k}[p-(\mu_j+i\nu_j)](p-(\mu_j-i\nu_j)]\cdot\prod_{\rho=1}^{n-2k}(p-\lambda_s)=$$

$$=\prod_{j=1}^{k}(p^2+a_1^{(j)}p+a_2^{(j)})\cdot\prod_{\rho=1}^{n-2k}(p+b^{(\rho)}),$$

бунда $a_1^{(j)} = -2\mu_j > 0$, $a_2^{(j)} = \mu_j^2 + \nu_j^2 > 0$, $b^{(\rho)} = -\lambda_\rho > 0$.

Демак, $L(p)$ кўпҳад коэффициентлари мусбат бўлган $p^2 + a_1 p + a_2$ ва $p + b$ кўринишдаги кўпҳадларнинг кўпайтмаси шаклида ёзилади Бундай кўпҳадларни кўпайтириб чиқсак, коэффициентлари мусбат бўлган кўпҳад чиқиши равшан. Теорема исбот бўлди.

11.2- теорема. *Коэффициентлари ҳақиқий бўлган*

$$L(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3, \; a_0 > 0$$

кўпҳад турғун бўлиши учун a_1, a_2, a_3 *коэффициентлари мусбат бўлиши билан бирга ушбу*

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

тенгсизлик бажарилиши зарур ва етарли.

Исбот. $a_0 > 0$ бўлгани учун биз

$$L(p) = p^3 + ap^2 + bp + c \tag{11.5}$$

кўпҳадни кўрамиз.

Зарурлиги. Бу ҳолда (11.5) кўпҳаднинг турғунлигидан

$$ab > c \tag{11.6}$$

тенгсизликнинг бажарилишини келтириб чиқарамиз. Аввало 11.1- теоремага кўра $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ тенгсизликлар ўринли. Исбот этишда кўпҳаднинг илдизлари коэффициентларига узлуксиз боғланганлигидан кенг фойдаланамиз.

Комплекс текисликни кўрамиз. Унда горизонтал ўкда ҳақиқий илдизларни, вертикал ўкда мавҳум илдизларни жойлаштириш мумкин.

Аввало (11.5) кўпҳад $p = 0$ илдизга эга эмас, акс ҳолда ундан $c = 0$ келиб чиқар эди. Энди (11.5) кўпҳаднинг илдизи мавҳум, яъни $p = i\omega$, $\omega \neq 0$ бўлсин дейлик. Шу кўпҳадни ушбу

$$L(p) = (p + a)(p^2 + b) - ab + c \tag{11.7}$$

кўринишда ёзайлик. $L(i\omega)$ ни ҳисоблаймиз:

$$L(i\omega) = (i\omega + a)(-\omega^2 + b) - ab + c = i\omega(-\omega^2 + b) + a(-\omega^2 + b) - \\ - ab + c.$$

Бундан $p = i\omega$ мавҳум сон илдиз бўлиши учун $-\omega^2 + b = 0$ ва $ab = c$ бўлиши лозим. Агар $ab = c$ бўлса,

$$L(p) = (p + a)(p^2 + b) = 0$$

дан $p = \pm i\sqrt{b}$. Шундай қилиб, $L(p)$ кўпҳад мавҳум илдизларга эга бўлиши учун $ab = c$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли. $L(p)$ кўпҳаднинг a, b, c коэффициентлари ҳам комплекс текисликда узлуксиз ҳаракат қилиб боради. Шу ҳаракат давомида мавҳум ўқ $ab = c$ бўлгандагина кесиб ўтилади.

Энди (11.6) (яъни $ab > c$) тенгсизлик бажарилмасин дейлик. У ҳолда ё $ab = c$, ё $ab < c$ бўлади. Биринчи ҳолда кўпҳад мавҳум илдизларга эга, демак, у нотурғун. Иккинчи ҳолда ҳам кўпҳад нотурғун эканини кўрсатамиз, a ва b ларни ($a > 0$, $b > 0$) шундай узлуксиз ўзгартирамизки, биринчидан улар нолга интилса, иккинчидан $ab<c$ тенгсизлик бузилмасин. Бундай ўзгартиришда кўпҳаднинг илдизлари мавҳум ўқнинг бир томонидан иккинчи томонига ўта олмайди, акс ҳолда $ab<c$ тенгсизлик бузилган бўлар эди. Демак, кўпҳаднинг турғун ёки нотурғунлиги ўзгармайди. Агар $a=b=0$ бўлса, (11.5) дан p^3+c га эга бўламиз. Унинг илдизлари $p_1=\sqrt[3]{-c}<0$, $p_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{c}}{2}\pm i\frac{\sqrt[3]{c}\ \sqrt{3}}{2}$. Демак, p^3+c кўпҳад мавҳум ўқдан ўнгда жойлашган 2 та $\frac{\sqrt[3]{c}}{2}\pm i\frac{\sqrt[3]{c}\ \sqrt{3}}{2}$ илдизга эга. Бу ҳолда кўпҳад нотурғун (яъни мавҳум ўқдан ўнгда жойлашган илдизлар бор). Мазкур хосса a ва b ларнинг нолга етарли яқин қийматларида ҳам ўринли, чунки илдизлар кўпҳад коэффициентларининг узлуксиз функциясидир. Шундай қилиб, $ab<c$ тенгсизлик бажарилганда $L(p)$ кўпҳад нотурғун.

Етарлилиги. (11.6) тенгсизлик бажарилсин дейлик. Бу ҳолда $L(p)$ кўпҳад турғун эканини исбот этамиз. $ab>c$ тенгсизликда c ни шундай ўзгартирамизки, у 1) нолга интилсин, 2) $ab>c$ тенгсизлик бузилмасин. Агар $c=0$ бўлса, ушбу

$$L(p)=p(p^2+ap+b)$$

кўпҳадга эгамиз. Бу кўпҳад $p_1=0$ ва $p_{2,3}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$ илдизларга эга. Бундан $p_{2,3}$ ларнинг ҳақиқий қисми манфий экани кўриниб турибди. Агар c нинг нолга етарли яқин мусбат қийматларини олсак, $p_{2,3}$ илдизлар мавҳум ўқдан чапда қолади. Аммо ноль илдиз мавҳум ўқдан ё чапга ёки ўнгга етарли кичик миқдорда силжийди. Иккинчи томондан маълумки, кўпҳад илдизларининг кўпайтмаси тескари ишора билан олинган озод ҳадга тенг (кўпҳад учун Виет теоремаси). Шунинг учун кўрилаётган ҳолда $p_1\cdot p_2\cdot p_3=-c<0$; $p_2\cdot p_3>0$ тенгсизликлардан $p_1<0$ (ҳақиқий илдиз) экани келиб чиқади. Шундай қилиб, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $ab>c$ тенгсизликлар бажарилганда $L(p)$ кўпҳад турғун бўлади. Теорема исбот бўлди.

Умумий ҳолда кўпҳаднинг турғунлиги шартини баён этамиз. Эслатиб ўтамизки, бирор

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \dots p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} \dots p_{2n} \\ \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} \dots p_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлса, унинг k-тартибли бош минори деб ушбу

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \dots p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} \dots p_{2k} \\ \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ p_{k1} & p_{k2} \dots p_{kk} \end{vmatrix}$$

матрицанинг детерминантига айтилади. Ўша минорни $\Delta_k(P)$ деб белгилаймиз.

11.3- теорема (Раус—Гурвиц белгиси). Ушбу

$$L(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n,\ a_0>0 \qquad (11.4)$$

коэффициентлари ҳақиқий бўлган n-тартибли кўпҳад берилган бўлсин. Қуйида кўпҳаднинг a_0, a_1, ... ,a_n коэффициентларидан n- тартибли матрица тузамиз:

$$Q=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & a_{n-2} & a_n & \end{pmatrix}$$

(11.4) *кўпҳад турғун бўлиши учун ҳамма бош минорлар $\Delta_1(Q)$, $\Delta_2(Q)$, ... , $\Delta_n(Q)$ мусбат бўлиши зарур ва етарли**)

Исбот. Q матрицанинг k-устунини ёзамиз:

$$\ldots a_{k+2}a_{k+1}a_k a_{k-1}a_{k-2}\ldots$$

Бунда a_{k+j} элементлардан a_k бош диагоналда жойлашган, шунингдек, агар $k+j<0$, $k+j>n$ бўлса, $a_{k+j}=0$.

11.3- теоремадан аввал исботланган 11.2-теорема хусусан келиб чиқади. Ҳақиқатан, 11.2- теоремада $n=3$ эди. Шунинг учун учинчи тартибли Q матрицани тузамиз:

$$Q=\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Бундан:

$$\Delta_1(Q)=a_1,\ \Delta_2(Q)=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-a_0a_3,$$

$$\Delta_3(Q)=a_3\Delta_2(Q).$$

11.3- теоремага кўра:

$$a_0>0,\ a_1>0,\ a_3>0,\ a_1a_2-a_0a_3>0.$$

Охирги тенгсизликдан $a_2>\frac{a_0a_3}{a_1}>0$ келиб чиқади.

Энди $n=4$ бўлганда

$$Q=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

матрицага кўра:

$$\Delta_1(Q)=a_1;\ \Delta_2(Q)=a_1a_2-a_0a_3;\ \Delta_3(Q)=a_3\Delta_2(Q)-a_1^2a_4;$$
$$\Delta_4(Q)=a_4\Delta_3(Q).$$

---

*) Бу теореманинг исботини Н. Г. Четаевнинг «Устойчивость движения» (Гостехиздат, М., 1955, 79—83- бетлар) китобидан ўқиш мумкин.

Бу матрицанинг мусбатлиги шартидан

$$a_0>0,\ a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ a_4>0,$$
$$\Delta_3(Q)=a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4>0$$

тенгсизликлар келиб чиқади.

Шунга ўхшаш, $n=5$ бўлганда

$$Q=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{pmatrix}$$

матрицанинг бош минорлари қуйидагича бўлади:

$$\Delta_1(Q)=a_1,\ \Delta_2(Q)=a_1a_2-a_0a_3,\ \Delta_3(Q)=a_3\Delta_2(Q)-a_1^2a_4,$$
$$\Delta_4(Q)=a_4\Delta_3(Q)-a_5a_2\Delta_2(Q)+a_0a_5(a_1a_4-a_0a_5),$$
$$\Delta_5(Q)=a_5\Delta_4(Q).$$

Бу минорларнинг мусбатлигидан $(a_0>0)$

$$a_0>0,\ a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ a_4>0,\ a_5>0,$$
$$a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4+a_0a_1a_5>0,$$
$$(a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4+a_0a_1a_5)a_4-$$
$$-a_5(a_1a_2^2-a_0a_1a_4-a_0a_2a_3+a_0^2a_5)>0$$

тенгсизликлар келиб чиқади.

2. Ечим модулининг баҳоси. Бизга n-тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли $L(p)z=0$ дифференциал тенглама берилган бўлсин. Бу тенглама характеристик тенгламаси $L(p)=0$ нинг барча илдизлари

$$\lambda_j=\mu_j+i\nu_j,\ j=1,2,\ \dots\ ,\ m,\ m\leqslant n$$

кўринишда ёзилган бўлсин. Унда баъзи ν_j лар нолга тенг бўлиши мумкин, $m<n$ бўлганда эса каррали илдизлар ҳам мавжуд бўлади. Ҳамма ҳолда ҳам n та чизиқли эркли ечимни, яъни фундаментал системани топиш мумкин. Шу n та ечимни $z_1,\ z_2,\ \dots\ ,\ z_n$ деб белгилаймиз. У ҳолда умумий ечим $\varphi(t)=C_1z_1+C_2z_2+\dots+C_nz_n$ каби ёзилади.

11.4-теорема. *Агар $L(p)$ кўпҳад турғун бўлса, шундай мусбат α сон топиладики, ушбу*

$$\mu_j<-\alpha,\ j=1,2,\ \dots\ ,\ m \tag{11.8}$$

тенгсизлик ўринли бўлади; шу билан бирга бу ҳолда $L(p)z=0$ тенгламанинг ҳар бир ечими учун шундай мусбат сон M топиладики, ечимнинг модули учун ушбу

$$|\varphi(t)|<Me^{-\alpha t},\ t\geqslant0 \tag{11.9}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Аввал (6.15) функциялар системасидан олинган ихтиёрий z_s, $s=1,2,\ \dots\ ,\ n$ ечим учун (11.9) формулани исботлаймиз. Ҳақиқатан,

$$z_s=t^re^{\lambda_j t}$$

ечимни олайлик. Бу формуланинг икки томонини $e^{-\alpha t}$ га бўламиз:

$$\frac{z_s}{e^{-\alpha t}}=t^r e^{(\lambda_j+\alpha)t}=t^r e^{\mu_j t+i\nu_j t+\alpha t}=t^r e^{(\mu_j+\alpha)t}e^{i\nu_j t}.$$

Энди $|e^{i\nu_j t}|=1$ бўлгани учун ушбу муносабатга эгамиз:

$$\left|\frac{z_s}{e^{-\alpha t}}\right|=t^r e^{(\mu_j+\alpha)t}.$$

Аммо (11.8) га кўра $\mu_j+\alpha<0$. Шунинг учун Лопиталь қоидасини кетма-кет қўлласак:

$$\lim_{t\to+\infty} t^r e^{(\mu_j+\alpha)t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^r}{e^{-(\mu_j+\alpha)t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{r!}{(-1)^r\mu_j^r e^{-(\mu_j+\alpha)t}}=0.$$

Бундан $t^r e^{(\mu_j+\alpha)t}$ функция $t\geqslant 0$ бўлганда чегараланганлиги келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\left|\frac{z_s}{e^{-\alpha t}}\right|<M_s,\ t\geqslant 0$$

ёки

$$|z_s|<M_s e^{-\alpha t},\ t\geqslant 0$$

деб ёзиш мумкин. Бу баҳодан фойдаланиб, $\varphi(t)$ ечимнинг модулини баҳолаймиз. Равшанки,

$$|\varphi(t)|\leqslant|C_1|\ |z_1|+|C_2|\ |z_2|+\ldots+|C_n|\ |z_n|<(|C_1|M_1+$$
$$+|C_2|M_2+\ldots+|C_n|M_n)e^{-\alpha t}=Me^{-\alpha t}.$$

Демак, $t\geqslant 0$ бўлганда (11.9) тенгсизлик ўринли. Бундан кўринадики $\varphi(t)$ ечимнинг модули экспоненциал функция бўйича нолга интилади.

11.5- теорема. *Бизга чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли система* $\dot{x}=Ax$ *берилган бўлиб,* $\psi(t,\xi)$ *вектор-функция унинг* 0, ξ *бошланғич қийматларга эга бўлган ечими бўлсин. Агар* A *матрицанинг барча хос сонлари манфий ҳақиқий қисмларга эга бўлса, у ҳолда шундай мусбат* r ва α *сонлар топиладики, ушбу*

$$|\psi(t,\ \xi)|\leqslant r|\xi|e^{-\alpha t},\ t\geqslant 0 \qquad (11.10)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Ушбу $A=(a_{ij})$, $L(p)=(a_{ij}-p\delta_{ij})$ белгилашларни киритсак, берилган системани $\sum\limits_{j=1}^{n} L_{ij}(p)x_j=0,\ i=1,2,\ \ldots\ ,\ n$ каби ёзиш мумкин бўлади. Агар $D(p)$ деб $L(p)$ матрицанинг детерминантини белгиласак, 9-бобдаги мулоҳазалардан маълумки,

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ki}(p)L_{ij}(p)=\delta_{kj}D(p)$$

тенглик ўринли. Бундан:

$$0=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ki}(p)L_{ij}(p)x_j=\sum_{j=1}^{n}\delta_{kj}D(p)x_j=D(p)x_k.$$

Демак, агар $x=(x_1, \dots, x_n)$ * системанинг бирор ечими бўлса, у ҳолда ҳар бир x_i, $i=1,2, \dots, n$ ушбу $D(p)x_i=0$ тенгламанинг ечими бўлади. $D(p)$ кўпҳад шарт бўйича турғун. Шунинг учун ҳар бир x_i учун $|x_i| \leqslant Re^{-\alpha t}$, $t \geqslant 0$, $i=1, 2, \dots, n$, $R>0$, $\alpha>0$ тенгсизликка эгамиз. Бундан $|x| \leqslant \sqrt{n}\, Re^{-\alpha t}$, $t \geqslant 0$.

Энди $e_i=(0, \dots, 1, \dots, 0)$ — бирлик-вектор бўлиб, i-ўриндагидан бошқа координаталари нолга тенг. $\psi^{(i)}(t)$ — берилган системанинг $\psi^{(i)}(0)=e_i$, $i=1,2, \dots, n$ шартни қаноатлантирадиган ечими бўлсин. Бу ҳолда $\psi(t, \xi)$ функция қуйидагича

$$\psi(t, \xi)=\sum_{i=1}^{n} \xi\psi^{(i)}(t)$$

ёзилади. Ҳар бир $\psi^{(i)}(t)$ функция учун юқорида $|\psi^{(i)}(t)| \leqslant R\sqrt{n}e^{-\alpha t}$ тенгсизлик исботланган эди. Шу сабабли, $|\psi(t, \xi)|$ учун баҳо чиқариш мумкин. Равшанки, $\psi(t, \xi)$ ни бундай ёзса бўлади:

$$\psi(t, \xi)=\begin{pmatrix} \xi_1\psi_1^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \xi_1\psi_n^{(1)}(t) \end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix} \xi_n\psi_1^{(n)}(t) \\ \vdots \\ \xi_n\psi_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi\psi_1^{(i)}(t) \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\psi_n^{(i)}(t) \end{pmatrix}$$

Бундан:

$$|\psi(t, \xi)|=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\psi_1^{(i)}(t)\right)^2+\dots+\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\psi_n^{(i)}(t)\right)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \; |\psi_1^{(i)}(t)|\right)^2+\dots+\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \; |\psi_n^{(i)}(t)|\right)^2}.$$

Ушбу $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|\,|\psi_k^{(i)}(t)|\right)^2$ ифодани алоҳида баҳолаймиз. Содда ҳисоблашлар кўрсатадики,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|\,|\psi_k^{(i)}(t)|\right)^2=\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2|\psi_k^{(i)}(t)|^2+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{n}{}' |\xi_i| \; |\xi_j| \; |\psi_k^{(i)}(t)|\,|\psi_k^{(j)}(t)|, \text{ бунда } \Sigma' \text{ йиғиндида } i \neq j.$$

Энди баҳолашни давом эттирамиз. Бунинг учун $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ тенгсизликдан фойдаланиб,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i| |\psi_k^{(i)}(t)| \right)^2 \leqslant (R^2 e^{-2\alpha t}) \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right) +$$

$$+2R^2 e^{-2\alpha t} \left(\sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{|\xi_i|^2 + |\xi_j|^2}{2} \right) \leqslant (2n+1)|\xi|^2 R^2 e^{-2\alpha t}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Энди $|\psi(t, \xi)|$ учун қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$|\psi(t, \xi)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [(2n+1)\, |\xi|^2 R^2 e^{-2\alpha t}]} = \sqrt{n(2n+1)}\, R|\xi| e^{-\alpha t}.$$

Демак, (11.10) тенгсизлик исботланди, унда $r = \sqrt{n(2n+1)}\, R$. Теорема исбот бўлди. Кўринадики, $\psi(t, \xi)$ ечимнинг модули $t \geqslant 0$ бўлганда чегараланган ва $\lim\limits_{t \to +\infty} |\psi(t, \xi)| = 0$, бунда нолга интилиш экспоненциал функция бўйича бўлади.

Эслатма. *Агар $L(p)z = 0$ ($L(p)$ — n- тартибли чизиқли тенгламанинг системанинг характеристик кўпҳади) тенгламанинг характеристик кўпҳади 1) биттасининг ҳақиқий қисми ноль, қолганлариники манфий бўлган илдизларга эга бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varphi(t)$ ечимнинг модули $t \geqslant 0$ бўлганда чегараланган бўлади; 2) агар бирорта илдизнинг ҳақиқий қисми $\mu_1 > 0$ бўлса, у ҳолда n-тартибли чизиқли тенгламанинг $t \to +\infty$ да чексизга интиладиган $e^{\mu_j t}$* ечими, n-тартибли чизиқли системанинг модули чексизга интиладиган $h^j e^{\mu_j t}$ *ечими мавжуд бўлади.*

11.3- §. МУВОЗАНАТ ҲОЛАТИНИНГ ТУРҒУНЛИГИ. ЛЯПУНОВ— ПУАНКАРЕ ТЕОРЕМАСИ

1. Ляпунов маъносида турғунлик ва нотурғунлик. (10.2) системада $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$ функциялар ҳолат фазосининг бирор D_n соҳасида аниқланган ва биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан узлуксиз деб қараймиз. Турғунлик белгиларини баён этишда эса ҳатто иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг узлуксизлиги ҳам талаб этилади.

D_n соҳадан олинган $a = (a_1, \ldots, a_n)$ нуқта (10.2) системанинг мувозанат ҳолати бўлсин, демак, $f(a) = 0$ вектор тенглик ўринли. Шу a нуқтанинг турғунлигини сўз билан тушунтирайлик: агар $t = 0$ моментда (10.2) системанинг a, $a \in D_n$ нуқтага етарли яқин нуқтадан чиқадиган ечими ўзининг бутун кейинги ўзгариши давомида, яъни t нинг барча $t > 0$ қийматларида шу a нуқтага яқинлигича қолса, у ҳолда мувозанат ҳолати a ни турғун деб аташ лозим.

Кейинги мулоҳазаларимизда 0, ξ, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ бошланғич қийматларга эга бўлган ечимни $\varphi(t, \xi)$ деб белгилаймиз. Албатта, мувозанат нуқтаси a нинг атрофидаги ечимлар текширилиши турғунликнинг аниқ таърифи учун керак. Шунинг учун шубҳасиз, $\xi \neq a$ деб танланади. Демак, $\varphi(t, \xi)$ вектор-функция учун ушбу

$$\frac{d\varphi(t,\xi)}{dt}=f(\varphi(t,\xi)),$$

$$\varphi(0,\xi)=\xi \tag{11.11}$$

муносабатлар ўринли.

11.2-таъриф. *Агар 1) шундай сон $\rho>0$ мавжуд бўлсаки, $|\xi-a|<\rho$ бўлганда (10.3) вектор-тенгламанинг $\varphi(t,\xi)$ ечими t нинг барча мусбат қийматларида аниқланган бўлса, 2) ҳар бир мусбат сон $\varepsilon>0$ учун шундай мусбат δ, $\delta<\rho$ топилсаки, $|\xi-a|<\delta$ бўлганда t нинг барча мусбат қийматлари учун $|\varphi(t,\xi)-a|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда (10.3) вектор-тенгламанинг мувозанат ҳолати a Ляпунов маъносида турғун дейилади.*

Агар Ляпунов маъносида турғун бўлган мувозанат ҳолати a учун 3) шундай мусбат сон σ, $\sigma<\rho$ мавжуд бўлсаки, $|\xi-a|<\sigma$ бўлганда ушбу

$$\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t,\xi)-a|=0$$

муносабат бажарилса, у ҳолда (10.3) вектор-тенгламанинг мувозанат ҳолати *a асимптотик турғун* дейилади.

$|\varphi(t,\xi)-a|<\varepsilon$ тенгсизликни координаталар билан ёзсак, $\sqrt{(\varphi_1(t,\xi)-a_1)^2+\ldots+(\varphi_n(t,\xi)-a_n)^2}<\varepsilon$ тенгсизликка эга бўламиз. Бунга эквивалент n та

$$|\varphi_1(t,\xi)-a_1|<\frac{k_1\varepsilon}{\sqrt{n}},\ \ldots\ ,\ |\varphi_n(t,\xi)-a_n|<\frac{k_n\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

$$\sum_{i=1}^{n}k_i^2=n,\ k_i>0,\ i=1,2,\ldots,n$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин. Агар шу тенгсизликлардан камида биттаси ўринли бўлмаса, тегишли $\varphi(t,\xi)$ вектор-ечим Ляпунов маъносида нотурғун дейилади. Бунга мисол қилиб, ҳолат текислигидаги эгар манзарасини келтириш мумкин.

Энди n- тартибли чизиқли бир жинсли мухтор системани олайлик. Маълумки, агар A матрицанинг хос сонлари манфий ҳақиқий қисмларга эга бўлса, у ҳолда 0, ξ бошланғич қийматларга эга бўлган $\psi(t,\xi)$ ечим учун (11.10) тенгсизлик ўринли. Чизиқли бир жинсли системада $a=0$ бўлади. Шунинг учун ε — бирор мусбат сон бўлса, $\delta=\frac{\varepsilon}{r}$ деб олиш мумкин. Бу ҳолда $|\xi|<\frac{\varepsilon}{r}$ бўлганда $|\varphi(t,\xi)|\leqslant r|\xi|e^{-\alpha t}<r\cdot\frac{\varepsilon}{r}e^{-\alpha t}<\varepsilon$, чунки $e^{-\alpha t}<1$, $\alpha>0$, $t>0$.

Демак, чизиқли бир жинсли мухтор система учун $a=0$ нуқта Ляпунов маъносида турғун. Бундан ташқари, (11.10) тенгсизликка кўра σ деб ихтиёрий кичик мусбат сонни олинса ҳам $\lim\limits_{t\to+\infty}|\varphi(t,\xi)|=0$ тенгликка эгамиз. Демак, $a=0$ нуқта Ляпунов маъносида асимптотик турғун.

n-тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламанинг тривиал ечимини ҳам турғунликка текшириш мумкин. Бунинг учун тенгламани каноник ўзгарувчилар ёрдамида мухтор системага келтирилади. Сўнгра координата бошидан иборат бўлган ($(x_1, \ldots, x_n)$ лар фазосида) мувозанат ҳолатининг турғунлиги текширилади. Бунда $\mu_j<0$, $j=1,2, \ldots, m$ тенгсизликлар ўринли бўлганда яна (11.10) тенгсизлиги ўринли бўлади ва асимптотик турғунлик келиб чиқади.

Юқорида айтганимиздек, агар A матрицанинг бирор хос сонининг ҳақиқий қисми нолга тенг бўлиб, қолганлариники манфий бўлса, у ҳолда мувозанат ҳолат Ляпунов маъносида турғун бўлади. Аммо у асимптотик турғун бўлмайди. Агар бирор хос соннинг ҳақиқий қисми мусбат бўлса, мувозанат ҳолат турғун бўла олмайди. Шу муносабат билан нотурғун мувозанат ҳолатининг таърифини келтирамиз.

11.3-таъриф. *Агарда шундай мусбат сон μ мавжуд бўлсаки, (10.3) тенгламанинг ҳар бир $\varphi(t, \xi)$ ечимига мос траекторияси ушбу $|\xi-a|<\mu$ шарнинг ξ, $\xi\neq a$ нуқтасидан бошланиб, шу шардан албатта чиқса ва унга бошқа қайтиб келмаса* (бошқача айтганда, шундай мусбат сон $T=T(\xi)$ топилсаки, $t=T(\xi)$ бўлганда $\varphi(t, \xi)$ ечим аниқланган ва t нинг шу ечим аниқланган $t>T$ қийматларида $|\varphi(t, \xi)-a|\geqslant\mu$ тенгсизликни қаноатлантирса), у ҳолда (10.3) *вектор-тенгламанинг мувозанат ҳолати а бутунлай нотурғун дейилади.*

Нотурғун мувозанат ҳолати, умуман айтганда, бутунлай нотурғун бўла олмайди.

Бутунлай нотурғун мувозанат ҳолатига мисол қилиб, нотурғун *тугун нуқтани, нотурғун фокус нуқтани, нотурғун туғилма тугун ва фокус* нуқталарни (ҳаммаси текширилади) келтириш мумкин.

2. Мухтор система ечимининг группалаш хоссаси.

11.1-лемма. (10.3) *вектор-тенгламанинг* 0, ξ *бошланғич қийматларга эга бўлган* $\varphi(t, \xi)$ *ечими учун ушбу*

$$\varphi(t, \varphi(s, \xi))\equiv\varphi(s+t, \xi) \tag{11.12}$$

айният ўринли бўлади (бу ерда t, s — эркли ўзгарувчилар).

(11.12) *айният билан ифодаланган хосса мухтор система ечимининг группалаш хоссаси деб юритилади.*

Исбот. Маълумки, ξ тайин нуқта. Энди s ни ҳам тайинлаб,

$$\eta=\varphi(s, \xi) \tag{11.13}$$

деб белгилаймиз. (10.3) вектор-тенгламанинг $\varphi^{(1)}(t)=\varphi(t, \eta)$ ечимини кўрайлик. Леммада кўрсатилганидек, $\varphi(t, \xi)$ вектор-функция (10.3) тенгламанинг ечими. Шунинг учун (10.3) тенглама мухтор бўлганидан $\varphi(t+s, \xi)$ функция ҳам ечим бўлади. Уни $\varphi^{(2)}(t)$ деб белгилаймиз. Шундай қилиб, (10.3) тенгламанинг иккита $\varphi^{(1)}(t)$ ва $\varphi^{(2)}(t)$ ечимларига эгамиз. Бу ечимлар умумий бошланғич қийматларга эга, чунки

$$\varphi^{(1)}(0)=\varphi(0, \eta)=\eta,$$
$$\varphi^{(2)}(0)=\varphi(0+s, \xi)=\eta$$

тенгликлар ўринли. Демак, ягоналик теоремасига асосан $\varphi^{(1)}(t)\equiv\varphi^{(2)}(t)$ ва шу билан бирга (11.12) айният ўринли. 11.1-лемма исбот этилди.

3. Мусбат аниқланган квадратик кўринишнинг баъзи хоссалари. n ўлчовли фазонинг ўзгарувчи векторини $x=(x_1, \ldots, x_n)$ дейлик. Шу x векторнинг квадратик кўриниши деб ушбу

$$W(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}x_ix_j \qquad (\omega_{ij}=\omega_{ji} \text{ — ҳақиқий сонлар})$$

формула билан аниқланган $W(x)$ функцияга айтилади. Шубҳасиз, $W(0)=0$ тенглик ўринли. $x\neq 0$ бўлганда квадратик кўриниш аниқ мусбат ёки аниқ манфий ишорали бўлиш ҳоллари муҳимдир.

Агар ихтиёрий $x\neq 0$ учун $W(x)>0$ бўлса, квадратик кўриниш $W(x)$ *мусбат аниқланган* дейилади. Мусбат аниқланган квадратик кўринишнинг кейинги мулоҳазаларда зарур бўлган хоссасини келтирамиз.

11.2-лемма. *Ихтиёрий мусбат аниқланган квадратик кўриниш учун шундай иккита мусбат* μ *ва* ξ *сонларни топиш мумкинки, исталган* x *вектор учун ушбу*

$$\mu|x|^2\leqslant W(x)\leqslant\nu|x|^2 \tag{11.14}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Исбот. (11.14) тенгсизликларни исботлаш учун

$$|\xi|=1 \quad (\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2=1) \tag{11.15}$$

бирлик сферани олиб, $W(\xi)$ функцияни шу сферада кўрамиз. $W(\xi)$ функция (11.15) сферада узлуксиз ва мусбат аниқланган, сферанинг ўзи эса ёпиқ чегараланган тўплам. Шунинг учун $W(\xi)$ функция (11.15) сферада ўзининг энг кичик μ ва энг катта ν қийматларига эришади. Сферанинг барча ξ векторлари нолдан фарқли бўлгани учун μ ва ν сонлар мусбатдир. Шу μ ва ν сонлар (11.14) тенгсизлик бажарилиши учун изланган сонлар эканини исбот этамиз. Юқоридаги мулоҳазалардан

$$\mu\leqslant W(\xi)\leqslant\nu,\ \xi\in\{\xi:|\xi|=1\} \tag{11.16}$$

тенгсизликлар келиб чиқади, унда $\mu>0$, $\nu>0$. Шу сферанинг вектори ёрдамида $x=\lambda\xi$ векторни тузамиз, унда λ — ихтиёрий ҳақиқий сон. Равшанки, $|x|=|\lambda\xi|=|\lambda|\ |\xi|=|\lambda|$. Энди (11.16) тенгсизликларни λ^2 га кўпайтирамиз:

$$\mu\lambda^2\leqslant\lambda^2W(\xi)\leqslant\lambda^2\nu,$$

бундан

$$\mu|x|^2\leqslant\lambda^2W\left(\frac{x}{\lambda}\right)\leqslant\nu|x|^2$$

ёки $W\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda^2}W(x)$ тенглик ўринли бўлганидан изланган

(11.14) тенгсизликлар келиб чиқади. Шундай қилиб, (11.14) тенгсизликлар исбот этилди.

4. Ляпунов функцияси квадратик кўриниш сифатида. Эслатиб ўтамизки, агар очиқ D_n тўпламда бирор дифференциалланувчи $F(x_1, \dots, x_n)$ функция берилган бўлса, бу функциядан (10.2) системага кўра t бўйича ҳосила қуйидагича аниқланади: (10.2) системанинг $\varphi(t_0)=x^0$ бошлангич шартни қаноатлантирадиган ечимини $\varphi(t)$ дейлик. (10.2) системага кўра $\dot{F}_{(10.2)}(x)$ ҳосила

$$\dot{F}_{(10.2)}(x)=\frac{d}{dt}F(\varphi(t))\big|_{t=t_0} \qquad \text{ёки} \qquad \dot{F}_{(10.2)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}f_i(x)$$

формула билан аниқланади.

Энди

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i=1,2,\dots,n \tag{11.17}$$

чизиқли бир жинсли нормал система берилган бўлсин.

11.3-лемма. *Агар* (11.17) *система матрицасининг барча хос сонлари манфий ҳақиқий қисмларга эга бўлса, у ҳолда шундай мусбат аниқланган квадратик кўриниш* $W(x)$ *мавжудки, бу кўринишнинг* (11.17) *системага кўра t бўйича ҳосиласи ушбу*

$$\dot{W}_{(11.17)}(x)\leqslant-\beta W(x) \tag{11.18}$$

тенгсизликни қаноатлантиради, унда х-ихтиёрий вектор, β-мусбат ва х га боғлиқ бўлмаган ҳақиқий сон.

Исбот. Лемманинг исботи тегишли шартларни қаноатлантирадиган кўринишни қуришдан иборат. (11.17) системанинг 0, ξ бошланғич қийматларга эга бўлган ечимини $\psi(t, \xi)$ дейлик. У ҳолда 11.5-теоремадан маълумки, $\psi(t, \xi)$ ни бундай ёзса бўлади:

$$\psi(t,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\psi^{(i)}(t), \tag{11.19}$$

бунда $\psi^{(i)}(t)$ вектор 11.5-теоремада қурилган вектор.

Ушбу

$$\int_{0}^{\infty}|\psi(\tau,\xi)|^2d\tau \tag{11.20}$$

хосмас интегрални кўрайлик. Унинг яқинлашувчи эканини кўрсатамиз. (11.19) муносабатдан фойдаланиб, (11.20) интегрални

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i\xi_j\int_{0}^{\infty}(\psi_i(\tau),\ \psi_j(\tau))\,d\tau \tag{11.21}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ҳар бир $\psi_k(\tau)$, $k=1,2,\dots,n$ функция 11.5-теоремага кўра $|\psi_k(\tau)|\leqslant\sqrt{n}Re^{-\alpha t}$ $(t\geqslant0)$ тенгсизликни қаноатлантиргани учун (11.21) ифодадаги ҳар бир хосмас интеграл яқинлашувчи. Демак, (11.20) хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи. Уни $W(\xi)$ билан белгилайлик:

$$W(\xi)=\int_0^\infty |\psi(\tau,\xi)|^2 d\tau. \tag{11.22}$$

$W(\xi)$ функция (11.21) га кўра $\xi_1, \dots, \xi_n$ ўзгарувчиларнинг квадратик кўринишидир. Шу квадратик кўриниш мусбат аниқланган, чунки (11.22) формулада интеграл остидаги ифода $\xi\neq 0$ учун мусбат. Демак, $W(\xi)>0$. Энди ушбу $\dot W_{(11.17)}(\xi)$ ҳосилани ҳисоблаймиз. Аввал $W(\psi(t,\xi))$ функцияни кўрамиз. У қуйидагича аниқланади: группалаш хоссасига кўра

$$W(\psi(\tau,\xi))=\int_0^\infty |\psi(t+\tau,\xi)|^2 d\tau=\int_t^\infty |\psi(\tau,\xi)|^2 d\tau.$$

Равшанки, $W(\psi(t,\xi))|_{t=0}=W(\psi,(0,\xi))=W(\xi)$. Шунинг учун

$$\dot W_{(11.17)}(\xi)=\frac{d}{dt}W(\psi(t,\xi))|_{t=0}=\frac{d}{dt}\int_t^\infty |\psi(\tau,\xi)|^2 d\tau|_{t=0}=$$

$$=-|\psi(t,\xi)|^2|_{t=0}=-|\xi|^2.$$

Демак,

$$\dot W_{(11.17)}(\xi)=-|\xi|^2.$$

(11.14) тенгсизликлардан иккинчисини оламиз:

$$W(\xi)\leqslant \nu|\xi|^2,$$

бундан $-\frac{1}{\nu}W(\xi)\geqslant -|\xi|^2$. Шундай қилиб,

$$\dot W_{(11.17)}(\xi)\leqslant -\frac{1}{\nu}W(\xi).$$

Демак, (11.18) тенгсизлик $W(\xi)$ олдида $\beta=\frac{1}{\nu}$ коэффициент билан бажарилади.

5. Ляпунов — Пуанкаре теоремаси. Биз қуйида келтирадиган теорема мувозанат ҳолатининг асимптотик турғун бўлиши ҳақида бўлиб, у етарли шартни беради. Кўпинча бу теоремада тавсия этиладиган методни *биринчи яқинлашиш* бўйича турғунлик ёки *Ляпунов — Пуанкаренинг биринчи* усули деб юритилади. Мазкур усул мухтор системалар учун баён этилади.

Бизга (10.2) мухтор система берилган бўлиб, $a=(a_1, \dots, a_n)$ унинг мувозанат нуқтаси бўлсин. Ушбу

$$x_i=a_i+y_i,\ i=1,2,\ \dots,\ n \tag{11.23}$$

алмаштириш ёрдамида янги $y_1, y_2, \ldots, y_n$ номаълум функцияларни киритамиз. Равшанки, $\dot{x}_i = \dot{y}_i$. Энди (10.2) системанинг ўнг томонида ҳам (11.23) алмаштириш бажариб, ҳар бир $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ функцияни a нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$f_i(a+y) = f_i(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} y_j + R_i, \qquad i=1,2, \ldots, n, \qquad (11.24)$$

бунда R_i — янги $y_1, \ldots, y_n$ номаълумларга нисбатан иккинчи тартибли кичик миқдорлар. Фараз бўйича, a нуқта мувозанат нуқтаси бўлгани учун $f_i(a) = 0$. Шунинг учун $\dot{x}_i = \dot{y}_i = f_i(a+y)$ эканини ҳисобга олиб (10.2) системани қуйидаги кўринишда ёзамиз (янги номаълум функциялар билан):

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} y_i + R_i, \qquad i=1,2, \ldots, n.$$

Агар

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \qquad (11.25)$$

деб белгиласак, охирги системани бундай ёзиш мумкин:

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + R_i, \qquad i=1,2, \ldots, n. \qquad (11.26)$$

Агар (11.26) системада қолдиқ ҳадларни (R_i ларни) тушириб қолдирсак, ҳосил бўлган ушбу

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \ i=1,2, \ldots, n \qquad (11.27)$$

система *биринчи яқинлашиш системаси* дейилади.

11.6-теорема (Ляпунов — Пуанкаре теоремаси). *Агар* $A = (a_{ij})$ *матрицанинг* ((11.25) га қаранг) *барча хос сонлари манфий ҳақиқий қисмларга эга бўлса, у ҳолда* (10.2) *системанинг мувозанат ҳолати* a *асимптотик турғун бўлади; тўлароқ айтганда, шундай сон* $\sigma > 0$ *мавжудки,* $|\xi - a| < \sigma$ *бўлганда ушбу*

$$|\varphi(t, \xi) - a| \leqslant r|\xi - a| e^{-\alpha t} \qquad (11.28)$$

(бунда r ва α — ξ га боғлиқ бўлмаган мусбат сонлар) *тенгсизлик ўринли бўлади.*

Исбот. Мувозанат ҳолати координата боши билан устма-уст тушади, яъни $a=0$ десак, умумийликка зид бўлмайди. Бунга сабаб, $y = z + a$ алмаштириш $x = a$ мувозанат ҳолатига $z = 0$ мувозанат ҳолатини мос қўяди ва ушбу

$$\dot{z}_i = f_i(z+a) = f_i(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(a)}{\partial z_j} z_j + R_i, \ i=1,2, \ldots, n$$

система ҳосил бўлади. Бундан A матрица ўзгармагани кўриниб турибди. Шундай қилиб (10.2) системанинг мувозанат ҳолати a учун

$a=0$ деб ҳисоблаймиз. Демак, (11.23) алмаштиришдан $x_i=y_i$, $i=1,2,\ldots,n$ келиб чиқади.

Шу сабабли (11.26) система

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+R_i,\ i=1,2,\ldots,n \tag{11.29}$$

кўринишда ёзилади. Кейинги мулоҳазаларни назарда тутиб, R_i қолдиқнинг кўринишини ҳам ёзиб қўяйлик:

$$R_i=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(0x)}{\partial x_j\partial x_k}x_jx_k\ .$$

$W(x)$ энди (11.27) чизиқли бир жинсли нормал системанинг Ляпунов функцияси бўлсин. Шу функциядан t бўйича (11.29) системага кўра ҳосила оламиз:

$$\dot{W}_{(11.29)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}a_{ij}x_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}R_i=$$

$$=\dot{W}_{(11.27)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}R_i.$$

$W(x)$ функция (11.18) тенгсизликни қаноатлантиради. Шунинг учун ушбуга эгамиз:

$$\dot{W}_{(11.29)}(x)\leqslant-\beta W(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}R_i.$$

Энди (11.14) тенгсизликка кўра, шундай кичик $b>0$ мавжудки,

$$W(x)\leqslant b \tag{11.30}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган вектор $x\in D_n$. Шу $W(x)\leqslant b$ тенгсизлик D_n тўпламда эллипсоидни тасвирлайди, бу аналитик геометриядан маълум. Юқорида R_i учун ёзилган формула бўйича R_i функция квадратик кўринишдан иборат. Яна (11.14) тенгсизликка кўра

$$|R_i|\leqslant k|x|^2\leqslant\frac{k}{\mu}W(x),\ k=\mathrm{const}$$

ва $|x_i|\leqslant\sqrt{\frac{1}{\mu}W(x)}$ тенгсизликка асосан чизиқли кўринишдан иборат бўлган $\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}$ учун ушбу

$$\left|\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}\right|\leqslant l\sqrt{W(x)}\,,\qquad l=\mathrm{const}$$

тенгсизлик ўринли. Шундай қилиб, шундай мусбат q сон мавжудки, (11.30) тенгсизлик бажарилганда қуйидагига эгамиз:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}R_i\leqslant q\,(W(x))^{3/2}$$

Шундай мусбат c сонни танлаймизки, ушбу тенгсизликлар ўринли бўлсин:

$$c \leqslant b, \ q\sqrt{c} \leqslant \frac{\beta}{2}.$$

Шу белгилар ва юқоридаги баҳолар ёрдамида шуни топамиз:

$$\dot{W}_{(11.29)}(x) \leqslant -\beta W(x) + q[W(x)]^{3/2} = W(x)[-\beta + q\sqrt{W(x)}] \leqslant$$
$$\leqslant W(x)[-\beta + q\sqrt{c}] \leqslant W(x) \left[-\beta + \frac{\beta}{2}\right] = -\frac{\beta}{2} W(x),$$

яъни агар

$$W(x) \leqslant c \tag{11.31}$$

тенгсизлик бажарилса, қуйидаги

$$\dot{W}_{(11.29)}(x) \leqslant -\frac{\beta}{2} W(x)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $\alpha = \frac{\beta}{4}$, демак, (11.31) тенгсизлик ўринли бўлганда

$$\dot{W}_{(11.29)}(x) \leqslant -2\alpha W(x)$$

тенгсизлик ҳам бажарилади.

Энди ξ (11.31) эллипсоиднинг ихтиёрий *ички* нуқтаси бўлсин, яъни ξ нуқта учун

$$W(\xi) < c \tag{11.32}$$

тенгсизлик бажарилади.

(11.29) системанинг 0, ξ бошланғич қийматларга эга бўлган ечимини $\varphi(t, \xi)$ ва $W(t, \xi))$ ни эса $\omega(t)$ деб белгилаймиз. Бу $\omega(t)$ функция t нинг $t \geqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ва $\varphi(t, \xi)$ ечим аниқланган барча қийматларида аниқланган бўлиб,

$$\omega(t) \leqslant c \tag{11.33}$$

тенгсизлик бажарилганда, $\omega(t)$ нинг ҳосиласи учун ушбу

$$\dot{\omega}(t) \leqslant -2\alpha\omega(t) \tag{11.34}$$

тенгсизлик ҳам бажарилади. Ҳозир $\varphi(t, \xi)$ ечим барча $t \geqslant 0$ учун аниқланганини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $\varphi(t, \xi)$ функция t нинг барча мусбат қийматларида аниқланган бўлмасин. У ҳолда $x = \varphi(t, \xi)$ нуқта t нинг ортиб бориши билан (11.31) эллипсоиддан албатта чиқиб кетади ([1] 24-§. Б бандга қаранг). Тегишли нуқта (11.31) эллипсоиднинг чегарасига биринчи марта келган моментини t', $t' > 0$ дейлик. Шунга кўра $0 \leqslant t \leqslant t'$ оралиқда $\varphi(t, \xi)$ нуқта (11.31) эллипсоидга тегишли ва (11.34) тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан $\dot{\omega}(t) \leqslant 0$ чиқади. Демак, $c = \omega(t') \leqslant \omega(0) < c$ га эгамиз. Бу эса зиддият. Шундай қилиб, $\omega(t)$ функция t нинг мусбат бўлган қийматларида аниқланган. Агар $\xi \neq 0$ бўлса, $\omega(t) > 0$ бўлади, чунки $W(\varphi(t, \xi)) > 0$, агар $\varphi(t, \xi) \neq 0$ бўлса, маълумки, $\varphi(0, \xi) = \xi (t = 0$ да$)$, $\varphi(t, \xi) \neq \xi$, $t \neq 0$. Демак, фақат $\xi = 0$ бўлгандагина

$W(\varphi(t,\ \xi))=0$ бўлиши мумкин ва $\xi\neq 0$ да $\omega(t)>0$. Шунинг учун қуйидаги содда ҳисоблашларни амалга оширамиз.

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\leqslant -2\alpha;\qquad \int_0^t \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\,dt\leqslant -2\alpha t,\quad t\geqslant 0,$$

$$\ln\omega(t)-\ln\omega(0)\leqslant -2\alpha t$$

ёки

$$\ln W(\varphi(\xi))-\ln W(\xi)\leqslant -2\alpha t$$

ёки

$$W(\varphi(t,\xi))\leqslant W(\xi)e^{-2\alpha t}\ .$$

Энди (11.14) дан $x=\varphi(t,\xi)$ бўлганда $\mu|\varphi(t,\xi)|^2\leqslant W(\varphi(t,\xi))$ ва $x=\xi$ бўлганда $W(\xi)\leqslant\nu|\xi|^2$ эканлиги чиқади. Шунга кўра $W(\xi)<c$ бўлганда қуйидагига эгамиз:

$$\mu|\varphi(t,\ \xi)^2\leqslant W(\varphi(t,\ \xi))\leqslant W(\xi)e^{-2\alpha t}\leqslant\nu|\xi|e^{-2\alpha t}$$

ёки

$$|\varphi(t,\xi)|^2\leqslant\frac{\nu}{\mu}\,|\xi|^2e^{-2\alpha t}\qquad(11.35)$$

Яна (11.14) тенгсизликдан

$$|\xi|<\sigma=\sqrt{\frac{c}{\nu}}\qquad(11.36)$$

муносабат ўринли бўлганда (11.32) тенгсизлик келиб чиқади. Шундай қилиб, агар (11.36) муносабат ўринли бўлса, у ҳолда (11.35) тенгсизлик ўринли бўлади. Шу (11.35) нинг икки томонидан квадрат илдиз олсак,

$$|\varphi(t,\xi)|\leqslant\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\,|\xi|\,e^{-\alpha t},\qquad t\geqslant 0.\qquad(11.28)$$

Шу билан $a=0$, $r<\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}$ учун (11.28) тенгсизлик ва демак, Ляпунов — Пуанкаре теоремаси исбот бўлди.

11.7- теорема. *Агар* $A=\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right)$ *матрицанинг барча хос сонлари мусбат ҳақиқий қисмларга эга бўлса, у ҳолда* (10.2) *системанинг мувозанат ҳолати а бутунлай турғунмас бўлади.*

Исбот. Аввалги теоремадаги каби $a=0$ деймиз. (10.2) система билан бирга ушбу

$$\dot{x}=-f(x)\qquad(11.37)$$

вектор-тенгламани кўрамиз. Бу тенглама учун ҳам $a=0$ мувозанат ҳолати бўлади. 11.6-теоремадаги мулоҳазаларга кўра шу (11.37) тенглама учун ҳам Ляпунов функцияси мавжуд ва $W(x)\leqslant c$ тенгсизлик бажарилганда

$$\dot{W}_{(11.37)}(x)\leqslant -2\alpha W(x)$$

муносабат ўринли. Бундан:

$$\dot{W}_{(11.37)}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial x_i}\,(-f_i(x))\leqslant -2\alpha W(x)$$

ёки

$$\dot{W}_{(10.2)}(x)\geqslant 2\alpha W(x)\quad (\text{агар } W(x)\leqslant c \text{ бўлса}).$$

Энди ξ — (11.31) эллипсоиднинг ички нуқтаси бўлсин. $\omega(t)=W(\varphi(t,\xi))$ дейлик. Бу ҳолда $\omega(t)$ функция

$$\dot{\omega}(t)\geqslant 2\alpha\omega(t)\qquad (\text{агар}\omega(t)\leqslant c \text{ бўлса})\tag{11.38}$$

тенгсизликни қаноатлантиради. $\xi\neq 0$ бўлганда $\omega(x)>0$. Шунинг учун қуйидаги ҳисоблашларни бажариш мумкин:

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\geqslant 2\alpha,\quad \int_0^t\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\,dt\geqslant 2\alpha t,\quad t\geqslant 0,$$

$$\omega(t)\geqslant\omega(0)e^{2\alpha t},\ W(\varphi(t,\xi))\geqslant W(\xi)e^{2\alpha t}.$$

Охирги тенгсизликдан кўринадики, t ўсиши билан $x=\varphi(t,\xi)$ нуқта (11.31) эллипсоиддан албатта чиқиб кетади. Шу нуқта эллипсоидга бошқа қайтиб келмаслигини исботлаймиз. Тескарисини фараз этамиз. Шундай мусбат $t'>0$ топиладики, $\omega(t')=c$ ва етарли кичик мусбат Δt лар учун $\omega(t'+\Delta t)<c$ муносабатлар ўринли бўлсин. Лекин бу муносабатлардан $\dot{\omega}(t)\leqslant 0$ экани келиб чиқади. Топилган тенгсизлик (11.38) га зид. ((11.38) тенгсизлик $t=t'$ да тўғри, чунки $\omega(t')=c$). Шундай қилиб, (11.31) эллипсоиднинг ички $x=\xi$ нуқтасидан бошланадиган траектория $x=\varphi(t,\xi)$ вақти билан шу эллипсоиддан албатта чиқиб, сўнгра унга бошқа қайтиб келмайди. Ушбу $W(x)\leqslant\nu|x|^2$ ва $|\xi|<\sigma=\sqrt{\frac{c}{\lambda}}$ тенгсизликлардан $W(\xi)<c$ келиб чиқади. Демак, $|\xi|<\sigma$ шар $W(x)\leqslant c$ эллипсоид ичида ётиши кўрсатилди. Шундай қилиб, бутунлай нотурғунлик таърифига кўра теореманинг исботи якунланди.

11.8-теорема. *Агар* $A=\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right)$ *матрица хос сонлари ичида камида биттаси мусбат ҳақиқий қисмга эга бўлса, у ҳолда мувозанат ҳолати нотурғун бўлади.*

Исботи юқоридаги икки теореманинг исботига ўхшаш.

Мисол. Математик маятник тенгламасини, яъни ушбу

$$l\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0\tag{11.1}$$

тенгламани ёки каноник ўзгарувчиларда

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_1=\varphi_2,\\ \dot{\varphi}_2=-\dfrac{g}{l}\sin\varphi_1\end{cases}\tag{11.2}$$

системани кўрайлик. Бу мухтор системанинг мувозанат ҳолатлари (0,0), $(k\pi,0)$ (k — бутун сон) нуқталардан иборат бўлиб, *саноқли тўпламни* ташкил этади. k нинг жуфт қийматларига маятникнинг қуйи ҳолати, k нинг тоқ қийматларига эса юқори ҳолати мос келади (61- чизма). Бу нуқталарнинг турғун ёки нотурғунлигини текшириш учун фақат иккитасини, яъни $a^{(1)}=(0,0)$ ва $a^{(2)}=(\pi,\ 0)$ нуқталарни текшириш етарли. Аввал $a^{(1)}=(0,0)$ нуқтани олайлик. Мос биринчи яқинлашиш системаси

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1=\varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2=-\dfrac{g}{l}\varphi_1 \end{cases} \tag{11.2'}$$

кўринишда бўлиб, $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$. Бу матрицанинг хос сонлари $\lambda_1=$ $=i\sqrt{\dfrac{g}{l}},\ \lambda_2=-i\sqrt{\dfrac{g}{l}}$. Кўринадики, хос сонларнинг ҳақиқий қисмлари нолга тенг. Бундан (0,0) нуқта (11.2) система учун Ляпунов маъносида асимптотик турғун эмас. Аммо маятникнинг кичик тебранишлари учун $\sin\varphi_1\sim\varphi_1$ ва бу ҳолда (0,0) нуқта турғун бўлади, чунки (11.2′) учун $\varphi_1(t)=-A\left(\sqrt{\dfrac{l}{g}}\cos\sqrt{\dfrac{g}{l}}t+\alpha\right)$. $\varphi_2(t)=$ $=A\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}t+\alpha\right)$ ($A>0$, α — ихтиёрий ўзгармаслар) ва модул $|\varphi(t)|$ чегараланган. Шунга ўхшаш $a^{(2)}=(\pi,0)$ нуқтага мос биринчи яқинлашиш системаси

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1=\varphi_2, \\ \dot{\varphi}_2=\dfrac{g}{l}\varphi_1 \end{cases}$$

бўлиб, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$. Хос сонлар $\lambda_1=\sqrt{\dfrac{g}{l}},\ \lambda_2=-\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

Хос сонлардан бири мусбат бўлгани учун $(\pi,0)$ нуқта (11.2) система учун Ляпунов маъносида нотурғун (11.8- теоремага қаранг).

6. Ечимнинг турғунлиги. Бизга (10.2) мухтор система берилган бўлиб, $\varphi(t,\xi)$ функция шу системанинг $\varphi(0,\ \xi)=\xi$ шартни қаноатлантирадиган ечими бўлсин.

11.4- таъриф. *Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ мавжуд бўлсаки, 1) $|\eta-\xi|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи η лар учун $\varphi(t,\eta)$ ечим барча $t\geqslant0$ лар учун аниқланган; 2) $|\varphi(t,\xi)-\varphi(t,\eta)|<\tau$ тенгсизлик барча $t\geqslant0$ лар учун ўринли бўлса, у ҳолда* (10.2) *системанинг $\varphi(t,\ \xi)$ ечими Ляпунов маъносида турғун дейилади. Акс ҳолда тегишли ечим нотурғун дейилади.*

Агар 11.4- таърифдаги 1) ва 2) шартлар билан бирга яна ушбу шарт бажарилса, яъни 3) шундай кичик $\sigma>0$, $\sigma<\delta$ топилсаки, $|\eta-\xi|<\sigma$ бўлганда ушбу $\lim\limits_{t\to+\infty}|\varphi(t,\xi)-\varphi(t,\eta)|=0$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда (10.2) системанинг $\varphi(t,\ \xi)$ ечими *асимптотик турғун* дейилади. Нотурғун ечимлар учун ушбу

$$|\varphi_1(t,\xi)-\varphi_1(t,\eta)|<\frac{k_1\varepsilon}{\sqrt{n}},\ \ldots\ ,\ |\varphi_n(t,\xi)-\varphi_n(t,\eta)|<\frac{k_n\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

$$\sum_{i=1}^{n}k_i^2=n,\ k_i>0,\ i=1,\ \ldots\ ,\ n$$

тенгсизликлардан камида биттаси бажарилмайди. Агар бу тенгсизликлар бир вақтда бажарилмаса, (10.2) системанинг $\varphi(t, \xi)$ ечими *бутунлай нотурғун* дейилади.

Ечимнинг турғунлигини текшириш масаласи мухтормас система мувозанат ҳолатининг турғунлигини текширишга келтирилиши мумкин. Ҳақиқатан, (10.2) системанинг бирор ечимини олайлик. Ўша системада

$$y=x-\varphi(t,\xi) \tag{11.39}$$

алмаштиришни бажарамиз. Равшанки, (11.39) дан $x=\varphi(t,\xi)$ бўлганда $y=0$ келиб чиқади. Алмаштириш (10.2) системани қуйидаги

$$\dot{y}=f(y+\varphi(t,\xi))-f(\varphi(t,\xi)) \tag{11.40}$$

тенгламага олиб келади. Бу вектор-тенглама учун $y=0$ ечим (мувозанат ҳолати). Фақат эслатиб ўтамизки, биз мувозанат ҳолати тушунчасини мухтор системалар учун киритган эдик. (11.40) тенглама эса мухтор эмас. Аммо

$$\dot{y}=F(t, y) \tag{11.41}$$

кўринишдаги тенгламалар учун ҳам y нинг $F(t, y)$ функцияни нолга айлантирадиган қийматлари мувозанат ҳолати дейилади. Агар t ни параметр деб қаралса, ечимнинг графигини $(y_1, \dots, y_n)$ ўзгарувчилар фазосида ўрганилади. Бунда тегишли ечимнинг графиги (11.41) тенгламанинг *траекторияси*, $(y_1, \dots, y_n)$ ўзгарувчилар фазоси R^n эса *ҳолатлар фазоси* деб юритилади.

7. Мухтормас система ечимининг турғунлиги. Ечимни давом эттириш масаласи. Бизга (11.41) вектор-тенглама берилган бўлиб, $F(t, y)$ функция D_{n+1} соҳада ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремалардан бирортасининг шартларини қаноатлантирсин дейлик.

11.5-таъриф. *Агар $t=t_0$ да бошланғич $y_i(t_0)=y_i^0$, $i=1,2\dots$, n қийматлар берилган бўлиб, (11.41) тенгламанинг бирор $y=\varphi(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ ечими учун ихтиёрий $\varepsilon>0$ берилганда ҳам шундай $\delta(\varepsilon, t_0)$ топилсаки, (11.41) тенгламанинг бошқа ихтиёрий $y=\psi(t)$, $t\geqslant t_0$ ечими учун*

$$|\varphi(t_0)-\psi(t_0)|<\delta$$

тенгсизлик бажарилганда барча $t\geqslant t_0$ ларда

$$|\varphi(t)-\psi(t)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $y=\varphi(t)$ ечим *Ляпунов маъносида турғун дейилади. Агар $\delta>0$ сон t_0 га боғлиқ бўлмаса, $y=\varphi(t)$ ечим текис турғун дейилади.*

11.6-таъриф. *Агар $y=\varphi(t)$ ечим турғун бўлиб, ундан ташқари шундай $\delta_0>0$ сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрий бошқа $y=\psi(t)$ ечим учун*

$$|\varphi(t_0)-\psi(t_0)|<\delta_0$$

тенгсизлик бажарилганда

$$\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|=0$$

бўлса, $y=\varphi(t)$ ечим Ляпунов маъносида асимптотик турғун дейилади. Агар $y=\varphi(t)$ ечим турғун бўлмаса, у нотурғун дейилади.

(11.41) системанинг $y=\varphi(t)$ ечимининг турғунлигини текшириш масаласи бирор бошқа системанинг тривиал ечимининг турғунлигини текширишга келтирилади. Жумладан, (10.2) системанинг $\varphi(t, \xi)$ ечимини текшириш (11.40) тенгламанинг $y=0$ ечимини текширишга (11.39) алмаштириш ёрдамида келтирилади. Шу (11.39) алмаштириш (11.41) тенгламага ҳам қўлланилиши мумкин.

1-бобда ечимни давом эттириш ва давомсиз ечимлар ҳақидаги масала биринчи тартибли дифференциал тенглама учун кўрилган эди. Нормал (мухтормас ёки мухтор) системалар учун ҳам ечимни давом эттириш тушунчаси худди шунга ўхшаш киритилади. Чунончи, $y=\varphi(t)$ функция (11.41) тенгламанинг I_r интервалда аниқланган, $y=\psi(t)$ функция эса ўша тенгламанинг I_s интервалда аниқланган ечими бўлсин. Агар $I_s \supset I_r$ бўлиб, $y=\psi(t)$ ечим I_r интервалда $y=\varphi(t)$ ечим билан устма-уст тушса, у ҳолда $y=\psi(t)$ ечим $y=\varphi(t)$ *ечимнинг давоми* дейилади. Агар $y=\psi(t)$, $t\in I_s$ ечим учун унинг давомидан иборат бўлган ҳеч қандай ечим мавжуд бўлмаса, у ҳолда шу $y=\psi(t)$ ечим *давомсиз* дейилади.

Ҳар бир ечим ягона давомсиз ечимгача давом эттирилиши мумкин. Бу тасдиқнинг исботи 1-бобда битта тенглама учун олиб борилган исботдан фарқ қилмагани учун биз уни келтириб ўтирмаймиз. Аммо қуйида ечимни давом эттириш мумкин бўлишининг етарли шартларидан бирини берувчи лемма келтирамиз.

11.4-лемма (Филиппов леммаси). *Бизга* (11.41) *вектор-тенглама берилган бўлиб, унда $t\in T=T_1, T_2)$ (ихтиёрий чекли интервал), $y\in R^n$* ва

$$(y, F(t, y)) \leqslant C(1+|y|^2), \ 0\leqslant C=\text{const} \ (\Phi)$$

бўлиб, $y=\varphi(t, t_0, x^0)=\varphi(t)$ функция (11.41) *тенгламанинг ихтиёрий тайинланган t_0, y^0 бошланғич қийматларга эга бўлган ечими бўлса, $y=\varphi(t)$ ечим бутун T интервалда аниқланган бўлади.*

Исбот. (Ф) тенгсизлик *А. Ф. Филиппов тенгсизлиги* деб юритилади, унда $(y, F(t, y))$ ифода y ва $F(t, y)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини англатади. Кўрсатиш қийин эмаски, агар $|F(t, y)| \leqslant \leqslant k(1+|y|)$, $k>0=\text{const}$ тенгсизлик бажарилса, (Ф) тенгсизлик ҳам $1+k^2=C$ константа билан бажарилади. Энди лемманинг бевосита исботига ўтамиз. $\psi(t)=1+|\varphi(t)|^2$, $\psi(t_0)=1+|x^0|^2=A$ бўлсин. Содда мулоҳазалар ёрдамида қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[1+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2(t)\right]=\sum_{i=1}^{n}2\varphi_i(t)\frac{d\varphi_i(t)}{dt}=2(\varphi(t), \ (\dot{\varphi}(t))=$$

$$=2(\varphi(t), \ F(t, \varphi(t))\leqslant 2C(1+|\varphi(t)|^2)=2C\psi(t),$$

яъни ушбу

$$\frac{d\psi(t)}{dt}\leqslant 2C\psi(t)$$

дифференциал тенгсизликка эга бўламиз. Уни аввал t_0 дан $t(t_0<t\leqslant T_2)$ гача интеграллаймиз: $\psi(t)\leqslant Ae^{2C(t-t_0)}\leqslant Ae^{2C(T_2-t_0)}$, сўнгра t дан $t_0(T_1\leqslant t<t_0)$ гача интеграллаймиз: $\psi(t)\geqslant Ae^{2C(t-t_0)}\geqslant$

$\geqslant Ae^{2C(T_1-t_0)}$. Шундай қилиб, $Ae^{2C(T_1-t_0)} \leqslant \psi(t) \leqslant Ae^{2C(T_2-t_0)}$ тенгсизликларга эгамиз. Бундан $\psi(t)$ нинг ифодасига кўра $1+|\varphi(t)|^2$ функция ёки $|\varphi(t)|^2$ функция, ниҳоят, $|\varphi(t)|$ модул чегаралангани келиб чиқади. Лемма исбот бўлди.

Эслатма. Филиппов леммаси $T=(T_1, T_2)$ интервал ихтиёрий бўлганда ҳам ўринли.

Қуйида мухтормас система ечимининг турғунлигини текширишга оид мисол кўрамиз.

Мисол. Ушбу
$$\begin{cases} \dot{x}_1=\ln(1+2t-2x_1)+3x_2+3t^2+1, \\ \dot{x}_2=x_1^2-2tx_1-2x_1-x_2 \end{cases}$$

системанинг $x_1=t$, $x_2=-t^2$ ечими турғунликка текширилсин. Бунинг учун (11.39) алмаштиришни бажарамиз:
$$y_1=x_1-t, \qquad y_2=x_2+t^2.$$

Натижада қуйидаги
$$\begin{cases} \dot{y}_1=\ln(1-2y_1)+3y_2 & (=f_1), \\ \dot{y}_2=y_1^2-2y_1-y_2 & (=f_2) \end{cases}$$

мухтор системага келамиз. Содда ҳисоблашлар кўрсатадики, бу системанинг (0,0) мувозанат нуқтасида
$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\Big|_{(0,\ 0)}=-2,\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\Big|_{(0,\ 0)}=3,\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)\Big|_{(0,\ 0)}=0,$$
$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\Big|_{(0,\ 0)}=-1.$$

A матрица $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ кўринишда бўлиб, унинг хос сонлари $\lambda_1=-1<0$, $\lambda_2=-2<0$ лардан иборат. Демак, Ляпунов — Пуанкаре теоремасига кўра (0, 0) нуқта асимптотик турғун бўлади. Бундан берилган системанинг $x_1=t$, $x_2=-t^2$ ечими ҳам асимптотик турғун экани келиб чиқади.

11.4-§. ИҚТИСОДИЙ ЖАРАЕНЛАРНИНГ ИККИ СЕКТОРЛИ МОДЕЛИ ҲАҚИДА

Кўпгина иқтисодий жараёнлар мухтор дифференциал тенглама ёки дифференциал тенгламаларнинг мухтор системаси билан тавсифланади. Бунда тегишли мувозанат ҳолати (нуқтаси) маълум иқтисодий маънога эга. Айниқса мувозанат ҳолатининг асимптотик турғунлиги муҳим аҳамият касб этади, у *балансланган режим* деб аталадиган иқтисодий жараён кечиши билан боғланган. Биз қуйида иқтисодий жараёнларнинг икки секторли модели билан таништирамиз.

Икки секторли иқтисодий жараён ишлаб чиқариш функцияси деб аталадиган $Y_1=F_1(L_1,\ K_1)$, $Y_2=F_2(L_2,\ K_2)$ функциялар билан аниқлансин, дейлик. Бунда L_1, L_2 — меҳнат ресурслари ҳажми, K_1, K_2 — асосий фондлар ҳажми, Y_1, Y_2 — ишлаб чиқарилган маҳсулотлар ҳажми. Айтайлик, биринчи сектор ишлаб чиқариш воситаларини, иккинчи сектор эса истеъмол буюмларини ишлаб чиқарсин. Ҳар иккала секторнинг асосий фондларига инвестициялар (ажратилган капитал) I биринчи сектор маҳсулоти ҳажми Y_1 ҳисобига амалга оширилади, истеъмол C эса иккинчи сектор маҳсулоти ҳажми Y_2 билан устма-уст тушади, яъни $I=sF_1(L_1,\ K_1)+(1-s)F_1(L_1,\ K_1)$, $0\leqslant s\leqslant 1$, $C=Y_2(L_2, K_2)$. Ўрганиладиган модел қуйидаги муносабатлар билан тавсифланади:

$$\left.\begin{aligned}\dot K_1&=sF_1(L_1,\quad K_1)-\mu_1K_1,\ 0\leqslant s\leqslant 1, 0\leqslant\mu_1\leqslant 1,\\ \dot K_2&=(1-s)F_1(L_1,K_1)-\mu_2K_2,\quad 0\leqslant\mu_2<1,\end{aligned}\right\}\tag{11.42}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot L_1&=\eta_1L_1+\xi_1K_1,\quad \eta_1>0,\quad \xi_1>0,\\ \dot L_2&=\eta_2L_2+\xi_2K_2,\quad \eta_2>0,\quad \xi_2>0,\end{aligned}\right\}\tag{11.43}$$

$$L=L_1+L_2=qL+(1-q)L,\ 0\leqslant q\leqslant 1.$$

Юқоридаги (11.42), (11.43)ларда $\dot K_i=\dfrac{dK_i}{dt}$, $\dot L_i=\dfrac{dL_i}{dt}$, $i=1,2$. Ушбу $k_i=\dfrac{K_i}{L_i}$, $i=1,2$. миқдорлар *қуролланганлик* деб юритилади. Кўпинча моделни уни тавсифлайдиган муносабатларда k_1, k_2 ва уларнинг ҳосилалари орқали ифодаларга ўтиб текшириш қулай бўлади. Эслатиб ўтамизки, ишлаб чиқариш функцияси қуйидаги шартларни қаноатлантиради $(i=1,2)$:

$$\frac{\partial F_i(L_iK_i)}{\partial L_i}>0,\quad \frac{\partial F_i(L_i,\ K_i)}{\partial K_i}>0\ \ \forall\ L_i\geqslant 0,\ \ \forall K_i\geqslant 0;$$

$$\frac{\partial^2F_i(L_i,\ K_i)}{\partial L_i^2}<0,\quad \frac{\partial^2F_i(L_i,\ K_i)}{\partial K_i^2}<0\ \ \forall\ L_i\geqslant 0,\ \ \forall K_i\geqslant 0;$$

$$F_i(\lambda L_i,\lambda K_i)=\lambda F_i(L_i,K_i)\ \bigvee\lambda>0,\forall\ L_i\geqslant 0,\forall\ K_i\geqslant 0.$$

Охирги айният кўрсатадики, ҳар бир $F_i(L_i,\ K_i)$ функция ҳар икки аргументи бўйича биринчи тартибли бир жинсли функциядан иборат. Шунинг учун $(i=1,2)$ ушбу

$$F_i(L_i,\ K_i)=L_iF_i(1,\ \frac{K_i}{L_i})=L_iF_i(1,k_i)=L_if_i(k_i),$$
$$F_i(1,\ k_i)=f_i(k_i)$$

муносабатларни ёзиш мумкин. Унда $f_i(k_i)$ функция *ўртача меҳнат унумдорлиги* деб юритилади.

Энди қуйидаги содда ҳисоблашларни бажарамиз:

$$\dot k_1=\frac{d}{dt}\left(\frac{K_1}{L_1}\right)=\frac{\dot K_1L_1-K_1\dot L_1}{L_1^2}=\frac{(sF_1-\mu_1K_1)L_1-K_1(\eta_1L_1+\xi_1K_1)}{L_1^2}=$$

$$=\frac{(sL_1f_1(k_1)-\mu_1K_1)L_1-K_1(\eta_1L_1+\xi_1K_1)}{L_1^2}=sf_1(k_1)-(\mu_1+\eta_1)\psi_1(k_1),$$

яъни

$$\dot k_1=sf_1(k_1)-(\mu_1+\eta_1)\psi_1(k_1),\tag{11.44}$$

бунда $\psi_1(k_1)=k_1+\dfrac{\xi_1}{\mu_1+\eta_1}k_1^2$;

$$\dot{k}_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{K_2}{L_2}\right) = \frac{\dot{K}_2 L_2 - K_2 \dot{L}_2}{L_2^2} = \frac{[(1-s)F_1 - \mu_2 K_2]L_2 - K_2(\eta_2 L_2 + \xi_2 K_2)}{L_2^2} =$$

$$= \frac{[(1-s)L_1 f_1(k_1) - \mu_2 K_2]L_2 - K_2(\eta_2 L_2 + \xi_2 K_2)}{L_2^2} =$$

$$= \frac{q}{1-q}(1-s)f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta_2)\psi_2(k_2),$$

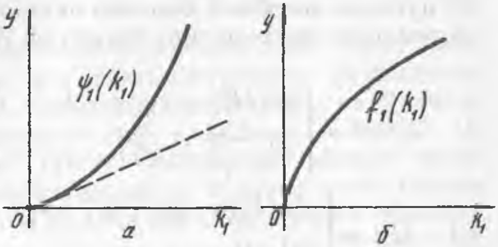
яъни

$$\dot{k}_2 = \frac{q(1-s)}{1-q} f_1(k_1) - (\mu_2 + \eta_2)\psi_2(k_2), \tag{11.45}$$

бунда

$$\psi_2(k_2) = k_2 + \frac{\xi_2}{\mu_2 + \eta_2} k_2^2, \quad L_1 = \frac{q}{1-q} L_2.$$

Юқорида киритилган $\psi_i(k_i)$, $i=1,2$, функциялар учун ушбу $\psi_i(0)=0, \psi_i'(k_i) = 1 + \frac{2\xi_i}{\mu_i+\eta_i} k_i > 0, \psi_i''(k_i) = \frac{2\xi_i}{\mu_i+\eta_i} > 0 \ \forall k_i \geqslant 0$ муносабатлар ўринли. Бундан кўринадики, $y=\psi_i(k_i)$ функциялар монотон ўсувчи, кавариқ, графиги координата бошидан чиқади ва бутунлай биринчи чоракда жойлашган. Шунингдек, $y=f_i(k_i)$ функция ҳам монотон ўсувчи, аммо ботиқ, графиги координата бошидан чиқади ва бутунлай биринчи чоракда жойлашган (62, а, б-чизмалар).



62- чизма

Биз $s=\text{const}$, $q=\text{const}$ бўлган ҳолни кўрамиз. Бунда тегишли модел ***Солоу модели*** деб аталади ва $0<s<1$, $0<q<1$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Шу сабабли (11.44) — (11.45) система ***мухтор*** системадан иборат бўлади.

11.9-теорема. (11.44) — (11.45) *тенгламалар системаси*

$$sf_1'(0) > \mu_1 + \eta_1 \tag{11.46}$$

тенгсизлик бажарилганда тривиал ечимдан ташқари ягона мусбат асимптотик турғун стационар ечимга (мувозанат ҳолатига) эга.

Исбот. Равшанки, (11.44) — (11.45) система тривиал ечимга эга. Биз уни текширмаймиз. (0,0) мувозанат ҳолатининг нотурғунлигини кўрсатиш қийин эмас. Энди мусбат мувозанат ҳолатининг мавжудлигини кўрсатиш учун

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(k_1, k_2) &= sf_1(k_1) - (\mu_1+\eta_1)\psi_1(k_1) = 0, \\ \varphi_2(k_1, k_2) &= \frac{q(1-s)}{1-q} f_1(k_1) - (\mu_2+\eta_2)\psi_2(k_2) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11.47}$$

чекли тенгламалар системасини қараймиз. Унда биринчи тенгламани $sf_1(k_1) = (\mu_1\eta_1)\psi_1(k_1)$ каби ёзиб, $y = sf_1(k_1)$, $y = (\mu_1 + \eta_1)\psi_1(k_1)$ функцияларни ўрганайлик. Улардан биринчиси қавариқ, иккинчиси эса ботиқ, графиклари координата бошидан мос равишда $y'(0) = sf_1'(0)$ ва $y'(0) = \mu_1 + \eta_1$ бурчак коэффициентлар билан чиқади. (11.46) тенгсизликка кўра биринчисининг графиги юқорироқдан кетади. Иккала функциянинг графиги ҳам бутунлай биринчи чоракда жойлашганлиги учун яна битта k_1^0, $k_1^0 > 0$, нуқтада албатта кесишади (63-чизма).

Топилган $k_1 = k_1^0 > 0$ қийматни (11.47) нинг иккинчи тенгламасига қўямиз. Унда

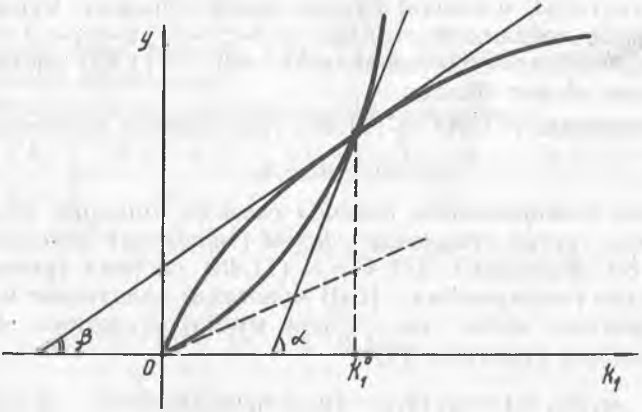
$$(\mu_2 + \eta_2)\psi_2(k_2) = \frac{q(1-s)}{1-q} f_1(k_1^0) > 0$$

тенгликка эга бўламиз. Аммо $\psi_2(0) = 0$ ва $\psi_2(k_2)$ монотон ўсувчи эканидан фақат биттагина $k_2 = k_2^0$ нуқтада юқоридаги тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, (11.44) — (11.45) система ягона мусбат ечимга эга экан. Энди бу ечим (мувозанат ҳолати) асимптотик турғун эканини исбот этамиз. Унинг учун $\varphi_1(k_1, k_2)$, $\varphi_2(k_1, k_2)$ функцияларнинг биринчи тартибли ҳосилаларини $k^0 = (k_1^0, k_2^0)$ нуқтада ҳисоблаб, биринчи яқинлашиш системаси деб аталадиган системанинг матрицасини ёзамиз ва унинг хос сонларини топамиз:

$$A = \begin{pmatrix} sf_1'(k_1^0) - (\mu_1 + \eta_1) & 0 \\ \frac{q(1-s)}{1-q} f_1'(k_1^0) & -(\mu_2 + \eta_2)\psi_2'(k_2^0) \end{pmatrix},$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} sf_1'(k_1^0) - (\mu_1 + \eta_1) - \lambda & 0 \\ \frac{q(1-s)}{1-q} f_1(k_1^0) & -(\mu_2 + \eta_2)\psi_2'(k_2^0) - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_1 = sf_1'(k_1^0) - (\mu_1 + \eta_1), \quad \lambda_2 = -(\mu_2 + \eta_2)\psi_2'(k_1^0).$$



63- чизма

Маълумки $y=f_1(k_1)$ функция ботиқ, $y=\psi_1(k_1)$ функция эса қаварик. Уларнинг графиклари кесишиш нуктаси (k_1^0, k_2^0) да мос бурчак коэффициентлар

$$\operatorname{tg}\alpha=\mu_1+\eta_1,\ \operatorname{tg}\beta=sf_1'(k_1^0)$$

бўлиб, $\operatorname{tg}\alpha>\operatorname{tg}\beta$ тенгсизлик ўринли (63 — чизма). Шундай қилиб, $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$. Демак, Ляпунов-Пуанкаре теоремасига кўра $k^0=(k_1^0,k_2^0)$ мувозанат ҳолати асимптотик турғун.

Иқтисодий нуқтаи назардан $k_i^0=\dfrac{K_i^0(t)}{L_i^0(t)}$, $i=1,2$, яъни $K_i^0(t)=k_i^0L_i^0(t)$ муносабатлар билан аниқланадиган режим муҳим аҳамиятга эга, уни *балансланган* режим дейилади.

11.5- §. ЛИМИТ ДАВРАЛАР. ЭРГАШ ФУНКЦИЯ

Лимит давра (цикл) ва эргаш функция тушунчаларини улуғ француз математиги А. Пуанкаре киритган бўлиб, бу тушунчалар ҳақида дастлабки илмий натижалар унинг ўзига тегишли. Лимит давралар техникада турли асбоб ва қурилмаларни лойиҳалашда муҳим роль ўйнайди. Техникада сўнмас тебранишлар шу лимит давралар тушунчасига мос келади. Бу мосликни биринчи марта А. А. Андронов аниқлаган.

Яна нормал мухтор (10.2) системани кўрайлик. Унда $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ (қисқача $f(x)$ вектор-функция) функциялар n ўлчовли фазонинг бирор D_n соҳасида аниқланган ва ўзининг хусусий ҳосилалари билан узлуксиз деб қараймиз. У ҳолда D_n соҳанинг ҳар бир нуқтасидан (10.2) системанинг фақат битта траекторияси ўтади. Кейинги мулоҳазаларда кўпинча $n=2$ бўлган ҳол кўрилади. Унда соддалик учун D_n соҳа сифатида бутун P текислик қаралади.

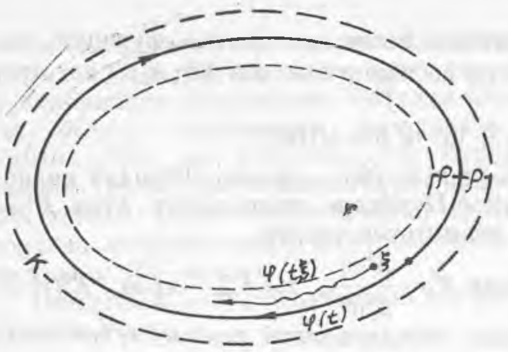
1. Лимит давра ва унинг яқинидаги траекториялар. Энди лимит давра тушунчасини киритамиз $(n=2)$.

11.7-таъриф. (10.2) *мухтор системанинг яккаланган даврий ечими лимит давра (цикл) дейилади. Тўлароқ айтганда,* $x=\varphi(t)$ *вектор-функция* (10.2) *системанинг даврий ечими бўлиб, К чизиқ эса Р текисликда шу ечимнинг графиги* (ёпиқ эгри чизиқ, ёпиқ траектория) *бўлсин. Агар шундай мусбат сон* $\rho>0$ *мавжуд бўлсаки, Р текисликдаги К эгри чизиқдан* ρ *дан кичик масофада жойлашган* ξ *нуқта қандай бўлмасин,* (10.2) *системанинг шу нуқтадан ўтадиган ечими даврий бўлмаса, у ҳолда* $x=\varphi(t)$ *ечим* (ёки К траектория) (10.2) *системанинг лимит давраси дейилади.*

Таърифдан кўринадики, агар $x\in K$, $\xi\notin K$ ва $|x-\xi|<\rho$ бўлса, (10.2) системанинг 0, ξ бошланғич қийматларга эга бўлган $x=\varphi(t, \xi)$ ечими даврий бўлмайди. Бошқача айтганда, лимит даврага яқин масофада системанинг ёпиқ траекториялари мавжуд эмас (64-чизма).

Ундай бўлса, лимит даврага яқин траекториялар ўзини қандай тутади? Қуйида биз шуни ўрганамиз.

11.10-теорема. $x=\varphi(t)$ *ечим* (10.2) *системанинг* $(n=2)$ *лимит давраси бўлиб, К унга мос ёпиқ траектория бўлсин. Ёпиқ траектория,*



64- чизма

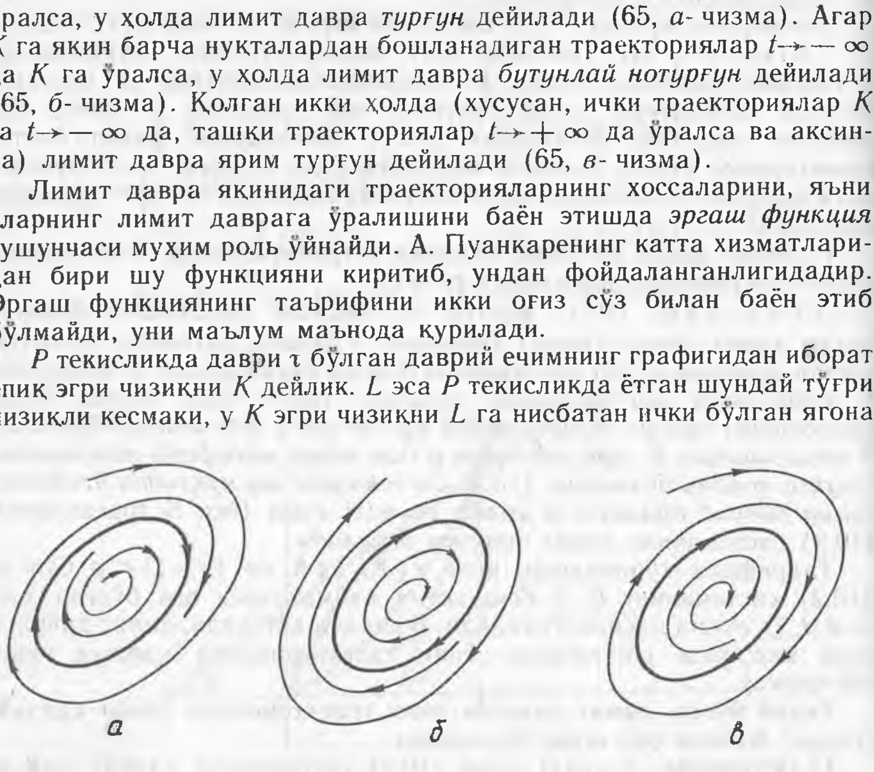
маълумки, текисликни икки ички ва ташқи соҳага бўлади. Мухтор системанинг траекториялари ўзаро кесиша олмаслиги учун (10.2) *системанинг ҳар бир К дан фарқли траекторияси унга нисбатан ё ички, ё ташқи бўлади. Ҳам ташқи, ҳам ички траекториялар учун бири иккинчисини инкор қиладиган қуйидаги икки ҳол юз бериши мумкин. Яъни, К га яқин нуқтада бошланадиган барча ички траекториялар ё* $t \to +\infty$ *да, ёки* $t \to -\infty$ *да спирал каби К га ўралади. Худди шу тасдиқ ташқи траекториялар учун ҳам ўринли* (65 а, б- чизма)).

Бу теореманинг исботига ўтишдан аввал баъзи ёрдамчи тасдиқлар керак бўлади.

Агар *К* га яқин барча нуқталардан бошланадиган барча траекториялар (хоҳ ички, хоҳ ташқи бўлмасин) $t \to +\infty$ да *К* га ўралса, у ҳолда лимит давра *турғун* дейилади (65, *а*- чизма). Агар *К* га яқин барча нуқталардан бошланадиган траекториялар $t \to -\infty$ да *К* га ўралса, у ҳолда лимит давра *бутунлай нотурғун* дейилади (65, *б*- чизма). Қолган икки ҳолда (хусусан, ички траекториялар *К* га $t \to -\infty$ да, ташқи траекториялар $t \to +\infty$ да ўралса ва аксинча) лимит давра ярим турғун дейилади (65, *в*- чизма).

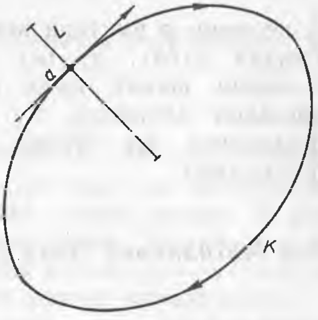
Лимит давра яқинидаги траекторияларнинг хоссаларини, яъни уларнинг лимит даврага ўралишини баён этишда *эргаш функция* тушунчаси муҳим роль ўйнайди. А. Пуанкаренинг катта хизматларидан бири шу функцияни киритиб, ундан фойдаланганлигидадир. Эргаш функциянинг таърифини икки оғиз сўз билан баён этиб бўлмайди, уни маълум маънода қурилади.

Р текисликда даври τ бўлган даврий ечимнинг графигидан иборат ёпиқ эгри чизиқни *К* дейлик. *L* эса *Р* текисликда ётган шундай тўғри чизиқли кесмаки, у *К* эгри чизиқни *L* га нисбатан ички бўлган ягона



65- чизма

a нуқтада нолдан фарқли бурчак остида (яъни уринмасдан) кесиб ўтсин (66-чизма).

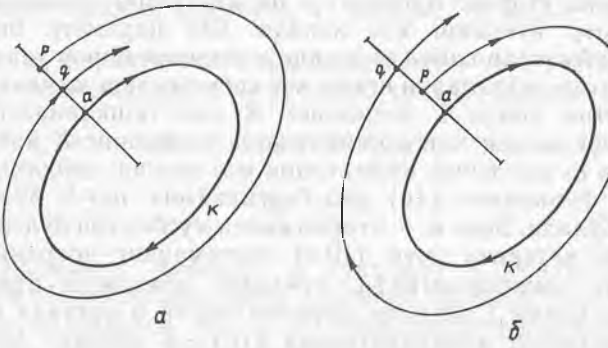


66- чизма

L кесмаси ётган тўғри чизиқда сонли координата киритамиз. a нуқтанинг координатасини u_0, L кесманинг a дан фарқли ихтиёрий нуқтасини p деб, унинг координатасини u деб белгилаймиз. Шундай қилиб, $a=a(u_0)$, $p=p(u)$. Энди p нуқтадан (10.2) системанинг $\varphi(t, p)$ траекториясини ўтказиб, шу траектория бўйича t нинг ўсишига мос йўналишда ҳаракат қиламиз. Агар p нуқта a нуқтага яқин бўлса, у ҳолда K нинг яқинида бошқа ёпиқ траектория йўқлигидан $\varphi(t, p)$ траектория ҳар τ га яқин вақтда L кесмани кесиб ўтади. Шу траекториянинг L кесма билан p нуқтадан кейин биринчи учрашув нуқтасини q, унинг координатасини эса $\chi_1(u)$ деймиз. Агар p нуқтадан $\varphi(t, p)$ траектория бўйлаб, t нинг камайишига мос йўналишда ҳаракат қилсак, шу траектория τ га яқин вақтда L билан биринчи марта учрашади. Шу нуқтани r, координатасини эса $\chi_{-1}(u)$ деб белгилаймиз (67, *а, б*- чизма). 67- чизмада p нуқта K ёпиқ чизиғидан ташқарида олинган. Худди шу чизмаларни p нуқта K нинг ичида ётганда ҳам келтириш мумкин (68, *а, б*- чизма). Юқорида икки $\chi_1(u)$ ва $\chi_{-1}(u)$ функциялар киритилди. Улар узлуксиз ва ўзаро тескари функциядир, яъни

$$\chi_{-1}(\chi_1(u))=u,\ \chi_1(\chi_{-1}(u))=u.$$

Ҳақиқатан, q нуқтадан t нинг камайишига мос йўналишда траектория бўйлаб ҳаракат қилинса, L кесмани биринчи марта p нуқтада кесиб ўтади, демак, $\chi_{-1}(\chi_1(u))=u$. Шунга ўхшаш, агар r нуқтадан t нинг ўсишига мос йўналишда тегишли траектория бўйлаб ҳаракат қилинса, у ҳолда бу траектория биринчи марта

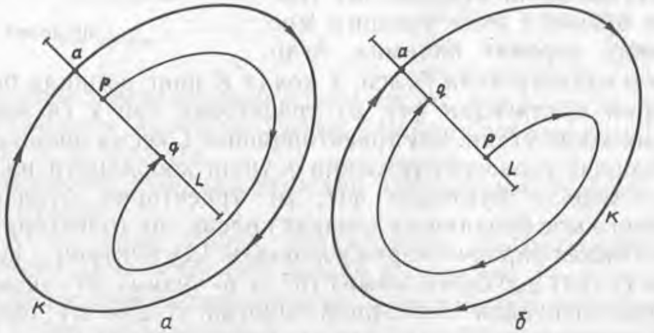


67- чизма

L кесмани p нуқтада кесиб·ўтади, демак, $\chi_1(\chi_{-1}(u))=u$. Кейинги бандда $\chi_1(u)$, $\chi_{-1}(u)$ функцияларнинг хоссалари ўрганилади. Ҳозирча фақат қайд қилиб ўтамизки, $\chi_1(u)$ функция *эргаш функция* дейилади, бу функция узлуксиз ва узлуксиз тескари функцияга эга бўлиб, $\chi_1^{-1}(u)=\chi_{-1}(u)$ хосса ўринли. Эргаш функцияни

$$\chi=\chi_1(u) \tag{11.48}$$

деб белгилаймиз. Энди 11.10-теореманинг исботига ўтамиз.



68- чизма

11.10-теореманинг исботи. P текисликда шундай L кесма оламизки, у K эгри чизиқни ягона a нуқтада уринмасдан ва L га нисбатан ички нуқтада кесиб ўтсин. L кесмада сон координата (параметр) киритамиз ва u_0 билан a нуқтанинг координатасини белгилаймиз. Зарурат бўлса, u_0 параметр ёрдамида a нуқтанинг Декарт координаталарини топиш мумкин. Унинг учун L кесма ётган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини ёзиб, параметрга $u=u_0$ қиймат бериш етарли. Албатта, u параметрнинг ўсишига L кесма бўйича бирор йўналиш мос келади. Шу параметр бирор ёпиқ оралиқда қийматлар қабул қилганда кесманинг бирор учидан бошқа учигача бўлган нуқталарни кетма-кет ҳосил қилиш мумкин. Хусусан, биз кўраётган ҳолда L кесманинг K дан ташқаридаги қисмига параметрнинг u_0 дан катта қийматлари, кесманинг K нинг ичидаги қисмига эса u_0 дан кичик қийматлари мос келсин, дейлик. L кесмага мос эргаш функцияни $\chi(u)$ деб белгилаймиз. $u_0 \in K$ бўлгани учун $\chi(u_0)=u_0$ бўлади. Энди α — етарли кичик мусбат сон бўлсин. У ҳолда $|u-u_0|<\alpha$ интервал учун (10.2) системанинг координатаси шу интервалдан олинган $p(u)\in L$ нуқтадан чиқадиган траекторияси вақт ўтиши билан L кесмани биринчи марта q нуқтада кесиб ўтади. Шу нуқтанинг координатасини $\chi(u)=v$ дейлик. Агар q нуқтанинг координатаси ҳам p нуқтасиникидек u га тенг бўлса, у ҳолда p нуқтадан чиқадиган траектория яна шу нуқтага, яъни

$q(\chi(u)) = p(u)$ нуқтага келади, демак, траектория ёпиқ бўлади. Бу ҳол ўринли бўлиши учун ушбу

$$\chi(u) = u \tag{11.49}$$

тенглик ўринли бўлиши лозим. Аммо K чизик (11.49) системанинг яккаланган траекторияси бўлгани учун $|u - u_0| < \alpha$ интервалда (11.49) тенглама ягона ечимга эга. Энди лимит давра K дан ташқарида унга етарли яқин траекторияларни ўрганамиз, бу траекторияларга $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервал мос келади. $u_0 - \alpha < u < u_0$ интервалга мос ички траекториялар шунга ўхшаш ўрганилади.

Шундай қилиб, юқоридаги мулоҳазалардан $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалда қуйидаги икки тенгсизликдан бири бажарилади:

$$\chi(u) < u, \tag{11.50}$$

$$\chi(u) > u. \tag{11.51}$$

Агар кўрилаётган интервалнинг бир қисмида (11.50) тенгсизлик, иккинчи қисмида эса (11.51) тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\chi(u)$ функциянинг узлуксизлиги туфайли $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалда (11.49) тенглик ўринли бўладиган нуқта топилар эди. Бу бўлиши мумкин эмас. Олинган $p \notin K$, $p \in L$ нуқта K дан ташқарида бўлиб, бу нуқтада бошланадиган траектория K ни кесиб ўта олмагани учун $q \in L$ нуқта ҳам K дан ташқарида ётади. Шунинг учун $u > u_0$ бўлганидан

$$\chi(u) > u_0 \tag{11.52}$$

тенгсизлик ўринли.

Етарли кичик $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалда (11.50) тенгсизлик ўринли бўлсин. Кўрилаётган интервалдан ихтиёрий u_1 сонни оламиз. Энди u_1, u_2, u_3, ... сонлар кетма-кетлигини

$$u_{i+1} = \chi(u_i),\ i = 1,\ 2,\ \dots \tag{11.53}$$

формула ёрдамида аниқлаймиз. (11.50), (11.51), (11.52) муносабатлардан $u > u_0$ ва $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ тенгсизликлар келиб чиқади. Бундан $\{u_i\}$ кетма-кетлик камаювчи экани кўриниб турибди. Бу кетма-кетлик қуйидан u_0 билан чегараланган бўлиб, камаювчи эканидан унинг лимити мавжуд. Лимитни u^* дейлик: $\lim\limits_{i \to \infty} u_i = u^*$. Аммо u^* нуқта $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалга тегишли, шунинг учун (11.49) тенглама ечимининг ягоналигидан $u^* = u_0$ келиб чиқади. Демак, $\lim\limits_{i \to \infty} u_i = u_0$. L кесманинг u_i координатага мос нуқтасини p_i десак, юқоридаги мулоҳазалардан

$$\lim_{i \to \infty} p_i = a$$

эканига ишонамиз. Албатта, p_i нуқтадан p_{i+1} нуқтага тегишли траектория бўйлаб келиш вақти τ га яқин. Шунинг учун p_i нуқтадан чиқадиган траектория билан K траектория орасидаги минимал масофа вақт ортиши билан камайиб боради. Агар бирор моментда камайиш жараёни бўлмаса, худди шу моментга мос нуқта орқали L кесмани ўтказиб, $\{u_i\}$ кетма-кетликнинг камаювчанлигига зид натижа оламиз. Бу мулоҳазалар кўрсатадики, p_1 нуқтадан чиқадиган траектория вақт ортиши билан *Қ* га ўрала бошлайди (спирал каби). Шундай қилиб,. (11.50) тенгсизлик бажарилганда L кесманинг $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалдан олинган координатаси ихтиёрий нуқтасидан чиқадиган траектория $t \to +\infty$ да *Қ* га спирал каби ўралади.

Агар $u_0 < u < u_0 + \alpha$ интервалда (11.51) тенгсизлик бажарилса, $\chi(u)$ функцияга тескари $\chi^{-1}(u)$ функция учун бирор $u_0 < u < u_0 + \beta$, $\beta > 0$ интервалда ушбу

$$\chi^{-1}(v) < v$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди юқоридаги каби, L кесманинг координатаси v, $u_0 < v < u_0 + \beta$ бўлган нуқтасидан чиққан траектория $t \to -\infty$ да *Қ* га спирал каби ўралади.

Шундай қилиб, лимит даврага яқин траекторияларнинг барчаси ўрганилди. Улар ё $t \to +\infty$ да ё $t \to -\infty$ да *Қ* га спирал каби ўралади. Демак, теорема исбот бўлди.

Эслатма. Юқорида исботланган теоремада мавжуд ҳолларни бирлаштириш мақсадида ушбу

$$\left.\begin{aligned} |\chi(u) - u_0| &< |u - u_0|, \\ |\chi(u) - u_0| &> |u - u_0| \end{aligned}\right\} \qquad (11.54)$$

тенгсизликларни кўрамиз. Агар *Қ* чизиқнинг ички ёки ташқи ярим атрофида ёки L кесманинг a нуқтага яқин бўлган *Қ* га нисбатан ички ёки ташқи нуқталарида (11.54) дан биринчиси бажарилса, траекториялар *Қ* га $t \to +\infty$ да спирал каби ўралади; шунга ўхшаш; агар айтилган ярим атрофда (11.54) дан иккинчиси бажарилса, у ҳолда траекториялар *Қ* га $t \to -\infty$ да спирал каби ўралади.

2. Эргаш функция ва унинг хоссалари. (10.2) системанинг 0, ξ бошланғич қийматларга эга бўлган ечимини $\varphi(t, \xi)$, даври τ бўлган ва a нуқтадан ўтадиган даврий ечимини $\varphi(t, a)$ деб белгилаймиз. $\varphi(t, a)$ ечимнинг графигини — ёпиқ эгри чизиқни *Қ*, шу эгри чизиқни ягона ички a нуқтада уринмасдан кесадиган тўғри чизиқли кесмани L дейлик. L кесмада параметр v киритамиз. Шу координата ёрдамида L кесманинг параметрик тенгламаси $x = g(v)$ бўлсин, a нуқтанинг координатасини $v = u_0$ дейлик. Етарли кичик мусбат сон $\alpha > 0$ берилганда ҳам ушбу $\varphi(t, g(u)) = \varphi(t, u)$ траектория $|u - u_0| < \alpha$ интервалда L кесмани t нинг мусбат қийматларида ҳам, манфий қийматларида ҳам кесиб ўтади. $\varphi(t, u)$ траекториянинг L кесмани t нинг минимал мусбат $t_1(u)$ қийматида кесиб ўтсин, $\chi_1(u)$ эса, $t_1(u)$ моментда кесишиш нуқтасининг координатаси бўлсин. Шунга ўхшаш $t_{-1}(u)$ миқдор L кесмани траектория кесиб ўтиш моментининг абсолют қиймати бўйича минимал қиймати, $\chi_{-1}(u)$ эса шу моментга мос кесишиш нуқтасининг координатаси бўлсин. Агар етарли кичик мусбат сон $\alpha > 0$ берилган бўлса, у ҳолда $|u - u_0| < \alpha$ интервалда юқорида қурилган

$$t_1(u),\ \chi_1(u),\ t_{-1}(u),\ \chi_{-1}(u)$$

функциялар узлуксиз ва қуйидаги

$$t_1(u_0) = \tau,\ \chi_1(u_0) = u_0,\ t_{-1}(u_0) = -\tau,\ \chi_{-1}(u_0) = u_0$$

шартларни қаноатлантиради. Шу билан бирга χ_1 ва χ_{-1} функциялар етарли кичик u лар учун ўзаро тескаридир, яъни

$$\chi_{-1}(\chi_1(u))=u,\ \chi_1(\chi_{-1}(u))=u$$

ва узлуксиз дифференциалланувчидир. Бунда $\chi=\chi_1(u)$ функция эргаш функция дейилади. Эргаш функцияларнинг бу хоссасини исбот этмаймиз*⁾.

3. Эргаш функциянинг геометрик тасвири. Нормал мухтор системаларнинг лимит давраларини ўрганиш учун мос эргаш функцияни ўрганиш етарли. Албатта, ҳар бир система учун эргаш функцияни тузиш мумкин бўлавермайди. Бу қийин масала. Қуйида биз эргаш-функция мавжуд деб фараз этиб, уни сифат нуқтаи назаридан текширамиз. Соддалик учун эргаш функцияни $\chi(u)$ деб белгилаймиз, ушбу

$$v=\chi(u) \tag{11.55}$$

эгри чизиқнинг графигини ўрганамиз. Аслида биз (11.49) тенгламанинг ечими ва (10.2) системанинг унга мос лимит даврасини ўрганишимиз лозим. Шу мақсадда u, v ўзгарувчилар текислигида (11.55) эгри чизиқ билан

$$v=u \tag{11.56}$$

биссектрисанинг кесишиш нуқталарини ўрганамиз. Фараз этайлик, $u_0>0$ ва $\chi(u_0)=u_0$ бўлсин. Шу u_0 координатага (параметрга) мос лимит давранинг етарли кичик атрофини ўрганишимиз керак. Демак, графиклар координаталар текислигининг I чорагида ўрганилади.

u ва v ўзгарувчилар текислиги ва унда чизилган $v=\chi(u)$ ва $v=u$ чизиқлар графиги *Ламерей диаграммаси* дейилади.

(11.49) тенгламанинг барча ечимларини топиш учун (11.55) ва (11.56) чизиқларнинг барча кесишиш нуқталарини топиш лозим. Биз $(u_0,\ u_0)$ нуқтани $(u_0>0)$ чуқурроқ ўрганамиз. Бошқа кесишиш нуқталари ҳам шунга ўхшаш ўрганилади.

$u=u_0$ га мос келган ёпиқ траектория лимит давра бўлиши учун $(u_0,\ u_0)$ нуқта яккаланган бўлиши зарур ва етарли. Агар $\chi'(u_0)\neq 1$ бўлса, у ҳолда $(u_0,\ u_0)$ нуқта яккаланган бўлади. Бу ҳолда $(u_0,\ u_0)$ нуқтада (11.55) ва (11.56) чизиқларнинг графиги ўзаро уринмайди. Мос лимит даврага эса *қўпол лимит давра* дейилади. Аммо $\chi'(u_0)=1$ бўлса, лимит давранинг турғунлиги юқори тартибли ҳосилалар ёрдамида текширилади. Ушбу

$$\varkappa(u)=\chi(u)-u \tag{11.57}$$

ёрдамчи функцияни киритамиз. Равшанки, лимит даврага мос келган $u=u_0$ учун $\varkappa(u_0)=0$ бўлади. Мулоҳазаларимизда $\varkappa$ функция керакли тартибли барча ҳосилаларга эга бўлсин деб фараз этамиз. u_0 нуқтанинг етарли кичик атрофини $I_0=\{u\colon\ |u-u_0|<\alpha,\ \alpha>0\}$ деб белгилаймиз. Биз иш кўрадиган барча u нуқталар шу I_0 интервалдан олинади. Буни доим айтиб ўтирмаймиз. $v\neq u$ биссектриса I координата бурчагини икки $I_1=\{(u,\ v)\colon v>u\}$ ва $I_2=\{(u\ \ v)\colon v<u\}$ бўлакка бўлади (69-чизма). Ниҳоят, $u=u_0$ нуқтанинг I_0 атрофида $\varkappa(u)$ функция учун Тейлор формуласини ёзамиз:

---

*⁾ Исботни Л. С. Понтрягиннинг «Обыкновенные дифференциальные уравнения» китобидан ўқиш мумкин [1]

$$\varkappa(u)=\varkappa'(u_0)(u-u_0)+\frac{\varkappa''(u_0)}{2!}(u-u_0)^2+\ldots+\frac{\varkappa^{(k)}(u_0)}{k!}(u-u_0)^k+$$

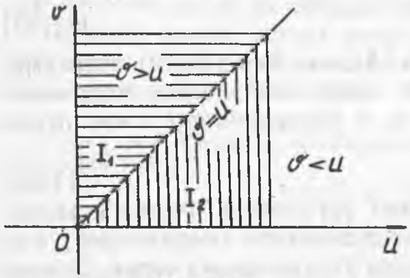
$$+0(|u-u_0|^k), \qquad (11.58)$$

$$\text{бунда } \lim_{z\to 0}\frac{0(z)}{z}=0,\ \varkappa'(u_0)=\chi'(u_0)-1,\ \varkappa''(u_0)=$$

$$=\chi''(u_0),\ \ldots,\ \chi^{(k)}(u_0)=\chi^{(k)}(u_0),\ \ldots$$

Лимит давранинг турғунлигини эргаш функция ёрдамида текшириш учун қуйидаги ҳолларни кўрамиз:

I. $\chi'(u_0)\neq 0$ ёки барибир, $\chi'(u_0)\neq 1$ (қўпол лимит давра).



69- чизма

а) $\varkappa'(u_0)<0$ ёки барибир $\chi'(u_0)<1$.

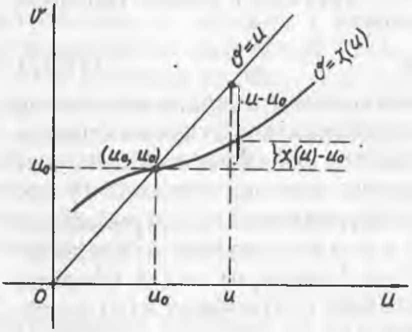
Агар $u<u_0$ бўлса, $\chi(u)>u$ ва демак, $0>\chi(u)-u_0>u-u_0$ тенгсизликлар ўринли. Бундан $|\chi(u)-u_0|<|u-u_0|$ тенгсизлик келиб чиқади. Шунга ўхшаш, агар $u>u_0$ бўлса, $\chi(u)<u$ ва демак, $0<\chi(u)-u_0<u-u_0$ ға эгамиз. Бундан яна $|\chi(u)-u_0|<|u-u_0|$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Демак, $\varkappa\,(u_0)<0$ бўлганда (11.54) тенгсизликлардан биринчиси бажарилади. 332- бетдаги эслатмага кўра, $\chi'(u_0)<1$ бўлғанда u_0 га мос лимит давра турғун бўлади (70-чизма).

б) $\varkappa'(u_0)>0$ ёки барибир $\chi'(u_0)>1$. Бу ҳолда худди *а)* ҳолидаги мулоҳазалар ёрдамида (11.54) тенгсизликлардан иккинчисига эга бўламиз. Демак, u_0 нуқтага мос лимит давра бутунлай нотурғун бўлади (71-чизма).

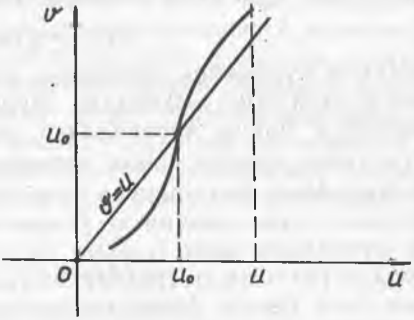
II. $\varkappa'(u_0)=\ldots=\varkappa^{(k-1)}(u_0)=0,\ \varkappa^{(k)}(u_0)\neq 0,\ k=1,2,\ \ldots,\ n.$

Демак, $\chi'(u_0)=1$ бўлган ҳол кўрилаяпти.

а) $k=2$ бўлганда $\varkappa'(u_0)=0$, $\varkappa''(u_0)\neq 0$ га эгамиз. Демак,



70- чизма



71- чизма

$\chi'(u_0)=1$. Шунинг учун $\chi(u)$ функциянинг графиги биссектрисага $(u_0,\ u_0)$ нуқтада уринади (11.58) формуладан шу ҳолда ушбу

$$\varkappa(u)=(u-u_0)^2\frac{\varkappa''(u_0)}{2!}+0(|u-u_0|^2)$$

муносабат келиб чиқади. Унинг ўнг томонидаги ифоданинг ишораси u нинг I_0 интервалдан олинган қийматларида $\chi''(u_0)$ миқдорнинг ишораси билан аниқланади. Шунинг учун $\varkappa''(u_0)>0$ бўлганда $\varkappa(u)>0$ ёки $\chi(u)>u$, $u\in I_0$ тенгсизлик ўринли. Демак, $\chi(u)$ функциянинг графиги I_2 тўпламда жойлашган бўлиб, u_0 нуқтанинг I_0 атрофида қавариқлиги пастга қараган бўлади. Шунга ўхшаш, $\varkappa''(u_0)<0$ бўлганда $\chi(u)$ функциянинг графиги I_1 тўпламда жойлашган бўлиб, I_0 интервалда қавариқлиги юқорига қараган бўлади (72 а, б-чизма). Биз лимит давранинг ярим турғун бўлган ҳолига эгамиз.

б) Энди $k=3$ бўлсин. Бу ҳолда $\varkappa'(u_0)=0$, $\varkappa''(u_0)=0$, $\varkappa'''(u_0)\neq 0$ (11.58) формуладан қуйидагига эгамиз:

$$\varkappa(u)=\frac{\varkappa'''(u_0)}{3!}\ (u-u_0)^3+0\ (|u-u_0|^3). \tag{11.59}$$

Аввало $\varkappa''(u_0)=\chi''(u_0)=0$ бўлгани учун $(u_0,\ u_0)$ нуқта $\chi(u)$ функциянинг бурилиш нуқтаси бўлади. Демак, функциянинг графиги $v=u$ биссектрисанинг бир томонидан иккинчи томонига унга уриниб ўтади. Бунда яна икки ҳол юз беради:

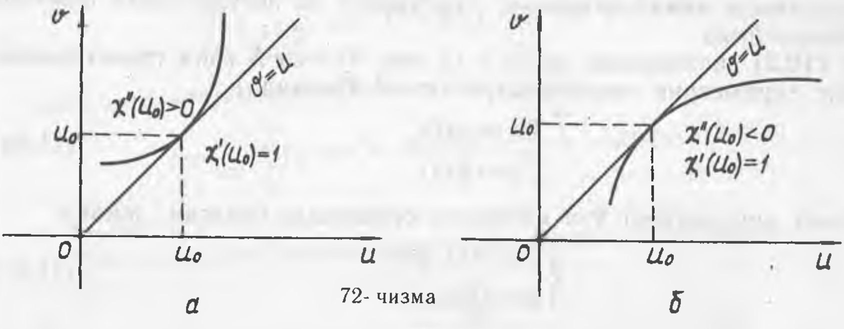
б$_1$) $\varkappa'''(u_0)=\chi'''(u_0)>0$.

(11.59) формулага кўра бу ҳолда $u>u_0$ бўлганда $\varkappa(u)<0$ ёки $\chi(u)<u$, $u>u_0$ бўлганда эса $\varkappa(u)>0$ ёки $\chi(u)>u$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Кўринадики, $\chi(u)$ функциянинг графиги $v=u$ биссектрисани кесиб I_1 тўпламдан I_2 тўпламга ўтади. 332- бетдаги эслатмага кўра (71- чизма) биз бутунлай нотурғун лимит даврага эгамиз.

б$_2$) $\varkappa'''(u_0)=\chi'''(u_0)<0$. Бу ҳолда б$_1$ даги мулоҳазалар ёрдамида u_0 га турғун лимит давра мос келишини кўрсатиш мумкин.

в) $k=2k_*$, $k_*=1, 2, \ldots$. Бу ҳолда (11.58) формуладан топамиз:

$$\varkappa(u)=\frac{\varkappa^{(2k_*)}(u_0)}{(2k_*)!}\ (u-u_0)^{2k_*}+0(|u-u_0|^{2k_*})$$



а　　72- чизма　　б

Худди $k=2$ бўлган а) ҳолдаги мулоҳазалар каби бу ҳолда ҳам лимит давра ярим турғун бўлади.

г) $k=2k_*+1$, $k_*=0,1,\ 2,\ \ldots$. Бу ҳолда ҳам (11.58) формуладан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$\varkappa(u)=\frac{\varkappa_*^{(2k+1)}(u_0)}{(2k_*+1)!}\,(u-u_0)^{2k_*+1}+0(|u-u_0|^{2k_*+1}).$$

Энди б) ҳолида юритилган мулоҳазаларни қўлланиб, $\varkappa^{(2k_*+1)}(u_0)>$ >0 бўлганда лимит давра бутунлай нотурғун ва $\varkappa^{(2k_*+1)}(u_0)<0$ бўлганда эса лимит давра турғун эканини тасдиқлаш мумкин.

III. $\varkappa'(u_0)=\varkappa''(u_0)=\ldots=\varkappa^{(k)}(u_0)=\ldots=0$,
ёки барибир

$$\chi'(u_0)=1,\ \chi''(u_0)=\ldots=\chi^{(k)}(u_0)=\ldots=0.$$

Бу ҳолда (11.58) формуладан $\varkappa(u)\equiv 0$ ёки барибир $\chi(u)\equiv u$ келиб чиқади. Кўрамизки, L кесманинг u_0 координатали a нуқтасидан етарли кичик масофадаги барча нуқталаридан ёпиқ траекториялар ўтади. Шунинг учун таърифга кўра u_0 га мос лимит давра K ажратилган ёпиқ траектория бўла олмайди. Бу ҳол иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли мухтор системанинг ҳолат текислигидаги марказ манзарасига ўхшайди.

Шундай қилиб, биз эргаш функцияни тўла ўргандик, $k=1$ бўлганда лимит давра *оддий* дейилади, $k>1$ бўлганда эса k нинг жуфт ёки тоқ бўлишига қараб мос равишда *жуфт каррали* ёки *тоқ каррали* лимит давраларга эгамиз. $k>1$ га мос лимит даврани қисқача *мураккаб лимит давра* деб ҳам юритилади.

Юқоридаги мулоҳазалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. (10.2) *системанинг ўнг томонидаги функциялар аналитик бўлиб, бу система учун ёпиқ траектория мавжуд бўлса, у ҳолда бу траектория ё яккаланган, демак, лимит давра бўлади ёки унинг атрофидаги барча траекториялар ёпиқ бўлади.*

Шуни эслатамизки, эргаш функцияни ўрганишда, уни Тейлор қаторига ёйиш мумкинлиги аввалдан фараз этилди. Демак, $\chi(u)$ функция аналитик деб қаралди. Бу ҳол (10.2) системанинг ўнг томонидаги функциялар ҳам аналитик бўлгандагина содир бўлади.

4. Ляпуновнинг характеристик кўрсаткичи. Биз бу бандда Ляпуновнинг характеристик кўрсаткичи тушунчасини киритиб у ёрдамида лимит давранинг турғунлиги ва нотурғунлиги шартини ифодалаймиз.

(10.2) системанинг даври τ га тенг бўлган K ёпиқ траекториясининг параметрик тенгламалари ($n=2$ бўлганда)

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \tag{11.60}$$

бўлиб, системанинг ўзи қуйидаги кўринишда ёзилсин, дейлик:

$$\begin{cases} \dot{x}=P(x,y), \\ \dot{y}=Q(x,y). \end{cases} \tag{11.61}$$

Бунда $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функциялар бирор D_2 соҳада биринчи тартибли хусусий ҳосилалари $\frac{\partial P}{dx}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ билан бирга узлуксиз деб фараз этамиз.

11.8-таъриф. *Ушбу*

$$h=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\left[\frac{\partial P(\varphi(t),\ \psi(t))}{\partial x}+\frac{\partial Q(\varphi)t),\psi(t)}{\partial y}\right]dt \tag{11.62}$$

ифода ёпиқ К траекториянинг характеристик кўрсаткичи дейилади ва Ляпунов номи билан аталади.

11.11-теорема. *Агар $h<0$ бўлса, ёпиқ К траектория турғун, $h>0$ бўлса, бутунлай турғунмас лимит давра бўлади*[*].

Мисол. Ушбу

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-y+x[1-(x^2+y^2)],\ (=P)\\ \dot{y}&=-x+y[1-(x^2+y^2)]\ (=Q)\end{aligned} \tag{11.63}$$

системанинг траекториялари ҳолат текислигида ўрганилсин.

Параметрик тенгламалари билан берилган

$$(K)\ \begin{cases} x=\cos(t-t_0) & (=\varphi(t)),\\ y=\sin(t-t_0) & (=\psi(t))\end{cases} \tag{11.64}$$

чизиқ маркази координата бошида ва радиуси 1 га тенг бўлган айланадан иборат бўлиб, (11.63) системанинг ечимидир. (11.63) системанинг умумий ечими

$$x=\frac{\cos\ (t-t_0)}{\sqrt{1+Ce^{-2(t-t_0)}}},\quad y=\frac{\sin\ (t-t_0\ )}{\sqrt{1+Ce^{-2(t-t_0)}}}$$

формула билан ифодаланади. Буни исботлаш учун қутб координаталарига ўтиш етарли. Бундан $C=0$ бўлса, юқорнда эслатилган ёпиқ траектория — айлана ҳосил бўлади. Шу ёпиқ траектория (11.63) системанинг яккаланган ёпиқ траекториясидир, чунки унинг етарли кичик қийматларига мос келган бошқа ёпиқ траектория мавжуд эмас. Энди бу (К) траекториянинг турғунлигини Ляпуновнинг характеристик кўрсаткичи ёрдамида текширамиз. (11.64) траектория бўйлаб $\tau=2\pi$ га тенг. $\frac{\partial P(\varphi(t),\ \psi(t))}{\partial x}$, $\frac{\partial Q(\varphi(t),\ \psi(t))}{\partial y}$ ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial P}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)}}=(1-3x^2-y^2)\Bigg|_{\substack{x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)}}=-2\cos^2 t,\ t_0=0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}\Bigg|_{\substack{x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)}}=(1-x^2-3y^2)\Bigg|_{\substack{x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)}}=-2\sin^2 t,\ t_0=0,$$

Содда ҳисоблашлар ёрдамида h ни топамиз ($\tau=2\pi$):

$$h=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[-2\cos^2 t-2\sin^2 t]dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-2)\,dt=-2<0.$$

---

[*] Бу теореманинг исботини китобхон [25] китобдан ўқиши мумкин.

12- боб

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

12.1-§. ЕЧИМНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ ҲАҚИДА

1. Асосий тушунчалар. Мазкур китобнинг кириш қисмида хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар тўғрисида тушунча берган эдик. Умумий ҳолда n та $x_1, \ldots, x_n$ эркли ўзгарувчили хусусий ҳосилали тенгламани ушбу

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}, \ldots\right)=0 \qquad (12.1)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда F — ўз аргументларининг берилган функциясидир. (12.1) тенгламада иштирок этаётган номаълум функция ҳосиласининг энг юқори тартибини шу *тенгламанинг тартиби* дейилади. (12.1) тенгламанинг *ечими* деб, $x_1, \ldots, x_n$ ларнинг бирор ўзгариш соҳасида тенгламага кирган, ўзининг ҳосилалари билан аниқланган ва тенгламани айниятга айлантирадиган $u=a(x_1, \ldots, x_n)$ функцияни айтилади.

Ушбу

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0 \qquad (12.2)$$

кўринишдаги тенглама *биринчи тартибли n та ўзгарувчили хусусий ҳосилали тенглама* дейилади.

Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар учун кўпинча қисқартирилган ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=p_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=p_2, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial x_n}=p_n$$

белгилашлар ишлатилиб, булар ёрдамида (12.2) тенглама бундай ёзилади:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)=0. \qquad (12.2')$$

Эркли ўзгарувчилар сони иккита бўлган ҳолда уларни x ва y, номаълум функцияни z, ҳосилаларни эса $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$ орқали белгилаб, тенгламани

$$F(x, y, z, p, q)=0 \qquad (12.3)$$

кўринишда ёзилади.

Маълумки, n-тартибли оддий дифференциал тенглама чексиз кўп ечимларга эга. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларда эркли ўзгарувчиларнинг сони биттадан ортиқ бўлгани учун бундай тенгламалар ҳам чексиз кўп ечимга эга эканлигини кутиш мумкин.

Мисоллар. 1. Номаълум $z(x, y)$ функция учун

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

тенглама $z(x, y)$ нинг x га боғлиқ эмаслигини кўрсатади. Демак,

$$z=\varphi(y),$$

бунда $\varphi(y)-y$ нинг ихтиёрий функцияси.

2. Ушбу

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}=\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$$

хусусий ҳосилали тенглама эркли ўзгарувчиларни

$$x+y=\xi,\ x-y=\eta$$

формулалар ёрдамида алмаштириш натижасида

$$2\frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta}=0$$

кўринишга келади, бунда $z(x, y)=v(\xi, \eta)$.

Охирги тенгламадан $v(\xi, \eta)$ функция η га боғлиқ эмаслиги келиб чиқади. Шунинг учун

$$v(\xi, \eta)=\varphi(\xi)$$

деб ёзиш мумкин, бунда $\varphi(\xi)-\xi$ нинг ихтиёрий функцияси.

Демак, $z(x, y)=\varphi(x+y)$. Худди шунга ўхшаш, α ва β лар ўзгармас ҳақиқий сонлар бўлса,

$$\alpha\frac{\partial z}{\partial x}+\beta\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

тенгламанинг ечими учун $z(x, y)=\varphi(\beta x+\alpha y)$ ни ҳосил қиламиз, бунда $\varphi(\beta x+\alpha y)$ — ихтиёрий функция.

3. Ушбу

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x\, \partial y}=0 \qquad \text{ёки} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

тенгламани кўрамиз. Уни x бўйича интеграллаб, $\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(y)$ тенгламани ҳосил қиламиз, бунда y нинг ихтиёрий функцияси $\varphi(y)$. Энди y бўйича интеграллаб,

$$z(x, y)=\int\varphi(y)\,dy+\varphi_1(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бунда x нинг ихтиёрий функцияси $\varphi_1(x)$. $\int\varphi(y)\,dy=\varphi_2(y)$ деб белгилаб, натижада $z(x, y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)$ формулага эга бўламиз, бунда $\varphi(y)$ ихтиёрий бўлгани учун $\varphi_2(y)$ ҳам y нинг ихтиёрий дифференциалланувчи функциясидир.

Юқорида келтирилган мисоллар биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг барча ечимлари формуласи, яъни умумий ечими битта ихтиёрий функцияга, иккинчи тартиблиники иккита ихтиёрий функцияга, m-тартибли тенгламанинг умумий ечими m та ихтиёрий функцияга боғлиқ бўлиши керак деган фикрга олиб келади. Бу фикр тўғри бўлса-да, лекин уни аниқлаш зарур. Шу мақсадда хусусий ҳосилали дифференциал тенглама ечимларининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги С. В. Ковалевская теоремасини келтирамиз. m-тартибли юқори ҳосилалардан биттасига нисбатан ечилган ушбу

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}=f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1}},\right.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) \qquad (12.4)$$

тенгламани кўрамиз. Оддий дифференциал тенгламаларга ўхшаш (12.4) тенглама учун ҳам маълум шартларни, масалан, бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимни топиш масаласини қўйиш мумкин. (12.4) тенглама учун бошланғич шартлар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_1=x_1^0 \text{ да}$$

$$u=\varphi_0(x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \frac{\partial u}{\partial x_1}=\varphi_1\ (x_2,\ \ldots,\ x_n),$$

$$\ldots,\ \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1}}=\varphi_{m-1}\ (x_2,\ \ldots,\ x_n), \qquad (12.5)$$

бунда $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ — берилган функциялар. (12.4) тенгламанинг (12.5) шартларни қаноатлантирадиган ечимини топишни *Коши масаласи* дейилади.

2. Ковалевская теоремаси. *Агар* (12.5) *бошланғич шартда берилган* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ *функциялар бошланғич* $(x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *нуқтанинг атрофида аналитик функция,* f *функция эса ўз аргументларининг ушбу бошланғич қийматлари* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$,

$$u_0=\varphi_0(x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0),\ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_0=\varphi_1\,(x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0),\ \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)_0=\left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial x_n^m}\right)\Bigg|_{\substack{x_1=x_1^0,\\ \ldots\ldots\\ x_n=x_n^0}}$$

атрофида аналитик бўлса, у ҳолда (12.4) *тенгламанинг* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *нуқта атрофида аналитик бўлган бирдан-бир ягона ечими мавжуд.*

Шундай қилиб, Ковалевская теоремасига асосан (12.4), (12.5) масаланинг ечими бошланғич $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ функциялар ёрдамида аниқланади.

Келтирилган теореманинг исботи аналитик функциялар назариясига асосланган бўлгани учун биз уни келтирмаймиз.

Шу нарсани таъкидлаб ўтамизки, (12.4), (12.5) масала кичик соҳада, яъни $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ нуқтанинг етарли кичик атрофида қўйилган бўлиб, шу атрофда бирдан-бир ечимга эгадир.

3. Коши масаласининг геометрик талқини. Эркли ўзгарувчиларнинг сони иккита бўлган ҳолда биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани интеграллаш масаласи хамда Коши масаласи жуда содда геометрик талқинга (интерпретацига) эга. Биринчи тартибли (12.3) тенгламани ёки хусусий ҳосилалардан биттасига нисбатан ечилган ушбу

$$p=f(x,\ y,\ z,\ q) \qquad (12.3')$$

тенгламани текширамиз.

(12.3) ёки (12.3′) тенгламанинг ечимини топиш

$$z=\Phi(x,\ y) \tag{12.6}$$

функцияни топиш демакдир.

(12.6) функция $(x,\ y,\ z)$ ўзгарувчиларнинг фазосида сиртни ифодалайди, бу сиртни одатда (12.3) ёки (12.3′) тенгламанинг *интеграл сирти* дейилади. Демак, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг ечимларини топиш масаласи интеграл сиртларни топиш масаласидан иборатдир.

Агар (12.6) ни сиртни аниқлайдиган тенглама деб қарасак, бу сиртга $(x,\ y,\ z)$ нуқтада ўтказилган уринма текислик

$$Z-z=\frac{\partial\Phi}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(Y-y)$$

ёки

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$$

тенглама билан ифодаланади, бунда X, Y, Z ўзгарувчи координаталар, p ва q лар уринма текисликнинг бурчак коэффициентларидир.

Шундай қилиб, берилган хусусий ҳосилали (12.3) тенглама изланаётган интеграл сирт нуқтасининг x, y, z координаталари билан бу сиртга шу нуқтада ўтказилган уринма текисликнинг бурчак коэффициентлари p ва q орасидаги муносабатни ифодалайди. (12.3′) тенглама учун Коши масаласи ҳам содда талқинга эга. (12.3′) тенглама учун *Коши масаласи* бундай қўйилади: (12.3′) тенгламанинг шундай ечими топилсинки, у ечим x ўзгарувчининг берилган бошланғич қийматида y ўзгарувчининг берилган функциясига тенг бўлсин, яъни

$$x=x_0, \qquad z=\varphi(y), \tag{12.7}$$

(12.7) тенглама фазода *эгри чизиқни* ифодалайди. Демак, Коши масаласи берилган (12.7) эгри чизиқдан ўтувчи интеграл сиртни топишдан иборат. (12.7) эгри чизиқ махсус кўринишга эгадир; у YOZ текисликка параллел бўлган $x=x_0$ текисликда ётувчи *ясси* эгри чизиқдан иборат. Ўзгарувчиларнинг бундай тенг ҳуқуқли эмаслиги (12.3) тенгламада x ўзгарувчининг махсус роль ўйнаётганлигидан келиб чиқади. Агар тенглама (12.3) кўринишда берилган бўлса, Коши масаласини шундай қўйиш мумкинки, ўзгарувчиларнинг ҳеч қайсиси махсус ролни ўйнамайди. Қошининг бундай умумлашган масаласи қуйидагича қўйилади: (12.3) *тенгламанинг берилган*

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)$$

эгри чизиқдан ўтувчи интеграл сирти топилсин. Эслатиб ўтамизки, икки ўзгарувчили дифференциал тенглама учун ишлатилган геометрик терминларни ўзгарувчиларнинг сони кўп бўлган ҳолда ҳам ишлатиш мумкин. x_1, x_2, ... , x_n, u ўзгарувчиларнинг сонли қийматлари мажмуаси $(n+1)$ ўлчовли фазонинг нуқтаси, бу фазода (12.2) тенгламанинг ушбу

$$u=\Phi(x_1,\ \dots\ ,\ x_n)'$$

кўринишдаги ечими эса *n* ўлчовли *интеграл гиперсирт* ёки *сирт* дейилади. Қошининг бошланғич сиртлари, масалан, $(n-1)$ ўлчовли

$$(x_1 = x_1^0 \text{ да}) \quad u = \varphi(x_2, \dots, x_n)$$

гиперсиртдан иборат бўлиб, бу сирт орқали изланаётган интеграл гиперсирт ўтиши керак.

Юқорида келтирилган Ковалевская теоремасига асосан тенгламада бошланғич шартларда иштирок этаётган функциялар аналитик бўлса, бу тенгламанинг ихтиёрий функцияларга боғлиқ бўлган аналитик ечимларининг тўпламини, яъни умумий ечимини ҳосил қилиш мумкин. Аммо жуда кўп тенгламалар учун умумий ечимнинг мавжудлиги ҳал қилинмаган.

Хусусий ҳосилали битта номаълум функцияли биринчи тартибли тенгламалар иккита содда хоссага эга. Биринчидан, улар битта ихтиёрий функцияга боғлиқ бўлган умумий ечимга эгадир. Иккинчидан, хусусий ҳосилали биринчи тартибли тенгламани интеграллаш масаласи оддий дифференциал тенгламалар системасини интеграллашга келади.

Бу тенгламалар орасида бундай яқин боғланиш борлиги туфайли хусусий ҳосилали биринчи тартибли тенгламалар назариясини оддий дифференциал тенгламалар назарияси курсида баён қилиш табиийдир.

12.2-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ ТЕНГЛАМА

1. Дастлабки тушунчалар. Ушбу

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x,x_2,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots +$$

$$+ X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{12.8}$$

тенгламани текширамиз. (12.8) тенгламани биринчи тартибли хусусий ҳосилали *чизиқли бир жинсли тенглама* деилади. (12.8) тенгламанинг $X_1, \dots, X_n$ коэффициентлари берилган $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ нуқтанинг бирор атрофида аниқланган, ўзларининг биринчи тартибли ҳосилалари билан узлуксиз ҳамда бир вақтда нолга айланмайди деб фараз қиламиз. Масалан,

$$X_n(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$$

деб ҳисоблашимиз мумкин.

(12.8) тенглама билан бир қаторда ушбу

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)} \tag{12.9}$$

симметрик формадаги оддий дифференциал тенгламалар системасини текширамиз. $X_1, \dots, X_n$ коэффициентларга нисбатан юқорида қўйилган шартларга асосан (12.9) система $(n-1)$ та эркли биринчи интегралларга эга:

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = c_{n-1} \tag{12.10}$$

Бу тасдиқнинг тўғрилиги (12.9) системанинг ушбу $(n-1)$ та

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2}{X_n}, \ \dots\ , \ \frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n} \tag{12.11}$$

тенгламаларнинг нормал системасига тенг кучлилигидан, (12.11) система учун нормал система интегралларининг мавжудлиги ҳақидаги теорема шартларининг бажарилишидан келиб чиқади. Интегралларнинг (12.10) системаси $x_1, \ \dots\ , x_n$ ўзгарувчиларнинг фазосида $(n-1)$ параметрли чизиқлар оиласини аниқлайди. Бу чизиқларни (12.8) тенгламанинг *характеристикалари* дейилади.

12.1-теорема. (12.9) *система ихтиёрий биринчи* $\psi(x_1, \ \dots\ , x_n)=C$ *интегралининг чап қисми хусусий ҳосилали* (12.8) *тенгламанинг ечимидан иборат.*

Исбот. Биринчи интегралнинг таърифига асосан (12.9) системанинг ихтиёрий интеграл чизиғи бўйлаб ψ функция айнан ўзгармасга тенг бўлади, яъни $\psi=C$. Демак,

$$d\psi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx_i\equiv 0. \tag{12.12}$$

Бунда $dx_1, \ \dots\ , dx_{n-1}$ дифференциалларни (12.11) тенгликларга асосан уларнинг қийматлари билан алмаштирсак, ушбу

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n}+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\frac{X_n}{X_n}\right]dx_n\equiv 0$$

ёки

$$X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\dots+X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\equiv 0 \tag{12.13}$$

айният ҳосил бўлади.

(12.9) система интеграл чизиқлари учун $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўзгарувчиларнинг текширилаётган ўзгариш соҳасининг ҳар бир нуқтасида ягоналик ўринли ва (12.13) айниятнинг чап томони $C_1, \dots, C_{n-1}$ ўзгармасларга боғлиқ бўлмайди. Шундай қилиб, (12.13) айният бирор интеграл чизиқ бўйлаб ўринли бўлибгина қолмай, балки барча текширилаётган соҳада ўринлидир, бу эса $u=\psi(x_1, \dots, x_n)$ функция берилган (12.8) тенгламанинг ечими эканини билдиради.

12.2-теорема. (12.8) *тенгламани қаноатлантирадиган ихтиёрий* $\psi(x_1, \dots, x_n)$ *функцияни ўзгармас сонга тенглаштирилса,* (12.9) *системанинг биринчи интеграли ҳосил бўлади.*

Исбот. $u=\psi(x_1, \ \dots\ , x_n)$ функция (12.8) тенгламанинг ечими бўлсин. У ҳолда (12.13) айният ўринли.

ψ функциянинг тўлиқ дифференциалини ҳисоблаб, (12.9) ёки (12.10) системага асосан қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2+\ \dots\ \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n=$$

$$=\left(X_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\ \dots\ X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)\cdot\frac{1}{X_n}dx_n\,.$$

Бу тенгликдан (12.13) айниятга кўра $d\psi=0$, яъни (12.9) системанинг ихтиёрий интеграл чизиғи бўйлаб $\psi(x_1, ..., x_n)=C$. Ушбу $\Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})=C$ ифода ҳам (бунда Φ — ихтиёрий дифференциалланувчи функция) (12.9) системанинг биринчи интегралидан иборат, чунки (12.9) системасининг интеграл чизиғи бўйлаб барча $\psi_1, ..., \psi_{n-1}$ функциялар ўзгармасга айланади, шунинг учун $\Phi(\psi_1, ..., \psi_{n-1})$ функция ҳам (12.9) системанинг интеграл чизиги бўйлаб ўзгармасга айланади. Демак, $u=\Phi(\psi_1, ..., \psi_n)$, (12.8) чизиқли бир жинсли тенгламанинг ечимидир.

12.3-теорема. *Ушбу*

$$u=\Phi(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \psi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n))$$

функция (бунда (Φ *— ихтиёрий функция)* (12.8) *тенгламанинг умумий ечимидан иборат, яъни* (12.8) *тенгламанинг барча ечимларини ўз ичига оладиган ечимдир.*

Исбот. Фараз қилайлик, $u=\psi(x_1, ..., x_n)$ функция (12.8) тенгламанинг бирор ечими бўлсин. Шундай Φ функциянинг мавжуд эканини кўрсатамизки, бу функция учун $\psi=\Phi(\psi_1, ..., \psi_{n-1})$ бўлади. $\psi, \psi_1, ..., \psi_{n-1}$ функциялар (12.8) тенгламанинг ечимлари бўлгани учун

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial\psi_1}{\partial x_i}=0, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_i}=0. \qquad (12.14)$$

(12.4) тенгламани $x_1, ..., x_n$ ларга нисбатан n та тенгламадан тузилган чизиқли бир жинсли система деб қараймиз. $x_1, ..., x_n$ лар шартга кўра бир вақтда нолга айланмагани учун текширилаётган соҳанинг ҳар бир $x_1, ..., x_n$ нуқтасида (12.14) система тривиалмас ечимга эга. Бундан бу системанинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

текширилаётган соҳада айнан нолга тенг деган хулосага келамиз. Аммо, $\psi, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}$ функциялар якобианининг нолга тенглиги бу функциялар чизиқли боғлиқ эканини кўрсатади, яъни

$$F(\psi, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})=0. \qquad (12.15)$$

(12.9) системанинг $\psi_i(x_1, \ldots, x_n)=C_i (i=1, 2, ..., n)$ биринчи интеграллари чизиқли эркли бўлгани учун

$$\frac{D(\psi, \psi_1, ..., \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

якобианнинг

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, ..., x_{\alpha_n-1})}$$

кўринишдаги $(n-1)$-тартибли минорларидан камида биттаси нолдан фарқли бўлади. Демак, (12.15) тенгламани

$$\psi=\Phi(\psi_1,\ \dots,\ \psi_{n-1})$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Шу билан теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\dots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин. Бу тенгламага мос оддий дифференциал тенгламалар системаси қуйидагидан иборат:

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\dots=\frac{dx_n}{x_n}.$$

Бу системанинг чизиқли эркли биринчи интеграллари

$$\frac{x_1}{x_n}=C_1,\ \frac{x_2}{x_n}=C_2,\ \dots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n}=C_{n-1}\ (x_n\neq 0).$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими

$$u=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\ \frac{x_2}{x_n},\ \dots,\ \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

u — ихтиёрий нолинчи даражали бир жинсли функциядир.

2. Ушбу

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Берилган тенгламага мос оддий тенгламалар системаси бу ҳолда битта тенгламадан иборатдир:

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}.$$

Бу тенгламанинг интеграли $x^2+y^2=C$. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими $z=\Phi(x^2+y^2)$ (бунда Φ — ихтиёрий функция) бўлиб, айланиш ўқи Oz дан иборат бўлган айланма сиртлардир.

2. Чизиқли бир жинсли тенглама учун Коши масаласининг ечилиши. (12.8) тенглама учун Коши масаласи қуйидагича қўйилади: (12.8) *тенгламанинг шундай* $u=f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ *ечими топилсинки, у ушбу*

$$u\Big|_{x_n=x_n^0}=\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})\tag{12.16}$$

бошланғич шартни қаноатлантирсин, бунда x_n^0 берилган ҳақиқий сон, $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ берилган узлуксиз дифференциалланувчи функция.

Юқорида исботланганига асосан (12.8) тенгламанинг умумий ечими

$$u=\Phi(\psi_1,\ \psi_2,\ \dots,\ \psi_{n-1})$$

формула билан аниқланади.

Коши масаласини ечиш учун (12.16) шартга кўра Φ функцияни шундай аниқлашимиз керакки,

$$\Phi(\psi_1,\ \psi_2,\ \dots,\ \psi_{n-1})\ _{x_n=x_n^0}=\varphi(x_1,\ \dots,\ x_{n-1}) \tag{12.17}$$

тенглик бажарилсин. Ушбу.

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n^0)&=\overline{\psi}_1,\\
\psi_2(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n^0)&=\overline{\psi}_2,\\
\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\\
\psi_{n-1}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n^0)&=\overline{\psi}_{n-1}
\end{aligned}\right\} \tag{12.18}$$

белгиларни киритиб, (12.17) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$\Phi(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \dots,\ \overline{\psi}_{n-1})=\varphi(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1})\ . \tag{12.19}$$

Биз X_n функцияни $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$ нуқтада нолдан фарқли деб фараз қиламиз, яъни $X_n(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)\neq 0$. У ҳолда (12.18) системани ҳеч бўлмаганда $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$ нуқтанинг бирор атрофида $x_1,\ \dots,\ x_{n-1}$ ларга нисбатан ечиш мумкин бўлади, яъни

$$\left.\begin{aligned}
x_1&=\omega_1(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \dots,\ \overline{\psi}_{n-1}),\\
x_2&=\omega_2(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \dots,\ \overline{\psi}_{n-1}),\\
\dots&\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{n-1}&=\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \dots,\ \overline{\psi}_{n-1}
\end{aligned}\right| \tag{12.20}$$

$\overline{\psi}_i$ функциялар

$$\overline{\psi}_i^0=\psi_i(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$$

қийматларни қабул қилганда уларга мос ω_i функциялар x_i^0 $(i=1,$ $2,\ \dots,\ n-1)$ қийматларни қабул қилади. Шу билан бирга ψ_i функциялар ҳосилаларга эга бўлгани учун ω_i лар ҳам дифференциалланувчи бўлади. Энди Φ сифатида ушбу

$$\begin{gathered}
\Phi(\psi_1,\ \psi_2,\ \dots,\ \psi_{n-1})=\varphi\,[\omega_1(\psi_1,\ \psi_2,\ \dots,\ \psi_{n-1}),\\
\omega_2(\psi_1,\ \psi_2,\ \dots,\ \psi_{n-1}),\ \dots,\ \omega_{n-1}(\psi_1,\ \psi_2,\ \dots,\ \psi_{n-1})]
\end{gathered} \tag{12.21}$$

функцияни олсак, бу функция (12.8) тенгламани ва (12.16) шартни қаноатлантиради. Ҳақиқатан, (12.21) ифода хусусий ψ_i ечимларнинг функцияси бўлгани учун, ўзи ҳам (12.8) тенгламанинг ечимидан иборат бўлади. Агар $x_n=x_n^0$ десак, (12.18) га асосан ψ_i миқдорлар $\overline{\psi}_i$ ларга тенг бўлади. Шу сабабли (12.20) тенгликларни эътиборга олсак,

$$\begin{gathered}
\Phi(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \dots,\ \overline{\psi}_{n-1})=\varphi[\omega_1(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \dots,\ \overline{\psi}_{n-1}),\ \omega_2(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \dots,\\
\overline{\psi}_{n-1}),\ \dots,\ \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \dots,\ \overline{\psi}_{n-1})]=\varphi(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1})\ .
\end{gathered}$$

Демак,

$$u=\varphi[\omega_1(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1}),\ \ldots,\ \omega_{n-1}(\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1})]$$

функция (12.8) тенглама учун қўйилган Коши масаласининг ечимидан иборат бўлади.

Мисоллар. 1. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ тенгламанинг $z|_{y=0}=\varphi(x)$ шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Биламизки, у тенгламанинг умумий ечими (аввалги банднинг 2- мисолига қаранг)

$$z=\Phi(x^2+y^2)\ .$$

дан иборат. Бу ҳолда $\psi(x,\ y)=x^2+y^2$, $\psi(x,\ 0)=\bar{\psi}=x^2$, бундан $x=\sqrt{\bar{\psi}}$. Изланаётган ечим $z=\varphi(\sqrt{\bar{\psi}})=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

2. Ушбу $yz\frac{\partial u}{\partial x}+xz\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}=0$

тенгламанинг $u|_{y=y_0}=\varphi(x,\ z)$ шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Берилган тенгламага мос оддий дифференциал тенгламалар системаси:

$$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{xy}\ .$$

Бу системанинг чизиқли эркли биринчи интеграллари

$$\psi_1=z^2-y^2=c_1,\ \psi_2=x^2-y^2=c_2$$

лардан иборат. У ҳолда умумий ечим

$$u=\Phi(z^2-y^2,\ x^2-y^2),$$

$$\psi_1(x,\ y_0,\ z)=z^2-y_0^2=\bar{\psi}_1,\ \bar{\psi}_2(x,\ y_0,\ z)=x^2-y_0^2=\bar{\psi}_2\ .$$

Булардан

$$z=\sqrt{\bar{\psi}_1+y_0^2},\ x=\sqrt{\bar{\psi}_2+y_0^2}\ .$$

Демак, изланаётган ечим

$$u(x,\ y,\ z)=\varphi(\sqrt{\psi_2+y_0^2}\ ,\ \sqrt{\psi_1+y_0^2})=$$
$$=\varphi(\sqrt{x^2-y^2+y_0^2},\ \sqrt{z^2-y^2+y_0^2})$$

12.3- §. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМА

1. Ечим, умумий ечим ва махсус ечим тушунчалари. Ушбу

$$X_1(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u)\ \frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u)\ \frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+$$
$$+X_n(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u) \qquad (12.22)$$

кўринишдаги тенгламани *хусусий ҳосилали чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама* дейилади. Бу тенглама ҳосилаларга нисбатан чизикли бўлиб, номаълум u функцияга нисбатан чизиқли бўлмаслиги мумкин. Шу сабабли (12.22) тенгламани *квазичизиқли* тенглама ҳам дейилади. (12.22) тенгламадаги X_i ва R функцияларни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, u ўзгарувчиларнинг текширилаётган ўзгариш соҳасида узлуксиз дифференциалланувчи деб ва бир вақтда нолга тенг бўлмайди деб фараз қиламиз. (12.22) тенгламани чизиқли тенгламага келтириш йўли билан интеграллаш мумкин. Шу мақсадда (12.22) тенгламанинг u ечимини ошкормас кўринишда излаймиз:

$$v(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u)=0\,, \tag{12.23}$$

бунда $\frac{\partial v}{\partial u}\neq 0$, $u=v(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ функцияни (12.23) тенгликдан аниқланган деб ҳисоблаб, ушбу $v(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n))\equiv 0$ айниятни x_i бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial v}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}=0\,.$$

Бундан

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial v}{\partial u}}\,.$$

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ хусусий ҳосилаларнинг бу қийматларини тенгламага қўйиб, тенгламанинг ҳар икки томонини $-\frac{\partial v}{\partial u}$ га кўпайтирамиз. Натижада қуйидаги чизиқли бир жинсли тенглама ҳосил бўлади:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u)\frac{\partial v}{\partial x_i}+R(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u)\frac{\partial v}{\partial u}=0. \tag{12.24}$$

Шундай қилиб, (12.24) чизиқли бир жинсли тенгламани (12.23) тенгламага асосан айниятга айлантирадиган v функцияни топиш керак. (12.24) тенгламага мос оддий дифференциал тенгламалар системасини тузамиз:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{du}{R}\,. \tag{12.25}$$

Бу системанинг n та чизиқли эркли биринчи интегралларини топамиз:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u)=C_1\,, \\ \psi_2(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u)=C_2\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_n(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u)=C_n\,. \end{cases} \tag{12.26}$$

(12.24) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$v=\Phi(\psi_1,\ \psi_2,\ ...,\ \psi_n)$$

бунда Ф — ихтиёрий функция.

Охирги функцияни нолга тенглаштириб, (12.23) тенгликка асосан берилган (12.22) тенгламанинг ечимини ушбу

$$\Phi[\psi_1(x_1,\ ...,\ x_n,\ u),\ \psi_2(x_1,\ ...,\ x_n,\ u),\ ...,$$
$$\psi_n(x_1,\ ...\ ,\ x_n,\ u)]=0 \qquad (12.27)$$

кўринишда топамиз. Бу ечимни (12.22) тенгламанинг *умумий ечими* дейилади.

Бу усул билан топилган ечимлардан ташқари $v(x_1,\ ...,\ x_n,\ u)=0$ тенгламадан аниқланадиган u ечимлар бўлиши мумкин, бу ерда v функция (12.24) тенгламанинг ечими бўлмай, у тенгламани фақат $v(x_1,\ ...,\ x_n,\ u)=0$ тенгламага асосан айниятга айлантиради. Бундай ечимларни *махсус ечимлар* дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$(x_1-\alpha_1)\frac{\partial u}{\partial x_1}+(x_2-\alpha_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+(x_n-\alpha_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=u-\alpha,$$
$$(\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n=\text{const})$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин. (12.24) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$(x_1-\alpha_1)\frac{\partial v}{\partial x_1}+(x_2-\alpha_2)\frac{\partial v}{\partial x_2}+...+(x_n-\alpha_n)\frac{\partial v}{\partial x_n}+(u-\alpha)\frac{\partial v}{\partial u}=0\,.$$

Бу тенгламага мос оддий дифференциал тенгламалар системасини тузамиз:

$$\frac{dx_1}{x_1-\alpha_1}=\frac{dx_2}{x_2-\alpha_2}=...=\frac{dx_n}{x_n-\alpha_n}=\frac{du}{u-\alpha}$$

Бу системанинг чизиқли эркли интеграллари қуйидагилардан иборат:

$$\frac{x_1-\alpha_1}{u-\alpha}=C_1,\ \frac{x_2-\alpha_2}{u-\alpha}=C_2,\ ...\ \frac{x_n-\alpha_n}{u-\alpha}=C_n\,.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$\Phi\left(\frac{x_1-\alpha_1}{u-\alpha},\ \frac{x_2-\alpha_2}{u-\alpha},\ ...,\ \frac{x_n-\alpha_n}{u-\alpha}\right)=0\,.$$

2. Ушбу

$$(1+\sqrt{u-x-y})\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2$$

тенглама интеграллансин.

(12.25) система қуйидагича бўлади:

$$\frac{dx}{1+\sqrt{u-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{du}{2}\,.$$

Бундан

$$u-2y=C_1$$

биринчи интегрални топамиз. Бу системадаги учинчи касрнинг сурат ва махражидан биринчи икки касрнинг сурат ва махражини айириб

$$\frac{d(u-x-y)}{-\sqrt{u-x-y}}=\frac{dy}{1}$$

интегралланувчи комбинацияни топамиз. Бундан

$$y+2\sqrt{u-x-y}=C_2$$

биринчи интегрални ҳосил қиламиз. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$\Phi(u-2y,\ 2\sqrt{u-x-y}+y)=0$$

кўринишга эга бўлади. Текшириб кўриш қийин эмаски,

$$u=x+y$$

функция берилган тенгламани қаноатлантиради. Бу ечим топилган умумий ечимдан келиб чиқмайди. Ҳақиқатан, агар $u=x+y$ ни умумий ечимга олиб бориб қўйсак, $\Phi(x-c,\ y)=0$ тенглик ҳосил бўлади. Бу муносабат (x ва y эркли ўзгарувчилар бўлгани учун) $\Phi(\varphi,\ \psi)$ функцияни ихтиёрий танланганда ҳам ўринли бўлмайди. Агар $v=u-x-y$ ифодани v учун ҳосил бўладиган тенгламанинг чап томонига олиб бориб қўйсак, $-\sqrt{u-x-y}=-\sqrt{v}$ тенглик ҳосил бўлади, бу ифода фақатгина $v=0$ тенгликка асосан нолга айланади. Шундай қилиб, $u=x+y$ функция берилган тенгламанинг махсус ечимидан иборат.

2. Чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама учун Коши масаласининг ечилиши. *Коши масаласи* (12.22) тенгламанинг

$$u|_{x_n=x_n^0}=\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}) \qquad (12.28)$$

шартни қаноатлантирадиган $u=f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ ечими топилсин, бунда φ берилган узлуксиз дифференциалланувчи функция. (12.22) тенгламанинг умумий ечимини билган ҳолда Коши масаласи ечимини қандай топиш кераклигини кўрсатамиз. Бу ерда асосий масала умумий ечимдаги Φ функциянинг кўринишини аниқлашга келади.

(12.26) биринчи интегралларда x_n ўрнига бошланғич x_n^0 қийматни қўйиб, ҳосил қилинган ифодаларни $\overline{\psi}_i$ лар орқали белгилаб оламиз, яъни

$$\begin{aligned}
&\psi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}x_n^0,\ u)=\overline{\psi}_1\ ,\\
&\psi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n^0,\ u)=\overline{\psi}_2\ ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n^0,\ u)=\overline{\psi}_n\ .
\end{aligned} \qquad (12.29)$$

(12.28) бошланғич шартни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$x_n=x_n^0 \text{ да } u=\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$$

Бу шартни (12.27) тенглик билан таққослаб, Φ функцияни

$$\Phi(\overline{\psi}_1,\ \overline{\psi}_2,\ \ldots,\ \overline{\psi}_n)=u-\varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}) \qquad (12.30)$$

тенглик бажариладиган қилиб танлаймиз.

(12.29) системани $x_1, \ldots, x_{n-1}, u$ ларга нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n), \\ x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n), \\ u = \omega(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n). \end{cases}$$

Энди Φ учун

$$\Phi(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n) = \omega(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n) - \varphi[\omega_1(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n), \ldots, \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n)]$$

функцияни олсак, (12.30) шарт бажарилади. Демак, ушбу

$$\omega(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n) - \varphi[\omega_1(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n), \ldots, \overline{\omega}_{n-1}(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n)] = 0 \quad (12.31)$$

формула изланаётган Қоши масаласининг ечимини ошкормас ҳолда беради. (12.31) тенгламани u га нисбатан ечиб, Қоши масаласи ечимини ошкор кўринишда топамиз.

Мисол. $(1+\sqrt{u-x-y})\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2$ тенгламанинг $y=0$ да $u=2x$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин (12.3- §. 1- банддаги 2- мисолга қаранг).

Маълумки,

$$\psi_1 = u - 2y, \quad \psi_2 = 2\sqrt{u-x-y} + y.$$

Бу интегралларда $y=0$ десак,

$$u = \overline{\psi}_1, \quad 2\sqrt{u-x} = \overline{\psi}_2.$$

система ҳосил бўлади. Бу системани x ва u га нисбатан ечиб, топамиз:

$$x = \overline{\psi}_1 - \frac{\overline{\psi}_2^2}{4}, \quad u = \overline{\psi}_1.$$

Демак, (12.31) формулага асосан

$$\psi_1 - 2\left(\psi_1 - \frac{\psi_2^2}{4}\right) = 0 \text{ ёки } 2\psi_1 - \psi_2^2 = 0,$$

ψ_1 ва ψ_2 лар ўрнига уларнинг ифодасини қўйиб, қўйилган Қоши масаласининг ечимини топамиз:

$$2u - 4y - (2\sqrt{u-x-y} + y)^2 = 0$$

ёки

$$4y\sqrt{u-x-y} = 4x - 2u - y^2.$$

Бундан

$$u = 2x + \frac{3}{2}y^2 - 2y\sqrt{x - y + \frac{y^2}{2}}.$$

Текшириб кўриш қийин эмаски, бу формуладаги радикал олдидаги манфий ишора тенгламадаги радикал олдидаги мусбат ишорага мос келади.

12.4-§. ПФАФФ ТЕНГЛАМАСИ

Ушбу

$$Pdx+Qdy+Rdz=0 \qquad (12.32)$$

тенгламани (x, y, z) ўзгарувчиларнинг фазосида *Пфафф тенгламаси* дейилади, бунда P, Q ва $R-x$, y, z ларнинг функциясидир. Бу функцияларни бирор D соҳада узлуксиз дифференциалланувчи деб фараз қиламиз.

P, Q ва R функциялар D соҳада берилди деган сўз геометрик тилда бу соҳанинг ҳар бир нуқтасида бирор $\bar{F}=P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k}$ вектор, яъни вектор майдон берилганлигини билдиради. (12.32) тенглама нолдан фарқли ихтиёрий кўпайтувчига кўпайтирилганда тенг кучли тенгламага ўтганлиги учун, аслида бизга векторнинг йўналиши, бошқача айтганда, йўналишлар майдони берилган бўлади. Агар (12.32) тенглама билан аниқланадиган сиртлар оиласини (агар улар мавжуд бўлса) $U(x, y, z)=C$ орқали белгилаб, бу сиртларга уринма текисликда ётадиган векторни $\bar{t}$ орқали белгиласак (яъни $\bar{t}=\bar{i}dx+\bar{j}dy+\bar{k}dz$), у ҳолда (12.32) тенглама вектор кўринишда бундай ёзилади:

$$(\bar{F}, \bar{t})=0 .$$

Бу эса $U(x, y, z)=C$ сиртларнинг $\bar{F}$ вектор майдонга ортогонал эканлигини кўрсатади.

Шундай қилиб, геометрик тилда (12.32) тенгламани ечиш $\bar{F}=P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k}$ вектор майдонга ортогонал бўлган сиртлар оиласини топишдан иборатдир. Пфафф тенгламасини икки хил талқин қилиш мумкин. Биринчи ҳолда x, y, ва z ларни бирор t параметрнинг функцияси деб, иккинчи ҳолда эса бу учта миқдорнинг биттасини, масалан, z ни қолган иккитасининг функцияси деб қараш мумкин. Пфафф тенгламасини текширишни иккинчи ҳолда бошлаймиз. Агар (12.32) тенгламанинг чап томони бирор $U(x, y, z)$ функциянинг тўлиқ дифференциалидан иборат бўлса, яъни

$$P=\frac{\partial u}{\partial x}, \ Q=\frac{\partial u}{\partial y}, \ R=\frac{\partial u}{\partial z},$$

бошқача айтганда $\bar{F}$ потенциал майдон бўлса (яъни $\bar{F}=\mathrm{grad}U$ бўлса), у ҳолда изланаётган сиртлар U потенциал функциянинг $U(x, y, z)=C$ сатҳ сиртларидан иборат бўлади. Бу ҳолда изланаётган сиртларни топиш ҳеч қандай қийинчилик туғдирмайди, чунки бу ҳолда

$$U=\int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y z)} Pdx+Qdy+Rdz,$$

бу ерда эгри чизиқли интеграл тайин (x_0, y_0, z_0) нуқтани ўзгарувчи (x, y, z) нуқта билан бирлаштирувчи ихтиёрий йўл бўйича, масалан, координата ўқларига параллел бўлган кесмалардан ташкил топган синиқ чизиқ бўйича олинади.

Юқорида айтганимизга асосан z ни x ва y нинг функцияси деб қараб, текширилаётган соҳада $R\neq 0$ деб фараз қиламиз.

Бу ҳолда (12.32) тенгламадан

$$dz=P_1dx+Q_1dy\ \left(\text{бунда } P_1=\frac{P}{R},\ Q_1=\frac{Q}{R}\right). \qquad (12.33)$$

Иккинчи томондан, z функциянинг тўлиқ дифференциали учун қуйидаги ифодага эгамиз:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\,.$$

Бу икки тенгликдан dx ва dy дифференциаллар боғланмаган бўлгани учун

$$\frac{\partial z}{\partial x}=P_1(x,\ y,\ z), \qquad (12.34)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=Q_1(x,\ y,\ z) \qquad (12.35)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

z функцияни x ва y лар бўйича иккинчи тартибли ҳосилаларга, P_1 ва Q_1 ни эса ўз аргументлари бўйича биринчи тартибли ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз. Ушбу

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

тенгликнинг ўринли бўлиши кераклигидан

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}+\frac{\partial P_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

ёки

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}+\frac{\partial P_1}{\partial z}Q_1=\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial O_1}{\partial z}P_1 \qquad (12.36)$$

шарт келиб чиқади. (12.36) шартни бундай ёзиш мумкин:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)=0\,. \qquad (12.37)$$

Демак, $\overline{F}$ вектор майдонга ортогонал бўлган $u\ (x,\ y,\ z)=C$ сиртлар оиласининг мавжуд бўлиши учун (12.37) шартнинг бажарилиши зарур, (12.37) шартни (12.32) тенгламанинг *тўлиқ интегралланувчилик* ёки *битта $U(x,\ y,\ z)=C$ муносабатда интегралланувчилик шарти* дейилади.

Агар $\overline{F}$ майдон потенциал майдон бўлмаса, айрим ҳолларда шундай скаляр $\mu(x,\ y,\ z)$ кўпайтувчини танлаб олиш мумкинки, $\overline{F}$ ни $\mu(x,\ y,\ z)$ га кўпайтирилгандан сўнг потенциал майдон ҳосил бўлади. Агар шундай кўпайтувчи мавжуд бўлса, у ҳолда $\mu\bar{F}=\mathrm{grad}\,U$ ёки $\mu P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $\mu Q=\frac{\partial y}{\partial u}$, $\mu R=\frac{\partial u}{\partial z}$. Охирги муносабатлардан

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},\quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z}=\frac{\partial(\mu R)}{\partial y},\quad \frac{\partial(\mu R)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu P)}{\partial z}$$

ёки

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{1}{\mu}\left(Q\frac{\partial \mu}{\partial x}-P\frac{\partial \mu}{\partial y}\right),\\
\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}&=\frac{1}{\mu}\left(R\frac{\partial \mu}{\partial y}-Q\frac{\partial \mu}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}&=\frac{1}{\mu}\left(P\frac{\partial \mu}{\partial z}-R\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Бу тенгликларнинг биринчисини R га, иккинчисини P га, учинчисини эса Q га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгликларни ҳадлаб қўшсак, ушбу

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)=0$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенглик эса (12.37) шартнинг ўзгинасидир.

Демак, агар Пфафф тенгламаси учун *интегралловчи кўпайтувчи* мавжуд бўлса, у ҳолда тўлиқ интегралланувчилик шарти бажарилади. Энди (12.37) шартни берилган вектор майдонга ортогонал бўлган сиртларнинг мавжудлигининг фақат зарурий шарти эмас, балки етарли шарти эканлигини ҳам кўрсатамиз.

Текширилаётган D соҳада (12.37) шарт айнан бажарилган ва P_1, Q_1 функциялар ўз аргументлари бўйича биринчи ва иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.

У ҳолда D соҳанинг ҳар бир нуқтасидан (12.33) системанинг ёки бари бир, (12.32) тенгламанинг битта ва фақат битта интеграл сирти ўтади. Аввало (12.33) системанинг берилган $A(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтадиган ечимининг ягоналигини кўрсатамиз. Шу мақсадда (12.34), (12.35) тенгламаларни текширамиз. (12.34) тенглама $y=y_0$ текисликда $A(x, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтувчи ягона интеграл чизиқ L ни аниқлайди. (12.35) тенглама эса, x бирор ўзгармас қиймат қабул қилганда, $x=\mathrm{const}$ текисликда ётувчи L эгри чизиқнинг нуқтасидан ўтадиган ягона $l(x)$ эгри чизиқни аниқлайди. L чизиқнинг барча нуқталари учун тузилган $l(x)$ чизиқлар тўплами (12.33) системасининг $A(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтувчи бирдан-бир S интеграл сиртини аниқлашини кўрсатамиз. Бу сиртнинг тузилишидан равшанки, унинг барча нуқталари учун (12.35) тенглама қаноатлантирилади. S сиртнинг барча нуқталари учун (12.34) тенгламанинг қаноатлантирилишини ҳам кўрсатамиз.

S сиртнинг тенгламасини

$$z=z(x, y)$$

кўринишда ёзиб олсак, аввалги параграфларнинг натижаларига асосан $z(x, y)$ функция x бўйича биринчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлади. $\frac{\partial z}{\partial x}$ нинг (12.34) тенгламанинг қаноатлантиришини кўрсатиш керак. S сиртнинг тузилишига асосан (12.34) тенглама $y=y_0$ да қаноатлантирилади. Унинг y ўзгарувчининг бошқа қийматларида ҳам қаноатлантирилишини кўрсатиш учун ушбу

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P_1(x,\ y,\ z) = F$$

белгилашни киритиб, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ҳосилани топамиз. $z(x,\ y)$ функция (12.35) тенгламани қаноатлантиришидан ҳамда бу тенгламанинг ўнг томони барча аргументлари бўйича биринчи тартибли ҳосилаларга эга эканлигидан $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ҳосиланинг мавжудлиги келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial z}P_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial z}F - \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial z}Q\,. \qquad (12.38)$$

Юқоридаги ифодани ҳисоблашда $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = Q$ тенгликлардан фойдаландик. (12.37) ёки (12.36) шартга асосан (12.38) тенглик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial z}F\,.$$

Бундан

$$F(x,\ y) = F(x,\ y_0)e^{\int_{y_0}^{y}\frac{\partial Q_1}{\partial z}dy}\,.$$

F функция $y=y_0$ да нолга тенг бўлгани учун охирги тенгликдан унинг барча текширилаётган y ларда ҳам нолга тенглиги келиб чиқади. Демак, $z(x, y)$ функция (12.34) тенгламани ҳам қаноатлантиради.

Энди Пфафф тенгламаси учун (12.37) тўлиқ интегралланувчилик шарти бажарилмаган ҳолни кўрайлик. Юқорида баён қилингандан маълумки, бу ҳолда $\overline{F}$ майдонга ортогонал бўлган сиртлар мавжуд бўлмайди. Шу сабабли, Пфафф тенгламасини аввал айтганимиздек, биринчи хил талқин қилиб, $\overline{F}$ майдонга ортогонал бўлган сиртларни эмас, балки шу хусусиятга эга бўлган, чизиқларни топиш масаласини қўямиз. Бошқача айтганда, Пфафф тенгламасини битта муносабатда эмас, балки иккита

$$u_1(x,\ y,\ z) = 0, \qquad u_2(x,\ y,\ z) = 0$$

муносабатда интеграллаш керак. Масалада қўйилган чизиқларни топиш учун юқорида ёзилган тенгликлардан биттасини, масалан,

$$u_1(x,\ y,\ z)=0 \qquad (12.39)$$

ни ихтиёрий бериш мумкин.

(12.32) ва (12.39) тенгламалардан эркли ўзгарувчилардан биттасини, масалан, z ни чиқариб,

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0$$

кўринишдаги оддий дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани интеграллаб, ихтиёрий танлаб олинган $u_1(x,\ y,\ z)=0$ сиртда изланаётган чизиқларни топамиз.

Изоҳ. Агар (12.32) тенгламани бевосита интеграллаб бўлмаса, соддароқ ҳолни текшириш ёрдами билан уни айрим ҳолларда интеграллаш мумкин. Бу усулда эркли ўзгарувчилардан биттасини, масалан, z ни ўзгармас ҳисоблаб, ушбу

$$P(x,\ y,\ z)\,dx+Q(x,\ y,\ z)\,dy=0 \qquad (12.40)$$

оддий дифференциал тенгламани интегралланади, бунда z параметр ролини ўйнайди:

$$u(x,\ y,\ z)=C \qquad (12.41)$$

(12.40) тенгламанинг интеграли бўлсин. Бу ердаги ихтиёрий ўзгармас z параметрнинг функцияси бўлиши мумкин. Бу $C(z)$ функцияни шундай танлаб олинадики, (12.32) тенглама қаноатлантирилсин. (12.41) ни дифференциаллаб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy+\left[\frac{\partial u}{\partial z}-C'(z)\right]dz=0. \qquad (12.42)$$

(12.32), (12.42) дифференциал тенгламаларнинг коэффициентлари пропорционал бўлиши керак:

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{P}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{Q}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial z}-C'(z)}{R}.$$

Ушбу

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{P}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial z}-C'(z)}{R}$$

тенгламадан $C'(z)$ ни топиш мумкин.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$(6x+yz)\,dx+(xz-2y)\,dy+(xy+2z)\,dz=0$$

тенглама интеграллансин. Бу мисолда

$$\overline{F}=(6x+yz)\,\overline{i}+(xz-2y)\,\overline{j}+(xy+2z)\,\overline{k}.$$

Текшириб кўриш қийин эмаски, $\operatorname{rot}\overline{F}=0$. Маълумки, бу шарт бажарилганда $\overline{F}$ потенциал майдондан иборат бўлади, яъни $\overline{F}=\operatorname{grad}U$.

Демак,

$$U=\int\limits_{(0,\ 0,\ 0)}^{(x,\ y,\ z)}(6x+yz)\,dx+(xz-2y)\,dy+(xy+2z)\,dz.$$

Интеграл йўли сифатида бўғинлари координата ўқларига параллел бўлган синиқ чизиқни оламиз. Интеграллаш натижасида $U=3x^2-y^2+z^2+xyz$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, изланаётган интеграл

$$3x^2-y^2+z^2+xyz=C.$$

2. Ушбу

$$ydx+(z-y)\,dy+xdz=0$$

тенгламани қаноатлантирувчи ва $2x-y-z=1$ текисликда ётувчи эгри чизиқлар топилсин.

Берилган текислик тенгламасини дифференциаллаймиз:

$$2dx-dy-dz=0.$$

Бу тенгликни x га кўпайтириб, ҳосил қилинган тенгликни берилган тенглама билан қўшамиз:

$$(y+2x)\,dx+(z-x-y)\,dy=0\,.$$

$z=2x-y-1$ бўлгани учун

$$(y+2x)\,dx+(x-2y-1)\,dy=0$$

ёки

$$2xdx-(2y+1)\,dy+d\,(xy)=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Охирги тенгламадан изланаётган эгри чизиқлар оиласи

$$x^2-y^2-y+xy=C$$

эканлиги келиб чиқади.

3. Ушбу

$$yzdx+2zxdy-3xydz=0$$

тенглама интеграллансин.

Изоҳда кўрсатилган усул билан бу тенгламани интеграллаймиз. z ни ўзгармас деб ҳисобласак, $dz=0$ бўлади ва берилган тенглама қуйидаги тенгламага айланади:

$$ydx+2xdy=0.$$

Бу тенгламанинг интеграли

$$xy^2=C$$

дан иборат. Бу тенгликдаги C ни Z нинг функцияси деб ҳисоблаб ва уни дифференциаллаб ушбу

$$y^2dx+2xy\,dy-C'(z)\,dz=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама берилган тенглама билан бир хил бўлиши учун буларнинг коэффициентлари пропорционал бўлиши керак, яъни

$$\frac{y^2}{yz}=\frac{2xy}{2zx}=\frac{-C'(z)}{-3xy}.$$

Охирги тенгликдан $C(z)=xy^2$ эканлигини эътиборга олиб,

$$\frac{dC}{C}=\frac{3dz}{z}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан

$$C(z)=az^3, \quad a=\text{const}.$$

Демак, берилган тенгламанинг ечими

$$xy^2=az^3$$

дан иборатдир.

12.5-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР

1. Тўлиқ интеграл. Аввал номаълум функция иккита эркли ўзгарувчига боғлиқ бўлган ҳолни текширамиз.

Биз биламизки, бу ҳолда биринчи тартибли хусусий ҳосилали тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$F(x, y, z, p, q)=0, \tag{12.43}$$

бунда

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Биринчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламанинг иккита ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ ечимини унинг *тўлиқ интеграли* дейилади. Тўлиқ интеграл ошкормас кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$\Phi(x, y, z, a, b)=0. \tag{12.44}$$

Тўлиқ интегрални бошқачароқ ҳам таърифлаш мумкин. Тўлиқ интеграл учта ўзгарувчи ва иккита ихтиёрий ўзгармас орасидаги шундай муносабатки, ундан ва уни эркли ўзгарувчилар бўйича дифференциаллаш натижасида ҳосил бўладиган муносабатлардан ўзгармасларни чиқариб ташлаш натижасида берилган тенглама ҳосил бўлади. Бу иккита таъриф бир-бирига эквивалентдир. Лекин биз бунинг исботига тўхталмай ([23] га қаранг), берилган тенглама бўйича тўлиқ интегрални топиш усулини келтирамиз. Тўлиқ интегралнинг иккинчи таърифига асосан (12.43) тенглама ушбу

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z, a, b)=0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}p=0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}q=0 \end{cases} \tag{12.45}$$

системадан a ва b ларни чиқариш натижасида ҳосил бўлган тенгламага эквивалентдир. Биринчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг ҳамма ечимларини тўлиқ интегралдан ўзгармасларни вариациялаш усули билан ҳосил қилиш мумкинлиги Лагранж томонидан кўрсатилган.

Фараз қилайлик, a ва b лар x, y ўзгарувчиларнинг бирор функциялари бўлсин. z нинг x ва y бўйича ҳосилалари, яъни p ва q лар ушбу

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}p+\frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}q+\frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0 \end{cases} \tag{12.46}$$

муносабатлардан ҳисобланади. (12.45) ва (12.46) формулаларни таққослаб, қуйидаги тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}=0. \end{cases} \tag{12.47}$$

Бу тенгламалардан a ва b функцияларни аниқлаш керак. Уч ҳол бўлиши мумкин:

1) Агар

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b}=0 \tag{12.48}$$

тенгликлар бажарилса, (12.47) тенгламалар қаноатлантирилади. (12.48) тенгламаларни a ва b га нисбатан ечиш мумкин деб фараз қиламиз. Бу тенгламаларни ечиш натижасида ҳосил бўлган x ва y нинг функцияларини, яъни a ва b нинг қийматларини (12.44) га қўйсак, ҳосил бўлган ифода (12.43) тенгламанинг ихтиёрий ўзгармасларга ҳам, ихтиёрий функцияларга ҳам боғлиқ бўлмаган ечимидан иборат бўлади. Бу ечимни *махсус интеграл* дейилади.

2) Энди $\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial x}=\frac{\partial b}{\partial y}=0$ бўлсин. Бу ҳолда $a=\text{const}$, $b=\text{const}$ бўлиб, биз тўлиқ интегралга қайтган бўламиз.

3) Умумий ҳолда, (12.47) ни икки номаълумки иккита чизиқли алгебраик тенгламалар системаси деб қарасак, унинг ечимга эга бўлиши учун ушбу

$$\frac{D(a,\ b)}{D(x,\ y)}=0 \tag{12.49}$$

шартнинг бажарилиши зарурлиги келиб чиқади. (12.49) тенглик a ва b ўртасида *функционал боғлиқлик* мавжудлигини кўрсатади. Агар масалан, $\frac{\partial a}{\partial x}\neq 0$ ёки $\frac{\partial a}{\partial y}\neq 0$ бўлса, у ҳолда бу боғлиқликни

$$b=\omega(a) \tag{12.50}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ердаги ω — ихтиёрий функция. (12.50) га асосан, (12.47) система қуйидаги битта муносабатга келади:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a}+\frac{\partial \Phi}{\partial b}\omega'(a)=0.$$

Агар бу тенгликдан a ни x ва y нинг функцияси сифатида топиш мумкин бўлса, у ҳолда (12.50) тенгламадан b ни ҳам эркли ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида топамиз. a ва b нинг топилган қийматларини (12.44) га қўйиб, (12.43) тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз. Дифференциалланувчи $\omega(a)$ функцияни ихтиёрий танлаб олингандаги ечимларнинг бундай тўплами (12.43) тенгламанинг *умумий интеграли* дейилади. Ихтиёрий $\omega(a)$ функциянинг ҳар бир танлаб олинишига, умуман айтганда, умумий интегралга кирувчи бирор *хусусий ечим* мос келади. Шу маънода, умумий ечим ихтиёрий функцияга боғлиқ бўлади деб айтишимиз мумкин.

Биринчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламанинг тўлиқ умумий ва махсус интегралларини соддагина геометрик талқин қилиш мумкин. Хусусий ҳосилали тенгламанинг ечими (x, y, z) координаталар фазосида сиртни аниқлайди, бу сиртни *интеграл сирт* деб аталади. Бешта (x, y, z, p, q) миқдорлар тўпламини *элемент* дейилади, бунда x, y, z бирор нуқтанинг координаталари, p ва q эса шу нуқтадан ўтувчи текисликнинг бурчак коэффициентлари. Бу таърифга асосан (12—43) тенгламанинг ечимини топиш масаласи қуйидагича қўйилиши мумкин: шундай сирт топилсинки, бу сиртнинг нуқталари ва уринма текисликларнинг бурчак коэффициентларидан ташкил топган элементлар (12.43) муносабатни қаноатлантирсин. (12.44) тўлиқ интеграл икки параметрга боғлиқ бўлган сиртлар оиласидан иборатдир. Энди геометрик нуқтаи назардан умумий ва махсус интеграллар нимадан иборат эканини кўрамиз. Умумий интегралга кирадиган ечимни топиш учун ихтиёрий (12.50) муносабатни олиб b нинг қийматини (12.44) га қўйиб, a параметрни ушбу

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial a}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}\omega'(a)=0$$

муносабатлардан чиқарган эдик. Охирги икки тенглама эса бир параметрли сиртлар оиласининг *ўрама сиртини* аниқлайди. Бу нарса геометрик нуқтаи назардан қуйидагини ифодалайди: (12.50) муносабатни асосан берилган икки параметрли (12.44) оиладан бир параметрли бирор оилани ажратамиз, сўнгра бу оила ўрама сиртини топамиз. Ўрама сирт ўзининг ҳар бир нуқтасида ўралувчи сиртлардан биттасига урингани учун, яъни умумий элементга эга бўлгани учун бу ўрама сирт ҳам берилган тенгламанинг ечимидан иборат бўлади.

Ниҳоят, биз биламизки, махсус интеграл ушбу

$$\Phi=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial a}=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial b}=0$$

тенгламалардан a ва b ни чиқариш натижасида ҳосил бўлади. Бу жараён, маълумки, икки параметрли сиртлар оиласининг ўрамасига (агар у мавжуд бўлса) олиб келади. Юқоридагидек мулоҳаза юритиб, бу ўрама сиртнинг ҳамма элементлари берилган тенгламани қаноатлантиришига, яъни интеграл сирт эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Мисоллар. 1. Берилган R радиусли, марказлари xOy текислик нукталарида бўлган шар сиртларининг оиласи

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2$$

икки (a ва b) параметрли оиладан иборатдир. Бу оила тўлиқ интеграл бўладиган хусусий ҳосилали тенгламани топиш учун z ни x ва y нинг функцияси деб ҳисоблаб, берилган муносабатни x ва y бўйича дифференциаллаймиз:

$$x-a+zp=0, \quad y-b+zq=0.$$

Бундан $x-a=-zp$, $y-b=-zq$. Бу ифодаларни берилган тенгликка қўйиб, тўлиқ интегралга мос бўлган тенгламани топамиз:

$$z^2(1+p^2+q^2)=R^2.$$

Умумий интегралга кирадиган ечимни ҳосил қилиш учун $b=\omega(a)$ муносабатни киритамиз, яъни марказлари $y=\omega(x)$, $z=0$ чизиқда ётувчи шарлар оиласини ажратамиз. Бундай оиланинг ҳар қандай ўрама сирти интеграл сирт бўлади ва умумий интегралга киради.

Ниҳоят, махсус интеграл қуйидаги учта тенгликдан a ва b ларни чиқариш натижасида ҳосил бўлади:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2, \quad x-a=0, \quad y-b=0.$$

Бундан $z=\pm R$. Ҳар бир шар сиртига битта нуқтада уринувчи иккита текислик тенгламасини ҳосил қилдик.

Кўп ҳолларда тўлиқ интегрални топиш унча катта қийинчилик туғдирмайди.

1) Агар (12.43) тенглама $F(p, q)=0$ ёки $p=\varphi(q)$ кўринишга эга бўлса, $q=a$ деб ҳисоблаб (бунда a — ихтиёрий ўзгармас)

$$p=\varphi(a), \; dz=pdx+qdy=\varphi(a)\,dx+ady$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Охирги тенгламани интеграллаб ушбу

$$z=\varphi(a)x+ay+b$$

тўлиқ интегрални топамиз.

2) Агар (12.43) тенгламада ўзгарувчиларни ажратиш мумкин бўлса, яъни тенглама

$$\varphi(x, p)=\psi(y, q)$$

кўринишга эга бўлса, $\varphi(x, p)=\psi(y, q)=a$ деб ҳисоблаб (бунда a — ихтиёрий ўзгармас), бу тенгликларни (агар мумкин бўлса) p ва q га нисбатан ечиб, $p=\varphi_1(x, a)$, $q=\psi_1(x, a)$ ларни топамиз. Сўнгра ушбу

$$dz=pdx+qdy=\varphi_1(x, a)\,dx+\psi_1(y, a)\,dy$$

Пфафф тенгламасини интеграллаб

$$z=\int\varphi_1(x, a)\,dx+\int\psi_1(y, a)\,dy+b$$

тўлиқ интегрални топамиз.

3) Агар берилган тенглама

$$F(z, p, q)=0$$

кўринишга эга бўлса, у ҳолда $z=z(u)$ деб ҳисоблаб (бунда $u=ax+y$), ушбу

$$F\left(z, a, \frac{dz}{du}\right)=0$$

оддий дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Буни интеграллаб $z=\Phi(u, a, b)$ (бунда b — ихтиёрий ўзгармас) ёки

$$z=\Phi(ax+b,\ a,\ b)$$

тўлиқ интегрални топамиз.

4) Умумлашган Клеро тенгламаси

$$z=px+qy+f(p,\ q)$$

кўринишга эгадир. Текшириб кўриш қийин эмаски, унинг тўлиқ интеграли қуйидаги ифодадан иборатдир:

$$z=ax+by+f(a,\ b)$$

2. Ушбу

$$p=3q^3$$

тенгламанинг тўлиқ интеграли топилсин. Бу тенглама 1) ҳолга тўғри келади:

$$q=a,\ p=3a^3,\ dz=3a^3dx+ady,\ z=3a^3x+ay+b.$$

3. Ушбу

$$p-3x^2=q^2-y$$

тенгламанинг тўлиқ интеграли топилсин. Бу тенгламада ўзгарувчилар ажралган. Шу сабабли 2) ҳолда кўрсатилган усул билан тўлиқ интегрални топамиз:

$$p-3x^2=a,\ p=3x^2+a;\ q^2-y=a,\ q=\sqrt{y+a},$$

$$dz=pdx+qdy=(3x^2+a)dx+\sqrt{y+a}\,dy\,,$$

$$z=x^3+ax+\frac{2}{3}(y+a)^{3/2}+b\,.$$

4. Ушбу

$$z^2(p^2z^2+q^2)=1$$

тенгламанинг тўлиқ интеграли топилсин. Бу тенглама 3) ҳолда кўрилган тенгламага тўғри келади:

$$z=z(u),\ u=ax+y,\ p=a\frac{dz}{du},\ q=\frac{dz}{du}\,,$$

$$z^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2(a^2z^2+1)=1,\ \frac{du}{dz}=\pm z(a^2z^2+1)^{1/2}\,,$$

$$u+b=\pm\frac{1}{3a^2}(a^2z^2+1)^{3/2}\ \text{ёки}\ qa^4(ax+y+b)^2=(a^2z^2+1)^3\,.$$

2. **Лагранж-Шарпи** усули. Ушбу

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0 \tag{12.43}$$

биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани текширамиз. Лагранж-Шарпи усули ихтиёрий a ўзгармасни ўз ичига олган шундай

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=a \tag{12.51}$$

тенгламани танлашдан иборатки, (12.43), (12.51) системалардан аниқланган $p=p(x,\ y,\ z,\ a)$ ва $q=q(x,\ y,\ z,\ a)$ функциялар битта квадратурада интегралланадиган

$$dz=p(x,\ y,\ z,\ a)dx+q(x,\ y,\ z,\ a)dy \tag{12.52}$$

Пфафф тенгламасига олиб келади. У ҳолда Пфафф тенгламасининг $u\ (x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0$ интеграли, бундаги b (12.52) тенгламани интеграллашда ҳосил бўладиган ихтиёрий ўзгармас (12.43) тенгламанинг тўлиқ интеграли бўлади. Ф функция (12.52) тенгламанинг битта квадратурада интегралланувчанлик шартидан, яъни

$$p\frac{\partial q}{\partial z}-q\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \tag{12.53}$$

тенгламадан аниқланади. (12.53) шартни p ва q ни x, y, z ларнинг функцияси сифатида аниқловчи (12.43), (12.51) системалар учун ёзиб оламиз. Бунда ошкормас функциялардан ҳосилаларни ҳисоблаш формулаларидан фойдаланамиз. (12.53) шартга қўйиш учун $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$, $\frac{\partial q}{\partial z}$ ҳосилаларни ҳисоблаш етарлидир.

p ва q ни x, y, z нинг функциялари деб қараб, (12.43), (12.51) тенгликларни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x}=0\,, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x}=0\,.\end{cases}$$

Бу системадан $\frac{D(F,\,\Phi)}{D(p,\,q)}$ детерминантни нолдан фарқли ҳисоблаб, $\frac{dq}{\partial x}$ ни топамиз:

$$\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{\dfrac{D(F,\,\Phi)}{D\,(p,\,x)}}{\dfrac{D(F,\,\Phi)}{D\,(p,\,q)}}\,.$$

Худди шунга ўхшаш (12.43), (12.51) системани y бўйича дифференциаллаб, $\frac{\partial p}{\partial y}$ ни топамиз:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\dfrac{D(F,\,\Phi)}{D(y,\,q)}}{\dfrac{D(F,\,\Phi)}{D(p,\,q)}}.$$

Ниҳоят, (12.43), (12.51) системани z бўйича дифференциаллаб, ҳосил бўлган системадан $\frac{\partial p}{\partial z}$ ва $\frac{\partial q}{\partial z}$ ни топамиз:

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\dfrac{D(F,\,\Phi)}{D(z,\,q)}}{\dfrac{D(F,\,\Phi)}{D(p,\,q)}}\,,\qquad \frac{\partial q}{\partial z}=-\frac{\dfrac{D(F,\,\Phi)}{D(p,\,z)}}{\dfrac{D(F,\,\Phi)}{(D(p,\,q)}}\,.$$

Топилган ҳосилаларни интегралланувчилик шарти (12.53) га қўйиб, тенгликларнинг ҳар икки томонини нолдан фарқли деб фараз қилинган $\frac{D(F,\,\Phi)}{D(p,\,q)}$ детерминантга кўпайтириб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0$$

ёки

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z} -$$

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0\,. \qquad (12.54)$$

Φ функцияни аниқлаш учун чизиқли бир жинсли (12.54) тенгламани ҳосил қилдик. Бу тенглама 12.2-§ да кўрсатилган усул билан интегралланади. (12.54) тенгламага мос бўлган оддий дифференциал тенгламалар системаси, яъни характеристикалар тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = -\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}}\,. \qquad (12.55)$$

(12.55) тенгламанинг ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига оладиган битта хусусий ечимини топиш кифоядир, яъни (12.55) тенгламанинг (12.43) билан биргаликда p ва q га нисбатан ечилиши мумкин бўлган битта

$$\Phi_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = a$$

биринчи интегрални топиш етарлидир. Демак, $p = \varphi_1(x,\ y,\ z,\ a)$ ва $q = \varphi_2(x,\ y,\ z,\ a)$ миқдорларни ушбу

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0, \\ \Phi_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = a \end{cases}$$

системадан аниқлаб ва

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

тенгламага қўйиб, битта квадратурада интегралланадиган Пфафф тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$dz = \varphi_1(x,\ y,\ z,\ a)\,dx + \varphi_2(x,\ y,\ z,\ a)\,dy.$$

Бу тенгламани ечиб изланаётган

$$u(x,\ y,\ z,\ a,\ b) = 0$$

тўлиқ интегрални топамиз.

Изоҳ. Агар шартли ушбу

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}p, \quad \frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}q$$

белгиларни киритсак, (12.54) тенгламанинг ёки ундан олдин ёзилган тенгламанинг чап қисмини

$$(F,\ \Phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{dF}{dx} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{dF}{dy} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ифодани *Майер қавси* дейилади. Агарда берилган тенгламада изланаётган функция қатнашмаса, яъни тенглама

$$F(x,\ y,\ p,\ q)=0$$

кўринишда бўлса, иккинчи тенгламани ҳам худди шу кўринишда изланади, яъни

$$\Phi(x,\ y,\ p,\ q)=a.$$

Бу ҳолда Майер қавси ушбу

$$(F,\ \Phi)=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

кўринишга эга бўлади. Бу ифодани *Пуассон қавси* дейилади. Пуассон ёки Майер қавсини нолга айлантирадиган иккита функцияни *инволюцияда бўлган функциялар* дейилади. Шундай қилиб, Лагранж-Шарпи усулининг ғояси биринчи тенглама билан инволюцияда бўлган иккинчи тенгламани топишдан иборатдир.

Мисол. Ушбу

$$F\equiv 2xz-px^2-2qxy+pq=0$$

тенгламанинг тўлиқ интеграли топилсин.

(12.55) характеристикалар тенгламасида қатнашадиган ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial F}{\partial p}=-x^2+q,\quad \frac{\partial F}{\partial q}=-2xy+p.\quad \frac{\partial F}{\partial x}=2z-2xp-2yq,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2qx,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2x.$$

(12.55) характеристикалар тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{dx}{-x^2+q}=\frac{dy}{-2xy+p}=\frac{dz}{-px^2-2xyq+2pq}=\frac{dp}{2z-2yq}=\frac{dq}{0}.$$

Бу системанинг биринчи интегралларидан биттаси $q=0$ дан иборатдир. $q=a$ ни берилган тенгламага қўйиб p ни топамиз:

$$p=\frac{2x(z-ay)}{x^2-a}.$$

Демак,

$$dz=pdx+qdy=\frac{2x(z-ay)}{x^2-a}dx+ady$$

ёки

$$\frac{dz-ady}{z-ay}=\frac{2xdx}{x^2-a}.$$

Бундан

$$\ln|z-ay|=\ln|x^2-a|+\ln b$$

ёки

$$z = ay + b(x^2 - a)$$

тўлиқ интегрални ҳосил қиламиз.

3. Интеграл сиртни топиш. (12.43) тенгламанинг тўлиқ интеграли

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0$$

маълум бўлган ҳолда (12.43) тенглама учун Коши масаласини, яъни берилган

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; z = \chi(t) \tag{12.56}$$

эгри чизиқдан ўтувчи (12.43) тенгламанинг интеграл сиртини топиш масаласини ечиш мумкин.

Умумий интегрални аниқловчи тенгламаларни оламиз, яъни $b = \omega(a)$ бўлганда

$$\Phi(x, y, z, a, \omega(a)) = 0, \tag{12.57}$$

$$\frac{\partial\Phi(x, y, z, a, \omega\;(a))}{\partial a} + \frac{\partial\Phi(x, y, z, a, \omega\;(a))}{\partial b}\omega'(a) = 0. \tag{12.58}$$

$b = \omega(a)$ функцияни шундай танлаб олиш керакки, (12.57), (12.58) тенгламалар билан аниқланадиган сирт, яъни бир параметрли (12.57) оиланинг ўрамаси берилган (12.56) эгри чизиқдан ўтсин. Берилган эгри чизиқнинг нуқталарида иккала (12.57) ва (12.58) тенглама t бўйича айниятга айланади:

$$\Phi(\varphi(t), \psi(t), \chi(t), a, \omega(a)) = 0, \tag{12.59}$$

$$\frac{\partial\Phi(\varphi(t), \psi(t), \chi(t), a, \omega(a))}{\partial a} + \frac{\partial\Phi(\varphi(t), \psi(t), \chi(t), a, \omega(a))}{\partial b}\omega'(a) = 0. \tag{12.60}$$

Бу тенгламалардан $b = \omega(a)$ функцияни аниқлаш анча мураккабдир. Шу сабабли одатда бошқачароқ йўл тутилади. (12.59) тенглик $\omega(a)$ функция маълум бўлганда a ни t ўзгарувчи орқали аниқлайди. Шундай ҳисоблаб, (12.59) тенгликни t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\varphi'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\psi'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\chi'(t) + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial a} + \frac{\partial\Phi}{\partial b}\omega'(a)\right]\frac{da}{dt} = 0\,.$$

(12.60) тенгликни эътиборга олиб, ушбу

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\varphi'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\psi'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\chi'(t) = 0 \tag{12.61}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (12.59) ва (12.61) тенгламалар системасидан $b = \omega(a)$ функцияни аниқлаш анча қулай бўлади. Агар (12.56) эгри чизиққа ўтказилган уринма векторни $\bar{t}$ орқали, $\Phi = 0$ сиртга ўтказилган ва демак, мос нуқталарда изланаётган ўрамага ўтказилган нормалнинг векторини $\overline{N}$ орқали белгилаб олсак, (12.61) тенглик қисқача

$$(\overline{N}, \bar{t}) = 0$$

кўринишда ёзилади. (12.61) шарт геометрик нуқтаи назардан шу нарсани билдирадики, изланаётган сирт берилган эгри чизиқдан ўтиши керак ва демак, бу эгри чизиққа ўтказилган уринма изланаётган сиртга ўтказилган уринма текисликда ётиши керак.

Мисол. Ушбу

$$z=px+qy+3p^2-q^2$$

тенгламанинг $x=0$, $z=y^2$ эгри чизиқдан ўтувчи интеграл сирти топилсин.

Берилган тенглама умумлашган Клеро туридаги тенглама бўлгани учун унинг тўлиқ интеграли $z=ax+by+3a^2-b^2$ дан иборатдир. Берилган эгри чизиқнинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзиб оламиз: $x=0$, $y=t$, $z=t^2$. Текширилаётган ҳолда (12.59) (12.61) тенгламалар

$$t^2=bt+3a^2-b^2,\ 2t=b$$

кўринишга эга бўлади. Булардан:

$$b=2a,\ z=a(x+2y)-a^2.$$

Бу оиланинг ўрамаси

$$z=a(x+2y)-a^2,\ x+2y-2a=0$$

тенгламалар билан аниқланади. Охирги тенгламалардан a ни чиқариб, изланаётган сиртни топамиз:

$$z=\frac{(x+2y)^2}{4}.$$

Агар (12.55) системани интеграллаш қийинчилик туғдирмаса, Кошининг умумлашган ечимини топишда қуйида баён қилинадиган *характеристикалар* ёки *Коши усулидан* фойдаланиш қулай бўлади.

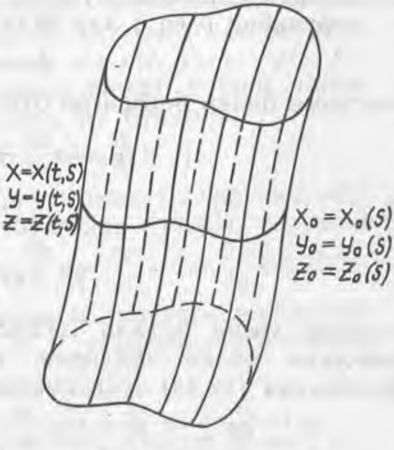
4. Коши усули. Кошининг умумлашган масаласи қуйидагича қўйилади: (12.43) тенгламанинг берилган

$$x_0=x_0(s),\quad y_0=y_0(s),\quad z_0=z_0(s)$$

эгри чизиқдан ўтувчи $z=z(x, y)$ интеграл сирти топилсин. Одатда қўйилган масаланинг ечимини қуйидаги

$$x=x(t, s),\ y=y(t, s),\ z=z(t, s) \tag{12.62}$$

параметрик кўринишда излаш қулай бўлади, бунда s параметр. Бундай кўринишда излаймиз, деган ифодани берилган эгри чизиқдан ўтувчи $z=z(x, y)$ сирт бир параметрли (12.62) эгри чизиқлар оиласида ётувчи нуқталардан ташкил топади деб тушуниш керак. (12.62) эгри чизиқларни *характеристикалар* дейилади (77- чизма). Коши усулининг ғояси қисқача қуйидагидан иборат: аввало бир нечта параметрга боғлиқ бўлган характеристикалар оиласи топилади, сўнгра характеристикаларнинг $x_0=x_0(s)$, $y_0=y_0(s)$, $z_0=z_0(s)$ эгри чизиқ нуқталаридан ўтишидан ва яна айрим



73- чизма

шартларни қаноатлантиришидан фойдаланиб, бир параметрли $x=x(t,\ s)$, $y=y(t,\ s)$ $z=z(t,\ s)$ эгри чизиқлар оиласини топамиз (бунда s ни параметр деб ҳисоблаш мумкин). Бу эгри чизиқларда ётувчи нуқталарнинг тўплами изланаётган интеграл сиртни ташкил қилади, $z=z(x,\ y)$ функция

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0 \tag{12.43}$$

тенгламанинг интеграл сиртидан иборат бўлсин. (12.43) айниятни x ва y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{cases} F_x+pF_z+F_p\dfrac{\partial p}{\partial x}+F_q\dfrac{\partial q}{\partial x}=0\,, \\ F_y+qF_z+F_p\dfrac{\partial p}{\partial y}+F_q\dfrac{\partial q}{\partial y}=0\,; \end{cases}$$

$\dfrac{\partial q}{\partial x}=\dfrac{\partial p}{\partial y}$ бўлгани учун аввалги тенгликларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} F_x+pF_z+F_p\dfrac{\partial p}{\partial x}+F_q\dfrac{\partial p}{\partial y}=0\,, \\ F_y+qF_z+F_p\dfrac{\partial q}{\partial x}+F_q\dfrac{\partial q}{\partial y}=0\,. \end{cases} \tag{12.63}$$

Бу тенгликларда z ни x ва y нинг маълум функцияси деб ҳисобланади. p ва q га нисбатан квазичизиқли бўлган тенгламаларнинг (12.63) системаси учун характеристикалар тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=-\frac{dp}{F_x+pF_z}\,,\quad \frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=-\frac{dy}{F_y+qF_z}$$

ёки бу икки системани бирлаштириб, ушбу

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=-\frac{dp}{F_x+pF_z}=-\frac{dq}{F_y+qF_z}=dt \tag{12.64}$$

кўринишда ёзишимиз мумкин.

z функция p ва q лар билан

$$dz=pdx+qdy$$

тенглама билан боғланган бўлгани учун, характеристика бўйлаб

$$\frac{dz}{dt}=p\frac{dx}{dt}+q\frac{dy}{dt}=pF_p+qF_q$$

ёки

$$\frac{dz}{pF_p+qF_q}=dt \tag{12.65}$$

тенглик ҳосил бўлади. (12.65) эса (12.64) системани яна бир тенглама билан тўлдириш имконини беради. Шундай қилиб, функцияни (12.43) тенгламанинг ечими деб ҳисоблаб, ушбу

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dz}{pF_p+pF_q}=-\frac{dp}{F_x+pF_z}=-\frac{dq}{F_y+qF_z}=dt \tag{12.65$'$}$$

системага келдик. (12.65′) тенгламалардан (12.43) тенгламанинг $z=z(x,\ y)$ ечимини билмаган ҳолда $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $p=p(t)$, $q=q(t)$ функцияларни топиш мумкин, яъни *характеристикалар* деб аталувчи

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$$

эгри чизиқларни ҳамда ушбу

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y) \qquad (12.66)$$

текисликнинг йўналишини аниқловчи $p=p(t)$ ва $q=q(t)$ сонларни характеристиканинг ҳар бир нуқтасида топиш мумкин. Характеристика ва унинг ҳар бир нуқтасига оид (12.66) текислик биргаликда *характеристик кенглик (полоса)* дейилади.

Энди (12.43) тенгламанинг интеграл сирти характеристикалардан тузилиши мумкинлигини кўрсатамиз. Аввало (12.65′) системанинг интеграл чизиғи бўйлаб F функциянинг қиймати ўзгармас, яъни

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=C$$

бўлишига, бошқача айтганда $F(x, y, z, p, q)$ функция (12.65) системанинг биринчи интеграли эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Ҳақиқатан, (12.65′) системанинг интеграл чизиғи бўйлаб:

$$\frac{d}{dt}F(x, y, z, p, q)=F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}+F_p\frac{dp}{dt}+F_q\frac{dq}{dt}=$$

$$=F_xF_p+F_yF_q+F_z(pF_p+qF_q)-F_p(F_x+pF_z)-F_q(F_y+qF_z)\equiv 0.$$

Демак, (12.65′) системанинг ҳар бир ечими бўйлаб қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=C \qquad C=F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0).$$

(12.65′) системанинг интеграл чизиқлари бўйлаб (12.43) тенглама қаноатлантирилиши учун $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$, $q_0(s)$ бошланғич қийматларни шундай танлаш керакки, улар

$$F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0)=0$$

тенгламани қаноатлантирсин. Бу тенгламани қаноатлантирадиган $x_0=x_0(s)$, $y_0=y_0(s)$, $z_0=z_0(s)$, $p_0=p_0(s)$, $q_0=q_0(s)$ бошланғич шартларда (12.65′) системани интеграллаб, $x=x(t,\ s)$, $y=y(t,\ s)$, $z=z(t,\ s)$, $p=p(t,\ s)$, $q=q(t,\ s)$ ларни топамиз. s нинг тайин қийматида характеристикалардан биттасига эга бўламиз:

$$x=x(t,\ s), \qquad y=y(t,\ s), \qquad z=z(t,\ s).$$

s ни ўзгартира бориб бирор сиртни ҳосил қиламиз. Бу сиртнинг ҳар бир нуқтасида $p=p(t,\ s)$, $q=q(t,\ s)$ бўлганда (12.43) тенглама қаноатлантирилади, аммо шу билан бирга $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ ёки $dz=pdx+qdy$ муносабатнинг ўринли ёки ўринли эмаслигини аниқлаш керак. Охирги тенгликни x ва y лар s ва t ўзгарувчиларга боғлиқ бўлгани учун бундай ёзиш мумкин:

$$dz=p\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+q\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt\ .$$

Бу тенглик эса ушбу

$$p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}=0\,, \tag{12.67}$$

$$p\frac{\partial x}{\partial t}+q\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial z}{\partial t}=0 \tag{12.68}$$

иккита тенгламага эквивалентдир. (12.65′) системага асосан

$$\frac{\partial x}{\partial t}=F_p,\quad \frac{\partial y}{\partial t}=F_q,\quad \frac{\partial z}{\partial t}=pF_p+qF_q$$

бўлгани учун (12.65′) системада s тайин қийматга эга деб ҳисоблаганимиз учун $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ лар ўрнига $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ларни ёзсак, (12.68) тенглик бажарилади. (12.67) тенгликнинг айниятга айланишини исбот қилиш учун унинг чап қисмини u орқали белгилаб оламиз, яъни

$$u=p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}\,.$$

u дан t бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}+p\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial s}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}+q\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial s}-\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}.$$

(12.68) айниятни s бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+p\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}+\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}+q\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}-\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}=0\,.$$

Аввалги тенгликдан кейингисини айирамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}$$

ёки (12.65′) тенгламаларга асосан

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=-(F_x+pF_z)\frac{\partial x}{\partial s}-(F_y+qF_z)\frac{\partial y}{\partial s}-F_p\frac{\partial p}{\partial s}-F_q\frac{\partial q}{\partial s}=\\&=-\left(F_x\frac{\partial x}{\partial s}+F_y\frac{\partial y}{\partial s}+F_z\frac{\partial z}{\partial s}+F_p\frac{\partial p}{\partial s}+F_q\frac{\partial q}{\partial s}\right)-\\&\quad-F_z\left(p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}\right).\end{aligned}$$

$F(x, y, z, p, q)=0$ тенглама F функция аргументлари ўрнига $x(t, s)$, ..., $q(t, s)$ ларни қўйганда айниятга айланади. Шу айниятни s бўйича дифференциаллаймиз:

$$F_x\frac{\partial x}{\partial s}+F_y\frac{\partial y}{\partial s}+F_z\frac{\partial z}{\partial s}+F_p\frac{\partial p}{\partial s}+F_q\frac{\partial q}{\partial s}=0\,.$$

Кейинги икки тенгликнинг биринчисидан иккинчисини айириб, ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-F_z\left(p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}\right)$$

ёки

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -F_z u$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу оддий дифференциал тенгламани интеграллаб, u ни топамиз:

$$u = -u_0 e^{\int\limits_0^t F_z dt}$$

бу ерда $u_0 = u_{t=0}$. Охирги тенгликдан кўринаяптики, u нинг нолга айланиши учун $u_0 = 0$ бўлиши зарур ва етарлидир, яъни $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$, $q_0(s)$ бошланғич функцияларни шундай танлаш керакки, улар ушбу

$$p_0(s)\frac{dx_0}{ds} + q_0(s)\frac{dy_0}{ds} - \frac{dz_0}{ds} = 0$$

тенгликни қаноатлантирсин. Шундай қилиб, Коши усули билан (12.43) тенгламани $x_0 = x_0(s)$, $y_0 = y_0(s)$, $z_0 = z_0(s)$ бошланғич шартларда интеграллаш учун ушбу

$$F_i(x_0(s), y_0(s), z_0(s), p_0(s), q_0(s)) = 0,$$

$$p_0(s)\frac{dx_0}{ds} + q_0(s)\frac{dy_0}{ds} - \frac{dz_0}{ds} = 0$$

тенгламалардан $p_0 = p_0(s)$, $q_0 = q_0(s)$ функцияларни аниқлаб, сўнгра (12.65′) системанинг $t = 0$ да $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, $z = z_0(s)$, $p = p_0(s)$, $q = q_0(s)$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш керак. (12.65′) система ечимларидан учта

$$x = x(t, s),\ y = y(t, s),\ z = z(t, s)$$

функция (12.43) тенглама изланаётган интеграл сиртнинг параметрик кўринишдаги тенгламасини беради.

5. Умумий ҳол. Юқорида баён қилинган Коши усулини n та эркли ўзгарувчили хусусий ҳосилали ушбу

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \tag{12.69}$$

$\left(\text{бунда } p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},\ i = 1, 2, \dots, n\right)$ тенглама учун ҳам бевосита умумлаштириш мумкин.

Коши масаласи: (12.69) тенгламанинг берилган $(n-1)$ ўлчовли

$$x_{i0} = x_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}),\ i = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_0 = u_0(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \tag{12.70}$$

сиртдан ўтувчи n ўлчовли $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ интеграл сирт топилсин. 4- банддаги мулоҳазаларни такрорлаб, ушбу

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}} = \frac{dx_2}{F_{p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{F_{p_n}} = \frac{du}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}} =$$

$$= \frac{dp_1}{F_{x_1} + p_1 F_u} = \dots = -\frac{dp_n}{F_{x_n} + p_n F_u} = dt\,, \qquad (12.71)$$

$(2n+1)$ номаълумли $(2n+1)$ та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Вақтинча функцияларнинг бошланғич қийматлари

$$p_{i0} = p_{i0}(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}),\ i = 1, 2, \dots, n \qquad (12.72)$$

ларни маълум деб фараз қиламиз. У ҳолда (12.71) системани (12.70), (12.72) бошланғич қийматларда интеграллаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{gathered} x_i = x_i(t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1}), \\ u = u(t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1}), \\ p_i = p_i(t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1}), \\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ n. \end{gathered} \qquad (12.73)$$

$s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_{n-1}$ параметрларнинг тайин қийматларида

$$x_i = x_i(t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1}),\ u = u(t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1})$$

тенгламалар $(x_1, \dots, x_n, u)$ ўзгарувчиларнинг фазосида *характеристикалар* деб аталувчи эгри чизиқларни аниқлайди, $p_i = p_i(t, s_1, \dots, s_{n-1})$ сонлар эса характеристикаларнинг ҳар бир нуқтасига ўтказилган ушбу

$$U - u = \sum_{i=1}^{n} p_i (X_i - x_i) \qquad (12.74)$$

текисликларнинг йўналишини аниқлайди. Характеристикалар (12.74) текисликлар билан биргаликда *характеристик кенгликлар (полосалар)* дейилади.

$s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_{n-1}$ параметрлар ўзгарганда $(n-1)$ ўлчовли (12.70) сиртдан ўтувчи $(n-1)$ параметрли $x_i = x_i(t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1})$, $u = u(t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1})$ характеристикалар оиласига эга бўламиз. Энди (12.72) функциялар аниқ танлаб олинганда изланаётган n ўлчовли сиртнинг (12.73) характеристикалар оиласида ётувчи нуқталардан ташкил топишини кўрсатамиз. Бунинг учун қуйидаги икки айниятнинг бажарилишини кўрсатиш керак:

1) $F(x_1\ (t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1}),\ \dots,\ x_n(t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1}),\ u(t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1}),$
$p_1(t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1}),\ \dots,\ p_n(t,\ s_1,\ \dots,\ s_{n-1})) \equiv 0,$

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ n \text{ ёки } du = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\ .$$

Аввало $(F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ функция (12.71) системанинг биринчи интеграли эканини кўрсатамиз. (12.71) тенгламаларга асосан

$$\frac{d}{dt}F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{x_i}\frac{dx_i}{dt} + F_u\frac{du}{dt} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} F_{p_i}\frac{dp_i}{dt} \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{x_i}F_{p_i} + F_u\sum_{i=1}^{n} p_iF_{p_i} - \sum_{i=1}^{n} F_{p_i}(F_{x_i} + p_iF_u) \equiv 0\,.$$

Демак, (12.71) системанинг интеграл эгри чизиқлари бўйлаб қуйидаги муносабат ўринли:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = C$$

бунда

$$C = F(x_{10}, \ldots, x_{n0}, u_0, p_{10}, \ldots, p_{n0}).$$

Шундай қилиб, (12.73) функциялар (12.71) системанинг интеграл чизиқлари бўйлаб (12.69) тенгламани қаноатлантириши учун $p_{i0}(s_1, \ldots, s_{n-1})$ бошланғич қийматларни шундай танлаш керакки, ушбу

$$F(x_{10}(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, x_{n0}(s_1, \ldots, s_{n-1}), u_0(s_1, \ldots, s_{n-1}),$$
$$P_{10}(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, p_{n0}(s_1, \ldots, s_{n-1})) = 0$$

тенглик бажарилсин. Энди.

$$du = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial s_j}ds_j \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial x_i}{\partial s_j}ds_j\right)$$

айниятнинг тўғрилигини текшириб кўриш керак. Охирги айният қуйидаги n та айниятга эквивалентдир:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv 0\,, \tag{12.75}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial x_i}{\partial s_j} \equiv 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\,. \tag{12.76}$$

(12.75) айниятнинг тўғрилиги (12.71) системага асосан келиб чиқади. Ҳақиқатан, (12.71) тенгламаларга асосан:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_iF_{p_i},\ \frac{\partial x_i}{\partial t} = F_{p_i},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Бу ерда биз $\frac{du}{dt}$ ва $\frac{dx_i}{dt}$ ўрнига хусусий ҳосилалар ёздик, чунки

(12.71) системада барча s_i лар тайин деб ҳисоблаган эдик. Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial x_i}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}-\sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}\equiv 0 .$$

(12.76) айниятларнинг ўринли эканини исботлаш учун уларнинг чап қисмини u_j орқали белгилаб оламиз:

$$u_j=\frac{\partial u}{\partial j}-\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial x_i}{\partial s_j},\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 .$$

u_j ни t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial x_i}{\partial t\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial s_j}. \tag{12.77}$$

(12.75) айниятни s_j бўйича дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial s_j}\frac{\partial s_i}{\partial t}\equiv 0$$

айниятни эътиборга олиб, (12.77) тенгламани қуйидагича ёзиб олишимиз мумкин:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial s_j}\frac{\partial x_i}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial s_j}.$$

(12.71) системага асосан:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial s_j}F_{p_i}+\sum_{i=1}^{n}(F_{x_i}+p_iF_u)\frac{\partial x_i}{\partial s_j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(F_{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s_j}+F_{p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right)+F_u\frac{\partial u}{\partial s_j}-F_u\left(\frac{\partial u}{\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial x_i}{\partial s_j}\right).$$

$F\equiv 0$ айниятни s_j бўйича дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган айниятга асосан аввалги тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}=-F_u u_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Бу оддий дифференциал тенгламани интеграллаб, унинг ушбу

$$u_j=u_j^0 e^{-\int_0^t F_u d\tau}$$

ечимини топамиз. Демак, $u_j\equiv 0$ айниятнинг бажарилиши учун $u_j=u_{j|t=0}$ ёки

$$\frac{\partial u_0}{\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\frac{\partial x_{i0}}{\partial s_j}=0$$

бўлиши зарур ва етарлидир. Шундай қилиб, (12.69) тенгламанинг $(n-1)$ ўлчовли

$$\begin{cases} x_{i0}=x_{i0}(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ i=1, 2, \ldots, n. \\ u_0=u_0(s, \ldots, s_{n-1}) \end{cases}$$

сиртдан ўтувчи интеграл сиртни топиш учун $p_{i0}(s_1, \ldots, s_{n-1})$ бошланғич қийматларни ушбу

$$\left.\begin{aligned} &F(x_{10}, \ldots, x_{n0}, u_0, p_{10}, \ldots, p_{n0})=0, \\ &\frac{\partial u_0}{\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n} p_{i0}\frac{\partial x_{i0}}{\partial s_j}=0, \ j=1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}\right\} \tag{12.78}$$

тенгламалардан аниқлаб (албатта, бу системани p_{i0} ларга нисбатан ечиш мумкин деб фараз қиламиз), сўнгра (12.71) системани (у мавжудлик ва ягоналик теоремаларининг шартларини қаноатлантиради деб фараз қиламиз) ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_{i0}&=x_{i0}(s_1, \ldots, s_{n-1}), \\ u_0&=u_0(s_1, \ldots, s_{n-1}), \\ p_{i0}&=p_{i0}(s_i, \ldots, s_{n-1}) \end{aligned}\right\}$$

$$i=1, 2, \ldots, n$$

бошланғич шартларда интеграллаб, унинг қуйидаги ечимини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_i&=x_i(t, s_1, \ldots, s_{n-1}, \\ u&=u(t, s_1, \ldots, s_{n-1}), \\ p_i&=p_i(t, s_1, \ldots, s_{n-1}), \end{aligned}\right\} \tag{12.79}$$

$$i=1, 2, \ldots, n. \tag{12.80}$$

(12.79), (12.80) функциялар изланаётган интеграл сиртнинг параметрик тенгламаларидан иборатдир.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$z=pq+1$$

тенгламанинг $y_0=2$, $z_0=2x_0+1$ тўғри чизиқдан ўтувчи интеграл сирти топилсин.

Берилган тўғри чизиқнинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзиб оламиз:

$$x_0=s, \ y_0=2, \ z_0=2s+1.$$

(12.78) тенгламалар қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$2s=p_0q_0, \ 2-p_0=0.$$

Булардан p_0, q_0 бошланғич қийматларни аниқлаймиз: $p_0=2$, $q_0=s$.
(12.71) система ёки (12.65) система ушбу

$$\frac{dx}{-q}=\frac{dy}{-p}=\frac{dz}{-2pq}=\frac{dp}{-p}=\frac{dq}{-q}=dt$$

кўринишга эга бўлади. Бу системани интеграллаб, унинг ечимларини топамиз:

$$p=C_1e^{-t}, \ q=C_2e^{-t}, \ x=C_2e^{-t}+C_3, \ y=C_1e^{-t}+C_4,$$

$$z=C_1C_2e^{-2t}+C_5.$$

$$t=0,\ x_0=s,\ y_0=2,\ z_0=2s+1,\ p_0=2,\ q_0=s$$

бўлгани учун

$$p=2e^{-t},\ q=se^{-t},\ x=se^{-t},\ y=2e^{-t},\ z=2se^{-t}+1\,.$$

Демак, изланаётган интеграл сирт

$$x=se^{-t},\ y=2e^{-t},\ z=2se^{-2t}+1$$

ёки

$$z=xy+1$$

дан иборатдир.

2. Ушбу

$$p^2+q^2=1$$

тенгламанинг $x_0=\cos s$, $y_0=\sin s$, $z=\frac{s}{2}$ шартни қаноатлантирувчи интеграл сирт

топилсин.

(12.78) тенгламалар

$$p_0^2+q_0^2=1,\ \frac{1}{2}+p\cdot\sin s-q_0\cos s=0$$

кўринишга эга бўлади. Бу тенгламалардан

$$p_0=\pm\cos\left(s+\frac{\pi}{6}\right),\ p_0=\pm\cos\left(s-\frac{\pi}{6}\right),\ q_0=\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$q_0=-\sin\left(s-\frac{\pi}{6}\right)$$

бошланғич қийматларни топамиз. Берилган тенглама учун (12.65) система қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dx}{2p}=\frac{dy}{2q}=\frac{dz}{2p^2+2q^2}=-\frac{dp}{0}=-\frac{dq}{0}=dt\,.$$

Бу системани интеграллаймиз:

$$p_1=C_1,\ q=C_2,\ x=2C_1x+C_3,\ y=2C_2t+C_4,$$
$$z=2(C_1^2+C_2^2)t+C_5\,.$$

Ушбу

$$x_0=\cos s,\ y_0=\sin s,\ z_0=\frac{s}{2},\ p_0=\cos\left(s+\frac{\pi}{6}\right),\ q_0=\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right)$$

бошланғич шартлардан фойдалансак,

$$p=\cos\left(s+\frac{\pi}{6}\right),\ q=\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right),\ x=2t\cos\left(s+\frac{\pi}{6}\right)+\cos s,$$

$$y=2t\sin\left(s+\frac{\pi}{6}\right)+\sin s,\ z=2t+\frac{s}{2}\,.$$

Бу тенгламалардан охирги учтаси изланаётган сиртнинг параметрик тенгламаларидан иборатдир. Худди шунга ўхшаш p_0 ва q_0 ларнинг бошқа қийматларига мо интеграл сиртлар топилади.

(12.69) тенгламанинг хусусий ҳоли бўлган ушбу

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H(t,\ x_1,\ ...,\ x_n,\ p_1,\ ...,\ p_n)=0 \tag{12.81}$$

(бунда $\frac{\partial V}{\partial x_i}=p_i$, H эса ўз аргументларининг берилган функциясидир) тенгламани кўрамиз. Юқорида баён қилинган Коши усули (12.81) тенгламага қўлланилганда уни кўп ҳолларда *Якобининг биринчи* усули дейилади. (12.81) тенглама характеристикаларининг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}=...=\frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}=\frac{dV}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial V}{\partial p_i}+\frac{dV}{\partial t}}=$$

$$=-\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}}=...=\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}}. \tag{12.82}$$

Текширилаётган ҳолда аввалги (12.71) системадагига ўхшаш ёрдамчи эркли ўзгарувчи киритилишининг ҳожати йўқ, чунки унинг ролини эркли ўзгарувчи t ўйнаши мумкин. (12.82) системадан

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\ i=1,\ 2,\ ...,\ n,$$

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial V}{\partial t} \tag{12.83}$$

ёки

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H. \tag{12.84}$$

$2n$ та тенгламадан ташкил топган (12.83) системада номаълум функция V иштирок этмаяпти, шу сабабли уни (12.84) тенгламага боғлиқ бўлмаган ҳолда интеграллаш мумкин. (12.83) кўринишдаги тенгламалар механикада тез-тез учраб туради, уларни *каноник системалар* деб аталади. H функцияни эса *Гамильтон функцияси* дейилади. Коши усулидан фойдаланиб, (12.83) системанинг ечимини билган ҳолда (12.81) тенгламанинг ечимини топиш унча қийин бўлмайди. Фараз қилайлик, $t=t_0$, $x_i=x_{i0}$, $p_i=p_{i0}$ бошланғич қийматлардаги (12.83) системанинг ечими

$$\left.\begin{aligned} x_i&=x_i(t,\ t_0,\ x_{10},\ ...,\ x_{n0},\ p_{10},\ ...,\ p_{n0}),\\ p_i&=p_i(t,\ t_0,\ x_{10},\ ...,\ x_{n0},\ p_{10},\ ...,\ p_{n0}),\end{aligned}\right\} \tag{12.85}$$

$$i=1,\ 2,\ ...,\ n$$

бўлсин. Номаълум функцияни топиш учун x_i ва p_i ларнинг (12.85) қийматларини (12.84) тенгламанинг ўнг томонига олиб бориб қўйсак, у холда ўнг томон t нинг функциясидан иборат бўлади. Сўнгра V квадратурада топилади, яъни

$$V=\int_0^t\left(\sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H\right)dt+V_0\equiv$$

$$\equiv V(t,\ t_0,\ x_{10},\ \ldots,\ x_{n0},\ p_{10},\ \ldots,\ p_{n0})+V_0\,.$$

Машқ. I. Қуйидаги тенгламаларнинг умумий интеграллари топилсин:

1. $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$;
2. $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=x$;
3. $x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{x_3}{2}\frac{\partial u}{\partial x_3}=0$;
4. $x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+(x_3+u)\frac{\partial u}{\partial x_3}+(x_2+u)\frac{\partial u}{\partial x_3}=x_2+x_3$.

II. Қуйидаги тенгламаларнинг берилган шартларни қаноатлантирувчи ечимлари топилсин:

1. $x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ x=0,\ z=y^2$;
2. $(x_3-x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial u}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_3}=0,\ x_1=0,\ z=2x_2(x_2-x_3)$;
3. $xy\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x,\ x=a,\ 2ayz=a^2+2$;
4. $x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial u}{\partial x_3}=u,\ x_1=1,\ u=x_2+x_3$.

III. Қуйидаги Пфафф тенгламалари интеграллансин:

1. $x(y-1)(z-1)dx+y(z-1)(x-1)dy+z(x-1)(y-1)dz=0$;
2. $2\,yzdx+2\,xzdy-xy\,z\,dz=0$
3. $(2x^2+2xy+2xz^2+1)dx+dy+2zdz=0$.

IV. Қуйидаги тенгламаларнинг тўлиқ интеграллари топилсин:

1. $p=2q^2+1$;
2. $p^2q^3=1$;
3. $pq=p+q$;
4. $pq=xy$;
5. $p^2=q+x$;
6. $q=xyp^2$;
7. $uz=pq$
8. $z^3=pq^2$;
9. $q^2=z^2p^2(1-p^2)$;
10. $pxy+pq+qy-yz=0$;
11. $uzp^2-q=0$;
12. $p^2+q^2+pq-qx-py-2z+xy=0$.

V. Қуйидаги тенгламаларнинг тўлиқ интегралларидан фойдаланиб, берилган эгри чизиқлардан ўтувчи интеграл сиртлар топилсин:

1. $px+qy-pq=0,\ x=0,\ z=y$;
2. $z=px+qy+\frac{pq}{4},\ y=0,\ z=x^2$.

VI. Қуйидаги тенгламалар Коши усули билан интеграллансин:

1. $z=pq,\ x_0=1,\ z_0=y_0$;
2. $z=px+qy+pq,\ x_0=1,\ z_0=y_0^3$;
3. $p^2+q^2=2,\ x_0=0,\ z_0=y_0$.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТ

[1] *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Наука, 1969.

[2] *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1964.

[3] *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений, М., Гиз. физ. мат. литературы 1958.

[4] *Еругин Н. П.* ва бошқалар. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Головное изд. Киев. 1974.

[5] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, изд. «Мир», М., 1970.

[6] *Қоддингтон Э. А., Левинсон Г.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1958.

[7] *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, ОГИЗ, Гостехиздат, М., Л. 1947.

[8] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. т. II. изд. АНСССР, 1956.

[9] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, Наука, Москва, 1965.

[10] *Понтрягин Л. С.* ДАНСССР, т. 174, № 6, 1967.

[11] *Пейович Т.* (Peyovitch T.), Bulletin de la socicte mathematique de France, 53, 1925, 208—225.

[12] *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Наука и техника, Минск, 1970.

[13] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы, Наука, М., 1969.

[14] *Қори-Ниёзий Т. Н.* Танланган асарлар, 4- том, Дифференциал тенгламалар, ЎзССР, «Фан» нашриёти, Тошкент 1968.

[15] *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. Изд. ИЛ, М., 1962.

[16] *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Гостехиздат, М., 1955.

[17] *Малкин И. Г.* «Теория устойчивости движения», «Наука», М., 1966.

[18] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости, Наука, М., 1967.

[19] *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования, Вестник Московского университета, № 2, 1959 г.

[20] *Андронов А. А. Витт. А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний, М., Физматгиз, 2- е изд., 1959.

[21] *Курант Р.* Уравнения с частными производными, изд-во «Мир», М., 1964.

[22] *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, ОНТИ, ГТТИ, 1934.

[23] *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных, М., ИЛ, 1957.

[24] *Насритдинов Г.* О расширении одной двухсекторной модели экономики. Деп. 1990 г., УзНИИНТИ, 1366 — Уз(10с)

[25] *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. Изд. «Наука», М., 1976.

МУНДАРИЖА