А. В. БИЦАДЗЕ

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ
1981

~~22.16~~
Б 66
~~УДК~~ 517.9

Бицадзе А. В. **Некоторые классы уравнений в частных производных.** — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 448 с.

Книга представляет собой монографию, посвященную исследованию ряда задач для важных классов уравнений в частных производных. К ним относятся, в частности: 1) эллиптические уравнения и системы, не удовлетворяющие условиям равномерной и сильной эллиптичности; 2) вырождающиеся гиперболические уравнения и гиперболические системы, не удовлетворяющие условию нормальной гиперболичности; 3) уравнения смешанного (эллиптико-гиперболического) типа в двумерных и многомерных областях; 4) классы нелинейных уравнений в частных производных второго порядка, младшие члены которых относительно первых производных искомых функций представляют собой квадратичную форму с коэффициентами, зависящими от независимых переменных и искомых функций.

Библ. 254.

Андрей Васильевич ***Бицадзе***

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

М., 1981 г., 448 стр.

Редактор *А. С. Чистопольский*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*

Корректоры *Т. С. Плетнева*, *О. М. Кривенко*

ИБ № 11638

Сдано в набор 08.07.80. Подписано к печати 05.03.81. Т-05714. Бумага $84\times108^1/_{32}$, тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 23,52. Уч.-изд. л. 24,76. Тираж 5000. Заказ № 1625. Цена книги 2 р. 80 к.

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука» 199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12

Б $\frac{20203-039}{053(02)-81}$ 31-80. 1702050...

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРА

Книга носит монографический характер. Она посвящена исследованию вопросов теории уравнений в частных производных, которыми занимался автор в течение нескольких десятилетий. В ней речь идет об уравнениях второго порядка с вырождением типа и порядка, уравнениях смешанного эллиптико-гиперболического типа, о системах второго порядка с нерасщепленными главными частями, для которых классические задачи, вообще говоря, перестают быть корректно поставленными. Отдельная глава посвящена изучению структурных и качественных свойств классов нелинейных уравнений, охватывающих некоторые варианты уравнений гравитационного поля, теории волн в жидкости переменной плотности и др.

Книга снабжена вводной главой, содержащей краткий обзор результатов и методов классической теории линейных уравнений в частных производных. Эта глава рассчитана на то, чтобы помочь читателю понять сложность и важность задач, не удовлетворяющих стандартным условиям их нормальной разрешимости. Сравнительно небольшой объем книги в значительной мере обусловил отказ от обобщающих выводов при изложении приведенного в ней материала. По этой же причине в ней не нашли своего места результаты ряда математиков, порой даже весьма интересные.

Автор будет рад, если книга окажется сколько-нибудь полезной для читателя. Он приносит свою благодарность Е. Г. Евсееву, Д. В. Изюмовой и С. С. Харибегашвили за помощь, оказанную ими при подготовке рукописи к печати.

А. В. Бицадзе

Москва—Тбилиси,
ноябрь 1979 г.

Глава I. ВВОДНАЯ

§ 1. Классификация уравнений в частных производных

1°. Понятие уравнения в частных производных. Пусть $F(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots)$ — заданный N-мерный вектор, $N \geqslant 1$, компоненты которого $F_1, \ldots, F_N$ представляют собой функции точек x области D пространства E_n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, $n > 1$, и M-мерных векторов

$$p_{i_1 \ldots i_n} = (p^1_{i_1 \ldots i_n}, \ldots, p^M_{i_1 \ldots i_n})$$

с неотрицательными целочисленными индексами $i_1, \ldots, i_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} i_j = k, \quad k = 0, \ldots, m, \quad m \geqslant 1.$$

Равенство вида

$$F\left(x, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \ldots\right) = 0 \tag{1.1}$$

называется *уравнением в частных производных* относительно неизвестного вектора u с компонентами $u_1, \ldots, u_M$.

Когда $N = M = 1$, равенство (1.1) представляет собой *одно* (скалярное) *уравнение*, а при $N > 1$ — *систему уравнений* в частных производных. Наивысший порядок производных от искомых функций, входящих в данное уравнение системы (1.1), называется *порядком* данного уравнения. В системе (1.1) число уравнений N и число искомых функций M, вообще, могут быть отличны друг от друга.

Определенный в области D вектор $u = (u_1, \ldots, u_M)$, обладающий классическими или обобщенными частными производными, входящими в левую часть уравнения (1.1), и обращающий его в тождество, называется *решением* этого уравнения.

Если зависимость F от всех $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$ линейна, то уравнение (1.1) называется *линейным*.

2°. Деление по типам уравнений в частных производных. Без ограничения общности можно считать, что величины, входящие в уравнение (1.1), все действительны. Предположим, что $N = M$ и порядок каждого из уравнений, входящих в (1.1), равен m.

Когда частные производные функций $F_1, \ldots, F_N$ относительно всех $p_{i_1 \ldots i_n}$, $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$, непрерывны, линейные части приращений этих функций

$$\sum_{i_1 \ldots i_n} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \ldots i_n}} dp^j_{i_1 \ldots i_n}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

являются главными. Поэтому естественно, что они могут сыграть определенную роль при изучении уравнения (1.1).

При помощи квадратных матриц

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \ldots i_n}} \right\|, \quad i, j = 1, \ldots, N,$$

составим форму порядка Nm относительно действительных параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \det \sum_{i_1 \ldots i_n} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \ldots i_n}} \right\| \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}, \tag{1.2}$$

где сумма берется по всевозможным неотрицательным целым значениям индексов $i_1, \ldots, i_n$, удовлетворяющих условию $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$.

Выражение (1.2), в котором

$$p^j_{i_1 \ldots i_n} = \frac{\partial^m u_j}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

называется *характеристической формой* (*характеристическим детерминантом*) уравнения (1.1). В линейном случае коэффициенты этой формы зависят только от точки x, в общем же случае они являются функциями также искомого решения u и его производных.

По характеру формы (1.2) уравнения в частных производных делятся по типам. Сначала будем считать, что уравнение (1.1) линейно. Если для фиксированной точки $x \in D$ можно найти такое аффинное преобразование переменных

$$\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, \ldots, \mu_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

в результате которого полученная из (1.2) форма содержит лишь l, $0 < l < n$, переменных μ_i, то говорят, что уравнение (1.1) в точке x *параболически вырождается*. При предположении отсутствия параболического вырождения, если коническое многообразие

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0 \tag{1.3}$$

не имеет действительных точек, кроме $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, уравнение (1.1) в точке x называется *эллиптическим*. При таком же предположении говорят, что уравнение (1.1) в точке x *гиперболично*, если в пространстве переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ существует такая прямая, что если принять ее за координатную ось в новых переменных $\mu_1, \ldots, \mu_n$, полученных аффинным преобразованием $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то относительно координаты, меняющейся вдоль этой оси, преобразованное уравнение (1.3) имеет ровно Nm корней (простых или кратных) при любом выборе значений остальных координат.

Аналогично происходит деление по типам уравнений в частных производных и в нелинейном случае — по свойствам соответствующей характеристической формы. Поскольку коэффициенты этой формы зависят (наряду с точкой x) от искомого решения и от его производных, классификация по типам в рассматриваемом случае имеет смысл лишь для выбранного решения.

Говорят, что в области D уравнение (1.1) *параболично*, *эллиптично* или *гиперболично*, если в каждой точке x этой области оно параболически вырождается, эллиптично или гиперболично. Когда в разных частях области D своего задания уравнение (1.1) принадлежит разным типам, говорят, что оно является *уравнением смешанного типа* в этой области.

3°. Линейные уравнения в частных производных второго порядка. Линейные уравнения в частных производных второго порядка можно записать в виде

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u = F(x). \tag{1.4}$$

Говорят, что в области D своего задания уравнение (1.4) *однородно* или *неоднородно*, в зависимости от того, тождественно равна нулю или отлична от нуля в этой области функция $F(x)$.

Выражение

$$\sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

называется *главной частью дифференциального оператора*, стоящего в левой части уравнения (1.4).

Когда коэффициенты A^{ij}, B^i, C и правая часть F уравнения (1.4) являются скалярными функциями и искомое решение $u(x)$ тоже скаляр, характеристическая форма (1.2) является *квадратичной*:

$$Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}(x) \lambda_i \lambda_j. \tag{1.5}$$

В точках, в которых коэффициенты A^{ij} все равны нулю, порядок уравнения (1.4) вырождается. В таких точках деление по типам, очевидно, не имеет смысла. Если исключить вырождение порядка, то по данному в пункте 2° определению уравнение (1.4) будет *эллиптическим*, *гиперболическим* или *параболическим* в зависимости от того, *определена* (положительно или отрицательно), *знакопеременна* или *вырождена* форма (1.5).

В каждой точке x области задания уравнения (1.4) квадратичную форму (1.5) при помощи неособого аффинного преобразования действительных переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

$$\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

можно привести к каноническому виду

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i^2,$$

где коэффициенты α_i, $i=1, \ldots, n$, принимают значения 1, -1, 0, причем число отрицательных (положительных) коэффициентов (индекс инерции) и число нулевых коэффициентов (дефект формы) являются аффинными инвариантами. В эллиптическом случае все $\alpha_i=1$ или все $\alpha_i=-1$. В гиперболическом случае один из коэффициентов α_i равен единице, а все остальные равны минус единице (или наоборот). В параболическом случае по крайней мере один из этих коэффициентов равен нулю.

Типичными примерами эллиптических, гиперболических и параболических уравнений являются соответственно *уравнение Лапласа*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0, \tag{1.6}$$

волновое уравнение

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0 \tag{1.7}$$

и *уравнение теплопроводности*

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{\partial u}{\partial x_n}=0. \tag{1.8}$$

Эллиптическое в области D уравнение (1.4) называется *равномерно эллиптическим*, если существуют отличные от нуля постоянные k_0 и k_1 одинакового знака такие, что

$$k_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\leqslant Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\leqslant k_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \tag{1.9}$$

для всех точек $x\in D$. Уравнение Лапласа (1.6) равномерно эллиптично в любой области пространства E_n.

Поскольку характеристическая квадратичная форма (1.5) на примере уравнения

$$x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \tag{1.10}$$

имеет вид

$$Q = x_n \lambda_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^2, \tag{1.11}$$

это уравнение эллиптично в верхнем полупространстве $x_n > 0$, гиперболично в нижнем полупространстве $x_n < 0$ и параболически вырождается во всех точках гиперплоскости $x_n = 0$. В области D, лежащей в верхнем полупространстве $x_n > 0$ и примыкающей к гиперплоскости $x_n = 0$, уравнение (1.10) не является равномерно эллиптическим, ибо коэффициент при λ_1^2 в правой части (1.11) стремится к нулю при $x_n \to 0$ и, стало быть, нельзя подобрать такие отличные от нуля постоянные k_0 и k_1 одинакового знака, чтобы выполнялось условие (1.9) для всех точек рассматриваемой области D. Пример (1.10) относится к уравнениям смешанного типа в любой области D пространства E_n, пересечение которой с гиперплоскостью $x_n = 0$ не является пустым.

В случае двух независимых переменных x_1, x_2 запишем уравнение (1.4) и квадратичную форму (1.5) в развернутом виде:

$$L(u) = A^{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2A^{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + A^{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + B^1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + B^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + Cu = F \tag{1.12}$$

и

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = A^{11}\lambda_1^2 + 2A^{12}\lambda_1\lambda_2 + A^{22}\lambda_2^2. \tag{1.13}$$

Обозначим через δ дискриминант $A^{11}A^{22} - (A^{12})^2$ квадратичной формы (1.13). По данным выше определениям, в зависимости от того $\delta > 0$, $\delta < 0$ или $\delta = 0$, в точке (x_1, x_2) уравнение (1.12) будет соответственно эллиптического, гиперболического или параболического типа.

При достаточно общих предположениях относительно гладкости коэффициентов A^{11}, A^{12}, A^{22} можно указать такое неособое преобразование независимых переменных x_1, x_2

$$x_1 = x_1(x, y), \quad x_2 = x_2(x, y), \tag{1.14}$$

в результате которого уравнение (1.12) во всей области своего задания приводится к одному из следующих видов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \tag{1.15}$$

в эллиптическом случае,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \tag{1.16}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \tag{1.17}$$

в гиперболическом случае и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \tag{1.18}$$

в параболическом случае (см. Лихтенштейн [1], И. Н. Векуа [4]).

Как уже было отмечено, в точках параболического вырождения уравнения (1.12) имеет место равенство

$$\delta(x_1, x_2) = A^{11}A^{22} - (A^{12})^2 = 0. \tag{1.19}$$

Предположим, что A^{11}, A^{12}, A^{22} являются действительными аналитическими функциями в некоторой области D плоскости переменных x_1, x_2, а множество точек области D, на котором уравнение (1.12) параболически вырождается, т. е. имеет место равенство (1.19), представляет собой простую (аналитическую) кривую δ. Пусть все частные производные функции $\delta(x_1, x_2)$ до $(n-1)$-го порядка (включительно) равны нулю вдоль δ, а из ее производных n-го порядка хотя бы одна отлична от нуля. В этих предположениях, очевидно, имеет место представление

$$\delta = H^n(x_1, x_2)\,G(x_1, x_2), \tag{1.20}$$

где $H(x_1, x_2) = 0$ является уравнением кривой δ, а вдоль этой кривой функция $G(x_1, x_2) \neq 0$. Наряду с этим, учитывая то обстоятельство, что $\frac{\partial H}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial H}{\partial x_2}$ вдоль δ одновременно в нуль не обращаются, можно найти такую область $\Delta \subset D$, содержащую внутри себя дугу δ, в которой имеет место представление (1.20), причем ни в одной точке области Δ указанные частные производные одновременно в нуль не обращаются.

Направление, определенное вектором (dx_1, dx_2), удовлетворяющим условию

$$A^{11}dx_2^2 - 2A^{12}dx_2dx_1 + A^{22}dx_1^2 = 0, \tag{1.21}$$

называется *характеристическим направлением*. Из этого определения непосредственно следует, что *в точках эллиптичности уравнения* (1.12) *действительных характеристических направлений не существует, а в каждой точке гиперболичности или параболичности этого уравнения имеются соответственно по два или по одному действительных характеристических направлений.*

Обозначим через $\alpha(x_1, x_2)$ наименьший угол между касательной к кривой δ в точке (x_1, x_2) и выходящим из этой точки характеристическим направлением.

Предположим, что вдоль некоторого участка δ_1 дуги δ всюду либо

$$\alpha(x_1, x_2) \neq 0, \tag{1.22}$$

либо

$$\alpha(x_1, x_2) = 0. \tag{1.23}$$

Пусть Δ_1 — подобласть области Δ, содержащая внутри себя δ_1.

Чибрарио [1] было показано, что *можно найти неособое в* Δ_1 *преобразование* (1.14), *в результате которого в этой области уравнение* (1.12) *можно привести к одному из следующих канонических видов*:

$$y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \tag{1.24}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \tag{1.25}$$

при $n=2m+1$ *и при соблюдении условий* (1.22) *или* (1.23) *и*

$$y^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\pm\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=f(x, y) \tag{1.26}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\pm y^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=f(x, y) \tag{1.27}$$

при $n=2m$ *и при соблюдении условий* (1.22) *или* (1.23) (см. Геллерстедт [1] и А. В. Бицадзе [2]).

Очевидно, что в области Δ_1 уравнения (1.24), (1.25) являются уравнениями смешанного эллиптико-гиперболического типа с параболическим вырождением при $y=0$, в то время как тип уравнений (1.26), (1.27) при $y\neq 0$ всюду эллиптический или всюду гиперболический, а при $y=0$ они оба параболически вырождаются. В области, содержащей внутри себя участок линии вырождения типа $y=0$, с помощью неособого преобразования переменных уже невозможно привести ни одно из уравнений (1.24), (1.25), (1.26), (1.27) к другому или к уравнению такого же вида, но с другим показателем при y.

Когда число независимых переменных больше двух, с помощью преобразования независимых переменных привести уравнение (1.4) даже вблизи данной точки области его задания к такому виду, чтобы его главная дифференциальная часть совпала с *оператором Лапласа*

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

с волновым оператором

$$\Box=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

или с *оператором теплопроводности*

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\partial}{\partial x_n},$$

возможно лишь в исключительных случаях

4°. Линейные системы уравнений в частных производных второго порядка. Когда $A = \| A_{lk} \|$ — квадратная $N \times N$-матрица и $u = (u_1, \ldots, u_N)$ — вектор с N компонентами, под произведением Au понимается вектор с компонентами

$$(Au)_l = \sum_{k=1}^{N} A_{lk} u_k, \quad l = 1, \ldots, N.$$

Систему линейных уравнений в частных производных, в которой число N уравнений совпадает с числом M искомых функций, можно записать опять в виде (1.4), лишь с той разницей, что на этот раз A^{ij}, B^i, C — заданные $N \times N$-матрицы, $f = (f_1, \ldots, f_N)$ — заданный, а $u = (u_1, \ldots, u_N)$ — искомый векторы.

В этом случае характеристическая форма (1.2) принимает вид

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \det \sum_{i, j=1}^{n} A^{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$$

и ее степень, очевидно, равна $2N$. Эта форма инвариантна относительно неособого преобразования независимых переменных $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, при одновременной замене параметров $\mu_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \lambda_k$, $i = 1, \ldots, n$. Она инвариантна с точностью до множителя, не зависящего от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, при неособых преобразованиях векторов u и $L(u)$.

Систему (1.4) будем называть *равномерно эллиптической* в области D, если можно указать отличные от нуля постоянные k_0, k_1 одинакового знака такие, что

$$k_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right)^N \leqslant \det \sum_{i, j=1}^{n} A^{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \leqslant k_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right)^N \qquad (1.28)$$

всюду в области D.

В случае двух независимых переменных x_1, x_2 система (1.4) записывается в виде (1.12), где A^{11}, A^{12}, A^{22}, B^1, B^2, C — квадратные $N \times N$-матрицы, а $F = (F_1, \ldots, F_N)$, $u = (u_1, \ldots, u_N)$ — векторы.

Эллиптичность системы (1.12) равносильна тому, что корни характеристического полинома степени $2N$

$$P(\lambda) = \det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}) \tag{1.29}$$

все комплексны.

В случае же гиперболичности системы (1.12) все корни полинома (1.29) действительны. Когда эти корни простые, говорят, что система (1.12) строго гиперболична.

Если в рассматриваемой области плоскости переменных x_1, x_2 характеристический полином $P(\lambda)$ наряду с комплексными корнями имеет и действительные корни, говорят, что система (1.12) *составного типа.*

Очевидно, что при $N > 1$, даже в случае двух независимых переменных, в результате замены переменных невозможно приводить систему (1.12) ни к одному из видов (1.15), (1.16), (1.17), (1.18), (1.24), (1.25), (1.26), (1.27), в которых $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — квадратные $N \times N$-матрицы, а $f=(f_1, \ldots, f_N)$, $u=(u_1, \ldots, u_N)$ — векторы.

5°. Характеристические кривые и характеристические поверхности линейных уравнений второго порядка. Интегральная кривая обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\lambda_i(x_1, x_2), \tag{1.30}$$

где $\lambda_i(x_1, x_2)$ — корень характеристического полинома (1.29), называется *характеристической кривой уравнения* (*системы*) в частных производных (1.12). Очевидно, что в области своей эллиптичности уравнение (система) (1.12) действительных характеристических кривых не имеет. Характеристические кривые действительны только в области гиперболичности и параболичности рассматриваемого уравнения (рассматриваемой системы) (1.12). Причем в области гиперболичности характеристические кривые все действительны и их число равно числу корней $\lambda_i(x_1, x_2)$ характеристического полинома $P(\lambda)$.

В случае, когда (1.12) представляет собой одно уравнение, характеристической является кривая, определенная из равенства

$$\varphi(x_1, x_2) = \mathrm{const},$$

где $\varphi(x_1, x_2)$ — решение нелинейного уравнения в частных производных первого порядка

$$A^{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + 2A^{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + A^{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 = 0,$$

и, стало быть, равенство

$$A^{11}dx_2^2 - 2A^{12}dx_2dx_1 + A^{22}dx_1^2 = 0 \qquad (1.31)$$

служит дифференциальным уравнением для этих кривых.

Согласно (1.31), для уравнений (1.17) и (1.18) дифференциальными уравнениями характеристических кривых являются соответственно

$$dy^2 - dx^2 = 0$$

и

$$dy^2 = 0.$$

Следовательно, характеристики уравнения (1.17) состоят из двух семейств прямых

$$x + y = \text{const}, \quad x - y = \text{const},$$

а уравнения (1.18) — из одного семейства прямых

$$y = \text{const}.$$

Как уже было указано в пункте 3°, при $y > 0$ (при $y < 0$) уравнения (1.24) и (1.25) эллиптичны (гиперболичны) оба. Уравнения же (1.26) и (1.27) оба являются эллиптическими или гиперболическими в зависимости от того, берется ли из двух знаков «$\pm$» верхний или нижний.

Следовательно, *в случае двух независимых переменных x, y гиперболические в полуплоскости $y > 0$ уравнения с параболическим вырождением при $y=0$ можно привести к одному из видов*

$$y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \qquad (1.32)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y), \qquad (1.33)$$

где m — положительное число.

Дифференциальное уравнение (1.31) характеристических кривых в случае уравнений (1.32) и (1.33) имеет соответственно вид

$$y^m dy^2 - dx^2 = 0 \tag{1.34}$$

и

$$dy^2 - y^m dx^2 = 0. \tag{1.35}$$

В силу (1.34) при $y > 0$ уравнение (1.32) имеет два семейства характеристических кривых

$$(x-c)^2 - \left(\frac{2}{m+2}\right)^2 y^{m+2} = 0, \qquad c = \text{const}, \tag{1.36}$$

а линия параболического вырождения $y=0$ представляет собой *геометрическое место точек возврата* этих кривых. На основании же (1.35) заключаем, что полуплоскость $y > 0$ покрыта сетью из двух семейств характеристических кривых уравнения (1.33)

$$(x-c)^2 - \left(\frac{2}{2-m}\right)^2 y^{2-m} = 0, \quad c = \text{const}, \tag{1.37}$$

при $m \neq 2$, и

$$y = \exp(c \pm x), \qquad c = \text{const},$$

при $m=2$. Причем в обоих случаях прямая $y=0$ сама является характеристикой. В частности, когда $m < 2$, она является *огибающей* семейств (1.37) характеристик.

Пусть $Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — квадратичная форма (1.5), а

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \text{const} \tag{1.38}$$

—$(n-1)$-мерная поверхность в пространстве E_n. Если функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет равенству

$$Q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{1.39}$$

для всех точек поверхности (1.38), то последняя называется *характеристической поверхностью уравнения (системы)* (1.4). Очевидно, что характеристические поверхности не могут быть действительными в области эллиптичности уравнения (системы) (1.4). В частности, каждый конус семейства

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - c_i)^2 - (x_n - c_n)^2 = 0, \tag{1.40}$$

где $c=(c_1, \ldots, c_n)$ — произвольный действительный вектор, является характеристической поверхностью волнового уравнения (1.7), а семейство плоскостей

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i - c_n x_n = \mathrm{const}$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i^2 - c_n^2 = 0,$$

также входит в семейство характеристических поверхностей уравнения (1.7).

§ 2. Принципы экстремума

1°. Понятия о классах гладкости функций и гладкости границы области их задания. Границу ∂D области D пространства E_n будем обозначать через S.

Под функцией класса $C^{k,h}(D)$ понимается определенная в области D функция $u(x)$, обладающая частными производными до порядка k (включительно), причем частные производные порядка k непрерывны по Гёльдеру, т. е. удовлетворяют условию Гёльдера с показателем h, $0 < h \leqslant 1$, всюду в D. Через $C^{k,0}(D)$ будем обозначать класс функций, все частные производные которых порядка k непрерывны в D. Когда функция $u(x)$ класса $C^{k,h}(D)$ вместе со своими производными до порядка k имеет пределы при стремлении точки $x \in D$ к любой точке $x^0 \in S$ по произвольному пути, лежащему в D, то говорят, что эта функция вместе со своими производными определена в области D вплоть до ее границы, т. е. в замкнутой области $\bar{D}=D \cup S$, причем пределы $u(x)$ и ее производных в точке $x^0 \in S$ принимаются за их значения в этой точке. Если производные порядка k функции $u(x)$ просто непрерывны или непрерывны по Гёльдеру с показателем h, то будем говорить, что, соответственно, $u(x) \in C^{k,0}(D \cup S)$ или $u(x) \in C^{k,h}(D \cup S)$.

Говорят, что область D принадлежит классу $A^{k,h}$, если соблюдены следующие условия: 1) множество S можно покрыть конечным числом n-мерных областей, и каждой из которых координаты текущей точки $x \in S$ допускают параметрическое представление

$$x_i = x_i(t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где функции x_i определены в ограниченной области δ пространства переменных $t_1, \ldots, t_{n-1}$; 2) эти функции осуществляют взаимно однозначное соответствие между замкнутым множеством $\delta \cup \sigma$, где $\sigma = \partial\delta$, и соответствующей частью S, причем все $x_i \in C^{k,h}(\delta \cup \sigma)$, $k \geqslant 1$; 3) выражение

$$J = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial(x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

отлично от нуля в области δ; 4) параметрическое представление выбрано таким образом, что косинусы внешней нормали $\mathscr{N}$ к поверхности S в области δ даются формулами

$$\cos \widehat{\mathscr{N}x_i} = \frac{1}{J} \frac{\partial(x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Граница S области D класса $A^{1,h}$ называется *поверхностью Ляпунова*. В принятых обозначениях элемент ds площади S записывается в виде

$$ds = J\, dt_1 \ldots dt_{n-1}.$$

Ниже под *регулярным в области D решением* уравнения в частных производных второго порядка (1.4) будем понимать решения этого уравнения класса $C^{2,0}(D)$. Причем если речь не пойдет о гладкости более высокой степени, будем предполагать, что все коэффициенты этого уравнения и его правая часть принадлежат классу $C^{0,0}(D)$.

Кроме того, для систем функций $p_1, \ldots, p_n$ класса $C^{1,0}(D \cup S)$ мы будем пользоваться формулой Гаусса - Остроградского

$$\int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} dx = \int_S \sum_{i=1}^{n} p_i \cos \widehat{\mathscr{N}x_i} ds \qquad \text{(GO)}$$

не только тогда, когда граница S области D является поверхностью класса $A^{k,h}$, $k \geqslant 1$, но и тогда, когда S состоит из конечного числа кусков поверхностей класса $A^{k,h}$ без точек возврата (или ребер возврата) в местах соединения этих кусков. Такие области будем называть областями *кусочно-ляпуновского класса*, а поверхности S — *кусочно-ляпуновскими*.

2°. Принцип экстремума для решений эллиптических уравнений второго порядка. Регулярное решение $u(x)$ уравнения Лапласа (1.6) называется *гармонической функцией*. Обозначим через M и m верхнюю и нижнюю грани значений гармонической в области D функции $u(x)$. К важнейшим свойствам гармонических функций относится следующее свойство, известное под названием принципа экстремума: *отличная от постоянной гармоническая в области D функция $u(x)$ ни в одной точке этой области не может принимать ни значения M, ни значения m.*

Этот принцип легко переносится на случай однородного уравнения эллиптического типа

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u = 0. \quad (1.41)$$

А именно, *пусть $u(x)$ — регулярное решение однородного уравнения (1.41) с положительно определенной формой (1.5), коэффициент $C(x)$ которого удовлетворяет условию*

$$C(x) < 0 \quad (1.42)$$

всюду в D. Тогда функция $u(x)$ ни в одной точке $x \in D$ не может достигать отрицательного относительного минимума и положительного относительного максимума.

В самом деле, допустим, что в точке $x \in D$ функция $u(x)$ достигает своего относительного минимума. Это означает, что в точке x

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (1.43)$$

и

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \lambda_i \lambda_k \geqslant 0. \quad (1.44)$$

Из положительной определенности формы (1.5) следует существование неособого аффинного преобразования $\mu_i =$

$=\sum_{s=1}^{n} g_{is}\lambda_s$, $i=1, \ldots n$, приводящего эту форму к каноническому виду

$$\sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}\lambda_i\lambda_j=\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n} g_{is}\lambda_s\right)^2. \qquad (1.45)$$

Отсюда, в свою очередь, приходим к заключению, что

$$A^{ij}=\sum_{k=1}^{n} g_{ki}g_{kj}, \quad i, j=1, \ldots, n, \qquad (1.46)$$

в точке $x \in D$.

В силу (1.45) и (1.46) с учетом (1.44) имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\sum_{k=1}^{n} g_{ki}g_{kj} \geqslant 0. \qquad (1.47)$$

На основании (1.41), (1.42), (1.43), (1.47) и отрицательности функции $u(x)$ приходим к заключению, что, наряду с равенством $L(u)=0$, в точке x должно иметь место и неравенство $L(u)>0$. Полученное противоречие опровергает принятое допущение.

Аналогично доказывается, что в точке $x \in D$ функция $u(x)$ не может достигать и относительного положительного максимума.

Повторением приведенного выше рассуждения можно прийти к следующему утверждению: *если в области D всюду*

$$C(x)\leqslant 0, \quad F(x)<0 \quad [F(x)>0],$$

то регулярное в этой области решение $u(x)$ эллиптического уравнения (1.4) ни в одной точке $\mathring{x} \in D$ не может достигать отрицательного относительного минимума (положительного относительного максимума).

На основе этого утверждения Хопф [1] доказал теорему: *если в области D коэффициенты эллиптического уравнения (1.4) ограничены, дискриминант формы $Q_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ имеет положительную нижнюю грань и, кроме того,*

$$C(x)\leqslant 0, \quad F(x)\leqslant 0 \quad [F(x)\geqslant 0]$$

всюду в D, то регулярное в D решение $u(x)$ этого уравнения ни в одной точке $x^0 \in D$ не может иметь отрицательного относительного минимума (положительного относительного максимума), если только оно не обращается в постоянную в любой, содержащей точку x^0, подобласти D_1 области D, в которой

$$u(x) \geqslant u(x^0) \quad [u(x) \leqslant u(x^0)].$$

Когда в условиях теоремы Хопфа функция $F(x) \equiv 0$, а $u(x)$ принадлежит классу $C^{0,0}(D \cup S)$, то в силу этой теоремы, если только $u(x)$ отлична от постоянной, справедлива оценка

$$|u(x)| < M,$$

где M — максимум $|u(x)|$ на S. Когда к тому же $C(x) = 0$ всюду в D, то в теореме Хопфа можно опустить слова «отрицательного» и «положительного», и автоматически приходим к оценкам:

$$m < u(x) < M,$$

где m и M — соответственно минимум и максимум функции $u(x)$ на S.

Пусть теперь D — область класса $A^{2,0}$, а $u(x)$ — отличное от постоянного, регулярное в этой области решение эллиптического уравнения (1.4), принадлежащее классу $C^{1,0}(D \cup S)$, причем соблюдены все условия теоремы Хопфа и, кроме того,

$$\min_{y \in S} u(y) \leqslant 0 \quad [\max_{y \in S} u(y) \geqslant 0].$$

В этих предположениях имеет место принцип З а р е м б ы — Ж и р о: *в каждой точке $y^0 \in S$, в которой $u(x)$ достигает своего минимального (максимального) значения в $D \cup S$, и для каждого направления l, выходящего из точки y^0 и удовлетворяющего условию $\cos \widehat{l, N} < 0$, имеет место неравенство*

$$\frac{\partial u}{\partial l} > 0 \quad \left[\frac{\partial u}{\partial l} < 0\right].$$

Этот принцип для гармонических функций доказал Заремба [1], а в приведенной здесь формулировке — Жиро [1], [2], [3] (см. также Хопф [1], О. А. Олейник [1], Миранда [1], А. В. Бицадзе [5]).

Для эллиптической системы вида

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\beta_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right]+cu=0,$$

где $\alpha_i > 0$, β_i — заданные в области D скалярные функции, а квадратная $N\times N$-матрица $c(x)$ отрицательно определена, также имеет место своеобразный принцип экстремума: *норма*

$$\|u\|=\left\{\sum_{i=1}^{N}[u_i(x)]^2\right\}^{1/2}$$

регулярного в области D решения $u(x)$ этой системы не может достигать отличного от нуля относительного максимума ни в одной точке $x\in D$ (см. А. В. Бицадзе [5]).

3°. Принцип экстремума для решений уравнения теплопроводности. Обозначим через D область пространства E_n, нижним основанием которой служит ограниченная область δ плоскости $x_n=0$, а боковая поверхность представляет собой цилиндр S_0 с образующими, параллельными оси x_n, причем $x_n \geqslant 0$.

Пусть h — произвольное положительное число. Часть области D, в которой $0<x_n<h$, обозначим через D_h, ее боковую поверхность — через S_h, сумму $S_h\cup\delta$ — через S, а верхнее основание D_h, представляющее собой область плоскости $x_n=h$, — через δ_h.

Довольно просто доказывается следующее утверждение — принцип экстремума для решений уравнения теплопроводности: *регулярное в области D решение $u(x)$ уравнения теплопроводности* (1.8), *непрерывное в $D\cup S$, своего экстремума в $D_h\cup\partial D_h$ достигает на S.*

Действительно, обозначим через M максимум $u(x)$ на замкнутом множестве $D_h\cup\partial D_h$. Допустим, что этого максимума функция $u(x)$ достигает в некоторой точке $x_0\in D_h\cup\delta_h$ и $M=u(x_0)>u(x)$, $x\in S$. Это допущение приводит к противоречию.

В самом деле, введем в рассмотрение функцию

$$v(x)=u(x)+a(h-x_n), \tag{1.48}$$

где a — положительная постоянная. Ввиду того, что $0 \leqslant x_n \leqslant h$, из (1.48) имеем

$$u(x) \leqslant v(x) \leqslant u(x) + ah \tag{1.49}$$

всюду в $D_h \bigcup \partial D_h$.

Пусть M_u^S, M_v^S — максимумы соответственно $u(x)$ и $v(x)$ на S. По допущению $M_u^S < M$. Число a подберем так, чтобы имело место неравенство

$$a < \frac{M - M_u^S}{h}. \tag{1.50}$$

На основании (1.49) и (1.50) получаем

$$M_v^S \leqslant M_u^S + ah < M_u^S + \frac{M - M_u^S}{h} h = M = u(x_0).$$

Отсюда следует, что функция $v(x)$ не может достигать максимума на S. Следовательно, эта функция своего максимума на $D_h \bigcup \partial D_h$ достигает в некоторой точке $x' \in D_h \bigcup \delta_h$.

Сперва предположим, что $x' \in D_h$. Так как x' является точкой максимума функции $v(x)$ на $D_h \bigcup \partial D_h$, то в этой точке

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \leqslant 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \geqslant 0. \tag{1.51}$$

Пусть теперь $x' \in \delta_h$. Ввиду того, что $v(x)$ достигает своего максимума на $D_h \bigcup \partial D_h$ в точке x', имеем в этой точке

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} \geqslant 0. \tag{1.52}$$

Учитывая то обстоятельство, что $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}, h)$ является точкой максимума $v(x_1, \ldots, x_{n-1}, h)$ в области δ_h, мы должны иметь

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v(x_1, \ldots, x_{n-1}, h)}{\partial x_i^2} \leqslant 0. \tag{1.53}$$

В силу (1.52) и (1.53) мы приходим к оценке (1.51) и в точке $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}, h)$. Подставляя в левую часть (1.51) значения $\frac{\partial v}{\partial x_n}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$, $i = 1, \ldots, n-1$, найденные из (1.48), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} - a - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \geqslant 0,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial x_n} < 0$$

в точке x'. А это противоречит тому, что $u(x)$ — решение уравнения (1.8).

Вторая часть принципа доказывается заменой функции $u(x)$ через $-u(x)$ при помощи приведенного выше рассуждения для функции $-u(x)$.

В случае более общего уравнения второго порядка параболического типа при некоторых предположениях на коэффициенты и на правую часть Ниренберг [1] доказал принцип экстремума для регулярных решений в рассматриваемой выше области в более сильной формулировке.

4°. **Случай гиперболических уравнений.** Принцип экстремума имеет место и для решений гиперболических уравнений второго порядка, когда эти решения подчинены некоторым ограничениям на части границы области их регулярности.

Рассмотрим уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1.54}$$

в треугольной области D, ограниченной отрезком $A(a, 0)\,B(b, 0)$ оси $t = 0$ и кусками AC и BC, $C = C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$, характеристик $x + t = a$, $x - t = b$ этого уравнения.

Покажем, что *обращающееся в нуль на AC или BC регулярное в области D решение $u(x, t)$ уравнения* (1.54) *класса*

$C^{0,0}(D \cup \partial D)$ *своего экстремума в* $D \cup \partial D$ *достигает на отрезке* AB.

Хорошо известно общее представление регулярных решений уравнения (1.54):

$$u(x, t) = f_1(x+t) + f_2(x-t), \tag{1.55}$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Из формулы (1.55) следует, что регулярное в области D решение $u(x, t)$ уравнения (1.54), обращающееся в нуль на AC, обязано иметь вид

$$u(x, t) = f(x+t), \tag{1.56}$$

где f — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $f(a)=0$.

На основании формулы (1.56) заключаем, что каждое значение (в том числе экстремальное), принимаемое $u(x, t)$ в области D, обязательно принимается и на отрезке AB.

Аналогичный принцип в формулировке, по существу близкой к приведенной выше, имеет место и для более общих уравнений второго порядка гиперболического типа с двумя независимыми переменными.

Мы здесь ограничимся рассмотрением еще одного уравнения

$$y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1.57}$$

являющегося в полуплоскости $y<0$ гиперболическим при целом m. Будем считать, что $2m+1$ — нечетное натуральное число.

Обозначим через D^- область полуплоскости $y<0$, ограниченную отрезком $A(0,0)B(1, 0)$ прямой $y=0$ и дугами AC, BC характеристик

$$x-\frac{2}{2m+3}(-y)^{\frac{2m+3}{2}}=0, \qquad x+\frac{2}{2m+3}(-y)^{\frac{2m+3}{2}}=1$$

уравнения (1.57) (см. формулу (1.36)).

В случае уравнения (1.57) принцип экстремума справедлив в следующей формулировке: *регулярное в области* D^- *решение* $u(x, y)$ *уравнения* (1.57), *непрерывное в* $D^- \cup \partial D^-$

и обращающееся в нуль на одной из дуг AC или BC, своего экстремума в $D^- \cup \partial D^-$ достигает на отрезке AB.

Действительно, при требовании достаточной гладкости функции $u(x, 0)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ для регулярных в области D^- решений уравнения (1.57), обращающихся в нуль на AC, имеет место известное интегральное представление (см. Дарбу [1], Геллерстедт [1])

$$u(x, y) = \frac{1}{B(\beta, 1-2\beta)} (\eta - \xi)^{1-2\beta} \int_0^{\xi} u(t, 0)(\xi - t)^{\beta-1} (\eta - t)^{\beta-1}\, dt, \tag{1.58}$$

где ξ и η — характеристические переменные,

$$\xi = x - \frac{2}{2m+3}(-y)^{\frac{2m+3}{2}}, \qquad \eta = x + \frac{2}{2m+3}(-y)^{\frac{2m+3}{2}},$$

$$\beta = \frac{2m+1}{2(2m+3)},$$

а $B(\beta, 1-2\beta)$ — функция Эйлера:

$$B(\beta, 1-2\beta) = \int_0^{\infty} t^{\beta-1}(1+t)^{\beta-1}\, dt. \tag{1.59}$$

Обозначим через M максимум $u(x, 0)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Записывая формулу (1.58) в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{B(\beta, 1-2\beta)} \int_0^{\frac{\xi}{\eta-\xi}} u[\xi - t(\eta - \xi), 0]\, t^{\beta-1}(1+t)^{\beta-1}\, dt$$

и учитывая, что в области D^- имеет место неравенство $\eta > \xi$, в силу (1.59) получаем оценку

$$|u(x, y)| \leqslant M, \quad (x, y) \in D^- \cup \partial D^-,$$

что и доказывает первую часть нашего утверждения. Аналогично доказывается и его вторая часть.

§ 3. Моделирование некоторых физических явлений в терминах уравнений в частных производных

1°. Колебания упругих материальных континуумов. В этом пункте речь будет идти о колебаниях струны и мембраны, представляющих собой соответственно одномерный и двумерный упругий материальный континуум G, занимающий в положении покоя отрезок оси x_1 и участок плоскости переменных x_1, x_2, причем потенциальная энергия G в положении его изгиба пропорциональна приращению меры $|G| = \text{mes } G$.

Будем предполагать, что прогиб $u(x, t)$ континуума (вертикальное смещение его точки x) представляет собой достаточно гладкую функцию, а колебания являются малыми в том смысле, что при вычислениях можно пренебречь степенями u, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ выше второго.

Поскольку в момент времени t величина $|G|$ дается формулой

$$|G(t)| = \int_G \sqrt{1 + (\nabla u)^2}\, dx \approx \int_G \left[1 + \frac{1}{2}(\nabla u)^2\right] dx,$$

а в положении покоя

$$|G| = \int_G dx,$$

учитывая то обстоятельство, что $\frac{\partial u}{\partial t}$ представляет собой скорость точки x в момент времени t, для потенциальной энергии E_p и кинетической энергии E_k в процессе колебания G будем иметь соответственно

$$E_p = \frac{1}{2}\mu \int_G (\nabla u)^2\, dx \tag{1.60}$$

и

$$E_k = \frac{1}{2}\int_G \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx. \tag{1.61}$$

В формулах (1.60) и (1.61) натяжение μ континуума G и плотность ρ распределения его масс считаются заданными величинами.

Разность $L = E_k - E_p$ принято называть *лагранжевой плотностью*, а функционал

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_G \left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \mu(\nabla u)^2\right] dx, \qquad (1.62)$$

где (t_1, t_2) — промежуток времени наблюдения, — *действием*. Функция

$$u^*(x, t) = u(x, t) + \delta u(x, t) \qquad (1.63)$$

в предположении, что $\delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0$, называется *допустимой* для функционала (1.62).

В силу **принципа Гамильтона** колебание континуума G происходит так, что описывающая его функция $u(x, t)$ дает стационарное значение интегралу (1.62) по сравнению со всеми допустимыми функциями (1.63). Отсюда следует, что $u(x, t)$ должна быть решением *уравнения Эйлера* вариационной задачи для функционала (1.62):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0$$

или, считая ρ и μ постоянными,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,$$

где число

$$a = \sqrt{\mu/\rho}$$

называется скоростью распространения звука. Без ограничения общности, очевидно, можно считать, что $a = 1$.

Функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \qquad (1.64)$$

принято называть *волной*, а само уравнение (1.64) — *волновым уравнением*.

Естественно считать, что для некоторого значения времени t_0 положение $u(x, t)$ каждой точки x континуума G и ее скорость $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ известны, т. е.

$$u(x, t_0) = \tau(x), \qquad (1.65)$$

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\nu(x) \tag{1.66}$$

являются известными функциями.

Условия (1.65), (1.66), которым должно удовлетворять искомое решение $u(x, t)$ уравнения (1.64), называются *начальными условиями*, а задача отыскания самого решения — *задачей Коши*.

Считая, что функция $u(x, t)$ не зависит от t, т. е. полагая, что в положении изгиба, описанного уравнением $u=u(x)$, континуум G находится в равновесии, из (1.64) для определения функции $u(x)$ получаем уравнение Лапласа

$$\Delta u(x)=0, \tag{1.67}$$

которое служит уравнением Эйлера вариационной задачи на минимум *интеграла Дирихле*

$$D(u)=\int_D(\nabla u)^2\,dx. \tag{1.68}$$

Непрерывные в $G \cup \partial G$ функции с суммируемыми в квадрате первыми производными в G, принимающие на ∂G наперед заданные значения

$$u(x)=\varphi(x), \quad x\in\partial G, \tag{1.69}$$

составляют класс допустимых функций для интеграла Дирихле (1.68).

Задача определения гармонической в области G функции $u(x)$, непрерывной в $G \cup \partial G$ и удовлетворяющей краевому условию (1.69), называется *первой краевой задачей* или *задачей Дирихле*. Задача же отыскания в классе допустимых функций той функции, для которой интеграл Дирихле (1.68) минимален, называется *первой вариационной задачей*.

Доказывается, что, *если класс допустимых функций не является пустым, эти две задачи эквивалентны*. Когда дополнительно известно, что класс допустимых функций принадлежит пересечению $C^{2,0}(G)\cap C^{1,0}(G\cap\partial G)$ и $\partial G\in A^{1,h}$, в справедливости этого утверждения убедиться легко. В самом деле, представляя класс допустимых функций в виде $u(x)+\varepsilon h(x)$, где $u(x)$ — решение первой вариационной задачи, ε — произвольная постоянная и $h(x)$ — произвольная функция, обращающаяся в нуль на ∂G, и приняв обозначение

$$D(u, h) = \int_G (\nabla u \cdot \nabla h)\, dx,$$

можем написать $D(u+\varepsilon h) - D(u) = 2\varepsilon D(u, h) + \varepsilon^2 D(h) \geqslant 0$. Отсюда, так как ε произвольна, приходим к тождеству $D(u, h)=0$, и, стало быть, в силу формулы (GO)

$$D(u, h) = \int_{\partial G} h \frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}}\, ds - \int_G h\, \Delta u\, dx = -\int_G h\, \Delta u\, dx = 0.$$

Из этого тождества, в силу произвольности h, в свою очередь следует, что $\Delta u=0$. Обратно, если $u(x)$ — решение задачи Дирихле (1.67), (1.69) из указанного выше класса, очевидно будем иметь $D(u, h)=0$, т. е. $D(u+\varepsilon h) \geqslant D(u)$, а это означает, что $u(x)$ — решение первой вариационной задачи.

2°. **Распространение тепла.** Математическое моделирование процесса распространения тепла в среде D, заполненной массой с плотностью ρ при удельной теплоемкости c и коэффициенте теплопроводности k, берет свое начало еще от Фурье.

Обозначим через $u(x, t)$ температуру среды в точке x в момент времени t. Пусть δ — произвольная область среды, содержащая точку x, граница $\partial\delta$ которой достаточно гладка.

Количество тепла Q, поступающее в δ через $\partial\delta$ за промежуток времени (t_1, t_2), в силу закона Фурье дается формулой

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\delta} k \frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}}\, ds, \tag{1.70}$$

где ds — элемент площади $\partial\delta$, а $\mathcal{N}$ — нормаль к $\partial\delta$.

Если примем, что в результате поступления тепла Q приращение температуры приближенно можно считать равным $\frac{\partial u}{\partial t}\, dt$:

$$u(x, t+dt) - u(x, t) \approx \frac{\partial u}{\partial t}\, dt,$$

то будем иметь

$$Q=\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\delta} c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,dx. \tag{1.71}$$

На основании (1.70) и (1.71) заключаем, что

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\delta} k \frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}}\,ds=\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\delta} c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,dx$$

или, считая k, c, ρ постоянными,

$$k\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\delta} \frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}}\,ds=c\rho\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\delta} \frac{\partial u}{\partial t}\,dx. \tag{1.72}$$

Так как в силу формулы (GO)

$$\int_{\partial\delta} \frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}}\,ds=\int_{\delta} \Delta u\,dx,$$

равенство (1.72) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\delta} \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t}-k\,\Delta u\right)dx=0. \tag{1.73}$$

Учитывая то обстоятельство, что промежуток (t_1, t_2) и область δ произвольны, из (1.73) для определения функции $u(x, t)$ получаем уравнение в частных производных

$$\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0,$$

где число $a=k/(c\rho)$ без ограничения общности можно считать равным единице. Отсюда видно, почему уравнение (1.8) в пункте 3 § 1 было названо *уравнением теплопроводности*.

Обозначим через Q_T область пространства переменных x, t:

$$Q_T=D\times(t_0<t<T).$$

В процессе наблюдения за распространением тепла, очевидно, могут быть вычислены значения функции $u(x, t)$ в каждой точке x среды в начальный момент t_0 и в каждой точке x_0 границы ∂D теплопроводной среды D для всех значений времени t из промежутка $t_0 < t < T$.

Следовательно, мы можем считать, что значения искомого в области Q_T решения $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad x \in Q_T, \tag{1.74}$$

наперед заданы на нижнем основании D области Q_T:

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \qquad x \in D, \tag{1.75}$$

и на ее боковой поверхности $\partial D \times \{t_0 < t < T\}$:

$$u(x_0, t) = \psi(t), \qquad (x_0, t) \in \partial D \times \{t_0 < t < T\}. \tag{1.76}$$

Условия (1.75) и (1.76) принято называть *начальными* и *краевыми условиями* соответственно, задача же отыскания регулярного в области Q_T решения $u(x, t)$ уравнения (1.74), удовлетворяющего условиям (1.75), (1.76), — *первой краевой задачей.*

Задача (1.74), (1.75), (1.76) описывает не только процесс распространения тепла, но и процесс диффузии и вообще явления переноса в линейном приближении.

3°. Плоскопараллельное течение сжимаемой среды. Двумерное изэнтропическое течение сжимаемой среды (газа) описывается нелинейной системой уравнений в частных производных первого порядка, состоящей из *уравнений Эйлера*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial t} + q_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial q_1}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \\ &\frac{\partial q_2}{\partial t} + q_1 \frac{\partial q_2}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \tag{1.77}$$

и *уравнения неразрывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho q_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho q_2) = 0, \tag{1.78}$$

где (x_1, x_2) — точка плоскости течения, (q_1, q_2) — вектор ее скорости, $p(x_1, x_2)$ — давление, а $\rho(x_1, x_2)$ — плотность распределения масс движущейся среды. Когда движение *баротропно*, к системе (1.77), (1.78) добавляется *конечное уравнение состояния*

$$p = p(\rho), \tag{1.79}$$

представляющее собой заданную возрастающую зависимость между p и ρ.

Считая течение *стационарным* и *безвихревым*, вместо (1.77), (1.78) будем иметь систему из четырех уравнений:

$$q_1\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+q_2\frac{\partial q_1}{\partial x_2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}=0,\qquad q_1\frac{\partial q_2}{\partial x_1}+q_2\frac{\partial q_2}{\partial x_2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}=0,\tag{1.80}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho q_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho q_2)=0,\tag{1.81}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial x_1}-\frac{\partial q_1}{\partial x_2}=0.\tag{1.82}$$

С учетом (1.79) и (1.82) из (1.80) следует равенство

$$\frac{1}{2}dq^2+\frac{dp}{\rho}=\frac{1}{2}dq^2+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}d\rho=0,\tag{1.83}$$

где q — скалярная величина скорости:

$$q^2=q_1^2+q_2^2.\tag{1.84}$$

Обозначив через p_0, ρ_0 значения p, ρ, соответствующие $q=0$, в результате интегрирования из (1.83) получаем *уравнение Бернулли*

$$\frac{1}{2}q^2+\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}=\frac{1}{2}q^2+\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}d\rho=0,\qquad p_0=p(\rho_0).$$

Из уравнения Бернулли в силу (1.79) следует, что ρ является функцией q:

$$\rho=\rho(q),\tag{1.85}$$

и, кроме того, величина

$$c^2=\frac{dp}{d\rho}=-\frac{\rho q}{\rho'(q)}\tag{1.86}$$

имеет размерность скорости. Величина c, определяемая по формуле (1.86), называется *местной скоростью звука*, а безразмерная величина

$$M=q/c\tag{1.87}$$

— *числом Маха*. Линия на плоскости течения x_1, x_2, вдоль которой $M=1$, называется *звуковой линией*. Значение $q=q_к$, для которого $M=1$, принято называть *критическим*.

В зависимости от того, будет ли $M<1$ или $M>1$, течение называется соответственно *дозвуковым* или *сверхзвуковым*. Если же течение происходит в области, достаточно близкой к звуковой линии и содержащей эту линию внутри себя, то такое течение называется *околозвуковым* или *трансзвуковым*.

Введением в рассмотрение *потенциала скорости* $\varphi(x_1, x_2)$ и *функции тока* $\psi(x_1, x_2)$ при помощи равенств

$$q_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \qquad q_2=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=-\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \tag{1.88}$$

уравнения (1.81), (1.82), очевидно, будут удовлетворены, а равенство (1.84) примет вид

$$q^2=(\nabla\varphi)^2=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2(\nabla\psi)^2. \tag{1.89}$$

Связывающие $\varphi(x_1, x_2)$ и $\psi(x_1, x_2)$ равенства (1.88) представляют собой систему уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=-\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \tag{1.90}$$

которая в силу (1.85), (1.89) линейна лишь в случае несжимаемой жидкости. В этом случае (1.90) не что иное, как *система Коши—Римана*, и, стало быть, φ и ψ составляют пару сопряженных гармонических функций.

Равенства (1.85), (1.89) позволяют исключить функцию $\psi(x_1, x_2)$ из системы (1.90) и в случае сжимаемой среды. В результате для определения $\varphi(x_1, x_2)$ получаем нелинейное уравнение в частных производных второго порядка

$$\left[c^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}+\left[c^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}=0. \tag{1.91}$$

Поскольку дискриминант соответствующей уравнению (1.91) характеристической формы (см. (1.2)) дается формулой

$$\left[c^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2\right]\left[c^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2\right]-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2=c^4(1-M^2),$$

в зависимости от того, течение дозвуковое или сверхзвуковое, уравнение (1.91) будет соответственно эллиптическим или гиперболическим с параболическим вырождением на звуковой линии $M=1$.

В силу (1.85), (1.86), (1.87) число Маха является функцией скорости q.

В случае, когда соотношение (1.79) имеет вид

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \tag{1.92}$$

где число γ — отношение *удельных теплоемкостей* — всегда больше единицы (в частности, в воздухе $\gamma=1{,}405$), течение называется *адиабатическим*.

На основании (1.92) из уравнения Бернулли получаем

$$q^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}\left(p_0^{1-1/\gamma}-p^{1-1/\gamma}\right). \tag{1.93}$$

Из этой формулы в свою очередь следует, что максимального значения q_m скорость q достигает при $p=0$:

$$q_m^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}.$$

Принимая во внимание это обстоятельство и вычисляя c^2 по формулам (1.86), (1.92), (1.93), будем иметь

$$c^2=\frac{\gamma-1}{2}\left(q_m^2-q^2\right). \tag{1.94}$$

В силу (1.87) из (1.94) получаем

$$q_к^2=\frac{\gamma-1}{2}\left(q_m^2-q_к^2\right)=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}q_m^2=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{p_0}{\rho_0}. \tag{1.95}$$

4°. Уравнение Чаплыгина. Плоскость переменных x_1, x_2, на которой изучается течение сжимаемой среды, называется *физической плоскостью*. Поскольку каждой точке $x=(x_1, x_2)$ ставится в соответствие вектор скорости (q_1, q_2) частицы с координатами (x_1, x_2), знание закона движения означает, что известны функции $q_1(x_1, x_2)$, $q_2(x_1, x_2)$ или, что то же самое, — функции $q(x_1, x_2)$, $\theta(x_1, x_2)$, определяемые из равенств

$$q_1=q\cos\theta, \quad q_2=q\sin\theta, \tag{1.96}$$

Плоскость изменения переменных q, θ принято называть *плоскостью годографа*.

Легко видеть, что *система нелинейных уравнений* (1.90) *в результате перехода от физической плоскости к плоскости годографа становится линейной.*

Действительно, в силу (1.96) и (1.90) очевидны тождества

$$dx_1 + i\,dx_2 = e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}dx_1 + ie^{-i\theta}dx_2\right) = \frac{e^{i\theta}}{q}\left(d\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho}d\psi\right)$$

или, что то же самое,

$$dx_1 + i\,dx_2 = \frac{e^{i\theta}}{q}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)dq + \frac{e^{i\theta}}{q}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)d\theta. \quad (1.97)$$

Для того чтобы выражение (1.97) было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{q\rho_0}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial q} = 0 \quad (1.98)$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \frac{\rho_0}{\rho q}\left(1 + \frac{\rho' q}{\rho}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0. \quad (1.99)$$

Так как в силу (1.86), (1.87)

$$\rho' q/\rho = -M^2,$$

условие (1.99) равносильно условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{1-M^2}{q}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0. \quad (1.100)$$

Поскольку в силу (1.85), (1.86), (1.87) величины ρ и M являются функциями только переменного q, равенства (1.98), (1.100) относительно функций φ и ψ представляют собой линейную систему уравнений в частных производных первого порядка.

Вводя в рассмотрение вместо q новое безразмерное независимое переменное v, определенное по формуле

$$v = -\int_{q_к}^{q}\frac{\rho(\tau)}{\rho_0\tau}\,d\tau,$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial q} = -\frac{\rho}{\rho_0 q}\frac{\partial}{\partial v},$$

систему (1.98), (1.100) можно записать в виде

$$\frac{\partial\varphi^0}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi^0}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi^0}{\partial v} - k(v)\frac{\partial\psi^0}{\partial\theta} = 0, \tag{1.101}$$

где $\varphi^0(v, \theta) = \varphi(q, \theta)$, $\quad \psi^0(v, \theta) = \psi(q, \theta)$ и

$$K(v) = \frac{\rho_0^2(1 - M^2)}{\rho^2}. \tag{1.102}$$

Исключая потенциал φ^0 из системы (1.101), получаем для определения функции тока ψ^0 *уравнение Чаплыгина* (см. [1]):

$$K(v)\frac{\partial^2\psi^0}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi^0}{\partial v^2} = 0. \tag{1.103}$$

Аналогично получается для определения потенциала φ^0 линейное уравнение в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2\varphi^0}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{k(v)}\frac{\partial\varphi^0}{\partial v}\right] = 0. \tag{1.104}$$

Если известно решение по крайней мере одного из уравнений (1.103), (1.104), то сразу находим решение системы (1.101) на плоскости годографа

$$\varphi^0 = \varphi^0(v, \theta), \qquad \psi^0 = \psi^0(v, \theta),$$

и, стало быть, нам будет известна правая часть равенства (1.97). В результате интегрирования этого равенства получаем соотношения

$$Q(q, \theta) = x_1, \qquad \Theta(q, \theta) = x_2, \tag{1.105}$$

где Q и Θ — известные функции.

Когда отображение (1.105) можно обратить:

$$q = q(x_1, x_2), \qquad \theta = \theta(x_1, x_2),$$

то закон движения на физической плоскости будет установлен по формулам (1.96).

5°. Приближенная замена уравнений трансзвукового течения на плоскости годографа. Поскольку $v=0$ при $q=q_к$, из (1.102) получаем

$$K(0)=0 \tag{1.106}$$

и

$$K'(0)=-\left(\frac{\rho_0}{\rho_к}\right)^3 q_к\left(\frac{d}{dq}M^2\right)_{q=q_к}, \tag{1.107}$$

где $\rho_к=\rho(q_к)$.

В случае адиабатического течения в силу (1.87) равенство (1.107) переходит в равенство

$$K'(0)=\frac{4}{\gamma-1}\left(\frac{\rho_0}{\rho_к}\right)^3\frac{q_к^2q_m^2}{(q_m^2-q_к^2)^2},$$

откуда в силу (1.95) окончательно будем иметь

$$K'(0)=\left(\frac{\rho_0}{\rho_к}\right)^2(\gamma+1). \tag{1.108}$$

Из равенства (1.106), (1.108) следует, что при изучении трансзвукового течения можно принять

$$K(v)\approx K'(0)\,v. \tag{1.109}$$

В соответствии с этим систему уравнений (1.101) можно приближенно заменить системой

$$\frac{\partial\varphi^0}{\partial\theta}+\frac{\partial\psi^0}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial\varphi^0}{\partial v}-K'(0)\,v\frac{\partial\psi^0}{\partial\theta}=0. \tag{1.110}$$

В результате преобразования переменных

$$K'(0)\,\theta=x,\qquad K'(0)\,v=y,$$

$$\psi^0\left(\frac{y}{K'(0)},\quad \frac{x}{K'(0)}\right)=u(x,\ y),\qquad \varphi^0\left(\frac{y}{K'(0)},\quad \frac{x}{K'(0)}\right)=w(x,\ y)$$

система (1.110) и уравнения (1.103), (1.104) запишутся соответственно в виде

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}=0, \tag{1.111}$$

$$y\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, \tag{T}$$

$$y^2\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2w}{\partial y^2}-\frac{\partial w}{\partial y}=0. \tag{1.112}$$

Уравнение (Т) впервые было введено в рассмотрение и изучено Трикоми [1], [2], [3], [4].

Порицки [1] обосновал возможность замены коэффициента $k(v)$ в уравнении (1.103) кусочно постоянной функцией

$$K(v)=K_0 \operatorname{sgn} v, \qquad K_0=\mathrm{const}.$$

Вообще, нетрудно указать зависимости $\rho=\rho(q)$, $p=p(\rho)$, которым точно соответствует линеаризованное уравнение трансзвукового течения вида

$$\operatorname{sgn} y\,|y|^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad m=\mathrm{const}\geqslant 0, \tag{L}$$

предложенное впервые М. А. Лаврентьевым.

Для системы (1.90) на физической плоскости ставятся задачи двух типов: с фиксированной границей и со свободной границей. Пусть D_0 — бесконечная область плоскости переменных x_1, x_2, представляющая собой: а) либо внешность замкнутого жорданова контура S_0 (этот случай возникает при изучении обтекания крыла), б) либо часть этой плоскости, лежащую по одну сторону от жордановой кривой S_0, уходящей обоими концами в бесконечность, в) либо полосу с двумя граничными компонентами S_1, S_2.

Простейшая задача с фиксированной границей заключается в требовании определения в области D_0 решения φ, ψ системы (1.90), когда известно, что

$$\frac{\partial\varphi(x_1,\ x_2)}{\partial\mathscr{N}}=0, \qquad (x_1,\ x_2)\in S_0, \tag{1.113}$$

где $\mathscr{N}$ — нормаль к S_0 в точке (x_1, x_2). В силу (1.90) очевидно, что условие (1.113) для функции тока равносильно условию

$$\psi(x_1,\ x_2)=\mathrm{const}, \qquad (x_1,\ x_2)\in S_0. \tag{1.114}$$

Наряду с условием (1.113) или (1.114) предполагается, что на бесконечности задано значение q и, кроме того, в случае а)

$$\int\limits_C d\varphi=0$$

по любому замкнутому кусочно гладкому контуру C, лежащему в D_0 и окружающему S_0.

Может оказаться, что наперед известен только определенный участок S_1 границы ∂D_0 движущейся части D_0 сжимаемой среды, а остальной участок S_2, $S_1 \cup S_2 = \partial D_0$, должен быть найден вместе с решением системы (1.90). Требование отыскания участка S_2 границы области D_0 и решения φ, ψ системы (1.90) в области D_0 по краевым условиям

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= \mathrm{const}, \quad (x_1, x_2) \in \partial D_0, \\ q(x_1, x_2) &= \mathrm{const}, \quad (x_1, x_2) \in S_2, \end{aligned} \tag{1.115}$$

называется *задачей со свободной границей.*

При помощи перехода на плоскость годографа нелинейная система (1.90) хотя и переходит в линейную систему (1.101), но для того, чтобы иметь формулы перехода (1.105), мы должны знать заранее образы области D_0 и ее границы ∂D_0 на плоскости годографа и, стало быть, — соответствующие краевые условия, как правило нелинейные, на образе ∂D_0. Тем не менее развитием метода последовательных приближений все же удается редуцировать исходные задачи (1.113), (1.115) для системы (1.90) к решению определенных линейных краевых задач для линейной системы (1.101) или для уравнений (1.103), (1.104). Это делается сравнительно легко в случаях дозвукового и сверхзвукового течений (см., например, Берс [1]).

Далеко не каждому решению линейных уравнений (1.111), (T), (1.112) будет соответствовать реальное течение на физической плоскости. В этом отношении особенно большие трудности возникают при исследовании трансзвукового течения. В этом случае области, занятой движущейся средой, должна соответствовать область D плоскости переменных x, y, пересечения которой как с верхней полуплоскостью $y > 0$, так и с нижней полуплоскостью $y < 0$ не являются пустыми.

Пусть D — односвязная область, ограниченная простой дугой Жордана σ с концами в точках A (0, 0), B (1, 0), лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$, и отрезками AC, BC характеристик

$$x - {}^2/_3(-y)^{3/2} = 0, \qquad x + {}^2/_3(-y)^{3/2} = 1$$

уравнения (T), выходящими из точки $C\left({}^1/_2, -({}^3/_4)^{2/3}\right)$ (см. формулу (1.36)).

Задача отыскания регулярного в области D решения $u(x, y)$ уравнения (T) по заданным его значениям на σ и на одном из характеристических отрезков AC или BC носит в настоящее время название *задачи Трикоми*, автора и первого ее исследователя (Трикоми [1], [2], [3], [4]).

В работах С. Бергмана [1], Берса [1], Т. Кармана [1], А. Менвеля [1], А. А. Никольского и Г. И. Таганова [1], Порицки [1], Трикоми [6], [7], Ф. И. Франкля [1] и др. были предприняты попытки определить роль и место задачи Трикоми и ее различных обобщений при изучении трансзвукового течения сжимающей среды. Даже при наличии решений этих задач вопрос существования реального течения на физической плоскости прежде всего зависит от возможности обращения системы конечных уравнений (1.105).

Трудности на пути решения этого вопроса можно усмотреть на примере частного решения $u(x, y)$, $w(x, y)$ системы (1.111), записанного в неявной форме:

$$x = {}^1/_6 u^3 + uw, \qquad y = -{}^1/_2 u^2 - w. \tag{1.116}$$

Легко видеть, что якобиан преобразования (1.116)

$$\frac{\partial(u, w)}{\partial(x, y)} = \frac{2}{u^2 - 2w}$$

имеет особенность вдоль параболы $u^2 - 2w = 0$ на плоскости переменных u, w, образом которой на плоскости переменных x, y являются характеристические кривые

$$x - {}^2/_3(-y)^{3/2} = 0, \qquad x + {}^2/_3(-y)^{3/2} = 0 \tag{1.117}$$

уравнения (T).

Исключая w из равенств (1.116), получаем решение $u(x, y)$ уравнения (T) в неявной записи:

$$x + uy + {}^1/_3 u^3 = 0. \tag{1.118}$$

Приняв постоянную в правой части уравнения $u(x, y) = \mathrm{const}$ линии тока за параметр, равенство (1.118) можно истолковывать как уравнение однопараметрического семейства прямых на плоскости переменных x, y, огибающими которого, очевидно, являются характеристики (1.117).

При фиксированном $u = u_0$ прямая (1.118) ставится в соответствие линии тока $\psi = u_0$. В соответствии с этим, поскольку в каждой точке (x, y) под характеристиками

(1.117) уравнение (1.118) относительно u имеет три действительных корня, а над этими характеристиками — один действительный корень, мы можем утверждать, что через каждую точку (x, y) в зависимости от того, лежит она под или над характеристиками (1.117), проходят по три или по одной линии тока $\psi = \text{const}$.

Не следует думать, что такая многозначность присуща газодинамической задаче. Она скорее возникает в результате перехода на плоскость годографа и после возвращения на физическую плоскость исчезает.

Роль задачи Трикоми особенно ярко выявляется при изучении движения газа в соплах, в частности в сопле Лаваля (см., например, Трикоми [7] и Ф. И. Франкль [1]).

Указанный выше путь линеаризации уравнений движения сжимаемой среды не является единственным. Интересный вариант линеаризации уравнений трансзвукового течения принадлежит Карману [1].

§ 4. Общие замечания относительно структурных свойств решений уравнений в частных производных и постановка линейных задач для этих уравнений

1°. Наводящие рассуждения. Когда речь идет о решениях дифференциальных уравнений, естественно потребовать, чтобы эти решения обладали всеми производными (классическими или обобщенными), входящими в рассматриваемое уравнение (см. пункт 1 § 1). В пункте 1 § 2 под регулярными в области D решениями уравнения (1.4) мы понимали решения этого уравнения класса $C^{2,0}(D)$.

Прежде всего следует заметить, что заданное уравнение может вовсе не иметь решения. Так, например, уравнение

$$(\nabla u)^2 + a^2 = 0$$

при действительном a, отличном от нуля, не имеет действительных решений, а класс действительных решений этого уравнения при $a=0$ исчерпывается постоянными. Поэтому, вообще, вопрос существования решений уравнений в частных производных решается далеко не тривиально.

Встречающиеся в приложениях уравнения в частных производных, как правило, имеют целые семейства решений, причем в некоторых случаях можно указать способ их построения. Однако не всегда можно указать критерии, позволяющие судить о том, насколько общими являются построенные семейства решений.

Для правильного моделирования изучаемого явления в терминах уравнений в частных производных очень важно, чтобы наряду с выводом уравнения были указаны дополнительные требования, налагаемые на искомое решение, гарантирующие его существование, единственность и устойчивость.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений одной из центральных задач является *задача Коши*. На примере уравнения

$$\frac{d^n u}{dt^n}=f\left(t,\ u,\ \frac{du}{dt},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right) \tag{1.119}$$

эта задача заключается в требовании нахождения его регулярного решения $u(t)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$\left.\frac{d^k u}{dt^k}\right|_{t=t_0}=a_k,\qquad k=0,\ \ldots,\ n-1, \tag{1.120}$$

где точка $(t_0,\ a_0,\ \ldots,\ a_{n-1})$ принадлежит области задания функции f.

Введением новых неизвестных функций

$$u_0=u,\qquad u_{k+1}=\frac{du_k}{dt},\qquad k=0,\ \ldots,\ n-1,$$

задачу (1.119), (1.120) можно редуцировать к задаче

$$\frac{du_k(t)}{dt}=f_k(t,u_0,\ldots,u_{n-1}),\qquad u_k(t_0)=a_k,\qquad k=0,\ldots,n-1. \tag{1.121}$$

Как известно, *если функции f_k непрерывны по t и удовлетворяют условию Липшица по $u_1,\ \ldots,\ u_{n-1}$, задача* (1.121) *всегда имеет, и притом единственное, решение* $u_1,\ldots,u_{n-1}$ (т е о р е м а П и к а р а). Отсюда, поскольку постоянные a_k, $k=0,\ \ldots,\ n-1$, задаются произвольно, приходим к заключению, что уравнение (1.119) при принятых предположениях вблизи точки t_0 имеет семейство решений, зависящее от n параметров (произвольных постоянных $a_0, \ldots, a_{n-1}$). В частности, когда уравнение (1.119) является линейным:

$$\frac{d^n u}{dt^n}+\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\frac{d^{n-k}u}{dt^{n-k}}=f(t), \tag{1.122}$$

где $a_k(t)$, $f(t)$ — заданные непрерывные функции, то соответствующее ему однородное уравнение

$$\frac{d^n u_0}{dt^n}+\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\frac{d^{n-k}u_0}{dt^{n-k}}=0 \tag{1.123}$$

имеет n линейно независимых решений $u_1, \ldots, u_n$ и общее решение неоднородного уравнения (1.122) дается формулой

$$u=\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(t)+F(t),$$

где $F(t)$ — частное решение этого же уравнения.

Когда порядок уравнения (1.122) равен двум, это уравнение и начальные условия без ограничения общности могут быть записаны в виде

$$\frac{d^2 u}{dt^2}+p(t)u=q(t), \tag{1.124}$$

$$u(t_0)=\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0}=0 \tag{1.125}$$

или

$$u(t)+\int_{t_0}^{t}(t-\tau)p(\tau)u(\tau)\,d\tau=\int_{t_0}^{t}(t-\tau)q(\tau)\,d\tau. \tag{1.126}$$

Равенство (1.126) относительно u представляет собой линейное *уравнение типа Вольтерра второго рода*, которое, в предположении непрерывности функций $p(t)$ и $q(t)$, всегда имеет, и притом единственное, решение $u(t)$. Решение уравнения (1.126), очевидно, является решением задачи Коши (1.124), (1.125).

Наряду с задачей Коши (1.125) важнейшей является также и *краевая задача* (*задача Дирихле*): *в предположении непрерывности функций $p(t)$ и $q(t)$ на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$*

требуется найти регулярное в интервале $a < t < b$ *решение* $u(t)$ *уравнения* (1.124), *непрерывное на сегменте* $a \leqslant t \leqslant b$ и *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{1.127}$$

Неоднородная задача $u(a) = A$, $u(b) = B$ сводится к случаю (1.127) очевидным изменением правой части уравнения (1.124).

Когда $p(t) \equiv 0$, решение задачи (1.124), (1.127) дается в квадратурах:

$$u(t) = \frac{t-a}{a-b} \int_a^b (b-\tau)\, q(\tau)\, d\tau + \int_a^t (t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau.$$

Если же $p(t)$ отлична от тождественного нуля, вопрос существования или несуществования решения задачи (1.124), (1.127) уже не решается так просто.

Нетрудно показать, что *задача* (1.124), (1.127) *редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода*. Действительно, введем в рассмотрение функцию двух точек $G(t, x)$ по формуле

$$G(t, x) = \begin{cases} \dfrac{(t-b)(x-a)}{b-a}, & x \leqslant t, \\[2ex] \dfrac{(t-a)(x-b)}{b-a}, & x \geqslant t. \end{cases}$$

Очевидны следующие свойства функции $G(t, x)$: 1) она непрерывна по совокупности переменных t, x в квадрате $a \leqslant {t \atop x} \leqslant b$; 2) при $t \neq x$ как по t, так и по x

$$G'' = 0; \tag{1.128}$$

3) при $t = x$ функция $G(t, x)$ не только не является регулярным решением уравнения (1.128), но даже не дифференцируема, ибо

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t \geqslant x}} \frac{\partial G}{\partial t} - \lim_{\substack{t \to x \\ t \leqslant x}} \frac{\partial G}{\partial t} = 1, \qquad a < x < b. \tag{1.129}$$

В тождестве

$$G(t, x)\frac{d^2u}{dt^2} - u(t)\frac{\partial^2 G(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[G(t, x)\frac{du}{dt} - u\frac{\partial G(t, x)}{\partial t}\right]$$

будем предполагать, что $u(t)$ — решение задачи (1.124), (1.127). Интегрируя это тождество в интервалах $a<t<x-\varepsilon$, $x+\varepsilon<t<b$, где ε — достаточно малое положительное число, и сложив полученные результаты, в силу свойств 1), 2), 3) функции $G(t, x)$ будем иметь

$$\left(\int_a^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^b\right)G(t, x)[-p(t)u(t)+q(t)]\,dt=$$
$$=G(x-\varepsilon, x)\frac{du}{dt}\bigg|_{t=x-\varepsilon}-G(x+\varepsilon, x)\frac{du}{dt}\bigg|_{t=x+\varepsilon}-$$
$$-u(x-\varepsilon)\frac{\partial G(t, x)}{\partial t}\bigg|_{t=x-\varepsilon}+u(x+\varepsilon)\frac{\partial G(t, x)}{\partial t}\bigg|_{t=x+\varepsilon}.$$

Отсюда в пределе при $\varepsilon\to 0$ получаем

$$u(x)+\int_a^b G(t, x)\,p(t)\,u(t)\,dt=\int_a^b G(t, x)\,q(t)\,dt. \quad (1.130)$$

Следовательно, функция $u(x)$ должна быть решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода (1.130). Обратно, если функция u — решение интегрального уравнения (1.130) или, что то же самое, уравнения

$$u(t)=\int_a^t\frac{(x-a)(t-b)}{b-a}[-p(x)u(x)+q(x)]\,dx+$$
$$+\int_t^b\frac{(x-b)(t-a)}{b-a}[-p(x)u(x)+q(x)]\,dx,$$

то она будет решением задачи (1.124), (1.127). Тем самым доказана эквивалентность между задачей (1.124), (1.127) и интегральным уравнением (1.130).

Поскольку, в отличие от уравнения Вольтерра второго рода, уравнение Фредгольма второго рода не всегда является безусловно разрешимым, задачи (1.124), (1.125) и (1.124), (1.127) существенно отличаются друг от друга.

Когда $p(t)\leqslant 0$, в силу принципа экстремума соответствующая (1.124), (1.127) однородная задача имеет только тривиальное решение. Поэтому при предположении непрерывности функций $p(t)$ и $q(t)$ в силу *первой теоремы Фредгольма* (см. § 5) задача (1.124), (1.127) всегда имеет, и притом единственное, решение.

2°. Перспективы построения классов решений уравнений в частных производных. В предыдущем пункте было показано, что решение задачи Коши с произвольными начальными данными (1.120) можно считать общим решением уравнения (1.119) из-за безусловной разрешимости этой задачи. Следует заметить, что поскольку для достаточно малого интервала (a, b) краевая задача $u(a)=A$, $u(b)=B$ для уравнения (1.124) сводится к безусловно разрешимому интегральному уравнению Фредгольма второго рода (см. пункт 6° § 5), то и эта задача может служить для построения общего решения уравнения (1.124) вблизи данной точки t_0 (т. е. в малом, или локально). Тем не менее по понятным причинам при построении общего решения уравнения (1.124) предпочтение отдается задаче Коши.

Когда обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F\left(t,\ u,\ \frac{du}{dt},\ \ldots,\ \frac{d^n u}{dt^n}\right)=0$$

не разрешено относительно старшей производной $\frac{d^n u}{dt^n}$ искомой функции $u(t)$, построение классов его точных решений не теряет своей актуальности, хотя и трудно судить в этом случае о том, насколько общими являются эти классы. Положение значительно осложняется при переходе к уравнениям в частных производных (даже к линейным).

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функции, определенные формулами

$$u(t,\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\tau(x)+\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\nu(x)\right], \tag{1.131}$$

$$v(t,\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\tau(x)+\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\nu(x)\right], \tag{1.132}$$

$$w(t, x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Delta^k\tau(x), \tag{1.133}$$

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

при равномерной сходимости рядов в правых частях этих формул и возможности их почленного дифференцирования нужное число раз дают решения задачи Коши с начальными данными

$$u(x, 0)=\tau(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\nu(x),$$

$$v(x, 0)=\tau(x), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\nu(x),$$

$$w(x, 0)=\tau(x)$$

для уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=0, \tag{1.134}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\Delta v=0, \tag{1.135}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\Delta w=0 \tag{1.136}$$

соответственно.

В частности, когда функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ являются полиномами, формулы (1.131), (1.132), (1.133) дают полиномиальные решения уравнений (1.134), (1.135), (1.136). О том, что эти формулы могут дать сколько-нибудь общие решения, конечно, утверждать нельзя.

Ниже будет показано, что в случае эллиптических уравнений задача Коши вообще не является разрешимой, так что она не может служить средством построения общих решений этих уравнений. В следующем пункте будет показано, что даже в случае гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными лучше пользоваться в этом плане так называемой *задачей Гурса*.

3°. Гиперболические уравнения второго порядка. Пусть D — область пространства E_n переменных

$x_1, \ldots, x_n$, лежащая в гиперплоскости $t=0$ пространства E_{n+1} переменных $x_1, \ldots, x_n, t$. В этом пункте сначала речь будет идти о задаче Коши для волнового уравнения в следующей постановке: *требуется найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения* (1.134), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$u(x, 0)=\tau(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\nu(x), \tag{1.137}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные действительные функции классов $C^{3,0}(D)$ и $C^{2,0}(D)$ соответственно.

Хорошо известно, что при $n=3$ решение задачи (1.134), (1.137) дается *формулой Кирхгофа*

$$u(x_1, x_2, x_3, t)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{t}\int\limits_S \nu(y)\,ds_y+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t}\int\limits_S \tau(y)\,ds_y, \tag{1.138}$$

где S — сфера $|y-x|^2=t^2$, $x=(x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$.

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t}\int\limits_S \tau(y)\,ds_y=\frac{1}{t^2}\int\limits_S \tau(y)\,ds_y+\frac{1}{t}\int\limits_S \frac{\partial \tau}{\partial \mathcal{N}}\,ds_y,$$

где $\mathcal{N}$ — внешняя нормаль к S в точке y, то для определения функции $u(x, t)$ в точке (x, t) по формуле (1.138) мы должны знать значения τ, $\frac{\partial \tau}{\partial \nu}$ и ν на сфере S. Это свойство решений волнового уравнения принято называть **принципом Гюйгенса**.

При помощи метода спуска из формулы Кирхгофа получается *формула Пуассона*

$$u(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y-x|^2<t^2} \frac{\nu(y)\,dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|y-x|^2<t^2} \frac{\tau(y)\,dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}},$$
$$x=(x_1, x_2), \quad y=(y_1, y_2), \tag{1.139}$$

и *формула Даламбера*

$$u(x, t)=\frac{1}{2}[\tau(x+t)+\tau(x-t)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \nu(y)\,dy,$$
$$x=x_1, \quad y=y_1, \tag{1.140}$$

дающие решение задачи Коши (1.134), (1.137), когда число пространственных переменных $n=2$ и $n=1$ соответственно.

Множество точек $(x, t) \in E_{n+1}$, в которых значение $u(x, t)$ вполне определяется по заданным значениям $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на D, называется *областью определения* решения $u(x, t)$ задачи (1.134), (1.137). А множество точек $(x, t) \in E_{n+1}$, для которых пересечение D с шаром $|y-x|^2 < t^2$ не пусто, называется *областью влияния* начальных данных (1.137).

Из формул (1.138), (1.139) и (1.140) видно, что область определения решения $u(x, t)$ задачи (1.134), (1.137) состоит из точек (x, t), для которых при $n=3$ сфера $|y-x|^2=t^2$, являющаяся пересечением характеристического конуса $|y-x|^2=(\tau-t)^2$ с вершиной в точке (x, t) с гиперплоскостью $\tau=0$, принадлежит D, а при $n=2$ внутренность $|y-x|^2<t^2$ окружности $|y-x|^2=t^2$, являющейся пересечением характеристического конуса $|y-x|^2=(\tau-t)^2$ с вершиной в точке (x, t) с плоскостью $\tau=0$, и при $n=1$ прямолинейный отрезок между точками $x-t$ и $x+t$ принадлежат D.

При $n=2$ или $n=1$ принцип Гюйгенса не имеет места, ибо в силу формул (1.139) и (1.140) для того, чтобы найти решение задачи (1.134), (1.137) в точке (x, t), нам следует знать значения функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ для всех точек круга $|x-y|^2 < t^2$ или интервала $x-t<y<x+t$ соответственно.

Непосредственной проверкой легко убеждаемся в том, что при $n=3$ функция

$$u(x, t)=\int_0^t v(x, t, \tau)\,d\tau, \tag{1.141}$$

где

$$v(x, t, \tau)=\frac{1}{4\pi(t-\tau)}\int_S g(y, \tau)\,ds_y, \tag{1.142}$$

$$S:\ |y-x|^2=(t-\tau)^2,$$

является решением однородной задачи Коши

$$u(x, 0)=0, \qquad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{1.143}$$

для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u = g(x,\ t) \tag{1.144}$$

с заданной правой частью $g(x,\ t)$, непрерывно дифференцируемой до второго порядка.

В результате замены переменного $t-\tau=\tau$ с учетом (1.142) формула (1.141) принимает вид

$$u(x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{r^2<t^2}\frac{g(y,\ t-r)}{r}\,d\tau_y, \tag{1.145}$$

где $r=|y-x|$.

Определенная по формуле (1.145) функция $u(x,\ t)$ называется *запаздывающим потенциалом.*

При $n=2$ и $n=1$ решения задачи (1.143), (1.144) даются формулами

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_d\frac{g(y,\tau)\,dy}{\sqrt{(t-\tau)^2-|y-x|^2}},$$
$$d:\ |y-x|^2<(t-\tau)^2,$$

и

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}g(y,\ \tau)\,dy$$

соответственно.

Формула Кирхгофа (1.138), дающая решение задачи Коши (1.134), (1.137), в равной мере как и формула (1.145), была обобщена Матисоном [1] для любого конечного числа n пространственных переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Не обязательно, чтобы носителем данных в задаче Коши (1.65), (1.66), (1.137) была гиперплоскость $t=t_0$.

Обозначим через S достаточно гладкую гиперповерхность пространства E_{n+1}, записанную в виде

$$\varphi(x,\ t)=0.$$

Если S не является характеристической поверхностью, т. е. ни в одной ее точке $(x,\ t)$ не имеет места равенство (см. пункт 5° § 1)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2=0$$

и, кроме того, при $n>1$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2<0, \tag{1.146}$$

задача Коши для волнового уравнения ставится следующим образом: *найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1.134) по условиям*

$$u(x, t)=\tau(x), \qquad \frac{\partial u(x, t)}{\partial l}=\nu(x), \qquad (x, t)\in S, \tag{1.147}$$

где l — заданный на S единичный вектор, ни в одной точке не выходящий в касательную к S плоскость, а $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — также заданные на S достаточно гладкие функции.

Поверхность S, удовлетворяющая условию (1.146), называется *поверхностью пространственного типа.* При $n=1$ задача Коши ставится аналогично, но вместо (1.146) нехарактеристическая кривая S должна удовлетворять условию

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\neq 0, \qquad x=x_1.$$

В случае волнового уравнения (1.134) с двумя пространственными переменными x_1, x_2 плоскость $x_2=0$ не является ни поверхностью пространственного типа, ни характеристикой. Функция $u(x, t)$, определенная по формуле

$$u_k(x, t)=\frac{1}{k^2}\operatorname{sh} kx_2\cdot\sin\frac{k}{\sqrt{2}}(x_1+t),$$

где k — натуральное число, очевидно является решением задачи Коши

$$u_k(x, t)\big|_{x_2=0}=0, \qquad \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0}=\nu_k(x_1, t)=\frac{1}{k}\sin\frac{k}{\sqrt{2}}(x_1+t)$$

для уравнения (1.134), но эта задача *некорректно*, т. е. *неправильно* поставлена, ибо

$$\lim_{k\to\infty}\nu_k(x, t)=0,$$

в то время как само решение $u_k(x, t)$ при $k \to \infty$ не остается ограниченным.

А в том, что характеристики не могут служить носителями начальных данных Коши (1.147), легко убеждаемся опять на примере волнового уравнения (1.134) с одним пространственным переменным $x_1 = x$. Действительно, допустим, что характеристика $x+t=c$ этого уравнения является носителем данных Коши (1.147). Воспользуемся общим представлением (1.55) решений и потребуем, чтобы условия (1.147) были выполнены, т. е.

$$f_1(c) + f_2(2x - c) = \tau(x),$$

$$[f_1'(c) + f_2'(2x - c)] \cos \widehat{lx} + [f_1'(c) - f_2'(2x - c)] \sin \widehat{lx} = \nu(x).$$

Понятно, что при произвольных, даже как угодно гладких $\tau(x)$ и $\nu(x)$ оба эти тождества одновременно не могут быть удовлетворены.

Тем не менее для того же волнового уравнения *корректно*, т. е. *правильно* поставлена так называемая *характеристическая задача Коши: требуется определить регулярное внутри характеристического конуса K*

$$|x - x_0|^2 - (t - t_0)^2 = 0, \qquad t > t_0,$$

решение $u(x, t)$ уравнения (1.134), *удовлетворяющее условию*

$$u(x, t) = \mu, \qquad (x, t) \in K, \tag{1.148}$$

где μ — заданная на K достаточно гладкая функция.

В случае $n=1$ конус K вырождается в характеристики

$$L_1{:}\ x + t = x_0 + t_0, \qquad L_2{:}\ x - t = x_0 - t_0,\ t > t_0,$$

выходящие из точки (x_0, t_0), а условие (1.148) записывается в виде

$$u(x, t)|_{L_1} = \mu_1(t), \qquad u(x, t)|_{L_2} = \mu_2(t), \tag{1.149}$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ — заданные действительные функции класса $C^{2,0}$, причем

$$\mu_1(t_0) = \mu_2(t_0).$$

Опять из формулы (1.55) непосредственно получается искомое решение $u(x, t)$ задачи (1.134), (1.149):

$$u(x, t) = \mu_1\left(\frac{t - x + x_0 + t_0}{2}\right) + \mu_2\left(\frac{x + t - x_0 + t_0}{2}\right) - \mu_1(t_0). \tag{1.150}$$

В случае $n=1$ характеристическую задачу (1.134), (1.149) принято называть *задачей Гурса.*

Когда носителями данных задачи Гурса (1.134), (1.149) являются отрезки

$$M_0(x_0, t_0)\,M_1(x_1, t_1), \qquad M_0(x_0, t_0)\,M_2(x_2, t_2)$$

характеристик L_1 и L_2, решение этой задачи дается опять формулой (1.150), причем оно будет определено в характеристическом прямоугольнике с вершинами в точках $M_1(x_1, t_1)$, $M_0(x_0, t_0)$, $M_2(x_2, t_2)$, $M_3(x_3, t_3)$, где

$$x_3=\frac{x_1-t_1+x_2+t_2}{2}, \qquad t_3=\frac{-x_1+t_1+x_2+t_2}{2}.$$

Для линейной гиперболической системы второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-L(u)=F(x, t), \tag{1.151}$$

где L — дифференциальный оператор по пространственным переменным с матричными коэффициентами из левой части (1.4), удовлетворяющий условию равномерной эллиптичности (1.28), правильно поставлена задача Коши (1.137) в предположении, что $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные действительные достаточно гладкие N-мерные векторы. В частности, когда матрицы A^{ij} являются диагональными:

$$A^{ij}=Ea_{ij}, \qquad a_{ij}=a_{ji}, \qquad i, j=1, \ldots, n, \tag{1.152}$$

правильно поставлена и начальная задача Коши (1.147) если только носитель данных S: $\psi(x, t)=0$ — поверхность пространственного типа, т. е.

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2<0.$$

По данному в пункте 5° § 1 определению поверхность

$$\varphi(x, t)=0,$$

в каждой точке которой

$$Q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2=0, \tag{1.153}$$

называется *характеристической поверхностью* уравнения (1.151).

В характеристической задаче Коши (1.134), (1.148) носителем данных является конус K, который среди характеристических поверхностей уравнения (1.134) выделяется тем, что он представляет собой огибающую семейства характеристических плоскостей

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_i^0) - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^{1/2} (t - t_0) = 0.$$

Если функция $\varphi(x, t)$ является решением нелинейного уравнения первого порядка (1.153), то $\varphi(x, t) = \mathrm{const}$ будет уравнением характеристической поверхности скалярного уравнения (1.151) (т. е. в случае $N=1$). Эти поверхности могут быть образованы кривыми, определяемыми из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)}, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \frac{dt}{ds} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

и именуемыми *характеристическими лучами* или *бихарактеристиками уравнения* (1.151).

Заметим, что в силу (1.152)

$$Q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j},$$

указанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\frac{dx_i}{ds} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \frac{dt}{ds} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Отсюда $\displaystyle\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{dt}{ds} = 0,$ т. е. $\varphi(x, t) = \mathrm{const}$ вдоль характеристических лучей уравнения (1.151).

Характеристические лучи, проходящие через заданную точку $(x_0, t_0) \in E_{n+1}$, образуют характеристическую поверхность особого вида, именуемую *коноидом лучей*. Именно коноид лучей может служить носителем данных характеристической задачи Коши для уравнения гиперболического типа (1.151) при выполнении условий (1.152).

Выше, когда речь шла о начальной и характеристической задачах Коши, предполагалось, что носители данных принадлежат области равномерной эллиптичности оператора L дифференцирования по пространственным переменным.

Для уравнения гиперболического типа (1.151), в котором оператор

$$L(u)=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu \qquad (1.154)$$

удовлетворяет условию равномерной эллиптичности (1.9) в области $\Omega \in E_{n+1}$ задания функций $a_{ij}(x,\ t)$, $b_i(x,\ t)$, $c(x,\ t)$, $F(x,\ t)$, правильно поставлены также некоторые так называемые смешанные задачи.

Пусть D — ограниченная область пространства E_n переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$ и $\omega=D\times\{0<t<T\}$ — подобласть Ω, нижним основанием которой служит D, а боковой поверхностью — цилиндр $S=\partial D\times\{0\leqslant t\leqslant T\}$.

Задача определения регулярного в области ω решения $u(x,\ t)$ уравнения (1.151), удовлетворяющего условиям

$$u(x,\ 0)=\tau(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\nu(x),\qquad x\in D,\quad u|_S=0,\quad (1.155)$$

называется *основной смешанной задачей*.

В настоящее время имеются различные методы доказательства существования, единственности и устойчивости решений как начальной и характеристической задач Коши, так и основной смешанной задачи для широкого класса гиперболических уравнений и даже гиперболических систем (см., например, Адамар [1], Блам [1], Вайнштейн [1], Гординг [1], Керрол, Шоуолтер [1], О. А. Ладыженская [1], Лере [1], Матисон [1], С. Л. Соболев [1], [2], А. Н. Тихонов, А. А. Самарский [1], Фридрихс [1], Хермандер [1] и др.).

Правильная постановка и исследование характеристической задачи Коши для гиперболических систем второго порядка представляют значительный научный интерес. За последние десятилетия особую важность приобрели гиперболические задачи, когда носители данных этих задач содержат точки параболического вырождения рассматриваемого уравнения.

4°. Структурные свойства решений одного класса гиперболических систем второго порядка с двумя независимыми переменными. Система

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+$$
$$+C(x,\ y)u=F(x,\ y), \qquad (1.156)$$

где $A\in C^{1,0}$, $B\in C^{1,0}$, $C\in C^{0,0}$ — заданные действительные $N\times N$-матрицы, $F\in C^{0,0}$ — заданный, а $u\in C^{2,0}$ — искомый N-мерные векторы, по данному в пункте 4° § 1 определению является гиперболической с двумя семействами N-кратных характеристик $x+y=\text{const}$, $x-y=\text{const}$.

В характеристических переменных $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ система (1.156) записывается в виде

$$L(w)=\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}+a\frac{\partial w}{\partial\xi}+b\frac{\partial w}{\partial\eta}+cw=f, \qquad (1.157)$$

где

$$4a(\xi,\ \eta)=A\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right)+B\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right),$$
$$4b(\xi,\ \eta)=A\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right)-B\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right),$$
$$4c(\xi,\ \eta)=C\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right),$$

$$4f(\xi,\ \eta)=F\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right), \qquad w(\xi,\ \eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right),$$

причем области D_0 и D задания систем (1.156) и (1.157) гомеоморфны.

В теории системы (1.157) важную роль играет *сопряженная* с ней однородная система

$$M(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}(va)-\frac{\partial}{\partial\eta}(vb)+vc=0, \qquad (1.158)$$

где v является $N\times N$-матрицей класса $C^{2,0}(D)$, причем под произведением двух $N\times N$-матриц $\alpha=\|\alpha_{ij}\|$ и $\beta=$

$=\|\beta_{ij}\|$ понимается матрица $\gamma=\|\gamma_{ij}\|$ с элементами $\gamma_{ij}=$ $=\sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_{ik}\beta_{kj}$. Поскольку равенство $\alpha\beta=\beta\alpha$, в общем, не имеет места, порядок сомножителей в левой части (1.158) следует соблюдать.

Матрицу $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)=\|R_{ij}(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)\|$ порядка $N\times N$ будем называть *матрицей Римана* для системы (1.158), если соблюдены следующие условия: 1) каждая ее строка относительно переменных ξ, η является решением системы (1.158); 2) для матриц $R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)$ и $R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1)$ имеют место равенства

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\eta}R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)-R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)\,a(\xi_1, \eta)=0,\\ \frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1)-R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1)\,b(\xi, \eta_1)=0, \qquad (1.159)\\ R(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1)=E,\end{gathered}$$

где E — единичная $N\times N$-матрица.

Построение матрицы $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ с указанными свойствами непосредственно сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений Вольтерра

$$\begin{aligned}R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)&-\int\limits_{\xi_1}^{\xi}R(\xi_2, \eta; \xi_1, \eta_1)\,b(\xi_2, \eta)\,d\xi_2-\\ &-\int\limits_{\eta_1}^{\eta}R(\xi, \eta_2; \xi_1, \eta_1)\,a(\xi, \eta_2)\,d\eta_2+\\ &+\int\limits_{\xi_1}^{\xi}d\xi_2\int\limits_{\eta_1}^{\eta}R(\xi_2, \eta_2; \xi_1, \eta_1)\,c(\xi_2, \eta_2)\,d\eta_2=E, \qquad (1.160)\end{aligned}$$

которая всегда имеет, и притом единственное, решение.

Поскольку $R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)$ относительно η является матрицей фундаментальных решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial R}{\partial\eta}-Ra=0,$$

удовлетворяющей начальному условию $R(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = E$, то имеет место равенство

$$\det R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1) = \exp \sum_{k=1}^{N} \int_{\eta_1}^{\eta} a_{kk}(\xi_1, \eta_2)\, d\eta_2. \tag{1.161}$$

В силу первого из равенств (1.159) для произвольной матрицы $v(\tau_1)$ класса $C^{1,0}(D)$ справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1}[R(\xi, \tau_1; \xi, \eta)v(\tau_1)] - \\ - R(\xi, \tau_1; \xi, \eta)\left[\frac{dv(\tau_1)}{d\tau_1} + a(\xi, \tau_1)v(\tau_1)\right] = 0,$$

после интегрирования которого по τ_1 получаем

$$v(\eta) = R(\xi, \eta_1; \xi, \eta)v(\eta_1) + \\ + \int_{\eta_1}^{\eta} R(\xi, \tau_1; \xi, \eta)\left[\frac{dv(\tau_1)}{d\tau_1} + a(\xi, \tau_1)v(\tau_1)\right] d\tau_1.$$

Если в последнем тождестве примем $v(\tau) = R(\xi, \eta_1; \xi, \tau)$, то будем иметь

$$\int_{\eta_1}^{\eta} R(\xi, \tau_1; \xi, \eta)\left[\frac{\partial}{\partial \tau_1} R(\xi, \eta_1; \xi, \tau_1) + \right. \\ \left. + a(\xi, \tau_1)R(\xi, \eta_1; \xi, \tau_1)\right] d\tau_1 = 0,$$

откуда в силу (1.161) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} R(\xi, \eta; \xi, \eta_1) + a(\xi, \eta_1)R(\xi, \eta; \xi, \eta_1) = 0. \tag{1.162}$$

Пользуясь вторым из тождеств (1.159), аналогичным образом приходим к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} R(\xi, \eta; \xi_1, \eta) + b(\xi_1, \eta)R(\xi, \eta; \xi_1, \eta) = 0. \tag{1.163}$$

Интегрируя легко проверяемое тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial \tau}[R(t, \tau; \xi, \eta)w(t, \tau)] - R(t, \tau; \xi, \eta)L(w) = \\ = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial \tau} - Ra\right)w\right] + \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial t} - Rb\right)w\right],$$

где w — произвольная $N \times N$-матрица класса $C^{2,0}(D)$, в силу (1.159) получаем

$$w(\xi, \eta) = R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)\, w(\xi_0, \eta_0) + \\ + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\, L[w(\xi_1, \eta_1)]\, d\eta_1 + \\ + \int_{\xi_0}^{\xi} R(\xi_1, \eta_0; \xi, \eta)\left[\frac{\partial w(\xi_1, \eta_0)}{\partial \xi_1} + b(\xi_1, \eta_0)\, w(\xi_1, \eta_0)\right] d\xi_1 + \\ + \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0, \eta_1; \xi, \eta)\left[\frac{\partial w(\xi_0, \eta_1)}{\partial \eta_1} + a(\xi_0, \eta_1)\, w(\xi_0, \eta_1)\right] d\eta_1. \qquad (1.164)$$

Если в тождество (1.164) вместо $w(\xi, \eta)$ подставим $R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$, то в силу (1.162) и (1.163) будем иметь

$$\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\, L[R(\xi_0, \eta_0; \xi_1, \eta_1)]\, d\eta_1 = 0,$$

откуда на основании (1.161) приходим к заключению, что каждый столбец матрицы Римана $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ относительно последней пары аргументов ξ_1, η_1 удовлетворяет однородной системе

$$L(w) = 0. \qquad (1.165)$$

Следовательно, *вектор*

$$w_0(\xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta_0}^{\eta} R(t, \tau; \xi, \eta)\, f(t, \tau)\, d\tau$$

является частным решением неоднородной системы (1.157).

Пользуясь этим фактом, исследование ряда линейных задач для неоднородной системы (1.157) можно редуцировать к исследованию соответствующим образом измененных линейных задач для однородной системы (1.165).

При предположении, что $w(\xi, \eta)$ является регулярным решением системы (1.165), из тождества (1.164) после интегрирования по частям получаем интегральное представление этого решения:

$$
\begin{aligned}
w(\xi, \eta) = {} & R(\xi, \eta_0; \xi, \eta)\, w(\xi, \eta_0) + \\
& + R(\xi_0, \eta; \xi, \eta)\, w(\xi_0, \eta) - R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)\, w(\xi_0, \eta_0) - \\
& - \int_{\xi_0}^{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial t} R(t, \eta_0; \xi, \eta) - b(t, \eta_0)\, R(t, \eta_0; \xi, \eta)\right] w(t, \eta_0)\, dt - \\
& - \int_{\eta_0}^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) - a(\xi_0, \tau)\, R(\xi_0, \tau; \xi, \eta)\right] w(\xi_0, \tau)\, d\tau.
\end{aligned}
\tag{1.166}
$$

Формула (1.166) дает решение задачи Гурса в следующей постановке: *найти регулярное решение* $w(\xi, \eta)$ *системы* (1.165), *удовлетворяющее на характеристиках* $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ условиям

$$
w(\xi, \eta_0) = \mu_1(\xi), \quad w(\xi_0, \eta) = \mu_2(\eta), \quad \mu_1(\xi_0) = \mu_2(\eta_0), \tag{1.167}
$$

где μ_1 *и* μ_2 — *известные N-мерные векторы класса* $C^{2,0}$.

Задавая произвольно векторы μ_1 и μ_2, можно утверждать, что (1.166) является общим представлением регулярных решений системы (1.165).

Обозначим через σ лежащую в области D разомкнутую дугу Жордана с непрерывной кривизной, обладающую тем свойством, что ни в одной своей точке она не имеет касания с характеристиками системы (1.165).

Предположим, что выходящие из точки $P(\xi, \eta) \in D$ характеристики $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta$ пересекаются с дугой σ в точках Q' и Q соответственно. Пусть G — подобласть области D, ограниченная участком QQ' дуги σ и отрезками характеристик PQ и PQ'.

Для произвольного вектора $w(\xi, \eta)$ класса $C^{2,0}(D)$ имеет место тождество

$$
\begin{aligned}
R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\, L[w(\xi_1, \eta_1)] - M[R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)]\, w(\xi_1, \eta_1) = {} & \\
= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left[R \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{\partial R}{\partial \xi_1} w + 2Rbw\right] + & \\
+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[R \frac{\partial w}{\partial \eta_1} - \frac{\partial R}{\partial \eta_1} w + 2Raw\right]. &
\end{aligned}
\tag{1.168}
$$

Предполагая, что w — решение системы (1.165), после интегрирования тождества (1.168) по области G будем иметь

$$w(P)=\frac{1}{2}R(Q,\ P)\,w(Q)+\frac{1}{2}R(Q',\ P)\,w(Q')-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{QQ'}\left[R(P',\ P)\frac{\partial w(P')}{\partial\mathscr{N}'}-\frac{\partial R(P',\ P)}{\partial\mathscr{N}'}w(P')\right]d\sigma_{P'}-$$
$$-\int\limits_{QQ'}R(P',\ P)\left[a(P')\frac{\partial\xi_1}{\partial\mathscr{N}'}+b(P')\frac{\partial\eta_1}{\partial\mathscr{N}'}\right]w(P')\,d\sigma_{P'},\qquad(1.169)$$

где $P'=P'(\xi_1,\ \eta_1)$ — точка интегрирования, $\frac{\partial}{\partial\mathscr{N}'}=\frac{\partial\xi_1}{\partial\mathscr{N}}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial\mathscr{N}}\frac{\partial}{\partial\xi_1}$, а $\mathscr{N}$ — единичный вектор внешней нормали σ в точке P'.

Когда значения искомого решения $w(\xi,\ \eta)$ системы (1.165) и его производная $\frac{\partial w(P)}{\partial l}$ по заданному не касательному к σ направлению l заданы на σ:

$$w\big|_{\sigma}=\tau,\qquad \frac{\partial w}{\partial l}\bigg|_{\sigma}=\nu,\qquad(1.170)$$

где $\tau\in C^{2,0}$, $\nu\in C^{1,0}$ — заданные действительные N-мерные векторы, $\frac{\partial w}{\partial\mathscr{N}'}$ всегда можно определить однозначно. Подставляя значения $\tau(P')$ и $\frac{\partial w(P')}{\partial\mathscr{N}'}$ в правую часть формулы (1.169), получаем решение задачи Коши (1.165), (1.170).

Из процесса построения формул (1.166) и (1.169) следует, что *решения задачи Гурса* (1.165), (1.167) *и задачи Коши* (1.165), (1.170) *определяются однозначно и эти решения устойчивы.*

Возвращаясь к переменным x, y, условия (1.167), (1.170) и формулы (1.166), (1.169) соответствующим образом преобразуются так, что в результате будут найдены решения задач Гурса и Коши для однородной системы

$$L(u)=0.$$

5°. Изолированные особые точки гармонической функции. Хорошо известны структурные и качественные свойства решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$a_0(x)\frac{d^2u}{dx^2}+a_1(x)\frac{du}{dx}+a_2(x)u=0 \qquad (1.171)$$

с непрерывными на сегменте $a\leqslant x\leqslant b$ коэффициентами при предположении, что $a_0(x)$ нигде в нуль не обращается. Последнее условие позволяет придать уравнению (1.171) вид (1.123), в котором $n=2$.

Когда выражение $E(x, t)$, $a\leqslant \begin{matrix}x\\t\end{matrix}\leqslant b$, при фиксированном t как функция переменного x является регулярным решением уравнения (1.171) всюду, кроме точки $x=t$, в которой оно может быть вовсе и не задано, естественно считать, что точка $x=t$ является *изолированной особой точкой для* $E(x, t)$. В пункте 1° § 4 при рассмотрении краевой задачи (1.124), (1.127) была показана роль, которую играет функция $G(x, t)$ двух точек x, t, являющаяся регулярным решением уравнения (1.128) при $x\neq t$ и перестающая быть даже дифференцируемой при $x=t$.

Очевидно, что в случае уравнения (1.128) существование и непрерывность производной первого порядка в изолированной особой точке $x=t$ решения $E(x, t)$ гарантируют регулярность этого решения всюду, т. е. точка $x=t$ перестает быть особой. Из однозначной разрешимости задачи Коши с начальными данными в точке $x=t$ следует, что аналогичное утверждение имеет место и в случае уравнения (1.171) при принятых выше предположениях.

Понятие изолированной особой точки вводится и для решения уравнений в частных производных. Так, например, если функция $u(x)$ гармонична в окрестности точки $x=y$ всюду, кроме самой точки y, то говорят, что эта точка является изолированной особой точкой $u(x)$. При исследовании поведения гармонической функции вблизи особой точки мы ограничимся рассмотрением случая двух независимых переменных.

Итак, пусть функция $u(z)$, $z=x_1+ix_2$, гармонична в круге D: $|z-\alpha|<\delta$ всюду, кроме его центра α. Сопряженная с $u(z)$ гармоническая функция $v(z)$ определяется по формуле

$$v(z)=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial\eta}d\xi+\frac{\partial u}{\partial\xi}d\eta+c, \qquad \xi+i\eta=t, \qquad (1.172)$$

где c — произвольная действительная постоянная, а путь интегрирования, соединяющий фиксированную точку $z_0 \in D$, $z_0 \neq \alpha$, с переменной точкой $z \in D$, $z \neq \alpha$, лежит внутри D и не проходит через точку α. Когда в правой части формулы (1.172) интегрирование происходит по пути, обходящему точку α, функция $v(z)$ может получить приращение. Поэтому формулой (1.172) функция $v(z)$ определяется, вообще, не однозначно, т. е. она может иметь период $2k\pi$, где k — действительное число. Очевидно, что функция

$$kF(z) = u(z) + iv(z) - k\log(z-\alpha) \tag{1.173}$$

однозначна и аналитична в области D всюду, кроме точки $z=\alpha$.

Следовательно, выражение

$$\Phi(z) = (z-\alpha)\, e^{F(z)}$$

является однозначной, аналитической в D функцией комплексного переменного z с изолированной особенностью в точке $z=\alpha$, причем в силу (1.173)

$$u(z) = k\log|\Phi(z)|. \tag{1.174}$$

Сперва предположим, что гармоническая функция $u(z)$ вблизи особой точки α ограничена. Отсюда в силу формулы (1.174) заключаем, что для функции $\Phi(z)$ точка $z=\alpha$ не может быть ни полюсом, ни существенно особой точкой. Следовательно, $z=\alpha$ является устранимой особой точкой функции $\Phi(z)$, причем $\lim\limits_{z\to\alpha} \Phi(z) = A \neq 0$ в силу ограниченности функции $u(z)$. Поскольку после доопределения функции $\Phi(z)$ в точке α как $\Phi(\alpha) = A$ она становится аналитической в D всюду, в силу формулы (1.174) функция $u(z)$ гармонична в окрестности точки α, т. е. *эта точка стирается как особая.*

Пусть теперь известно, что независимо от способа стремления z к точке α

$$\lim_{z\to\alpha} u(z) = \infty. \tag{1.175}$$

В силу (1.174) это означает, что функция $\Phi(z)$ в точке α может иметь либо нуль, либо полюс определенного порядка, т. е.

$$\Phi(z) = (z-\alpha)^m\, \Psi(z), \tag{1.176}$$

где $\Psi(z)$ — аналитическая функция, отличная от нуля вблизи точки α, а m — целое число, отличное от нуля. На основании (1.174), (1.176) заключаем, что вблизи точки α функция $u(z)$ должна иметь вид

$$u(z) = k^* \log|z - \alpha| + u^*(z),$$

где число $k^* = km$, а $u^* = k \log|\Psi(z)|$ — гармоническая функция.

Остается рассмотреть случай, когда вблизи точки α функция $u(z)$ не ограничена и условие (1.175) также не выполнено. Ясно, что на этот раз α является существенно особой точкой функции $\Phi(z)$, и, стало быть, в силу теоремы Сохоцкого—Вейерштрасса для любого действительного числа B существует последовательность точек $\{z_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, сходящаяся к α при $k \to \infty$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} u(z_k) = B.$$

О поведении гармонической функции $u(x)$ с любым (конечным) числом независимых переменных $(x_1, \ldots, x_n) = x$ вблизи изолированной особой точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ справедливы все приведенные выше утверждения, лишь с той разницей, что при $n > 2$ из требования, чтобы

$$\lim_{x\to\alpha} u(x) = \infty$$

независимо от способа стремления x к точке α, следует, что вблизи точки α имеет место представление

$$u(x) = k^* |x - \alpha|^{2-n} + u^*(x),$$

где k^* — постоянная, а $u^*(x)$ — гармоническая функция.

Обозначим через ω_n площадь единичной сферы в E_n:

$$\omega_n = \frac{1}{\Gamma(n/2)} 2\pi^{n/2},$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Функция $E(x, y)$ двух точек x и y:

$$E(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log|x - y|, & n = 2, \\[2ex] \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n} |x - y|^{2-n}, & n > 2, \end{cases} \tag{1.177}$$

известная под названием *элементарного решения* уравнения Лапласа (1.6), играет фундаментальную роль в теории гармонических функций. Она легко получается, если искать решение уравнения (1.6), зависящее от расстояния $|x-y|=r$, как решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$E'' + \frac{n-1}{r} E' = 0.$$

Из определения элементарного решения (1.177) непосредственно следует, что выражение вида

$$u(x) = \int_{\gamma} E(x, y)\, \mu(y)\, d\gamma_y, \tag{1.178}$$

где γ — участок гладкого k-мерного многообразия, $0 < k < n$, а $\mu(y)$ — заданная на γ суммируемая функция, во всех конечных точках x, не лежащих на γ, является гармонической функцией; она называется *гармоническим потенциалом масс, распределенных по* γ *с плотностью* μ. Когда же γ представляет собой область пространства E_n и функция $\mu(y)$ достаточно гладка, то представленная формулой (1.178) функция называется *потенциалом объемных масс, распределенных по* γ *с плотностью* μ. Нетрудно показать, что потенциал объемных масс является решением *уравнения Пуассона*

$$\Delta u = -\mu(x), \qquad x \in \gamma. \tag{1.179}$$

Элементарное решение уравнения Лапласа позволяет установить ряд важнейших свойств гармонических функций.

Пользуясь определением (1.177) элементарного решения $E(x, y)$, легко убеждаемся в том, что если функция $u(x)$ гармонична, то гармонична и функция

$$v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

всюду, где она определена. Принимая во внимание это обстоятельство, мы скажем, что функция $u(x)$ гармонична в окрестности бесконечно удаленной точки (т. е. вне замкнутого шара $|x| \leqslant R$ достаточно большого радиуса), если функция $v(y) = |y|^{2-n} u\left(\frac{y}{|y|^2}\right)$, доопределенная в точке

$y=0$ как $\lim\limits_{y\to 0} v(y)$, гармонична в окрестности точки $y=0$.

В результате замены $y=\dfrac{x}{|x|^2}$ имеем

$$u(x)=|x|^{2-n}\,v\left(\frac{x}{|x|^2}\right).$$

В соответствии с этим под регулярным в окрестности бесконечно удаленной точки решением уравнения Лапласа понимается гармоническая в этой окрестности всюду, кроме бесконечно удаленной точки, функция $u(x)$, которая при $|x|\to\infty$ остается ограниченной в случае $n=2$ и стремится к нулю не медленнее, чем $|x|^{2-n}$, при $n>2$.

6°. Интегральное представление гармонических функций и некоторые его применения. Интегрируя очевидные для гармонических функций $u(x)$ и $v(x)$ тождества

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-(\nabla u)^2=0,\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)=0$$

по конечной области $D\subset E_n$ класса $A^{1,h}$ в предположении, что $u(x),\ v(x)\in C^{1,0}(D\cup S)$, в силу формулы (GO) будем иметь

$$\int\limits_S u(y)\frac{\partial u(y)}{\partial\mathscr{N}_y}\,ds_y-\int\limits_D(\nabla u)^2\,dx=0, \tag{1.180}$$

$$\int\limits_S\left[v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial\mathscr{N}_y}-u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial\mathscr{N}_y}\right]ds_y=0. \tag{1.181}$$

Из интегральных тождеств (1.180), (1.181) непосредственно приходим к трем важным свойствам гармонической функции $u(x)$: а) *если* $u=0$ *всюду на* S, *то* $u(x)\equiv 0$ *в* $D\cup S$; б) *если* $\dfrac{\partial u}{\partial\mathscr{N}}=0$ *всюду на* S, *то* $u(x)=\mathrm{const}$ *в* $D\cup S$; в) *интеграл, взятый по границе* S *области* D *от нормальной производной* $\dfrac{\partial u}{\partial\mathscr{N}}$, *равен нулю.*

Свойство а) является также простым следствием уже известного нам из пункта 2° § 2 принципа экстремума, и оно справедливо при более слабых предположениях относительно поведения функции $u(x)$ в $D\cup S$.

Важнейшим следствием формулы (1.181) является *интегральное представление гармонической функции* $u(x)$

$$u(x) = \int_S E(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathcal{N}_y} ds_y - \\ - \int_S \frac{\partial E(x, y)}{\partial \mathcal{N}_y} u(y)\, ds_y, \qquad x \in D, \qquad (1.182)$$

где $E(x, y)$ — элементарное решение (1.177) уравнения Лапласа.

Чтобы вывести формулу (1.182), выделим точку x из области D вместе с замкнутым шаром $|y-x| \leqslant \varepsilon$ достаточно малого радиуса ε и для оставшейся части D_ε области D, ограниченной поверхностью S и сферой σ: $|y-x| = \varepsilon$, применим формулу (1.181), в которой $v(y) = E(x, y)$. Будем иметь

$$\int_S \left[E(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathcal{N}_y} - \frac{\partial E(x, y)}{\partial \mathcal{N}_y} u(y)\right] ds_y = \\ = \int_\sigma \left[E(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathcal{N}_y} - \frac{\partial E(x, y)}{\partial \mathcal{N}_y} u(y)\right] d\sigma_y = \\ = \int_\sigma E(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathcal{N}_y} d\sigma_y - \int_\sigma \frac{\partial E(x, y)}{\partial \mathcal{N}_y} [u(y) - u(x)]\, d\sigma_y - \\ - u(x) \int_\sigma \frac{\partial E(x, y)}{\partial \mathcal{N}_y} d\sigma_y.$$

Отсюда, так как на сфере σ

$$E(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log \varepsilon, & n = 2, \\ \dfrac{\varepsilon^{2-n}}{(n-2)\,\omega_n}, & n > 2, \end{cases} \qquad \frac{\partial E(x, y)}{\partial \mathcal{N}_y} = -\frac{1}{\omega_n} \varepsilon^{1-n}$$

и, кроме того,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-n} \int_\sigma [u(y) - u(x)]\, d\sigma_y = 0, \qquad \varepsilon^{1-n} \int_\sigma d\sigma_y = \omega_n,$$

в силу свойства в) в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем формулу (1.182).

Слагаемые в правой части формулы (1.182)

$$u_0(x)=\int_S E(x,\ y)\,\mu_0(y)\,ds_y \tag{1.183}$$

и

$$u_1(x)=\int_S \frac{\partial E(x,\ y)}{\partial \mathcal{N}_y}\,\mu_1(y)\,ds_y \tag{1.184}$$

известны под названием *потенциалов простого и двойного слоев масс, распределенных на S с плотностями $\mu_0(y)$ и $\mu_1(y)$ соответственно.*

Из интегрального представления (1.182) следует, что для искомых в области D гармонических функций естественно ставить задачи с краевыми условиями

$$\frac{\partial u(y)}{\partial \mathcal{N}_y}=\mu(y),\qquad y\in S \tag{1.185}$$

и

$$u(y)=\varphi(y),\qquad y\in S. \tag{1.186}$$

С задачей нахождения гармонической в области D функции $u(x)\in C^{0,\,0}(D\cup S)$ по краевому условию (1.186) мы уже сталкивались в пункте 1° § 3. Она известна под названием *задачи Дирихле.*

Задача же определения гармонической в области D функции $u(x)\in C^{1,\,0}(D\cup S)$ по краевому условию (1.185) называется *второй краевой задачей* или *задачей Неймана.*

На основании свойств а) и б) гармонических функций приходим к заключению, что *в ограниченной области D:* 1) *задача Дирихле* (1.6), (1.186) *не может иметь более одного решения и* 2) *при разрешимости задачи Неймана* (1.6), (1.185) *ее решение определяется с точностью до произвольной постоянной.*

Интегральное представление (1.182) наводит на мысль о том, что решения задач Дирихле и Неймана следует искать соответственно среди гармонических потенциалов двойного слоя (1.184) и простого слоя (1.183) масс, распределенных по границе S области D, в которой требуется найти решения этих задач.

Более того, это представление позволяет в квадратурах выписать решение задачи Дирихле (1.186), если известна так называемая *функция Грина* $G(x, y)$ двух точек $x, y \in D \cup S$ со свойствами: 1) $G(x, y)$ имеет вид

$$G(x, y) = E(x, y) + g(x, y), \qquad (1.187)$$

где $E(x, y)$ — элементарное решение (1.177), а $g(x, y)$ — гармоническая функция как по $x \in D$, так и по $y \in D$, и 2) когда по крайней мере одна из точек x, y принадлежит S, то

$$G(x, y) = 0. \qquad (1.188)$$

Из определения функции Грина непосредственно следует, что она положительна и симметрична относительно точек x и y. Что же касается поведения функции $g(x, y)$ на S, оно зависит от степени гладкости границы S области D. Когда S принадлежит классу $A^{1,h}$, то заведомо можно в интегральном представлении (1.182) вместо $E(x, y)$ писать $G(x, y)$, и в силу (1.187), (1.188) получаем формулу

$$u(x) = -\int_S \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathscr{N}_y} \varphi(y)\, ds_y, \qquad (1.189)$$

дающую решение задачи Дирихле (1.186).

Функцию Грина явно можно построить лишь для областей частного вида.

Непосредственной проверкой легко убеждаемся в том, что для шара $|x| < 1$ выражение

$$G(x, y) = E(x, y) - E\left(|x|\, y, \frac{x}{|x|}\right)$$

является функцией Грина, и из (1.189) получается ф о р м у л а П у а с с о н а

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} \varphi(y)\, ds_y, \qquad (1.190)$$

дающая решение задачи Дирихле (1.186) в рассматриваемом случае.

Интегральное представление (1.182) остается в силе и в случае, когда область D не является ограниченной, лишь бы функция $u(x)$ удовлетворяла условиям, гарантирующим абсолютную сходимость интегралов в правой части этой формулы. В частности, когда D совпадает с полупространством $x_n > 0$ и при $|x| \to \infty$

$$|u(x)| < \frac{A}{|x|^h}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| < \frac{A}{|x|^{h+1}}, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad (1.191)$$

где A и h — положительные постоянные, формула (1.182), очевидно, справедлива, и учитывая, что в этом случае

$$G(x, y) = E(x, y) - E(x, y'),$$

где $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}, -y_n)$ — точка, симметричная точке y относительно плоскости $y_n = 0$, из формулы (1.189) получаем выражение

$$u(x) = \Gamma(n/2)\,\pi^{-n/2} x_n \int\limits_{y_n=0} \frac{\varphi(y_1, \ldots, y_{n-1})\,dy_1 \ldots dy_{n-1}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}(y_i - x_i)^2 + x_n^2\right]^{n/2}} \qquad (1.192)$$

для решения задачи Дирихле (1.186) в полупространстве $x_n > 0$. Формула (1.192) также называется **формулой Пуассона**. В соответствии с (1.191) от функции $\varphi(y_1, \ldots$ $\ldots y_{n-1})$ естественно требовать, чтобы при больших $\delta = \left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i^2\right)^{1/2}$ она удовлетворяла условию

$$|\varphi| < A/\delta^h.$$

Пользуясь тем очевидным фактом, что наряду с функцией $u(x)$ гармонической является и функция $u(\lambda x + h)$, где λ — скалярная постоянная и $h = (h_1, \ldots, h_n)$ — постоянный вектор (если только точка $\lambda x + h$ принадлежит области определения $u(x)$), из формулы (1.190) приходим к **формуле Пуассона** для шара $|x - x_0| < R$:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{|y-x_0|=R} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|y - x|^n} \varphi(y)\,ds_y. \qquad (1.193)$$

Из формулы (1.193) при $x = x_0$ получаем равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{|y-x_0|=R} u(y)\,ds_y,$$

известное под названием **формулы о среднем арифметическом** для гармонической функции $u(x)$.

Записывая эту формулу в виде

$$\rho^{n-1}u(x_0)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|y-x_0|=\rho}u(y)\,ds_y,\qquad 0\leqslant\rho\leqslant R,$$

и интегрируя по ρ, получаем другой вариант формулы о среднем арифметическом для гармонической функции $u(x)$:

$$u(x_0)=\frac{n}{\omega_n R^n}\int\limits_{|y-x_0|<R}u(y)\,dy. \tag{1.194}$$

Очевидно, что если функция $v(x)$ класса $C^{0,0}(D)$, отличная от постоянной, вблизи каждой точки $x_0\in D$ обладает свойством (1.194), то эта функция не может достигать своих экстремальных значений в D. Отсюда в свою очередь следует, что функция $v(x)$ с указанным свойством обязана быть гармонической. Действительно, если шар $|y-x_0|\leqslant R$ лежит в области D, то функция $u(x)$, представленная формулой (1.193), в которой $\varphi(y)=v(y)$ на сфере $|y-x_0|=R$, является гармонической. Ввиду того, что для обеих функций $u(x)$, $v(x)$ имеет место принцип экстремума и $u(y)=v(y)$ на сфере $|y-x_0|=R$, приходим к заключению, что $u(x)=v(x)$ внутри этой сферы, и, стало быть, $v(x)$ гармонична всюду в области D.

Так как формула (GO) имеет место и в том случае, когда рассматриваемая область D кусочно-ляпуновского класса, то свойство в) гармонической в области D функции $u(x)$

$$\int\limits_{\sigma}\frac{\partial u(y)}{\partial\mathscr{N}_y}\,d\sigma_y=0 \tag{1.195}$$

остается в силе для любой замкнутой кусочно-ляпуновской поверхности σ, расположенной в D вместе с конечной областью D_σ, ограниченной ею. Обратно, если для функции $u(x)\in C^{2,0}(D)$ имеет место равенство (1.195) при любой σ, то $u(x)$ гармонична в D. Справедливость этого утверждения следует из очевидного тождества

$$\int\limits_{D_\sigma}\Delta u\,dx=\int\limits_{\sigma}\frac{\partial u(y)}{\partial\mathscr{N}_y}\,d\sigma_y=0.$$

Повторением подобного рассуждения можно заключить, что если наперед известна гармоничность функции $u(x)$

в области D всюду, кроме k-мерного ($k<n$) кусочно гладкого ляпуновского многообразия γ, и $u(x) \in C^{1,0}(D)$, то эта функция гармонична в D вплоть до γ. Сформулированное утверждение известно под названием **теоремы о стирании особенности** гармонической функции в области $D \subset E_n$ вдоль k-мерных многообразий ($k<n$), лежащих в D.

Из интегрального представления (1.182) гармонической в области D функции $u(x)$ следует ее аналитичность в D, т. е. возможность представления $u(x)$ вблизи каждой точки $x_0 \in D$ в виде суммы абсолютно сходящегося степенного ряда

$$u(x) = \sum a_{k_1 \dots k_n} (x_1 - x_{01})^{k_1} \dots (x_n - x_{0n})^{k_n},$$

где

$$a_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u(x_0)}{\partial x_{01}^{k_1} \dots \partial x_{0n}^{k_n}}.$$

Хотя о существовании решения задачи Дирихле (1.6) (1.186) в приведенной выше постановке в областях общего вида пока ничего не было сказано, но следует заметить, что требование принадлежности решения этой задачи пространству $C^{0,0}(D \cup S)$ может быть ослаблено.

Так, например, пусть ищется ограниченная, гармоническая в круге $|z|<1$ функция $u(z) = u(x_1, x_2)$, $z = x_1 + ix_2$, по краевому условию

$$u(e^{i\theta}) = f(\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{1.196}$$

где заданная действительная функция $f(\theta)$ непрерывна на окружности $|e^{i\theta}| = 1$, всюду, кроме точки $t = e^{i\theta_0}$, причем пределы

$$\lim_{\theta \to \theta_0 - 0} f(\theta) = f^-, \qquad \lim_{\theta \to \theta_0 + 0} f(\theta) = f^+ \tag{1.197}$$

конечны и $f^- \neq f^+$.

Обозначим через $u_0(z)$ определенную однозначную ветвь гармонической функции:

$$u_0(z) = \frac{1}{\pi} (f^- - f^+) \arg (z - e^{i\theta_0}). \tag{1.198}$$

Для функции $f_0(\theta)=u_0(e^{i\theta})$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, имеют место равенства

$$\lim_{\theta\to\theta_0-0} f_0(\theta)=(1+\alpha)(f^- - f^+),\qquad \lim_{\theta\to\theta_0+0} f_0(\theta)=\alpha(f^- - f^+), \tag{1.199}$$

где через $\pi\alpha$ обозначен угол, составленный положительным направлением касательной к окружности $|e^{i\theta}|=1$ в точке $e^{i\theta_0}$ с положительным направлением действительной оси $x_2=0$.

На основании (1.196), (1.197), (1.199) находим, что

$$\lim_{\theta\to\theta_0-0}[f(\theta)-f_0(\theta)]=\lim_{\theta\to\theta_0+0}[f(\theta)-f_0(\theta)]=(1+\alpha)f^+ - \alpha f^-,$$

т. е. функция $\varphi(\theta)=f(\theta)-f_0(\theta)$, доопределенная в точке $e^{i\theta_0}$ по формуле $\varphi(\theta_0)=(1+\alpha)f^+-\alpha f^-$, непрерывна всюду на окружности $|e^{i\theta}|=1$.

Гармоническая в круге $|z|<1$ функция $u_1(z)$, непрерывная при $|z|\leqslant 1$ и удовлетворяющая краевому условию $u_1(e^{i\theta})=\varphi(\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, дается формулой Пуассона (1.190):

$$u_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\varphi(\theta)\,d\theta. \tag{1.200}$$

В силу (1.198), (1.200) очевидно, что функция

$$u(z)=u_1(z)+u_0(z) \tag{1.201}$$

гармонична в круге $|z|<1$ и в каждой точке непрерывности $f(\theta)$ удовлетворяет краевому условию (1.196). Когда точка z изнутри круга $|z|<1$ стремится к точке $e^{i\theta_0}$ разрыва функции $f(\theta)$ вдоль луча $\arg(z-e^{i\theta_0})=\pi\beta$, где $\pi\beta$ — угол, составленный вектором $z-e^{i\theta_0}$ с положительным направлением оси $x_2=0$, то из (1.201) в силу (1.198) и (1.200) получаем, что

$$\lim u(z)=(1-\lambda)f^+ + \lambda f^-,$$

где $\lambda=\beta-\alpha$.

Единственность решения задачи Дирихле (1.196) для гармонических функций в приведенной выше формулировке является следствием известной леммы Зарембы: *если краевые значения гармонической в ограниченной области D функции $u(z)$ изнутри D на ∂D всюду равны* *нулю, кроме конечного множества точек* $\{t_k \in \partial D\}$, $k=1, \ldots, N_0$, *причем вблизи этих точек*

$$\lim_{z \to t_k} \frac{u(z)}{\log|z-t_k|}=0, \qquad k=1, \ldots, N_0, \tag{1.202}$$

то $u(z)=0$ *в каждой точке* $z \in D$. Справедливость же самой леммы легко устанавливается на основании принципа экстремума для гармонических функций.

Действительно, обозначим через D_δ часть области D, лежащую вне замкнутых кругов $|z-t_k| \leqslant \delta$ достаточно малого радиуса, и введем в рассмотрение положительную в D_δ гармоническую функцию

$$u^*(z)=\varepsilon \sum_{k=1}^{N_0} \log \frac{d}{|z-t_k|}, \tag{1.203}$$

где d — диаметр области D, а ε — произвольное положительное число. Из (1.202), (1.203) следует, что для любого $\varepsilon > 0$, начиная с определенного δ, краевые значения на ∂D_δ гармонических в D_δ функций $u^*(z)-u(z)$ и $u^*(z)+u(z)$ будут положительными. Отсюда в силу принципа экстремума заключаем, что в каждой точке $z \in D_\delta$

$$|u(z)| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{N_0} \log \frac{d}{|z-t_k|}. \tag{1.204}$$

Поскольку любая фиксированная точка $z \in D$, начиная с определенного $\delta > 0$, лежит в D_δ, в силу произвольности ε из (1.204) заключаем, что $u(z)=0$.

Формула Пуассона (1.200) дает решение задачи Дирихле (1.196) при более общих предположениях относительно функции $f(\theta)$. А именно, для любой суммируемой функции $f(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, правая часть формулы (1.200) представляет собой гармоническую в круге $|z|<1$ функцию $u(z)$, которая при $|z| \to 1$ почти для всех значений θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, стремится к $f(\theta)$ (см., например, Неванлинна [1]).

Допущение неограниченности искомой в области D гармонической функции может вызывать нарушение единственности решения задачи Дирихле. Это подтверждается примером гармонической в круге $|z|<1$ функции

$$u_\alpha(z)=\alpha\,\mathrm{Re}\,\frac{1+z}{1-z}=\alpha\,\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},\qquad \alpha=\mathrm{const},$$

удовлетворяющей краевому условию

$$\lim_{z\to e^{i\theta_0}} u_\alpha(z)=0,\qquad 0<\theta<2\pi,$$

но не ограниченной вблизи точки $z=1$.

7°. Особенности решений волнового уравнения. Ограничимся рассмотрением волнового уравнения с одним пространственным переменным, т. е. уравнением колебаний струны.

Пусть известно, что решение $u(x, t)$ уравнения (1.54) в точке (x_0, t_0) имеет особенность, т. е. функция $u(x, t)$ или ее частные производные первого порядка претерпевают разрыв в этой точке. На основании формулы (1.150) заключаем, что хотя бы одна из функций $\mu_1(\xi)$, $\mu_2(\xi)$ должна иметь особенность при $\xi=t_0$, и, стало быть, особенности функций $u(x, t)$ будут распространяться вдоль хотя бы одной из характеристик $x-t=x_0-t_0$ и $x+t=x_0+t_0$ уравнения (1.54), выходящих из точки (x_0, t_0). Точно так же из формулы Даламбера (1.140) следует, что особенности начальных данных $\tau(\xi)$ и $\nu(\xi)$ в точке $\xi=\xi_0$ влекут за собой разрывы решения задачи Коши (1.54), (1.137) вдоль характеристик $x+t=\xi_0$, $x-t=\xi_0$.

Как было показано в пункте 4° настоящего параграфа, формула (1.169) при $y=t$ дает решение задачи Коши (1.54), (1.170), если только σ является нехарактеристической кривой с непрерывной кривизной.

Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ искомого решения $u(x, t)$, входящие в правую часть формулы (1.169), в силу (1.170) должны быть определены из равенств

$$\frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dt}{ds}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{d\tau}{ds},\qquad \frac{dx}{dl}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{dt}{dl}\frac{\partial u}{\partial t}=\nu, \tag{1.205}$$

где $x=x(s)$, $t=t(s)$ — параметрические уравнения кривой σ. Из линейной системы (1.205) следует, что нарушение требуемой гладкости σ непременно повлечет за собой нарушение гладкости $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ и, стало быть, нарушение гладкости самого решения $u(x, t)$.

Ввиду того, что при непрерывности кривизны нехарактеристической кривой σ и непрерывной дифференцируемости данных Коши τ и ν соответственно дважды и один раз регулярное решение $u(x, t)$ задачи (1.54), (1.170) однозначно определяется формулой (1.169) в некоторой области, содержащей σ, для наличия разрывов вторых производных $u(x, t)$, когда точка (x, t) переходит через σ, необходимо, чтобы σ была характеристикой уравнения (1.54).

Все сказанное выше остается в силе и в случае общих гиперболических уравнений второго порядка.

В предыдущем пункте было отмечено, что функция $u(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ в области D своей гармоничности является аналитической функцией. Следовательно, в результате замены переменных x_k через ix_k, $k=1, \ldots, n$, $i=\sqrt{-1}$, а x_{n+1} — через t из выражения $u(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ получаем аналитическое решение $u(ix_1, \ldots, ix_n, t)$ волнового уравнения (1.134). В частности, из элементарного решения уравнения Лапласа с $n+1$ независимыми переменными

$$E(x, y), \quad x=(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}), \quad y=(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}),$$

заменой x_k, y_k через ix_k, iy_k, $k=1, \ldots, n$, а x_{n+1}, y_{n+1} — через t и τ соответственно получаем решение волнового уравнения (1.134) с n пространственными переменными

$$E(x, t; y, \tau)=$$
$$=\begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\log[(t-\tau)^2-(x_1-y_1)^2], & n=1, \\ \dfrac{1}{(n-1)\,\omega_{n+1}}\left\{(t-\tau)^2-\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right\}^{\frac{1-n}{2}}, & n>1, \end{cases} \tag{1.206}$$

с особенностью по характеристическому конусу K:

$$K:\ \sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2-(t-\tau)^2=0.$$

Определенная формулой (1.206) функция $E(x, t; y, \tau)$ называется *элементарным решением волнового уравнения* (1.134).

Элементарным решением (1.206) можно воспользоваться при построении решений начальных (1.137), (1.147) и характеристической (1.148) задач Коши для волнового уравнения (1.134). В этом плане в следующем пункте мы ограничимся рассмотрением волнового уравнения с двумя пространственными переменными

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0, \tag{1.207}$$

элементарное решение которого в силу (1.206) будем брать в виде

$$E(r,\ t,\ \tau)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}, \tag{1.208}$$

где $r^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2$.

В результате интегрирования выражения $E(r,\ \xi,\ \tau)$ по ξ от $\tau+r$ до t получаем функцию

$$E_*(r,\ t,\ \tau)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{t-\tau-\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}{r}, \tag{1.209}$$

представляющую собой решение уравнения (1.207) внутри конуса

$$t-\tau-r=0, \tag{1.210}$$

характеристического для уравнения (1.207). Она обращается в нуль по конусу (1.210), но имеет особенности и вдоль его оси $r=0$.

8°. **Интегральное представление решений волнового уравнения с двумя пространственными переменными.** Для любых двух регулярных решений $u(y,\ \tau)$ и $v(y,\ \tau)$ уравнения (1.207), записанного в переменных y, τ, имеет место очевидное тождество

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_k}-u\frac{\partial v}{\partial y_k}\right)-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(v\frac{\partial u}{\partial\tau}-u\frac{\partial v}{\partial\tau}\right)=0. \tag{1.211}$$

В предположении, что граница S конечной области D является кусочно-ляпуновской поверхностью и функции $u,\ v\in C^{1,\,0}(D\cup S)$, в результате интегрирования тождества (1.211) по области D, на основании формулы (GO) будем иметь

$$\int_S\left(v\frac{\partial u}{\partial\mathscr{N}^r}-u\frac{\partial v}{\partial\mathscr{N}^r}\right)ds=0, \tag{1.212}$$

где $\mathcal{N}'$ — единичный вектор конормали в точке $(y, \tau) \in S$ с направляющими косинусами

$$\cos \widehat{\mathcal{N}' y_1} = \cos \widehat{\mathcal{N} y_1}, \quad \cos \widehat{\mathcal{N}' y_2} = \cos \widehat{\mathcal{N} y_2},$$
$$\cos \widehat{\mathcal{N}' \tau} = -\cos \widehat{\mathcal{N} \tau},$$

а $\mathcal{N}$ — единичный вектор внешней нормали к S.

Пусть u — решение задачи (1.148), (1.207) при условии, что носителем данных является конус K_0 с вершиной в точке (x_0, t_0):

$$K_0\colon \sqrt{(y_1 - x_{01})^2 + (y_2 - x_{02})^2} - \tau + t_0 = 0,$$

причем заданная на K_0 функция μ достаточно гладка. Обозначим через (x, t) произвольную точку внутри конуса K_0 и предположим, что на этот раз D представляет собой область, ограниченную конусами K_0 и K_1:

$$K_1\colon \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} - t + \tau = 0.$$

Хотелось бы, как и при выводе формулы (1.182) с помощью интегрального тождества (1.181), вывести из формулы (1.212) интегральное представление решений уравнения (1.207). К сожалению, для этой цели функция $E(r, t, \tau)$ не годится из-за наличия у нее сильной особенности по конусу K_1. Пусть $D_{\varepsilon\delta}$ — часть области D, ограниченная конусом K_0, круговым конусом K' с вершиной в точке (x, t) и осью, совпадающей с осью конуса K_1, угол наклона образующей которого равен $\pi/4 - \varepsilon$, и круговым цилиндром C: $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = \delta^2$, где ε и δ — достаточно малые положительные числа.

Записывая формулу (1.212) для области $D_{\varepsilon\delta}$ при предположении, что в ней $v(y, \tau) = E_*(r, t, \tau)$, в виде

$$\int\limits_{\partial D_{\varepsilon\delta}} \left[E_*(r, t, \tau)\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}'} - \frac{\partial E_*(r, t, \tau)}{\partial \mathcal{N}'} u\right] ds = 0$$

и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$, получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{K_0} \left[\frac{\partial E_*(r, t, \tau)}{\partial \mathcal{N}'} u - E_*(r, t, \tau)\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}'}\right] ds. \tag{1.213}$$

Поскольку направление конормали $\mathcal{N}'$ на конусе K_0 совпадает с направлением образующей этого конуса, наряду со значением $u|_{K_0} = \mu$ мы можем вычислить и $\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}'}$ по конусу K_0, так что формулой (1.213) решение $u(x, t)$ задачи (1.148), (1.207) будет определено однозначно. В формуле (1.213) под K_0, очевидно, понимается часть конуса K_0, представляющая собой граничную компоненту области D.

9°. Уравнение теплопроводности. В роли элементарного решения уравнения теплопроводности (1.136) выступает функция

$$E(x, y; t, \tau) = (t - \tau)^{-n/2} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}\right], \quad t > \tau. \qquad (1.214)$$

Она легко получается применением преобразования Фурье.

В самом деле, в случае одного пространственного переменного $x_1 = x$ функция $u(x, t) = E(x, 0; t, 0)$ должна быть решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad t > 0. \qquad (1.215)$$

Умножая уравнение (1.215) на функцию

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\xi x}$$

и интегрируя по x от $-\infty$ до ∞, будем иметь

$$\frac{dv}{dt} + \xi^2 v = 0, \qquad (1.216)$$

где

$$v(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx.$$

Эту формулу, поскольку функция $v(t, \xi) = \sqrt{2}\, e^{-\xi^2 t}$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения (1.216), можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, 0; t, 0) e^{-i\xi x} dx = \sqrt{2}\, e^{-\xi^2 t}. \qquad (1.217)$$

В результате обращения преобразования (1.217) по ξ получаем

$$E(x,\ 0;\ t,\ 0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t+i\xi x}d\xi=\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}. \qquad (1.218)$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае элементарное решение (1.214) получается из формулы (1.218), если в ней вместо x и t будем писать $x-y$ и $t-\tau$ соответственно.

Подобно тому, как это было сделано в случаях уравнения Лапласа и волнового уравнения, элементарное решение (1.214) позволяет получить интегральное представление регулярных решений уравнения теплопроводности (1.136). Поскольку в последующих главах этим представлением пользоваться не будем, мы здесь ограничимся тем, что укажем на две формулы:

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{\pi^2 k^2 t}{l^2}}\sin\frac{\pi k}{l}x, \qquad (1.219)$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx, \quad k=1,2,\ \ldots,$$

и

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}dy. \qquad (1.220)$$

Формула (1.219) дает решение первой краевой задачи (1.75), (1.76) для уравнения (1.215) в прямоугольнике $0<x<l$, $0<t<T$ при предположении, что $\psi(t)\equiv 0$, $0\leqslant t\leqslant T$, а функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $0\leqslant x\leqslant l$ и обращается в нуль на его концах.

Формула же (1.220) дает решение $u(x,\ t)$ так называемой *задачи Коши—Дирихле* об определении регулярного в полосе $-\infty<x<\infty$, $0<t<T$ решения уравнения (1.215), удовлетворяющего условию

$$u(x,\ 0)=\varphi(x), \quad -\infty<x<\infty, \qquad (1.221)$$

где $\varphi(x)$, $-\infty<x<\infty$, — заданная действительная, непрерывная, ограниченная функция.

Единственность решений первой краевой задачи и задачи Коши—Дирихле для уравнения (1.136) вытекает из принципа экстремума (см. пункт 3° § 2).

Заметим, что формулы (1.219) и (1.220) для решения рассмотренных выше задач остаются в силе и при более общих предположениях относительно данных этих задач.

§ 5. Краткий обзор известных методов решения уравнений в частных производных

1°. Общая постановка краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Как уже было отмечено в пункте 1° § 4, когда речь идет о применении уравнений в частных производных, очень важно указать дополнительные требования, налагаемые на искомое решение, гарантирующие его существование, единственность и устойчивость. Выше мы убедились в том, что такими дополнительными требованиями являются: начальные условия (1.137), (1.147) и характеристическое условие (1.148) в случае волнового уравнения (1.134) (пункты 3°, 4°, 8° § 4), краевое условие (1.69) задачи Дирихле для уравнения Лапласа (1.67) (пункт 7° § 4), а также условия (1.75), (1.76) первой краевой задачи и условие (1.221) задачи Коши—Дирихле для уравнения теплопроводности (1.136) (пункт 9° § 4).

В примерах задач Дирихле (1.69) и Неймана (1.185) для уравнения Лапласа (1.67) (впрочем, эти задачи могут быть рассмотрены как в случае конечной области $D=$ $=D^+\subset E_n$, так и в случае бесконечной области $D^-=$ $=C(D\cup\partial D)\subset E_n$ с границей ∂D размерности $n-1$) носителем данных является вся $(n-1)$-мерная граница ∂D области D, в которой ищется решение. Именно поэтому эти задачи принято называть краевыми (или граничными) задачами.

Для эллиптических уравнений второго порядка (1.4) широкий класс краевых задач охватывается следующей общей постановкой: *ищется регулярное в области $D \subset E_n$ решение $u(x)$ уравнения (1.4), удовлетворяющее условию*

$$h\left(y,\ u,\ \ldots,\ \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n}u(y)}{\partial y_1^{i_1}\ldots\partial y_n^{i_n}},\ \ldots\right)+$$

$$+\int_S H\left(y,\ t,\ u(t),\ \ldots,\ \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n}u(t)}{\partial t_1^{j_1}\ldots\partial t_n^{j_n}},\ \ldots\right)ds_t=0,\quad y\in S, \tag{1.222}$$

где через S обозначена $(n-1)$-мерная граница области $D \subset E_n$, заданные на S функции h и H действительны для всех значений их аргументов, причем под значениями частных производных от функции $u(x)$ на S понимаются их пределы изнутри области, в которой функция ищется.

Задача (1.222) называется *линейной*, когда функции h и H линейно зависят от искомой функции и ее производных. Когда $H\equiv 0$ и $h\equiv u(y)-\varphi(y)$, т. е. когда искомое решение удовлетворяет краевому условию (1.186), задача (1.4), (1.186) называется *задачей Дирихле*. Если же $H\equiv 0$ и $h\equiv a(y)u(y)+b(y)\dfrac{\partial u(y)}{\partial l}-\varphi(y)$, где $a(y)$, $b(y)$, $\varphi(y)$ — заданные на S действительные функции, а $l(y)$ — заданное направление, то задача определения регулярного в области D решения $u(x)$ уравнения (1.4) по краевому условию

$$a(y)u(y)+b(y)\frac{\partial u(y)}{\partial l}=\varphi(y),\quad y\in S, \tag{1.223}$$

известна под названием *задачи Пуанкаре*. Частным случаем задачи Пуанкаре (1.223) является *задача с наклонной (косой) производной*

$$\frac{\partial u(y)}{\partial l}=\varphi(y). \tag{1.224}$$

Когда (1.4) представляет собой эллиптическую систему N уравнений с N неизвестными функциями $u_1,\ldots,u_N$ задача Дирихле, задача Пуанкаре и задача с наклонной производной ставятся аналогично, лишь с той разницей, что в случае системы в краевых условиях (1.186), (1.223), (1.224) под $u(y)$ и $\varphi(y)$ понимаются N-мерные векторы, а под $a(y)$ и $b(y)$ — квадратные $N\times N$-матрицы.

2°. **Метод параметрикса.** В пункте 6° § 4 была отмечена роль, которую играет в теории гармонических функций элементарное решение уравнения Лапласа $E(x, y)$, представляющее собой в случае $n=3$ *кулоновский потенциал* $\frac{1}{4\pi r}$, а в случае $n=2$ — *логарифмический потенциал* $-\frac{1}{2\pi}\log r$ масс соответственно величин $\frac{1}{4\pi}$ и $-\frac{1}{2\pi}$, сосредоточенных в точке y, причем $r=|x-y|$.

В предположении равномерной эллиптичности уравнения (1.4) для выражения

$$\sigma(x, y)=\sum_{i, j=1}^{n} A_{ij}(x)(x_i-y_i)(x_j-y_j), \tag{1.225}$$

считая без ограничения общности, что $\sigma>0$, в силу (1.9) будем иметь оценки

$$K_0 r \leqslant \sigma^{1/2} \leqslant K_1 r.$$

В правой части выражения (1.225) функции A_{ik} представляют собой отношения алгебраических дополнений элементов A^{ij} матрицы $\|A^{ij}\|$ к $\det\|A^{ij}\|=A>0$.

Относительно коэффициентов уравнения (1.4) будем предполагать, что в области D задания этого уравнения

$$A^{ij}\in C^{3,0}(D\cup S), \qquad B^i, C, F\in C^{1,0}(D\cup S), \qquad S=\partial D,$$

и введем в рассмотрение *параметрикс*, или *функцию Леви* [1],

$$\psi(x, y)=\begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log\sigma, & n=2, \\ \sigma_0(y)\,\sigma^{\frac{2-n}{2}}, & n>2, \end{cases} \tag{1.226}$$

где

$$\sigma_0(y)=\frac{1}{\omega_n(n-2)\sqrt{A(y)}},$$

причем предполагается, что при $n=2$ матрица $\|A^{ij}\|$ является единичной.

Беря в (1.4) оператор L от $\psi(x, y)$ по переменным x, в силу (1.226) заключаем, что при $r\to 0$

$$L(\psi)=O(r^{1-n}). \tag{1.227}$$

Параметрикс (1.226), в свою очередь, позволяет строить функцию

$$u^0(x) = \int_D \psi(x, y)\rho(y)\,dy, \tag{1.228}$$

обобщающую в некотором смысле потенциал объемных масс (1.178). В самом деле, как нетрудно видеть, если функция ρ непрерывна и ограничена в области D вместе со своими производными первого порядка, то, применяя оператор L к (1.228), получаем

$$L(u^0) = -\rho(x) + \int_D L(\psi)\rho(y)\,dy, \tag{1.229}$$

где интеграл в правой части в силу (1.227) сходится абсолютно и равномерно.

Если искать решение уравнения (1.4) в виде

$$u(x) = \omega(x) + \int_D \psi(x, y)\rho(x)\,dy, \tag{1.230}$$

где $\omega(x)$ — произвольная функция класса $C^{3,\,0}(D \cup S)$, то в силу (1.229) будем иметь

$$\rho(x) + \int_D K(x, y)\rho(y)\,dy = -[F - L(\omega)], \tag{1.231}$$

где

$$K(x, y) = -L(\psi). \tag{1.232}$$

На основании (1.227) и (1.232) заключаем, что равенство (1.231) относительно $\rho(x)$ представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Очевидно, что если $\rho(x)$ является решением уравнения (1.231), то определенная по формуле (1.230) функция $u(x)$ будет регулярным решением уравнения (1.4).

Поскольку для произвольной функции $\omega(x)$ уравнение (1.231) в области D достаточно малой меры всегда имеет решение, мы вправе считать доказанным существование (в малом) целого семейства регулярных решений уравнения (1.4). Это утверждение остается в силе и при более слабых требованиях относительно коэффициентов уравнения (1.4). Например, достаточно, чтобы указанные коэффициенты принадлежали классу $C^{0,h}(D \cup S)$ (см. Жиро [1]).

Описанный выше метод построения решений уравнения (1.4) называется *методом параметрикса*. Этот же метод позволяет строить и элементарные решения.

3°. Элементарное решение эллиптических уравнений второго порядка. Функция $\Omega_0(x, y)$ двух точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in D$ называется *элементарным решением* уравнения (1.4), если: 1) она относительно x при $x \neq y$ является регулярным решением соответствующего (1.4) однородного уравнения

$$L(\Omega_0) = 0 \tag{1.233}$$

и 2) при $r = |x - y| \to 0$ функция Ω_0 и ее производные первого и второго порядков ведут себя так, что при $n=2$

$$\Omega_0 = O\left(\log \frac{2R}{r}\right), \quad \frac{\partial \Omega_0}{\partial x_i} = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_i \partial x_j} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad R = \operatorname{diam} D,$$

а при $n > 2$

$$\Omega_0 = O(r^{2-n}), \quad \frac{\partial \Omega_0}{\partial x_i} = O(r^{1-n}), \quad \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x_i \partial x_j} = O(r^{-n}).$$

Следуя Леви, будем искать функцию $\Omega_0(x, y)$ опять по формуле (1.230), в которой на этот раз $\omega = \psi(x, y)$, т. е.

$$\Omega_0(x, y) = \psi(x, y) + \int_D \psi(x, t) \rho(t)\, dt, \tag{1.234}$$

где $\psi(x, y)$ дается по формуле (1.226). Определенная по формуле (1.234) функция $\Omega_0(x, y)$ автоматически будет обладать свойством 2), а для того, чтобы она обладала и свойством 1), необходимо и достаточно, чтобы функция ρ была решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\rho(x) + \int_D K(x, t) \rho(t)\, dt = L(\psi) \tag{1.235}$$

со слабой особенностью вида (1.227) в правой части.

Ввиду того, что полученное для определения ρ интегральное уравнение (1.235) по крайней мере в области D достаточно малой меры всегда имеет решение, то существование элементарного решения в малом можно считать доказанным.

Функция

$$v(x) = -\int_D \Omega_0(x, t) F(t)\, dt \tag{1.236}$$

называется соответствующим уравнению (1.4) *потенциалом объемных масс*, распределенных по области D с плотностью $-F(t)$. Она является решением уравнения (1.4) при довольно общих предположениях относительно характера гладкости функции $F(x)$ (см. Феллер [1], Миранда [1], а также А. В. Бицадзе [5]).

Любое решение $u(x)$ уравнения (1.4) можно представить в виде $u=v+w$, где $L(w)=0$, а функция $v(x)$ дается по формуле (1.236).

Сформулированное выше свойство 2) элементарного решения $\Omega_0(x, y)$ при $n>2$ нуждается в уточнении относительно его структуры при $x=y$. Такое уточнение становится возможным, если коэффициенты в левой части уравнения (1.4) являются аналитическими функциями. При таком предположении, обозначая через Γ квадрат геодезического расстояния между точками x, y риманова пространства с метрикой

$$ds^2 = \sum_{i, j=1}^{n} A_{ij} dx_i dx_j,$$

можно утверждать, что при нечетном n

$$\Omega_0(x, y) = R_1 \Gamma^{\frac{2-n}{2}} + R_2,$$

а при четном $n>2$

$$\Omega_0(x, y) = R_1 \Gamma^{\frac{2-n}{2}} + R_3 \log \Gamma + R_2,$$

где R_1, R_2, R_3 — аналитические функции, причем может случиться, что R_3 тождественно обращается в нуль (см. Адамар [1], Томас и Тит [1], Копсон [1]).

Выше речь шла о существовании элементарного решения $\Omega_0(x, y)$ уравнения (1.233) вблизи точки $y \in D$, или, как еще принято говорить, *локально* или в *малом*. Теперь будем предполагать, что областью задания уравнения (1.4) является все пространство E_n. Определенное во всем пространстве E_n элементарное решение $\Omega_0(x, y)$ будем называть *главным элементарным решением*, если существует такая постоянная $\alpha > 0$, что при $r \to \infty$

$$\Omega_0(x, y) = O(e^{-\alpha r}), \quad \frac{\partial \Omega_0}{\partial x_i} = O(e^{-\alpha r}), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (1.237)$$

Из принципа экстремума (см. пункт 1° § 2) следует, что при $C(x) \leqslant 0$, если существует главное элементарное решение, то оно единственно. В дальнейшем его будем обозначать через $\Omega(x, y)$.

Жиро принадлежит следующее утверждение: *эллиптическое уравнение* (1.233), *заданное во всем пространстве, имеет главное элементарное решение, если*: 1) $A(x) = -\det \| A^{ij} \|$ *ограничена снизу положительным числом,* 2) *функции* A^{ij}, B^i, C *ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера, причем* A^{ik} *удовлетворяют условию Гёльдера равномерно,* 3) *функция* $C(x) \leqslant 0$ *всюду в* E_n, *а вне некоторой ограниченной области* $C(x) < -g^2$, *где* g — *отличная от нуля действительная постоянная. Более того, если дополнительно известно, что функции* $A^{ij}(x)$, $e^i(x) = B^i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A^{ij}(x)}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, *имеют первые производные, равномерно ограниченные и удовлетворяющие условию Гёльдера в* E_n, *то главное элементарное решение* $\Omega(x, y)$ *уравнения* (1.233) *относительно* y *при* $y \neq x$ *удовлетворяет уравнению*

$$L^*(\Omega) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(A^{ij}(y) \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(e^i(y)\Omega) + C(y)\Omega = 0. \qquad (1.238)$$

Уравнение (1.238) называется *соответствующим* (1.4) *однородным сопряженным уравнением* (см. Жиро [1], А. В. Бицадзе [5]).

Когда заданное в ограниченной области $D \subset E_n$ уравнение (1.4) равномерно эллиптично и его коэффициенты — достаточно гладкие функции, причем $C(x) \leqslant 0$, то это уравнение может быть доопределено во всем пространстве так, что условия 1), 2), 3) приведенного выше утверждения Жиро будут выполнены. Поэтому в рассматриваемом случае можно считать, что уравнение (1.233) имеет главное элементарное решение (см. Янчер [1]).

Главное элементарное решение со свойствами (1.237) для уравнения

$$\Delta u - u = 0 \tag{1.239}$$

в случаях $n=2$ и $n=3$ было построено Пикаром [1], причем

$$\Omega(x, y) = \begin{cases} \varphi_2(r), & n=2, \\ \varphi_3(r), & n=3, \end{cases}$$

где

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{rt}\,dt}{\sqrt{t^2-1}}, \qquad \varphi_3(r) = \frac{e^{-r}}{4\pi r}.$$

Следует заметить, что если $\varphi_n(r)$ — главное элементарное решение уравнения (1.239), когда число независимых переменных равно n, то

$$\varphi_{n+2} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\varphi_n(r)}{dr},$$

а $\varphi_n(r)$ является решением уравнения

$$r\varphi''(r) + (n-1)\varphi'(r) - r\varphi(r) = 0.$$

В случае же уравнения

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0, \qquad \lambda = \text{const} \neq 0,$$

главным элементарным решением, очевидно, является функция

$$\Omega(x, y) = \lambda^{n-2}\varphi(\lambda r).$$

Эллиптическое во всем пространстве E_n уравнение (1.233) с аналитическими коэффициентами всегда имеет в E_n элементарное решение $\Omega(x, y)$, которые вовсе не обязано обладать свойством (1.237) (см. Адамар [1], Томас и Тит [1], Копсон [1]).

4°. Интегральное представление решений эллиптического уравнения второго порядка. Будем считать, что в области своего задания уравнение (1.4) является равномерно эллиптическим с коэффициентами настолько гладкими, что оператор L можно записать в виде

$$L(u)=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}e^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)u.$$

Оператор L^*

$$L^*(u)=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}A^{ij}\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(ue^i)+uC(x) \qquad (1.240)$$

называется *сопряженным с оператором* L (ср. с (1.238)).

Оператор L называется *самосопряженным*, если $L(u)=$ $=L^*(u)$ тождественно. Из определения операторов L и L^* очевидно, что для того, чтобы оператор L был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы

$$e^i(x)=B^i(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A^{ij}(x)}{\partial x_j}=0, \qquad i=1,\ldots,n.$$

Если область $D\subset E_n$ класса $A^{1,h}$ вместе со своей $(n-1)$-мерной границей S лежит в области задания операторов L и L^*, то в результате интегрирования по области D очевидного тождества

$$vL(u)-L^*(v)u=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[vA^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}A^{ij}u\right]+\\+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(ve^iu),$$

справедливого для любой пары функций $u(x)$, $v(x)\in$ $\in C^{2,0}(D)\cap C^{1,0}(D\cup S)$, в силу формулы (GO) при скалярных L и L^* будем иметь

$$\int\limits_D [vL(u)-L^*(v)u]\,dx=\int\limits_S\left[av\frac{du}{d\mathcal{N}'}-uQ_yv\right]ds_y, \qquad (1.241)$$

где

$$Q_y v = a(y)\frac{dv(x)}{d\mathcal{N}'_y} - b(y)v(y), \tag{1.242}$$

$\mathcal{N}'_y$ — единичный вектор конормали в точке $y \in S$ с направляющими косинусами

$$\cos\widehat{\mathcal{N}'y_i} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} A^{ij}\cos\widehat{\mathcal{N}y_j}, \qquad i=1,\ldots,n,$$

$\mathcal{N}$ — единичный вектор нормали к S в точке y, а

$$a^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A^{ij}\cos\widehat{\mathcal{N}y_j}\right)^2, \qquad b = \sum_{i=1}^{n} e^i \cos\widehat{\mathcal{N}y_i}.$$

В частности, когда функции $u(x)$ и $v(x)$ являются регулярными решениями однородных уравнений соответственно

$$L(u) = 0 \tag{1.243}$$

и

$$L^*(v) = 0, \tag{1.244}$$

формула (1.241) принимает вид

$$\int_S \left[av\frac{du}{d\mathcal{N}'} - uQ_y v\right]ds_y = 0. \tag{1.245}$$

При наличии элементарного решения $\Omega(x, y)$, предполагая, что $v(y) = \Omega(x, y)$, из формулы (1.245) получаем интегральное представление регулярных решений уравнения (1.243):

$$u(x) = \int_S a(y)\,\Omega(x, y)\frac{du(y)}{d\mathcal{N}'_y}ds_y - \int_S Q_y\Omega(x, y)\,u(y)\,ds_y,$$

$$x \in D. \tag{1.246}$$

Функции

$$u_0(x) = \int_S Q_y\Omega(x, y)\,\mu_0(y)\,ds_y, \tag{1.247}$$

где оператор Q_y дается формулой (1.242), и

$$u_1(x) = \int_S \Omega(x, y)\, \mu_1(y)\, ds_y, \tag{1.248}$$

являющиеся решениями уравнения (1.243), называются *обобщенными потенциалами двойного и простого слоев.*

Поскольку в случае уравнения Лапласа

$$\Omega(x, y) = E(x, y),$$

формулы (1.247) и (1.248) действительно являются обобщениями гармонических потенциалов двойного и простого слоев (1.184) и (1.183) соответственно.

На основании формул (1.246), (1.247), (1.248) заключаем, что любое регулярное в области D решение уравнения (1.243) можно представить в виде суммы обобщенных потенциалов двойного и простого слоев.

5°. Метод потенциала. Любое регулярное в области $D \subset E_n$ решение $u(x)$ уравнения (1.4) при требовании равномерной эллиптичности этого уравнения и достаточной гладкости $(n-1)$-мерной границы $S = \partial D$ и функции $u(x)$ в $D \cup S$, в силу формул (1.236), (1.246), (1.247) и (1.248), можно представить в виде суммы обобщенных потенциалов объемных масс, простого и двойного слоев, если только известно главное элементарное решение $\Omega(x, y)$. При этом, очевидно, можно полагать, что в случае линейных краевых задач дело имеем с однородным уравнением (1.243). В этих же условиях можно ввести понятие функции Грина, как это было сделано в пункте 6° § 4 в случае уравнения Лапласа, и, как только эта функция будет найдена (или если будет доказано ее существование), можно считать, что задача Дирихле (1.4), (1.186) решена. Когда речь идет о других линейных краевых задачах, их решения можно искать в виде суммы обобщенных потенциалов двойного и простого слоев, плотности которых подлежат определению.

В случае уравнения Лапласа хорошо известны свойства потенциалов двойного и простого слоев (1.184) и (1.183) для поверхностей S класса $A^{1,h}$ при требовании непрерывности их плотностей.

Гармонический потенциал двойного слоя (1.247): 1) *при* $|x| \to \infty$ *имеет порядок* *нуля на единицу больше, чем порядок нуля элементарного решения*; 2) *он имеет смысл и тогда, когда точка* $x = x_0 \in S$; 3) *существуют пределы*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^+}} u_0(x) = u^+(x_0), \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^-}} u_0(x) = u^-(x_0),$$

где D^+ — *конечная область с границей* S, *а* D^- — *дополнение* $D^+ \cup S$ *до всего пространства* E_n; 4) *выражения* $u_0(x_0)$, $u_0(x_0)^+$, $u_0(x_0)^-$ *непрерывны на* S *и связаны между собой равенствами*

$$u_0^+(x_0) - u_0(x_0) = -\frac{1}{2}\mu_0(x_0), \quad u_0^-(x_0) - u_0(x_0) = \frac{1}{2}\mu_0(x_0);$$

5) *существуют непрерывные на* S *пределы*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^+}} \frac{\partial u_0(x)}{\partial \mathcal{N}_x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathcal{N}_{x_0}}\right)^+, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^-}} \frac{\partial u_0(x)}{\partial \mathcal{N}_x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathcal{N}_{x_0}}\right)^-,$$

причем

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathcal{N}_{x_0}}\right)^+ - \left(\frac{\partial u_0}{\partial \mathcal{N}_{x_0}}\right)^- = 0.$$

Гармонический потенциал простого слоя (1.248): 1) *непрерывен во всем пространстве* E_n; 2) *при* $|x| \to \infty$ *его порядок совпадает с порядком элементарного решения*; 3) *его производная по внешней к* S *нормали имеет смысл и при* $x = x_0 \in S$; 4) *существуют пределы*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^+}} \frac{\partial u_1(x)}{\partial \mathcal{N}_x} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \mathcal{N}_{x_0}}\right)^+, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^-}} \frac{\partial u_1(x)}{\partial \mathcal{N}_x} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \mathcal{N}_{x_0}}\right)^-;$$

5) *выражения* $\dfrac{\partial u_1}{\partial \mathcal{N}_{x_0}}$, $\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \mathcal{N}_{x_0}}\right)^+$, $\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \mathcal{N}_{x_0}}\right)^-$ *непрерывны на* S *и связаны между собой равенствами*

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial \mathcal{N}_{x_0}}\right)^+ - \frac{\partial u_1}{\partial \mathcal{N}_{x_0}} = \frac{1}{2}\mu_1(x_0), \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial \mathcal{N}_{x_0}}\right)^- - \frac{\partial u_1}{\partial \mathcal{N}_{x_0}} = -\frac{1}{2}\mu_1(x_0).$$

Перечисленные свойства гармонических потенциалов двойного и простого слоев позволяют редуцировать задачи Дирихле и Неймана в случае уравнения Лапласа к экви-

валентным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, причем первая из этих задач разрешима всегда, а вторая — лишь при соблюдении условия (1.195).

При принятых выше предположениях аналогичными свойствами обладают и обобщенные потенциалы двойного и простого слоев, а это позволяет редуцировать задачу Дирихле и задачу с наклонной производной (1.224) (при условии, что направление l ни в одной точке границы S не выходит в касательную к S) к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Эта процедура, конечно, не годится, если не известно существование элементарного решения. В этом случае в формулах (1.247) и (1.248), так же как и в формуле (1.230), вместо $\Omega(x, y)$ можно писать функцию Леви (1.226), что позволяет редуцировать указанные задачи к уравнению Фредгольма второго рода и тем самым распространить альтернативы Фредгольма на исследуемые задачи.

В случае, когда направление l, по которому в условии (1.224) берется производная, хотя бы в одной точке границы S выходит в касательную к S, задача с наклонной производной для эллиптических уравнений второго порядка (в том числе и для уравнения Лапласа) редуцируется к сингулярному интегральному уравнению, в котором интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Описанный в этом пункте метод исследования линейных краевых задач естественно называть *методом потенциала*.

6°. Метод интегральных уравнений. В пунктах 1°, 4° § 4, а также в пунктах 2°, 3°, 5° § 5 была указана роль, которую играют линейные интегральные уравнения при построении решений дифференциальных уравнений. Среди них простейший класс составляют *интегральные уравнения Вольтерра второго рода*, которые в случае одного независимого переменного могут быть записаны в виде

$$\varphi(x)+\int_{x_0}^{x} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt=f(x), \qquad x_0\leqslant x\leqslant x_1, \tag{1.249}$$

причем функции $K(x, t)$ (ядро уравнения) и $f(x)$ (правая часть уравнения) считаются известными.

Когда $K(x, t) \in C^{0,0}\left(x_0 \leqslant {x \atop t} \leqslant x_1\right)$ и $f(x) \in C^{0,0}$ $(x_0 \leqslant \leqslant x \leqslant x_1)$, уравнение (1.249) всегда имеет, и притом единственное, решение $\varphi(x) \in C^{0,0}$ $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$, причем

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} R(x, t) f(t)\, dt,$$

где функция $R(x, t) \in C^{0,0}\left(x_0 \leqslant {t \atop x} \leqslant x_1\right)$, именуемая *резольвентой ядра* $K(x, t)$, строится методом последовательных приближений Пикара.

Уравнения вида

$$\int_{x_0}^{x} K(x, t)\varphi(t)\, dt = f(x), \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad (1.250)$$

называются *интегральными уравнениями Вольтерра первого рода*. Если $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$, $\frac{df}{dx}$ непрерывны и $K(x, x)$ нигде в нуль не обращается, то уравнение (1.250) после дифференцирования по x переходит в *интегральное уравнение Вольтерра второго рода*

$$\varphi(x) + \int_{x_0}^{x} K^*(x, t)\varphi(t)\, dt = f^*(x),$$

где

$$K^*(x, t) = \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}, \qquad f^*(x) = \frac{1}{K(x, x)} f'(x),$$

и оно исследуется легко.

Когда указанные выше условия не соблюдены, при изучении вопроса разрешимости уравнения (1.250) возникают трудности. В некоторых важных частных случаях с ядрами со слабой особенностью уравнение (1.250) изучено. Так, например, *уравнение Абеля*

$$\int_{0}^{x} \frac{\varphi(t)\, dt}{(x-t)^\alpha} = f(x), \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad x > 0, \qquad (1.251)$$

когда $f(x) \in C^{1,0}$, имеет решение

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right],$$

которое может быть записано еще в виде

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\,\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{1.252}$$

Все сказанное выше в отношении уравнения (1.249) распространяется и на случай системы вида (1.249), в которой $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$, $f = (f_1, \ldots, f_N)$ — векторы и $K(x, t)$ — квадратная матрица порядка N.

Когда в левой части уравнения (1.249) присутствуют слагаемые с кратными (повторными) интегралами (см. уравнение (1.160)) с переменными верхними пределами, то, пользуясь резольвентой $R(x, t)$ ядра $K(x, t)$, изучение такого уравнения можно редуцировать к уравнению (1.249) с простым (однократным) интегралом.

В дальнейшем через D будем обозначать либо ограниченную замкнутую область пространства E_n, либо ограниченную замкнутую или разомкнутую $(n-1)$-мерную ляпуновскую поверхность в E_n. В предположении, что $K(x, y) \in C^{0,0}(D \times D)$, $f(x) \in C^{0,0}(D)$, уравнение вида

$$\varphi(x) + \int_D K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{1.253}$$

называется *уравнением Фредгольма второго рода*. В предположении, что $K(x, y)$ является $N \times N$-матрицей, φ и f — векторами с N компонентами, (1.253) представляет собой *систему уравнений Фредгольма второго рода*.

В теории уравнений Фредгольма второго рода центральное место занимают т р и т е о р е м ы Ф р е д г о л ь м а.

П е р в а я т е о р е м а Ф р е д г о л ь м а. *Соответствующее* (1.253) *однородное уравнение*

$$\varphi(x) + \int_D K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{1.254}$$

и союзное с ним уравнение

$$\psi(x)+\int_D \psi(t) K(t, x)\,dt=0 \tag{1.255}$$

имеют одинаковое конечное число l линейно независимых решений.

Вторая теорема Фредгольма. *Если однородное уравнение* (1.254) *не имеет отличных от нуля решений, то неоднородное уравнение* (1.253) *разрешимо при любой правой части $f(x)$ и его решение имеет вид*

$$\varphi(x)=f(x)+\int_D R(x, t) f(t)\,dt, \tag{1.256}$$

где $R(x, t)$ называется ***резольвентой Фредгольма ядра*** *$K(x, y)$, причем $R(x, t) \in C^{0,0}(D \times D)$ и, стало быть, $\varphi(x) \in C^{0,0}(D)$.*

Условие этой теоремы всегда выполнено, если мера D достаточно мала.

Третья теорема Фредгольма. *Неоднородное уравнение* (1.253) *разрешимо тогда и только тогда, когда соблюдены условия*

$$\int_D f(x) \cdot \psi^{(k)}(x)\,dx=0, \qquad k=1, \ldots, l, \tag{1.257}$$

где $\{\psi^{(k)}\}$ — все l линейно независимых решений союзного уравнения (1.255).

При соблюдении условий (1.257) общее решение уравнения (1.253) можно представить в виде

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{l} c_k \varphi^{(k)}(x)+\varphi^{(0)}(x),$$

где $\{\varphi^{(k)}(x)\}$ — все линейно независимые решения однородного уравнения (1.254), $\{c_k\}$ — произвольные действительные постоянные, а $\varphi^{(0)}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (1.253). Решение $\varphi^{(0)}(x)$ может быть представлено в виде (1.256) с *обобщенной резольвентой Фредгольма* $R(x, t)$ ядра $K(x, t)$.

Теоремы Фредгольма остаются в силе и в том случае, когда $f(x)$ непрерывна в $D \cup \partial D$ всюду, кроме, быть может, конечного числа изолированных точек, оставаясь суммируемой по D, а ядро $K(x, t)$ имеет вид

$$K(x, t) = |x - t|^{-\alpha} H(x, t), \qquad 0 < \alpha = \text{const} < m,$$

где $|x - t|$ — расстояние между точками $x, t \in D$, число m — размерность области D интегрирования, а матрица $H(x, t) \in C^{0,0}(D \cup \partial D)$.

В приложениях важное значение имеют интегральные уравнения вида

$$\alpha(x)\varphi(x) + \int_S K(x, t)\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad x \in S; \qquad (1.258)$$

$f = (f_1, \ldots, f_N)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ — соответственно заданный и искомый векторы, S — ограниченная замкнутая или разомкнутая $(n-1)$-мерная поверхность Ляпунова в E_n, $\alpha(x)$ и $K(x, t)$ — заданные на S квадратные матрицы порядка N, причем при $|x - t| \to 0$ матрица $K(x, t)$ имеет особенность вида $|x - t|^{1-n}$, но интеграл в левой части (1.258) существует в смысле главного значения по Коши. Такие интегральные уравнения принято называть *сингулярными*.

Хорошо изучен класс *одномерных сингулярных интегральных уравнений* вида

$$T\varphi \equiv \alpha(t_0)\varphi(t_0) + \beta(t_0)\int_S \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} + \int_S K(t, t_0)\varphi(t)\,ds_t = f(t_0),$$
$$t_0 \in S, \qquad (1.259)$$

где S — замкнутая кривая Ляпунова на плоскости комплексного переменного z, заданные на S (вообще говоря, комплексные) $N \times N$-матрицы $\alpha(t_0)$, $\beta(t_0)$, $K(t, t_0)$ и N-мерный вектор $f(t_0)$ удовлетворяют условию Гёльдера, а первый несобственный интеграл в левой части (1.259) понимается *в смысле главного значения по Коши*.

В дальнейшем тот факт, что некоторое заданное на S выражение ω удовлетворяет условию Гёльдера, будем обозначать так: $\omega \in \mathrm{H}$.

В предположении, что всюду на S

$$\det(\alpha + i\pi\beta) \neq 0, \qquad \det(\alpha - i\pi\beta) \neq 0, \qquad (1.260)$$

справедливы утверждения, именуемые **теоремами Нетера** (см. Н. И. Мусхелишвили [1] и Н. П. Векуа [1]), Первая теорема Нетера. *Числа l и l' линейно независимых решений соответствующего* (1.259) *однородного уравнения*

$$T\varphi = 0 \tag{1.261}$$

и союзного с ним однородного уравнения

$$T^*\psi = \psi(t_0)\,\alpha(t_0) - \int\limits_S \frac{\psi(t)\,\beta(t)}{t - t_0}\,dt + \int\limits_S \psi(t)\,K(t_0, t)\,dt = 0 \tag{1.262}$$

оба конечны.

Вторая теорема Нетера. *Неоднородное уравнение* (1.259) *разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_S g\psi^{(k)}\,dt = 0, \qquad k = 1, \ldots, l', \tag{1.263}$$

где $\{\psi^{(k)}\}$ — *все линейно независимые решения уравнения* (1.262). *Причем при соблюдении условий* (1.263) *общее решение уравнения* (1.259) *имеет вид* $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{l} c_k\varphi^{(k)} + \varphi^{(0)}$, *где* $\{\varphi^{(k)}(t)\} \in H$ — *линейно независимые решения однородного уравнения* (1.261), $\{c_k\}$ — *произвольные постоянные, а* $\varphi^{(0)}(t) \in H$ — *частное решение уравнения* (1.259).

Третья теорема Нетера. *Число* $\varkappa = l - l'$ — *так называемый индекс интегрального уравнения* (1.259) *или оператора* T — *определяется формулой*

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det(\alpha - i\pi\beta)}{\det(\alpha + i\pi\beta)}\right]_S, \tag{M}$$

где $[\ \ ]_S$ *означает приращение функции, стоящей в квадратных скобках при однократном обходе контура* S *в положительном направлении* (*т. е. в направлении, оставляющем конечную область, ограниченную кривой* S, *слева*).

Условия (1.260) *нормальной разрешимости* системы (1.259) и формула (M) для индекса были установлены в 1942 г. Н. И. Мусхелишвили [1].

Теоремы Нетера остаются в силе и тогда, когда в выражении $T\varphi$ матрицы $\alpha(t)$, $\beta(t)$ непрерывны и удовлетворяют условиям (1.260), несобственный интеграл $\int\limits_S \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0}$ понимается в *смысле Коши—Лебега*, а оператор

$$\int\limits_S K(t, t_0)\,\varphi(t)\,dt$$

вполне непрерывен в гильбертовом пространстве L_2 функций, определенных на S (см. С. Г. Михлин [3], Б. В. Хведелидзе [3]).

Когда S представляет собой разомкнутую кривую Ляпунова (или совокупность таких кривых), уравнение (1.252) также изучено. Некоторые уравнения такого вида, встречающиеся в последующих главах, будут изучены в соответствующих местах.

В теории одномерных сингулярных интегральных уравнений важной является возможность их редукции к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, т. е. их *регуляризация*. В случае многомерных сингулярных интегральных уравнений (1.258) такая возможность далеко не всегда имеется. В этом плане стоит привести одну теорему, принадлежащую Жиро [2]: *если ядро сингулярного интегрального уравнения* (1.258) *при* $a(x)\equiv 1$ *таково, что можно построить функцию* $H(x, t, \mu)$ *с такой же сингулярностью, как у* $K(x, t)$, *со свойствами*: а) *при* $|x-t|\to 0$ *имеют место равенства*

$$K(x, t)-H(x, t, \mu)+\mu\int_S H(x, \tau, \mu)K(\tau, t)\,ds_\tau = O(|x-t|^{\lambda+1-n}),$$

$$K(x, t)-H(x, t, \mu)+\mu\int_S H(\tau, t, \mu)K(x, \tau)\,ds_\tau = O(|x-t|^{\lambda+1-n})$$

для любого действительного или комплексного значения μ, б) *для любой функции* $\zeta(x)\in H$ *имеют место формулы перестановки сингулярных интегралов*

$$\int_S H(x, \tau, \mu)\,ds_\tau\int_S K(\tau, t)\zeta(t)\,ds_t = -\Phi(x, \mu)\zeta(x)+\int_S \zeta(t)\,ds_t\int_S H(x, \tau, \mu)K(t, \tau)\,ds_\tau,$$

$$\int_S K(x, \tau)\,ds_\tau\int_S H(\tau, t, \mu)\zeta(t)\,ds_t = -\Phi(x, \mu)\zeta(x)+\int_S \zeta(t)\,ds_t\int_S K(x, \tau)H(\tau, t, \mu)\,ds_\tau,$$

то при любом μ, *для которого* $1+\mu^2\Phi(x, \mu)\neq 0$ *всюду на* S, *уравнение* (1.258) *в рассматриваемом случае можно редуцировать к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, и, следовательно, для него имеют место все три теоремы Фредгольма.*

7°. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. Пусть E_φ и E_f — *линейные нормированные пространства*, T — *линейный оператор*, отображающий E_φ в E_f:

$$T\varphi=f, \tag{1.264}$$

а $L_f=TE_\varphi\subseteq E_f$ — образ E_φ при отображении (1.264).

Если соответствие (1.264) между E_φ и L_f взаимно однозначно и обратное отображение $\varphi=\tilde{T}f$ также линейно, то E_φ и L_f называются *линейно гомеоморфными*.

Обозначим через E_v и E_w пространства, сопряженные с E_φ и E_f соответственно. Пусть wf — линейный функционал, определенный в E_f. Оператор T и функционал $w\in E_w$ порождают функционал $v\in E_v$ по формуле $wf=wT\varphi=v\varphi$, определенный в E_φ. Формула

$$v=wT \tag{1.265}$$

устанавливает линейное отображение E_w на $L_v=E_wT\subseteq E_v$. Это отображение называется *сопряженным с отображением* (1.264).

Пусть наряду с отображением (1.264) имеется отображение $\varphi'=T'f$ пространства E_f в E_φ, причем эти два отображения применяются последовательно:

$$\varphi'=T'f=T'(T\varphi)=T'T(\varphi),$$

$$f'=T\varphi'=T(T'f)=TT'f.$$

Тем самым порождены отображения $T'T$ и TT' каждого из пространств E_φ и E_f самого в себя. Если $T'T=I$ — тождественный оператор, отображающий E_φ самого на себя, то говорят, что T' является *левым обратным* T, а T — *правым обратным* T'. Точно так же, когда $TT'=I$ — тождественный оператор, отображающий E_f самого на себя, T' называется *правым обратным* T, а T — *левым* *обратным* T'. Если оператор T имеет и правый обратный и левый обратный, оператор T называется *обратимым*. Оператор T обратим тогда и только тогда, когда отображение (1.264) представляет собой гомеоморфизм между E_φ и E_f.

Когда пространства E_φ и E_f тождественны, $E_\varphi=E_f=E$, с помощью итерирования можно ввести натуральную степень оператора T. При наличии полноты E, если норма $\|T\|$ оператора T меньше единицы, ряд

$$I+\sum_{k=1}^{\infty} T^k$$

имеет смысл и его сумма T_0 дает *обращение* отображения

$$\varphi-T\varphi=f.$$

Обозначим через F_φ замкнутое множество элементов $\varphi\in E_\varphi$, для которых $T\varphi=\theta$, где θ — нулевой элемент E_f. Каждый элемент $f\in L_f$ имеет своим прообразом класс по модулю F_φ, т. е. множество таких элементов $\varphi'\in E_\varphi$, для которых $(\varphi'-\varphi)\in F_\varphi$. Поэтому существует линейное взаимно однозначное отображение

$$f=\sigma\xi \tag{1.266}$$

фактор-пространства $E_\xi=E_\varphi/F_\varphi$ элементов ξ с нормой

$$\|\xi\|=\inf_{\varphi_0\in F_\varphi}\|\varphi-\varphi_0\|=\inf_{\varphi\in\xi}\|\varphi\|$$

на L_f, причем $\|T\|=\|\sigma\|$. Если обратное к (1.266) отображение линейно, то говорят, что *отображение* (1.264) *непрерывно обратимо*. Следует заметить, что непрерывная обратимость отображения (1.264) не означает, что оператор T имеет обратный в обычном смысле.

Непрерывная обратимость отображения (1.264) пространства E_φ на L_f равносильна тому, что каждое открытое в E_φ множество имеет своим образом множество, открытое в L_f.

Для взаимно однозначной и непрерывной обратимости отображения (1.264) необходимо и достаточно, чтобы $\inf\limits_{\|\varphi\|=1} T\varphi>0$.

В теории линейных уравнений в линейных нормированных пространствах основными считаются три теоремы Хаусдорфа [1].

Первая теорема Хаусдорфа. *Образ L_f банахова пространства E_φ при линейном отображении* (1.264) *является либо полным, либо множеством первой категории в себе в соответствии с тем, непрерывно обратимо это отображение или нет.*

Очевидно, что для разрешимости уравнения (1.264) относительно φ необходимо, чтобы $w_0 f=0$ для всех функционалов w_0, являющихся решениями уравнения $w_0 T=\theta$, где θ — нулевой элемент пространства E_v, а для разрешимости уравнения (1.265) относительно w необходимо, чтобы $v\varphi_0=0$ для всех φ_0, являющихся решениями уравнения $T\varphi_0=\theta$.

Уравнение (1.264) называется *нормально разрешимым*, если указанное выше необходимое условие его разрешимости является и достаточным. Аналогично определяется нормальная разрешимость уравнения (1.265).

Вторая теорема Хаусдорфа. *Уравнение* (1.264) *нормально разрешимо тогда и только тогда, когда множество $L_f=TE_\varphi$ замкнуто в пространстве E_f. Замкнутость множества $L_v=E_w T$ в пространстве E_v необходима для нормальной разрешимости уравнения* (1.265). *Когда сопряженное с E_v пространство совпадает с E_φ, это условие является и достаточным для нормальной разрешимости уравнения* (1.265).

Третья теорема Хаусдорфа. *Для нормальной разрешимости уравнения* (1.265) *необходимо и достаточно, чтобы отображение* (1.264) *было непрерывно обратимым.*

Важно отметить, что *если пространство E_φ банахово и L_f полно, то отображения* (1.264) *и* (1.265) *оба нормально разрешимы и непрерывно обратимы.*

Пусть оператор T имеет вид

$$T\varphi=\varphi+K\varphi, \tag{1.267}$$

где K — вполне непрерывный оператор. Если при этом пространства E_φ и E_f банаховы, то для уравнения

$$T\varphi=\varphi+K\varphi=f \tag{1.268}$$

имеют место все три теоремы Фредгольма, или, как еще принято говорить, уравнение (1.268) и оператор T *фредгольмовы*.

С. М. Никольскому [1] принадлежит важная теорема: *в банаховом пространстве оператор T фредгольмов тогда и только тогда, когда имеет место представление $T=B+K$, где оператор B взаимно однозначно и непрерывно обратим, а K вполне непрерывен.*

Рассмотрим теперь уравнение (1.264) в гильбертовом пространстве H в предположении, что T — вполне непрерывный оператор, переводящий H в себя.

Оператор T называется *конечномерным*, если его можно представить в виде

$$T\varphi=\sum_{i=1}^{p}(\varphi\cdot u_i)\,v_i,\quad u_i,\ v_i\in H,$$

где скобки означают скалярное произведение в H.

Наряду с уравнением (1.264) рассмотрим два уравнения:

$$T^*w=0 \tag{1.269}$$

и

$$\psi-\lambda TT^*\psi=0, \tag{1.270}$$

где T^* — оператор, сопряженный с T.

Уравнение (1.264) разрешимо тогда и только тогда, когда $(f\cdot w)=0$ для любого решения w уравнения (1.269) и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\,|d_k|^2$, где $\{\lambda_k\}$ — собственные числа уравнения (1.270), а $\{d_k\}$ — коэффициенты Фурье элемента f относительно ортонормированной системы $\{\psi_k\}$ собственных функций уравнения (1.270). Кроме того, справедливы утверждения: 1) *уравнение* (1.264) *нормально разрешимо тогда и только тогда, когда оператор T конечномерен*, и 2) *для уравнения* (1.264) *не могут иметь место теоремы Нетера, если оператор T вполне непрерывен.*

Когда оператор T имеет вид

$$T\varphi=\int\limits_D K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где D — ограниченная область пространства E_n, а функции $K(x, t) \in L_2(D \times D)$, $f(x)$, $\varphi(x) \in L_2(D)$, уравнение (1.264) имеет вид

$$\int_D K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in D, \tag{1.271}$$

и называется *интегральным уравнением Фредгольма первого рода*. Для нормальной разрешимости уравнения (1.271) по Хаусдорфу необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(x, t)$ имело вид

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{q} P_i(x) Q_i(t), \quad i = 1, \ldots, q,$$

т. е. чтобы оно было вырождено (см. Нгуен Тхыа Хоп [1]).

8°. Условная классификация задач для уравнений в частных производных. Широкий класс линейных задач для линейных уравнений в частных производных удается редуцировать к эквивалентным операторным уравнениям вида (1.264) в линейных нормированных пространствах. Чаще всего эти уравнения являются интегральными уравнениями вида

$$T\varphi = \alpha(x) \varphi(x) + \int_D K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in D. \tag{1.272}$$

Когда полученное для рассматриваемой задачи уравнение (1.264) нормально разрешимо по Хаусдорфу, будем говорить, что *сама задача является нормально разрешимой по Хаусдорфу*.

Нормально разрешимую по Хаусдорфу задачу будем называть *нетеровой*, если пространства решений соответствующего (1.264) однородного уравнения

$$T\varphi = \theta \tag{1.273}$$

и сопряженного с ним однородного уравнения

$$T^* w = \theta, \tag{1.274}$$

где через T^* обозначен оператор в правой части отображения (1.265), сопряженного с отображением (1.264), оба конечномерны. Если же размерности этих пространств равны, то нетерову задачу будем называть *фредгольмовой*.

В теории интегральных уравнений уравнения (1.273) и (1.274) принято называть *союзными*.

Такая условная классификация задач для уравнений в частных производных вполне оправдана, когда эквивалентное рассматриваемой задаче уравнение (1.272) представляет собой уравнение Вольтерра второго рода, уравнение Фредгольма второго рода или сингулярное интегральное уравнение вида (1.259) при соблюдении условий (1.260), обеспечивающих справедливость теорем Нетера.

Однако, как мы увидим ниже, задачи для уравнений в частных производных не исчерпываются фредгольмовыми и нетеровыми задачами. Нормально разрешимые по Хаусдорфу задачи мы не в праве объявить некорректно (плохо) поставленными лишь потому, что трудно проверить условия их разрешимости. Едва ли можно согласиться с утверждением о том, что условия разрешимости фредгольмовых и нетеровых задач проверяются легче.

Когда однозначная разрешимость рассматриваемой задачи не имеет места, важнейшим является выяснение вопроса о том, каковы степени ее недоопределенности и переопределенности, и установить, возможно ли указать нужные ограничения на данные или следует ли ввести дополнительные данные с тем, чтобы полученная в окончательной постановке задача была однозначно разрешимой.

Такие ситуации могут возникать даже при изучении, например: 1) *задачи Дирихле для эллиптических систем*, 2) *задачи с наклонной призводной для эллиптических уравнений, в частности для уравнения Лапласа, когда направление наклона, по которому берется производная, может выйти в касательную к границе области определения решения*, 3) *характеристической задачи для гиперболических систем*, 4) *разных задач для уравнений, тип или порядок которых меняются в области их задания или на границе этой области.*

Ниже делается попытка исследовать в основном именно такие задачи. При этом порой становится необходимым видоизменить и дополнить описанные выше методы исследования уравнений в частных производных. Иногда мы будем вынуждены вводить в рассмотрение и обобщенные решения, подобно тому как это делается при обобщении понятия решений классических задач.

§ 6. Обобщенные решения классических задач

1°. О степени гладкости решений вариационных задач и обобщение понятия производной. В рассмотренной в пункте 1° § 3 первой вариационной задаче (1.68), (1.69) функционал (интеграл Дирихле), об экстремуме которого там шла речь, содержит производные только первого порядка искомого решения, в то время как соответствующее уравнение Эйлера, представляющее собой уравнение Лапласа (1.67), содержит частные производные второго порядка. Поскольку при изучении вариационных задач вовсе нет необходимости привлекать уравнение Эйлера, естественно, чтобы в определении решения вариационной задачи фигурировали лишь его производные первого порядка. А то, что решение на самом деле обладает более высокой степенью гладкости, хотя этот факт, может быть, и является присущим природе рассматриваемой вариационной задачи, но он все же обнаруживается в результате дополнительных исследований.

В том же пункте 1° § 3 было показано, что допустимая функция $u(x) \in L_2(G)$ может быть минимизирующей для интеграла Дирихле (1.68) лишь тогда, когда

$$D(u,\ h) = \int_G \nabla u \cdot \nabla h \, dx = 0. \tag{1.275}$$

Но это равенство равносильно равенству

$$\int_G h \Delta u \, dx = 0$$

при условии, что $u \in C^{2,0}(D)$. Следовательно, требование, чтобы минимизирующая функция $u(x)$ удовлетворяла уравнению Лапласа, можно заменить требованием, чтобы равенство (1.275) имело место для любой достаточно гладкой функции $h(x)$, равной нулю в пограничной полоске области G. Это обстоятельство наводит на мысль о том, что можно обобщить не только понятие оператора Лапласа, но и вообще понятие производной применительно особенно к функциям, дифференцируемость которых, во всяком случае априори, не известна.

Ниже буква D будет обозначать область пространства E_n переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ локально суммируемы в области $D \subset E_n$ (т. е. эти функции суммируемы в каждой подобласти δ, $\delta \cup \partial\delta \subset D$). Говорят, что функция $\varphi(x)$ *финитна*, если она равна нулю вне некоторого компакта $K \subset D$. Компакт K, на котором функция $\varphi(x) \neq 0$, называется ее *носителем*.

Функция $v(x)$ называется *обобщенной производной порядка* $m = \sum_{j=1}^{n} m_j$ функции $u(x)$, если

$$\int_D u D^m \varphi \, dx = (-1)^m \int_D v\varphi \, dx, \qquad D^m \equiv \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}$$

для любой бесконечно дифференцируемой, финитной в D функции $\varphi(x)$. Настоящая производная $D^m u$ функции $u(x)$, когда она существует и суммируема, очевидно совпадает с ее обобщенной производной порядка m, ибо, как в этом легко убедиться интегрированием по частям, для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции $\varphi(x)$ с компактным носителем в D имеет место равенство

$$\int_D u D^m \varphi \, dx = (-1)^m \int_D \varphi D^m u \, dx.$$

Ряд элементарных свойств обычных (классических) производных переносится на обобщенные производные, но не все. Так, например, из существования обобщенной производной порядка m функции $u(x)$, вообще, не следует существование обобщенных производных порядка ниже m этой же функции.

В предположении локальной суммируемости $u(x)$ и $v(x)$ со степенью p справедливо утверждение: *для того чтобы $u(x)$ имела обобщенную производную порядка m, совпадающую с $v(x)$, необходимо и достаточно существование на каждом компакте $K \subset D$ такой последовательности $\{\varphi_l(x)\}$, $l=1, 2, \ldots$, бесконечно дифференцируемых функций, для которой*

$$\lim_{l\to\infty} \int_K |\varphi_l - u|^p \, dx = 0, \qquad \lim_{l\to\infty} \int_K |D^m\varphi_l - v|^p \, dx = 0.$$

Поскольку функция $u(x)$ локально суммируема, мы вправе менять ее значения на множестве меры нуль из D, но при помощи такой процедуры едва ли можно вообще ожидать улучшения гладкости $u(x)$. Однако при наличии обобщенных производных у функции $u(x)$ такая возможность все же имеется.

2°. Пространства W_2^1 и $\mathring{W}_2^1$. В предположении, что область D ограничена, обозначим через W_2^1 множество всех функций пространства $L_2(D)$, обладающих обобщенными производными первого порядка, принадлежащими $L_2(D)$, причем скалярное произведение любой пары функций $u, v \in W_2^1$ определим по формуле

$$(u \cdot v) = \int\limits_D (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx. \tag{1.276}$$

Если норму $\|u\|_{W_2^1}$ элемента $u \in W_2^1$ определим как неотрицательное число:

$$\|u\|_{W_2^1} = \left(\int\limits_D ((\nabla u)^2 + u^2)\, dx \right)^{1/2}, \tag{1.277}$$

то множество W_2^1 становится *сепарабельным пространством Банаха.*

Замыкание $\mathring{W}_2^1$ множества всех бесконечно дифференцируемых финитных функций с компактным носителем в D по норме (1.277) пространства W_2^1 является собственным подпространством W_2^1.

Скалярное произведение в $\mathring{W}_2^1$ *вместо* (1.276) *можно задать в виде*

$$(u \cdot v)_{\mathring{W}_2^1} = \int\limits_D \nabla u \cdot \nabla v\, dx, \tag{1.278}$$

причем пространство функций, полученных замыканием множества всех бесконечно дифференцируемых финитных функций с компактным носителем в D по норме

$$\|u\| = \left(\int\limits_D (\nabla u)^2 dx \right)^{1/2},$$

порожденной скалярным произведением (1.278), *совпадает с пространством* $\mathring{W}_2^1$.

Справедливость этого факта вытекает из нетрудно доказываемого неравенства Пуанкаре—Стеклова

$$\int\limits_D u^2 dx \leqslant c^2 \int\limits_D (\nabla u)^2 dx, \tag{1.279}$$

где c — постоянная, зависящая только от области D.

Пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ обладает тем замечательным свойством, что *любое ограниченное множество из* $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ *компактно в* L_2.

Только что сформулированные два утверждения являются в историческом плане первыми теоремами вложения функциональных пространств. Они оказываются весьма полезными при доказательстве существования, единственности и устойчивости решений в обобщенной постановке известных классических задач для уравнений в частных производных.

3°. Обобщенное решение задачи Дирихле для равномерно эллиптического уравнения второго порядка. Пусть, как и в предыдущих пунктах, D — ограниченная область пространства E_n, лежащая в области задания равномерно эллиптического линейного уравнения второго порядка, записанного в виде

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} e^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f, \qquad x \in D. \tag{1.280}$$

Как уже было отмечено в пункте 1° § 5, задача Дирихле в классической (обычной) постановке заключается в требовании определить регулярное в области D решение $u(x)$ уравнения (1.280), непрерывное в $D \cup S$ и удовлетворяющее краевому условию

$$u(x) = \varphi(x), \qquad x \in S, \tag{1.281}$$

где S — граничная компонента D размерности $n-1$.

В настоящем пункте понятие решения задачи Дирихле будет обобщено на случай, когда краевое условие (1.281) однородно, т. е.

$$u(x) = 0, \qquad x \in S. \tag{1.282}$$

В предположении, что A^{ij}, e^i, C — ограниченные измеримые функции и $f \in L_2(D)$, под *обобщенным решением* в пространстве W_2^1 задачи (1.280), (1.282) будем понимать функцию $u(x) \in \mathring{W}_2^1$, для которой имеет место тождество

$$\int_D \left(- \sum_{i,j=1}^{n} A^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} e^i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + Cuv - fv \right) dx = 0 \tag{1.283}$$

при любой функции $v \in \mathring{W}_2^1$.

Когда обобщенное решение $u(x) \in C^{2,0}(D)$ и функции A^{ij} достаточно гладки, после интегрирования по частям из (1.283) получаем

$$\int_D (L(u) - f)\, v\, dx = 0.$$

Отсюда, требуя непрерывность функций C, f, e^i, $\partial A^{ij}/\partial x_j$, заключаем, что *обобщенное решение $u(x)$ задачи* (1.280), (1.282) *в принятых предположениях является классическим решением.*

Будем предполагать, что существует сопряженный с $L(u)$ оператор L^*, определенный по формуле (1.240). *Обобщенным решением* $w(x)$ из W_2^1 в области D задачи Дирихле для сопряженного однородного уравнения (1.244) с однородным краевым условием

$$w(x) = 0, \qquad x \in S, \tag{1.284}$$

будем называть функцию $w \in \mathring{W}_2^1$, для которой

$$\int_D \left(- \sum_{i,j=1}^{n} A^{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(ew)\, v + Cwv \right) dx = 0 \tag{1.285}$$

при любой функции $v \in \mathring{W}_2^1$.

Когда обобщенное решение $w(x)$ задачи (1.244), (1.284) имеет непрерывные производные второго порядка, как и выше, исходя из тождества (1.285) при C, f, e^i, $\dfrac{\partial A^{ij}}{\partial x_j} \in C^{0,0}(D \cup S)$, приходим к заключению, что это решение является классическим.

В пункте 5° § 5 было отмечено, что изучение задачи Дирихле (1.280), (1.281) в классической постановке можно свести к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода и, стало быть, об условной или безусловной разрешимости этой задачи можно судить на основании теорем Фредгольма, сформулированных в пункте 6° § 5.

Задача (1.244), (1.284) называется *союзной* с (1.243), (1.282) однородной задачей.

В теории задачи Дирихле (1.280), (1.281) как в обобщенной, так и в классической постановке доказывается справедливость следующих утверждений.

а) *Соответствующая* (1.280), (1.281) *однородная задача* (1.243), (1.282) *и союзная с ней задача* (1.244), (1.284) *имеют одинаковое конечное число* l *линейно независимых решений.*

б) *Для разрешимости задачи* (1.280), (1.282) *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\int\limits_D f w_k dx = 0, \qquad k = 1, \ldots, l,$$

где $\{w_k\}$ *— все линейно независимые решения союзной однородной задачи* (1.244), (1.284).

Из последнего утверждения непосредственно следует, что *для безусловной разрешимости задачи* (1.280), (1.281) *необходимо и достаточно, чтобы у соответствующей однородной задачи* (1.243), (1.282) *нетривиальные решения отсутствовали.*

Следовательно, по принятой в пункте 8° § 5 условной классификации задач для уравнений в частных производных, *задача Дирихле* (1.280), (1.281) *фредгольмова.*

Приведенное в настоящем пункте определение обобщенного решения задачи Дирихле (1.280), (1.282) от коэффициентов уравнения (1.280) требует, чтобы они были ограничены и измеримы, а структура границы S области D, в которой ищется решение, может быть самая общая. Однако судить о том, в какой мере будет удовлетворено краевое условие (1.282) без требования определенной степени гладкости S, довольно трудно.

Пусть σ — достаточно гладкий участок S. Без ограничения общности будем считать, что σ представляет собой ограниченную односвязную область плоскости $x_n = 0$, причем цилиндр C высоты h с образующей, параллельной оси x_n, и основанием σ принадлежит D.

Если $u(x)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция с компактным носителем в D, то из очевидного тождества

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \int_0^{x_n} \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)}{\partial t}\,dt, \qquad 0 \leqslant x_n \leqslant h,$$

на основании неравенства Шварца

$$\left(\int_0^{x_n} \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)}{\partial t}\,dt\right)^2 \leqslant x_n \int_0^{x_n} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dt$$

приходим к оценке

$$\int_\sigma [u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)]^2\,d\sigma \leqslant x_n \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 dx. \qquad (1.286)$$

Оценка (1.286) остается в силе и для функций из $\mathring{W}_2^1$.

В силу (1.286) заключаем, что при принятых предположениях обобщенное решение задачи (1.280), (1.282), когда оно существует, вблизи участка σ границы S области D характеризуется равенством

$$\lim_{x_n \to 0} \int_\sigma [u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)]^2\,d\sigma = 0.$$

Редукция неоднородной задачи Дирихле (1.280), (1.281) к случаю, когда краевое условие является однородным (1.282), зависит от характера «регулярности» границы области D.

4°. **Обобщенное решение неоднородной задачи Дирихле (1.280), (1.281).** Будем опять считать, что область D ограничена. Заданную на S функцию φ продолжим непрерывно во внутрь D всюду (такое продолжение очевидно, не является единственным) и продолженную функцию обозначим опять через $\varphi(x)$. Пусть $\{D_l\}$, $l=1, 2, \ldots$ — последовательность лежащих строго в D областей со следующими свойствами.

1) $D_l \subset D_{l+1}$, 2) $\lim\limits_{l\to\infty} D_l = D$ в том смысле, что любая подобласть d, $d \cup \partial d \subset D$, лежит внутри всех D_l начи-

ная с определенного номера l_0, 3) в каждой области D_l существует решение $u_l(x)$ уравнения (1.280), совпадающая с $\varphi(x)$ на ∂D_l (существование функции $u_l(x)$ зависит, конечно, не только от структуры границы D_l, но и от уравнения (1.280)).

Предел $u(x)$ последовательности $\{u_l(x)\}$, если он определен в D, называется *обобщенным решением по Винеру* задачи (1.280), (1.281). Когда уравнение (1.280) совпадает с уравнением Лапласа, Винером было доказано, что функция $u(x)$ существует, является гармонической в D и она не зависит ни от способа подбора областей D_l, ни от вида продолжения φ с S во внутрь D (см. Винер [1]).

Точка $x^0 \in S$ называется *регулярной* для задачи (1.280), (1.281), если

$$\lim_{x \to x^0} u(x) = \varphi(x^0), \quad x \in D$$

при любой непрерывной функции φ. В противном случае точка x^0 называется *иррегулярной*. Лебег построил область D довольно простого вида, граница которой содержит точку, иррегулярную для гармонической в D функции.

С целью установления критерия иррегулярности точки $x^0 \in S$ в случае гармонических функций вводится заимствованное из электростатики понятие емкости. Пусть λ — положительное число меньше единицы, а d_n — множество точек x вне области D, удовлетворяющих условию $\lambda^n \leqslant |x - x^0| \leqslant \lambda^{n-1}$. *Емкостью* γ_n множества d_n называется суммарный электростатический заряд, который следует распределить на ∂d_n так, чтобы соответствующий электростатический потенциал равнялся бы единице на ∂d_n и нулю на бесконечности.

Доказывается, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda^n}$ является условием необходимым и достаточным для того, чтобы точка x^0 была иррегулярной.

Иррегулярная точка, как правило, является концом острия, входящего в состав границы S области D, и направленного во внутрь этой области.

Метод Винера доказательства существования решения задачи (1.281) для гармонических функций, распространяется на широкий класс однородных эллиптических уравнений (1.243), причем точка $x^0 \in S$, иррегулярная для гармонических функций, является иррегулярной и для этих уравнений (см., например, Е. М. Ландис [1]).

Когда известно решение $u_1(x)$ задачи (1.243), (1.281), то разность $u(x)-u_1(x)=u_2(x)$, где $u(x)$ — искомое решение задачи (1.280), (1.281), является решением задачи (1.280), (1.282) и тем самым задача (1.280), (1.281) редуцирована к задаче (1.280), (1.282).

Как уже было показано в пункте 6° § 5, для корректной постановки задачи Дирихле нет необходимости, чтобы краевые значения искомой гармонической функции представляли собой непрерывную функцию. Наряду с этим, учитывая то обстоятельство, что даже при непрерывности функции $\varphi(x)$, $x \in S$, обобщенное решение задачи (1.280), (1.281) в области D даже с достаточной гладкой границей S не обязано в каждой точке $x \in S$ совпадать с $\varphi(x)$, имеет смысл отказаться от непрерывности $\varphi(x)$ и дать краевому условию (1.281) новый содержательный смысл.

Будем считать границу S области D настолько гладкой, что множество точек

$$y_h = y - h\mathscr{N}_y,$$

где $\mathscr{N}_y$ — единичный вектор нормали к S в точке y, когда y пробегает S при любом положительном $h < h_0$, представляет собой достаточно гладкую границу ∂D_h подобласти $D_h \subset D$

Пусть заданная на S функция $\varphi(y)$ принадлежит пространству $L_2(S)$. Говорят, что обобщенное в области D решение $u(x)$ задачи (1.280), (1.281) на S в среднем принимает значения $\varphi(y)$, если при некоторой положительной непрерывной функции $P(y_h, h)$, $y_h \in \partial D_h$, $0 \leqslant h \leqslant h_0$, имеет место равенство

$$\lim_{h\to 0} \int_{\partial D_h} P(y_h, h)[u(y_h)-\varphi(y)]^2\, ds_{y_h} = 0.$$

Оказывается, и при такой постановке задача (1.280), (1.281) является фредгольмовой (Чимино [1], Миранда [1]).

5°. Обобщение понятия решения основной смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка. Пусть имеется гиперболическое уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) = f(x, t), \qquad (1.287)$$

где оператор

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A^{ij}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} e^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu \qquad (1.288)$$

равномерно эллиптичен во всех точках (x, t) области Ω пространства E_{n+1}, в которой заданы $A^{ij}(x, t)$, $e^i(x, t)$, $C(x, t)$, $f(x, t)$. Обозначим через D ограниченную область пространства E_n переменных $x_1, \ldots, x_n$, а через $Q = D \times \times (0 < t < T)$ — подобласть Ω, нижним основанием которой служит D, а боковой поверхностью — цилиндр S: $\partial D \times [0 \leqslant t \leqslant T]$.

Задача определения регулярного в области Q решения $u(x, t)$ уравнения (1.287), непрерывного в $D \cup S$ и удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \nu(x), \quad x \in D, \qquad u|_S = 0, \qquad (1.289)$$

в пункте 3° § 4 была названа основной смешанной задачей.

Замыкание по норме $W_2^1(Q)$ гладких в Q функций, обращающихся в нуль вблизи S, обозначим через $W_{20}^1(Q)$. *Обобщенным решением задачи* (1.287), (1.289) в пространстве $W_2^1(Q)$ будем называть функцию $u(x, t) \in W_{20}^1(Q)$, обращающуюся в $\tau(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяющую тождеству

$$\int_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} e^i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - Cuv\right) dx\, dt = \\ = \int_D \nu(x) v(x, 0)\, dx + \int_Q fv\, dx\, dt \qquad (1.290)$$

для любой функции $v(x, t) \in W_{20}^1(Q)$, равной нулю при $t = T$.

Чтобы имело место тождество (1.290), достаточно, чтобы A^{ij}, e^i, C были ограниченными измеримыми функциями, а $f \in L_2(Q)$, $\nu \in L_2(D)$. Кроме того, в определение обобщенного решения включается требование $\tau(x) \in \mathring{W}_2^1(D)$.

Приведенному выше определению обобщенного решения задачи (1.287), (1.289) исторически предшествовало другое определение.

Пусть $\{f_k(x, t)\}$, $k=1, 2, \ldots$, — ограниченная последовательность принадлежащих пространству $L_2(D)$ функций, пределом которой в $L_2(D)$ является функция $f(x, t)$ при любом фиксированном t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Если для каждого k задача (1.287), (1.289) при $f=f_k$ имеет единственное классическое решение $u_k(x, t) \in L_2(Q)$ и функция $u(x, t)$ является пределом последовательности $\{u_k(x, t)\}$ в $L_2(D)$ при любом фиксированном t, $0 \leqslant t \leqslant T$, то эту функцию называют обобщенным решением задачи (1.287), (1.289).

6°. Обобщенные решения первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка. Рассмотрим теперь уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L(u) = f(x, t), \tag{1.291}$$

где дифференциальный оператор $L(u)$ и правая часть $f(x, t)$ удовлетворяют всем требованиям предыдушего пункта. Как и выше, D — ограниченная область E_n, а $Q=D \times (0 < t < T)$ — подобласть области Ω задания уравнения (1.291).

В соответствии с пунктом 2° § 3 первая краевая задача (1.75), (1.76) для уравнения (1.291) в классической постановке заключается в определении функции $u(x, t) \in C^{2,0}(Q) \cap C^{0,0}(Q \cup \partial Q)$, удовлетворяющей уравнению (1.291) и краевым условиям (1.75), (1.76).

Так же как и в случае основной смешанной задачи для гиперболического уравнения (1.287), обобщенные решения задачи (1.291), (1.75), (1.76) можно вводить по-разному.

Если скалярное произведение $(u \cdot v)$ элементов $u(x, t)$, $v(x, t) \in L_2(Q)$ с обобщенными первыми производными по пространственным переменным $x_1, \ldots, x_n$ из $L_2(Q)$

определить в виде интеграла

$$(u \cdot v) = \int\limits_Q (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx\, dt,$$

а норму $u(x, t)$ — по формуле

$$\|u\| = (u \cdot u)^{1/2},$$

то получим гильбертово пространство W_2^{10}. Замыкание $\mathring{W}_2^{10}$ по норме пространства W_2^{10} пространства гладких в $Q \cup \partial Q$ функций, обращающихся в нуль вблизи S, представляет собой подпространство пространства W_2^{10}.

Под *обобщенным решением задачи* (1.291), (1.75), (1.76) в пространстве W_2^{10} в предположении, что $\varphi \in L_2(D)$, будем понимать функцию $u(x, t) \in \mathring{W}_2^{10}$, для которой имеет место тождество

$$\int\limits_Q \left(-u \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} e^i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - Cuv \right) dx\, dt =$$

$$= \int\limits_D \varphi v(x, 0)\, dx + \int\limits_Q fv\, dx\, dt \qquad (1.292)$$

при любой функции $v(x, t) \in \overset{c}{W}{}_2^{10}$ и которая обращается в нуль при $t = T$.

Из формулы (1.292) следует, что обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (1.291), (1.75), (1.76), если оно существует, имеет непрерывные частные производные второго порядка по $x_1, \ldots, x_n$ и первого порядка по t, и, кроме того, боковая граница S области Q и коэффициенты уравнения (1.291) достаточно гладки, является классическим решением этого уравнения.

При требовании достаточной гладкости S обобщенное решение в среднем удовлетворяет краевому условию (1.76) (см. пункт 4° настоящего параграфа).

Если функции $f(x, t)$, $\varphi(x)$ являются пределами равномерно сходящихся последовательностей достаточно гладких функций $\{f_k(x, t)\}$, $\{\varphi_k(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, и задача (1.291), (1.75), (1.76), когда в ней f и φ заменены соответственно через $f_k(x, t)$ и $\varphi_k(x)$, имеет единственное классическое решение $u_k(x, t)$ при любом k, то при равномерной сходимости последовательности $\{u_k(x, t)\}$ ее предел $u(x, t)$ также называется *обобщенным решением задачи* (1.291), (1.75), (1.76). Введение обобщенного решения, таким образом, в первую очередь оправдано тем, что в приложениях (например, в линейной теории теплопроводности) функции $f(x, t)$ и $\varphi(x)$ даются, как правило, с определенной точностью.

§ 7. Обзор методов доказательства существования обобщенных решений

1°. Общие замечания. В §§ 4, 5 были описаны классические методы построения регулярных решений задач Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений, начальных и характеристической задач Коши для гиперболических уравнений, а также первой краевой задачи и задачи Коши—Дирихле для уравнения теплопроводности. В этих методах использовались основные положения из математического анализа.

Поскольку обобщенные решения являются элементами тех или иных функциональных пространств, естественно, что и методы их нахождения (или доказательства существования) берут свое начало в современном функциональном анализе. Поэтому их принято называть *функциональными методами* решения уравнений в частных производных. Функциональные методы хотя внешне весьма изящны, но полученные с их помощью результаты довольно грубы. Тем не менее в настоящее время эти методы находят широкое распространение не только в математике, но и в физике и технике. В частности, они позволяют обосновать ряд методов построения численных и вообще приближенных решений важнейших классов уравнений в частных производных. В свете функциональных методов особенно прозрачными становятся метод конечных разностей, а также методы Ритца и Бубнова—Галёркина.

Ниже приводится описание лишь некоторых из функциональных методов, причем для раскрытия их сущности будем ограничиваться рассмотрением отдельных простых задач, обобщенные решения которых требуется найти.

2°. Метод ортогональных проекций. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(u \cdot v)$,

$u, v \in H$, и нормой $\|u\| = (u \cdot u)^{1/2}$, а M — замкнутое линейное подпространство в H. Элементы $u, v \in H$ называются ортогональными, если $(u \cdot v) = 0$. Обозначим через M^{T} множество всех элементов $z \in H$, ортогональных всем элементам M.

Мы ниже будем пользоваться следующими хорошо известными утверждениями из элементарного курса функционального анализа.

а) Любой элемент $x \in H$ можно представить в виде

$$x = y + z,$$

где $y \in M$, $z \in M^{\text{T}}$. Элемент y носит название ортогональной проекции $x \in H$ на M (теореме об ортогональных проекциях).

б) Если $\lambda(x)$ — ограниченный линейный функционал, определенный на H, то существует единственный элемент $y \in H$, при помощи которого $\lambda(x)$ представляется в виде

$$\lambda(x) = (x \cdot y), \tag{1.293}$$

причем $\|\lambda\| = \|y\|$ (теорема представления линейного функционала).

Будем предполагать, что оператор (1.288) совпадает с оператором Лапласа:

$$L(u) = \Delta u,$$

а D является ограниченной областью пространства E_n.

По данному в пункте 3° § 6 определению обобщенным решением в пространстве $W_2^1(D)$ задачи Дирихле (1.282) для уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x), \qquad x \in D, \tag{1.294}$$

в предположении, что $f \in L_2(D)$, называется функция $u(x) \in \mathring{W}_2^1(D)$, удовлетворяющая тождеству

$$\int_D (\nabla u \cdot \nabla v + fv)\, dx = 0 \tag{1.295}$$

для любой функции $v(x) \in \mathring{W}_2^1$.

Как уже было отмечено в пункте 2° § 6, скалярное произведение в $\mathring{W}_2^1$ можно задать в виде

$$(u \cdot v) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v\, dx,$$

и тогда пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ получится замыканием всех бесконечно дифференцируемых финитных функций с компактным носителем в D по норме

$$\|u\|=\left(\int_D (\nabla u)^2 dx\right)^{1/2},$$

причем любое ограниченное множество из $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ компактно в $L_2(D)$.

В силу теоремы об ортогональных проекциях, если тождество (1.295) имеет место для $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, то оно имеет место и для $u(x)+u_T(x)$, $u_T\in(\overset{\circ}{W}{}_2^1)^{\mathrm{T}}$.

Поскольку выражение $\int\limits_D fv dx$ является ограниченным линейным функционалом, определенным на $\overset{\circ}{W}{}_2^1$, в силу формулы (1.293) существует элемент $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, для которого выполняется тождество (1.295) при любой функции $v(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$. Тем самым существование обобщенного решения задачи (1.294), (1.282) доказано.

Пусть теперь $u_0(x)$ — решение соответствующей (1.294), (1.282) однородной задачи (т. е. когда $f\equiv 0$) из $\overset{\circ}{W}{}_2^1$. На основании (1.295) имеем

$$\int_D (\nabla u_0)^2 dx=0,$$

откуда в силу неравенства (1.279) следует, что $u_0(x)=0$ почти всюду в области D.

Таким образом, приходим к заключению, что *задача* (1.294), (1.282) *имеет, и притом единственное, решение.*

Описанный метод доказательства существования и единственности обобщенного решения задачи (1.294), (1.282) носит название *метода ортогональных проекций.* Мы здесь не останавливаемся на весьма интересном и трудном вопросе о совпадении обобщенных и классических решений (см. Г. Вейль [1]).

3°. Существование обобщенного решения основной смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения. Пусть $\{f_k(x, t)\}$ — ограниченная в $Q=D\times(0<t<T)$ последовательность функций, пределом которой в $L_2(D)$ при любом значении t, $0\leqslant t\leqslant T$, является функ-

ция $f(x, t)$. Предположим, что мы умеем строить классическое решение $u_k(x, t)$ основной смешанной задачи

$$u(x, 0)=0, \qquad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad x \in D, \quad u|_S=0 \qquad (1.296)$$

в области Q для неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=f(x, t) \qquad (1.297)$$

каждый раз, когда $f(x, t)=f_k(x, t)$, $k=1, 2, \ldots$ Будем считать, что функция $u_k(x, t)$ непрерывна вместе со своими первыми производными в $Q \cup \partial Q$, а граница ∂D области D достаточно гладка.

По приведенному в конце пункта 5° § 6 определению обобщенным решением задачи (1.297), (1.296) называется функция $u(x, t)$, являющаяся пределом последовательности $\{u_k(x, t)\}$ в $L_2(D)$ при любом значении t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

С целью доказательства существования таким образом определенного обобщенного решения задачи (1.297), (1.296) введем в рассмотрение так называемый *интеграл энергии*

$$E_k^2(t)=\frac{1}{2}\int_D\left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2+(\nabla u_k)^2\right]dx. \qquad (1.298)$$

Легко видеть, что

$$E_k^2(t)=\int_0^t dt_1\int_D\frac{\partial u_k(x, t_1)}{\partial t_1}f_k(x, t_1)\,dx. \qquad (1.299)$$

Действительно, умножая обе части уравнения (1.297) при $t=t_1$, $u=u_k$, $f=f_k$ на $\dfrac{\partial u_k(x, t_1)}{\partial t_1}$ и интегрируя по области $Q_t=D\times(0<t_1<t,\ t<T)$, можем написать

$$\int_{Q_t} f_k(x, t_1)\frac{\partial u_k(x, t_1)}{\partial t_1}\,dx\,dt_1=$$
$$=\int_0^t dt_1\int_D\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2+\nabla u_k\nabla\frac{\partial u_k}{\partial t_1}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]dx. \qquad (1.300)$$

После изменения порядка интегрирования и применения формулы (GO) равенство (1.300) принимает вид

$$\int\limits_{Q_t} f_k(x,\ t_1)\frac{\partial u_k(x,\ t_1)}{\partial t_1}\,dx\,dt_1=\frac{1}{2}\int\limits_D\left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2+(\nabla u_k)^2\right]_0^t dx-$$

$$-\int\limits_0^t dt_1\int\limits_{\partial D}\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial \mathcal{N}_x}\,ds_x, \qquad (1.301)$$

где $\mathcal{N}_x$ — единичный вектор внешней нормали к ∂D в точке x. В силу (1.296) и (1.298) равенство (1.301) переходит в равенство (1.299).

В результате дифференцирования по t из (1.299) находим

$$2E_k(t)\frac{d}{dt}E_k(t)=\int\limits_D\frac{\partial u_k(x,\ t)}{\partial t}f_k(x,\ t)\,dx,$$

откуда, применяя неравенство Шварца, получаем

$$2E_k(t)\frac{d}{dt}E_k(t)\leqslant\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\|\|f_k\|, \qquad (1.302)$$

где

$$\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\|^2=\int\limits_D\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2dx, \qquad \|f_k\|^2=\int\limits_D|f_k|^2\,dx.$$

На основании (1.298) заключаем, что

$$\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\|\leqslant\sqrt{2}\,E_k(t), \qquad \|\nabla u_k\|\leqslant\sqrt{2}\,E_k(t), \qquad (1.303)$$

где

$$\|\nabla u_k\|^2=\int\limits_D(\nabla u_k)^2\,dx.$$

В силу (1.303) из (1.302) имеем

$$\frac{dE_k(t)}{dt}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\|f_k\|. \qquad (1.304)$$

В результате интегрирования из (1.304) следует оценка

$$E_k(t)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^t\|f_k(t_1)\|\,dt_1, \qquad (1.305)$$

так как $E_k(0)=0$ в силу первых двух из условий (1.296).

Неравенства (1.303) и (1.305) дают

$$\left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\| \leqslant \int\limits_0^t \| f_k(t_1) \| \, dt_1 \tag{1.306}$$

и

$$\| \nabla u_k \| \leqslant \int\limits_0^t \| f_k(t_1) \| \, dt_1. \tag{1.307}$$

Ввиду того, что

$$2 \| u_k \| \frac{d}{dt} \| u_k \| = 2 \int\limits_D u_k \frac{\partial u_k}{\partial t} \, dx \leqslant 2 \| u_k \| \left\| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right\|,$$

из (1.306) имеем

$$\frac{d}{dt} \| u_k \| \leqslant \int\limits_0^t \| f_k(t_1) \| \, dt_1,$$

или, учитывая то обстоятельство, что $\| u_k(0) \| = 0$,

$$\| u_k(t) \| \leqslant \int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} \| f_k(t_2) \| \, dt_2 = \int\limits_0^t (t - t_1) \| f_k(t_1) \| \, dt_1. \tag{1.308}$$

Отсюда, в частности, следует ограниченность последовательности $\{u_k(x, t)\}$ в $L_2(D)$ при любом t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Так как последовательность $\{f_k(x, t)\}$ сходится, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует число $N > 0$ такое, что

$$\| f_{N+p} - f_N \| < \varepsilon \tag{1.309}$$

при любом $p \geqslant 0$. На основании (1.309) из (1.307) и (1.308) получаем

$$\| \nabla (u_{N+p} - u_N) \| \leqslant \varepsilon t \tag{1.310}$$

и

$$\| u_{N+p}(x, t) - u_N(x, t) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} t^2 \tag{1.311}$$

для любого t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Неравенство (1.311) означает, что для любого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, последовательность $\{u_k(x, t)\}$ является фундаментальной в $L_2(D)$.

Ссылаясь на известную из функционального анализа теорему о том, что каждая ограниченная, фундаментальная в $L_2(D)$ последовательность имеет в $L_2(D)$ предел, приходим к заключению, что последовательность $\{u_k(x, t)\}$ для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, имеет предел $u(x, t) \in L_2(D)$. Тем самым существование обобщенного решения задачи (1.297), (1.296) доказано. Единственность решения очевидна.

Исходя из оценок (1.306), (1.307), (1.308), (1.310), можно показать, что функция $u(x, t) \in W_{20}^1$, т. е. имеет место тождество

$$\int\limits_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla u \cdot \nabla v\right) dx\, dt = \int\limits_Q fv\, dx\, dt$$

для любой функции $v(x, t) \in W_{20}^1(Q)$, равной нулю при $t = T$.

4°. Существование обобщенного решения первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности. Пусть имеется равномерно сходящаяся последовательность

$$\{f_k(x, t)\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.312}$$

непрерывных в $Q \cup \partial Q$ функций, предел которой обозначим через $f(x, t)$.

Будем считать, что для любого k существует единственное классическое решение $u_k(x, t)$ первой однородной краевой задачи

$$u_k(x, 0) = 0, \qquad x \in D, \qquad u_k|_S = 0 \tag{1.313}$$

для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k = f_k(x, t), \qquad (x, t) \in Q, \tag{1.314}$$

непрерывное в $Q \cup \partial Q$.

Покажем, что последовательность

$$\{u_k(x, t)\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.315}$$

равномерно сходится в $Q \cup \partial Q$ и, стало быть, ее предел $u(x, t)$ является обобщенным решением первой краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t),$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in D, \quad u|_S = 0,$$

в приведенной в конце пункта 6° § 6 постановке.

С этой целью заметим, что для решения $u_k(x, t)$ задачи (1.314), (1.313) в каждой точке $(x, t) \in Q \cup \partial Q$ имеет место оценка

$$|u_k(x, t)| \leqslant TM_k, \tag{1.316}$$

если только

$$\max_{(x, t) \in Q \cup \partial Q} |f_k(x, t)| < M_k. \tag{1.317}$$

Чтобы доказать справедливость этого утверждения, допустим обратное и сперва предположим, что существует точка (x_0, t_0), лежащая в области Q или на верхнем ее основании, в которой

$$u_k(x_0, t_0) > TM_k. \tag{1.318}$$

Это допущение приводит к противоречию. Действительно, в силу (1.318) функция

$$v(x, t) = u_k(x, t) + M_k(T - t)$$

обязательно достигает своего максимума в $Q \cup \partial Q$ в некоторой точке (x, t), лежащей в области Q или на ее верхнем основании, а это невозможно, ибо в точке (x, t) в силу (1.317)

$$\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = -f_k(x, t) + M_k > 0.$$

Допущение $u_k(x, t) < -TM_k$ также приводит к противоречию.

Так как последовательность (1.312) является фундаментальной, для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует число $N > 0$ такое, что при всех $(x, t) \in Q \cup \partial Q$ и произвольном $p > 0$

$$|f_{N+p}(x, t) - f_N(x, t)| < \varepsilon.$$

В силу доказанного выше утверждения отсюда следует, что для всех $(x, t) \in Q \cup \partial Q$ при произвольном $p > 0$ имеет место оценка

$$\left| u_{N+p}(x, t) - u_N(x, t) \right| \leqslant T\varepsilon,$$

т. е. последовательность (1.315) равномерно сходится и ее предел $u(x, t)$ является непрерывной функцией. Приведенное здесь рассуждение не позволяет судить о дифференцируемости функции $u(x, t)$.

Вопросы, поднятые в этом и предыдущем параграфах, с различной степенью подробности изложены в работах многих авторов (см., например, Винер [1], В. С. Владимиров [1], Гильбарг и Тридингер [1], Курант [1], О. А. Ладыженская [1], Миранда [1], С. Л. Соболев [2], [3]).

Глава II. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Равномерно эллиптические системы с расщепленными главными частями

1°. Общие замечания. В то время как для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^{l} A_k(x)\, u^{(l-k)}(x) = f(x),$$

где A_k, $k=0, \ldots, l$, — известные квадратные матрицы порядка N, $f=(f_1, \ldots, f_N)$ — известный, а $u=(u_1, \ldots, u_N)$ — искомый векторы, при требовании непрерывности A_k, f и выполнении условия $\det A_0 \neq 0$ всюду, где ищется $u(x)$, а также в точках носителях данных, классические задачи с начальными или краевыми условиями в смысле их нормальной разрешимости правильно (корректно) поставлены независимо от того, имеем мы дело с одним уравнением $N=1$ или системой уравнений $N>1$, положение существенно может осложниться, когда речь идет об уравнениях в частных производных.

Ниже в настоящей и в следующих главах на простых примерах эллиптических и гиперболических систем второго порядка, общие решения которых строятся в явном виде, будут разобраны принципиальные вопросы о правильности постановок некоторых линейных задач.

Еще в 1948 г. нами было показано (см. [2], [5]), что *в круге D: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < R^2$ задача Дирихле с краевыми данными*

$$u_1(x, y) = f_1(x, y), \quad u_2(x, y) = f_2(x, y), \quad (x, y) \in \partial D, \tag{2.1}$$

для равномерно эллиптической системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \tag{2.2}$$

не является нормально разрешимой ни по Фредгольму, ни по Нетеру.

Действительно, в обозначениях

$$w = u_1 + iu_2, \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

система (2.2) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = 0, \tag{2.3}$$

откуда сразу получается общее комплексное представление ее решений в любой односвязной области

$$w = \bar{z}\varphi(z) + \psi(z), \tag{2.4}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные аналитические функции комплексного переменного z.

На основании (2.4) заключаем, что соответствующая (2.1) *однородная задача Дирихле в круговой области* $|z-z_0| < R$

$$w_0(t) = 0, \quad |t - z_0| = R, \quad z_0 = x_0 + iy_0 \tag{2.5}$$

имеет бесконечное множество линейно независимых решений

$$w_0(z) = (R^2 - |z - z_0|^2)\psi(z), \tag{2.6}$$

где $\psi(z)$ — *произвольная аналитическая в* D *функция.*

Заметим, что в силу (1.29) соответствующим системе (2.2) характеристическим полиномом является $P(\lambda) = (\lambda^2+1)^2$. Он имеет два двухкратных корня i и $-i$. Однако *было бы неправильно в этом усмотреть нарушение фредгольмовости и нетеровости задачи* (2.2), (2.1). Та же самая функция $(\lambda^2+1)^2$ служит характеристическим полиномом и для расщепленной эллиптической системы

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0,$$

для которой задача Дирихле (2.1) всегда имеет, и притом единственное, решение, которое, например, в круге D: $|z-z_0| < R$ имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t-z_0|=R} \frac{R^2 - |z-z_0|^2}{|t-z|^2} w(t)\, d\theta, \quad t = z_0 + Re^{i\theta}$$

(см. формулу (1.193)).

С другой стороны, у соответствующего эллиптической системе

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\sqrt{2}\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\,\partial y}=0,\quad \sqrt{2}\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0 \qquad (2.7)$$

характеристического полинома $P(\lambda)=-\lambda^4-1$ корни все простые. Тем не менее однородная задача Дирихле (2.5) в том же круге D имеет бесконечное множество линейно независимых решений

$$w_k(z)=B_k\{[(\mu\zeta+\bar{\zeta})^2-4\mu R^2]^k-(\mu\zeta-\bar{\zeta})^{2k}\},$$

где

$$k=1, 2, \ldots,\quad \zeta=z-z_0,\quad (1+\sqrt{2})\mu=i,$$

а B_k — произвольные комплексные постоянные. В справедливости этого утверждения легко убедиться, если учесть то обстоятельство, что все регулярные в односвязной области решения системы (2.7) даются формулой

$$w(z)=\varphi(\mu\zeta-\bar{\zeta})+\psi(\mu\zeta+\bar{\zeta}),$$

где φ и ψ — произвольные аналитические функции своих аргументов (см. А. В. Бицадзе [2], [5], [6], [14]).

Для системы (2.2) *также нарушены фредгольмовость и нетеровость задачи Неймана*, ибо, как легко видеть, однородная задача Неймана

$$\frac{\partial w_0}{\partial \mathcal{N}_t}=t\,\frac{\partial w_0}{\partial t}+\bar{t}\,\frac{\partial w_0}{\partial \bar{t}}=0,\qquad t=e^{i\theta},$$

в круге D: $|z|<1$ имеет бесконечное множество линейно независимых решений

$$w_0(z)=\psi(z)-\frac{\bar{z}}{z}\int_0^z \tau^2\psi'(\tau)\,d\tau,$$

где $\psi(z)$ — произвольная в D аналитическая функция переменного z, непрерывная вместе со своей производной первого порядка в замкнутом круге $D\cup\partial D$.

Аналогичные обстоятельства могут оказаться присущими для эллиптических систем не только в случае двух независимых переменных. В 1966 г. Ю. Т. Антохин [1], а в 1967 г. Е. Н. Кузьмин [1], используя кватернионы и числа Кэли, построили примеры эллиптических систем второго порядка с четырьмя и восемью независимыми переменными, для которых однородная задача Дирихле в ограниченных областях специального вида имеет бесконечное множество линейно независимых решений. Когда число независимых переменных отлично от 2, 4, 8, строить эллиптические системы с подобным свойством можно, но довольно трудно.

Сказанное выше вовсе не означает, что каждый раз, когда для рассматриваемой эллиптической системы задачи Дирихле и Неймана неправильно поставлены, нет правильно поставленных задач для этой же системы. Так, например, *для системы* (2.2) *безусловно разрешима задача с краевыми условиями*

$$\operatorname{Re} w(t) = f_1(t), \qquad \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} w(t) = f_2(t), \quad t \in \partial D,$$

в любой области D плоскости комплексного переменного z, в которой правильно поставлена задача Дирихле для уравнения Лапласа, причем общее решение соответствующей однородной задачи имеет вид

$$w_0(z) = i(cx + c_1),$$

где c и c_1 — произвольные действительные постоянные (см. А. В. Бицадзе [14]).

Описание классов эллиптических систем, для которых задачи Дирихле, Неймана, с наклонной производной, Пуанкаре и др. являются нормально разрешимыми по Фредгольму, Нетеру или Хаусдорфу, безусловно представляет интерес. Некоторые такие классы будут выделены ниже. В этом плане самой простой является эллиптическая система вида

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \tag{2.8}$$

где Δ — оператор Лапласа, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — заданные в области D_1 действительные аналитические $N \times N$-матрицы, а $u = (u_1, \ldots, u_N)$ — искомый вектор. Поскольку даже при $n = 2$, но $N > 1$ систему (1.4) в общем случае нельзя приводить к виду (2.8), последнее представляет собой частный класс эллиптических систем второго порядка с двумя независимыми переменными.

2°. Общее комплексное представление аналитических решений системы (2.8). Поскольку коэффициенты и аналитическое решение $u(x, y)$ системы (2.8) аналитически продолжаются в некоторую область комплексных значений независимых переменных x, y, вводя новые независимые переменные $z=x+iy$, $\zeta=x-iy$, мы можем считать, что выражения

$$A=\frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)+ib\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right],$$

$$B=\frac{1}{4}\left[a\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)-ib\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)\right],$$

$$C=\frac{1}{4}c\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right), \quad U=u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)$$

аналитичны в некоторой области $(D^*, \bar{D}^*)$, $z\in D^*$, $\zeta\in\bar{D}^*$. При действительных x, y области D^*, $\bar{D}^*$ лежат в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, причем $\bar{D}^*$ расположена симметрично D^* относительно действительной оси $y=0$.

В новых переменных система (2.8) принимает вид

$$L(U)=\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial\zeta}+A\frac{\partial U}{\partial z}+B\frac{\partial U}{\partial\zeta}+CU=0. \qquad (2.9)$$

По данному в пункте 4° § 5 гл. I определению сопряженной с (2.9) является система

$$L^*(V)=\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial\zeta}-\frac{\partial}{\partial z}(VA)-\frac{\partial}{\partial\zeta}(VB)+VC=0. \qquad (2.10)$$

В уравнениях (2.9) и (2.10) под символами $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial\zeta}$ понимаются операции дифференцирования

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial\zeta}.$$

Поскольку равенства $AV=VA$, $BV=VB$, $CV=VC$ не всегда имеют место, порядок сомножителей в уравнении (2.10) необходимо сохранять.

Формально уравнения (2.9) и (2.10) ничем не отличаются от уравнений (1.65) и (1.58) соответственно. Так же, как и в пункте 4° § 5 гл. I, введем в рассмотрение *матрицу Римана*

$$R(z, \zeta; t, \tau)=\|R_{ij}(z, \zeta; t, \tau)\|, \qquad i, j=1, \ldots, N,$$

со следующими свойствами: 1) каждая ее строка является решением системы (2.10) относительно переменных z, ζ; 2) для матриц $R(t, \zeta; t, \tau)$, $R(z, \tau; t, \tau)$, $R(t, \tau; t, \tau)$ имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} R(t, \zeta; t, \tau) - R(t, \zeta; t, \tau) A(t, \zeta) = 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} R(z, \tau; t, \tau) - R(z, \tau; t, \tau) B(z, \tau) = 0, \tag{2.12}$$

$$R(t, \tau; t, \tau) = E, \quad z, t \in D^*, \quad \zeta, \tau \in \bar{D}^*, \tag{2.13}$$

где E — единичная диагональная $N \times N$-матрица.

Будем считать, что области D^* и $\bar{D}^*$ односвязны.

В силу свойства 1) матрицы Римана имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial \tau_1} R(t_1, \tau_1; t, \tau) - \frac{\partial}{\partial t_1} [R(t_1, \tau_1; t, \tau) A(t_1, \tau_1)] -$$
$$- \frac{\partial}{\partial \tau_1} [R(t_1, \tau_1; t, \tau) B(t_1, \tau_1)] - R(t_1, \tau_1; t, \tau) C(t_1, \tau_1) = 0,$$
$$t_1, t \in D^*, \quad \tau_1, \tau \in \bar{D}^*.$$

Интегрируя это тождество по переменным t_1, τ_1 и учитывая свойство 2) матрицы Римана, убеждаемся в том, что $R(z, \zeta; t, \tau)$ является решением системы интегральных уравнений Вольтерра

$$R(z, \zeta; t, \tau) - \int_t^z R(t_1, \zeta; t, \tau) B(t_1, \zeta)\, dt_1 -$$
$$- \int_\tau^\zeta R(z, \tau_1; t, \tau) A(z, \tau_1)\, d\tau_1 +$$
$$+ \int_t^z dt_1 \int_\tau^\zeta R(t_1, \tau_1; t, \tau) C(t_1, \tau_1)\, d\tau_1 = E, \quad z \in D^*, \ \zeta \in \bar{D}^*. \tag{2.14}$$

Как уже было отмечено в пункте 6° § 5 гл. I, система (2.14) всегда имеет, и притом единственное, решение. Очевидно, что $R(z, \zeta; t, \tau)$ аналитична как относительно переменных z, $t \in D^*$, так и относительно переменных ζ, $\tau \in \bar{D}^*$.

Поскольку $R(t, \zeta; t, \tau)$ по переменному ζ является матрицей фундаментальных решений системы (2.11) обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющей условию (2.13), как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет место тождество

$$\det R(t,\ \zeta;\ t,\ \tau)=\exp\int_{\tau}^{\zeta}\sum_{k=1}^{n}A_{kk}(t,\ \tau_1)\,d\tau_1. \qquad (2.15)$$

В силу формулы (2.12) для произвольной аналитической матрицы $V(\tau_1)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}[R(z,\ \tau_1;\ z,\ \zeta)\,V(\tau_1)]-R(z,\ \tau_1;\ z,\ \zeta)\left[\frac{dV}{d\tau_1}+A(z,\ \tau_1)\,V\right]=0,$$

откуда после интегрирования с учетом (2.13) приходим к тождеству

$$V(\zeta)=R(z,\ \tau;\ z,\ \zeta)\,V(\tau)+\\ +\int_{\tau}^{\zeta}R(z,\ \tau_1;\ z,\ \zeta)\left[\frac{\partial V}{\partial\tau_1}+A(z,\ \tau_1)\,V\right]d\tau_1.$$

Принимая в этом тождестве $V(\tau_1)=R(z,\ \tau;\ z,\ \tau_1)$, опять в силу (2.12) будем иметь

$$\int_{\tau}^{\zeta}R(z,\ \tau_1;\ z,\ \zeta)\left[\frac{\partial}{\partial\tau_1}R(z,\ \tau;\ z,\ \tau_1)+\right.\\ \left.+A(z,\ \tau_1)\,R(z,\ \tau;\ z,\ \tau_1)\right]d\tau_1=0. \qquad (2.16)$$

На основании (2.13) из тождества (2.16) приходим к заключению, что

$$\frac{\partial}{\partial\tau}R(z,\ \zeta;\ z,\ \tau)+A(z,\ \tau)\,R(z,\ \zeta;\ z,\ \tau)=0. \qquad (2.17)$$

Аналогично убеждаемся в справедливости равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}R(z,\ \zeta;\ t,\ \zeta)+B(t,\ \zeta)\,R(z,\ \zeta;\ t,\ \zeta)=0. \qquad (2.18)$$

Из очевидного тождества

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial\tau}[R(t,\ \tau;\ z,\ \zeta)\,U(t,\ \tau)]-R(t,\ \tau;\ z,\ \zeta)\,L(U)=\\ =\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\tau}R-RA\right)U\right]+\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial t}-RB\right)U\right],$$

справедливого для любой аналитической матрицы $U(t, \tau)$, после интегрирования с учетом (2.11), (2.12), (2.13) получаем

$$U(z, \zeta) = R(z_0, \zeta_0; z, \zeta) U(z_0, \zeta_0) + \\ + \int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} R(t, \tau; z, \zeta) L[U(t, \tau)] dt + \\ + \int_{z_0}^{z} R(t, \zeta_0; z, \zeta)\left[\frac{\partial}{\partial t} U(t, \zeta_0) + B(t, \zeta_0) U(t, \zeta_0)\right] dt + \\ + \int_{\zeta_0}^{\zeta} R(z_0, \tau; z, \zeta)\left[\frac{\partial}{\partial \tau} U(z_0, \tau) + A(z_0, \tau) U(z_0, \tau)\right] d\tau, \quad (2.19)$$

где $z_0 \in D^*$, $\zeta_0 \in \bar{D}^*$.

Подставляя в (2.19) вместо матрицы $U(z, \zeta)$ матрицу $R(z_0, \zeta_0; z, \zeta)$, приходим к тождеству

$$\int_{z_0}^{z} dt \int_{\zeta_0}^{\zeta} R(t, \tau; z, \zeta) L[R(z_0, \zeta_0; t, \tau)] d\tau = 0,$$

откуда в силу (2.15) непосредственно следует справедливость утверждения: *каждый столбец матрицы Римана $R(z, \zeta; t, \tau)$ относительно переменных t, τ является решением системы* (2.9).

В предположении, что $U(z, \zeta)$ — решение системы (2.9), из тождества (2.19) после интегрирования по частям находим *комплексное интегральное представление* этого решения:

$$U(z, \zeta) = R(z, \zeta_0; z, \zeta) U(z, \zeta_0) + \\ + R(z_0, \zeta; z, \zeta) U(z_0, \zeta) - R(z_0, \zeta_0; z, \zeta) U(z_0, \zeta_0) - \\ - \int_{z_0}^{z} \left[\frac{\partial}{\partial t} R(t, \zeta_0; z, \zeta) - R(t, \zeta_0; z, \zeta) B(t, \zeta_0)\right] U(t, \zeta_0) dt - \\ - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} R(z_0, \tau; z, \zeta) - R(z_0, \tau; z, \zeta) A(z_0, \tau)\right] U(z_0, \tau) d\tau. \quad (2.20)$$

Учитывая установленные выше свойства матрицы Римана, непосредственной проверкой убеждаемся в том, что формула (2.20) дает решение задачи Гурса в следующей постановке: *найти решение* $U(z, \zeta)$ *системы* (2.9), *удовлетворяющее условиям*

$$U(z, \zeta_0) = \varphi(z), \quad U(z_0, \zeta) = \psi(\zeta), \quad \varphi(z_0) = \psi(\zeta_0), \tag{2.21}$$

где $\varphi(z)$ *и* $\psi(\zeta)$ — *произвольные аналитические векторы,* $z \in D^*$, $\zeta \in \bar{D}^*$.

Следовательно, *для любого аналитического в области* $(D^*, \bar{D}^*)$ *решения* $U(z, \zeta)$ *системы* (2.9) *существуют аналитические векторы* $\varphi(z) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ *и* $\psi(\zeta) = (\psi_1, \ldots, \psi_N)$, *связанные с* $U(z, \zeta)$ *формулами* (2.21), *с помощью которых* $U(z, \zeta)$ *выражается в виде*

$$\begin{aligned} U(z, \zeta) &= R(z, \zeta_0; z, \zeta)\varphi(z) + \\ &\quad + R(z_0, \zeta; z, \zeta)\psi(\zeta) - R(z_0, \zeta_0; z, \zeta)\varphi(z_0) - \\ &\quad - \int_{z_0}^{z}\left[\frac{\partial}{\partial t}R(t, \zeta_0; z, \zeta) - R(t, \zeta_0; z, \zeta)B(t, \zeta_0)\right]\varphi(t)\,dt - \\ &\quad - \int_{\zeta_0}^{\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial \tau}R(z_0, \tau; z, \zeta) - R(z_0, \tau; z, \zeta)A(z_0, \tau)\right]\psi(\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{2.22}$$

и, обратно, для любой пары аналитических векторов $\varphi(z)$, $z \in D^*$, $\psi(\zeta)$, $\zeta \in \bar{D}^*$, *удовлетворяющих условию* $\varphi(z_0) = \psi(\zeta_0)$, *формула* (2.22) *дает аналитическое в* $(D^*, \bar{D}^*)$ *решение системы* (2.9).

Тем самым мы показали *существование* аналитических в $(D^*, \bar{D}^*)$ решений системы (2.9), которые могут быть представлены формулой (2.22).

Ввиду того, что при постоянном N-мерном векторе α выражение $R(z_0, \zeta_0; z, \zeta)\alpha$ является решением уравнения (2.9), формуле (2.22) можно придать вид

$$\begin{aligned} U(z, \zeta) &= R(z, \zeta_0; z, \zeta)\varphi(z) + R(z_0, \zeta; z, \zeta)\psi(\zeta) - \\ &\quad - \int_{z_0}^{z}\left[\frac{\partial}{\partial t}R(t, \zeta_0; z, \zeta) - R(t, \zeta_0; z, \zeta)B(t, \zeta_0)\right]\varphi(t)\,dt - \\ &\quad - \int_{\zeta_0}^{\zeta}\left[\frac{\partial}{\partial \tau}R(z_0, \tau; z, \zeta) - R(z_0, \tau; z, \zeta)A(z_0, \tau)\right]\psi(\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{2.23}$$

где аналитические векторы $\varphi(z)$, $z\in D^*$, и $\psi(\zeta)$, $\zeta\in \bar{D}^*$, выражаются через $U(z,\ \zeta)$ формулами

$$\begin{gathered}\varphi(z)=U(z,\ \zeta_0)-\frac{1}{2}R(z_0,\ \zeta_0;\ z,\ \zeta_0)\,U(z_0,\ \zeta_0),\\ \psi(z)=U(z_0,\ \zeta)-\frac{1}{2}R(z_0,\ \zeta_0;\ z_0,\ \zeta)\,U(z_0,\ \zeta_0),\\ \varphi(z_0)=\psi(\zeta_0).\end{gathered}\tag{2.24}$$

В частности, при $\zeta=\bar{z}$, $\zeta_0=\bar{z}_0$ матрица Римана $R(z,\ \bar{z};\ t,\ \bar{t})$ становится действительной и формула (2.23) будет давать *действительные решения* системы (2.8)

$$u(x,\ y)=\operatorname{Re}\Bigg\{R(z,\ \bar{z}_0;\ z,\ \bar{z})\,\varphi(z)-\\ -\int_{z_0}^{z}\left[\frac{\partial}{\partial t}R(t,\ \bar{z}_0;\ z,\ \bar{z})-R(t,\ \bar{z}_0;\ z,\ \bar{z})\,B(t,\ \bar{z}_0)\right]\varphi(t)\,dt\Bigg\},\tag{2.25}$$

где в силу (2.24)

$$\varphi(z)=U\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2},\ \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)-\frac{1}{2}R(z_0,\ \bar{z};\ z,\ \bar{z}_0)\,u(x_0,\ y_0).$$

Если элементы матриц a, b, c являются действительными целыми функциями действительных переменных x, y, то формула (2.25) дает решение системы (2.8), каждая компонента которого является целой функцией переменных x, y.

Ввиду того, что матрица Римана $R(z_0,\ \bar{z}_0;\ z,\ \bar{z})$ относительно последней пары своих аргументов удовлетворяет системе (2.8), на основании (2.17) и (2.18) заключаем, что каждый из векторов

$$\operatorname{Re}[R(z_0,\ \bar{z}_0;\ z,\ \bar{z})\,\varphi(z_0)],\qquad \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z}R(t,\ \bar{z}_0;\ z,\ \bar{z})\,B(t,\ \bar{z}_0)\,\varphi(t)\,dt$$

является решением системы (2.8) и, стало быть, вектор

$$v(x,\ y)=\operatorname{Re}\Bigg\{R(z,\ \bar{z}_0;\ z,\ \bar{z})\,\varphi(z)-\\ -\int_0^1\frac{\partial}{\partial\sigma}R(z_0+(z-z_0)\sigma,\ \bar{z}_0;\ z,\ \bar{z})\,\varphi(z_0+(z-z_0)\sigma)\,d\sigma\Bigg\}\tag{2.26}$$

также удовлетворяет системе (2.8).

Если в формулу (2.26) вместо $\varphi(z)$ подставим матрицу $c_0 \log(z-z_0) E$, где c_0 — скалярная действительная постоянная, то получим однозначную действительную матрицу

$$\Omega_1(x, y; x_0, y_0) = \Omega_1(z, z_0) = c_0 R(z_0, \bar z_0; z, \bar z) \log|z-z_0| -$$

$$- c_0 \operatorname{Re} \int_0^1 \frac{d}{d\sigma} R(z_0 + (z-z_0)\sigma, \bar z_0; z, \bar z) \log\sigma \, d\sigma,$$

которая при $z \neq z_0$ относительно переменных x, y является решением системы (2.8), а при $z = z_0$ имеет особенность вида $\log|z-z_0|$. Матрицу $\Omega_1(z, z_0)$ будем называть *элементарным решением* системы (2.8).

Очевидно, что и матрица

$$\Omega(x, y; x_0, y_0) = \Omega(z, z_0) =$$

$$= \Omega_1(z, z_0) - \operatorname{Re} \int_{z_1}^{z_0} dt \int_{\bar z_1}^{\bar z_0} L^*[\Omega_1(z, t)] R(z_0, \bar z_0; t, \bar t) \, d\bar t,$$

где оператор L^* берется по переменным ξ и η, $\xi + i\eta = t$, $z_1 \in D^*$, $\bar t$, $\bar z_1 \in \bar D^*$, при $z \neq z_0$ относительно x, y является решением системы (2.8), а относительно x_0, y_0 — сопряженной с ней системы

$$L^*(\Omega) = \Delta\Omega - \frac{\partial}{\partial x_0}(\Omega a) - \frac{\partial}{\partial y_0}(\Omega b) + \Omega c = 0,$$

причем при $z = z_0$ матрица Ω имеет особенность вида $\log|z-z_0|$.

Матрицу $\Omega(z, z_0)$ при $c_0 = -1/(2\pi)$ будем называть *стандартным элементарным решением*.

В области D класса $A^{1,h}$, лежащей вместе со своей границей S в области задания системы (2.8), формула (1.241) принимает вид

$$\int_D [vL(u) - L^*(v)u] \, d\xi \, d\eta =$$

$$= \int_S \left(v \frac{du}{d\mathcal{N}} - \frac{dv}{d\mathcal{N}} u + vau \cos \widehat{\mathcal{N}x} + vbu \cos \widehat{\mathcal{N}y} \right) ds. \qquad (2.27)$$

Предположим, что $D \cup S \subset D^*$ и точка $x + iy = z \in D$. Удалим точку z из области D вместе с замкнутым кругом $|t-z| \leqslant \varepsilon$ достаточно малого радиуса ε и в оставшейся части D_ε области D применим формулу (2.27), в которой $u(\xi, \eta)$ — произвольное регулярное решение системы (2.8) класса $C^{1,0}(D \cup S)$, а $v(\xi, \eta) = \Omega(x, y; \xi, \eta)$. Учитывая свойства стандартного элементарного решения $\Omega(x, y; \xi, \eta)$, из этой формулы в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем интегральное представление

$$u(x, y) = \int\limits_S \left(\Omega \frac{du}{d\mathcal{N}} - \frac{d\Omega}{d\mathcal{N}} u + \Omega a u \cos \widehat{\mathcal{N}x} + \Omega b u \cos \widehat{\mathcal{N}y}\right) ds,$$

откуда сразу убеждаемся в *аналитичности* решения $u(x, y)$ системы (2.8) в области его регулярности. На основании этого утверждения приходим к заключению, что *формула* (2.25) *дает интегральное представление всех регулярных в области D решений системы* (2.8).

Из определения стандартного элементарного решения $\Omega(x, y; \xi, \eta)$ непосредственно следует, что вектор

$$u^*(x, y) = -\int\limits_D \Omega(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$$

является *частным регулярным решением* неоднородной системы

$$L(u^*) = F(x, y), \quad F \in C^{1,0}(D \cup S). \tag{2.28}$$

Следовательно, *любое решение $u(x, y)$ этой системы имеет вид*

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u^*(x, y), \tag{2.29}$$

где $u_0(x, y)$ — общее решение однородной системы (2.8).

Формула (2.29) позволяет линейные краевые задачи для неоднородной системы (2.28) редуцировать к аналогичным задачам для однородной системы (2.8).

3°. Интегральные представления аналитических функций одного комплексного переменного. Когда (2.8) представляет собой уравнение Лапласа, $R(z, \zeta; t, \tau)$ является скаляром, тождественно равным единице, и, стало быть, в этом случае стандартное элементарное решение $\Omega(z, t)$ совпадает с функцией $E(z, t)$, определенной по формуле (1.177) при $n=2$, т. е.

$$\Omega(z, t) = -\frac{1}{2\pi} \log |z - t|.$$

В соответствии с этим гармонические потенциалы простого и двойного слоев (1.183) и (1.184) запишутся в виде, соответственно,

$$u_0(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \log|z-t|\,\mu_0(t)\,ds_t \tag{2.30}$$

и

$$u_1(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{d}{d\mathcal{N}_t}\log|z-t|\,\mu_1(t)\,ds_t, \tag{2.31}$$

где S — замкнутая линия Ляпунова.

Очевидно, что если $\mu_0(t) = -\frac{d\varphi(t)}{ds}$, $\mu_1(t) = -\varphi(t)$, где $\varphi(t)$, вообще говоря, комплексная функция класса $C^{1,0}(S)$, то выражение $\Phi(z) = u_1(z) + iu_0(z)$ является аналитической функцией комплексного переменного z как в конечной области D^+, так и в бесконечной области D^-, ограниченных контуром S, причем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{2.32}$$

Представленная формулой (2.32) функция $\Phi(z)$ называется *интегралом типа Коши*.

Хорошо известно, что, когда $\varphi(t) \in C^{0,h}(S)$, в каждой точке $t_0 \in S$ существуют пределы

$$\Phi^+(t_0) = \lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in D^+}} \Phi(z), \qquad \Phi^-(t_0) = \lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in D^-}} \Phi(z)$$

и они выражаются по формулам Сохоцкого—Племеля:

$$\Phi^\pm(t_0) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{SP}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. При этом имеет место весьма важное обстоятельство: *представленная интегралом типа Коши* (2.32) *с плотностью $\varphi \in C^{0,h}(S)$ функция $\Phi(z)$, доопределенная в $D^+ \cup S$ и $D^- \cup S$ при $t_0 \in S$ как $\Phi^+(t_0)$ и $\Phi^-(t_0)$ соответственно, принадлежит классам $C^{0,h_1}(D^+ \cup S)$ и $C^{0,h_1}(D^- \cup S)$, причем $h_1 = h$ при $h < 1$ и $h_1 = 1-\varepsilon$ при $h = 1$, где ε — любое положительное число.*

Приведем здесь же формулу перестановки сингулярных интегралов, принадлежащую Пуанкаре и Бертрану:

$$\int_S \frac{dt}{t-t_0} \int_S \frac{\varphi(t, \tau)\, d\tau}{\tau - t} =$$

$$= -\pi^2 \varphi(t_0, t_0) + \int_S d\tau \int_S \frac{\varphi(t, \tau)}{(t-t_0)(\tau - t)}\, dt, \qquad \text{(PB)},$$

справедливую для любой функции $\varphi(t, \tau)$ класса $C^{0,h}(S)$ как по t, так и по τ (см. Н. И. Мусхелишвили [1]).

Существуют различные обобщения формулы (2.32), дающей интегральное представление аналитических функций в конечной области D, ограниченной кривой Ляпунова S. Мы ниже будем пользоваться интегральными представлениями, принадлежащими И. Н. Векуа: *если функция* $\Phi(z)$ *аналитична в области* D, *то в каждой точке* $z \in D$

$$\Phi(z) = \int_S \frac{\mu(t)\, t\, ds_t}{t - z} + ic, \qquad \Phi(z) \in C^{0,h}(D \cup S), \tag{2.33}$$

и

$$\Phi(z) = \int_S \log e\left(1 - \frac{z}{t}\right)\mu(t)\, ds_t + ic, \qquad \Phi(z) \in C^{1,h}(D \cup S), \tag{2.34}$$

где действительная функция $\mu(t)$ *класса* $C^{0,h}(S)$ *и действительная постоянная* c *единственным образом определяются по заданной функции* $\Phi(z)$ (см. И. Н. Векуа [3]).

Представления (2.33), (2.34), очевидно, остаются в силе и тогда, когда $\Phi(z)$ представляет собой N-мерный аналитический вектор, причем в этом случае μ и c являются N-мерными действительными векторами, $\mu \in C^{0,h}(S)$, $c = \text{const}$.

4°. Задача Дирихле для системы (2.28). В этом пункте речь пойдет о задаче Дирихле

$$u(t_0) = f(t_0), \qquad t_0 \in S, \tag{2.35}$$

для эллиптической системы

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y), \qquad (x, y) \in D, \tag{2.28}$$

в предположении, что

$$a(x, y),\ b(x, y),\ c(x, y),\ F(x, y) \in C^{1,0}(D) \cap C^{0,0}(D \cup S),$$
$$f \in C^{2,0}(S),$$

а область D такова, что *для нее существует функция Грина* $G(z, t)$ *задачи Дирихле для уравнения Лапласа.* Последнее предположение позволяет без ограничения общности считать, что в краевом условии (2.35) функция $f(t_0)$ тождественно равна нулю на S.

Решение $u(x, y) \in C^{0,0}(D \cup S)$ задачи Дирихле

$$u(t_0) = 0, \qquad t_0 \in S, \tag{2.36}$$

для системы (2.28) будем искать в виде

$$u(x, y) = -\int_D G(z, t)\,\rho(t)\,dt, \qquad z \in D, \tag{2.37}$$

где неизвестный вектор $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N) \in C^{1,0}(D) \cap \cap C^{0,0}(D \cup S)$.

Представленный формулой (2.37) вектор $u(x, y)$, очевидно, удовлетворяет краевому условию (2.36), причем $u(x, y) \in C^{2,0}(D) \cap C^{0,0}(D \cup S)$. Для того чтобы $u(x, y)$ был решением системы (2.28), необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\rho(z) - \int_D K(z, t)\,\rho(t)\,dt = F(z), \qquad z \in D, \tag{2.38}$$

где

$$K(z, t) = a(z)\frac{\partial G(z, t)}{\partial x} + b(z)\frac{\partial G(z, t)}{\partial y} + c(z)\,G(z, t). \tag{2.39}$$

Равенство (2.38) представляет собой систему интегральных уравнений относительно ρ. Так как функция Грина $G(z, t)$ в случае круга $|z| < 1$ дается формулой

$$G(z, t) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\big||t|^2 z - t\big|}{|t|\,|z - t|},$$

то при $|t - z| = r \to 0$ имеем

$$G = O\left(\log \frac{2R}{r}\right), \quad \frac{\partial G}{\partial x} = O(r^{-1}), \quad \frac{\partial G}{\partial y} = O(r^{-1}), \tag{2.40}$$

где R — диаметр области D.

Оценки, аналогичные (2.40), имеют место для любой односвязной области D класса $A^{1,h}$. В этом легко убеждаемся конформным отображением области D на круг $|z|<1$. Принадлежность D классу $A^{1,h}$ гарантирует нужную гладкость отображающей функции и, стало быть, отсутствие особенности у функции $G(z, t)$ на S при $|z|\neq t$. Следовательно, в широких классах областей для элементов $K_{ij}(z, t)$ матричного ядра $K(z, t)$ уравнения (2.38) при $r\to 0$ имеем

$$K_{ij}=O(r^{-1}),\quad K_{ijx}=O(r^{-1}),\quad K_{ijy}=O(r^{-1}), \tag{2.41}$$

При наличии оценок (2.41) для системы интегральных уравнений (2.38) справедливы теоремы Фредгольма (см. пункт 6° § 5 гл. I). В частности, для областей класса $A^{1,h}$ достаточно малой меры задача (2.28), (2.36) всегда имеет, и притом единственное, решение.

5°. Задача Дирихле для эллиптической системы (2.8). Переходим к изучению задачи Дирихле (2.35) для эллиптической системы (2.8) с аналитическими коэффициентами.

В пункте 2° настоящего параграфа было показано, что в односвязной области D^*, лежащей в области задания системы (2.8), все действительные регулярные решения этого уравнения представляются формулой (2.25). Принимая без ограничения общности, что точка $z_0=0\in D^*$, формулу (2.25) перепишем в виде

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\left\{\alpha(z, \bar z)\varphi(z)+\int_0^z\beta(z, \bar z, t)\varphi(t)\,dt\right\}, \tag{2.42}$$

где

$$\alpha(z, \bar z)=R(z, 0;\ z, \bar z), \tag{2.43}$$

$$\beta(z, \bar z, t)=\frac{\partial}{\partial t}R(t, 0;\ z, \bar z)-R(t, 0;\ z, \bar z)B(t, 0), \tag{2.44}$$

причем векторы $\varphi(z)$ и $u(x, y)$ связаны между собой соотношением

$$\varphi(z)=u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)-\frac{1}{2}R(0, 0;\ z, 0)\,u(0, 0). \tag{2.45}$$

Из (2.45), в частности, следует, что

$$\operatorname{Im}\varphi(0)=0, \tag{2.46}$$

Таким образом, *формула* (2.42) *устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех регулярных в области* D^* *решений системы* (2.8) *и множеством всех аналитических векторов* $\varphi(z)$ *комплексного переменного* $z \in D^*$, *удовлетворяющих условию* (2.46).

Пусть D — односвязная область класса $A^{2,0}$, содержащаяся вместе со своей границей S в области D^* и $z_0=0 \in D$.

В этом пункте нашей целью является изучение задачи Дирихле в следующей постановке: *найти регулярное в области* D *решение* $u(x, y)$ *системы* (2.8), *принадлежащее классу* $C^{0,h}(D \cup S)$, $0 < h \leqslant 1$, *и удовлетворяющее краевому условию* (2.35), *в котором вектор* $f(t_0) \in C^{0,h}(S)$.

Из формул (2.42), (2.43), (2.44) следует, что *каждому аналитическому в области* D *вектору* $\varphi(z) \in C^{0,h}(D \cup S)$ *по формуле* (2.42) *соответствует регулярное в области* D *решение* $u(x, y)$ *системы* (2.8), *принадлежащее классу* $C^{0,h}(D \cup S)$.

Будем предполагать, что и, наоборот, *каждому регулярному в области* D *решению* $u(x, y)$ *системы* (2.8) *и* $(x, y) \in C^{0,h}(D \cup S)$ *соответствует единственный аналитический в области* D *вектор* $\varphi(z)$, *определенный формулой* (2.45), *принадлежащий классу* $C^{0,h}(D \cup S)$ *и удовлетворяющий условию* (2.46). Попутно покажем, что это предположение действительно имеет место.

Решение $u(x, y)$ задачи (2.8), (2.35) будем искать в виде (2.42), где $\varphi(z) \in C^{0,h}(D \cup S)$ — неизвестный в области D аналитический вектор, удовлетворяющий условию (2.46). В силу (2.33) и (2.46) вектор $\varphi(z)$ можем искать в виде

$$\varphi(z) = \int_S \frac{\mu(t)\, t\, ds_t}{t - z}, \tag{2.47}$$

где μ — неизвестный действительный вектор $\mu(t) \in C^{0,h}(S)$.

Подставляя выражение (2.47) для вектора $\varphi(z)$ в правую часть формулы (2.42) и переходя к пределу при $z \to t_0 \in S$ изнутри области D, в силу первой из формул

(SP) для определения $\mu(t)$ получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\operatorname{Re}\Big\{\pi i\alpha(t_0, \bar t_0)\, t_0 \bar t_0' \mu(t_0) + \int_S \Big[\frac{\alpha(t_0, \bar t_0)t}{t-t_0} - Q(t_0, t)\, t\Big]\mu(t)\, ds\Big\} = f(t_0), \quad t_0 \in S, \tag{2.48}$$

где

$$Q(t_0, t) = \int_0^t \frac{\beta(t_0, \bar t_0, t_1)}{t_1 - t}\, dt_1. \tag{2.49}$$

В обозначениях

$$\alpha^*(t_0) = \operatorname{Re}[\pi i \alpha(t_0, \bar t_0)\, t_0 \bar t_0'], \tag{2.50}$$

$$K(t_0, t) = (t-t_0)\bar t' \operatorname{Re}\Big[\frac{\alpha(t_0, \bar t_0)t}{t-t_0} - Q(t_0, t)\, t\Big] \tag{2.51}$$

систему (2.48) можем переписать в виде

$$T\mu = \alpha^*(t_0)\mu(t_0) + \beta^*(t_0)\int_S \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0} + \int_S K_1(t_0, t)\,\mu(t)\,dt = f(t_0), \tag{2.52}$$

где

$$\beta^*(t_0) = K(t_0, t_0) = \operatorname{Im} i\alpha(t_0, \bar t_0)\, t_0 \bar t_0', \tag{2.53}$$

$$K_1(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - K(t_0, t_0)}{t-t_0}. \tag{2.54}$$

На основании (2.43), (2.44), (2.49), (2.50), (2.51), (2.53) и (2.54) заключаем, что матрицы $\alpha^*(t_0)$, $\beta^*(t_0)$ и $K_1(t_0, t)$ при $t \neq t_0$ принадлежат классу $C^{1,0}(S)$, а при $t \to t_0$ для каждого элемента K_{1jl} матрицы $K_1(t_0, t)$ имеет место оценка

$$K_{1jl} = O(|t-t_0|^{-h}), \quad 0 \leqslant h < 1.$$

В силу (2.43), (2.50) и (2.53) имеем

$$\alpha^* + i\beta^*\pi = \pi i t \bar t' \alpha(t, \bar t). \tag{2.55}$$

На основании (2.15) и (2.43) получаем

$$\det \alpha(t, \bar t) = \exp\Big(-\int_0^{\bar t} \sum_{k=1}^N a_{kk}(t, t_1)\, dt_1\Big). \tag{2.56}$$

Из (2.55), учитывая (2.56), заключаем, что *на S всюду соблюдены условия* (1.260), *гарантирующие применимость теорем Нетера для системы сингулярных интегральных уравнений* (2.52).

Поскольку в силу (2.55) и (2.56) приращение

$$\arg \frac{\det (\alpha^* - i\pi\beta^*)}{\det (\alpha^* + i\pi\beta^*)}$$

при однократном обходе контура S равно нулю, на основании третьей теоремы Нетера заключаем, что *индекс $\varkappa$ системы сингулярных интегральных уравнений* (2.52) *равен нулю.*

Решению μ_0 соответствующей (2.52) однородной системы сингулярных интегральных уравнений

$$T\mu_0 = \alpha^* (t_0)\, \mu_0 (t_0) + \beta^* (t_0) \int\limits_S \frac{\mu_0 (t)\, dt}{t - t_0} + \int\limits_S K_1 (t_0, t)\, \mu_0 (t)\, dt = 0 \qquad (2.57)$$

сопоставляется решение $u_0 (x, y)$ однородной задачи Дирихле

$$u_0 (t_0) = 0, \qquad t_0 \in S, \qquad (2.58)$$

для системы (2.8).

Если однородная задача (2.8), (2.58) имеет только тривиальное решение, то и однородная система (2.57) не может иметь нетривиальных решений, и, стало быть, в силу первой теоремы Нетера у союзной с (2.58) однородной системы сингулярных интегральных уравнений отсутствуют нетривиальные решения. Отсюда на основании второй теоремы Нетера заключаем, что *неоднородная система* (2.52) *при любой правой части $f (t_0) \in C^{0, h} (S)$ имеет, и притом единственное, решение $\mu (t_0) \in C^{0, h} (S)$*. Подставляя соответствующий μ по формуле (2.47) аналитический вектор $\varphi (z)$ в правую часть (2.42), получаем решение (единственное) задачи (2.8), (2.35). Следовательно, в рассматриваемом случае, если $u (x, y) \in C^{0, h} (D \cup S)$, то $\varphi (z)$ также принадлежит классу $C^{0, h} (D \cup S)$ и сделанное выше предположение, что $\varphi (z) \in C^{0, h} (D \cup S)$, действительно имеет место.

Если же для области D класса $A^{2, 0}$ не имеет места единственность решения задачи (2.8), (2.35), то разобьем границу S области D на конечное число мелких дуг s_k таким образом, чтобы подобласть $\delta_k \subset D$, граница σ_k которой содержит s_k, принадлежала классу $A^{2,0}$ и имела настолько малую меру, чтобы для δ_k однородная задача (2.8), (2.58) не имела отличных от нуля решений (см. пункт 4° настоящего параграфа). Отсюда, как и выше, убеждаемся, что если $u(x, y) \in C^{0,h}(D \cup S)$, то $\varphi(z) \in C^{0,h}(\delta_k \cup \sigma_k)$ и, следовательно, $\varphi(z) \in C^{0,h}(D \cup S)$.

Таким образом, мы пришли к заключению, что *формула* (2.42) *устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех регулярных в области D решений $u(x, y)$ класса $C^{0,h}(D \cup S)$ системы* (2.8) *и множеством всех аналитических в области D векторов класса $C^{0,h}(D \cup S)$, удовлетворяющих условию* (2.46). Отсюда, в свою очередь, следует *эквивалентность между задачей* (2.8), (2.35) *и системой сингулярных интегральных уравнений* (2.52).

Как уже было показано, нормальная разрешимость задачи (2.8), (2.35) гарантируется условиями

$$\alpha^* + i\pi\beta^* \neq 0, \qquad \alpha^* - i\pi\beta^* \neq 0,$$

которые всегда выполнены. Когда однородная система сингулярных интегральных уравнений (2.57) имеет конечное число l линейно независимых решений $\mu_0^{(1)}, \ldots, \mu_0^{(l)}$, им соответствует l линейно независимых решений $u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(l)}$ однородной задачи (2.8), (2.58). Для разрешимости неоднородной системы сингулярных интегральных уравнений (2.52) и, стало быть, для разрешимости задачи (2.8), (2.35) необходимо и достаточно выполнение l условий

$$\int_S f \cdot \psi_0^{(k)} dt = 0, \qquad k = 1, \ldots, l,$$

где $\{\psi_0^{(k)}\}$, $k = 1, \ldots, l$, — все линейно независимые решения союзной с (2.57) системы

$$T^*\psi_0 = \psi_0^{(k)}(t_0)\, \alpha^*(t_0) - \int_S \frac{\psi_0^{(k)}(t)\, \beta^*(t)\, dt}{t - t_0} +$$

$$+ \int_S \psi_0^{(k)}(t)\, K_1(t, t_0)\, dt = 0.$$

Эти утверждения позволяют сделать заключение о том, что *по принятой в пункте* 8° § 5 *гл.* I *условной классификации задача* (2.8), (2.35) *фредгольмова.*

В частности, *если однородная задача* (2.8), (2.58) *не имеет отличных от нуля решений, то неоднородная задача* (2.8), (2.35) *всегда разрешима.* Такая ситуация возникает, например, в случае эллиптических уравнений и систем, для которых имеют место принципы экстремума, изложенные в пункте 2° § 2 гл. I. Существуют, однако, широкие классы эллиптических систем, для которых принципы экстремума перестают быть верными, но единственность решения задачи Дирихле все же имеет место.

К такому классу относятся линейные эллиптические системы (1.4), *записанные в виде*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n} e^i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=F, \tag{2.59}$$

при соблюдении условий, что матрицы e^i все симметричны,

$$\sum_{i=1}^{n}\eta^{(i)}\cdot\sum_{j=1}^{n}A^{ij}\eta^{(j)}\geqslant 0 \tag{2.60}$$

и

$$\eta\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e^i}{\partial x_i}-2c\right)\eta\geqslant 0, \tag{2.61}$$

где $\eta^{(i)}$, η — произвольные N-мерные действительные векторы, а точка обозначает обычное скалярное произведение векторов.

Действительно, если вектор $u(x)$ является регулярным решением соответствующей (2.59) однородной системы

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n} e^i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=0 \tag{2.62}$$

в конечной области D класса $A^{1,h}$, причем $u(x)\in C^{1,0}(D\cup S)$ и

$$u(x)=0,\qquad x\in\partial D, \tag{2.63}$$

то, интегрируя очевидное тождество

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\sum_{j=1}^{n}A^{ji}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\frac{1}{2}u\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e^i}{\partial x_i}-2c\right)u=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}A^{ji}\frac{\partial u}{\partial x_j}+\frac{1}{2}e^i u\right)\right]$$

по области D и используя формулу (GO), в силу (2.63) получаем

$$\int_D\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\sum_{j=1}^{n}A^{ji}\frac{\partial u}{\partial x_j}+\frac{1}{2}u\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e^i}{\partial x_i}-2c\right)u\right]dx=0.$$

Из этого тождества в силу (2.60), (2.61) приходим к заключению, что $u(x)\equiv 0$ в $D\cup\partial D$.

6°. Задача Пуанкаре для системы (2.8). Будем опять предполагать, что D — односвязная область класса $A^{1,h}$, лежащая вместе с ее границей S в D^*, а действительные квадратные матрицы p^1, p^2 и q порядка N и N-мерный вектор f заданы на S, причем они все принадлежат классу $C^{0,h}(S)$. Этот пункт посвящается изучению задачи Пуанкаре в следующей постановке: *ищется регулярное в области D решение $u(x, y)$ системы (2.8) с аналитическими коэффициентами, принадлежащее классу $C^{0,h}(D\cup S)$ и удовлетворяющее краевому условию*

$$p^1\frac{\partial u}{\partial x}+p^2\frac{\partial u}{\partial y}+qu=f(x, y),\qquad (x, y)\in S. \tag{2.64}$$

В предыдущем пункте было показано, что формула (2.42) устанавливает взаимно однозначное соответствие между регулярными в области D решениями $u(x, y)$ системы (2.8) класса $C^{0,h}(D\cup S)$ и аналитическими в D векторами $\varphi(z)$ класса $C^{0,h}(D\cup S)$. Основываясь на этом, покажем, что *если $u(x, y)\in C^{1,h}(D\cup S)$, то и $\varphi(z)\in C^{1,h}(D\cup S)$.*

Действительно, в силу формулы (2.42) имеем

$$\operatorname{Re}[\alpha(z, \bar z)\varphi(z)]=u(x, y)-u_1(x, y),\quad x+iy=z\in S, \tag{2.65}$$

где

$$u_1(x, y) = \operatorname{Re} \int_0^z \beta(z, \bar{z}, t)\,\varphi(t)\,dt \in C^{1,h}(D \cup S).$$

Ввиду того, что матрица $\alpha(z, \bar{z})$ и вектор $u(x, y) - u_1(x, y)$ принадлежат классу $C^{1,h}(D \cup S)$, решая краевую задачу (2.65) относительно $\varphi(z)$, как и в предыдущем пункте, убедимся в том, что $\varphi(z) \in C^{1,h}(D \cup S)$. Обратное утверждение очевидно.

Следовательно, *формула* (2.42) *устанавливает взаимно однозначное соответствие между решениями* $u(x, y) \in C^{1,h}(D \cup S)$ *системы* (2.8) *и аналитическими векторами* $\varphi(z) \in C^{1,h}(D \cup S)$, *удовлетворяющими условию* (2.46). В пункте 3° настоящего параграфа было отмечено, что интегральное представление И. Н. Векуа (2.34) устанавливает взаимно однозначное соответствие между аналитическими в области D векторами $\varphi(z) \in C^{1,h}(D \cup S)$ и действительными векторами $\mu \in C^{0,h}(S)$.

В обозначениях

$$x + iy = t \in S, \qquad p^1(t) + ip^2(t) = H(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$$

краевое условие (2.64) принимает вид

$$H(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \overline{H(t)}\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} + qu = f(t), \qquad t \in S. \tag{2.66}$$

Подставляя определенный формулой (2.34) вектор $\varphi(z)$ в общее представление (2.42) решений системы (2.8) и внося полученное для $u(x, y)$ выражение в левую часть условия (2.66), для определения вектора μ получаем систему сингулярных интегральных уравнений

$$\operatorname{Re}\left\{-\pi i P(t)\,\bar{t}'\mu(t) - \int_S \left[\frac{P(t)}{t_1 - t} - R(t, t_1)\right]\mu(t_1)\,ds_{t_1}\right\} = f(t),$$

$$t \in S, \tag{2.67}$$

где

$$P(t) = H(t)\,\alpha(t, \bar{t}), \tag{2.68}$$

$$R(t, t_1) = Q(t)\log e\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) + \int_0^t R_1(t, t_2)\log e\left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right)dt_2, \tag{2.69}$$

$$Q(t) = H(t)\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t, \bar{t}) + H(t)\,\beta(t, \bar{t}, t) + \overline{H(t)}\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\alpha(t, \bar{t}) + q(t)\,\alpha(t, \bar{t}), \tag{2.70}$$

$$R_1(t, t_2) = H(t)\frac{\partial}{\partial t}\beta(t, \bar{t}, t_2) + \overline{H(t)}\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\beta(t, \bar{t}, t_2) + q(t)\,\beta(t, \bar{t}, t_2). \tag{2.71}$$

Эквивалентность между задачей (2.8), (2.64) и системой (2.67) очевидна.

В новых обозначениях

$$\alpha^*(t) = \mathrm{Re}\,(-\pi i P(t)\,\bar{t}'), \tag{2.72}$$

$$K_1(t, t_1) = \bar{t}_1'(t_1 - t)\,\mathrm{Re}\left[-\frac{P(t)}{t_1 - t} + R(t, t_1)\right], \tag{2.73}$$

$$\beta^*(t) = K_1(t, t) = \mathrm{Im}\,(-iP(t)\,\bar{t}'), \tag{2.74}$$

$$K(t, t_1) = \frac{K_1(t, t_1) - K_1(t, t)}{t_1 - t} \tag{2.75}$$

система (2.67) принимает вид

$$T\mu = \alpha^*(t)\,\mu(t) + \beta^*(t)\int_S \frac{\mu(t_1)\,dt_1}{t_1 - t} + \int_S K(t, t_1)\,\mu(t_1)\,dt_1 = f(t). \tag{2.76}$$

В принятых выше предположениях относительно данных задачи (2.8), (2.64) и контура S области D в силу формул (2.68)—(2.75) заключаем, что матрицы $\alpha^*(t)$, $\beta^*(t)$ и $K(t, t_1)$ при $t \neq t_1$ принадлежат классу $C^{0,h}(S)$, причем матрица $K(t, t_1)$ при $t_1 \to t$ имеет особенность вида

$$K(t, t_1) = O(|t - t_1|^{-h_1}), \qquad 0 \leqslant h_1 < 1.$$

В силу (2.68), (2.72), (2.74) имеем

$$\alpha^*(t)+i\pi\beta^*(t)=-\pi iP(t)\,\bar{t}'=-\pi i\bar{t}'H(t)\,\alpha(t,\ \bar{t}),$$

и, следовательно,

$$\det(\alpha^*+i\pi\beta^*)=(-\pi i\bar{t}')^N\det(p^1+ip^2)\cdot\det\alpha(t,\ \bar{t}). \tag{2.77}$$

Поскольку в силу (2.15), (2.43) $\det\alpha(t,\ \bar{t})\neq 0,\ t\in S$, из (2.77) заключаем, что *для системы сингулярных интегральных уравнений* (2.76) *условие нормальной разрешимости имеет вид*

$$\det[p^1(t)+ip^2(t)]\neq 0,\qquad t\in S. \tag{2.78}$$

При соблюдении этого условия в силу первой теоремы Нетера числа l и l' линейно независимых решений союзных однородных систем

$$T\mu_0=0,\qquad T^*\nu_0=0$$

оба конечны, а на основании (2.77) *в силу третьей теоремы Нетера индекс $\varkappa$ оператора T дается формулой* (М):

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det(\alpha^*-i\pi\beta^*)}{\det(\alpha^*+i\pi\beta^*)}\right]=2(p+N),$$

где

$$p=\frac{1}{2\pi}[\arg\det(p^1-ip^2)]_S, \tag{2.79}$$

причем

$$l-l'=\varkappa=2(p+N). \tag{2.80}$$

В силу же второй теоремы Нетера для разрешимости задачи (2.8), (2.64) *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\int\limits_S f\nu_0^{(k)}(t)\,dt=0,\qquad k=1,\ldots,l',$$

для всех линейно независимых решений $\nu_0^{(k)}$ союзной с $T\mu_0=0$ однородной системы $T^*\nu_0=0$.

Тем самым доказано, что *выполнение условий* (2.78) *гарантирует нетеревость задачи* (2.8), (2.64). Отсюда, в свою очередь, следует, что *из отсутствия нетривиальных решений системы $T^*\nu_0=0$ следует безусловная разрешимость* (т. е. разрешимость при любой правой части f) *задачи* (2.8), (2.64). В частности, *когда соответствующая*

(2.8), (2.64) *однородная задача имеет только тривиальное решение и* $\varkappa=0$, *то неоднородная задача* (2.8), (2.64) *всегда имеет, и притом единственное, решение.* Наконец, из формулы (2.80) следует *необходимость условия* $\varkappa \geqslant 0$ *для разрешимости этой задачи при любой правой части* $f(t) \in C^{0,h}(S)$.

7°. Некоторые частные случаи задачи (2.8), (2.64). Предположим, что краевое условие (2.64) задачи Пуанкаре записано в виде

$$p_*^1(t)\frac{du}{d\mathscr{N}_t} - p_*^2\frac{du}{ds_t} + q(t)u = f(t), \qquad t \in S, \tag{2.81}$$

где действительные $N\times N$-матрицы p_*^1, p_*^2, q и вектор f принадлежат классу $C^{0,h}(S)$, а $\mathscr{N}_t$ и s_t — единичные векторы нормали и касательной к S в точке t.

Ввиду того, что

$$\frac{d}{d\mathscr{N}_t} = \sin\widehat{sx}\frac{\partial}{\partial x} - \cos\widehat{sx}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{d}{ds} = \cos\widehat{sx}\frac{\partial}{\partial x} + \sin\widehat{sx}\frac{\partial}{\partial y},$$

согласно (2.79) имеем

$$p = \frac{1}{2\pi}[\arg\det(p^1 - ip^2)]_S =$$
$$= \frac{1}{2\pi}[\arg i^N t'^N \det(p_*^1 + ip_*^2)]_S = -N + p^*, \tag{2.82}$$

где

$$p^* = \frac{1}{2\pi}[\arg\det(p_*^1 + ip_*^2)]_S. \tag{2.83}$$

В силу (2.80) и (2.82) имеем

$$l - l' = \varkappa = 2p^*. \tag{2.84}$$

Когда $p_*^1 = E$, $p_*^2 = 0$, $t \in S$, т. е. когда краевое условие (2.81) имеет вид

$$\frac{du}{d\mathscr{N}_t} + qu = f, \qquad t \in S,$$

задача (2.8), (2.64) носит название *задачи Робена.* При $q(t) = 0$, $t \in S$, задача Робена переходит в задачу Неймана

$$\frac{du}{d\mathscr{N}_t} = f(t), \qquad t \in S. \tag{2.85}$$

Для задачи Робена (2.8), (2.85) *в силу* (2.83) *имеем, что* $l-l'=0$, *т. е. эта задача фредгольмова.* В частности, когда соответствующая (2.85) однородная задача имеет только тривиальное решение, то неоднородная задача (2.85) всегда имеет, и притом единственное, решение.

Частным случаем задачи Пуанкаре является смешанная задача, когда в краевом условии (2.81) первые k строк матриц p_*^1 и p_*^2 сплошь заполнены нулями, а в первых k строках матрицы q лишь диагональные элементы отличны от нуля, причем без ограничения общности можно считать, что каждый из них равен единице. Записывая краевые условия этой задачи в виде

$$u_j=f_j, \qquad j=1,\ldots,k,$$

$$\sum_{m=1}^{N} p^1_{*jm}\frac{du_m}{d\mathcal{N}_t}-\sum_{m=1}^{N} p^2_{*jm}\frac{du_m}{ds_t}+\sum_{m=1}^{N} q_{jm}u_m=f_j,$$

$$j=k+1,\ldots,N,$$

и требуя, чтобы все f_j, $j=1,\ldots,k$, принадлежали классу $C^{1,h}(S)$, этим условиям можно придать вид

$$p^1_{jm}=\begin{cases}\cos\widehat{sx}, & j,\ m=1,\ldots,k,\\ 0, & j=1,\ldots,k;\quad m=1,\ldots,N,\quad j\neq m,\\ p^1_{*jm}\sin\widehat{sx}-p^2_{*jm}\cos\widehat{sx}, & \\ & j=k+1,\ldots,N,\quad m=1,\ldots,N;\end{cases}$$

$$p^2_{jm}=\begin{cases}\sin\widehat{sx}, & j,\ m=1,\ldots,k,\\ 0, & j=1,\ldots,k,\quad m=1,\ldots,N,\quad j\neq m,\\ -p^1_{*jm}\cos\widehat{sx}-p^2_{*jm}\sin\widehat{sx}, & \\ & j=k+1,\ldots,N,\quad m=1,\ldots,N.\end{cases}$$

Следовательно, в силу (2.82) имеем

$$p=-N+\frac{1}{2\pi}[\arg\det(p_*^3+ip_*^4)]_S,$$

где элементами $(N-k)\times(N-k)$-матриц p_*^3 и p_*^4 являются $p^3_{*jm}=p^1_{*j+k,\,m+k}$, $\quad p^4_{*jm}=p^2_{*j+k,\,m+k}$, $\quad j,\ m=1,\ldots,N-k$, причем условие нормальной разрешимости (нетеровости) (2.79) задачи (2.8), (2.64) принимает вид

$$\det [p_*^3(t)+ip_*^4(t)] \neq 0, \qquad t \in S.$$

Предположим теперь, что коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$ — симметричные матрицы, p_*^1 — единичная матрица, а p_*^2 — диагональная матрица класса $C^{1,0}(S)$. Тогда для решения $u(x, y)$ однородной задачи (2.8), (2.81) справедливо тождество

$$\int\limits_D \left[u_x^2+u_y^2+\frac{1}{2}u\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}-2c\right)u\right]dx\,dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_S u\cdot\left(\frac{dp_*^2}{ds}+2q-a\cos\widehat{\mathscr{N}x}-b\cos\widehat{\mathscr{N}y}\right)u\,ds=0. \qquad (2.86)$$

Если дополнительно известно, что для любого действительного вектора η

$$\left.\begin{aligned}&\eta\cdot\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}-2c\right)\eta\geqslant 0,\\ &\eta\cdot\left(\frac{dp_*^2}{ds}+2q-a\cos\widehat{\mathscr{N}x}-b\cos\widehat{\mathscr{N}y}\right)\eta\geqslant 0,\end{aligned}\right\} \qquad (2.87)$$

то из тождества (2.86) заключаем, что $u(x, y)=0$ всюду в $D\cup S$.

Следовательно, *в рассматриваемом случае условия* (2.87) *достаточны для единственности решения задачи* (2.8), (2.81).

Изложенные в этом параграфе результаты в случае одного уравнения ($N=1$) были получены И. Н. Векуа [2] и Б. В. Хведелидзе [1], [2], а в случае системы ($N>1$) — автором (см. А. В. Бицадзе [1], [2], [5], [6]).

§ 2. Равномерно эллиптические системы с нерасщепленными главными частями

1°. Интегральное представление решений равномерно эллиптической системы методом матричного параметрикса. В конечной области D, ограниченной замкнутой кривой

Ляпунова S, рассмотрим линейную равномерно эллиптическую систему (1.4), записанную в виде

$$L(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y), \tag{2.88}$$

коэффициенты которой являются действительными $N\times N$-матрицами

$$A, B, C \in C^{2,h}(D\cup S), \quad a, b \in C^{1,h}(D\cup S), \quad c \in C^{0,h}(D\cup S),$$

а правая часть $F = (F_1, \ldots, F_N) \in C^{0,h}(D\cup S)$, $0 < h \leqslant 1$. Без ограничения общности можем считать, что

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S. \tag{2.89}$$

Система

$$L^*(v) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(vA) + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(vB) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(vC) - \frac{\partial}{\partial x}(va) - \frac{\partial}{\partial y}(vb) + vc = 0 \tag{2.90}$$

является сопряженной с однородной системой

$$L(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \tag{2.91}$$

соответствующей (2.88).

Введем матричный параметрикс

$$\psi(z, t) = \frac{1}{4\pi^2}\operatorname{Re}\int_{\gamma} \Delta^{-1}(z, \lambda)\log[x - \xi + \lambda(y - \eta)]\,d\lambda, \quad z = x + iy, \quad t = \xi + i\eta, \tag{2.92}$$

где Δ^{-1} — матрица, обратная матрице $\Delta = A + 2B\lambda + C\lambda^2$, а γ — простой кусочно гладкий контур, лежащий в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и охватывающий все лежащие в этой полуплоскости корни характеристического полинома $P(\lambda) = \det(A + 2B\lambda + C\lambda^2)$.

Определенная формулой (2.92) матрица однозначна, и относительно последней пары своих аргументов она является решением системы

$$
\begin{aligned}
&A(x, y)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}+C(x, y)\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=0,\\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}A(x, y)+2\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}B(x, y)+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}C(x, y)=0.
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

Удалим точку $z\in D$ из этой области вместе с кругом δ: $|z-t|<\varepsilon$ достаточно малого радиуса и для оставшейся части D_ε области D применим очевидную формулу

$$
\begin{aligned}
&\int_{D_\varepsilon}[vL(u)-L^*(v)u]\,d\xi\,d\eta=\\
&=\int_{S\cup\partial\delta}\left\{\left[vA\frac{\partial u}{\partial\xi_1}+2vB\frac{\partial u}{\partial\eta_1}-\frac{\partial}{\partial\xi_1}(vA)u+vau\right]\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\xi_1}+\right.\\
&\left.+\left[vc\frac{\partial u}{\partial\eta_1}-2\frac{\partial}{\partial\xi_1}(vB)u-\frac{\partial}{\partial\eta_1}(vC)u+vbu\right]\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\eta_1}\right\}ds_\tau,\\
&\qquad\tau=\xi_1+i\eta_1,
\end{aligned}
\tag{2.94}
$$

где матрица $v=\psi(z, t)$, а вектор $u(t)$ — решение задачи (2.88), (2.89). При $\varepsilon\to 0$ в пределе из (2.94) получаем

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}I_\varepsilon u(z)&=\int_D\psi(z, t)F(t)\,d\xi\,d\eta-\\
&-\int_D M(z, t)u(t)\,d\xi\,d\eta+\int_S\Omega(z, \tau)\frac{du(\tau)}{d\mathscr{N}_\tau}ds_\tau,
\end{aligned}
\tag{2.95}
$$

где

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon=-\int_{\partial\delta}&\left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}A(z)\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\xi_1}+\right.\\
&\left.+2\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}B(z)\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\eta_1}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta_1}C(z)\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\eta_1}\right]ds_\tau,\\
&M(z, t)=L^*_{\xi\eta}[\psi(z, t)],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega(z, \tau)=-\psi(z, \tau)&[A(\tau)\cos^2\widehat{\mathscr{N}_\tau\xi_1}+\\
&+2B(\tau)\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\xi_1}\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\eta_1}+C(\tau)\cos^2\widehat{\mathscr{N}_\tau\eta_1}].
\end{aligned}
$$

Так как в силу (2.92) и (2.93) для каждого элемента M_{kj} матрицы M при $z \to t$ имеет место оценка

$$M_{kj}(z, t) = O(|z-t|^{-1}),$$

второй интеграл в правой части (2.95) является обычным несобственным интегралом.

Подставляя выражение $\psi(z, t)$ из формулы (2.92) в правую часть (2.95) и принимая во внимание, что

$$\int\limits_{\partial\delta} \frac{\cos \widehat{\mathcal{N}_\tau \xi_1}}{(\xi_1 - x) + \lambda(\eta_1 - y)}\, ds_\tau =$$

$$= i \int\limits_{\partial\delta} \frac{\cos \widehat{\mathcal{N}_\tau \eta_1}}{(\xi_1 - x) + \lambda(\eta_1 - y)}\, ds_\tau = -\frac{2\pi i}{\lambda + i},$$

будем иметь

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int\limits_\gamma \frac{\Delta^{-1}(z, \lambda)}{\lambda + i} [iA(z) + 2B(z) + \lambda C(z)]\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int\limits_\gamma \frac{\Delta^{-1}(z, \lambda)}{\lambda + i} [i\Delta(z, \lambda) + 2(1 - i\lambda) B(z) +$$

$$+ \lambda(1 - i\lambda) C(z)]\, d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} i \int\limits_\gamma \Delta^{-1}(z, \lambda) [2B(z) + \lambda C(z)]\, d\lambda. \qquad (2.96)$$

В силу равномерной эллиптичности системы (2.88) все корни с положительными мнимыми частями полинома $P(z, \lambda)$, когда точка z меняется в $D \cup S$, лежат над некоторой прямой $\operatorname{Im} \lambda = \lambda_1 > 0$. Поэтому в правой части формулы (2.96) в качестве пути интегрирования γ можно брать полуокружность $|\lambda| = R$, $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$, достаточно большого радиуса, на диаметре которой подынтегральное выражение является действительным. Наряду с этим, принимая во внимание то обстоятельство, что вблизи бесконечно удаленной точки комплексной плоскости λ имеет место представление

$$2\Delta^{-1}(z, \lambda) B(z) + \lambda \Delta^{-1}(z, \lambda) C(z) = \frac{C^{-1}C}{\lambda} + \frac{B_1(z, \lambda)}{\lambda^2},$$

где каждый элемент матрицы $B_1(z, \lambda)$ является ограниченной функцией λ, из формулы (2.96) при $R \to \infty$ получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = C^{-1}C = E$$

и, стало быть, формулу (2.95) можем записать в виде

$$u(z) + \int_D M(z, t)\, u(t)\, d\xi\, d\eta = \\ = \int_D \psi(z, t) F(t)\, d\xi\, d\eta + \int_S \Omega(z, \tau) \frac{du(\tau)}{d\mathscr{N}_\tau} ds_\tau. \qquad (2.97)$$

Представим матрицу $M(z, t)$ в виде

$$M(z, t) = \alpha(z, t) + \sum_{k=1}^{l_1} \beta^k(t)\, \gamma_k(z),$$

где

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} \int_D \sum_{j=1}^{N} |\alpha_{kj}|\, d\xi\, d\eta < q = \mathrm{const} < 1,$$

а функции $\gamma_k(z)$, $k = 1, \ldots, l_1$, линейно независимы в области D.

Обозначив через $R_1(z, t)$ матричную резольвенту Фредгольма для ядра $\alpha(z, t)$, тождество (2.97) перепишем в виде

$$u(z) = \int_D M_1(z, t) F(t)\, d\xi\, d\eta + \\ + \int_S \Omega_1(z, \tau) \frac{du(\tau)}{dN_\tau} ds_\tau + \sum_{k=1}^{l_1} N^{(k)}(z)\, C^{(k)}, \qquad (2.98)$$

где $M_1 = G(\psi)$, $\Omega_1 = G(\Omega)$, $N^{(k)} = G(E\gamma_k)$, E — единичная $N \times N$-матрица, G — интегральный оператор вида

$$G(\Theta) = \Theta(z) + \int_D R_1(z, t_1)\, \Theta(t_1)\, d\xi_1\, d\eta_1, \qquad \xi_1 + i\eta_1 = t_1,$$

а

$$C^{(k)} = -\int_D \beta^{(k)}(t)\, u(t)\, d\xi\, d\eta.$$

Следовательно, любое решение задачи (2.88), (2.89) в случае ее безусловной или условной разрешимости можно представить в виде (2.98). Поэтому естественно искать решение этой задачи в виде

$$u(z)=\int_D M_1(z,\ t)\,g(t)\,d\xi\,d\eta+\int_S \Omega_1(z,\ \tau)\,f(\tau)\,ds_\tau+\sum_{k=1}^{l} N^{(k)}(z)\,C^{(k)},$$

где $g\in C^{0,h}(D\cup S)$, $f\in C^{0,h}(S)$ — неизвестные плотности, а $C^{(k)}$ — также неизвестные постоянные векторы. Дальше при изучении задачи (2.88), (2.89) можно использовать метод интегральных уравнений. Н. Е. Товмасян [1], [2] привел задачу (2.88), (2.89) к системе сингулярных интегральных уравнений вида (1.259) и показал, что условие нормальной разрешимости (1.260) для полученной им системы будет соблюдено, если

$$\det\int_\gamma \Delta^{-1}(z,\ \lambda)\,d\lambda\neq 0,\qquad z\in S, \tag{2.99}$$

причем при выполнении условия (2.99) задача (2.88), (2.89) — фредгольмова.

К этому же условию другим путем пришел Я. Б. Лопатинский [1] в 1950 г. В случае системы (2.8), изученной нами в 1944 г. (см. А. В. Бицадзе [2]), условие (2.99) соблюдено. Оно соблюдено и в случае системы (2.59) при наличии неравенства (2.60), указанного впервые Сомильяна [1] и обобщенного для системы высшего порядка М. И. Вишиком [1]. Уравнения, удовлетворяющие условию (2.60), принято называть *сильно эллиптическими.*

Если в тождестве (2.94) примем, что v — матричный параметрикс $\psi(z,\ t)$, но от решения $u(z)$ системы (2.88) не будем требовать, чтобы оно удовлетворяло условию (2.89), то вместо представления (2.97) будем иметь

$$u(z)+\int_D M(z,\ t)\,u(t)\,d\xi\,d\eta=$$
$$=\int_D \psi(z,\ t)\,F(t)\,d\xi\,d\eta+\int_S G_1(z,\ \tau)\,\frac{\partial u(\tau)}{\partial\xi_1}\,ds_\tau+$$
$$+\int_S G_2(z,\ \tau)\,\frac{\partial u(\tau)}{\partial\eta_1}\,ds_\tau+b_0(z)\,u(z_0),\qquad z_0\in S, \tag{2.100}$$

где

$$G_1(z,\ \tau)=-\psi(z,\ \tau)A(\tau)\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\xi_1}+\\ +\tilde{\Omega}(z,\ \tau)\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\eta_1},\quad \xi_1+i\eta_1=\tau\in S,$$

$$G_2(z,\ \tau)=-\psi(z,\ \tau)[2B(\tau)\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\xi_1}+\\ +C(\tau)\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\eta_1}]-\tilde{\Omega}(z,\ \tau)\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\xi_1},$$

$$\tilde{\Omega}(z,\ \tau)=\int_{z_0}^{\tau}\Omega(z,\ \tau_1)\,ds_{\tau_1},\qquad \xi_2+i\eta_2=\tau_1\in S,$$

$$\Omega(z,\ \tau)=\frac{\partial}{\partial\xi_1}[\psi(z,\ \tau)A(\tau)]\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\xi_1}+\\ +2\frac{\partial}{\partial\xi_1}[\psi(z,\ \tau)B(\tau)]\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\eta_1}+\\ +\frac{\partial}{\partial\eta_1}[\psi(z,\ \tau)C(\tau)]\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\eta_1}-\\ -\psi(z,\ \tau)a(\tau)\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\xi_1}-\psi(z,\ \tau)b(\tau)\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau\eta_1},$$

$$b_0(z)=\int_S\Omega(z,\ \tau)\,ds_\tau.$$

Обращая (2.100) так же, как и (2.98), получаем

$$u(z)=\int_D M_1(z,\ t)F(t)\,d\xi\,d\eta+\int_S\Omega_1(z,\ \tau)\frac{\partial u(\tau)}{\partial\xi_1}ds_\tau+\\ +\int_S\Omega_2(z,\ \tau)\frac{\partial u(\tau)}{\partial\eta_1}ds_\tau+\sum_{k=1}^{l_1}N^{(k)}(z)C^{(k)}+\\ +\omega_0(z)u(z_0),\qquad(2.101)$$

где, в отличие от (2.98),

$$\Omega_1=G(G_1),\qquad\Omega_2=G(G_2),\qquad\omega_0=G(b_0).$$

Исходя из (2.101), если решение $u(x,\ y)$ задачи Пуанкаре (2.88), (2.64) искать в виде

$$u(z)=\int_D M_1(z,\ t)g(t)\,d\xi\,d\eta+\int_S\Omega_1(z,\ \tau)\varphi(\tau)\,ds_\tau+\\ +\int_S\Omega_2(z,\ \tau)\chi(\tau)\,d\tau+\sum_{k=1}^{l_1}N^{(k)}(z)C^{(k)}+\omega_0(z)\,d_0,$$

где векторы $g \in C^{1,h}(D \cup S)$, φ, $\chi \in C^{0,h}(S)$ и постоянные векторы $C^{(k)}$, $k=1, \ldots, l_1$, d_0 подлежат определению, причем они связаны между собой соотношениями

$$p^1(t)\varphi(t)+p^2(t)\chi(t)+q(t)d_0+$$
$$+q(t)\int_{z_0}^{t}[-\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau \eta_1}\varphi(\tau)+\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau \xi_1}\chi(\tau)]\,ds_\tau=f(\tau),$$
$$x+iy=t\in S, \qquad \xi_1+i\eta_1=\tau,$$
$$\int_S[\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau \eta_1}\varphi(\tau)-\cos\widehat{\mathscr{N}_\tau \xi_1}\chi(\tau)]\,ds_\tau=0,$$

то получится система сингулярных интегральных уравнений, нетеровость которой будет гарантирована требованием (см. Н. Е. Товмасян [3])

$$\det\begin{vmatrix} p^1 & p^2 \\ P & Q \end{vmatrix}\neq 0, \qquad t\in S, \tag{2.102}$$

где

$$P(t)=\int_\gamma (p^1+\lambda p^2)\Delta^{-1}(t,\lambda)(\lambda\cos\widehat{\mathscr{N}_t x}-\cos\widehat{\mathscr{N}_t y})^{-1}T_1(t)\,d\lambda,$$
$$Q(t)=\int_\gamma (p^1+\lambda p^2)\Delta^{-1}(t,\lambda)(\lambda\cos\widehat{\mathscr{N}_t x}-\cos\widehat{\mathscr{N}_t y})^{-1}T_2(t)\,d\lambda,$$
$$T_1(t)=(\lambda\cos\widehat{\mathscr{N}_t x}-\cos\widehat{\mathscr{N}_t y})^{-1}\times$$
$$\times[-\lambda A(t)\cos^2\widehat{\mathscr{N}_t x}+2A(t)\cos\widehat{\mathscr{N}_t x}\cos\widehat{\mathscr{N}_t y}+$$
$$+2B(t)\cos^2\widehat{\mathscr{N}_t y}+\lambda C(t)\cos^2\widehat{\mathscr{N}_t y}],$$
$$T_2(t)=-(\lambda\cos\widehat{\mathscr{N}_t x}-\cos\widehat{\mathscr{N}_t y})^{-1}\times$$
$$\times[A(t)\cos^2\widehat{\mathscr{N}_t \eta}-2\lambda B(t)\cos^2\widehat{\mathscr{N}_t x}+$$
$$+2\lambda C(t)\cos\widehat{\mathscr{N}_t x}\cos\widehat{\mathscr{N}_t y}-C(t)\cos^2\widehat{\mathscr{N}_t \eta}].$$

Полученное нами в 1944 г. условие (2.78) нормальной разрешимости задачи Пуанкаре (2.64) для системы (2.8) совпадает с условием (2.102) (см. А. В. Бицадзе [2], [5]). Здесь же следует отметить работы А. И. Вольперта [1], А. Джураева [1] и Шехтера [1].

2°. Общее представление решений эллиптической системы с постоянными коэффициентами. Сравнительно полное исследование линейных краевых задач удается, когда эллиптическая система (2.88) имеет вид

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{2.103}$$

где A, B, C — заданные действительные $N\times N$-матрицы, а $u=(u_1, \ldots, u_N)$ — искомый вектор.

Пусть D — односвязная область плоскости переменных x, y и вектор $u(x, y)$ — регулярное в D решение системы (2.103). Без ограничения общности можем считать, что $C=E$.

В обозначениях

$$\frac{\partial u_j}{\partial x}=v_j, \qquad \frac{\partial u_j}{\partial y}=v_{N+j}, \qquad j=1, \ldots, N, \tag{2.104}$$

система (2.103) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial y}-\tilde{A}\frac{\partial v}{\partial x}=0, \tag{2.105}$$

где матрица $\tilde{A}$ символически записывается в виде

$$\tilde{A}=\begin{Vmatrix} 0 & E \\ -A & -2B \end{Vmatrix}.$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ — корни соответствующего системе (2.103) характеристического полинома

$$Q(\lambda)=\det(A+2B\lambda+E\lambda^2)$$

с положительными мнимыми частями, а $k_1, \ldots, k_\mu$ — кратности этих корней.

В результате неособого преобразования искомого вектора

$$v=\tilde{B}w \tag{2.106}$$

систему (2.105) можно привести к каноническому виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{l_j+k}}{\partial y}&=\alpha_{j\,k-1}\frac{\partial w_{l_j+k-1}}{\partial x}+\lambda_j\frac{\partial w_{l_j+k}}{\partial x}, \\ \frac{\partial w_{l_j+N+k}}{\partial y}&=\alpha_{j\,k-1}\frac{\partial w_{l_j+N+k-1}}{\partial x}+\bar{\lambda}_j\frac{\partial w_{l_j+N+k}}{\partial x}, \end{aligned} \tag{2.107}$$

$$k=1, \ldots, k_j; \quad j=1, \ldots, \mu; \quad l_1=0; \quad l_j=k_1+\ldots+k_{j-1},$$

где $\alpha_{j0}=0$, а каждый из α_{jk} при $k>0$ равен либо нулю, либо единице. При этом, в силу эллиптичности системы (2.103), матрицу $\tilde{B}$ можно брать по формуле

$$\tilde{B}=\left\| \begin{matrix} b_{11} \dots b_{1N} & \bar{b}_{11} \dots \bar{b}_{1N} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ b_{2N\,1} \dots b_{2N\,N} & \bar{b}_{2N\,1} \dots \bar{b}_{2N\,N} \end{matrix} \right\|,$$

и, следовательно, справедливо равенство

$$w_{N+k}=\bar{w}_k, \qquad k=1, \dots, N.$$

Из регулярности решения $u(x, y)$ системы (2.103) в области D следует, что вектор $v(x, y)\in C^{1,0}(D)$, и, следовательно, он, как решение эллиптической системы (2.107), аналитичен в D. Кроме того, систему (2.107) можно проинтегрировать по рекуррентной формуле

$$w_{l\,j+k}=\omega_{l\,j+k}(z_j)+\frac{a_{j\,k-1}}{\mu_j}\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)}\left(\frac{\partial w_{l\,j+k-1}}{\partial z_j}+\frac{\partial w_{l\,j+k-1}}{\partial \bar{z}_j}\right)d\bar{z}_j, \tag{2.108}$$

где $\mu_j=\bar{\lambda}_j-\lambda_j$, а $\omega_{l\,j+1}, \dots, \omega_{l\,j+k_j}$ — произвольные аналитические функции комплексного переменного $z_j=x+\lambda_j y$ при $(x, y)\in D$; $\bar{z}_j$ — величина, комплексно сопряженная с z_j, точка $(x_0, y_0)\in D$.

На основании (2.108), (2.106), (2.104) после интегрирования получаем *общее представление регулярных решений системы* (2.103):

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{k_j}\sum_{k=0}^{l-1}C_{lk}^{(j)}\bar{z}_j^k\varphi_{jl}^{(k)}(z_j), \tag{2.109}$$

где $\varphi_{jl}(z_j)$ — произвольные аналитические функции z_j при $(x, y)\in D$, верхний индекс k у функции φ_{jl} обозначает порядок производной, а N-мерные векторы $C_{lk}^{(j)}$ являются общими решениями линейной алгебраической системы

$$(A+2B\lambda_j+C\lambda_j^2)\,C_{l\,l-1}^{(j)}=0,$$

$$(A+2B\lambda_j+C\lambda_j^2)\,C_{l\,l-2}^{(j)}+$$
$$+2(l-1)[A+B(\lambda_j+\bar{\lambda}_j)+C\lambda_j\bar{\lambda}_j]\,C_{l\,l-1}^{(j)}=0,$$

$$(A+2B\lambda_j+C\lambda_j^2)\,C_{l\,p}^{(j)}+\\
+2(p+1)\,[A+B(\lambda_j+\bar\lambda_j)+C\lambda_j\bar\lambda_j]\,C_{l\,p-1}^{(j)}+\\
+(p+2)(p+1)\,[A+2B\bar\lambda_j+C\bar\lambda_j^2]\,C_{l\,p+2}^{(j)}=0,\\
p=1,\,\ldots,\,l-3.$$

Представление (2.109) регулярных решений системы (2.103) равносильно представлению

$$u(x,\;y)=C+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{k_j}\sum_{k=0}^{l-1}\delta_{jl}\beta_{jl}^{(k)}y^k\varphi_{j\,l-k}^{(k)}(z_j),\qquad(2.110)$$

где $\varphi_{jl}(z_j)$ — произвольные аналитические функции переменного z_j, удовлетворяющие условиям $\varphi_{jl}(0)=0$, $z=0\in D$, C — произвольный действительный N-мерный постоянный вектор, $\beta_{jl}^{(0)}=1$, $\beta_{jl}^{(k)}k\,!=\alpha_{j\,l-1}\ldots\alpha_{j\,l-k}$, $\delta_{jq}=(b_{1\,l_j+q},\,\ldots,\,b_{N\,l_j+q})$ — N-мерный вектор, который в силу (2.104) связан с векторами $\overset{\S}{\delta}_{jq}=(b_{N+1\,l_j+q},\,\ldots,\,b_{2N\,l_j+q})$ соотношениями

$$\overset{\S}{\delta}_{jq}=\lambda_j\delta_{jq}^{1}+\alpha_{jq}\delta_{j\,q+1},\qquad q=1,\,\ldots,\,k_j-1,$$
$$\overset{\S}{\delta}_{jk_j}=\lambda_j\delta_{jk_j},\qquad j=1,\,\ldots,\,\mu.$$

Если множество $\delta=\{\delta_{jl}\}$, $j=1,\,\ldots,\,\mu$; $l=1,\,\ldots,\,k_j$, представляет собой линейно независимую систему векторов, то систему (2.103) будем называть *слабо связанной*, а в противном случае — *сильно связанной* (см. А. В. Бицадзе [5], [14]). В этих терминах определенным образом улавливается связь между уравнениями системы (2.103). Для слабо связанной системы множество δ можно разбить на два множества $\delta_{\mu_1}=\{\delta_{jl}\}$ и $\delta_{\mu-\mu_1}=\{\delta_{jl}\}$ таким образом, чтобы системы векторов

$$M_{\mu_1}=\{\operatorname{Re}\delta_{jl}\},\qquad M_{\mu-\mu_1}=\{\operatorname{Im}\delta_{jl}\}$$

были линейно независимы.

Для простоты положим, что $\delta_{\mu_1}=\{\delta_{jl}\}$, $j=1,\,\ldots,\,\mu_1$; $\delta_{\mu-\mu_1}=\{\delta_{jl}\}$, $j=\mu_1+1,\,\ldots,\,\mu$; $l=1,\,\ldots,\,k_j$. Тогда вектор C в формуле (2.110) можно представить в виде

$$C=\sum_{j=1}^{\mu_1}\sum_{l=1}^{k_j}\operatorname{Re}(\delta_{jl}d_{jl})+\sum_{j=\mu_1+1}^{\mu}\sum_{l=1}^{k_j}\operatorname{Re}(i\delta_{jl}d_{jl}),\qquad(2.111)$$

где действительные числа d_{ij} однозначно выражаются через компоненты вектора C.

Подставляя выражение (2.111) для вектора C в правую часть формулы (2.110) и вводя обозначения

$$\Phi_{jl}(z_j) = \varphi_{jl}(z_j) + d_{jl}, \quad l = 1, \ldots, k_j, \quad j = 1, \ldots, \mu_1,$$
$$\Phi_{jl}(z_j) = \varphi_{jl}(z_j) + id_{jl}, \quad l = 1, \ldots, k_j, \quad j = \mu_1 + 1, \ldots, \mu,$$

формуле (2.110) для решений слабо связанных систем (2.103) придадим вид

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{l=1}^{k_j} \sum_{k=0}^{l-1} \delta_{jl} \beta_{jl}^{(k)} y^k \Phi_{j\, l-k}^{(k)}(z_j), \tag{2.112}$$

где

$$\operatorname{Im} \Phi_{jl}(0) = 0, \quad l = 1, \ldots, k_j, \quad j = 1, \ldots, \mu_1, \tag{2.113}$$
$$\operatorname{Re} \Phi_{jl}(0) = 0, \quad l = 1, \ldots, k_j, \quad j = \mu_1 + 1, \ldots, \mu, \tag{2.114}$$

причем в зависимости от того, будет ли $\mu_1 = 0$ или $\mu_1 = \mu$, отсутствуют равенства (2.113) или (2.114) соответственно.

Слабая связанность системы (2.103) *гарантирует фредгольмовость задачи Дирихле* (2.35) *для этой системы* (см. Е. В. Золотарева [1], [2] и Н. Е. Товмасян [3]). Приведенные в пункте 1° настоящего параграфа результаты относительно нетеровости задачи Пуанкаре (2.64) в случае слабо связанных систем (2.103) могут быть значительно дополнены (см. Н. Е. Товмасян [1], [2], [3]).

3°. Задача Дирихле для сильно связанных систем. По данному в предыдущем пункте определению сильная связанность системы (2.103) означает, что векторы δ_{jl}, $j=1, \ldots, \mu$; $l=1, \ldots, k_j$, линейно зависимы. Ввиду того, что система векторов $\bar{\delta}_{jl}$, $j=1, \ldots, \mu$; $l=1, \ldots, k_j$, также линейно зависима, всегда можно найти отличный от нуля постоянный вектор $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_N)$, который ортогонален всем $\bar{\delta}_{jl}$:

$$\tau \cdot \bar{\delta}_{jl} = 0. \tag{2.115}$$

Пусть граница S области D содержит участок $a < x < b$ действительной оси $y=0$. Легко видеть, что *задача Дирихле* (2.35) *для сильно связанной системы* (2.103) *в такой* *области не может быть ни фредгольмовой, ни нетеровой.* В самом деле, в силу (2.110) и (2.115) имеем

$$\sum_{j=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{k_j}\tau\cdot\delta_{jl}\Phi_{jl}(x)=2\tau\cdot[f(x)-C],\qquad a<x<b. \tag{2.116}$$

Равенство (2.116) возможно тогда и только тогда, когда функция $\tau\cdot f(x)$ является предельным значением на отрезке $a<a_1<x<b_1<b$ при $y\to 0$ аналитической функции переменного $z=x+iy$ в области $a_1<x<b_1$, $0<y<\varepsilon$. Поэтому соблюдение конечного числа условий вида

$$\int_S \psi^{(j)}(t)\,f(t)\,dt=0$$

не может гарантировать разрешимости задачи (2.35), (2.103) для любого неаналитического вектора f. Отсюда вовсе не следует, что если для любого вектора f соблюдено условие (2.116), система (2.103), общим рашением для которой является выражение (2.112), слабо связана.

Рассмотренная в пункте 1° § 1 настоящей главы система (2.2) или, что то же самое, (2.3) является сильно связанной.

Пусть имеется неоднородная система в круге D: $|z|<1$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\bar z^2}=F(z),\qquad x+iy=z\in D, \tag{2.117}$$

где $u_1+iu_2=w(z)\in C^{2,0}(D)\cap C^{0,0}(D\cup S)$, а заданная функция $f_1(z)+if_2(z)=F(z)\in C^{1,0}(D\cup S)$. При изучении задачи Дирихле для системы (2.117) без ограничения общности можем считать, что краевое условие однородно, т. е.

$$w(t)=0,\qquad t\in S. \tag{2.118}$$

Соответствующей (2.117), (2.118) сопряженной задачей является однородная задача Дирихле

$$w^*(t)=0,\qquad t\in S, \tag{2.119}$$

для сопряженной с (2.3) однородной системы

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2}=0,\qquad z\in D. \tag{2.120}$$

Очевидно, что все решения задачи (2.119), (2.120) даются формулой

$$w^*(z) = (1 - z\bar{z})\overline{\psi_0(z)}, \tag{2.121}$$

где $\psi_0(z)$ — произвольная аналитическая в круге D функция комплексного переменного $z = x + iy$, $\psi_0(z) \in C^{0,0}(D \cup S)$. Заметим теперь, что общее решение системы (2.117) имеет вид

$$w(z) = \bar{z}\varphi(z) + \psi(z) + w_0(z), \tag{2.122}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные аналитические в круге $|z| < 1$ функции, а

$$w_0(z) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_D \frac{d\xi\, d\eta}{t - z}\int\limits_D \frac{F(t_1)\, d\xi_1\, d\eta_1}{t_1 - t}, \tag{2.123}$$

$$\xi + i\eta = t \in D, \quad \xi_1 + i\eta_1 = t_1 \in D.$$

На основании (2.118), (2.122) заключаем, что *задача* (2.117), (2.118) *разрешима тогда и только тогда, когда* $tw_0(t)$, $|t| = 1$, *является предельным значением аналитической в круге* D *функции при* $z \to t = e^{i\theta}$. Это условие, в свою очередь, равносильно условиям

$$\int\limits_S t^k w_0(t)\, dt = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.124}$$

Когда условия (2.124) выполнены, решение задачи (2.117), (2.118) выписывается в квадратурах:

$$w(z) = (1 - z\bar{z})\psi(z) + w_0(z) - \frac{\bar{z}}{2\pi i}\int\limits_S \frac{tw_0(t)}{t - z}\, dt.$$

Ввиду того, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{t^k d\xi\, d\eta}{t - z} = z^{k-1}(1 - z\bar{z}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

условиям (2.124) можно придать вид

$$\int\limits_D F(t)(1 - t\bar{t})\, t^k d\xi\, d\eta = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{2.125}$$

Поскольку формула (2.94) для решений w и w^* задач (2.117), (2.118) и (2.119), (2.120) записывается в виде

$$\int\limits_D \left(\bar{w}^* \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{t}^2} - w \overline{\frac{\partial^2 w^*}{\partial \bar{t}^2}}\right) d\xi\, d\eta = \frac{1}{2i} \int\limits_S \left(\bar{w}^* \frac{\partial w}{\partial \bar{t}} - w \overline{\frac{\partial w^*}{\partial \bar{t}}}\right) dt = 0,$$

то условие

$$\int\limits_D \bar{w}^*(t) F(t)\, d\xi\, d\eta = 0 \tag{2.126}$$

является необходимым для разрешимости задачи (2.117), (2.118). Но в силу (2.121) условие (2.126) равносильно условиям (2.125), и, стало быть, условиям (2.124). Таким образом, *необходимое и достаточное условие разрешимости задачи* (2.117), (2.118) *имеет вид* (2.126), *а это означает, что задача* (2.117), (2.118), *не будучи ни фредгольмовой, ни нетеровой, нормально разрешима по Хаусдорфу.*

Эта же самая задача в области D, граница S которой содержит отрезок $a < x < b$ оси $y=0$, перестает быть нормально разрешимой.

В самом деле, поскольку общее решение однородного уравнения (2.120) имеет вид $w^*(z) = \overline{z\varphi(z)} + \overline{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические в области D функции, и оно, будучи класса $C^{0,0}(D \cup S)$, должно удовлетворять условию

$$w^*(x) = x\bar{\varphi}(x) + \bar{\psi}(x) = 0, \quad a < x < b,$$

то $w^*(z) = 0$ всюду в области D. Следовательно, необходимое условие (2.125) разрешимости задачи (2.117), (2.118) и в этом случае выполнено. Однако выполнение этого условия не может быть достаточным, ибо для любой функции $F(z) \in C^{1,0}(D \cup S)$ невозможно равенство

$$x\varphi(x) + \psi(x) + w_0(x) = 0, \qquad a < x < b,$$

где $w_0(z)$ и в рассматриваемой области D дается формулой (2.123) (см. А. В. Бицадзе [1], [5], [14]).

4°. **Класс эллиптических систем и областей, для которых задача Дирихле нормально разрешима по Хаусдорфу.** Выделение классов эллиптических систем и областей, для которых задача Дирихле нормально разрешима по Хаусдорфу, безусловно представляет собой важную задачу. В этом направлении интересные результаты были получены Нгуен Тхыа Хопом [2], [3].

Пусть в односвязной области D класса $A^{1,h}$ ищется решение $w(z)$ уравнения (2.117), удовлетворяющее краевому условию (2.35), в предположении, что $F(z) \in L_p(D)$, $p > 1$, и $f(t_0) \in L_2(S)$, где $S = \partial D$, а производные $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}$ понимаются в обобщенном смысле.

Говорят, что аналитическая в круге $|\zeta| < 1$ функция $\Phi(\zeta)$ принадлежит классу H_2, если

$$\int\limits_{|z|=r} |\Phi(\zeta)|^2 |d\zeta| < \text{const} \tag{2.127}$$

равномерно для всех $r < 1$. Краевые значения $\Phi^+(t_0)$ на окружности $|t_0| = 1$ существуют почти всюду и принадлежат классу L_2, если $\Phi(\zeta) \in H_2$. При этом функция $\Phi(\zeta)$ при $|\zeta| < 1$ может быть представлена как в виде интеграла Коши

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\Phi^+(t)\, dt}{t - \zeta},$$

так и в виде интеграла типа Коши

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{\mu(t)\, dt}{t - \zeta} \tag{2.128}$$

с плотностью $\mu \in L_2$.

Будем говорить, что аналитическая вне замкнутого круга $|\zeta| \leqslant 1$ функция $\Phi(\zeta)$, исчезающая в бесконечности, принадлежит классу G_2, если функция $\Phi\left(\frac{1}{\zeta}\right) \in H_2$. Аналитическая в односвязной области D со спрямляемой границей S функция $\Phi(z)$ принадлежит классу $E_2(D)$, если

$$\int\limits_{S_r} |\Phi(z)|\, |dz| < \text{const} \tag{2.129}$$

для всех образов S_r окружностей $|\zeta| = r < 1$, где $z = z(\zeta)$ — функция, конформно отображающая круг $|\zeta| < 1$ на D.

Имеет место следующее утверждение: *функция $\Phi(z)$, определенная в области D класса $A^{1,h}$, принадлежит классу $E_2(D)$ тогда и только тогда, когда $\Phi[z(\zeta)]$ принадлежит классу H_2.*

Справедливость этого утверждения следует из оценок (2.127), (2.129) и очевидных оценок, верных для областей D класса $A^{1,h}$,

$$m < \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| < M, \qquad m_0 < \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| < M_0,$$

где m, M, m_0, M_0 — положительные постоянные.

Для решения $w(z)$ уравнения (2.3) в области D обобщенные производные $\frac{\partial}{\partial \bar z}$, $\frac{\partial^2}{\partial \bar z^2}$ являются обычными производными, и, стало быть, формула (2.4) будет давать общее решение этого уравнения. Причем представленное формулой (2.4) решение $w(z)$ уравнения (2.3) будем называть регулярным в области D, если $\varphi(z)$, $\psi(z) \in E_2(D)$. Общее решение $w(z)$ неоднородного уравнения (2.117), очевидно, дается формулой (2.122). Его мы будем называть *регулярным*, если функция $\bar z\varphi(z) + \psi(z)$ является регулярным решением однородного уравнения (2.3).

Так как в принятых относительно $F(z)$ предположениях представленная формулой (2.123) функция $w_0(z) \in C^{0,h}$ на всей плоскости комплексного переменного z (см. И. Н. Векуа [4]), то изучение задачи Дирихле (2.117), (2.35) можем считать редуцированным к изучению задачи (2.3), (2.35) при $f \in L_2(S)$.

Сначала рассмотрим однородную задачу (2.3), (2.18) в области D с аналитической границей S. При помощи конформного отображения $z = z(\zeta)$ эта задача сводится к краевой задаче

$$\overline{z(t)}\,\Phi^+(t) + \Psi^+(t) = 0, \qquad |t| = 1, \tag{2.130}$$

для аналитических в круге $|\zeta| < 1$ функций $\Phi(\zeta) = \varphi[z(\zeta)]$, $\Psi(\zeta) = \psi[z(\zeta)]$.

Краевое условие (2.130) равносильно условию

$$\frac{\Psi^+(t)}{\Phi^+(t)} = -\overline{z(t)} = -\chi(t), \qquad |t| = 1,$$

где $\chi^-(\zeta)$ — аналитическая в области $|\zeta| > 1$ функция. Из-за аналитичности S функция $\chi(\zeta)$ аналитически продолжается внутри круга $|\zeta| < 1$ в некоторую граничную полосу D_1. Поскольку на окружности $|t| = 1$ имеем оценку $|z(t)| < M = \mathrm{const}$, то в полосе D_1 справедлива оценка

$|\chi(\zeta)| < M$. Отсюда, в силу единственности аналитического продолжения, заключаем, что в полосе D_1 функция

$$\frac{\Psi(\zeta)}{\Phi(\zeta)} = -\chi(\zeta)$$

аналитична и в круге $|\zeta| < 1$ она может иметь лишь конечное число полюсов. Следовательно, определенная на всей плоскости комплексного переменного ζ функция

$$F(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\Psi(\zeta)}{\Phi(\zeta)}, & |\zeta| \leqslant 1, \\ -\chi(\zeta), & |\zeta| \geqslant 1, \end{cases}$$

должна быть рациональной.

Так как на окружности $|t| = 1$

$$z(t) = -\frac{\overline{\Psi(t)}}{\overline{\Phi(t)}},$$

то в круге $|\zeta| < 1$ функция $z(\zeta)$ рациональна, т. е.

$$z(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)},$$

где $P(\zeta)$ и $Q(\zeta)$ — полиномы. Следовательно, справедливо утверждение: *если функция $z(\zeta)$, конформно отображающая область D с аналитической границей на круг $|\zeta| < 1$, не является рациональной, то однородная задача* (2.3), (2.18) *не может иметь отличных от нуля решений. Если же функция $z(\zeta)$ рациональна, то эта задача всегда имеет и притом бесконечное множество линейно независимых решений.*

Переходим к рассмотрению неоднородной задачи (2.3), (2.35) в области D класса $A^{1,h}$. С помощью конформного отображения $z = z(\zeta)$ области D на круг $|\zeta| < 1$ эта задача сводится к эквивалентной краевой задаче

$$\overline{z(t)}\,\Phi^+(t) + \Psi^+(t) = f_0(t), \quad f_0(t) = f[z(t)], \quad |t| = 1, \tag{2.131}$$

где $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta) \in H_2$, $f_0(t) \in L_2$.

В силу интегральной формулы Коши

$$\Psi^+(t) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\Psi^+(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = 0, \quad |t| = 1. \tag{2.132}$$

Подставляя выражение $\Psi^+(t)$ из (2.131) в (2.132), получаем

$$\overline{z(t)}\,\Phi^+(t)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\overline{z(\tau)}\,\Phi^+(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=$$
$$=f_0(t)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{f_0(\tau)\,d\tau}{\tau-t}. \qquad (2.133)$$

Пользуясь интегральным представлением (2.128) и формулой (SP), равенству (2.133) можно придать вид

$$K\mu=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\overline{z(t)}-\overline{z(\tau)}}{\bar t-\bar\tau}\,\mu(\tau)\,d\theta=tF^-(t), \qquad \tau=e^{i\theta}, \qquad (2.134)$$

где

$$F^-(t)=f_0(t)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{f_0(\tau)\,d\tau}{\tau-t}. \qquad (2.135)$$

Таким образом, *допуская, что задача* (2.131) *имеет решение, и представляя функцию* $\Phi(\zeta)$ *в виде* (2.128), *для определения плотности* μ *получаем интегральное уравнение Фредгольма первого рода* (2.134). Наоборот, если μ — решение уравнения (2.134), то, подставляя его в правую часть (2.128), получим функцию $\Phi(\zeta)$, обладающую тем свойством, что выражение $\Psi^+(t)=\overline{z(t)}\,\Phi^+(t)-$ $-f_0(t)$ обращает равенство (2.132) в тождество, т. е. $\Psi^+(t)$ является краевым значением аналитической в круге $|\zeta|<1$ функции $\Psi(\zeta)$, которая, следовательно, восстанавливается по интегральной формуле Коши.

Подставляя выражения $\varphi(z)=\Phi[\zeta(z)]$, $\psi(z)=\Psi[\zeta(z)]$ в правую часть формулы (2.4), получаем решение $w(z)$ задачи (2.3), (2.35).

Заметим, что если плотность $\mu(t)$ интеграла типа Коши (2.128) представляет собой предельные значения аналитической в области $|\zeta|>1$ функции $\Omega^-(\zeta)$ класса G_2, то при $|\zeta|<1$ будем иметь тождество

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\Omega^-(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}=0,$$

т. е. однородное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\overline{z(t)}-\overline{z(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\,\mu(\tau)\,d\theta=0 \tag{2.136}$$

имеет в качестве решения функцию $\mu(\tau)=\Omega^{-}(\tau)$. Решениями этого уравнения являются, в частности, функции τ^{-k}, $k=1, 2, \ldots$

Однородное уравнение, сопряженное с (2.136), имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{z(t)-z(\tau)}{\tau-t}\,\nu(\tau)\,d\theta=0. \tag{2.137}$$

Очевидно, что $\mu(\tau)$ является решением уравнения (2.136) тогда и только тогда, когда $\nu=\bar{\mu}$ является решением уравнения (2.137).

Как уже было отмечено в пункте 7° § 5 гл. I, уравнение (2.134) нормально разрешимо тогда и только тогда, когда его ядро вырождено, причем оно разрешимо по Хаусдорфу. Для вырожденности же ядра уравнения (2.134) необходимо и достаточно, чтобы конформно отображающая функция $z=z(\zeta)$ была рациональной.

Класс равномерно эллиптических систем и областей, для которых задача Дирихле хаусдорфова, довольно обширен. Нгуен Тхыа Хоп [3] показал, что *для любой области D существует бесконечное множество эллиптических систем вида*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\bar{z}^2}+A(z,\ \bar{z})\frac{\partial w}{\partial\bar{z}}=0, \tag{2.138}$$

где $A(z,\ \bar{z})$ — заданная аналитическая $N\times N$-матрица, а w — искомый комплексный N-мерный вектор, для которых задача Дирихле (2.35) *хаусдорфова.*

Как уже было показано выше, при $A=0$ задача Дирихле (2.35) для уравнения (2.138) в круге $|z|<1$ нормально разрешима по Хаусдорфу. Появление младшего члена в уравнении (2.138) может сделать эту задачу безусловно разрешимой. Например, когда скаляр $A=\text{const}$, общим решением этого уравнения является функция

$$w=\Phi(z,\ \bar{z})+|A|^2\int\limits_0^z dt\int\limits_0^{\bar{z}} I_0(2\,|A|\,|z-t|)\,\Phi(t,\ \bar{t})\,d\bar{t},$$

где

$$\Phi(\bar{z}, z) = \bar{z}\varphi(z) + \psi(z) + A\int_0^{\bar{z}} [z\overline{\varphi(t)} + \overline{\psi(t)}]\, d\bar{t},$$

$$I_0(2|A||z-t|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A|^{2k}|z-t|^{2k}}{(k!)^2},$$

а $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные аналитические функции. Повышая степень гладкости правой части в условии (2.35), в частности, потребовав, чтобы $f \in C^{2,h}$ $(|t_0|=1)$, $0<h<1$, легко убеждаемся в том, что задача (2.35), (2.138) разрешима безусловно и соответствующая однородная задача имеет только два линейно независимых решения. Причем само решение $w(z) \in C^{1,h}$ $(|z| \leqslant 1)$, но оно может не принадлежать не только классу $C^{2,h}$ $(|z| \leqslant 1)$, но даже классу C^{1,h_1} $(|z| \leqslant 1)$ при $h_1 > h$ (см. Р. С. Сакс [1], [2]).

5°. Эллиптические системы в многомерных областях и классы систем с разным характером эллиптичности в области их задания. Требование эллиптичности системы (1.4) в многомерных областях позволяет также строить методом Леви параметрикс, доказать существование матрицы элементарных решений этой системы и развивать метод теории потенциала, позволяющий редуцировать изучение линейных краевых задач для нее к системе интегральных уравнений, которая в общем случае, конечно, не будет системой интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Усиление требования эллиптичности в некоторых случаях позволяет совершить дальнейшую редукцию полученной системы интегральных уравнений к эквивалентной системе Фредгольма второго рода.

Такими усилениями оказываются требование выполнения условия сильной эллиптичности (2.60), условия типа (2.99), указанного Я. Б. Лопатинским [1] и З. Я. Шапиро [1] и приведенного в пункте 2° настоящего параграфа, условия слабой связанности и др. Для сильно эллиптических систем при исследовании линейных краевых задач успешно применяются функциональные методы, в частности метод ортогональных проекций. Наличие теории одномерных сингулярных интегральных уравнений во многом способствует успеху при исследовании эллиптических систем с двумя независимыми переменными. К сожалению, отсутствие сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений заметно затрудняет исследование этой задачи в многомерных областях.

Может случиться, что в одной части области своего задания рассматриваемая система сильно эллиптична, а в другой части она просто эллиптична. Укажем простой пример системы такого вида:

$$
\begin{aligned}
&(1-r^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}-(1+r^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}-2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}=0,\\
&2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}+(1-r^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}-(1+r^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}=0,
\end{aligned}
\qquad (2.139)
$$

где $r^2=x_1^2+x_2^2$.

Система (2.139) сильно эллиптична вне замкнутого круга $|z| \leqslant 1$, эллиптична в круге $|z|<1$ и параболически вырождается на окружности $r=1$. Исследование линейных задач для системы (2.139) в областях, пересечение которых с кругом $|z|<1$ не пусто, довольно трудно, несмотря на то, что общее решение этой системы выписывается в квадратурах:

$$
u_1+iu_2=w(z)=\varphi(z)+\int_{z_0}^{z}\psi\left(ze^{t^2/2}\right)dt,
$$

$$
z=x_1+ix_2, \qquad z_0=x_1^0+ix_2^0,
$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные аналитические функции комплексного переменного z.

§ 3. Эллиптические уравнения второго порядка с параболическим вырождением на границе области их задания

1°. Предварительные замечания. Как уже было отмечено в пункте 3° § 1 гл. I, вблизи линии δ параболического вырождения эллиптическое уравнение (1.12) с аналитическими коэффициентами в главной части при помощи неособого преобразования независимых переменных

$$
x_1=x_1(x, y), \qquad x_2=x_2(x, y) \qquad (2.140)
$$

можно привести к одному из видов

$$L(u) = y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,\ y)\,u = f(x,\ y) \qquad (2.141)$$

или

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,\ y)\,u = f(x,\ y), \qquad m = \mathrm{const} > 0. \qquad (2.142)$$

К тому же, если одновременно имеет место и вырождение порядка, то в некоторых случаях можно показать существование преобразования (2.140), приводящего уравнение (1.12) к виду

$$L(u) = y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,\ y)\,u = f(x,\ y), \qquad m > 0, \qquad n > 0. \qquad (2.143)$$

Обозначим через D подобласть области задания уравнений (2.141), (2.142), (2.143), расположенную в верхней полуплоскости $y > 0$ и примыкающую к прямой $y=0$ вырождения этих уравнений с участком AB своей границы. В такой области при $c(x,\ y) \leqslant 0$ для решений соответствующих (2.141), (2.142), (2.143) однородных уравнений

$$L(u) = y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,\ y)\,u = 0, \qquad (2.144)$$

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,\ y)\,u = 0, \qquad (2.145)$$

$$L(u) = y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\,u = 0 \qquad (2.146)$$

приведенный в пункте 2° § 2 гл. I принцип экстремума, конечно, имеет место. Принцип Зарембы—Жиро также остается в силе для регулярных решений этих уравнений, которые принадлежат классу $C^{1,\,0}(D \cup S)$ всюду, кроме, быть может, точек A, B. Однако в случаях уравнений

(2.145), (2.146) класс таких решений может оказаться беднее, чем в случае уравнения (2.144). Ниже мы увидим, что регулярная в области D функция $u(x, y)$ при $y \to 0$ может вести себя существенно по-разному в зависимости от того, является ли она в области D решением уравнения (2.144), (2.145) или (2.146).

Чтобы убедиться в этом, пока ограничимся рассмотрением отдельных примеров.

Пусть D представляет собой область, лежащую в верхней полуплоскости комплексного переменного $z=x+\frac{2i}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}$, ограниченную кривой σ_0: $|z-1/2|=1/2$ и отрезком $A(0, 0)B(1, 0)$ действительной оси $y=0$. Кривая σ_0 является полуокружностью с центром в точке $z=1/2$ и радиусом $1/2$ на римановой плоскости с метрикой $ds^2=dx^2+y^m dy^2$.

Наряду с задачей Дирихле определения регулярного в области D решения $u(x, y) \in C^{0,0}(D \cup S)$, $S=\sigma_0 \cup AB$, уравнения

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{2.147}$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$u|_{\sigma_0}=\varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.148}$$

и

$$u(x, 0)=\tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.149}$$

нас будет интересовать и смешанная задача для этого же уравнения, которая отличается от задачи Дирихле лишь тем, что условие (2.149) заменено условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\nu(x), \quad 0<x<1, \tag{2.150}$$

при требовании, чтобы $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ была непрерывна в D вплоть до открытого отрезка $0<x<1$, а вблизи точек A и B

$$\frac{\partial u}{\partial x}=O(|z-A|^{-\alpha}), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=O(|z-A|^{-\alpha}), \quad \alpha>0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=O(|z-B|^{-\beta}), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=O(|z-B|^{-\beta}), \quad \beta>0.$$

В результате замены переменных

$$z = x + \frac{2i}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}, \quad \bar{z} = x - \frac{2i}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}, \quad u(x, y) = v(z, \bar{z})$$

уравнение (2.147) преобразуется в уравнение Эйлера—Дарбу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z\, \partial \bar{z}} - \frac{m}{2(m+2)} \frac{1}{z - \bar{z}} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right) = 0,$$

элементарное решение которого было найдено еще Дарбу [1].

Пользуясь результатом Дарбу, Хольмгрен [1] и Геллерстедт [1], [2] построили функции Грина $G_1(\zeta, z)$ и $G(\zeta, z)$ для задачи Дирихле и для сформулированной выше смешанной задачи соответственно:

$$G_1(\zeta, z) = g_1(\zeta, z) - \left| \frac{1}{2z-1} \right|^{2\beta} g_1\left(\zeta, \frac{z - 1/2}{|2z-1|^2}\right), \tag{2.151}$$

$$G(\zeta, z) = g(\zeta, z) - \left| \frac{1}{2z-1} \right|^{2\beta} g\left(\zeta, \frac{z - 1/2}{|2z-1|^2}\right), \tag{2.152}$$

где

$$g_1(\zeta, z) = K_1 \left(\frac{4}{m+2} \right)^{4\beta-2} |z - \bar{\zeta}|^{-2\beta} \left(1 - \left| \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} \right|^2 \right) \times$$
$$\times F\left(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta,\ 1 - \left| \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} \right|^2 \right),$$

$$g(\zeta, z) = K |z - \bar{\zeta}|^{-2\beta} F\left(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ 1 - \left| \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} \right|^2 \right),$$

$$\zeta = \xi + \frac{2i}{m+2} \eta^{\frac{m+2}{2}},$$

$$K_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)},$$

$$K = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma^2(2\beta)}, \qquad \beta = \frac{m}{2(m+2)},$$

а F и Γ — гипергеометрическая функция и гамма-функция Эйлера соответственно.

Наличие функций Грина позволяет в квадратурах выписать решения этих задач. Действительно, удаляя точку z из области D вместе с замкнутым кругом $|\zeta - z| \leqslant \varepsilon$ достаточно малого радиуса и в оставшейся части D_ε

области D интегрируя тождество

$$\eta^m \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\Omega \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} u\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\Omega \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} u\right) = 0,$$

где u — искомое решение задач (2.147), (2.148), (2.149) или (2.147), (2.148), (2.150), а Ω либо $G_1(\zeta, z)$, либо $G(\zeta, z)$, в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем явные выражения для этих решений:

$$u_1(x, y) = \int_0^1 \tau(\xi) \frac{\partial G_1(\xi, z)}{\partial \eta} d\xi + \int_0^1 \varphi(\xi)\left(\eta^m \frac{d\eta}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right) G_1(\zeta, z)\, d\xi, \quad \zeta \in \sigma_0,$$

и

$$u(x, y) = \int_0^1 \nu(\xi) G(\xi, z)\, d\xi + \int_0^1 \varphi(\xi)\left(\eta^m \frac{d\eta}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right) G(\zeta, z)\, d\xi, \quad \zeta \in \sigma_0. \tag{2.153}$$

Единственность решения в обоих случаях следует из принципа экстремума и принципа Зарембы—Жиро для эллиптических уравнений (см. пункт 2° § 2 гл. I).

Формула (2.153) при $m=1$ впервые была выведена Трикоми, а при $m \neq 1$ — Хольмгреном [1] и Геллерстедтом [1], [2].

Рассмотрим теперь смешанную задачу (2.148), (2.150) для частного случая уравнения (2.142)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.154}$$

в области D, ограниченной лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$ дугой Ляпунова σ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$ и отрезком AB оси $y=0$. В новых переменных

$$\xi = x, \quad \eta = 2y^{1/2}, \quad v(\xi, \eta) = u(\xi, \eta^2/4)$$

уравнение (2.154) переходит в уравнение Лапласа, соответствующим образом преобразуется краевое условие (2.148), и поскольку

$$\frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} = y^{1/2} \frac{\partial u}{\partial y},$$

то, допуская существование $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}$, автоматически получаем условие

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{\partial v}{\partial \eta}=0, \qquad 0<\xi<1, \tag{2.155}$$

для гармонической функции $v(\xi, \eta)$ в области D^*, представляющей собой образ области D при отображении $\xi=x$, $\eta=2y^{1/2}$.

Если $u(x, y)\in C^{2,0}(D)\cap C^{0,0}(D\cup S)$, а $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывна в D вплоть до открытого отрезка AB, в силу (2.155) функция $v(\xi, \eta)$ гармонически продолжится из D^* в область $\bar{D}^*$, расположенную симметрично D^* относительно оси $\eta=0$, и, стало быть, в симметричных относительно оси $\eta=0$ точках границы области $D_1=D^*\cup\bar{D}^*\cup\{0<x<1\}$ она будет принимать симметричные значения. Это означает, что гармоническая в области D_1 функция $v(\xi, \eta)$ известна на всей границе этой области, причем $v(\xi, \eta)\in C^{0,0}(D_1\cup\partial D_1)$.

Следовательно, при выполнении условия (2.148) *одним лишь требованием непрерывности* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *в области D вплоть до открытого отрезка AB оси $y=0$ функция $v(\xi, \eta)$ однозначно будет определена как решение задачи Дирихле в области D_1*. Тем самым однозначно будет определена и функция $u(x, y)$ в области D. Удовлетворить же условию (2.150) при произвольном краевом условии (2.150) функция $u(x, y)$, очевидно, не может. Она не может удовлетворить и условию (2.149), если известно, что $\frac{\partial u}{\partial y}=o(y^{-1/2})$ при $y\to 0$.

Переходим к рассмотрению задачи (2.148), (2.150) для конкретного примера уравнения (2.146), а именно:

$$y^{m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{m}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{2.156}$$

где m — фиксированное натуральное число, а область D — та же самая, что в задаче (2.147), (2.148), (2.150).

Задача (2.156), (2.148), (2.150) *некорректно поставлена*. В самом деле, непосредственная проверка легко убеждает в том, что действительная и мнимая части аналитической в области D функции $F(z)$ комплексного переменного $z=x+\frac{2i}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}$ являются решениями уравнения (2.156). Отсюда, принимая во внимание очевидные равенства

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1-z-iz}\right)=0, \qquad |z-1/2|=1/2,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1-z-iz}\right)=0, \qquad y=0,$$

заключаем, что *соответствующая* (2.156), (2.148), (2.150) *однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений*

$$u_{2k-1}=\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1-z-iz}\right)^{2k-1}, \quad u_{2k}=\operatorname{Re} i\left(\frac{z}{1-z-iz}\right)^{2k}, \ k=1, 2, \ldots$$

2°. Задача Дирихле для уравнений (2.141), (2.142), (2.143) в области, лежащей в верхней полуплоскости вместе с границей. В результате неособого преобразования переменных

$$\xi=\xi(x, y), \qquad \eta=\eta(x, y), \quad v(\xi, \eta)=u[x^{-1}(\xi, \eta), y^{-1}(\xi, \eta)] \tag{2.157}$$

в верхней полуплоскости $y>0$ эллиптические уравнения (2.141), (2.142), (2.143) могут быть приведены к каноническому виду (см. пункт 3° § 1 гл. I):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+A(\xi, \eta)\frac{\partial v}{\partial \xi}+B(\xi, \eta)\frac{\partial v}{\partial \eta}+C(\xi, \eta)v=F(\xi, \eta). \tag{2.158}$$

В случае уравнения (2.141) функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ имеют вид

$$\xi=x, \qquad \eta=\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}},$$

а в случае уравнения (2.142) —

$$\xi=x, \quad \eta=\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}, \quad m\neq 2, \quad \eta=\log y, \quad m=2.$$

Трудности не представляет выписать выражения $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ и в случае уравнения (2.143).

В дальнейшем будем считать, что коэффициенты уравнений (2.141), (2.142), (2.143) являются аналитическими функциями переменных x, y.

Как было показано в пункте 4° § 1 настоящей главы, при довольно общих предположениях относительно границы ограниченной области и данных задача Дирихле для уравнения (2.158) при $C(\xi, \eta) = c\,[x^{-1}(\xi, \eta), y^{-1}(\xi, \eta)] \leqslant 0$ всегда имеет, и притом единственное, решение. На основании этого факта, если будем считать, что односвязная замкнутая область $\bar{D}$ с кусочно гладкой границей S лежит в полуплоскости $y > 0$ и при $y > 0$

$$c(x, y) \leqslant 0, \tag{2.159}$$

приходим к заключению, что задача Дирихле с непрерывными краевыми данными f на S как для уравнения (2.144), так и для уравнений (2.145) и (2.146) всегда имеет, и притом единственное, решение $u(x, y)$, которое представляется в виде интеграла

$$u(x, y) = \int\limits_S K(x, y, s)\, f(s)\, ds. \tag{2.160}$$

Ядро этого представления само является аналитическим решением относительно переменных x, y, и оно зависит исключительно от области D.

Предположим теперь, что D — односвязная область, граница которой S состоит из двух частей: $S = \sigma \cup AB$, где σ — гладкая дуга Жордана с концами в точках $A\,(0, 0)$, $B\,(1, 0)$, лежащая в полуплоскости $y > 0$, а AB — отрезок прямой $y = 0$.

Заметим следующее очевидное, но весьма важное свойство оператора L, обозначающего левую часть уравнения (2.144) или уравнений (2.145) и (2.146): *если $v(x, y)$ является непрерывной вместе со своими частными производными до второго порядка функцией и всюду в области D имеет место неравенство $L(v) < 0$, то внутри этой области $v(x, y)$ не может достигать отрицательного минимума; если же, наоборот, всюду в области D имеет место неравенство $L(v) > 0$, то $v(x, y)$ внутри этой области не может достигать положительного максимума.*

В настоящем пункте мы будем изучать задачу Дирихле в следующей постановке. Пусть $f(x, y)$ — заданная непрерывная в замкнутой области $\bar{D}$ функция. Ищется регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (2.144) или уравнений (2.145) и (2.146), совпадающее на границе $S=\sigma \bigcup AB$ с функцией f.

В силу условия (2.159) единственность решения задачи Дирихле очевидна.

Ниже мы увидим, что *в смысле существования решения задачи Дирихле уравнения* (2.144) *и* (2.145), (2.146) *не всегда одинаково себя ведут.*

Обозначим через D_h область, состоящую из точек области D, удовлетворяющих условию $y > h$, где h — достаточно малое положительное число. Мы уже знаем, что существует единственное регулярное в области D_h решение уравнения (2.144) или уравнений (2.145), (2.146), принимающее на границе области D_h значения функции f. В силу условия (2.159) в замкнутой области $\bar{D}_h$ имеем $|u_h(x, y)| \leqslant M$, где $M = \max |f(x, y)|$ по всей замкнутой области $\bar{D}$. Обозначим через h^* произвольное фиксированное значение h. Начиная со значения h^*, для всех значений $h < h^*$ семейство $\{u_h(x, y)\}$ вполне определено и равномерно ограничено. С другой стороны, в силу (2.160) имеем представление

$$u_h(x, y) = \int\limits_{S_*} K_*(x, y, s)\, u_h(s)\, ds, \quad (x, y) \in D_{h^*}, \tag{2.161}$$

где S_* — граница области D_{h^*}, а K_* — ядро $K(x, y, s)$ для области D_{h^*}. Отсюда сразу следует равностепенная непрерывность семейства $\{u_h(x, y)\}$.

По известной теореме Арцела из семейства $\{u_h\}$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{u_{h_i}(x, y)\}$, предел которой $u(x, y) = \lim\limits_{i\to\infty} u_{h_i}(x, y)$ в силу (2.161) является регулярным решением уравнения (2.144) или уравнений (2.145), (2.146) в области D, совпадающим на дуге σ с функцией f.

Остается выяснить вопрос: *принимает ли функция $u(x, y)$ значения f на отрезке AB?* В случае уравнения (2.144) этот вопрос решается всегда *положительно*, в то время как в случае уравнений (2.145) и (2.146) — *не всегда положительно.*

3°. Случай уравнения (2.144). Предварительно покажем, что для каждой точки $Q(x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$, существует функция $v(x, y)$, называемая *барьером* и обладающая следующими свойствами: а) она непрерывна в полукруговой окрестности ω_{x_0}:

$$(x-x_0)^2+y^2<\rho^2, \qquad y\geqslant 0,$$

точки Q; б) равна нулю в точке Q; в) положительна во всех других точках окрестности ω_{x_0}; г) всюду в этой окрестности удовлетворяет условию

$$L(v)<0. \tag{2.162}$$

В рассматриваемом случае в качестве барьера может служить функция

$$v(x, y)=(x-x_0)^2+y^\beta, \tag{2.163}$$

где

$$0<\beta<1. \tag{2.164}$$

В самом деле, то, что определенная по формуле (2.163) функция $v(x, y)$ удовлетворяет условиям а), б), в), очевидно. Условие г) проверяется также легко. Действительно, непосредственным вычислением получаем

$$L(v)=2y^m+\beta(\beta-1)y^{\beta-2}+2a(x-x_0)+\beta by^{\beta-1}+cv,$$

откуда сразу следует, что для достаточно малых y знак $L(v)$ совпадает со знаком $\beta(\beta-1)$, и, следовательно, в силу (2.164) существует такая окрестность точки Q, в которой $L(v)<0$. Обозначим через P точку с координатами (x, y). В силу непрерывности функции $f(P)$ для заданного положительного ε можно найти такую полукруговую окрестность $\omega'_{x_0}\subset\omega_{x_0}$ точки Q, в которой имеют место неравенства

$$f(Q)-\varepsilon\leqslant f(P)\leqslant f(Q)+\varepsilon. \tag{2.165}$$

Рассмотрим две функции:

$$\psi(P)=f(Q)+\varepsilon+kv(P), \tag{2.166}$$

$$\varphi(P)=f(Q)-\varepsilon-k_1v(P), \tag{2.167}$$

где k и k_1 — пока произвольные положительные числа.

Начиная с определенных значений k и k_1, в силу (2.162), (2.166) и (2.167) имеем: $L[\psi(P)]<0$, $L[\varphi(P)]>0$ всюду в окрестности ω'_{x_0}.

В окрестности ω'_{x_0}, в силу (2.166) и (2.167), получим, что $\psi(P) \geqslant f(P)$. Ввиду того, что $v(P) > 0$ при $P \neq Q$, в формуле (2.166) число k может быть подобрано так, чтобы на полуокружности, входящей в состав границы ω'_{x_0}, имело место неравенство $\psi(P) > M$.

Совокупность точек окрестности ω'_{x_0}, ординаты которых $y > h$, составляет область, которую мы будем обозначать через ω_h. На границе области ω_h имеем $\psi(P) \geqslant u_h(P)$. Следовательно, ввиду того, что всюду в ω_h имеет место неравенство $L[\psi(P) - u_h(P)] < 0$, заключаем, что для любого h и $P \in \omega_h$ имеет место неравенство

$$\psi(P) \geqslant u_h(P). \tag{2.168}$$

Аналогично может быть подобрано число k_1 в формуле (2.167) таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\varphi(P) \leqslant u_h(P). \tag{2.169}$$

На основании (2.168) и (2.169) заключаем, что

$$\varphi(P) \leqslant u(P) \leqslant \psi(P). \tag{2.170}$$

Из (2.170) в пределе при $P \to Q$ получим

$$\varphi(Q) \leqslant u(Q) \leqslant \psi(Q)$$

или, учитывая (2.166) и (2.167),

$$f(Q) - \varepsilon \leqslant \lim_{P \to Q} u(P) \leqslant f(Q) + \varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, следует, что $\lim\limits_{P \to Q} u(P) = f(Q)$.

Таким образом, *в случае уравнения* (2.144) *функция*

$$u(x, y) = \lim_{i \to \infty} u_{h_i}(x, y),$$

является единственным регулярным в области D решением этого уравнения, совпадающим на всей границе $S = \sigma \cup AB$ с заданной непрерывной функцией f.

4°. Случай уравнения (2.145). Как было доказано М. В. Келдышем [1], *задача Дирихле в приведенной выше постановке не всегда имеет решение.*

Дело в том, что те решения уравнения (2.145), которые не имеют изолированных особых точек на прямой $y=0$, как функции переменного y при $y \to +0$, в основном ведут себя как решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^m\varphi''(y)+b(x,\ 0)\,\varphi'(y)=0.$$

Это значит, что указанные решения при $y \to +0$ характеризуются следующим образом: а) при $0<m<1$ все остаются ограниченными; б) при $m=1$, если $b(x,0)<1$, все остаются ограниченными, а если $b(x,0)\geqslant 1$ — среди них существуют и неограниченные; в) при $1<m<2$, если $b(x,\ 0)\leqslant 0$, все остаются ограниченными, а если $b(x,\ 0)>0$ — среди них существуют и неограниченные; г) при $m\geqslant 2$, если $b(x,\ 0)<0$, все остаются ограниченными, а если $b(x,\ 0)>0$ — среди них существуют и неограниченные. Если $m\geqslant 2$, то неограниченные решения существуют и при $b(x,\ 0)\geqslant 0$. Это можно объяснить тем, что в этом случае в окрестности $y=0$ решения уравнения (2.145) ведут себя как решения обыкновенного дифференциального уравнения, которое, кроме выражения $y^m\varphi''(y)+b(x,\ 0)\,\varphi'(y)$, содержит также и младшие члены.

В тех случаях, когда решения уравнения (2.145) в окрестности $y=0$ все ограничены, решение задачи Дирихле в приведенной выше постановке существует и его можно построить точно так же, как в случае уравнения (2.144). Для доказательства того, что построенное указанным способом решение уравнения (2.145) принимает наперед заданные непрерывные значения на AB (на σ этот факт в проверке не нуждается), достаточно показать, что во всех рассматриваемых случаях существует барьер, а это трудности не представляет.

В самом деле, будем опять искать барьер в виде

$$v(x,\ y)=y^\beta+(x-x_0)^2,\qquad 0<x_0<1,\qquad 0<\beta<1.$$

Имеем

$$L(v)=2+\beta(\beta-1)\,y^{m+\beta-2}+2a(x-x_0)+\beta b y^{\beta-1}+cv.$$

Отсюда для достаточно малых значений y можно заключить, что: 1) при $0<m<1$ знак $L(v)$ совпадает со знаком $\beta(\beta-1)\,y^{m+\beta-2}$, т. е. $L(v)<0$; 2) при $m=1$ и $b(x,\ 0)<1$ знак $L(v)$ совпадает со знаком $\beta(\beta-1+{}$ ${}+b)\,y^{\beta-1}$, и если примем, что $\beta<1-b(x,\ 0)$, то будем иметь $L(v)<0$; 3) при $1<m<2$ и $b(x,\ 0)\leqslant 0$, если

$\beta < 2-m$, опять будем иметь $L(v) < 0$ и, наконец, 4) при $m \geqslant 2$ и $b(x, 0) < 0$ знак $L(v)$ совпадает со знаком $\beta b y^{\beta-1}$, т. е. $L(v) < 0$.

Следовательно, при соответствующем подборе окрестности ω_{x_0} точки $Q(x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$, и показателя β выражение $y^\beta + (x-x_0)^2$ во всех указанных случаях может служить барьером.

Если в окрестности $y=0$ решения уравнения (2.145) не все остаются ограниченными при $y \to 0$, то задача Дирихле в приведенной выше постановке невозможна.

В этих случаях оказывается, что однозначно разрешима следующая задача (з а д а ч а E по терминологии М. В. Келдыша [1]): *найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения* (2.145), *остающееся ограниченным при $y \to 0$ и принимающее заданные непрерывные значения f лишь на дуге σ.*

Решение этой задачи строится таким же образом, как решение задачи Дирихле.

Заметим, что в рассматриваемом случае существует положительная в замкнутой области $\bar{D}$ функция $w(x, y)$, равномерно стремящаяся к бесконечности при $y \to 0$ и удовлетворяющая условию $L(w) < 0$ внутри области D.

В качестве w может быть взято, например, выражение

$$w(x, y) = -\log y - (x-\alpha)^n + k,$$

где постоянная α удовлетворяет условию $x-\alpha > 1$, число n — натуральное, k — пока произвольная постоянная, а под $\log y$ понимается главная ветвь этой функции.

В самом деле, для $L(w)$ имеем выражение

$$L(w) = y^{m-2} - n(n-1)(x-\alpha)^{n-2} - an(x-\alpha)^{n-1} - \frac{b}{y} + cw.$$

При $m=1$ и $b(x, 0) \geqslant 1$, в силу аналитичности $b(x, y)$, существует такое положительное число $A > 0$, что

$$1 - b(x, y) < Ay.$$

Подберем число n так, чтобы имели место неравенства

$$n-1 > 3|a|(x-\alpha), \qquad n(n-1) > 3A.$$

После этого число k подбирается так, чтобы $w(x, y)$ была положительна всюду в D.

Для выбранных n и k будем иметь

$$L(w) < A - \frac{1}{3}n\left[n-1+3a(x-\alpha)\right](x-\alpha)^{n-2} - $$
$$-\frac{2}{3}n(n-1)(x-\alpha)^{n-2}+cw < -\frac{1}{3}n(n-1)+cw < 0,$$

т. е. $w(x, y)$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

В случаях $1 < m < 2$, $b(x, 0) > 0$ и $m \geqslant 2$, $b(x, 0) \geqslant \geqslant 0$ всегда может быть выбрано число $A > 0$ так, чтобы имело место неравенство $y^{m-1} - b < Ay$. Поэтому повторением приведенного выше рассуждения заключаем, что и в этих случаях функция $w(x, y)$ с требуемыми свойствами существует.

Теперь легко доказать *единственность решения* задачи E. С этой целью достаточно показать, что решение $u_0(x, y)$ задачи E, удовлетворяющее условию $u_0|_\sigma = 0$, тождественно равно нулю в области D.

Так как, с одной стороны, для любого положительного ε всюду на границе Γ области D имеет место неравенство $\varepsilon w \pm u_0 \geqslant 0$ и, с другой стороны, внутри области D выражение $L(w) < 0$, то отсюда заключаем, что всюду в области D имеет место неравенство $|u_0| \leqslant \varepsilon w$. Из этого, в силу произвольности ε, следует, что в каждой точке области D функция $u_0(x, y) = 0$.

Аналитичности коэффициентов a, b и c мы требовали ради простоты изложения. Это требование, конечно, может быть заменено более слабым требованием гладкости. Следует отметить, что задача Дирихле для уравнения (2.145) в частном случае, когда $m = 1$, $a = b = c = 0$, изучалась в работе Чибрарио [2].

5°. Некоторые обобщения результатов предыдущих пунктов. Полученные в предыдущих пунктах результаты и метод исследования остаются в силе для некоторых классов эллиптических уравнений в многомерных областях. К такому классу относятся, например, уравнения

$$z^m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}+Du=0$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^m\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}+Du=0, \qquad D \leqslant 0,$$

где m — положительное число. В полупространстве $z > 0$ оба эти уравнения являются эллиптическими, в то время как на плоскости $z=0$ имеет место параболическое вырождение.

Задачи нахождения регулярного в области D решения уравнения (2.142), ограниченного в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющего либо условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right|_{\sigma} = f,$$

где γ — заданное направление, либо условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right|_{\sigma} = f, \qquad u|_{AB} = \varphi,$$

были исследованы в работах О. А. Олейник [2] и Н. Д. Введенской [1].

Отмеченные выше задачи для эллиптических уравнений второго порядка с параболическим вырождением на границе области изучались и другими методами (см. М. И. Вишик [1], С. Г. Михлин [2], Л. Д. Кудрявцев [1]).

В 1956 г. на третьем Всесоюзном математическом съезде в обзорном докладе нами было обращено внимание на важность исследования ряда задач для вырождающихся эллиптических уравнений. Приведем некоторые из них.

1) Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (2.142), не обязательно ограниченное при $y \to 0$ и удовлетворяющее условиям

$$u|_{\sigma} = f, \qquad \lim_{y \to 0} \psi(x, y)\, u(x, y) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где f и φ — заданные непрерывные функции, а $\psi(x, y)$ тоже заданная функция, обращающаяся в нуль при $y \to 0$.

2) Предположим, что на некоторых участках отрезка AB, входящего в состав границы $S = \sigma \cup AB$ области D, коэффициент $b(x, 0)$ удовлетворяет условиям: а) $b(x, 0) < 1$ при $m=1$; б) $b(x, 0) \leqslant 0$ при $1 < m < 2$; в) $b(x, 0) < 0$ при $m \geqslant 2$, а в остальных частях от-

резка AB, наоборот: α) $b(x, 0) \geqslant 1$ при $m=1$; β) $b(x, 0) > 0$ при $1 < m < 2$; γ) $b(x, 0) \geqslant 0$ при $m \geqslant 2$. При требовании ограниченности регулярного в области D решения $u(x, y)$ уравнения (2.142), когда $y \to 0$ (с сохранением единственности, конечно), выяснить вопрос о возможности освобождения от граничных данных тех участков AB, на которых $b(x, 0)$ удовлетворяет условиям α), β), γ), в то время как на остальной части границы S значения $u(x, y)$ заданы.

3) Найти регулярное в области D решение уравнения (2.142), непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}}\right|_{\sigma}=f, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{AB}=\varphi \tag{2.171}$$

либо

$$u|_{\sigma}=f, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{AB}=\varphi, \tag{2.172}$$

где f и φ — заданные функции.

Таким образом, задача заключается в установлении, для каких m и $b(x, 0)$ возможны задачи (2.171) и (2.172) и для каких m и $b(x, 0)$ следует освобождать участок AB от граничных данных с сохранением существования и единственности решения задачи с граничными данными лишь на σ.

Здесь полезную роль может играть следующий легко доказываемый принцип экстремума: *при соблюдении условий $c(x, y) \leqslant 0$, $m \geqslant 1$, $b(x, 0) > 0$ регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения* (2.145), *непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$, с ограниченной производной $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\partial u}{\partial y}$, положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\bar{D}$ не может достигать на открытом отрезке AB.*

4) В постановке задачи 3) отказаться от требования ограниченности $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y \to 0$ и заменить условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{AB}=\varphi$$

более слабым условием

$$\lim_{y\to 0}\psi(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi,$$

где $\psi(x,\ y)$ — заданная функция, обращающаяся в нуль при $y\to 0$.

5) Безусловно представляет научный интерес изучение решения эллиптических систем в области, на границе которой имеет место вырождение типа.

В частном случае систем

$$y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0 \qquad (2.173)$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0 \qquad (2.174)$$

$$(m>0,\quad a=\|a_{ik}\|,\quad b=\|b_{ik}\|,\quad c=\|c_{ik}\|),$$

которые являются эллиптическими при $y>0$ и для которых на прямой $y=0$ имеет место вырождение типа, было бы интересно исследовать задачу Дирихле в области D при выполнении условия, аналогичного (2.61).

В этих условиях существует аналог интегрального представления (2.160) и, следовательно, для построения искомого решения можно использовать метод предыдущего параграфа, но трудности будут возникать при выяснении вопроса о том, принимает ли построенное решение заданные значения в точках участка AB границы Γ области D (см. А. В. Бицадзе [2], [5]).

По всем этим вопросам в настоящее время получены определенные результаты. Некоторые из них приведены в книгах Т. Д. Джураева [1], М. С. Салахитдинова [1], М. М. Смирнова [1] и С. А. Терсенова [1]. Особенно следует отметить результаты А. А. Вашарина и П. И. Лизоркина [1], В. Н. Врагова [1], В. П. Диденко [1], [2], [3], В. В. Коврижкина [1], Г. Д. Каратопраклиева [2], С. К. Кумыковой [1], [2], И. Н. Ланина [1], Г. Н. Яковлева [1].

Во многих случаях указанные авторы применяли функциональные методы и доказали существование обобщенных решений.

Значительные трудности возникают, когда вырождающиеся эллиптические системы не имеют вида (2.173) или (2.174).

Как уже было отмечено в пункте 3° § 1 гл. I, эллиптичность системы (1.12) с двумя независимыми переменными означает, что в области задания этой системы корни соответствующего характеристического полинома $P(\lambda)$ (характеристического детерминанта (1.29)) все комплексны и попарно сопряжены. В точках параболического вырождения этот полином должен иметь по крайней мере один действительный корень, кратность которого не меньше двух.

Следовательно, в точках параболического вырождения системы (1.12) дискриминант $\Delta(x_1, x_2)$ полинома $P(\lambda)$ должен обращаться в нуль:

$$\Delta(x_1, x_2) = 0. \tag{2.175}$$

Вопрос о корректности постановок задач для системы (1.12) в области, граница которой содержит участок параболического вырождения, зависит от того, касается ли характеристическое направление этого участка или нет. Поскольку структура множества точек, заданного уравнением (2.175), может оказаться очень сложной, понятны трудности на пути решения этого вопроса.

6°. Частный случай уравнения (2.143). Мы здесь ограничимся рассмотрением частного случая уравнения (2.143), а именно:

$$y^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{2.176}$$

где m — натуральное число, а $\alpha = \mathrm{const}$, причем достаточно ограничиться случаем, когда $\frac{1-2m}{2} \leqslant \alpha < 1$.

Уравнение (2.176) эллиптично при $y > 0$, а при $y=0$ имеет место одновременно и параболическое вырождение, и вырождение порядка. В пункте 1° настоящего параграфа было показано, что для уравнения (2.156), полученного из (2.176), если в нем вместо $2m$ написать $m+1$, а $\alpha=-m/2$, задача (2.148), (2.150) не поставлена корректно. Очевидно, что корректность постановки задачи (2.148), (2.149) сомнения не вызывает.

Обозначим опять через σ_0 полуокружность

$$x^2 - x + \left(\frac{2}{2m+1}\right)^2 y^{2m+1} = 0, \quad y > 0, \tag{2.177}$$

на плоскости с римановой метрикой $ds^2 = dx^2 + y^{2m-1}dy^2$. После введения комплексного переменного

$$z = x + \frac{2i}{2m+1} y^{\frac{2m+1}{2}}$$

уравнение кривой σ_0 можно записать в виде $|z-1/2| = 1/2$.

Пусть D — полукруг $|z-1/2| < 1/2$ с границей $S = \sigma_0 \cup AB$, где $A = A\ (0,\ 0)$, $B = B\ (1,\ 0)$, как и в пункте 1°.

В результате замены переменных

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{2}{2m+1} y^{\frac{2m+1}{2}}, \quad v(\xi,\ \eta) = u\left[\xi, \left(\frac{2m+1}{2}\eta\right)^{\frac{2}{2m+1}}\right],$$

неособой в D, уравнение (2.176) переходит в уравнение Лапласа. Поэтому общее решение уравнения (2.176) в области D дается формулой

$$u(x,\ y) = \operatorname{Re} F(z), \tag{2.178}$$

где $F(z)$ — произвольная аналитическая в D функция комплексного переменного z.

Пользуясь формулой (2.178) регулярных решений уравнения (2.176), в рассматриваемом случае можно в квадратурах выписать решение задачи Дирихле (2.148), (2.149). В самом деле, представим искомое решение этой задачи в виде суммы $u(x,\ y) = u_1(x,\ y) + u_2(x,\ y)$, каждое слагаемое которой является решением уравнения (2.176), причем

$$u_1|_{\sigma_0} = 0, \qquad u_1|_{AB} = \tau(x) \tag{2.179}$$

и

$$u_2|_{\sigma_0} = \varphi(l), \quad u_2|_{AB} = 0. \tag{2.180}$$

В силу первого из условий (2.179) аналитическая функция $F_1(z) = u_1(x,\ y) + iu_1^*(x,\ y)$ аналитически продолжается изнутри полукруга $|z-1/2| < 1/2$, $y > 0$ через полуокружность σ_0 на всю верхнюю полуплоскость комплексного переменного по принципу симметрии.

В силу второго из условий (2.180) аналогично заключаем, что и функция $F_2(z)=u_2(x, y)+iu_2^*(x, y)$ продолжается аналитически изнутри полукруга $|z-1/2|<1/2$, $y>0$ во всю внутренность круга $|z-1/2|<1/2$ также по принципу симметрии. Следовательно, функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ являются решениями задачи Дирихле соответственно в верхней полуплоскости $y>0$ и в круге $|z-1/2|<1/2$, причем

$$u_1(x, 0)=\tau(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \quad u_1(x, 0)=-\tau\left(\frac{x}{2x-1}\right), \quad -\infty<x\leqslant 0, \quad 1\leqslant x<\infty, \tag{2.181}$$

и

$$u_2|_{\sigma_0}=\varphi(t), \quad \operatorname{Im} t\geqslant 0, \quad u_2|_{\bar\sigma_0}=-\varphi(t), \quad \operatorname{Im} t\leqslant 0. \tag{2.182}$$

Применяя формулы Пуассона (1.192) и (1.193) в случае двух независимых переменных, в силу (2.181) и (2.182) после простых преобразований находим

$$u_1(x, y)=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_0^1\left[\frac{1}{t-z}-\frac{1}{(2t-1)(t+z-2tz)}\right]\tau(t)\,dt \tag{2.183}$$

и

$$u_2(x, y)=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma_0}\left[\frac{1}{t-z}-\frac{1}{(2t-1)(t+z-2tz)}\right]\varphi(t)\,dt. \tag{2.184}$$

На основании формул (2.183) и (2.184) заключаем, что искомое решение $u(x, y)$ задачи (2.148), (2.149), (2.176) дается формулой

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_0^1\left[\frac{1}{t-z}-\frac{1}{(2t-1)(t+z-2tz)}\right]\tau(t)\,dt+ \\ +\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma_0}\left[\frac{1}{t-z}-\frac{1}{(2t-1)(t+z-2tz)}\right]\varphi(t)\,dt.$$

Задача (2.148), (2.149), (2.176) *правильно поставлена* и тогда, когда D представляет собой любую область верхней полуплоскости $y>0$, примыкающую участком своей границы к отрезку A_1B_1 оси $y>0$. В этом легко убеждаемся, если отобразить область D на полукруг $|z-1/2|<1/2$ конформно, так чтобы точки A_1 и B_1 перешли в точки $z=0$ и $z=1$.

Когда $\alpha=(1-2m)/2$, для уравнения (2.176) *корректно поставлена* задача с краевым условием (2.148) на σ_0 и условием

$$\lim_{y\to+0} y^{\frac{1-2m}{2}} \frac{\partial u(x)}{\partial y}=\nu(x), \qquad 0<x<1, \tag{2.185}$$

где $\nu(x)$ — заданная интегрируемая функция.

Используя формулу (2.184), без ограничения общности можем считать, что в условии (2.148) функция φ тождественно равна нулю. На основании этого приходим к заключению, что аналитическая в полукруге $|z-1/2|<1/2$ функция $F(z)=u(x, y)+iu_*(x, y)$, где $u(x, y)$ — искомое решение, аналитически продолжается через σ_0 на всю верхнюю полуплоскость по принципу симметрии. Отсюда, в свою очередь, приходим к заключению, что

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-z}+\frac{2z-1}{t+z-2tz}\right)\mu(t)\,dt, \tag{2.186}$$

где

$$\mu(x)=-\int_0^x \nu(t)\,dt. \tag{2.187}$$

Поскольку в силу условия Коши—Римана

$$\frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta}=-\frac{\partial v_*(\xi, \eta)}{\partial \xi},$$

из формул (2.186) и (2.187) убеждаемся, что условие (2.185) действительно выполняется. Непосредственной проверкой убеждаемся и в том, что функция $u(x, y)=\operatorname{Re} F(z)$ удовлетворяет краевому условию (2.148) при $\varphi\equiv 0$.

Когда $(1-2m)/2<\alpha<1$, краевое условие (2.185) следует заменить условием

$$\lim_{y\to+0} y^{\alpha} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=\nu(x). \tag{2.188}$$

Решение $u(x, y)$ задачи (2.148), (2.176), (2.188) также выписывается в квадратурах по формуле (2.153), лишь с той разницей, что на этот раз

$$g(\zeta, z)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{2m+1}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}|z-\bar{\zeta}|^{-\beta}F\left(\beta, \beta, 2\beta, 1-\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right|^2\right),$$

где

$$\beta=\frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}.$$

§ 4. Некоторые другие задачи для эллиптических уравнений

1°. Задача с наклонной производной. Вернемся к задаче с наклонной производной (1.224) для гармонических функций.

Пусть D — односвязная область класса $A^{1,h}$ евклидовой плоскости E_2 переменных x и y, а S — граница этой области. Обозначим через $l=(l_1, l_2)$ заданный на S вектор класса $C^{0,h}(S)$.

В настоящем пункте сперва речь будет идти о задаче с наклонной производной в следующей постановке: *найти регулярную гармоническую в области D функцию $u(x, y)$, принадлежащую классу $C^{1,h}(D\cup S)$ и удовлетворяющую краевому условию*

$$l\cdot\nabla u=f, \tag{2.189}$$

где f — заданная на S функция класса $C^{0,h}(S)$.

Задача (2.189) является частным случаем задачи Пуанкаре. Поэтому в предположении (2.78), которое в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$l_1^2(t)+l_2^2(t)\neq 0, \qquad t\in S,$$

все результаты, изложенные в пункте 6° § 1 гл. II, остаются в силе и для задачи (2.189), причем на этот раз $\varkappa=2(p+1)$, где число $2\pi p$ равно приращению $\arg(l_1-il_2)$ при полном обходе контура S один раз в положительном направлении и характеризует вращение векторного поля l. Эти результаты в случае задачи (2.189) могут быть значительно дополнены.

В самом деле, ввиду того, что $u_x-iu_y=\Phi(z)$ является аналитической в области D функцией комплексного переменного $z=x+iy$, задача (2.189) автоматически редуцируется к известной из теории функций задаче Римана — Гильберта: *найти аналитическую в области D функцию $\Phi(z) \in C^{0,h}(D \cup S)$ по краевому условию*

$$\operatorname{Re}\{[l_1(t) + il_2(t)]\Phi^+(t)\} = f(t), \quad t \in S.$$

Искомое решение $u(x, y)$ задачи (2.189) получается в результате интегрирования функции $\Phi(z)$ и выделения вещественной части.

Очевидно, не ограничивая общности, можно считать, что D является единичным кругом $|z| < 1$.

На основании изложенных в пункте 6° § 1 гл. II результатов заключаем, что *соответствующая* (2.189) *однородная задача*

$$l \cdot \nabla u = 0, \quad x(t) + iy(t) \in S,$$

при $p \geqslant 0$ имеет $2p+2$ линейно независимых решений, а при $p \leqslant -1$ ее решением является лишь постоянная (произвольная). Неоднородная задача (2.189) *при $p \geqslant 0$ всегда разрешима, и ее общее решение содержит линейным образом $2p+2$ произвольных постоянных, а при $p \leqslant -1$ эта задача разрешима тогда и только тогда, когда функция f подчинена $(-2p-1)$ условиям ортогональности вида* (1.263) (Линар [1], Якоб [1], Б. В. Хведелидзе [1], [2]).

Пусть теперь D — односвязная область класса $A^{1,h}$ евклидова пространства E_3 переменных x, y, z с границей S, а $l = (l_1, l_2, l_3)$ — заданный на S вектор класса $C^{0,h}(S)$.

Требуется определить регулярную гармоническую в области D функцию $u(x, y, z)$ класса $C^{1,h}(D \cup S)$ по краевому условию

$$l \cdot \nabla u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S, \tag{2.190}$$

где f — заданная на S функция класса $C^{0,h}(S)$.

Когда соблюдены условия

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \neq 0 \tag{2.191}$$

и

$$\inf_{y \in S} \mathcal{N}_y \cdot l \neq 0, \tag{2.192}$$

где $\mathscr{N}_y$ — внешняя нормаль к S в точке y, Жиро редуцировал (2.190) к двумерному сингулярному интегральному уравнению, удовлетворяющему всем условиям приведенной в пункте 6° § 5 гл. I теоремы Жиро, и, стало быть, *эта задача — фредгольмова*. Аналогичное обстоятельство имеет место и в случае общего равномерно эллиптического уравнения второго порядка (1.141) при $c(x) \leqslant 0$.

Ниже будем считать, что заданное на S векторное поле l удовлетворяет условию (2.191), а условие (2.192) может быть и не выполнено.

Обозначим через H множество точек касания векторного поля l с поверхностью S. Как уже было отмечено, в случае, когда множество H пусто, задача с наклонной производной (2.191) является фредгольмовой. Фредгольмовость этой задачи может нарушиться лишь тогда, когда множество H не пусто.

Легко показать, что *если множество H состоит из n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, то число линейно независимых решений однородной задачи*

$$l \cdot \nabla u = 0, \qquad (x, y, z) \in S, \tag{2.193}$$

не может превышать n.

В самом деле, предположим противное и обозначим через $u_1(P), u_2(P), \ldots, u_n(P)$ линейно независимые решения задачи (2.193). Пусть $u_{n+1}(P)$ — решение задачи (2.193), линейно независимое от $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Равенства $u_{n+1}(M_k)=0$, $k=1, 2, \ldots, n$, не могут иметь места одновременно, ибо при наличии этих равенств, в силу условия (2.193) и принципа Зарембы—Жиро, мы можем заключить, что $u_{n+1}(P)=0$ всюду в области D.

В силу линейной независимости функций $u_1, u_2, \ldots, u_n$ определитель матрицы $\|u_k(M_j)\|$, $k, j=1, 2, \ldots, n$, отличен от нуля. В противном случае у линейной алгебраической системы

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(M_j)\, c_k = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.194}$$

существовало бы нетривиальное решение $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)}$. Соответствующая этому решению системы (2.194) функция $u(P)=\sum_{k=1}^{n} c_k^0 u_k(P)$ была бы решением задачи (2.193), обращающимся в нуль в точках M_j, $j=1, 2, \ldots, n$. Отсюда, в силу принципа Зарембы—Жиро, вытекало бы, что $u(P)=0$ всюду в области D, а это противоречит линейной независимости функций $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Таким образом, система

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(M_j)\, c_k = u_{n+1}(M_j), \qquad j=1, 2, \ldots, n, \tag{2.195}$$

имеет решение $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Рассмотрим теперь функцию $v(P)=\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(P)-u_{n+1}(P)$. В силу равенств (2.193) и (2.195), опять-таки на основании принципа Зарембы—Жиро, заключаем, что $v(P)=0$ и, стало быть, $u_{n+1}(P)=c_k u_k(P)$.

Аналогично доказывается справедливость следующего утверждения: *если множество H состоит из n попарно не пересекающихся гладких дуг, в каждой точке которых направление касательной к дуге совпадает с направлением l, то число линейно независимых решений задачи* (2.195) *не может превышать n.*

Полезно установить условия, достаточные для того, чтобы отличное от постоянной решение $u(P)$ задачи (2.193) в точке $M_0 \in H$ не достигло ни положительного максимума, ни отрицательного минимума. Одно такое условие будет указано ниже.

Пусть решение $u(P)$ задачи (2.193) в точке $M_0 \in H$ достигает положительного максимума. В силу принципа Зарембы—Жиро в точке M_0 должно выполняться неравенство

$$\frac{du}{d\mathcal{N}} > 0, \tag{2.196}$$

где $\mathcal{N}$ — внешняя нормаль к S в точке M_0. На поверхности S в окрестности точки M_0 введем внутренние координаты φ, θ. В точке M_0, наряду с неравенством (2.196), выполняются равенства $u_\varphi=u_\theta=0$.

На S можно указать такую последовательность точек, сходящуюся к точке M_0 в направлении возрастания φ и θ, что вдоль этой последовательности будут иметь место равенства

$$u_x x_\varphi + u_y y_\varphi + u_z z_\varphi = \lambda^2, \qquad u_x x_\theta + u_y y_\theta + u_z z_\theta = \mu^2, \tag{2.197}$$

где величины λ^2 и μ^2 одновременно не обращаются в нуль. Если $\lambda=\mu=0$ вдоль выбранной последовательности точек, то, в силу линейной независимости векторов l, $s_\varphi=(x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi)$, $s_\theta=(x_\theta, y_\theta, z_\theta)$, получили бы, что в M_0 имеют место равенства $u_x=u_y=u_z=0$, что противоречит условию (2.196).

Из (2.193) и (2.197) имеем

$$\frac{du}{d\mathcal{N}}=\frac{1}{[l,\ s_\varphi,\ s_\theta]}\{\lambda^2[l,\ \mathcal{N},\ s_\theta]-\mu^2[l,\ \mathcal{N},\ s_\varphi]\}, \tag{2.198}$$

где квадратные скобки обозначают смешанное произведение трех векторов. При помощи этой формулы непосредственно убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Если по выбранной последовательности точек знак правой части формулы (2.198) *отрицателен, то в точке* M_0 *будем иметь* $\frac{\partial u}{\partial\mathcal{N}}\leqslant 0$, *что исключает неравенство* (2.196), *и, следовательно, в точке* M_0 *функция* $u(P)$ *не может достигать положительного максимума. При соблюдении только что сформулированного условия в точке* M_0 *функция* $u(P)$ *не может достигать и отрицательного минимума.*

В частности, если для m *точек* (*предполагается, что* Π *состоит из* n *точек и* $m\leqslant n$) *знак правой части формулы* (2.198) *отрицателен, то число линейно независимых решений задачи* (2.193) *не может превышать* $n-m$.

В случае двумерной однородной задачи (2.193) вместо равенства (2.198) получаем

$$\frac{du}{d\mathcal{N}}=-\lambda^2\frac{l\cdot s}{l\cdot\mathcal{N}},$$

где $\mathcal{N}$ — внешняя нормаль, а s — касательная к границе S области D.

Условие, что при подходе к точке M_0 выражения $l\cdot s$ и $l\cdot\mathcal{N}$ имеют одинаковые знаки, исключает возможность достижения функцией $u(x, y)$ экстремума в точке M_0. Указанное условие означает, что при подходе к точке M_0 вращение векторного поля l происходит в положительном направлении, что вполне соответствует результатам предыдущего параграфа.

Условие (2.192) принято называть *условием коэрцитивности*. При нарушении этого условия некоторые авторы задачу с наклонной производной не считают эллиптической краевой задачей, что вызывает некоторое недоумение.

При исследовании задачи с наклонной производной (2.189) важно иметь в виду следующее обстоятельство. Если наперед известно, что гармоническая в области D класса $A^{1,h}$ функция $u(x_1, \ldots, x_n) \in C^{0,0}(D \cup S)$ и, кроме того, одна из компонент ∇u, например, $\frac{\partial u}{\partial x_n} \in C^{0,h}(D \cup S)$, то $u \in C^{1,h}(D \cup S)$ при $n=2$. Когда $n > 2$, этот факт может не иметь места. Для иллюстрации достаточно взять пример гармонической в шаре $|x| < 1$ функции $u = \operatorname{Re}(1 - x_1 - ix_2)^h$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, которая удовлетворяет требованиям $u \in C^{0,0}(|x| \leqslant 1)$, $\frac{\partial u}{\partial x_n} \in C^{0,h}(|x| \leqslant 1)$, но $\frac{\partial u}{\partial x_i} \notin C^{0,h}(|x| \leqslant 1)$, $i = 1, 2$, если $h < 1/2$. В этом направлении совсем недавно весьма интересные результаты были получены Ш. А. Алимовым [1].

Начиная с шестидесятых годов ряд авторов посвятили свои труды исследованию задачи с наклонной производной (см. работы Винцеля [1], Ю. В. Егорова и В. А. Кондратьева [1], М. Б. Малютова [1], В. Г. Мазьи, Б. П. Панеях [1], Мелино, Сиострана [1], Хермандера [1], А. И. Янушаускаса [1], [2], [3]).

2°. Задача с наклонной производной с полиномиальными коэффициентами для гармонических функций. В области D класса $A^{1,h}$ пространства E_n точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ требуется найти регулярную гармоническую функцию $u(x)$ класса $C^{1,h}(D \cup S)$, удовлетворяющую краевому условию

$$l(y) \cdot \nabla u(y) = f(y), \qquad y \in S, \tag{2.199}$$

где заданные на S вектор $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ и функция f принадлежат классу $C^{0,h}(S)$.

Будем предполагать, что компоненты вектора l являются полиномами от координат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ точки $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in S$ и обозначим через $l(x)$ полиномиальное продолжение $l(y)$ с границы S в область D. Пусть m — степень полинома $l(x)$, $x \in (D \cup S)$.

При безусловной или условной разрешимости задачи (2.199) функция $l(x) \cdot \nabla u(x) = v(x)$ является регулярным в области D решением полигармонического уравнения

$$\Delta^{m+1}v=0, \tag{2.200}$$

удовлетворяющим краевому условию

$$v(y)=f(y), \quad y \in S. \tag{2.201}$$

Условием (2.201) функция $v(x)$ однозначно определяется лишь при $m=0$. Все регулярные в области D решения уравнения (2.200) даются известной формулой Альманси:

$$v(x)=\sum_{k=1}^{m}|x|^{2k}v_k(x),$$

где $|x|^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, а $v_k(x)$ — произвольные гармонические в области D функции; при этом предполагается, что область D односвязна и содержит внутри начало координат.

Таким образом, задача (2.199) редуцирована к нахождению регулярных гармонических в области D решений линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$l(x)\cdot\nabla u(x)=v(x), \tag{2.202}$$

правая часть которого является произвольной полигармонической в области D функцией, удовлетворяющей краевому условию (2.201).

Хорошо известно, что задача нахождения решений уравнения (2.202) эквивалентна задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx-l(x)\,dt=0, \tag{2.203}$$

где t — скалярный параметр. Если известны независимые аналитические в области D первые интегралы $\xi_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, системы (2.203) и аналитическое частное решение $u_0(x)$ уравнения (2.202), то аналитическое в области D общее решение уравнения (2.202) записывается в виде

$$u(x)=\Phi(\xi)+u_0(x), \tag{2.204}$$

где Φ — произвольная аналитическая функция от переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})=\xi$.

Вопросы существования независимых аналитических первых интегралов системы (2.203) и аналитического частного решения неоднородного уравнения (2.202) изучены в классических мемуарах Пуанкаре при условии, что всюду на S

$$l(y) \neq 0.$$

В дальнейшем мы будем считать, что это условие выполнено.

Если S является сферой $|y|=1$, то уравнение (2.202) можно переписать в виде

$$l(x)\cdot\nabla u(x) = \sum_{k=1}^{m}(|x|^{2k}-1)\,v_k(x) + v_0(x), \tag{2.205}$$

где $v_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, m$, — произвольные гармонические в шаре $|x| < 1$ функции, а $v_0(x)$ — гармоническая в этом же шаре функция, удовлетворяющая краевому условию $v_0(y) = f(y)$, $y \in S$.

Сначала рассмотрим случай, когда $l(x) \neq 0$ всюду в замкнутом шаре $|x| \leqslant 1$; при этом аналитические внутри шара первые интегралы $\xi_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, системы (2.203) и аналитическое частное решение $u_0(x)$ уравнения (2.205) существуют, и, следовательно, аналитическое общее решение этого уравнения можно записать в виде (2.204). Для того чтобы определенная по формуле (2.204) аналитическая функция $u(x)$ была гармонической в шаре $|x| < 1$, функция $\Phi(\xi)$ должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка с $n-1$ независимыми переменными. Следовательно, в рассматриваемом случае задача (2.199) всегда разрешима и степень ее недоопределенности характеризуется общим аналитическим решением полученного для $\Phi(\xi)$ дифференциального уравнения.

Следует заметить, что в рассмотренном случае индекс Кронекера, характеризующий вращение векторного поля $l(y)$, $y \in S$, равен нулю.

Когда индекс Кронекера векторного поля $l(y)$ отличен от нуля, внутри области D обязательно имеются точки, в которых $l(x)=0$. Эти точки являются особыми точками системы (2.203). Как известно, особые точки системы (2.203) классифицируются по характеру корней уравнения

$$\det(A - E\lambda) = 0,$$

где

$$A(x) = \left\| \frac{\partial l_i}{\partial x_k} \right\|,$$

E — единичная $n \times n$-матрица.

Предположим, что $x=0$ является единственной особой точкой системы (2.203). При $n=2$ мы будем иметь дело с тремя типами особых точек: седло, узел и фокус, причем индекс Кронекера $\varkappa_0$ векторного поля $l(y)$ в первом случае отрицателен, а в двух остальных положителен.

В случае седла задача (2.199) всегда разрешима и число ее линейно независимых решений равно $-2\varkappa_0 + 2$. В случаях же узла или фокуса задача (2.199) разрешима лишь тогда, когда выполняются $2\varkappa_0 - 1$ интегральных условий на f (см. предыдущий пункт).

При возрастании n число типов особых точек системы (2.203) растет весьма быстро. Например, при $n=3$, наряду с седлом, узлом и фокусом, появляется новый тип особой точки — седло-фокус. Можно показать, что в случае сферы S лишь при особой точке типа седла имеет место безусловная разрешимость задачи (2.199).

С целью иллюстрации вышесказанного рассмотрим задачу (2.199) с тремя независимыми переменными x, y, z и к тому же коэффициентами весьма частного вида:

$$(x-a)u_x + yu_y + zu_z = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S, \tag{2.206}$$

где $a = \text{const}$.

Ввиду того, что, наряду с функцией $u(x, y, z)$, выражение $v=(x-a)u_x+yu_y+zu_z$ является регулярной гармонической в области D функцией, задача (2.206) редуцируется к отысканию регулярных гармонических в области D решений линейного уравнения

$$(x-a)u_x + yu_y + zu_z = v(x, y, z), \tag{2.207}$$

где $v(x, y, z)$ — известная регулярная гармоническая в области D функция, совпадающая с f на границе S области D.

Для простоты мы ограничимся ниже рассмотрением случая, когда S — сфера $x^2+y^2+z^2=1$. В этом случае функция $v(x, y, z)$ дается известной формулой Пуассона.

Сперва предположим, что $|a|<1$. В этом случае точка $(a, 0, 0)$ является особой точкой типа узла для системы (2.203). Из вида уравнения (2.207) ясно, что для существования решения задачи (2.206) необходимо, чтобы функция f удовлетворяла интегральному условию

$$v(a, 0, 0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1-a^2}{(1+a^2-2a\cos\theta)^{3/2}} f\,ds=0. \tag{2.208}$$

Если условие (2.208) выполняется, то регулярное гармоническое решение уравнения (2.207) существует и дается формулой

$$u(x, y, z)=\int\limits_0^1 v[a+t(x-a), ty, tz]\,t^{-1}dt+c,$$

где c — произвольная постоянная. В рассматриваемом случае задача (2.206) других решений не имеет. Таким образом, при $|a|<1$ условие (2.208) является необходимым и достаточным для существования решения задачи (2.206).

Пусть теперь $|a|>1$, т. е. в шаре $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ система (2.203) особых точек не имеет. В этом случае все дважды непрерывно дифференцируемые в шаре $x^2+y^2+z^2<1$ решения уравнения (2.207) даются формулой

$$u(x, y, z)=\int\limits_{\theta(a-x)^{-1}}^{1} v[a+t(x-a), ty, tz]\,t^{-1}dt+\varphi(\xi, \eta),$$

где $\theta=(a^2-1)/a$, а $\varphi(\xi, \eta)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция переменных $\xi=\dfrac{y}{x-a}$, $\eta=\dfrac{z}{x-a}$. Для того чтобы представленная этой формулой функция $u(x, y, z)$ была регулярным в шаре D решением уравнения Лапласа, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\xi, \eta)$ удовлетворяла линейному эллиптическому уравнению второго порядка

$$(1+\xi^2)\varphi_{\xi\xi}+(1+\eta^2)\varphi_{\eta\eta}+2\xi\eta\varphi_{\xi\eta}+2\xi\varphi_\xi+2\eta\varphi_\eta=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\alpha}\{(\alpha-1)v[a-(\alpha+1)\theta,\ (\alpha-1)\theta\xi,\ (\alpha-1)\theta\eta]\}_{\alpha=0}.$$

Обозначим через u_0 частное решение этого уравнения. Заметим, что вектор $l\ (x-a,\ y,\ z)$ выходит в касательную к сфере S плоскость вдоль окружности $x=1/a$, $x^2+y^2+z^2=1$. При этом, когда точка $(\xi,\ \eta)$ пробегает круг $\xi^2+\eta^2\leqslant 1/(a^2-1)$, точка $(x,\ y,\ z)$ пробегает шар $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

Таким образом, при $|a|>1$ задача (2.206) всегда имеет решения, которые могут быть представлены в виде

$$u=u_0+\psi,$$

где $\psi(\xi,\ \eta)$ — общее регулярное решение однородного уравнения

$$(1+\xi^2)\psi_{\xi\xi}+(1+\eta^2)\psi_{\eta\eta}+2\xi\eta\psi_{\xi\eta}+2\xi\psi_\xi+2\eta\psi_\eta=0.$$

Поскольку это уравнение имеет единственное регулярное в круге $\xi^2+\eta^2<1/(a^2-1)$ решение, принимающее наперед заданные непрерывные значения на окружности $\xi^2+\eta^2=1/(a^2-1)$ или, что то же самое, на окружности $x^2+y^2+z^2=1$, $x=1/a$, формула $u=u_0+\psi$ дает все решения задачи (2.206). Отсюда следует, что решение задачи (2.206) определяется единственным образом, если наперед заданы непрерывные значения u на множестве точек сферы S, в которых направление вектора $l\ (x-a,\ y,\ z)$ выходит к касательную к S плоскость. Этот факт впервые был замечен Ж. Булиганом (см. работу Булигана, Жиро и Делана [1], ч. I).

Аналогично исследуется задача (2.206) и в том случае, когда

$$l_1=a_0+ax+by+cz,\qquad l_2=b_0-bx+ay+dz,$$
$$l_3=c_0-cx-dy+az.$$

Следует отметить, что в случае задачи (2.206) индекс Кронекера, характеризующий вращение заданного на сфере S векторного поля $l\ (x-a,\ y,\ z)$, равен $+1$ или 0 в зависимости от того, $|a|<1$ или $|a|>1$. В случае же $|a|=1$ понятие индекса Кронекера хотя и теряет смысл, но задача (2.206) исследуется точно таким же образом, как и в случае $|a| < 1$.

Случай особой точки типа седла можно иллюстрировать на примере вектора $l(x, y, -z)$. Здесь индекс Кронекера векторного поля l, как легко видеть, равен -1.

Проблема выяснения связи между индексом Кронекера векторного поля l и степенями недоопределенности и переопределенности задачи с наклонной производной (2.199) представляет значительный интерес.

Пусть $u(x, y, z)$ — искомая регулярная гармоническая в шаре D: $x^2+y^2+z^2<1$ функция класса $C^{1, h}(D \cup S)$, где S обозначает сферу $x^2+y^2+z^2=1$, удовлетворяющая краевому условию $u_x|_S=\psi$.

Для функции $u(x, y, z)$ имеет место интегральное представление

$$u(x, y, z)=\int_0^x \varphi(t, y, z)\,dt+\omega(y, z), \qquad (2.209)$$

где $\varphi(x, y, z)$ — регулярная гармоническая в D функция, удовлетворяющая краевому условию

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta)=u_x(x, y, z)|_{x=\xi,\, y=\eta,\, z=\zeta}=\psi(\xi, \eta, \zeta), \qquad (\xi, \eta, \zeta)\in S,$$

а $\omega(y, z)$ — общее решение уравнения Пуассона

$$\omega_{yy}+\omega_{zz}=-\varphi_x(x, y, z)|_{x=0}.$$

Функция $\omega(y, z)$ связана с функцией $u(x, y, z)$ очевидными соотношениями

$$\omega(y, z)=u(0, y, z),$$

$$2\,\mathrm{Re}\,u\left(0, \frac{y+iz}{2}, \frac{y+iz}{2i}\right)+u(0, 0, 0)+\gamma(y, z)=0,$$

где $\gamma(y, z)$ — произвольная гармоническая в цилиндре $y^2+z^2<1$ функция.

Пользуясь формулой Пуассона (1.190), дающей решение задачи Дирихле для гармонических функций в шаре D, интегральному представлению (2.209) можно придать вид

$$u(x, y, z)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left[\frac{(1-\xi^2-y^2-z^2)(x-\xi)}{\delta R^{1/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{x+\xi}{R^{1/2}}-\mathrm{Arcsh}\,\frac{x-\xi}{\delta^{1/2}}\right]\psi\,ds+\gamma(y, z), \quad (2.210)$$

где
$$\delta=(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2, \qquad R=(x-\xi)^2+\delta.$$

Из формулы (2.210) следует, что задача с наклонной производной в рассматриваемом случае всегда имеет решение, но она недоопределена. Если дополнительно известны значения искомой гармонической функции $u(x, y, z)$ на окружности $S_0=\{y^2+z^2=1, x=0\}$, то функция $u(x, y, z)$ однозначно будет определена в шаре D. Исходя из формулы (2.210), для гармонической функции $\gamma(y, z)$ в круге $y^2+z^2<1$, $x=0$, можно поставить задачу с наклонной производной с данными на S_0 и, пользуясь приведенными в предыдущем пункте результатами, вводить понятие индекса для окончательно сформулированной задачи для функции $u(x, y, z)$.

Дальнейшее развитие указанного выше способа исследования задачи с наклонной производной для гармонических функций имеется в работах А. И. Янушаускаса [1], [2], [3]. Им, в частности, установлен любопытный факт. А именно, если вращение векторного поля $l=(ax, ay, c)$ на окружности $S_0=\{x^2+z^2=1, y=0\}$ положительно, то задача с наклонной производной (2.191) в шаре D при условии, что $a^2(x^2+y^2)+c^2\neq 0$, переопределена. Когда $(ax-by)^2+(ay+bx)^2+a^2z^2\neq 0$ и
$$l=(ax-by, ay+bx, az),$$
эта задача также переопределена.

3°. Некоторые простейшие обобщения линейных эллиптических краевых задач. В классических постановках линейных эллиптических задач для равномерно эллиптических уравнений второго порядка носителем данных является вся граница S области, в которой ищется решение, причем в каждой точке S задается либо значение искомой функции (задача Дирихле), либо определенная линейная операция от нее.

В приложениях нередко приходится иметь дело с задачами в другой, неклассической (или, как еще принято говорить, не локальной), постановке.

В гл. IV по необходимости мы будем изучать задачу, частным случаем которой является задача отыскания гармонической функции $u(x, y)$ в области D верхней части плоскости комплексного переменного $x+iy=z$

с границей $S=\sigma \cup AB$, где σ — жорданова дуга с концами в точках $A\,(0,\ 0)$, $B\,(1,\ 0)$, а AB — отрезок оси $y=0$, по краевым условиям

$$u(t)=f(t),\quad t\in\sigma,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\substack{\eta=0,\\ \xi=x}}-\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\substack{\eta=0,\\ \xi=\lambda x}}=\varphi(x),$$

$$0<x<1, \tag{2.211}$$

где λ — действительное число, $0<\lambda<1$.

В задаче (2.211) характерным является то, что на участке AB границы области D, где ищется гармоническая функция, дается связь между ее наклонными производными в точках x и λx.

В указанной главе будут показаны трудности, возникающие при исследовании задач такого типа.

Приведем более простой пример неклассической краевой задачи для гармонических функций: *найти гармоническую в круге* $|z|<1$ *функцию* $u\,(x,\ y)$ *класса* $C^{1,\,0}\,(|z|\leqslant 1)$ *по краевому условию*

$$u(e^{i\vartheta})-u(\delta e^{i\vartheta})=f(e^{i\vartheta}),\qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi, \tag{2.212}$$

где δ — *положительное число меньше единицы, а* f — *заданная действительная функция класса* $C^{1,\,0}\,(0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi)$.

Единственность решения этой задачи является непосредственным следствием принципа экстремума для гармонических функций (см. пункт 2° § 2 гл. II). Существование же решения доказывается довольно легко. В самом деле, при принятых предположениях функцию $f\,(e^{i\vartheta})$ можно представить в виде суммы абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье:

$$f(e^{i\vartheta})=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos k\vartheta+b_k\sin k\vartheta),\qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi. \tag{2.213}$$

Представляя в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ искомую гармоническую функцию в виде суммы также абсолютно и равномерно сходящегося ряда:

$$u(re^{i\varphi})=\sum_{k=0}^{\infty}r^k(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi),\qquad r^2=x^2+y^2, \tag{2.214}$$

и подставляя выражения (2.213) и (2.214) в краевое условие (2.212), для определения чисел α_k и β_k будем иметь

$$\alpha_k = \frac{a_k}{1-\delta^k}, \qquad \beta_k = \frac{b_k}{1-\delta^k},$$

и, стало быть, искомое решение можно выписать в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{1-\delta^k} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Существование и единственность решения задачи (2.213), конечно, можно установить при более слабых предположениях относительно поведения искомой гармонической функции в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, но на этом мы здесь останавливаться не будем.

В нашей совместной с А. А. Самарским работе [1] было обращено внимание на неклассические эллиптические краевые задачи в более общей постановке.

В евклидовом n-мерном пространстве точек x с декартовыми ортогональными координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рассмотрим область D, граница S которой является $(n-1)$-мерной кусочно гладкой поверхностью Ляпунова. Обозначим через σ часть S, представляющую собой $(n-1)$-мерную разомкнутую поверхность Ляпунова с параметрическим уравнением

$$x = x(t), \qquad t = (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \in \delta.$$

Пусть σ_0 — диффеоморфный $y = I(x)$ образ σ, лежащий в области D, с параметрическим уравнением $y = y(t)$, $t \in \delta$.

В области D рассмотрим равномерно эллиптический линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$L = \sum_{i,\,j=1}^{n} A^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B^i \frac{\partial}{\partial x_i} + C$$

с действительными достаточно гладкими матричными коэффициентами размера $m \times m$.

Естественным обобщением задачи Дирихле можно считать следующую краевую задачу: *найти регулярное* *(дважды непрерывно дифференцируемое) в области D решение $u(x)$ уравнения*

$$Lu = f(x), \qquad x \in D, \tag{2.215}$$

непрерывное в $\bar{D}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x) = \varphi(x), \qquad x \in S - \sigma, \tag{2.216}$$

$$u(y) = u(x), \qquad y = I(x),\ x(t) \in \sigma,\ y(t) \in \sigma_0, \tag{2.217}$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — заданные действительные m-мерные непрерывные векторы.

Мы ниже ограничимся рассмотрением случая, когда (2.215) является двумерным уравнением Лапласа $\Delta u = 0$ с независимыми переменными x, y, область D совпадает с прямоугольником $-l < x < l$, $0 < y < 1$, а σ и σ_0 представляют собой отрезки $x = l$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ соответственно.

Итак, ищется гармоническая в прямоугольнике D функция $u(x, y)$, непрерывная в замкнутом прямоугольнике $\bar{D}$ и удовлетворяющая условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, 1) = \varphi_2(x), \quad -l \leqslant x \leqslant l, \tag{2.218}$$

$$\left.\begin{aligned} u(-l, y) &= \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ u(0, y) &= u(l, y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \end{aligned}\right\} \tag{2.219}$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 — заданные непрерывные функции.

Единственность решения задачи (2.218), (2.219) следует из принципа экстремума для гармонических функций.

Действительно, учитывая условие (2.219), на основании указанного принципа заключаем, что удовлетворяющая условиям (2.218) гармоническая функция $u(x, y)$ своих экстремальных значений в замкнутом прямоугольнике $\bar{D}$ может достигать лишь на его левой, верхней и нижней сторонах. Следовательно, соответствующая (2.218), (2.219) однородная задача не может иметь отличного от нуля решения, и тем самым единственность решения задачи (2.218), (2.219) доказана.

Неизвестные пока нам значения искомого решения $u(x, y)$ при $x = l$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ обозначим через $\varphi(y)$, т. е.

$$\varphi(y) = u(l, y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Решение задачи Дирихле с краевыми условиями (2.218), (2.219) дается известной формулой

$$u(x,\ y)=\int_{-l}^{l} K(x,\ y;\ \xi,\ 0)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi+\int_{0}^{1} K(x,\ y;\ l,\ \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta-$$
$$-\int_{-l}^{l} K(x,\ y;\ \xi,\ 1)\,\varphi_2(\xi)\,d\xi-\int_{0}^{1} K(x,\ y;\ -l,\ \eta)\,\varphi_3(\eta)\,d\eta, \qquad (2.220)$$

где функция $K(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ совпадает с производной гармонической функции Грина $G(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ задачи Дирихле в прямоугольнике D по внутренней нормали его контура в точке $(\xi,\ \eta)$.

В силу условия (2.219) из (2.220) получим эквивалентное задаче (2.218), (2.219) интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(y)-\int_{0}^{1} K(0,\ y;\ l,\ \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta=\int_{-l}^{l} K(0,\ y;\ \xi,\ 0)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi-$$
$$-\int_{-l}^{l} K(0,\ y;\ \xi,\ 1)\,\varphi_2(\xi)\,d\xi-\int_{0}^{1} K(0,\ y;\ -l,\ \eta)\,\varphi_3(\eta)\,d\eta, \qquad (2.221)$$

ядро $K(0,\ y;\ l,\ \eta)$ которого является аналитической функцией переменных y, η, обращающейся в бесконечность порядка $1/2$ при $\eta=0$ и $\eta=1$.

Так как задача (2.218), (2.219) эквивалентна интегральному уравнению (2.221), то разрешимость последнего и, стало быть, существование решения задачи (2.218), (2.219) вытекают из уже доказанного выше свойства единственности этого решения.

Аналогично исследуется краевая задача (2.218), (2.219) в том случае, когда третье из условий (2.218) заменено условием $u(-l,\ y)=u(0,\ y)$.

В частности, решение задачи отыскания гармонической в прямоугольнике D функции $u(x,\ y)$, непрерывной в $\bar{D}$ и удовлетворяющей условиям

$$u(x,\ 0)=\varphi_1(x), \quad u(x,\ 1)=\varphi_2(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l,$$
$$u(x,\ y)=u(x+l,\ y), \quad -l\leqslant x\leqslant 0, \qquad 0\leqslant y\leqslant 1,$$

где φ_1 и φ_2 — заданные непрерывные функции, дается формулой

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^l\left[\frac{\varphi_1(t)}{\operatorname{ch}\pi(t+kl-x)-\cos\pi y}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi_2(t)}{\operatorname{ch}\pi(t+kl-x)+\cos\pi y}\right]\sin\pi y\,dt$$

Примененный выше способ годится для доказательства существования и единственности решения задачи (2.215), (2.216), (2.217) в тех случаях, когда для решения уравнения (2.215) в области D имеет место принцип экстремума. С незначительным видоизменением этот же способ приводит к цели во всех тех случаях, когда уравнение (2.215) в области D имеет фундаментальное решение.

Когда краевое условие (2.216) заменено общим линейным краевым условием (например, условием задачи Пуанкаре), исследование полученной задачи сталкивается с теми же трудностями, которые возникают в случае, когда носителем аналогичного условия является вся граница S области D.

Аналогичные задачи возникают и для эллиптических уравнений высших порядков. В этом отношении модельной можно считать задачу определения бигармонической в круге $|z|<1$ функции $u(x, y)=\operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\psi(z)]$ по краевым условиям

$$u(e^{i\vartheta})-u(\delta e^{i\vartheta})=f(e^{i\vartheta}),$$

$$\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=1}=f_1(e^{i\vartheta}),\qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi,$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — неизвестные аналитические в круге $|z|<1$ функции, δ — заданное положительное число меньше единицы, а f и f_1 — также заданные действительные функции (см. Д. Г. Гордезиани [1]).

4°. Линеаризованная задача Навье—Стокса. В теории установившегося плоскопараллельного движения несжимаемой жидкости принято, что компоненты $u(x, y)$, $v(x, y)$ вектора скорости и давление $p(x, y)$ удовлетворяют линейной системе уравнений с частными производными Навье—Стокса

$$u_{xx}+u_{yy}=kp_x,\quad v_{xx}+v_{yy}=kp_y,\quad k=\text{const},\quad u_x+v_y=0 \tag{2.222}$$

и краевым условиям

$$u=F_1(t),\quad v=F_2(t),\quad t\in S, \tag{2.223}$$

где S — граница области D, занимаемой потоком жидкости.

При предположении непрерывной дифференцируемости $u(x, y)$ и $v(x, y)$ до третьего порядка, а $p(x, y)$ — до второго порядка система (2.222) равносильна системе

$$u_x+v_y=0,\quad u_y-v_x=-2i\varphi'(z)+2i\overline{\varphi'(z)}, \tag{2.224}$$

где $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $z=x+iy$.

Записывая систему (2.224) в виде $w_{\bar z}=\varphi'(z)-\overline{\varphi'(z)}$, $w=u-iv$, сразу приходим к известной формуле

$$w(z)=\bar z\varphi'(z)-\overline{\varphi(z)}+\psi(z), \tag{2.225}$$

где $\psi(z)$ — произвольная аналитическая функция.

В силу (2.222), (2.225) имеем $p_x-ip_y=2p_z=4k^{-1}w_{z\bar z}=$ $=4k^{-1}\varphi''(z)$, откуда следует, что $p(x, y)=4k^{-1}\operatorname{Re}\varphi'(z)+c$, где c — произвольная действительная постоянная.

Решение вида $w(z)\equiv 0$, $p(x, y)=\text{const}$ задачи (2.222), (2.223) будем называть тривиальным.

Пусть D — ограниченная область с гладким контуром S.

Если решение $u(x, y)$, $v(x, y)\in C^2(D\cup S)$, $p(x, y)\in$ $\in C^1(D\cup S)$ системы (2.222) удовлетворяет краевым условиям

$$u(t)=v(t)=0,\qquad t\in S, \tag{2.226}$$

то, интегрируя очевидное тождество $(uu_x+vv_x-kup)_x+$ $+(uu_y+vv_y-kvp)_y=u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2$ по области D, получаем

$$\int(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2)\,dx\,dy=0,$$

откуда, в свою очередь, заключаем, что однородная задача (2.222), (2.226) нетривиальных решений не имеет.

Единственность решения задачи (2.223), (2.225) имеет место и при $w \in C^{1,h}(D \cup S)$.

В случае, когда область D не ограничена, требование ограниченности функции $w(z)$, представимой в виде (2.225) и удовлетворяющей краевым условиям (2.226), вовсе не обязывает ее быть тождественным нулем. Так, например, при $4\varphi = z^2 - 2z$, $4\psi = -z^2 - 4$ из (2.225) получается функция $w(z) = y^2 - 1$, ограниченная в полосе $-1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$ и обращающаяся в нуль при $y = \pm 1$. Следовательно, $u = y^2 - 1$, $v = 0$, $p = 2k^{-1}x + c$ дает нетривиальное решение задачи (2.222), (2.223).

Когда область D представляет собой круг $|z| < 1$, решение задачи (2.223), (2.225) в предположении, что $w \in C^{0,h}(|z| \leqslant 1)$, $0 < h \leqslant 1$, дается формулой

$$w = \frac{1 - z\bar{z}}{2\pi i z}\left[\frac{d}{dz}\int_S \overline{f(t)}\frac{dt}{t - z} - \int_S \overline{f(t)}\frac{dt}{t^2}\right] + \frac{1}{2\pi i}\int_S f(t)\frac{dt}{t - z} + \overline{\frac{1}{2\pi i}\int_S \overline{f(t)}\frac{dt}{t - z}} - \frac{1}{2\pi i}\int_S f(t)\frac{dt}{t}, \quad f = F_1 - iF_2$$

(см. В. С. Виноградов [1], А. В. Бицадзе [9], [2]).

Если D — односвязная область с контуром S, удовлетворяющим условию Ляпунова, то в результате конформного отображения $z = z(\zeta)$ этой области на круг $|\zeta| < 1$ функция w и краевые условия (2.223) принимают вид

$$w = \omega(\zeta)\varphi[z(\zeta)]_\zeta - \overline{\varphi[z(\zeta)]} + \psi[z(\zeta)],$$
$$|\zeta| < 1, \quad w = f[z(\zeta)], \quad |\zeta| = 1,$$

где $z'(\zeta)\,\omega(\zeta) = \overline{z(\zeta)}$.

Следовательно, возвращаясь к прежним обозначениям, вопрос существования решения задачи (2.222), (2.223) можем считать редуцированным к отысканию аналитических в круге $|z| < 1$ функций $\varphi(z(\zeta)) \in C^{1,h}(|z| \leqslant \leqslant 1)$, $\psi(z(\zeta)) \in C^{0,h}(|z| \leqslant 1)$, удовлетворяющих на окружности $|t_0| = 1$ краевым условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\omega(t_0)\varphi'(t_0) - \varphi(t_0) + \psi(t_0)] &= F_1(t_0), \\ \operatorname{Re} i[\omega(t_0)\varphi'(t_0) + \varphi(t_0) + \psi(t_0)] &= F_2(t_0), \end{aligned} \qquad (2.227)$$

где $\omega(t_0)$, $F_1(t_0)$, $F_2(t_0) \in C^{1,h}$, причем без ограничения общности можно полагать, что

$$\operatorname{Re}\varphi(0) = \operatorname{Re}\psi(0). \tag{2.228}$$

Известно, что аналитические в круге $|z| < 1$ функции $\varphi(z) \in C^{1,h}(|z| \leqslant 1)$, $\psi(z) \in C^{0,h}(|z| \leqslant 1)$, удовлетворяющие условию (2.228), однозначно выражаются через действительные плотности $\mu_1(t) \in C^{1,h}(|t| = 1)$, $\mu_2(t) \in C^{0,h}(|t| = 1)$ по формулам

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_S \log(1 - zt^{-1})\,\mu_1(t)\,ds + \frac{1}{\pi i}\int_S \mu_1(t)\,ds + \operatorname{Re}\varphi(0),$$
$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_S \frac{\mu_2(t)\,t\,ds}{t - z} + \operatorname{Re}\varphi(0), \tag{2.229}$$

где интегралы берутся по окружности S: $|t| = 1$, а под $\log(1 - zt^{-1})$ понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$ (см. формулы (2.34) (2.33)).

На основании формул (2.229) краевая задача (2.227) редуцируется к системе сингулярных интегральных уравнений

$$A(t_0)\,\mu(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_S \frac{\mu(t)\,t}{t - t_0}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_S C(t)\log\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)\mu(t)\,dt +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_S D(t)\log\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\mu(t)\,dt +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_S E(t_0, t)\,\mu(t)\,dt = f(t_0), \tag{2.230}$$
$$|t_0| = 1, \quad |t| = 1,$$

где

$$A(t) = \operatorname{Re}\begin{Vmatrix} i\tau & 0 \\ \tau & -1 \end{Vmatrix}, \quad B(t) = i\operatorname{Im}\begin{Vmatrix} i\tau & -i \\ \tau & 0 \end{Vmatrix}, \quad C(t) = \begin{Vmatrix} i\bar t & 0 \\ -\bar t & 0 \end{Vmatrix},$$
$$D(t) = -\begin{Vmatrix} i\bar t & 0 \\ \bar t & 0 \end{Vmatrix}, \quad E(t_0, t) = \begin{Vmatrix} -i\tau(t_0)\,\bar t & i\bar t \\ -\tau(t_0)\,\bar t - 2 & -\bar t \end{Vmatrix},$$
$$\mu = (\mu_1, \mu_2), \quad f = (F_1, -F_2), \quad t\tau(t) = \omega(t),$$

а под $\log(1 - tz^{-1})$ понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z \to \infty$.

Так как $\det(A+B)=\det(A-B)=0$, то к уравнению (2.230) неприменима известная теория сингулярных интегральных уравнений. Однако наличие в левой части этого уравнения, наряду с сингулярным ядром Коши, и ядер с логарифмической особенностью позволяет легко преодолеть это затруднение.

В самом деле, в результате однозначно обратимых замен

$$\nu(t_0)=a(t_0)\mu(t_0)+\\ +\int_S \frac{b(t_0,t)}{t-t_0}\mu(t)\,dt+\int_S b(t_0,t)t^{-1}\log\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\mu(t)\,dt,$$

$$\sigma(t_0)=\overline{a(t_0)}\nu(t_0)+\\ +\int_S \frac{\overline{b(t_0,t)}}{t-t_0}\nu(t)\,dt+\int_S \overline{b(t_0,t)}\,t^{-1}\log\left(1-\frac{t_0}{t}\right)\nu(t)\,dt$$

уравнение (2.230) приводится к виду

$$\alpha(t_0)\sigma(t_0)+\frac{\beta(t_0)}{\pi i}\int_S \frac{\sigma(t)\,dt}{t-t_0}+\int_S K(t_0,t)\sigma(t)\,dt=g(t_0), \tag{2.231}$$

где

$$a(t)=\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} 3 & \tau \\ -\tau^{-1} & 3 \end{Vmatrix},$$

$$b(t_0,t)=-\frac{1}{2\pi i}\begin{Vmatrix} 1 & \tau(t)^{-1} \\ \tau(t_0) & \tau(t_0)\tau(t)^{-1} \end{Vmatrix}, \tag{2.232}$$

$$\alpha(t)=\gamma(t)+\delta(t),\quad \beta(t)=\gamma(t)-\delta(t),$$

$$\gamma(t)=\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} 2i\tau-i & -2i-i\tau^{-1} \\ 2\tau+1 & -2+\tau^{-1} \end{Vmatrix},$$

$$\delta(t)=\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} -2i\tau-i & 2i-i\tau^{-1} \\ 2\tau-1 & -2-\tau^{-1} \end{Vmatrix}, \tag{2.233}$$

$g(t_0)$ — известная функция, которая выражается через $f(t_0)$, а $K(t_0,t)$ — регулярное ядро.

Так как в силу (2.232) и (2.233)

$$\det(\alpha+\beta)=\det(\alpha-\beta)=4i, \tag{2.234}$$

то мы вправе пользоваться существующей теорией сингулярных интегральных уравнений (ср. с (1.260)). В частности, из равенств (2.234) следует, что индекс системы

(2.231) и, стало быть, индекс задачи (2.227), вычисленный по формуле (М), равен нулю:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\det(\alpha-\beta) - \arg\det(\alpha+\beta)\right]_S = 0.$$

Отсюда на основании единственности решения задачи (2.222), (2.223) заключаем, что при принятых выше предположениях относительно гладкости данных эта задача всегда имеет решение.

Идея использования присутствия в сингулярном интегральном уравнении ядра с логарифмической особенностью, при нарушении условия нормальной разрешимости (1.260) этого уравнения, была нами реализована еще в сороковых годах на конкретных примерах (см. А. В. Бицадзе [1], [2]). В дальнейшем эта идея была развита в работах Н. Е. Товмасяна [4] и Р. С. Сакса [2].

5°. Заключительные замечания. Выше в основном речь шла об эллиптических уравнениях с двумя независимыми переменными. Отыскание для них корректной постановки краевых задач и их исследование значительно упрощается возможностью применения методов теории аналитических функций комплексного переменного.

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают новые моменты, вызываемые не только трудностями технического характера. Впрочем, весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. На примере задачи с наклонной производной мы убедились в том, что установление степеней ее недоопределенности или переопределенности даже для гармонических функций сильно осложняется при увеличении размерности области, в которой ищется решение. Ограничиться установлением лишь условий коэрцитивности — значит отказаться от многих важных задач.

При исследовании первой краевой задачи для равномерно эллиптических уравнений и систем высокого четного порядка принципиальные трудности не встречаются. Однако существенно новые моменты по сравнению с эллиптическими системами второго порядка могут возникнуть лишь тогда, когда порядок входящих в систему уравнений является нечетным.

Так, например, характеристическим детерминантом для эллиптических систем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial y}-\frac{\partial^3 u_1}{\partial x\, \partial y^2}+\frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3}+2\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3 u_2}{\partial x\, \partial y^2}=0,\\ -2\frac{\partial^3 u_1}{\partial x\, \partial y^2}+\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2\, \partial y}+\frac{\partial^3 u_2}{\partial x\, \partial y^2}+\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}=0\end{gathered} \tag{2.235}$$

и

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}-3\frac{\partial^3 u_1}{\partial x\, \partial y^2}-3\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2\, \partial y}+\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}=0,\\ 3\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2\, \partial y}-\frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3}-3\frac{\partial^3 u_2}{\partial x\, \partial y^2}+\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}=0\end{gathered} \tag{2.236}$$

является одна и та же функция

$$D(\lambda)=(\lambda^2+1)^3$$

с трехкратными корнями $\lambda=i$, $\lambda=-i$, но в смысле постановок краевых задач эти системы ведут себя по-разному.

Как легко видеть, общее решение системы (2.335) в любой односвязной области D плоскости $z=x+iy$ имеет вид

$$\begin{aligned}u_1&=\operatorname{Re}[2(1+i)\varphi(z)+4(1+i)\bar z\psi(z)],\\ u_2&=\operatorname{Re}[\chi(z)-\bar z\varphi'(z)+2(1-i)\bar z\psi(z)-\bar z^2\psi'(z)],\end{aligned} \tag{2.237}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ — произвольные аналитические в D функции.

На основании формул (2.237) заключаем, что для системы (2.235) в области D при достаточной гладкости ∂D правильно поставлена задача с краевыми условиями

$$u_1(t)=f_1(t),\quad u_2(t)=f_2(t),\quad \frac{d}{d\nu}u_1(t)=f_3(t),\quad t\in\partial D, \tag{2.238}$$

где ν — нормаль к кривой ∂D в точке t.

Что же касается системы (2.236), ввиду того, что общее ее решение дается формулой

$$u_1+iu_2=w(z)=\bar z^2\varphi(z)+\bar z\psi(z)+\chi(z), \tag{2.239}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ — произвольные аналитические в D функции, для нее задача (2.238) не является ни фредгольмовой, ни нетеровой. Например, в круге D: $|z|<1$ для системы (2.236) соответствующая (2.238) однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений

$$w=(1-2z\bar{z}+z^2\bar{z}^2)\chi(z),$$

а неоднородная задача (2.238) может иметь решения лишь при условии, что заданная на окружности ∂D функция

$$f(t)t^2=[f_1(t)+if_2(t)]t^2$$

является предельным значением аналитической внутри D функции.

Из формулы (2.239) очевидно, что для системы (2.236) задача с непрерывными краевыми условиями

$$\operatorname{Re} w=f_1(t), \quad \operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial\bar{t}}w=f_2(t), \quad \operatorname{Re}\frac{\partial^2}{\partial\bar{t}^2}w=f_3(t), \quad t\in\partial D,$$

безусловно разрешима в любой области D, в которой разрешима задача Дирихле для гармонических функций, причем соответствующая однородная задача имеет три линейно независимых решения.

При исследовании эллиптической системы нечетного порядка едва ли целесообразно искать выход в ее редукции к системе первого порядка не только потому, что отсутствует теория краевых задач для общих эллиптических систем первого порядка.

Не выяснено, что нового вносится при исследовании задачи Пуанкаре даже для одного эллиптического уравнения второго порядка, когда носитель данных полностью или частично состоит из точек параболического вырождения.

В случае нерасщепленных эллиптических систем с параболическим вырождением на границе области, в которой ищется решение, не исследованы случаи, подобные задаче E, рассмотренной в пункте 4° § 3 настоящей главы.

Выше (см. пункт 6° предыдущего параграфа) мы ограничились рассмотрением частного вида (2.176) эллиптических уравнений, тип и порядок которых вырождаются вдоль прямой $y=0$.

Эллиптические уравнения с параболическим вырождением и вырождением порядка, как правило, встречаются при применении метода разделения переменных. Когда число независимых переменных равно n, множество точек вырождения может представлять собой континуумы всех размерностей от нуля до $n-1$. Поэтому естественно, что создание общей теории вырождающихся эллиптических уравнений сталкивается с большими трудностями.

Вырождение лишь порядка эллиптических уравнений может оказаться причиной нарушения нормальной разрешимости краевых задач для этих уравнений.

В нашей работе [5] был приведен пример эллиптической системы с двумя независимыми переменными

$$\begin{aligned} x\,\Delta u_1 + y\,\Delta u_2 - 2(u_{1x} + u_{2y}) &= 0, \\ y\,\Delta u_1 - x\,\Delta u_2 + 2(u_{2x} - u_{1y}) &= 0, \end{aligned} \tag{2.240}$$

для которой решение (не единственное) задачи Дирихле с гёльдеровыми данными $u_1+iu_2=f$ на окружности S: $|z|=1$, $z=x+iy$, выписывается в квадратурах:

$$u_1 + iu_2 = \alpha(1 - z\bar{z}) + \frac{z\bar{z}}{2\pi i}\int\limits_S \frac{f\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{f\,dt}{t} - \frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_S \frac{\bar{f}dt}{t-z}},$$

где α — произвольная постоянная, а черта означает переход к комплексно сопряженной величине.

На этот раз нарушение фредгольмовости задачи Дирихле вызвано тем, что в центре круга $|z|<1$ имеет место вырождение порядка системы (2.240). В этом направлении следует отметить работы А. М. Абдрахманова [1], А. И. Ачильдиева [1], Е. А. Бадерко [1], О. А. Олейник [2], Р. М. Шариповой [1] и А. И. Янушаускаса [4] (в последней приведено исследование некоторых классов эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами при наличии вырождения порядка).

При $n>1$ неограниченность области D, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, также может оказаться причиной нарушения фредгольмовости краевых задач.

Глава III. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Гиперболические уравнения второго порядка с расщепленными главными частями при отсутствии параболического вырождения

1°. Задачи Дарбу для уравнения колебаний струны. Как уже было отмечено в пункте 3° § 4 гл. I, для гиперболических уравнений второго порядка при отсутствии параболического вырождения корректно поставлены как начальная (1.147), так и характеристическая (1.148) задачи Коши. Для этих же уравнений не менее типичными являются так называемые задачи Дарбу. В настоящем пункте сформулируем эти задачи для уравнения колебаний струны (1.54) и дадим их решения.

Первая задача Дарбу: *в угле D, ограниченном полуосью $t=0$, $x \geqslant 0$, и характеристикой $x+t=0$, $x \geqslant 0$, уравнения (1.54), требуется найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1.54), удовлетворяющее условиям*

$$u(x, 0)=\tau(x), \quad u(x, -x)=\psi(x), \quad x \geqslant 0, \qquad \tau(0)=\psi(0), \tag{3.1}$$

где $\tau(x)$ и $\psi(x)$ — заданные действительные функции класса $C^{2,0}$.

Вторая задача Дарбу: *найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1.54), если известны его значения класса $C^{2,0}$:*

$$u(x, 0)=\tau(x), \quad u(x, -\gamma(x))=\psi(x), \tag{3.2}$$

где

$$t=-\gamma(x), \quad \gamma(0)=0, \tag{3.3}$$

представляет собой кривую γ с непрерывной кривизной, удовлетворяющую условию

$$0<\frac{d\gamma}{dx}<1. \tag{3.4}$$

Чтобы найти решения этих задач, мы воспользуемся общим представлением (1.55) решений уравнения (1.54).

Требуя удовлетворения условий (3.1), из (1.55) будем иметь

$$f_1(x)+f_2(x)=\tau(x),\quad f_1(0)+f_2(2x)=\psi(x),\quad x\geqslant 0. \tag{3.5}$$

Из соотношений (3.5) сразу находим, что

$$f_1(x)=\tau(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)+f_1(0),\qquad f_2(x)=\psi\left(\frac{x}{2}\right)-f_1(0),$$

и, стало быть, искомое решение задачи (1.54), (3.1) выписывается в явном виде:

$$u(x,\ t)=\tau(x+t)-\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-t}{2}\right). \tag{3.6}$$

Переходим к построению решения задачи (1.54), (3.2). В силу (3.2) опять из формулы (1.55) получаем равенства

$$f_1(x)+f_2(x)=\tau(x), \tag{3.7}$$
$$f_1(x-\gamma(x))+f_2(x+\gamma(x))=\psi(x),\qquad x\geqslant 0.$$

Поскольку $\gamma(0)=0$, на основании (3.4) заключаем, что равенство

$$x+\gamma(x)=\xi,\qquad x\geqslant 0, \tag{3.8}$$

однозначно обратимо. Пусть $x=\delta(\xi)$ — функция, найденная из (3.8). Перепишем второе из равенств (3.7) в виде

$$f_2(x)+f_1(\lambda(x))=\psi(\delta(x)), \tag{3.9}$$

где $\lambda(x)=\delta(x)-\gamma(\delta(x))$. Первое из равенств (3.7) и равенство (3.9) после исключения $f_2(x)$ дают

$$f_1(x)-f_1(\lambda(x))=\tau(x)-\psi(\delta(x))\equiv\omega(x). \tag{3.10}$$

Ввиду того, что

$$0<\frac{d\lambda}{dx}=\frac{1-\gamma'(\delta(x))}{1+\gamma'(x)}<1,$$

для определения функции $f_1(x)$ из уравнения (3.10) мы можем пользоваться *методом итераций*. В результате будем иметь

$$f_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\omega(\lambda^k(x)), \tag{3.11}$$

где $\lambda^0(x)=x,\ \lambda^1(x)=\lambda(x),\quad \lambda^k(x)=\lambda^{k-1}(\lambda(x))$.

В силу (3.11) первое из равенств (3.7) дает

$$f_2(x)=\tau(x)-\sum_{k=0}^{\infty}\omega(\lambda^k(x)). \tag{3.12}$$

Подставляя выражения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из (3.11) и (3.12) в (1.55), получаем решение $u(x, t)$ задачи (1.54), (3.2):

$$u(x, t)=\sum_{k=0}^{\infty}\omega(\lambda^k(x+t))+\tau(x-t)-\\ -\sum_{k=0}^{\infty}\omega(\lambda^k(x-t)). \tag{3.13}$$

Из процесса получения решений (3.6) и (3.13) первой и второй задач Дарбу следует единственность самих решений. Впрочем, единственность решения первой задачи Дарбу следует из принципа экстремума для решений уравнения колебаний струны (см. 4° § 2 гл. I).

Во второй задаче Дарбу в первом из условий (3.2) вместо прямой $t=0$ носителем данных можно брать кривую

$$t=\gamma_1(x), \qquad \gamma_1(0)=0,$$

с непрерывной кривизной, удовлетворяющую условию

$$0<\frac{d\gamma_1}{dx}<1. \tag{3.14}$$

Итак, потребуем, чтобы решение $u(x, t)$ уравнения (1.54) удовлетворяло второму из условий (3.2) и условию

$$u(x, \gamma_1(x))=\psi_1(x), \qquad x\geqslant 0. \tag{3.15}$$

На основании (3.15) из формулы (1.55) получаем

$$f_1(x)+f_2(\lambda_1(x))=\omega_1(x), \qquad x\geqslant 0, \tag{3.16}$$

где $\omega_1(x)=\psi_1(\delta_1(x))$, функция $\xi=\delta_1(x)$ получена обращением равенства $\xi+\gamma_1(\xi)=x$, функция $\lambda_1(x)=\delta_1(x)-\gamma_1(\delta_1(x))$, причем в силу (3.14)

$$0<\frac{d\lambda_1}{dx}<1.$$

После исключения функции $f_1(x)$ из равенств (3.9) и (3.16) будем иметь

$$f_2(x) - f_2(\lambda_2(x)) = \omega_2(x), \tag{3.17}$$

где $\lambda_2(x) = \lambda(\lambda_1(x))$, $\omega_2(x) = \psi(\delta(x)) - \omega_1(\lambda(x))$.

Так как $0 < \frac{d\lambda_2}{dx} < 1$, из (3.17) получаем

$$f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_2(\lambda_2^k(x)), \quad \lambda_2^0(x) = x,$$
$$\lambda_2^1(x) = \lambda_2(x), \quad \lambda_2^k = \lambda_2^{k-1}(\lambda_2). \tag{3.18}$$

Подставляя $f_2(x)$ из (3.18) в (3.16), находим

$$f_1(x) = \omega_1(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \omega_2[\lambda_2^k(\lambda_1(x))]. \tag{3.19}$$

Наличие выражений (3.18) и (3.19) для функций $f_2(x)$ и $f_1(x)$ позволяет выписать искомое решение по формуле (1.55).

В случае первой задачи Дарбу очевидно, что если в первом из условий (3.1) носителем данных является отрезок $A(0,0)B(a, 0)$ оси $t=0$, то для однозначного определения решения этой задачи в треугольнике ACB во втором из условий (3.1) носителем данных должен быть отрезок $A(0,0)\,C(a/2, -a/2)$ характеристики $x+t=0$.

Если же носителем данных в первом из условий (3.2) является тот же самый отрезок AB оси $t=0$, а во втором условии — дуга AC_1 кривой γ, где $C_1=C_1[b, -\gamma(b)]$, причем b является корнем уравнения $b+\gamma(b)=a$, то формулой (3.13) решение $u(x, t)$ второй задачи Дарбу будет определено в области AC_1B.

Поскольку дуга AC_1 в силу (3.4) не является характеристикой для уравнения (1.54), то мы можем вычислить значение функции $u(x, t)$ и ее конормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}}$, в каждой точке AC_1 и, решив задачу Коши, получаем решение $u(x, t)$ уравнения (1.54) и в области ACC_1, где $C=C(a/2, -a/2)$.

2°. Задачи Дарбу для системы (1.156). Для единообразия в обозначениях будем считать, что в гиперболической системе (1.156) переменное $y=t$.

Первая и вторая задачи Дарбу для системы (1.156) ставятся точно так же, как и в случае уравнения (1.154), причем носителями данных будем считать отрезки $A\,(0,\ 0)B\,(1,\ 0)$ и $A\,(0,\ 0)C\,(1/2,\ -1/2)$.

Приняв $\xi_0=0$, $\eta_0=1$, общее представление решений системы (1.156) запишем в виде (1.166):

$$
\begin{aligned}
u(x,\ t)=w(\xi,\ \eta)&=R(\xi,\ 1;\ \xi,\ \eta)\,w(\xi,\ 1)+\\
&+R(0,\ \eta;\ \xi,\ \eta)\,w(0,\ \eta)-R(0,\ 1;\ \xi,\ \eta)\,w(0,\ 1)-\\
-\int_0^{\xi}&\left[\frac{\partial}{\partial t_1}R(t_1,\ 1;\ \xi,\ \eta)-b(t_1,\ 1)\,R(t_1,\ 1;\ \xi,\ \eta)\right]w(t_1,\ 1)\,dt_1-\\
&-\int_1^{\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \tau_1}R(0,\ \tau_1;\ \xi,\ \eta)-a(0,\ \tau_1)\,R(0,\ \tau_1;\ \xi,\ \eta)\right]w(0,\ \tau_1)\,d\tau_1,
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

где $\xi=x+t$, $\eta=x-t$, а R — матрица Римана.

Поскольку, в силу второго из условий (3.1), функция $u\,(x,\ t)$ задана на отрезке AC характеристики $x+t=0$, выражения $w\,(0,\ \eta)$ и $w\,(0,\ \tau_1)$ в правой части формулы (3.20) известны. В переменных ξ, η уравнение оси $t=0$ имеет вид $\xi=\eta$. Поэтому для того, чтобы представленное формулой (3.20) решение системы (1.156) удовлетворяло первому из условий (3.1), мы должны иметь

$$
\begin{aligned}
&R(\xi,\ 1;\ \xi,\ \xi)\,w(\xi,\ 1)-\\
&\quad-\int_0^{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}R(t_1,\ 1;\ \xi,\ \xi)-b(t_1,\ 1)\,R(t_1,\ 1;\ \xi,\ \xi)\right]w(t_1,\ 1)\,dt_1=\\
&\quad=R(0,\ 1;\ \xi,\ \xi)\,w(0,\ 1)-R(0,\ \xi;\ \xi,\ \xi)\,w(0,\ \xi)+\tau(\xi)+\\
&\quad+\int_1^{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial \tau_1}R(0,\ \tau_1;\ \xi,\ \xi)-a(0,\ \tau_1)\,R(0,\ \tau_1;\ \xi,\ \xi)\right]w(0,\ \tau_1)\,d\tau_1,\\
&\qquad\qquad 0\leqslant\xi\leqslant 1/2.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Равенство (3.21) относительно неизвестного вектора $w\,(\xi,\ 1)$ представляет собой систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая всегда имеет, и притом единственное, решение.

Подставляя решение $w(\xi, 1)$ уравнения (3.21) в правую часть формулы (3.20), получаем решение задачи (3.1), (1.156).

Общее представление (3.20) решений системы (1.156) позволяет редуцировать вторую задачу Дарбу к системе интегро-функциональных уравнений, которая, в свою очередь, применением метода итераций сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Однако этих процедур мы подробно анализировать не будем.

3°. Многомерные аналоги задач Дарбу. Многомерный (трехмерный) аналог второй задачи Дарбу был исследован С. Л. Соболевым [2] и Гордингом [1]. Они доказали существование обобщенного (слабого) решения этой задачи в случае гиперболического уравнения вида (1.287) применением функциональных методов при существенном требовании, чтобы ни одна бихарактеристика рассматриваемого ими уравнения не принадлежала носителю данных.

В нашей работе [4] был предложен трехмерный аналог первой задачи Дарбу для уравнения

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=g(y, z, t) \tag{3.22}$$

в следующей постановке. Обозначим через D конечную область пространства E_3 переменных y, z, t, ограниченную плоскостью $z=z_0$ и конусами

$$S_1:\ t+t_0=\sqrt{y^2+(z-z_0)^2},$$
$$S_2:\ t-t_0=-\sqrt{y^2+(z-z_0)^2}.$$

Требуется определить в области D решение $u(y, z, t)$ уравнения (3.22), *удовлетворяющее условиям*

$$u|_{S_1}=0 \qquad (\textit{или}\ \ u|_{S_2}=0) \tag{3.23}$$

и

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0 \qquad (\textit{или}\ u|_{z=0}=0). \tag{3.24}$$

Слабым решением задачи (3.22), (3.23), (3.24) мы будем называть функцию $u(y, z, t)$ с производной $\frac{\partial u}{\partial z}\in L_2(D)$, удовлетворяющую тождеству

$$\int_D \frac{\partial w}{\partial z}\, g\, dy\, dz\, dt=-\int_D \frac{\partial u}{\partial z} L(w)\, dy\, dz\, dt \tag{3.25}$$

для произвольной функции $w(y, z, t)$ класса $C^{2,0}$, удовлетворяющей условиям

$$\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_{S_1}=0,\qquad w|_{z=0}=0,\qquad w|_{S_2}=0.$$

Без ограничения общности будем считать, что $t_0=1$, $z_0=0$.

Существование функции $u(y, z, t)$, удовлетворяющей тождеству (3.25), следует из неравенства

$$\int\limits_D\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 dy\,dz\,dt\leqslant k\int\limits_D [L(w)]^2\,dy\,dz\,dt, \tag{3.26}$$

где k — положительная постоянная, не зависящая от w.

Неравенство (3.26), в свою очередь, является следствием тождества

$$2\int\limits_D(1+t)\frac{\partial w}{\partial t}L(w)\,dy\,dz\,dt=\int\limits_D(\operatorname{grad}w)^2\,dy\,dz\,dt+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{S_1}(1+t)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]ds,$$

которое проверяется легко.

4°. Некоторые другие варианты характеристической задачи Коши и задач Дарбу. Обозначим через D треугольную область плоскости переменных x, t, ограниченную отрезком $A(0, 0)B(1, 0)$ оси $t=0$ и участками AC и BC характеристик $x+t=0$ и $x-t=1$ уравнения (1.54). Очевидно, что $C_1=C_1\left(\frac{x_0}{2}, -\frac{x_0}{2}\right)$ и $C_2=C_2\left(\frac{x_0+1}{2}, \frac{x_0-1}{2}\right)$ являются точками пересечения характеристик $x+t=0$, $x-t=x_0$ и $x-t=1$, $x+t=x_0$ соответственно.

В характеристической задаче Коши для области D в приведенной в пункте 3° § 4 гл. I постановке (см. условия (1.149)) носителями данных являются участки AC и BC характеристик уравнения (1.54). В этом пункте всюду будем предполагать, что все данные принадлежат классу $C^{2,0}$.

Легко видеть, что *решение $u(x, t)$ уравнения* (1.54) *в области D однозначно определяется, если наперед заданы значения $u(x, t)$ на характеристиках AC_1, C_1E,*

EC_2 и C_2B, т. е. если

$$\begin{gathered} u(x, -x)=\psi_1(x), \quad 0\leqslant x\leqslant \frac{x_0}{2}; \quad u(x, x-x_0)=\psi_2(x), \\ \frac{x_0}{2}\leqslant x\leqslant x_0, \quad \psi_1\left(\frac{x_0}{2}\right)=\psi_2\left(\frac{x_0}{2}\right); \end{gathered} \tag{3.27}$$

$$\begin{gathered} u(x, x_0-x)=\psi_3(x), \quad x_0\leqslant x\leqslant \frac{x_0+1}{2}; \\ u(x, x-1)=\psi_4(x), \quad \frac{x_0+1}{2}\leqslant x\leqslant 1, \\ \psi_3\left(\frac{x_0+1}{2}\right)=\psi_4\left(\frac{x_0+1}{2}\right), \end{gathered} \tag{3.28}$$

$$\psi_2(x_0)=\psi_3(x_0), \quad \psi_1^{(k)}\left(\frac{x_0}{2}\right)=\psi_3^{(k)}(x_0), \quad \psi_2^{(k)}(x_0)=\psi_4^{(k)}\left(\frac{1+x_0}{2}\right),$$

$$k=0,\ 1,\ 2.$$

Действительно, так как $E=E(x_0, 0)$, представляя $u(x, t)$ по формуле (1.155), в силу (3.27) для определения функций f_1 и f_2 будем иметь

$$\begin{gathered} f_1(0)+f_2(2x)=\psi_1(x), \quad 0\leqslant x\leqslant x_0/2, \\ f_1(2x-x_0)+f_2(x_0)=\psi_2(x), \quad x_0/2\leqslant x\leqslant x_0, \end{gathered}$$

откуда находим, что

$$f_2(x)=\psi_1\left(\frac{x}{2}\right)-f_1(0), \quad f_1(x)=\psi_2\left(\frac{x_0+x}{2}\right)-f_2(x_0),$$

$$0\leqslant x\leqslant x_0,$$

и, следовательно, в треугольнике AC_1E искомое решение дается в виде

$$u(x, t)=\psi_2\left(\frac{x_0+x+t}{2}\right)+\psi_1\left(\frac{x-t}{2}\right)-\psi_1\left(\frac{x_0}{2}\right). \tag{3.29}$$

Повторяя аналогичное рассуждение, и в случае условий (3.28) находим искомую функцию в треугольнике EC_2B:

$$u(x, t)=\psi_4\left(\frac{1+x+t}{2}\right)+\psi_3\left(\frac{x_0+x-t}{2}\right)-\psi_3\left(\frac{x_0+1}{2}\right). \tag{3.30}$$

С учетом второго и первого из условий (3.27) и (3.28), соответственно, точно так же определяем функцию $u(x, t)$

в характеристическом четырехугольнике C_1CC_2E:

$$u(x,\ t)=\psi_2\left(\frac{x_0+x+t}{2}\right)+\psi_3\left(\frac{x_0+x-t}{2}\right)-\psi_2(x_0). \tag{3.31}$$

Таким образом, формулами (3.29), (3.30), (3.31) определяется решение задачи (1.54), (3.27), (3.28) в области D. Единственность решения очевидна.

Одним из вариантов первой задачи Дарбу естественно считать задачу определения в области D решения $u(x,\ t)$ уравнения (1.54) по заданным его значениям на отрезке AB оси $t=0$ и на двух кусках AC_1 и BC_2 характеристик, т. е.

$$\begin{gathered} u(x,\ 0)=\tau(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad u(x,\ -x)=\psi_1(x), \\ 0\leqslant x\leqslant x_0/2, \\ u(x,\ x-1)=\psi_4(x),\quad \frac{x_0+1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\quad \tau(0)=\psi_1(0), \\ \tau(1)=\psi_4(1). \end{gathered} \tag{3.32}$$

В треугольниках AEC_1 и EC_2B решение задачи (1.54), (3.32), очевидно, дается формулами

$$u(x,\ t)=\tau(x+t)-\psi_1\left(\frac{x+t}{2}\right)+\psi_1\left(\frac{x-t}{2}\right) \tag{3.33}$$

и

$$u(x,\ t)=\tau(x-t)+\psi_4\left(\frac{1+x+t}{2}\right)-\psi_4\left(\frac{1+x-t}{2}\right) \tag{3.34}$$

соответственно.

Для значений $u(x,\ t)$ на кусках EC_1 и EC_2 характеристик в силу (3.33) и (3.34) получаем

$$\begin{gathered} u(x,\ x-x_0)=\tau(2x-x_0)-\psi_1\left(\frac{2x-x_0}{2}\right)+ \\ +\psi_1\left(\frac{1}{2}x_0\right)=\psi_2(x), \\ \frac{x_0}{2}\leqslant x\leqslant x_0, \end{gathered} \tag{3.35}$$

$$\begin{gathered} u(x,\ x_0-x)=\tau(2x-x_0)-\psi_4\left(\frac{1-x_0+2x}{2}\right)+ \\ +\psi_4\left(\frac{1+x_0}{2}\right)=\psi_3(x), \\ x_0\leqslant x\leqslant\frac{1+x_0}{2}. \end{gathered} \tag{3.36}$$

Подставляя выражения $\psi_2(x)$ и $\psi_3(x)$ из (3.35), (3.36) в правую часть формулы (3.31), получаем решение $u(x, t)$ задачи (1.54), (3.32) и в характеристическом четырехугольнике C_1CC_2E. Условия согласования между данными (3.32), гарантирующие регулярность решения рассматриваемой задачи, выписываются легко.

В другом варианте первой задачи Дарбу вместо AC_1 и BC_2 носителями данных являются отрезки EC_1 и EC_2 характеристик уравнения (1.54):

$$u(x, 0)=\tau(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \quad u(x, x-x_0)=\psi_2(x),$$
$$\frac{x_0}{2}\leqslant x\leqslant x_0,$$
$$u(x, x_0-x)=\psi_3(x), \quad x_0\leqslant x\leqslant \frac{1+x_0}{2},$$
$$\tau(x_0)=\psi_2(x_0)=\psi_3(x_0), \tag{3.37}$$
$$\tau^{(k)}(x_0)-\frac{1}{2^k}\psi_2^{(k)}(x_0)-\frac{1}{2^k}\psi_3^{(k)}(x_0)=0, \quad k=1, 2.$$

Решение задачи (1.54), (3.37) определяется формулами

$$u(x, t)=\tau(x-t)+\psi_2\left(\frac{x_0+x+t}{2}\right)-\psi_2\left(\frac{x_0+x-t}{2}\right)$$

в треугольнике AC_1E и

$$u(x, t)=\tau(x+t)+\psi_3\left(\frac{x_0+x-t}{2}\right)-\psi_3\left(\frac{x_0+x+t}{2}\right)$$

в треугольнике EC_2B, а в характеристическом четырехугольнике C_1CC_2E— формулой (3.31).

В обеих этих задачах единственность решения очевидна.

Трехмерные аналоги последнего варианта задачи Дарбу не являются корректно поставленными задачами.

В самом деле, пусть D представляет собой область

$$0<t<1/2, \quad t<\sqrt{x_1^2+x_2^2}<1-t,$$

пространства E_3 переменных x_1, x_2, t и требуется определить регулярное в области D решение $u(x_1, x_2, t)$ волнового уравнения (1.207), удовлетворяющее условиям

$$u(x_1, x_2, r)=\Psi(x_1, x_2), \quad r^2=x_1^2+x_2^2\leqslant 1/4, \tag{3.38}$$
$$u(x_1, x_2, 0)=\tau(x_1, x_2), \quad r^2\leqslant 1, \tag{3.39}$$

где Ψ и τ — заданные действительные достаточно гладкие функции.

Как уже было отмечено в пункте 3° § 4 гл. I, решение начальной задачи Коши (1.137), (1.207) дается формулой (1.139). Непосредственной проверкой легко усмотреть, что соответствующая (3.38), (3.39) однородная задача

$$u(x_1,\ x_2,\ r)=0,\qquad r\leqslant 1/2, \tag{3.40}$$

$$u(x_1,\ x_2,\ 0)=0,\qquad r\leqslant 1, \tag{3.41}$$

имеет нетривиальные решения вида

$$u_{mn}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y-x|^2\leqslant t^2}\frac{\rho^m\cos n\varphi\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}},\quad y_1=\rho\cos\varphi,\quad y_2=\rho\sin\varphi, \tag{3.42}$$

где n и m — натуральные числа, причем

$$n\geqslant 4,\quad m=n-3,\ n-5,\ \ldots,\ n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]. \tag{3.43}$$

Действительно, представленная формулой (3.42) функция u_{mn}, очевидно, удовлетворяет условию (3.41). Непосредственным вычислением находим, что

$$u_{mn}(x_1,\ x_2,\ r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y-x|\leqslant r}\frac{\rho^{m+1}\cos n\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{2\rho r\cos(\varphi-\theta)-\rho^2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\rho\leqslant 2r\cos\psi}\frac{\rho^{m+1/2}(\cos n\theta\cos n\psi-\sin n\theta\sin n\psi)}{\sqrt{2r\cos\psi-\rho}}\,d\rho\,d\psi,$$

$$x_1=r\cos\theta,\quad x_2=r\sin\theta,\quad \varphi-\theta=\psi.$$

Следовательно,

$$u_{mn}(x_1,\ x_2,\ r)=\frac{\cos n\theta}{2\pi}\int\limits_{\rho\leqslant 2r\cos\psi}\frac{\rho^{m+1/2}\cos n\psi\,d\rho\,d\psi}{\sqrt{2r\cos\psi-\rho}}=$$

$$=\frac{\cos n\theta}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos n\psi\,d\psi\int\limits_0^{2r\cos\psi}\frac{\rho^{m+1/2}\,d\rho}{\sqrt{2r\cos\psi-\rho}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}(2r)^{m+1}\cos n\theta\int\limits_0^1\frac{t^{m+1/2}}{\sqrt{1-t}}\,dt\int\limits_0^{\pi/2}\cos n\psi\cos^{m+1}\psi\,d\psi=0$$

при предположении (3.43).

Если в правой части формулы (3.42) вместо $\cos n\varphi$ напишем $\sin n\varphi$, также получим нетривиальные решения задачи (1.207), (3.40), (3.41) при $n>4$, $m=n-3$, $n-5, \ldots, n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Таким образом, *для задачи* (1.207), (3.38), (3.39) *теорема единственности не верна.* Тем не менее можно показать, что эта задача разрешима (см. Тонг Кванг-Чанг [1]).

Если D представляет собой область, ограниченную конусом $t-1=-\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, $y_1^2+y_2^2<1$, $0\leqslant t\leqslant 1/2$, и диском $r<1$, $t=0$, то задача нахождения регулярного в D решения $u(x_1, x_2, t)$ уравнения (1.207), удовлетворяющего условиям

$$u\left(x_1, x_2, 1-\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\right)=\Psi(x_1, x_2),$$

$$0\leqslant 1-\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\leqslant 1/2,$$

$$u(x_1, x_2, 0)=\tau(x_1, x_2), \quad r<1,$$

вообще будет *переопределена.*

§ 2. Гиперболические системы второго порядка с нерасщепленными главными частями при отсутствии параболического вырождения

1°. О трудностях при постановке характеристической задачи для гиперболических систем. В этом параграфе в основном речь будет идти о линейных гиперболических системах второго порядка с двумя независимыми переменными

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0, \tag{3.44}$$

где A, B, C, a, b, c — заданные действительные $N\times N$-матрицы, а $u=(u_1, \ldots, u_N)$ — искомый вектор. Пусть $P(\xi_1, \xi_2)$ — характеристический полином, соответствующий системе (3.44):

$$P(\xi_1, \xi_2)=\det(A\xi_1^2+2B\xi_1\xi_2+C\xi_2^2),$$

где ξ_1, ξ_2 — произвольные действительные параметры.

По данному в пункте 3° § 1 гл. I определению, гиперболичность системы (3.44) означает, что все корни полинома $P(1, \lambda)$ действительны и что его можно представить в виде

$$P(1, \lambda) = \det C \cdot \prod_{i=1}^{l} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}, \qquad \sum_{i=1}^{l} k_i = 2N, \tag{3.45}$$

ибо без ограничения общности можно считать, что

$$\det C \neq 0.$$

Легко видеть, что

$$k_i \geqslant N - \operatorname{rank} Q(1, \lambda_i), \qquad i = 1, \ldots, l, \tag{3.46}$$

где $Q(1, \lambda)$ — матрица:

$$Q(1, \lambda) = A + 2B\lambda + C\lambda^2.$$

Действительно, поскольку $r_i = \operatorname{rank} Q(1, \lambda_i)$, среди столбцов $q_j(\lambda_i)$, $j = 1, \ldots, N$, матрицы $Q(1, \lambda_i)$ линейно независимыми являются r_i. Без ограничения общности примем, что ими являются столбцы $q_1, \ldots, q_{r_i}$. Следовательно, имеем

$$q_j(\lambda_i) = \sum_{p=1}^{r_i} c_{ijp} q_p(\lambda_i), \qquad j = r_i + 1, \ldots, N.$$

Пусть

$$q_{ij}^0(\lambda) = q_j(\lambda) - \sum_{p=1}^{r_i} c_{ijp} q_p(\lambda), \qquad j = r_i + 1, \ldots, N.$$

Так как $q_{ij}^0(\lambda_i) = 0$, то $q_{ij}^0(\lambda) = (\lambda - \lambda_i) q_{ij}^1(\lambda)$, где $q_{ij}^1(\lambda)$ — полиномиальный вектор первой степени относительно λ. Ввиду того, что

$$\begin{aligned} P(1, \lambda) &= \det Q(1, \lambda) = \\ &= \det\left[q_1(\lambda), \ldots, q_{r_i}(\lambda), q_{ir_i+1}^0(\lambda), \ldots, q_{iN}^0(\lambda)\right] = \\ &= (\lambda - \lambda_i)^{N-r_i} \det\left[q_1(\lambda), \ldots, q_{r_i}(\lambda), q_{ir_i+1}^1(\lambda), \ldots, q_{iN}^1(\lambda)\right], \end{aligned}$$

справедливость (3.46) очевидна.

Из приведенной в пункте 2° § 1 гл. I классификации уравнений в частных производных по типам непосредственно следует, что исключение параболического вырождения системы (3.44) равносильно тому, что в представлении (3.45) число $l > 1$. Поэтому в случае $N = 1$ проходящие через точку (x_0, y_0) характеристические кривые L_1 и L_2 разделяют плоскость на четыре характеристических угла D, D_1, D_2, D_3. Очевидно, что в каждом из этих углов корректно поставлена характеристическая задача

$$u(x, y) = f_1(x, y), \quad (x, y) \in L_1, \quad u(x, y) = f_2(x, y), \quad (x, y) \in L_2. \tag{3.47}$$

Когда же $N > 1$, при постановке характеристической задачи (3.47) (на этот раз f_1 и f_2 являются N-мерными векторами), как было показано в наших работах [10], [11], [14], следует проявить осторожность.

Система

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \tag{3.48}$$

гиперболична, так как ее характеристический детерминант

$$D(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2$$

имеет действительные корни $\lambda = 1$, $\lambda = -1$. Обозначим через D область, ограниченную характеристиками системы (3.48):

$$x - y = 0, \quad x + y = 0, \quad x > 0.$$

Задача определения регулярного в D решения $u = (u_1, u_2)$ системы (3.48), удовлетворяющего условиям

$$\begin{gathered} u_i(x, x) = f_1^i(x), \quad u_i(x, -x) = f_2^i(x), \; x \geqslant 0, \\ f_1^i(0) = f_2^i(0), \quad i = 1, 2, \end{gathered} \tag{3.49}$$

поставлена некорректно. В этом легко убедиться, если учесть, что общее решение системы (3.48) дается формулами

$$\begin{aligned} u_1 = (x + y)\varphi(x - y) + (x - y)\varphi_1(x + y) + \\ + \psi(x - y) + \psi_1(x + y), \\ u_2 = (x + y)\varphi(x - y) - (x - y)\varphi_1(x + y) + \\ + \psi(x - y) - \psi_1(x + y), \end{aligned} \tag{3.50}$$

где φ, φ_1, ψ, ψ_1 — произвольные действительные дважды непрерывно дифференцируемые функции. На основании формул (3.50) заключаем, что:

1) *соответствующая* (3.48), (3.49) *однородная задача имеет бесконечное множество решений*

$$u_1^0(x, y) = (x^2 - y^2)[\varphi^0(x-y) + \varphi_1^0(x+y)],$$
$$u_2^0(x, y) = (x^2 - y^2)[\varphi^0(x-y) - \varphi_1^0(x+y)],$$

где φ^0 *и* φ_1^0 — *произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции;*

2) *неоднородная задача* (3.48), (3.49) *не всегда разрешима;*

3) *правильно поставлена задача с краевыми условиями*

$$\begin{aligned} &u_1 - u_2 = f_1^1(x), \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)(u_1 - u_2) = f_1^2(x), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y = x \geqslant 0, \\ &u_1 + u_2 = f_2^2(x), \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(u_1 + u_2) = f_2^1(x), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y = -x \leqslant 0; \end{aligned} \tag{3.51}$$

4) *когда* D *представляет собой область, ограниченную кривыми, заданными уравнениями*

$$L_1\colon\ y = \gamma_1(x), \quad L_2\colon\ y = \gamma_2(x), \quad x \geqslant 0,$$

где γ_1, γ_2 — *дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям*

$$\gamma_2(x) < \gamma_1(x), \quad -k < \gamma_2'(x) < \gamma_1'(x) < k, \quad x > 0,$$
$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0), \quad 0 < k = \mathrm{const} < 1,$$

правильно поставлена задача определения регулярного в D *решения* $u = (u_1, u_2)$ *системы* (3.48), *удовлетворяющего краевым условиям*

$$u_i(x, y) = f_1^i(x), \quad (x, y) \in L_1,$$
$$u_i(x, y) = f_2^i(x), \quad (x, y) \in L_2,$$
$$i = 1, 2,$$

где f_1^i, f_2^i — *заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем* $f_1^i(0) = f_2^i(0)$, $i = 1, 2$.

Решение (единственное) задачи (3.48), (3.51) *дается формулой*

$$u_1(x, y)=\frac{1}{4}(x+y)f_2^2\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{1}{4}(x-y)f_1^2\left(\frac{x+y}{2}\right)+\\+\frac{1}{2}f_2^1\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{1}{2}f_1^1\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

$$u_2(x, y)=\frac{1}{4}(x+y)f_2^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-\frac{1}{4}(x-y)f_1^2\left(\frac{x+y}{2}\right)+\\+\frac{1}{2}f_2^1\left(\frac{x-y}{2}\right)-\frac{1}{2}f_1^1\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Рассмотрим теперь гиперболическую систему

$$4\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+10\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\,\partial y}=0,\qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0,\tag{3.52}$$

характеристический детерминант которой

$$D(\lambda)=4\lambda^4-5\lambda^2+1$$

имеет только простые корни

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=1/2,\quad \lambda_4=-1/2.$$

Пусть на этот раз D представляет собой область, ограниченную характеристиками

$$L_1\colon\ y=\frac{1}{2}x,\quad L_2\colon\ y=-\frac{1}{2}x,\quad x\geqslant 0,$$

системы (3.52). *Характеристическая задача*

$$u_i(x, 1/2x)=f_1^i(x),\quad u_i(x, -1/2x)=f_2^i(x),\ x\geqslant 0,\quad i=1, 2,\tag{3.53}$$

в области D для системы (3.52) *поставлена некорректно.* Справедливость этого утверждения следует из общего представления решений системы (3.52):

$$\begin{aligned} u_1&=2\varphi_1(y+x)+2\varphi_2(y-x)+\\&\qquad+5\varphi_3(y+1/2x)+5\varphi_4(y-1/2x),\\ u_2&=-\varphi_1(y+x)+\varphi_2(y-x)-\\&\qquad-2\varphi_3(y+1/2x)+2\varphi_4(y-1/2x),\end{aligned}\tag{3.54}$$

где φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. В частности, соответствующая (3.52), (3.53) однородная задача имеет нетривиальное решение

$$u_1 = y^2 - {}^1/_4 x^2, \qquad u_2 = 0.$$

На основании формул (3.54) легко усмотреть, что *в области D, ограниченной кривыми с непрерывной кривизной*

$$L_1\colon\ y = \gamma_1(x), \quad L_2\colon\ y = \gamma_2(x),$$
$$\gamma_2 < \gamma_1; \quad -k < \gamma_2' < \gamma_1' < k, \quad \gamma_1(0) = \gamma_2(0),$$
$$0 < k = \mathrm{const} < 1/2,$$

корректно поставлена задача отыскания регулярного решения системы (3.52) *по заданным на L_1 и L_2 значениям как u_1, так и u_2.*

Указанные выше обстоятельства имеют место и в том случае, когда число независимых переменных больше двух. Так, например, гиперболическая система с четырьмя независимыми переменными

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} - 2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\right)u_1 + \\ + 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\right)u_2 = 0, \\ 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\right)u_1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \right. \\ \left. + 2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + 2\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\right)u_2 = 0\end{gathered} \tag{3.55}$$

с характеристическим детерминантом

$$D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + \lambda_4^2)^2$$

имеет бесконечное множество линейно независимых решений, исчезающих на характеристическом конусе

$$x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 0.$$

Эти решения даются формулами

$$\begin{gathered}u_1 = (x^2 - y^2 - z^2 + t^2)\,\varphi(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \\ + 2xy + 2zt), \\ u_2 = (x^2 - y^2 - z^2 + t^2)\,\psi(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - \\ - 2xy - 2zt),\end{gathered} \tag{3.56}$$

где φ и ψ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Чтобы в этом убедиться, лучше записать формулы (3.55), (3.56) в переменных $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, $\zeta=z+t$, $\tau=z-t$ в виде (см. А. В. Бицадзе [10], [11], [14])

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)u_1+\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right)u_2=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right)u_1+\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)u_2=0,$$

$$u_1=2(\xi\eta-\zeta\tau)\,\varphi(\xi^2+\zeta^2),$$

$$u_2=2(\xi\eta-\zeta\tau)\,\psi(\eta^2+\tau^2).$$

2°. Эффект влияния младших членов. Рассмотрим гиперболическую систему (3.44), коэффициенты которой являются квадратными матрицами второго порядка:

$$A=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&1\\1&0\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\end{Vmatrix},$$

$$a=\begin{Vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{Vmatrix},\quad b=\begin{Vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{Vmatrix},$$

а $u=(u_1,\ u_2)$.

Пусть область D плоскости переменных x, y представляет собой квадрат, ограниченный отрезками $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ соответственно характеристик $x-y=0$, $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=0$ системы (3.44) в рассматриваемом случае.

Выше было показано, что при $a=b=0$ характеристическая задача нахождения регулярного в области D решения u этой системы, удовлетворяющего условиям

$$u|_{A'B'}=f_1,\quad u|_{A'D'}=f_2,\quad f_1=(f_1^1,\ f_1^2),\quad f_2=(f_2^1,\ f_2^2),\tag{3.57}$$

поставлена некорректно. В этом пункте на простых примерах раскрывается эффект влияния младших членов на корректность постановки различных вариантов характеристических задач (см. А. В. Бицадзе [11]).

Пример 1. Пусть матрицы a, b и c имеют вид

$$a=\begin{Vmatrix}-\lambda&0\\0&\lambda\end{Vmatrix},\quad b=\begin{Vmatrix}0&-\lambda\\\lambda&0\end{Vmatrix},\quad c=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\end{Vmatrix},$$

где λ — действительная постоянная, отличная от нуля.

Перепишем систему (3.44) в виде

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial\xi^2}-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial v^*}{\partial\eta}=0,\qquad \frac{\partial^2 v^*}{\partial\eta^2}-\frac{\lambda}{2}\frac{\partial w^*}{\partial\xi}=0,\tag{3.58}$$

где $\xi=x+y$, $\eta=x-y$,

$$w^*(\xi,\ \eta)=w\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right),\qquad v^*(\xi,\ \eta)=v\left(\frac{\xi+\eta}{2},\ \frac{\xi-\eta}{2}\right),$$

$$w=u_1+u_2,\qquad v=u_1-u_2.$$

Легко видеть, что общее решение системы (3.58) дается формулами

$$\begin{aligned}w^*(\xi,\ \eta)=\varphi_1(\xi)+\psi_1(\eta)-\int_0^\xi\varphi_1(t)\,I_0\big(\lambda\sqrt{\eta(\xi-t)}\big)_t\,dt-\\ -\int_0^\eta\psi_1(\tau)\,I_0\big(\lambda\sqrt{\xi(\eta-\tau)}\big)_\tau\,d\tau+\\ +\int_0^\xi dt\int_0^\eta\varphi(\tau)\,I_0\big(\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-\tau)}\big)\,d\tau,\end{aligned}\tag{3.59}$$

$$v^*(\xi,\ \eta)=\frac{2}{\lambda}\int_0^\eta\frac{\partial^2 w(\xi,\ \tau)}{\partial\xi^2}\,d\tau+\psi(\xi),\tag{3.60}$$

где φ_1, ψ_1, φ, ψ — произвольные действительные дважды непрерывно дифференцируемые функции, а

$$I_0\big(\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-\tau)}\big)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n}\frac{(\xi-t)^n(\eta-\tau)^n}{n!^2}.$$

Условия (3.57) в новых переменных ξ, η, w^*, v^* запишутся в виде

$$w^*(\xi,\ 0)=f_1^1\left(\frac{\xi}{2}\right)+f_1^2\left(\frac{\xi}{2}\right)=e(\xi),\tag{3.61}$$

$$v^*(\xi,\ 0)=f_1^1\left(\frac{\xi}{2}\right)-f_1^2\left(\frac{\xi}{2}\right)=f(\xi),\tag{3.62}$$

$$w^*(0,\ \eta)=f_2^1\left(\frac{\eta}{2}\right)+f_2^2\left(\frac{\eta}{2}\right)=g(\eta),\tag{3.63}$$

$$v^*(0,\ \eta)=f_2^1\left(\frac{\eta}{2}\right)-f_2^2\left(\frac{\eta}{2}\right)=h(\eta),\tag{3.64}$$

$$0\leqslant\xi\leqslant 1,\qquad 0\leqslant\eta\leqslant 1.$$

Покажем, что *в классе* $C^{3,0}(\bar{D})$ (естественно, при требовании соответствующей степени гладкости от данных) *задача* (3.57) *в рассматриваемом случае всегда имеет, и притом единственное, решение.*

В самом деле, на основании (3.59), (3.60), (3.61), (3.62) и (3.63) имеем

$$\varphi_1(\xi)+\psi_1(0)=e(\xi), \quad \psi_1(\eta)+\varphi_1(0)=g(\eta),$$
$$\varphi_1(0)+\psi_1(0)=w^*(0,0),$$
$$\psi(\xi)=f(\xi), \quad 0\leqslant\xi\leqslant 1, \quad 0\leqslant\eta\leqslant 1.$$

Отсюда находим, что общее решение системы (3.58), удовлетворяющее условиям (3.61), (3.62), (3.63), имеет вид

$$w^*(\xi,\eta)=e(\xi)+g(\eta)-e(0)\,I_0(\lambda\sqrt{\xi\eta})-$$
$$-\int_0^\xi e(t)\,I_0(\lambda\sqrt{\eta(\xi-t)})_t\,dt-\int_0^\eta g(\tau)\,I_0(\lambda\sqrt{\xi(\eta-\tau)})_\tau\,d\tau+$$
$$+\int_0^\xi dt\int_0^\eta \varphi(\tau)\,I_0(\lambda\sqrt{(\xi-t)(\eta-\tau)})\,d\tau, \qquad (3.65)$$

$$v^*(\xi,\eta)=\frac{2}{\lambda}\int_0^\eta \frac{\partial^2 w^*(\xi,\tau)}{\partial\xi^2}\,d\tau+f(\xi). \qquad (3.66)$$

В силу (3.64), (3.65) и (3.66) для определения функции φ получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^\eta d\tau\int_0^\tau (\tau-\tau_1)\,\varphi(\tau_1)\,d\tau_1=\alpha(\eta), \qquad (3.67)$$

где

$$\alpha(\eta)=\frac{2}{\lambda}[h(\eta)-h(0)]-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 e''(0)\,\eta-\frac{1}{2}e'(0)\,\eta^2-$$
$$-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^4\int_0^\eta d\tau\int_0^\tau (\tau-\tau_1)\,g(\tau_1)\,d\tau_1. \qquad (3.68)$$

Из равенства (3.68), в силу принятых выше предположений относительно гладкости искомого решения, заключаем, что функция $\alpha(\eta) \in C^3$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, причем

$$\alpha(0) = 0,$$

$$\alpha'(0) = -\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 w^*(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial v^*(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right]_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} = 0,$$

$$\alpha''(0) = \frac{2}{\lambda} \left[\frac{\partial^2 v^*(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial w^*(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right]_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} = 0.$$

Отсюда следует, что интегральное уравнение (3.67) имеет единственное решение $\varphi(\eta) = \alpha'''(\eta)$, и тем самым доказана однозначная разрешимость задачи (3.57), (3.58).

Пример 2. Пусть A, B, C, a, b, c имеют вид

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$a = \begin{Vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{Vmatrix}, \quad c = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где λ — положительная постоянная. В принятых выше обозначениях система (3.44) эквивалентна двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial w^*}{\partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v^*}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial v^*}{\partial \xi} = 0,$$

откуда непосредственно следует, что для этой системы при $\lambda > 0$ корректно поставлена задача отыскания регулярного в области D решения $u = (u_1, u_2)$, удовлетворяющего, наряду с условиями (3.57), еще и условиям

$$(u_1 + u_2)_{BC} = f_3, \qquad (u_1 - u_2)_{CD} = f_4,$$

если только заданные функции f_1^1, f_1^2, f_2^1, f_2^2, f_3, f_4 подчинены известным требованиям из теории первой краевой задачи для уравнения теплопроводности (см. пункт 9° § 4 гл. I).

Пример 3. Когда матрицы A, B, C, a, c такие же, как выше, а

$$b = \begin{Vmatrix} 0 & -\lambda \\ -\lambda & 0 \end{Vmatrix},$$

система (3.44) эквивалентна опять двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial w^*}{\partial \xi} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial v^*}{\partial \eta} = 0,$$

и, следовательно, в этом случае корректно поставлена задача с краевыми условиями

$$(u_1 + u_2)_{AD} = f_1, \qquad (u_1 + u_2)_{BC} = f_2,$$
$$(u_1 - u_2)_{AB} = f_3, \qquad (u_1 - u_2)_{CD} = f_4$$

(см. пункт 1° § 4 гл. I).

Приведенные выше примеры показывают, что в краевой задаче для гиперболических систем вида (1.4) с матричными $N\times N$-коэффициентами A^{ij}, B^j, C в области D пространства переменных $x_1, \ldots, x_n$, ограниченной $(n-1)$-мерными характеристическими многообразиями этих систем, наперед заданными на разных участках границы ∂D в области D естественно считать l-мерные векторы

$$\sum_i G^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Gu = f, \tag{3.69}$$

где G^i, G — прямоугольные матрицы ширины N и высоты l, $0 \leqslant l \leqslant N$. Число l показывает, в какой мере заняты отдельные участки ∂D; в частности, $l=0$ означает, что соответствующий участок ∂D свободен от краевых условий полностью.

Желательно, чтобы в условиях, гарантирующих корректность постановки задачи (1.4), (3.69), участвовали все коэффициенты A^{ij}, B^j, C, G^i, G. При выводе таких условий весьма полезную роль может играть элементарное решение системы (1.4), но его существование, к сожалению, удается доказать лишь для узкого класса гиперболических систем.

Когда возможна эквивалентная редукция задачи (1.4), (3.69) к соответствующей задаче для системы первого порядка, при установлении условий корректности исходной задачи с успехом можно пользоваться выводами работ В. С. Владимирова [2], А. А. Дезина [1], Л. А. Мельцера [1], В. П. Михайлова [1], С. Л. Соболева [1], Фридрихса [1].

3°. Нормально гиперболические системы и постановка характеристической задачи для них. Из общего класса гиперболических систем обычно приходится выделять подклассы, для которых имеет смысл рассмотрение классических задач, корректно поставленных для одного уравнения гиперболического типа.

Гиперболическую систему (3.44) будем называть *нормально гиперболической*, если в формуле (3.46) знак неравенства исключен, т. е. характеристический полином $P(1, \lambda)$ имеет l действительных корней λ_i, $i=1, \ldots, l$, $l>1$, причем кратность k_i каждого корня λ_i равна $N-\operatorname{rank} Q(1, \lambda_i)$. Если же корни λ_i все простые, система (3.44) называется *строго гиперболической*.

Когда коэффициенты A, B, C являются постоянными, характеристики системы (3.44) составляют l-параметрическое семейство прямых

$$x+\lambda_i y=\mathrm{const}, \qquad i=1, \ldots, l. \tag{3.70}$$

Множество $2l$ лучей (3.70), выходящих из точки $O(0, 0)$, занумеруем в направлении против часовой стрелки $\{l_i^+\}$, $i=1, \ldots, 2l$. Пусть P_1 и P_2 — произвольные отличные от O точки на l_1^+ и l_2^+ соответственно. Через D_0 обозначим угол между лучами l_1^+ и l_2^+, а через D_1 — треугольник OP_1P_2, если отрезок P_1P_2 характеристический, или выпуклый характеристический четырехугольник $OP_1P_3P_2$, когда P_1P_3 и P_2P_3 — характеристические отрезки, составляющие наименьший угол с отрезком P_1P_2.

Из функций

$$u(x, y)=u(z), \qquad z=x+iy,$$

класса $C^{k,0}(D_1\cup\partial D_1)$, $k\geqslant 2$, образуем пространство C_α^k с нормой

$$\|u\|_{C_\alpha^k}=\max_{|\gamma|\leqslant k}\|D^\gamma u(0)\|_{R_N}+$$

$$+\max_{|\gamma|=k,\ z\in D_1\cup\partial D_1,\ z\neq 0}\ \sup\frac{\|D^\gamma u(z)-D^\gamma u(0)\|_{R_N}}{|z|^\alpha}<\infty,$$

где $\alpha \geqslant 0$,

$$\| u \|_{R_N} = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |u_i|, \qquad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \qquad |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2,$$

$$D^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^{\gamma_1} \partial y^{\gamma_2}},$$

а из функций $u(z)$ класса $C^{k,0}(D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+)$, $k \geqslant 2$, — пространство $C_{\alpha\beta}^k$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, с нормой

$$\| u \|_{C_{\alpha\beta}^k} = \max_{|\gamma| \leqslant k} \| D^\gamma u(0) \|_{R_N} + \max_{|\gamma| = k,\ 0 < |z| \leqslant 1,\ z \in D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+} \sup \frac{\| D^\gamma u(z) - D^\gamma u(0) \|_{R_N}}{|z|^\alpha} + \max_{|\gamma| = k,\ |z| \geqslant 1,\ z \in D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+} \sup \| z^{-\beta} D^\gamma u(z) \|_{R_N} < \infty.$$

Оба эти пространства банаховы.

Введем еще в рассмотрение множество $C_{k\alpha}$ функций $u(z)$ класса $C^{k,0}(D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+)$, удовлетворяющих условию

$$\max_{|\gamma| = k,\ 0 < z \leqslant 1,\ z \in D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+} \sup \frac{\| D^\gamma u(z) - D^\gamma u(0) \|_{R_N}}{|z|^\alpha} < \infty.$$

Множество $C_{k\alpha}$, будучи пространством Фреше, очевидно, ненормируемо.

Под характеристической задачей в каждом из пространств C_α^k, $C_{\alpha\beta}^k$, $C_{k\alpha}$ понимается *задача отыскания решения* $u(z)$ *системы* (3.44), *удовлетворяющего условиям*

$$u(z) = f_1(z), \qquad z \in OP_1(l_1^+), \tag{3.71}$$

$$u(z) = f_2(z), \qquad z \in OP_2(l_2^+), \tag{3.72}$$

где f_1 *и* f_2 — *заданные действительные векторы, причем* $f_1(0) = f_2(0)$.

Уточним приведенную в пункте 8° § 5 гл. I условную классификацию задач для уравнений в частных производных применительно к задаче (3.44), (3.71), (3.72).

Ядром задачи (3.44), (3.71), (3.72) будем называть пространство решений однородной задачи

$$u(z) = 0, \qquad z \in OP_1(l_1^+), \qquad u(z) = 0, \qquad z \in OP_2(l_2^+), \tag{3.73}$$

для системы (3.44).

Обозначим через X прямые произведения

$$C_{\alpha}^{k}(OP_1)\times C_{\alpha}^{k}(OP_2),\qquad C_{\alpha\beta}^{k}(l_1^+)\times C_{\alpha\beta}^{k}(l_2^+),\qquad C_{k\alpha}(l_1^+)\times C_{k\alpha}(l_2^+)$$

в зависимости от того, в каком из пространств C_{α}^{k}, $C_{\alpha\beta}^{k}$, $C_{k\alpha}$ рассматривается задача (3.44), (3.71), (3.72).

Пусть X_1 — пространство $\{(g_1, g_2)\in X,\ g_1(0)=g_2(0)\}$, а X_1^* — сопряженное с X_1 пространство всех непрерывных линейных функционалов на X_1.

Задачу (3.44), (3.71), (3.72) будем называть: а) *нормально разрешимой по Хаусдорфу*, если для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение условия $\Lambda(f)=0$ для любого функционала $\Lambda\in X_0$, где X_0 — некоторое замкнутое подпространство X_1^*, а $f=(f_1, f_2)\in X_1$; б) *нетеровой*, если она нормально разрешима по Хаусдорфу и размерности d_1 и d_2 соответственно ядра задачи (3.44), (3.71), (3.72) и пространства X_0 оба конечны; в) *фредгольмовой*, если она нетерова и $d_1=d_2$.

Когда по крайней мере одно из чисел d_1, d_2 конечно, их разность $d_1-d_2=\varkappa$ будем называть *индексом* задачи (3.44), (3.71), (3.72).

Пусть s_0 — число характеристик (3.70), проходящих через точку P_1 и не пересекающихся с открытым отрезком OP_2. Обозначим через V_i ядро матричного оператора $Q(1, \lambda_i)=A+2B\lambda_i+C\lambda_i^2$, $1\leqslant i\leqslant l$, действующего в R_N, а через $\{q_{ij}\}$, $j=1, \ldots, k_i$, — его базис.

В предположении, что прямолинейный отрезок P_1P_2 не является характеристикой системы (3.44), введем в рассмотрение систему векторов

$$\mu'_{ij}=\begin{cases}(\lambda_i-\lambda_1)q_{ij}, & i\leqslant s_0,\\ 0, & i>s_0,\end{cases}$$

и

$$\mu''_{ij}=\begin{cases}(\lambda_i-\lambda_2)q_{ij}, & i=1,\quad s_0+1, \ldots, l,\\ 0, & 1<i\leqslant s_0.\end{cases}$$

Когда же P_1P_2 — отрезок характеристики системы (3.44), при $i=s_0$ примем, что

$$\mu''_{s_0j}=(\lambda_{s_0}-\lambda_2)q_{s_0j}.$$

Вырожденность или невырожденность $2N \times 2N$-матрицы, составленной из векторов μ'_{ij}, μ''_{ij},

$$E_0 = \begin{Vmatrix} \mu'_{11} & \dots & \mu'_{1k_1}\mu'_{21} & \dots & \mu'_{lk_l} \\ \mu''_{11} & \dots & \mu''_{1k_1}\mu''_{21} & \dots & \mu''_{lk_l} \end{Vmatrix}$$

не зависит от выбора базисных векторов в пространствах V_i, $i=1, \dots, l$.

Будем считать, что в системе (3.44) матрицы a, b, c — все нулевые, т. е. эта система имеет вид

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + E\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (3.74)$$

где E — единичная $N \times N$-матрица.

4°. Редукция задачи (3.71), (3.72), (3.74) к функциональному уравнению. Запишем параметрические уравнения лучей l_1^+ и l_2^+ в виде

$$x = -Q_j\lambda_j t, \quad y = Q_j t, \quad t \geqslant 0, \quad j = 1, 2,$$

где $|Q_j| = |OP_j|(1+\lambda_j^2)^{1/2}$, причем знак Q_j положителен или отрицателен в зависимости от того, лежит ли луч l_j^+ в верхней полуплоскости $y > 0$ или в нижней полуплоскости $y < 0$.

В обозначениях

$$\partial_j = -Q_j\lambda_j\frac{\partial}{\partial x} + Q_j\frac{\partial}{\partial y}, \quad v_j = \partial_j u, \quad j = 1, 2, \quad v = (v_1, v_2)$$

задача (3.74), (3.71), (3.72) редуцируется к задаче

$$\frac{\partial v}{\partial y} - A_2\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad (3.75)$$

$$\partial_2 u = v_2, \qquad (3.76)$$

$$v_j(-Q_j\lambda_j t, Q_j t) = \frac{d}{dt}f_j(t), \quad j = 1, 2,$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \quad (0 \leqslant t < \infty), \qquad (3.77)$$

$$u(-Q_1\lambda_1 t, Q_1 t) = f_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \quad (0 \leqslant t < \infty), \qquad (3.78)$$

где

$$A_2 = D\left\|\begin{array}{c|c} 0 & E \\ \hline -A & -2B \end{array}\right\| D^{-1}, \qquad D = \left\|\begin{array}{c|c} -Q_1\lambda_1 E & Q_1 E \\ \hline -Q_2\lambda_2 E & Q_2 E \end{array}\right\|,$$

$$D^{-1} = \left\|\begin{array}{c|c} Q_1^{-1}(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}E & -Q_2^{-1}(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}E \\ \hline \lambda_2 Q_1^{-1}(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}E & -\lambda_1 Q_2^{-1}(\lambda_2-\lambda_1)^{-1}E \end{array}\right\|,$$

причем u и $v = (v_1, v_2)$ берутся из классов C_α^k, $C_{\alpha\beta}^k$, $C_{k\alpha}$ и C_α^{k-1}, $C_{\alpha\beta}^{k-1}$, $C_{k-1\alpha}$.

Эквивалентность между задачами (3.74), (3.71), (3.72) и (3.75), (3.76), (3.77), (3.78) проверяется непосредственно.

Пусть T — матрица порядка $2N \times 2N$, первые N элементов сверху (m_i+j)-го столбца которой совпадают с компонентами вектора q_{ij}, $i = 1, \ldots, l$; $j = 1, \ldots, k_i$, а остальные N элементов — с компонентами $\lambda_i q_{ij}$, где $m_i = \sum\limits_{s=1}^{i-1} k_s$, $i > 1$, $m_1 = 0$. Матрица $D^0 = (DT)^{-1} A_2 (DT)$ диагональна, и ее (m_i+j)-й элемент на диагонали равен λ_i.

В результате замены $v = (DT)w$ вместо (3.75), (3.77) будем иметь

$$\frac{\partial w}{\partial y} - D^0 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{3.79}$$

$$S_{0j} w(-Q_j\lambda_j t,\ Q_j t) = \frac{df_j(t)}{dt}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \quad (0 \leqslant t < \infty),$$
$$j = 1,\ 2, \tag{3.80}$$

где S_{01} и S_{02} — матрицы порядка $N \times 2N$, составленные соответственно из первых N строк и последних N строк матрицы DT.

Интегрируя (m_i+j)-е уравнение системы (3.79) вдоль i-й характеристики от точки $P(x, y) \in D_1 \cup \partial D_1 (D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+)$ до характеристического луча l_1^+ при $i = 2, \ldots, s_0$ и до l_2^+ при $i = 1, s_0+1, \ldots, l$, получаем

$$w_{m_i+j}(x, y) = \\ = \begin{cases} w_{m_i+j}^+[\omega_i(x, y)], & i = 2, \ldots, s_0; \quad j = 1, \ldots k_i, \\ w_{m_i+j}^-[\omega_i(x, y)], & i = 1, s_0+1, \ldots, l; \quad j = 1, \ldots, k_i, \end{cases} \tag{3.81}$$

где

$$w^{+}_{m_i+j}(t)=w_{m_i+j}(-Q_1\lambda_1 t,\ Q_1 t),$$
$$w^{-}_{m_i+j}(t)=w_{m_i+j}(-Q_2\lambda_2 t,\ Q_2 t),$$
$$\omega_i(x,\ y)=\begin{cases} Q_1^{-1}(\lambda_i-\lambda_1)^{-1}(x+\lambda_i y), & i=2,\ \ldots,\ s_0,\\ Q_2^{-1}(\lambda_i-\lambda_2)^{-1}(x+\lambda_i y), & i=1,\ s_0+1,\ \ldots,\ l.\end{cases}$$

Подставляя выражения w из (3.81) в (3.80), будем иметь

$$Q_j S_{0j}\tilde{w}(-Q_j\lambda_j t,\ Q_j t)=Q_j\frac{d}{dt}f_j(t),$$
$$0\leqslant t\leqslant 1\ (0\leqslant t<\infty),\quad j=1,2,\tag{3.82}$$

где

$$\tilde{w}_{m_i+j}(x,\ y)=$$
$$=\begin{cases} w^{+}_{m_i+j}[\omega_i(x,\ y)], & i=2,\ \ldots,\ s_0;\quad j=1,\ \ldots,\ k_i,\\ w^{-}_{m_i+j}[\omega_i(x,\ y)], & i=1,\ s_0+1,\ \ldots,\ l;\quad j=1,\ \ldots,\ k_i.\end{cases}$$

Систему уравнений (3.82) можно записать в виде одного уравнения:

$$G_0\tilde{\varphi}=E_0\tilde{\varphi}(t)+\sum_{i=1}^{r}E_i\tilde{\varphi}(\tau_i t)=\tilde{\psi}(t),\tag{3.83}$$
$$0\leqslant t\leqslant 1\qquad (0\leqslant t<\infty),$$

где

$$\tilde{\varphi}_{m_i+j}(t)=\begin{cases} w^{+}_{m_i+j}[\omega_i(-Q_1\lambda_1 t,\ Q_1 t)]=w^{+}_{m_i+j}(t),\\ i=2,\ \ldots,\ s_0;\ j=1,\ \ldots,\ k_i,\\ w^{-}_{m_i+j}[\omega_i(-Q_2\lambda_2 t,\ Q_2 t)]=w^{-}_{m_i+j}(t),\\ i=1,\ s_0+1,\ \ldots,\ l;\ j=1,\ \ldots,\ k_i,\end{cases}$$
$$\tilde{\psi}(t)=\left[Q_1\frac{d}{dt}f_1(t),\ Q_2\frac{d}{dt}f_2(t)\right],$$

τ_i, $i=1,\ \ldots,\ r$, — действительные числа, $0<\tau_i<1$, а E_i, $i=1,\ \ldots,\ r$, — известные $2N\times 2N$-матрицы, выражающиеся через S_{0j}, $j=1,\ 2$, причем

$$\sum_{i=0}^{r}E_i=DT,\qquad DT=\begin{pmatrix}S_{01}\\ S_{02}\end{pmatrix},\qquad \det DT\neq 0.\tag{3.84}$$

Редукция задачи (3.71), (3.72), (3.74) к функциональному уравнению (3.83) относительно неизвестного $2N$-мерного вектора $\tilde{\varphi}(t)$ и исследование этого уравнения принадлежат С. С. Харибегашвили [1], [2], [3].

5°. Исследование функционального уравнения (3.83). Пространства C_α^k, $C_{\alpha\beta}^k$, $C_{k\alpha}$, введенные в пункте 3° настоящего параграфа, можно вводить и для функций одного действительного переменного t, причем, когда $k=0$ для них применим обозначения C_α, $C_{\alpha\beta}$ с указанием промежутка изменения t, $0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant t<\infty$. Будем считать, что каждая функция этих классов равна нулю при $t=0$.

В новых обозначениях

$$\varphi(t)=\tilde{\varphi}^{(k-1)}(t)-\tilde{\varphi}^{(k-1)}(0), \qquad \psi(t)=\tilde{\psi}^{(k-1)}(t)-\tilde{\psi}^{(k-1)}(0),$$

$$R(i)=E_0+\sum_{j=1}^{r}\tau_j^iE_j$$

уравнение (3.83) запишем в виде

$$G\varphi=E_0\varphi(t)+\sum_{i=1}^{r}E_i\tau_i^{k-1}\varphi(\tau_it)=\psi(t), \tag{3.85}$$

где

$$R(i)\,\tilde{\varphi}^{(i)}(0)=\tilde{\psi}^{(i)}(0), \qquad i=0,\ \ldots,\ k-1, \tag{3.86}$$

причем в зависимости от того, в каком из классов C_α^k, $C_{\alpha\beta}^k$, $C_{k\alpha}$ ищется решение $u(x, y)$ задачи (3.71), (3.72), (3.74), и функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ должны принадлежать классам $C_\alpha[0, 1]$, $C_{\alpha\beta}[0, \infty)$, $C_\alpha[0, \infty)$.

Поскольку (3.86) представляет собой линейную алгебраическую систему уравнений относительно векторов $\tilde{\varphi}^{(i)}(0)$, при изучении задачи (3.71), (3.72), (3.74) с точки зрения указанной в пункте 3° классификации достаточно ограничиться исследованием уравнения (3.85) в классах $C_\alpha[0, 1]$, $C_{\alpha\beta}[0, \infty)$, $C_\alpha[0, \infty)$.

Обозначим через σ множество $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots\}$ всех действительных чисел вида

$$\sigma_i=\sum_{i=1}^{r}n_i\log\tau_i, \qquad \sigma_0=0, \qquad \sigma_i\neq\sigma_j, \qquad i\neq j,$$

где n_i — произвольные целые числа.

Пусть

$$\Delta^0(s) = \det\left(E_0 + \sum_{i=1}^{r} \tau_i^{k-1} E_i e^{s \log \tau_i}\right). \qquad (3.87)$$

Очевидно, что $\Delta^0(s)$ является целой функцией, которую можно представить в виде

$$\Delta^0(s) = \sum_{j=0}^{m_0} \eta_i e^{\tilde{\sigma}_j s}, \qquad \tilde{\sigma}_j \in \sigma,$$

где η_i, $\tilde{\sigma}_j$ — определенные действительные числа.

В силу (3.84) и (3.87) имеем

$$\Delta^0(1-k) = \det\left(E_0 + \sum_{i=1}^{r} \tau_i^{k-1} E_i e^{(1-k)\log \tau_i}\right) =$$

$$= \det\left(\sum_{i=0}^{r} E_i\right) = \det DT \neq 0.$$

Поэтому $\Delta^0(s)$ тождественно не может равняться нулю.

Множество M_1 действительных частей всех нулей целой функции $\Delta^0(s)$ является конечным или счетным ограниченным замкнутым множеством (оно, конечно, может быть и пустым). Это множество делит действительную ось плоскости переменного $z = x + iy$ на не более чем счетное множество интервалов Γ_i, среди которых — полупрямые $(-\infty < x < b_0) = \Gamma_0$, $(a_0 < x < \infty) = \Gamma_1$.

Известно (см. Бохнер [1]), что аналитическая почти-периодическая функция $\frac{1}{\Delta^0(s)}$ в полосе $\Pi_i = \{s\colon \operatorname{Re} s \in \Gamma_i\}$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд вида

$$\frac{1}{\Delta^0(s)} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{ij} e^{\sigma_j s}, \qquad \sigma_j \in \sigma, \qquad (3.88)$$

коэффициенты которого однозначно определяются.

Обозначим через Δ^0_{ij} алгебраическое дополнение элемента с индексами i, j детерминанта $\Delta^0(s)$:

$$\Delta^0_{ij}(s) = \sum_{p=0}^{N_c} \xi_{ijp} e^{\tilde{\sigma}_p s}, \qquad i, j = 1, \ldots 2N, \qquad (3.89)$$

где N_0 — натуральное число, а ξ_{ijp} — определенные действительные числа.

Пусть

$$\tilde{G}_{i_0} = (\tilde{G}_{i_0 1}, \ldots, \tilde{G}_{i_0 2N}) \tag{3.90}$$

— оператор, действующий по формуле

$$(\tilde{G}_{i_0 i}\varphi)(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{2N} \sum_{q=0}^{N_0} \xi_{i\rho q}\gamma_{i_0 p}\varphi_\rho(e^{\sigma p+\sigma q}t), \quad i = 1, \ldots, 2N. \tag{3.91}$$

В формуле (3.91) величины $\xi_{i\rho q}$, $\gamma_{i_0 p}$ определяются из соотношений (3.88) и (3.89).

Бохнеру принадлежит утверждение: *определенный по формуле* (3.85) *оператор* G *в пространстве* $C_{\alpha\beta}[0, \infty)$ *обратим, и* $G^{-1} = \tilde{G}_{i_0}$, *если*

$$M_1 \cap \bar{I}_{\alpha\beta} = \varnothing, \quad \bar{I}_{\alpha\beta} = [\min(\alpha, \beta), \max(\alpha, \beta)] \subset \Pi_{i_0}.$$

Это же утверждение справедливо в пространстве $C_\alpha[0, \infty)$ при $\alpha > \sup\limits_{x \in M_1} x$ и в пространстве $C_\alpha[0, 1]$, если $\det E_0 \neq 0$ и $\alpha > \sup\limits_{x \in M_1} x$, причем в обоих случаях $G^{-1} = \tilde{G}_1$.

Будем считать, что $l \geqslant 4$, и обозначим через M множество действительных частей всех нулей функции

$$\Delta(s) = \det\left(E_0 + \sum_{i=1}^{r} E_i e^{(s-1)\log\tau_i}\right).$$

Поскольку M_1 является множеством действительных частей нулей функции $\Delta^0(s)$ и $\Delta(s) = \Delta^0(s)$ при $k = 0$, то

$$M_1 = M - k = \{x - k \colon x \in M\}.$$

Следовательно, *существует ограниченное, замкнутое, не более чем счетное множество* M, *зависящее от коэффициентов системы* (3.74), *такое, что задача* (3.71), (3.72), (3.74) *фредгольмова:* а) *в классе* $C^k_{\alpha\beta}(D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+)$, *когда пересечение* $\bar{I}_{\alpha\beta} \cap (M - k)$ *пусто,* б) *в классе* $C_{k\alpha}(D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+)$ *при* $\alpha > \sup\{M - k\}$ *и* в) *в классе* $C^k_\alpha(D_1 \cup \partial D_1)$ *при* $\det E_0 \neq 0$ *и* $\alpha > \sup\{M - k\}$.

На основании этого утверждения, в частности, заключаем, что *задача* (3.71), (3.72), (3.74) *всегда фредгольмова в классе* $C^k_\alpha(D_1 \cup \partial D_1)$ *при* $k > \sup M$, *если*

$$\det E_0 \neq 0, \tag{3.92}$$

и в классах $C^k_{\alpha\beta}(D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+)$, $C_{k\alpha}(D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+)$ *без соблюдения условия* (3.92), *причем в силу фредгольмовости системы* (3.86)

$$\operatorname{Ker} G_0 = \sum_{i=0}^{k-1} b_i t^i, \qquad \operatorname{Ker} G_0^* = \sum_{i=0}^{k-1} c_i \delta^{(i)}(0),$$

где G_0 — *оператор, определенный по формуле* (3.83), *оператор* $R(i) = E_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} \tau_j^i E_j$, *оператор* G_0^* *сопряжен с* G_0, *векторы* b_i, c_i, $i = 0, \ldots, k-1$, *являются решениями систем*

$$R(i)\, b_i = 0, \qquad R^*(i)\, c_i = 0$$

соответственно, а $\delta^{(i)}(0)$ — *производная* δ-*функции в точке* $t = 0$, *т. е.* $\delta^{(i)}(0)\varphi = (-1)^i \varphi^{(i)}(0)$. *Отсюда, в свою очередь, следует, что для разрешимости функционального уравнения* (3.83) *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\tilde{\varphi}^{(i)}(0) \perp \operatorname{Ker} R^*(i), \qquad i = 0, \ldots, k-1,$$

причем безусловная однозначная разрешимость задачи (3.71), (3.72), (3.74) *имеет место лишь при условии, что*

$$\det R(i) \neq 0, \qquad i = 0, \ldots, k-1.$$

Применением более тонких построений при $l \geqslant 2$ можно описать все случаи, когда задача (3.71), (3.72), (3.74) нормально разрешима по Хаусдорфу или по Нетеру.

В приведенном выше примере (3.52) строго гиперболической системы $l = 4$, и в этом случае $M = \{2\}$. Поэтому в классах $C^2_{\alpha\beta}(D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+)$, $\alpha\beta = 0$, $C_{2\alpha}(D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+)$, $\alpha = 0$, задача (3.52), (3.53) не может быть нормально разрешимой, но в классах $C^k_{\alpha\beta}(D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+)$, $(k + \alpha - 2)(k + \beta - 2) > 0$, $C_{k\alpha}(D_0 \cup l_1^+ \cup l_2^+)$, $k + \alpha > 2$, эта задача фредгольмова и ее ядро одномерно, причем, как уже было отмечено в пункте 1°

настоящего параграфа, нетривиальное решение соответствующей однородной задачи имеет вид

$$u_1 = y^2 - {}^1/_4 x^2, \qquad u_2 = 0.$$

6°. Гиперболическая система (3.74) при нарушении условия нормальной гиперболичности. Предположим, что для гиперболической системы (3.74) с постоянными коэффициентами в формуле (3.46), по крайней мере, для одного значения i_0 индекса i имеет место неравенство

$$k_{i_0} > n - \operatorname{rank}(A + 2B\lambda_{i_0} + C\lambda_{i_0}^2).$$

Будем считать, что корни λ_i характеристического полинома $P(1, \lambda)$ занумерованы по их возрастанию:

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_l < \infty,$$

и обозначим через l_i^+, $i = 1, \ldots, l$, лучи характеристик системы (3.74), лежащие в верхней полуплоскости $y > 0$ и проходящие через точку $O(0, 0)$. Пусть D_0 — угол между лучами l_1^+ и l_2^+.

Вводя $2N$-мерный вектор $v = (v_1, \ldots, v_{2N})$ с компонентами

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \qquad v_{N+i} = \frac{\partial u_i}{\partial y}, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

систему (3.74) запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \tilde{A}\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{3.93}$$

где

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -C^{-1}A & -2C^{-1}B \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что характеристические корни матрицы $\tilde{A}$ совпадают с корнями $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ полинома $P(1, \lambda)$. Как известно, существует неособая действительная постоянная матрица $\tilde{B}$ порядка $2N \times 2N$, такая, что матрица $\tilde{B}^{-1}\tilde{A}\tilde{B}$ имеет жорданову каноническую форму. Пусть μ^0 — число жордановых клеток матрицы $\tilde{B}^{-1}\tilde{A}\tilde{B}$. Обозначим через k_j^0, $j = 1, \ldots, \mu^0$, размерность j-й клетки, а через $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\mu_0}^0$ — характеристические корни.

Так как система (3.74) не является нормально гиперболической, то для некоторого j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant \mu^0$, имеет место неравенство $k_{j_0}^0 > 1$.

В результате замены искомого вектора $v = \tilde{B}w$ систему (3.93) можно привести к такому виду, в котором ее можно проинтегрировать. В результате применения процедуры, подобной той, которая была применена в пункте 2° § 2 гл. II, можно выписать общее решение системы (3.74) в рассматриваемом случае:

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{\mu^0} \sum_{i=1}^{k_j^0} q_{ij} \sum_{p=0}^{i-1} \delta_{q(j)}^p \frac{y^p}{p!} \varphi_{j\,i-p}^{(p)}(\delta_{q(j)}(x + \lambda_{q(j)} y)) + u(0), \tag{3.94}$$

где q_{ij} — вполне определенные N-мерные векторы, $i = q(j)$ обозначает отображение множества $(1, 2, \ldots, l)$ на себя, $\delta_{q(j)} = 1$ при $s_1 < j \leqslant \mu^0$ и $\delta_{q(j)} = -1$ при $1 \leqslant j \leqslant s_1$, а число s_1 определяется из равенств

$$\lambda_1 = \lambda_1^0 = \ldots = \lambda_{s_1}^0.$$

Представление (3.94) позволяет найти корректную постановку характеристических задач (см. С. С. Харибегашвили [2]).

Корректная постановка характеристических задач в случае гиперболических систем (3.44) с переменными коэффициентами, как и в случае гиперболических систем (1.4) при $n > 2$, безусловно представляет научный интерес, но в этом направлении автору не известно публикаций.

§ 3. Гиперболические уравнения второго порядка с параболическим вырождением

1°. Задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения, являющейся множеством точек возврата семейств характеристик. Как было показано в пункте 5° § 1 гл. I, линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными, линия параболического вырождения которого является множеством точек возврата для двух семейств характеристик этого уравнения, можно записать в виде (1.32). В этом и в последующих двух пунктах мы будем рассматривать соответствующее (1.32) однородное уравнение

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0 \tag{3.95}$$

в полуплоскости $y \geqslant 0$, когда m — произвольное положительное число.

В характеристических переменных

$$\xi = x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} \tag{3.96}$$

уравнение (3.95) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \left[a\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m-2}{m+2}} (\xi - \eta)^{\frac{2-m}{2+m}} + \right.$$
$$\left. + b\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{-2}{m+2}} (\xi - \eta)^{\frac{2}{m+2}} - \frac{m}{2} \right] \frac{1}{m+2}\,\frac{1}{\xi-\eta}\,\frac{\partial u}{\partial \xi} +$$
$$+ \left[a\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m-2}{m+2}} (\xi - \eta)^{\frac{2-m}{2+m}} - \right.$$
$$\left. - b\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{-2}{m+2}} (\xi - \eta)^{\frac{2}{m+2}} + \frac{m}{2} \right] \frac{1}{m+2}\,\frac{1}{\xi-\eta}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} +$$
$$+ \frac{c}{4}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{2m}{m+2}} (\xi - \eta)^{\frac{-2m}{m+2}} u = 0. \tag{3.97}$$

Преобразование (3.96) является неособым при $y > 0$, причем полуплоскости $y > 0$ оно ставит в соответствие полуплоскость $\xi > \eta$. Прямая $y=0$, т. е. $\xi - \eta = 0$, является особой линией этого преобразования.

При предположении непрерывной дифференцируемости коэффициентов $a(x, y)$, $b(x, y)$ и непрерывности коэффициента $c(x, y)$ уравнения (3.95) в полуплоскости $y \geqslant 0$ этими же свойствами обладают и коэффициенты при $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ и u уравнения (3.97) в полуплоскости $\xi > \eta$, а на прямой $\xi = \eta$ они становятся бесконечными.

В то время как в полуплоскости $\xi \geqslant \eta + \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число, функция Римана и решения задач Коши и Гурса для уравнения (3.95) строятся обычным образом, как это было сделано в пункте 4° § 4 гл. I, задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения $y=0$ требует особого исследования.

2°. Случай уравнения (3.95) без младших членов. Рассмотрим сначала случай, когда в уравнении (3.95) коэффициенты a, b и c тождественно равны нулю, т. е.

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3.98}$$

Нашей целью является изучение задачи Коши в следующей постановке: *найти решение* $u(x, y)$ *уравнения* (3.98), *непрерывное вместе со своими производными до второго порядка (включительно) при* $y > 0$ *и удовлетворяющее на некотором участке оси* $y=0$, *например на участке* $A(0, 0,) B(1, 0)$, *условиям*

$$\lim_{y \to +0} u(x, y) = \tau(x), \tag{3.99}$$

$$\lim_{y \to +0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \nu(x), \tag{3.100}$$

где $\tau(x)$ *и* $\nu(x)$ — *заданные функции, причем* $\tau(x)$ *непрерывна вместе со своими производными до второго порядка, а* $\nu(x)$ — *до первого порядка.*

В характеристических переменных (3.96) уравнение (3.98) переходит в у р а в н е н и е Э й л е р а—Д а р б у:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} - \frac{m}{2(m+2)} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{m}{2(m+2)} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \tag{3.101}$$

а условия (3.99) и (3.100) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\xi - \eta \to +0} u(\xi, \eta) = \tau(\xi), \\ &\lim_{\xi - \eta \to +0} (\xi - \eta)^{\frac{m}{m+2}} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \nu(\xi). \end{aligned}\right\} \tag{3.102}$$

В рассматриваемом случае интегральное уравнение (1.60), которому удовлетворяет функция Римана $R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$, $\xi_1 > \eta_1$, $\xi \geqslant \xi_1$, $\eta_1 \geqslant \eta$, значительно упрощается:

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) - \frac{m}{2(m+2)} \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{R(\xi_2, \eta_1; \xi, \eta)}{\xi_2 - \eta_1} d\xi_2 + \\ + \frac{m}{2(m+2)} \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{R(\xi_1, \eta_2; \xi, \eta)}{\xi - \eta_2} d\eta_2 = 1, \qquad (3.103)$$

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = [(\xi_1 - \eta)(\xi - \eta_1)]^{\frac{-m}{2m+4}} (\xi_1 - \eta_1)^{\frac{m}{m+2}} \times \\ \times F\left[\frac{m}{2m+4}, \frac{m}{2m+4}, 1, \frac{(\xi - \xi_1)(\eta_1 - \eta)}{(\xi_1 - \eta)(\xi - \eta_1)}\right], \qquad (3.104)$$

где F — гипергеометрическая функция.

Обозначим через G область, ограниченную отрезком $Q(\eta + \varepsilon, \eta)\, Q'(\xi, \xi - \varepsilon)$ прямой $\xi_1 = \eta_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и характеристиками QP: $\eta_1 = \eta$, $Q'P$: $\xi_1 = \xi$.

Для любого дважды непрерывно дифференцируемого решения $u(\xi, \eta)$ уравнения (3.101), согласно (1.169), имеет место тождество

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2} u(\eta + \varepsilon, \eta) R(\eta + \varepsilon, \eta; \xi, \eta) + \\ + \frac{1}{2} u(\xi, \xi - \varepsilon) R(\xi, \xi - \varepsilon; \xi, \eta) - \\ - \frac{1}{2} \int_{\eta+\varepsilon}^{\xi} u(\xi_1, \xi_1 - \varepsilon) \left[\frac{\partial R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial \eta_1} - \right. \\ \left. - \frac{2m}{m+2} \frac{1}{\xi_1 - \eta_1} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)\right]_{\eta_1 = \xi_1 - \varepsilon} d\xi_1 + \\ + \frac{1}{2} \int_{\eta+\varepsilon}^{\xi} \left[\frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial \eta_1}\right]_{\eta_1 = \xi_1 - \varepsilon} R(\xi_1, \xi_1 - \varepsilon; \xi, \eta)\, d\xi_1. \qquad (3.105)$$

Используя известное тождество для гипергеометрических функций

$$F(a, b, c, x) = \\ = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, 1-c+a+b, 1-x) + \\ + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-x)^{c-a-b} \times \\ \times F(c-b, c-a, 1+c-a-b, 1-x),$$

в силу (3.102) и (3.104) легко убеждаемся в справедливости следующих равенств:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}-\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right)R(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)\right]_{\eta_1=\xi_1-\varepsilon}=\\
&\quad=\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m}{m+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+4}{2m+4}\right)}[(\xi_1-\eta)(\xi-\xi_1)]^{\frac{-m}{2m+4}}\nu(\xi_1),\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\partial R(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)}{\partial\xi_1}-\frac{\partial R(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)}{\partial\eta_1}-\right.\\
&\left.-\frac{2m}{m+2}\frac{1}{\xi_1-\eta_1}R(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)\right]_{\eta_1=\xi_1-\varepsilon}u(\xi_1,\ \xi_1-\varepsilon)=\\
&\quad=-\frac{2\Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2m+4}\right)}[(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)]^{\frac{-m-4}{2m+4}}\times\\
&\qquad\qquad\times(\xi-\eta)^{\frac{2}{m+2}}\tau(\xi_1).
\end{aligned}\right\}\tag{3.106}$$

Учитывая (3.106), из формулы (3.105) в пределе при $\varepsilon\to 0$, после очевидной замены переменного интегрирования, получаем известную ф о р м у л у Д а р б у:

$$\begin{aligned}
u(x,\ y)=&\frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2m+4}\right)}\int_0^1\tau\left[x+(1-2z)\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right]\times\\
&\times[z(1-z)]^{\frac{-m-4}{2m+4}}dz+\frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+4}{2m+4}\right)}\times\\
&\times y\int_0^1\nu\left[x+(1-2z)\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\right][z(1-z)]^{\frac{-m}{2m+4}}dz,
\end{aligned}\tag{3.107}$$

которая дает решение задачи Коши с начальными данными (3.99) и (3.100). Единственность решения этой задачи следует из того, что формула (3.107) является результатом тождества (3.105), которое имеет место для любого, непрерывного вместе со своими производными до второго порядка, решения уравнения (3.95) в полуплоскости $\xi > \eta$. Вид формулы (3.107) показывает, что полученное решение устойчиво.

3°. Случай уравнения (3.95). Вернемся теперь к уравнению (3.95). В полуплоскости $\xi > \eta$ функция Римана и в этом случае строится методом, указанным в пункте 4° § 4 гл. I. Следовательно, можно выписать тождество

$$
\begin{aligned}
u(\xi, \eta) = \frac{1}{2} u(\eta+\varepsilon, \eta) R(\eta+\varepsilon, \eta; \xi, \eta) + \\
+ \frac{1}{2} u(\xi, \xi-\varepsilon) R(\xi, \xi-\varepsilon; \xi, \eta) + \\
+ \frac{1}{2} \int\limits_{\eta+\varepsilon}^{\xi} \Big\{ \left[\frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial \eta_1} \right] R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) - \\
- u(\xi_1, \eta_1) \left[\frac{\partial R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)}{\partial \eta_1} \right] + \\
+ [2b(\xi_1, \eta_1) - 2a(\xi_1, \eta_1)] u(\xi_1, \eta_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) \Big\}_{\eta_1 = \xi_1 - \varepsilon} d\xi_1.
\end{aligned}
\tag{3.108}
$$

Ввиду того, что функция Римана и ее производные при $\xi_1 = \eta_1$, $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ могут иметь особенность довольно высокого порядка, переходить к пределу в тождестве (3.108) при $\varepsilon \to 0$, вообще говоря, нельзя.

Однако если коэффициент a удовлетворяет условию

$$
\lim_{y \to +0} y^{1-\frac{m}{2}} a(x, y) = 0 \tag{3.109}
$$

или, что то же самое,

$$
\lim_{\xi-\eta \to 0} (\xi-\eta)^{\frac{2-m}{2+m}} a = 0,
$$

то в уравнении (3.97), когда $\xi = \eta$, коэффициенты при $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ будут иметь такую же полярную особенность, как соответствующие коэффициенты уравнения (3.103), а особенность коэффициента при $u(\xi, \eta)$ в смысле двукратного интегрирования опасности не представляет.

Таким образом, при соблюдении условия (3.109) функция Римана для уравнения (3.97) вблизи особой линии $\xi=\eta$ ведет себя примерно так же, как и в случае уравнения (3.101), и, следовательно, в результате предельного перехода, когда $\varepsilon\to 0$, из формулы (3.108) мы получаем решение задачи Коши для уравнения (3.95) с начальными данными (3.99) и (3.100).

Тот факт, что *задача Коши для уравнения* (3.95) *с начальными данными на линии вырождения типа может оказаться некорректно поставленной*, был отмечен еще Геллерстедтом [1], а несколько позже — И. С. Березиным [1]. К условию (3.109), обеспечивающему корректность этой задачи, другим путем пришел Проттер [1].

Приведенный ниже пример показывает, что *для корректности задачи Коши с начальными данными на линии параболического вырождения условие* (3.109) *не является необходимым.*

Уравнение

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (3.110)$$

где a — действительная постоянная, гиперболично всюду вне прямой $y=0$, а прямая $y=0$ является линией параболического вырождения. В характеристических переменных $\xi=x+\frac{1}{2}y^2$, $\eta=x-\frac{1}{2}y^2$ уравнение (3.110) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{a-1}{4(\xi-\eta)}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{a+1}{4(\xi-\eta)}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0. \qquad (3.111)$$

Функция Римана для уравнения (3.111) при $\xi>\eta$ выражается с помощью гипергеометрической функции

$$R(\xi_1,\ \eta_1;\ \xi,\ \eta)=(\xi_1-\eta)^{\frac{a-1}{4}}(\xi-\eta_1)^{-\frac{a+1}{4}}(\xi_1-\eta_1)^{1/2}\times$$
$$\times F\left[\frac{1-a}{4},\ \frac{1+a}{4},\ 1,\ \frac{(\xi-\xi_1)(\eta_1-\eta)}{(\xi-\eta_1)(\xi_1-\eta)}\right]. \qquad (3.112)$$

Вид функции Римана (3.112) показывает, что при $|a|<1$ решение задачи Коши с начальными данными (3.99), (3.100) для уравнения (3.110) может быть получено из формулы (3.107) предельным переходом. В результате простых вычислений для искомого решения получается следующая формула:

$$u(x, y) =$$

$$= \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-3}{4}} t^{-\frac{a+3}{4}} dt +$$

$$+ y \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} \int_0^1 \nu\left[x + \frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-1}{4}} t^{-\frac{a+1}{4}} dt.$$

В случае $a = -1$ мы для функции Римана имеем выражение

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = \sqrt{\frac{\xi_1 - \eta_1}{\xi_1 - \eta}},$$

а формула (3.108) принимает вид

$$2u(\xi, \eta) =$$

$$= u(\eta + \varepsilon, \eta) + u(\eta, \eta - \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{u(\xi, \xi - \varepsilon) - u(\eta, \eta - \varepsilon)}{\sqrt{\xi - \eta}} -$$

$$- \int_\xi^{\eta+\varepsilon} \left\{\left[\frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(\xi_1, \eta_1)}{\partial \eta_1}\right]\sqrt{\frac{\xi_1 - \eta_1}{\xi_1 - \eta}}\right\}_{\eta_1 = \xi_1 - \varepsilon} d\xi_1 -$$

$$- \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int_\xi^{\eta+\varepsilon} \frac{u(t, t-\varepsilon) - u(\eta, \eta-\varepsilon)}{(t-\eta)^{3/2}}\, dt,$$

откуда в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$u(x, y) = \tau\left(x - \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{y}{2} \int_0^1 \frac{\nu\left[x + (1-2t)\frac{y^2}{2}\right]}{\sqrt{1-t}}\, dt.$$

В случае же $a = 1$ аналогично находим, что функция

$$u(x, y) = \tau\left(x + \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{y}{2} \int_0^1 \nu\left[x + (1-2t)\frac{y^2}{2}\right]\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

является единственным решением уравнения (3.110), удовлетворяющим условиям (3.99) и (3.100).

Таким образом, *в рассмотренных случаях коэффициент при* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *в уравнении* (3.110) *хотя и не удовлетворяет условию* (3.109), *но тем не менее задача Коши для этого уравнения с начальными данными на линии параболического вырождения всегда имеет, и притом единственное, устойчивое решение.*

В одном весьма частном случае эта задача исследована в работе К. И. Карапетяна [1] (см. также И. Л. Кароль [1], [2]).

Исследование задачи Коши для уравнения (3.110) при требовании повышения гладкости начальных данных (3.99) и (3.100) имеется в работе Чи Минь-ю [1].

4°. Случай вырождающейся гиперболической системы. Пусть в полуплоскости $y>0$ задана система

$$y^m k(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+ \\ +b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=0, \qquad (3.113)$$

где m — положительное число, k, a, b, c — заданные $N\times N$-матрицы, причем матрица k положительно определена.

Система (3.113) гиперболична при $y>0$ и параболически вырождается при $y=0$.

Далеко не полностью исследована задача Коши в следующей постановке: *найти в области* $y>0$ *решение* $u(x, y)$ *уравнения* (3.113), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$\lim_{y\to+0} u(x, y)=\tau(x), \qquad \lim_{y\to+0}\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=\nu(x), \qquad (3.114)$$

где $\tau=(\tau_1, \ldots, \tau_N)$, $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_N)$ — *заданные векторы.*

В случае, когда $k(x, y)$ является единичной (диагональной) матрицей, система (3.113) в области $y>0$ в результате преобразования переменных (3.96) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\left[\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m-2}{m+2}}a(\xi-\eta)^{\frac{2-m}{2+m}}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{-2}{m+2}}b(\xi-\eta)^{\frac{2}{m+2}}-\frac{m}{2}\right]\frac{1}{m+2}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+$$
$$+\left[\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m-2}{m+2}}a(\xi-\eta)^{\frac{2-m}{2+m}}-\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{-2}{m+2}}b(\xi-\eta)^{\frac{2}{m+2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{m}{2}\right]\frac{1}{m+2}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{2m}{m+2}}\frac{c}{4}\frac{1}{(\xi-\eta)^{\frac{2m}{m+2}}}u=0,$$

и, следовательно, в случае симметричности матриц a, b, c и при соблюдении условий

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\frac{m}{2}}a_{ij}(x,\ y)=0,\qquad i,\ j=1,2,\ldots,N,$$

задача Коши (3.114) может быть решена методом предыдущего пункта.

Когда $k(x,\ y)$ — диагональная, но не обязательно единичная матрица, задача (3.113), (3.114) исследована В. П. Диденко [1], [3].

5°. Однородное уравнение, соответствующее уравнению (1.33). Для однородного гиперболического в полуплоскости $y>0$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+b(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,\ y)u=0,\qquad(3.115)$$

соответствующего уравнению (1.33), когда m — положительное число, линия параболического вырождения $y=0$ сама является характеристикой. Поэтому естественно ожидать, что задача Коши для этого уравнения с начальными данными на линии вырождения типа *не всегда будет корректно поставленной.*

В этом легко убедиться на следующем простом примере уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0.\qquad(3.116)$$

Общее решение этого уравнения в полуплоскости $y > 0$ имеет вид

$$u(x, y) = \varphi(x + 2y^{1/2}) + \psi(x - 2y^{1/2}), \tag{3.117}$$

где φ и ψ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

Если от решения $u(x, y)$ уравнения (3.115) мы будем требовать, чтобы оно удовлетворяло условию (3.99) и, кроме того, чтобы выражение

$$\lim_{y\to+0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \tag{3.118}$$

оставалось ограниченным, то этим указанное решение определится единственным образом.

Действительно, в силу (3.99) и (3.118), из (3.117) имеем

$$\varphi(x) + \psi(x) = \tau(x), \qquad \varphi'(x) - \psi'(x) = 0,$$

т. е.

$$\varphi(x) = \frac{\tau(x) + \text{const}}{2}, \qquad \psi(x) = \frac{\tau(x) - \text{const}}{2},$$

и, следовательно, для искомого решения $u(x, y)$ получаем выражение

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\tau(x + 2y^{1/2}) + \frac{1}{2}\tau(x - 2y^{1/2}).$$

Теперь заменим условие (3.100) более слабым условием

$$\lim_{y\to+0} y^{1/2}\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \nu(x). \tag{3.119}$$

Решение $u(x, y)$ уравнения (3.114), удовлетворяющее условиям (3.99) и (3.119), определяется однозначно. Оно имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\tau(x + 2y^{1/2}) + \frac{1}{2}\tau(x - 2y^{1/2}) + \frac{1}{2}\int_{x-2y^{1/2}}^{x+2y^{1/2}} \nu(t)\,dt.$$

В наших работах [5], [7], [8] нами было обращено внимание на выяснение вопроса при каких условиях (т. е. при каких значениях показателя m и коэффициентов a, b, c) поставлена корректно задача Коши с начальными условиями (3.99), (3.100). В случае же, когда эта задача не является корректно поставленной, надо выяснить, для каких «весов» $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ возможна задача с условиями

$$\lim_{y\to+0}\varphi_1(x, y)u(x, y)=\tau(x), \qquad \lim_{y\to+0}\varphi_2(x, y)u_y(x, y)=\nu(x),$$

где τ и ν — заданные функции.

Приведем еще несколько примеров, оправдывающих такое видоизменение задачи Коши.

Как известно из пункта 5° § 1 гл. I, характеристиками уравнения (3.115) являются семейства кривых

$$(x-c)^2-\left(\frac{2}{2-m}\right)^2 y^{2-m}=0, \qquad m\neq 2, \tag{3.120}$$

$$y=\exp(c\pm x), \qquad m=2, \tag{3.121}$$

и прямая $y=0$. Причем при $m<2$ эта прямая есть огибающая семейства (3.120), а во всех остальных случаях она является асимптотой обоих семейств (3.120), (3.121).

Пусть D — область, ограниченная характеристиками

$$\Gamma_0\colon\ y=0, \quad \Gamma_1\colon\ x-\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}=-\frac{2}{2-m},$$

$$\Gamma_2\colon\ x+\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}=\frac{2}{2-m}, \qquad m\neq 2$$

$$(\Gamma_1\colon\ y=e^x, \quad \Gamma_2\colon\ y=e^{-x}, \quad m=2),$$

причем при $m<2$ имеем $-\frac{2}{2-m}\leqslant x\leqslant 0$ вдоль Γ_1, $0\leqslant x\leqslant \frac{2}{2-m}$ вдоль Γ_2, а при $m\geqslant 2$ интервалами изменения x являются $-\infty<x\leqslant 0$ вдоль Γ_1, $0\leqslant x<\infty$ вдоль Γ_2.

Для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{3.122}$$

рассмотрим задачу Гурса (см. пункт 3° § 4 гл. I)

$$u|_{\Gamma_1}=\psi_1(x), \qquad u|_{\Gamma_2}=\psi_2(x), \qquad \psi_1(0)=\psi_2(0), \tag{3.123}$$

где ψ_1, ψ_2 — заданные действительные функции класса $C^{2,0}$.

Поскольку при $m=2$ заменой переменных

$$\xi = x - \log y, \qquad \eta = x + \log y \tag{3.124}$$

уравнение (3.122) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0,$$

задача (3.122), (3.123) всегда имеет, и притом единственное, решение.

Однако далеко не просто решается вопрос о том, может ли годиться в качестве носителя данных $u(x, y)$ прямая $y=0$ или определенный ее участок в случае уравнения (3.115).

Так, например, уравнение (3.115) при $a=0$, $b=-y$, $c=0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad y > 0, \tag{3.125}$$

в результате замены переменных (3.124) приводится к уравнению колебаний струны, и, стало быть, его общее решение имеет вид

$$u(x, y) = f_1(x - \log y) + f_2(x + \log y),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — произвольные функции класса $C^{2,0}$.

В указанной выше области D решение $u(x, y)$ задачи (3.123), (3.125) дается формулой

$$u(x, y) = \psi_1\left(\frac{x - \log y}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{x + \log y}{2}\right) - \psi_1(0),$$

откуда видно, что

$$\lim_{y \to +0} u(x, y) = \psi_1(\infty) + \psi_2(-\infty) - \psi_1(0) = \mathrm{const},$$

а $\lim\limits_{y \to +0} \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ существует лишь при выполнении условия

$$\lim_{y \to +0} \frac{1}{y}\left[\psi_1'\left(\frac{x - \log y}{2}\right) + \psi_2'\left(\frac{x + \log y}{2}\right)\right] = \mathrm{const}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае Γ_0 не может служить носителем данных не только для $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}$, но даже для $u(x, y)$.

При $m \neq 2$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.126}$$

в результате замены независимых переменных

$$\xi = x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}$$

переходит в уравнение Эйлера—Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0, \quad \beta = \frac{m}{2(m-2)},$$

для которого функция Римана $R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$ имеет вид $R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) =$

$$= (\eta_1 - \xi_1)^{2\beta} (\eta - \xi_1)^{-\beta} (\eta_1 - \xi)^{-\beta} F\left(\beta, \beta, 1, \frac{(\xi_1 - \xi)(\eta_1 - \eta)}{(\xi_1 - \eta)(\eta_1 - \xi)}\right),$$

и на основании метода Римана, примененного в пункте 4° § 4 гл. I, например, при $m = 4$ находим решение задачи (3.123), (3.126) (см. В. А. Елеев [1]):

$$u(x, y) = -y\psi_1(0) + \frac{y - xy + 1}{2}\psi_1\left(\frac{xy + y - 1}{2y}\right) + \\ + \frac{y + xy + 1}{2}\psi_2\left(\frac{xy - y + 1}{2y}\right).$$

Таким образом, и в случае $m > 2$ может оказаться, что Γ_0 не годится в качестве носителя данных.

По вопросам, на которые обращено внимание в этом пункте, следует отметить работы X. Г. Бжихатлова [1], [2], В. А. Елеева [1], [2] и И. Л. Кароля [2], [3].

§ 4. Гиперболические уравнения с вырождением типа и порядка

1°. Случай двух независимых переменных. Простейшей моделью гиперболических уравнений второго порядка, тип и порядок которых вырождаются на одном и том же $(n-1)$-мерном континууме, может служить уравнение (2.176) при натуральном m в полуплоскости $y \leqslant 0$. Оно гиперболично при $y < 0$, а вдоль прямой $y = 0$ имеет место вырождение его типа и порядка. Характеристики этого уравнения состоят из двух семейств кривых

$$(x-c)^2-\left(\frac{2}{2m+1}\right)^2(-y)^{2m+1}=0,$$

а прямая $y=0$ является множеством точек возврата этих семейств.

Обозначим через D^- лежащую в полуплоскости $y<0$ область, ограниченную отрезком A (0, 0) B (1, 0) прямой и дугами AC и BC характеристик

$$x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}=0, \qquad x+\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}=1$$

уравнения (2.176).

В результате неособого при $y<0$ преобразования переменных

$$\xi=x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}, \qquad \eta=x+\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}},$$

если для искомого решения оставить прежнее обозначение, уравнение (2.176) переходит в уравнение Эйлера—Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}\frac{1}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0. \qquad (3.127)$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha=(1-2m)/2$.

Задача Коши с начальными данными

$$u(x,\ 0)=\tau(x), \qquad u_y(x,\ 0)=\nu(x), \qquad 0<x<1, \qquad (3.128)$$

для уравнения (2.176) *в области* D^- *поставлена некорректно.*

Справедливость этого утверждения вытекает из существования отличного от нуля решения

$$u_0(x,\ y)=\tau_0\left[x+\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]-\tau_0\left[x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]$$

соответствующей (3.128) однородной задачи. Здесь $\tau_0(t)$, $0<t<1$, — произвольная дважды дифференцируемая функция.

В части области D^-, лежащей под прямой $y=-\varepsilon$, где ε — произвольное достаточно маленькое положительное число, решение задачи Коши для уравнения (2.176) с начальными данными

$$u(x,\ -\varepsilon),\qquad u_y(x,\ -\varepsilon),$$

$$2\varepsilon^{\frac{2m+1}{2}} < (2m+1)\,x < 2m+1-2\varepsilon^{\frac{2m+1}{2}}$$

имеет вид

$$u_\varepsilon(x,\ y)=\frac{1}{2}u(x-\omega,\ -\varepsilon)+\frac{1}{2}u(x+\omega,\ -\varepsilon)-$$
$$-\omega\varepsilon^{\frac{1-2m}{2}}\int\limits_0^1\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}u[x+(1-2t)\,\omega,\ \eta]\right\}_{\eta=-\varepsilon}dt, \tag{3.129}$$

где

$$\omega=\frac{2}{2m+1}\left[(-y)^{\frac{2m+1}{2}}-\varepsilon^{\frac{2m+1}{2}}\right].$$

Из формулы (3.129) следует, что при требовании соблюдения первого из начальных условий (3.128) второе из них необходимо заменить условием

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\frac{1-2m}{2}}\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}=\nu(x),\qquad 0<x<1.$$

Из этой же формулы в пределе при $\varepsilon\to 0$ получаем функцию

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2}\tau\left[x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\tau\left[x+\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\times$$
$$\times\int\limits_0^1\nu\left[x+(1-2t)\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]dt,$$

являющуюся регулярным в области D^- решением уравнения (2.176), удовлетворяющим условиям

$$u(x,\ 0)=\tau(x),\qquad \lim_{y\to-0}(-y)^{\frac{1-2m}{2}}\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}=\nu(x),\qquad 0<x<1, \tag{3.130}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — заданные, соответственно, два и один раз непрерывно дифференцируемые функции. Тем самым доказано существование и единственность регулярного в области D^- решения уравнения (2.176), удовлетворяющего условиям (3.130).

Пользуясь выражением для функции Римана $R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$ в случае уравнения Эйлера—Дарбу, выписанного в пункте 4° предыдущего параграфа, и при $\frac{1-2m}{2}<\alpha<1$ приходим к заключению, что регулярное в области D^- решение уравнения (2.176), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0)=\tau(x), \qquad \lim_{y\to -0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=\nu(x), \qquad 0<x<1, \tag{3.130$_1$}$$

существует и единственно. Это решение дается формулой

$$u(x, y)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^1 \tau\left[x+\frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right][t(1-t)]^{\beta-1}\,dt-$$
$$-\frac{2}{2m+1}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}(-y)^{1-\alpha}\int_0^1 \nu\left[x+\frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]\times$$
$$\times[t(1-t)]^{-\beta}\,dt, \tag{3.131}$$

где $\beta=\frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}$.

Изложенные в этом пункте результаты взяты из нашей работы [8].

2°. Уравнение (2.176), когда α меняется вне полусегмента $[1/2-m,\ 1)$. Для того чтобы расширить промежуток изменения α при исследовании уравнения (2.176), заметим, что путем замены переменного y

$$z=\frac{1}{(2m+1)^2}(-y)^{2m+1}$$

уравнение (2.176) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\beta\frac{\partial u}{\partial z}=0, \qquad z>0, \tag{3.132}$$

где $\beta=\frac{\alpha+2m}{2m+1}$.

При $\beta \neq 1$, как было показано Вайнштейном [1], для решения $u_\beta(x, z)$ уравнения (1.132) имеет место представление

$$u_\beta(x, z) = z^{1-\beta} u_{2-\beta}(x, z), \tag{3.133}$$

где $u_{2-\beta}(x, z)$ — решение уравнения (3.132), когда в нем коэффициент β заменен на $2-\beta$.

Следовательно, если известно решение уравнения (3.132) при $\beta < 1$, то по формуле (3.133) получим решение этого уравнения при $\beta > 1$.

В. А. Елеев [2] распространил результаты предыдущего пункта на случай, когда постоянная α меньше $\frac{1-2m}{2}$, больше или равна единице.

При $0 < \beta < 1/2$, т. е. $-2m < \alpha < \frac{1-2m}{2}$, как впервые было показано Бламом [1] (см. также И. Л. Кароль [2], [3]), общее представление регулярных решений уравнения (3.132) дается формулой

$$u(x, z) = \beta \int_0^1 [t(1-t)]^{\beta-1/2} \varphi(\xi)\, dt - \\ - \sqrt{z} \int_0^1 [t(1-t)]^{\beta-1/2} (1-2t) \varphi'(\xi)\, dt + \\ + z^{1-\beta} \int_0^1 [t(1-t)]^{1/2-\beta} \psi(\xi)\, dt, \tag{3.134}$$

где $\xi = x - 2(1-2t)\sqrt{z}$, а $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ — произвольные действительные функции классов $C^{3,0}$ и $C^{2,0}$ соответственно.

Возвращаясь опять к переменному y, из (3.134) получаем общее представление решений уравнения (2.176)

$$u(x, y) = \beta \int_0^1 [t(1-t)]^{\beta-1/2} \varphi(\xi)\, dt - \\ - \frac{1}{2m+1} (-y)^{\frac{2m+1}{2}} \int_0^1 [t(1-t)]^{\beta-1/2} (1-2t) \varphi'(\xi)\, dt + \\ + \frac{1}{(2m+1)^\mu} (-y)^{1-\alpha} \int_0^1 [t(1-t)]^{1/2-\beta} \psi(\xi)\, dt, \tag{3.135}$$

где на этот раз

$$\xi = x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}(1-2t), \tag{3.136}$$

а

$$\mu = \frac{2(1-\alpha)}{2m+1}.$$

При $\alpha = 1$ общее решение уравнения (2.176) имеет вид

$$u(x, y) = \int_0^1 [t(1-t)]^{-1/2}\varphi(\xi)\,dt +$$
$$+\int_0^1 [t(1-t)]^{-1/2}\log\left[\frac{1}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}t(1-t)\right]\psi(\xi)\,dt. \tag{3.137}$$

Здесь, как и ниже, ξ дается опять по формуле (3.136).

Пусть теперь φ и ψ — функции классов $C^{2n+4,0}$ и $C^{2n+2,0}$ соответственно, а

$$\alpha = (2m+1)\left(\gamma + \frac{1}{2} - n\right) - 2m,$$
$$-1/2 < \gamma < 1/2, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Ссылаясь на работу Блама [1], общее решение уравнения (2.176) мы можем выписать в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(n, \gamma)\frac{(-y)^{k(2m+1)}}{(2m+1)^{2k}}\int_0^1 [t(1-t)]^{k+\gamma}F^{(2k)}(\xi)\,dt +$$
$$+\frac{(-y)^{1-\alpha}}{(2m+1)^{2(1-\beta)}}\int_0^1 [t(1-t)]^{n-\gamma}\Phi(\xi)\,dt, \tag{3.138}$$

где

$$P_k(n, \gamma) = \frac{2^{3k}C_{n+1}^{k}}{\Gamma(\gamma+k+1)\sum\limits_{s_0=1}^{k-1}(2s_0+2\gamma-2n-1)},$$

$$F(\xi) = \Gamma(\gamma+1)\prod_{s_0=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}+\gamma-s_0\right)\varphi(\xi),$$

$$\Phi(\xi) = \mu_0\psi^{(2n)}(\xi),$$

μ_0 — вполне определенное число, $\beta = 1/2 + \gamma - n$, Γ — гамма-функция Эйлера.

При $\alpha=-n$ аналогично получаем

$$u(x, y)=\varkappa^0(-y)^{(n+1)(2m+1)}\int_0^1[t(1-t)]^{n+1/2}\Phi(\xi)\,dt+$$
$$+\varkappa^1(-y)^{(n+1)(2m+1)}\int_0^1[t(1-t)]^{n+1/2}\times$$
$$\times\log\left[\frac{1}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}t(1-t)\right]F^{(2n+2)}(\xi)\,dt+$$
$$+\sum_{k=0}^{n+1}\varkappa_k(-y)^{k(2m+1)}\int_0^1[t(1-t)]^{k+1/2}F^{(2k)}(\xi)\,dt, \quad (3.139)$$

где

$$\varkappa^0=\frac{1}{(2m+1)^{2(n+1)}}, \qquad \varkappa^1=\frac{2^{3(n+1)}}{(2m+1)^{2(n+1)}(2n+1)!!},$$
$$(2m+1)^{2k}\varkappa_k=\frac{1}{2}C_{n+1}^k(n-k)!(-1)^{n-k}\frac{2^{2k}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2+k)},$$
$$k=0, 1, \ldots, n,$$
$$(2m+1)^{2(n+1)}\varkappa_{n+1}=-\frac{2^{3n+4}}{(2n+1)!!}\sum_{s_0=0}^{n+1}\frac{1}{2s_0-1}.$$

На основании формул (3.135), (3.137), (3.138) и (3.139) приходим к заключению, что, когда $y\to-0$, на отрезке $A(0, 0)B(1, 0)=J$ оси $y=0$:

а) если $-2m<\alpha<\frac{1}{2}-m$, $\tau(x)\in C^{3,0}(J)$ и $\nu(x)\in C^{2,0}(J)$, то

$$u(x, 0)=\tau(x), \qquad \lim_{y\to-0}(-y)^\alpha\frac{\partial}{\partial y}[u(x, y)-w_0(x, y)]=\nu(x); \quad (3.140)$$

б) если $\alpha=1$, $\tau(x)\in C^{2,0}(J)$, $\nu(x)\in C^{2,0}(J)$, то

$$\lim_{y\to-0}\frac{u(x, y)}{\log(-y)^{\frac{2m+1}{2}}}=\tau(x),$$
$$\lim_{y\to-0}(-y)\log^2(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u(x, y)-w_1(x, y)}{\log(-y)^{\frac{2m+1}{2}}}\right]=\nu(x); \quad (3.141)$$

в) если $\alpha = -2m + (1/2 + \gamma - n)(2m+1)$, $-1/2 < \gamma < 1/2$, $n = 0, 1, \ldots$, $\tau(x) \in C^{2n+4,0}(J)$, $\nu(x) \in C^{2,0}(J)$, то

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \lim_{y \to -0} (-y)^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y) - w_2(x, y)] = \nu(x), \tag{3.142}$$

а при $\alpha = -(2m+1)n - 2m$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \lim_{y \to -0} (-y)^{-(2m+1)n-2m} \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y) - w_3(x, y)] = \nu(x);$$

г) если $\alpha > 1$, $\tau(x) \in C^{2n+4,0}(J)$, $\nu(x) \in C^{2,0}(J)$, то в силу (3.133)

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{y \to -0} (-y)^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x), \\ &\lim_{y \to -0} (-y)^{2-\alpha} \frac{\partial}{\partial y} [(-y)^{\alpha-1} u(x, y) - w_2(x, y)] = \nu(x), \end{aligned}\right\} \tag{3.143}$$

где

$$w_0(x, y) = \frac{(\beta + 1/2)\,\Gamma(2\beta + 1)}{\beta \Gamma^2(\beta + 1/2)} \int_0^1 [t(1-t)]^{\beta - 1/2} \tau(\xi)\, dt,$$

$$w_1(x, y) = \int_0^1 [t(1-t)]^{-1/2} \log\left[\frac{1}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} t(1-t)\right] \tau(\xi)\, dt,$$

$$w_2(x, y) = \sum_{k=0}^{n+1} P_k(n, \gamma) \frac{(-y)^{k(2m+1)}}{(2m+1)^2} \int_0^1 [t(1-t)]^{k+\gamma} F^{(2k)}(\xi)\, dt,$$

$$w_3(x, y) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\varkappa_k}{(2m+1)^{2k}} (-y)^{k(2m+1)} \int_0^1 [t(1-t)]^{k-1/2} F^{(2k)}(\xi)\, dt + \frac{(-y)^q\, 2^{3(n+1)}}{(2m+1)^{2(n+1)!!}} \int_0^1 [t(1-t)]^{n+1/2} \log\left[\frac{1}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} t(1-t)\right] \times F^{(2n-1)}(\xi)\, dt,$$

$$q = \frac{(n+1)(2m+1)}{(2n+1)!!}.$$

В случае а), пользуясь представлением (3.135) для функции $u(x, y)$, в силу (3.140) будем иметь

$$\begin{gathered}\varphi(x)=\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\beta\Gamma^2(\beta+1/2)}\tau(x),\\ \psi(x)=\frac{(2m+1)\Gamma(3-2\beta)}{(\alpha-1)\Gamma^2(3/2-\beta)}\nu(x).\end{gathered}\tag{3.144}$$

В случае б) на основании (3.137) и (3.141) находим, что

$$\psi(x)=\frac{1}{\pi}\tau(x),\qquad \varphi(x)=\frac{2\nu(x)}{\pi(2m+1)}.\tag{3.145}$$

В силу (3.138), (3.142) и (3.139), (3.143), соответственно, получаем

$$\begin{gathered}F(x)=\frac{\Gamma(2\gamma+2)}{\Gamma^3(\gamma+1)}\tau(x),\\ \Phi(x)=\frac{(2m+1)^{2(1-\beta)}\Gamma(2n-2\gamma+2)}{\mu_0(1-\alpha)\Gamma^2(n+1-\gamma)}\nu(x)\end{gathered}\tag{3.146}$$

в случае в) и

$$\begin{gathered}F(x)=\frac{\Gamma(2\gamma+2)}{\Gamma^3(\gamma+1)}\tau(x),\\ \Phi(x)=\frac{\Gamma(2n+2-2\gamma)(2m+1)^{2(\beta-1)}}{(\alpha-1)\mu_0\Gamma^2(n+1-\gamma)}\nu(x)\end{gathered}\tag{3.147}$$

в случае г).

Подставляя выражения φ, ψ, F и Φ из (3.144), (3.145), (3.146) и (3.147) в формулы (3.135), (3.137), (3.138) и (3.139), получаем соответственно решения задач (3.140), (3.141), (3.142) и (3.143) для уравнения (2.176) во всех случаях а), б), в), г). Единственность решения каждой из указанных задач очевидна.

Конечно, конкретный вид уравнения (2.176) позволил видоизменить задачу Коши таким образом, чтобы она была однозначно разрешима. На пути изучения аналогичного вопроса в случае уравнения

$$y^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^{2n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=0$$

возникают трудности не только технического характера.

3°. Первая задача Дарбу для уравнения (2.176). Обозначим через D^- лежащую в нижней полуплоскости $y<0$

область, ограниченную отрезком $A(0,\ 0)\,B(1,\ 0) = \bar{J}$ оси $y=0$ и характеристиками

$$\sigma_1:\ x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0$$

и

$$\sigma_2:\ x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (2.176).

Под первой задачей Дарбу (см. пункт 1° § 1 настоящей главы) понимается *задача определения регулярного в области D^- решения $u(x,\ y)$ уравнения* (2.176), *удовлетворяющего условиям*

$$u(x,\ 0) = \tau(x),\quad u|_{\sigma_1} = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \tau(0) = \psi(0). \tag{3.148}$$

Покажем существование решения этой задачи в двух частных случаях—когда $\alpha = 1/2 - m$:

$$y^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{2} - m\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{3.149}$$

и когда $\alpha = 0$:

$$y^{2m-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{3.150}$$

В силу (3.127) общее решение уравнения (3.149) имеет вид

$$u(x,\ y) = f_1\left[x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right] + f_2\left[x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right], \tag{3.151}$$

где f_1 и f_2—произвольные действительные функции класса $C^{2,0}(J)$.

Потребовав, чтобы представленная формулой (3.151) функция $u(x,\ y)$ удовлетворяла условиям (3.148), для нахождения функций f_1 и f_2 будем иметь

$$\begin{aligned} &f_1(x) + f_2(x) = \tau(x), && x \in \bar{J}, \\ &f_1(0) + f_2(2x) = \psi(x), && 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \end{aligned} \tag{3.152}$$

т. е.

$$f_2(x) = \psi(x/2) - f_1(0), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$f_1(x) = \tau(x) - \psi(x/2) + f_1(0), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

и, стало быть, искомым решением является функция

$$u(x,\ y) = \tau\left[x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right] -$$
$$- \psi\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right] + \psi\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right].$$

Чтобы построить решение $u(x,\ y)$ задачи (3.148), (3.150), воспользуемся формулой (3.107), в которой число m следует заменить через $2m-1$, переменное y — через $(-y)$, а функцию ν — через $(-\nu)$. Для того чтобы представленная по этой формуле функция $u(x,\ y)$ удовлетворяла второму из условий (3.148), функция $\nu(x)$ должна быть решением интегрального уравнения Абеля

$$\int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{[t(x-t)]^{\frac{2m-1}{2m+2}}} = \omega(x), \tag{3.153}$$

где функция $\omega(x)$ известна, поскольку известны функции $\tau(x)$ и $\psi(x)$.

Применяя формулу обращения интегрального уравнения Абеля (см. пункт 6° § 5 гл. I), из (3.152) находим функцию $\nu(x)$, выраженную через данные задачи (3.148). Подставляя $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в формулу (3.107), получаем решение задачи (3.148), (3.150).

Замена первого из условий (3.148) условием

$$\lim_{y\to-0} \frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y} = \nu(x) \tag{3.154}$$

при $\alpha=0$, т. е. в случае уравнения (3.150), не нарушает корректности постановки задачи, и ниже (см. пункт 2° § 1 гл. IV) нам придется воспользоваться этим фактом.

В случае же уравнения (3.149) условие (3.154) можно заменить, например, вторым из условий (3.130). Пользуясь опять представлением (3.151) для решений уравнения (3.149), в силу указанного условия будем иметь

$$f_1'(x)-f_2'(x)=\frac{2}{2m+1}\nu(x),\quad 0<x<1,\qquad (3.155)$$

а второе из условий (3.147) даст

$$f_2(x)=\psi(x/2)-f_1(0),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.\qquad (3.156)$$

На основании (3.155) и (3.156) заключаем, что искомым решением на этот раз является функция

$$u(x,y)=\frac{2}{2m+1}\int\limits_0^{x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}}\nu(t)\,dt+$$
$$+\psi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]+$$
$$+\psi\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]-\psi(0).\qquad (3.157)$$

4°. Видоизмененная первая задача Дарбу. В этом пункте мы будем рассматривать для уравнения (2.176) в области D^- задачу, которая отличается от рассмотренной в предыдущем пункте задачи лишь тем, что второе из условий (3.148) заменено условием

$$-\omega\lambda^2(x)\,x^\beta\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\psi_1\left(\frac{t}{2}\right)\frac{dt}{(x-t)^{1-\beta}}+$$
$$+\omega\mu^2(x)(1-x)^\beta\frac{d}{dx}\int\limits_x^1\psi_2\left(\frac{1+t}{2}\right)\frac{dt}{(t-x)^{1-\beta}}=\psi(x),\qquad (3.158)$$

где

$$\omega=\frac{(2m+1)\,\Gamma^2(1-\beta)\sin\pi\beta}{2\pi\Gamma(1-2\beta)}\left(\frac{4}{2m+1}\right)^{1-2\beta},\quad \beta=\frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)},$$

$\psi_1(x)=u(x,y)$, $(x,y)\in\sigma_1$, $\psi_2(x)=u(x,y)$, $(x,y)\in\sigma_2$, а $\lambda^2(x)$, $\mu^2(x)$ и $\psi(x)$ — заданные действительные дважды дифференцируемые функции, вторые производные которых удовлетворяют условию Гёльдера, причем предполагается, что

$$\lambda^2(x)+\mu^2(x)=1.\qquad (3.159)$$

Регулярное в области $D^-=D\cap\{y<0\}$ его решение $u(x,y)$ при $^1/_2-m\leqslant\alpha<1$, удовлетворяющее условиям (3.130) в предположении, что τ'' и ν' удовлетворяют условию Гёльдера, единственно и имеет вид (3.131).

При исследовании таким образом видоизмененной первой задачи Дарбу во избежание технической сложности ограничимся рассмотрением только двух случаев: $\alpha=0$ и $\alpha={}^1/_2-m$.

Сначала пусть $\alpha=0$ и $m=1$. В этом случае (3.150) является уравнением Трикоми, условие (3.158) имеет вид

$$-\lambda^2(x)\,x^{1/6}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \psi_1\left(\frac{t}{2}\right)\frac{dt}{(x-t)^{5/6}}+$$
$$+\mu^2(x)(1-x)^{1/6}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 \psi_2\left(\frac{1+t}{2}\right)\frac{dt}{(t-x)^{5/6}}=$$
$$=\frac{\pi\Gamma(2/3)}{\Gamma^2(5/6)}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\psi(x), \qquad (3.160)$$

а решение $u(x,\ y)$ изучаемой задачи дается формулой

$$u(x,\ y)=\gamma_1\int\limits_0^1 \tau\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(1-2t)\right][t(1-t)]^{-5/6}\,dt+$$
$$+\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\gamma_2 y\int\limits_0^1 \nu\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(1-2t)\right][t(1-t)]^{-1/6}\,dt, \quad (3.161)$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(1/6)}, \qquad \gamma_2=\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(5/6)}.$$

В силу (3.161) функция $u(x,\ y)$ на кривых σ_1 и σ_2 принимает соответственно значения $(0<x<1)$

$$u\left[\frac{x}{2},\ -\left(\frac{3}{4}x\right)^{2/3}\right]=\psi_1\left(\frac{x}{2}\right)=$$
$$=\gamma_1 x^{2/3}\int\limits_0^x \frac{\tau(t)\,dt}{[t(x-t)]^{5/6}}-\gamma_2\int\limits_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{[t(x-t)]^{1/6}}, \qquad (3.162)$$

$$u\left[\frac{1+x}{2},\ -\left(\frac{3}{4}(1-x)\right)^{2/3}\right]=\psi_2\left(\frac{1+x}{2}\right)=$$
$$=\gamma_1(1-x)^{2/3}\int\limits_x^1 \frac{\tau(t)\,dt}{[(1-t)(t-x)]^{5/6}}-\gamma_2\int\limits_x^1 \frac{\nu(t)\,dt}{[(1-t)(t-x)]^{1/6}}. \qquad (3.163)$$

Применяя формулу обращения интегрального уравнения Абеля, перепишем равенства (3.162) и (3.163) в виде

$$\nu(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}}-\frac{x^{1/6}}{2\pi\gamma_2}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\psi_1\left(\frac{t}{2}\right)\frac{dt}{(x-t)^{5/6}},\quad (3.164)$$

$$\nu(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1\frac{\tau(t)\,dt}{(t-x)^{2/3}}+\frac{(1-x)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1\psi_2\left(\frac{1+t}{2}\right)\frac{dt}{(t-x)^{5/6}},$$

$$\gamma=\frac{3^{2/3}\Gamma^3(1/3)}{4\pi^2}.\qquad (3.165)$$

Из (3.164) и (3.165) в силу (3.159) и (3.160) получаем

$$\nu(x)=\frac{\sqrt{3}\,\lambda^2(x)}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}}-\frac{\sqrt{3}\,\mu^2(x)}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1\frac{\tau(t)\,dt}{(t-x)^{2/3}}+\psi(x).$$

(3.166)

Подставляя значения $u(x, 0)$, заданные в виде первого из условий (3.130), и найденные по формуле (3.166) значения $\nu(x)$ в правую часть формулы (3.131), найдем $u(x, y)$ в области D^-.

Поскольку для однородной задачи $\tau(x)=0$, $\psi(x)=0$ в силу (3.166) и $\nu(x)=0$, то единственность решения очевидна.

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha={}^1/_2-m$. Из формулы (3.131), дающей решение задачи (2.176), (3.130) при ${}^1/_2-m<\alpha<1$, после интегрирования по частям в первом слагаемом правой ее части в пределе при $\beta\to 0$ получаем решение уравнения (3.149) при $\alpha={}^1/_2-m$:

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\tau\left[x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\tau\left[x+\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]-$$
$$-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\int\limits_0^1\nu\left[x+\frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right]dt.\qquad (3.167)$$

В рассматриваемом случае краевое условие (3.158) принимает вид

$$-2\lambda^2(x)\frac{d}{dx}u\left[\frac{x}{2},\ -\left(\frac{2m+1}{2}\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{2m+1}}\right]+$$
$$+2\mu^2(x)\frac{d}{dx}u\left[\frac{1+x}{2},\ -\left(\frac{2m+1}{2}\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{2}{2m+1}}\right]=\psi(x). \quad (3.168)$$

Задача с краевым условием, близким к (3.168), была рассмотрена в работе А. М. Нахушева [2].

Подставляя значение $u(x, y)$ из формулы (3.167) в левую часть (3.168), получаем

$$\nu(x)=(\lambda^2-\mu^2)\tau'(x)+\psi(x). \quad (3.169)$$

По заданным значениям $\tau(x)$ и найденным значениям $\nu(x)$ в виде (3.169) искомое решение $u(x, y)$ получается по формуле (3.167).

Для однородной задачи $\tau(x)=0$, $\psi(x)=0$ в силу (3.169) получаем

$$\nu(x)=(\lambda^2-\mu^2)\tau'(x),$$

откуда сразу следует единственность решения рассматриваемой задачи (см. А. В. Бицадзе [7], [8]).

В случае уравнения колебаний струны (1.54) в области D, лежащей в полуплоскости $t>0$ и ограниченной отрезком $A(-r, 0)\ B(r, 0)$ оси $t=0$ и кусками AC и BC характеристик $x-t=-r$, $x+t=r$, из общего представления (1.55) решений этого уравнения непосредственно вытекает следующее свойство о среднем для $u(x, t)$:

$$u(x, 0)+u(0, r)=B_1^x u, \qquad -r\leqslant x\leqslant r, \quad (3.170)$$

где

$$B_1^x u=u\left(\frac{x-r}{2},\ \frac{x+r}{2}\right)+u\left(\frac{x+r}{2},\ \frac{r-x}{2}\right). \quad (3.171)$$

Задача определения регулярного в области D решения $u(x, t)$ уравнения (1.54), удовлетворяющего условиям

$$B_1^x u=u_0+\psi(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\nu(x), \quad (3.172)$$

где $u_0=u(0, r)$, $\psi(x)$, $\nu(x)$ — заданные величины, по существу, не отличается от начальной задачи Коши

(1.137). Очевидно, что решение этой задачи единственно и дается формулой

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}[\psi(x+t)+\psi(x-t)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\nu(t)\,dt-u_0.$$

Многомерный аналог этой задачи уже не является тривиальным обобщением гиперболических задач, о которых речь шла выше.

5°. Многомерный аналог задачи (1.54), (3.172). В этом пункте ограничимся рассмотрением уравнения

$$x_0^{2m}\Delta_x u-x_0\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}+\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x_0}=0 \qquad (3.173)$$

в верхнем полупространстве $x_0>0$ евклидова пространства E_{n+1} переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где m — натуральное число, а Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$ (ср. с уравнением (3.149)).

Обозначим через H конечную односвязную область пространства E_{n+1}, ограниченную плоскостью $x_0=0$ и характеристическим коноидом K: $|x|=r-\beta x_0^{1/\beta}$, $x_0\geqslant 0$, где $|x|$ — длина вектора x, $r=\text{const}>0$, $(2m+1)\beta=2$.

Пусть $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — фиксированный, отличный от нуля вектор из шара $|x|<r$ евклидова пространства E_n, H_α^r — подобласть области H, ограниченная коноидами K и $\tilde{K}$: $|x-\alpha|=\beta x_0^{1/\beta}$, K^r и K_α — части коноидов K и $\tilde{K}$, составляющих границу области H_α^r, $A=\|a_{jk}\|$ — квадратная $(n\times n)$-матрица, транспонированная по отношению к матрице $A'=\|a_{kj}\|$, $a_{ij}=\alpha_j/|\alpha|$, $j=1, 2, \ldots, n$, A_i — матрица, полученная из матрицы A заменой элементов i-го ее столбца нулями.

Введем операторы:

$$S_t^\alpha u\equiv\gamma(n)\int\limits_{|\xi|=t}u\left[\frac{r\xi_i\alpha}{|\alpha|\sqrt{r^2-|\alpha|^2}}+\frac{\alpha}{2}+\right.$$
$$\left.+A_i\xi\left(\frac{r}{2\beta}-\frac{|\alpha|\xi_i}{\beta\sqrt{r^2-|\alpha|^2}}\right)^\beta\right]d\omega_\xi,$$

$$S_t^0 u\equiv\gamma(n)\int\limits_{|\xi|=t}u\left[\xi,\ \left(\frac{r}{2\beta}\right)^\beta\right]d\omega_\xi,$$

$$B_n^\alpha u \equiv \begin{cases} R\left(\dfrac{\partial}{\partial R^2}\right)^{(n-1)/2} \dfrac{1}{R} S_R^\alpha u, & n \equiv 1 \pmod 2, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{\partial}{\partial R^2}\right)^{n/2} \displaystyle\int_0^R \dfrac{S_t^\alpha u}{\sqrt{R^2-t^2}}\,dt, & n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Здесь и ниже $d\omega_\xi$ — элемент сферы $|\xi| = t$ пространства E_n,

$$\gamma(n) = \sqrt{\pi^{1-n}}, \quad 2R = \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}, \quad \frac{\partial}{\partial R^2} = \frac{1}{2R}\frac{\partial}{\partial R}.$$

Очевидно, что эти операторы не зависят от индекса $i = 1, 2, \ldots, n$.

Покажем, что для любого регулярного в области H решения $u(x, x_0)$ уравнения (3.173), непрерывного в $\bar{H}$, имеет место равенство

$$u(\alpha, 0) + u[0, (r/\beta)^\beta] = B_n^\alpha u, \qquad |\alpha| < r. \tag{3.174}$$

Действительно, предположим сначала, что u_{x_j}, $j = 1, 2, \ldots, n$, и $x_0^{1/2-m} u_{x_0}$ непрерывны в $\bar{H}$. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что преобразование

$$z_0 = \frac{ry_0 + |\alpha| y_i}{2R} - \frac{r^2 + |\alpha|^2}{4R} \Leftrightarrow y_0 = \frac{rz_0 - |\alpha| z_i}{2R} + \frac{r}{2},$$

$$z_i = \frac{|\alpha| y_0 + ry_i}{2R} - \frac{r|\alpha|}{2R} \Leftrightarrow y_i = \frac{rz_i - |\alpha| z_0}{2R} + \frac{|\alpha|}{2},$$

$$z_k = y_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n,$$

где

$$y_0 = \beta x_0^{1/\beta}, \quad y = A'x \Leftrightarrow x = Ay = \alpha y_i/|\alpha| + A_i y,$$

отображает область H_α^r на область Q пространства E_{n+1} независимых переменных $z_0, z_1, \ldots, z_n$, ограниченную конусами $|z| = R - z_0$ и $|z| = R + z_0$, причем точкам $(0, (r/\beta)^\beta)$ и $(\alpha, 0)$ сопоставляются точки $(0, R)$ и $(0, -R)$, а поверхности

$$2\beta r x_0^{1/\beta} + 2\alpha x = r^2 + |\alpha|^2 \tag{3.175}$$

— плоскость $z_0 = 0$.

В переменных z_0, z функция

$$v[z, z_0]=u\left[\frac{a}{|a|}\frac{rz_i-|a|z_0}{\sqrt{r^2-|a|^2}}+\frac{a}{2}+A_i z,\right.$$
$$\left.\left(\frac{rz_0-|a|z_i}{\beta\sqrt{r^2-|a|^2}}+\frac{r}{2\beta}\right)^{\beta}\right] \tag{3.176}$$

является решением уравнения

$$v_{z_0z_0}+\Delta_z v=0. \tag{3.177}$$

Из однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (3.177) с начальными данными $v(z, 0)$, $v_{z_0}(z, 0)=$ $=v_{z_0}(z, z_0)\big|_{z_0=0}$, $|z|\leqslant R$, следует, что функция $v(z, z_0)$ в области Q представима в виде (см. Бицадзе А. В., Нахушев А. М. [3]):

$$v(z, \pm z_0)=\frac{\gamma(n)}{2}z_0\left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{(n-1)/2}\frac{1}{z_0}\int\limits_{|\xi|=z_0} v(z+\xi, 0)\,d\omega_\xi \pm$$
$$\pm\frac{\gamma(n)}{4}\left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{(n-3)/2}\frac{1}{z_0}\int\limits_{|\xi|=z_0} v_{z_0}(z+\xi, 0)\,d\omega_\xi, \tag{3.178}$$

если $n\equiv 1 \pmod 2$, и в виде

$$v(z, \pm z_0)=\frac{\gamma(n)}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{n/2}\int\limits_0^{z_0}\frac{dt}{\sqrt{z_0^2-t^2}}\int\limits_{|\xi|=t} v(z+\xi, 0)\,d\omega_\xi \pm$$
$$\pm\frac{\gamma(n)z_0}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{(n-2)/2} z_0^{n-3}\int\limits_0^{z_0}\frac{t^{2-n}dt}{\sqrt{z_0^2-t^2}}\int\limits_{|\xi|=t} v_{z_0}(z+\xi, 0)\,d\omega_\xi, \tag{3.179}$$

если $n\equiv 0 \pmod 2$, где знак плюс берется при $z_0>0$, а знак минус — при $z_0<0$.

Поскольку $u(\alpha, 0)+u[0, (r/\beta)^\beta]=v(0, -R)+v(0, R)$, то из (3.178) и (3.179) в силу (3.176) при $z=0$, $z_0=R$ и $\alpha\neq 0$ получаем (3.174). При $\alpha=0$ формула (3.174) также вытекает из (3.178) и (3.179), где на этот раз

$$v(z, z_0)=u\left[z, \left(\frac{2z_0+r}{2\beta}\right)^{\beta}\right], \qquad z=x,\ z_0=y_0-r/2.$$

Принимая теперь во внимание, что соотношения (3.178) и (3.179) имеют место для всех положительных $z_0<R$,

простым предельным переходом можно показать справедливость равенства (3.174) и для регулярных решений $u(x, x_0)$ из класса $C(\bar{H})$.

Обозначим через $H(\alpha, r)$ часть поверхности (3.175), принадлежащую H, а через $K(\alpha, r)$ — пересечение $K_\alpha \cap K^r$.

В операторе B_n^α при $n \equiv 1 \pmod 2$ участвуют значения функции $u(x, x_0)$ лишь на $K(\alpha, r)$. В случае же $n \equiv 0 \pmod 2$ в выражении оператора B_n^α участвуют значения функции $u(x, x_0)$ на $H(\alpha, r)$. На этот раз, пользуясь свойством функции Вольтерра $V(x, y_0; \xi, \xi_0)$, для волнового уравнения $\Box u \equiv u_{y_0 y_0} - \Delta_x u = 0$ легко вычислить, что

$$G_n^\alpha u \equiv B_n^\alpha u - u[0, (r/\beta)^\beta] =$$
$$= \lim_{y_0 \to 0} \frac{\partial}{\partial y_0} \int_{K_\alpha^r} \left\{ u[\xi, (\xi_0/\beta)^\beta] \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}} V(\alpha, y_0; \xi, \xi_0) - \right.$$
$$\left. - V(\alpha, y_0; \xi, \xi_0) \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}} u[\xi, (\xi_0/\beta)^\beta] \right\} dK_\alpha^r, \qquad (3.180)$$

где K_α^r — образ K^r при отображении $y_0 = \beta x_0^{1/\beta}$, $x = x_0$, $\mathcal{N}$ — конормаль, соответствующая оператору $\Box$, dK_α^r — элемент поверхности K_α^r.

Из (3.180) видно, что в выражении оператора G_n^α участвуют значения $u(x, x_0)$ только на коноиде K^r.

Заметим, что при $n = 2$ функция Вольтерра имеет вид

$$2\pi V(x, y_0; \xi, \xi_0) =$$
$$= \log\left[\left(\xi_0 - y_0 + \sqrt{|\xi_0 - y_0|^2 - |x - \xi|^2}\right)/|x - \xi|\right].$$

При $m = 1/2$ и $n = 1$ равенство (3.174) совпадает с равенством

$$u(x_1, 0) + u(0, r) = B_1^{x_1} u, \qquad |x_1| < r,$$

где

$$B_1^{x_1} u \equiv u\left(\frac{x_1 - r}{2}, \frac{x_1 + r}{2}\right) + u\left(\frac{x_1 + r}{2}, \frac{r - x_1}{2}\right),$$

которое является аналитической записью простой, но весьма важной теоремы о среднем значении для одномерного волнового уравнения

$$u_{x_0 x_0} - u_{x_1 x_1} = 0.$$

Свойство (3.174) решений (3.173) позволяет, как и в плоском случае (см. предыдущий пункт), отыскать ряд новых краевых задач для уравнения (3.173) как в области H, где оно гиперболично, так и в смешанных областях, гиперболическая часть которых совпадает с H.

Здесь мы в основном ограничимся постановкой лишь одной задачи в случае, когда $1<n\equiv 1 \pmod 2$. Найти регулярное в области H решение $u(x, x_0)$ уравнения (3.173), непрерывное в $\bar{H}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{x_0\to+0} x_0^{\frac{1}{2}-m} u_{x_0} = \nu(x), \qquad |x|\leqslant r, \tag{3.181}$$

$$B_n^x u = \psi(x), \qquad |x|\leqslant r, \tag{3.182}$$

где

$$\nu(x)\in C^{(n+1)/2}(|x|\leqslant r), \qquad \psi(x)\in C^{(n+3)/2} \quad (|x|\leqslant r).$$

Из краевого условия (3.181) в силу (3.174) имеем

$$u(x, 0)=\psi(x)-u[0, (r/\beta)^\beta], \qquad |x|\leqslant r.$$

Очевидно, функция

$$v(x, y_0)=u[x, (y_0/\beta)^\beta],$$

где $y_0=\beta x_0^{1/\beta}$, как функция переменных x и y_0 является решением волнового уравнения

$$\Delta_x v - v_{y_0y_0}=0,$$

удовлетворяющим условиям

$$v_{y_0}(x, 0)=\nu(x), \qquad v(x, 0)=\psi(x)-v(0, r), \qquad |x|\leqslant r.$$

Из формулы (3.178) легко видеть, что

$$v(0, r)=\frac{\gamma(n)}{4} r\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^{(n-1)/2}\frac{1}{r}\int\limits_{|\xi|=r}\psi(\xi)\,d\omega_\xi+$$

$$+\frac{\gamma(n)}{8}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^{(n-3)/2}\frac{1}{r}\int\limits_{|\xi|=r}\nu(\xi)\,d\omega_\xi\equiv$$

$$\equiv\lim_{y_0\to r}\left[\frac{\gamma(n)}{4}y_0\left(\frac{\partial}{\partial y_0^2}\right)^{(n-1)/2}\frac{1}{y_0}\int\limits_{|\xi|=y_0}\psi(\xi)\,d\omega_\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma(n)}{8}\left(\frac{\partial}{\partial y_0^2}\right)^{(n-3)/2}\frac{1}{y_0}\int\limits_{|\xi|=y_0}\nu(\xi)\,d\omega_\xi\right],$$

а это показывает, что задача (3.173), (3.181), (3.182) однозначно разрешима.

При $n=1$, $m=1/2$ единственное решение $u(x, x_0)$, $x=x_1$, этой задачи дается формулой (сравните с последней формулой предыдущего пункта)

$$u(x, x_0)=\frac{\psi(x+x_0)+\psi(x-x_0)}{2}-u(0, r)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-x_0}^{x+x_0}\nu(t)\,dt,$$

где

$$u(0, r)=\frac{\psi(r)+\psi(-r)}{4}+\frac{1}{4}\int\limits_{-r}^{r}\nu(t)\,dt.$$

Результаты, изложенные в настоящем пункте, взяты из совместных наших с А. М. Нахушевым работ [1], [2], [3].

Поднятые в этой главе вопросы были предметом исследования многих математиков. Мы, конечно, не в состоянии их всех назвать здесь и отсылаем читателя к монографиям Керрола и Шоуолтера [1] и М. М. Смирнова [2] для полноты библиографии.

§ 1. Задача Трикоми

1°. К истории проблемы уравнений смешанного типа. В предыдущих главах мы старались ознакомить читателя с современным состоянием теории таких классических задач для линейного уравнения в частных производных второго порядка (1.4), как задачи Дирихле, Неймана и задача с наклонной производной в эллиптическом случае, характеристическая задача и задача Коши в гиперболическом случае, первая и вторая краевые задачи в параболическом случае, а также некоторые так называемые смешанные задачи. Наряду с этим мы убедились в том, что нарушение равномерности в условиях эллиптичности и гиперболичности может повлиять на корректность постановки этих задач. Ниже будет показапо, что, когда (1.4) является уравнением смешанного типа, т. е. когда в разных частях рассматриваемой области оно принадлежит к различным типам, задачи должны быть поставлены особо.

Первые фундаментальные исследования модельного уравнения смешанного типа (T) (см. гл. I) были выполнены Трикоми [1] в начале двадцатых годов. Ему принадлежат постановка и решение следующей задачи, носящей в настоящее время название задачи Трикоми: *в области D, ограниченной дугой Жордана σ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках A $(0, 0)$, B $(1, 0)$, и отрезками AC и BC характеристик $x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 0$, $x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 1$ уравнения* (T), *выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2}, -\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\right)$, ищется регулярное решение $u(x, y)$ этого уравнения, непрерывное в $D \cup \sigma \cup AC \cup BC$ и* *удовлетворяющее условиям*

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \sigma, \tag{4.1}$$

$$u(x, y) = \psi(x), \quad (x, y) \in AC, \tag{4.2}$$

где φ *и* ψ *— заданные действительные непрерывные функции.*

Трикоми доказал существование и единственность решения этой задачи при определенных дополнительных требованиях относительно поведения частных производных u_x, u_y в $D \cup \sigma \cup AC \cup BC$, гладкости функции ψ и характера дуги σ.

Исследования Трикоми были продолжены в тридцатых годах Чибрарио [1], [2] и Геллерстедтом [1], [2], [3].

В пункте 3° § 1 гл. I было отмечено, что точки параболического вырождения уравнения (1.12) удовлетворяют условию (1.19). Будем предполагать, что коэффициенты A^{11}, A^{12}, A^{22} уравнения (1.12) нигде одновременно в нуль не обращаются, а множество точек, описываемое уравнением (1.19), представляет собой гладкую дугу Жордана, делящую область задания этого уравнения на две части, в одной из которых оно эллиптично, а в другой — гиперболично. При аналитичности коэффициентов A^{11}, A^{12}, A^{22} уравнение (1.12) является уравнением смешанного типа, если все частные производные функции $\Delta(x, y)$ до порядка $2m$ (m — неотрицательное целое число) вдоль δ равны нулю, причем в результате неособой замены независимых переменных в окрестности δ это уравнение может быть приведено к одному из видов (1.24) или (1.25) в зависимости от того, угол α между касательной к δ в каждой ее точке и выходящим из этой точки характеристическим направлением отличен от нуля или равен нулю.

Геллерстедт [1], [2], [3] перенес результаты Трикоми на случай уравнения (1.57), где m — положительное целое число, и исследовал видоизмененную задачу Трикоми, когда наряду с (4.1) носителем данных вместо (4.2) являются определенным образом подобранные отрезки характеристик этого уравнения.

Уравнения смешанного типа стали объектами систематических исследований с конца сороковых годов. Возникшие в приложениях проблемы, в частности проблемы околозвукового течения сжимаемой среды в плоской постановке (см. пункты 3°, 4°, 5° § 3 гл. I) и безмоментной теории оболочек (И. Н. Векуа [4]), описываются уравнениями смешанного типа второго порядка с двумя независимыми переменными, для которых как задача Трикоми, так и, далеко идущие ее математические обобщения имеют вполне определенный физический или геометрический смысл.

Существенно новые результаты значительной теоретической и прикладной важности были получены в этом направлении начиная с пятидесятых годов. Настоящая глава посвящена изложению некоторых из этих результатов.

2°. Постановка задачи Трикоми для уравнения (2.176). В этом пункте речь будет идти об уравнении (2.176), где m — натуральное число, а $\alpha=\text{const}$, причем $1/2-m\leqslant \alpha<1$. При $\alpha=0$ и $m=1$ из этого уравнения получается уравнение (T); когда $\alpha=0$ и вместо $2m$ показателем переменного y является $2m+2$, то из этого же уравнения получается уравнение (1.57). В случае же, когда $\alpha=1/2-m$, с учетом поведения $\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ при $y\to 0$ уравнение (2.176) можем считать редуцированным к уравнению (L).

Пусть D — конечная односвязная область плоскости переменных x, y, которая ограничена лежащей в верхней полуплоскости $y>0$ дугой Жордана σ с концами в точках A (0, 0), B (1, 0) и отрезками σ_1 и σ_2 характеристик уравнения (2.176):

$$\sigma_1\colon\ x-\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}=0$$

и

$$\sigma_2\colon\ x+\frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}=1,$$

лежащими в нижней полуплоскости $y<0$.

Части области D, в которых $y>0$ и $y<0$, обозначим через D^+ и D^-. Поскольку уравнение (2.176) эллиптично в одной из них и гиперболично в другой, их будем называть соответственно *эллиптической* и *гиперболической частями* области D, а эту последнюю — *смешанной областью*.

Под задачей Трикоми будем понимать *задачу определения регулярного в области* D *решения* $u(x, y)$ *уравнения* (2.176), *непрерывного в* $D \cup \sigma \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$ *и удовлетворяющего условиям*

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \qquad (x, y) \in \sigma, \tag{4.3}$$

$$u(x, y) = \psi(x), \qquad (x, y) \in \sigma_1, \tag{4.4}$$

$$\nu(x) = \lim_{y \to +0} y^{\alpha} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \lim_{y \to -0} (-y)^{\alpha} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \qquad 0 < x < 1, \tag{4.5}$$

где φ *— непрерывная,* ψ *— дважды непрерывно дифференцируемая заданные действительные функции, причем производная второго порядка функции* $\psi(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера. Допускается, что функция* $\nu(x)$ *может обращаться в бесконечность порядка ниже единицы на концах интервала* $0 < x < 1$.

В такой постановке задача Трикоми при $\alpha = 0$, $m = 1$ точно совпадает с сформулированной в предыдущем пункте задачей T, (4.1), (4.2), ибо в этом случае условие (4.5) автоматически будет выполнено. В случае же $\alpha = {}^1/_2 - m$ мы будем считать, что уравнение (2.176) уже приведено к виду (L), и под задачей Трикоми будем понимать *требование определения непрерывной в* $D \cup \sigma \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$ *функции* $u(x, y)$ *с непрерывными в* D *производными* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, *являющейся решением уравнения* (L) *в области* D *при* $y \neq 0$ *и принимающей наперед заданные (непрерывные) значения на* σ *и на одной из характеристик этого уравнения, например на* AC, *т. е.*

$$u(x, -x) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1/2. \tag{4.6}$$

Ниже задачу Трикоми мы будем именовать з а д а ч е й T.

3°. Принцип экстремума и единственность решения задачи T. Задачу T для уравнений (L) и (T) мы будем изучать параллельно. В обоих случаях без ограничения общности можно предполагать, что $u(A) = u(B) = 0$.

Общее решение уравнения (L), непрерывное в замкнутой области $\bar{D}^-$ с непрерывными производными до второго порядка (включительно) внутри D^-, дается известной формулой Даламбера (1.55):

$$u(x, y) = f(x+y) + f_1(x-y), \tag{4.7}$$

где $f(t)$ и $f_1(t)$ — произвольные непрерывные на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ функции, дважды непрерывно дифференцируемые при $0 < t < 1$.

Из формулы (4.7) сразу получается общее решение уравнения (L) в области D^-, удовлетворяющее условию (4.6):

$$u(x, y) = f(x+y) - f(0) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \psi'\left(\frac{x}{2}\right), \qquad y = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{4.8}$$

или, что то же самое,

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi'\left(\frac{x}{2}\right), \qquad 0 < x < 1. \tag{4.9}$$

Равенство (4.9) является основным соотношением между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на отрезке AB, принесенным из гиперболической части смешанной области D.

Формула Дарбу, дающая решение задачи Коши для уравнения (Т) в гиперболической части D^- области D, с начальными данными $u(x, y)\big|_{AB} = \tau(x)$, $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\Big|_{AB} = \nu(x)$, в силу формулы (3.107) имеет вид

$$u(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}(2t-1)\right][t(1-t)]^{-5/6}\,dt + \\ + \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \gamma_2 y \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}(2t-1)\right][t(1-t)]^{-1/6}\,dt, \tag{4.10}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(1/6)} = \frac{\sqrt[3]{4}\,\pi}{3\Gamma^3(1/3)}, \qquad \gamma_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(5/6)} = \\ = \frac{\sqrt[3]{6}\,\Gamma^3(1/3)}{4\pi^2}. \tag{4.11}$$

Приравнивая выражение (4.10) на характеристике AC к функции $\psi(x)$, получаем

$$\gamma_1 \int_0^1 \tau(2tx)\,[t(1-t)]^{-5/6}\,dt - \gamma_2 (2x)^{2/3} \int_0^1 \nu(2tx)\,[t(1-t)]^{-1/6}\,dt = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2,$$

или

$$\gamma_1 x^{2/3} \int_0^x \frac{\tau(t)\,dt}{[t(x-t)]^{5/6}} - \gamma_2 \int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{[t(x-t)]^{1/6}} = \psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{4.12}$$

Применяя формулу обращения (1.252) интегрального уравнения Абеля (1.251), из формулы (4.12) для $\tau(x)$ получаем выражение

$$\tau(x) = \psi_1(x) + \gamma \int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{1/3}}, \tag{4.13}$$

где

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi\gamma_1} x^{5/6} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\psi\left(\frac{t}{2}\right)}{t^{2/3}(x-t)^{1/6}}\,dt, \tag{4.14}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)\,\Gamma(2/3)} = \frac{3^{2/3}\,\Gamma^3(1/3)}{4\pi^2}.$$

Формула (4.13) дает в случае уравнения (Т) основное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части D^- области D.

В предположении, что $\psi(x) = 0$, формулы (4.9) и (4.13) принимают вид

$$\tau'(x) - \nu(x) = 0, \tag{4.15}$$

$$\tau(x) = \gamma \int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{1/3}}. \tag{4.16}$$

Применяя опять формулу обращения интегрального уравнения Абеля, перепишем (4.16) в виде

$$\nu(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}}. \tag{4.17}$$

Теперь легко доказать следующий п р и н ц и п э к с т р е м у м а для задачи T: *решение* $u(x, y)$ *задачи* T, *равное нулю на характеристике* AC, *положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области* $\bar{D}$ *принимает на дуге* σ *как в случае уравнения* (L), *так и в случае уравнения* (T).

В самом деле, в силу доказанного в пункте 4° § 2 гл. I принципа экстремума, решение $u(x, y)$ уравнения (L) или (T) своего экстремума в замкнутой области $\bar{D}^-$ обязательно достигает на отрезке AB оси $y=0$, а внутри области D^+ функция $u(x, y)$, очевидно, не может достигать экстремума. Предположим, что положительный максимум в замкнутой области $\bar{D}^+$ достигается во внутренней точке $P(\xi, 0)$ интервала $0<x<1$. В точке ξ, $0<\xi<1$, обязательно имеет место равенство

$$\tau'(\xi)=0. \tag{4.18}$$

Следовательно, в случае уравнения (L), в силу (4.15), мы должны иметь

$$\nu(\xi)=0. \tag{4.19}$$

В случае же уравнения (T), в силу (4.18), равенство (4.17) в точке ξ при $0<x_0<\xi$ можно переписать в виде

$$\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{3}}\nu(\xi)=\frac{2}{3}\int_0^{x_0}\frac{\tau(\xi)-\tau(t)}{(\xi-t)^{5/3}}dt+\frac{2}{3}\int_{x_0}^{\xi}\frac{\tau(\xi)-\tau(t)}{(\xi-t)^{5/3}}dt+\tau(\xi)\frac{1}{\xi^{2/3}};$$

отсюда, ввиду того, что $\tau(\xi)>0$, $\tau(\xi)-\tau(t)\geqslant 0$, получаем

$$\nu(\xi)>0. \tag{4.20}$$

Равенство (4.19) и неравенство (4.20) противоречат приведенному в пункте 2° § 2 гл. I принципу Зарембы—

Жиро, который мы дадим здесь в следующей формулировке. Пусть $u(x, y)$ — регулярное (нетривиальное) в области D^* решение уравнения

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_1\frac{\partial u}{\partial y}+c_1 u=0, \quad c_1\leqslant 0,$$

с положительно определенной внутри D^* формой $a\,dy^2+2b\,dx\,dy+c\,dx^2$. Если в точке P границы Γ^* области D^* функция $u(x, y)$ принимает свое экстремальное значение, а контур Γ^* обладает тем свойством, что через точку P можно провести кружок k, лежащий в области D^*, то в указанной точке производная $\partial u/\partial r$ по направленному к центру кружка k радиусу r (если она существует) отлична от нуля; причем в случае максимума $\partial u/\partial r<0$, а в случае минимума $\partial u/\partial r>0$.

Простое доказательство указанного выше факта опирается на существование функции Грина задачи Дирихле в случае круга. Следовательно, это доказательство годится и для уравнения (4.1), частным случаем которого являются уравнения (L) и (T).

Приведенный выше принцип экстремума имеет важное значение потому, что, во-первых, из него сразу следует единственность решения задачи T, *а во-вторых, он позволяет построить альтернирующий процесс типа известного процесса Шварца для решения задачи* T *при довольно общих предположениях.*

Принцип экстремума для задачи T в приведенной здесь форме впервые был указан и использован в случае уравнения (L) нами в 1950 г. (см. [1], [2]). Этот же принцип в случае уравнения (T) был найден на год позже в работе Жермена и Бадера [1] (см. также работы этих же авторов [2], [3], [4]).

4°. **Редукция задачи T к сингулярным интегральным уравнениям.** Сначала выясним вид функциональных соотношений между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$, принесенных из эллиптической части D^+ смешанной области, как в случае уравнения (L), так и в случае уравнения (T).

Рассмотрим элементарное решение $\log|\zeta-z|$, $\zeta=\xi+i\eta$, $z=x+iy$, $\eta>0$, $y>0$, уравнения (L). Обозначим через $G(x;\,\xi,\,\eta)$ решение уравнения (L) в области D^+ с логарифмической особенностью в точке $\zeta=x$, $0<x<1$:

$$G(x;\,\xi,\,\eta)=-\log|\zeta-x|+g(x;\,\xi,\,\eta),$$

где $g(x;\ \xi, \eta)$ — регулярная в области D^+, гармоническая относительно ξ, η функция, удовлетворяющая условиям

$$g(x;\ \xi, \eta)-\log|\zeta-x|=0, \qquad \zeta\in\sigma, \qquad (4.21)$$
$$\left.\frac{\partial g}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=0.$$

Очевидно, что $G(x;\ \xi, \eta)$ является гармонической функцией Грина с логарифмической особенностью в точке $\zeta=x$ для области $D^*=D^+\cup D_1^*\cup AB$, где D_1^* — область, расположенная симметрично D^+ относительно открытого отрезка AB действительной оси.

Предположим, что кривая σ удовлетворяет условию Ляпунова и, кроме того, частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в D^+ всюду, кроме, быть может, точек A и B, в которых по некоторым направлениям они могут обращаться в бесконечность, причем так, чтобы использованные ниже интегральные тождества (4.23) и (4.28) оставались в силе.

Соответствующие ограничения должны быть наложены, очевидно, и на функцию φ. О них речь будет идти несколько ниже в этом параграфе.

Выделим из области D^+ точку $(x, 0)$ дугой σ_ε полуокружности $|\zeta-x|=\varepsilon$, $\eta\geqslant 0$ и к оставшейся части D_ε^+ области D^+ применим тождество

$$\int\limits_{\partial D_\varepsilon^+}\left(G\frac{\partial u}{\partial\mathscr{N}}-u\frac{\partial G}{\partial\mathscr{N}}\right)ds=0, \qquad (4.22)$$

где длина дуги s отсчитывается от точки B в положительном направлении, а $\mathscr{N}$ — внутренняя нормаль границы области D_ε^+.

Принимая во внимание граничное условие (4.3), в силу (4.21) из (4.22) будем иметь

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon}\left(G\frac{\partial u}{\partial\mathscr{N}}-u\frac{\partial G}{\partial\mathscr{N}}\right)ds+$$
$$+\left(\int\limits_0^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^1\right)G\nu\,d\xi=\int\limits_\sigma\varphi\frac{\partial G}{\partial\mathscr{N}}ds. \qquad (4.23)$$

Отсюда в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\tau(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 [g(x;\ \xi, 0) - \log|\xi - x|]\,\nu(\xi)\,d\xi = \varphi_*(x), \tag{4.24}$$

где

$$\varphi_*(x) = \frac{1}{\pi}\int_\sigma \varphi\,\frac{\partial G}{\partial \mathscr{N}}\,ds. \tag{4.25}$$

Формулы (4.9) и (4.24) дают основные функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в случае задачи T для уравнения (L).

Когда σ совпадает с полуокружностью σ_0: $\left|\zeta - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\eta \geqslant 0$, функция $G(x;\ \xi, \eta)$ выражается формулой

$$G(x;\ \xi, \eta) = \log\left|\frac{x + \zeta - 2x\zeta}{x - \zeta}\right|, \qquad \zeta = \xi + i\eta,$$

и соотношение (4.24) значительно упрощается:

$$\tau(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 [\log|t - x| - \log(t + x - 2tx)]\,\nu(t)\,dt = \varphi_*(x). \tag{4.26}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что функция $|\zeta - x|^{1/3}$ при $\zeta = \xi + \frac{2}{3}i\eta^{3/2}$ $(\zeta \neq x,\ \eta > 0)$ является решением уравнения (T).

Обозначим опять через $G(x;\ \xi, \eta)$ функцию вида

$$G(x;\ \xi, \eta) = |\zeta - x|^{-1/3} + g(x;\ \xi, \eta),$$

где $g(x;\ \xi, \eta)$ является регулярным относительно ξ, η решением уравнения (T) в области D^+, удовлетворяющим условиям

$$g = -|\zeta - x|^{-1/3}, \quad \zeta \in \sigma, \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = 0. \tag{4.27}$$

Доказательство существования функции $G(x;\ \xi, \eta)$ трудности не представляет (оно требует незначительной модификации метода § 3 гл. II). В частном случае, когда σ совпадает с так называемым *нормальным контуром* σ_0: $|\zeta-1/2|=1/2$, функция $G(x;\ \xi,\ \eta)$ имеет вид

$$G(x;\ \xi,\ \eta)=|\zeta-x|^{-1/3}-|\zeta+x-2\zeta x|^{-1/3}.$$

Заметим, что нормальные контуры $|\zeta-x|=\mathrm{const}$, $\zeta=\xi+\frac{2}{3}i\eta^{3/2}$, в теории уравнения (T) играют ту же роль, что и полуокружности $|\zeta-x|=\mathrm{const}$, $\zeta=\xi+i\eta$, в теории уравнения (L).

Выделяя точку $(x,\ 0)$ из области D^+ дугой σ_ε нормального контура $|\zeta-x|=\varepsilon$, $\zeta=\xi+\frac{2}{3}i\eta^{3/2}$, и применяя для оставшейся части области D^+ формулу

$$\int \eta\left(u\frac{\partial G}{\partial \xi}-G\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)d\eta-\left(u\frac{\partial G}{\partial \eta}-G\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)d\xi=0, \qquad (4.28)$$

в пределе при $\varepsilon\to 0$ в силу (4.27) получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{1}\right)G\nu(\xi)\,d\xi-\int_\sigma u\left(\eta\frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \mathscr{N}}+\frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \mathscr{N}}\right)ds-$$
$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon} u\left(\eta\frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \mathscr{N}}+\frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \mathscr{N}}\right)ds=0.$$

Но

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\sigma_\varepsilon} u\left(\eta\frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \mathscr{N}}+\frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \mathscr{N}}\right)ds=-\frac{1}{\gamma}\tau(x),$$

где

$$\gamma=2^{-1/3}3^{-2/3}\int_0^\pi(\sin\vartheta)^{1/3}\,d\vartheta.$$

Поэтому, учитывая граничное условие (4.1), окончательно будем иметь

$$\tau(x)+\gamma\int_0^1 G(x;\ \xi,\ 0)\,\nu(\xi)\,d\xi=F^*(x), \qquad (4.29)$$

где

$$F^*=\gamma\int_\sigma \varphi\left(\eta\frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \mathscr{N}}+\frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \mathscr{N}}\right)ds. \qquad (4.30)$$

Формулы (4.13) и (4.29) являются основными функциональными соотношениями между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ для задачи T в случае уравнения (T).

В частности, когда σ совпадает с нормальным контуром σ_0: $\left|\zeta-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, $\zeta=\xi+\frac{2}{3}i\eta^{3/2}$, $\eta\geqslant 0$, вместо (4.29) получается более простое соотношение:

$$\tau(x)+\gamma\int_0^1\left[\frac{1}{|t-x|^{1/3}}-\frac{1}{(t+x-2tx)^{1/3}}\right]\nu(t)\,dt=F^*(x). \tag{4.31}$$

Очевидно, что относительно x при $0<x<1$ выражения (4.25) и (4.30) являются аналитическими функциями.

Исключая $\tau(x)$ из (4.8) и (4.26), для определения $\nu(x)$ получаем уравнение

$$\nu(x)-\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^1[\log|t-x|-\log(t+x-2tx)]\,\nu(t)\,dt=F(x), \tag{4.32}$$

где

$$F(x)=\varphi_*'(x)-2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right). \tag{4.33}$$

Предположим, что x лежит строго внутри интервала (0, 1). Очевидно, что

$$\frac{d}{dx}\int_0^1\log(t+x-2tx)\,\nu(t)\,dt=\int_0^1\frac{1-2t}{t+x-2tx}\,\nu(t)\,dt. \tag{4.34}$$

С другой стороны, при $\varepsilon\to 0$ имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_\varepsilon(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{x-\varepsilon}\log(x-t)\,\nu(t)\,dt+\int_{x+\varepsilon}^1\log(t-x)\,\nu(t)\,dt=$$

$$=I(x)=\int_0^1\log|t-x|\,\nu(t)\,dt,$$

причем предел существует равномерно относительно x.

Ясно, что существует равномерный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I'_\varepsilon(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}[\nu(x-\varepsilon)-\nu(x+\varepsilon)]\log\varepsilon-$$
$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{x-\varepsilon}\frac{\nu(t)\,dt}{t-x}+\int_{x+\varepsilon}^1\frac{\nu(t)\,dt}{t-x}\right)=-\int_0^1\frac{\nu(t)\,dt}{t-x},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Следовательно, в силу известной теоремы из классического анализа имеем

$$\frac{d}{dx}\int_0^1\log|t-x|\,\nu(t)\,dt=-\int_0^1\frac{\nu(t)\,dt}{t-x}. \tag{4.35}$$

На основании (4.34) и (4.35) уравнение (4.32) принимает вид

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=F(x). \tag{4.36}$$

Таким образом, *решение задачи* T *для уравнения* (L) *в случае, когда* σ *совпадает с полуокружностью* σ_0, *редуцировано к сингулярному интегральному уравнению* (4.36).

Вернемся теперь к функциональным соотношениям (4.13) и (4.31). В результате исключения $\tau(x)$ из этих соотношений получаем

$$\int_0^x\frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{1/3}}+\int_0^1\left[\frac{1}{|x-t|^{1/3}}-\frac{1}{(t+x-2tx)^{1/3}}\right]\nu(t)\,dt=\varphi_1^*(x), \tag{4.37}$$

где

$$\varphi_1^*=\frac{1}{\gamma}F^*(x)-\frac{1}{\gamma}\psi_1(x). \tag{4.38}$$

Применяя формулу обращения интегрального уравнения Абеля, перепишем уравнение (4.37) в виде

$$\nu(x)+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^1\nu(t)\,dt\left[\int_0^x\frac{d\xi}{|\xi-t|^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}-\right.$$
$$\left.-\int_0^x\frac{d\xi}{(\xi+t-2t\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}\right]=\frac{3}{2}F(x). \tag{4.39}$$

где

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}\,\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\varphi_1^*(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}}. \tag{4.40}$$

Когда x лежит строго внутри интервала $(0, 1)$, второй интегральный член в левой части (4.39) в результате замены переменных интегрирования $\dfrac{x-\xi}{\xi-\frac{t}{2t-1}}=z^3$, $\dfrac{x-\xi}{\frac{t}{2t-1}-\xi}=z_1^3$ можно переписать в виде

$$\frac{-\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^1\nu(t)\,dt\int_0^x\frac{d\xi}{(\xi+t-2t\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}=$$

$$=-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dx}\left\{\int_0^{1/2}\frac{\nu(t)\,dt}{(1-2t)^{1/3}}\int_0^{\left[\frac{x(1-2t)}{t}\right]^{1/3}}\frac{dz}{1+z^3}+\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^1\frac{\nu(t)\,dt}{(2t-1)^{1/3}}\int_0^{\left[\frac{x(2t-1)}{t}\right]^{1/3}}\frac{dz_1}{1-z_1^3}\right\}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\frac{\nu(t)\,dt}{t+x-2tx}. \tag{4.41}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$I_1(x)=\int_0^1\nu(t)\,dt\int_0^x\frac{d\xi}{|\xi-t|^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}=\lim_{\varepsilon\to 0}I_{1\varepsilon}(x)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{x-\varepsilon}\nu(t)\,dt\left[\int_0^t\frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}+\int_t^x\frac{d\xi}{(\xi-t)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}\right]+\right.$$

$$\left.+\int_{x+\varepsilon}^1\nu(t)\,dt\int_0^x\frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}\right\}.$$

Заменой переменного интегрирования $\xi=(x-t)z+t$ легко вычисляется интеграл

$$\int\limits_t^x \frac{d\xi}{(\xi-t)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \quad x>t.$$

С другой стороны, замена переменного $z^3=\dfrac{x-\xi}{t-\xi}$ дает

$$\int\limits_0^t \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-t)^{2/3}}=-3\int\limits_{(x/t)^{1/3}}^{\infty}\frac{dz}{1-z^3}, \quad t<x,$$

$$\int\limits_0^x \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}=-3\int\limits_{(x/t)^{1/3}}^{0}\frac{dz}{1-z^3}=$$

$$=-3\int\limits_{(x/t)^{1/3}}^{\infty}\frac{dz}{1-z^3}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad t>x.$$

Следовательно,

$$I_{1\varepsilon}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int\limits_0^{x-\varepsilon}\nu(t)\,dt+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int\limits_{x+\varepsilon}^{1}\nu(t)\,dt-$$

$$-3\left(\int\limits_0^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{1}\right)\nu(t)\,dt\int\limits_{(x/t)^{1/3}}^{\infty}\frac{dz}{1-z^3}.$$

Отсюда сразу следует существование равномерного предела

$$I_1'(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}I_{1\varepsilon}'=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\nu(x)+\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\frac{\nu(t)\,dt}{t-x}. \tag{4.42}$$

На основании (4.41) и (4.42) уравнение (4.39) записывается в виде

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=F(x). \tag{4.43}$$

Сингулярное интегральное уравнение (4.43) *эквивалентно задаче* Т *для уравнения* (Т) *в случае, когда* σ *совпадает с нормальным контуром* σ_0.

Как уже было сказано, функции $\varphi_*(x)$ и $F^*(x)$, определенные формулами (4.25) и (4.30), аналитически зависят от x при $0 < x < 1$. Выясним поведение этих функций, когда $x \to 0$ и $x \to 1$.

Сначала рассмотрим тот случай, когда σ совпадает с контуром σ_0, а функция φ непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядка.

Заметим, что функция $a+bx+cy+dxy$ является решением уравнения (T), а функция $a+bx+cy+dxy+e(x^2-y^2 \operatorname{sgn} y)$ удовлетворяет уравнению (L) при $y \neq 0$, причем она непрерывна вместе со своими производными первого порядка при переходе через прямую $y=0$.

Учитывая это обстоятельство, без ограничения общности мы можем полагать, что

$$u(A) = u(B) = u'(A) = u'(B) = 0, \tag{4.44}$$

где производные берутся по направлению касательной к контуру σ_0+AC.

В силу (4.44) функции φ и ψ можно представить в виде

$$\varphi = \eta^2\varphi_1(\zeta), \qquad \psi = \eta^2\psi_2(\zeta), \tag{4.45}$$

где $\zeta = (\xi, \eta)$ — точка контура σ_0.

В случае уравнения (L) имеем

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \mathscr{N}}\right|_{\sigma_0} = \frac{2x(1-x)}{x^2-(2x-1)\cos^2\frac{\vartheta}{2}}, \qquad 2\zeta - 1 = e^{i\vartheta}.$$

В соответствии с этим в силу (4.45) выражение $\varphi_*(x)$ принимает вид

$$\varphi_*(x) = \frac{x(1-x)}{\pi}\int\limits_0^1 \varphi_1(t)\,\frac{t^{1/2}(1-t)^{1/2}}{x^2-(2x-1)t}\,dt, \qquad t = \cos^2\frac{\vartheta}{2}. \tag{4.46}$$

Учитывая (4.45), из формул (4.14) и (4.30) аналогично получаем

$$\begin{gathered} F^*(x) = \frac{2\gamma}{\sqrt[3]{9}}\,x(1-x)\int\limits_0^1 \frac{\varphi_1(t)\,t^{1/3}(1-t)^{1/3}\,dt}{[x^2-(2x-1)t]^{7/6}}, \\ \psi_1(x) = \frac{1}{2\pi\gamma_1}\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} x^{5/6}\,\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{t^{2/3}\psi_2(t)\,dt}{(x-t)^{1/6}}. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Функция $\varphi_*(x)$ одинаково ведет себя при $x\to 0$ и $x\to 1$. Поэтому мы ограничиваемся выяснением ее поведения при $x\to 0$. Для производной $\varphi_*'(x)$ из (4.46) имеем выражение

$$\varphi_*'(x)=\frac{1-2x}{\pi x^2}\varphi_1(t_1)\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\left(1-t\frac{2x-1}{x^2}\right)^{-1}dt-$$

$$-\frac{2(1-x)}{\pi x^2}\varphi_1(t_2)\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\left(1-t\frac{2x-1}{x^2}\right)^{-2}dt+$$

$$+\frac{2(1-x)}{\pi x^3}\varphi_1(t_3)\int_0^1 t^{2/3}(1-t)^{1/2}\left(1-t\frac{2x-1}{x^2}\right)^{-2}dt. \qquad (4.47)$$

Интегралы в правой части (4.47) выражаются через гипергеометрические функции

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}F\left(a,\ b,\ c,\ \frac{2x-1}{x^2}\right)=$$

$$=\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\left(1-t\frac{2x-1}{x^2}\right)^{-a}dt.$$

Принимая во внимание известное тождество

$$F\left(a,\ b,\ c,\frac{2x-1}{x^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{2a}\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}F\left[a,\ c-b,\ 1+a-b,\ \left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right]+$$

$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{2b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}F\left[b,\ c-a,\ 1-a+b,\ \left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right],$$

заключаем, что при $x\to 0$ выражение $\varphi_*'(x)$ стремится к конечному пределу. Аналогичным рассуждением легко убеждаемся в том, что $\varphi_*''(x)$ обращается в бесконечность порядка не выше единицы. То же самое можно сказать о поведении $\varphi_*'(x)$ и $\varphi_*''(x)$ при $x\to 1$.

Принимая во внимание формулы (4.14) и (4.30), аналогично заключаем, что функция $F^*(x)+\psi_1(x)$ имеет нуль первого порядка в точке $x=0$, непрерывна вместе с производной первого порядка при $0\leqslant x\leqslant 1$, а ее вторая производная может обращаться в бесконечность порядка не выше $2/3$ в точках $x=0$ и $x=1$.

Таким образом, при принятых выше предположениях мы можем сделать следующие заключения: 1) *правая часть интегрального уравнения* (4.36) *непрерывна при* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *дважды непрерывно дифференцируема при* $0 < x < 1$, *а ее производная первого порядка может обращаться в бесконечность порядка не выше единицы в точках* $x=0$ *и* $x=1$; 2) *правая часть интегрального уравнения* (4.43) *непрерывна при* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *и имеет производные первых двух порядков при* $0 < x < 1$, *причем она сама имеет нуль порядка* $1/3$ *в точке* $x=0$, *а ее первая производная может обращаться в бесконечность порядка не выше* $2/3$ *в точке* $x=0$ *и порядка не выше* $1/3$ *в точке* $x=1$.

Вернемся опять к функциональным соотношениям (4.9) и (4.24). В результате исключения $\tau(x)$ из этих соотношений получаем интегральное уравнение для определения функции $\nu(x)$:

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt+\\+\int_0^1 K(x,\,t)\,\nu(t)\,dt=F(x), \tag{4.48}$$

где

$$K(x,\,t)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}[g(x;\,t,\,0)-\log(t+x-2tx)]. \tag{4.49}$$

При $0<\frac{x}{t}<1$ функция $K(x,\,t)$ непрерывно дифференцируема, но на концах этих интервалов она может обращаться в бесконечность. В частности, когда σ оканчивается сколь угодно малой длины дужками AA' и BB' полуокружности σ_0, функция $K(x,\,t)$ заведомо не будет иметь особенностей на концах указанных интервалов. В этом случае о поведении функции $F(x)$ можно сказать то же, что и о правой части уравнения (4.36).

Исключая $\tau(x)$ из (4.13) и (4.29) и повторяя преобразования, проведенные при выводе интегрального уравнения (4.43), получаем

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt+$$
$$+\int_0^1 K(x,\ t)\,\nu(t)\,dt=F(x),\qquad(4.50)$$

где $K(x,\ t)$ выражается через $g(x;\ t,\ 0)$.

Относительно ядра $K(x,\ t)$ в уравнении (4.50) можно сказать то же, что и в случае уравнения (4.48). Когда σ оканчивается сколь угодно малыми дугами AA' и BB' нормального контура σ_0, функция $K(x,\ t)$ непрерывно дифференцируема при $0\leqslant x\leqslant 1$, а правые части уравнений (4.43) и (4.50) ведут себя одинаково.

Если удастся определить $\nu(x)$ из полученных выше интегральных уравнений, то функцию $\tau(x)$ при $0\leqslant x\leqslant 1$ мы можем определить по формулам (4.9) и (4.13). Следовательно, *решением задачи Дирихле в области D^+ и решением задачи Коши с начальными данными*

$$u(x,\ 0)=\tau(x),\qquad \left.\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}\right|_{y=0}=\nu(x)$$

задача Т *будет полностью решена.*

Ниже мы будем пользоваться тем, что $F'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера, а это всегда будет иметь место, поскольку $\psi''(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $0\leqslant x\leqslant 1$ (см. пункт 2° настоящего параграфа).

5°. Доказательство существования решений сингулярных интегральных уравнений, полученных в предыдущем пункте. Нетрудно получить решения нужного нам вида сингулярных интегральных уравнений (4.36) и (4.43), т. е. такие решения этих уравнений, которые дифференцируемы при $0<x<1$, а при $x=0$, $x=1$ допускают особенности порядка ниже единицы в случае уравнения (4.36) и порядка ниже 2/3 в случае уравнения (4.43) (см. Трикоми [1]).

С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную задачу из теории аналитических функций: *требуется определить аналитическую в полукруге* $|2z-1|<1$, $\operatorname{Im} z>0$, *функцию* $F(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$, *непрерывную вплоть* *до границы и удовлетворяющую условиям*

$$u|_{\sigma_0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}-\lambda\frac{\partial u}{\partial y}=f(x), \quad y=0, \quad 0<x<1, \qquad (4.51)$$
$$v(0,\ 0)=0,$$

где σ_0 *— полуокружность* $|2z-1|=1$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, λ *— действительная постоянная, а* $f(x)$ *— заданная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера. Предполагается, что* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *непрерывны внутри полукруга вплоть до открытого отрезка* $0<x<1$, $y=0$, *а в точках* $z=0$, $z=1$ *они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы.*

Единственность решения этой задачи очевидна.

Поступая точно так же, как при выводе соотношения (4.26), в силу первого из условий (4.51) получаем

$$u(x,\ 0)-\frac{1}{\pi}\int_0^1[\log|t-x|-\log(t+x-2tx)]\left.\frac{\partial u(t,\ \eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}dt=0. \qquad (4.52)$$

В результате исключения $\frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial x}$ из (4.52) и в силу второго из условий (4.51) будем иметь

$$\lambda\nu_1(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu_1(t)\,dt=-f(x), \qquad (4.53)$$

где

$$\nu_1(x)=\left.\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}\right|_{y=0}, \qquad 0<x<1.$$

Таким образом, поставленная выше задача приведена к эквивалентному интегральному уравнению (4.53), решение которого $\nu_1(x)$ ищется в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера внутри интервала (0, 1) и допускающих особенность порядка ниже единицы на концах этого интервала. Имея решение уравнения (4.53), решение граничной задачи (4.51) известным образом можно редуцировать к задаче Дирихле. Однако мы поступим иначе: непосредственно построим решение указанной выше задачи и используем его для получения решения интегрального уравнения (4.53).

В силу первого из условий (4.51) заключаем, что функция $F(z)$ аналитически продолжается через σ_0 на всю верхнюю полуплоскость, причем

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{(2x-1)^2}f\left(\frac{x}{2x-1}\right), \tag{4.54}$$
$$-\infty<x<0, \quad 1<x<\infty, \quad y=0,$$

и, кроме того, на бесконечности $F'(z)$ имеет нуль второго порядка.

Обозначим через $\Phi(z)$ однозначную, аналитическую в верхней полуплоскости функцию

$$\Phi(z)=z^{\theta}(1-z)^{1-\theta}e^{i\vartheta}F'(z),$$

где $\vartheta=\operatorname{arctg}(-\lambda)$, $-\frac{\pi}{2}<\vartheta<\frac{\pi}{2}$, $\theta=\frac{-2\vartheta}{\pi}$ при $\lambda>0$, $\theta=\frac{\pi-2\vartheta}{\pi}$ при $\lambda<0$, а под $z^{\theta}(1-z)^{1-\theta}$ понимается однозначная в разрезанной вдоль $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ плоскости ветвь этой функции, положительная при $0<z<1$. Очевидно, что $\Phi(\infty)=0$.

В силу (4.54) и второго из условий (4.51) имеем

$$\operatorname{Re}\Phi(x)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(-x)^{\theta}(1-x)^{1-\theta}}{\sqrt{1+\lambda^2}}f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)\dfrac{\operatorname{sgn}\lambda}{(2x-1)^2}, & -\infty<x<0,\\ x^{\theta}(1-x)^{1-\theta}\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+\lambda^2}}, & 0<x<1,\\ -\dfrac{x^{\theta}(x-1)^{1-\theta}}{\sqrt{1+\lambda^2}}f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)\dfrac{\operatorname{sgn}\lambda}{(2x-1)^2}, & 1<x<\infty.\end{cases} \tag{4.55}$$

Хорошо известно (см., например, Н. И. Мусхелишвили [1]), что функция $F_1(z)=u_1(x, y)+iv_1(x, y)$, аналитическая в верхней полуплоскости и стремящаяся к конечному пределу при $z\to\infty$, выражается с помощью граничных значений ее действительной части $u_1(t)$ на действительной оси по формуле Шварца:

$$F_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_1(t)\,dt}{t-z}+ib, \tag{4.56}$$

где $b = \operatorname{Im} F(\infty)$, причем предполагается, что функция $u_1(t)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование несобственного интеграла в правой части (4.56).

В силу формулы Шварца (4.56) мы можем написать

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \Phi(t)\, dt}{t - z}$$

или, учитывая (4.55),

$$F'(z) = \frac{e^{-i\vartheta}}{\pi i \sqrt{1 + \lambda^2}} \int_0^1 \left(\frac{t}{z}\right)^{\theta} \left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{1-\theta} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{t-z} - \frac{\operatorname{sgn} \lambda}{t + z - 2tz}\right) f(t)\, dt. \qquad (4.57)$$

Отсюда после интегрирования находим

$$F(z) = \frac{e^{-i\vartheta}}{\pi i \sqrt{1 + \lambda^2}} \int_0^1 \left(\frac{z}{t}\right)^{1-\theta} \left(\frac{1-z}{1-t}\right)^{\theta} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{t-z} - \frac{\operatorname{sgn} \lambda}{t + z - 2tz}\right) f_1(t)\, dt, \qquad (4.58)$$

где

$$f_1 = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Применяя формулу (SP) (см. пункт 3° § 1 гл. II) *для предельных значений интеграла типа Коши при* $z \to x$, $0 < x < 1$, *и принимая во внимание тождество*

$$\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx} = \frac{t}{x}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx}\right),$$

из формулы (4.57) *получим решение* (*единственное в классе искомых решений*) *интегрального уравнения* (4.53):

$$\nu_1(x) = -\frac{\lambda}{1+\lambda^2} f(x) + \frac{1}{\pi(1+\lambda^2)} \times$$
$$\times \int_0^1 \left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1-\theta} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) f(t)\, dt \qquad (4.59)$$

при $\lambda > 0$ *и*

$$\nu_1(x) = -\frac{\lambda}{1+\lambda^2} f(x) + \\ + \frac{1}{\pi(1+\lambda^2)} \int_0^1 \left[\frac{t(1-x)}{x(1-t)}\right]^\theta \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) f(t)\,dt$$

при $\lambda < 0$.

В частности, когда $\lambda = 1$, $f(x) = -F(x)$ и $\nu_1(x) = \nu(x)$, уравнение (4.53) совпадает с уравнением (4.36), формула обращения которого получается из (4.59) (см. А. В. Бицадзе [1], [2]) и М. М. Заипулабидов [1])

$$\nu(x) = \frac{1}{2} F(x) - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right) F(t)\,dt. \qquad (4.60)$$

Если же $\lambda = \sqrt{3}$, $\nu_1(x) = x^{-1/3}\nu(x)$, $f(x) = -\sqrt{3}\, x^{-1/3} F(x)$, то уравнение (4.53) совпадает с уравнением (4.43), решение которого получается опять из формулы (4.59) (см. Трикоми [1] и Геллерстедт [1]):

$$\nu(x) = \frac{3}{4} \Bigg\{ F(x) - \\ - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx}\right) F(t)\,dt \Bigg\}. \qquad (4.61)$$

Применяя формулы обращения (4.60) и (4.61), мы можем интегральные уравнения (4.48) и (4.50) переписать в виде

$$\nu(x) + \int_0^1 K_1(x, t)\,\nu(t)\,dt = F_1(x). \qquad (4.62)$$

Когда σ оканчивается сколь угодно малыми дужками AA' и BB' кривой σ_0, ядро $K_1(x, t)$ интегрального уравнения (4.62) может иметь лишь неподвижные особенности при $x=0$, $t=0$, $x=1$, $t=1$ интегрируемого порядка. Следовательно, в этом случае задача T как для уравнения (L), так и для уравнения (T) приводится к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения этой задачи.

Если же дуга σ не удовлетворяет приведенным выше требованиям, то ядро $K(x, t)$ в уравнениях (4.48) и (4.50) при $x=0$, $t=0$, $x=1$, $t=1$, вообще, само может иметь особенность в зависимости от углов, составленных σ с осью Ox в точках A и B. Поэтому интегральное уравнение (4.62) в этом случае нуждается в дополнительном исследовании.

Функции $\nu(x)$, являющиеся решениями интегральных уравнений (4.36) и (4.43), действительно удовлетворяют всем требованиям, предъявленным к $\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0}$ в пункте 1° настоящей главы. В частности, дифференцируемость $\nu(x)$ при $0<x<1$ проверяется интегрированием по частям в формулах (4.60) и (4.61). Установленные в предыдущем пункте свойства функции $F(x)$, в свою очередь, вполне обеспечивают возможность проведения этой процедуры. Из этих же формул следует, что $\nu(x)$ при $x=0$ особенности не имеет, в то время как при $x=1$ она действительно может обращаться в бесконечность порядка 1/2 и 1/3 соответственно.

6°. Другие методы решения задачи T для уравнения (L). В этом пункте в основном речь будет идти о задаче T для уравнения (L).

Предположим сначала, что кривая σ удовлетворяет условию Ляпунова, частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ искомого решения $u(x, y)$ задачи T непрерывны в области D вплоть до открытой дуги σ, а в точках A и B они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы.

В этих предположениях из (4.8) после интегрирования получаем

$$u(x, 0)+v(x, 0)=2\psi\left(\frac{x}{2}\right), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1, \qquad (4.63)$$

где $v(x, y)$ — гармоническая в области D^+ функция, сопряженная с функцией $u(x, y)$.

Если нам удастся найти решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ задачи T, удовлетворяющие соответственно условиям

$$u_1|_\sigma = \varphi, \quad u_1|_{AC} = 0, \tag{4.64}$$

$$u_2|_\sigma = 0, \quad u_2|_{AC} = \psi, \tag{4.65}$$

то искомое решение задачи T, удовлетворяющее условиям (4.3) и (4.6), получится в виде суммы

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y).$$

Обозначим через $F_1(z)$ аналитическую в области D^+ функцию $u_1(x, y) + iv_1(x, y)$, удовлетворяющую условию $F_1(0) = 0$. В силу второго из условий (4.64), согласно с (4.63), имеем $\operatorname{Re}(1-i)F_1(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Следовательно, функция $F_1(z)$ аналитически продолжается через отрезок AB из области D^+ в симметричную с ней относительно AB область D_1^*, причем

$$F_1(z) = \begin{cases} u_1(x, y) + iv_1(x, y), & y \geqslant 0, \\ -v_1(x, -y) - iu_1(x, -y), & y \leqslant 0. \end{cases} \tag{4.66}$$

Совокупность областей D^+ и D_1^* вместе с открытым отрезком AB обозначим через D^*.

В силу первого из условий (4.64), согласно с (4.66) получаем краевые условия для функции $F_1(z)$:

$$\operatorname{Re} F_1(t)|_\sigma = \varphi(t), \quad \operatorname{Im} F_1(t)|_{\bar\sigma} = -\varphi(\bar t), \tag{4.67}$$

где $\bar\sigma$ — зеркальное отображение σ относительно действительной оси.

Таким образом, для нахождения гармонической в области D^+ функции $u_1(x, y)$ нам достаточно найти аналитическую в области D^* функцию $F_1(z)$, непрерывную в замкнутой области $\bar D^*$ и удовлетворяющую краевым условиям (4.67), причем

$$F_1(0) = 0. \tag{4.68}$$

Так как D^* симметрична относительно действительной оси и содержит ее отрезок AB, то эту область мы можем конформно отобразить на круг $|z - 1/2| < 1/2$ так, чтобы σ была во взаимно однозначном и непрерывном соответствии с верхней полуокружностью σ_0, а $\bar\sigma$ — с нижней полуокружностью $\bar\sigma_0$ этого круга. Поэтому мы с самого же начала можем предполагать, что σ совпадает с полуокружностью σ_0.

С целью нахождения аналитической в круге $|z-1/2|<1/2$ функции $F_1(z)$, удовлетворяющей условиям (4.67) и (4.68), введем новую аналитическую функцию

$$\Phi_1(z)=e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{z}{1-z}}\,F_1(z),$$

где под радикалом понимается та ветвь этой функции, для которой $\sqrt{\frac{z}{1-z}}=i+\ldots$ (при больших $|z|$).

Для функции $\Phi_1(z)$ имеем краевые условия

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\Phi_1|_{\sigma_0}&=e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\varphi(t),\\ \operatorname{Re}\Phi_1|_{\bar\sigma_0}&=e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{\frac{t}{2t-1}}{1-\frac{t}{2t-1}}}\,\varphi\left(\frac{t}{2t-1}\right).\end{aligned}\tag{4.69}$$

Но аналитическая в круге $|z-1/2|<1/2$ функция $\Phi_1(z)$, удовлетворяющая условию $\Phi_1(0)=0$, однозначно определяется с помощью краевых значений ее действительной части по формуле Шварца:

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0+\bar\sigma_0}\frac{z}{t}\,\frac{\operatorname{Re}\Phi_1(t)\,dt}{t-z},$$

откуда, учитывая (4.69), после простой замены переменного интегрирования получаем

$$F_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\varphi(t)\,dt.\tag{4.70}$$

Действительная часть функции $F_1(z)$ дает искомую функцию $u_1(x, y)$ в области D^+. В области же D^- для функции $u_1(x, y)$ имеем выражение

$$u_1(x, y)=u_1(x+y, +0).\tag{4.71}$$

Из формулы (4.71) ясно, что при $0<x+y<1$ функция $u_1(x, y)$ дифференцируема сколько угодно раз.

Повторяя только что проведенное рассуждение, легко можем убедиться в том, что для решения $u_1(x, y)$ задачи Т с нулевыми данными на характеристике AC в полукруге k: $|t-\xi| < \varepsilon, \operatorname{Im} t \geqslant 0, 0 < \xi < 1$, имеет место представление

$$u_1(x, y) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_k} \frac{\sqrt{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}}{\sqrt{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}}\frac{u(t)\,dt}{t-z} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\bar{C}_k} \frac{\sqrt{(z-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-z)}}{\sqrt{(t-\xi+\varepsilon)(\xi+\varepsilon-t)}}\frac{u(\bar t)\,dt}{t-z}\right\},$$

где C_k и $\bar{C}_k$ — верхняя и нижняя полуокружности круга k.

Из этой формулы получается своеобразная ф о р м у л а с р е д н е г о з н а ч е н и я:

$$u_1(\xi, 0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}\, u(\vartheta)\, d\vartheta, \qquad t-\xi = \varepsilon e^{i\vartheta},$$

откуда, в свою очередь, сразу следует уже доказанный в пункте 3° принцип экстремума.

Без ограничения общности можно полагать, что $u|_\sigma = 0$.

В самом деле, обозначим через $u_0(x, y)$ гармоническую в области D^+ функцию, удовлетворяющую условиям

$$u_0|_\sigma = \varphi, \qquad \left.\frac{\partial u_0}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad 0 < x < 1. \tag{4.72}$$

В силу второго из условий (4.72) функция $u_0(x, y)$ гармонически продолжается через отрезок AB в область D_1^*, причем когда $z = x+iy \in D_1^*$, то $u_0(x, y) = u_0(x, -y)$. Следовательно, $u_0(x, y)$ получается в результате решения задачи Дирихле в области D^*. Нас интересуют значения гармонической функции $u_0(x, y)$ только в области D^+. Пусть $u_0(x_1, 0) = \tau_0(x)$. Очевидно, что функция $w(x, y)$, которая совпадает с $u_0(x, y)$ в области D^+, а в области D^- равна $\frac{1}{2}[\tau_0(x+y) + \tau_0(x-y)]$, является решением задачи Т, удовлетворяющим условиям

$$w|_\sigma = \varphi, \qquad w|_{AC} = \frac{1}{2}[\tau_0(0) + \tau_0(2x)].$$

Таким образом, если $u(x, y)$ является решением задачи T, удовлетворяющим условиям (4.3) и (4.6), то разность $u(x, y)-w(x, y)=u_2(x, y)$ будет решением задачи T, удовлетворяющим условиям

$$u_2|_\sigma=0, \quad u_2|_{AC}=\psi(x)-\frac{1}{2}[\tau_0(0)+\tau_0(2x)]\equiv\psi_1(x).$$

Итак, в силу (4.8) имеем

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}=2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad y=0, \quad 0<x<1.$$

Обозначим через $F_2(z)$ аналитическую в области D^+ функцию $u_2(x, y)+iv_2(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}F_2(z)|_\sigma=0, \quad \operatorname{Re}(1-i)F_2'(x)=2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right),\\ 0<x<1, \quad \operatorname{Im}F_2(0)=0.\end{gathered} \tag{4.73}$$

Задача нахождения аналитической в области D^+ функции $F_2(z)$, удовлетворяющей условиям (4.73), конформным отображением редуцируется к случаю, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0. Но в этом случае выражение для $F_2(z)$ непосредственно получается из формулы (4.58) при $\lambda=1$ и $f_1=2\psi(t/2)$:

$$F_2(z)=\frac{2}{\pi(1+i)}\int_0^1\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt. \tag{4.74}$$

Выделяя из (4.74) действительную часть, получаем значения искомого решения $u_2(x, y)$ задачи T в области D^+. Значение же $u_2(x, y)$ в области D^- дается формулой

$$u_2(x, y)=u_2(x+y, +0)-\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{4.75}$$

Из формул (4.74) и (4.75) видно, что порядок гладкости $u_2(x, y)$ в области D^- зависит от порядка гладкости функции $\psi(x)$.

Решение задачи T для уравнения (L), при требовании дифференцируемости функции φ, можно прямо редуцировать к задаче Дирихле (см. М. А. Лаврентьев и А. В. Бицадзе [1]).

Действительно, для отыскания искомого решения $u(x, y)$ задачи Т в области D^+ достаточно найти гармоническую в области D^+ функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую граничным условиям (4.3) и (4.8). Воспользуемся конформным отображением $z=f(z_1)$, $z_1=x_1+iy_1$, области D^+ на сектор $0<\arg z_1<\pi/4$, переводящим дугу σ в луч $\arg z_1=0$, отрезок AB — в луч $\arg z_1=\pi/4$ и точки A и B — в ∞ и 0. При этом касательная производная $u(x, y)$ на σ перейдет в производную по направлению отрицательной оси Ox_1. Следовательно, для гармонической функции $u[f(z_1)]=u_1(x_1, y_1)$, в которую преобразуется функция $u(x, y)$, в силу (4.3) и (4.8) нам будут известны значения производной $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ на границе сектора $0<\arg z_1<\pi/4$, а это и есть задача Дирихле для гармонической функции $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$.

На основании доказанного в пункте 3° принципа экстремума мы можем установить существование решения задачи Т *без ограничений, сделанных в пункте 4° относительно дуги* σ. А именно, мы докажем существование решения задачи Т в предположениях, что σ является гладкой дугой Жордана, а заданная на ней функция φ лишь непрерывна.

Обозначим через σ_1 гладкую дугу Жордана с концами в точках A и B, удовлетворяющую условию Ляпунова и целиком лежащую внутри эллиптической части D^+ области D. Пусть Δ — смешанная область, ограниченная дугой σ_1 и характеристиками AC и BC уравнения (L). Будем считать (а это не ограничивает общности), что дуги σ_1 и σ вблизи точек A и B не имеют общих касательных.

Построим две последовательности функций

$$u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y), \ldots \tag{4.76}$$

и

$$v_1(x, y), \ldots, v_n(x, y), \ldots \tag{4.77}$$

со следующими свойствами. Функция $u_1(x, y)$ является решением задачи Т в области Δ:

$$u_1|_{\sigma_1}=0, \qquad u_1|_{AC}=\psi(x). \tag{4.78$_1$}$$

Функция $v_1(x, y)$ гармонична в области D^+ и удовлетворяет условиям:

$$v_1|_{\sigma}=\varphi, \qquad v_1=u_1 \quad \text{на} \quad AB. \tag{4.79$_1$}$$

Функции $u_n(x, y)$, $n=2, 3, \ldots$, являются решениями задачи T в области Δ:

$$u_n = v_{n-1} \quad \text{на} \quad \sigma_1, \; u_n = \psi(x) \quad \text{на} \quad AC, \tag{4.78$_n$}$$

а $v_n(x, y)$, $n=2, 3, \ldots$, — гармонические в D^+ функции, удовлетворяющие условиям:

$$v_n|_\sigma = \varphi, \; v_n = u_n \quad \text{на} \quad AB. \tag{4.79$_n$}$$

Кроме того, предположим, что $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_n}{\partial y}$, $n=1, 2, \ldots$, непрерывны в замкнутой области $\bar{\Delta}$ всюду, кроме, быть может, точек A и B (вблизи которых, как об этом уже было сказано при постановке задачи T, для $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ допускается особенность порядка ниже единицы).

Функции u_n и v_n мы умеем строить.

Обозначим через N наибольшее среди $\max\limits_{(x, y)\in\Delta} |u_1(x, y)|$ и $\max\limits_{(x, y)\in D^+} |v_1(x, y)|$. Из условий (4.78_1) и (4.78_2) заключаем, что

$$|u_2(x, y) - u_1(x, y)| = |v_1(x, y)| \leqslant N \quad \text{на} \quad \sigma_1. \tag{4.80}$$

Но, с другой стороны, согласно (4.78_1) и (4.78_2) имеем

$$u_2 - u_1 = 0 \quad \text{на} \quad AC.$$

Следовательно, для разности $u_2(x, y) - u_1(x, y)$ имеет место принцип экстремума, в силу которого, согласно (4.80), получается оценка

$$|u_2(x, y) - u_1(x, y)| \leqslant N, \qquad (x, y) \in \Delta.$$

В силу (4.79_1) и (4.79_2) имеем

$$v_2 - v_1 = 0 \quad \text{на} \quad \sigma, \qquad v_2 - v_1 = u_2 - u_1 \quad \text{на} \quad AB.$$

Отсюда на основании известных свойств гармонических функций имеем

$$|v_2 - v_1| \leqslant Nq, \qquad 0 < q < 1, \quad \text{на} \quad \sigma_1.$$

Продолжая это рассуждение шаг за шагом, получим

$$|u_n - u_{n-1}| \leqslant Nq^{n-2} \quad \text{на} \quad \sigma_1 \text{ и на } AB, \tag{4.81}$$

$$|v_n - v_{n-1}| \leqslant Nq^{n-2} \text{ на } AB, \; |v_n - v_{n-1}| \leqslant Nq^{n-1} \text{ на } \sigma_1. \tag{4.82}$$

На основании (4.81) и (4.82) заключаем, что ряды

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots, \tag{4.83}$$

$$v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \ldots \tag{4.84}$$

абсолютно и равномерно сходятся к гармоническим функциям $u(x, y)$ и $v(x, y)$ соответственно в эллиптических частях областей Δ и D.

Так как $u_n = v_{n-1}$ на σ_1 и $u_n = v_n$ на AB, то отсюда заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(x, y) = u(x, y) = v(x, y)$ в эллиптической части области Δ. Следовательно, $v(x, y)$ является аналитическим продолжением $u(x, y)$ из эллиптической части области Δ в эллиптическую часть области D, причем $v(x, y) = \varphi$ на σ.

Ввиду того, что $u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y) = 0$ на AC, в гиперболической части области Δ имеем

$$u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y) = u_n(x + y, +0) - u_{n-1}(x + y, +0).$$

Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (4.83) и в гиперболической части области Δ. Так как $u_n(x, y) = \psi(x)$ на AC, то $u(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x, y) = \psi(x)$ на AC.

Рассмотрим теперь функцию $u_n^*(x, y)$, гармонически сопряженную с $u_n(x, y)$ в эллиптической части области Δ, причем $u_n^*(0, 0) = 0$.

Из равенства $u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y) = 0$ на AC заключаем: $u_n(x, 0) - u_{n-1}(x, 0) + u_n^*(x, 0) - u_{n-1}^*(x, 0) = 0$, $0 < x < 1$. Отсюда, в свою очередь, следует, что аналитическим продолжением $u_n(x, y) - u_{n-1}(x, y)$ в области, симметричной эллиптической части области Δ относительно действительной оси, является функция $-u_n^*(x, -y) + u_{n-1}^*(x, -y)$. На основании этого заключаем, что область сходимости ряда $u_2 - u_1 + (u_3 - u_2) + \ldots$ расширяется из эллиптической части области Δ ниже AB. Поэтому существуют производные

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=+0} = \nu(x) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)_{y=+0}$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=+0} = \tau'(x) = \lim_{n\to\infty} \tau_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)_{y=+0}.$$

Но в гиперболической части области Δ имеем

$$u_n(x,\ y) = \frac{1}{2}\tau_n(x+y) + \frac{1}{2}\tau_n(x-y) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu_n(t)\,dt, \quad (4.85)$$

где

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)_{y=+0} = \nu_n(x), \qquad \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)_{y=+0} = \tau_n'(x). \qquad (4.86)$$

Предельным переходом из (4.85) и (4.86) получим

$$u(x,\ y) = \frac{1}{2}\tau(x+y) + \frac{1}{2}\tau(x-y) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu(t)\,dt \quad (4.87)$$

и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=-0} = \tau'(x), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=-0} = \nu(x).$$

Таким образом, *функция* $u(x, y)$, *которая является суммой ряда* (4.83) *в эллиптической части области* D, *а в гиперболической части этой области представлена формулой* (4.87), *является искомым решением задачи* Т.

Приведенный выше альтернирующий метод решения задачи Т содержится в диссертационной работе автора [1], которая была защищена весной 1951 года. Этот метод без всякого изменения применим для построения решения задачи Т и в случае уравнения Трикоми (Т) (см. Жермен и Бадер [2], [4]).

Разработка конструктивных способов построения приближенных решений задачи Т имеет важное значение.

Приближенное решение задачи Т как в случае уравнения (L), так и в случае уравнения (Т) может быть получено методом конечных разностей (см., например, работы З. И. Халилова [1], В. Г. Карманова [1], О. А. Ладыженской [1] и А. Ф. Филиппова [1]), но на этом мы здесь останавливаться не будем.

§ 2. Некоторые примеры и простые обобщения

1°. Задача Т в случае, когда D^+ представляет собой полуполосу. Предположим, что эллиптическая часть D^+ смешанной области D совпадает с верхней полуполосой, ограниченной прямыми $x=0$ и $x=1$, и ищется решение

$u(x, y)$ задачи Т для уравнения (L) с нулевыми условиями на эллиптической части границы области D, стремящееся к нулю при $y \to \infty$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и принимающее заданные значения $\psi(x)$ на характеристике AC (см. Г. В. Руднев [1]).

В этом случае в силу (4.63) построение решения задачи Т элементарным конформным отображением приводится к задаче определения аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функции $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ стремящейся к конечному пределу при $z \to \infty$, непрерывной вплоть до границы и удовлетворяющей условиям

$$\begin{gathered} u(x, 0) = 0, \qquad -\infty < x \leqslant 0, \quad 1 \leqslant x < \infty, \\ u(x, 0) + v(x, 0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad \varphi(0) = 0. \end{gathered} \tag{4.88}$$

В силу (4.88) для функции

$$\Phi(z) = \frac{(1 - i) F(z)}{\sqrt[4]{z^3(1 - z)}},$$

где под $\sqrt[4]{z^3(1 - z)}$ понимается однозначная в разрезанной вдоль $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ плоскости ветвь этой функции, положительная при $0 < z < 1$, имеем граничные условия

$$\operatorname{Re} \Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt[4]{x^3(1 - x)}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & -\infty < x < 0, \quad 1 < x < \infty, \end{cases}$$

$$\operatorname{Im} \Phi(\infty) = 0.$$

На основании формулы (4.56) для определения функции $F(z)$ будем иметь (см. А. В. Бицадзе [1])

$$F(z) = \frac{1}{\pi i(1 - i)} \int_0^1 \sqrt[4]{\frac{z^3(1 - z)}{t^3(1 - t)}} \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z}.$$

Дальнейшие вычисления для получения явного выражения искомого решения трудности не представляют.

2°. Задача T_1. Как и в предыдущем параграфе, обозначим через D область, ограниченную линией σ и характеристиками AC и BC уравнения (L). Пусть $E_k(a_k, 0)$, $k = 1, \ldots, n$, $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 1$, — заданные точки отрезка AB. Очевидно, что точки $A_k\left(\frac{1}{2} a_k, -\frac{1}{2} a_k\right)$,

$B_k\left(\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}a_k-\frac{1}{2}\right), k=0,\ldots,n+1$ $(a_0=0, a_{n+1}=1)$, лежат на характеристиках AC и BC соответственно.

Задача T_1. *Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям: 1) $u(x, y)$ является решением уравнения (L) в области D всюду, кроме точек отрезка AB действительной оси и характеристик E_kA_k, E_kB_k; 2) непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, а частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывно склеиваются по всем точкам отрезка AB, кроме, быть может, точек A, $E_1, \ldots, E_n$, B, в которых они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы; 3) принимает заданные значения*

$$u=\varphi \quad \text{на} \quad \sigma, \tag{4.89}$$

$$u=\psi_k \quad \text{на} \quad A_kA_{k+1} \text{ при четных } k, \tag{4.90}$$

$$u=\psi_k \quad \text{на} \quad B_kB_{k+1} \text{ при нечетных } k, \tag{4.91}$$

где φ и ψ_k $(k=0, \ldots, n)$ — заданные функции.

Заметим, что при $n=0$ условия (4.91) отпадают, а из (4.90) остается лишь одно условие: $u=\psi_0(x)$ на AC. Следовательно, задача T_1 является непосредственным обобщением задачи T.

Задача типа T_1 в случае $n=1$ впервые была поставлена и исследована в работе Геллерстедта для уравнения (1.57).

При исследовании задачи T_1 по сравнению с задачей T принципиальных затруднений не возникает.

В силу (4.90) и (4.91) заключаем, что имеют место равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=2\frac{d}{dx}\psi_{2k}\left(\frac{x}{2}\right), \quad y=0, \quad a_{2k}<x<a_{2k+1}, \tag{4.92}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2\frac{d}{dx}\psi_{2k-1}\left(\frac{1+x}{2}\right), \quad a_{2k-1}<x<a_{2k}. \tag{4.93}$$

Когда $\psi_k=0, k=0; \ldots, n$, мы на основании (4.92) и (4.93), так же как и в пункте 3°, заключаем, что решение $u(x, y)$ задачи T_1 отличного от нуля экстремума в области $\bar{D}$ не может достигать в интервалах $a_k<x<a_{k+1}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ отрезка AB. Решение $u(x, y)$ не может иметь отличного от нуля экстремума и в точках E_k $(a_k, 0)$. В самом деле, вспомним (см. пункт 5° § 4 гл. III) следующее

простое свойство решения $u(x, y)$ уравнения колебаний струны:

$$u(M_1)+u(M_3)=u(M_2)+u(M_4), \tag{4.94}$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 — последовательные вершины характеристического прямоугольника.

Когда n — число четное, в силу (4.94) заключаем, что $u(a_k, 0)=0$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим теперь случай, когда n — число нечетное. В силу (4.94) на этот раз заключаем, что $u(a_1, 0)= =\ldots=u(a_n, 0)$. Предположим, что в точках E_k функция $u(x, y)$ достигает отличного от нуля экстремума. Выделим одну из этих точек E_k из эллиптической части D^+ области D линией уровня Γ: $u(x, y)=\text{const}$ с концами на отрезке AB и целиком лежащей в области D^+. К области, ограниченной линией Γ и отрезком действительной оси, применим формулу

$$\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\int(u-\text{const})\frac{\partial u}{\partial\mathcal{N}}ds,$$

где $\mathcal{N}$ — внутренняя нормаль. Из этой формулы, в силу равенств $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $a_{2k}<x<a_{2k+1}$, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $a_{2k-1}< <x<a_{2k}$, заключаем, что $u(x, y)=\text{const}$ во всей области D^+, а это исключается, если $\varphi\neq 0$.

Таким образом, решение задачи T_1 с нулевыми данными (4.90) и (4.91) достигает отличного от нуля экстремума в замкнутой области D^+ на дуге σ (принцип экстремума для задачи T_1). Из этого принципа сразу следует, что задача T_1 не может иметь более одного решения.

Переходим теперь к доказательству существования решения задачи T_1.

Предварительно заметим, что, так же как и в случае задачи T, без ограничения общности, условие (4.89) можно заменить однородным условием

$$u=0 \quad \text{на} \quad \sigma. \tag{4.95}$$

Дополнительно будем предполагать, что σ — гладкая дуга, удовлетворяющая условию Ляпунова, а $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}^+$ всюду, кроме, быть может, точек A, E_1, ..., E_n, B.

Обозначим через $\Phi(z)$ функцию $u(x, y)+iv(x, y)$, аналитическую в области D^+ и удовлетворяющую условию $\Phi(0)=0$.

На основании условий Коши—Римана, согласно (4.92) и (4.93), получаем

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(1-i)\Phi'(x)=f(x), && a_{2k}<x<a_{2k+1}, \\ &\operatorname{Im}(1-i)\Phi'(x)=-f(x), && a_{2k-1}<x<a_{2k}, \end{aligned} \tag{4.96}$$

где

$$f(x)=\begin{cases} 2\dfrac{d}{dx}\psi_{2k}\left(\dfrac{x}{2}\right), & a_{2k}<x<a_{2k+1}, \\ -2\dfrac{d}{dx}\psi_{2k-1}\left(\dfrac{1+x}{2}\right), & a_{2k-1}<x<a_{2k}. \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи T_1 приведено к определению аналитической в области D^+ функции $\Phi(z)$ по краевым условиям (4.95) и (4.96). Так же как и в предыдущем параграфе, конформным отображением можно достигнуть того, чтобы σ совпало с полуокружностью σ_0.

Итак, будем предполагать, что σ совпадает с σ_0. В этом случае в силу (4.95) заключаем, что $\Phi(z)$ аналитически продолжается на всю верхнюю полуплоскость, причем

$$\begin{gathered} \operatorname{Im}(1-i)\Phi'(x)=-\frac{1}{(2x-1)^2}f\left(\frac{x}{2(2x-1)}\right), \\ -\infty<x<a_{2j},\quad b_{2j+1}<x<\infty,\quad b_{2k+1}<x<b_{2k}, \\ \operatorname{Re}(1-i)\Phi'(x)=\frac{1}{(2x-1)^2}f\left(\frac{x}{2(2x-1)}\right),\quad b_{2k}<x<b_{2k-1}, \end{gathered} \tag{4.97}$$

где предполагается, что $a_{2j}<\frac{1}{2}<a_{2j+1}$, $b_k=\frac{a_k}{2a_k-1}$ (решение, соответствующее случаям $a_{2j}=1/2$ или $a_{2j+1}=1/2$, получается из выведенной ниже формулы предельным переходом).

Функция $\Phi'(z)$, удовлетворяющая условиям (4.96), (4.97), выписывается в квадратурах (см. Н. И. Мусхелишвили [1]):

$$(1-i)\Phi'(z)=\frac{1}{\pi_1}\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_2(t)}{R_1(t)}\frac{g(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{R_1(z)R_2(z)}\sum_{l=0}^{2m-1}c_l z^l, \tag{4.98}$$

где c_i — произвольные действительные постоянные, а $R_1(z)$ и $R_2(z)$, например, при $n=2m$ даются формулами

$$R_1(z)=\sqrt{z\prod_1^m(z-a_{2k})(z-b_{2k})};$$

$$R_2(z)=\sqrt{(z-1)\prod_1^m(z-a_{2k-1})(z-b_{2k-1})},$$

причем под $\frac{R_1(z)}{R_2(z)}$ понимается ветвь этой функции, аналитическая в разрезанной вдоль (a_{2k}, a_{2k+1}), (b_{2k}, b_{2k-1}) плоскости и принимающая значение 1 на бесконечности. Функция $\Phi(z)$ определяется при помощи интегрирования. В силу единственности решения задачи T_1 входящие в (4.98) постоянные c_i всегда можно подобрать так, чтобы $u(x, y)$ была ограниченной и вблизи точек $z=a_{2k-1}$, $z=b_{2k-1}$.

После того, как $u(x, y)$ найдена в области D, построение ее значения в гиперболической части области D трудности не представляет.

Так же, как и в случае задачи T, принцип экстремума позволяет доказать существование решения задачи T_1 в общем случае, т. е. без дополнительных ограничений, сделанных выше относительно поведения частных производных искомой функции в замкнутой области $\bar{D}$ и гладкости дуги σ.

Некоторые задачи, близкие по природе задаче T_1, были изучены Г. К. Каратопраклиевым [1].

3°. Задача T_2. Пусть теперь D — двусвязная смешанная область, ограниченная простыми дугами σ_1 и σ_2, лежащими в верхней полуплоскости $y>0$, и характеристиками AC, CB_1, BC_1 и A_1C_1 уравнения (L).

Не представляет трудности изучение следующей смешанной задачи, названной в нашей работе [1] задачей T_2. *Определить функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:* 1) *$u(x, y)$ является решением уравнения* (L) *в области D при $y\neq 0$;* 2) *непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, а частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывно склеиваются по всем точкам открытых отрезков AB и A_1B_1, причем в точках A, B, A_1, B_1 они могут обращаться в бесконеч-*

ность порядка ниже единицы; 3) *удовлетворяет граничным условиям*

$$u|_{\sigma_1}=\varphi,\quad u|_{\sigma_2}=\varphi_1,\quad u|_{AC}=\psi,\quad u|_{A_1C_1}=\psi_1, \tag{4.99}$$

где φ, φ_1, ψ, ψ_1 — *заданные функции.*

Очевидно, что решение задачи T_2, равное нулю на характеристике AC, не может достигать отличного от нуля экстремума на открытых отрезках AB и A_1B_1 оси x-ов (принцип экстремума). Отсюда непосредственно следует единственность решения задачи T_2.

Переходим к построению решения задачи T_2. Для простоты будем предполагать, что σ_1: $x^2+y^2=q$, σ_2: $x^2+y^2=q^{-1}$, AC: $x+y=-q^{-1/2}$, A_1C_1: $x-y=q^{1/2}$, $0<q<1$, и

$$\varphi\equiv\varphi_1\equiv 0. \tag{4.100}$$

Общее решение уравнения (L), удовлетворяющее последним двум из условий (4.99), в гиперболической части D^- области D представляется в виде

$$u(x,\ y)=f(x+y)+\psi\left(\frac{x-y-q^{-1/2}}{2}\right)-f(-q^{-1/2}), \tag{4.101}$$

где f — произвольная дважды дифференцируемая функция.

Из (4.101) имеем

$$u(x,\ 0)=f(x)+\psi\left(\frac{x-q^{-1/2}}{2}\right)-f(-q^{-1/2}),$$
$$-q^{-1/2}\leqslant x\leqslant -q^{1/2}, \tag{4.102}$$
$$q^{1/2}\leqslant x\leqslant q^{-1/2}.$$

Обозначим через $\Phi(z)$ аналитическую в области D^+ функцию $u(x,\ y)+iv(x,\ y)$, $v(-q^{-1/2},\ 0)=0$.

В силу условий Коши—Римана и требования непрерывности $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ при переходе через AB и A_1B_1 из (4.101) следует тождество

$$\frac{\partial v(x,\ 0)}{\partial x}=-f'(x)+\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x-q^{-1/2}}{2}\right).$$

Отсюда после интегрирования получаем

$$v(x,\ 0) = -f(x) + \psi\left(\frac{x-q^{-1/2}}{2}\right) + f(-q^{-1/2}),$$
$$-q^{-1/2} \leqslant x \leqslant -q^{1/2}, \quad (4.103)$$

$$v(x,\ 0) = -f(x) + \psi\left(\frac{x-q^{-1/2}}{2}\right) + f(q^{1/2}) -$$
$$-\psi\left(\frac{q^{1/2}-q^{-1/2}}{2}\right) + v(q^{1/2},\ 0), \quad (4.104)$$
$$q^{1/2} \leqslant x \leqslant q^{-1/2}.$$

На основании (4.102), (4.103) и (4.104) имеем

$$\operatorname{Re}(1-i)\,\Phi(x) = 2\psi\left(\frac{x-q^{-1/2}}{2}\right), \quad -q^{-1/2} \leqslant x \leqslant -q^{1/2}, \quad (4.105)$$

$$\operatorname{Re}(1-i)\,\Phi(x) = 2\psi\left(\frac{x-q^{-1/2}}{2}\right) + c, \quad q^{1/2} \leqslant x \leqslant q^{-1/2}, \quad (4.106)$$

где c — произвольная действительная постоянная.

Согласно (4.100) заключаем, что функция $\Phi(z)$ аналитически продолжается на всю верхнюю полуплоскость, причем

$$\Phi(q^2 z) = \Phi(z).$$

Поэтому в силу (4.105) и (4.106) можем написать

$$\operatorname{Re}(1-i)\Phi(x) = \begin{cases} 2\psi\left(\dfrac{q^{2n}x - q^{-1/2}}{2}\right), & -q^{-\frac{4n+1}{2}} \leqslant x \leqslant -q^{-\frac{4n-1}{2}}, \\ 2\psi\left(\dfrac{q^{2n}x - q^{-1/2}}{2}\right) + c, & q^{-\frac{4n-1}{2}} \leqslant x \leqslant q^{-\frac{4n+1}{2}}, \end{cases}$$

$$\operatorname{Re}(1-i)\,\Phi(x) = \begin{cases} 2\psi\left(\dfrac{q^{\frac{1}{2n+1}}x - q^{-1/2}}{2}\right), & -q^{-\frac{4n+3}{2}} \leqslant x \leqslant -q^{-\frac{4n+1}{2}}, \\ 2\psi\left(\dfrac{q^{\frac{1}{2n+1}}x - q^{-\frac{1}{2}}}{2}\right) + c, & q^{-\frac{4n+1}{2}} \leqslant x \leqslant q^{-\frac{4n+3}{2}}, \end{cases}$$
$$n = \ldots, -1,\ 0,\ 1,\ \ldots$$

Используя прием, примененный в пункте 5° предыдущего параграфа, на основании этих условий заключаем, что решением этой задачи является функция

$$\Phi(z)=\frac{2X(z)}{\pi(1+i)}\left(\int\limits_{-q^{-1/2}}^{-q^{1/2}}+\int\limits_{q^{1/2}}^{q^{-1/2}}\right)\frac{\psi\left(\frac{t-q^{-1/2}}{2}\right)}{X^+(t)}K(t,\ z)\,dt+$$

$$+ic\frac{X(z)}{\pi(1+i)}\int\limits_{q^{1/2}}^{q^{-1/2}}\frac{K(t,\ z)}{X^+(t)}\,dt+(1-i)\,c_0X(z),$$

где

$$X(z)=\left\{\frac{(1+q^{1/2}z)(1-q^{-1/2}z)}{(1+q^{-1/2}z)(1-q^{1/2}z)}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_1^{\infty}\frac{\left(1+q^{\frac{4n+1}{2}}z\right)\left(1+q^{\frac{4n-1}{2}}z^{-1}\right)\left(1-q^{\frac{4n+1}{2}}z^{-1}\right)\left(1-q^{\frac{4n-1}{2}}z\right)}{\left(1+q^{\frac{4n-1}{2}}z\right)\left(1+q^{\frac{4n+1}{2}}z^{-1}\right)\left(1-q^{\frac{4n-1}{2}}z^{-1}\right)\left(1-q^{\frac{4n+1}{2}}z\right)}\right\}^{1/2}, \tag{4.107}$$

$$K(t,\ z)=\frac{1}{t-z}+$$

$$+\sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{t-q^{2n}z}+\frac{1}{t-q^{-2n}z}-\frac{1}{t(1-q^{2n-1}tz)}-\frac{1}{t(1-q^{-(2n-1)}tz)}\right), \tag{4.108}$$

а c_0 — произвольная действительная постоянная.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что

$$X(q^2z)=X(z),\qquad X\left(\frac{1}{qz}\right)=iX(z),$$

причем

$$X^+(t)=-X^-(t)$$

$$\text{при}\quad -q^{-\frac{4n+1}{2}}<t<-q^{-\frac{4n-1}{2}},\quad q^{-\frac{4n-1}{2}}<t<q^{-\frac{4n+1}{2}},$$

$$X^+(t)=X^-(t)$$

$$\text{при}\quad -q^{-\frac{4n+3}{2}}<t<-q^{-\frac{4n+1}{2}},\quad q^{-\frac{4n+1}{2}}<t<q^{-\frac{4n+3}{2}}.$$

Функции $X(z)$ и $K(t,\ z)$ выражаются через тэта-функции. В самом деле, введем обозначения

$$q^{1/2}z=\zeta^2=e^{2i\pi\alpha}.$$

В этих обозначениях (4.107) принимает вид

$$X(z)=\left\{\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2}\prod_1^\infty\frac{(1+q^{2n}\zeta^2)(1+q^{2n}\zeta^{-2})(1-q^{2n-1}\zeta^{-2})(1-q^{2n-1}\zeta^2)}{(1+q^{2n-1}\zeta^2)(1+q^{2n-1}\zeta^{-2})(1-q^{2n}\zeta^{-2})(1-q^{2n}\zeta^2)}\right\}^{1/2}.$$

Отсюда, в силу известных свойств тэта-функций

$$\prod_1^\infty(1+q^{2n}\zeta^2)(1+q^{2n}\zeta^{-2})=\frac{\vartheta_2(\alpha)}{\beta q^{1/4}}\frac{1}{\zeta+\zeta^{-1}},$$

$$\prod_1^\infty(1-q^{2n}\zeta^2)(1-q^{2n}\zeta^{-2})=\frac{\vartheta_1(\alpha)\,i}{\beta q^{1/4}(\zeta-\zeta^{-1})},$$

$$\prod_1^\infty(1-q^{2n-1}\zeta^2)(1-q^{2n-1}\zeta^{-2})=\frac{\vartheta_0(\alpha)}{\beta},$$

$$\prod_1^\infty(1+q^{2n-1}\zeta^2)(1+q^{2n-1}\zeta^{-2})=\frac{\vartheta_3(\alpha)}{\beta},$$

$$\beta=\prod_1^\infty(1-q^{2n}),$$

получаем

$$X(z)=\left[-i\,\frac{\vartheta_0(\alpha)\,\vartheta_2(\alpha)}{\vartheta_1(\alpha)\,\vartheta_3(\alpha)}\right]^{1/2}.$$

Аналогично упрощается представленное формулой (4.108) выражение для $K(t,\ z)$:

$$K(t,\ z)=\frac{1}{t-z}+$$

$$+\sum_1^\infty\left[\frac{1}{t\left(1-q^{2n}\frac{z}{t}\right)}-\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}\frac{t}{z}}-\frac{1}{t(1-q^{2n-1}tz)}+\frac{q^{2n-1}}{t^2z\left(1-q^{2n-1}\frac{1}{tz}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{t-z}+\sum_1^\infty\left[\frac{q^{2n}\frac{z}{t^2}}{1-q^{2n}\frac{z}{t}}-\frac{q^{2n}}{z\left(1-q^{2n}\frac{t}{z}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{q^{2n-1}z}{1-q^{2n-1}tz}+\frac{q^{2n-1}}{t^2z\left(1-q^{2n-1}\frac{1}{tz}\right)}\right]=\frac{d}{dt}\log(t-z)\times$$

$$\times\prod_1^\infty\left(1-q^{2n}\frac{z}{t}\right)\left(1-q^{2n}\frac{t}{z}\right)(1-q^{2n-1}tz)\left(1-q^{2n-1}\frac{1}{tz}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\log\frac{-t\sqrt{tz}\,\vartheta_0(\delta)\,\vartheta_1(\gamma)}{\beta^2q^{1/4}},$$

где
$$z/t = e^{2i\pi\gamma}, \qquad tz = e^{2i\pi\delta},$$
причем берется главная ветвь логарифма.

Выражение $\Phi(z)$ содержит две произвольные постоянные: c и c_0. В силу единственности решения задачи T_2 эти постоянные однозначно определяются из требования ограниченности функции $u(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z)$ вблизи точек B и B_1.

Построение функции $u(x, y)$ в гиперболической части D^- области D трудности не представляет.

4°. Задача T_3. Пусть D обозначает смешанную область, рассмотренную в пункте 2° предыдущего параграфа при постановке задачи T для уравнения (L).

Задача T_3 заключается в следующем: *требуется определить функцию* $u(x, y)$ *со следующими свойствами:* 1) $u(x, y)$ *является решением уравнения* (L) *в области* D *при* $y \neq 0$; 2) *непрерывна в замкнутой области* $\bar{D}$ *и имеет первые производные, непрерывные в этой же области всюду, кроме, быть может, точек* A *и* B, *вблизи которых* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы*; 3) *удовлетворяет краевым условиям*
$$\frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}} = \varphi \text{ на открытой дуге } \sigma, \tag{4.109}$$
$$u = \psi(x) \text{ на } AC, \tag{4.110}$$
где $\mathscr{N}$ — *нормаль к* σ, φ — *заданная непрерывно дифференцируемая функция,* ψ — *дважды дифференцируемая функция, причем* $\psi(0) = 0$.

Ясно, что решение задачи T_3, принимающее нулевые значения на характеристике AC, не может достигать отличного от нуля экстремума на открытом отрезке AB оси x-ов. Отсюда непосредственно следует единственность решения задачи T_3.

Переходим к доказательству существования решения этой задачи.

Предварительно заметим, что в условии (4.109) без нарушения общности можно полагать, что
$$\frac{\partial u}{\partial \mathscr{N}} = 0 \quad \text{на} \quad \sigma. \tag{4.111}$$

В самом деле, рассмотрим функцию $w(x, y) = u(x, y) - u_1(x, y)$, где $u(x, y)$ — искомое решение задачи T_3, а $u_1(x, y)$ — решение хорошо известной смешанной задачи

$$\frac{\partial u_1(x, y)}{\partial \mathscr{N}} = \varphi \quad \text{на} \quad \sigma, \quad u(x, y) = 0 \quad \text{на} \quad AB$$

теории гармонических функций.

Поскольку $u_1(x, y)$ определяется единственным образом, решение задачи T_3 приводится к нахождению функции $w(x, y)$, для которой условие (4.109) имеет вид (4.111).

Обозначим через $F(z)$ аналитическую в эллиптической части D^+ области D функцию $v(x, y) + iu(x, y)$, где $u(x, y)$ — искомое решение задачи T_3, а $v(0, 0) = 0$. В силу условия (4.111) заключаем, что

$$v = 0 \quad \text{на} \quad \sigma.$$

Так как общее решение уравнения (L), удовлетворяющее условию (4.110) в гиперболической части D^- области D, имеет вид

$$u(x, y) = f(x + y) + \psi\left(\frac{x - y}{2}\right),$$

то, учитывая требование непрерывности $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ и условия Коши—Римана, получаем

$$v(x, 0) - u(x, 0) = -2\psi(x/2), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Таким образом, задача T_3 будет решена, если удастся определить функцию $F(z)$, аналитическую в области D^+ и удовлетворяющую условиям

$$\operatorname{Re} F(z) = 0 \quad \text{на} \quad \sigma, \tag{4.112}$$

$$\operatorname{Re}(1 + i) F(z) = v(x, 0) - u(x, 0) = -2\psi(x/2), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{4.113}$$

Теперь, если будем предполагать, что σ совпадает с полуокружностью σ_0 (а этого можно добиться конформным отображением), то в силу (4.112) функция $F(z)$ аналитически продолжится на всю верхнюю полуплоскость, причем

$$\operatorname{Im}(1 + i) F(x) = 2\psi\left(\frac{1}{2} \frac{x}{2x - 1}\right), \quad -\infty < x \leqslant 0, \quad 1 \leqslant x < \infty. \tag{4.114}$$

Следовательно, задача T_3 редуцирована к следующей задаче теории функций: *определить аналитическую в верхней полуплоскости функцию* $F(z)$, *ограниченную вблизи точек* $z=0$, $z=1$, $z=\infty$, *по краевым условиям* (4.113), (4.114).

Решение этой задачи строится сразу:

$$(1+i)F(z)=-\frac{2}{\pi i}\int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{t+z-2tz}\right)\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt.$$

Мнимая часть $F(z)$ дает искомую функцию $u(x, y)$ в области D^+. В области же D^- выражение для искомой функции пишется непосредственно:

$$u(x, y)=u(x+y, 0)-\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Для доказательства существования решения задачи T_3 можно применить, конечно, и метод интегральных уравнений. Основные функциональные уравнения выводятся точно так же, как и в случае задачи T, лишь с той разницей, что в данном случае функцию $G(x;\ \xi, \eta)$ нужно заменить гармонической функцией Грина задачи Неймана, которая, например, для окружности $|z-{}^1/_2|={}^1/_2$, когда полюс находится в точке $(x, 0)$, имеет вид

$$G(x;\ \xi, \eta)=-\frac{1}{2}\log[(\xi-x)^2+\eta^2]-$$
$$-\log 8-\frac{1}{2}\log[(\xi+x-2\xi x)^2+(2x-1)^2\eta^2].$$

Для определения функции $\nu(x)=\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}$, $y=0$ (предполагается, что σ совпадает с σ_0 и $\varphi=0$), получается интегральное уравнение

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=F(x), \qquad (4.115)$$

где

$$F(x)=\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ссылаясь на пункт 5° предыдущего параграфа, легко показать, что в классе функций, удовлетворяющих условию

Гёльдера в интервале (0, 1) и допускающих особенность порядка ниже единицы вблизи концов этого интервала, уравнение (4.115) имеет единственное решение, которое дается формулой

$$\nu(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{t(1-x)}{x(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)F(t)\,dt.$$

5°. Задача Франкля. Пусть имеется уравнение смешанного типа (уравнение Чаплыгина)

$$k(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad k(0) = 0,$$
$$k'(y) > 0, \quad k(-y) = -k(y), \tag{4.116}$$

и смешанная область D, ограниченная: а) отрезком $A'A$ оси $x=0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$; б) характеристикой $A'C$ уравнения (4.116), $C = C(a_1, 0)$, $a_1 > 0$; в) отрезком CB оси $y=0$, $a_1 \leqslant x \leqslant a$, и г) жордановой кривой σ с концами в точках A и B, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$.

В 1956 г. Ф. И. Франкль [1] предложил смешанную задачу, которая отличается от смешанных задач, рассмотренных выше.

Эта задача ставится следующим образом: *найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения* (4.116), *непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_\sigma = \varphi_1, \tag{4.117}$$

$$u|_{CB} = \varphi_2, \tag{4.118}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{A'A} = 0, \tag{4.119}$$

$$u(0, y) - u(0, -y) = f(y), \quad -1 \leqslant y \leqslant 1, \tag{4.120}$$

где φ_1, φ_2 *и* f — заданные функции.

В настоящем пункте дается исследование задачи Франкля для уравнения (L).

В этом случае $A'C$ совпадает с отрезком характеристики $x-y=1$ уравнения (L). От дуги σ, кроме обычного условия гладкости (условия Ляпунова), дополнительно будем требовать, чтобы вдоль нее имело место неравенство

$$\frac{dy}{ds} \geqslant 0, \tag{4.121}$$

где $x=x(s)$, $y=y(s)$ — параметрические уравнения, а s — длина дуги σ, отсчитываемая от точки $B(a, 0)$. Без ограничения общности будем предполагать, что $\psi_1=\psi_2=0$. Относительно $f(y)$ будем требовать, чтобы она принадлежала классу $C^{2,h}$.

В этих предположениях существует единственная функция $u(x, y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, y)$ является решением уравнения (L) в области $\bar{D}$ при $y\neq 0$, $y\neq -x$; 2) она непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$; 3) частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$ всюду, кроме, быть может, отрезка OC' характеристики $x+y=0$, $O=O(0, 0)$, $C'=C'(^1/_2, -^1/_2)$ и точек A, A', C, B, где они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы; 4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям (4.117)—(4.120).

Общее решение уравнения (L), удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{OA'}=0, \qquad u|_{OA'}=\varphi(-y)+f(y),$$

в треугольнике $A'OC'$ имеет вид

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\varphi(-x-y)+\frac{1}{2}\varphi(x-y)+\frac{1}{2}f(x+y)+\frac{1}{2}f(y-x), \tag{4.122}$$

где через $\varphi(y)$ обозначена функция $u(0, y)$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

Из формулы (4.122) имеем

$$u(x, -x)=\frac{1}{2}\varphi(0)+\frac{1}{2}\varphi(2x)+\frac{1}{2}f(-2x), \qquad 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}. \tag{4.123}$$

Общее решение уравнения (L), удовлетворяющее условию (4.123), в треугольнике $OC'C$ дается формулой

$$u(x, y)=\Phi(x+y)+\frac{1}{2}\varphi(x-y)+\frac{1}{2}f(y-x), \tag{4.124}$$

где $\Phi(t)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция при $0<t<1$, непрерывная при $0\leqslant t\leqslant 1$, причем $\Phi(0)=\frac{1}{2}\varphi(0)$.

В силу формулы (4.124) имеем

$$u(x, 0)=\Phi(x)+\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}f(-x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1. \quad (4.125)$$

Пусть $v(x, y)$ гармонически сопряжена с $u(x, y)$ в эллиптической части смешанной области D, причем $v(0, 0)=0$.

На основании (4.119) заключаем, что при $v|_{OA}=0$. Так как по условию $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывна при переходе через OC, то в силу (4.124) из уравнения $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ получаем

$$v(x, 0)=-\Phi(x)+\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}f(-x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1. \quad (4.126)$$

Теперь легко доказать, что однородная задача ($f=0$) имеет только тривиальное решение.

В самом деле, пусть $u_0(x, y)$ — решение однородной задачи, а функция $v_0(x, y)$ гармонически сопряжена с ней, причем $v_0(0, 0)=0$. Функция $F_0(z)=u_0(x, y)+iv_0(x, y)$ аналитична в области D^+ и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}^+$. Следовательно, имеет место равенство

$$-\int_\sigma v_0^2 dz - i\int_0^1 u_0^2(0, y)\,dy + \int_0^1 (u_0+iv_0)^2\,dx - \int_1^a v_0^2 dx = 0. \quad (4.127)$$

Выделяя мнимую часть из (4.127), в силу (4.125) и (4.126) будем иметь

$$-\int_\sigma v_0^2\frac{dy}{ds}ds - \int_0^1 \varphi_0^2(y)\,dy - 2\int_0^1\left(\Phi^2-\frac{1}{4}\varphi_0^2\right)dx=0,$$

$$\varphi_0(y)=u_0(0, y).$$

Отсюда на основании (4.121) заключаем, что $\Phi(x)=\varphi_0(x)=0$, и, стало быть, $u_0(x, y)=0$ всюду в смешанной области D.

Переходим к доказательству существования решения. Заметим, что в силу (4.125) и (4.126) имеем

$$u(x, 0)+v(x, 0)=\gamma(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

где

$$\gamma(x)=\varphi(x)+f(-x). \quad (4.128)$$

Аналитическая внутри D^+ и непрерывная в $\bar{D}^+$ функция $F(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ однозначно определяется по краевым условиям

$$u|_\sigma=0, \quad u(x, 0)=0, \quad 1\leqslant x\leqslant a,$$
$$v(0, y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$
$$u(x, 0)+v(x, 0)=\gamma(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

В частности, когда $a=1$, а σ совпадает с дугой окружности $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, $x\geqslant 0$, для функции $F(z)$ легко получается выражение

$$F(z)=\frac{1+i}{\pi i}\int_0^1 z\sqrt{\frac{t(1-z^2)}{z(1-t^2)}}\left(\frac{1}{t^2-z^2}-\frac{1}{1-t^2z^2}\right)\gamma(t)\,dt. \tag{4.129}$$

Подставляя в формулу (4.129) вместо z выражение iy и принимая во внимание (4.120) и (4.128), для определения неизвестной функции $\varphi(y)$ получим эквивалентное задаче Франкля интегральное уравнение

$$\varphi(y)-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 y\sqrt{\frac{t(1+y^2)}{y(1-t^2)}}\left(\frac{1}{t^2+y^2}-\frac{1}{1+t^2y^2}\right)\varphi(t)\,dt=\psi(y), \tag{4.130}$$

где

$$\psi(y)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 y\sqrt{\frac{t(1+y^2)}{y(1-t^2)}}\left(\frac{1}{t^2+y^2}-\frac{1}{1+t^2y^2}\right)f(-t)\,dt$$

— известная функция.

Примем обозначение $\sqrt{y}\varphi(y)=\mu(y)$. Для определения неизвестной функции $\mu(y)$ на основании (4.130) получается интегральное уравнение

$$\mu(y)-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 y\sqrt{\frac{1+y^2}{1-t^2}}\left(\frac{1}{t^2+y^2}-\frac{1}{1+t^2y^2}\right)\mu(t)\,dt=\sqrt{y}\,\psi(y) \tag{4.131}$$

с *положительным ядром*, причем

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 y\sqrt{\frac{1+y^2}{1-t^2}}\left(\frac{1}{t^2+y^2}-\frac{1}{1+t^2y^2}\right)dt=\frac{1-y}{\sqrt{2}}. \tag{4.132}$$

В силу (4.132) очевидно, что решение интегрального уравнения (4.131) существует, и оно строится обычным путем. После того, как функция φ будет найдена, решение задачи Франкля в рассматриваемом случае получится в квадратурах.

Вернемся теперь к общему случаю. В силу условия $v|_{OA}=0$ заключаем, что функция $F(z)$ аналитически продолжается в область D_+^*, симметричную области D^+ относительно мнимой оси. Совокупность открытого отрезка OA и областей D^+ и D_+^* обозначим через D^*. Искомая функция $F(z)$ аналитична в области D^*, непрерывна в замкнутой области $\bar{D}^*$ и удовлетворяет краевым условиям

$$
\begin{gathered}
u|_\sigma=0, \qquad u|_{\sigma^*}=0,\\
u(x,\,0)=0, \quad -a\leqslant x\leqslant -1, \quad u(x,\,0)-v(x,\,0)=\\
=\gamma(-x),\\
-1\leqslant x\leqslant 0, \quad u(x,\,0)+v(x,\,0)=\gamma(x),\\
0\leqslant x\leqslant 1,\\
u(x,\,0)=0, \qquad 1\leqslant x\leqslant a.
\end{gathered}
\tag{4.133}
$$

Здесь через σ^* обозначена дуга, симметричная σ относительно мнимой оси.

Так как область D^* симметрична относительно мнимой оси и содержит внутри себя ее отрезок OA, то при конформном отображении этой области на полукруг k_1: $\xi^2+\eta^2<1$, $\eta>0$, плоскости $\zeta=\xi+i\eta$, когда точки $A\,(0,\,1)$, $C^*\,(-1,\,0)$, $C\,(1,\,0)$ переходят в точки $A_1\,(0,\,1)$, $C_1^*\,(-1,\,0)$, $C_1\,(1,\,0)$, симметрия относительно мнимых осей сохраняется.

Обозначим через $\Phi(\zeta)$ функцию $F[\omega^{-1}(\zeta)]$, где $\zeta=\omega(z)$ — конформно отображающая функция.

Для определения аналитической в полукруге k_1 и непрерывной в $\bar{k}_1$ функции $\Phi(\zeta)$, в силу (4.133), имеем условия

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Re}\Phi|_L=0, \qquad \operatorname{Re}(1+i)\Phi|_{C_1^*O_1}=\gamma[-\omega^{-1}(\xi)],\\
\operatorname{Im}(1+i)\Phi|_{O_1C_1}=\gamma[\omega^{-1}(\xi)],
\end{gathered}
$$

где L — полуокружность $|\zeta|=1$, $\eta\geqslant 0$, $O_1=O_1(0,\,0)$.

В плоскости ζ функция $\Phi(\zeta)$ определяется опять по формуле (4.129). *Из этой формулы, для определения неизвестной функции φ получается эквивалентное задаче*

Франкля интегральное уравнение, существование решения которого устанавливается на основе единственности решения этой задачи (см. А. В. Бицадзе [2]).

6°. Случай уравнения (4.116). В предыдущих пунктах мы ограничивались рассмотрением лишь уравнения (L).

Методы решения смешанных задач, примененные в указанных пунктах, могут быть использованы и в случае более общих уравнений, чем уравнение (L). Например, указанный в пункте 5° метод доказательства единственности решения задачи Франкля при соблюдении условия (4.121) с успехом может быть применен и в случае уравнения (4.116) (см. А. В. Бицадзе [2], Ю. В. Девенгталь [1]).

В самом деле, обозначим через $v(x, y)$ функцию, которая вместе с решением $u(x, y)$ задачи Франкля удовлетворяет системе уравнений

$$k(y)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{4.134}$$

При условии, что $v(0, 0)=0$, функция $v(x, y)$ однозначно определяется с помощью $u(x, y)$ из соотношений (4.134). Дополнительно будем требовать, чтобы граница области D и функция $u(x, y)$ удовлетворяли условиям, обеспечивающим непрерывность $v(x, y)$ в замкнутой области $\bar{D}$.

Пусть $a=a_1$. По любой простой замкнутой спрямляемой кривой C, лежащей в области D, в силу (4.134) имеем

$$\int\limits_C (ku^2-v^2)\,dy+2uv\,dx=0. \tag{4.135}$$

Справедливость равенства (4.135) очевидна и в том случае, когда C совпадает с полной границей области D. Пользуясь этим равенством, мы покажем, что однородная задача Франкля ($\psi_1=\psi_2=f=0$) имеет только тривиальное решение.

Действительно, так как в силу (4.119) имеем $v(0, y)=0$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, то на основании (4.116), (4.117) и (4.120) мы можем написать

$$\int\limits_{\sigma} v^2\frac{dy}{ds}\,ds+\int\limits_{A'B}(\sqrt{-k}\,u-v)^2\,dy=0.$$

В силу условия (4.121) каждое слагаемое в левой части этого равенства равно нулю. Поэтому на участках дуги σ, где $\frac{dy}{ds}>0$, имеем $u=v=0$. Отсюда, в силу эллиптичности системы (4.134) в эллиптической части D^+ смешанной области D, заключаем, что $u=v=0$ в области D^+ (Карлеман [2], И. Н. Векуа [4]).

Следовательно, имеем

$$u(x, 0)=0, \quad \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant a. \qquad (4.136)$$

Трудности не представляет показать, что задача Коши (4.136) для системы (4.134) в гиперболической части D^- области D, при довольно общих предположениях относительно $k(y)$, не может иметь отличного от нуля решения. Таким образом, $u(x, y)=0$ всюду в области D.

Результаты, изложенные в §§ 1, 2 настоящей главы, взяты из работ автора, собранных в монографиях [1], [2].

Задача T для линейного уравнения смешанного типа с главной частью

$$k(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \operatorname{sgn} k(y)=\operatorname{sgn} y,$$

исследовалась в докторской диссертации К. И. Бабенко [1]. В частности, единственность решения этой задачи для уравнения Чаплыгина была объектом исследования ряда авторов (см. Агмон, Ниренберг, Протер [1], Протер [2], [3], [4], У Син-мо, Дин Ся-си [1]).

Довольно подробное исследование задачи T для уравнения

$$y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-cu=F(x, y), \quad c=\text{const},$$

содержится в работах Геллерстедта [1], [3].

Структурные свойства решений уравнения (T) изучались в работах Бергмана [1], Л. В. Овсянникова [1] и др.

§ 3. Общая смешанная задача

1°. Постановка общей смешанной задачи и ее корректность. В качестве модельного уравнения смешанного типа опять берем уравнение (L).

Обозначим через D односвязную смешанную область, ограниченную лежащей в верхней полуплоскости $y>0$

гладкой кривой Жордана σ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и выходящими из этих точек кривыми L: $y = -\gamma(x)$, L_1: $y = -\gamma_1(x)$, с кривизной, удовлетворяющей условию Гёльдера. Дополнительно будем требовать, чтобы $\gamma(x)$ и $\gamma_1(x)$ удовлетворяли условиям

$$\gamma > 0, \quad \gamma_1 > 0, \quad 0 < \gamma'(x) \leqslant 1, \quad 0 < -\gamma_1'(x) \leqslant 1. \tag{4.137}$$

Пусть $C[x_1, -\gamma(x_1)]$ — точка пересечения кривых L и L_1. Из точки $E(x_0, 0)$, $x_1 - \gamma(x_1) \leqslant x_0 \leqslant x_1 + \gamma(x_1)$, проведем характеристики EB_2: $y = x - x_0$ и EB_1: $y = x_0 - x$ уравнения (L), где B_2 и B_1 — точки пересечения указанных характеристик с кривыми L и L_1. Обозначим через L_2 и L_3 дуги AB_2 и BB_1 кривых L и L_1 соответственно.

В этом пункте будем предполагать, что в последних двух из условий (4.137) равенство всюду исключено.

Общая смешанная задача. *Требуется найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, y)$ является решением уравнения* (L) *в области D при $y \neq 0$, $y \neq x - x_0$, $y \neq x_0 - x$;* 2) *она непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$;* 3) *частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$ всюду, кроме, быть может, точек A, B и отрезков EB_2 и EB_1, вблизи которых они могут обращаться в бесконечность порядка ниже 1/2;* 4) *на σ, L_2 и L_3 функция $u(x, y)$ принимает заданные значения:*

$$u|_{\sigma} = \psi_1, \quad u|_{L_2} = \psi_2, \quad u|_{L_3} = \psi_3, \tag{4.138}$$

где ψ_1 — непрерывная, а ψ_2 и ψ_3 — дважды непрерывно дифференцируемые функции, вторые производные которых удовлетворяют условию Гёльдера.

Без ограничения общности можно предполагать, что $\psi_1 = 0$. Дополнительно потребуем, чтобы

$$\psi_2'(0) = \psi_3'(0) = 0. \tag{4.139}$$

Ради простоты вычислений предположим, что $\gamma = \alpha x$, $\gamma_1 = -\beta x + \beta$, где α и β — постоянные, удовлетворяющие условиям $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. В этом случае

$$C_1 = C_1\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}, \frac{-\alpha\beta}{\alpha + \beta}\right), \qquad B_1 = B_1\left(\frac{x_0 + \beta}{1 + \beta}, \frac{\beta(x_0 - 1)}{1 + \beta}\right),$$

$$B_2 = B_2\left(\frac{x_0}{1 + \alpha}, \frac{-\alpha x_0}{1 + \alpha}\right).$$

Полученный результат остается в силе и при общих предположениях относительно L и L_1, сформулированных выше (см. (4.137)).

Общее решение уравнения (L), удовлетворяющее условиям (4.138), в треугольниках AB_2E и EB_1B соответственно имеет вид

$$u(x,\ y)=f(x+y)-f[\lambda(x-y)]+\psi_2\left[\frac{1+\lambda}{2}(x-y)\right], \tag{4.140}$$

$$u(x,\ y)=\varphi(x-y)-\varphi[\mu(x+y)+1-\mu]+ \\ +\psi_3\left[\frac{(x+y)(1+\mu)+1-\mu}{2}\right], \tag{4.141}$$

где $f(t)$, $t\in(0,\ x_0)$, $\varphi(t)$, $t\in(x_0,\ 1)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции с возможными особенностями порядка ниже 1/2 для их первых производных на концах интервалов, а $\lambda=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, $\mu=\frac{1-\beta}{1+\beta}$.

Из (4.140) и (4.141) имеем

$$\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}=2\frac{d}{dx}f(x),\quad y=0,\quad 0<x<x_0, \tag{4.142}$$

$$\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}=2\frac{d}{dx}\varphi(x),\quad y=0,\quad x_0<x<1, \tag{4.143}$$

$$\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}=-2\frac{d}{dx}f(\lambda x)+2\frac{d}{dx}\psi_2\left(\frac{1+\lambda}{2}x\right), \tag{4.144}$$

$$y=0,\qquad 0<x<x_0,$$

$$\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}=-2\frac{d}{dx}\varphi(\mu x+1-\mu)+ \\ +2\frac{d}{dx}\psi_3\left[\frac{x(1+\mu)+1-\mu}{2}\right], \tag{4.145}$$

$$y=0,\qquad x_0<x<1.$$

Докажем сначала *единственность* решения общей смешанной задачи.

С этой целью рассмотрим аналитическую в эллиптической части D^+ области D функцию $F_0(z)=u_0(x,\ y)+$ $+iv_0(x,\ y)$, действительная часть которой является решением однородной общей смешанной задачи ($\psi_2=\psi_3=0$).

В силу известного свойства аналитических функций заключаем, что

$$\int_\sigma z(1-z)(x_0-z)F_0'^2(z)\,dz = -\int_0^1 x(1-x)(x-x_0)F_0'^2(x)\,dx. \qquad (4.146)$$

Выделяя мнимую часть из равенства (4.146) и требуя от σ дополнительно, чтобы она удовлетворяла условию

$$\omega(s) = \operatorname{Im}\left\{z(1-z)(x_0-z)\left(\frac{dy}{dx}+i\right)^2 dz\right\}_\sigma \leqslant 0, \qquad (4.147)$$

будем иметь

$$J = \int_0^1 x(1-x)(x_0-x)\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y}\,dx = \int_\sigma \omega(s)\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 ds \leqslant 0, \qquad (4.148)$$

где s — длина дуги σ, отсчитываемая от точки B.

Заметим, что, в частности, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0, имеем $\omega(s) = -1/8$.

С другой стороны, из (4.142), (4.143), (4.144) и (4.145) имеем

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y} = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]^2 - \left[\frac{d}{dx}f(\lambda x)\right]^2, \quad y=0, \quad 0<x<x_0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y} = -\left[\frac{d}{dx}\varphi(x)\right]^2 + \left[\frac{d}{dx}\varphi(\mu x+1-\mu)\right]^2, \quad y=0, \quad x_0<x<1.$$

Следовательно, можем написать

$$J = \int_0^{x_0} x(1-x)(x_0-x)\left\{\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]^2 - \left[\frac{d}{dx}f(\lambda x)\right]^2\right\}dx + \int_{x_0}^1 x(1-x)(x-x_0)\left\{\left[\frac{d}{dx}\varphi(x)\right]^2 - \left[\frac{d}{dx}\varphi(\mu x+1-\mu)\right]^2\right\}dx =$$

$$= \int_{\lambda x_0}^{x_0} x(1-x)(x_0-x)\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]^2 dx +$$

$$+\int_0^{x_0} x\left[(1-\lambda x)(x_0-\lambda x)-(1-x)(x_0-x)\right]\left[\frac{d}{dx}f(\lambda x)\right]^2 dx+$$

$$+\int_{x_0}^{\mu x_0+1-\mu} x(1-x)(x-x_0)\left[\frac{d}{dx}\varphi(x)\right]^2 dx+$$

$$+\int_{x_0}^{1}(1-x)\left[(\mu x+1-\mu)(\mu x+1-\mu-x_0)-\right.$$

$$\left.-x(x-x_0)\right]\left[\frac{d}{dx}\varphi(\mu x+1-\mu)\right]^2 dx. \qquad (4.149)$$

Очевидно, что

$$(1-\lambda x)(x_0-\lambda x)-(1-x)(x_0-x)=$$
$$=x(1-\lambda)\left[1+x_0-(1-\lambda)x\right]\geqslant 0. \qquad (4.150)$$

Имеет место также оценка

$$(\mu x+1-\mu)(\mu x+1-\mu-x_0)-x(x-x_0)=$$
$$=(1-\mu)\left[1-\mu-x_0-(1+\mu)x^2+x(x_0+2\mu)\right]\geqslant 0. \qquad (4.151)$$

Справедливость неравенства (4.151) следует из того, что для функции $e(x)=1-\mu-x_0-(1+\mu)x^2+x(x_0+2\mu)$ имеют место соотношения

$$e(1)=0, \quad e(x_0)>0, \quad e''(x)=-(1+\mu)<0,$$
$$\max e(x)=e\left[\frac{x_0+2\mu}{2(1+\mu)}\right], \quad x_0<x<1.$$

В силу (4.150) и (4.151) из (4.149) получаем

$$J\geqslant 0. \qquad (4.152)$$

Сопоставляя (4.148) и (4.152), без труда убедимся, что $u_0(x, y)\equiv 0$. Отсюда, в свою очередь, следует единственность решения общей смешанной задачи.

Теперь покажем, что *решение общей смешанной задачи, при наличии единственности, существует.*

Обозначив правые части в формулах (4.144) и (4.145) соответственно через $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$, эти формулы мы можем переписать в виде

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(1-i)F'(x)=\omega_1(x), && 0<x<x_0,\\ &\operatorname{Im}(1-i)F'(x)=-\omega_2(x), && x_0<x<1,\end{aligned} \qquad (4.153)$$

где $F(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ — аналитическая в D^+ функция, действительная часть которой является искомым решением общей смешанной задачи.

Ограничимся рассмотрением случая, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0, а $x_0 > 1/2$.

Ввиду того, что $u|_{\sigma_0}=0$, функция $F(z)$ аналитически продолжается через σ_0 на всю верхнюю полуплоскость, причем в силу (4.153) будем иметь

$$\operatorname{Im}(1-i)F'(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2}\omega_1\left(\frac{x}{2x-1}\right),$$

$$-\infty < x < 0, \quad \xi_0 = \frac{x_0}{2x_0-1} < x < \infty, \tag{4.154}$$

$$\operatorname{Re}(1-i)F'(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}\omega_2\left(\frac{x}{2x-1}\right), \quad 1 < x < \xi_0.$$

Введем в рассмотрение аналитическую в верхней полуплоскости функцию

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{(x_0-z)(\xi_0-z)}{z(1-z)}}\,(1-i)F'(z),$$

где под корнем понимается однозначная в разрезанной вдоль сегментов $[0, x_0]$, $[1, \xi_0]$ ветвь этой функции, положительная при $0 < z < x_0$.

В силу (4.153) и (4.154) для функции $\Phi(z)$ имеем краевые условия

$$\operatorname{Re}\Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(x_0-x)(\xi_0-x)}{x(1-x)}}\,\omega_1(x), \quad 0 < x < x_0, \\ -\sqrt{\dfrac{(x_0-x)(\xi_0-x)}{-x(1-x)}}\,\dfrac{1}{(2x-1)^2}\,\omega_1\left(\dfrac{x}{2x-1}\right), \\ \qquad -\infty < x < 0, \\ -\sqrt{\dfrac{(x-x_0)(\xi_0-x)}{x(1-x)}}\,\omega_2(x), \quad x_0 < x < 1, \\ \sqrt{\dfrac{(x-x_0)(\xi_0-x)}{x(x-1)}}\,\dfrac{1}{(2x-1)^2}\,\omega_2\left(\dfrac{x}{2x-1}\right), \\ \qquad 1 < x < \xi_0, \\ \sqrt{\dfrac{(x-x_0)(x-\xi_0)}{x(x-1)}}\,\dfrac{1}{(2x-1)^2}\,\omega_1\left(\dfrac{x}{2x-1}\right), \\ \qquad \xi_0 < x < \infty, \end{cases}$$

причем
$$\Phi(\infty)=0.$$

Пользуясь формулой (4.56) для определения функции $\Phi(z)$, окончательно получаем выражение для $F'(z)$ в виде

$$(1-i)F'(z)=\frac{1}{\pi i}\sqrt{\frac{z(1-z)}{(x_0-z)(\xi_0-z)}}\times$$
$$\times\left\{\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{(x_0-t)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1-2t}{t+z-2tz}\right)\omega_1(t)\,dt-\right.$$
$$\left.-\int_{x_0}^{1}\sqrt{\frac{(t-x_0)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1-2t}{t+z-2tz}\right)\omega_2(t)\,dt\right\}. \qquad (4.155)$$

Переходя к пределу в (4.155) при $z\to x$ и выделяя при $0<x<x_0$ мнимую часть, а при $x_0<x<1$ действительную часть, получаем

$$f_x(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{x(1-t)(x_0-t)(\xi_0-t)}{t(1-x)(x_0-x)\,\xi_0-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x-2tx}\right)\times$$
$$\times f_t(\lambda t)\,dt=\rho_1(x), \qquad (4.156)$$

$$\varphi_x(x)-\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{1}\sqrt{\frac{t(1-x)(t-x_0)(\xi_0-t)}{x(1-t)(x-x_0)(\xi_0-x)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\times$$
$$\times\varphi_t(\mu t+1-\mu)\,dt=\rho_2(x), \qquad (4.157)$$

где

$$\rho_1(x)=\psi(x)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{1}\sqrt{\frac{x(1-x)(t-x_0)(\xi_0-t)}{t(1-t)(x_0-x)(\xi_0-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\times$$
$$\times\varphi_t(\mu t+1-\mu)\,dt,$$

$$\rho_2(x)=\psi(x)-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{x(1-x)(x_0-t)(\xi_0-t)}{t(1-t)(x-x_0)(\xi_0-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)f_t(\lambda t)\,dt,$$

а

$$\psi(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x(1-x)}{(x_0-x)(\xi_0-x)}}\left\{\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{(x_0-t)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\psi_{2t}\left(\frac{1+\lambda}{2}t\right)dt-\int_{x_0}^{1}\sqrt{\frac{(t-x_0)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\psi_{3t}\left[\frac{t(1+\mu)+1-\mu}{2}\right]dt\right\},$$

$$0<x<x_0,$$

$$\psi(x)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x(1-x)}{(x-x_0)(\xi_0-x)}}\left\{\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{(x_0-t)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\psi_{2t}\left(\frac{1+\lambda}{2}t\right)dt-$$

$$-\int_{x_0}^{1}\sqrt{\frac{(t-x_0)(\xi_0-t)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\times$$

$$\left.\times\psi_{3t}\left[\frac{t(1+\mu)+1-\mu}{2}\right]dt\right\},$$

$$x_0<x<1.$$

Мы здесь всюду пользовались тождествами

$$\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}=\frac{1-t}{1-x}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x-2tx}\right)=$$

$$=\frac{t}{x}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right).$$

Таким образом, доказательство существования решения общей смешанной задачи редуцировано к доказательству существования решений интегральных уравнений (4.156) и (4.157).

Простой заменой переменных уравнения (4.156) и (4.157) в обозначениях

$$\sqrt{x}\,\mu_1(x)=f_x(x)\sqrt{(1-x)(x_0-x)(\xi_0-x)},$$

$$\sqrt{x}\,h_1(x)=\rho_1(x)\sqrt{(1-x)(x_0-x)(\xi_0-x)},$$

$$\sqrt{1-x}\,\mu_2(x)=\varphi_x(x)\sqrt{x(x-x_0)(\xi_0-x)},$$

$$\sqrt{1-x}\,h_2(x)=\rho_2(x)\sqrt{x(x-x_0)(\xi_0-x)}$$

можно переписать следующим образом:

$$\mu_1(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\lambda x_0}\sqrt{\frac{(\lambda-t)(\lambda x_0-t)(\lambda\xi_0-t)}{(1-t)(x_0-t)(\xi_0-t)}}\left(\frac{1}{t-\lambda x}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{t+\lambda x-2tx}\right)\mu_1(t)\,dt=h_1(x), \qquad (4.158)$$

$$0<x<x_0,$$

$$\mu_2(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mu x_0+1-\mu}^{1}\sqrt{\frac{(t-1+\mu)(t-1+\mu-\mu x_0)(\mu\xi_0-t+1-\mu)}{t(t-x_0)(\xi_0-t)}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{t-1+\mu-\mu x}-\frac{1}{t-1+\mu+\mu x-2x(t-1+\mu)}\right)\times$$

$$\times\mu_2(t)\,dt=h_2(x), \qquad (4.159)$$

$$x_0<x<1.$$

В силу принятых предположений (4.139) относительно функций ψ_1, ψ_2 и ψ_3 заключаем, что функции $\frac{1}{\sqrt{x}}\psi(x)$, $0<x<x_0$, и $\frac{1}{\sqrt{1-x}}\psi(x)$, $x_0<x<1$, суммируемы вместе с их квадратами. Поэтому естественно искать $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ в гильбертовом пространстве L_2.

Легко показать, что нормы интегральных операторов в левых частях (4.158) и (4.159) при $0<x<\lambda x_0$, $\mu x_0+1-\mu<x<1$ меньше единицы.

Это следует из того, что

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\lambda x_0}d\xi\int\limits_0^{\lambda x_0}\sqrt{\frac{(\lambda-t)(\lambda x_0-t)(\lambda\xi_0-t)}{(1-t)(x_0-t)(\xi_0-t)}}\left(\frac{1}{t-\lambda\xi}+\frac{1}{t+\lambda\xi-2t\xi}\right)\times$$

$$\times\mu_1(t)\,dt\int\limits_0^{\lambda x_0}\sqrt{\frac{(\lambda-t_1)(\lambda x_0-t_1)(\lambda\xi_0-t_1)}{(1-t_1)(x_0-t_1)(\xi_0-t_1)}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{t_1-\lambda\xi}+\frac{1}{t_1+\lambda\xi-2t_1\xi}\right)\mu_1(t_1)\,dt_1\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\lambda x_0}\frac{(\lambda-t)(\lambda x_0-t)(\lambda\xi_0-t)}{(1-t)(x_0-t)(\xi_0-t)}\mu_1^2(t)\,dt\leqslant\lambda^2\int\limits_0^{\lambda x_0}\mu_1^2(t)\,dt.$$

Аналогично можно показать справедливость и второй части нашего утверждения.

Следовательно, решения $\mu_1(x)$, $0 < x < \lambda x_0$, и $\mu_2(x)$, $\mu x_0+1-\mu < x < 1$, уравнений (4.158) и (4.159) существуют, и они выражаются сингулярными интегралами.

Подставляя полученное в результате обращения уравнения (4.156) выражение $f_x(\lambda x)$ в правую часть (4.157) и обращая левую часть последнего уравнения относительно $\varphi_x(x)$, $\mu x_0+1-\mu < x < 1$, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\varphi_x(x)$, $x_0 < x < 1$, эквивалентное рассматриваемой задаче. Следовательно, *существование решения полученного интегрального уравнения следует из единственности решения общей смешанной задачи.*

После того, как доказано существование $\varphi_x(x)$, $x_0 < x < 1$, существование $f_x(x)$, $0 < x < x_0$, получается автоматически (см. работу [2] автора).

Степень гладкости функций f и φ зависит от гладкости ψ_2 и ψ_3. В случае, когда линия σ оканчивается сколь угодно малой длины дугами AA' и BB' полуокружности σ_0, а в остальной своей части она гладкая и удовлетворяет условию (4.147), доказательство существования решения общей смешанной задачи на основе предыдущего результата известным образом редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Полученный в этом параграфе результат указывает на то, что в рассмотренной выше смешанной области D задача Дирихле для уравнения (L) является некорректно поставленной, независимо от величины и формы гиперболической части D^- этой области (см. работу [2] автора).

Это, конечно, не означает, что нельзя найти такую смешанную область, для которой задача Дирихле все же возможна.

2°. Задача M. В частном случае, когда L_1 представляет собой отрезок характеристики $y=x-1$ и $x_0=1$, вместо условий (4.138) будем иметь

$$u|_\sigma = \varphi, \tag{4.160}$$

$$u|_{L} = \psi, \tag{4.161}$$

и общая смешанная задача переходит в смешанную задачу, названную в наших работах [1], [2] з а д а ч е й M.

Задача M заключается *в определении функции* $u(x, y)$ *со следующими свойствами:* 1) $u(x, y)$ *является решением уравнения* (L) *в области* D *при* $y \neq 0$; 2) *непрерывна в замкнутой области* $\bar{D}$; 3) *частные производные* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ *непрерывны в* $\bar{D}$ *всюду, кроме, быть может, точек* A *и* B, *в которых они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы;* 4) *удовлетворяет условиям* (4.160), (4.161), *причем* $\varphi \in C^{1,0}$, $\psi \in C^{2,h}$.

В этом пункте будем предполагать, что вдоль σ

$$(x - x^2 - y^2)\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} \geqslant 0, \tag{4.162}$$

где s — длина дуги σ, отсчитываемая от точки B, а $x=x(s)$, $y=y(s)$ — параметрические уравнения этой кривой. Относительно кривой L, в отличие от предыдущего пункта, дополнительно будем требовать, чтобы она имела кривизну, удовлетворяющую условию Гёльдера, причем

$$0 < \frac{d\gamma}{dx} \leqslant 1, \tag{4.163}$$

$$\frac{d\gamma}{dx} \leqslant \frac{\gamma}{x - x^2 + \gamma^2}. \tag{4.164}$$

В этих предположениях покажем, что решение однородной задачи

$$u|_\sigma = 0, \tag{4.165}$$

$$u|_L = 0, \tag{4.166}$$

соответствующей (4.160), (4.161), тождественно равно нулю.

Предварительно заметим, что общее решение уравнения (L), удовлетворяющее условию (4.161) в области D^-, представляется в виде

$$u(x, y) = f(x+y) - f\{\delta(x-y) - \gamma[\delta(x-y)]\} + \psi[\delta(x-y)], \tag{4.167}$$

где $x = \delta(\xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, — известная функция, которая однозначно определяется из уравнения

$$x + \gamma(x) = \xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4.168}$$

а $f(t)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция при $0 < t < 1$, непрерывная в замкнутом интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, с возможной интегрируемой особенностью для производной $f'(t)$ на концах этого интервала.

В самом деле, общее решение уравнения (L) в области D^- возьмем в виде

$$u(x, y) = f(x+y) + f_1(x-y). \tag{4.169}$$

На основании (4.161) из (4.169) имеем

$$f[x-\gamma(x)] + f_1[x+\gamma(x)] = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

откуда, принимая во внимание обозначения (4.168), получаем

$$f_1(\xi) = \psi[\delta(\xi)] - f\{\delta(\xi) - \gamma[\delta(\xi)]\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

Подставляя полученное выражение $f_1(\xi)$ в (4.169), убедимся в справедливости представления (4.167).

В частности, из (4.167) имеем

$$\tau'(x) + \nu(x) = 2f'(x). \tag{4.170}$$

Формула (4.170) показывает, что $f'(x)$ может обращаться в бесконечность порядка ниже единицы при $x \to 0$ или $x \to 1$.

При соблюдении условия (4.165) представление (4.167) принимает вид

$$u(x, y) = f(x+y) - f\{\delta(x-y) - \gamma[\delta(x-y)]\}. \tag{4.171}$$

Отсюда очевидно, что без ограничения общности можно принять $f(0)=0$.

Из формулы (4.171) имеем

$$u(x, 0) = f(x) - f\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\}. \tag{4.172}$$

Обозначим через $F(z)$ аналитическую в эллиптической части D^+ смешанной области D функцию $u(x, y) + iv(x, y)$. Так как $u(0, 0)=0$, то функцию $F(z)$ можно подчинить условию

$$F(0) = 0. \tag{4.173}$$

В силу равенств

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=+0} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=-0}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x, y) \in D^+,$$

из формулы (4.171) получаем

$$\frac{dv(x,\ 0)}{dx}=-\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}f\{\delta(x)-\gamma[\delta(x)]\}.$$

Отсюда, после интегрирования, в силу (4.173) будем иметь

$$v(x,\ 0)=-f(x)-f\{\delta(x)-\gamma[\delta(x)]\}. \qquad (4.174)$$

Рассмотрим интеграл

$$J=-\int_0^1 u(x,\ 0)\,v(x,\ 0)\frac{1-x}{x}\,dx=$$

$$=\int_0^1\{f^2(x)-f^2[\delta(x)-\gamma(\delta(x))]\}\frac{1-x}{x}\,dx, \qquad (4.175)$$

который заведомо существует. После преобразования переменных интегрирования выражение (4.175) принимает вид

$$J=\int_{2l-1}^{1}f^2(x)\frac{1-x}{x}\,dx+\int_0^l f^2[x-\gamma(x)]\left[\frac{1-x+\gamma(x)}{x-\gamma(x)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1+\gamma'(x)}{1-\gamma'(x)}\,\frac{1-x-\gamma(x)}{x+\gamma(x)}\right][1-\gamma'(x)]\,dx,$$

откуда в силу (4.164) заключаем, что

$$J\geqslant 0. \qquad (4.176)$$

С другой стороны, в силу (4.165) имеем

$$\int_\sigma F^2(z)\frac{1-z}{z}\,dz+\int_0^1[u(x,\ 0)+iv(x,\ 0)]^2\frac{1-x}{x}\,dx=0. \qquad (4.177)$$

Выделяя мнимую часть из (4.177), получаем

$$J=-\int_0^1 u(x,\ 0)\,v(x,\ 0)\frac{1-x}{x}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_\sigma\frac{y'_s(x-x^2-y^2)-x'_s y}{x^2+y^2}\,v^2ds. \qquad (4.178)$$

Из (4.178) в силу (4.162) заключаем, что

$$J \leqslant 0. \tag{4.179}$$

Сопоставляя (4.176) и (4.179), будем иметь $f(x)=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Отсюда, в свою очередь, следует, что $u(x, y)$ тождественно равна нулю во всей области D.

Таким образом, *если* σ *и* L *удовлетворяют условиям* (4.162), (4.163), (4.164), *то задача* М *не может иметь более одного решения.*

Условие (4.164) будет соблюдено, например, если кривая L вогнута относительно оси Ox, а условие (4.162) будет соблюдено, в частности, если σ вогнута относительно оси Ox и расположена внутри единичного круга $|z| < 1$.

3°. О существовании решения задачи М. Из формулы (4.167) непосредственно получается основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из гиперболической части D^- области D:

$$\begin{aligned}\tau'(x) - \nu(x) = 2\frac{d}{dx}\psi[\delta(x)] - \\ - (\tau'\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\} + \nu\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\}) \times \\ \times \frac{d}{dx}\{\delta(x) - \gamma[\delta(x)]\}.\end{aligned} \tag{4.180}$$

Второе функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D^+, как мы уже видели, имеет вид (4.24).

В настоящем пункте речь будет идти о существовании решения задачи М в том частном случае, когда линия L вначале совпадает с куском AF характеристики AC, а потом отходит от нее вовнутрь треугольника ACB (см. А. В. Бицадзе [1], [2]).

Обозначим через $E(h, 0)$ точку отрезка AB, $0 < h < 1$. Характеристики уравнения (L), выходящие из точки E, пересекаются с характеристиками AC и BC в точках $F\left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right)$, $G\left(\frac{h+1}{2}, \frac{h-1}{2}\right)$ соответственно. Пусть $H(1-l, -l)$, $\frac{1-h}{2} < l < \frac{1}{2}$, — точка на характеристике BC.

Соединим точки F и H линией $y = -\gamma(x)$, $\frac{h}{2} \leqslant x \leqslant 1 - l$, где $\gamma''(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера и условиям (4.163), (4.164).

Пусть L совпадает с линией

$$y=-x, \qquad 0\leqslant x\leqslant h/2,$$
$$y=-\gamma(x), \qquad \frac{h}{2}\leqslant x\leqslant 1-l,$$

и кривизна ее удовлетворяет условию Гёльдера.

Относительно кривой σ будем предполагать, что она удовлетворяет условию Ляпунова, оканчивается сколь угодно малой длины дужками AA' и BB' полуокружности σ_0 и, кроме того, для нее соблюдено условие (4.162).

Пусть D — смешанная область, ограниченная линиями σ, L и HB.

В силу уже доказанного смешанная задача М для области D не может иметь более одного решения.

Покажем, что в рассматриваемом случае решение задачи М существует.

Предварительно заметим, что без ограничения общности можно полагать, что $\varphi=0$, $\psi(0)=0$. В дальнейшем дополнительно будем требовать, чтобы

$$\psi'(0)=0. \tag{4.181}$$

Сначала рассмотрим случай, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0. В этом случае соотношение (4.24) принимает вид (4.26), а из формулы (4.180) имеем

$$\tau'(x)-\nu(x)=2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \qquad 0<x\leqslant h, \tag{4.182}$$

$$\tau'(x)-\nu(x)=$$
$$=-2\nu[\lambda(x)]\frac{d}{dx}\lambda(x)-2\frac{d}{dx}\psi\left[\frac{\lambda(x)}{2}\right]+2\frac{d}{dx}\psi[\delta(x)], \tag{4.183}$$
$$h\leqslant x\leqslant 1, \quad 0\leqslant\lambda(x)=\delta(x)-\gamma[\delta(x)]\leqslant 1-2l.$$

Исключая $\tau'(x)$ из (4.26), (4.182), (4.183), получаем

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=F(x), \tag{4.184}$$

где

$$F(x)=\begin{cases} F_0(x), & 0<x<h, \\ 2\nu[\lambda(x)]\dfrac{d}{dx}\lambda(x)+F_0(x), & h\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$$

$$F_0(x)=\begin{cases} -2\dfrac{d}{dx}\psi\left(\dfrac{x}{2}\right), & 0\leqslant x\leqslant h, \\ 2\dfrac{d}{dx}\psi\left[\dfrac{\lambda(x)}{2}\right]-2\dfrac{d}{dx}\psi[\delta(x)], & h\leqslant x<1. \end{cases}$$

Применяя формулу обращения (4.60), уравнение (4.184) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_h^1\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\times$$
$$\times\lambda'(t)\nu[\lambda(t)]\,dt=F_1(x), \tag{4.185}$$
$$0<x\leqslant h,$$

$$\nu(x)=F_1(x)+\nu[\lambda(x)]\lambda'(x)-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_h^1\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\lambda'(t)\nu[\lambda(t)]\,dt,$$
$$h\leqslant x<1, \tag{4.186}$$

где

$$F_1(x)=\frac{1}{2}F_0(x)-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)F_0(t)\,dt.$$

Из проведенного рассуждения очевидно, что *имеется эквивалентность между задачей* М *и уравнениями* (4.185), (4.186).

Преобразованием переменного $\xi=\lambda(t)$, $h\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant\xi\leqslant 1-2l$, уравнение (4.183) можно привести к виду

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{1-2l} \sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}} \left(\frac{1}{\omega(\xi) - x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - 2\omega(\xi)}{\omega(\xi) + x - 2x\omega(\xi)} \right) \nu(\xi)\, d\xi = F_1(x), \qquad (4.187)$$

где ω — функция, обратная λ.

При $x \in (0,\ 1-2l)$, в силу неравенства $1-2l < h$, заключаем, что *уравнение* (4.187) *является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи* M.

Обозначив через $R(x,\ t)$, $x, t \in (0,\ 1-2l)$, резольвенту уравнения (4.187), решение этого уравнения мы можем представить по формуле

$$\nu(x) = F_1(x) + \int\limits_0^{1-2l} R(x,\ t)\, F_1(t)\, dt, \quad x \in (0,\ 1-2l). \quad (4.188)$$

Подставляя выражение (4.188) для $\nu(x)$, $x \in (0,\ 1-2l)$, в формулу (4.187), получаем

$$\nu(x) = F_1(x) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{1-2l} \left\{ \sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}} \left[\frac{1}{\omega(t) - x} + \frac{1 - 2\omega(t)}{\omega(t) + x - 2x\omega(t)} \right] + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{1-2l} R(\xi,\ t) \sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}} \left[\frac{1}{\omega(\xi) - x} + \frac{1 - 2\omega(\xi)}{\omega(\xi) + x - 2x\omega(\xi)} \right] d\xi \right\} \times$$

$$\times F_1(t)\, dt, \quad x \in (1-2l,\ h). \qquad (4.189)$$

После того как известна $\nu[\lambda(x)]$, $x \in (h,\ 1)$, из (4.186) получим выражение для $\nu(x)$ при $x \in (h,\ 1)$:

$$\nu(x) = F_1(x) + F_1[\lambda(x)]\, \lambda'(x) + \int\limits_0^{1-2l} \left\{ R[\lambda(x),\ t]\, \lambda'(x) - \right.$$

$$- \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}} \left[\frac{1}{\omega(t) - x} + \frac{1 - 2\omega(t)}{\omega(t) + x - 2x\omega(t)} \right] -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{1-2l} R(\xi, t)\sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}}\left[\frac{1}{\omega(\xi)-x}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-2\omega(\xi)}{\omega(\xi)+x-2x\omega(\xi)}\right]d\xi\Bigg\}F_1(t)\,dt. \qquad (4.190)$$

На основании (4.188), (4.189) и (4.190) окончательно будем иметь

$$\nu(x)=F^*(x)+\int\limits_0^{1-2l} R^*(x, t)F_1(t)\,dt, \qquad (4.191)$$

где

$$F^*(x)=\begin{cases} F_1(x), & x\in(0, h),\\ F_1(x)+F_1[\lambda(x)]\lambda'(x), & x\in(h, 1),\end{cases} \qquad (4.192)$$

$$R^*(x, t)=R(x, t), \qquad x, t\in(0, 1-2l),$$

$$\left.\begin{aligned}
&R^*(x, t)=-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}}\left[\frac{1}{\omega(t)-x}+\right.\\
&\left.+\frac{1-2\omega(t)}{\omega(t)+x-2x\omega(t)}\right]-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{1-2l} R(x, t)\sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{1}{\omega(\xi)-x}+\frac{1-2\omega(t)}{x+\omega(\xi)-2x\omega(\xi)}\right]d\xi,\\
&\qquad x\in(1-2l, h), \qquad t\in(0, 1-2l),\\
&R^*(x, t)=R[\lambda(x), t]\lambda'(x)-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{x(1-\omega(t))}{\omega(t)(1-x)}}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{1}{\omega(t)-x}+\frac{1-2\omega(t)}{\omega(t)+x-2x\omega(t)}\right]-\\
&\qquad-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{1-2l} R(\xi, t)\sqrt{\frac{x(1-\omega(\xi))}{\omega(\xi)(1-x)}}\times\\
&\qquad\times\left[\frac{1}{\omega(\xi)-x}+\frac{1-2\omega(\xi)}{\omega(\xi)+x-2x\omega(\xi)}\right]d\xi,\\
&\qquad x\in(h, 1), \quad t\in(0, 1-2l).
\end{aligned}\right\} \qquad (4.193)$$

Таким образом, мы доказали существование решения функционального уравнения (4.184). Отсюда уже следует существование решения задачи в рассматриваемом случае.

Предположим теперь, что σ оканчивается сколь угодно малой длины дужками AA', BB' полуокружности σ_0.

После исключения $\tau'(x)$ из соотношений (4.24), (4.182) и (4.183) получаем

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=$$
$$=F_0(x)-\int_0^1 K(x,\ t)\,\nu(t)\,dt,\quad x\in(0,\ h),\tag{4.194}$$

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt-2\nu[\lambda(x)]\,\lambda'(x)=$$
$$=F_0(x)-\int_0^1 K(x,\ t)\,\nu(t)\,dt,\quad x\in(h,\ 1),\tag{4.195}$$

где $K(x,\ t)$ — регулярное ядро, имеющее вид (4.49).

В уравнениях (4.194) и (4.195) выражение $\int\limits_0^1 K(x,\ t)\,\nu(t)\,dt$ пока будем считать известным. Применяя (4.191), мы можем эти уравнения заменить эквивалентным уравнением

$$\nu(x)+\int_0^1 K^{**}(x,\ t)\,\nu(t)\,dt=F_{**}(x),\tag{4.196}$$

где

$$F_{**}(x)=\begin{cases} F_1(x)+\displaystyle\int_0^{1-2l} R^*(x,\ t)\,F_1(t)\,dt, & x\in(0,\ h),\\ F_1(x)+F_1[\lambda(x)]\,\lambda'(x)+ & \\ \qquad\qquad+\displaystyle\int_0^{1-2l} R^*(x,\ t)\,F_1(t)\,dt, & x\in(h,\ 1),\end{cases}$$

$$K^{**}(x,t)=\begin{cases} K^*(x,t)+\int\limits_0^{1-2l} R^*(x,\xi)K^*(\xi,t)\,d\xi, & x\in(0,h),\\ K^*(x,t)+K^*[\lambda(x),t]\lambda'(x)+\\ \qquad+\int\limits_0^{1-2l} R^*(x,\xi)K^*(\xi,t)\,d\xi, & x\in(h,1), \end{cases}$$

$$K^*(x,t)=\frac{1}{2}K(x,t)-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{x(1-\xi)}{\xi(1-x)}}\left(\frac{1}{t-\xi}+\frac{1-2\xi}{t+\xi-2t\xi}\right)K(\xi,t)\,d\xi.$$

Уравнение (4.196) является интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода.

Так как эквивалентность всюду сохраняется, то из единственности решения задачи M следует существование решения интегрального уравнения (4.196). Отсюда, в свою очередь, автоматически получается существование решения задачи M (см. А. В. Бицадзе [1], [2]).

Ограничение на линию σ, заключающееся в требовании, чтобы она оканчивалась сколь угодно малой длины дужками AA', BB' полуокружности σ_0, может быть снято. Однако же наложенное на σ ограничение (4.162) является для нас существенным, поскольку при доказательстве существования решения задачи M мы здесь пользуемся тем, что оно единственно. Тем не менее, как будет показано ниже, и это ограничение может быть снято.

В заключение укажем еще на одну редукцию задачи M. Из формулы (4.167) имеем

$$u(x,0)=f(x)-f[\lambda(x)]+\psi[\delta(x)], \qquad (4.197)$$

где

$$\lambda(x)=\delta(x)-\gamma[\delta(x)].$$

С другой стороны, используя уравнение Коши—Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

и условие непрерывности $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ при переходе через отрезок, в силу (4.167) можем написать

$$v(x,0)=-f(x)-f[\lambda(x)]+\psi[\delta(x)],\quad v(0,0)=0. \qquad (4.198)$$

Исключая $f(x)$ из соотношений (4.197) и (4.198), получаем

$$u(x,\ 0)+v(x,\ 0)+u[\lambda(x),\ 0]-v[\lambda(x),\ 0]=$$
$$=2\psi[\delta(x)],\qquad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Таким образом, задача М редуцирована к совершенно нового типа задаче теории функций: *найти аналитическую в области D^+ функцию $F(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}^+$ и удовлетворяющую условиям*

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}F|_\sigma=\varphi,\qquad F(0)=0,\\ \operatorname{Im}(1+i)\{F(x)+iF[\lambda(x)]\}=2\psi[\delta(x)].\end{gathered}\tag{4.199}$$

В следующем пункте будет доказано существование решения этой смешанной задачи в одном частном случае.

4°. Решение задачи (4.199) при $\sigma=\sigma_0$, $\psi=0$ и $\lambda=\mathrm{const}$. Поскольку $\lambda=\mathrm{const}$ соответствует случаю, когда в задаче М кривая L представляет собой прямую $y=-\alpha x$, $0<\alpha<1$, то $0<\lambda=\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}<1$. Следовательно, в предположениях $\sigma=\sigma_0$, $\psi(x)=0$ задачу (4.199) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}F(t)=\varphi(t),\quad t\in\sigma_0,\quad F(0)=0,\tag{4.200}$$

$$\operatorname{Im}(1+i)[F(x)+iF(\lambda x)]=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0<\lambda<1.\tag{4.201}$$

На основании (4.201) заключаем, что функция $F(z)+iF(\lambda z)$ аналитически продолжается в нижний полукруг $|z-1/2|<1/2$, $y<0$, причем

$$F(z)+iF(\lambda z)=$$
$$=\begin{cases}u(x,\ y)-v(\lambda x,\ \lambda y)+\\ \qquad+i[v(x,\ y)+u(\lambda x,\ \lambda y)],\quad y\geqslant 0,\\ -v(x,\ -y)-u(\lambda x,\ -\lambda y)-\\ \qquad-i[u(x,\ -y)-v(\lambda x,\ -\lambda y)],\quad y\leqslant 0.\end{cases}\tag{4.202}$$

Поэтому в силу формулы (4.70) имеем

$$F(z)+iF(\lambda z)=$$
$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)[u(\xi,\ \eta)-v(\lambda\xi,\ \lambda\eta)]\,dt,$$
$$t=\xi+i\eta,$$

откуда сразу следует, что выбранная ветвь функции $F(z)+ iF(\lambda z)$ имеет нуль порядка выше $1/2$ при $z=0$. На основании (4.202) заключаем, что $F(z)$ аналитична в круге $|z-1/2|<1/2$ и

$$F(z)=\begin{cases} u(x,\ y)+iv(x,\ y), \quad y\geqslant 0, \\ -v(x,\ -y)-iu(x,\ -y)- \\ \qquad -2\sum_{1}^{\infty}(-1)^n[v(\lambda^{2n}x,\ -\lambda^{2n}y)- \\ -u(\lambda^{2n-1}x,\ -\lambda^{2n-1}y)+iu(2^{2n}x,\ -\lambda^{2n}y)- \\ \qquad -iv(\lambda^{2n-1}x,\ -\lambda^{2n-1}y)], \quad y\leqslant 0. \end{cases} \tag{4.203}$$

Применяя опять формулу (4.70) и учитывая условие (4.200), в силу (4.203) получаем

$$F(z)=F_0(z)-\frac{2}{\pi i}\int_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\,\frac{\omega(\xi,\ \eta)}{t+z-2tz}\,dt, \tag{4.204}$$

где

$$F_0(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\varphi(t)\,dt,$$

$$\omega(\xi,\ \eta)=\sum_{1}^{\infty}(-1)^n[u(\lambda^{2n}\xi,\ \lambda^{2n}\eta)+v(\lambda^{2n-1}\xi,\ \lambda^{2n-1}\eta)].$$

Согласно (4.202) должно иметь место равенство

$$\overline{F(z)+iF(\lambda z)}=\overline{F(z)}-\overline{iF(\lambda z)}=iF(\bar z)-F(\overline{\lambda z}), \tag{4.205}$$

и, следовательно,

$$\overline{F(\lambda^{2n}z)}+i\overline{F(\lambda^{2n-1}z)}=-iF(\lambda^{2n}\bar z)-F(\lambda^{2n-1}\bar z).$$

Так как на основании (4.205)

$$u(\lambda^{2n}\xi,\ \lambda^{2n}\eta)+v(\lambda^{2n-1}\xi,\ \lambda^{2n-1}\eta)=$$
$$=\frac{1}{2}[F(\lambda^{2n}t)-iF(\lambda^{2n-1}t)-iF(\lambda^{2n}\bar t)-F(\lambda^{2n-1}\bar t)],$$

то нам предстоит решить функциональное уравнение (2.204), записанное в виде

$$F(z)=F_0(z)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\times$$
$$\times\frac{\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n[F(\lambda^{2n}t)-iF(\lambda^{2n-1}t)-iF(\lambda^{2n}\bar t)-F(\lambda^{2n-1}\bar t)]}{t+z-2tz}\,dt. \quad (4.206)$$

Будем искать решение уравнения (4.206) в классе функций, имеющих нуль порядка единицы при $z=0$. В классе таких функций имеет место равенство

$$\int\limits_{\sigma_0}\frac{\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n[F(\lambda^{2n}t)-iF(\lambda^{2n-1}t)-iF(\lambda^{2n}\bar t)-F(\lambda^{2n-1}\bar t)]}{t\sqrt{t(1-t)}}\,dt=$$
$$=\int\limits_{\sigma_0+\bar\sigma_0}\frac{\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n[F(\lambda^{2n}t)-iF(\lambda^{2n-1}t)]\,dt}{t\sqrt{t(1-t)}}=0.$$

На основании этого равенства уравнение (4.206) можем переписать в эквивалентной форме:

$$F(z)=F_0(z)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0}\sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\,\frac{z(1-2t)}{t(t+z-2tz)}\times$$
$$\times\sum_{1}^{\infty}(-1)^n[F(\lambda^{2n}t)-iF(\lambda^{2n-1}t)-iF(\lambda^{2n}\bar t)-F(\lambda^{2n-1}\bar t)]\,dt. \quad (4.207)$$

Покажем, что функциональное уравнение (4.207) всегда имеет решение при

$$\lambda<\frac{1}{1+2\varkappa}, \quad (4.208)$$

где

$$\varkappa=\frac{\Gamma^2(1/4)}{\pi\sqrt{\pi}}.$$

С этой целью рассмотрим последовательные приближения

$$F_k(z) = F_0(z) + \frac{1}{\pi i}\int_{\sigma_0} \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \times$$

$$\times \frac{z(1-2t)}{t(t+z-2tz)} \sum_1^\infty (-1)^n [F_{k-1}(\lambda^{2n}t) -$$

$$- iF_{k-1}(\lambda^{2n-1}t) - iF_{k-1}(\lambda^{2n}\bar{t}) - F_{k-1}(\lambda^{2n-1}\bar{t})]\, dt, \quad (4.209)$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Очевидна оценка $|F_0(z)| < M_1 |z|$, $|z| \leqslant 1/2$, где положительное число M_1 зависит лишь от заданной функции φ. На основании этой оценки получаем

$$\left| \sum_1^\infty (-1)^n [F_0(\lambda^{2n}z) - iF_0(\lambda^{2n-1}z)] \right|_{\sigma_0,\, \bar{\sigma}_0} \leqslant M_1 \frac{\lambda}{1-\lambda} |z|. \quad (4.210)$$

На окружности $|z - 1/2| = 1/2$ имеем:

$$|z| = x^{1/2}, \quad |1-2t| = 1, \quad |t| = \xi^{1/2},$$

$$|1-t| = (1-\xi)^{1/2}, \quad |1-\lambda^n z| = (1 - 2\lambda^n x + \lambda^{2n} x)^{1/2},$$

$$|t - \lambda^n z| = (\xi + \lambda^{2n}x - 2\lambda^n \xi x - 2\lambda^n \eta y)^{1/2},$$

$$|t + \lambda^n z - 2\lambda^n tz| = (\xi + \lambda^{2n}x - 2\lambda^n\xi x + 2\lambda^n \eta y)^{1/2},$$

$$|dt| = \frac{d\xi}{2\xi^{1/2}(1-\xi)^{1/2}}.$$

Поэтому, принимая во внимание (4.209) и (4.210), получаем оценку

$$|F_1(\lambda^n z) - F_0(\lambda^n z)|_{\sigma_0} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} M_1 \frac{\lambda}{1-\lambda} \lambda^{n/2} x^{1/4} (1 - 2\lambda^n x + \lambda^{2n} x)^{1/4} \times$$

$$\times \int_0^1 \xi^{-3/4}(1-\xi)^{-3/4} \left[1 - \frac{2\lambda^n x - 1}{\lambda^{2n}x}\right]^{-1/4} d\xi = \frac{1}{\pi} M_1 \frac{1}{1-\lambda} \lambda^{n/2} x^{1/4} \times$$

$$\times (1 - 2\lambda^n x + \lambda^{2n} x) \frac{\Gamma^2(1/4)}{\Gamma(1/2)} \left[1 - \frac{2\lambda^n x - 1}{\lambda^{2n} x}\right]^{-1/4} =$$

$$= M_1 \varkappa \frac{\lambda}{1-\lambda} \lambda^n x^{1/2}, \quad n \geqslant 1.$$

Далее из (4.209) имеем

$$F_1(\lambda^n z) - F_0(\lambda^n z) =$$

$$= -2\lambda^n z \sum_1^\infty (-1)^m [F_0(\lambda^{2m+n}z) - iF_0(\lambda^{2m+n-1}z)] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\sigma_0}\sqrt{\frac{\lambda^n z(1-\lambda^n z)}{t(1-t)}}\,\frac{\lambda^n z}{t-\lambda^n z}\sum_1^\infty(-1)^m[F_0(\lambda^{2m}t)-iF_0(\lambda^{2m-1}t)]\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{\bar\sigma_0}\sqrt{\frac{\lambda^n z(1-\lambda^n z)}{t(1-t)}}\,\frac{\lambda^n z(1-2t)}{t(t+\lambda^n z-2\lambda^n tz)}\times$$

$$\times\sum_1^\infty(-1)^m[F_0(\lambda^{2m}t)-iF_0(\lambda^{2m-1}t)]\,dt.$$

Отсюда заключаем, что

$$|F_1(\lambda^n z) - F_0(\lambda^n z)|_{\bar\sigma_0} \leqslant M_1\varkappa\frac{\lambda}{1-\lambda}\lambda^n x^{1/2} +$$

$$+ 2\lambda^n\frac{\lambda}{1-\lambda}\lambda^n M_1 x^{1/2} < 2M_1\varkappa\frac{\lambda}{1-\lambda}\lambda^n x^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\Bigl|\sum_1^\infty(-1)^n[F_1(\lambda^{2n}t) - F_0(\lambda^{2n}t) - iF_1(\lambda^{2n-1}t) +$$

$$+ iF_0(\lambda^{2n-1}t) - iF_1(\lambda^{2n}\bar t) + iF_0(\lambda^{2n}\bar t) - F_1(\lambda^{2n-1}\bar t) +$$

$$+ F_0(\lambda^{2n-1}\bar t)]\Bigr|_{\sigma_0,\,\bar\sigma_0} < 2\cdot 2M_1\varkappa\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2\xi^{1/2}.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$|F_k(\lambda^n z) - F_{k-1}(\lambda^n z)|_{\sigma_0,\,\bar\sigma_0} < M_1\left(2\varkappa\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^k\lambda^n x^{1/2}, \qquad n \geqslant 1,$$

$$\Bigl|\sum_1^\infty(-1)^n[F_k(\lambda^{2n}t) - F_{k-1}(\lambda^{2n}t) - iF_k(\lambda^{2n-1}t) + iF_{k-1}(\lambda^{2n-1}t) -$$

$$- iF_k(\lambda^{2n}\bar t) + iF_{k-1}(\lambda^{2n}\bar t) - F_k(\lambda^{2n-1}\bar t) +$$

$$+ F_{k-1}(\lambda^{2n-1}\bar t)]\Bigr| < 2M_1\left(2\varkappa\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^k\frac{\lambda}{1-\lambda}\xi^{1/2},$$

$$k = 2, 3, \ldots$$

Из этих оценок в силу (4.208) следует, что существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(z)=F(z)$, который является решением функционального уравнения (4.207) и, следовательно, функционального уравнения (4.206).

Остается показать, что $\operatorname{Re} F(z)=\varphi$ на σ_0 и что $u(x, 0)+v(x, 0)+u(\lambda x, 0)-v(\lambda x, 0)=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Функция $F(z)$ аналитична внутри круга $|z-1/2|<1/2$ и непрерывна в замкнутом круге $|z-1/2|\leqslant 1/2$. Она обращает в тождество уравнение (4.206). Предположим, что точка z лежит в верхнем полукруге $|z-1/2|<1/2$, $y>0$. Перепишем тождество (4.206) в виде

$$F(z)=F_0(z)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\times$$
$$\times\sum_1^\infty(-1)^n\left[F(\lambda^{2n}t)-iF(\lambda^{2n-1}t)\right]dt. \quad (4.211)$$

В тождестве (4.211) перейдем к пределу при $z\to x$. Будем иметь

$$F(x)=F_0(x)-\sum_1^\infty(-1)^n\left[F(\lambda^{2n}x)-iF(\lambda^{2n-1}x)\right]-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\times$$
$$\times\sum_1^\infty(-1)^n\left[F(\lambda^{2n}t)-iF(\lambda^{2n-1}t)\right]dt. \quad (4.212)$$

Умножая (4.212) на $(1-i)$ и выделяя действительную часть, получаем

$$u(x, 0)+v(x, 0)=$$
$$=-\sum_1^\infty(-1)^n\left[u(\lambda^{2n}x, 0)+v(\lambda^{2n}x, 0)-u(\lambda^{2n-1}x, 0)+\right.$$
$$\left.+v(\lambda^{2n-1}x, 0)\right]+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\times$$
$$\times\sum_1^\infty(-1)^n\left[u(\lambda^{2n}t, 0)-v(\lambda^{2n}t, 0)+\right.$$
$$\left.+u(\lambda^{2n-1}t, 0)+v(\lambda^{2n-1}t, 0)\right]dt, \quad (4.213)$$

Если обозначим через $g(x)$ сумму

$$\sum_0^\infty (-1)^n [u(\lambda^{2n}x, 0) + v(\lambda^{2n}x, 0) + u(\lambda^{2n+1}x, 0) - v(\lambda^{2n+1}x, 0)],$$

то

$$g(\lambda x) = -\sum_1^\infty (-1)^n [u(\lambda^{2n}x, 0) - v(\lambda^{2n}x, 0) + u(\lambda^{2n-1}x, 0) + v(\lambda^{2n-1}x, 0)].$$

Таким образом, тождество (4.213) можно переписать в виде

$$g(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2tx}\right) g(\lambda t)\,dt = 0. \tag{4.214}$$

Из единственности решения задачи заключаем, что тождество (4.214) возможно лишь при $g(x) \equiv 0$. Таким образом,

$$\sum_0^\infty (-1)^n [u(\lambda^{2n}x, 0) + v(\lambda^{2n}x, 0) + u(\lambda^{2n+1}x, 0) - v(\lambda^{2n+1}x, 0)] = 0.$$

Отсюда получаем, что $u(x, 0) + v(x, 0) + u(\lambda x, 0) - v(\lambda x, 0) \equiv 0$. Это значит, что $F(z)$ удовлетворяет условию (4.205) и, в силу (4.204),

$$\operatorname{Re} F(z) = \varphi \quad \text{на} \quad \sigma_0.$$

Следовательно, *функция* $\operatorname{Re} F(z)$ *является решением задачи* (4.200), (4.201).

5°. Некоторые замечания относительно общей смешанной задачи. Границу смешанной области D, рассмотренной в предыдущих пунктах настоящего параграфа, Трикоми в начале гл. V своего фундаментального исследования [1] называет контуром третьего рода. По всей вероятности, тогда ему показалось, что при исследовании общей смешанной задачи, по сравнению с задачей T, трудности не возникает. Это свое мнение Трикоми четко сформулировал в книге [5] (см. стр. 415 русского издания). Впоследствии он же признал, что исследование общей смешанной задачи для уравнений смешанного типа сталкивается с большими, отнюдь не техническими, трудностями.

На гидродинамический смысл общей смешанной задачи впервые обратил внимание Ф. И. Франкль [1].

Задача М в том частном случае, когда участок AF линии L совпадает с характеристикой, была исследована нами и Ф. И. Франклем почти одновременно, но в нашей работе [1] — для уравнения (L), а в работе [1] Ф. И. Франкля — для уравнения (Т).

Задача М была исследована также К. И. Бабенко [1], [2]. Она занимала центральное место как в нашей докторской диссертации (защищенной в 1951 г.), так и в докторской диссертации К. И. Бабенко (защищенной в 1952 г.). Мы оба работали в этом направлении параллельно, и наши подходы к исследованию задачи М нередко пересекались. К сожалению, диссертацию К. И. Бабенко не опубликовал и ограничился лишь напечатанием своего доклада по этой теме на одном из заседаний Московского математического общества (см. К. И. Бабенко [2]).

Несколько позже общей смешанной задачей начали заниматься и за границей. Применяя методы функционального анализа, Моравец [1]—[4], Фридрихс [1], Протер [1]—[4] и др. показали существование обобщенного решения этой задачи, накладывая на эллиптическую часть σ границы ∂D смешанной области D ограничения не менее сильные, чем указанные выше ограничения (4.147) или (4.162). Эти ограничения недавно значительно были ослаблены в работах В. В. Коврижкина [1], А. П. Солдатова [1], [2] и В. Н. Врагова [1].

На некорректность постановки задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в смешанной области, по-видимому, впервые было обращено внимание в нашей работе [2] в случае уравнения (L).

§ 4. Уравнения смешанного типа в многомерных областях и некоторые вопросы спектральной теории задачи Т

1°. Аналог задачи Т в конечной трехмерной односвязной области. Обозначим через D конечную односвязную трехмерную область, ограниченную кусочно-ляпуновской поверхностью

$$S\colon\ z = f(x,\ y), \qquad z \geqslant 0,$$

и двумя конусами

$$S_1:\ x+x_0=\sqrt{y^2+(z-z_0)^2}, \qquad z\leqslant 0,$$

$$S_2:\ x-x_0=-\sqrt{y^2+(z-z_0)^2}, \qquad z\leqslant 0.$$

Пусть

$$D^+=D\cap\{z>0\}, \qquad D^-=D\cap\{z<0\},$$

а T — область плоскости $z=0$, отделяющая D^+ от D^-.

Трехмерным аналогом задачи Т можно считать следующую задачу: *найти функцию* $u(x, y, z)\in C^{0,0}(\bar{D})\cap C^{1,0}(D)\cap\cap C^{2,0}(D^+\cup D^-)$, *удовлетворяющую в области* D *при* $z\neq 0$ *уравнению*

$$L(u)=\operatorname{sgn} z\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=g(x, y, z), \qquad (4.215)$$

где $g(x, y, z)$ — *заданная достаточно гладкая действительная функция, и условиям*

$$u|_S=0, \qquad u|_{S_1}=0. \qquad (4.216)$$

Задача (4.215), (4.216) была рассмотрена в нашей работе [4].

Без ограничения общности, очевидно, можно считать, что $x_0=1$, $z_0=0$. При исследовании задачи (4.215), (4.216) дополнительно будем предполагать, что поверхность S состоит из двух конических поверхностей

$$S_3:\ x-1=-\sqrt{y^2+z^2}, \qquad S_4:\ x+1=\sqrt{y^2+z^2}.$$

Для решения $u(x, y, z)$ задачи (4.215), (4.216), при требовании существования соответствующих несобственных интегралов, справедливы интегральные равенства

$$2\int\limits_{D^+}[(x-1)u_x+yu_y+zu_z]\,g\,dv=$$

$$=2\int\limits_{D^+}(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\,dv+\sqrt{2}\iint\limits_{S_4}(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\,ds+$$

$$+2\iint\limits_{T}[(1-x)u_xu_z-yu_yu_z]\,dx\,dy, \qquad (4.217)$$

$$2\int\limits_{D^-}[(x-1)u_x+yu_y]g\,dv=$$

$$=2\int\limits_{D^-}u_z^2dz-2\iint\limits_{T}[(1-x)u_xu_z-yu_yu_z]\,dx\,dy+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{S_2}\frac{1}{1-x}\{[(1-x)u_y-yu_x]^2+$$

$$+[(1-x)u_x-yu_y-zu_z]^2\}\,ds. \qquad (4.218)$$

Из равенств (4.217) и (4.218), учитывая, что первые производные от искомого решения должны быть непрерывными в области D, следует единственность решения задачи (4.215), (4.216).

Заметим, что предложенный здесь метод доказательства единственности решения задачи (4.215), (4.216) весьма искусствен. Но тем не менее существует довольно широкий класс поверхностей S, для которых этим методом можно показать единственность решения указанной задачи. С этой целью в подынтегральных выражениях формул (4.217) и (4.218) множители $x-1$, y и z следует заменить соответствующим образом подобранными функциями.

Функцию $u(x, y, z)$ с производной u_z из гильбертова пространства $L_2(D)$ будем называть слабым решением задачи (4.215), (4.216), если имеет место тождество

$$\int\limits_D w_z g\,dv=-\int\limits_D u_z(\operatorname{sgn} z\cdot w_{xx}+w_{yy}+w_{zz})\,dv \qquad (4.219)$$

для любой функции w, принадлежащей в каждой из областей D^+ и D^- пространству C^3 и удовлетворяющей условиям: $w_y=w_z=0$ на S_3; $w_x=0$ на S_1; $w_x=w_z=0$ на S_4; $w=w_z=0$ на S_2; $(w_{yy}+w_{zz})_{z=-0}=(w_{yy}+w_{zz})_{z=+0}$, $(w_x)_{z=-0}=-(w_x)_{z=+0}=0$, $(w_y)_{z=-0}=(w_y)_{z=+0}$, $(w_z)_{z=-0}=(w)_{z=+0}$ и $Lw=0$ на границе области D.

Существование функции $u(x, y, z)$, для которой имеет место тождество (4.219), является следствием неравенства $\int\limits_D w_z^2dv\leqslant k\int\limits_D(Lw)^2\,dv$, в справедливости которого в случае $z_0=0$, $x_0=1$ и на этот раз убеждаемся из очевидного неравенства

$$\int\limits_{D^+} [m(1+z)w_x + yw_y + zw_z] Lw\,dv + \int\limits_{D^-} [m(1+x)w_x + yw_y] Lw\,dv \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{D^+} [(2-m)w_x^2 + mw_y^2 + mw_z^2]\,dv + \int\limits_{D^-} [(m-1)w_x^2 + (m-1)w_y^2 + (m+1)w_z^2]\,dv,$$

где m — постоянная, причем $1 < m < 2$.

Относительно распространения приведенного здесь метода доказательства существования слабых решений на случай определенного класса поверхностей S можно повторить соображение, высказанное выше в связи с доказательством единственности решения.

Из тождества (4.219) следует, что достаточно гладкое слабое решение основной смешанной задачи является сильным решением.

При требовании непрерывной дифференцируемости правой части $g(x, y, z)$ уравнения (4.215), полученное выше слабое решение, по-видимому, обладает нужным порядком гладкости, но этот факт далеко не очевиден и нуждается в отдельном доказательстве.

2°. Аналог задачи T в трехмерной цилиндрической области. Пусть теперь D — трехмерная область с границей $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, где

$$S_1:\ x^2 + {}^4/_9 z^3 = 1, \qquad z \geqslant 0,$$
$$S_2:\ x - {}^2/_3(-z)^{3/2} = -1, \qquad z \leqslant 0,$$
$$S_3:\ x + {}^2/_3(-z)^{3/2} = 1, \qquad z \leqslant 0.$$

Простейшим трехмерным аналогом задачи T, очевидно, является задача определения регулярного в D решения $u(x, y, z)$ уравнения

$$z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g(x, y, z) \tag{4.220}$$

класса $C^{0,0}(D \cup S)$, удовлетворяющего условиям

$$u|_{S_1} = 0, \qquad u|_{S_2} = 0. \tag{4.221}$$

Будем предполагать, что заданная функция $g(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими производными первого порядка, причем g, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ и $\frac{\partial g}{\partial z}$ стремятся к нулю при $y \to \pm\infty$. Искомое решение $u(x, y, z)$ при $y \to \pm\infty$ естественно подчинить аналогичным требованиям.

Задача (4.220), (4.221) может быть исследована примененным в предыдущем пункте способом.

В частности, единственность решения этой задачи при дополнительных требованиях, наложенных на u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ в области D вплоть до границы, получается сразу.

В самом деле, для решения $u(x, y, z)$ задачи (4.220), (4.221), при требовании существования соответствующих несобственных интегралов, имеет место следующее интегральное равенство:

$$
\begin{aligned}
2\int\limits_D [(x-1)u_x + du_z]\, g\, dv = {} & \\
= 2\int\limits_{D^+} u_y^2 dv &+ \int\limits_{D^-} (-zu_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dv + \\
+\int\limits_S \{z[(x-1)x_\nu - dz_\nu]u_x^2 &+ [-(x-1)x_\nu - dz_\nu]u_y^2 + \\
&+ [-(x-1)x_\nu + dz_\nu]u_z^2 + 2(x-1)y_\nu u_x u_y + \\
&+ 2[(x-1)z_\nu + z\,dx_\nu]u_x u_z + 2dy_\nu u_y u_z\}\, d\omega, \qquad (4.222)
\end{aligned}
$$

где $d = z$ в области $D^+ = (D \cap z > 0)$ и $d = 0$ в области $D^- = (D \cap z < 0)$, а $(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = \nu_S$ — внешняя нормаль границы S области D.

Принимая во внимание то обстоятельство, что

$$
\nu_{S_1} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + \frac{4}{9}z^4}}\left(x,\ 0,\ \frac{2}{3}z^2\right), \qquad \nu_{S_2} = \frac{1}{\sqrt{1-z}}[-1,\ 0,\ (-z)^{1/2}],
$$

$$
\nu_{S_3} = \frac{1}{\sqrt{1-z}}[1,\ 0,\ (-z)^{1/2}]
$$

и, кроме того, $x_\nu u_y - y_\nu u_x = x_\nu u_z - z_\nu u_x = y_\nu u_z - z_\nu u_y = 0$ на поверхностях S_1 и S_2 и $zu_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 0$ на поверхности S_2, равенство (4.222) мы можем переписать в виде

$$2\int\limits_{D}[(x-1)u_x+du_z]\,g\,dv=$$

$$=2\int\limits_{D+}u_y^2dv+\int\limits_{D-}(-zu_x^2+u_y^2+u_z^2)\,dv+$$

$$+\int\limits_{S_1}\frac{3-2x-x^2}{2\sqrt{x^2+\frac{4}{9}z^4}}(zu_x^2+u_y^2+u_z^2)\,d\omega+$$

$$+\int\limits_{S_2}\frac{x-1}{\sqrt{1-z}}[zu_x^2-u_y^2+2(-z)^{1/2}u_xu_z]\,d\omega. \qquad (4.223)$$

Отсюда сразу следует единственность решения задачи (4.220), (4.221).

Из формул (4.222) и (4.223) видно, что для производных первого порядка от искомого решения $u(x, y, z)$ задачи (4.220), (4.221) вблизи угловых линий границы S области D допускаются особенности, не нарушающие сходимости несобственных интегралов.

Для доказательства существования решения задачи (4.220), (4.221) при принятых предположениях относительно поведения функций $g(x, y, z)$ и $u(x, y, z)$ мы с успехом можем использовать преобразование Фурье.

В самом деле, наложенные выше на функции $u(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ ограничения позволяют ввести следующие преобразования Фурье:

$$V(x, \lambda, z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x, y, z)\,e^{i\lambda y}dy \qquad (4.224)$$

и

$$G(x, \lambda, z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(x, y, z)\,e^{i\lambda y}dy.$$

Если функция $u(x, y, z)$ является решением задачи (4.220), (4.221), то функция $V(x, \lambda, z)$ должна быть регулярным решением уравнения

$$zV_{xx}+V_{zz}-\lambda^2V=G \qquad (4.225)$$

в плоской области $D^* = D \cap \{y=0\}$, и наоборот. Причем $V(x, \lambda, z)$ должна быть непрерывной в замкнутой области $\bar{D}^*$ и обращающейся в нуль на частях σ: $x^2 + \frac{4}{9} z^3 = 1$, $z \geqslant 0$, и σ_1: $\frac{2}{3}(-z)^{3/2} - x = 1$, $z \leqslant 0$, границы Γ области D^*, т. е. функция $V(x, \lambda, z)$ должна быть решением плоской задачи T для уравнения (4.225), рассмотренной в работах Геллерстедта [1], [3].

Решение $V(x, \lambda, z)$ указанной задачи всегда существует и единственно.

Искомое решение $u(x, y, z)$ задачи T должно получиться преобразованием, обратным (4.224):

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, \lambda, z) e^{-i\lambda y} d\lambda. \tag{4.226}$$

Из анализа решения плоской задачи Трикоми для уравнения (4.225) легко усмотреть, что несобственный интеграл в правой части формулы (4.226) существует и действительно дает решение задачи (4.220), (4.221).

3°. Задача Трикоми со спектральным параметром. Как и при рассмотрении задачи T для уравнения (L), будем считать, что смешанная область D конечна и ограничена ляпуновской дугой σ, лежащей в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$, и отрезками AC и BC прямых $x + y = 0$ и $x - y = 1$ соответственно, причем $D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$.

В настоящем пункте речь пойдет об однородной задаче T

$$u|_\sigma = 0, \qquad u|_{AC} = 0 \tag{4.227}$$

со спектральным параметром λ^2 для уравнения

$$\operatorname{sgn} y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda^2 u = g(x, y), \qquad (x, y) \in D, \tag{4.228}$$

в предположениях, что

$$u \in C^{0,0}(\bar{D}) \cap C^{2,0}(D^+) \cap C^{2,0}(D^-),$$

а $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в $\bar{D}$ всюду, кроме, быть может, точек $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, в которых они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы. В этих предположениях Е. И. Моисеев [1] доказал, что задача (4.227), (4.228) не может иметь более одного решения, если

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant k_0 |\operatorname{Re}\lambda|,$$

где число $k_0 > 1/\sqrt{2}$ и является корнем уравнения

$$k_0^2 - k_0 + k_0\sqrt{2k_0^2 - 1} - 1 = 0. \qquad (4.229)$$

Из результата, полученного в другой работе Е. И. Моисеева [2], следует, что рассмотренная в предыдущем пункте однородная задача Трикоми для уравнения (4.225) не может иметь более одного решения, если

$$|\arg\lambda| < \pi/6.$$

Задачей Трикоми со спектральным параметром занимались также Т. Ш. Кальменов [1], В. П. Михайлов [2], С. М. Пономарев [1] и др.

4°. **Еще одна задача для уравнения (2.176).** В смешанной области D, рассмотренной в пункте 2° § 1 настоящей главы для уравнения (2.176), рассмотрим краевую задачу, которая отличается от (4.3), (4.4), (4.5) лишь тем, что условие (4.4) заменено условием (3.158).

Как уже было показано выше (см. пункт 6° § 3 гл. II и пункт 4° § 4 гл. III), решения задач (2.176), (2.188), (4.3) и (2.176), (3.130) в областях D^+ и D^- соответственно даются в квадратурах.

Подставляя решение $u(x, y)$ задачи (2.176), (3.130) в условие (3.158) и, наряду с этим, вычисляя значение $\tau(x) = u(x, 0)$ решения $u(x, y)$ задачи (2.176), (2.188), (4.3), с учетом условия (4.5) для определения неизвестных функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ будем иметь два функциональных соотношения, из которых, после исключения $\tau(x)$, для $\nu(x)$ получим линейное сингулярное интегральное уравнение. Выполнение условия (3.159) гарантирует единственность решения задачи (2.176), (3.158), (4.3), (4.5) и нормальную разрешимость полученного для $\nu(x)$ интегрального уравнения. Отсюда, в свою очередь, следует существование решения рассматриваемой задачи.

Во избежание технической сложности, приведенное выше рассуждение детально будем демонстрировать в двух случаях: при $\alpha = 0$ и при $\alpha = 1/2 - m$.

Сначала пусть $\alpha=0$ и $m=1$. В этом случае (2.176) является уравнением Трикоми, условие (3.158) имеет вид

$$-\lambda^2(x)\,x^{1/6}\frac{d}{dx}\int_0^x \psi_1\left(\frac{t}{2}\right)\frac{dt}{(x-t)^{5/6}}+$$

$$+\mu^2(x)(1-x)^{1/6}\frac{d}{dx}\int_x^1 \psi_2\left(\frac{1+t}{2}\right)\frac{dt}{(t-x)^{5/6}}=\frac{\pi\Gamma(2/3)}{\Gamma^2(5/6)}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\psi(x), \tag{4.230}$$

а решение $u(x, y)$ задачи (2.176), (3.130) дается формулой

$$u(x, y)=\gamma_1\int_0^1 \tau\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(1-2t)\right][t(1-t)]^{-5/6}\,dt+$$

$$+\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\gamma_2 y\int_0^1 \nu\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(1-2t)\right][t(1-t)]^{-1/6}\,dt, \tag{4.231}$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(1/6)},\qquad \gamma_2=\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(5/6)}.$$

В силу (4.231) функция $u(x, y)$ на кривых σ_1 и σ_2 принимает соответственно значения

$$u\left[\frac{x}{2},\ -\left(\frac{3}{4}x\right)^{2/3}\right]=\psi_1\left(\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\gamma_1 x^{2/3}\int_0^x \frac{\tau(t)\,dt}{[t(x-t)]^{5/6}}-\gamma_2\int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{[t(x-t)]^{1/6}}, \tag{4.232}$$

$$u\left[\frac{1+x}{2},\ -\left(\frac{3}{4}(1-x)\right)^{2/3}\right]=\psi_2\left(\frac{1+x}{2}\right)=$$

$$=\gamma_1(1-x)^{2/3}\int_x^1 \frac{\tau(t)\,dt}{[(1-t)(t-x)]^{5/6}}-\gamma_2\int_x^1 \frac{\nu(t)\,dt}{[(1-t)(t-x)]^{1/6}},$$

$$0<x<1. \tag{4.233}$$

Применяя формулу обращения интегрального уравнения Абеля, перепишем равенства (4.232) и (4.233) в виде

$$\nu(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}}-\frac{x^{1/6}}{2\pi\gamma_2}\frac{d}{dx}\int_0^x\psi_1\left(\frac{t}{2}\right)\frac{dt}{(x-t)^{5/6}}, \tag{4.234}$$

$$\nu(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\tau(t)\,dt}{(t-x)^{2/3}}+$$
$$+\frac{(1-x)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}\frac{d}{dx}\int_x^1\psi_2\left(\frac{1+t}{2}\right)\frac{dt}{(t-x)^{5/6}},\quad \gamma=\frac{3^{2/3}\Gamma^3(1/3)}{4\pi^2}. \tag{4.235}$$

Из (4.234) и (4.235) в силу (3.159) и (4.230) получаем

$$\nu(x)=\frac{\sqrt{3}\,\lambda^2(x)}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}}-\frac{\sqrt{3}\,\mu^2(x)}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\tau(t)\,dt}{(t-x)^{2/3}}+\psi(x). \tag{4.236}$$

Для соответствующей (2.176), (3.158), (4.3), (4.230) однородной задачи из (4.236) получаем

$$\nu(x)=\frac{\sqrt{3}\lambda^2(x)}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}}-\frac{\sqrt{3}\,\mu^2(x)}{2\pi\gamma}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\tau(t)\,dt}{(t-x)^{2/3}}. \tag{4.237}$$

На основании (4.237) легко показать справедливость следующего **принципа экстремума**: *решение* $u(x, y)$ *задачи* (2.176), (3.158), (4.3), (4.5) *при* $\psi(x)\equiv 0$ *принимает положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области* D^+ *на дуге* σ.

Действительно, в области D^+ функция $u(x, y)$ не может достигать экстремума. Если положительный максимум в D^+ функции $u(x, y)$ достигается в точке $P(\xi, 0)$ интервала $0<x<1$, то в этой точке должно быть $\tau'(\xi)=0$, $\nu(\xi)<0$. Последнее неравенство следует из принципа Заремба—Жиро. Записывая равенство (4.237) в точке $x=\xi$ в виде

$$\nu(\xi)=\frac{\lambda^2(\xi)}{\sqrt{3}\,\pi\gamma}\left[\int_0^\xi\frac{\tau(\xi)-\tau(t)}{(\xi-t)^{5/3}}dt+\frac{3}{2}\tau(\xi)\,\xi^{-2/3}\right]+$$
$$+\frac{\mu^2(\xi)}{\sqrt{3}\,\pi\gamma}\left[\int_\xi^1\frac{\tau(\xi)-\tau(t)}{(t-\xi)^{5/3}}dt+\frac{3}{2}\tau(\xi)(1-\xi)^{-2/3}\right],\qquad 0<\xi<1,$$

заключаем, что $\nu(\xi)>0$. Полученное противоречие исключает возможность достижения функцией $u(x, y)$ положительного максимума в точке $P(\xi, 0)$. Аналогично доказывается, что функция $u(x, y)$ не может достигать отрицательного минимума $\bar{D}^+$ в точках ξ отрезка $0<x<1$.

Из доказанного принципа следует, что в рассматриваемом случае задача (2.176), (3.158), (4.3), (4.230) не может иметь более одного решения.

При доказательстве существования решения этой задачи, очевидно, можно считать без ограничения общности, что $\varphi\equiv 0$.

Для значения $\tau(x)=u(x, 0)$ решения $u(x, y)$ задачи (2.176), (2.188), (4.3) в силу (4.31) имеем

$$\tau(x)=-\gamma\int_0^1\left[\frac{1}{|t-x|^{1/3}}-\frac{1}{(t+x-2tx)^{1/3}}\right]\nu(t)\,dt, \qquad 0<x<1. \tag{4.238}$$

Подставляя значение $\tau(x)$ из (4.238) в правую часть (4.236), получаем

$$\nu(x)+\frac{\lambda^2(x)}{\sqrt{3}\,\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt-$$
$$-\frac{\mu^2(x)}{\sqrt{3}\,\pi}\int_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=\psi(x). \tag{4.239}$$

На основании очевидных тождеств

$$\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\equiv\frac{t}{x}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)\equiv$$
$$\equiv\frac{1-t}{1-x}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x-2tx}\right)$$

уравнение (4.239) принимает вид

$$\nu(x)+\int_0^1 K(x, t)\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)\nu(t)\,dt=\psi(x), \tag{4.240}$$

где

$$K(x, t)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[\left(\frac{x}{t}\right)^{1/3}\lambda^2(x)-\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1/3}\mu^2(x)\right]. \tag{4.241}$$

В силу (3.159) из (4.241) имеем

$$1 \pm K(x,\ x) = 1 \pm \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\pi\sqrt{3}} \neq 0. \tag{4.242}$$

Условие (4.242) гарантирует существование регуляризатора, приводящего уравнение (4.241) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Из возможности приведения задачи (2.176), (3.158), (4.3), (4.240) к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода и из единственного искомого решения следует существование последнего. При $\lambda(x)=0$ (или $\mu(x)=0$) решение задачи (2.176), (3.158), (4.3), (4.240) выписывается в квадратурах, поскольку в этом случае в квадратурах выписывается решение интегрального уравнения (4.239).

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha = {}^1/_2 - m$. Из формулы (3.167), дающей решение задачи (2.176), (3.130) при ${}^1/_2 - m < \alpha < 1$, после интегрирования по частям в первом слагаемом правой ее части в пределе при $\beta \to 0$ получим решение уравнения (2.176) при $\alpha = {}^1/_2 - m$:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\tau\left[x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right] + \frac{1}{2}\tau\left[x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right] -$$
$$- \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2(1-2t)}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}}\right] dt. \tag{4.243}$$

В рассматриваемом случае краевое условие (3.158) принимает вид

$$-2\lambda^2(x)\frac{d}{dx}u\left[\frac{x}{2},\ -\left(\frac{2m+1}{2}\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{2m+1}}\right] +$$
$$+ 2\mu^2(x)\frac{d}{dx}u\left[\frac{1+x}{2},\ -\left(\frac{2m+1}{2}\frac{1-x}{2}\right)^{\frac{2}{2m+1}}\right] = \psi(x). \tag{4.244}$$

Задача с краевым условием, близким к (4.244), была рассмотрена в работе А. М. Нахушева [2].

Подставляя значение $u(x, y)$ из формулы (4.243) в левую часть (4.244), получаем

$$\nu(x) = (\lambda^2 - \mu^2)\,\tau'(x) + \psi(x). \tag{4.245}$$

Для соответствующей (2.176), (3.158), (4.3), (4.245) однородной задачи имеем

$$\nu(x) = (\lambda^2 - \mu^2)\tau'(x),$$

откуда сразу следует единственность решения рассматриваемой задачи.

Для значения $\tau(x) = u(x, 0)$ решения задачи (2.176), (3.130) на этот раз в силу (4.26) имеем

$$\tau(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 [\log|t - x| - \log(t + x - 2tx)]\,\nu(t)\,dt = 0. \quad (4.246)$$

После исключения $\tau(x)$ из равенств (4.245) и (4.246) получаем

$$\nu(x) + \frac{\lambda^2(x) - \mu^2(x)}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{t - x} + \frac{1 - 2t}{t + x - 2tx}\right)\nu(t)\,dt = \psi(x). \quad (4.247)$$

Так как в силу (3.159) имеем $1 \pm (\lambda^2 - \mu^2)/\pi \neq 0$, то существует регуляризатор сингулярного интегрального уравнения (4.247). Отсюда, как и в случае $\alpha = 0$, заключаем, что решение рассматриваемой задачи существует (см. А. В. Бицадзе [7], [8]).

5°. Многомерный аналог задачи, рассмотренной в предыдущем пункте. Пусть D — конечная область пространства E_{n+1} переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$, ограниченная коноидом K, соответствующим уравнению (3.173), и поверхностью Ляпунова σ, лежащей в полупространстве $x_0 \leqslant 0$ и ортогональной плоскости $x_0 = 0$. Общий участок S границ областей

$$D^+ = D \cap \{x_0 < 0\}, \quad D^- = D \cap \{x_0 > 0\}$$

представляет собой шар $\{x_0 = 0, \ |x| \leqslant r\}$. Обозначим через S_0 сферу $\{x_0 = 0, \ |x| = r\}$.

В наших совместных с А. М. Нахушевым работах [1], [2], [3] были рассмотрены некоторые задачи для уравнения (3.173) в смешанной области D. В этом пункте рассматривается одна из этих задач. А именно, требуется найти функцию $u(x, x_0)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, x_0)$ — регулярное в $D \setminus S$ решение уравнения (3.173), принадлежащее классу $C^{0,0}(\bar{D}) \cap C^{3,0}(D^-)$; 2) функция

$|x_0|^{1/2-m}\dfrac{\partial u}{\partial x_0}$ непрерывна в D и интегрируема по S_0;
3) $u(x, x_0)$ удовлетворяет условиям

$$u(x, x_0)=\varphi(x, x_0), \qquad (x, x_0)\in\sigma, \tag{4.248}$$

$$\left(B_n^x x_0^{1/2-m}\frac{\partial}{\partial x_0}+\mu B_n^x\right)u=\psi(x), \qquad (x, x_0)\in K, \tag{4.249}$$

$$\lim_{x_0\to 0} x_0^{1/2-m}u_{x_0}(0, x_0)=c_1, \tag{4.250}$$

где B_n^x — введенный в пункте 5° § 4 гл. III *оператор*, φ и ψ — заданные функции соответственно из классов $C^{(n+7)/2}(\sigma)$ и $C^{(n+7)/2}(|x|\leqslant r)$, μ и c_1 — заданные постоянные. Пользуясь свойством (3.174) решений уравнения (3.173), нетрудно показать, что функциональное соотношение между $\tau(r)=u(x, 0)$ и $\nu(x)=\lim\limits_{x_0\to 0} x_0^{1/2-m}u_{x_0}$, принесенное из D^-, в силу (4.249) и (4.250) имеет вид

$$\nu(x)+\mu\tau(x)=\psi(x)-c_0\mu-c_1, \tag{4.251}$$

где, как и выше, $c_0=u[0, (r/\beta)^\beta]$.

Имеет место следующий п р и н ц и п э к с т р е м у м а: *решение* $u_0(x, x_0)$ *однородной задачи, соответствующей задаче* (3.173), (4.248), (4.249), (4.250), *при* $\mu\geqslant 0$ *положительного максимума и отрицательного минимума в* $\bar{D}^+$ *достигает на* σ.

Действительно, равенство (4.251) можно переписать в виде

$$\nu_0(x)=-\mu\tau_0(x), \quad |x|<r, \quad \nu_0=\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x_0}, \quad \tau_0=u(x, 0), \tag{4.252}$$

ибо, как нетрудно видеть, $c_0=0$.

В области D^+ функция $u_0(x, x_0)$ не может достигать экстремума. Если положительный максимум в $\bar{D}^+$ функции $u_0(x, x_0)$ достигается в точке $(\xi, 0)\in S$, то в этой точке $\nu_0(\xi)>0$. Поскольку функция $u_0[x, (y_0/\beta)^3]$ как функция переменных x и y_0 является гармонической в области D_1, где D_1 — образ D^+ при отображении $x=x$, $y_0=-\beta(-x_0)^{1/3}$, то последнее равенство вытекает из принципа Зарембы—Жиро. С другой стороны, из (4.252) заключаем, что $\nu_0(\xi)\leqslant 0$. Полученное противоречие исключает возможность достижения функцией $u_0(x, x_0)$ положительного максимума в точке $(\xi, 0)$. Аналогично доказывается, что функция $u_0(x, x_0)$ не может достигать отрицательного минимума в $\bar{D}^+$ в точках $(\xi, 0) \in S$.

Из доказанного принципа и однозначной разрешимости видоизмененной задачи Коши для уравнения (3.173) в области D^- следует, что рассматриваемая задача не может иметь более одного решения.

Переходя к доказательству существования решения, для простоты будем предполагать, что σ совпадает с полусферой σ_0 в римановой метрике, определенной характеристической формой уравнения (3.173) при $x_0 < 0$, и $\varphi(x, x_0) = 0$.

Определенная формулой

$$G(x, x_0; \xi, \xi_0) = \gamma_1 [|x-\xi|^2 + |\zeta_0 - y_0|^2]^{(1-n)/2} - \\ - \gamma_1 r^{n-1} [(|\xi|^2 + \zeta_0^2)(|x-\xi^*|^2 + |y_0 - \zeta_0^*|^2]^{(1-n)/2},$$

где

$$\xi^0 = r^2\xi/(|\xi|^2 + \zeta_0^2), \quad \zeta_0^* = r^2\zeta_0/(|\xi|^2 + \zeta_0^2),$$
$$y_0 = -\beta(-x_0)^{1/\beta}, \qquad \zeta_0 = -\beta(-\xi_0)^{1/\beta},$$
$$2(n-1)\gamma(-n)\gamma_1 = \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right),$$

действительная функция $G(x, x_0; \xi, \xi_0)$ при $x \neq \xi$, $x_0 \neq \xi_0$ является решением уравнения (3.173) в D^+, удовлетворяющим условиям: $G=0$ при $(x, x_0) \in \sigma_0$, $G(x, 0; \xi, \xi_0) = 0$ при $\xi_0 = 0$. Учитывая это обстоятельство и применяя в D^+ формулу (GO), получаем второе основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau(x) + 2\gamma_1 \int\limits_{|\xi| \leqslant r} (|x-\xi|^{1-n} - r^{n-1}|x\xi^2 - \xi r^2|^{1-n})\nu(\xi)\,d\omega_\xi = 0. \quad (4.253)$$

Исключая $\tau(x)$ из (4.251) и (4.253), для $\nu(x)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого вытекает из единственности решения рассматриваемой задачи.

Следует отметить, что рассмотренная в этом пункте задача относится к классу задач с нелокальными краевыми условиями. Исследованию задач такого типа посвящены работы С. А. Алдашева [1] и С. К. Кумыковой [1], [2].

Глава V. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Структурные свойства решений некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных

1°. Общие замечания. В теории нелинейных уравнений в частных производных одним из центральных вопросов является изучение влияния характера нелинейности на разрешимость классических линейных задач для рассматриваемого нелинейного уравнения. При этом особый интерес представляют собой уравнения и задачи, не удовлетворяющие известным стандартным условиям существования и единственности решения. К ним, в частности, относится ряд нелинейных уравнений гидромеханики, теории гравитационного поля, теории поверхностей и др. Поскольку даже правильная постановка задач для этих уравнений связана с принципиальными трудностями, большое значение приобретает построение широких классов точных решений.

В этой главе предлагается простой способ установления структурных и качественных свойств решений некоторых важных классов нелинейных уравнений в частных производных.

2°. Случай одного уравнения. Пусть имеется нелинейное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij}(x)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - b(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{n} c^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x,\ u) = 0. \quad (5.1)$$

Вводя в рассмотрение новые неизвестные функции $\varphi(v)$ и $v(x)$, связанные с искомой функцией $u(x)$ соотношением

$$u = \varphi(v), \quad (5.2)$$

уравнение (5.1) можем записать в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\,[\varphi''-b(\varphi)\,\varphi'^2]\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+$$
$$+\varphi'\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} c^i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)+d(x,\varphi)=0.$$

Отсюда следует, что уравнение (5.1) будет удовлетворено, если

$$\varphi''-b(\varphi)\,\varphi'^2=0 \tag{5.3}$$

и

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} c^i\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{1}{\varphi'(v)}\,d(x,\varphi(v))=0. \tag{5.4}$$

Равенство (5.3) представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, общее решение которого в неявной записи имеет вид

$$v=\alpha\int_0^u \exp\left(-\int_0^\tau b(t)\,dt\right)d\tau+\beta, \tag{5.5}$$

где α и β — произвольные постоянные.

Когда из равенства (5.5) можно определить $u(x)$ как функцию $v(x)$: $u=\varphi(v)$, то при условии, что $\varphi'(v)\neq 0$, для определения функции v получаем уравнение в частных производных (5.4), линейное относительно ее первых и вторых производных. В частности, когда

$$\frac{d(x,\varphi)}{\varphi'}=d_1(x)\,v+d_2(x),$$

уравнение (5.4) является линейным:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} c^i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}+d_1(x)\,v+d_2(x)=0. \tag{5.6}$$

Если $v(x)$ — общее решение уравнения (5.6), *то формула* (5.2) *дает общее решение уравнения* (5.1), *и, стало быть, в этом случае влияние характера нелинейности урав-*

нения (5.1) *на структурные свойства его решений полностью описывается соотношением* (5.5) *между* $u(x)$ *и* $v(x)$. *Следовательно, задачи (краевые, начальные и т. д., в зависимости от типа уравнения), поставленные для уравнения* (5.1), *порождают соответствующие задачи для уравнения* (5.6), *причем корректность постановки задачи для исходного уравнения* (5.1) *зависит от корректности полученной для уравнения* (5.6) *задачи и от возможности обращения равенства* (5.5) *относительно* u, *причем наличие или отсутствие бифуркации решений уравнения* (5.1) *существенно зависят от структуры римановой поверхности функциональной зависимости* (5.5) *между* u *и* v.

3°. Случай системы уравнений. Рассмотрим теперь систему нелинейных уравнений в частных производных

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij}(x)\left[\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{l,s=1}^{m} b_k^{sl}(u_1, \ldots, u_m)\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right] = 0, \quad (5.7)$$

$$k = 1, \ldots, m.$$

Если искать решение $u_1, \ldots, u_m$ этой системы в виде

$$u_k = \varphi_k(v), \qquad k = 1, \ldots, m, \quad (5.8)$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — решение системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_k'' - \sum_{s,l=1}^{m} b_k^{sl}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)\varphi_s'\varphi_l' = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \quad (5.9)$$

то для определения функции $v(x)$ получаем линейное уравнение в частных производных

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \quad (5.10)$$

При наличии решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ системы (5.9) и общего решения $v(x)$ линейного уравнения (5.10) формула (5.8), очевидно, дает *класс частных решений* системы (5.7) (см. А. В. Бицадзе [15], [3]).

§ 2. Некоторые простые примеры

1°. Уравнение Рида и Барта. В качестве первого примера рассмотрим вариант уравнения, рассмотренного Ридом и Бартом [1]:

$$x_1x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}-x_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-2x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+2x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+c(x_1,\ x_2,\ u)-$$
$$-\gamma u^{-1}\left[x_1x_2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-x_2^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]=0, \quad (5.11)$$

где при $\gamma=1$

$$c=-2u\log|u| \quad (5.12)$$

и при $\gamma=\text{const}\neq 1$

$$c=-\frac{2}{1-\gamma}u. \quad (5.13)$$

Уравнение (5.11) гиперболично всюду при $x_1\neq 0$, $x_2\neq 0$, параболически вырождается вдоль прямых $x_1=0$ и $x_2=0$, причем вдоль прямой $x_2=0$ имеет место также вырождение его порядка.

На основании формулы (5.5) заключаем, что при $\gamma=1$

$$u=e^v, \quad (5.14)$$

а при $\gamma\neq 1$

$$u=v^{1/(1-\gamma)}. \quad (5.15)$$

В силу (5.4) в обоих рассматриваемых случаях (5.12) и (5.13) функция $v(x_1,\ x_2)$ должна удовлетворять линейному уравнению

$$x_1x_2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}-x_2^2\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}-2x_1\frac{\partial v}{\partial x_1}+2x_2\frac{\partial v}{\partial x_2}-2v=0. \quad (5.16)$$

Поскольку неособой при $x_1\neq 0$ заменой переменных

$$\xi=x_1,\qquad \eta=x_1x_2,\qquad v=\xi^{-1}\eta^2v^*(\xi,\ \eta)$$

уравнение (5.16) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial\xi\,\partial\eta}=0,$$

общее решение этого уравнения дается формулой

$$v(x_1,\ x_2)=x_2^2F_1(x_1)+x_2F_2(x_1x_2), \quad (5.17)$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции своих аргументов. Используя этот факт, в силу (5.14) и (5.15) получаем решения уравнения (5.11)

$$u = \exp\left[x_2^2 F_1(x_1) + x_2 F_2(x_1 x_2)\right] \tag{5.18}$$

в случае (5.12) и

$$u = \left[x_2^2 F_1(x_1) + x_2 F_2(x_1 x_2)\right]^{1/(1-\gamma)}$$

в случае (5.13).

Из формулы (5.17) следует, что прямая $x_1 = 0$ не может служить носителем данных. В полосе же D, ограниченной, например, прямыми $x_2 = 0$ и $x_2 = 1$, для уравнения (5.16) однозначно решается краевая задача

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=0} = \varphi(x_1), \qquad v(x_1, 1) = \psi(x_1), \qquad -\infty < x_1 < \infty,$$
$$\psi'(0) = \frac{1}{2}\varphi'(0),$$

а само решение имеет вид

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 \varphi(x_1) + x_2\left[\psi(x_1 x_2) - \frac{1}{2}\varphi(x_1 x_2)\right].$$

В соответствии с этим в силу формулы (5.18) заключаем, что в полосе D однозначно строится знакопостоянное (положительное) решение краевой задачи

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|_{x_2=0} = \varphi(x_1), \qquad u(x_1, 1) = \psi(x_1), \qquad -\infty < x_1 < \infty,$$

и для уравнения (5.11) в случае (5.12).

2°. **Пример уравнения эллиптического типа. Задача Дирихле.** Пусть D — ограниченная область пространства E_n переменных $x_1, \ldots, x_n$ с ляпуновской границей S размерности $n-1$. Покажем, какую роль может сыграть формула (5.5) при исследовании задач Дирихле

$$u(x) = f(x), \qquad x \in S, \tag{5.19}$$

и Неймана

$$\frac{d}{d\nu} u(x) = f(x), \qquad x \in S, \tag{5.20}$$

для уравнения

$$\Delta u - u^{\delta} (\nabla u)^2 = 0, \tag{5.21}$$

где $\delta = -1$ или $\delta = 0$.

Сначала рассмотрим случай $\delta=-1$, т. е.

$$\Delta u - \frac{1}{u}(\nabla u)^2 = 0. \qquad (5.22)$$

В силу формулы (5.5) связь между функциями $u(x)$, $v(x)$ и на этот раз дается формулой (5.14), где $v(x)$ — произвольная, вообще говоря, комплексная, гармоническая в области D функция. Из формулы (5.14) следует, что *задача* (5.19), (5.22) *всегда имеет, и притом единственное, отличное от нуля в* $D\cup S$ *решение* (без ограничения общности можно считать, что оно положительное) *класса* $C^{2,0}(D)\cap C^{0,0}(D\cup S)$.

При наличии изменения знака или обращения в нуль функции $u(x)$ *на некотором множестве точек* $D\cup S$ *единственность решения задачи* (5.19), (5.22) *может не иметь места*. Действительно, пусть $n=2$, область D представляет собой круг $|x|<1$, а $f(x)=1$ на окружности $S:|x|=1$. На основании формулы (5.14) заключаем, что, наряду с функциями $u_1(x)$ и $u_2(x)$, решением уравнения (5.22) является и произведение $u_1(x)\,u_2(x)$ этих функций. Учитывая это обстоятельство, легко убеждаемся в том, что решением задачи (5.19), (5.22) в рассматриваемом случае является целое семейство действительных функций

$$u(x)=|F(x)|^2\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{1-|x|^2}{|t-x|^2}\log|F(t)|\,ds\right),$$

где $F(x)$ — произвольная аналитическая в D функция комплексного переменного $x=x_1+ix_2$, непрерывная в $D\cup S$ и отличная от нуля на S.

Когда заданная на окружности S: $|t|=1$ действительная функция $f(t)$ знакопеременна с интегрируемым $\log|f(t)|$, решениями задачи (5.19), (5.22), непрерывными в замкнутом круге $|x|\leqslant 1$, очевидно, являются функции

$$u_{kl}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{1-|x|^2}{|t-x|^2}\log|f(t)|\,ds+2ik\omega+(2l+1)\,i\omega^*\right\}, \qquad (5.23)$$

где ω и ω^* — гармонические в круге $|x|<1$ функции (гармонические меры):

$$\omega(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{CE}\frac{1-|x|^2}{|t-x|^2}\,ds, \qquad \omega^*(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{E}\frac{1-|x|^2}{|t-x|^2}\,ds, \qquad (5.24)$$

причем E — множество точек окружности $|t|=1$, на котором $f<0$, а CE — дополнение E до всей окружности $|t|=1$.

На основании (5.24) заключаем, что *при* $0<\operatorname{mes} E<2\pi$ *представленные формулой* (5.23) *решения задачи* (5.19), (5.22) *все являются комплексными в круге* $|x|<1$ *всюду, а при* $\operatorname{mes} E=0$ *эта формула дает единственное отличное от нуля действительное решение*

$$u(x)=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{1-|x|^2}{|t-x|^2}\log f(t)\,ds\right).$$

Заметим, что при $n=1$ решениями уравнения (5.22), регулярными при $|x|<1$, непрерывными при $|x|\leqslant 1$ и удовлетворяющими краевым условиям

$$u(-1)=u(1)=1,$$

являются функции

$$u_k(x)=\exp(2k\pi ix), \qquad k=0,\ \pm 1,\ \ldots,$$

среди которых действительна лишь $u_0(x)=1$.

3°. Задача Неймана. Пользуясь опять формулой (5.14), задачу Неймана (5.20), (5.22) можно редуцировать к нелинейной задаче

$$\frac{dv}{d\nu}=f(x)\exp[-v(x)], \qquad x\in S, \tag{5.25}$$

для гармонических в области D функций. В силу (5.25) функция f должна удовлетворять условию

$$\int\limits_S f(t)\exp[-v(t)]\,ds=0. \tag{5.26}$$

Выполнение этого условия гарантирует существование решения задачи Неймана

$$\frac{dv}{d\nu}=f_1(x)\equiv f(x)\exp[-v(x)], \qquad x\in S$$

для гармонических функций. Поэтому, например, при $n=2$ в круге $|x|<1$ справедливо тождество (ν — внешняя нормаль)

$$v(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_S \log|t-x|\,f(t)\exp[-v(t)]\,ds+c.$$

Отсюда следует, что *в рассматриваемом случае задача* (5.20), (5.22) *эквивалентна интегральному уравнению типа Гаммерштейна*

$$v(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{S}\log|t-x|\,f(t)\exp[-v(t)]\,ds=c,\qquad x\in S. \tag{5.27}$$

Доказательство существования решения уравнения (5.27) при соблюдении условия (5.26), так же как и выделение классов функций, в которых можно судить о количестве решений задачи (5.20), (5.22), требует более тонкого исследования.

В этом легко убедиться, если рассмотреть задачу (5.20), (5.22) при

$$u''-\frac{1}{u}u'^2=0,\qquad -1<x<1, \tag{5.28}$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=-1}=A,\qquad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1}=B, \tag{5.29}$$

где A и B — заданные действительные числа.

Поскольку общее решение уравнения $v''(x)=0$ имеет вид

$$v=ax+b,$$

где a и b — произвольные постоянные, в силу (5.14) имеем

$$u(x)=\exp(ax+b), \tag{5.30}$$

и, стало быть, равенства (5.29) и (5.26) запишутся в виде

$$A\exp(a-b)=a,\qquad B\exp(-a-b)=a, \tag{5.31}$$

$$A\exp(2a)=B. \tag{5.32}$$

В предположении, что A и B в нуль не обращаются, на основании (5.31) и (5.32) заключаем, что

$$a=\frac{1}{2}\log\frac{B}{A}+k\pi i,\qquad \exp b=\frac{A}{a}\exp a, \tag{5.33}$$

где $k=0,\ \pm1,\ \ldots$, а

$$\log\frac{B}{A}=\log\left|\frac{B}{A}\right|+i\arg\frac{B}{A},\qquad 0\leqslant\arg\frac{B}{A}\leqslant\pi.$$

Из формулы (5.30) в силу (5.33) находим решение задачи (5.28), (5.29):

$$u_k(x) = A\left(\frac{1}{2}\log\frac{B}{A} + k\pi i\right)^{-1} \exp\left(\frac{1}{2}\log\frac{B}{A} + k\pi i\right)(x+1), \tag{5.34}$$

$$k = 0, \pm 1, \ldots$$

Формула (5.34) дает действительное решение $u_0(x)$ задачи (5.28), (5.29) лишь тогда, когда числа A и B одного знака. Когда же знаки A и B разные, представленные формулой (5.34) решения этой задачи являются комплексными всюду в интервале $-1 < x < 1$.

4°. Второй частный случай уравнения (5.21). Переходим теперь к рассмотрению уравнения (5.21) при $\delta=0$:

$$\Delta u - (\nabla u)^2 = 0. \tag{5.35}$$

В силу формулы (5.5) имеем

$$\exp[-u(x)] = v(x), \tag{5.36}$$

где $v(x)$ — произвольная гармоническая функция. Следовательно, если $u(x)$ — решение уравнения (5.35) класса $C^2(D) \cap C(D \cup S)$, удовлетворяющее краевому условию (5.19), то функция $v(x)$ будет гармонической, принадлежать этому же классу и удовлетворять краевому условию

$$v(x) = \exp[-f(x)], \qquad x \in S.$$

Отсюда, в свою очередь, приходим к заключению, что *задача* (5.19), (5.35) *всегда имеет, и притом единственное, решение, которое в силу формулы* (5.36) *представляется в виде*

$$u(x) = -\log v(x).$$

Задача (5.20), (5.35) на основании формулы (5.36) редуцируется к нахождению гармонической в области D функции $v(x)$, удовлетворяющей краевому условию

$$\frac{dv}{d\nu} + f(x)v(x) = 0, \qquad x \in S. \tag{5.37}$$

Причем если $v(x)$ — положительное решение задачи (5.37), то функция

$$u = -\log v + c$$

при произвольной постоянной c будет решением задачи (5.20), (5.35).

Чтобы усмотреть трудность при установлении условий, налагаемых на f и гарантирующих существование действительных решений задачи (5.20), (5.35), рассмотрим одномерный случай

$$u'' - u'^2 = 0, \qquad -1 < x < 1, \tag{5.38}$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=-1} = A, \qquad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = B. \tag{5.39}$$

Поскольку $v = ax + b$, где a и b — произвольные действительные постоянные, в силу (5.36), (5.39) имеем

$$(1 - A)\,a + Ab = 0, \qquad (1 + B)\,a + Bb = 0. \tag{5.40}$$

Выполнение условия $B - A - 2AB = 0$ гарантирует существование нетривиального решения

$$a = \lambda B, \qquad b = -\lambda (B + 1)$$

линейной алгебраической системы (5.40). Существование действительных решений задачи (5.38), (5.39), очевидно, будет обеспечено только при $B > -{}^1/_2$.

5°. Пример уравнения смешанного типа. Наконец, приведем пример нелинейного уравнения смешанного типа с вырождением порядка вдоль прямой $x_2 = 0$:

$$x_2^{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{2m-1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \\ - u^{\delta}\left[x_2^{2m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] = 0, \tag{5.41}$$

где m — натуральное число больше единицы, а δ принимает значения -1 или 0.

Обозначим через D_1 конечную область плоскости переменных x_1, x_2, ограниченную дугой σ_1:

$$x_1^2 + \left(\frac{2}{2m+1}\right)^2 x_2^{2m+1} = 1, \qquad x_2 \geqslant 0,$$

с концами в точках $A_1(-1,\ 0)$, $B_1(1,\ 0)$ и характеристиками A_1F_1:

$$x_1 - \frac{2}{2m+1}(-x_2)^{\frac{2m+1}{2}} = -1, \quad x_2 \leqslant 0,$$

и B_1F_1:

$$x_1+\frac{2}{2m+1}(-x_2)^{\frac{2m+1}{2}}=1, \qquad x_2\leqslant 0,$$

уравнения (5.41), выходящими из точки

$$F_1\left[0,\ -\left(\frac{2m+1}{2}\right)^{\frac{2}{2m+1}}\right].$$

Под задачей Трикоми для уравнения (5.41) понимается задача отыскания решения $u(x_1, x_2)$ этого уравнения из класса

$$C^2(D_1)\cap C^{0,h}(\bar{D}_1),$$

когда значения $u(x_1, x_2)$ наперед заданы на σ_1 и на A_1F_1, причем

$$\lim_{x_2\to+0} x_2^{1/2-m}\frac{\partial u}{\partial x_2}=\lim_{x_2\to-0}(-x_2)^{1/2-m}\frac{\partial u}{\partial x_2}, \qquad -1<x_2<1. \quad (5.42)$$

Поскольку в результате замены переменных

$$x_1=x, \qquad \frac{2}{2m+1}|x_2|^{m+1/2}\operatorname{sgn} x_2=y,$$

$$u_1\left[x,\ \frac{2m+1}{2}|x_2|^{\frac{2}{2m+1}}\operatorname{sgn} y\right]=u(x,\ y)$$

уравнение (5.41) и условие (5.42) принимают вид соответственно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\operatorname{sgn} y-u^\delta\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\operatorname{sgn} y\right]=0, \quad (5.43)$$

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to-0}\frac{\partial u}{\partial y},$$

естественно ограничиться следующей задачей: *в конечной области D плоскости переменных x, y, ограниченной полуокружностью σ: $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$, и отрезками AF и BF характеристик $x+y+1=0$, $x-y-1=0$, $y\leqslant 0$, уравнения* (5.43), *найти функцию $u(x, y)$ класса $C^2(D, y\neq 0)\cap$ $\cap\, C^1(D)\cap C^{0,h}(\bar{D})$, удовлетворяющую в D при $y\neq 0$ уравнению* (5.43) *и краевым условиям*

$$u(x,\ y)=f(x,\ y), \qquad (x,\ y)\in\sigma,$$

$$u(x,\ -x-1)=\psi(x), \qquad -1\leqslant x\leqslant 0, \qquad (5.44)$$

где f и ψ — заданные действительные функции соответственно классов $C^{0,h}(\sigma)$ и $C^2(-1 \leqslant x \leqslant 0)$, причем $f(A)=\psi(A)$.

Пусть сперва $\delta=-1$. Как и в случае уравнения (5.22), общее решение $u(x, y)$ уравнения (5.43) можно представить по формуле (5.14), в которой $v(x, y)$ — общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\operatorname{sgn} y=0. \tag{5.45}$$

Следовательно, в этом случае в силу (5.14) и (5.45) для решений уравнения (5.43) при $y<0$ имеем представление

$$u(x, y)=f_1(x+y)f_2(x-y), \tag{5.46}$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции класса C^2.

На основании формулы (5.46) заключаем, что в характеристическом прямоугольнике d с вершинами в точках

$$M\left(\frac{x_0-1}{2}, -\frac{x_0+1}{2}\right), \quad F(0, -1), \quad N\left(\frac{x_0+1}{2}, \frac{x_0-1}{2}\right),$$
$$E(x_0, 0), \quad |x_0|<1,$$

знакопостоянное (без ограничения общности можно считать положительное) в $\bar{d}$ решение $u(x, y)$ уравнения (5.43) класса C^2, удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} u(x, x-x_0)=\Psi(x), \quad x_0-1\leqslant 2x\leqslant 2x_0, \\ u(x, x_0-x)=\Phi(x), \quad 2x_0\leqslant 2x\leqslant x_0+1, \\ \Psi(x_0)=\Phi(x_0), \end{gathered} \tag{5.47}$$

где Ψ и Φ — заданные функции класса C^2, определяется однозначно и имеет вид

$$u(x, y)=\frac{1}{\Phi(x_0)}\Psi\left(\frac{x+y+x_0}{2}\right)\Phi\left(\frac{x-y+x_0}{2}\right). \tag{5.48}$$

Если же $u(x_0, 0)=0$, то решение задачи (5.47) может существовать только тогда, когда по крайней мере одна из функций $\Psi(x)$, $\Phi(x)$ тождественно равна нулю, причем в этих случаях существуют бесконечные множества решений

$$u(x, y)=\begin{cases} \Psi_1\left(\frac{x+y+x_0}{2}\right)\Phi\left(\frac{x-y+x_0}{2}\right), \\ \qquad\qquad \Psi(x)\equiv 0,\ \Phi(x_0)=0,\ \Psi_1(x_0)=1, \\ \Psi\left(\frac{x+y+x_0}{2}\right)\Phi_1\left(\frac{x-y+x_0}{2}\right), \\ \qquad\qquad \Phi(x)\equiv 0,\ \Psi(x_0)=0,\ \Phi_1(x_0)=1, \\ \Psi_1\left(\frac{x+y+x_0}{2}\right)\Phi_1\left(\frac{x-y+x_0}{2}\right), \\ \qquad\qquad \Phi(x)\equiv\Psi(x)\equiv 0,\ \Phi_1(x_0)=\Psi(x_0)=0, \end{cases}$$

где Ψ_1 и Φ_1 — произвольные функции класса C^2.

Обращение в нуль решения $u(x, y)$ задачи (5.47) в некоторой точке $(x_1, y_1)\in d$ равносильно тому, что выполнено по крайней мере одно из условий

$$\Psi\left(\frac{x_1+y_1+x_0}{2}\right)=0, \qquad \Phi\left(\frac{x_1-y_1+x_0}{2}\right)=0,$$

и, стало быть, в этом случае единственность решения будет нарушена.

При $u(x_0, 0)=0$, в частности, если

$$\Phi(\xi)=\Phi'(\xi)=\Phi''(\xi)=\Psi(\eta)=\Psi'(\eta)=\Psi''(\eta)=0,$$

где

$$\xi={}^1/_2(x_1-y_1+x_0), \qquad \eta={}^1/_2(x_1+y_1+x_0),$$

наряду с функцией $u(x, y)$, определенной по формуле (5.48), решением задачи (5.47) в d является и функция $u_0(x, y)$, совпадающая с $u(x, y)$ над прямыми $x-y=x_1-y_1$ и $x+y=x_1+y_1$, а под этими прямыми

$$u_0(x, y)=(x+y-x_1-y_1)^3(x-y-x_1+y_1)^3\times \\ \times\Psi^*(x+y)\Phi^*(x-y),$$

где Ψ^* и Φ^* — произвольные функции класса C^2.

Знакопостоянные в треугольнике AFB решения уравнения (5.43), удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} u(x, 0)=\tau(x), \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \\ u(x, -x-1)=\psi(x), \quad -1\leqslant x\leqslant 0, \\ \tau(-1)=\psi(-1), \end{gathered} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial y} &= \nu(x), \quad -1<x<1, \\ u(x, -x-1) &= \psi(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ u(x,\ 0) &= \tau(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial y} &= \nu(x), \quad -1<x<1, \end{aligned} \tag{5.50}$$

даются соответственно формулами

$$\begin{aligned} u(x,\ y) &= \tau(x+y)\,\psi\left(\frac{x-y-1}{2}\right)\Big/\psi\left(\frac{x+y-1}{2}\right), \\ u(x,\ y) &= \psi\left(\frac{x+y-1}{2}\right)\psi\left(\frac{x-y-1}{2}\right)\times \\ &\times\left[\frac{1}{\psi(-1)}+\int\limits_{-1}^{x+y}\frac{\nu(t)\,dt}{\psi^2\left(\frac{t-1}{2}\right)}\right], \\ u(x,\ y) &= \sqrt{\tau(x+y)\,\tau(x-y)}\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\frac{\nu(t)\,dt}{\tau(t)}\right), \end{aligned} \tag{5.51}$$

причем во всех трех случаях имеет место единственность.

Как легко видеть, при $\psi(x)\equiv 0$ задача (5.50) имеет бесконечное множество решений вида

$$u(x,\ y)=\psi_1(x+y)\,\psi_1(x-y)\int\limits_{-1}^{x+y}\frac{\nu(t)\,dt}{\psi_1^2(t)},$$

где $\psi_1(x)$ — произвольная функция класса C^2 $(-1\leqslant x\leqslant 1)$, нигде не обращающаяся в нуль.

В силу формул (5.14) *и* (5.51) *построение знакопостоянного решения задачи* (5.43), (5.44) *в полукруге* $D^+=D\cap\{y>0\}$ *редуцируется к смешанной задаче для гармонической функции* $v(x,\ y)$:

$$v(x,\ y)=\log f(x,\ y), \qquad (x,\ y)\in\sigma,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=\psi'\left(\frac{x-1}{2}\right)\Big/\psi\left(\frac{x-1}{2}\right), \quad -1<x<1,$$

и, стало быть,

$$v(x,\ y)=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma}\sqrt{\frac{1-z^2}{1-t^2}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{1-tz}\right)\log f(t)\,dt+$$

$$+\operatorname{Re}\frac{2}{\pi(1+i)}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-z^2}{1-t^2}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{1-tz}\right)\times$$

$$\times\log\psi\left(\frac{t-1}{2}\right)dt \qquad (5.52)$$

при $(x,\ y)\in D^+$ *и*

$$v(x,\ y)=v(x+y,\ 0)-\log\psi\left(\frac{x+y-1}{2}\right)+\log\psi\left(\frac{x-y-1}{2}\right) \qquad (5.53)$$

при $(x,\ y)\in D^-=D\cap\{y<0\}$.

Подставляя выражения (5.52) и (5.53) в правую часть формулы (5.14), получаем решение (единственное) задачи (5.43), (5.44).

Заметим, что *требование знакопостоянства от решения* $u(x,\ y)$ *задачи* (5.43), (5.44) (и, стало быть, знакопостоянства f и ψ) *является существенным*. Действительно, например, при

$$f\equiv\psi\equiv 1$$

задача (5.43), (5.44) имеет обращающееся в нуль в точках α_k, $k=1,\ \ldots,\ n$, многопараметрическое семейство решений

$$u=\prod_{k=1}^{n}u_k(x,\ y)\,u_k^*(x,\ y),$$

где

$$u_k(x,\ y)=\left|\frac{z-\alpha_k}{1+\alpha_k}\right|^{2m_k},\qquad z=x+iy,\quad \alpha_k=a_k+ib_k,\ b_k>0,$$

когда $y\geqslant 0$, и

$$u_k(x,\ y)=\exp m_k\left[\log\left|\frac{(x-\alpha_k)^2-y^2}{(1+\alpha_k)^2}\right|-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arctg}\frac{x+y-a_k}{b_k}+\operatorname{arctg}\frac{x-y-a_k}{b_k}\right],$$

когда $y \leqslant 0$; n, m_k — любые натуральные числа, α_k — произвольные комплексные числа, расположенные в D^+, а

$$u_k^*(x, y) = \exp v_k(x, y),$$

причем $v_k(x, y)$ определяются по (5.52), (5.53), в которых вместо $\log f(t)$ следует писать выражение

$$-\log\left|\frac{t-\alpha_k}{1+\alpha_k}\right|^{2m_k}$$

и вместо $\log\psi\left(\frac{t-1}{2}\right)$ — выражение

$$-\log\left|\frac{t-a_k}{1+a_k}\right|^{2m_k} + m_k \operatorname{arctg}\frac{1+a_k}{-b_k} - m_k \operatorname{arctg}\frac{t-a_k}{b_k}.$$

В случае, когда

$$\psi(x) \equiv 0, \qquad f(A) = 0,$$

задача (5.43), (5.44) имеет бесконечное множество решений. Они при $y \geqslant 0$ имеют вид (5.14), причем $v(x, y)$ определяется по формуле (5.52), в которой $\psi\left(\frac{t-1}{2}\right)$ заменена произвольной функцией $-\psi_1(t)$ класса C^2, нигде не обращающейся в нуль, а при $y \leqslant 0$

$$u(x, y) = u(x+y, 0)\frac{\psi_1(x+y)}{\psi_1(x-y)}.$$

Если $f(t)$ знакопеременна с интегрируемым $\log|f(t)|$, то решения задачи (5.43), (5.44) все комплексны. Они получаются опять по формуле (5.14), в которой $v(x, y)$ дается формулой (5.52), лишь с той разницей, что вместо $f(t)$ следует писать $|f(t)|$ и под знаком Re добавить слагаемые

$$2k\int_{CE}\sqrt{\frac{1-z^2}{1-t^2}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{1-tz}\right)dt$$

и

$$(2l+1)\int_{E}\sqrt{\frac{1-z^2}{1-t^2}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{1-tz}\right)dt,$$

$$k,\ l = 0,\ \pm 1,\ \ldots,$$

где E — множество точек полуокружности σ, на котором $f < 0$, а CE — дополнение E до σ.

Рассмотрим теперь случай $\delta=0$. На этот раз связь между функциями $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дается формулой (5.36), в которой $v(x, y)$ — решение уравнения (5.45). Поэтому краевые условия (5.44) порождают условия

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \exp[-f(x, y)], & (x, y) &\in \sigma, \\ v(x, -x-1) &= \exp[-\psi(x)], & -1 &\leqslant x \leqslant 0. \end{aligned} \tag{5.54}$$

В силу второго из условий (5.54) заключаем, что

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} = -\psi'\left(\frac{x-1}{2}\right)\exp\left[-\psi\left(\frac{x-1}{2}\right)\right], \quad -1 < x < 1. \tag{5.55}$$

Гармоническая в D^+ функция $v(x, y)$, удовлетворяющая первому из условий (5.54) и условию (5.55), очевидно, дается формулой (5.52), в которой $\log f(t)$ и $\log\psi\left(\frac{t-1}{2}\right)$ следует заменить через $\exp[-f(t)]$ и $\exp\left[-\psi\left(\frac{t-1}{2}\right)\right]$ соответственно.

В области же D^- имеем

$$v(x, y) = v(x+y, 0) + \exp\left[-\psi\left(\frac{x-y-1}{2}\right)\right] - \exp\left[-\psi\left(\frac{x+y-1}{2}\right)\right]. \tag{5.56}$$

На основании формул (5.55) и (5.56) заключаем, что выполнение условия $\psi'(x) \leqslant 0$, $-1 < x < 0$, гарантирует существование действительного (единственного) решения задачи (5.43), (5.44) в рассматриваемом случае (см. А. В. Бицадзе [17], [18]).

Другие классы нелинейных уравнений смешанного типа были рассмотрены М. И. Алиевым [1] и Д. К. Гвазава [1], [2].

§ 3. Волны в жидкости переменной плотности

1°. Вывод основного уравнения Дюбрейль-Жакотен. Будем пользоваться общей системой уравнений гидромеханики в записи

$$\rho\frac{Dq}{Dt} + 2\rho\Omega\times q + \rho\Omega\times(\Omega\times x) + \nabla p + \rho g - f = 0, \tag{5.57}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho q) = 0, \tag{5.58}$$

где $x=(x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор, определяющий положение частицы движущейся среды в декартовых ортогональных координатах x_1, x_2, x_3, вектор $q=(q_1, q_2, q_3)$ — ее скорость, ρ — плотность распределения масс, p — давление, g — ускорение силы тяжести, Ω — угловая скорость, а $f=\nu\Delta q$ — сила, учитывающая вязкость среды. В уравнении (5.57) под $\frac{D}{Dt}$ понимается операция дифференцирования

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+q\cdot\nabla, \tag{5.59}$$

члены, содержащие Ω, показывают наличие вращения при движении среды, причем первый из них — сила Кориолиса, а второй — центробежная сила.

Считая среду несжимаемой и невязкой, а движение двумерным и стационарным, при отсутствии вращения в силу (5.59) векторное уравнение движения (5.57) запишем в виде

$$\rho\left(q_1\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+q_3\frac{\partial q_1}{\partial x_3}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_1}, \tag{5.60}$$

$$\rho\left(q_1\frac{\partial q_3}{\partial x_1}+q_3\frac{\partial q_3}{\partial x_3}+g\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_3}, \tag{5.61}$$

а уравнение неразрывности (5.58) — в виде двух равенств

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0, \qquad \operatorname{div}\rho q=0,$$

или

$$q_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1}+q_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3}=0, \tag{5.62}$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial q_3}{\partial x_3}=0. \tag{5.63}$$

Равенства (5.60), (5.61), (5.62), (5.63) составляют систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных q_1, q_2, ρ, p.

Введением функции тока

$$q_1=-\frac{\partial\psi}{\partial x_3}, \qquad q_3=\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \tag{5.64}$$

уравнение (5.63) будет удовлетворено, причем в силу (5.64)

$$\frac{\partial(\psi, \rho)}{\partial(x_1, x_3)} = 0. \tag{5.65}$$

Тождественное выполнение равенства (5.65) означает, что между величинами ψ и ρ существует связь, не содержащая в явном виде координат x_1, x_3, т. е.

$$\rho = \rho(\psi). \tag{5.66}$$

Вводя обозначение

$$\zeta = \frac{\partial q_1}{\partial x_3} - \frac{\partial q_3}{\partial x_1}, \tag{5.67}$$

уравнения (5.60) и (5.61) можно записать следующим образом:

$$\rho\left(q_1\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + q_3\frac{\partial q_3}{\partial x_1} + \zeta q_3\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1},$$

$$\rho\left(q_1\frac{\partial q_1}{\partial x_3} + q_3\frac{\partial q_3}{\partial x_3} - \zeta q_1 + g\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_3},$$

или

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(\frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial x_1} + \zeta q_3\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_1}, \\ \rho\left(\frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial x_3} - \zeta q_1 + g\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_3}, \end{aligned}\right\} \tag{5.68}$$

где $q^2 = q_1^2 + q_3^2$.

В результате исключения p из системы (5.68) с учетом (5.62), (5.63) и (5.66) получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(q^2, \rho)}{\partial(x_1, x_3)} + \rho q_3\frac{\partial \zeta}{\partial x_3} + \rho q_2\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - g\frac{\partial \rho}{\partial x_1} = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial(q^2, \psi)}{\partial(x_1, x_3)} - \frac{\partial(\zeta, \psi)}{\partial(x_1, x_3)} - g\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0. \tag{5.69}$$

В силу очевидных тождеств

$$\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial(q^2, \psi)}{\partial(x_1, x_3)} = \frac{\partial\left(\frac{\rho'}{\rho}q^2, \psi\right)}{\partial(x_1, x_3)}, \qquad \frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial\left(\frac{\rho'}{\rho}x_3, \psi\right)}{\partial(x_1, x_3)}$$

равенство (5.69) принимает вид

$$\frac{\partial\left(-\zeta+\frac{1}{2}\frac{\rho'}{\rho}q^2+\frac{\rho'}{\rho}gx_3,\ \psi\right)}{\partial(x_1,\ x_3)}=0,$$

откуда следует, что

$$-\zeta+\frac{1}{2}\frac{\rho'}{\rho}q^2+\frac{\rho'}{\rho}gx_3=F(\psi), \tag{5.70}$$

где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция переменного ψ.

Так как в силу (5.64) и (5.67)

$$\zeta=-\Delta\psi,$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным x_1, x_3, и

$$q^2=(\nabla\psi)^2, \tag{5.71}$$

то из (5.70) окончательно будем иметь

$$\Delta\psi+\frac{\rho'}{\rho}\left[\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2+gx_3\right]=F(\psi). \tag{5.72}$$

Уравнение (5.72) впервые было выведено Дюбрейль-Жакотен [1] (см. также работы Лонга [1], Ая [1], Рема [1], А. В. Бицадзе [15], [19], [20], [21]).

2°. Постановка общей задачи. Пусть поток занимает бесконечную полосу D плоскости переменных x_1, x_3, верхней границей которой является прямая $x_3=0$, а нижняя граница пока нам не известна, но вдоль нее

$$\psi(x_1,\ x_3)=\text{const},\qquad p(x_1,\ x_3)=\text{const}. \tag{5.73}$$

Учитывая то обстоятельство, что в силу (5.73)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_3}dx_3=0,\qquad \frac{\partial p}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial p}{\partial x_3}dx_3=0,$$

из (5.68) в силу (5.71) получаем

$$\frac{1}{2}dq^2+g\,dx_3=0,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2+gx_3=\text{const}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае задача сводится к нахождению регулярного в полосе D решения ψ уравнения (5.72) по краевым условиям вдоль прямой $x_3=0$

$$\psi(x_1, 0)=0, \quad -\infty < x_1 < \infty,$$

и

$$\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2+gx_3=\text{const}, \quad \psi(x_1, x_3)=\text{const},$$

на неизвестной границе.

3°. Случай прямолинейной полосы. Редукция к задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца. Ниже будем предполагать, что *поток занимает полосу* D, *ограниченную прямыми* $x_3=-\pi$, $x_3=0$ *и отрезком* $-\pi < h \leqslant x_3 \leqslant 0$ *оси* $x_1=0$, *представляющим собой барьер на пути сечения. Очевидно, что в этом случае искомое в области* D *регулярное решение* $\psi(x_1, x_3)$ *уравнения* (5.72) *должно удовлетворять краевым условиям*

$$\psi(x_1, 0)=0, \quad \psi(x_1, -\pi)=\text{const}, \quad -\infty < x_1 < \infty, \tag{5.74}$$

и

$$\psi(0, x_3)=0, \quad -h \leqslant x_3 \leqslant 0. \tag{5.75}$$

Воспользуемся приемом, указанным в § 1 настоящей главы. В результате замены искомой функции

$$\psi=\psi(\varphi) \tag{5.76}$$

уравнение (5.72) принимает вид

$$\psi'\Delta\varphi+\left(\psi''+\frac{1}{2}\frac{\rho'}{\rho}\psi'\right)(\nabla\varphi)^2+\frac{\rho'}{\rho}gx_3=F(\psi(\varphi)).$$

Отсюда следует, что уравнение (5.72) будет удовлетворено, если

$$\psi''+\frac{1}{2}\frac{\rho'}{\rho}\psi'^2=0 \tag{5.77}$$

и

$$\Delta\varphi+\frac{\rho'}{\rho\psi'}gx_3=\frac{1}{\psi'}F(\psi(\varphi)). \tag{5.78}$$

Легко видеть, что общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (5.77) дается формулой

$$\varphi = \alpha \int_0^{\psi} \sqrt{\rho(\tau)}\, d\tau + \beta, \tag{5.79}$$

где α и β — произвольные постоянные.

Поскольку, в силу (5.79)

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \alpha \sqrt{\rho(\psi)},$$

уравнение (5.78) можно записать следующим образом:

$$\Delta\varphi + \frac{d}{d\varphi}\rho(\psi(\varphi))\,\alpha^2 g x_3 = \alpha \sqrt{\rho(\psi(\varphi))}\, F(\psi(\varphi)). \tag{5.80}$$

Когда функции

$$\frac{d}{d\varphi}\rho(\psi(\varphi)), \qquad \sqrt{\rho(\psi(\varphi))}\, F(\psi(\varphi))$$

линейно зависят от φ, уравнение (5.80) является линейным.

При приемлемых в гидродинамическом смысле допущениях

$$\rho = \frac{\lambda^4}{4g}\psi^2 = \lambda^2\varphi, \qquad F\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{g\varphi}\right) = -\sqrt{\lambda^2 g\varphi},$$

приняв, что

$$\alpha^2 = 1/g, \quad \varphi = w - x_3,$$

из уравнения (5.80) получаем уравнение Гельмгольца

$$\Delta w + \lambda^2 w = 0, \qquad \lambda = \mathrm{const}. \tag{5.81}$$

В силу (5.74) и (5.75) краевые условия для w имеют вид

$$\begin{gathered} w(x_1, 0) = 0, \ w(x_1, -\pi) = \mathrm{const} - \pi, \ -\infty < x_1 < \infty, \\ w(0, x_3) = x_3, \quad -h \leqslant x_3 \leqslant 0. \end{gathered} \tag{5.82}$$

Построению в определенном смысле приближенных решений задачи (5.81), (5.82) посвящены работы П. Г. Дразина, Мура [1], Милеса [1] и др.

Исследуем эту задачу в следующей постановке: *в области D с границей* Γ

$$\begin{gathered} x_3 = -\pi, \quad x_3 = 0, \quad -\infty < x_1 < \infty, \\ x_1 = 0, \quad -1 \leqslant x_3 \leqslant 0, \end{gathered}$$

найти регулярное ограниченное решение $w(x_1, x_3)$ уравнения (5.81), непрерывное вплоть до Γ, исчезающее при $x_1 \to -\infty$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{gathered} w(x_1, -\pi) = w(x_1, 0) = 0, \quad -\infty < x_1 < \infty, \\ w(0, x_3) = x_3, \quad -1 \leqslant x_3 \leqslant 0. \end{gathered} \tag{5.83}$$

В переменных x, y, где $z = x + iy = x_3 - ix_1$, область D принимает вид полосы G: $-\pi < x < 0$, $-\infty < y < \infty$, разрезанной вдоль отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 0$ действительной оси $y = 0$, а неизвестная функция $u(x, y) = w(-y, x)$ является ограниченным регулярным в области G решением уравнения

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \tag{5.84}$$

непрерывным вплоть до границы ∂G, стремящимся к нулю при $y \to \infty$ и удовлетворяющим краевым условиям

$$u(0, y) = u(-\pi, y) = 0, \quad -\infty < y < \infty, \tag{5.85}$$

$$u(x, 0) = x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0. \tag{5.86}$$

Как показал Карлеман [1], для решения $u(x, y)$ уравнения (5.84) имеет место интегральное представление

$$u(x, y) = v(x, y) - \int_y^\infty \frac{\partial}{\partial y} I_0(\lambda\sqrt{t^2 - y^2})\, v(x, t)\, dt, \tag{5.87}$$

где I_0 — функция Бесселя:

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

а $v(x, y)$ — гармоническая функция, стремящаяся к нулю при $y \to \infty$ настолько быстро, что интеграл в правой части (5.87) сходится равномерно и абсолютно.

Интегральные представления решений уравнения (5.84), близкие (5.87), были получены также И. Н. Векуа [1], Л. Г. Магнарадзе [1] и Л. А. Галиным [1]. В частности, если $u(k\pi, y) = 0$, $-\infty < y < \infty$, где k — целое число, то справедливо представление Л. Г. Магнарадзе [1]

$$u(x, y)=v(x, y)-\\ -\int_{k\pi}^{x} \frac{\partial}{\partial t} J_0\left(\lambda \sqrt{(x-k\pi)^2-(t-k\pi)^2}\right) v(t, y)\, dt, \qquad (5.88)$$

где $J_0(x)=I_0(ix)$, а гармоническая функция $v(x, y)$ удовлетворяет условию $v(k\pi, y)=0$, $-\infty < y < \infty$.

В силу (5.85), (5.86), (5.88) искомая в области G функция $u(x, y)$ продолжается как решение уравнения (5.84) по формуле

$$u(x, y)=-u(-x+2k\pi, y)$$

в плоскость E комплексного переменного $z=x+iy$, разрезанную вдоль отрезков

$$2k\pi-1 \leqslant x \leqslant 2k\pi+1, \quad k=0, \pm 1, \ldots,$$

действительной оси, причем так, что

$$\begin{gathered} u(x, 0)=x-2k\pi, \quad 2k\pi-1 \leqslant x \leqslant 2k\pi+1, \\ k=0, \pm 1, \ldots \end{gathered} \qquad (5.89)$$

К этому же заключению можно прийти и на основании формулы (5.87), поскольку в классе интересующих нас решений уравнения (5.84) интегральный оператор в правой части этой формулы ведет себя как оператор Вольтерра.

Следовательно, *задача* (5.84), (5.85), (5.86) *будет решена, если нам удастся найти ограниченное регулярное в E решение $u(x, y)$ уравнения* (5.84), *непрерывное вплоть до разрезов*

$$2k\pi-1 \leqslant x \leqslant 2k\pi+1, \quad k=0, \pm 1, \ldots, \qquad (5.90)$$

исчезающее при $y \to \infty$ и удовлетворяющее краевым условиям (5.89).

4°. Построение решения. На основании формулы (5.87) задача (5.84), (5.89), в свою очередь, редуцируется к нахождению ограниченной гармонической в E функции $v(x, y)$, непрерывной вплоть до разрезов (5.90) и удовлетворяющей краевым условиям

$$v(x,\ 0)=x-2k\pi,\qquad 2k\pi-1\leqslant x\leqslant 2k\pi+1,\qquad k=0,\ \pm1,\ldots,\tag{5.91}$$

причем, когда $y\to\infty$, порядок стремления к нулю функции $v(x,\ y)$ должен быть выше, чем порядок возрастания ядра интегрального представления (5.87).

Легко видеть, что гармоническая функция $v(x,\ y)$ с указанными выше свойствами является действительной частью аналитической в E функции

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i\sqrt{X(z)}}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{X(t)}\,K(t,\ z)\,t\,dt+\frac{c}{\sqrt{X(z)}},\tag{5.92}$$

где

$$X(z)=(1-z^2)\prod_{1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z}{2k\pi+1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{z}{2k\pi-1}\right)^2\right],\tag{5.93}$$

$$K(t,\ z)=\frac{1}{t-z}+2(t-z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(t-z)^2-4\pi^2k^2},\tag{5.94}$$

$$c=-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{X(t)}\,K(t,\ -1)\,t\,dt,\tag{5.95}$$

а под $\sqrt{X(z)}$ понимается однозначная в E ветвь этой функции, положительная при $-1<z<1$.

Из равенств (5.92), (5.93), (5.94) и (5.95) непосредственно следуют ограниченность функции $v(x,\ y)$ вблизи точек $z=-1$, $z=1$ и справедливость равенств

$$X(z+2n\pi)=X(z),\qquad K(t,\ z+2n\pi)=(-1)^n K(t,\ z),\qquad n=\pm1,\ \pm2,\ldots,$$

$$v(0,\ y)=\operatorname{Re}\Phi(iy)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{X(t)}}{\sqrt{X(iy)}}\left\{\frac{1}{t^2+y^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{(t+2k\pi)^2+y^2}+\frac{1}{(t-2k\pi)^2+y^2}\right]\right\}t\,dt=0,$$

$$v(\pi, y) = \operatorname{Re}\Phi(\pi + iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{X(t)}}{\sqrt{X(\pi+iy)}} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{t-2k\pi-\pi}{(t-2k\pi-\pi)^2+y^2} - \frac{t+2k\pi+\pi}{(t+2k\pi+\pi)^2+y^2}\right] t\,dt \doteq 0,$$

$$\lim_{y\to\pm 0} v(x, y) = x, \qquad -1 < x < 1.$$

Теперь, учитывая то обстоятельство, что

$$I_0(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(z\sin t)\,dt,$$

а функция $\Phi(z)$ для больших $|z|$ ведет себя как $\cos^2 z/2$, можно указать промежуток изменения параметра λ, при котором для функции $u(x, y)$ справедливо представление (5.87) и к тому же она обладает требуемым свойством при $y \to \infty$. Грубый подсчет показывает, что $0 < \lambda < 1/2$.

§ 4. Уравнения гравитационного поля

1°. Вариант уравнений Максвелла—Эйнштейна для осесимметрического стационарного гравитационного поля. Когда метрическая квадратичная форма ds^2 и лагранжева плотность L имеют соответственно вид

$$ds^2 = f^{-1}\left[e^{2\gamma}(dz^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\varphi^2\right] - f(dt - \omega\,d\varphi)^2$$

и

$$L = -\frac{1}{2}\rho f^{-2}(\nabla f)^2 + \frac{1}{2}f^2(\nabla\omega)^2 + 2\rho f^{-1}(\nabla A_4)^2 -$$
$$- 2\rho^{-1} f(\nabla A_3 - \omega\nabla A_4)^2,$$

где метрические функции f, γ, ω (γ выражается через f и ω), а t и φ — компоненты A_3, A_4 электромагнитного 4-потенциала зависят только от ρ и φ, в системе Максвелла—Эйнштейна, описывающей осесимметрическое стационарное гравитационное поле, независимыми являются только четыре уравнения:

$$\nabla[\rho^{-2}f(\nabla A_3-\omega\nabla A_4)]=0,$$
$$\nabla[f^{-1}\nabla A_4+\rho^{-2}f\omega(\nabla A_3-\omega\nabla A_4)]=0,$$
$$\nabla[\rho^{-2}f^2\nabla\omega-4\rho^{-2}f(\nabla A_3-\omega\nabla A_4)]=0,$$
$$f\nabla f=(\nabla f)^2-\rho^{-2}f^4(\nabla\omega)^2+2f(\nabla A_4)^2+2\rho^{-2}f^3(\nabla A_3-\omega\nabla A_4)^2.$$

Вводя комплексные потенциалы

$$\Phi=A_4+iA_3',\qquad E=f-|\Phi|^2+i\varphi_{\mathrm{Ernst}},$$

где

$$\hat{n}\times\nabla A_3'=\rho^{-1}f(\nabla A_3-\omega\nabla A_4),$$
$$\hat{n}\times\nabla\varphi_{\mathrm{Ernst}}=f^2\rho^{-1}\nabla\omega-2A_4\hat{n}\times\nabla A_3'+2A_3'\hat{n}\times\nabla A_4,$$

а $\hat{n}$ — единичный вектор азимутального направления, указанную систему Эрнст [1] (см. также Танабе [1], Катеначи и Алонсо [1]) свел к системе нелинейных уравнений в частных производных вида

$$\begin{aligned}(\mathrm{Re}\,E+\Phi\bar{\Phi})\,\Delta E-(\nabla E+2\bar{\Phi}\nabla\Phi)\,\nabla E&=0,\\(\mathrm{Re}\,E+\Phi\bar{\Phi})\,\Delta\Phi-(\nabla E+2\bar{\Phi}\nabla\Phi)\,\nabla\Phi&=0.\end{aligned}\tag{5.96}$$

2°. Построение классов решений уравнений Максвелла—Эйнштейна. Следуя приему, указанному в конце § 1 настоящей главы, если функции E и Φ будем искать в виде

$$E=E(v),\quad \Phi=\Phi(v),\tag{5.97}$$

из (5.96) получаем

$$\begin{aligned}&(E+\bar{E}+2\Phi\bar{\Phi})\,[E'\Delta v+E''(\nabla v)^2]-\\&\qquad\qquad-2(E'+2\bar{\Phi}\Phi')\,E'(\nabla v)^2=0,\\&(E+\bar{E}+2\Phi\bar{\Phi})\,[\Phi'\Delta v+\Phi''(\nabla v)^2]-\\&\qquad\qquad-2(E'+2\bar{\Phi}\Phi')\,\Phi'(\nabla v)^2=0.\end{aligned}\tag{5.98}$$

Подбирая функции E и Φ как решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}(E+\bar{E}+2\Phi\bar{\Phi})\,E''-2(E'+2\bar{\Phi}\Phi')\,E'&=0,\\(E+\bar{E}+2\Phi\bar{\Phi})\,\Phi''-2(E'+2\bar{\Phi}\Phi')\,\Phi'&=0,\end{aligned}\tag{5.99}$$

в силу (5.98) заключаем, что v должна быть гармонической функцией. Следовательно, если E и Φ удовлетворяют системе (5.99), то определенная по формулам (5.97) пара функций $E(v)$ и $\Phi(v)$ при произвольной гармонической функции v образует решение системы (5.96).

При предположении, что $\Phi=\text{const}$, система (5.99) эквивалентна уравнению

$$(E+\bar{E}+2|c|^2)E''-2E'^2=0. \tag{5.100}$$

Как легко видеть, семейство функций

$$E=i\varepsilon\frac{e^{\lambda v}-i\alpha}{e^{\lambda v}+i\beta}-|c|^2 \tag{5.101}$$

при произвольных действительных постоянных α, β, λ, ε является решением уравнения (5.100). Из (5.101) при $c=0$, $\beta=0$ и $\alpha=1$, $\beta=1$ получаются соответственно решения

$$E=\alpha\varepsilon e^{-\lambda v}+i\varepsilon,\quad E=\varepsilon(\operatorname{sch}\lambda v+i\operatorname{th}\lambda v),$$

указанные в работах автора и В. И. Пашковского [1], [2].

Когда $E=\text{const}=c+i\nu$, отдельно будем рассматривать случай

$$c=0,\quad c=\delta^2,\quad c=-\delta^2.$$

При $c=0$ общее решение системы (5.99) имеет вид

$$E=i\nu,\quad \Phi=\frac{1}{\lambda v+\mu},$$

где λ и μ — произвольные комплексные постоянные. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что, если $c=\delta^2$ или $c=-\delta^2$, решениями системы (5.99) являются соответственно

$$E=\delta^2+i\nu,\quad \Phi=\delta e^{i\omega}\frac{e^{i\lambda v}+a}{ae^{i\lambda v}-1}$$

и

$$E=-\delta^2+i\nu,\quad \Phi=\delta e^{i\omega}\frac{1+\beta e^{\lambda v}}{1-\bar{\beta}e^{\lambda v}} \tag{5.102}$$

при любых действительных постоянных a, δ, λ, ν, ω и комплексной постоянной β (см. работу [12] автора).

Когда функции E и Φ отличны от постоянных, из (5.99) заключаем, что

$$\Phi = \varepsilon E + \mu,$$

где ε и μ — произвольные комплексные постоянные. В предположении, что $\varepsilon\bar{\mu} = -1/2$, из (5.99) для определения E имеем

$$(4\varepsilon^2\bar{\varepsilon}^2 E\bar{E} + 1) E'' - 8(\varepsilon\bar{\varepsilon})^2 \bar{E}E'^2 = 0. \qquad (5.103)$$

Очевидно, что функция

$$E = \frac{1}{2\varepsilon\bar{\varepsilon}} e^{i\omega} \frac{e^{i\lambda v} + a}{ae^{i\lambda v} - 1}$$

при произвольных действительных постоянных a, λ, ω удовлетворяет уравнению (5.103), и, стало быть, выражения

$$E = E(v), \qquad \Phi = \varepsilon E(v) - \frac{1}{2\bar{\varepsilon}}$$

дают точное решение системы (5.96) в рассматриваемом случае.

Решением системы (5.99) является также пара функций E, Φ, определенных по формулам

$$E = \frac{1}{\beta e^{\lambda v} - |a|^2}, \qquad \Phi = \frac{a}{\beta e^{\lambda v} - |a|^2},$$

где a — произвольная комплексная, а β — произвольная действительная постоянные.

Равенства (5.99) представляют собой нелинейную систему второго порядка четырех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с четырьмя действительными искомыми функциями переменного v, решения которой, конечно, не исчерпываются указанными выше выражениями для E и Φ.

3°. Вариант Эрнста уравнений Максвелла—Эйнштейна и построение его решений. Когда $E = -1 + i\nu$, система (5.96) равносильна уравнению (см. Эрнст [2])

$$(\Phi\bar{\Phi} - 1)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2-1)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]\right\} -$$
$$- 2\bar{\Phi}\left[(x^2-1)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + (1-y^2)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right] = 0, \qquad (5.104)$$

где x, y — вытянутые сфероидальные координаты, и для определения функций Φ и v получаем соответственно уравнения

$$(\Phi\bar{\Phi}-1)\Phi''-2\bar{\Phi}\Phi'^2=0 \tag{5.105}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2-1)\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\frac{\partial v}{\partial y}\right]=0. \tag{5.106}$$

Если $|\Phi|\neq 1$ при фиксированном значении v_0 переменного v, то в окрестности v_0 решения уравнения (5.105) можно строить в виде степенного ряда

$$\varphi(v)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(v-v_0)^k,$$

где a_0 и a_1 — произвольные комплексные числа, а при $n=0, 1, \ldots$

$$(n+1)(n+2)(a_0\bar{a}_0-1)a_{n+2}=2\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_kc_{n-k}-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(n-k+2)A_ka_{n-k+2},$$

$$A_k=\sum_{j=0}^{k}a_j\bar{a}_{k-j},\qquad c_k=\sum_{j=0}^{k}(j+1)(k-j+1)a_{j+1}a_{k-j+1}.$$

В силу (5.102) выражение

$$\Phi=e^{i\omega}\frac{1+\beta e^{\lambda v}}{1-\bar{\beta}e^{\lambda v}}, \tag{5.107}$$

где λ и ω — произвольные действительные, а β — произвольная комплексная постоянные, дает решение уравнения (5.105).

Уравнение (5.106) эллиптично при $(x^2-1)(1-y^2)>0$, гиперболично при $(x^2-1)(1-y^2)<0$, а на линиях $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ оно параболически вырождается.

В области эллиптичности в результате замены независимых переменных

$$z=\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}+ixy,\qquad \bar{z}=\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}-ixy$$

уравнения (5.104) и (5.106) запишутся в виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial\bar{z}}+\frac{1}{2(z+\bar{z})}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}\right)-\frac{2\bar{\Phi}}{\Phi\bar{\Phi}-1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}=0 \tag{5.108}$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z\, \partial \bar{z}}+\frac{1}{2(z+\bar{z})}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\right)=0 \tag{5.109}$$

соответственно, ибо

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(\sqrt{\frac{1-y^2}{x^2-1}}\,x+iy\right)\frac{\partial}{\partial z}+\left(\sqrt{\frac{1-y^2}{x^2-1}}\,x-iy\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\left(-\sqrt{\frac{x^2-1}{1-y^2}}\,y+ix\right)\frac{\partial}{\partial z}-\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{1-y^2}}\,y+ix\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}}{x^2-y^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}\right)+ \\ +\frac{i}{x^2-y^2}\left[x(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}+y(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\right]=2\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}}{x^2-y^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}\right)- \\ -\frac{i}{x^2-y^2}\left[x(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}+y(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\right]=2\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{1}{x^2-y^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}\right]= \\ =4\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}}+\frac{2}{z+\bar{z}}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right),$$

$$\frac{1}{x^2-y^2}\left[(x^2-1)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+(1-y^2)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right]=4\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}}.$$

Широкий класс аналитических по $\xi=\operatorname{Re} z$, $\eta=\operatorname{Im} z$ решений уравнения (5.109) дается хорошо известной формулой (см. Дарбу [1])

$$v^{(1)}=\operatorname{Re}\int_0^1 f(\eta+i\xi-2i\xi t)\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}, \tag{5.110}$$

где $f(\tau)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного τ. Другой класс решений уравнения (5.109), аналитических по ξ и η в полуплоскости $\xi>0$ с логарифмической особенностью при $\xi=0$, можно представить в виде

$$v^{(2)}=\operatorname{Re}\int_0^1 f(\eta+i\xi-2i\xi t)\log[2i\xi t(1-t)]\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}. \tag{5.111}$$

Когда $f(\tau)=\tau^n$, из (5.110) и (5.111) получаем набор решений уравнения (5.109):

$$v_n^{(1)}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=[(k+1)/2]}^{[n/2]}(-1)^{k+l}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2l-k}2^k\frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(1/2)}{k!}\xi^{2l}\eta^{n-2l}$$

и

$$v_n^{(2)}=v_n^{(1)}\log\xi+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=[(k+1)/2]}^{[n/2]}(-1)^{k+l}\binom{n}{k}\binom{n-k}{2l-k}\times$$
$$\times\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right)-2\psi(k+1)+\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\xi^{2l}\eta^{n-2l},$$
$$n=0,1,\ldots,$$

где Γ и ψ — функции Эйлера.

Следовательно, в рассматриваемом случае формула (5.107), в которой v имеет вид (5.110) или (5.111), дает решение уравнения (5.104).

Нетрудно показать, что *решением уравнения* (5.104) *является также и функция*

$$\Phi=\frac{w-1}{w+1},\quad w\bar{w}\neq 1, \tag{5.112}$$

где w — решение линейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial\bar{z}}-\frac{w+\bar{w}}{2(z+\bar{z})}=0. \tag{5.113}$$

Действительно, при предположении, что $w\bar{w}\neq 1$, в результате замены искомой функции (5.112) уравнение (5.108) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial\bar{z}}-\frac{1}{2(z+\bar{z})}\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial\bar{z}}\right)-$$
$$-\frac{2}{w+\bar{w}}\left[\frac{\partial w}{\partial\bar{z}}-\frac{w+\bar{w}}{2(z+\bar{z})}\right]\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{5.114}$$

Если w — решение класса C^2 уравнения (5.113), то, дифференцируя последнее по z, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial\bar{z}}-\frac{1}{2(z+\bar{z})}\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial\bar{z}}\right)=0. \tag{5.115}$$

На основании (5.113) и (5.115) заключаем, что $w(z)$ удовлетворяет уравнению (5.114), и, стало быть, определенная по формуле (5.112) функция $\Phi(z)$ является решением уравнения (5.104).

Теперь покажем, что *общее решение уравнения* (5.113) *имеет вид*

$$w(z) = -\int\limits_0^\eta \frac{\partial\rho(\xi, \tau)}{\partial\xi} d\tau + \xi \int\limits_0^\xi \frac{\partial\rho(t, y)}{\partial y}\bigg|_{y=0} \frac{dt}{t} + c\xi + i\rho(\xi, \eta), \tag{5.116}$$

где c — *произвольная действительная постоянная,*

$$\rho(\xi, \eta) = \xi^2 \int\limits_0^1 f(\eta + i\xi - 2i\xi t)\sqrt{t(1-t)}\,dt, \quad \xi + i\eta = z, \tag{5.117}$$

а $f(\tau)$ — *произвольная аналитическая функция комплексного переменного* τ.

В самом деле, в обозначениях

$$\xi + i\eta = z, \quad u(\xi, \eta) + iu_1(\xi, \eta) = w(z) \tag{5.118}$$

уравнение (5.113) записывается в виде линейной системы двух действительных уравнений первого порядка

$$\xi\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right) - u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{\partial u_1}{\partial\xi} = 0. \tag{5.119}$$

Решения $u(\xi, \eta)$, $u_1(\xi, \eta)$ системы (5.119) являются решениями линейных уравнений второго порядка

$$\xi^2\Delta u + \xi\frac{\partial u}{\partial\xi} + u = 0$$

и

$$\xi\Delta u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial\xi} = 0 \tag{5.120}$$

соответственно. Так как регулярные решения уравнения (5.120) при $\xi \neq 0$ являются аналитическими функциями действительных переменных ξ, η, то в обозначениях

$$\zeta = \eta + i\xi, \quad \bar\zeta = \eta - i\xi,$$

$$u_1(\xi, \eta) = u_1\left(\frac{\zeta - \bar\zeta}{2i}, \frac{\zeta + \bar\zeta}{2}\right) = \omega(\zeta, \bar\zeta)$$

это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\zeta\,\partial\bar{\zeta}}+\frac{1}{2(\zeta-\bar{\zeta})}\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}-\frac{1}{2(\zeta-\bar{\zeta})}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{\zeta}}=0.$$

Пользуясь известным интегральным представлением

$$\omega(\zeta,\bar{\zeta})=(\bar{\zeta}-\zeta)^{1-\beta-\beta'}\int\limits_0^1 f(\zeta+(\bar{\zeta}-\zeta)t)\,t^{-\beta}(1-t)^{-\beta'}\,dt \tag{5.121}$$

уравнения Эйлера—Дарбу

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\zeta\,\partial\bar{\zeta}}-\frac{\beta'}{\zeta-\bar{\zeta}}\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}+\frac{\beta}{\zeta-\bar{\zeta}}\frac{\partial\omega}{\partial\bar{\zeta}}=0,$$

заключаем, что выражение (5.117) является решением уравнения (5.120).

На основании (5.121) из (5.119) находим, что

$$u(\xi,\eta)=-\int\limits_0^\eta\frac{\partial\rho(\xi,\tau)}{\partial\xi}\,d\tau+\xi\int\limits_0^\xi\left.\frac{\partial\rho(t,y)}{\partial y}\right|_{y=0}\frac{dt}{t}+c\xi.$$

Отсюда, в силу (5.117) и (5.118), убеждаемся в том, что выражение (5.116) действительно является общим решением уравнения (5.113).

4°. Замечания по поводу краевых задач. При исследовании краевых задач для уравнения (5.104) в области его эллиптичности прежде всего следует учесть то обстоятельство, что в результате замены независимых переменных

$$\xi=2x_2^{1/2},\quad \eta=x_1$$

уравнение (5.109) переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+x_2\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{\partial v}{\partial x_2}=0. \tag{5.122}$$

Интерпретируя x_1 и x_2 в качестве декартовых координат, заключаем, что в области D, лежащей в полуплоскости $x_2>0$ и примыкающей к оси x_2 вдоль отрезка $a<x_1<b$, непрерывное в $D\cup\partial D$ решение уравнения (5.122) однозначно определяется его краевыми значениями на части ∂D, вдоль которой $x_2>0$ (см. § 3 гл. II).

В случае надобности при построении решений уравнения (5.109) в области его гиперболичности можно пользоваться изложенной выше схемой, лишь с той разницей, что уравнение для определения функции v на этот раз будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}-x_2\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}-\frac{\partial v}{\partial x_2}=0, \tag{5.123}$$

где

$$x_1=xy, \quad 4x_2=(1-x^2)(1-y^2).$$

Общее решение уравнения (5.123) дается формулой

$$v=\int\limits_0^1 f_1[x_1+2x_2^{1/2}(1-2t)]\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}+ \\ +\int\limits_0^1 f_2[x_2+2x_2^{1/2}(1-2t)]\frac{\log[x_2 t(1-t)]}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt,$$

где f_1 и f_2 — произвольные действительные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Как было показано в § 3 гл. III, постановка задачи Коши для уравнения (5.123) с начальными данными при $x_2=0$ должна быть видоизменена соответствующим образом (см. А. В. Бицадзе [16], [1]).

§ 5. Сингулярные отображения двумерных римановых многообразий

1°. Понятие сингулярных отображений двумерных римановых многообразий. Хорошо известна роль, которую играют в дифференциальной геометрии поверхностей и в теории функции системы нелинейных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\begin{aligned}\Delta u&=a(u,v)(\nabla u)^2+b(u,v)\nabla u\nabla v+\\&\qquad+c(u,v)(\nabla v)^2+d(u,v)J,\\ \Delta v&=e(u,v)(\nabla u)^2+f(u,v)\nabla u\nabla v+\\&\qquad+g(u,v)(\nabla v)^2+h(u,v)J,\end{aligned} \tag{5.124}$$

где

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

(см. Дарбу [1], Гейнц [1], Вуд [1]).

В целом ряде случаев пара функций

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \tag{5.125}$$

осуществляющая отображение двумерных римановых многообразий M и N, снабженных локальными координатами соответственно x, y и u, v, является решением системы (5.124). К отображениям такого рода относятся также гармонические отображения.

Отображение (5.125) с равным нулю якобианом:

$$J = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{5.126}$$

принято называть *сингулярным*.

Этот параграф посвящен изучению некоторых свойств сингулярного отображения (5.125), порожденного системой (5.124), в предположении, что коэффициенты a, b, c, e, f, g этой системы удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных u, v.

Тождественное выполнение равенства (5.126) означает, что *любое решение* $u(x, y)$, $v(x, y)$ *системы* (5.124) *можно записать в виде*

$$u = \varphi(w), \quad v = \psi(w), \tag{5.127}$$

причем в силу § 1 *настоящей главы функции* φ *и* ψ *представляют собой решение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка*

$$\begin{aligned} \varphi'' &= a(\varphi, \psi)\varphi'^2 + b(\varphi, \psi)\varphi'\psi' + c(\varphi, \psi)\psi'^2, \\ \psi'' &= e(\varphi, \psi)\varphi'^2 + f(\varphi, \psi)\varphi'\psi' + g(\varphi, \psi)\psi'^2, \end{aligned} \tag{5.128}$$

а $w(x, y)$ — *произвольная гармоническая функция переменных* x, y.

2°. Основное свойство сингулярных отображений. На основании этого утверждения, в частности, приходим к заключению, что *если в некоторой односвязной области* D *плоскости переменных* x, y *пара функций* (5.125) *удовлетворяет системе* (5.124), (5.126), *то либо*

$$u(x, y) = \text{const}, \quad v(x, y) = \text{const}$$

всюду в D, *либо множество нулей уравнений*

$$\nabla u = 0, \quad \nabla v = 0 \tag{5.129}$$

не может иметь предельной точки в D.

В самом деле, на основании (5.127) и (5.129) имеем

$$\varphi'(w)\nabla w = 0, \quad \psi'(w)\nabla w = 0. \tag{5.130}$$

В силу (5.130) либо $\nabla w = 0$, либо $\varphi'(w) = \psi'(w) = 0$, либо эти равенства имеют место одновременно.

Как известно, множество нулей градиента гармонической в области D функции w в этой области не может иметь предельной точки, если только эта функция не обращается тождественно в постоянную.

С другой стороны, линии уровня $w(x, y) = c_0$ гармонической функции $w(x, y)$ не могут ни замыкаться, ни прерываться в области D, а система (5.128) обыкновенных дифференциальных уравнений, при принятых предположениях относительно коэффициентов $a(\varphi, \psi)$, $b(\varphi, \psi)$, $c(\varphi, \psi)$, $e(\varphi, \psi)$, $f(\varphi, \psi)$, $g(\varphi, \psi)$, не может иметь отличных от тождественно постоянных решений $\varphi(w)$, $\psi(w)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi'(c_0) = \psi'(c_0) = 0, \quad \varphi(c_0) = \mathrm{const}, \quad \psi(c_0) = \mathrm{const}.$$

Из приведенного рассуждения очевидно, что требование однолистности области D не является существенным.

Заметим, что к этому же заключению приходили и другие авторы в результате довольно сложных рассуждений и, к тому же, при требовании либо *аналитичности*, либо *бесконечной дифференцируемости* коэффициентов системы (5.124).

3°. Линейная краевая задача сингулярных отображений и ее редукция к нелинейной краевой задаче для уравнения Лапласа. Для установления структурных свойств системы (5.124), (5.126) мы могли бы поступить и по-другому.

Действительно, тождественное выполнение равенства (5.126) равносильно тому, что из пары функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, представляющей собой решение системы (5.124), можно считать, что одна из них, например u, является функцией v:

$$u = \theta(v). \tag{5.131}$$

На основании (5.131) уравнения системы (5.124) принимают вид

$$\begin{aligned} \theta'\Delta v &= (a\theta'^2 + b\theta' + c - \theta'')(\nabla v)^2, \\ \Delta v &= (e\theta'^2 + f\theta' + g)(\nabla v)^2. \end{aligned} \tag{5.132}$$

Из равенств (5.132), в свою очередь, следует, что $\theta(v)$ должна быть решением нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\theta'' = -e\theta'^3 + (a-f)\theta'^2 + (b-g)\theta' + c. \qquad (5.133)$$

Решения уравнения (5.133), очевидно, существуют, но они в квадратурах могут быть получены лишь в некоторых отдельных случаях. В частности, когда коэффициенты системы (5.124) не зависят от переменного v, уравнение (5.133) в результате замены $p = \frac{d\theta}{dv}$ приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению Абеля второго рода

$$p\frac{dp}{d\theta} = e(\theta)p^3 - [a(\theta) - f(\theta)]p^2 + [b(\theta) - g(\theta)]p + c(\theta),$$

для которого хорошо известны случаи, когда решения выписываются в квадратурах (см., например, Камке [1]).

Если θ — общее решение уравнения (5.133), то очевидно, что уравнения системы (5.132) эквивалентны между собой, и, стало быть, функция $v(x, y)$ должна удовлетворять нелинейному уравнению в частных производных

$$\Delta v + \delta(v)(\nabla v)^2 = 0. \qquad (5.134)$$

Как было показано в § 1 настоящей главы, общее решение уравнения (5.134) можно представить в виде

$$v = \omega(\zeta), \qquad (5.135)$$

где $\omega(\zeta)$ — общее решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\omega'' - \delta(\omega)\omega'^2 = 0, \qquad (5.136)$$

а ζ — произвольная гармоническая функция независимых переменных x, y.

В силу формулы (5.5) общее решение уравнения (5.136) запишем в виде

$$\zeta = \alpha\int_0^{\omega} \exp\left(-\int_0^{\tau} \delta(t)\,dt\right)d\tau + \beta, \qquad (5.137)$$

где α, β — произвольные постоянные.

При разрешимости уравнения (5.137) относительно ω функция $v(x, y)$, определенная по формуле (5.135), в которой $\zeta(x, y)$ — произвольная гармоническая функция, очевидно, дает решение уравнения (5.134), и, следовательно, пара функций

$$u = \theta[\omega(\zeta)], \quad v = \omega(\zeta) \tag{5.138}$$

представляет собой решение системы (5.124), (5.126).

В теории аналитических функций

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

комплексного переменного $z = x + iy$, а также в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений важную роль играет следующая задача Римана—Гильберта: *в области D, граница ∂D которой представляет собой кривую Ляпунова, найти регулярные решения $u(x, y)$, $v(x, y)$ системы уравнений Коши—Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{5.139}$$

непрерывные по Гёльдеру в $D \cup \partial D$ и удовлетворяющие краевому условию

$$\lambda(x, y)\, u + \mu(x, y)\, v = \gamma(x, y), \quad (x, y) \in \partial D, \tag{5.140}$$

где λ, μ, γ — заданные на ∂D действительные непрерывные по Гёльдеру функции (см., например, Н. И. Мусхелишвили [1] и стр. 203 настоящей книги).

При изучении отображений (5.125) двумерных римановых многообразий, а также при построении теории нелинейных сингулярных интегральных уравнений имеет вполне определенный смысл исследовать задачу определения регулярных в области D решений $u(x, y)$, $v(x, y)$ системы (5.124), (5.126), непрерывных в $D \cup \partial D$, по краевому условию (5.140).

На основании формул (5.138) решение задачи (5.124), (5.126), (5.140) редуцируется к нелинейной краевой задаче

$$a_0(x, y, \zeta) = \gamma(x, y), \quad (x, y) \in \partial D, \tag{5.141}$$

для гармонической в области D функции $\zeta(x, y)$, где

$$a_0(x, y, \zeta) = \lambda\theta[\omega(\zeta)] + \mu\omega(\zeta).$$

В отличие от задачи (5.139), (5.140), вопросы разрешимости задачи (5.124), (5.126), (5.140) и, вообще, наличие бифуркации решений этой задачи зависят не только от вращения заданного на ∂D векторного поля (λ, μ), но и от структурных свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений (5.133) и (5.136).

Как известно, задача (5.141) для гармонических функций представляет значительный научный интерес. Она была объектом исследования многих авторов (см. А. В. Бицадзе [22]).

ЛИТЕРАТУРА

А б д р а х м а н о в А. М.

[1] Эллиптические системы, вырождающиеся в точке. — Дифф. уравнения, 1977, т. 13, с. 276—284.

А л д а ш е в С. А.

[1] О некоторых краевых задачах для одного класса сингулярных уравнений в частных производных. — Дифф. уравнения, 1976, т. 12, с. 3—14.

А л и е в М. И.

[1] О разрешимости задачи Дирихле для квазилинейных уравнений с неотрицательной характеристической квадратичной формой. — Дифф. уравнения, 1977, т. 13, с. 3—9.

А л и м о в Ш. А.

[1] Об одной краевой задаче. — Докл. АН СССР, 1980, т. 259, с. 265—266.

А н т о х и н Ю. Т.

[1] О некоторых некорректно поставленных задачах теории потенциала. — Дифф. уравнения, 1966, т. 2, с. 525—532.

А ч и л ь д и е в А. И.

[1] Первая и вторая краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся в конечном числе точек. — Докл. АН СССР, 1963, т. 152, с. 13—16.

Б а б е н к о К. И.

[1] К теории уравнений смешанного типа. — Докт. дисс., библ. Матем. ин-та АН СССР (1952).

[2] К теории уравнений смешанного типа. — Усп. матем. наук, 1953, т. 8, с. 160.

Б а д е р к о Е. А.

[1] К задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических систем. — Дифф. уравнения, 1969, т. 5, с. 100—107.

Б е р е з и н И. С.

[1] О задаче Коши для линейных уравнений второго порядка с начальными данными на линии параболичности. — Матем. сб., 1949, т. 24, с. 301—320.

Б ж и х а т л о в Х. Г.

[1] Краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения и сингулярные интегральные уравнения третьего рода. — Дифф. уравнения, 1971, т. 8, с. 3—14.

[2] Об одной краевой задаче со смещениями. — Дифф. уравнения, 1973, т. 9, с. 162—165.

Бицадзе А. В.
[1] К проблеме уравнений смешанного типа. — Труды Матем. ин-та АН СССР, 1953, т. 41.
[2] Уравнения смешанного типа. — Москва (1959). Итоги науки 2. физ.-мат. науки.
[3] Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми. — СМЖ, 1962, т. 3, с. 642—644.
[4] Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях. — Докл. АН СССР, 1962, т. 143, с. 1017—1019.
[5] Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Наука, 1966.
[6] К теории нефредгольмовых эллиптических краевых задач. — В кн.: Дифференциальные уравнения в частных производных. — М., 1970, с. 64—70.
[7] К теории одного класса уравнений смешанного типа. — Некоторые проблемы математики и механики. — Л., 1970, с. 112—119.
[8] К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа. — В кн.: Механика сплош. среды и родств. пробл. анализа. — М., 1972, с. 47—52.
[9] Об одной системе линейных уравнений в частных производных. — Докл. АН СССР, 1972, т. 204, с. 1031—1033.
[10] К вопросу о постановке характеристической задачи для гиперболических систем второго порядка. — Докл. АН СССР, 1975, т. 223, с. 1289—1292.
[11] Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических систем второго порядка. — Докл. АН СССР, 1975, т. 225, с. 31—34.
[12] Об одном уравнении гравитационного поля. — Докл. АН СССР, 1975, т. 222, с. 765—768.
[13] О современном состоянии теории уравнений смешанного типа. — Berlin: Beiträge zur Analysis, 1976, Bd. 8, S. 59—65.
[14] К теории систем уравнений с частными производными. — Труды Матем. ин-та АН СССР, 1976, т. 134, с. 67—77.
[15] Об одном классе квазилинейных уравнений в частных производных. — В кн.: Пробл. матем. физ. и вычисл. матем. — М.: Наука, 1977, с. 63—70.
[16] О некоторых классах точных решений уравнений гравитационного поля. — Докл. АН СССР, 1977, т. 233, с. 517—518.
[17] К задаче Дирихле и Неймана для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка. — Докл. АН СССР, 1977, т. 234, с. 265—268.
[18] К задаче Трикоми для нелинейных уравнений смешанного типа. — Докл. АН СССР, 1977, т. 235, с. 733—736.
[19] К теории одного класса нелинейных уравнений в частных производных. — Дифф. уравнения, 1977, т. 13, с. 1994—2008.
[20] Об одной краевой задаче для уравнения Гельмгольца. — Докл. АН СССР, 1978, т. 239, с. 1273—1275.
[21] Волны в потоке жидкости переменной плотности. — Дифф. уравнения, 1978, т. 14, с. 1053—1059.
[22] Об одной системе нелинейных уравнений в частных производных. — Дифф. уравнения, 1979, т. 15, с. 1267—1270.

Бицадзе А. В., Нахушев А. М.
[1] К теории вырождающихся гиперболических уравнений. — Докл. АН СССР, 1972, т. 204, с. 1289—1291.
[2] О корректной постановке задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях. — Докл. АН СССР, 1972, т. 205, с. 9—12.
[3] К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях. — Дифф. уравнения, 1974, т. 10, с. 2184—2191.
Бицадзе А. В., Пашковский В. И.
[1] К теории уравнений Максвелла—Эйнштейна. — Докл. АН СССР, 1974, т. 216, с. 249—250.
[2] О некоторых классах решений уравнений Максвелла—Эйнштейна. — Труды Матем. ин-та АН СССР, 1975, т. 134, с. 26—30.
Бицадзе А. В., Самарский А. А.
[1] О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. — Докл. АН СССР, 1969, т. 185, с. 739—740.
Вашарин А. А., Лизоркин П. И.
[1] Некоторые краевые задачи для эллиптических уравнений с сильным вырождением на границе. — Докл. АН СССР, 1961, т. 137, с. 1015—1018.
Введенская Н. Д.
[1] Об одной краевой задаче для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области. — Докл. АН СССР, 1953, т. 95, с. 711—714.
Векуа И. Н.
[1] О комплексном представлении общего решения уравнений плоской задачи стационарного колебания теории упругости. — Докл. АН СССР, 1937, т. 16, с. 155—160.
[2] Граничные задачи теории линейных эллиптических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. — Сообщ. АН ГССР, 1940, т. 1, с. 22—34, с. 181—186, с. 497—500.
[3] Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
[4] Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
Векуа Н. П.
[1] Системы сингулярных интегральных уравнений. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
Виноградов В. С.
[1] Об одном новом методе решения краевой задачи для линеаризированной системы уравнений Навье—Стокса в случае плоскости. — Докл. АН СССР, 1962, т. 145, с. 1202—1204.
Вишик М. И.
[1] О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. — Матем. сб., 1951, т. 29, с. 615—676.
Владимиров В. С.
[1] Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
[2] Многомерные линейные пассивные системы. — В кн.: Механика сплош. среды и родств. пробл. анализа. — М., 1972, с. 121—134.

Вольперт А. И.
[1] Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач на плоскости. — Труды Моск. матем. об-ва, 1961, т. 10, с. 41—87.
Врагов В. Н.
[1] К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве. — Дифф. уравнения, 1977, т. 13, с. 1098—1105.
Галин Л. А.
[1] Крыло прямоугольной формы в плане в сверхзвуковом потоке. — Прикл. матем. и мех., 1947, т. 11, с. 465—474.
Гвазава Д. К.
[1] Некоторые оценки для уравнений смешанного типа. — Дифф. уравнения, 1972, т. 8, с. 17—23.
[2] О задаче Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения. — Дифф. уравнения, 1977, т. 13, с. 29—35.
Гордезиани Д. Г.
[1] Об одном методе решения краевой задачи Бицадзе—Самарского. — Семинар ИПМ ТГУ. Аннотации докл., 1970, т. 2, с. 39—40.
Девенгталь Ю. В.
[1] О существовании решения одной задачи Ф. И. Франкля. — Докл. АН СССР, 1958, т. 119, с. 15—18.
Дезин А. А.
[1] Инвариантные гиперболические системы и задача Гурса. — Докл. АН СССР, 1960, т. 135, с. 1042—1045.
Джураев А.
[1] К вопросу об индексе и нормальной разрешимости задач Дирихле и Пуанкаре для общей эллиптической системы второго порядка с двумя независимыми переменными. — Докл. АН ТаджССР, 1964, т. 7, с. 3—6.
Джураев Т. Д.
[1] Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: ФАН, 1979.
Диденко В. П.
[1] О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного типа. — Докл. АН СССР, 1962, т. 144, с. 709—712.
[2] Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми. — Укр. матем. журн., 1973, т. 25, с. 14—24.
[3] Об обобщенной разрешимости граничных задач для систем дифференциальных уравнений смешанного типа. — Дифф. уравнения, 1972, т. 8, с. 24—29.
Егоров Ю. В., Кондратьев В. А.
[1] Задача с косой производной. — Матем. сб., 1969, т. 78, с. 148—179.
Елеев В. А.
[1] О некоторых краевых задачах для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка. — Дифф. уравнения, 1971, т. 7, с. 24—33.
[2] О некоторых задачах типа задачи Коши и задачи со смещениями для одного вырождающегося уравнения. — Дифф. уравнения, 1976, т. 12, с. 46—58.

Зайнулабидов М. М.
[1] О некоторых краевых задачах для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. — Дифф. уравнения, 1969, т. 5, с. 91—99.
Золотарева Е. В.
[1] Необходимое и достаточное условие фредгольмовости для некоторого класса эллиптических систем. — Докл. АН СССР, 1962, т. 145, с. 724—726.
[2] О задаче Дирихле для некоторого класса эллиптических систем. — Докл. АН СССР, 1962, т. 145, с. 983—985.
Кальменов Т. Ш.
[1] О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева—Бицадзе. — Дифф. уравнения, 1977, т. 13, с. 1718—1725.
Камке Э.
[1] Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965.
Карапетян К. И.
[1] О задаче Коши для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на начальной плоскости. — Докл. АН СССР, 1956, т. 106, с. 963—966.
Каратопраклиев Г. Д.
[1] О некоторых краевых задачах для уравнения $u_{xx}+\operatorname{sgn} y\, u_{yy}=0$. — Докл. АН СССР, 1966, т. 149, с. 1253—1256.
[2] Об уравнениях смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнениях в многомерных областях. — Дифф. уравнения, 1972, т. 8, с. 55—67.
Карманов В. Г.
[1] О существовании решений некоторых краевых задач для уравнения смешанного типа. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, т. 22, с. 117—134.
Кароль И. Л.
[1] Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. — Докл. АН СССР, 1953, т. 88, с. 197—200.
[2] К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. — Матем. сб., 1955, т. 38, с. 261—282.
[3] Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. — Докл. АН СССР, 1955, т. 101, с. 793—796.
Келдыш М. В.
[1] О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. — Докл. АН СССР, 1951, т. 77, с. 181—183.
Коврижкин В. В.
[1] Гладкость решений обобщенной задачи Трикоми. — Дифф. уравнения. 1973, т. 9, с. 97—105.
Кудрявцев Л. Д.
[1] О решении вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. — Докл. АН СССР, 1956, т. 108, с. 16—19.
Кузьмин Е. Н.
[1] О задаче Дирихле для эллиптических систем в пространстве. — Дифф. уравнения, 1967, т. 5, с. 255—257.

К у м ы к о в а С. К.
[1] О некоторых краевых задачах со смещениями для уравнения Лаврентьева—Бицадзе. — Дифф. уравнения, 1973, т. 9, с. 106—114.
[2] Об одной краевой задаче со смещениями для уравнения $\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx}+u_{yy}=0$. — Дифф. уравнения, 1976, т. 12, с. 79—88.
Л а в р е н т ь е в М. А., Б и ц а д з е А. В.
[1] К проблеме уравнений смешанного типа. — Докл. АН СССР, 1950, т. 70, с. 373—376.
Л а д ы ж е н с к а я О. А.
[1] Об одном способе решения задачи Лаврентьева—Бицадзе. — УМН, 1954, т. 9, с. 187—190.
[2] Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
Л а н д и с Е. Б.
[1] Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений второго порядка (случай многих независимых переменных). — УМН, 1963, т. 18, с. 3—6.
Л а н и н И. Н.
[1] К априорным оценкам задач Трикоми и Дирихле для одного уравнения с вырождением типа и порядка. — Дифф. уравнения, 1976, т. 12, с. 89—96.
Л о п а т и н с к и й Я. Б.
[1] Об одном способе приведения граничных задач для систем уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. — Укр. матем. журн., 1953, т. 5, с. 123—151.
М а г н а р а д з е Л. Г.
[1] Об общем представлении регулярных решений некоторых линейных дифференциальных уравнений в частных производных с мнимыми характеристиками. — Сообщения АН ГССР, 1944, т. 5, с. 368—372.
М а з ь я В. Г., П а н е я х Б. Г.
[1] Вырождающиеся псевдодифференциальные операторы на гладком многообразии без края. — Функц. анализ и его прилож., 1969, т. 3, с. 91—92.
М а л ю т о в М. Б.
[1] О задаче с наклонной производной в трехмерном пространстве. — Докл. АН СССР, 1967, т. 172, с. 283—286.
М е л ь ц е р Л. А.
[1] О корректной постановке задачи Гурса. — Матем. сб., 1946, т. 18, с. 59—104.
М и х а й л о в В. П.
[1] О неаналитических решениях задачи Гурса для системы дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. — Докл. АН СССР, 1957, т. 117, с. 759—762.
[2] Об обобщенной задаче Трикоми. — Докл. АН СССР, 1967, т. 175, с. 1012—1014.
М и х л и н С. Г.
[1] Об интегральном уравнении Трикоми. — Докл. АН СССР, 1948, т. 99, с. 1053—1056.
[2] К теории вырождающихся эллиптических уравнений. — Докл. АН СССР, 1954, т. 94, с. 183—186.

[3] Многомерные сингулярные интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962.

Моисеев Е. И.

[1] О теоремах единственности для уравнения смешанного типа. — Докл. АН СССР, 1978, т. 242, с. 48—51.

[2] О задаче Трикоми для уравнения Геллерстедта. — Докл. АН СССР, 1979, т. 246, с. 275—278.

Мусхелишвили Н. И.

[1] Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.

Нахушев А. М.

[1] Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с двумя линиями параболического вырождения. — Дифф. уравнения, 1967, т. 3, с. 45—58.

[2] Методика постановки корректных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости. — Дифф. уравнения, 1970, т. 6, с. 192—195.

[3] О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. — Дифф. уравнения, 1969, т. 5, с. 44—59.

Нгуен Тхыа Хоп

[1] Интегральные уравнения Фредгольма первого рода. — Докл. АН СССР, 1966, т. 166, с. 795—797.

[2] О нормальной разрешимости задачи Дирихле для системы эллиптического типа А. В. Бицадзе. — Докл. АН СССР, 1966, т. 167, с. 982—984.

[3] О нормальной разрешимости задачи Дирихле для одного класса систем эллиптического типа. — Дифф. уравнения, 1970, т. 6, с. 86—98.

Никольский А. А., Таганов Г. И.

[1] Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. — Прикл. матем. и мех., 1946, т. 10.

Никольский С. М.

[1] Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1943, т. 7, с. 147—166.

Овсянников Л. В.

[1] О задаче Трикоми в одном классе обобщенных решений уравнения Эйлера—Дарбу. — Докл. АН СССР, 1953, т. 91, с. 457—460.

Олейник О. А.

[1] О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. — Матем. сб., 1952, т. 30, с. 695—702.

[2] Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области. — Докл. АН СССР, 1952, т. 87, с. 885—887.

Пономарев С. М.

[1] К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева—Бицадзе. — Докл. АН СССР, 1977, т. 233, с. 39—40.

[2] К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях. — Докл. АН СССР, 1979, т. 246, с. 1303—1305.

Руднев Г. В.

[1] О некоторых плоскопараллельных установившихся движениях газа. — Докт. дисс., библ. Матем. ин-та АН СССР (1951).

Сакс Р. С.
[1] О задаче Дирихле для эллиптической системы А. В. Бицадзе с младшими производными. — Дифф. уравнения, 1971, т. 7, с. 121—134.
[2] Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1975.
Салахитдинов М. С.
[1] Уравнения смешанно-составного типа. — Ташкент: ФАН, 1974.
Смирнов М. М.
[1] Уравнения смешанного типа. — М.: Наука, 1970.
[2] Вырождающиеся гиперболические уравнения. — Минск: Высшая школа, 1977.
Соболев С. Л.
[1] Об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. — Матем. сб., 1931, т. 38, с. 107—147.
[2] Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Новосибирск, 1962.
[3] Уравнения математической физики. — М.: Гостехиздат, 1947.
Солдатов А. П.
[1] О единственности решения одной задачи А. В. Бицадзе. — Дифф. уравнения, 1972, т. 8, с. 143—146.
[2] Решение одной краевой задачи теории функций со смещениями. — Дифф. уравнения, 1974, т. 10, с. 143—152.
Терсенов С. А.
[1] Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. — Новосибирск, 1973.
Тихонов А. Н., Самарский А. А.
[1] Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
Товмасян Н. Е.
[1] Задача Дирихле для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. — Докл. АН СССР, 1964, т. 159, с. 995.
[2] Некоторые граничные задачи для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости. — Докл. АН СССР, 1965, т. 160, с. 1275—1278.
[3] Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. — Дифф. уравнения, 1966, т. 1, с. 3—23, т. 2, с. 163—171.
[4] К теории сингулярных интегральных уравнений. — Дифф. уравнения, 1967, т. 3, с. 69—80.
Филиппов А. Ф.
[1] О разностном методе решения задачи Трикоми. — Изв. АН СССР, сер. матем. 1957, т. 21, с. 73—88.
Франкль Ф. И.
[1] Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука, 1973.
Халилов З. И.
[1] Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток. — Докл. АН АзССР, 1953, т. 9, с. 189—194.
Харибегашвили С. С.
[1] Характеристическая задача для гиперболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. — Дифф. уравнения, 1978, т. 14, с. 123—135.

[2] Характеристическая задача для строго гиперболических систем второго порядка с двумя независимыми переменными. — Дифф. уравнения, 1979, т. 15, с. 142—152.
[3] О характеристической задаче для линейных нестрого гиперболических систем. — Сообщения АН ГССР, 1979, т. 93, с. 553—556.

Хведелидзе Б. В.
[1] О задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала. — Докл. АН СССР, 1941, т. 30, с. 195—198.
[2] Задача Пуанкаре для линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. — Труды Тбилисского матем. ин-та АН ГССР, 1943, т. 12, с. 47—77.
[3] Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения. — Труды Матем. ин-та АН ГССР, 1956, т. 23, с. 3—158.

Чаплыгин С. А.
[1] О газовых струях. Полн. собр. сочинений. — М.—Л.: 1933, т. 2.

Чи Минь-Ю.
[1] О задаче Коши для одного класса гиперболических уравнений с начальными данными на линии параболического вырождения. — Acta Math. Sinica, 1958, v. 8, p. 521—530.

Шапиро З. Я.
[1] Первая краевая задача для эллиптических систем дифференциальных уравнений. — Матем. сб., 1951, т. 28, с. 55—65.

Шаринова Р. М.
[1] О нормальной разрешимости задачи Дирихле для одной вырождающейся эллиптической системы. — Дифф. уравнения, 1976, т. 12, с. 343—347.

Яковлев Г. Н.
[1] Об одной задаче А. В. Бицадзе для вырождающихся эллиптических уравнений. — Дифф. уравнения, 1968, т. 4, с. 147—150.

Янушаускас А. И.
[1] К задаче о наклонной производной. — Докл. АН СССР, 1965, т. 164, с. 753—756.
[2] К задаче о наклонной производной для гармонических функций трех независимых переменных. — Сиб. матем. журн., 1967, т. 8, с. 447—462.
[3] О безусловной разрешимости задачи с наклонной производной. — Дифф. уравнения, 1967, т. 3, с. 89—96.
[4] Аналитическая теория эллиптических уравнений. — Новосибирск: Наука, 1979.

Agmon S., Nirenberg L., Protter M. H.
[1] A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type. — Commun. Pure Appl. Math., 1953, v. 6, p. 455—470.

Bergman S.
[1] On solutions of linear partial differential equations of mixed type. — Amer. J. Math., 1952, v. 74, p. 444—474.

Bers L.
[1] On the continuation of a potential gas flow across the sonic line. — Nat. Adv. Comm. Aeronautics Techn. Not., 1950, v. 2058.

[2] Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. — Surv. Appl. Math. N.-Y., 1958, v. 4.
B i t s a d z e A. W.
[1] Sur la théorie des problèmes aux limites elliptiques non-Fredholmiens. — Actes, Congrès Intern. Math., 1970, t. 2, p. 685—690.
[2] On the application of function-theoretical methods in the linearized Navier—Stokes boundary value problem. — Ann. Acad. Sci. Fennicae, Series A, 1974, v. 571, p. 1—9.
[3] On a class of the nonlinear partial differential equations. — Funct. Theor. Math. for Part. Diff. Equations, Darmstadt, 1976, v. 56, p. 10—15.
B i z a d s e A. W.
[1] Über einige Klassen exakter Lösungen des Systems der Maxwell—Einsteinischen Gleichungen. Festakt 200. Wiederkehr des Geburtstages von Carl Friedrich Gauss, Berlin, 1977, S. 65—67.
[1] B l u m E. K.
The solutions of the Euler—Darboux equation for negative values of the parameter. — Duke Math. J. 1954, v. 21, p. 257—269.
B o c h n e r S.
[1] Allgemeine lineare Differenzialgleichungen mit asymptotisch konstanten Koeffizienten. — Math. Zeitschr., 1931, Bd. 33, S. 426—450.
B o u l i g a n d G., G i r a u d G., D e l e n s P.
[1] Le problème de la dérivée oblique en théorie de potentiel. — Exp. de géométr. Direct. E. Cartan, Paris, 1935, t. 6, p. 5—78.
C a r l e m a n T.
[1] Sur quelques problèmes dans la théorie mathématique de la diffraction des ondes électromagnetiques. — Arkiv f. M. A. o. F., 22B, 1930, t. 10, p. 1—2.
[2] Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendants. — Arkiv f. M. A. o! F., 26B, 1939, t. 17, p. 1—9.
C a r r o l l R. W., S h o w a l t e r R. E.
[1] Singular and Degenerate Cauchy Problems. — New York—San Francisco—London: Academic Press, 1976.
C a t e n a c c i R., A l o n s o J. D.
[1] On the stationary axisymmetric Einstein—Maxwell field equations. — J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 2232—2235.
C i b r a r i o M.
[1] Sulla reduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto. — Rend. Lombardo, 1932, v. 65, p. 889—906.
[2] Alcuni teoremi di esistenza e di unicita per l'equatione $xz_{xx}+$ $+z_{yy}=0$. — Atti R. Acc. Torino, 1932—1933, v. 68.
C i m i n o G.
[1] Nuovo tipo di condizione al contorno e nuove metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet. — Rend. Cic. Mat., Palermo, 1938, v. 61, p. 177—221.
C o p s o n E. T.
[1] Hadamard's elementary solution and Frobenius's method. — SIAM Review, 1971, v. 13. p. 222—230.

Courant R.
[1] Partial differential equations. — New York—London, 1962 (русский перевод: Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964).
Darboux G.
[1] Theorie generale des surfaces. — Paris, 1894, t. 3.
Drazin P. G., Moore D. W.
[1] Steady two-dimensional flow of fluid of variable density over an obstacle. — J. Fluid Mech., 1967, v. 28, p. 353—370.
Dubreil-Jacotin M. L.
[1] Sur les théorèmes d'existence relatifs aux ondes permanentes périodiques à deux dimensions dans les liquides hétérogènes. — J. Math. Pures Appl. 1937, t. 13, p. 217—291.
Ernst F. J.
[1] Complex potential formulation of the axially symmetric gravitational field problem. — J. Math. Phys., 1974, v. 15, p. 1409—1412.
[2] Black holes in a magnetic universe. — J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 54—56.
Feller W.
[1] Über die Lösungen der linearen partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. — Math. Ann., 1930, Bd. 102, S. 633—649.
Friedrichs O. K.
[1] Symmetric positive linear differential equations. — Commun. Pure Appl. Math., 1958, v. 11, p. 333—418.
Gårding L.
[1] Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients. — Acta Math., 1951, v. 85, p. 1—62.
Gellerstedt S.
[1] Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de type mixte. — Thes., Uppsala, 1935.
[2] Sur un problème aux limites pour l'équation $y^{2s}u_{xx}+u_{yy}=0$. — Arkiv f. M. A. o. F., 25A, 1936, t. 10, p. 1—12.
[3] Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$. — Arkiv f. M. A. o! E., 26A, 1938, t. 3, p. 1—32.
Germain P., Bader R.
[1] Sur le problème de Tricomi. — C. r. Ac. Sc. Paris, 1951, t. 232, p. 463—465.
[2] Recherches sur une équation du type mixte. Problèmes elliptiques et hyperboliques singuliers pour une équation du type mixte. — Note technique O. N. E. R. A., 1952.
[3] Sur quelques problèmes relatifs à l'équation du type mixte de Tricomi, 1952.
[4] Solutions élémentaires de certaines équations aux dérivées partielles du type mixte. — Bull. Soc. math. France, 1953, t. 81, p. 145—174.
Gilbarg D., Trudinger N. S.
[1] Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. — Berlin—Heidelberg—New York; Springer-Verlag, 1977.

Giraud G.
[1] Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique. — Bull. Soc. Math., 1932, t. 56, p. 248—272, 281—312, 316—352.
[2] Equations à intégrales principales d'ordre quelconque. — Ann. Ecole Norm. Super., 1936, t. 53, p. 1—40.
[3] Nouvelle méthode pour traiter certaines problèmes relatifs aux équations du type elliptique. — J. de Math. 1939, t. 18, p. 111—143.
Hadamard J.
[1] Lectures on Cauchy's Problem in Partial Differential Equations. — New Haven: Yale University Press, 1923.
Hausdorff F.
[1] Zur Theorie der linearen metrischen Räumen. — J. f. reine u. angew. Math., 1932, Bd. 167, S. 294—311.
Heinz E.
[1] Über Gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwedung auf die Monge-Amperesche Glelichung. — Math. Ann., 1956, Bd. 131, S. 411—428.
Holmgren E.
[1] Sur un problème aux limites pour l'equation $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$. — Arkiv f. M. A. o. F., 19B, 1927, t. 14, p. 1—3.
Hopf E.
[1] Elementare Betrachtungen über die Lösungen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. — Sitzungsb. Preuss. Akad. Wiss., 1927, Bd. 19, S. 147—152.
[2] A remark on linear elliptic differential equations of second order. — Proc. Amer. Math. Soc., 1952, v. 3, p. 791—793.
Hörmander L.
[1] Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems. — Ann. of Math., 1966, v. 21, p. 129—209.
Jacob C.
[1] Sur le problème de la dérivée oblique de Poincaré et sa connexion avec le problème de Hilbert. — Bull. Math. Soc. Roumain Sci., 1940, t. 42, p. 9—47.
Jantscher L.
[1] Grundlösungen von elliptischen Differentialgelichungen für den ganzen Raum. — J. f. reine u. angew. Math., 1964, Bd. 214/215, S. 350—359.
Von Karman T.
[1] The similarity law of transonic flow. — J. of Math. and Phys., 1947, v. 26, p. 182—190.
Leray J.
[1] Hyperbolic differential equations. — Princeton Univ. Press, 1954.
Levi E. E.
[1] Sulle equazioni lineari totalmente ellitiche alle derivate parziali. — Rend. Circ. matem. Palermo, 1907, v. 24, p. 275—317.
Lichtenstein L.
[1] Zur Theorie der konformen Abbildung. Konforme Abbildung nichtanalitischer singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete. — Bul. Acad. Sci. Cracovie, 1916, S. 192—217.

Liènard A.
[1] Problème plan de la dérivée oblique dans la théorie du potentiel. — J. Ecole polytechn., Sér. 3, 1938, N 5—7, pp. 35—158, 177—226.
Long R. R.
[1] Finite amplitude disturbances in the flow of inviscid rotating and stratified fluids over obstacle. — Ann. Rev. Fluid Mech., 1972, v. 4, p. 69—92.
Manwell A. R.
[1] A note on the hodograph transformation. — Quarterly of Applied Mathematics, 1952, v. 10, p. 177—184.
Mathisson M.
[1] Eine neue Lösungsmethode für Differentialgleichungen von normalen hyperbolischem Typus. — Math. Ann., 1932, Bd. 107, S. 400—419.
Melin A., Sjöstrand J.
[1] A calculus for Fourier integral operators in domains with boundary and applications to the oblique derivative problem. — Comm. Partial Differential Equations, 1977, v. 2, p. 857—935.
Miles J. W.
[1] Lee waves in a stratified flow. Part 1. Thin barrier. — J. Fluid Mech., 1968, v. 32, p. 549—567.
Miranda C.
[1] Equazioni alle derivate parziali di tipo elliptico. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1970.
Morawetz C. S.
[1] Uniqueness theorem for Frankl's problem. — Commun. Pure Appl. Math., 1954, v. 7, p. 697—703.
[2] Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for an elliptic-hyperbolic equation. — Proc. Royal Soc., 1956, v. 236A, p. 141—144.
[3] Uniqueness for the analogue of the Neumann problem for mixed equations. — Michigan Math. J., 1957, v. 4, p. 5—14.
[4] A weak solution for a system of equations of elliptic-hyperbolic type. — Commun. Pure Appl. Math., 1958, v. XI, № 3, p. 315—331.
Nevanlinna R.
[1] Eindeutige analytische Funktionen. — Berlin: J. Springer, 1936 (русский перевод: Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. — М.: Гостехиздат, 1941).
Nirenberg L.
[1] A strong maximum principle for parabolic equations. — Commun. Pure Appl. Math., 1953, v. 6, p. 167—177.
Ou Sing-Mo, Ding Shia-Shi.
[1] Sur l'unicité du problème de Tricomi de l'équation de Chapligin. — Sc. Rec., 1955, t. 3, p. 393—399.
Picard E.
[1] Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles. — Paris: Gautier-Villars, 1930.
Poritsky H.
[1] An approximate method of integrating the equations of compressible fluid flow in the hodograph plan. — Proceedings of the Sixth International Congress of Applied Mechanics, Paris, 1946.

Protter M. H.
[1] The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation. — Can. J. Math., 1954, v. 6, p. 542—553.
[2] Uniqueness theorems for the Tricomi problem. I, II. — J. Rat. Mech. and Anal., 1953, v. 2, p. 107—114; 1955, v. 4, p. 721—732.
[3] New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type. — J. Rat. Mech. and Anal., 1954, v. 3, N 4, p. 435—446.
[4] An existence theorem for the generalized Tricomi problem. — Duke Math. J., 1954, v. 21, p. 1—7.
Rehm R. G.
[1] A survey of selected aspects of stratified and rotating fluids. — J. Res. Nat. Bur. Stand. (US), 80B (Math. Sc.), 1976, v. 3, p. 343—402.
Reid J. L., Burt P. B.
[1] Solution of nonlinear partial differential equations from base equations. — J. Math. Anal. and Appl., 1974, v. 47, p. 520—530.
Schechter M.
[1] Various types of boundary conditions of elliptic equations. — Commun. Pure Appl. Math., 1960, v. 13, p. 407—425.
[2] On the theory of differential boundary problems. — Illinois J. Math., 1936, v. 7, p. 232—245.
Somigliana C.
[1] Sui sisteme simmetici di equazioni a derivate parziali. — Ann. Mat. Pure ed Appl., II, 1894, v. 22, p. 143—156.
Tanabe E. T.
[1] Exact solution of the stationary axisymmetric Einstein—Maxwell equations. — Progr. Theor. Phys., 1978, v. 60, p. 142—147.
Thomas B. T. Y., Titt E. W.
[1] On the elementary solution of the general linear differential equation of the second order with analytic coefficients. — J. de Math., 1939, v. 18, p. 217—247.
Tong Kwang-Chang
[1] On a boundary value problem for the wave equation. — Sc. Record, 1957, v. 1, p. 1—2.
Tricomi F.
[1] Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto.' — Mem. Lincei, Ser. V, XIV, fasc. VII (1923) (русский перевод: Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. — М.—Л.: Гостехиздат, 1947).
[2] Ulteriori ricerche sull'equazione $yz_{xx}+z_{yy}=0$. — Rend. Circ. Mat. Palermo LII (1928) (см. добавление I к русскому переводу [1]).
[3] Ancora sull'equazione $yz_{xx}+z_{yy}=0$. — Rend. Acc. Lincei. Ser. VI, 6 (1927) (см. добавление II к русскому переводу [1]).
[4] Sull'equazione $yz_{xx}+z_{yy}=0$. — Atti Congr. Internaz., III, Bologna (1928) (см. добавление III к русскому переводу [1]).
[5] Lezioni sulle equazioni a derivate parziali, Torino, 1954 (русский перевод: Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: ИЛ, 1957).
[6] Equazioni a derivate parziali. — Roma, 1957.

[7] Beispiel einer Strömung mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit. — Monatsch. f. Math., 1954, Bd. 58, S. 160—171.

Weinstein A.

[1] On the wave equation and the equation of Euler—Poisson. — The Fifth Symp. in Appl. Math., Macbraw—Hill—York, 1954, p. 137—147.

Weyl H.

[1] The method of orthogonal projection in potential theory. — Duke Math. J., 1940, v. 7, p. 411—444.

Wiener N.

[1] Certain notions in potential theory. — J. Math. and Phys., 1924, v. 3, p. 24—51.

Winzel B.

[1] Solutions of second order elliptic partial differential equations with prescribed directional derivative on the boundary. — Linköping Studies in Sc. and Technol., Disserations, 1975, v. 3, Linköping Univ., Sweden.

Wood J. C.

[1] Singularities of harmonic maps and applications of the Gauss—Bonnet formula. — Am. J. Math., 1977, v. 99, p. 1329—1344.

Yih C.-S.

[1] Progressive waves of permanent form in continuously stratified fluids. — Phys. Fluids, 1974, v. 17, p. 1489—1495.

Zaremba S.

[1] Sur un problème toujours possible comprenant, à titre de cas particuliers, le problème de Dirichlet et celui de Neumann. — J. Math. Pures Appl. 1927, t. 6, p. 127—163.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН