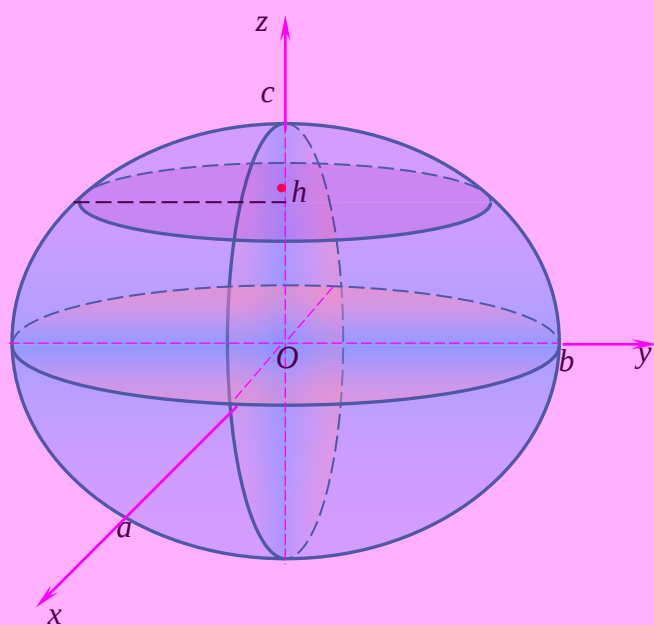


XURRAMOV SH.R

MATEMATIKA

MA'RUZALAR MATNI



TASHKENT-2016

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

TOSHKENT ARXITEKTURA- QURILISH INSTITUTI

SH.R.XURRAMOV

MATEMATIKA

MA‘RUZALAR MATNI

I-QISM

TOSHKENT -2016

Ushbu o'quv qo'llanma texnika oliy ta'lim muassasalarining "Matematika" fani dasturi asosida yozilgan bo'lib, bakalavr ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun mo'ljallangan.

Qo'llanmaning birinchi qismi "Matematika" fanining chiziqli algebra, vektorli algebra va analitik geometriya modullariga oid materillarni o'z ichiga oladi va uning har bir ma'ruzasi zamonaviy xorijiy adabiyotlar va o'qitish texnologiyalari tahlili asosida yozilgan.

Muallif:

Sh. R. Xurramov

Matematika. Ma'ruzalar matni. O'quv qo'llanma.1-qism. /
Xurramov Sh. R. – T: TAQI, 2016, 176 b.

Taqrizchilar:

fizika-matematika fanlari doktori, UzMU professori **A. Narmanov**

fizika-matematika fanlari doktori, TAQI professori **A.Kuchkarov**

Mazkur ma'ruzalar matni Toshkent arxitektura-qurilish instituti ilmiy-uslubiy Kengashining 2016 yil _____dagi _____ sonli qarori asosida chop etildi.

© Toshkent arxitektura - qurilish instituti.

SO'Z BOSHI

O'quv qo'llanma texnika oily ta'lim muassasalarining bakalavr ta'lim yo'nalishlari talabalariga mo'ljallangan bo'lib, u uch qismdan iborat va har bir qismda muhandislar uchun matematika fanining nazariy materiallari bayon qilingan.

Qo'llanmning ushbu birinchi qismida "Matematika" fanining chiziqli algebra, vektorli algebra va analitik geometriya modullariga oid ma'ruzalar keltirilgan.

Ma'ruzalarning berilish tartibi "Matematika" fanining o'quv dasturlariga to'la mos keladi. Ularning mazmuni "Matematika" fanidan zamonaviy xorijiy adabiyotlar va o'qitish texnologiyalari asosida yozilgan. Har bir ma'ruzani yozishda bir qancha xorijiy adabiyotlardan foydalanilgan va ulardan olingan matnlar va misol-masalalarning manbalari ko'rsatib o'tilgan.

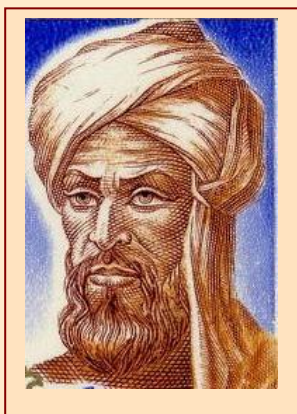
Ma'ruzalarda talaba asosiy tushunchalarni, ta'riflarni, teoremlarni va tipik masalalarni yechish usullarini ko'rsatuvchi misollarni topadi. Bunda biror tasdiqning isboti keltirilmagan bo'lsa, natijalarning ifodasi uning ma'nosini tushuntiradigan misollar bilan to'ldirilgan.

Qo'llanmada har bir ma'ruzadan keyin uning mavzusiga oid amaliy mashg'ulot darslarida va uy vazifalarida bajarishga mo'ljallangan ko'p sondagi masqlar berilgan va ularning javoblari qo'llanmaning oxirida keltirilgan.

O'quv qo'llanma haqida bildirilgan fikr va mulohazalar mamnuniyat bilan qabul qilinadi.

Muallif

- Matritsalar
- Determinantlar
- Matrisa ustida almashtirishlar
- Chiziqli tenglamalar sistemasi



Al - Xorazmiy – Muxammad ibn Musa Xorazmiy (783-850a.) – xorazmlik matematik, astronom va geograf.

«Ал-Хоразмий алгебра фанига асос солди, илмий маълумот ва трактатларни баён этишининг аниқ қоидаларини ишлаб чиқди. У ўнлик позицион ҳисоблаш тизимини, ноль белгиси ва қутблар координаталарини биринчилардан бўлиб асослаб берди ва амалиётга татбиқ этди».

I.Karimov

CHIZIQLI ALGEBRA

1.1. MATRITSALAR

Matritsa tushuncha sifatida XYIII-XIX asrlar davomida shakllantirildi va ishlab chiqildi. Daslabki vaqtlarda matritsa geometrik ob'ektlarni almashtirish va chiziqli tenglamalarni yechish bilan bog'liq holda rivojlantirildi. Hozirgi vaqtda matritsalar matematikaning kuchli tatbiqiy vositalaridan biri hisoblanadi.

Matritsalar sonlar, funksiyalar va matematik belgilarning katta massivlarini yagona ob'ekt sifatida qarash va bunday massivlarni o'z ichiga olgan masalalarni qisqa ko'rinishda yozish va yechish imkonini beradi.

Matritsalar matematika, texnika va iqtisodiyotning turli sohalarida keng qo'llaniladi. Masalan, ulardan matematikada algebraik va differensial tenglamalar sistemasini yechishda, kvant nazariyasida fizik kattaliklarni oldindan aytishda, internet tarmog'ida ma'lumotlarni shifrlashda foydalaniladi.

Sonlarni joylashtirishda «Matritsa» tushunchasi 1850 yilda *James Joseph Sylvester* tomonidan kiritilgan [3].

Ushbu bandda matritsalar nazariyasining asosiy tushunchalari bilan tanishamiz va uning ayrim tatbiqlarini o'rganamiz. Bunda muhim tushuncha va qoidalar misollar yordamida mustahkamlanadi, qat'iy tasdiqlarni isbotlashda intuktiv yondashishdan foydalaniladi.

1.1.1. Matritsa va uning turlari

Matritsani o'rganishdan oldin ikkita sodda misolni ko'rib chiqamiz.

1. $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ chiziqli tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglama a_1, a_2, a_3, a_4 koefitsientlardan va x_1, x_2, x_3, x_4 noma'lumlardan tashkil topgan bo'lib, u $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ koefitsiyentlar massivi bilan to'liq aniqlanadi.

Shu kabi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}$$

koefitsiyentlar massivi besh noma'lumli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \end{cases}$$

ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini aniqlaydi. Sistemada koefitsiyentlar qulaylik uchun ikkita indeks bilan yozilgan bo'lib, ulardan birinchisi sistema tenglamasining tartib raqamini, ikkinchisi esa o'zgaruvchining tartib raqamini bildiradi. Berilgan sistemaning har ikkala tomonini biror songa ko'paytiraylik yoki tenglamalardan birini ikkinchisiga qo'shaylik. Bunda qo'shish va ko'paytirish amalda massiv ustida bajariladi.

2. Uch o'lchovli fazoda vektor o'zining tartiblangan uchta koordinatasi bilan beriladi: $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$. Bunda vektorlar ustida chiziqli amallar koordinatalar ustida amallarga keltiriladi.

Shunday qilib, bir qancha masalalarni yechishda alohida kattaliklar bilan emas, balki ularning tartiblangan to'plamlari (massivi) bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi.

Matritsa – bu sonlar (elementlar) massivining satr hamda ustunlarda berilgan va kichik qavslarga olingan to'g'ri burchakli jadvalidir [3]. Shuningdek, matritsaning elementlari algebraik belgilardan yoki matematik funksiyalardan iborat bo'lishi mumkin.

Matritsaning o'lchami uning satrlari soni va ustunlari soni bilan aniqlanadi. Matritsaning o'lchamini ifodalash uchun $m \times n$ belgi ishlatiladi. Bu belgi matritsaning m ta satr va n ta ustundan tashkil topganini bildiradi. Matritsaning o'zi lotin alifbosining bosh harflaridan biri bilan belgilanadi va uning elementlari jadvali kichik qavsga olinadi.

Masalan,

3×2 o'lchamli matritsa	2×3 o'lchamli matritsa	2×2 o'lchamli matritsa
$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$

A matritsaning i -satr va j -ustunda joylashgan elementi a_{ij} bilan belgilanadi.

$A = (a_{ij}), \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ yoki $A = \| a_{ij} \|, \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ yozuv

A matritsa a_{ij} elementlardan tashkil topganini bildiradi:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A = \| a_{ij} \| = \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right\|.$$

$1 \times n$ o'lchamli $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ matritsaga *satr matritsa* yoki *satr-vektor* deyiladi.

$$m \times 1 \text{ o'lchamli } A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \text{ matritsaga } \textit{ustun matritsa} \text{ yoki } \textit{ustun-vektor}$$

deyiladi.

$n \times n$ o'lchamli matritsaga n - *tartibli kvadrat matritsa* deyiladi.

Kvadrat matritsaning chap yuqori burchagidan o'ng quyi burchagiga yo'nalgan $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlaridan tuzilgan diagonaliga uning *bosh diagonal*, o'ng yuqori burchagidan chap quyi burchagiga yo'nalgan $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ elementlardan tuzilgan diagonaliga uning *yordamchi diagonal* deyiladi.

Bosh diagonalidan yuqorida (pastda) joylashgan barcha elementlari nolga teng bo'lgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \left(A' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

matritsaga *yuqoridan uchburchak (quyidan uchburchak) matritsa* deyiladi.

Bosh diagonalda joylashmagan barcha elementlari nolga teng bo'lgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga *diagonal matritsa* deyiladi.

Barcha elementlari birga teng bo'lgan diagonal matritsaga *birlik matritsa* deyiladi va I harfi bilan belgilanadi.

Barcha elementlari nolga teng bo'lgan ixtiyoriy o'lchamdagi matritsaga *nol matritsa* deyiladi va O harfi bilan belgilanadi.

A matritsada barcha satrlarni mos ustunlar bilan almashtirish natijasida hosil qilingan A^T matritsaga A matritsaning *transponirlangan matritsasi* deyiladi: $(a_{ij})^T = (a_{ji})$. Agar $A = A^T$ bo'lsa, A matritsaga *simmetrik matritsa* deyiladi.

1.1.2. Matritsalar ustida arifmetik amallar

Matritsalar tengligi

Bir xil o'lchamli $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matritsalarining barcha mos elementlari teng, ya'ni $a_{ij} = b_{ij}$ bo'lsa, bu matritsalar *teng matritsalar* deyiladi va $A = B$ deb yoziladi.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \\ \text{bacha } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \text{ uchun}$$

Matritsani songa ko'paytirish

1-ta'rif. $A = (a_{ij})$ matritsaning λ songa ko'paytmasi deb, elementlari $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C = \lambda A$ matritsaga aytiladi.

$$C = \lambda A \Leftrightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

1.1-misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $3A$ ni toping.

Yechish.

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 9 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matritsalar qo'shish va ayirish

Matritsalar qo'shish va ayirish amallari *bir xil o'lchamli matritsalar* uchun kiritiladi. Bunda yig'indi matritsa qo'shiluvchi matritsalar bilan bir xil o'lchamga ega bo'ladi.

2-ta'rif. $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matritsalarining yig'indisi deb, elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C = A + B$ matritsaga aytiladi.

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

1.2-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $A + B$ ni toping.

Yechish.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & -1+3 & 4+2 \\ 3+1 & 0+0 & 1+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$-A = (-1) \cdot A$ matritsa A *matritsaga qarama-qarshi matritsa* deb ataladi.

3-ta'rif. $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ *matritsalarining ayirmasi* deb $C = A - B = A + (-B)$ matritsaga aytiladi. Bunda C matritsaning elementlari $c_{ij} = a_{ij} + (-b_{ij}) = a_{ij} - b_{ij}$ kabi topiladi.

$$C = A - B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

1.3-misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $A - B$ ni toping.

Yechish.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -3-3 & 2-2 \\ 2-2 & -1-1 & 4-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matritsalar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga ega [3].

A, B, C, O matritsalar $m \times n$ o'lchamli va λ, μ - skalyar sonlar bo'lsa, u holda:

1°. $A + B = B + A$;

2°. $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3°. $A + O = A$;

4°. $A + (-A) = O$;

5°. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

6°. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;

7°. $\mu(\lambda A) = \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;

8°. $1 \cdot A = A$;

9°. $(A + B)^T = A^T + B^T$;

10°. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

11°. $A + C = B$ bo'lsa, $C = B - A$ bo'ladi;

12°. $\lambda A = O$ bo'lsa, $\lambda = 0$ yoki $A = O$ bo'ladi;

13°. $\lambda A = \lambda B$ va $\lambda \neq 0$ bo'lsa, $A = B$ bo'ladi.

Isboti. 1° – 4° xossalarning isboti bevosita 2-ta'rifdan kelib chiqadi.

5° -xossani qaraymiz. A va B bir xil o'lchamli matritsalar bo'lsin.

U holda 1 va 2-ta'riflarga ko'ra istalgan i, j da birinchidan

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \text{yoki} \quad \lambda(A + B) = \lambda(a_{ij} + b_{ij}) = \lambda(a_{ij}) + \lambda(b_{ij})$$

va ikkinchidan

$$\lambda(a_{ij}) + \lambda(b_{ij}) = \lambda A + \lambda B$$

bo'ladi. Oxirgi ikkita tenglikdan $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ bo'lishi kelib chiqadi [4].

Qolgan xossalar shu kabi isbotlanadi.

Matritsalar ni ko'paytirish

A – satr matritsa va B – ustun matritsa bir xil sondagi elementlarga ega bo'lsin deylik. Bunda A satrning B ustunga ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$AB = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \dots \\ b_{1n} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \dots + a_{1n}b_{1n},$$

ya'ni ko'paytma matritsalarining mos elementlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi [4].

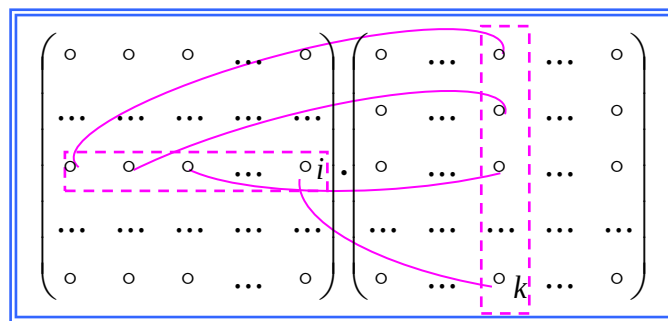
Matritsalar ni ko'paytirishning bu qoidasi *satrni ustunga ko'paytirish qoidasi* deb yuritiladi.

Ikki matritsani ko'paytirish amali *moslashtirilgan matritsalar* uchun kiritiladi. A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lsa, A va B *matritsalar moslashtirilgan* deyiladi.

4-ta'rif. $m \times p$ o'lchamli $A = (a_{ij})$ matritsaning $p \times n$ o'lchamli $B = (b_{jk})$ matritsaga ko'paytmasi AB deb, c_{ik} elementi A matritsaning i -satrini B matritsaning j -ustuniga satrni ustunga ko'paytirish qoidasi bilan, ya'ni

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk} = \sum_{r=1}^p a_{ir}b_{rk}, \quad i=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, n$$

(qo'shiluvchlari quyidagi sxemada keltirilgan) kabi aniqlanadigan $m \times n$ o'lchamli $C = (c_{ik})$ matritsaga aytiladi.



1.4-misol. Berilgan matritsalar ni ko'paytiring.

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 3 + 1 \cdot 4) = (10);$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \\ -1 \cdot 3 & -1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -3 & -4 \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ -3 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) & -3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & -3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 11 \\ -13 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Agar A matritsaning satrlarini $A_1, A_2, \dots, A_m$ bilan va B matritsaning ustularini $B_1, B_2, \dots, B_n$ bilan belgilansa, u holda matritsalarini ko'paytirish qoidasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$C = AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix} \cdot (B_1 \ B_2 \ \dots \ B_n) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & \dots & A_1 B_n \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & \dots & A_2 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m B_1 & A_m B_2 & \dots & A_m B_n \end{pmatrix}.$$

Matritsalarini ko'paytirishda A^2 yozuv ikkita bir xil matritsani ko'paytmasini bildiradi: $A^2 = A \cdot A$. Shu kabi $A^3 = A \cdot A \cdot A \dots A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ marta}}$.

1.5-misol. $f(x) = 2x - x^2 + 5$ va $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $f(A)$ ni toping.

Yechish. Matritsa ko'rinishdagi $f(A)$ funksiyaga o'tishda λ sonli qo'shiluvchi λI ko'paytma bilan almashtiriladi, bu yerda I - birlik matritsa.

$$\begin{aligned} f(A) &= 2A - A^2 + 5I = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Umuman olganda matritsalarini ko'paytirish nokommutativ, ya'ni $AB \neq BA$. Masalan, $1 \times n$ o'lchamli A matritsaning $n \times 1$ o'lchamli B matritsaga AB ko'paytmasi sondan, ya'ni 1×1 o'lchamli matritsadan iborat bo'lsa, BA ko'paytmasi n - tartibli kvadrat matritsa bo'ladi.

Bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalar uchun $AB = BA$ bo'lsa, A va B matritsalariga **kommutativ matritsalar**, $AB - BA$ ayirmaga **kommutator** deyiladi.

1.6-misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ matritsalarining kommutatorini toping.

Yechish.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 0 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 12 & -3 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 8 & 1 \end{pmatrix},$$

10 Matritsalar

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarini ko'paytirish amali ushbu xossalarga bo'ysunadi [3].

1°. A matritsa $m \times n$ o'lchamli va B, C matritsalar $n \times p$ o'lchamli bo'lsa, $A(B + C) = AB + AC$ bo'ladi;

2°. A matritsa $m \times n$ o'lchamli va B, C matritsalar $n \times p$ o'lchamli bo'lsa, $A(B + C) = AB + AC$ bo'ladi;

3°. A, B, C matritsalar mos ravishda $m \times n, n \times p, p \times q$ o'lchamli bo'lsa, $A(BC) = (AB)C$ bo'ladi;

4°. (4) A, B, I, O moslashtirilgan matritsalar va λ, μ skalyar sonlar bo'lsa, u holda:

1) $(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)(AB);$

2) $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB);$

3) $AI = IA = A;$

4) $AO = OA = O;$

5) $(AB)^T = B^T A^T.$

5°. A, I, O — n - tartibli kvadrat matritsalar va p, q manfiy bo'lmagan butun sonlar bo'lsa, u holda:

1) $A^p A^q = A^{p+q};$

2) $(A^p)^q = (A)^{pq};$

3) $A^1 = A;$

4) $A^0 = I.$

Isboti. Xossalardan ayrimlarini ta'riflar yordamida isbotlaymiz va ayrimlarining to'g'riligiga misollarni yechish orqali ishonch hosil qilamiz.

2° -xossani qaraylik. $A = (a_{ij})$ matritsa $m \times n$ o'lchamli va $B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ matritsalar $n \times p$ o'lchamli bo'lsin. U holda 2 va 3-ta'riflarga ko'ra istalgan i, j da birinchidan $B + C = (b_{ij} + c_{ij})$ yoki

$$A(B + C) = \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^n (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj}$$

va ikkinchidan

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = AC + BC$$

bo'ladi. Oxirgi ikkita tenglikdan $A(B + C) = AB + AC$ bo'lishi kelib chiqadi [4].

6° - xossani qaraylik. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ bo'lsin. Bundan $A^T=(a'_{ij})$ va $B^T=(b'_{ij})$ bo'ladi, bu yerda $a'_{ij}=a_{ji}$, $b'_{ij}=b_{ji}$. U holda 3-ta'rifga ko'ra istalgan i, j da birinchidan

$$AB = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \text{ yoki } (AB)^T = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$$

va ikkinchidan

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n b'_{ik} a'_{ik} = B^T A^T$$

bo'ladi. Bundan $(AB)^T = B^T A^T$ bo'lishi kelib chiqadi [4].

3° -xossani to'g'riligiga misol yechish orqali ishonch hosil qilamiz [4].

$$A=(1 \ 2), \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ bo'lsin.}$$

U holda

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 12 & 1 \\ 20 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \\ A(BC) &= (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} -11 & 12 & 1 \\ 20 & 0 & 8 \end{pmatrix} = (29 \ 12 \ 17), \\ AB &= (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = (3 \ 7), \\ (AB)C &= (3 \ 7) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (29 \ 12 \ 17). \end{aligned}$$

Demak, $A(BC) = (AB)C$.

1.1. Mashqlar

1.1.1. A kvadrat matritsa bo'lsin. $A + A^T$ simmetrik matritsa bo'lishini ko'rsating.

1.1.2. $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ matritsani $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ va $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ matritsalarining chiziqli

kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalang.

1.1.3. $a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ bo'lsa, a va b ni toping.

1.1.4. Matritsa 30 ta elementga ega bo'lsa, u qanday tartiblarda berilishi mumkin?

1.1.5-1.1.8 masqlarda A, B matritsalar va λ, μ sonlar berilgan. $\lambda A + \mu B$ matritsani toping:

1.1.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1$, $\mu = 2$.

$$1.1.6. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2, \quad \mu = -3.$$

$$1.1.7. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -3, \quad \mu = -2.$$

12 Matritsalar

$$1.1.8. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = E, \quad \lambda = 1, \quad \mu = -\nu.$$

1.1.9. A va B moslashtirilgan matritsalar bo'lsin. Quyidagilarni ko'rsating:

- (a) agar A matritsa satr matritsa bo'lsa, u holda AB satr matritsa bo'ladi;
 (b) agar B matritsa ustun matritsa bo'lsa, u holda AB ustun matritsa bo'ladi.

$$1.1.10. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } x \text{ va } y \text{ ni toping.}$$

1.1.11. Agar A matritsa 3×3 o'lchamli va C esa 5×5 o'lchamli bo'lsa, ABC ko'paytma ma'noga ega bo'lishi uchun B matritsa qanday o'lchamda bo'lishi kerak?

1.1.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. AB ko'paytmani nol matritsaga aylantiruvchi B matritsani toping.

1.1.13-1.1.16 mashqlarda A va B matritsalar berilgan. AB matritsani toping:

$$1.1.13. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.1.14. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.1.15. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.1.16. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.1.17. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $C = B - 3I$ bo'lsa, $(AB)C$ matritsani toping.

1.1.18. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A(BC)$ matritsani toping.

1.1.19. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan. AB , $B^T B$, A^2 matritsalarini toping.

1.1.20. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ va $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ bo'lsin. $f(A)$ ni toping.

1.1.21. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lsa, A^{20} ni toping.

1.1.22. Agar $A^2 = I$ va A matritsa 2×2 o'lchamli bo'lsa, A ni toping.

1.2. DETERMINANTLAR Matritsalar 13

Determinant tushunchasidan dastlab chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda foydalanilgan bo'lib, keyinchalik determinantlar matematikaning bir qancha masalalarini yechishga, jumladan xos sonlarni topishga, differensial tenglamalarni yechishga, vektor hisobiga, keng tatbiq etildi [4].

Biz avval ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar tushunchalari bilan tanishamiz. Bu tushunchalar keyinchalik yuqori tartibli determinantlarni hisoblash uchun asos bo'ladi.

1.2.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

Ikkinchi tartibli determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.2.1)$$

kabi belgilanadi va aniqlanadi.

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlarga determinantning elementlari deyiladi. Bunda a_{11}, a_{12} 1-satr, a_{21}, a_{22} 2-satr, a_{11}, a_{21} 1-ustun va a_{12}, a_{22} 2-ustun elementlari hisoblanadi, ya'ni a_{ij} determinantning i -satr va j -ustunda joylashgan elementini ifodalaydi.

a_{11}, a_{22} elementlar joylashgan diagonalga determinantning bosh diagonal, a_{21}, a_{12} elementlar joylashgan diagonalga determinantning yordamchi diagonal deyiladi.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli determinant bosh diagonal elementlari ko'paymasidan yordamchi diagonal elementlari ko'paymasini ayirilganiga teng:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2.1-misol. Berilgan determinantlarni hisoblang.

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 15 + 8 = 23;$$

$$2. \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$$

Matritsaning muhim tavsiflaridan biri determinant hisoblanadi. Determinant faqat kvadrat matritsalar uchun kiritiladi.

14 Determinantlar

A kvadrat matritsaning determinanti $\det A$ bilan belgilanadi. Masalan, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsaning determinanti $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ kabi aniqlanadi.

Bunda matritsani uning determinanti bilan adashtirmaslik kerak: matritsa – bu sonlar massivi; determinant – bu bitta son.

Uchinchi tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1.2.2)$$

kabi belgilanadi va aniqlanadi.

Uchinchi tartibli determinant uchun satr, ustun, bosh diagonal, yordamchi diagonal tushunchalari ikkinchi tartibli determinantdagi kabi kiritiladi.

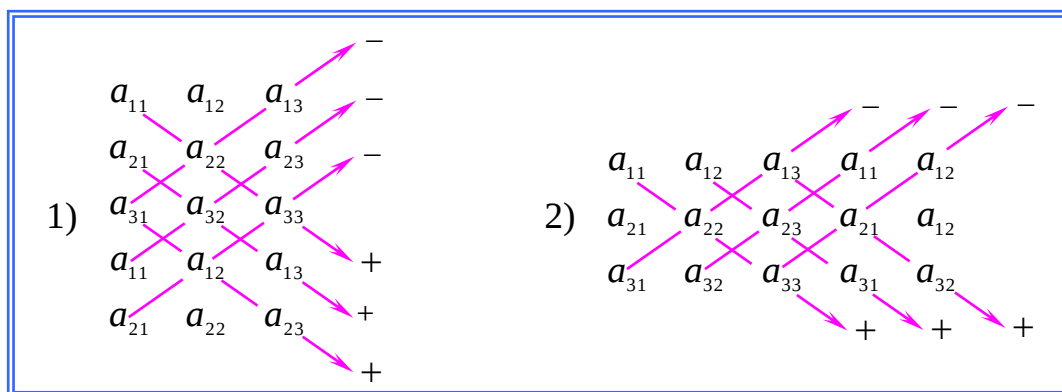
Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblashda (1.2.2) tenglikning o'ng tomonidagi birhadlarni topishning yodda saqlash uchun oson bo'lgan qoidalaridan foydalaniladi.

«Uchburchak qoidasi» ushbu sxema bilan tasvirlanadi [4]:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} & \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \\ + & - \end{array}$$

Bunda diagonallardagi yoki asoslari diagonallarga parallel bo'lgan uchburchaklar uchlaridagi elementlar uchta elementning ko'paytmasini hosil qiladi. Agar uchburchaklarning asoslari bosh diagonalga parallel bo'lsa, u holda elementlarning ko'paytmasi ishorasini saqlaydi. Agar uchburchaklarning asoslari yordamchi diagonalga parallel bo'lsa, u holda elementlarning ko'paytmasi teskari ishora bilan olinadi.

«Sarryus qoidalar» quyidagi sxemalar bilan ifodalanadi [3]:



1-qoidada avval determinant tagiga uning birinchi ikkita satri yoziladi, 2-qoidada esa determinantning o'ng tomoniga uning birinchi ikkita ustuni yoziladi. Bunda diagonallardagi yoki diagonallarga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlardagi elementlar uchta ko'paytuvchini hosil qiladi. Agar to'g'ri chiziqlar bosh diagonalga parallel bo'lsa, u holda elementlarning ko'paytmasi ishorasini saqlaydi. Agar to'g'ri chiziqlar yordamchi diagonalga parallel bo'lsa, u holda elementlarning ko'paytmasi teskari ishora bilan olinadi.

2.2-misol. 1. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ determinantlarni uchburchak qoidasi bilan

hisoblang.

Yechish.

$$\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{array} \Rightarrow -8 + 1 + 27 = 20, \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{array} \Rightarrow 6 - 6 + 6 = 6, \det A = 20 - 6 = 14.$$

2. $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ determinantni Sarryusning 1-qoidasi bilan hisoblang.

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 5 & 3^- \\
 3 & 1 & -2^- \\
 2 & -4 & 1^- \\
 1 & 5 & 3^+ \\
 3 & 1 & -2^+
 \end{array}
 \Rightarrow \Delta_2 = 1 - 36 - 20 - 6 - 8 - 15 = -84.$$

3. $\det C = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ determinantni Sarryusning 2-qoidasi bilan hisoblang.

$$\begin{array}{ccc}
 3 & 4 & -1 \\
 2 & 0 & 3 \\
 3 & -1 & 2
 \end{array}
 \Rightarrow \Delta_3 = 0 + 36 + 2 - 0 + 9 - 16 = 31.$$

16 Determinantlar

1.2.2. n - tartibli determinant tushunchasi

n - tartibli determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi va ma'lum qoida asosida hisoblanadi.

n - tartibli determinant har bir satr va har bir ustundan faqat bittadan olingan n ta elementning ko'paytmasidan tuzilgan $n!$ ta qo'shiluvchilar yig'indisidan iborat bo'ladi, bunda ko'paytmalar bir-biridan elementlarining tarkibi bilan farq qiladi va har bir ko'paytma oldiga inversiya tushunchasi asosida plyus yoki minus ishora qo'yiladi.

n -tartibli determinantni bu qoida asosida ifodalash etarlicha noqulaylikka ega. Shu sababli yuqori tartibli determinantlarni hisoblashda bir nechta ekvivalent qoidalardan foydalaniladi. Bunday qoidalardan biri yuqori tartibli determinantlarni quyi tartibli determinantlar asosida hisoblash usuli hisoblanadi. Bu usulda determinant biror satr (yoki ustun) bo'yicha yoyiladi. Bunda quyi (ikkinchi va uchunchi) tartibli determinantlar yuqorida keltirilgan ta'riflar asosida topiladi.

n -tartibli determinantlarni yoyishda minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalaridan foydalaniladi.

n -tartibli determinant a_{ij} *elementining minori* deb, shu element joylashgan satr va ustunni o‘chirishdan hosil bo‘lgan $(n-1)$ - tartibli determinantga aytiladi va M_{ij} bilan belgilanadi.

Determinant a_{ij} *elementining A_{ij} algebraik to‘ldiruvchisi* deb,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

songa aytiladi.

Masalan, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ determinantning $a_{21}=2$ elementining minori va

algebraik to‘ldiruvchisi quyidagicha topiladi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 10.$$

1.2.3. Determinantning xossalari

Determinantning xossalarini uchinchi tartibli determinant uchun keltiramiz. Bu xossalari ixtiyoriy n - tartibli determinant uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

1-xossa. Transponirlash (barcha satrlarni mos ustunlar bilan almashtirish) natijasida determinantning qiymati o‘zgarmaydi, ya’ni

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A^T.$$

Isboti. Xossani isbotlash uchun tenglikning chap va o‘ng tomonidagi determinantlarning qiymatlarini uchburchak qoidasi orqali yozib olish va olingan ifodalarning tengligiga ishonch hosil qilish kifoya.

1-xossa satr va ustunlarning teng huquqligini belgilab beradi. Boshqacha aytganda satrlar uchun isbotlangan xossalari ustunlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi va aksincha. Shu sababli keyingi xossalarni ham satrlar va ham ustunlar uchun ifodalab, ularning isbotini faqat satrlar yoki faqat ustunlar uchun ko‘rsatamiz.

2-xossa. Determinant ikkita satrining (ustunining) o‘rinlari almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshi ishoraga o‘zgaradi. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu xossa ham 1-xossa kabi isbotlanadi.

3-xossa. Agar determinant ikkita bir xil satrga (ustunga) ega bo'lsa, u nolga teng bo'ladi.

Isboti. Haqiqatdan ham determinantda ikkita bir xil satrning o'rinlari almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi. Ikkinchi tomondan 2-xossaga ko'ra determinant qiymatining ishorasi o'zgaradi. Demak $\det A = -\det A$, yoki $2\det A = 0$. Bundan $\det A = 0$.

4-xossa. Determinantning biror satri (ustuni) elementlari λ songa ko'paytirilsa, determinant shu songa ko'payadi va aksincha determinant biror satr (ustun) elementlarining umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisidan tashqatiga chiqarish mumkin. Masalan,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Isboti. Tenglikning chap tomondagi determinant hisoblanganida oltita qo'shiluvchining hammasida λ ko'paytuvchi qatnashadi.

18 Determinantlar

Bu ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarib, qavslar ichidagi qo'shiluvchilardan determinant tuzilsa, tenglikning o'ng tomondagi ifoda hosil bo'ladi.

5-xossa. Agar determinant biror satrining (ustunining) barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u nolga teng bo'ladi.

Xossaning **isboti** 4-xossadan $\lambda = 0$ da kelib chiqadi.

6-xossa. Agar determinantning ikki satri (ustuni) proporsional bo'lsa, u nolga teng bo'ladi. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Isboti. 4-xossaga ko'ra determinant ikkinchi satrining λ ko'paytuvchisini determinant belgisidan chiqarish mumkin. Natijada ikkita bir xil satrli determinant qoladi va u 3-xossaga ko'ra nolga teng bo'ladi.

7-xossa. Agar determinant biror satrining (ustunining) har bir elementi ikki qo'shiluvchining yig'indisidan iborat bo'lsa, bu determinant ikki determinant yig'indisiga teng bo'lib, ulardan birinchisining tegishli satri (ustuni) elementlari

birinchi qo'shiluvchilardan, ikkinchisining tegishli satri (ustuni) elementlari ikkinchi qo'shiluvchilardan tashkil topadi.

Isboti. Determinant birinchi satrining har bir elementi ikkita qo'shiluvchi yig'indisidan iborat bo'lsin. U holda

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a'_{11} + a''_{11})a_{22}a_{33} + (a'_{12} + a''_{12})a_{23}a_{31} + \\ + (a'_{13} + a''_{13})a_{21}a_{32} - (a'_{13} + a''_{13})a_{22}a_{31} - (a'_{12} + a''_{12})a_{21}a_{33} - (a'_{11} + a''_{11})a_{23}a_{32} = \\ = a'_{11}a_{22}a_{33} + a'_{12}a_{23}a_{31} + a'_{13}a_{21}a_{32} - a'_{13}a_{22}a_{31} - a'_{12}a_{21}a_{33} - a'_{11}a_{23}a_{32} + (a''_{11}a_{22}a_{33} + a''_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a''_{13}a_{21}a_{32} - a''_{13}a_{22}a_{31} - a''_{12}a_{21}a_{33} - a''_{11}a_{23}a_{32}) = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8-xossa. Agar determinantning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satrining (ustunining) mos elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shilsa, determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Isboti. $\det A$ determinantning ikkinchi satri elementlariga λ ga ko'paytirilgan birinchi satrning mos elementlari qo'shilgan bo'lsin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & a_{23} + \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

Determinantlar

19

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Qo'shiluvchilardan birinchisi $\det A$ ga va ikkinchisi esa 3-xossaga ko'ra nolga teng. Demak, yig'indi $\det A$ ga teng.

9-xossa. Determinantning qiymati uning biror satri (ustuni) elementlari bilan shu elementlarga mos algebraik to'ldiruvchilar ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi. Masalan, $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ yoki

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Isboti. Tenglikning o'ng tomonida almashtirishlar bajaramiz:

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

10-xossa. Determinant biror satri (ustuni) elementlari bilan boshqa satri (ustuni) mos elementlari algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng bo'ladi. Masalan, $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0$.

Isboti. Determinantni 9-xossani qo'llab, topamiz:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

a_{11}, a_{12}, a_{13} mos ravishda a_{21}, a_{22}, a_{23} bilan almashtirilsa, 3-xossaga ko'ra determinant nolga teng bo'ladi.

1-izoh. Determinantning xossalari asosida quyidagi teorema isbotlangan.

1-teorema. Bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalar ko'paytmasining determinanti bu matritsalar determinantlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

1.2.4. n -tartibli determinantlarni hisoblash

n -tartibli determinantni xossalar yordamida soddalashtirib, keyin tartibini pasaytirish yoki uchburchak ko'rinishga keltirish usullaridan biri bilan hisoblash mumkin.

20 Determinantlar

Tartibini pasaytirish usuli

n -tartibli determinant 9-xossaga asosan biror satr yoki ustun bo'yicha yoyiysa, yoyilmada $(n-1)$ -tartibli algebraik to'ldiruvchilar hosil bo'ladi, ya'ni n -tartibli determinantni hisoblash tartibi bittaga past bo'lgan determinantlarni hisoblashga keltiriladi.

Umuman olganda quyidagi teoremlar o'rinli bo'ladi.

2-teorema. i satrining nomeri qanday bo'lishidan qat'iy nazar n -tartibli determinant uchun bu determinantni i -satr bo'yicha yoyilmasi deb ataluvchi

$$\det A = a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \dots + a_{in}A_{1n}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.2.3)$$

formula o'rinli.

3-teorema. j ustunining nomeri qanday bo'lishidan qat'iy nazar n -tartibli determinant uchun bu determinantni j -ustun bo'yicha yoyilmasi deb ataluvchi

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = \overline{1, n} \quad (1.2.4)$$

formula o'rinli.

Determinantni biror satr yoki ustun bo'yicha yoyishga *Laplas yoyilmalari usuli* deyiladi [5].

Laplas yoyilmalari usulida determinantning qaysi bir satrida (ustunida) nollar ko'p bo'lsa, u holda yoyishni shu satr (ustun) bo'yicha bajarish qulay bo'ladi. Bundan tashqari 8-xossani qo'llab, determinantning biror satrida (ustunida) bitta elementdan boshqa elementlarni nollarga keltirish mumkin. Bunda determinantning qiymati shu satrdagi (ustundagi) noldan farqli element bilan uning algebraik to'ldiruvchisining ko'paytmasidan iborat bo'ladi. Shunday qilib, n -tartibli determinant bitta $(n-1)$ -tartibli determinantga keltirib, hisoblanadi.

2.3-misol.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

determinantni tartibini pasaytirish usuli bilan hisoblang.

Yechish. Bunda: 1) Ikkita elementi nolga teng bo'lgan uchinchi ustunni tanlaymiz va uning ikkinchi satrida joylashgan elementidan boshqa barcha elementlarini nolga aylantiramiz. Buning uchun ikkinchi satr elementlarini 3 ga ko'paytirib, uchinchi satrning mos elementlariga qo'shamiz va hosil bo'lgan determinantni uchinchi ustun elementlari bo'yicha yoyamiz;

2) Hosil qilingan uchinchi tartibli determinantda birinchi ustunning uchinchi satri elementidan yuqorida joylashgan elementlarini nolga aylantiramiz. Buning uchun avval uchinchi satrni (-2) ga ko'paytirib, birinchi satrga qo'shamiz, keyin uchinchi satrni (-10) ga ko'paytirib, ikkinchi satrga qo'shamiz, hosil bo'lgan determinantni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyamiz va hosil bo'lgan

ikkinchi tartibli determinantni hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 10 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 10 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 25 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -4 & 25 \end{vmatrix} = -75 + 32 = -43.$$

Uchburchak ko'rinishga keltirish usuli

Bu usulda determinant xossalar yordamida soddalashtiriladi va uchburchak ko‘rinishga keltiriladi, ya’ni diagonalidan pastda (yuqorida) joylashgan barcha elementlari nolga aylantiriladi.

Bunda

$$\det A = (-1)^k \det U$$

bo‘ladi [3], bu yerda k – satrlarda va ustunlarda bajarilgan barcha o‘rin almashtirishlar soni; $\det U$ – berilgan determinantning uchburchak ko‘rinishi va uning qiymati quyidagi xossa asosida hisoblanadi:

Xossa. Uchburchak ko‘rinishidagi determinant bosh diagonalda joylashgan elementlarining ko‘paytmasiga teng [5].

2.4-misol.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantni ushburshak ko‘rinishga keltirib, hisoblang.

Yechish. Determinant ustida quyidagi soddalashtirishlarni bajaramiz:

- birinchi ustunni o‘zidan o‘ngda joylashgan ustunlar bilan ketma-ket $k = 3$ ta o‘rin almashtirib, to‘rtinchi ustunga o‘tkazamiz;

- birinchi ustunning birinchi satridan pastda joylashgan elementlarini nolga aylantiramiz;

- ikkinchi ustunning ikkinchi satridan pastda joylashgan elementlarini nolga aylantiramiz;

- uchinchi ustunning to‘rtinchi satrida joylashgan elementini nolga aylantiramiz;

- $(-1)^k = (-1)^3 = -1$ ko‘paytuvchi bilan hosil bo‘lgan uchburchak ko‘rinishgagi determinantning bosh diagonalda joylashgan elementlarini ko‘paytiramiz.

22

Determinantlar

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 = -8. \end{aligned}$$

1.2.1. A matritsa $n \times n$ o'lchamli bo'lsin. $\det(\lambda A)$ da λ ni determinant belgisidan tashqariga chiqarish uchun formula keltirib chiqaring.

1.2.2. A kvadrat matritsa va $A^T A = I$ bo'lsin. $\det A = \pm 1$ bo'lishini ko'rsating.

1.2.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bo'lsin. $\det(A+B) = \det A + \det B$ faqat $a+d=0$ bo'lganida bajarilishini ko'rsating.

1.2.4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ bo'lishiga ishonch hosil qiling.

1.2.5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $\det A^{1000}$ ni toping.

1.2.6. A va B matritsalar 3×3 o'lchamli, $\det A = -1$ va $\det B = 2$ bo'lsin. Topping:

1) $\det AB$; 2) $\det 5A$; 3) $\det A^T A$; 4) $\det B^3$.

1.2.7. A va B matritsalar 4×4 o'lchamli, $\det A = 4$ va $\det B = -3$ bo'lsin. Topping:

1) $\det AB$; 2) $\det B^5$; 3) $\det 2A$; 4) $\det IA$.

Ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblang:

1.2.8. $\begin{vmatrix} y & x-y \\ x & -x \end{vmatrix}.$

1.2.9. $\begin{vmatrix} 1 & a+b \\ b+1 & a+b \end{vmatrix}.$

1.2.10. $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix}.$

1.2.11. $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha + 1 & \operatorname{ctg} \alpha - 1 \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$

Uchinchi tartibli determinantlarni uchburchak va Sarryus qoidalar bilan hisoblang:

1.2.12. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$

1.2.13. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$

Uchinchi tartibli determinantlarni biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblang:

1.2.14. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}.$

1.2.15. $\begin{vmatrix} x & -1 & x \\ 1 & x & -1 \\ x & 1 & x \end{vmatrix}.$

1.2.16. $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \beta & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \sin \gamma \\ 0 & \sin \beta & \sin \gamma \end{vmatrix}.$

1.2.17. $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{ctg} \beta & 0 \\ \operatorname{tg} \alpha & 0 & \operatorname{tg} \beta \\ 0 & \operatorname{ctg} \alpha & \operatorname{tg} \beta \end{vmatrix}.$

Uchinchi tartibli determinantlarni xossalaridan foydalanib hisoblang:

1.2.18. $\begin{vmatrix} 1 & c & ab \\ 1 & b & ca \\ 1 & a & bc \end{vmatrix}.$

1.2.19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ax & ay & az \\ a^2+x^2 & a^2+y^2 & a^2+z^2 \end{vmatrix}.$

$$1.2.20. \begin{vmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix}.$$

$$1.2.21. \begin{vmatrix} x & x+y & x-y \\ x & x+z & x-2z \\ x & x & x \end{vmatrix}.$$

$$1.2.22. \begin{vmatrix} a & a^2+1 & (1+a)^2 \\ b & b^2+1 & (1+b)^2 \\ c & c^2+1 & (1+c)^2 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.23. \begin{vmatrix} 1+\cos \alpha & 1 & 1+\sin \alpha \\ 1-\sin \alpha & 1 & 1-\cos \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

To'rtinchi tartibli determinantlarni hisoblang:

$$1.2.24. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.25. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.26. \begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.27. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

1.3. MATRITSA USTIDA ALMASHTIRISHLAR

Matritsa ustida almashtirishlar chiziqli algebrada muhim ro'l o'ynaydi. Jumladan, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining umumiy yechimini topishda, teskari matritsani aniqlashda, matritsaning rangini hisoblashda matritsa ustidagi almashtirishlardan keng foydalaniladi [4].

24 Determinantlar

Matritsa satri (ustuni) ustida elementar almashtirishlar uch tipda bo'ladi [3]:

- I. ikkita satrning (ustunning) o'rnini almashtirish;
- II. satrni (ustunni) noldan farqli songa ko'paytirish;
- III. satrga (ustunga) noldan farqli songa ko'paytirilgan boshqa satrni (ustunni) qo'shish.

Biri ikkinchisidan elementar almashtirishlar natijasida hosil qilingan A va B matritsalariga *ekvivalent matritsalar* deyiladi va $A \sim B$ ko'rinishda yoziladi.

1.3.1. Teskari matritsa

Asosiy ushunchalar

Matritsalarini qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish sonlar ustida bajariladigan mos amallarga monand (hamohang) amallar hisoblanadi. Ushbu bandda matritsalar uchun sonlarni bo‘lish amaliga monand amal bilan tanishamiz.

Ma’lumki, agar k soni nolga teng bo‘lmasa, u holda har qanday m soni uchun $kx = m$ tenglama yagona $x = \frac{m}{k} = k^{-1}m$ yechimga ega bo‘ladi, bu yerda k^{-1} soni k soniga teskari son deb ataladi.

Sonlar uchun keltirilgan bu tasdiq matritsali tenglamalarni sonli tenglamalarga monand yechishda muhim ro‘l o‘ynaydi. Xususan, sonli tenglamalar uchun $kk^{-1} = 1$ va $k^{-1}k = 1$ shartlarining bajarilishi hal qiluvchi hisoblansa, matritsali tenglamalar uchun $AA^{-1} = I$ va $A^{-1}A = I$ shartlarning bajarilishi muhim hisoblanadi, bu yerda A, I – bir xil o‘lchamli kvadrat matritsalar [3].

Agar A va A^{-1} kvadrat matritsalar uchun $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ tenglik bajarilsa, A^{-1} matritsa A matritsaga *teskari matritsa* deyiladi.

Sonlarda, k^{-1} mavjud bo‘lishi uchun $k \neq 0$ bo‘lishi talab etilgani kabi, matritsalarda, A^{-1} mavjud bo‘lishi uchun $\det A \neq 0$ bo‘lishi talab qilinadi [3].

Agar $\det A = 0$ bo‘lsa, A matritsaga *singular matritsa* deyiladi. Bunda singular so‘ziga sinonim sifatida «*xos*» yoki «*maxsus*» terminlaridan ham foydalaniladi. Agar $\det A \neq 0$ bo‘lsa, A matritsa *nosingular* (yoki *xosmas* yoki *maxsusmas*) *matritsa* deb ataladi.

Agar A matritsada avval elementlarni mos algebraik to‘ldiruvchilar bilan almashtirilsa va keyin transponirlansa, hosil bo‘lgan matritsa A matritsaga *biriktirilgan matritsa* deyiladi va $\text{adj}A$ bilan belgilanadi [4]:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Teskari matritsa haqida teoremlar

1- teorema. Xos matritsa teskari matritsaga ega bo‘lmaydi.

Isboti. A matritsa uchun A^{-1} mavjud bo‘lsin deb faraz qilaylik. U holda

Matritsa ustida almashtirishlar

25

$AA^{-1} = I$ bo‘ladi. Bundan $\det(AA^{-1}) = \det I$ yoki $\det A \cdot \det A^{-1} = \det I$ kelib chiqadi. Bunda $\det A = 0$ va $\det I = 1$ ekanini hisobga olsak, $0 = 1$ ziddiyat hosil bo‘ladi. Bu ziddiyat qilingan faraz noto‘g‘ri ekanini ko‘rsatadi, ya’ni teoremani isbotlaydi.

2- teorema. Har qanday xosmas A matritsa uchun teskari matritsa mavjud va yagona bo‘ladi.

Isboti. A matritsa xosmas, ya’ni $\det A \neq 0$ bo‘lsin. Avval A^{-1} mavjud bo‘lishini ko‘rsatamiz. Buning uchun A matritsani $\frac{1}{\det A} \text{adj}A$ matritsaga

ko'paytiramiz va ko'paytmaga determinantning 9- va 10- xossalarini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned}
 A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \text{adj} A \right) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}}{\det A} & \frac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \dots + a_{1n}A_{nn}}{\det A} \\ \frac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \dots + a_{2n}A_{1n}}{\det A} & \frac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{a_{21}A_{n1} + a_{22}A_{n2} + \dots + a_{2n}A_{nn}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{12} + \dots + a_{nn}A_{1n}}{\det A} & \frac{a_{n1}A_{21} + a_{n2}A_{22} + \dots + a_{nn}A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\det A}{\det A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\det A}{\det A} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\det A}{\det A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I = AA^{-1}.
 \end{aligned}$$

Demak, A matritsaga teskari matritsa mavjud va bu matritsa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A \quad (1.3.1)$$

formula bilan topiladi. Bunda $AA^{-1} = I$ tenglik bajariladi.

$A^{-1}A = I$ tenglikning bajarilishi shu kabi ko'rsatiladi.

Endi A^{-1} yagona ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun A^{-1} dan boshqa A matritsaga teskari C matritsa mavjud bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda ta'rifga ko'ra $AC = I$ bo'ladi. Bu tenglikning har ikkala tamonini A^{-1} ga chapdan ko'paytiramiz:

$$A^{-1}AC = A^{-1}I.$$

$A^{-1}A = I$ bo'lgani uchun $IC = A^{-1}I$ bo'ladi. Endi $IC = C$ va $A^{-1}I = A^{-1}$ ekanini hisobga olsak, $C = A^{-1}$ kelib chiqadi. Teorema to'liq isbot qilindi.

26 Matritsa ustida almashtirishlar

3- teorema. Teskari matritsa uchun ushbu *xossalar* o'rinli bo'ladi [3]:

- 1°. A matritsa A^{-1} teskari matritsaga ega bo'lsa, $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ bo'ladi;
- 2°. A matritsa A^{-1} teskari matritsaga ega bo'lsa, $(A^{-1})^{-1} = A$ bo'ladi;
- 3°. $n \times n$ o'lchamli A va B matritsalar A^{-1} va B^{-1} teskari matritsalariga ega bo'lsa, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ bo'ladi;
- 4°. A matritsa A^{-1} teskari matritsaga ega bo'lsa, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ bo'ladi.

Isboti. 1) A matritsa uchun A^{-1} mavjud bo'lsin. U holda $AA^{-1} = I$ yoki $\det(AA^{-1}) = \det I$ bo'ladi. Bundan $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ yoki $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ kelib chiqadi.

2) A matritsa uchun A^{-1} mavjud bo'lsin. U holda $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ tengliklarga ko'ra A^{-1} matritsa uchun teskari matritsa mavjud va u A dan iborat, ya'ni $(A^{-1})^{-1} = A$ bo'ladi.

3) $n \times n$ o'lchamli A va B matritsalar A^{-1} va B^{-1} teskari matritsalar ega bo'lsin. U holda AB va $B^{-1}A^{-1}$ matritsalar uchun

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

bo'ladi. Demak, AB uchun teskari matritsa mavjud va $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ bo'ladi.

4) A matritsa uchun A^{-1} mavjud bo'lsin. U holda A^T va $(A^{-1})^T$ matritsalar uchun

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I,$$

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$$

bo'ladi. Demak, A^T uchun teskari matritsa mavjud va $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ bo'ladi.

1-izoh. 3^o xossani k ta $n \times n$ o'lchamli va teskari matritsalar ega bo'lgan matritsalar uchun quyidagicha umumlashtirish mumkin:

$$(A_1 A_2 \dots A_{k-1} A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Bu formula matematik induksiya metodi bilan isbotlanadi [3].

3.1-misol. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping va natijani tekshiring.

Yechish. Berilgan matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2.$$

$\det A \neq 0$ va A matritsa uchun teskari matritsa mavjud.

Matritsa elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} 2 = 2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} 1 = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} 4 = -4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} 3 = 3.$$

A matritsaga biriktirilgan matritsani topamiz:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Tekshirish:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

3.2-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping .

Yechish. Bu matritsa uchun:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 2 - 0 + 4 + 1 = 3 \neq 0.$$

Matritsa elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{21} &= -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, & A_{31} &= -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4. \end{aligned}$$

A matritsaga biriktirilgan matritsani topamiz:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Demak,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Teskari matritsani topishning Gauss-Jordan usuli

A xosmas matritsaning A^{-1} teskari matritsasini topishning qulay usullaridan biri matritsa satrlari ustida elementar almashtirishlarga asoslangan *Gauss-Jordan usuli* hisoblanadi.

A^{-1} matritsani topishning Gauss-Jordan usuli ushbu tartibda amalga oshiriladi.

Gauss-Jordan usulining algoritmi [4]

1°. A va I matritsalarini yonma-yon yozib, $(A|I)$ kengaytirilgan matritsa tuziladi;

2°. Elementar almashtirishlar yordamida $(A|I)$ matritsa $(I|B)$ ko'rinishga keltiriladi. Bunda B matritsa A matritsa uchun teskari matritsa bo'ladi.

3.3-misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani Gauss-Jordan usuli bilan toping va natijani tekshiring.

Yechish.

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) r_1 \rightarrow r_1 + (-2)r_2 \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) r_2 \rightarrow r_2 + (-1)r_1 \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{array} \right) r_2 \rightarrow r_2 : 5 \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right) r_2 \rightarrow r_2 : 5 \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right) = (I|A^{-1}). \end{aligned}$$

Yuqorida keltirilgan $r_i \rightarrow r_i + \lambda r_k$ belgilash i -satr bu satrga λ songa ko'paytirilgan k -satrni qo'shish natijasida hosil qilinganini, $r_i \rightarrow r_i : \lambda$ belgi esa i -satr bu satrni λ songa bo'lish natijasida hosil qilinganini bildiradi.

$$\text{Demak, } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tekshirish:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = I.$$

3.4-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani Gauss-Jardon usuli

bilan toping.

Yechish.

$$\begin{aligned}
 (A \mid I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 \rightarrow r_2 + r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 + (2)r_1 \end{array} \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 \rightarrow r_2 : 2 \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-3)r_2 \end{array} \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_3 \rightarrow r_3 : (-3) \\ r_1 = r_1 + (-3)r_3 \\ r_2 = r_2 + (-1)r_3 \end{array} \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) = (I \mid A^{-1}).
 \end{aligned}$$

Demak,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

1.3.2. Matritsani LU yoyish

Chiziqli algebrada matritsalarining turli yoyilmalari keng qo'llaniladi.

Matritsani yoyish deb, uni biror xossaga (masalan, ortogonallik, simmetriklik, diagonallik xossasiga) ega bo'lgan ikki va ikkidan ortiq matritsalar ko'paytmasi shaklida ifodalashga aytiladi. Bunday yoyishlardan biri **matritsani LU yoyish** hisoblanadi.

Matritsani LU yoyishda $m \times n$ o'lchamli A matritsa $A=LU$ shaklda ifodalanadi, bu yerda L –diagonal elementlari birlardan iborat bo'lgan $m \times m$ o'lchamli quyi uchburchak (Lower-triangular) matritsa; U – $m \times n$ o'lchamli yuqori uchburchak ($m \neq n$ da trapetsiya) (Upper-triangular) matritsa [3]. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matritsaning LU yoyilmasi yana *matritsaning LU faktorizatsiyasi* deb ataladi [3]. Matritsaning LU yoyilmasidan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda va teskari matritsani topishda foydalaniladi.

$m \times n$ o'lchamli A matritsa $A=LU$ shaklga keltirish (LU yoyish) umuman olganda A matritsaning satrlariga noldan farqli songa ko'paytirilgan boshqa satrni qo'shish orqali quyidagi tartibda amalga oshiriladi.

A matritsani LU yoyish algoritmi [3]

1°. A matritsa satrlarida ketma-ket elementar almashtirishlar bajariladi va U shaklga keltiriladi;

2°. Satrlarda bajarilgan elementar almashtirishlar ketma-ketligi asosida L yozuv hosil qilinadi va bu yozuvda barcha diagonal elementlar ustunlarni bo'lish orqali birlarga aylantiriladi.

3.5-misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ matritsani LU yoying.

Yechish. Matritsa satrlarida ketma-ket elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = U. \end{aligned}$$

A matritsa 4 ta satrdan tashkil topgani sababli L matritsa 4×4 o'lchamli bo'ladi. Birinchi qadamda belgilangan yozuvlar L matritsa yozuvining ustunlarini tashkil qiladi. Bu yozuvda barcha diagonal elementlarni birlarga aylantiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ -4 & 3 & & \\ 2 & -9 & 2 & \\ -6 & 12 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :2 & :3 & :2 & :5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -3 & 1 & \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Bundan } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demak,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ 6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

n - tartibli kvadrat matritsa berilgan bo'lsin. Bunda A matritsani LU yoyish turli algoritmlar bilan amalga oshirilishi mumkin [4]. Shunday algoritmlardan biri bilan tanishamiz.

A matritsa xosmas bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}}_U = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A.$$

Bundan

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} u_{kj}.$$

Bu yig'indidagi oxirgi qo'shiluvchilarni ajratib, topamiz:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \text{ agar } i \leq j \text{ bo'lsa;} \quad (1.3.2)$$

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right), \text{ agar } i > j \text{ bo'lsa.} \quad (1.3.3)$$

Shunday qilib, L va U matritsalarining noma'lum elementlari a_{ij} va topilgan l_{ik}, u_{kj} lar orqali ketma-ket ifodalanadi.

2-izoh. (1.3.2) va (1.3.3) formulalar shunday tartiblanganki, bunda avval barcha u_{ij} larni va keyin barcha l_{ij} larni hisoblab bo'lmaydi, va aksincha. Bu formulalar orqali hisoblashlar quyidagi tartibda bajariladi:

$$\begin{aligned} u_{1j} &= a_{1j}, & j &= 1, 2, \dots, n; \\ l_{i1} &= \frac{a_{i1}}{u_{11}}, & i &= 2, 3, \dots, n; \\ u_{2j} &= a_{2j} - l_{21}u_{1j}, & j &= 2, 3, \dots, n; \\ l_{i2} &= \frac{a_{i2} - l_{i1}u_{12}}{u_{22}}, & i &= 3, 4, \dots, n; \end{aligned}$$

va hokazo, ya'ni U matritsaning satrlari va L matritsaning ustunlari almashlab hisoblanadi.

3.5-misol. $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ matritsani LU yoying.

Yechish. Berilgan matritsa xosmas, chunki $\det A = 166 \neq 0$.

$LU = A$ yoyilmani tuzamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

L va U matritsalarining noma'lum elementlarini (1.3.2) va (1.3.3) formulalar bilan aniqlaymiz:

$$u_{11} = a_{11} = 8, \quad u_{12} = a_{12} = 2, \quad u_{13} = a_{13} = 9, \quad l_{21} = \frac{1}{u_{11}}a_{21} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 9 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 8, \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 4 - \frac{1}{2} \cdot 9 = -\frac{1}{2},$$

$$l_{31} = \frac{1}{u_{11}}a_{31} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad l_{32} = \frac{1}{u_{22}}(a_{32} - l_{31}u_{12}) = \frac{1}{8}\left(7 - \frac{3}{4} \cdot 2\right) = \frac{11}{16},$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 9 - \frac{3}{4} \cdot 9 - \frac{11}{16} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{83}{32}.$$

Demak,

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{11}{16} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 0 & 8 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{83}{32} \end{pmatrix}.$$

1.3.3. Matritsaning rangi

$m \times n$ o'lchamli A matritsa berilgan bo'lsin. Bu matritsadan biror k ($k \leq \min(m; n)$) ta satr va k ta ustunni ajratamiz. Ajratilgan satr va ustunlarning kesishishida joylashgan elementlardan k -tartibli kvadrat matritsani tuzamiz. Bu matritsaning determinantiga A *matritsaning k -tartibli minori* deyiladi.

A matritsa noldan farqli minorlari tartibining eng kattasiga A *matritsaning rangi* deyiladi va $r(A)$ (yoki $\text{rang} A$) kabi belgilanadi.

Tartibi $r(A)$ ga teng bo'lgan minorga A *matritsaning bazis minori* deyiladi. Matritsa bir nechta bazis minorga ega bo'lishi mumkin.

Matritsa rangining ta'rifidan quyidagi tasdiqlar kelib chiqadi.

1. Matritsaning rangi 0 bilan m, n sonlarining kichigi orasidagi butun son orqali ifodalanadi, ya'ni $0 \leq r(A) \leq \min(m; n)$.

2. Faqat $A = O$ matritsa uchun $r(A) = 0$ bo'ladi.

3. n -tartibli kvadrat matritsa nosingular bo'lganidagina $r(A) = n$ bo'ladi.

Matritsaning rangi ushbu xossalarga bo'ysunadi [3].

1°. Transponirlash natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi;

2°. Elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi.

Isboti. Bilamizki:

a) transponirlash natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi;

b) ikkita satrning (ustunning) o'rnini almashtirilsa, determinantning ishorasi o'zgaradi;

c) satrni (ustunni) noldan farqli songa ko'paytirilsa, determinant shu songa ko'payadi.

d) datrga (ustunga) noldan farqli songa ko'paytirilgan boshqa satrni (ustunni) qo'shilsa determinant o'zgarmaydi.

Demak, transponirlash va elementar almashtirishlar natijasida xos matritsa xosligicha va xosmas matritsa xosmasligicha qoladi, ya'ni uning rangi o'zgarmaydi.

$r(A)$ ni ta'rif asosida topish usuli *minorlar ajratish usuli* deb ataladi. Bu usulda matritsaning rangi quyidagicha topiladi: agar barcha birinchi tartibli minorlar (matritsa elementlari) nolga teng bo'lsa, $r(A) = 0$ bo'ladi; agar birinchi tartibli minorlardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli va barcha ikkinchi tartibli minorlar nolga teng bo'lsa, $r(A) = 1$ bo'ladi; agar ikkinchi tartibli noldan farqli minor mavjud bo'lsa, uchinchi tartibli minorlar tekshiriladi; bu jarayon yoki barcha k -tartibli minorlar nolga teng bo'lishi aniq bo'lguncha yoki k -tartibli minorlar mavjud bo'lmaguncha davom ettiriladi, bunda $r(A) = k - 1$ bo'ladi.

3.6-misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini minorlar ajratish usuli

bilan toping.

Yechish. Ravshanki, $1 \leq r(A) \leq \min(3; 5) = 3$.

Ikkinchi tartibli minorlardan biri

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \neq 0.$$

Uchinchi tartibli minorlarni hisoblaymiz (ularning soni $C_3^3 \cdot C_4^3 = 4$ ta):

$$M_1^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad M_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad M_4^{(3)} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Barcha uchinchi tartibli minorlar nolga teng. Demak $r(A) = 2$.

$r(A)$ ni topishning minorlar ajratish usuli hamma vaqt ham qulay bo'lmaydi, chunki ayrim hollarda bir qancha hisoblashlar bajarishga to'g'ri keladi.

Elementar almashtirishlar orqali har qanday matritsani bosh diagonalning birinchi bir nechta elementlari birlardan va qolgan elementlari nollardan iborat bo'lgan matritsa ko'rinishiga keltirish mumkin, **masalan**,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bunday matritsaga **kanonik matritsa** deyiladi. Kanonik matritsaning rangi uning bosh diagonalida joylashgan birlar soniga teng bo'ladi.

$r(A)$ ni kanonik matritsaga keltirib topish usuli matritsani **kanonik ko'rinishga keltirish** usuli deb ataladi.

3.7-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini uni kanonik

ko'rinishga keltirish usuli bilan toping.

Yechish. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & -10 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \rightarrow r_2 + (-2)r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 + r_1 \end{matrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 \rightarrow r_3 + (-1)r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A \rightarrow A^T \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -7 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \rightarrow r_2 + r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-2)r_1 \\ r_4 \rightarrow r_4 + (-3)r_1 \\ r_5 \rightarrow r_5 + r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \rightarrow r_2 : 2 \\ r_3 \rightarrow r_3 : 3 \\ r_4 \rightarrow r_4 : 7 \\ r_5 \rightarrow r_5 : (4) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 \rightarrow r_3 + r_2 \\ r_4 \rightarrow r_4 + r_2 \\ r_5 \rightarrow r_5 + r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demak, $r(A) = 2$.

1.3. Mashqlar

1.3.1. Agar A matritsa nosingular va simmetrik bo'lsa, A^{-1} matritsa ham nosingular va simmetrik bo'lishini ko'rsating.

1.3.2. Agar A kvadrat matritsa va $(I - A)$ nosingular matritsa bo'lsa, $A(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}A$ tenglik bajarilishini ko'rsating.

1.3.3. $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ matritsaning teskari matritsaga ega bo'lishi shartini toping.

1.3.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ va $C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $C = A^{-1}$ ekanini ko'rsating.

1.3.5. $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning teskari matritsasi bo'lishini

ko'rsating.

1.3.6. $B = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ matritsa $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ matritsaning teskari matritsasi

bo'lishini ko'rsating.

1.3.7. Berilgan matritsalaridan qaysi birlari uchun teskari matritsa mavjud bo'ladi?

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

1.3.8. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $A^2 = A^{-1}$ va $A^3 = I$ bo'lishini ko'rsating.

1.3.9. Berilgan matritsalaridan qaysi birlari o'zaro teskari matritsalar bo'ladi?

1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ va $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.3.10. $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. A^{-1} matritsani toping.

1.3.11. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. A^{-1} matritsani toping.

1.3.12. Berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi A matritsani toping:

1) $(3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $(2A)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$;

3) $(A^T - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

1.3.13. $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ ni toping.

1.3.14. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. $C = A \cdot \text{adj}A$ ko'paytmaning barcha nodiagonal elementlarini toping.

1.3.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. $C = A \cdot \text{adj}A$ ko'paytmaning barcha diagonal elementlarini toping.

A matritsa berilgan. A^{-1} matritsani toping:

1.3.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.3.17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

A matritsa berilgan. A^{-1} matritsani Jordan-Gauss usuli bilan toping:

1.3.18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3.19. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3.20. A matritsa berilgan. Matritsaning LU yoyilmasini toping:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 5 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & 0 & -4 \\ 9 & 9 & 14 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ -6 & 3 & -13 & -3 \\ 4 & 6 & 16 & 17 \end{pmatrix};$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 8 & -7 \\ 6 & -5 & 14 \\ -6 & 9 & -12 \\ 8 & -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

A matritsa berilgan. $r(A)$ ni minorlar ajratish usuli bilan toping:

$$1.3.21. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.22. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

A matritsa berilgan. $r(A)$ ni elementar almashtirishlar usuli bilan toping:

$$1.3.23. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -6 \\ -3 & -1 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$1.3.24. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

1.4. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

Chiziqli tenglamalar sistemasi chiziqli algebraning asosini tashkil qiladi. Matematika, texnika va iqtisodiyotning ko'pchilik masalalari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi, masalan, neft qidiruv ishlari, elektr zanjirlarini loyihalash, chiziqli programmashtirish va iqtisodni rejalashtirish masalalari chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi.

1.4.1. Asosiy tushunchalar

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.4.1)$$

sistemaga n *noma'lumli* m *ta chiziqli tenglamalar sistemasi* deyiladi.

Bu yerda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ haqiqiy sonlarga *sistemaning koeffitsiyentlari*, $x_1, x_2, \dots, x_n$ *noma'lumlar*, $b_1, b_2, \dots, b_m$ haqiqiy sonlarga *ozod hadlar* deyiladi.

(1.4.1) sistema koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.4.2)$$

matritsaga (1.4.1) sistemaning *matritsasi (asosiy matritsasi)* deyiladi.

Bu matritsaga ozod hadlardan tuzilgan ustunni qo'shish orqali gosil qilingan

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (1.4.3)$$

matritsaga (1.4.1) sistemaning *kengaytirilgan matritsasi* deyiladi.

(1.4.1) sistemani

$$AX = B \quad (1.4.4)$$

matritsa ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (1.4.5)$$

Haqiqatdan ham

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = B.$$

(1.4.1) sistema tenglamalarini ayniyatga aylantiradigan noma'lumlarning tartiblangan $x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o$ qiymatlariga (1.4.1) *sistemaning yechimi* deyiladi.

Kamida bitta yechimga ega sistemaga *birgalikda bo'lgan sistema*, bitta ham yechimga ega bo'lmagan sistemaga *birgalikda bo'lmagan sistema* deyiladi.

Birgalikda bo'lgan va yagona yechimga ega sistemaga *aniq sistema*, cheksiz ko'p yechimga ega sistemaga *aniqmas sistema* deyiladi. Aniqmas sistemaning har bir yechimi *sistemaning xususiy yechimi* deb ataladi. Barcha xususiy yechimlar to'plami *sistemaning umumiy yechimi* deyiladi.

Sistemani *tekshirish* degamda sistemaning birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqlash va agar sistema birgalikda bo'lsa, u holda uning aniq yoki aniqmasligini tekshirish tushuniladi. Birgalikda bo'lgan sistemaning umumiy yechimini topishga *sistemani yechish* deyiladi.

Yechimlari to'plami bir xil bo'lgan, ya'ni birinchisining har bir yechimi ikkinchisining yechimi bo'ladigan, va aksincha, ikkinchisining har bir yechimi birinchisining yechimi bo'ladigan ikkita sistemaga *ekvivalent (teng kuchli) sistemalar* deyiladi.

Ushbu almashtirishlar *sistemada elementar almashtirishlar* deb yuritiladi:

- sistema istalgan ikkita tenglamasining o'rinlarini almashtirish;
- sistemaning istalgan tenglamasini noldan farqli songa ko'paytirish (bo'lish);
- sistemaning istalgan tenglamasiga noldan farqli songa ko'paytirilgan boshqa tenglamasini qo'shish.

Elementar almashtirishlar natijasida ekvivalent sistemalar hosil bo'ladi.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.4.6)$$

n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasining

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.4.7)$$

matritsasi kvadrat matritsa bo'ladi. A matritsaning

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.4.8)$$

Determinantiga (1.4.6) *sistemaning determinanti* deyiladi.

Agar $\det A \neq 0$ bo'lsa, (1.4.6) sistemaga *xosmas sistema* deyiladi. Aks holda, ya'ni $\det A = 0$ bo'lsa, (1.4.6) sistemaga *xos sistema* deyiladi.

1.4.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli

n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning qulay usullaridan biri – *noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishga* (chiqarishga) asoslangan *Gauss usuli*ni ko'rib chiqamiz.

n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.4.1)$$

(1.4.1) sistemani Gauss usuli bilan yechish ikki bosqichda amalga oshiriladi. Birinchi bosqichda sistema pog‘onasimon ko‘rinishga keltiriladi. Pog‘onasimon sistema deyilganida

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n = b_m \end{cases}$$

ko‘rinishdagi sistema tushuniladi, bu yerda $k \leq n$, $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, k}$.

Ikkinchi bosqichda noma'lumlar pog‘onasimon sistemadan ketma-ket topiladi.

1-bosqich. Sistemada quyidagi almashtirishlarni bajaramiz: birinchi tenglamaning chap va o‘ng tomonini $a_{11} \neq 0$ ga (agar $a_{11} = 0$ bo‘lsa, u holda bu tenglama sistemaning x_1 noma'lum oldidagi koeffitsiyenti nolga teng bo‘lmagan tenglamasi bilan almashtiriladi) bo‘lamiz. Keyin hosil qilingan tenglamani $(-a_{i1})$ ga ko‘paytirib, i - tenglamaga qo‘shamiz. Bunda sistema tenglamalarining ikkinchisidan boshlab x_1 qatnashgan hadlar yo‘qatiladi va (1.4.1) sistema quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + a_{m3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}$$

bu yerda $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) – sistemaning birinchi almashtirishlardan keyin hosil qilingan koeffitsiyentlari va ozod hadlari.

Sistemada x_1 noma'lum oldidagi koeffitsiyenti birga teng bo‘lgan tenglama bor bo‘lsa, bu tenglamani birinchi o‘rinda yozish orqali hisoblashlar osonlashtirilishi mumkin.

Shu kabi $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb, sistemaning uchinchi tenglamasidan boshlab x_2 noma'lumni yo‘qotamiz va bu jarayonni mumkin bo‘lguniga qadar davom ettiramiz.

Bu bosqichda, agar:

- $0 = 0$ ko‘rinishdagi tengliklar paydo bo‘lsa, u holda bu tengliklar tashlab yuboriladi.

- $0 = b_i^{(k)}$ ($b_i^{(k)} \neq 0$) ko‘rinishdagi tengliklar paydo bo‘lsa, u holda jarayon to‘xtatiladi, chunki berilgan sistema birgalikda bo‘lmaydi.

2-bosqich. Pog‘onasimon sistemani yechamiz. Pog‘onasimon sistemada k tenglamalar soni n noma'lumlar soniga teng yoki no‘malumlar sonidan kichik bo‘lishi mumkin. Shu sababli bu sistema yagona yoki cheksiz ko‘p ychimga ega bo‘lishi mumkin. Agar sistema uchburchak ko‘rinishga kelsa, ya‘ni $k = n$ bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega bo‘ladi. Agar sistema trapetsiya

ko‘rinishga kelsa, ya’ni $k < n$ bo‘lsa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

$$4.1\text{-misol.} \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -11, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \text{ tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan}$$

yeching.

Yechish. Sistemada quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

- birinchi va uchinchi tenglamalarning o‘rinlarini almashtiramiz;
- (-3) ga ko‘paytirilgan birinchi tenglamani ikkinchi tenglamaga va (-2) ga ko‘paytirilgan birinchi tenglamani uchinchi tenglamaga hadma-had qo‘shamiz;
- ikkinchi va uchinchi tenglama hadlarini mos ravishda 7 ga va (-9) ga bo‘lamiz

- x_3 ning qiymatini birinchi va ikkinchi tenglamalarga qo‘yamiz; ikkinchi tenglamadan x_2 ni topib, uning qiymatini birinchi tenglamaga qo‘yamiz;

- sistemaning yechimlarini x_1, x_2, x_3 ketma-ketlikda yozamiz.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -11, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -11, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ 7x_2 - 14x_3 = -35, \\ -9x_3 = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_3 = 2 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2, \\ x_2 - 2 \cdot 2 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 4 \cdot 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_1 - 2 \cdot (-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Gauss usulining 1-bosqichini sistemaning o‘zida emas, balki uning kengaytirilgan matritsasida bajarish qulaylikka ega. Masalan, yuqoridagi tenglamaning 1-bosqichi quyidagicha bajariladi:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & -11 \\ 1 & -2 & 4 & 8 \end{array} \right) \begin{matrix} r_1 \rightarrow r_3 \\ \\ r_3 \rightarrow r_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & -11 \\ 2 & -4 & -1 & -2 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ r_2 \rightarrow r_2 + (-3)r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-2)r_1 \end{matrix} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & -14 & -35 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ r_2 \rightarrow r_2 : 7 \\ r_3 \rightarrow r_3 : (-9) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Xosmas tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechishda bu usulning boshqa bir turi **Jordan-Gauss usuli** qo‘llaniladi. Bu usulda kengaytirilgan

$(A|B)$ matritsa ustida elementar almashtirishlar bajariladi va A matritsa o'rnida I matritsa hosil qilinadi, ya'ni u $(I|X)$ ko'rinishga keltiriladi. Bunda oxirgi kengaytirilgan matritsada X matritsa tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi.

4.2-misol.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$
 sistemani Gordan-Gauss usuli bilan yeching.

Yechish.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 \rightarrow r_2 + (-5)r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-1)r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 \rightarrow r_2 : 4 \\ r_3 \rightarrow r_3 - r_2 \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_3 \rightarrow r_3 + (-3)r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{11}{4} \end{array} \right) \begin{array}{l} r_3 \rightarrow r_3 : \left(-\frac{11}{4}\right) \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_1 \rightarrow r_1 + r_3 \\ r_2 \rightarrow r_2 + \left(-\frac{9}{4}\right)r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_1 \rightarrow r_1 + r_2 \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Demak, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

Shunday qilib, Gaussning noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usulida (1.4.1) sistema tenglamalardan ayrimlariga muvofiq sonlarga ko'paytirilgan boshqa tenglamalarni qo'sish orqali yuqori uchburchak (ayrim hollarda trapetsiya) shaklga keltiriladi va hosil qilingan uchburchak sistema teckari o'rniga qo'yish orqali yechiladi. Bu usul matematik nuqtai-nazardan sistemani uning matritsasini LU yoyish orqali yechish algoritmiga ekvivalent [4].

Gauss usulining LU yoyishga asoslangan algoritmi [4]

1°. To'g'ri o'rniga qo'yish. A matritsaning $A = LU$ yoyilmasi topiladi;

2°. Teskari o'rniga qo'yish. $LUX = B \Leftrightarrow \begin{cases} LY = B, \\ UX = Y \end{cases}$

sistema yechiladi.

4.3-misol.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -5, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -8 \end{cases}$$
 tenglamalar sistemasini LU yoyish

asosida yeching.

Yechish.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \rightarrow r_2 + (-2)r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-1)r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-1)r_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = U,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & -3 & & \\ 1 & -3 & 2 & \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{:-3 \quad :2}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \end{pmatrix}. \quad \text{Bundan } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avval $LY = B$ tenglamani yechamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Bundan

$$\begin{cases} y_1 = 3, \\ 2y_1 + y_2 = -5, \\ y_1 + y_2 + y_3 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3, \\ y_2 = -5 - 2y_1 = -11, \\ y_3 = -8 - y_2 - y_1 = 0. \end{cases}$$

Endi $UX = Y$ tenglamani yechamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_2 + 8x_3 + x_1 = 11, \\ 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = k, \\ x_3 = -k, \\ x_2 = \frac{11+7k}{3}, \\ x_1 = -\frac{13+8k}{3}. \end{cases}$$

Sistema trapetsiyasimon ko‘rinishda. Demak, u cheksiz ko‘p yechimga ega. Bunda k ning tayin qiymatida sistema xususiy yechimga ega bo‘ladi, masalan,

$$k=1 \text{ da } x_1 = -7, x_2 = 6, x_3 = -1, x_4 = 1$$

yoki

$$k=-2 \text{ da } x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2.$$

Agar sistema n ta noma'lumdan va n ta chiziqli tenglamadan iborat hamda xosmas bo'lsa, u holda bu sistemaning yechimi LU yoyish asosida quyidagi formulalar bilan topiladi [4]:

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (1.4.9)$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right), \quad i=n, n-1, \dots, 1. \quad (1.4.10)$$

4.4-misol.
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$
 tenglamalar sistemasini LU yoyish asosida

yeching.

Yechish. Avval L va U matritsalarining elementlarini topamiz.

Ularni (1.3.2) va (1.3.3) formulalar bilan aniqlaymiz:

$$u_{11} = a_{11} = 1, \quad u_{12} = a_{12} = 3, \quad u_{13} = a_{13} = -1,$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{3}{1} = 3, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -1 - 3 \cdot 3 = -10, \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 2 - 3 \cdot (-1) = 5,$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{-4 - 2 \cdot 3}{-10} = 1,$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 1 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 = -2.$$

Endi y va x larni (1.4.9) va (1.4.10) formulalar bilan topamiz:

$$y_1 = b_1 = 0, \quad y_2 = b_2 - l_{21}y_1 = 5 - 3 \cdot 0 = 5, \quad y_3 = b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 = 7 - 3 \cdot 0 - 1 \cdot 5 = 2;$$

$$x_3 = \frac{1}{u_{33}} y_3 = \frac{2}{-2} = -1, \quad x_2 = \frac{1}{u_{22}} (y_2 - u_{23}x_3) = \frac{5 - 5 \cdot (-1)}{-10} = -1,$$

$$x_1 = \frac{1}{u_{11}} (y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3) = \frac{0 - 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-1)}{1} = 2.$$

Demak, $x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -1.$

1.4.3. n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish va yechish

n ta noma'lumdan va m ta chiziqli tenglamadan iborat (1.4.1) sistemani qaraymiz. Bu sistemaning matritsasi A , kengaytirilgan matritsasi C bo'lsin.

Bu matritsalar mos ravishda (1.4.2) va (1.4.3) tengliklar bilan ifodalanadi. Quyida (1.4.1) sistema birgalikda bo'lishining zarur va etarli shartlarini aniqlovchi teorema bilan tanishamiz. Bu teorema rus va o'zbek tilida yozilgan adabiyotlarda Kroniker-Kapelli teoremasi deb yuritiladi.

1-teorema. (1.4.1) tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun sistema asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari teng, ya'ni $r(A)=r(C)$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Zarurligi. (1.4.1) sistema birgalikda bo'lsin. Bu noma'lumlarning qandaydir tartiblangan $x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o$ qiymatlari sistema tenglamalarini ayniyatga aylantirishini anglatadi. C matritsa ustida quyidagi almashtirishlarni bajaramiz: uning oxirgi ustuniga $(-x_1^o)$ ga ko'paytirilgan birinchi ustunni qo'shamiz, keyin $(-x_2^o)$ ga ko'paytirilgan ikkinchi ustunni qo'shamiz va shu kabi davom ettirib, oxirida $(-x_n^o)$ ga ko'paytirilgan n -ustunni qo'shamiz. Natijada, sistema yechimining ta'rifiga ko'ra, C matritsa oxirgi ustun elementlari nollarga aylangan quyidagi C_1 matritsaga o'tadi:

$$C \sim C_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array} \right)$$

Elementar almashtirishlar matritsaning rangini o'zgartirmaydi, ya'ni $r(C)=r(C_1)$ bo'ladi. C_1 matritsaning oxirgi ustuni nollardan iborat bo'lgani uchun $r(C_1)=r(A)$. Bundan $r(A)=r(C)$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. $r(A)=r(C)=r$ bo'lsin. (1.4.1) sistema birgalikda ekanini ko'rsatamiz. A matritsaning noldan farqli r -tartibli minorini sistema tenglamalari va noma'lumlarining o'rinlarini almashtirish orqali chap yuqori burchakda joylashtirish mumkin. Bu minor C matritsa uchun ham minor bo'ladi. Shu sababli noma'lumlarning biror $x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o$ qiymatlari dastlabki r ta tenglamani va shu bilan birga qolgan k -tenglamani ham qanoatlantiradi, bu yerda $k > r$. U holda (1.4.1) sistemada oxirgi $m-r$ ta tenglamani tashlab yuborish va uni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \quad (1.4.11)$$

sistema bilan almashtirish mumkin. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin: $r=n$ yoki $r < n$ ($r > n$ bo'lmaydi, chunki A matritsa jami n ta ustunga ega).

$r=n$ bo'lganda (1.4.11) sistemaning noma'lumlari soni tenglamalari soniga teng bo'ladi. Bundan tashqari sistema determinanti nolga teng emas. Shu sababli (1.4.11) sistema yagona yechimga ega bo'ladi. Bundan bu sistemaga ekvivalent (1.4.1) sistemaning birgalikda va aniq sistema bo'lishi kelib chiqadi.

$r < n$ bo'lganda (1.4.12) sistemani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (1.4.12)$$

Bu sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan determinant nolga teng emas. U holda $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ noma'lumlarga biror qiymatlar berib, (1.4.12) sistemaning $x_1, x_2, \dots, x_r$ yechimini topsa bo'ladi.

$x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ noma'lumlarga istalgan qiymatlar berish mumkin. Shu sababli (1.4.12) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi va bu sistemaga ekvivalent (1.4.11) sistema birgalikda va aniqmas sistema bo'ladi. Teorema to'liq isbotlandi.

Isbotlangan teoremdan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1- natija. Agar birgalikda bo'lgan sistema matritsasining rangi noma'lumlar soniga teng bo'lsa, u holda sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

2- natija. Agar birgalikda bo'lgan sistema matritsasining rangi noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, u holda sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

(1.4.1) sistema birgalikda bo'lishining zarur va etarli shartiga va bu sistemani yechishning Gauss usuliga asosan *n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish va yechish* quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

Tekshirish (Gauss usuli): sistemaning kengaytirilgan matritsasi (mos ravishda asosiy matritsasi) elementar almashtirishlar yordamida pog'onasimoh ko'rinishga keltiriladi (pog'onasimon matritsa – bu pog'onasimon sistemaning matritsasi).

Bunda:

- agar $r(A) \neq r(C)$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi;
- agar $r(A) = r(C) = n$, ya'ni sistemaning rangi uning noma'lumlari soniga teng bo'lsa, sistema birgalikda va aniq bo'ladi;
- agar $r(A) = r(C) < n$, ya'ni sistemaning rangi uning noma'lumlari sonidan kichik bo'lsa, sistema birgalikda va aniqmas bo'ladi.

Yechish: Matritsaning rangi va noma'lumlari soni taqqoslanadi.

Bunda:

- agar $r(A) = r(C) = n$ bo'lsa, ya'ni sistema bazis minorining tartibi noma'lumlar soni bilan ustma-ust tushsa, n no'malumli n ta chiziqli xosmas tenglamalar sistemasi yechiladi;
- agar $r(A) = r(C) = r < n$ bo'lsa, sistemada $(n - r)$ ta erkin noma'lumlar hosil qilinadi. Bunda $x_1, x_2, \dots, x_r$ – *bazis (asosiy) noma'lumlar*, $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ – *erkin noma'lumlar* bo'ladi.

Erkin noma'lumlarni sistema tenglamalarining o'ng tomoniga o'tkazamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (1.4.13)$$

yoki matritsa ko‘rinishida

$$\tilde{A}\tilde{X}_r = \tilde{B}_0 + x_{r+1}\tilde{B}_1 + \dots + x_n\tilde{B}_{n-r}, \quad (1.4.14)$$

bu yerda

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{rn1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}, \det \tilde{A} \neq 0,$$

$$\tilde{X}_r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{pmatrix}, \tilde{B}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_r \end{pmatrix}, \tilde{B}_1 = -\begin{pmatrix} a_{1,r+1} \\ a_{2,r+2} \\ \dots \\ x_{r,r+1} \end{pmatrix}, \dots, \tilde{B}_{n-r} = -\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \dots \\ x_{r,n} \end{pmatrix}.$$

(1.4.14) sistema berilgan (1.4.1) sistemaga ekvivalent va uning yechimi yuqoridan qaralgan usullardan istalgan biri bilan topiladi.

Erkin yechimlar

$$x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-r}$$

qiymatlar qabul qilsin.

U holda (1.4.14) sistema

$$\tilde{A}\tilde{X}_r = \tilde{B}_0 + c_1\tilde{B}_1 + \dots + c_{n-r}\tilde{B}_{n-r} \quad (1.4.15)$$

ko‘rinishni oladi va $x_1, x_2, \dots, x_r$ bazis noma’lumlari $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ qiymatlar orqali ma’lum ko‘rinishda ifodalanadi:

$$x_i = x_i(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Bir jinsli bo‘lmagan $AX = B$ sistemaning yechimini

$$X = \begin{pmatrix} x_1(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ \dots \\ x_r(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} \quad (1.4.16)$$

ustun matritsa ko‘rinishda yozish mumkin.

Erkin noma’lumlari istalgan son qiymatini qabul qilishi mumkin. Shu sababli (1.4.1) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

(1.4.16) ifoda (1.4.1) sistemaning umumiy yechimini aniqlaydi. Bundan o‘garmaslarning tayin qiymatlariga sistemaning xususiy yechimlari mos keladi.

4.5-misol.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 8, \\ 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases} \text{ tenglamalar sistemasini tekshiring va}$$

yeching.

Yechish. Tekshirish. Sistemaning kengaytirilgan matritsasi ustida elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 8 \\ 5 & -4 & 6 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_2 \rightarrow r_2 + (-5)r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-5)r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 13 & 8 \\ 0 & -14 & 26 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-2)r_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 13 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \end{array} \right).$$

$r(A) = 2 \neq 3 = r(C)$. Demak, sistema birgalikda emas.

4.6-misol. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini tekshiring va

yeching.

Yechish. Tekshirish. Sistemaning kengaytirilgan matritsasi ustida elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ r_2 \rightarrow r_2 + (-2)r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-3)r_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-1)r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ r_2 \rightarrow r_2 : 5 \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} c_2 \rightarrow c_2 + 4c_1 \\ c_3 \rightarrow c_3 + (-2)c_1 \\ c_5 \rightarrow c_5 + c_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} c_3 \rightarrow c_3 + c_2 \\ c_4 \rightarrow c_4 + c_2 \\ c_5 \rightarrow c_5 + c_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Yuqorida keltirilgan $c_i \rightarrow c_i + \lambda c_k$ belgilash i -stun bu ustunga λ songa ko'paytirilgan k -ustunni qo'shish natijasida hosil qilinganini bildiradi.

$r(A) = 2 = 2 = r(C) < 4$. Demak, sistema birgalikda va aniqmas.

Yechish. x_1 va x_2 noma'lumlarni bazis deb olamiz va ekvivalent sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 = -5 + 2x_3 + 4x_4, \\ x_2 = -1 + x_3 + x_4. \end{cases}$$

$x_3 = c_1$ va $x_4 = c_2$ deb berilgan sistemaning umumiy yechimini topamiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 2x_3 + 4x_4 \\ -1 + x_3 + x_4 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

bu yerda c_1, c_2 – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

1.4.4. Xosmas tenglamalar sistemasini yechish

n ta noma'lumli va n ta chiziqli tenglamadan iborat (1.4.6) xosmas chiziqli tenglamalar sistemasi (ChTS) berilgan bo'lsin.

Xosmas ChTSni yechishning ikkita usulini qaraymiz.

Matritsalar usuli

Bu usul (1.4.6) sistemaning ushbu

$$AX = B \quad (1.4.17)$$

matritsa ko'rinishini yechishga asoslanadi.

A matritsa xosmas bo'lgani uchun A^{-1} mavjud bo'ladi.

(1.4.17) tenglikning har ikkala qismini chapdan A^{-1} ga ko'paytiramiz:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B.$$

Bundan

$$X = A^{-1}B \quad (1.4.18)$$

kelib chiqadi.

(1.4.18) tenglamaga *chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usuli bilan yechish formulasi* deyiladi.

4.7-misol.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{tenglamalar sistemasini matritsalar usuli}$$

bilan yeching.

Yechish. Sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 2 - 1 + 4 - 1 = 5 \neq 0.$$

Demak, sistema – xosmas.

Determinant elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

U holda

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sistemaning yechimini (1.4.18) formula bilan topamiz:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5+18-8 \\ -15+6+4 \\ 5-12+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demak, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Determinantlar usuli yoki Kramer formulalari

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishniung bu usuli determinantlar nazariyasiga asoslanadi.

2-teorema. Agar (1.4.6) sistema xosmas bo'lsa, u holda sistema yagona yechimga ega bo'ladi va bu yechim quyidagi formulalar bilan topiladi:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \quad (1.4.19)$$

bu yerda $D_1, D_2, \dots, D_n$ determinantlar $D = \det A$ determinantdan mos noma'lum oldidagi koeffitsiyentlarni ozod hadlar bilan almashtirish orqali hosil qilinadi.

Isboti. (1.4.6) sistemaning matritsa ko'rinishidagi yechimini, ya'ni (1.4.18) formulani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{yoki} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{D} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{D} \\ \dots \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{D} \end{pmatrix}$$

Bundan

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{D}, \\
 x_2 &= \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{D}, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 x_n &= D \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta}
 \end{aligned}$$

kelib chiqadi.

Ikkinchidan $A_1b_1 + A_2b_2 + \dots + A_nb_n$ ifoda

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantning 1- ustun elementlari bo'yicha yoyilmasiga, ya'ni D_1 ga teng.

Demak,

$$x_1 = \frac{D_1}{D}.$$

(1.4.19) tenlikning qolgan formulalari shu kabi isbotlanadi:

$$x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{Dx_n}{D}.$$

$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = \overline{1, n})$ formulalarga *Kramer formulalari* deyiladi.

4.8-misol.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$
 tenglamalar sistemasini Kramer formulalari

bilan yeching.

Yechish. D va D_i , $i=1,2,3$ determinantlarni hisoblaymiz:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -12;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = -18; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 12.$$

Kramer formulalari bilan topamiz:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-12}{-6} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-18}{-6} = 3, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{12}{-6} = -2.$$

Shunday qilib, n noma'lumli n ta chiziqli xosmas tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladi va bu yechim yoki (1.4.18) matritsalar usuli bilan yoki (1.4.19) Kramer formulalari bilan topish mumkin.

1.4.5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

Ozod hadlari nolga teng bo'lgan ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.4.20)$$

sistemaga *bir jinsli tenglamalar sistemasi* deyiladi.

(1.4.20) sistema asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari teng bo'ladi. Shu sababli bu sistema hamma vaqt birgalikda va nolga teng bo'lgan (trivial) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ yechimga ega.

Bir jinsli tenglamalar sistemasi qanday shartlar bajarilganida nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'ladi? Bu savolga quyidagi teoremlar javob beradi.

3- teorema. (1.4.20) tenglamalar sistemasi nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'lishi uchun sistema matrisasining rangi sistema tenglamalari sonidan kichik bo'lishi, ya'ni $r < n$ bo'lishi zarur va etarli.

Isboti. Zarurligi. Ma'lumki, $r \leq n$. $r = n$ bo'lsin deymiz. U holda Kramer formulasidagi $D \neq 0$ va barcha $D_i = 0$ bo'ladi. Shu sababli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladi:

$$x_i = \frac{D_i}{D} = 0, \quad D_i = 0, \quad D \neq 0.$$

Demak, (1.4.20) sistemaning trivial yechimlardan boshqa yechimlari yo'q. Agar ular bor bo'lsa, u holda $r < n$ bo'ladi.

Yetaliligi. $r < n$ bo'lsin. U holda birgalikda bo'lgan bir jinsli sistema aniqmas bo'ladi. Demak, sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi, bunda ulardan ayrimlari nolga teng bo'lmaydi.

4-teorema. n noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'lishi uchun sistema matrisasining determinanti nolga teng bo'lishi, ya'ni $\det A = 0$ bo'lishi zarur va etarli.

Isboti. Zarurligi. Agar $\det A \neq 0$ (yoki $r = n$) bo'lsa, sistema yagona trivial yechimga ega bo'ladi. Demak, sistema nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'lsa, sistemaning determinanti $\det A = 0$ bo'ladi.

Yetaliligi. Agar $\det A = 0$ bo'lsa, $r < n$ bo'ladi. U holda 3-teoremaga ko'ra sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi, bunda ulardan ayrimlari nolga teng bo'lmaydi.

5-teorema. Agar X_1 va X_2 ustun matritsalar (1.4.20) sistemaning yechimlari bo'lsa, u holda bu yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi

$$c_1 X_1 + c_2 X_2$$

ham (1.4.20) sistemaning yechimi bo'ladi, bu yerda c_1, c_2 – istalgan haqiqiy sonlar.

Isboti. Teoremaning shartiga ko'ra

$$AX_1 = 0 \text{ va } AX_2 = 0.$$

U holda istalgan c_1 va c_2 sonlari uchun

$$c_1 AX_1 = 0 \text{ dan } A(c_1 X_1) = 0,$$

$$c_2 AX_2 = 0 \text{ dan } A(c_2 X_2) = 0$$

bo'ladi. Bu tengliklarni qo'shamiz:

$$A(c_1 X_1) + A(c_2 X_2) = 0$$

yoki

$$A(c_1 X_1 + c_2 X_2) = 0.$$

Demak, X_1 va X_2 yechimlarning $c_1 X_1 + c_2 X_2$ chiziqli kombinatsiyasi (1.4.20) sistemaning yechimi bo'ladi. Bunda X_1 va X_2 yechimlar *fundamental sistema tashkil qiladi* deyiladi.

4.9-misol.
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$
 bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema determinantini hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 3 - 2 - 1 + 6 = -3 \neq 0.$$

Demak, sistema trivial yechimga ega: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

4.10-misol.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$
 bir jinsli tenglamalar sistemasini

yeching.

Yechish. Sistema matritsasini pog'onasimon ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 \rightarrow r_2 + (-2)r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-5)r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r_3 \rightarrow r_3 + (-1)r_2 \end{matrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_2 \rightarrow c_2 + c_1 \\ c_3 \rightarrow c_3 + c_1 \\ c_4 \rightarrow c_4 + (-1)c_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ c_2 \rightarrow c_4 \\ c_4 \rightarrow c_2 \end{matrix} \sim \end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c_3 \rightarrow c_3 + 3c_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c_2 \rightarrow c_2 : (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = 2$, $n = 4$, $r < n$. Demak, sistema nolga teng bo'lmagan yechimga ega. Bunda yechimlardan ikkitasi bazis o'zgaruvchilar, qolgan ikkita yechim erkin o'zgaruvchilar bo'ladi. $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$ deymiz va

$$\begin{cases} x_1 - c_1 - c_2 + x_4 = 0, \\ 3c_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz.

Bu sistema

$$x_4 = 3c_2, \quad x_1 = c_1 - 2c_2$$

yechimga ega. Berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$X = \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ 3c_2 \end{pmatrix}$$

Bu yechimni xususiy yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishiga keltiramiz:

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c_2 \\ 0 \\ c_2 \\ 3c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Bunda } X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ va } X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ xususiy yechimlar yechimlarning}$$

fundamental sistemasini tashkil qiladi.

1.4.6. Chiziqli tenglamalar sistemasini matematik paketlarda yechish

Kompyuterli matematika sistemalari (KMS) yoki matematik paketlar matematikaning turli masalalarini yechishda keng qo'llaniladi. Hozirgi vaqtda KMSlarning turli variantlari yaratilgan: *Maple*, *MathCAD*, *MatLAB*, *Mathematica*, *Direve*. Chiziqli tenglamalar sistemasini bu KMSlardan birinchisida, ya'ni Maple matematik paketida yechishni ko'rib chiqamiz.

$Ax=b$ tenglamalar sistemasi Maple paketida ikki usuldan biri bilan yechilishi mumkin.

1-usul: solve komandasi bilan.

Bu komanda bilan (1.4.1) ko'rinishda berilgan chiziqli tenglamalar sistema yechiladi.

$$4.11\text{-misol.} \begin{cases} 2x + 6y + 5z = 0, \\ 2x + 5y + 6z = -4, \\ 5x + 7y + 8z = -7 \end{cases} \text{ tenglamalar sistemasini yeching.}$$

Yechish.

> eq:={2*x + 6*y + 5*z = 0, 2*x + 5*y + 6*z = -4, 5*x + 7*y + 8*z = -7};

> solve {eq, {x,y,z}};

$$\{x=-1, y=2, z=-2\}$$

$$4.12\text{-misol.} \begin{cases} x - 7y + 9z = -6, \\ 2x - 3y + 5z = -3, \\ 3x + y + z = 0 \end{cases} \text{ tenglamalar sistemasining umumiy va bitta}$$

xususiy yechimini toping.

Yechish.

> eq:={x - 7*y + 9*z = -6, 2*x - 3*y + 5*z = -3, 3*x + y + z = 0};

> s:=solve {eq, {x,y,z}};

$$s := \left\{ x = -\frac{3}{11} - \frac{8}{11}z, y = \frac{9}{11} + \frac{13}{11}z, z = z \right\}.$$

Sistemaning xususiy yechimini topish uchun z o'zgaruvchiga **subs** komandasi bilan tayin qiymat berish kerak:

> subs {z=1,s}

$$\{x=-1, y=2, z=1\}$$

2-usul: linsolve(A,b) komandasi bilan.

Bu komanda bilan **linalg** paketidan $Ax=b$ tenglamaning yechimi topiladi. Bunda komandaning argumenti: **A** -matritsa; **b** - vektor.

$$4.13\text{-misol.} \begin{cases} 2x + 7y + 13z = 0, \\ 3x + 14y + 12z = 18, \\ 5x + 25y + 16z = 39 \end{cases} \text{ tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan,}$$

Kramer formulalari bilan matritsalar usuli bilan yeching.

Yechish.

1) Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz:

> with(LinearAlgebra):

A := <<2,3,5>|<7,14,25>|<13,12,16>>;

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{bmatrix}$$

> **b := <0,18,39>;**

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 39 \end{bmatrix}$$

> **GaussianElimination(A);**

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{15}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

> **GaussianElimination(A,'method'='FractionFree');**

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 0 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

> **ReducedRowEchelonForm(<A|b>);**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Demak,

$$x := K \ 4 \quad y := 3 \quad z := K \ 1$$

2) Sistemani Kramer formulalari bilan yechamiz:

> **with(Student[LinearAlgebra]);**

> **d := <<2,3,5>|<7,14,25>|<13,12,16>>;**

> **d:=Determinant(d);**

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{vmatrix}$$

$$d := K \ 3$$

> **dx1:=<<0,18,39>|<7,14,25>|<13,12,16>>;**

> **d1:=Determinant(dx1);**

$$dx1 = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 13 \\ 18 & 14 & 12 \\ 39 & 25 & 16 \end{vmatrix}$$

$$d1 := 12$$

> **dx2 := <<2,3,5>|<0,18,39>|<13,12,16>>;**

> **d2:=Determinant(dx2);**

$$dx2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 13 \\ 3 & 18 & 12 \\ 5 & 39 & 16 \end{vmatrix}$$

$$d2 := K \ 9$$

```
> dx3 := <<2,3,5>|<7,14,25>|<0,18,39>>;
> d3:=Determinant(dx3);
```

$$dx3 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 3 & 14 & 18 \\ 5 & 25 & 39 \end{vmatrix}$$

$$d3 := 3$$

```
> x:=d1/d;y:=d2/d;z:=d3/d;
```

$$x := K \ 4 \quad y := 3 \quad z := K \ 1$$

3) Sistemani matritsalar usuli bilan yechamiz:

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
> A := <<2,3,5>|<7,14,25>|<13,12,16>>;
```

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 18 \\ 3 & 14 & 12 \\ 5 & 25 & 16 \end{pmatrix}$$

```
> A^(-1);
```

$$\begin{pmatrix} \frac{76}{3} & -\frac{213}{3} & -\frac{98}{3} \\ -\frac{12}{3} & -\frac{33}{3} & -\frac{15}{3} \\ -\frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{15}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

```
> B := <<0,18,39>>;
```

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 39 \end{pmatrix}$$

```
> X:=A^(-1).B;
```

$$X := \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linsolve(A,b) komandaning argumenti sifatida mos ravishda **A** va **B** matritsalar olinsa, bu komanda bilan $AX = B$ matritsaviy tenglama yechimini ham topish mumkin.

4.14-misol. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ matritsaviy tenglamani yeching.

Yechish.

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
> A := <<1,0,1>|<3,1,-1>|<-1,-2,0>>;
```

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$> A^{-1} := A^{(-1)};$$

$$A^{-1} := \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$> B := \langle\langle 13, 2, -2 \rangle | \langle -4, -4, 5 \rangle | \langle 6, 2, 5 \rangle \rangle;$$

$$B := \begin{pmatrix} 13 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$> X := A^{(-1)} \cdot B;$$

$$X := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A *matritsaning yadrosi* deb shunday vektorlar to'plami x ga aytiladiki, $Ax=0$ bo'ladi. Bunda A matritsaning yadrosini topish bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimlarini topishga ekvivalent bo'ladi. A matritsaning yadrosini **kernel (A)** komandasi bilan topish mumkin.

$$4.15\text{-misol.} \begin{cases} x + y = 0, \\ 2y - z = 0, \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \text{ tenglamalar sistemasini yeching.}$$

Yechish. $> k(A) := \text{kernel}(A) :$

$$k(A) := \{[-1, 1, 2]\}.$$

1.4. Mashqlar

Tenglamalar sistemasini tekshiring:

$$1.4.1. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

$$1.4.2. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

$$1.4.3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

$$1.4.3. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$1.4.5. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -13, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 7. \end{cases}$$

$$1.4.6. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$1.4.7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$1.4.8. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.4.9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 16. \end{cases}$$

$$1.4.10. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -3, \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 = -8, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -2. \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini Jordan-Gauss usuli bilan yeching:

$$1.4.11. \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ 4x_1 + 8x_2 + x_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 33. \end{cases}$$

$$1.4.12. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini LU yoyish asosida yeching:

$$1.4.13. \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -7, \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ 6x_1 - 4x_2 = 2. \end{cases}$$

$$1.4.14. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 9x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$1.4.15. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

$$1.4.16. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 1, \\ 2x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini matritsalar usuli bilan yeching:

$$1.4.17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

$$1.4.18. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$$

$$1.4.19. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -4. \end{cases}$$

$$1.4.20. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini Kramer formulalari bilan yeching:

$$1.4.21. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 17, \\ 5x_1 + 2x_2 = 11. \end{cases}$$

$$1.4.22. \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 = 10. \end{cases}$$

$$1.4.23. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$1.4.24. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$$

$$1.4.25. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

$$1.4.26. \begin{cases} ax_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + a^2x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + ax_2 + ax_3 = 1. \end{cases}$$

Bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching:

$$1.4.27. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.4.29. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.4.31. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.4.28. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.4.30. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.4.32. \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasini toping:

$$1.4.33. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

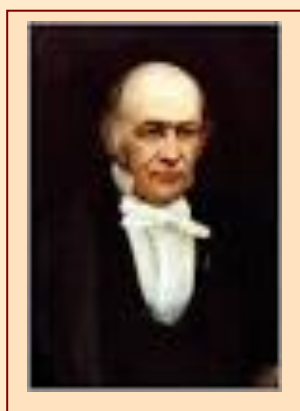
$$1.4.34. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan, Kramer formulalari bilan matritsalar usuli bilan Maple matematik paketida yeching:

$$1.4.35. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.4.36. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

- Vektorlar
- Vektorlarning ko'paytmalari



Uilyam Rouen Gamilton (1805-1865) – Irlandiyalik matematik, mexanik va fizik.

Gamiltonning fizika va matematika sohasidagi kashfiyotlari o'z davrida shiddatli bo'lgan va fanning bir necha o'n yillar olg'a siljishiga xizmat qilgan.

Gamiltonning ishlari vektorli algebraning rivojlanishiga va fanga vektor maydon tushunchasining kiritilishiga turtki bo'lgan.

Gamilton tomonidan kiritilgan godograf tushunchasi kinematika va dinamikada tadbiq qilinadi.

VEKTORLI ALGEBRA

2.1. VEKTORLAR

Vektor nisbatan yangi matematik tushuncha hisoblanadi. «Vektor» terminining o'zi *1845 yilda Vilyam Rouen Gamilton* tomonidan kiritilgan [4].

Vektor tushunchasiga son qiymati va yo'nalishi bilan xarakterlanuvchi ob'ektlar bilan ish ko'rilganida duch kelinadi. Bunday ob'ektlarga kuch, tezlik, tezlanish kabi fizik kattaliklar misol bo'ladi.

Vektor matematikaning turli bo'limlarida, masalan, elementar, analitik va differensial geometriya bo'limlarida qo'llaniladi. Vektorli algebra fizika va mexanikaning turli bo'limlariga, kristallografiyaga, geodeziyaga tatbiq qilinadi. Vektorlarsiz nafaqat klassik matematika, balki boshqa ko'plab fanlarni tasavvur qilib bo'lmaydi.

Vektorlar ustida qo'shish va songa ko'paytirish, amallarini, vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko'paytmalarini, vektorlarni bazis fazoda almashtirishni, vektorlarni proyeksiyalashni va shu kabi masalalarni o'rganish vektorli algebraning predmeti hisoblanadi.

2.1.1. Asosiy tushunchalar

Tayin uzunlikka va yo'nalishga ega bo'lgan kesma *vektor* deb ataladi.

Vektor $\overrightarrow{AB}$ yoki $\vec{a}$ bilan belgilanadi. Bunda A nuqtaga vektorning boshi deyilsa, B nuqtaga uning oxiri deyiladi.

$\overrightarrow{BA}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ vektorga *qarama-qarshi vektor* hisoblanadi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor $(-\vec{a})$ bilan belgulanadi.

Boshi va oxiri orasidagi masofaga *vektorning uzunligi* yoki *moduli* deyiladi. Vektorning moduli $|\overrightarrow{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ ko'rinishda belgilanadi.

Boshi va oxiri ustma-ust tushadigan vektor *nol vektor* deb ataladi va $\vec{0}$ bilan belgilanadi. Bunda $|\vec{0}| = 0$ bo'ladi. Nol vektor yo'nalishga ega bo'lmaydi.

Uzunligi birga teng vektorga *birlik vektor* deyiladi va ko'p hollarda $\vec{e}$ orqali belgilanadi.

$\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalgan birlik vektorga $\vec{a}$ *vektorning orti* deyiladi va $\vec{a}^0$ bilan belgilanadi.

1-ta'rif. Bir to'g'ri chiziqli yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar *kollinear vektorlar* deb ataladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinearligi $\vec{a} \parallel \vec{b}$ deb yoziladi. Kollinear vektorlar bir tomonga yo'nalgan (yo'nalishdosh, ular $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ kabi belgilanadi) yoki qarama-qarshi tomonlarga yo'nalgan (ular $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ kabi belgilanadi) bo'lishi mumkin. Hol vektor har qanday vektorga kollinear hisoblanadi.

2-ta'rif. Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar *komplanar vektorlar* deb ataladi.

3-ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear, yo'nalishdosh va uzunliklari teng bo'lsa, ularga *teng vektorlar* deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ kabi yoziladi.

Vektorlar tengligining bu ta'rifi *erkli vektorlar* deb ataluvchi vektorlarni xarakterlaydi. Bu ta'rifga asosan erkli vektorni fazoning ixtiyoriy nuqtasiga parallel ko'chirish mumkin bo'ladi.

Erkli vektorlar tushunchasidan foydalanib, vektorlarning kollinearligi va komplanarligi uchun boshqa ekvivalent ta'riflarni berish mumkin: agar ikkita nol bo'lmagan vektorlar bir nuqtaga ko'chirilganida bir to'g'ri chiziqli yotsa, bu vektorlarga kollinear vektorlar deyiladi; agar uchta nol bo'lmagan vektorlar bir nuqtaga ko'chirilganida bir tekislikda yotsa, bu vektorlarga komplanar vektorlar deyiladi.

Ayrim hollarda vektorning erkli ko'chirilishi chegaralanishi mumkin. Agar vektorning qo'yilish nuqtasi qat'iy fiksirlangan bo'lsa, bu vektorga *bog'langan vektor* deyiladi. Agar vektorning boshi joylashishi mumkin bo'lgan chiziqli berilgan bo'lsa, bu vektorga *sirpanuvchi vektor* deyiladi. Bog'langan va sirpanuvchi vektorlar nazariy mexanikada keng qo'llaniladi. **Masalan,** M nuqtaning radius vektori bog'langan vektor bo'ladi; aylanma harakatda aylanish o'qida joylashgan burchak tezlik vektori sirpanuvchi vektor bo'ladi.

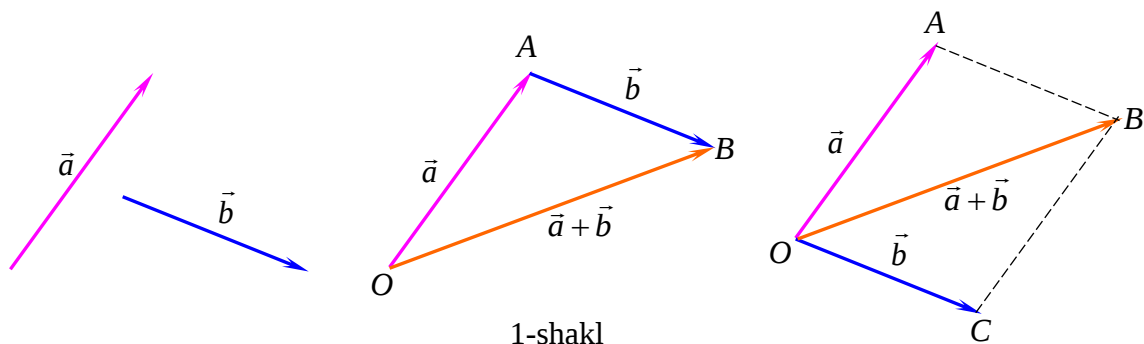
2.2.2. Vektorlar ustida chiziqli amallar

Vektorlarni qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirish amallari *vektorlar ustida chiziqli amallar* hisoblanadi.

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor berilgan bo'lsin. Istalgan O nuqta olib, bu nuqtaga $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ vektorni parallel ko'chiramiz. A nuqtaga $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ vektorni qo'yamiz. Bunda birinchi vektorning boshini ikkinchi vektorning oxiri bilan tutashtiruvchi

$\overrightarrow{OB}$ vektorga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deyiladi, ya'ni $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ (1-shakl). Vektorlarni qo'shishning bu usuli *uchburchak qoidasi* deb ataladi.

Ikkita vektorni *parallelogramm qoidasi* bilan ham qo'shish mumkin. Buning uchun O nuqtaga $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ vektorlarni qo'yamiz va ulardan parallelogramm yasaymiz. Bunda parallelogrammning O uchidan o'tkazilgan $\overrightarrow{OB}$ diagonal $\vec{a} + \vec{b}$ vektorni beradi (1-shakl).

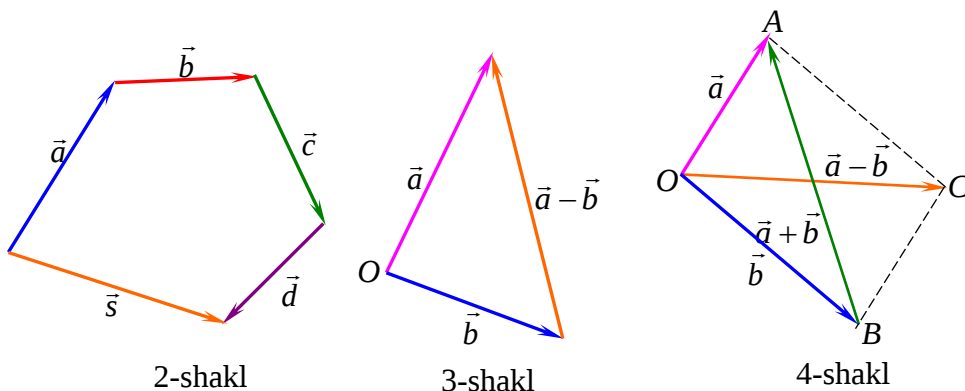


Bir nechta vektornining yig'indisini topish uchun bu vektorlarga teng vektorlardan ko'pburchak (siniq chiziq) hosil qilinadi. Bunda boshi birinchi vektorining boshida, oxiri esa oxirgi vektorining oxirida bo'lgan vektor ko'pburchak barcha vektorlarining yig'indisiga teng bo'ladi. Bir nechta vektorni bunday qo'shish usuliga *ko'pburchak qoidasi* (yoki *siniq chiziqlar qoidasi*) deyiladi. 2-shaklda to'rtta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{s}$ vektor tasvirlangan.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning *ayirmasi* deb, $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi bo'lgan $(-\vec{b})$ vektor yig'indisiga aytiladi, ya'ni $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

$\vec{a} - \vec{b}$ ayirmani topish uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorni umumiy O nuqtaga qo'yamiz. Bunda $\vec{b}$ vektor oxiridan $\vec{a}$ vektor oxiriga yo'nalgan vektor $\vec{a} - \vec{b}$ vektorni beradi (3-shakl).

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlarga qurilgan $OACB$ parallelogrammning diagonal vektorlari mos ravishda bu vektorlarning yig'indisidan va ayirmasidan iborat bo'ladi (4-shakl).



$\vec{a}$ vektorning $\lambda \neq 0$ songa ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kollinear, uzunligi $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ga teng va yo'nalishi $\lambda > 0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil, $\lambda < 0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektor yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lgan $\lambda \vec{a}$ vektorga aytiladi.

Vektorni songa kopaytirishning bu ta'rifidan quyidagi xossalar kelib chiqadi:

1- xossa. $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq 0$) va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ bo'lishi zarur va etarli, bu yerda λ - birorta son;

2- xossa. $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$ ($\vec{a} \neq 0$), ya'ni har bir nol bo'lmagan vektor uzunligi bilan ortining ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Vektorlar ustida chiziqli amallar ushbu xossalarga ega:

- | | |
|--|---|
| 1°. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; | 2°. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$; |
| 3°. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$; | 4°. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$; |
| 5°. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda \cdot \mu)\vec{a}$; | 6°. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$; |
| 7°. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$; | 8°. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$. |

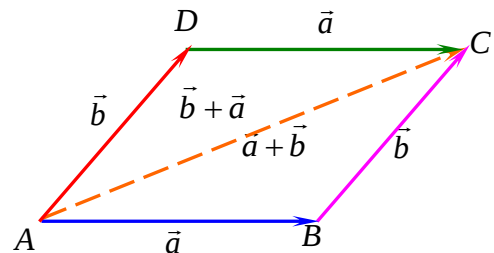
Xossalarning isboti vektorlarni qo'shish va ayirish qoidalari hamda vektorning songa ko'paytirish ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

Misol tariqasida xossalardan birinchisini isbotlaymiz [6]. $\overrightarrow{AB}$ vektor $\vec{a}$ dan va $\overrightarrow{BC}$ vektor $\vec{b}$ dan iborat bo'lsin (5-shakl).

U holda vektorlarni qo'shishning uchburchak xossasiga ko'ra ABC uchburchakda

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$$

bo'ladi.



5-shakl

Parallelogrammning xossasiga ko'ra:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ va } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}.$$

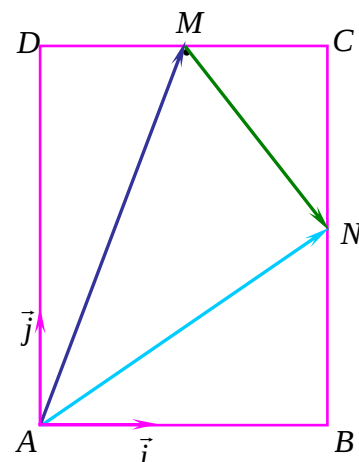
Vektorlarni qo'shishning uchburchak xossasiga ko'ra ADC uchburchakda

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$$

bo'ladi.

Bundan, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ kelib chiqadi.

1.1-misol. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakning tomonlari $AB=3$, $AD=4$. M - DC tomonning o'rtasi, N - CB tomonning o'rtasi (6-shakl). $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ vektorlarni mos ravishda $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ tomonlar bo'ylab yo'nalgan $\vec{i}$ va $\vec{j}$ birlik vektorlar orqali ifodalang.



6-shakl

Yechish. $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^\circ$ bo'lishini hisobga olib, topamiz:

$$\vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot \vec{i} = 3\vec{i}, \quad \vec{AD} = |\vec{AD}| \cdot \vec{j} = 4\vec{j}.$$

6-shaklga ko'ra

$$\vec{DM} = \vec{MC} = \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{i}, \quad \vec{BN} = \vec{NC} = \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AD} = 2\vec{j}.$$

Vektorlarni qo'shish qoidasi bilan topamiz:

$$\vec{AM} = \vec{AD} + \vec{DM} = 4\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{i}; \quad \vec{AN} = \vec{AB} + \vec{BN} = 3\vec{i} + 2\vec{j};$$

$$\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CN} = \vec{MC} - \vec{NC} = \frac{3}{2}\vec{i} - 2\vec{j}.$$

2.2.3. Vektorning o'qdagi proyeksiyasi

Sanoq boshini aniqlovchi nuqtasi va birlik vektori berilgan to'g'ri chiziqqa **o'q** deyiladi.

$\vec{e}$ birlik vektor va O nuqta l o'qni bir qiymatli aniqlaydi.

M nuqtadan l o'qqa tushirilgan AA_1 perpendikularning A_1 asosiga **Anuqtaning l o'qdagi proyeksiyasi** deyiladi (7-shakl).

$\vec{AB}$ ($\vec{AB} \neq 0$) ixtiyoriy vektor bo'lsin. A_1 va B_1 bilan mos ravishda $\vec{AB}$ vektor boshi va oxirining l o'qdagi proyeksiyalarini belgilaymiz.

$\vec{A_1B_1}$ vektorga $\vec{AB}$ **vektorning l o'qdagi tashkil etuvchisi** deyiladi.

4-ta'rif. $\vec{AB}$ vektorning l o'qdagi proyeksiyasi deb $\pm |\vec{A_1B_1}|$ songa aytiladi va $\text{Pr}_l \vec{AB}$ bilan belgilanadi. Bu son $\vec{A_1B_1}$ tashkil etuvchi va l o'q bir tomonga yo'nalgan bo'lsa musbat ishora bilan, aks holda manfiy ishora olinadi (7-shakl).

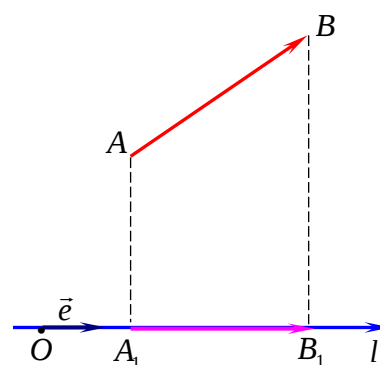
Demak,

$$\text{Pr}_l \vec{AB} = \pm |\vec{A_1B_1}|.$$

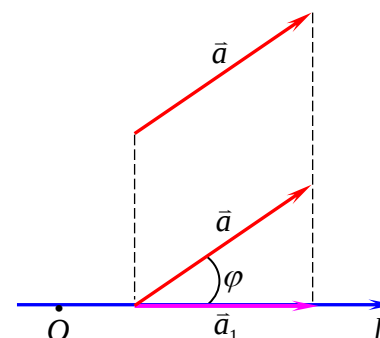
5-ta'rif. $\vec{a}$ vektor bilan uning l o'qdagi tashkil etuvchisi $\vec{a_1}$ vektor orasidagi φ burchakka $\vec{a}$ **vektor bilan l o'q orasidagi burchak** (ikki $\vec{a}$ va $\vec{a_1}$ vektor orasidagi burchak) deyiladi. Ravshanki, $0 \leq \varphi \leq \pi$ (8-shakl).

Vektorning o'qdagi proyeksiyasining asosiy xossalari bilan tanishamiz.

1-xossa. $\vec{a}$ vektorning l o'qdagi proyeksiyasi $\vec{a_1}$ vektor modulining bu vektor bilan o'q orasidagi φ burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng, ya'ni



7-shakl



8-shakl

$$\text{Pr}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Isboti. Agar $\vec{a}$ vektor bilan l o'q orasidagi burchak o'tkir $\left(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ bo'lsa,

66 Vektorlar

$\vec{a}_1$ tashkil etuvchi va l o'q bir tomonga yo'nalgan bo'ladi. U holda

$$\text{Pr}_l \vec{a} = +|\vec{a}_1| = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Agar $\vec{a}$ vektor bilan l o'q orasidagi burchak o'tmas $\left(\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi\right)$ bo'lsa,

$\vec{a}_1$ tashkil etuvchi va l o'q qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi.

U holda

$$\text{Pr}_l \vec{a} = -|\vec{a}_1| = -|\vec{a}| \cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Agar $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda

$$\text{Pr}_l \vec{a} = 0 = |\vec{a}| \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Bu xossadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. Vektorning o'qdagi proeksiyasi:

- 1) vektor o'q bilan o'tkir burchak tashkil qilsa, musbat bo'ladi;
- 2) vektor o'q bilan o'tmas burchak tashkil qilsa, manfiy bo'ladi;
- 3) vektor o'q bilan to'g'ri burchak tashkil qilsa, nolga teng bo'ladi.

2-natija. Teng vektorlarning bitta o'qdagi proeksiyalari teng boladi.

2-xossa. Bir nechta vektor yig'indisining berilgan o'qdagi proeksiyasi vektorlarning shu o'qdagi proeksiyalari yig'indisiga teng, masalan,

$$\text{Pr}_l (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{Pr}_l \vec{a} + \text{Pr}_l \vec{b} + \text{Pr}_l \vec{c}.$$

Isboti. $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ bo'lsin (9-shakl).

U holda

$$\text{Pr}_l \vec{d} = +|\vec{d}_1| = +|\vec{a}_1| + |\vec{b}_1| - |\vec{c}_1|,$$

ya'ni

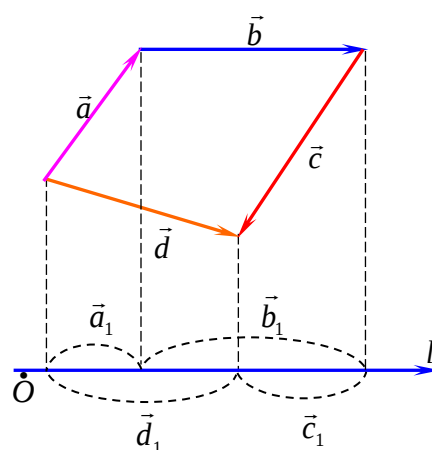
$$\text{Pr}_l (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{Pr}_l \vec{a} + \text{Pr}_l \vec{b} + \text{Pr}_l \vec{c}.$$

3-xossa. Vektor skalyar songa ko'paytirilsa, uning o'qdagi proeksiyasi ham shu songa ko'payadi, ya'ni

$$\text{Pr}_l (\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot \text{Pr}_l \vec{a}.$$

Isboti. Vektorning o'qdagi proyeksiyasining 1-xossasiga ko'ra

$\lambda > 0$ da $\text{Pr}_l (\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos \varphi = \lambda |\vec{a}| \cos \varphi = \lambda \cdot \text{Pr}_l \vec{a}.$



9-shakl

$\lambda < 0$ da $\text{Pr}_l(\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos(\pi - \varphi) = -\lambda |\vec{a}| (-\cos \varphi) = \lambda |\vec{a}| \cos \varphi = \lambda \cdot \text{Pr}_l \vec{a}$.

$\lambda = 0$ da $\text{Pr}_l(0 \cdot \vec{a}) = 0 = 0 \cdot \text{Pr}_l \vec{a} = \lambda \cdot \text{Pr}_l \vec{a}$.

3-natija. Vektorlar chiziqli kombinatsiyasining o'qdagi proeksiyasi bu vektorlar o'qdagi proeksiyalarining mos chiziqli kombinatsiyasiga teng, masalan,

$$\text{Pr}_l(k\vec{a} + n\vec{b}) = k \text{Pr}_l \vec{a} + n \text{Pr}_l \vec{b}.$$

1.2-misol. ABC to'g'ri burchakli uchburchakning katetlari $BA=5$, $BC=5\sqrt{3}$. ABC uchburchak balandliklari bo'ylab yo'nalgan vektorlarning AC gipotenuza bo'ylab yo'nalgan l o'qdagi proeksiyalarini toping.

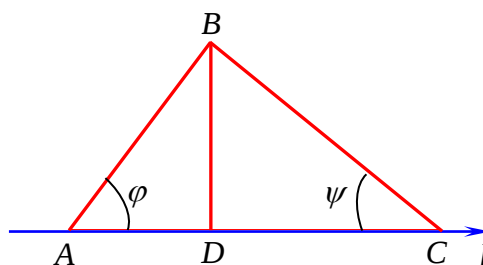
Yechish.

$\angle BAC = \varphi$, $\angle BCA = \psi$ bo'lsin deylik.

U holda

$$\cos \varphi = \frac{BA}{AC} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\cos \psi = \frac{BC}{AC} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



10-shakl

ABC uchburchak balandliklari bo'ylab yo'nalgan vektorlar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$ bo'ladi (10-shakl). Bu vektorlarning l o'qdagi proeksiyalarini topamiz:

$$\text{Pr}_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\text{Pr}_l \overrightarrow{CB} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot \cos \psi = -5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{15}{2},$$

$$\text{Pr}_l \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

2.2.4. Vektorlarning chiziqli bog'liqligi. Bazis

Uch o'lchovli R^3 fazoda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlarni olamiz va $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlardan

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 \quad (2.1.1)$$

vektorni tuzamiz. Bunda $\vec{a}$ vektorga $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlarga bu chiziqli kombinatsiyaning koeffitsiyentlari deyiladi.

6-ta'rif. Agar $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar uchun kamida bittasi nolga teng bo'lmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlar topilsa va bu sonlar uchun

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0 \quad (2.1.2)$$

tenglik bajarilsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar sistemasiga *chiziqli bog'liq vektorlar* deyiladi.

7-ta'rif. Agar (2.1.2) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar sistemasiga *chiziqli erkli vektorlar* deyiladi.

1-teorema. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ulardan hech bo'lmaganida bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Zarurligi. Berilgan vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsin. U holda (2.1.2) tenglik bajariladi, bunda α_k ($k=1,2,3$) sonlardan kamida bittasi nolga

68 Vektorlar

teng bo'lmaydi. $\alpha_3 \neq 0$ bo'lsin deylik.

U holda

$$\vec{a}_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\vec{a}_2$$

bo'ladi, ya'ni $\vec{a}_3$ vektor qolgan vektorarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

Etarliligi. Berilgan vektorlardan bittasi, masalan, $\vec{a}_3$ qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsin:

$$\vec{a}_{n3} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2.$$

Bundan

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + (-1)\vec{a}_3 = 0$$

kelib chiqadi, ya'ni (2.1.2) tenglik $\alpha_3 = -1$ da bajariladi. Demak, berilgan vektorlar chiziqli bog'liq.

7- ta'rifga ko'ra bitta nol bo'lmagan $\vec{a}$ vektordan iborat sistema chiziqli erkli bo'ladi, chunki $\alpha \vec{a} = 0$ tenglik faqat va faqat $\alpha = 0$ da bajariladi.

Demak, bitta $\vec{a}$ vektordan iborat sistema faqat va faqat $\vec{a} = 0$ bo'lganida chiziqli bog'liq bo'ladi.

Tekislikdagi vektorlarning chiziqli bog'liq yoki chiziqli erkli bo'lishi haqidagi masalani qaraymiz.

2-teorema. Ikkita $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ular kollinear bo'lishi zarur va yetarli.

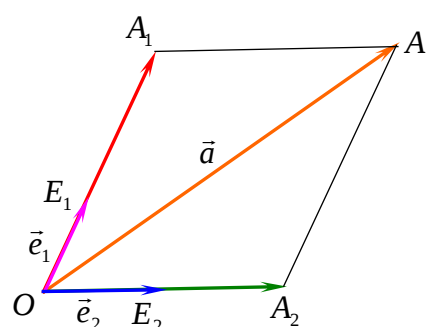
Isboti. Zarurligi. $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar kollinear bo'lsin. U holda $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$ bo'ladi, bundan $\lambda \vec{a}_1 + (-1)\vec{a}_2 = 0$ yoki $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = 0$. Demak, vektorlar chiziqli bog'liq.

Yetarliligi. $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsin. U holda $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = 0$ tenglik α_1 va α_2 sonlardan kamida bittasi, masalan, α_2 noldan

farqli bo'lganida bajariladi. Bundan $\vec{a}_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \vec{a}_1$

yoki $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$ kelib chiqadi. Demak, vektorlar kollinear.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.



11-shakl

4-natija. Ikkita $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektor chiziqli erkli bo'lishi uchun ular kollinear bo'lmisligi zarur va yetarli.

3-teorema. Agar $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ biror tekislikning ikkita kollinear bo'lmagan vektorlari bo'lsa, u holda shu tekislikning istalgan uchinchi $\vec{a}$ vektorini bu vektorlar bo'yicha yagona usulda

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 \quad (2.1.3)$$

ko'rinishda yoyish mumkin.

Isboti. Bitta O nuqtaga vektorlarni qo'yamiz: $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (11-shakl). A nuqtadan $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlarga parallel ikkita to'g'ri chiziq

o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlar bilan $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar yotgan to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalarini mos ravishda A_1 va A_2 bilan belgilaymiz.

Ikki vektor yig'indisi ta'rifiga ko'ra $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}$, bu yerda $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{OA_2}$ ekani hisobga olinsa

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}. \quad (2.1.4)$$

$\vec{e}_1$ va $\overrightarrow{OA_1}$ vektorlar kollinear bo'lgani uchun $\overrightarrow{OA_1} = \alpha_1 \vec{e}_1$ va shu kabi $\overrightarrow{OA_2} = \alpha_2 \vec{e}_2$ bo'ladi. Bu tengliklarga ko'ra (2.1.4) tenglikdan (2.1.3) tenglik kelib chiqadi.

(2.1.3) yoyilmaning α_1 va α_2 koeffitsiyentlari bir qiymatli aniqlanishini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$\vec{a} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 \quad (2.1.5)$$

yoyilma mavjud bo'lsin deb faraz qilamiz.

(2.1.5) tenglikni (2.1.3) tenglikdan hadma-had ayirib, topamiz:

$$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \vec{e}_2 = 0.$$

Shartga ko'ra $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar kollinear emas. U holda 1-narijaga ko'ra ular chiziqli erkli. Shu sababli oxirgi tenglik faqat $\alpha_1 - \beta_1 = 0$ va $\alpha_2 - \beta_2 = 0$ bo'lganida bajariladi. Bundan $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$. Demak, (2.1.3) yoyilmaning α_1 va α_2 koeffitsiyentlari bir qiymatli aniqlanadi.

4-teorema. Tekislikdagi har qanday uchta vektor chiziqli bog'liq bo'ladi.

Isboti. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlardan ikkitasi, masalan, $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ kollinear vektorlar bo'lsin. U holda $\vec{a}_2 = \alpha_1 \vec{a}_1$ yoki $\vec{a}_2 = \alpha_1 \vec{a}_1 + 0 \vec{a}_3$ bo'ladi. Demak, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar chiziqli bog'liq.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlardan istalgan ikkitasi kollinear bo'lmasin. U holda 3-teoremaga ko'ra $\vec{a}_3$ vektorni

$$\vec{a}_3 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2,$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlar chiziqli bog'liq.

2- va 4- teoremlardan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

5-natija. Tekislikdagi chiziqli erkli vektorlar soni ko'pi bilan ikkiga teng.

6-natija. Tekislikdagi vektorlar uchun ko'rsatilgandagi kabi fazodagi vektorlar uchun quyidagi xulosalarni ko'rsatish mumkin:

1) Uchta vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ular komplanar bo'lishi zarur va yetarli;

2) Uchta vektor chiziqli erkli bo'lishi uchun ular komplanar bo'lmasligi zarur va yetarli;

3) Agar $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar komplanar bo'lmasa, u holda istalgan $\vec{a}$ vektor bu vektorlar bo'yicha yagona ko'rinishda yoyilishi mumkin, ya'ni

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3; \quad (2.1.6)$$

4) Uch o'lchovli fazodagi har qanday to'rtta vektor chiziqli bog'liq bo'ladi;

5) Fazodagi chiziqli erkli vektorlar soni ko'pi bilan uchga teng.

70 Tekislikdagi bazis deb, istalgan ikkita chiziqli erkli vektorga aytiladi.

6- natija va 3- teoremaga ko'ra tekislikdagi istalgan $\vec{a}$ vektorni $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazis bo'yicha yagona ko'rinishda yoyish mumkin, ya'ni

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2. \quad (2.1.7)$$

(2.1.7) tenglikka $\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazis bo'yicha yoyilmasi, α_1, α_2 sonlarga $\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisdagi *affin koordinatalari* deyiladi va $\vec{a} = \{\alpha_1; \alpha_2\}$ deb yoziladi.

Fazodagi bazis deb, istalgan uchta chiziqli erkli vektorga aytiladi.

5-natijada keltirilgan xulosalarga ko'ra uch o'lchovli fazodagi istalgan $\vec{a}$ vektorni $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis bo'yicha yagona ko'rinishda yoyish mumkin, ya'ni

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3. \quad (2.1.8)$$

Bunda $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlar $\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdagi *affin koordinatalari* bo'ladi, ya'ni $\vec{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$.

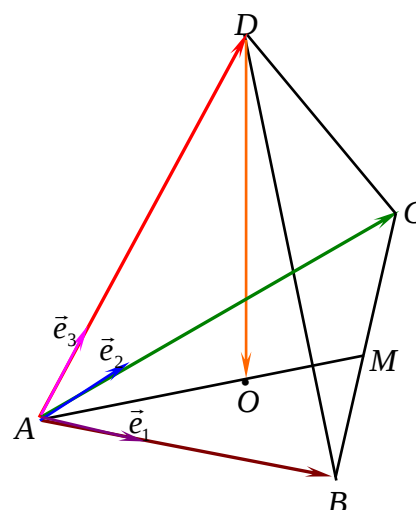
1.3-misol. Uchburchakli muntazam piramidada AB, AC, AD – A uchning qirralari, DO – D uchdan tushirilgan balandlik (12-shakl). Agar $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ mos ravishda AB, AC, AD qirralar bo'ylab yo'nalgan vektorlar bo'lsin. $\vec{DO}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis bo'yicha yoyilmasini toping.

Yechish. Vektorlarni songa ko'paytirish amalining xossasiga ko'ra:

$$\vec{AB} = \lambda_1 \vec{e}_1, \quad \vec{AC} = \lambda_2 \vec{e}_2, \quad \vec{AD} = \lambda_3 \vec{e}_3,$$

bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – haqiqiy sonlar.

Piramidaning bir uchidan chiqqan qirralarida



12-shakl

yotgan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar komplanar emas. Shu sababli $\vec{DO}$ vektorni $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis bo'yicha yoyish mumkin.

Piramida muntazam bo'lgani uchun uning balandligi asosining medianalari kesishish nuqtasiga tushadi, ya'ni O – uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi bo'ladi.

Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra

$$\vec{DO} = \vec{DA} + \vec{AO}.$$

Bunda

$$\vec{DA} = -\vec{AD} = -\lambda_3 \vec{e}_3, \quad \vec{AO} = \frac{2}{3} \vec{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \frac{1}{3} (\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2).$$

Demak,

$$\vec{DO} = -\lambda_3 \vec{e}_3 + \frac{1}{3} (\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2).$$

2.2.5. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar

Fazodagi bazis sifatida o'zaro perpendikular bo'lgan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlarni olaylik. Bunday bazis *ortonormallashgan bazis* deyiladi. Bunda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar bazis ortlari deb ataladi.

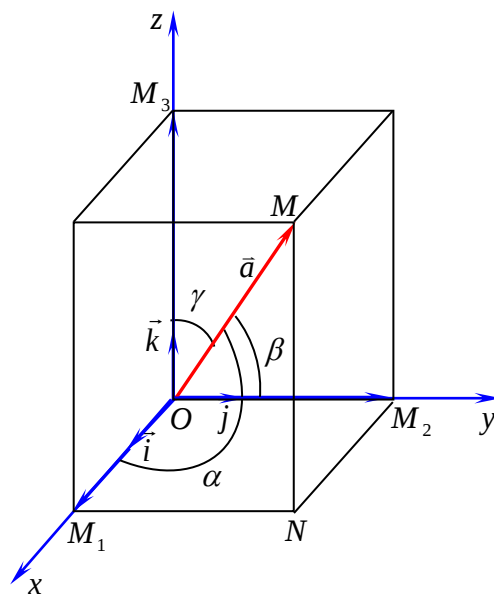
Koordinatalar boshidan mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis ortlari yo'nalishida o'tkazilgan Ox, Oy, Oz o'qlarga koordinata o'qlari deyiladi. Ox, Oy, Oz o'qlardan tashkil topgan $Oxyz$ koordinatalar sistemaga to'g'ri burchakli (yoki dekart) koordinatalar sistemasi deyiladi.

Fazoda ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni olib, uning boshlang'ich nuqtasini koordinatalar boshiga keltiramiz, ya'ni $\vec{a} = \vec{OM}$ vektorni hosil qilamiz (13-shakl).

$\vec{a}$ vektorning koordinata oq'laridagi proeksiyalarini topamiz. Buning uchun $\vec{OM}$ vektorning oxiridan koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar o'tkazamiz va ularning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda M_1, M_2, M_3 orqali belgilaymiz. Bu tekisliklar koordinata tekisliklari bilan birgalikda diagonallaridan biri $\vec{OM}$ vektor bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedni hosil qiladi.

Bunda

$$\text{Pr}_x \vec{a} = |\vec{OM}_1|, \quad \text{Pr}_y \vec{a} = |\vec{OM}_2|, \quad \text{Pr}_z \vec{a} = |\vec{OM}_3|.$$



13-shakl

Bir nechta vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra

$$\vec{a} = \vec{OM_1} + \vec{M_1N} + \vec{NM}.$$

Yoki $\vec{M_1N} = \vec{OM_2}$, $\vec{NM} = \vec{OM_3}$ ni hisobga olsak,

$$\vec{a} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3}. \quad (2.1.9)$$

Shunindek,

$$\vec{OM_1} = |\vec{OM_1}| \cdot \vec{i}, \vec{OM_2} = |\vec{OM_2}| \cdot \vec{j}, \vec{OM_3} = |\vec{OM_3}| \cdot \vec{k}. \quad (2.1.10)$$

$\vec{a} = \vec{OM}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini mos ravishda a_x, a_y va a_z orqali belgilaymiz, ya'ni $|\vec{OM_1}| = a_x$, $|\vec{OM_2}| = a_y$, $|\vec{OM_3}| = a_z$.

U holda (2.1.9) va (2.1.10) tengliklardan topamiz:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (2.1.11)$$

(2.1.11) tenglik $\vec{a}$ vektorning $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis bo'yicha yoyilmasi deb yuritiladi. a_x, a_y, a_z sonlarga $\vec{a}$ vektorning *dekart koordinatalari* (yoki oddiygina *koordinatalari*) deyiladi va $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ kabi yoziladi.

$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ vektor berilgan bo'lsin. To'g'ri burchakli parallelopipedning diagonal haqidagi teoremani qo'llaymiz:

$$|\vec{OM}|^2 = |\vec{OM_1}|^2 + |\vec{OM_2}|^2 + |\vec{OM_3}|^2,$$

Bundan

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

yoki

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (2.1.12)$$

ya'ni vektorning uzunligi uning koordinatalari kvadrlarining yig'indisining kvadrat ildiziga teng.

$\vec{a}$ vektorning Ox, Oy, Oz o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklari mos ravishda α, β, γ bo'lsin (13-shakl). $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ lar $\vec{a}$ *vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari* deb ataladi.

Vektorning o'qdagi proeksiyasi 1-xossasidan topamiz:

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha, a_y = |\vec{a}| \cos \beta, a_z = |\vec{a}| \cos \gamma.$$

Bundan $\vec{a} \neq 0$ bo'lganida

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}. \quad (2.1.13)$$

(2.1.13) tenglikdan (2.1.12) formulani hisobga olib, topamiz:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (2.1.14)$$

ya'ni nol bo'lmagan vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari kvadrlarining yig'indisi birga teng.

Bundan $\vec{a}^0$ birlik vektorning koordinatalari $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni $\vec{a}^0 = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$.

1.4-misol. Uzunligi $|\vec{a}|=2$ ga teng vektor Ox, Oy koordinata o'qlari bilan $\alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ$ li burchaklar tashkil qiladi. $\vec{a}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish. Vektorning o'qdagi proyeksiyasining 1-xossasisiga ko'ra:

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha = 2 \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

$$a_y = |\vec{a}| \cos \beta = 2 \cos 120^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Vektorning uzunligini topamiz:

$$2 = \sqrt{1 + 1 + a_z^2}.$$

Bundan

$$a_z^2 = 2 \quad \text{yoki} \quad a_z = \sqrt{2}, \quad a_z = -\sqrt{2}.$$

Demak,

$$\vec{a} = \{1; -1; \sqrt{2}\} \quad \text{yoki} \quad \vec{a} = \{1; -1; -\sqrt{2}\}.$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Vektorning o'qdagi proyeksiyasining xossalriga ko'ra:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k}, \quad (2.1.15)$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}, \quad (2.1.16)$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases} \quad (2.1.17)$$

Shunday qilib,

1) vektorlar qo'shilganida (ayriganida) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayriladi);

2) vektor songa ko'paytirilganida uning barcha koordinatalari shu songa ko'payadi;

3) teng vektorlarning mos koordinatalari teng bo'ladi va aksincha.

1.5-misol. $\vec{a} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ vektor berilgan. Bu vektorga qarama-qarshi yo'nalgan, kollinear va uzunligi $|\vec{b}|=9$ bo'lgan vektorning koordinatalarini toping.

Yechish. $\vec{b}$ vektorning koordinatalari b_x, b_y, b_z , ya'ni $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ bo'lsin.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ bo'ladi, bu yerda λ – biror son.

U holda ikki vektorning tengligi shartidan

$$b_x = \lambda a_x, \quad b_y = \lambda a_y, \quad b_z = \lambda a_z$$

yoki

$$b_x = -4\lambda, \quad b_y = -2\lambda, \quad b_z = 4\lambda.$$

Bu koordinatalarni va $\vec{b}$ vektorning uzunligini hisobga olib, topamiz:

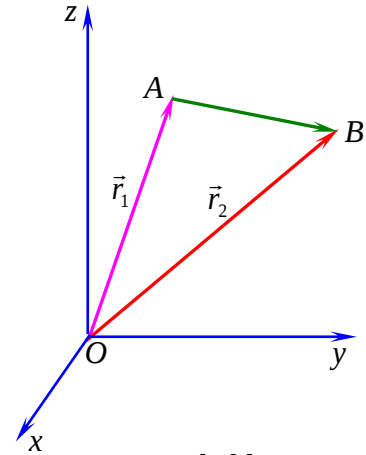
$$\sqrt{16\lambda^2 + 4\lambda^2 + 16\lambda^2} = 9, \quad \pm 6\lambda = 9 \quad \text{yoki} \quad \lambda = \pm \frac{3}{2}.$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar qarama-qarshi yo'nalgani uchun $\lambda < 0$,

ya'ni $\lambda = -\frac{3}{2}$. Demak, $\vec{b} = \{6; 3; -6\}$.

Koordinatlar boshiga qo'yilgan va oxiri M nuqta bo'lgan $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ vektorga M nuqtaning *radius vektori* deyiladi. $M(x; y; z)$ nuqta radius vektorining koordinatalari $r = \{x; y; z\}$ bo'ladi.

Boshi $A(x_1; y_1; z_1)$ nuqtada va oxiri $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektorni qaraymiz. A va B nuqtalarning radius vektorlarini mos ravishda $r_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$ va $r_2 = \{x_2; y_2; z_2\}$ bo'ladi.



14-shakl

74 Vektorlar

14-shaklga ko'ra

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Bundan (2.1.15) tenglikka asosan

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

yoki

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}. \quad (2.1.18)$$

Shunday qilib, vektorning koordinatalari uning oxirgi va boshlang'ich nuqtalari mos koordinatalarining ayirmasiga teng.

(2.1.18) tenglikdan $\overrightarrow{AB}$ vektorning modulini topamiz:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.1.19)$$

$\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligi A va B nuqtalar orasidagi masofani aniqlaydi. Shu sababli (2.1.19) tenglikka *ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi* deyiladi.

1.6-misol. Parallelogrammning uchta ketma-ket uchi berilgan: $A(-1; 3; 1)$, $B(-2; -5; 3)$, $C(0; -1; 1)$. BD diagonal uzunligini toping.

Yechish. Parallelogramm D uchning $x; y; z$ koordinatalarini parallelogramm uchun $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ekanidan aniqlaymiz. $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarni (2.2.18) formula ko'rinishida yozamiz:

$$\overrightarrow{AD} = \{x + 1; y - 3; z - 1\}, \quad \overrightarrow{BC} = \{0 - (-2); -1 - (-5); 1 - 3\} = \{2; 4; -2\}.$$

U holda $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ tenglikdan $x + 1 = 2$, $y - 3 = 4$, $z - 1 = -2$, ya'ni $D(1; 7; -1)$ bo'lishi kelib chiqadi.

$\overrightarrow{BD}$ vektorning koordinatalarini topamiz:

$$\overrightarrow{BD} = \{1 - (-2); 7 - (-5); -1 - 3\} = \{3; 12; -4\}.$$

U holda

$$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3^2 + 12^2 + (-4)^2} = \sqrt{6 + 144 + 16} = 13.$$

$A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar kesma berilgan bo'lsin. AB kesmani berilgan $\lambda > 0$ nisbatda bo'luvchi, y'ani $\frac{AC}{CB} = \lambda$ tenglikni ta'minlaydigan $C(x; y; z)$ nuqtani topish masalasini yechamiz [6].

Masalaning shartiga ko'ra $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{CB}$ vektorlar kollinear, ya'ni $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$.

U holda

$$\overrightarrow{AC} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \quad \overrightarrow{CB} = \{x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z\}$$

inobatga olinsa,

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Bu tengliklardan x, y, z larni topamiz:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.1.20)$$

(2.1.20) formulaga *kesmani berilgan λ nisbatda bo'lish* formulasi deyiladi.

(2.1.20) tengliklardan $\lambda = 1$ da kesma o'rtasining koordinatalarini topish formulalarini kelib chiqadi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (2.1.21)$$

1-izoh. Tekislikda yotuvchi AB kesma uchun (2.1.20) va (2.1.21) formulalar quyidagi ko'rinishlarni oladi:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (2.1.22)$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (2.1.23)$$

1.7-misol. $A(2;5)$ va $B(4;9)$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesmani $AC:CB=1:3$ nisbatda bo'luvchi C nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra $\lambda = \frac{1}{3}$. $C(x; y)$ nuqtani (2.1.22) formulalar bilan topamiz:

$$x = \frac{2 + \frac{1}{3} \cdot 4}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{5 + \frac{1}{3} \cdot 9}{1 + \frac{1}{3}} = 6, \quad \text{yoki} \quad C\left(\frac{5}{2}; 6\right).$$

2.1.1. Agar $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar qanday shartni qanoatlantiradi?

2.1.2. $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ va $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$ bo'lsa, $|\vec{a} - \vec{b}|$ ni hisoblang.

2.1.3. Agar M – AB kesmaning o'rtasi bo'lsa, fazoning ixtiyoriy O nuqtasi uchun $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ tenglikni isbotlang.

2.1.4. AD, BE, CF kesmalar ABC uchburchakning medianalari bo'lsa, $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = 0$ tenglikni isbotlang.

2.1.5. AN – ABC uchburchakning bisektrisasi. $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ bo'lsa, $\vec{AN}$ vektorni toping.

2.1.6. $ABCD$ teng yonli trapetsiyada $\angle DAB = 60^\circ$, $|AD| = |DC| = |CB| = 2$, M, N – mos ravishda DC va BC tomonlarning o'rtalari. $\vec{NM}$ vektorni mos ravishda $\vec{AB}$ va $\vec{AD}$ tomonlar bo'ylab yo'nalgan $\vec{m}$ va $\vec{n}$ birlik vektorlar orqali ifodalang.

2.1.7. O nuqtaga $\vec{OA} = \vec{a}$ va $\vec{OB} = \vec{b}$ vektorlar qo'yilgan. AOB burchak bissektrisasida

76 Vektorlar

yotuvchi biror $\vec{OM}$ vektorni toping.

2.1.8. $ABCD$ parallelogrammda $\vec{AB} = \vec{a}$ va $\vec{AD} = \vec{b}$, M – parallelogramm diagonallarining kesishish nuqtasi. $\vec{MA}$, $\vec{MB}$ vektorlarni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

2.1.9. m ning qanday qiymatida $\vec{c} = \vec{a} - m\vec{b}$ va $\vec{d} = -\sqrt{3}\vec{a} + 6\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'ladi?

2.1.10. Biror bazisda $\vec{a} = \{m; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{3; n; 6\}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa m va n ni toping.

2.1.11. $ABCD$ to'g'ri burchakli trapetsiya asoslari $|AB| = 4$ va $|CD| = 2$ va $\angle ABC = 45^\circ$. $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{DC}$, $\vec{AC}$ vektorlarning $\vec{CB}$ vektor bilan aniqlanuvchi l o'qqa proyeksiyalarini toping.

2.1.12. ABC teng tomonli uchburchakning tomonlari $2\sqrt{3}$ ga teng, AD, BE, CF – uchburchakning balandliklari. $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$, $\vec{AD}$, $\vec{BE}$, $\vec{CF}$ vektorlarning $\angle BAC$ burchak bisektrisasi bo'ylab yo'nalgan l o'qqa proyeksiyalarini toping.

2.1.13. $ABCD$ parallelogrammda P va Q mos ravishda BC va CD tomonlarning o'rtalari. Bazis vektorlar $\vec{e}_1 = \vec{AD}$ va $\vec{e}_2 = \vec{AB}$ bo'lsa, $\vec{PQ}$ vektorni bu bazis bo'yicha yoying.

2.1.14. $OACB$ to'g'ri to'rtburchakda M va N mos ravishda BC va AC tomonlarning o'rtasi. $\vec{OC}$ vektorning $\vec{OM} = \vec{a}$ va $\vec{ON} = \vec{b}$ vektorlar bo'yicha bazisga yoying.

2.1.15. $ABCD$ piramidada P va Q mos ravishda AD va BC qirralarning o'rtasi. Bazis

vektorlar $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ va $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AD}$ bo'lsa, $\overrightarrow{PQ}$ vektorni bu bazis bo'yicha yoying.

2.1.16. $OABC$ tetraedr berilgan. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ vektorlardan iborat bo'lgan bazisda $\overrightarrow{OF}$ vektorni toping, bu yerda F – asos medianalarining kesishish nuqtasi.

2.1.17. Tekislikda uchta $\vec{a} = \{3; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1\}$ va $\vec{c} = \{7; -4\}$ vektorlar berilgan. Har bir vektorning qolgan ikki vektor bo'yicha yoyilmasini toping.

2.1.18. $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{2; 2; -1\}$ vektorlar bazis tashkil qilishini ko'rsating. $\vec{d} = \{3; 7; -7\}$ vektorning shu bazis bo'yicha yoyilmasini toping.

2.1.19. $\vec{a} = \{-1; 5; -2\}$ va $\vec{b} = \{2; -1; 3\}$ vektor berilgan. $3\vec{a} - 2\vec{b}$ va $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini toping.

2.1.20. $\vec{a} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; -3; 1\}$ va $\vec{c} = \{0; -3; -2\}$ vektorlar berilgan. $-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ va $3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$ vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini toping.

2.1.21. Tomonlari $\vec{a} = \{-1; 0; 7\}$ va $\vec{b} = \{5; -4; -5\}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonalalarining uzunliklarini toping.

2.1.22. $\overrightarrow{AB} = \{2; 6; 4\}$ va $\overrightarrow{AC} = \{4; 2; -2\}$ bo'lsa, ABC uchburchakning CP medianasi uzunligini toping.

2.1.23. Fazoda M nuqtaning radius vektori koordinata o'qlari bilan bir xil burchak tashkil qiladi va uzunligi 3 ga teng. M nuqtaning koordinatalarini toping.

2.1.24. $\vec{a}$ vektor OX va OZ o'qlari bilan mos ravishda 60° va 120° li burchak tashkil qiladi. Agar $|\vec{a}| = 4$ bo'lsa, bu vektorning koordinatalarini toping.

2.1.25. Agar $\vec{a} = \{2; -1; 1\}$ vektorning boshlang'ich nuqtasi $A(3; -2; -4)$ bo'lsa, uning oxirgi nuqtasining koordinatalarini toping.

2.1.26. Agar $\vec{a} = \{2; 4; -1\}$ vektorning oxirgi nuqtasi $B(-1; 3; -4)$ bo'lsa, uning boshlang'ich nuqtasining koordinatalarini toping.

2.1.27. A va B nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB}$ vektorning ortini toping:

- 1) $A(-4; -9; 6)$, $B(8; 6; -10)$; 2) $A(6; -1; 9)$, $B(2; -4; -3)$.

2.1.28. $A(2; -1; 0)$, $B(1; -1; 2)$, $C(0; 5; 3)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$ vektorning ortini toping.

2.1.29. $\vec{a} = \{2; 3\}$, $\vec{b} = \{1; -3\}$, $\vec{c} = \{-1; 3\}$ vektorlar berilgan. α ning qanday qiymatlarida $\vec{m} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ va $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{c}$ vektorlar kollinear bo'ladi.

2.1.30. $\vec{a} = 16\vec{i} - 12\vec{j} + 15\vec{k}$ vektor bilan bir xil yo'nalgan va uzunligi $|\vec{b}| = 15$ bo'lgan vektorning koordinatalarini toping.

2.1.31. Uchlari $A(-1; -3)$, $B(2; -3)$, $C(2; 1)$ bo'lgan uchburchakning perimetrini toping.

2.1.32. Uchlari $A(-3; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(1; -1)$ bo'lgan uchburchakning to'g'ri burchakli

ekanini ko'rsating.

2.1.33. Uchlari $A(2;1)$, $B(-1;1)$, $C(-3;2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazini va radiusini toping.

2.1.34. $M_1(-1;-2)$ va $M_2(3;4)$ nuqtalar berilgan. M_1M_2 to'g'ri chiziqda yotuvchi va M_2 nuqtaga nisbatan M_1 nuqtaga 3 marta yaqin bo'lgan $M(x;y)$ nuqtani toping.

2.1.35. Uchlari $A(1;4)$, $B(-5;0)$, $C(-2;-1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak medianalarining kesishish nuqtasini toping.

2.1.36. Parallelogrammning uchta ketma-ket $A(-6;-4)$, $B(-4;8)$, $C(-1;5)$ uchlari berilgan. Parallelogrammning to'rtinchi uchini toping.

2.1.37. Uchlari $A(4;1;-3)$, $B(1;4;-2)$, $C(1;10;-8)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning AD medianasi uzunligini toping.

2.2. VEKTORLARNING KO'PAYTMALARI

2.2.1. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi

Skalyar ko'paytmaning ta'rifi

1-ta'rif. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning skalyar ko'paytmasi deb bu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng songa aytiladi

78 Vektorlar

va u $\vec{a}\vec{b}$ (yoki $\vec{a} \cdot \vec{b}$ yoki $(\vec{a}, \vec{b})$) kabi belgilanadi, ya'ni

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \quad (2.2.1)$$

bu yerda φ — $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak (bunda vektorlarning boshi bir nuqtaga qo'yiladi).

(2.2.1) formulani boshqa ko'rinishda yozish mumkin. Ma'lumki $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi$ va $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos\varphi$.

Bundan

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} \quad (2.2.2)$$

yoki

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}, \quad (2.2.3)$$

ya'ni ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ulardan birining moduli bilan ikkinchisining birinchi vektor yo'nalishidagi o'qqa proeksiyasining ko'paytmasiga teng.

Skalyar ko'paytmaning xossalari

1-xossa. Ko'paytuvchilarning o'rin almashtirish xossasi:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}.$$

Isboti. $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b}\vec{a}$.

2-xossa. Skalyar ko'paytuvchiga nisbatan guruhlash xossasi:

$$(\lambda \vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b}).$$

Isboti. (2.2.2) formulaga ko'ra $(\lambda \vec{a})\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}(\lambda \vec{a})$. Vektorning o'qdagi proeksiyasining 3-xossasiga asosan $\text{Pr}_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}|\vec{a}|$.

Bundan

$$(\lambda \vec{a})\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}|\vec{a}| = \lambda \cdot (|\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}|\vec{a}|) = \lambda(\vec{a}\vec{b}).$$

3-xossa. Qo'shishga nisbatan taqsimot xossasi:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}.$$

Isboti. Vektorning o'qdagi proeksiyasining 2-xossasiga ko'ra

$$\text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \text{Pr}_{\vec{a}}\vec{b} + \text{Pr}_{\vec{a}}\vec{c}.$$

Demak,

$$\begin{aligned} \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) &= |\vec{a}| \cdot \text{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (\text{Pr}_{\vec{a}}\vec{b} + \text{Pr}_{\vec{a}}\vec{c}) = \\ &= |\vec{a}| \cdot \text{Pr}_{\vec{a}}\vec{b} + |\vec{a}| \cdot \text{Pr}_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}. \end{aligned}$$

4-xossa. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perpendikular bo'lsa, u holda ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shunindek, teskari tasdiq o'rinli: agar $\vec{a}\vec{b} = 0$ ($|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$) bo'lsa, u holda $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'ladi.

$$\text{Xususan: } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0.$$

Isboti. $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lganda $\cos \varphi = 0$ bo'ladi. Bundan $\vec{a}\vec{b} = 0$.

$\vec{a}\vec{b} = 0$ ($|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$) bo'lsa, $\cos \varphi = 0$ bo'ladi. Bundan $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ya'ni $\vec{a} \perp \vec{b}$.

5-xossa. Vektorning skalyar kvadrati uning uzunligi kvadratiga teng, ya'ni $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

$$\text{Xususan: } \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1.$$

Isboti. $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$.

1-izoh. Agar $\vec{a}$ vektorni skalyar kvadratga oshirib, keyin kvadrat ildiz chiqarilsa, $\vec{a}$ vektorning o'zi emas, balki uning moduli hosil bo'ladi, ya'ni

$$\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}| \quad (\sqrt{\vec{a}^2} \neq \vec{a}).$$

$$\text{2.1-misol. } |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 6, \varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3} \text{ bo'lsin. } (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 4\vec{b})$$

ko'paytmani toping.

Yechish. Avval 3-xossadan foydalanib qavslarni ochamiz va keyin skalyar ko'paytmaning ta'rifi va xossalaridan foydalanib, topamiz:

$$(3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 4\vec{b}) = 3\vec{a} \cdot 2\vec{a} - \vec{b} \cdot 2\vec{a} + 3\vec{a} \cdot 4\vec{b} - \vec{b} \cdot 4\vec{b} = 6\vec{a}^2 + 10\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= 6|\vec{a}|^2 + 10|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} - 4|\vec{b}|^2 = \\
&= 6 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot 6^2 = 96 + 120 - 144 = 72.
\end{aligned}$$

2.2-misol. $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ bo'lsin. Bu vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonallarining uzunliklarini toping.

Yechish. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonallarini $\vec{a} + \vec{b}$ va $\vec{a} - \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalash mumkin.

Skalyar ko'paytmaning xossalariidan foydalanib, topamiz:

$$\begin{aligned}
|\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + |\vec{b}|^2} = \\
&= \sqrt{16 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9} = \sqrt{13}, \\
|\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + |\vec{b}|^2} = \\
&= \sqrt{16 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 9} = \sqrt{37}.
\end{aligned}$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalyar ko'paytmasi

Ikkita $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ va $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ vektor berilgan bo'lsin.

U holda bu vektorlarni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlar orqali ifodalab, skalyar ko'paytmaning xossalari va $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarning skalyar ko'paytmalarini hisobga

80 Vektorlarning ko'paytmalari

olib, topamiz:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x\vec{i}\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\vec{k} + \\
&+ a_yb_x\vec{j}\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\vec{k} + a_zb_x\vec{k}\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\vec{k} = \\
&= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.
\end{aligned}$$

Demak,

$$\vec{a}\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z, \quad (2.2.4)$$

ya'ni koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

2.3-misol. $\vec{a} = \{4; -2; 3\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 0\}$, $\vec{c} = \{2; 1; -3\}$ bo'lsin.

$(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$ ko'paytmani toping.

Yechish. Avval $\vec{m} = \vec{a} + 3\vec{b}$ va $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini topamiz:

$$\vec{m} = \{4 + 3 \cdot 1; -2 + 3 \cdot (-2); 3 + 3 \cdot 0\} = \{7; -8; 3\},$$

$$\vec{n} = \{4 - 1 + 2; -2 + 2 + 1; 3 - 0 - 3\} = \{5; 1; 0\}.$$

Bundan (2.2.4) formulaga ko'ra

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 7 \cdot 5 + (-8) \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 27.$$

Skalyar ko'paytmaning ayrim tatbiqlari

1. Ikki vektor orasidagi burchak.

$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ va $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ vektorlar orasidagi φ burchak kosinusini (2.2.1) va (2.2.4) tengliklardan topamiz:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (2.2.5)$$

yoki

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (2.2.6)$$

Shu kabi, fazodagi ikki yo'nalish orasidagi burchak kosinusi bu yo'nalishlarning mos (bir nomdagi) yo'naltiruvchi kosinuslari ko'paytmalarining yig'indisiga teng:

$$\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2. \quad (2.2.7)$$

2. Ikki vektorning perpendikulyarlik sharti.

$\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lsin. U holda $\cos \varphi = 0$ bo'lgani uchun (2.2.6) tenglikdan

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (2.2.8)$$

kelib chiqadi.

Fazodagi ikki **yo'nalishlarning perpendikulyarlik shartini** (2.2.7) tenglikdan topamiz:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0. \quad (2.2.9)$$

3. Vektorning berilgan yo'nalishdagi proeksiyasi.

(2.2.3) tenglikdan topamiz:

$$\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{b}|} \left(\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}|} \right) \quad (2.2.10)$$

yoki

$$\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \left(\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \right). \quad (2.2.11)$$

Shu kabi $\vec{a}(x;y;z)$ *vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ bo'lgan l yo'nalishdagi (o'qdag) proeksiyasi:

$$\text{Pr}_l \vec{a} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \quad (2.2.12)$$

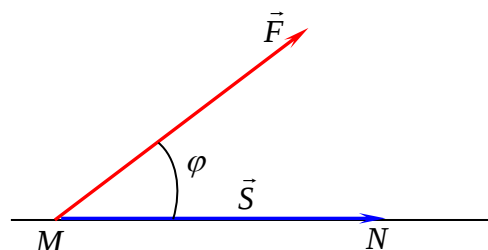
4. Kuchning bajargan ishi. $\overrightarrow{MN}$ vektor bilan φ burchak tashkil etuvchi $\vec{F}$ kuch ta'sirida moddiy nuqta M nuqtadan N nuqtaga to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chayotgan bo'lsin (15-shakl).

Fizika kursidan ma'lumki $\vec{F}$ kuchning $\overrightarrow{MN} = \vec{S}$ ko'chishdagi bajargan ishi

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi \quad \text{yoki} \quad A = \vec{F}\vec{S} \quad (2.2.13)$$

formula bilan aniqlanadi.

Demak, moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakatida o'zgarmas kuchning bajargan ishi kuch vektori va ko'chish vektorining skalyar ko'paytmasiga teng. Bu jumla *skalyar ko'paytmaning mexanik ma'nosini* anglatadi.



2.4-misol Moddiy nuqta $A(1;-2;2)$

nuqtadan $B(5;-5;-3)$ nuqtaga $\vec{F} = \{2;-1;-3\}$

15-shakl

kuch ta'sirida to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chgan. Quyidagilarni toping:

1) $\vec{F}$ kuchning bajargan ishini; 2) $\vec{F}$ kuchning ko'chish yo'nalishidagi proyeksiyasini; 3) $\vec{F}$ kuchning ko'chish yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagini.

Yechish. Avval moddiy nuqta ko'chish vektorini, uning va $\vec{F}$ kuchning uzunligini topamiz:

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = \{4;-3;-5\}, \quad |\vec{S}| = \sqrt{16+9+25} = 5\sqrt{2}, \quad |\vec{F}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}.$$

U holda:

$$1) A = \vec{F}\vec{S} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) + (-3) \cdot (-5) = 26 \text{ (ish b.)};$$

$$2) \text{Pr}_{\vec{S}} \vec{F} = \frac{\vec{F}\vec{S}}{|\vec{S}|} = \frac{26}{5\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{5};$$

82 Vektorlarning ko'paytmalari

$$3) \cos\varphi = \frac{\vec{F}\vec{S}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{S}|} = \frac{26}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{13\sqrt{7}}{35}, \quad \varphi = \arccos \frac{13\sqrt{7}}{35}.$$

2.5-misol. $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$ va $\vec{n} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ o'zaro perpendikular vektorlar bo'lsin. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ birlik vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. $\vec{m} \perp \vec{n}$ bo'lgani uchun $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$ bo'ladi.

Bundan

$$5\vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{b} - 8\vec{b}^2 = 0 \quad \text{yoki} \quad 5|\vec{a}|^2 + 6|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi - 8|\vec{b}|^2 = 0.$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ birlik vektorlar bo'lgani sababli: $5 + 6\cos\varphi - 8 = 0$.

U holda

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \text{ yoki } \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

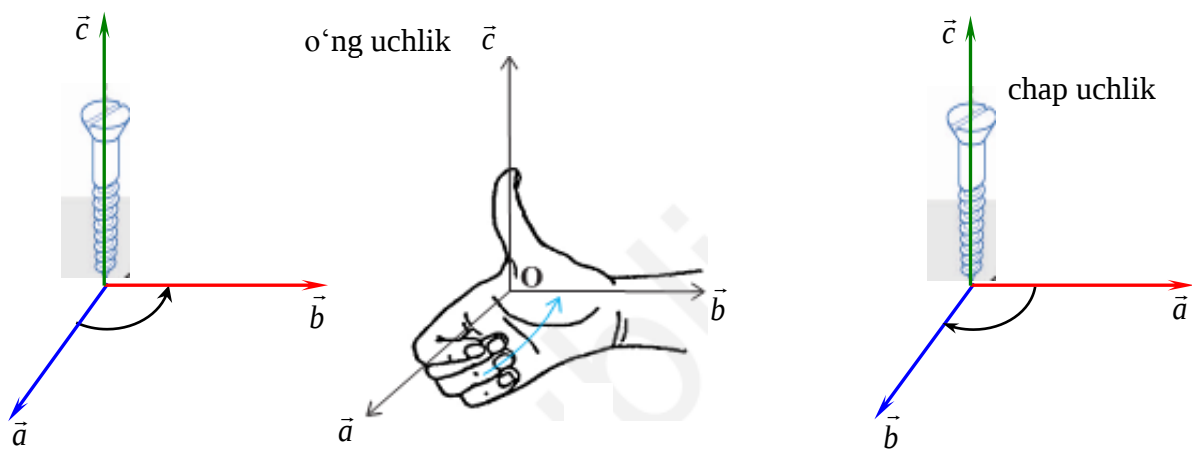
2.2.2. Ikki vektoring vektor ko'paytmasi

Vektor kopaytmaning ta'rif

Agar uchta vektordan qaysi biri birinchi, qaysi biri ikkinchi va qaysi biri uchinchi ekani ko'rsatilgan bo'lsa, bu vektorlarga tartiblangan uchlik deyiladi.

Tartiblangan uchlikda vektorlar joylashish tartibida yoziladi.

Agar komplanar bo'lmagan vektorlar tartiblangan uchligining uchinchi vektori uchidan qaralganda birinchi vektordan ikkinchi vektorga qisqa burilish soat strelkasi yo'nalishiga teskari bo'lsa, bunday uchlikka *o'ng uchlik*, agar soat strelkasi yo'nalishida bo'lsa *chap uchlik* deyiladi (16-shakl).



16-shakl

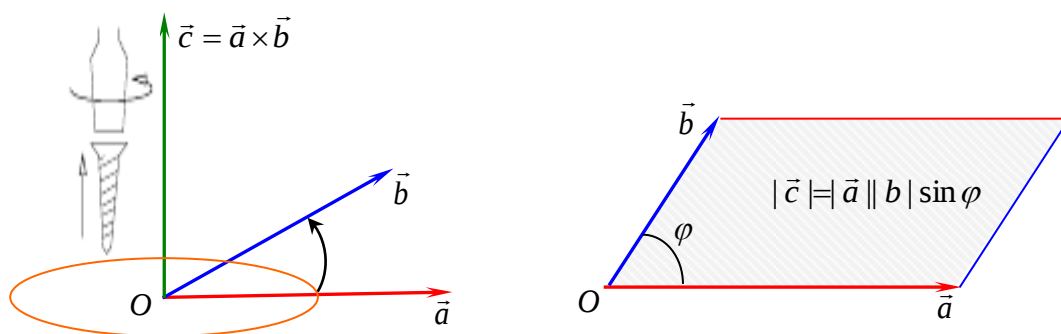
2-ta'rif. $\vec{a}$ vektorining $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi deb quyidagi shartlar bilan aniqlanadigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi (17-shakl):

- 1) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar, ya'ni $\vec{c} \perp \vec{a}$ va $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 2) $\vec{c}$ vektorining uzunligi son jihatidan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat

bo'lgan parallelogrammning yuziga teng, ya'ni $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, bu yerda $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$;

- 3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ yoki $[\vec{a}, \vec{b}]$ kabi belgilanadi.



17-shakl

Vektor ko'paytmaning xossalari

1-xossa. Ko'paytuvchilarning o'rinlari almashtirilsa vektor ko'paytma ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartiradi, ya'ni

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Isboti. Vektor ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra $\vec{a} \times \vec{b}$ va $\vec{b} \times \vec{a}$ vektorlar bir xil uzunlikka ega (parallelogramning yuzi o'zgarmaydi), kollinear, ammo qarama-qarshi yo'nalgan, chunki $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ vektorlar ham $\vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \times \vec{a}$ vektorlar ham o'ng uchlik tashkil qiladi.

Demak,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

2-xossa. Skalyar ko'paytuvchiga nisbatan guruhlash xossasi:

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Isboti. $\lambda > 0$ bo'lsin. U holda $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ va $\lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ vektorlar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar bo'ladi, chunki $\vec{b}$, $\lambda \vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir tekislikda yotadi. Shu sababli $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ va $\lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ vektorlar kollinear. Shuningdek, bu vektorlar yo'nalishdosh ($\lambda \vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlar yo'nalishdosh) hamda ular bir xil uzunlikka ega:

$$|(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b})) = \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})),$$

$$|\lambda (\vec{a} \times \vec{b})| = \lambda |\vec{a} \times \vec{b}| = \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

Demak,

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Xossa $\lambda < 0$ da ham shu kabi isbotlanadi.

84 Vektorlarning ko'paytmalari

3-xossa. Qo'shishga nisbatan taqsimot xossasi:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Bu xossaning isbotini boshqa manbalardan topish mumkin [5,6].

4-xossa. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, u holda ularning vektor ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shuningdek, teskari tasdiq o'rinli: agar $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ($|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$) bo'lsa, u holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'ladi.

Isboti. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, ular orasidagi burchak $\varphi = 0^\circ$ yoki $\varphi = 180^\circ$ ga teng va $\sin \varphi = 0$ bo'ladi. U holda $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 0$.

Bundan $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ bo'lsa, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 0$ bo'ladi. U holda $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \neq 0$ bo'lgani uchun $\sin \varphi = 0$. Bundan $\varphi = 0^\circ$ yoki $\varphi = 180^\circ$, ya'ni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear.

2.6-misol. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmalarini toping.

Yechish. Bunda vektor ko'paytmaning ta'rifidan quyidagi tengliklar bevosita kelib chiqadi:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Haqiqatan ham, masalan, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ tenglik o'rinli, chunki: 1) $\vec{k} \perp \vec{i}, \vec{k} \perp \vec{j}$;

2) $|\vec{k}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \sin 90^\circ = 1$; 3) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.

Shuningdek, 1- xossaga ko'ra

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Vektor ko'paytmaning 4- xossasidan topamiz:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0.$$

2.7-misol. $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ bo'lsin. $|(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})|$ ni

hisoblang.

Yechish. Vektor ko'paytmaning ta'rifi va xossalariidan foydalanib, topamiz:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{a} - 3\vec{a} \times \vec{b} - 6\vec{b} \times \vec{b} = -5\vec{a} \times \vec{b}.$$

$$\text{Bundan } |(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})| = |-5\vec{a} \times \vec{b}| = 5|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 15.$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning vektor ko'paytmasi

Ikkita $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ va $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ vektor berilgan bo'lsin.

U holda, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmalari formulalaridan foydalansak,

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) = \end{aligned}$$

Vektorlarning ko'paytmalari

85

$$= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} +$$

$$+ (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k},$$

ya'ni

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \quad (2.2.14)$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (2.2.15)$$

2.8-misol. $\vec{a} = \{3; -1; -2\}$, $\vec{b} = \{0; -2; 4\}$ bo'lsin. $(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (2\vec{a} - 3\vec{b})$ kopaytmani toping.

Yechish. Avval $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$ va $\vec{n} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektorlarning koordinatalarini topamiz:

$$\vec{m} = \{1 \cdot 3 + 2 \cdot 0; 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2); 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4\} = \{3; -5; 6\},$$

$$\vec{n} = \{2 \cdot 3 - 3 \cdot 0; 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2); 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 4\} = \{6; -8; -16\}.$$

Bundan (2.2.14) formulaga ko'ra

$$\vec{m} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -16 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \vec{k} = 128\vec{i} + 84\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Vektor ko'paytmaning ayrim tatbiqlari

1. Ikki vektorning kollinearlik sharti.

Vektor ko'paytmaning 4- xossasiga ko'ra $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ yoki

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = 0$$

bo'ladi.

Bundan

$$a_y b_z - a_z b_y = 0, \quad a_x b_z - a_z b_x = 0, \quad a_x b_y - a_y b_x = 0$$

yoki

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \quad (2.2.16)$$

ya'ni kollinear vektorlarning koordinatalari proporsional bo'ladi va aksincha proporsional koordinatalarga ega vektorlar kollinear bo'ladi.

Vektor ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, ya'ni

$$S_{par} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Bundan

$$S_{par} = 2S_{\Delta} = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (2.2.17)$$

3. Nuqtaga nisbatan kuch momenti.

O nuqtasi mahkamlangan qattiq jism A nuqtasiga qo'yilgan $\vec{F}$ kuch ta'sirida O nuqta atrofida aylanma harakat qilayotgan bo'lsin, **masalan**, bolt kalit yordamida buralalayotgan bo'lsin (18-shakl).

Fizika kursidan ma'lumki $\vec{F}$ kuchning O nuqtaga nisbatan momenti deb O nuqtadan o'tuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{M}$ vektorga aytiladi:

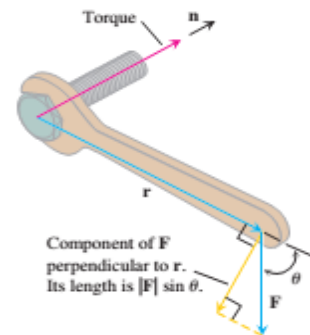
1) $\vec{M} \perp \vec{r}$ va $\vec{M} \perp \vec{F}$, bu yerda $\vec{r} = \vec{OA}$ – A nuqtaning radius vektori;

2) $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \varphi$, bu yerda $\varphi = (\vec{r}, \vec{F})$;

3) $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.

Shunday qilib,

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$



18-shakl

ya'ni qo'zg'almas nuqtaga nisbatan kuch momenti kuch qo'yilgan nuqta radius vektorining kuch vektoriga vektor ko'paytmasiga teng. Bu jumla **vektor ko'paytmaning mexanik ma'nosini** anglatadi.

4. **Aylanma harakatning chiziqli tezligi.** Yuqorida keltirilgandagi kabi qo'zg'almas O nuqta atrofida $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan qattiq jism M nuqtasining chiziqli tezligi Eyler formulasi bilan topiladi:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

bu yerda $\vec{r} = \vec{OM}$ – M nuqtaning radius vektori.

2.9-misol. m, n ning qanday qiymatlarida $\vec{a} = \{-2; 3; n\}$ va $\vec{b} = \{m; -6; 2\}$ vektorlar kollinear bo'ladi?

Yechish. Ikki vektorning kollinearlik shartiga ko'ra $\frac{-2}{m} = \frac{3}{-6} = \frac{n}{2}$.

Bundan $m = 4, n = -1$.

2.10-misol. $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ va $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzini hisoblang.

Yechish. Yuzani (2.2.17) formula bilan hisoblaymiz:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{9^2 + 12^2 + (-8)^2} = 17(\text{y.b.}).$$

1.5.3. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi

Aralash ko'paytmaning ta'rif va geometrik ma'nosi

3-ta'rif. Uchta $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorning aralash ko'paytmasi deb $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorni $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytmasiga teng songa aytiladi va $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ kabi belgilanadi.

Uchta komplanar bo'lmagan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlarga parallelepiped quramiz va $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ vektorni yasaymiz (19-shakl).

Vektor ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra

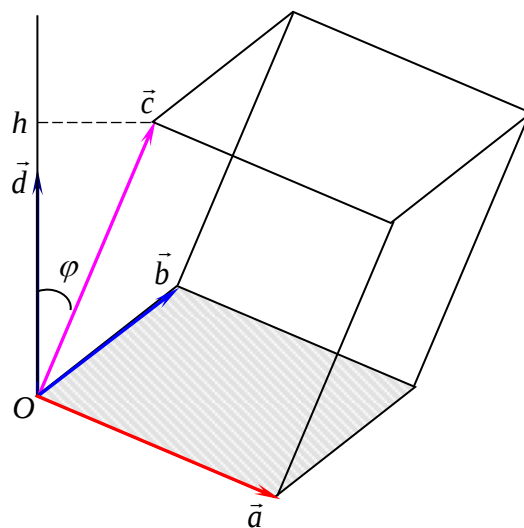
$$\vec{d} \perp \vec{a}, \vec{d} \perp \vec{b}, |\vec{d}| = S_{par},$$

bu yerda S_{par} – parallelepiped asosining yuzi.

Ta'rifga ko'ra

$$\vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot |\vec{c}| \cos \varphi,$$

bu yerda φ – $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlar orasidagi burchak.



19-shakl

19-shaklda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi va $\varphi < \frac{\pi}{2}$, ya'ni $\cos \varphi > 0$. U holda $|\vec{c}| \cos \varphi = h$ va $\vec{d} \cdot \vec{c} = S_{par} \cdot h = V$. Ikkinchi tomondan

$$\vec{d} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}. \text{ Demak, } V = \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar chap uchlik tashkil qilsa $\varphi > \frac{\pi}{2}$ va $\cos \varphi < 0$ bo'ladi.

U holda $|\vec{c}| \cos \varphi = -h$, $V = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Shunday qilib, komplanar bo'lmagan uchta vektorning aralash ko'paytmasining moduli qirralari bu vektorlarning uzunliklaridan iborat bo'lgan parallelepiped hajmiga teng:

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|. \quad (2.2.18)$$

Bu jumla *aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi*ni anglatadi.

Aralash ko'paytmaning xossalari

1-xossa. Amallarining o'rinlari almashtirilsa aralash ko'paytma o'zgarmaydi, ya'ni

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Isboti. Skalyar ko'paytmaning o'rin almashtirish xossasiga ko'ra

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

(2.2.18) formulaga ko'ra

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|, \quad V = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}|.$$

Bunda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ va $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ uchliklarning har ikkalasi bir vaqtda yoki o'ng uchlik yoki chap uchlik tashkil qiladi. Shu sababli $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$.

Bundan

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

2-xossa. Ko'paytuvchilarning o'rinlari doiraviy almashtirilsa aralash ko'paytma o'zgarmaydi, ya'ni

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

Isboti. 1-xossa va skalyar ko'paytmaning o'rin almashtirish xossasidan topamiz:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a},$$

$$\vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

3-xossa. Ikkita qo'shni ko'paytuvchining o'rinlari almashtirilsa aralash ko'paytma qarama-qarshisiga almashadi. Masalan, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.

Isboti. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.

4-xossa. Agar nolga teng bo'lmagan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shunindek, teskari tasdiq o'rinli: agar $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ ($|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0, |\vec{c}| \neq 0$) bo'lsa, u holda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'ladi.

Isboti. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ ($|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0, |\vec{c}| \neq 0$) bo'lsin. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar emas deb faraz qilamiz. U holda bu vektorlarga hajmi $V \neq 0$ bo'lgan parallelopiped qurish mumkin. $V = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}$ dan $\vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0$ kelib chiqadi. Bu $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ shartga teskari. Demak, qilingan faraz noto'g'ri va $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsin. U holda $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

Bundan $\vec{d} \perp \vec{c}$. Shu sababli $\vec{d} \cdot \vec{c} = 0$ yoki $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning aralash ko'paytmasi

Uchta $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ va $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$ vektor berilgan bo'lsin. U holda

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k},$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b}\vec{c} &= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z\end{aligned}$$

yoki

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (2.2.19)$$

2.11-misol. $\vec{a} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{3; -2; 5\}$, $\vec{c} = \{1; -1; 3\}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ko'paytmani hisoblang.

Yechish. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ni (2.2.19) formula bilan topamiz:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 10 - 3 + 2 - 10 - 18 = -7.$$

Aralash ko'paytmaning ayrim tatbiqlari

1. Fazodagi vektorlarning o'zaro joylashishi.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning fazoda o'zaro joylashishini aniqlash $V = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}$ bo'lishiga asoslanadi. Bunda agar $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ bo'lsa, u holda vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi, agar $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ bo'lsa, u holda vektorlar chap uchlik tashkil qiladi.

2. Uchta vektorning komplanarlik sharti.

Aralash ko'paytmaning 4-ossasiga ko'ra nolga teng bo'lmagan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ yoki

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (2.2.20)$$

3. Parallelepiped va piramidaning hajmlari.

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosiga ko'ra $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmini $V_{par} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ bilan va piramida hajmini

$V_{pir} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ bilan topish mumkin.

Shunday qilib,

$$V_{par} = 6V_{pir} = \text{mod} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (2.2.21)$$

2.12-misol. Uchlari $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$ nuqtalarda bo'lgan piramidaning D uchidan tushirilgan h balandligi uzunligini toping.

Yechish. Avval piramida qirralarini ifodalovchi vektorlarni topamiz:

$$\overrightarrow{AB} = \{2; -2; -3\}, \overrightarrow{AC} = \{4; 0; 6\}, \overrightarrow{AD} = \{-7; -7; 7\}.$$

Piramida hajmini hisoblaymiz:

$$V = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |84 + 84 + 84 + 56| = \frac{154}{3}.$$

ABC yoq yuzini hisoblaymiz:

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + 24^2 + 8^2} = 14.$$

Piramida uchun $V = \frac{1}{3} hS$.

Bundan

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot \frac{154}{3}}{14} = \frac{154}{14} = 11 \text{ (u.b.)}.$$

2.13-misol. Fazoda A, B, C, D nuqtalar koordinatalari bilan berilgan. $A(7;2;2)$, $B(5;7;7)$, $C(4;6;10)$, $D(2;3;7)$. Quyidagilarni toping:

- 1) $\overrightarrow{AB}$ vektor proektsiyalari va yunalishini;
- 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ko'paytmalarni;
- 3) ABC uchburchak yuzasini;
- 4) $ABCD$ piramida hajmini.

Yechish. 1) $\overrightarrow{AB}$ vektor proektsiyasini (2.1.18) formula bilan topamiz:

$$\overrightarrow{AB} = \{a_x; a_y; a_z\} = \{5 - 7; 7 - 2; 7 - 2\} = \{-2; 5; 5\}.$$

Bundan (2.1.12) formulaga ko'ra

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 5^2} = 3\sqrt{6}.$$

$\overrightarrow{AB}$ vektor yunalishini (2.1.13) formulalar bilan topamiz

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{\sqrt{6}}{9}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{5\sqrt{6}}{18}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{5\sqrt{6}}{18}.$$

Topilgan yechimlarni Maple paketida bajaramiz [15]:

```
> with(geom3d):
> point(A,7,2,2),point(B,5,7,7), point(C,4,6,10), point(D,2,3,7):
> with(LinearAlgebra):
> v := <a,b,c>;
```

$$v := (a)e_x \text{ C } (b)e_y \text{ C } (c)e_z$$

```
> VectorNorm(v,2,conjugate=false);
```

$$\sqrt{a^2 \text{ C } b^2 \text{ C } c^2}$$

```
> v1 := <5-7,7-2,7-2>;
```

$$v1 := K \ 2e_x \text{ C } 5e_y \text{ C } 5e_z$$

```
> VectorNorm(v1,2,conjugate=false);
```

$$3\sqrt{6}$$

```
> Normalize(<a,b,c>,Euclidean,conjugate=false);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{bmatrix}$$

```
> Normalize(v1,Euclidean,conjugate=false);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{9}\sqrt{6} \\ \frac{5}{18}\sqrt{6} \\ \frac{5}{18}\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

2) (2.2.8) formuladan $\overrightarrow{AB} = \{-2;5;5\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-3;4;8\}$ larni hisobga olib, topamiz:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \cdot (-3) + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 8 = 66$$

```
> vAC := <4-7,6-2,10-2>;
```

$$vAC := K \ 3e_x \text{ C } 4e_y \text{ C } 8e_z$$

```
> AB.AC:=Dotproduct( <5-7,7-2,7-2>, <4-7,6-2,10-2> );
```

$$\text{VectorCalculus:-.(AB, AC) := 66}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektor ko‘paytmani (2.2.15) formula bilan topamiz:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & 5 \\ -3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} \vec{j} - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} = 20\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$$

> **A := <<i,l,o>|<j,m>|<k,n,q>>;**

$$A := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l & m & n \\ o & p & q \end{vmatrix}$$

> **Determinant(A);** *i m q K i n p C l k p K l j q C o j n K o k m*

> **axb := <<i,-2,-3>|<j,5,4>|<k,5,8>>;**

$$axb = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & 5 \\ -3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

> **Determinant(axb);** *20 i C 7 k C j*

3) ABC uchburchak yuzasini (2.2.17) formula bilan hisoblaymiz:

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{20^2 + 1^2 + 7^2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

> **modN:=VectorNorm(N,2,conjugate=false);** *modN := 15 $\sqrt{2}$*

> **s:=modN/2;** *s := $\frac{15}{2} \sqrt{2}$*

> **with(geom3d):**

4) $ABCD$ piramida xajmini topamiz:

$$V = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -3 & 4 & 8 \\ -5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 64 = \frac{32}{3}$$

> **abc := <<-5,-2,-3>|<1,5,4>|<5,5,8>>;**

$$abc := \begin{vmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -3 & 4 & 8 \\ -5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

> **Determinant(abc);** *-64*

> **VABCD:={ABC(Determinant(abc))/6};**

$$VABCD = \frac{32}{3}.$$

2.2. Mashqlar

2.2.1. Tomonlari 1 ga teng bo‘lgan teng tomonli ABC uchburchak berilgan.
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ ifodaning qiymatini toping.

2.2.2. Tomonlari $BC = 5$, $CA = 6$, $AB = 7$ ga teng bo'lgan ABC uchburchak berilgan. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ skalyar ko'paytmani toping.

2.2.3. Agar $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$, $\varphi = (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ bo'lsin. Toping:

$$1) (2\vec{a} + \vec{b})^2; \quad 2) (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}).$$

2.2.4. $\vec{a} = \{1; -2; 2\}$ va $\vec{b} = \{2; 4; -5\}$ vektorlar berilgan. Toping:

$$1) (3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}); \quad 2) (\vec{a} - \vec{b})^2.$$

2.2.5. Berilgan vektorlar m ning qanday qiymatlarida perpendikular bo‘ladi?

1) $\vec{a} = \{1; -2m; 0\}$, $\vec{b} = \{4; 2; 3m\}$; 2) $\vec{a} = \{m; -5; 2\}$, $\vec{b} = \{m-2; m; m+3\}$.

2.2.6. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birlik vektorlar uchun $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 0$ bo'lsa, $\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1$ ni toping.

2.2.7. Tomonlari $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ va $\vec{b} = -\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlardan iborat bo‘lgan parallelogramning diagonallari orasidagi burchakni toping.

2.2.8. Uchlari $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$ bo'lgan ABC uchburchak berilgan. $\angle B$ ni toping.

2.2.9. xOz va yOz burchaklarning bissektrisalari qanday burchak tashkil qiladi?

2.2.10. Koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklari berilgan fazodagi ikki yo'nalish orasidagi burchakni toping:

$$1) \ l_1: \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right) \text{ va } l_2: \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right); \quad 2) \ l_1: \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right) \text{ va } l_2: \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right).$$

2.2.11. $\vec{a} = \{3; -6; -1\}$, $\vec{b} = \{1; 4; -5\}$, $\vec{c} = \{3; -4; 12\}$ vektorlar berilgan. Toping:

$$1) \Pr_{\vec{a}} \vec{a}; \quad 2) \Pr_{\vec{a}} (2\vec{a} - 3\vec{b}).$$

2.2.12. $A(1;2;-3)$ nuqtani $B(5;6;-1)$ nuqtaga to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chirishda $\vec{F} = \{2;-1;3\}$ kuchning bajargan ishini toping.

2.2.13. $\vec{a} = \{3; -1; 5\}$ va $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$ vektorlar berilgan. Agar $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$ va $\vec{x}$ vektor Oz oqiga perpendikular bo'lsa, $\vec{x}$ vektorning koordinatalarini toping.

2.2.14. $\vec{a} = \{2; -3; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$ va $\vec{c} = \{1; 2; -7\}$ vektorlar berilgan. Agar $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 10$ bo'lsa, $\vec{x}$ vektorni toping.

2.2.15. Agar $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, $\varphi=(\vec{a}, \vec{b})=\frac{5\pi}{6}$ bo'lsa, quyidagilarni toping:

$$1) \vec{a} \times \vec{b}; \quad 2) |(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (\vec{a} + 4\vec{b})|.$$

2.2.16. Tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunliklaridan iborat bo'lgan parallelogrammning yuzini toping:

- 1) $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, bu yerda $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, $\varphi = (\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$;
- 2) $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 5\vec{m} + 4\vec{n}$, bu yerda $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\varphi = (\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

2.2.17. Agar $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 10$, $\vec{a}\vec{b} = 25$ bo'lsa, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ni toping.

2.2.18. Agar $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 13$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 36$ bo'lsa, $\vec{a}\vec{b}$ ni toping.

2.2.19. $\vec{a} = \{-1; 2; 3\}$ va $\vec{b} = \{2; -1; 3\}$ vektorlar berilgan. Vektor ko'paytmalarni toping:

- 1) $\vec{a} \times \vec{b}$;
- 2) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (3\vec{b} - \vec{a})$.

2.2.20. Tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunliklaridan iborat bo'lgan uchburchakning yuzini toping: 1) $\vec{a} = \{2; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{8; 4; 1\}$; 2) $\vec{a} = \{3; 5; -8\}$, $\vec{b} = \{6; 3; -2\}$.

2.2.21. Uchburchak uchlari $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$ berilgan. Uning B uchidan AC tomonga tushirilgan balandlik uzunligini toping.

2.2.22. A nuqtaga $\vec{F}$ kuch qo'yilgan. Bu kuchning B nuqtaga nisbatan momentini toping: 1) $\vec{F} = \{2; -4; 5\}$, $A(0; 2; 1)$, $B(-1; 2; 3)$; 2) $\vec{F} = \{1; 2; -1\}$, $A(-1; 4; -2)$, $B(2; 3; -1)$.

2.2.23. $\vec{F} = \{2; 2; 4\}$ kuch $A(4; 2; -3)$ qo'yilgan. $B(0; 2; 4)$ nuqtaga nisbatan kuch momentining qiymatini va yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

2.2.24. Kollinear bo'lmagan $\vec{m}$ va $\vec{n}$ vektorlar berilgan. $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{m} + 6\vec{n}$ va $\vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$ vektorlar α ning qanday qiymatida kollinear bo'ladi?

2.2.25. $\vec{a} = \{-1; 3; \alpha\}$ va $\vec{b} = \{\beta; -6; -3\}$ vektorlar α va β ning qanday qiymatlarida kollinear bo'ladi?

2.2.26. Ikkita $\vec{a} = \{2; -3\}$, $\vec{b} = \{-1; 5\}$ vektorlar berilgan. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektorning koordinatalarini toping:

- 1) $\vec{x} \perp \vec{a}$ va $\vec{b} \cdot \vec{x} = 7$;
- 2) $\vec{x} \parallel \vec{a}$ va $\vec{b} \cdot \vec{x} = 17$.

2.2.27. $\vec{a} = \{4; -2; -3\}$ va $\vec{b} = \{0; 1; 3\}$ vektorlarga perpendikulyar, uzunligi 26 ga teng va Oy o'q bilan o'tmas burchak tashkil qiluvchi $\vec{x}$ vektorning koordinatalarini toping.

2.2.28. Quyidagi vektorlar komplanarmi?

- 1) $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{2; 1; 2\}$, $\vec{c} = \{3; -1; -2\}$;
- 2) $\vec{a} = \{2; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{3; -4; 7\}$, $\vec{c} = \{1; 2; -3\}$.

2.2.29. α ning qanday qiymatlarida $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'ladi?

- 1) $\vec{a} = \{1; 1; \alpha\}$, $\vec{b} = \{0; 1; 0\}$, $\vec{c} = \{3; 0; 1\}$;
- 2) $\vec{a} = \{\alpha; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{5; -1; 2\}$, $\vec{c} = \{-1; 5; 4\}$.

2.2.30. Piramida uchlari koordinatalari berilgan. Piramidaning hajmini va D uchidan tushirilgan balandligini toping:

- 1) $A(1; -2; 2)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(-1; -2; 8)$, $D(1; 1; 10)$;
- 2) $A(1; 1; 1)$, $B(2; 0; 2)$, $C(2; 2; 2)$, $D(3; 4; -3)$.

2.2.31. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar berilgan. Bu vektorlar qanday uchlik tashkil etishini aniqlang va qirralari bu vektorlardan iborat bo'lgan parallelepiped hajmini toping:

- 1) $\vec{a} = \{1; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{3; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{-1; 0; 1\}$;
- 2) $\vec{a} = \{1; 3; 3\}$, $\vec{b} = \{-1; 2; 0\}$, $\vec{c} = \{1; 2; -3\}$.

- Tekislikdagi to'g'ri chiziq
- Ikkinchi tartibli chiziqlar
- Tekislik
- Fazodagi to'g'ri chiziq
- Ikkinchi tartibli sirtlar



Rene Dekart
(1596-1650) –
frantsuz faylasufi,
matematigi, mexanigi,
fizigi va fiziologi.

Rene Dekart zamonaviy analitik geometriya va algebraik ramzlarga asos solgan.

Dekart tomonidan analitik geometriyaning yaratilishi egri chiziqlar tenglamalarini biror koordinatalar sistemasida tahlil etish imkonini berdi va funktsiya tushunchasi tomon hal qiluvchi qadam bo'ldi.

ANALITIK GEOMETRIYA

Analitik geometriya- matematikaning bo'limlaridan biri bo'lib, u geometriya bilan algebrani birlashtiradi, ya'ni ayrim geometrik tushunchalarni algebraik tahlil qilish va ayrim algebraik bog'lanishlarni geometrik izohlash imkonini beradi. Bunda asosiy e'tibor ikkita masalaga, xossalriga ko'ra geometrik shaklning tenglamasini keltirib chiqarishga va tenglamasiga ko'ra geometrik shaklning ko'rinishi va xossalarini o'rganishga, qaratiladi.

Fransuz matematigi *Rene Dekart analitik geometriyaning asoschisi* hisoblanadi [7]. Dekart tomonidan 1637 yilda kiritilgan koordinatalar usuli nuqtaning o'rnini biror koordinatalar sistemasiga nisbatan aniqlashga asoslanadi.

3.1. TEKISLIKDAGI TO'G'RI CHIZIQ

3.1.1. Tekislikdagi chiziq

Umumiy boshlang'ich O nuqtaga ega bo'lgan o'zaro perpendikulyar Ox va Oy koordinata o'qlari tekislikda to'g'ri burchakli Oxy koordinatalar sistemasini hosil qiladi.

Oxy koordinatalar sistemasida ikkita x va y sonlari tekislikdagi har qanday M nuqtaning o'rnini to'liq aniqlaydi. Bunda nuqta $M(x; y)$ kabi belgilanadi, x ga M nuqtaning *abssissasi*, y ga M nuqtaning *ordinatasi* deyiladi.

Oxy *tekislikdagi chiziq tenglamasi* deb aynan shu chiziq nuqtalarining x va y koordinatalari orasidagi bog'lanishni aniqlovchi ikki noma'lumli

$$F(x, y) = 0$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Shu kabi, koordinatalari ikki noma'lumli $F(x, y) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi Oxy tekislikning barcha $M(x; y)$ nuqtalari to'plamiga *tekislikda* shu tenglama bilan aniqlanuvchi *chiziq* deyiladi.

Ayrim hollarda tekislikdagi chiziq $y = f(x)$ tenglama bilan beriladi. Bunda chiziq $y = f(x)$ funktsiyaning grafigi deb ataladi.

Tekislikdagi chiziq ikkita $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$ tenglamalar bilan ham berilishi mumkin. Bunda barcha $M(x(t); y(t))$, $t \in T$ nuqtalar to'plami tekislikdagi chiziqni ifodalaydi. $x = x(t)$, $y = y(t)$ funksiyalarga bu chiziqning parametrik tenglamalari, t o'zgaruvchiga parametr deyiladi.

Tekislikdagi chiziqning ikkita $x = x(t)$, $y = y(t)$ parametrik (skalyar) tenglamalarini bitta $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektor tenglama bilan berish mumkin. Bunda t parametr (vaqt) o'zgarishi bilan $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektorning oxiri biror chiziqni chizadi. Bu chiziqqa nuqtaning traektoriyasi, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tenglamaga harakat tenglamasi deyiladi. Bu jumla chiziqning vektor va parametrik tenglamalarining *mexanik ma'nosini* bildiradi.

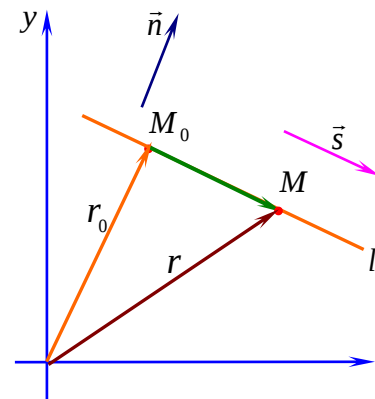
Shunday qilib, tekislikdagi har qanday chiziqqa ikki o'zgaruvchining biror $F(x, y) = 0$ tenglamasi mos keladi va aksincha, ikki o'zgaruvchining har qanday $F(x, y) = 0$ tenglamasiga, umuman olganda, tekislikdagi biror chiziq mos keladi. Bunda «umuman olganda» iborasi aytilganlarda muctasnoga yo'l qo'yilishi mumkinligini bildiradi. Masalan, $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 0$ tenglamaga chiziq emas, balki $M(1; 4)$ nuqta mos keladi; $x^2 + y^2 + 3 = 0$ tenglamaga tekislik nuqtalarining hech bir geometrik o'rni mos kelmaydi.

3.1.2. Tekislikdagi to'g'ri chiziq tenglamalari

To'g'ri chiziqning tekislikdagi o'rni turli parametrlar bilan bir qiymatli aniqlanishi mumkin. *Masalan*, to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqta va to'g'ri chiziqqa perpendikular vektor bilan, to'g'ri chiziqning koordinata o'qlarida ajratgan kesmalari bilan va hokazo. Bunday parametrlar to'g'ri chiziqning tenglamalarini keltirib chiqarish uchun asos bo'ladi. Quyida berilgan parametrlariga ko'ra to'g'ri chiziq tenglamalarini keltirib chiqarish bilan tanishamiz [7,8].

I. To'g'ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0; y_0)$ nuqta va to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan $\vec{n} = \{A; B\}$ vektor berilgan.

l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtani olamiz va $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ vektorni yasaymiz (1-shakl).



1-shakl

Bunda $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$ bo'ladi. Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (3.1.1)$$

(3.1.1) tenglamaga *berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi.

To'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan har qanday vektorga *to'g'ri chiziqning normal vektori* deyiladi.

Demak, $\vec{n} = \{A; B\}$ vektor (3.1.1) tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqning normal vektori bo'ladi.

1.1- misol. $M_1(2;3)$ va $M_2(-1;0)$ nuqtalardan o'tuvchi va $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorga perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Avval $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorini topamiz:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1 - 2; 0 - 3\} = \{-3; -3\}.$$

Bundan $A = -3$, $B = -3$.

Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini (3.1.1) formula bilan tuzamiz:

$$-3(x - (-1)) - 3(y - 0) = 0$$

yoki

$$x + y + 1 = 0.$$

II. To'g'ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0; y_0)$ nuqta va to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan $\vec{s} = \{p; q\}$ vektor berilgan.

l to'g'ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0; y_0)$ va $M(x; y)$ nuqtalardan $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ vektorni yasaymiz (1-shakl).

Bunda $\vec{s}$ va $\overrightarrow{M_0M}$ vektorlar kollinear bo'ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan quyidagini topamiz:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}. \quad (3.1.2)$$

(3.1.2) tenglamaga *berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi.

Shunindek, bu tenglama *to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi* deb ataladi.

To'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan (yoki to'g'ri chiziqda yotuvchi) nolga teng bo'lmagan har qanday vektorga to'g'ri chiziqning *yo'naltiruvchi vektori* deyiladi.

Demak, $\vec{s} = \{p; q\}$ vektor (3.1.2) tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori bo'ladi.

1-izoh. (3.1.2) tenglamadan to'g'ri chiziqning keltirilgan II shartni qanoatlantiruvchi boshqa tenglamalarini hosil qilish mumkin. *Masalan,*

1. (3.1.2) tenglamada

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = t, \quad t \in (-\infty; +\infty)$$

belgilash kiritamiz.

Bundan

$$x = x_0 + tp, \quad y = y_0 + tq \quad (3.1.3)$$

tenglamalar kelib chiqadi, bu yerda t – parametr.

(3.1.3) tenglamalarga *to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalari* deyiladi.

2. Ma'lumki, tekislikdagi chiziqlarning ikkita parametrik (skalyar) tenglamalarini bitta vektor tenglama bilan berish mumkin, ya'ni (3.1.3) tenglamalarni

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \quad (3.1.4)$$

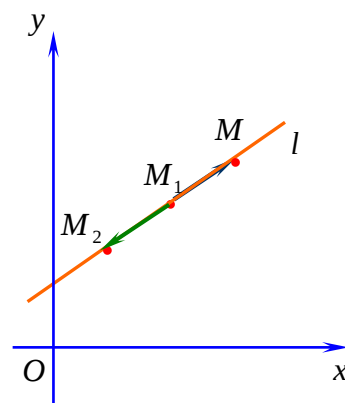
ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\vec{r} = \{x; y\}$, $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0\}$ – mos ravishda $M(x; y)$, $M_0(x_0; y_0)$ nuqtalarning radius vektorlari; $\vec{s} = \{p; q\}$ – to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektori (1-shakl).

(3.1.4) tenglamaga *to'g'ri chiziqlarning vektor tenglamasi* deyiladi.

1.2- misol. $M(-2; 4)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{s} = \{1; -3\}$ vektorga parallel to'g'ri chiziqlarning kanonik, parametrik va vektor tenglamalarini tuzing.

Yechish. To'g'ri chiziqlarning kanonik, parametrik va vektor tenglamalarini (3.1.2), (3.1.3) va (3.1.4) formulalar bilan topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{1} &= \frac{y-4}{-3}; \\ x &= -2 + t, \quad y = 4 - 3t, \quad t \in T; \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + t\vec{s}, \quad \vec{r}_0 = \{-2; 4\}. \end{aligned}$$



2-shakl

III. *To'g'ri chiziqlarda yotuvchi ikkita $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqta berilgan.*

l to'g'ri chiziqlarda yotuvchi ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtani olib, $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$ va $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ vektorlarni yasaymiz (2-shakl). Bunda $\overrightarrow{M_1M}$ va $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorlar kollinear bo'ladi. Shu sababli

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (3.1.5)$$

bo'ladi.

(3.1.5) tenglamaga *berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamasi* deyiladi.

IV. *To'g'ri chiziqlarning Ox va Oy o'qlaridan ajratgan kesmalari a va b berilgan.*

l to'g'ri chiziqlarda yotuvchi ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtani olamiz (3-shakl).

$\triangle CBM$ va $\triangle OBA$ o'xshash. U holda uchburchaklarning o'xshashlik alomatiga ko'ra

$$\frac{CB}{OB} = \frac{CM}{OA} \Rightarrow \frac{OB - OC}{OB} = \frac{OD}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{OB} + \frac{OD}{OA} = 1.$$

Bundan $OC = x$, $OB = a$, $OD = y$, $OA = b$ o'rniga qo'yish bajarib, topamiz:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3.1.6)$$

(3.1.6) tenglamaga *to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi* deyiladi.

1.3- misol. $4x + 3y - 12 = 0$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqni chizmada tasvirlang.

Yechish. Tekislikdagi to'g'ri chiziqni chizish uchun uning ikkita nuqtasini bilish etarli bo'ladi.

To'g'ri chiziq tenglamasida, masalan $x = 0$ deb, $y = 4$ ni, ya'ni $A(0;4)$ nuqtani va shu kabi $B\left(2; \frac{4}{3}\right)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtalarni tutashtirib, berilgan tenglamaga mos to'g'ri chiziqni chizamiz (3-shakl).

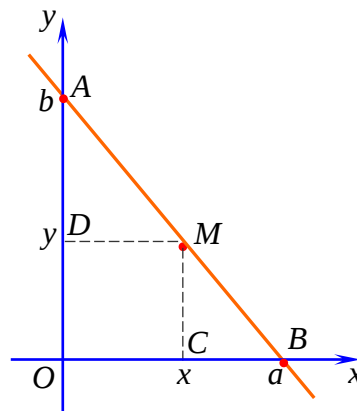
Bu masalani boshqacha, ya'ni to'g'ri chiziq tenglamasini kesmalarga nisbatan tenglamaga keltirib yechish mumkin. Buning uchun tenglamaning ozod hadi (-12) ni o'ng tomonga o'tkazamiz va hosil bo'lgan tenglikning har ikkala tomonini 12 ga bo'lamiz:

$$4x + 3y = 12, \quad \frac{4x}{12} + \frac{3y}{12} = 1$$

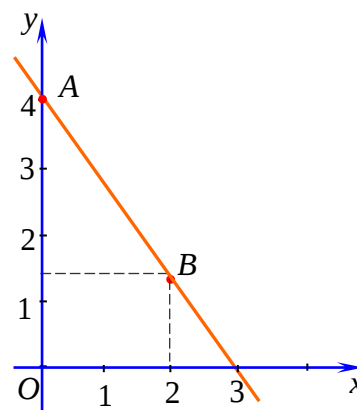
yoki

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1.$$

Bu tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziq Ox o'qidan koordinatalar boshiga nisbatan o'ng tomonga 3 ga teng kesma, Oy o'qidan esa koordinatalar boshiga nisbatan yuqoriga 4 ga teng kesma ajratadi (4-shakl).



3-shakl



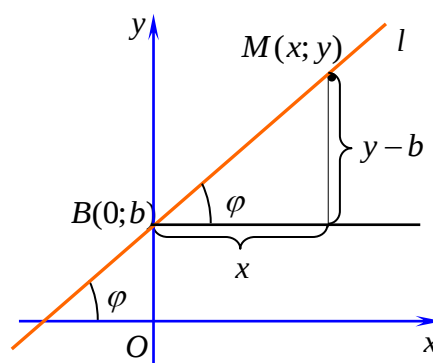
4-shakl

Y. To'g'ri chiziqning og'ish burchagi φ va Oy o'qidan ajratgan kesmasi b berilgan.

Ox o'qning musbat yo'nalishdan berilgan to'g'ri chiziqqa soat strelkasiga teskari yo'nalishda hisoblangan eng kichik φ burchakka *to'g'ri chiziqning og'ish burchagi* deyiladi.

Og'ish burchagining tangensi, ya'ni $k = \operatorname{tg} \varphi$ son *to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti* deb ataladi.

l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtani olamiz va burchak tangensi



5-shakl

ta'rifidan foydalanamiz (5-shakl):

$$\frac{y-b}{x} = \operatorname{tg} \varphi$$

yoki

$$y = \operatorname{tg} \varphi x + b.$$

Bundan

$$y = kx + b. \quad (3.1.7)$$

Bu tenglamaga *to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentli tenglamasi* deyiladi.

2-izoh. (3.1.7) tenglamadan to'g'ri chiziqlarning k burchak koeffitsiyentga ega bo'lgan yana bir tenglamasini keltirib chiqaramiz. Bu to'g'ri chiziq $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tsin. U holda bu nuqtaning koordinatalari (3.1.7) tenglamani qanoatlantiradi: $y_1 = kx_1 + b$.

Bundan $b = y_1 - kx_1$. U holda (3.1.7) tenglamadan topamiz:

$$y = kx - kx_1 + y_1$$

yoki

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (3.1.8)$$

(3.1.8) tenglamaga *berilgan nuqtadan berilgan yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi.

Suningdek bu tenglama *to'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasi* deb ataladi.

VI. To'g'ri chiziq $\vec{n} = \overrightarrow{OP}$ normalining yo'nalishi α va uzunligi p berilgan.

l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x; y)$

nuqtani olamiz.

6-shaklga asosan:

$$\operatorname{Pr}_f \overrightarrow{OP} = \operatorname{Pr}_f \overrightarrow{ON} + \operatorname{Pr}_f \overrightarrow{NM} + \operatorname{Pr}_f \overrightarrow{MP},$$

bu yerda $\operatorname{Pr}_f \overrightarrow{OP} = p$, $\operatorname{Pr}_f \overrightarrow{ON} = x \cos \alpha$,

$\operatorname{Pr}_f \overrightarrow{NM} = y \sin \alpha$, $\operatorname{Pr}_f \overrightarrow{MP} = 0$.

Bundan,

$$p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

yoki

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

(3.1.9)

(3.1.9) tenglamaga *to'g'ri chiziqlarning normal tenglamasi* deyiladi.

Keltirib chiqarilgan (3.1.1)-(3.1.9) tenglamalar asosida ushbu xulosa kelib chaqadi:

x, y o'zgaruvchilarning har qanday birinchi darajali tenglamasi tekislikdagi biror to'g'ri chiziqni ifodalaydi va aksincha, tekislikdagi har qanday to'g'ri chiziq x, y o'zgaruvchilarning biror birinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanadi [9].

Demak, tekislikdagi har bir l to'g'ri chiziq tenglamasini

$$Ax + By + C = 0 \quad (3.1.10)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda C – ozod had; $A^2 + B^2 \neq 0$; $\vec{n} = \{A; B\}$ – to'g'ri chiziqning normal vektori.

(3.1.10) tenglamaga *to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi* deyiladi.

(3.1.10) tenglamada:

1) $A=0$ bo'lsa, tenglama $By + C = 0$ ko'rinishga keladi. Bunda to'g'ri chiziqning normal vektori Ox o'qqa perpendikular bo'ladi. Shu sababli to'g'ri chiziq Ox o'qqa parallel, Oy o'qqa perpendikular bo'ladi. Shu kabi $B=0$ da kelib chiqadigan $Ax + C = 0$ to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel, Ox o'qqa perpendikular bo'ladi;

2) $C=0$ bo'lsa, tenglama $Ax + By = 0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamani $O(0;0)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi. Demak, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi;

3) $A=0$ va $C=0$ bo'lsa, tenglamadan $y=0$ kelib chiqadi. Bu to'g'ri chiziq Ox o'qda yotadi. Shu kabi $B=0$ va $C=0$ da hosil bo'ladigan $x=0$ to'g'ri chiziq Oy o'qda yotadi.

1.4- misol. a ning qanday qiymatlarida $(a^2 + 4a)x + (a - 5)y - 2a + 4 = 0$ to'g'ri chiziq: 1) Ox o'qqa parallel bo'ladi; 2) Ox o'qqa perpendikular bo'ladi; 3) koordinatalar boshidan o'tadi.

Yechish. Misolning shartiga ko'ra: $A = a^2 + 4a$, $B = a - 5$, $C = -2a + 4$.

U holda:

1) $a^2 + 4a = 0$ yoki $a = -4$, $a = 0$ da $A = 0$ bo'ladi. Shu sababli berilgan to'g'ri chiziq Ox o'qqa parallel bo'ladi.

2) $a - 5 = 0$ yoki $a = 5$ da $B = 0$ va berilgan to'g'ri chiziq Ox o'qqa perpendikular bo'ladi.

3) $-2a + 4 = 0$ yoki $a = 2$ da $C = 0$ bo'ladi. Demak, $a = 2$ da to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi.

To'g'ri chiziqning (3.1.1)-(3.1.10) tenglamalaridan har birini boshqalaridan keltirib chiqarish mumkin.

Misol tariqasida (3.1.10) tenglamadan (3.1.9) tenglamani keltirib chiqaramiz. Buning uchun (3.1.10) tenglikning chap va o'ng tomonini

normallovchi ko'paytuvchi deb ataluvchi $M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ songa ko'paytiramiz.

Hosil bo'lgan $\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$ tenglamada

$$\cos \alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

belgilashlar kiritsak, (3.1.9) tenglama kelib chiqadi.

Bunda M ko'paytuvchining ishorasi C koeffitsiyentning ishorasiga qarama-qarshi qilib tanlanadi.

1.5-misol. To'g'ri chiziqlarning $5x - 12y + 8 = 0$ tenglamasini normal ko'rinishga keltiring.

Yechish. Tenglamaning chap va o'ng tomonini $M = -\frac{1}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = -\frac{1}{13}$

(chunki $C > 0$) soniga ko'paytiramiz.

Bundan

$$-\frac{5x}{13} + \frac{12y}{13} - \frac{8}{13} = 0$$

yoki

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

bu yerda $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $p = \frac{8}{13}$.

3.1.3. Tekislikda ikki to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishi

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Tekislikdagi ikki l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak φ bo'lsin.

Bu burchak to'g'ri chiziq tenglamalarining berilishiga ko'ra turli formulalar bilan aniqlanishi mumkin.

I. To'g'ri chiziqlar umumiy tenglamalari

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ va } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

bilan berilgan bo'lsin.

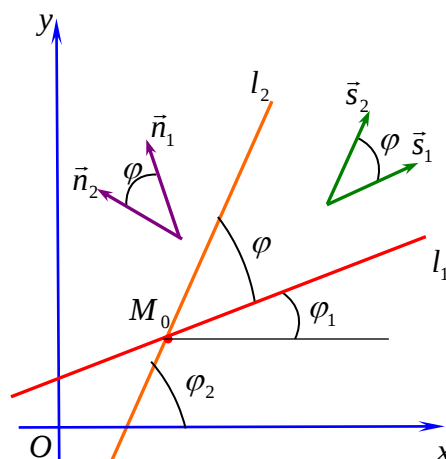
Bunda to'g'ri chiziqlarning $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchak to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng, ya'ni $\varphi = (l_1, l_2) = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ bo'ladi (7-shakl). Ikki vektor orasidagi burchak kosinusi formulasidan topamiz:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (3.1.11)$$

II. To'g'ri chiziqlar kanonik tenglamalari

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{q_1} \text{ va } \frac{x - x_0}{p_2} = \frac{y - y_0}{q_2}$$

bilan berilgan bo'lsin. Bunda $\vec{s}_1 = \{p_1; q_1\}$, $\vec{s}_2 = \{p_2; q_2\}$ bo'ladi.



7-shakl

U holda $\varphi = (\hat{l}_1, \hat{l}_2) = (\hat{\vec{s}}_1, \hat{\vec{s}}_2)$ (7-shakl) ekanini hisobga olib, topamiz:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2} \sqrt{p_2^2 + q_2^2}}. \quad (3.1.12)$$

III. To'g'ri chiziqlar burchak koeffitsiyentli

$$y = k_1 x + b_1 \text{ va } y = k_2 x + b_2$$

tenglamalari bilan berilgan bo'lsin.

7-shaklga ko'ra $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Bundan

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1}$$

yoki

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (3.1.13)$$

kelib chiqadi.

Agar bunda to'g'ri chiziqlardan qaysi biri birinchi va qaysi biri ikkinchi ekani ko'rsatilmadan ular orasidagi o'tkir burchakni topish talab qilinsa, u holda (3.1.13) formulaning o'ng tomoni modulga olinadi, ya'ni

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad (3.1.14)$$

Shunday qilib, to'g'ri chiziqlar tenglamalarining ko'rinishiga qarab ular orasidagi burchak (3.1.11)-(3.1.13) formulalardan biri bilan topiladi.

1.6-misol. $y = -4x + 1$ va $5x - 3y - 7 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Birinchi tenglamaga ko'ra $k_1 = -4$. Ikkinchi tenglamadan topamiz:

$$5x - 3y - 7 = 0, \quad y = \frac{5}{3}x - \frac{7}{3}, \quad \text{bunda } k_2 = \frac{5}{3}.$$

U holda

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{5}{3} - (-4)}{1 + (-4) \cdot \frac{5}{3}} = -1.$$

$$\text{Demak, } \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik sharti

Tekislikdagi ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik shartlarini ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulalaridan keltirib chiqaramiz.

$l_1 \perp l_2$ bo'lsin. U holda $\cos \varphi = 0$ va (3.1.11) tenglikdan topamiz:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (3.1.15)$$

Shu kabi (3.1.12) tenglikdan

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0 \quad (3.1.16)$$

kelib chiqadi.

$$(3.1.13) \text{ tenglikdan } ctg\varphi = \frac{1+k_1 k_2}{k_1 - k_2}.$$

U holda $l_1 \perp l_2$ da $ctg\varphi = 0$ yoki

$$1 + k_1 k_2 = 0 \quad (3.1.17)$$

bo'ladi.

Demak, to'g'ri chiziqlar tenglamalarining ko'rinishiga qarab ularning perpendikular bo'lishi (3.1.15)-(3.1.17) shartlardan biri bilan aniqlanadi.

Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti

I. l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsin. U holda ularning normal vektorlari $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ kollinear bo'ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan ikki to'g'ri chiziqning parallellik shartini topamiz:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (3.1.18)$$

II. Agar l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, u holda ularning yo'naltiruvchi vektorlari $\vec{s}_1 = \{p_1; q_1\}$ va $\vec{s}_2 = \{p_2; q_2\}$ kollinear bo'ladi.

Bundan

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} \quad (3.1.19)$$

III. $l_1 \parallel l_2$ bo'lganida ular orasidagi burchak uchun $tg\varphi = 0$ bo'ladi. U holda (3.1.14) tenglikdan topamiz:

$$k_1 = k_2 \quad (3.1.20)$$

Shunday qilib, (3.1.18)-(3.1.20) shartlardan biri to'g'ri chiziqlar tenglamalarining berilishiga ko'ra ularning parallel bo'lishini aniqlaydi.

1.7-misol. $M_0(2;1)$ nuqtadan o'tuvchi va $2x + 3y + 4 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. To'g'ri chiziq tenglamasini $Ax + By + C = 0$ ko'rinishda izlaymiz.

To'g'ri chiziq $M_0(2;1)$ nuqtadan o'tgani sababli $2A + B + C = 0$ va $2x + 3y + 4 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgani uchun $2A + 3B = 0$ bo'ladi.

Bu tenglamalarni birgalikda yechib topamiz: $A = -\frac{3}{4}C$, $B = \frac{1}{2}C$.

Ava B koeffitsiyentlarni izlanayotgan tenglamaga qo'yamiz:

$$-\frac{3}{4}Cx + \frac{1}{2}Cy + C = 0.$$

Bundan

$$(-3x + 2y + 4)C = 0 \text{ yoki } 3x - 2y - 4 = 0.$$

Ikki to'g'ri chiziqlar kesishishi

To'g'ri chiziqlar umumiy tenglamalari

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ va } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

bilan berilgan bo'lsin va $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada kesishsin (6-shakl).

U holda $M_0(x_0; y_0)$ nuqtaning koordinatalari har ikkala tenglamani qanoatlantiradi. Shu sababli ikki to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi koordinatalari

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \end{cases} \quad (3.1.21)$$

sistemadan topiladi.

Bunda $M_0(x_0; y_0)$ kesishish nuqtasi orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (3.1.22)$$

tenglama bilan aniqlanadi, bu yerda λ – sonli ko'paytuvchi.

1.8-misol. $2x - y - 2 = 0$ a to'g'ri chiziq bo'ylab yo'naltirilgan yorug'lik nuri $x - 2y + 2 = 0$ to'g'ri chiziqda sinadi va qaytadi. Qaytuvchi nur yo'nalgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Yorug'lik nurining qaytish nuqtasi $2x - y - 2 = 0$ va $x - 2y + 2 = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo'ladi.

Bu nuqta $M(x; y)$ bo'lsin. Uni quyidagi sistemadan topamiz:

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0, \\ x - 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Bundan $M(2; 2)$.

Yorug'lik nuri sinadigan va yo'nalgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak tangensini topamiz. Berilgan to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlari

$k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = 2$ bo'ladi. Bundan

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + \frac{1}{2} \cdot 2} = -\frac{3}{4}.$$

Bu son yorug'lik nuri qaytuvchi va cinuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak tangensiga teng bo'ladi.

U holda

$$-\frac{3}{4} = \frac{k - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot k},$$

bu yerda k – nur qaytuvchi to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyenti.

Bundan $k = -\frac{2}{11}$.

Demak, izlanayotgan to'g'ri chiziq uchun: $M(2;2)$, $k = -\frac{2}{11}$.

Bu parametrlar bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzaniz:

$$y - 2 = -\frac{2}{11}(x - 2)$$

yoki

$$2x + 11y - 18 = 0.$$

Ikki to'g'ri chiziqning ustma-ust tushishi

l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar umumiy tenglamalari

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

bilan berilgan bo'lsin va ustma-ust tushsin.

Bunda:

-birinchidan $l_1 \parallel l_2$ bo'ladi va $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda$ tengliklardan $A_1 - \lambda A_2 = 0$,

$B_1 - \lambda B_2 = 0$ kelib chiqadi;

-ikkinchidan l_1 to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi, jumladan $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasi, l_2 to'g'ri chiziqda ham yotadi, ya'ni

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$$

bo'ladi.

Bu tengliklarning ikkinchisini λ ga ko'paytiramiz va birinchidan ayiramiz:

$$(A_1 - \lambda A_2)x_0 + (B_1 - \lambda B_2)y_0 + (C_1 - \lambda C_2) = 0.$$

Bundan $C_1 = \lambda C_2$ kelib chiqadi.

Demak, to'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushish sharti

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (3.1.23)$$

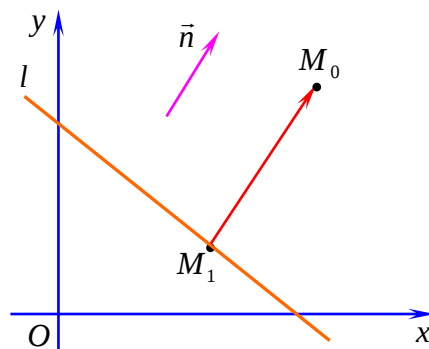
tengliklar bilan ifodalanadi.

3.1.4. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

Nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning uzunligiga *nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa* deyiladi.

$M_0(x_0; y_0)$ nuqta va $Ax + By + C = 0$ tenglama bilan l to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan l to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning asosini $M_1(x_1; y_1)$ bilan belgilaymiz (8-shakl).

U holda $\overrightarrow{M_1M_0} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}$ va $M_1(x_1; y_1)$ nuqta l to'g'ri chiziqda yotgani sababli $Ax_1 + By_1 + C = 0$, ya'ni $C = -Ax_1 - By_1$ bo'ladi.



8-shakl

$\vec{n} = \{A; B\}$ vektorning l to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lishi ma'lum. Shu sababli M_0 nuqtadan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani vektorning o'qdagi proeksiyasining xossaligidan foydalanib topamiz:

$$d = \left| \text{Pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_0} \right| = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Shunday qilib, *nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3.1.24)$$

formula bilan topiladi.

1.9-misol. $3x + 4y - 4 = 0$ va $6x + 8y + 5 = 0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. $3x + 4y - 4 = 0$ to'g'ri chiziqda ixtiyoriy, masalan $M(0;1)$ nuqtani olamiz. U holda berilgan parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi d masofa $M(0;1)$ nuqtadan $6x + 8y + 5 = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaga teng bo'ladi. Uni (3.1.24) formula bilan hisoblaymiz:

$$d = \frac{|6 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{13}{10} (u.b.).$$

3.1. Mashqlar

3.1.1. To'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentini va koordinata o'qlarida ajratgan kesmalarini toping:

$$1) 3x + 4y - 12 = 0; \quad 2) x = 3y - 2; \quad 3) \frac{y+1}{2} = \frac{x-3}{4}; \quad 4) \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = \frac{1}{2}.$$

3.1.2. To'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing: 1) $M_1(2;-3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n} = \{3;4\}$ normal vektorga ega bo'lgan; 2) $M_2(-2;-3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{s} = \{-1;3\}$ yo'naltiruvchi vektorlarga ega bo'lgan; 3) $M_3(-2;3)$ nuqtadan o'tuvchi Ox o'qqa perpendikular bo'lgan; 4) $M_4(3;2)$ nuqtadan o'tuvchi Oy o'qda $b = 5$ ga teng kesma ajratuvchi.

3.1.3. Tenglamalardan qaysilari to'g'ri chiziqning normal tenglamasini ifodalaydi?

$$1) y + 2 = 0; \quad 2) x - 2,5 = 0; \quad 3) \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0; \quad 4) \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 2 = 0.$$

3.1.4. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalarini va ular orasidagi burchakni toping:

$$1) 5x - y - 3 = 0, \quad 2x - 3y + 4 = 0; \quad 2) y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}, \quad 4x + 3y - 5 = 0;$$

$$3) \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{1}, \quad x - 3y + 9 = 0; \quad 4) \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{5}, \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{3}.$$

3.1.5. m va n ning qanday qiymatlarida $mx+9y+n=0$ va $4x+my-2=0$ to'g'ri chiziqlar: 1) parallel bo'ladi; 2) ustma-ust tushadi; 3) perpendikular bo'ladi?

3.1.6. m ning qanday qiymatlarida to'g'ri chiziqlar: 1) parallel bo'ladi; 2) perpendikular bo'ladi? 1) $x-my+5=0$, $2x+3y+3=0$; 2) $2x-3y+4=0$, $mx-6y+7=0$.

3.1.7. $x+y-7=0$ to'g'ri chiziqda koordinatalari $2x-y+4=0$ tenglik bilan bog'langan nuqtani toping.

3.1.8. $A(4;2)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlari bilan yuzi 2 kvadrat birlikka teng uchburchak ajratuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

3.1.9. $A(-3;2), B(5;-2), C(0;4)$ bo'lsa, ABC uchburchakda BD balandlik tenglamasini tuzing.

3.1.10. $A(-2;0), B(5;3), C(1;-1)$ bo'lsa, ABC uchburchakda AD mediana tenglamasini tuzing.

3.1.11. $2x-y+3=0$ va $x+y-2=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o'tuvchi va $3x-4y-7=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

3.1.12. To'g'ri burchakli teng yonli uchburchak gipotenuzasi orqali o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi $3x+2y-6=0$ dan va uchlaridan biri $A(-1;-2)$ nuqtadan iborat. Uchburchakning katetlari tenglamalarini tuzing.

3.1.13. Parallelogrammning ikki uchi $A(1;1)$ va $B(2;-2)$ nuqtalarda yotadi va diagonallari $(-1;0)$ nuqtada kesishadi. Parallelogrammning tomonlari tenglamalarini tuzing.

3.1.14. Agar $A(5;3), B(1;1), C(3;5), D(6;6)$ to'rtburchakning uchlari bo'lsa, uning diagonallari kesishish nuqtasini va diagonallari orasidagi burchakni toping.

3.1.15. Uchburchakning uchlari berilgan: $A(8;3), B(2;5), C(5;-1)$. Uchburchak medianalarining kesishish nuqtasidan o'tuvchi va $x+y-2=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

3.1.16. Burchak tomonlaridan birining tenglamasi $4x-3y+9=0$ dan va bissektrisasining tenglamasi $x-7y+21=0$ dan iborat. Burchak ikkinchi tomonining tenglamasini tuzing.

3.1.17. Uchburchakning ikki uchi $A(5;1), B(1;3)$ va medianalari kesishish nuqtasi $M(3;4)$ berilgan. Uchburchak tomonlarining tenglamalarini tuzing.

3.1.18. Uchburchakning ikki uchi $A(2;-2), B(-6;2)$ va balandliklari kesishish nuqtasi $M(1;2)$ berilgan. Uchburchakning C uchidan tushirilgan balandlik tenglamasini tuzing.

3.1.19. Uchburchak tomonlarining o'rtalari berilgan: $M_1(1;-3), M_2(2;-2), M_3(-3;4)$. Uchburchak tomonlarining tenglamalarini tuzing.

3.1.20. Parallelogrammning ikki tomoni $2x+y-2=0$, $x-y+17=0$ to'g'ri chiziqlarda yotadi va diagonallari $M(-3;5;3;5)$ nuqtada kesishadi. Parallelogramm qolgan tomonlari yotgan to'g'ri chiziqlarning tenglamalarini tuzing.

3.1.21. $x-2y+5=0$ to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgan yorug'lik nuri $3x-2y+7=0$ to'g'ri chiziqda sinadi va qaytadi. Qaytuvchi nur yo'nalgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

3.1.22. Uchlari $A(2;3), B(-1;4), C(5;5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak og'irlik marksazidan o'tuvchi va AC tomonga parallel to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

3.1.23. Bir uchi $A(3;4)$ nuqtada bo'lgan va bir tomoni $2x+5y+3=0$ to'g'ri tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqda yotgan kvadratning yuzini toping.

3.1.24. $4x-3y+8=0$ va $8x-6y-7=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

3.1.25. Kvadratning ikki tomoni $5x+12y-61=0$ va $5x+12y+17=0$ tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlarda yotadi. Kvadrat diagonalining uzunligini toping.

3.1.26. $A(2;4)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinatalar boshidan 2 birlik masofada yotuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

3.1.27. $A(-2;3)$ nuqtadan o'tuvchi va $B(5;-1), C(3;7)$ nuqtalardan teng uzoqlikda yotuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

3.1.28. $M(-8;12)$ nuqtaning $A(-5;1)$ va $B(2;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqdagi proyeksiyasini toping.

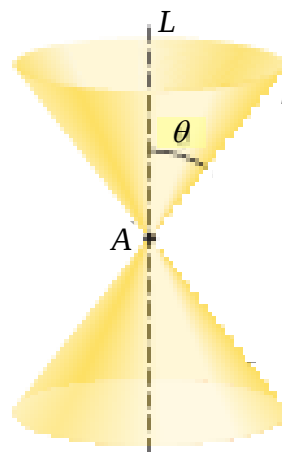
3.1.29. $3x+4y-7=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan va $A(3;-1)$ nuqtadan 3 birlik masofada yotuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

3.2. IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR

Oxy koordinatalar sistemasida x, y o'zgaruvchilarning ikkinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanuvchi chiziq tekislikdagi *ikkinchi tartibli chiziq* deyiladi.

Har qanday ikkinchi tartibli chiziqni doiraviy konusning tekislik bilan kesishish chizig'i sifatida hosil qilish mumkin [9]. Shu sababli ikkinchi tartibli chiziqlar *konus kesimlar* deb ham ataladi.

Berilgan l to'g'ri chiziqni uni kesuvchi boshqa bir L to'g'ri chiziq atrofida o'zgarmas θ burchak ostida aylantirish natijasida hosil qilingan sirt *doiraviy konus* deyiladi (9-shakl). Bunda l to'g'ri chiziqqa *konusning yasovchisi*, fiksirlangan L to'g'ri chiziqqa *konusning o'qi*, fiksirlangan A nuqtaga *konusning uchi*, konusning A nuqta bilan ajratilgan qismlariga *konusning pallalari* deyiladi.



9-shakl

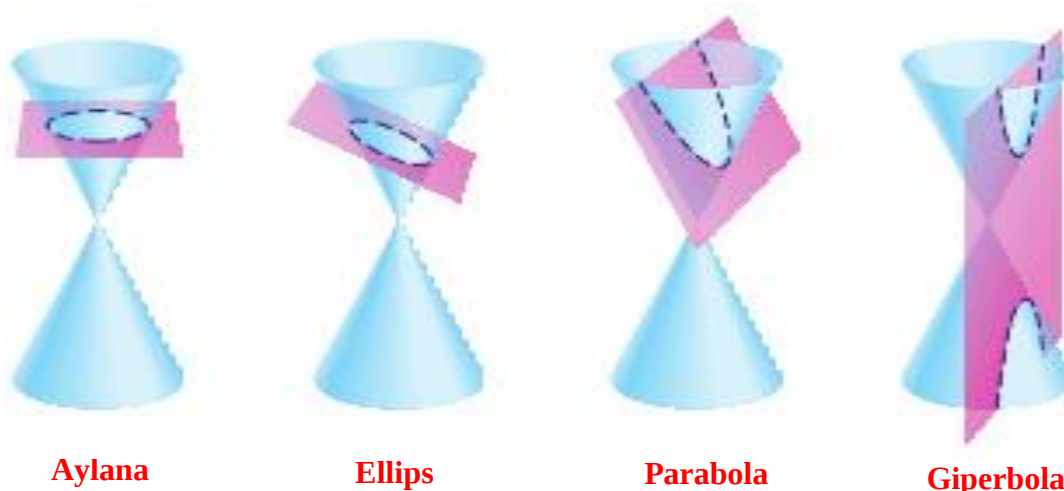
Agar konus tekislik bilan kesilganida (10-shakl) [9]:

- tekislik konus o'qiga perpendikular bo'lsa, kesimda *aylana* hosil bo'ladi;
- tekislik konus o'qiga perpendikular bo'lmay, konusning faqat bitta pallasini kessa va uning yasovchilaridan birortasiga parallel bo'lmasa, kesimda *ellips* hosil bo'ladi;

- tekislik konus yasovchilaridan biriga parallel ravishda uning pallalaridan birini kessa, kesimda *parabola* hosil bo‘ladi;

- tekislik konusning ikkala pallasini kessa, kesimda *giperbola* hosil bo‘ladi.

Konusning A uchidan o‘tuvchi tekislik mavhum konus kesimlarni - nuqtani, to‘g‘ri chiziqni, to‘g‘ri chiziqlar juftini hosil qilishi mumkin.



10-shakl

Ikkinchi tartibli chiziqlar fan va texnikaning ko‘p sohalarida keng qo‘llaniladi. Bunga misollar keltiramiz.

1. Ma’lumki, avtomobil g‘ildiraklari aylana shaklida yasaladi (11-shakl).

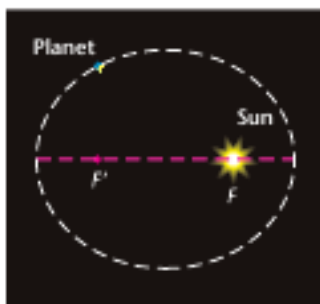
2. Quyosh sistemasining planetalari quyosh joylashgan umumiy fokusga ega ellipslar bo‘yicha harakat qiladi (12-shakl).

3. Agar parabola fokusiga yorug‘lik manbai joylashtirilsa, nurlar uning o‘qiga parallel ravishda qaytadi. Projektorning tuzilishi bu xossaga asoslangan (13-shakl).

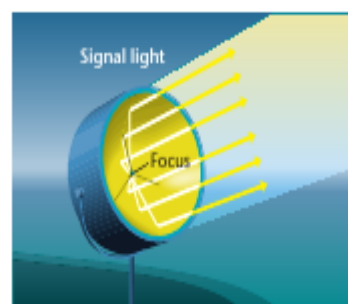
4. Mexanikada isbot qilinganidek, yer yuzidan gorizontga qarab burchak ostida $v_0 = 11,2 \text{ km/c}$ (ikkinchi kosmik tezlik) boshlang‘ich tezlik bilan chiqarilgan raketa parabola bo‘ylab yer yuzidan cheksiz uzoqlashsa, $v_0 > 11,2 \text{ km/c}$ boshlang‘ich tezlik bilan chiqarilgan raketa giperbola bo‘ylab yer yuzidan cheksiz uzoqlashadi, $v_0 < 11,2 \text{ km/c}$ boshlang‘ich tezlik bilan chiqarilgan raketa esa yerga qaytib tushadi yoki urning sun’iy yo‘ldoshi bo‘lib qoladi.



11-shakl



12-shakl



13-shakl

3.2.1. Aylana

1-ta'rif. Tekislikda markaz deb ataluvchi berilgan nuqtadan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga *aylana* deyiladi.

Tekislikda $M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan R masofada yotuvchi nuqtalarni qaraymiz. Bu nuqtalardan biri $M(x; y)$ nuqta bo'lsin (14-shakl).

Aylana ta'rifiga ko'ra $|M_0M| = R$. Bu tenglikka ikki nuqta orasidagi masofa formulasini qo'llaymiz:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Bundan

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (3.2.1)$$

(3.2.1) tenglamaga *aylananing kanonik tenglamasi* deyiladi. Bunda $M_0(x_0; y_0)$ nuqta *aylana markazi*, R masofa *aylana radiusi* deb ataladi.

Xususan, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ da (3.2.1) tenglamadan topamiz:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) tenglama markazi koordintalar boshida yotuvchi va radiusi R ga teng aylanani aniqlaydi.

2.1-misol. Koordinatalari $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi $M(x; y)$ nuqta aylana nuqtasi bo'lishini ko'rsating.

Yechish. $M(x; y)$ nuqta koordinatalarining har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz va hadlab qo'shamiz:

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) = R^2$$

yoki

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Demak, koordinatalari $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in R$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi $M(x; y)$ nuqta markazi koordintalar boshida yotuvchi va radiusi R ga teng aylanada yotadi.

Aylanani aniqlovchi ushbu

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \quad t \in [0; 2\pi] \end{cases} \quad (3.2.3)$$

tenglamalar sistemasiga *aylananing parametrik tenglamalari* deyiladi.

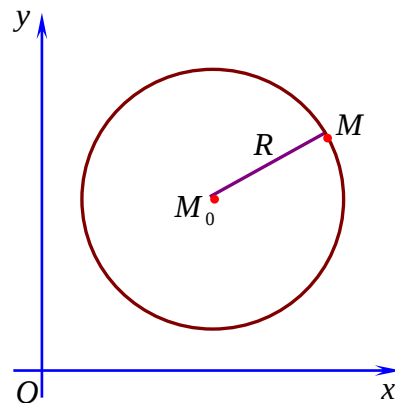
2.2-misol. $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi aylananing markazi va radiusini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning chap tomonida x va y ga nisbatan to'la kvadrat ajratamiz:

$$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 5 = 0$$

yoki

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2.$$



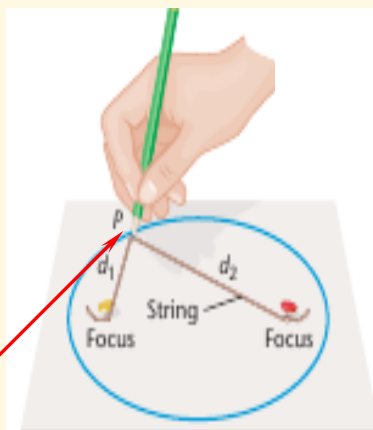
14-shakl

Bu tenglama markazi $M_0(-4;2)$ nuqtada yotuvchi va radiusi $R=5$ ga teng aylanani ifodalaydi.

2.3.2. Ellips

2-ta'rif. Tekislikda fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalarning yig'indisi o'zgarmas kattalikka teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga *ellips* deyiladi.

Ta'rif asosida ellipsni quyidagicha chizish mumkin [9]. Bir bo'lak karton qog'ozi olinadi va unga ikkita tugmali mix (knopka) joylanadi. Ular ellipsning fokuslarini ifodalaydi. Ikkita mix orasidagi masofadan uzunroq ip olinadi va uning uchlari mixlarga mustahkamlanadi. Bu ip o'zgarmas $2a$ kattalikni ifodalaydi. Keyin qalam olinadi va uning uchi bilan ip tarang tortiladi. Qalamning uchi kartonga tekkiziladi va ipni tarang saqlagan holda qalam harakatlantiriladi. Natijada qalamning uchi ellipsni chizadi.



F_1 va F_2 ellipsning fokuslari, M ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $F_1F_2 = 2c$, $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ belgilashlar kiritamiz.

Ellipsning ta'rifiga ko'ra $F_1M + F_2M = 2a$, ya'ni

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad (3.2.4)$$

bu yerda a – o'zgarmas son bo'lib, $a > c$.

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o'q fokuslardan, Oy o'q F_1F_2 kesmaning o'rtasidan o'tadigan qilib tanlaymiz (15-shakl).

U holda $F_2(-c;0)$ va $F_1(c;0)$ bo'ladi.

M nuqtaning koordinatalari x va y bo'lsin deylik, ya'ni $M(x;y)$.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

r_1 va r_2 ning bu ifodalarini (3.2.4) tenglikka qo'yib, almashtirishlar bajaramiz:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$(x-c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2,$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2,$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc,$$

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

$b^2 = a^2 - c^2$ (chunki $a > c$) belgilash kiritib, topamiz:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

yoki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.2.5)$$

(3.2.5) tenglamaga *ellipsning kanonik tenglamasi* deyiladi.

2.3-misol. $x = acost, y = b\sin t$ tengliklar ellips nuqtasini aniqlashini ko'rsating.

Yechish. $x = acost, y = b\sin t, t \in R$ tengliklardan topamiz:

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{b} = \sin t.$$

U holda

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

ya'ni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Demak, $x = acost, y = b\sin t, t \in R$ tengliklar ellips nuqtasini aniqlaydi.

Ellipsni aniqlovchi ushbu

$$\begin{cases} x = acost, \\ y = b\sin t, \quad t \in [0; 2\pi] \end{cases} \quad (3.2.6)$$

tenglamalar sistemasiga *ellipsning parametrik tenglamalari* deyiladi.

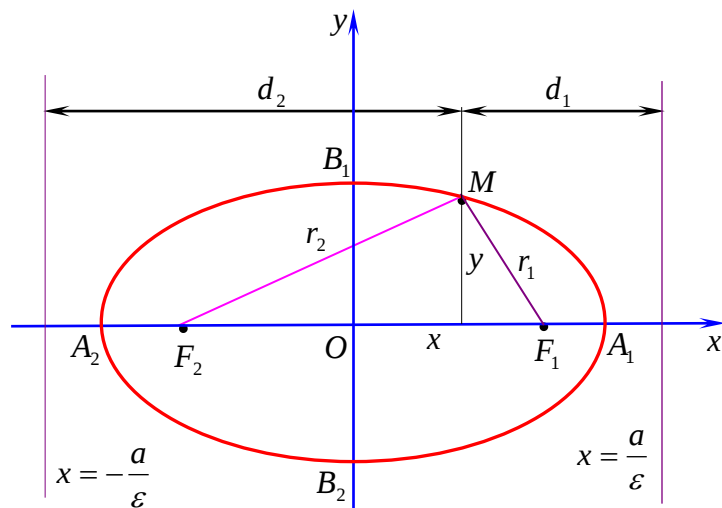
Ellipsning shaklini uning kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz.

(3.2.5) tenglikda x va y ning faqat juft darajalari qatnashgani uchun ellips Ox, Oy o'qlarga va $O(0;0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shu sababli (3.2.5) tenglamani $x \geq 0, y \geq 0$ da (I-chorakda) tekshirish etarli bo'ladi.

I-chorakda (3.2.5)

tenglamadan $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

kelib chiqadi. Bunda x koordinata 0 dan a gacha o'sganida y koordinata b dan 0 gacha kamayadi. Ellipsning qolgan chorakdagi shaklini koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik qilib chizamiz (15-shakl).



15-shakl

Ellipsda $O(0;0)$ nuqtaga markaz, $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalarga uchlar, A_1A_2 , B_1B_2 kesmalarning $2a$, $2b$

114 Ikkinchi tartibli chiziqlar

uzunliklariga mos ravishda katta va kichik o'qlar, a, b sonlarga mos ravishda katta va kichik yarim o'qlar, F_1M , F_2M kesmalarning r_1, r_2 uzunliklariga fokal radiuslar deyiladi.

Ellipsning shakli $\frac{b}{a}$ nisbatga bog'liq bo'ladi, ammo ellipsning shaklini $\frac{c}{a}$ nisbat yordamida tekshirish qulaylikka ega.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ kattalikka *ellipsning ekstsentrtsiteti* deyiladi. Bunda $0 < \varepsilon < 1$, chunki $0 < c < a$.

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ dan } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}, \text{ ya'ni } \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Demak, $\varepsilon \rightarrow 1$ da $\frac{b}{a} \rightarrow 0$, ya'ni b kichiklashib, ellips Oy o'qiga parallel ravishda Ox o'qqa tomon siqilib boradi, aksincha $\varepsilon \rightarrow 0$ da $\frac{b}{a} \rightarrow 1$, ya'ni ellips aylanaga yaqinlashib boradi.

Fokuslari Oy o'qida va markazi koordinatalar boshda yotuvchi ellipsning kanonik tenglamalari shu kabi aniqlanadi. Har ikkala hol uchun ellipsning tenglamalarini va asosiy xossalarini keltiramiz [9].

Markazi $O(0;0)$ nuqtada bo'lgan ellipsning kanonik tenglamalari va asosiy xossalari

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b > 0$

Katta o'q Ox da yotadi
va $2a$ ga teng

Kichik o'q Oy da yotadi
va $2b$ ga teng

Fokuslar: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

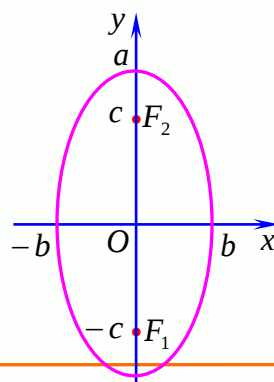
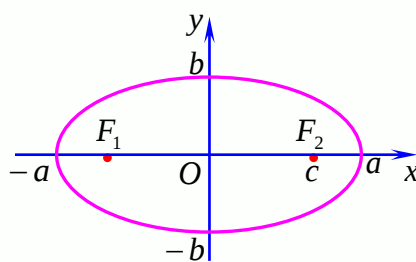
2. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad a > b > 0$

Katta o'q Oy da yotadi
va $2a$ ga teng

Kichik o'q Ox da yotadi
va $2b$ ga teng

Fokuslar: $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$



$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ to'g'ri chiziqlar *ellipsning direktrisalari* deb ataladi.

Ellipsning M nuqtasidan direktrisalargacha bo'lgan d_1 va d_2 masofalar uchun ushbu

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

tengliklar bajariladi (15-shakl).

Bu tengliklardan ellipsning fokal radiuslari uchun

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x$$

formulalar hosil qilinadi.

Agar $a = b$ bo'lsa, u holda (3.2.5) tenglamadan $x^2 + y^2 = a^2$ tenglama, ya'ni markazi koordinata boshida yotuvchi va radiusi a ga teng aylana tenglamasi kelib chiqadi. Demak, aylana ellipsning xususiy holi hisoblanadi.

2.4-misol. $4x^2 + 9y^2 = 144$ ellipsning o'qlari uzunliklarini, fokuslarining koordinatalarini va eksentrisitetini toping.

Yechish. Ellipsning tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Bundan $a^2 = 36$, $b^2 = 16$. Demak, $a = 6$, $b = 4$, $2a = 12$, $2b = 8$.

Shunday qilib, ellips o'qlarining uzunliklari mos ravishda 12 va 8 ga teng. a va b ni bilgan holda c ni aniqlaymiz:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}.$$

Bundan fokuslarning koordinatalarini va eksentrisitetni topamiz:

$$F_{21}(2\sqrt{5};0), \quad F_2(-2\sqrt{5};0);$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3.2.3. Giperbola

3-ta'rif. Tekislikda fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqttagacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduli o'zgarmas kattalikka teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga *giperbola* deyiladi.

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o'q F_1 va F_2 fokuslardan, Oy o'q F_1F_2 kesmaning o'rtasidan o'tadigan qilib tanlaymiz (18-shakl).

$M(x;y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $F_1F_2 = 2c$, $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ belgilashlar kiritamiz.

Giperbolaning tarifi ko'ra

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad (3.2.7)$$

bu yerda a – o'zgarmas son bo'lib, $a < c$.

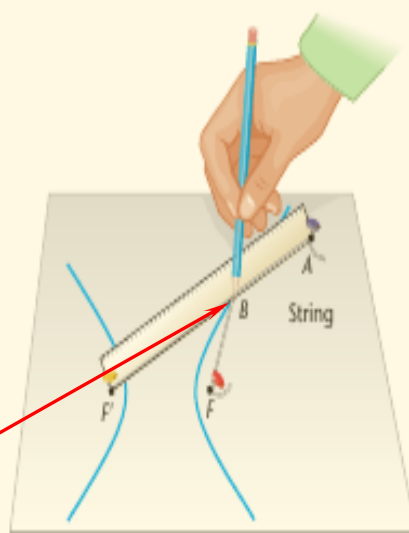
(3.2.7) ifodada (3.2.4) ifodada bajarilgan almashtirishlar kabi almashtirishlar bajarib, quyidagi tenglamani keltirib chiqaramiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.2.8)$$

bu yerda $b^2 = c^2 - a^2$.

(3.2.8) tenglamaga *giperbolaning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Ta'rif asosida giperbolani quyidagicha chizish mumkin [9]. Bir bo'lak karton qog'ozi olinadi va unga ikkita tugmali mix joylanadi. Ular giperbolaning fokuslarini ifodalaydi. O'lchov chizg'ichi olinadi va uning bir uchi fokusga erkin aylanadigan qilib biriktiriladi. Chizg'ich uzunligidan kaltaroq ip olinadi va uning bir uchi ikkinchi fokusga, ikkinchi uchi chizg'ichning A nuqtasiga mustahkamlanadi. Keyin qalam olinadi va uning uchi bilan ipni chizg'ichning B nuqtasiga tortiladi. Qalamning uchi kartonga tekkiziladi va ipni tarang saqlagan holda qalam harakatlantiriladi. Natijada qalamning uchi giperbolaning bir tarmog'ini chizadi. Giperbolaning ikkinchi tarmog'ini chizish uchun chizg'ich bilan ipning holati o'zgartiriladi.



Bu chiziq giperbolaning ta'rifiga mos kelishi uchun

$$BF' - BF = BF' + BA - BF - BA = AF - (BF + FA) = \text{const}$$

shartning bajarilishi ta'minlanishi kerak, bu yerda AF – chizg'ichning uzunligi; $(BF + FA)$ – ipning uzunligi.

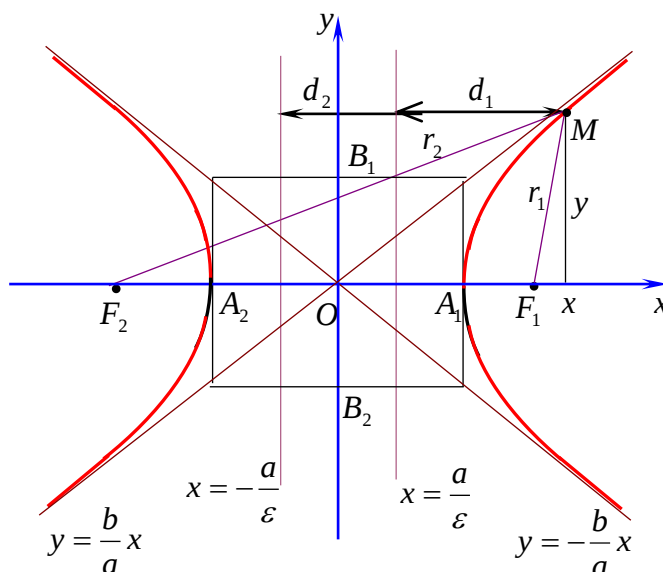
Giperbolaning shaklini uning kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz.

(3.2.8) tenglikda x va y ning faqat juft darajalari qatnashgani uchun giperbola ellips kabi Ox, Oy o'qlarga va $O(0;0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shu sababli (3.2.8) tenglamani $x \geq 0, y \geq 0$ da (I-chorakda) tekshiramiz.

I-chorakda (3.2.8)

tenglamadan $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$

kelib chiqadi. Bunda $x \geq a$ va x koordinata a dan boshlab o'sishi bilan y koordinata ham o'sib boradi, ya'ni $M(x; y)$ nuqta cheksizlikka intiladi. Bu intilish qanday yuz berishini ko'rsatish uchun koordina-



16-shakl

talar boshidan o'tuvchi va burchak koeffitsiyenti $k = \frac{b}{a}$ ga teng bo'lgan

$y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqni qaraymiz. Bu chiziq ushbu xossaga ega: M nuqta giperbola bo'ylab harakat qilib koordinata boshidan cheksiz uzoqlashgani sari bu to'g'ri chiziqqa juda yaqinlashib boradi, lekin uni kesib o'tmaydi, ya'ni asimptotik yaqinlashadi.

Shunday qilib, giperbola I-chorakda $A_1(a;0)$ nuqtadan o'tib, $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqqa asimptotik yaqinlashgani holda o'ngga va yuqoriga qarab o'sib boradi.

Giperbolaning qolgan choraklardagi shaklini koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik qilib chizamiz (16-shakl). Shunday qilib, giperbola ikki qismdan iborat bo'ladi. Bu qismlarga giperbolaning tarmoqlari deyiladi.

$y = \pm \frac{b}{a}x$ tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlarga *giperbolaning asimptotalari* deyiladi.

Giperbolada $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalarga uchlar, A_1A_2 kesmaning $2a$ uzunligiga haqiqiy o'q, B_1B_2 kesmaning $2b$ uzunligiga mavhum o'q, a , b sonlarga mos ravishda haqiqiy va mavhum yaim o'qlar, F_1M , F_2M kesmalarning r_1 , r_2 uzunliklariga fokal radiuslar deyiladi.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ kattalikka *giperbolaning eksentrisiteti* deyiladi.

Bunda $\varepsilon > 1$, chunki $c > a$.

$$b^2 = c^2 - a^2 \text{ dan } \frac{b}{a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1}, \text{ ya'ni } \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Demak, eksentrisitet birga qanchalik yaqin bo'lsa, $\frac{b}{a}$ shunchalik kichik bo'ladi, ya'ni $\varepsilon \rightarrow 1$ da $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ va giperbola haqiqiy o'qi tomon siqilib boradi,

aksincha ε kattalashgan sayin $\frac{b}{a}$ ham kattalashadi va giperbolaning tarmoqlari

kengayib boradi. $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ to'g'ri chiziqlar *giperbolaning direktrisalari* deb ataladi.

Giperbolaning M nuqtasidan direktrisalargacha bo'lgan d_1 va d_2 masofalar uchun ushbu

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

tengliklar bajariladi (16-shakl).

Bu tengliklardan giperbolaning fokal radiuslari uchun ushbu

$$x > 0 \text{ bo'lganda } r_1 = \varepsilon x - a, \quad r_2 = \varepsilon x + a;$$

$$x < 0 \text{ bo'lganda } r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x$$

formulalar hosil qilinadi.

Fokuslari Oy o'qida va markazi koordinatalar boshda yotuvchi giperbolaning kanonik tenglamas shu kabi aniqlanadi [9].

Markazi $O(0;0)$ nuqtada bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamalari va asosiy xossalari

$$1. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Haqiqiy o'q Ox da yotadi

va $2a$ ga teng

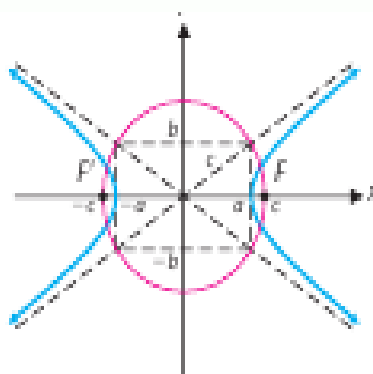
Mavhum o'q Oy da yotadi

va $2b$ ga teng

Fokuslar: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Asimptotalari: $y = \pm \frac{b}{a} x$



$$2. \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Haqiqiy o'q Oy da yotadi

va $2a$ ga teng

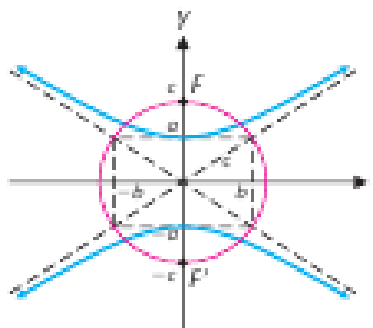
Mavhum o'q Ox da yotadi

va $2b$ ga teng

Fokuslar: $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Asimptotalari: $y = \pm \frac{a}{b} x$



Yarim o'qlari teng bo'lgan giperbolaga *teng tomonli giperbola* deyiladi.

Teng tomonli giperbola

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (3.2.9)$$

tenglama bilan aniqlanadi.

2.5-misol. Ekssentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng va $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ nuqtadan o'tuvchi giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing. Uning yarim oqlari uzunligini, fokuslari koordinatalarini toping va asimptotalarining, direktrisalarining tenglamalarini tuzing.

Yechish. Ma'lumki, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ yoki $c^2 = 2a^2$. Ikkinchi tomondan

$c^2 = a^2 + b^2$. Bundan $a^2 = b^2$. Demak izlanayotgan giperbola teng tomonli.

$M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ nuqta giperbolada yotgani uchun $\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{a^2} = 1$, ya'ni $a^2 = 1$.

Demak, izlanayotgan giperbolaning kanonik tenglamasi

$$x^2 - y^2 = 1$$

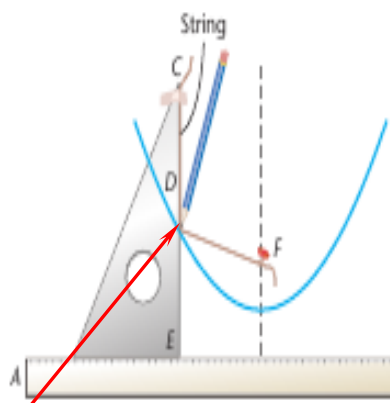
ko'rinishni oladi.

Bu tenglama bilan aniqlanuvchi giperbolaning yarim o'qlari $a = b = 1$ uzunlikka, fokuslari $F_1(\sqrt{2};0)$, $F_2(-\sqrt{2};0)$ koordinatalarga ega bo'ladi, asimptotalari $y = \pm x$ tenglamalar bilan, direktrisalari $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ tenglamalar bilan topiladi.

3.2.4. Parabola

4-ta'rif. Tekislikda fokus deb ataluvchi berilgan nuqtadan va direktrisa deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga *parabola* deyiladi.

Ta'rif asosida parabolani quyidagicha chizish mumkin [9]. Bir bo'lak karton qog'ozi olinadi, unga tugmali mix va o'lchash chizg'ichi joylanadi. Bunda mix parabolaning fokusini, chizg'ich esa uning direktrisasini ifodalaydi. Chizg'ich ustiga to'g'ri burchakli uchburchak kichik katetli tomoni bilan qo'yiladi. Uchburchakning katta katetli tomoni uzunligida ip olinadi va ipning bir uchi fokusga, ikkinchi uchi esa uchburchakning C nuqtasiga mustahkamlanadi. Keyin qalam olinadi va uning uchi bilan ipni chizg'ichning D nuqtasiga tortiladi. Ipni tarang saqlagan holda uchburchak chizg'ich bo'ylab harakatlantiriladi.

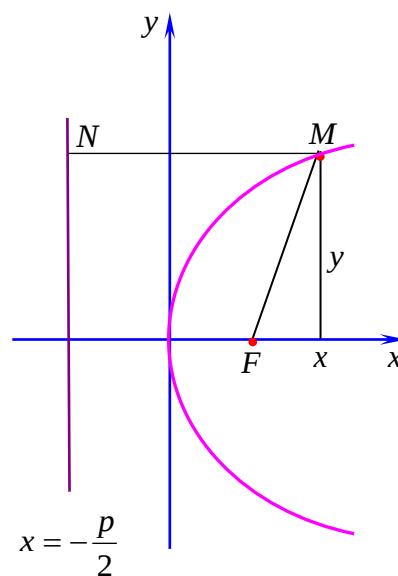


Natijada qalamning uchi parabolani chizadi. Bunda hamma vaqt $DE = DF$ bo'ladi.

Parabolaning fokusidan direktrisasigacha bo'lgan masofani p ($p > 0$) bilan belgilaymiz. p ga *parabolaning parametri* deyiladi.

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o'q direktrisaqa perpendikular va fokusdan o'tadigan, $O(0;0)$ nuqta fokus va direktrisaning o'rtasida yotadigan qilib tanlaymiz. Tanlangan koordinatalar sistemasida $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ nuqta fokus, $x = -\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziq direktrisa bo'ladi (17-shakl).

$M(x;y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. M nuqtaning direktrisadagi proyeksiyasini N bilan belgilaymiz.



17-shakl

Parabolaning ta'rifiga ko'ra $NM = MF$. Bundan

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

yoki

$$y^2 = 2px. \quad (3.2.10)$$

(3.2.10) tenglamaga *parabolaning kanonik tenglamasi* deyiladi.

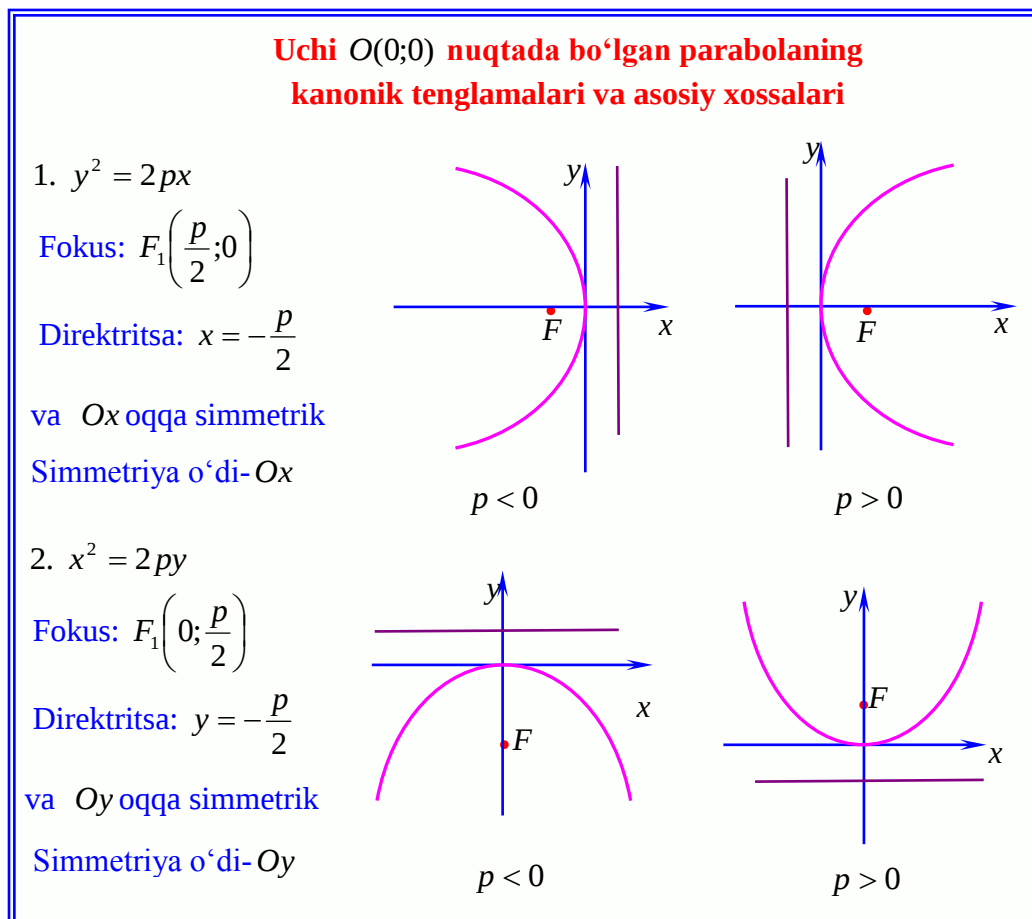
Parabolaning shaklini uning kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz. (3.2.10) tenglikda y ning juft darajasi qatnashgani uchun parabola Ox o'qqa nisbatan simmetrik bo'ladi.

Shu sababli (3.2.10) tenglamani $x \geq 0$, $y \geq 0$ da tekshiramiz.

I-chorakda (3.2.10) tenglamadan $y = \sqrt{2px}$ kelib chiqadi. Bunda $x \geq 0$ va x koordinata 0 dan boshlab o'sishi bilan y koordinata ham o'sib boradi. Shunday qilib, $y \geq 0$ bo'lganda $M(x; y)$ nuqta $O(0;0)$ nuqtadan chiqadi va x o'sishi bilan o'ngga va yuqoriga qarab bu nuqtadan cheksiz uzoqlashadi. Parabolaning $y \leq 0$ dagi shaklini Ox o'qqa nisbatan simmetrik qilib chizamiz (17-shakl). Bunda $O(0;0)$ nuqta parabolaning *uchi*, Ox o'q parabolaning *o'qi* deb ataladi.

Parabolaning *ekstsentrisiteti* $\varepsilon = \frac{NM}{MF} = 1$ ga teng bo'ladi, *direktrisasi* $x = -\frac{p}{2}$ tenglama bilan aniqlanadi.

Parabolaning boshqa kanonik tenglamalari shu kabi aniqlanadi [9].



2.6 -misol. $y^2 = 6x$ parabola berilgan. Uning direktrisasi tenglamasini tuzing va fokusini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi (3.2.10) bilan taqqoslab, ko'ramizki, $2p = 6$, $p = 3$.

U holda berilgan parabola uchun direktrisasi tenglamasi

$$x = -\frac{p}{2} = -\frac{3}{2} \text{ va fokusi } F\left(\frac{p}{2}; 0\right) = \left(\frac{3}{2}; 0\right) \text{ bo'ladi.}$$

3.2.5. Ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasi

Ikkita x va y o'zgaruvchining ikkinchi darajali tenglamasi umumiy ko'rinishda

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad (3.2.11)$$

kabi yoziladi, bu yerda A, B, C, D, E, F – koeffitsiyentlar.

Oldingi bandlarda ta'riflari asosida ellips, giperbola va parabolalarning kanonik tenglamalarini keltirib chiqardik va xossalarni o'rgandik. Bunda chiziqlarning markazlarini koordinatalar boshiga joylashtirdik va ularning o'qlarini koordinata o'qlari bo'ylab yo'naltirdik.

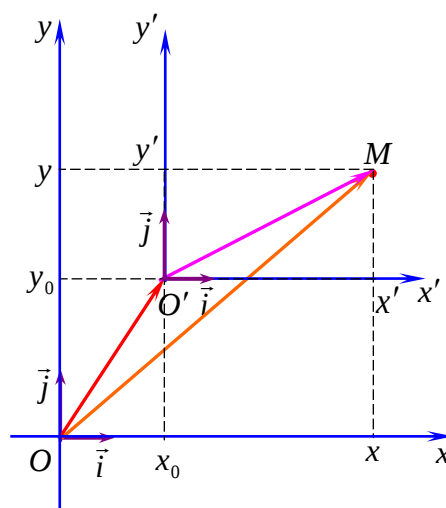
Ushbu badda (3.2.11) tenglama koeffitsiyentlarining mos qiymatlarida konus kesimlardan birini, yoki mavhum konus kesimlardan birini, yoki bo'sh to'plamni aniqlashini ko'rsatamiz. Bunda konus kesimning markazi koordinatalar boshida yotmasligi va o'qlari koordinata o'qlariga nisbatan og'ishga ega bo'lishi qiyinchilik tug'dirishi mumkin. Bu qiyinchilikni bartaraf qilish uchun koordinatalar usulining ikki qurolidan- koordinatalar o'qlarini parallel ko'chirish va burishdan foydalanamiz [9].

Koordinata o'qlarini parallel ko'chirish

Tekislikda Oxy to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Koordinata o'qlarini parallel ko'chirish – bu Oxy sistemadan uning o'qlari yo'nalishlarini va masshtablarini o'zgartirmasdan faqat koordinatalar boshining joylashishini o'zgartirish orqali yangi $O'x'y'$ sistemaga o'tishdir.

Yangi $O'x'y'$ sistemaning koordina-talar boshi O' eski Oxy sistemada $(x_0; y_0)$ koordinatalarga ega bo'lsin, ya'ni $O'(x_0; y_0)$. Tekislik ixtiyoriy M nuqtasining Oxy sistemadagi koordinatalarini $(x; y)$ bilan va $O'x'y'$ sistemadagi koordinatalarini $(x'; y')$ bilan belgilaymiz (18-shakl).



18-shakl

U holda

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OO'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}, \quad \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

18-shakldan topamiz: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

Bundan

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}$$

yoki

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y'. \quad (3.2.12)$$

(3.2.12) formulalar M nuqtaning Oxy sistemadagi $(x; y)$ koordinatalarini $O'x'y'$ sistemadagi $(x'; y')$ koordinatalar orqali topish imkonini beradi, va aksincha.

2.7 -misol. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 36$ tenglamani Oxy koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish orqali soddalashtiring.

Yechish. Berilgan tenglama Oxy koordinatalar sistemasida markazi $(4; -1)$ nuqtada yotuvchi va radiusi $R = 6$ ga teng aylana ifodalaydi.

Oxy koordinatalar sistemasi $O'(x_0; y_0) = O'(4; -1)$ nuqtaga parallel ko'chirilsa, berilgan tenglama yangi $O'x'y'$ sistemada ham aylana tenglamasini beradi.

(3.2.12) formularni qo'llab, topamiz:

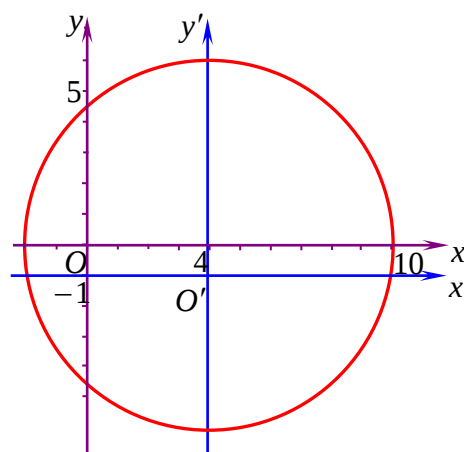
$$x' = x - x_0 = x - 4, \quad y' = y - y_0 = y + 1.$$

U holda berilgan tenglama $O'x'y'$ sistemada

$$x'^2 + y'^2 = 36$$

ko'rinishni oladi, ya'ni markazi koordinatalar boshida bo'lgan va radiusi $R = 6$ ga teng aylanani ifodalaydi.

Aylana grafigini Oxy va $O'x'y'$ sistemalarda chizamiz (19-shakl).



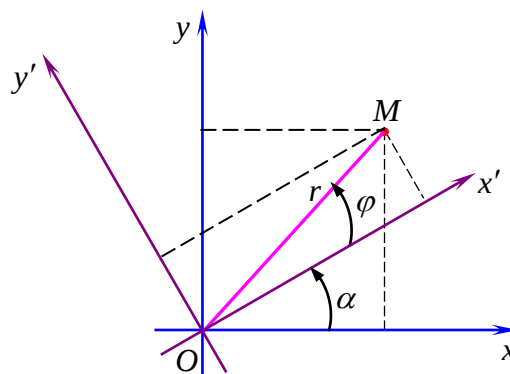
19-shakl

Koordinata o'qlarini burish

Tekislikda Oxy to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Koordinata o'qlarini burish – bu Oxy sistemadan uning koordinatalar boshini va o'qlari masshtablarini o'zgartirmasdan faqat koordinata o'qlarini biror burchakka burish orqali yangi $Ox'y'$ sistemaga o'tishdir.

Oxy sistemani O nuqta atrofida soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda α burchakka burib, $Ox'y'$ sistemaga o'tamiz. Tekislik ixtiyoriy M nuqtasining Oxy sistemadagi koordinatalarini



20-shakl

$(x; y)$ bilan va $O'x'y'$ sistemadagi koordinatalarini $(x'; y')$ bilan belgilaymiz. M nuqta radius vektorining uzunligi r ga, uning Ox' o'q bilan tashkil qilgan burchagi φ ga teng bo'lsin (20-shakl).

20-shakldan topamiz:

$$x' = r \cos \varphi, \quad y' = r \sin \varphi \quad (3.2.13)$$

va

$$x = r \cos(\varphi + \alpha), \quad y' = r \sin(\varphi + \alpha). \quad (3.2.14)$$

(3.2.14) tengliklar ustida almashtirishlar bajaramiz va (3.2.13) tengliklarni hisobga olib, topamiz:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi + \alpha) = r(\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha) = \\ &= (r \cos \varphi) \cos \alpha - (r \sin \varphi) \sin \alpha = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= r \sin(\varphi + \alpha) = r(\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha) = \\ &= r(\cos \varphi) \sin \alpha + r(\sin \varphi) \cos \alpha = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Demak,

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \quad (3.2.15)$$

(3.2.15) formulalarga koordinata o'qlarini burish formulalari deyiladi. Bu formulalar M nuqtaning Oxy sistemadagi $(x; y)$ koordinatalarini $Ox'y'$ sistemadagi $(x'; y')$ koordinatalar orqali topish imkonini beradi, va aksincha.

2.8 -misol. $xy = -2$ tenglamani koordinata o'qlarini 45° ga burish orqali kanonik shaklga keltiring.

Yechish. (3.2.15) tengliklardan $\alpha = 45^\circ$ da topamiz:

$$x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'),$$

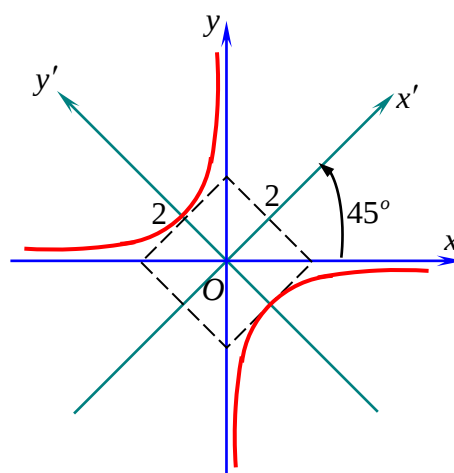
$$y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

x va y ni $xy = -2$ tenglamaga qo'yamiz:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = -2,$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = -2,$$

$$\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{4} = 1.$$



21-shakl

Bu tenglama giperbolaning kanonik tenglamasi hisoblanadi, ya'ni $xy = -2$ tenglama bilan aniqlanuvchi chiziq $Ox'y'$ sistemada $\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{4} = 1$ tenglama bilan aniqlanuvchi giperbolani ifodalaydi.

Demak, $y = -\frac{2}{x}$ funksiyaning grafigi asimptotalari koordinata o'qlari bilan

ustma-ust tushadigan teng tomonli giperboladan iborat (21-shakl).

Koordinata o'qlarini α burchakka burish orqali (3.2.11) tenglamada koordinatalar ko'paytmalari qatnashgan hadni yo'qotamiz, ya'ni bu tenglamani

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (3.2.16)$$

ko'rinishga keltiramiz.

(3.2.11) tenglamada $B \neq 0$ bo'lsin. Koordinata o'qlarini burish formulalari

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

yordamida eski koordinatalarni yangi koordinatalar orqali ifodalaymiz:

$$A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2B(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + \\ + C(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 2D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0.$$

α burchakni shunday tanlaymizki, $x'y'$ oldidagi koeffitsiyent nolga aylansin, ya'ni

$$-2A \sin \alpha \cos \alpha + 2B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2C \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

tenglik bajarilsin.

Bundan

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}. \quad (3.2.17)$$

Shunday qilib, koordinata o'qlarini (3.2.18) shartni qanoatlantiruvchi α burchakka burish (3.2.11) tenglamani (3.2.16) tenglamaga keltiradi.

1-teorema. (3.2.16) tenglama hamma vaqt yoki aylanani ($A = C$ da), yoki ellipsni ($A \cdot C > 0$ da), yoki giperbolani ($A \cdot C < 0$ da), yoki parabolani ($A \cdot C = 0$ da) aniqlaydi. Bunda ellips (aylana) uchun – nuqta yoki mavhum ellips (aylana), giperbola uchun – kesishuvchi chiziqlar juftligi, parabola uchun – parallel chiziqlar juftligi kabi buzilishlar bo'lishi mumkin.

Isboti. $A = C$ bo'lgan holni batafsil tahlil qilamiz.

$A = C$ da (3.2.16) tenglik ustida almashtirishlar bajaramiz:

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \\ x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0, \\ x^2 + 2\frac{D}{A}x + \left(\frac{D}{A}\right)^2 + y^2 + 2\frac{E}{A}y + \left(\frac{E}{A}\right)^2 + \frac{F}{A} - \left(\frac{D}{A}\right)^2 - \left(\frac{E}{A}\right)^2 = 0, \\ \left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A}. \quad (3.2.18)$$

Bunda, (3.2.18) tenglama va mos ravishda (3.2.16) tenglama:

$$-\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} > 0 \text{ bo'lganda markazi } O_1\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right) \text{ nuqtada joylashgan}$$

va radiusi $R = \sqrt{\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A}}$ ga teng aylanani aniqlaydi;

$$-\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} = 0 \text{ bo'lganda } \left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = 0 \text{ ko'rinishga}$$

keladi. Bu tenglikni yagona $O_1\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right)$ nuqta koordinatalari qanoatlantiradi.

Bunda «aylana nuqtaga buzilgan» deyiladi;

$$-\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} < 0 \text{ bo'lganda hech bir chiziqni aniqlamaydi. Bunda}$$

«aylana mavhum aylanaga buzilgan» deyiladi.

Qolgan hollarda teorema shu kabi tahlil qilinadi.

Shunday qilib, (3.2.16) tenglama (mos ravishda (3.2.11) tenglama) ikkinchi tartibli chiziqlardan birini aniqlaydi.

2.9 -misol. $4x^2 - 25y^2 - 24x + 50y - 89 = 0$ tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziq ko'rinishini aniqlang.

Yechish. Berilgan tenglamada $A = 4$, $C = -25$. Bundan $A \cdot C = 4 \cdot (-25) < 0$.

Teoremaga ko'ra berilgan tenglama giperbola ifodalydi.

Tenglamada almashtirishlar bajaramiz:

$$4(x^2 - 6x + 9) - 25(y^2 - 2y + 1) - 36 + 25 - 89 = 0,$$

$$4(x - 3)^2 - 25(y - 1)^2 = 100,$$

$$\frac{(x - 3)^2}{25} - \frac{(y - 1)^2}{4} = 1.$$

Demak, berilgan tenglama simmetriya markazi $O(3;1)$ nuqtada joylashgan va yarim o'qlari $a = 5$, $b = 2$ ga teng bo'lgan giperbolani aniqlaydi.

3.2. Mashqlar

3.2.1. Aylananing tenglamasini tuzing: 1) markazi $M_1(-1;3)$ nuqtada joylashgan va radiusi $R = 6$ ga teng bo'lgan; 2) markazi $M_2(-3;5)$ nuqtada joylashgan va $A(4;4)$ nuqtadan o'tgan; 3) diametrlaridan birining uchlari $B(-1;3)$ va $C(-3;5)$ nuqtalarda bo'lgan; 4) $D(8;-4)$ nuqtadan o'tgan va koordinata o'qlariga uringan; 5) markazi $M(2;-1)$ nuqtada joylashgan va urinmalaridan biri $3x + 4y + 3 = 0$ to'g'ri chiziqda bo'lgan.

3.2.2. Aylanalarning markazi va radiusini toping:

1) $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 16 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$;

3) $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$;

4) $x^2 + y^2 + 3x - 7y - \frac{3}{2} = 0$.

3.2.3. $A(1; -2)$ nuqta berilgan. Uning aylanalarning ichkarisida, tashqarisida yoki ustida yotishini aniqlang.

1) $x^2 + y^2 = 5$;

2) $x^2 + y^2 = 9$;

3) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$;

4) $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$.

3.2.4. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ va $x^2 + y^2 - 10y + 20 = 0$ tenglamalar bilan berilgan aylanalar markazlari orasidagi masofani toping.

126

Ikkinchi tartibli chiziqlar

3.2.5. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ to'g'ri chiziqdan koordinata o'qlari kesgan kesmani diametr qilib aylana chizilgan. Bu aylana tenglamasini tuzing.

3.2.6. $A(2; -1)$, $B(3; 4)$ nuqtalardan o'tgan va markazi $x - y - 4 = 0$ to'g'ri chiziqda joylashgan aylana tenglamasini tuzing.

3.2.7. Uchlari $A(-2; 2)$, $B(0; -2)$, $C(-1; -1)$ bo'lgan ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi va radiusini toping.

3.2.8. k ning qanday qiymatlarida $y = kx$ to'g'ri chiziq $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$ aylanani kesadi, bu aylanaga urinadi?

3.2.9. $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$ aylanaga uringan va koordinatalar boshidan o'tgan to'g'ri chiziqlar tenglamalarini tuzing.

3.2.10. Aylana tenglamalarini parametrik ko'rinishga keltiring:

1) $x^2 + y^2 = 16x$;

2) $x^2 + y^2 = 4y$;

3) $x^2 + y^2 = 2x + 2y$.

3.2.11. Fokuslari Oy o'qda $O(0; 0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo'ylashgan va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi ellipsning kanonik tenglamasini tuzing: 1) kichik o'qi 12 ga va ekscentrisiteti $\frac{4}{5}$ ga teng; 2) fokuslari orasidagi masofa 10 ga va ekscentrisiteti $\frac{5}{7}$ ga teng;

3) $M_1(6; 0)$ va $M_2(0; 9)$ nuqtalardan o'tgan; 4) direktrisalari orasidagi masofa $\frac{50}{3}$ ga va ekscentrisiteti $\varepsilon = \frac{3}{5}$ ga teng.

3.2.12. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ ellipsga tomonlari ellips o'qlariga parallel qilib kvadrat ichki chizilgan. Kvadratning yuzini toping.

3.2.13. $5x^2 + 20y^2 - 100 = 0$ ellipsning $x + y - 20 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinmasi tenglamasini tuzing.

3.2.14. $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$ ellipsning bir fokusidan uning kichik o'qiga parallel o'tgan vatari uzunligini toping.

3.2.15. $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1$ ellipsning $M(x; y)$ nuqtasidan uning o'ng fokusigacha bo'lgan masofa

3.2.16. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ ellipsning $M(x; y)$ nuqtasidan uning chap fokusigacha bo'lgan masofa o'ng fokusigacha bo'lgan masofadan 2 marta katta. $M(x; y)$ nuqtani toping.

3.2.18. Ellipsning tenglamalarini parametrik ko‘rinishga keltiring:

3.2.19. $x+2y-7=0$ to'g'ri chiziq bilan $x^2+4y^2=25$ ellipsning kesishish nuqtalarini toping.

3.2.21. Giperbolaning nuqtalaridan biri va asimptotalarining tenglamalari berilgan. Giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing:

3.2.22. Giperbolaning eksentrisiteti 2 ga teng. Uning asimptotalari orasidagi burchakni toping.

Giperbolaning eksentrisitetini toping.

3.2.24. $5x^2 + 17y^2 - 85 = 0$ ellips berilgan. Ellips bilan bir xil fokuslarga ega bo'lgan teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

3.2.25. Giperbola $25x^2 + 9y^2 = 225$ ellips bilan bir xil fokuslarga ega. Giperbolaning eksentrisiteti 2 ga teng bo'lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

3.2.26. Assimptotalari $O'(2;-3)$ nuqtada kesishuvchi va $B(4;-1)$ nuqtadan o'tuvchi giperbola tenglamasini tuzing.

3.2.28. Berilgan fokusi va direktrisasi tenglamasiga ko‘ra parabolaning kanonik tenglamasini tuzing:

$$1) F(-3;4), x-5=0;$$

$$2) F(5;3), y+2=0.$$

3.2.29. Berilgan tenglamasiga ko'ra parabolaning uchini va simmetriya o'qining tenglamasini aniqlang:

$$1) y^2 - 2y + 16x + 65 = 0;$$

$$2) 2x^2 + y - 8x + 5 = 0.$$

3.2.30. Berilgan tenglamalar qanday chiziqlarni aniqlaydi?

$$1) \begin{cases} x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \\ y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x = \frac{2}{t^2}, \\ y = \frac{3}{t} \end{cases};$$

$$3) y = -2\sqrt{x^2 + 1};$$

$$4) x = -\sqrt{y^2 + 4}.$$

3.2.31. $x = \frac{a}{\sin t}, y = \frac{b \cos t}{\sin t}$ giperbolaning parametrik tenglamalari bo'lishini ko'rsating.

128

Ikkinchi tartibli chiziqlar

3.2.32. $x = 2pt^2, y = 2pt, t \in R$ parabolaning parametrik tenglamalari bo'lishini ko'rsating.

3.2.33. $13x^2 + 10xy + 13y^2 - 72 = 0$ tenglamani kanonik shaklga keltiring.

3.2.34. $x^2 - 6\sqrt{3}xy - 5y^2 - 8 = 0$ tenglamani kanonik shaklga keltiring.

3.2.35. Egri chiziqning tenglamasini soddalashtiring, chiziqning turini aniqlang va shaklini chizing:

$$1) 5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0;$$

$$2) 2x^2 - 12x + y + 13 = 0;$$

$$3) 5x^2 - 4y^2 + 30x + 8y + 21 = 0;$$

$$4) 2y^2 - x - 12y + 14 = 0;$$

$$5) x^2 - 6x + y^2 - 8 = 0;$$

$$6) x^2 + y + y^2 - 1 = 0.$$

3.2.36. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ ellipsga $M(-3;3)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

3.2.37. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{16} = 1$ giperbolaga $M(2;-4)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

3.2.38. $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ giperbolaga $M\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 3\right)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

3.2.39. $2x + 4y + 7 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan $x^2 = 16y$ parabolaning urinmasini toping.

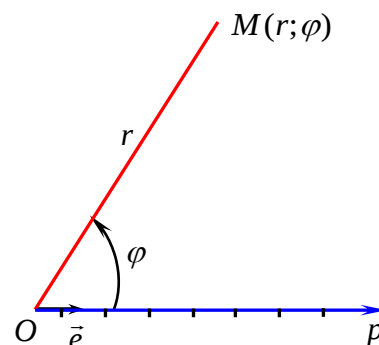
3.3. QUTB KOORDINATALARDA CHIZIQLAR

3.3.1. Qutb koordinatalari

Tekislikda sanoq boshiga, musbat yo'nalishga va masshtab birligiga ega bo'lgan Op nur *qutb o'qi*, uning O – sanoq boshi *qutb* deb ataladi.

M tekislikning qutb bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Bunda M nuqtaning holati ikkita son, O qutbdan M nuqttagacha bo'lgan r masofa va Op qutb o'qi bilan $\overrightarrow{OM}$ yo'nalgan kesma orasidagi φ burchak bilan aniqlanadi (Op nurdan boshlab burchak yo'nalishi soat strelkasi yo'alishiga teskari tanlanadi).

r va φ sonlariga M nuqtaning *qutb koordinatalari* deyiladi va $M(r; \varphi)$ deb yoziladi. Bunda r masofa *qutb radiusi*, φ burchak *qutb burchagi* deb ataladi (22-shakl).



22-shakl

Tekislikning barcha nuqtalarini aniqlash uchun r va φ kattaliklarni $0 \leq r < +\infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ chegaralarda olish yetarli bo'ladi. Bunda tekislikning har bir nuqtasiga yagona r va φ sonlar jufti mos keladi, va aksincha, har bir $(r; \varphi)$ sonlar juftiga tekislikdagi yagona nuqta mos keladi.

Nuqtaning qutb va to'g'ri burchakli koordinatalari orasidagi bog'lanishni topamiz. Bunda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining koordinatalari boshini qutb bilan va absissalar o'qini qutb o'qi bilan ustma-ust tushadigan qilib tanlaymiz (23-shakl).

M nuqta x va y to'g'ri burchakli koordinatalarga va r va φ qutb koordinatalarga ega bo'lsin.

23-shakldan topamiz:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (3.3.1)$$

Bu tengliklar nuqtaning to'g'ri burchakli koordinatalarini uning qutb koordinatalari bilan bog'laydi.

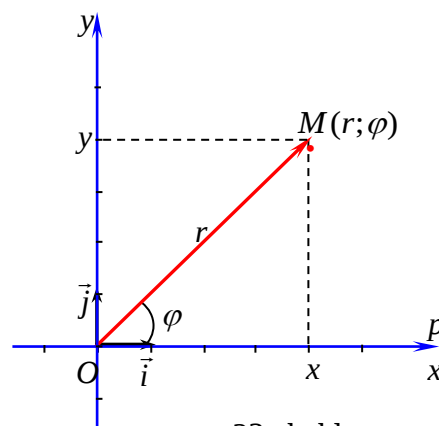
(3.3.1) tengliklardan nuqtaning qutb koordinatalari bilan uning to'g'ri burchakli koordinatalari o'rtasida quyidagi bog'lanish hosil qilinadi:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (3.3.2)$$

Bunda φ burchakning qiymati nuqtaning joylashgan choragiga (x, y larning ishoralari asosida) qarab, $-\pi < \varphi \leq \pi$ oraliqda tanlanadi.

3.1 -misol. $M(-1; -\sqrt{3})$ nuqtaning qutb koordinatalarini toping.

Yechish. Berilgan nuqtaning qutb koordinatalarini (3.3.2) formulalar bilan aniqlaymiz:



23-shakl

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}.$$

M nuqtan III chorakda yotadi. U holda $\varphi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$ bo'ladi.

Demak, $M\left(2; -\frac{2\pi}{3}\right)$.

3.3.2. Qutb koordinatalar sistemasida chiziqlar

Qutb koordinatalar sistemasida chiziq tenglamasi deb aynan shu chiziq barcha nuqtalarining r va φ koordinatalari orasidagi bog'lanishni aniqlovchi ikki noma'lumli

$$F(r; \varphi) = 0 \quad (3.3.3)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Mumkin bo'lganda (3.3.3) tenglama r ga nisbatan yechiladi va $r = r(\varphi)$ ko'rinishga keltiriladi.

130 *Qutb koordinatalarda chiziqlar*

Chiziqning $F(x; y) = 0$ tenglamasidan qutb tenglamasiga o'tish uchun x va y lar o'rniga ularning (3.3.1) formulalardagi qiymatlari qo'yiladi va aksincha chiziqning qutb tenglamasidan $F(x; y) = 0$ tenglamasiga o'tish (3.3.2) formulalar bilan amalga oshiriladi.

To'g'ri chiziqning qutb tenglamasi

To'g'ri chiziq tenglamasini qutb koordinatalarida topamiz. Bunda O qutbdan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa p va Op qutb o'qi bilan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan f o'q orasidagi α burchak berilgan bo'lsin (24-shakl).

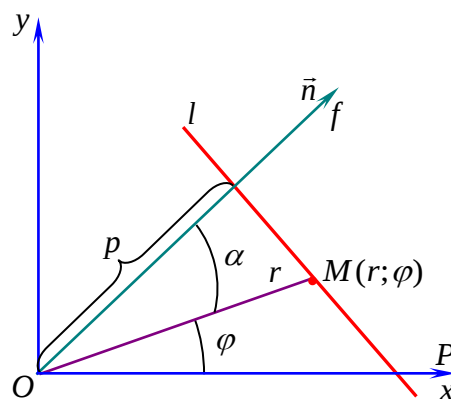
l chiziqning ixtiyoriy $M(r; \varphi)$ nuqtasi uchun $\operatorname{Pr}_f \overrightarrow{OM} = p$ bo'ladi.

Ikkinchi tomondan

$$\operatorname{Pr}_f \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cdot \cos(\alpha - \varphi) = r \cos(\alpha - \varphi).$$

U holda

$$r \cos(\alpha - \varphi) = p. \quad (3.3.4)$$



24-shakl

(3.3.4) tenglamaga *to'g'ri chiziqning qutb tenglamasi* deyiladi.

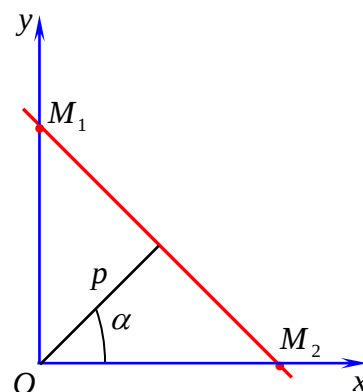
3.2 -misol. $M_1\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$ va $M_2(5; 0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning qutb tenglamasini tuzing.

Yechish. To'g'ri chiziqlarning M_1 va M_2 nuqtalar orasidagi kesmasi katetlari 5 ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi bo'ladi. Bunda qutbdan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa to'g'ri burchak uchidan gipotenuzaga tushirilgan balandlikdan iborat (25-shakl). Uning uzunligini (p ni) va yo'nalshini (α ni) topamiz:

$$p = \frac{OM_1 \cdot OM_2}{\sqrt{OM_1^2 + OM_2^2}} = \frac{5 \cdot 5}{\sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

U holda (3.3.4) formulaga ko'ra

$$r \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$



25-shakl

Konus kesimlarining qutb tenglamalari

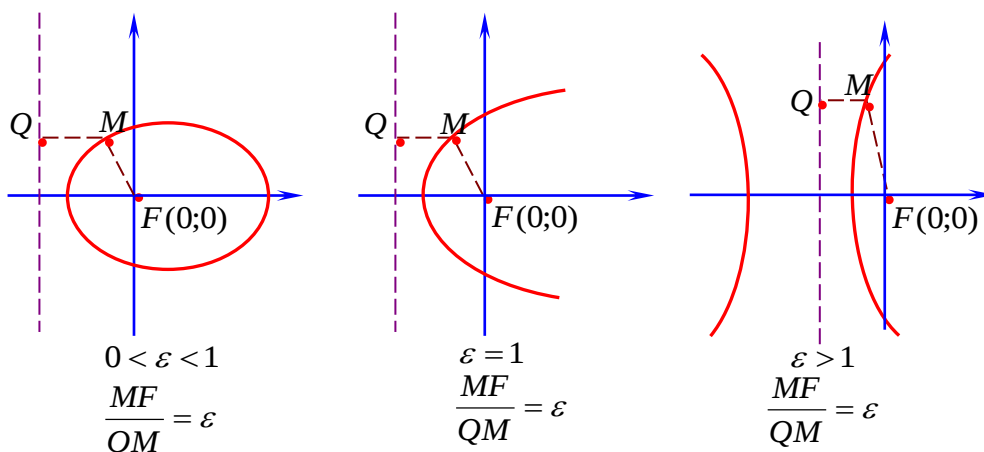
Konus kesimlarning (ellipsning, giperbolaning, parabolaning) qutb tenglamalarini keltirib chiqaramiz. Bunda chiziqlarning fokuslaridan biri qutbda yotsa, uning tenglamasi sodda ko'rinishni oladi.

Konus kesimlarning tenglamalarini keltirib chiqarishda ularning har bir nuqtasidan fiksirlangan nuqttagacha (fokusgacha) bo'lgan masofaning fiksirlangan

Qutb koordinatalarda chiziqlar

131

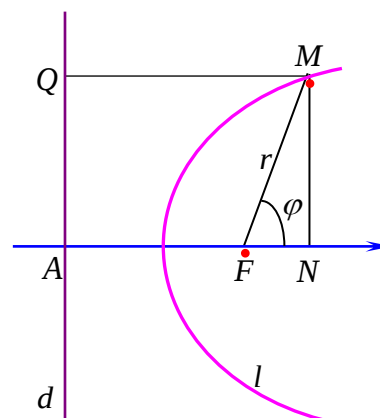
to'g'ri chiziqqacha (direktrisagacha) bo'lgan masofaga nisbati o'zgarmas kattalikka- ekstsentrisitetga teng bo'lishi xossasidan foydalaniladi [10]. Bunda konus kesim $\varepsilon < 1$ bo'lganda ellipsdan, $\varepsilon = 1$ bo'lganda paraboldan va $\varepsilon > 1$ bo'lganda giperboladan iborat bo'ladi (26-shakl).



26-shakl

l – konus kesimlardan birining tarmog'i, F – bu tarmoqning fokusi, d – qutbdan chapda joylashgan vertikal direktrisasi, ε – ekstsentisiteti bo'lsin (27-shakl). Fokusdan direktrisagacha bo'lgan masofani p bilan belgilaymiz.

l chiziqda ixtiyoriy $M(r, \varphi)$ nuqtani olamiz.



27-shakl

U holda konus kesimlarning xossasiga ko'ra $\frac{FM}{QM} = \varepsilon$ bo'ladi [10]. Bundan

$FM = \varepsilon QM$ yoki

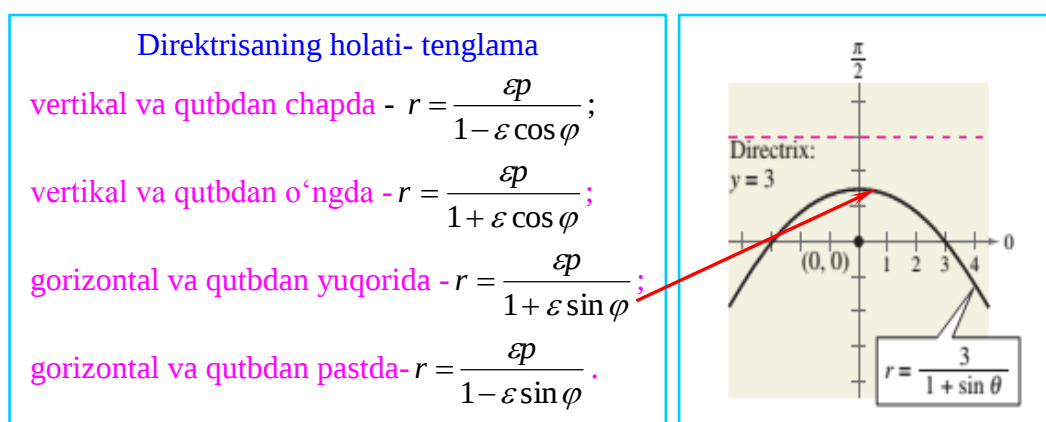
$$r = \varepsilon AN = \varepsilon(AF + FN) = \varepsilon(p + r \cos \varphi).$$

Oxirgi tenglikni r ga nisbatan yechamiz:

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (3.3.5)$$

(3.3.5) tenglamaga *konus kesimlarning qutb tenglamasi* deyiladi. Bu tenglama $\varepsilon < 1$ da ellipsni, $\varepsilon > 1$ giperbolaning bir tarmog'ini va $\varepsilon = 1$ da parabolani aniqlaydi.

1-izoh. Konus kesimlarning qutb tenglamalari direktritsaning joylashishiga bog'liq bo'ladi, ya'ni [10]:



132

Qutb koordinatalarda chiziqlar

Boshqa chiziqlarning qutb tenglamalari

Qutb tenglama bilan modellastiriladigan masalalardan birini qaraymiz [10].

Uzunligi $2a$ ($a > 0$) ga teng bolgan AB kesma uchlari bilan biror to'g'ri burchakning tomonlari bo'ylab sirpanib harakatlanayotgan bo'lsin. To'g'ri burchakning O uchidan bu kesmaga OM perpendikulyar tushirilgan (28-shakl). AB kesmaning harakati vaqtida OM perpendikulyar M asosining traektoriyasini topaylik.

M asosning (nuqtaning) traektoriyasini qutb koordinatalar systemsida tuzish uchun to'g'ri burchakning O uchini qutb, OA o'qni qutb o'qi deb olamiz. M nuqtaning qutb koordinatalarini r, φ deb belgilaymiz, ya'ni $M(r; \varphi)$ deymiz.

AOM uchburchakdan topamiz:

$$OM = OA \sin \varphi$$

yoki

$$r = OA \sin \varphi.$$

AOB uchburchakdan topamiz:

$$OA = AB \cos \varphi$$

yoki

$$OA = 2a \cos \varphi.$$

Bundan M asos izlanayotgan raektoriyasining qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasini hosil qilamiz:

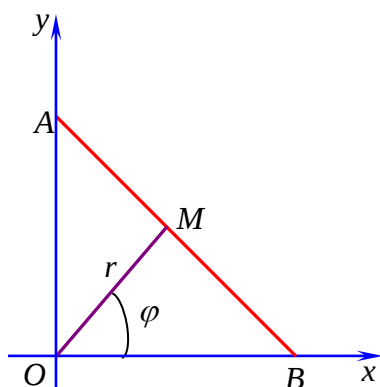
$$r = a \sin 2\varphi.$$

Bu tenglama bilan aniqlanuvchi chiziq to'rt yaproqli gul deb ataladi. Uning grafigini $a=1$ da *Maple 7* dasturi yordamida chizamiz (29-shakl).

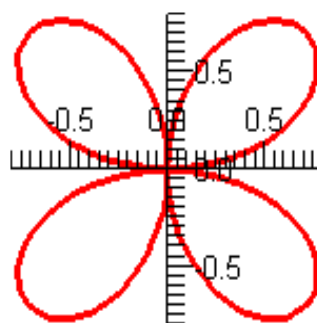
$$r = \sin(2\varphi)$$

> with(plots):

> animatecurve([sin(2*t),t,t=-1*i..1*i], coords=olar, frames=60,numpoints=100);



28-shakl



29-shakl

Matematikaning keyingi bo'limlari misol va masalalarini yechishda foydalaniladigan chiziqlarning grafiklari va ularning qutb yoki parametric tenglamalari 1-ilovada keltirilgan.

3.3. Mashqlar

Qutb koordinatalarda chiziqlar

133

3.3.1. $A(\sqrt{3};1)$ va $B(-\sqrt{3};-1)$ nuqtalarning qutb koordinatalarini toping.

3.3.2. $A\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$ va $B\left(1;\frac{2\pi}{3}\right)$ nuqtalarning to'g'ri burchakli koordinatalarini toping.

3.3.3. $A\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$ va $B\left(8;-\frac{\pi}{12}\right)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

3.3.4. Uchlari O qutbda va $A(r_1;\varphi_1)$, $B(r_2;\varphi_2)$ nuqtalarda joylashgan OAB uchburchakning yuzini toping, bu yerda $\varphi_2 > \varphi_1$.

3.3.5. Ikkita qarama-qarshi uchlari $A\left(2;-\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2;-\frac{2\pi}{3}\right)$ nuqtalarda bo'lgan kvadratning yuzini toping.

3.3.6. Kvadratning ikkita qo'shni uchlari berilgan: $A\left(6;\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(2;\frac{4\pi}{3}\right)$. Kvadratning yuzini toping.

3.3.7. Berilgan tenglamalarni dekart koordinatalarida yozing:

- | | |
|---|--|
| 1) $r = 3 \sin \varphi$; | 2) $r = 5 \cos \varphi$; |
| 3) $r^2 = \sin 2\varphi$; | 4) $r = 4 \cos 2\varphi$; |
| 5) $r = \frac{2}{1 + \sin \varphi}$; | 6) $r = \frac{3}{1 - \cos \varphi}$; |
| 7) $r = \frac{2}{5 + 3 \cos \varphi}$; | 8) $r = \frac{32}{3 + 5 \sin \varphi}$. |

3.3.8. Berilgan tenglamalarni qutb koordinatalarida yozing:

- | | |
|--|---|
| 1) $y = 5$; | 2) $y = 2x - 1$; |
| 3) $x^2 = 4y$; | 4) $x^2 - y^2 = a^2$; |
| 5) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$; | 6) $xy = 4$; |
| 7) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; | 8) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$. |

3.3.9. Berilgan tenglamasiga ko'ra chiziqlarning turini aniqlang:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $r = \frac{6}{2 + \sin \varphi}$; | 2) $r = \frac{5}{-1 + 2 \cos \varphi}$; |
| 3) $r = \frac{3}{1 + \cos \varphi}$; | 4) $r = \frac{2}{2 - \cos \varphi}$. |

3.3.10. Berilgan chiziqlarning grafiklarini $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{3}{4}$ larda chizing:

- | | |
|--|--|
| 1) $r = \frac{4\varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$; | 2) $r = \frac{4\varepsilon}{1 + \varepsilon \sin \varphi}$; |
| 3) $r = \frac{4\varepsilon}{1 - \varepsilon \sin \varphi}$; | 4) $r = \frac{4\varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$. |

3.4.1. Fazoda sirt va chiziq

Umumiy boshlang'ich O nuqtaga va bir xil masshtab birligiga ega bo'lgan o'zaro perpendikulyar Ox , Oy va Oz o'qlar fazoda to'g'ri burchakli $Oxyz$ koordinatalar sistemasini hosil qiladi.

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida uchta x , y va z sonlari fazodagi har qanday M nuqtaning o'rnini to'liq aniqlaydi. Bunda nuqta $M(x; y; z)$ kabi belgilanadi, x ga M nuqtaning *abssissasi*, y ga M nuqtaning *ordinatasi*, z ga M nuqtaning *applikatasi* deyiladi.

$Oxyz$ *fazodagi sirt tenglamasi* deb aynan shu sirt nuqtalarining x, y, z koordinatalari orasidagi bog'lanishni aniqlovchi uch noma'lumli

$$F(x, y, z) = 0$$

tenglamaga aytiladi.

Shu kabi, koordinatalari uch noma'lumli $F(x, y, z) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi $Oxyz$ fazoning barcha $M(x; y; z)$ nuqtalari to'plamiga **fazoda** shu tenglama bilan aniqlanuvchi **sirt** deyiladi.

Fazodagi sirt $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u; v) \in D$ parametrik tenglamalar bilan ham berilishi mumkin, bu yerda $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ - D sohada berilgan sirt barcha nuqtalarining va faqat shu nuqtalarning koordinatalarini beruvchi ikki o'zgaruvchili funksiyalar. **Masalan,**

$$x = R \sin u \cos v, \quad y = R \sin u \sin v, \quad z = R \cos u, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

parametrik tenglamalar **sferani** ifodalaydi [11].

Fazodagi chiziqni ikki sirtning kesishish chizig'i yoki ikki sirt umumiy nuqtalarining gometrik o'rni deb qarash mumkin (30-shakl).

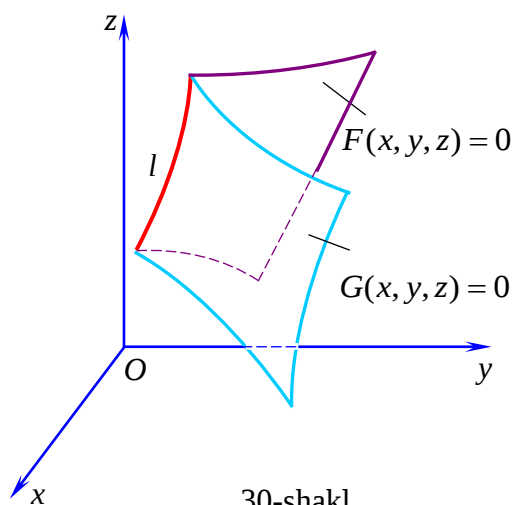
l chiziqni aniqlovchi ikki sirt $F(x, y, z) = 0$ va $G(x, y, z) = 0$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsin (30-shakl). U holda l chiziq ikkala tenglamani ham qanoatlantiruvchi $M(x; y; z)$ nuqtalar to'plamidan tashkil topadi.

Koordinatalari

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi

$Oxyz$ fazoning barcha $M(x; y; z)$ nuqtalari to'plamiga **fazodagi** shu tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi **chiziq** deyiladi.



30-shakl

Shu kabi, $Oxyz$ **fazodagi chiziq tenglamasi** deb aynan shu chiziq barcha nuqtalarining x, y, z koordinatalarini aniqlovchi

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga aytiladi.

Fazodagi chiziqni nuqtaning traektoriyasi deb qarash mumkin. Bunda chiziq $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektor tenglama bilan yoki $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in T$ parametrik tenglamalar bilan beriladi. **Masalan,**

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t, \quad z = \frac{h}{2\pi} t$$

parametrik tenglamalar **vint chizig'ini** ifodalaydi [11].

Fazodagi analitik geometriyada sirtni (yoki to'g'ri ciziqni) o'rganishda ikkita masala ko'riladi: geometrik xossalariga ko'ra sirtning (yoki to'g'ri ciziqning) tenglamasini keltirib chiqarish; tenglamasiga asosan sirtning (yoki to'g'ri ciziqning) ko'rinishi va xossalarini tekshirish.

3.4.2. Tekislik tenglamalari

Tekislikning fazodagi o'rni turli parametrlar bilan (masalan, tekislikning koordinata o'qlarida ajratgan kesmalari bilan) bir qiymatli aniqlanishi mumkin. Shu sababli parametrlariga ko'ta tekislikning turli tenglamalari keltirib chiqariladi.

I. Tekislikda yotuvchi $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta va to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan $\vec{n} = \{A; B; C\}$ vektor berilgan.

Tekislikka perpendikular bo'lgan har qanday vektorga *tekislikning normal vektori* deyiladi.

σ tekislikning ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtasini olamiz. M va M_0 nuqtalarning radius vektorlari mos ravishda $\vec{r}$ va $\vec{r}_0$ bo'lsin.

U holda $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ bo'ladi (31-shakl). M va M_0 tekislik nuqtalari bo'lgani uchun $\overrightarrow{M_0M}$ vektor tekislikda yotadi va tekislikning normal vektoriga perpendikular bo'ladi, ya'ni $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$. Ikki vektorning perpendikularlik shartiga asosan tekislik tenglamasini topamiz:

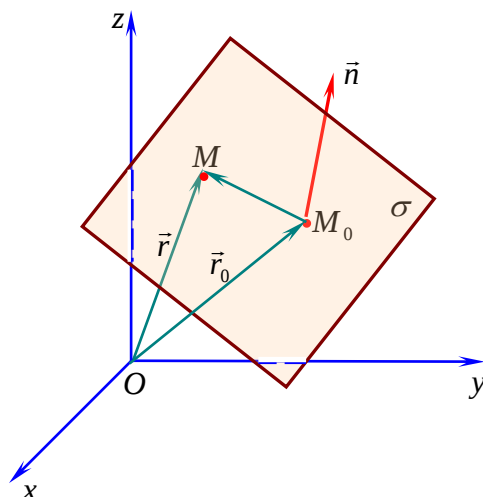
$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \quad (3.4.1)$$

Bu tenglamaga *tekislikning vektor tenglamasi* deyiladi.

(3.4.1) tenglamaga normal vektor va radius vektorlarning koordinatalarini qo'yib, topamiz:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.4.2)$$

Bu tenglamaga *tekislikning skalyar tenglamasi* deyiladi.



31-shakl

136 Tekislik

Shuningdek, (3.4.2) tenglamaga *berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikular tekislik tenglamasi* deyiladi.

4.1-misol. $M_0(3; 4; 5)$ nuqtadan o'tuvchi va normal vektori $\vec{n} = \{-1; -3; 2\}$ bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra $x_0 = 3, y_0 = 4, z_0 = 5, A = -1, B = -3, C = 2$.

U holda (3.4.2) tenglamadan topamiz:

$$(-1) \cdot (x - 3) + (-3) \cdot (y - 4) + 2 \cdot (z - 5) = 0$$

yoki

$$x + 3y - 2z - 5 = 0.$$

II. Tekislikda yotuvchi uchta $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ **va** $M_3(x_3; y_3; z_3)$ **nuqta berilgan.**

σ tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtani olamiz va

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\},$$

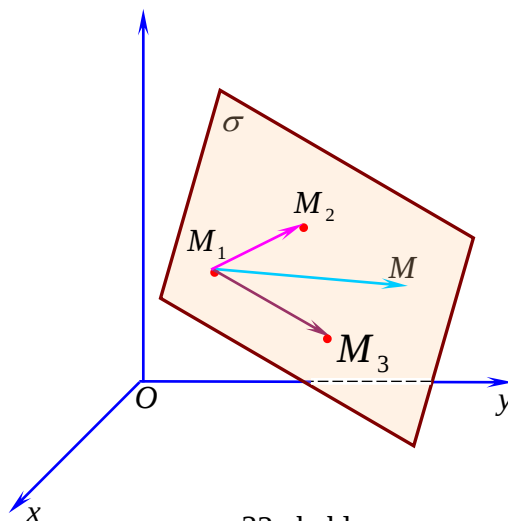
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

vektorlarni yasaymiz.

Bunda $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlar komplanar bo'ladi (32-shakl). Vektorlarning komplanarlik shartidan topamiz:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4.3)$$



32-shakl

(3.4.3) tenglamaga *berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi* deyiladi.

(3.4.3) tenglamada $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_3} = \{p; q; r\}$ belgilash kiritib, topamiz:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4.4)$$

(3.4.4) tenglamaga *berilgan ikkita nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga parallel tekislik tenglamasi* deyiladi.

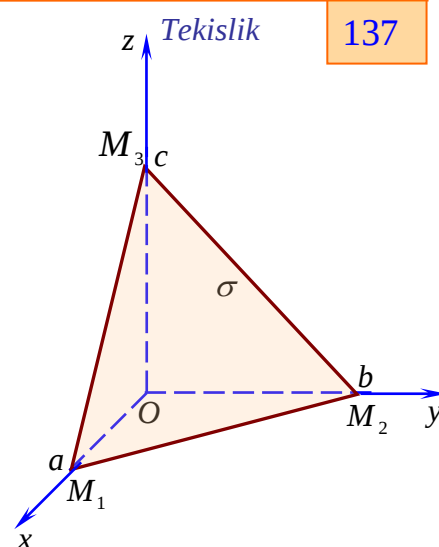
Shu kabi (3.4.3) tenglamadan $\vec{s}_1 = \overrightarrow{M_1M_2} = \{p_1; q_1; r_1\}$, $\vec{s}_2 = \overrightarrow{M_1M_3} = \{p_2; q_2; r_2\}$ belgilashlarda topamiz:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4.5)$$

(3.4.5) tenglamaga *berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan ikki vektorga parallel tekislik tenglamasi* deyiladi.

$M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ va $M_3(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar σ tekislikning mos ravishda Ox , Oy va Oz o'qlarda yotuvchi nuqtalari, ya'ni $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$ va $M_3(0; 0; c)$ bo'lsin (33-shakl).

U holda (3.4.3) formulaga ko'ra



33-shakl

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

bo'ladi. Bundan $bcx - abc + abz + acy = 0$, $bcx + acy + abz = abc$ yoki

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3.4.6)$$

33- shakldan ko'inadiki, a, b va c mos ravishda σ tekislikning Ox , Oy va Oz o'qlarda ajratgan kesmalarini ifodalaydi. Shu sababli (3.4.6) tenglamaga *tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi* deyiladi.

4.2-misol. $M_0(2;-1;3)$ nuqtadan o'tuvchi, $\vec{a} = \{3,0,1\}$ va $\vec{b} = \{-3;2;2\}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Izlanayotgan tekislik tenglamasini (3.4.5) formula bilan topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

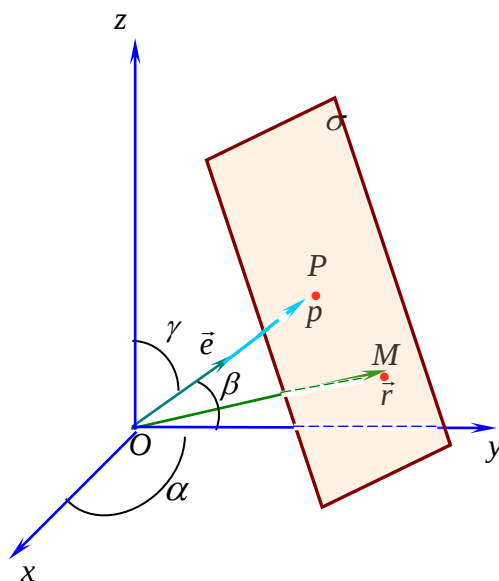
$$(x-2) \cdot 2 - (y+1) \cdot (6-3) + (z-3) \cdot 6 = 0, \\ 2x - 3y + 6z - 25 = 0.$$

4.3-misol. Ox , Oy va Oz o'qlarda mos ravishda 2, (-4) va 6 ga teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra: $a = 2$; $b = -4$; $c = 6$.

Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasidan topamiz:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{(-4)} + \frac{z}{6} = 1, \\ 6x - 3y + 2z - 12 = 0.$$



34-shakl

III. Tekislik $\vec{n} = \overrightarrow{OP}$ normalining uzunligi p va birlik vektori $\vec{e} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ berilgan.

σ tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtani olamiz. Bu nuqtaning radius vektori $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x; y; z\}$ bo'lsin (34-shakl). Bunda $\vec{r}$ radius vektorning

138 Tekislik

$\vec{e}$ vektor yo'nalishidagi proeksiyasi p ga teng bo'ladi, ya'ni $\Pi_{p_e} \vec{r} = p$.

Bundan $\vec{r}\vec{e} = p$, $\vec{r}\vec{e} - p = 0$ yoki

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \quad (3.4.7)$$

(3.4.7) tenglamaga *tekislikning normal tenglamasi* deyiladi.

Keltirib chiqarilgan (3.4.1)-(3.4.7) formulalar asosida ushbu xulosa kelib chaqadi:

x, y, z o'zgaruvchilarning har qanday birinchi darajali tenglamasi fazodagi biror tekislikni ifodalaydi va aksincha, fazodagi har qanday tekislik x, y, z o'zgaruvchilarning biror birinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanadi. [11].

Demak, tekislikdagi har bir σ tekislik tenglamasini

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3.4.8)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda D -ozod had; $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

(3.4.8) tenglamaga *tekislikning umumiy tenglamasi* deyiladi.

(3.4.8) tenglamada:

1) $A=0$ bo'lsa, tenglama $By + Cz + D = 0$ ko'rinishga keladi. Bunda tekislikning $\vec{n} = \{0; B; C\}$ normal vektori Ox o'qqa perpendikular bo'ladi. Shu sababli tekislik Ox o'qqa parallel bo'ladi. Shu kabi $B=0$ da $Ax + Cz + D = 0$ tenglama Oy o'qqa parallel tekislikni, $C=0$ da $Ax + By + D = 0$ tenglama Oz o'qqa parallel tekislikni ifodalaydi;

2) $D=0$ bo'lsa, tenglama $Ax + By + Cz = 0$ ko'rinishni oladi. Uni $O(0;0;0)$ nuqta koordinatalari qanoatlantiradi va tekislik koordinatalar boshidan o'tadi;

3) $A=0, D=0$ bo'lsa, tenglamadan $By + Cz = 0$ kelib chiqadi. Bu tekislik Ox o'qdan o'tadi. Shu kabi $Ax + Cz = 0$ tenglama Oy o'qdan o'tuvchi tekislikni, $Ax + By = 0$ tenglama Oz o'qdan o'tuvchi tekislikni ifodalaydi;

4) $A=0, B=0$ bo'lsa, tenglama $Cz + D = 0$ yoki $z = -\frac{D}{C}$ ko'rinishni oladi.

Bu tekislik Oxy tekislikka parallel bo'ladi. Shu kabi $By + D = 0$ tenglama Oxz tekislikka parallel tekislikni, $Ax + D = 0$ tenglama Oyz tekislikka parallel tekislikni ifodalaydi;

5) $A=0, B=0, D=0$ bo'lsa, tenglama $Cz = 0$ yoki $z = 0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglama Oxy tekislikni ifodalaydi. Shu kabi Oyz tekislik $x = 0$ tenglama bilan, Oxz tekislik $y = 0$ tenglama bilan aniqlanadi.

4.4-misol. Tekislik tenglamalarini tuzing: 1) Ox o'qdan va $M_0(0; -2; 3)$ nuqtadan o'tuvchi; 2) Oy o'qqa parallel bo'lgan va $M_1(3; 0; -4), M_2(5; -2; 3)$ nuqtalardan o'tuvchi; 3) Oxz tekislikka parallel bo'lgan va $M_0(1; -2; 3)$ nuqtadan o'tuvchi.

Yechish. 1) Ox o'qdan o'tuvchi tekislik tenglamasi $By + Cz = 0$ bo'adi.

Bu tenglamani $M_0(0;-2;3)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi, chunki bu nuqta tekislikda yotadi. Demak, $(-2) \cdot B + 3C = 0$ yoki $B = \frac{3}{2}C$.

$$\text{Bundan } \frac{3}{2}Cy + Cz = 0 \text{ yoki} \\ 3y + 2z = 0.$$

2) Oy o'qqa parallel tekislik tenglamasi $Ax + Cz + D = 0$ bo'ladi. Uni $M_1(3;0;-4), M_2(5;-2;3)$ nuqtalarning koordinatalari qanoatlantiradi, ya'ni

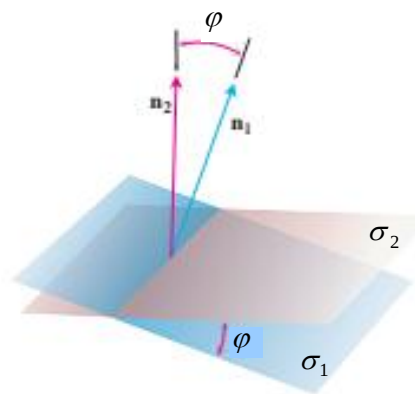
$$\begin{cases} 3A - 4C + D = 0, \\ 5A + 3C + D = 0. \end{cases}$$

Bundan $A = -\frac{7}{29}D$ va $C = \frac{2}{29}D$. U holda

$$-\frac{7}{29}Dx + \frac{2}{29}Dz + D = 0 \text{ yoki} \\ 7x - 2z - 29 = 0.$$

3) Oxyz tekislikka parallel tekislik tenglamasi $By + D = 0$ bo'ladi.

Bundan $M_0(1;-2;3)$ nuqtada $-2B + D = 0$ yoki $D = 2B$ kelib chiqadi. U holda $By + 2B = 0$ yoki $y + 2 = 0$.



35-shakl

Tekislikning (3.4.1)-(3.4.8) tenglamalaridan har birini boshqalaridan keltirib chiqarish mumkin. Masalan, (3.1.8) tenglamani (3.1.7) tenglamaga o'tkazish uchun (3.1.8) tenglikning chap va o'ng tomonini *normallovchi ko'paytuvchi* deb ataluvchi $M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ songa ko'paytiriladi. Bunda M ko'paytuvchining ishorasi D koeffitsiyentning ishorasiga qarama-qarshi qilib tanlanadi.

3.4.3. Fazoda ikki tekislikning o'zaro joylashishi

Ikki tekislik orasidagi burchak

Ikki tekislikning normal vektorlari orasidagi burchakka *ikki tekislik orasidagi burchak* deyiladi.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan σ_1, σ_2 tekisliklar orasidagi burchak φ ga teng bo'lsin.

U holda $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ va $\varphi = (\sigma_1, \sigma_2) = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ bo'ladi (35-shakl).

Ikki vektor orasidagi burchak kosinusi formulasidan topamiz:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

140 Tekislik

Odatda ikki tekislik orasidagi burchak deyinganida 90° dan oshmagan burchak tushuniladi. Shu sababli

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.4.9)$$

4.5-misol. $x + y + z - 1 = 0$, $x - 2y + 3z - 1 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping (36-shakl).

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra:

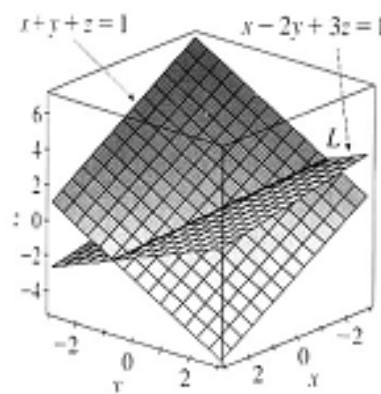
$$\vec{n}_1 = \{1; 1; 1\}, \quad \vec{n}_2 = \{1; -2; 3\}.$$

U holda

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 1 + 1(-2) + 1 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{42}}.$$

Bundan

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^\circ.$$



36-shakl

Ikki tekislikning perpendikularlik sharti

$\sigma_1 \perp \sigma_2$ bo'lsin. U holda $\cos \varphi = 0$ va (3.4.9) tenglikdan topamiz:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (3.4.10)$$

4.6-misol. $M_1(1; 2; 1)$, $M_2(0; 3; 4)$ nuqtalardan o'tuvchi va $x + 2y - z = 0$ tekislikka perpendikular tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Tekislik tenglamasini $Ax + By + Cz + D = 0$ ko'rinishida izlaymiz.

Misolning shartiga ko'ra:

$$\begin{cases} A + 2B - C = 0 & (\text{tekislik } x + 2y - z = 0 \text{ tekislikka } \perp), \\ A + 2B + C = -D & (\text{tekislik } M_1(1; 2; 1) \text{ nuqtadan o'tadi}), \\ 3B + 4C = -D & (\text{tekislik } M_2(0; 3; 4) \text{ nuqtadan o'tadi}). \end{cases}$$

Sistemaning yechimi: $A = -\frac{7}{6}D$, $B = \frac{1}{3}D$, $C = -\frac{1}{2}D$.

A , B , C koeffitsiyentlarni izlanayotgan tenglamaga qo'yamiz:

$$-\frac{7}{6}Dx + \frac{1}{3}Dy - \frac{1}{2}Dz + D = 0.$$

Bundan

$$7x - 2y + 3z - 6 = 0.$$

Ikki tekislikning parallellik sharti

σ_1 va σ_2 tekisliklar parallel bo'lsin. U holda $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ vektorlar kollinear bo'ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan ikki tekislikning parallellik shartini topamiz:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (3.4.11)$$

Ikki tekislikning ustma-ust tushishi

σ_1 va σ_2 tekisliklar ustma-ust tushsin. U holda birinchidan ular parallel bo'ladi. Ikki tekislikning parallellik shartidan topamiz:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda \text{ yoki}$$

$$A_1 - \lambda A_2 = 0, B_1 - \lambda B_2 = 0, C_1 - \lambda C_2 = 0. \quad (3.4.12)$$

Ikkinchidan σ_1 tekislikning har bir nuqtasi, jumladan $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta σ_2 tekislikda yotadi, ya'ni

$$A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0 + D_1 = 0, A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0 + D_2 = 0.$$

Bu tengliklardan ikkinchisini λ ga ko'paytiramiz va birinchi tenglikdan ayiramiz:

$$(A_1 - \lambda A_2)x_0 + (B_1 - \lambda B_2)y_0 + (C_1 - \lambda C_2)z_0 + (D_1 - \lambda D_2) = 0.$$

Bundan (3.4.12) tengliklarni hisobga olsak $D_1 - \lambda D_2 = 0$ yoki $\frac{D_1}{D_2} = \lambda$ bo'ladi.

Demak,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (3.4.13)$$

(3.4.13) tengliklar tekisliklarning ustma-ust tushish shartini ifodalaydi.

3.4.4. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa

Nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligiga *nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa* deyiladi.

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta va $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama bilan σ tekislik berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan σ tekislikka tushirilgan perpendikularning asosini $M_1(x_1; y_1; z_1)$ bilan belgilaymiz (37-shakl).

U holda M_0 nuqtadan σ tekislikkacha bo'lgan masofa $d = \left| \Pi_{p_{\vec{n}}} \overrightarrow{M_1 M_0} \right|$

bo'ladi, bu yerda $\overrightarrow{M_1 M_0} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1\}$.

Ikki vektor skalyar ko'paytmasining xossasiga ko'ra

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqta σ tekislikda yotgani sababli $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, ya'ni $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$ bo'ladi.

Bundan

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.4.14)$$

142 Tekislik

Shunday qilib, *nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa* (3.4.14) formula bilan topiladi.

4.7-misol. $M_0(5;4;-1)$ nuqtadan $M_1(3;0;3)$, $M_2(0;4;0)$ va $M_3(0;4;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. Avval berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-3 \\ 0-3 & 4 & 0-3 \\ 0-3 & 4 & -3-3 \end{vmatrix} = 0.$$

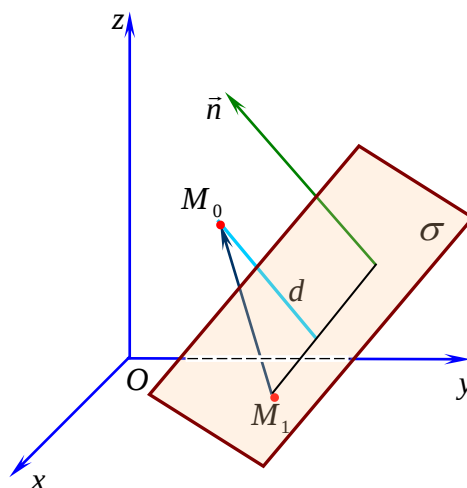
Bundan

$$-12 \cdot (x-3) - 9 \cdot y + 0 \cdot (z-3) = 0 \text{ yoki}$$

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

$M_0(5;4;-1)$ nuqtadan $4x + 3y - 12 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani (3.4.14) formula bilan hisoblaymiz:

$$d = \frac{|4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2}} = 4(b).$$



37-shakl

3.4. Mashqlar

3.4.1. $M_0(2;-1;3)$ nuqtadan o'tuvchi va shu nuqtaning radius vektoriga perpendikular bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.2. $\vec{n} = \{2;-3;4\}$ vektorga perpendikular bo'lgan va Oz manfiy yarim o'qda 5 ga teng kesma ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.3. $M(2;3;-1)$ nuqtadan o'tuvchi $2x - 3y + 5z - 4 = 0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.4. $M(2;5;-1)$ nuqtadan o'tuvchi $2x + 3y - 4z + 5 = 0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.5. Tekislik tenglamalarini tuzing: 1) $M_0(1;3;-2)$ nuqtadan va Ox o'qdan o'tuvchi; 2) $M_0(2;-1;3)$ nuqtadan o'tuvchi va Oy o'qqa perpendikular; 3) $M_0(3;-2;4)$ nuqtadan o'tuvchi va Oxy tekislikka parallel; 4) $M_1(2;-3;1)$, $M_2(3;4;0)$ nuqtalardan o'tuvchi va Oy o'qqa parallel; 5) koordinatalar boshidan va $M_1(3;-4;2)$, $M_2(-1;3;4)$ nuqtalardan o'tuvchi.

3.4.6. Tekislik tenglamalarini tuzing: 1) $M_0(2;-5;4)$ nuqtadan Oy o'qdan o'tuvchi; 2) $M_0(3;7;-1)$ nuqtadan o'tuvchi va Ox o'qqa perpendikular; 3) $M_0(2;-3;4)$ nuqtadan o'tuvchi va Oxz tekislikka parallel; 4) $M_1(2;1;-2)$, $M_2(-7;-2;1)$ nuqtalardan o'tuvchi va Oy o'qqa parallel; 5) koordinatalar boshidan va $M_1(1;2;-1)$, $M_2(-3;0;4)$ nuqtalardan o'tuvchi.

3.4.7. $2x + y - 3z + 6 = 0$ tekislikning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.

3.4.8. $2x + 3y - 5z + 30 = 0$ tekislik koordinata o'qlarida qanday kesmalar ajratadi?

3.4.9. $M_1(2;-1;3)$, $M_2(-1;3;2)$ nuqtalardan o'tuvchi va Ox , Oz o'qlarida teng musbat kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.10. $M_0(2;5;-2)$ nuqtadan o'tuvchi va Ox, Oz o'qlarida Oy o'qqa nisbatan uch barobar uzun kesma ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.11. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing:

1) $M_1(2;1;-1)$, $M_2(3;1;0)$, $M_3(-1;2;-1)$; 2) $M_1(1;-2;3)$, $M_2(4;1;3)$, $M_3(1;2;-1)$.

3.4.12. $M_0(3;3;3)$ nuqtadan koordinata tekisliklariga tushirilgan perpendikular asoslari orqali o'tgan tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.13. $M_1(1;1;1)$, $M_2(0;2;1)$ nuqtalardan o'tuvchi va $\vec{a} = \{2;0;1\}$ vektorga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.14. $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$ nuqtalardan o'tuvchi va $\vec{a} = \{3;0;1\}$ vektorga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.15. $M_0(1;-2;3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{a} = \{2;1;1\}$, $\vec{b} = \{3;1;-1\}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.16. $M_0(0;1;2)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{a} = \{2;0;1\}$, $\vec{b} = \{1;1;0\}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.17. $9x - 2y + 6z - 11 = 0$ tekislik tenglamasining kesmalarga nisbatan va normal ko'rinishlarini yozing.

3.4.18. $5x + 7y - 34z + 5 = 0$ tekislik tenglamasining kesmalarga nisbatan va normal ko'rinishlarini yozing.

3.4.19. Tekisliklar orasidagi burchakni toping:

1) $x - 2y + 2z + 5 = 0$ va $x - y - 3 = 0$; 2) $3x - y + 2z + 12 = 0$ va $5x + 9y - 3z - 1 = 0$;
3) $2x - 3y - 4z + 4 = 0$ va $5x + 2y + z - 3 = 0$; 4) $x + 2y + 3 = 0$ va $y + 2z - 5 = 0$

3.4.20. m va n ning qanday qiymatlarida tekisliklar parallel bo'ladi:

1) $3x - 5y - nz - 2 = 0$, $mx + 2y - 3z + 11 = 0$; 2) $nx - 6y - 6z + 4 = 0$, $2x + my + 3z - 8 = 0$.

3.4.21. m ning qanday qiymatlarida tekisliklar perpendikular bo'ladi:

1) $4x - 7y + 2z - 3 = 0$, $-3x + 2y + mz + 5 = 0$; 2) $x - my + z = 0$, $2x + 3y + mz - 4 = 0$.

3.4.22. Tekislik tenglamalarini tuzing:

1) $M_0(2;2;-2)$ nuqtadan o'tuvchi va berilgan tekislikka parallel:

a) $x - 2y - 3z = 0$;

b) $2x + 3y + z - 1 = 0$;

2) $M_0(-1;-1;2)$ nuqtadan o'tuvchi va berilgan ikki tekislikka perpendikular:

a) $x + 2y - 2z + 6 = 0$, $x - 2y + z + 4 = 0$;

b) $x + 3y + z - 1 = 0$, $2x - y + z - 2 = 0$.

3) $M_1(5;-4;3)$, $M_2(-2;1;8)$ nuqtalardan o'tuvchi va berilgan tekislikka perpendikular:

a) Oxy ; b) Oyz ; c) Oxz .

3.4.23. $M(-2;1;3)$ nuqtadan va $x - 2y - 2z + 6 = 0$, $2x + 3y - z + 3 = 0$ tekisliklarning kesishish chizig'idan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.24. $M(2;1;-2)$ nuqtadan o'tuvchi va $x + 3y + 2z + 1 = 0$, $3x + 2y - z + 8 = 0$ tekisliklar

144 Tekislik

kesishish chizig'iga perpendikular tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.25. $M_1(2;0;0)$, $M_2(0;1;0)$ nuqtalardan o'tuvchi va Oxy tekislik bilan 45° li burchak tashkil qiluvchi tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.26. Tekisliklarning kesishish nuqtasini toping:

1) $x + 2y - z + 2 = 0$, $x - y - 2z + 7 = 0$, $3x - y - 2z + 11 = 0$;

2) $x - 2y - 4z = 0$, $x + 2y - 4z + 4 = 0$, $3x + y - z - 4 = 0$.

3.4.27. $M_0(5;-1;4)$ nuqtadan $M_1(3;3;0)$, $M_2(0;-3;4)$, $M_3(0;0;4)$ nuqtalar yotuvchi tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

3.4.28. Ox oqning $2x + y - 2z + 6 = 0$, $x + 2y + 2z - 9 = 0$ tekisliklardan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtasini toping.

3.4.29. $2x - y - 2z - 5 = 0$ tekislikka parallel bo'lgan va $M_0(4;3;-2)$ nuqtadan $d = 3$

masofadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

3.4.30. Ikki yo'qi $12x + 3y - 4z - 4 = 0$ va $12x + 3y - 4z + 22 = 0$ tekisliklarda yotuvchi kubning hajmini toping.

3.4.31. $M(4;3;1)$ nuqtaning $3x - 4y + 12z + 14 = 0$ tekislikdan chetlashishini toping.

3.4.32. $M(3;0;1)$ nuqtaning $2x + 9y - 6z + 33 = 0$ tekislikdan chetlashishini toping.

3.4.33. $10x + 2y - 2z - 5 = 0$, $5x + y - z - 1 = 0$ parallel tekisliklar orasidagi masofani toping.

3.5. FAZODAGI TO'G'RI CHIZIQ

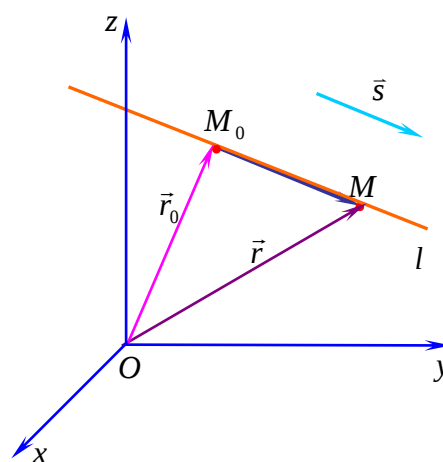
3.5.1. Fazodagi to'g'ri chiziq tenglamalari

To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

Analitik geometriyaning bir qancha masalalarini yechishda fazodagi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataluvchi maxsus tenglama keng qo'llaniladi. Bu tenglamani keltirib chiqaramiz.

Fazoda biror to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan (yoki bu to'g'ri chiziqda yotuvchi) nolga teng bo'lmagan har qanday vektorga bu to'g'ri chiziqning *yo'naltiruvchi vektori* deyiladi.

Berilgan $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o'tuvchi va yo'naltiruvchi vektori $\vec{s} = \{p; q; r\}$ bo'lgan l to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Buning uchun l to'g'ri chiziqning ixtiyoriy $M(x; y; z)$



38-shakl

nuqtasini olamiz va $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ vektorni yasaymiz (38-shakl).

Bunda $\vec{s}$ va $\overrightarrow{M_0M}$ vektorlar kollinear bo'ladi. Ikki vektoring kollinearlik shartidan topamiz:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \quad (3.5.1)$$

Bu tengliklarni l to'g'ri chiziqda yotuvchi har bir $M(x; y; z)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi, va aksincha agar $M(x; y; z)$ nuqta l to'g'ri chiziqda yotmasa uning koordinatalari (3.5.1) tengliklarni qanoatlantirmaydi, chunki bunda $\vec{s}$ va $\overrightarrow{M_0M}$ vektorlar kollinear bo'lmaydi.

(3.5.1) tengliklarga *to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Bunda ixtiyoriy $\vec{s}$ yoʻnaltiruvchi vektorning p, q, r koordinatalari bu toʻgʻri chiziqning yoʻnaltiruvchi parametrlari va $\vec{s}$ vektorning yoʻnaltiruvchi kosinuslari bu toʻgʻri chiziqning yoʻnaltiruvchi kosinuslari deb ataladi.

Toʻgʻri chiziqning kanonik tenglamasidan uning **boshqa tenglamalarini** keltirib chiqaramiz.

Toʻgʻri chiziqning kanonik tenglamasini

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q}, \\ \frac{x-x_0}{p} = \frac{z-z_0}{r} \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi deb qarash mumkin.

Bu tenglamalarning har ikkalasi birinchi darajali tenglamalar hisoblanadi, yaʼni tekislik tenglamalari boʻladi. Bundan **fazodagi toʻgʻri chiziq ikkita parallel boʻlmagan tekislikning kesishisidan hosil boʻladi** degan xulosaga kelish mumkin.

Masalan, $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$ toʻgʻri chiziq $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2}$ va $\frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$ tekisliklarning kesishish chizigʻi boʻladi (39-shakl) [11].

Shunday qilib, agar σ_1 va σ_2 tekisliklarning $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ normal vektorlari kollinear boʻlmasa, bu tekisliklarning kesishishidan hosil boʻlgan l toʻgʻri chiziq quyidagi tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3.5.2)$$

Bu tenglamalar sistemaga **toʻgʻri chiziqning umumiy tenglamalari** deyiladi.

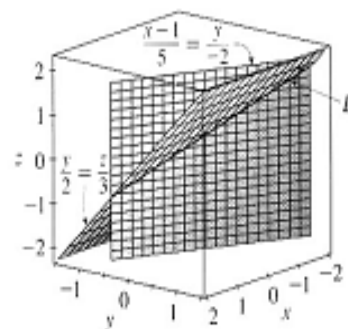
(3.5.2) umumiy tenglamalari bilan berilgan toʻgʻri chiziqning kanonik tenglamasi quyidagi tartibda topiladi.

1. Toʻgʻri chiziqning biror $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtasi topiladi. Buning uchun **avval nomaʼlum x_0, y_0, z_0 koordinatalardan biriga qiymat beriladi va bu qiymat (3.5.2) tenglamalardagi mos oʻzgaruvchi oʻrniga qoʻyiladi, keyin boshqa koordinatalar (3.5.2) sistemani yechish orqali aniqlanadi.**

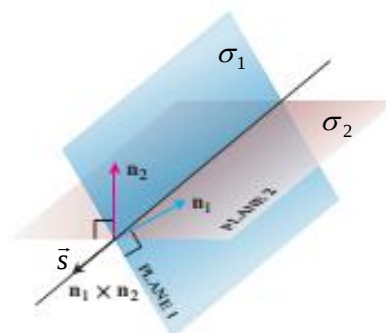
2. Toʻgʻri chiziqning $\vec{s}$ yoʻnaltiruvchi vektori topiladi. l toʻgʻri chiziq $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlarga perpendequlyar boʻlgani uchun $\vec{s} \perp \vec{n}_1$, $\vec{s} \perp \vec{n}_2$ boʻladi (38-shakl). Bundan

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (3.5.3)$$

vektor aniqlanadi.



39-shakl



40-shakl

3. Topilgan M_0 nuqta va $\vec{s}$ vektor asosida kanonik tenglama tuziladi.

5.1-misol. $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0 \end{cases}$ tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechih. Misol shartiga ko'ra: $A_1 = 1, B_1 = -2, C_1 = 3, A_2 = 2, B_2 = 1, C_2 = -4$.

To'g'ri chiziqning $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtasini topish uchun $z_0 = 0$ deb olamiz. U holda

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 = -1, \\ 2x_0 + y_0 = 8 \end{cases}$$

sistemadan $x_0 = 3, y_0 = 2$ ekanini topamiz.

To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorini (3.5.3) formuladan topamiz:

$$\vec{s} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{5; 10; 5\}.$$

M_0 nuqta va $\vec{s}$ vektorning koordinatalarini (3.5.1) tenglamaga qo'yamiz:

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{10} = \frac{z}{5}$$

yoki

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}.$$

(3.5.1) tenglamada

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} = t, \quad t \in R$$

belgilash kiritamiz. Bundan

$$\begin{aligned} x &= x_0 + pt, \\ y &= y_0 + qt, \\ z &= z_0 + rt \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

tenglamalar kelib chiqadi, bu yerda $t \in R$ – parametr.

(3.5.4) tenglamalarga *to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari* deyiladi.

Ma'lumki, fazodagi chiziqning uchta parametrik (skalyar) tenglamalarini bitta vektor tenglama bilan ifodalash mumkin.

Demak, (3.5.4) tenglamalarni

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \quad (3.5.5)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\vec{r} = \{x; y; z\}$, $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$ – mos ravishda $M(x; y; z)$, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtalarning radius vektorlari; $\vec{s} = \{p; q; r\}$ – to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori (38-shakl).

(3.5.5) tenglamaga *to'g'ri chiziqning vektor tenglamasi* deyiladi.

Berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ va $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalardan o'tuvchi l to'g'ri chiziqli tenglamasini tuzamiz. Buning uchun l to'g'ri chiziqli tenglamasining yo'naltiruvchi vektori sifatida

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

vektorni olamiz va (3.5.1) tengliklardan

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (3.5.6)$$

tengliklarni keltirib chiqaramiz.

Bu tengliklarga *berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasi* deyiladi.

3.5.2. Fazoda ikki to'g'ri chiziqli tenglamasining o'zaro joylashishi

Ikki to'g'ri chiziqli tenglamasidagi burchak

$\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1}$ va $\frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}$ tenglamalari bilan berilgan ikki l_1 va l_2 to'g'ri chiziqli tenglamasidagi burchak φ bo'lsin.

Bunda to'g'ri chiziqli tenglamalarning yo'naltiruvchi vektorlari $\vec{s}_1 = \{p_1; q_1; r_1\}$, $\vec{s}_2 = \{p_2; q_2; r_2\}$ ga va ular orasidagi burchak to'g'ri chiziqli tenglamasidagi burchaklardan biriga teng, ya'ni $\varphi = (\hat{l}_1, \hat{l}_2) = (\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ bo'ladi.

φ burchak kosinusini topamiz:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}. \quad (3.5.7)$$

5.2-misol. $x = 3t - 2$, $y = 0$, $z = -t + 3$ va $x = 2t - 1$, $y = 0$, $z = t - 3$ to'g'ri chiziqli tenglamasidagi o'tmas burchakni toping.

Yechish. To'g'ri chiziqli tenglamalarini kanonik shaklga keltiramiz:

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z - 3}{-1}, \quad \frac{x + 1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z + 3}{1}.$$

U holda (3.5.7) formuladan topamiz:

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

148 *Fazodagi to'g'ri chiziqli*
O'tmas burchak uchun $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'ladi. Bundan $\varphi = 135^\circ$.

Ikki to'g'ri chiziqli tenglamasining perpendikularlik sharti

$l_1 \perp l_2$ bo'lsin. U holda $\cos \varphi = 0$ va (3.5.7) tenglikdan topamiz:

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0. \quad (3.5.8)$$

Bu tenglik ikki to'g'ri chiziqli tenglamasining perpendikularlik shartini ifodalaydi.

Ikki to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti

l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsin. U holda $\vec{s}_1 = \{p_1; q_1; r_1\}$ va $\vec{s}_2 = \{p_2; q_2; r_2\}$ vektorlar kollinear bo'ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan ikki to'g'ri chiziqlarning parallellik shartini keltirib chiqaramiz:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}. \quad (3.5.9)$$

Ikki to'g'ri chiziqlarning bir tekislikda yotishi

l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotsin. $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – l_1 to'g'ri chiziqlarning nuqtasi va $M_2(x_2; y_2; z_2)$ – l_2 to'g'ri chiziqlarning nuqtasi bo'lsin.

U holda $\vec{s}_1 = \{p_1; q_1; r_1\}$, $\vec{s}_2 = \{p_2; q_2; r_2\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ vektorlar shu tekislikda yotadi, ya'ni bu vektorlar komplanar bo'ladi.

Vektorlarning komplanarlik shartiga ko'ra topamiz:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.5.10)$$

Bu tenglik ikki to'g'ri chiziqlarning bir tekislikda yotishi shartini ifodalaydi.

Ikki to'g'ri chiziqlarning ayqash bo'lishi

l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar ayqash bo'lsa, $\vec{s}_1 = \{p_1; q_1; r_1\}$, $\vec{s}_2 = \{p_2; q_2; r_2\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ vektorlar bir tekislikda yotmaydi, ya'ni komplanar bo'lmaydi.

Shu sababli

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.5.11)$$

bo'ladi. Bu shart ikki to'g'ri chiziqlarning ayqash bo'lishini belgilaydi.

Ikki to'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushishi

l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushsin. U holda bu to'g'ri chiziqlar birinchidan parallel bo'ladi va ikkinchidan $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ vektor bu to'g'ri chiziqlardan birida, masalan l_1 da yotadi. *Fazodagi to'g'ri chiziqlar* **149**

Shu sababli

$$\begin{cases} \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}, \\ \frac{x_2 - x_1}{p_1} = \frac{y_2 - y_1}{q_1} = \frac{z_2 - z_1}{r_1}. \end{cases} \quad (3.5.12)$$

(3.5.12) tengliklar ikki to'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushish shartini ifodalaydi.

3.5.3. Fazoda to'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro joylashishi

To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak

To'g'ri chiziq bilan uning tekislikdagi proeksiyasi orasidagi burchakka *to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak* deyiladi.

$$l: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} \text{ to'g'ri chiziq}$$

bilan $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$ orasidagi burchak φ bo'lsin. U holda to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{s} = \{p; q; r\}$ bilan tekislikning normal vektori $\vec{n} = \{A; B; C\}$ orasidagi burchak $\psi = 90^\circ - \varphi$ bo'ladi (41-shakl).

$\cos \psi = \sin \varphi$ tenglikni hisobga olib, topamiz:

$$\sin \varphi = \frac{|Ap + Bq + Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \quad (3.5.13)$$

5.3-misol. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{-2}$ to'g'ri chiziq bilan $2x - y - z + 9 = 0$

tekislik orasidagi o'tkir burchakni toping.

Yechish. Izlanayotgan burchakni (3.5.13) formula bilan topamiz:

$$\sin \varphi = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Bundan $\varphi = 35^\circ$.

To'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikularlik sharti

$l \perp \sigma$ bo'lsin. U holda to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{s} = \{p; q; r\}$ va tekislikning normal vektori $\vec{n} = \{A; B; C\}$ vektorlar kollinear bo'ladi.

Bundan
150 Fazodagi to'g'ri chiziq

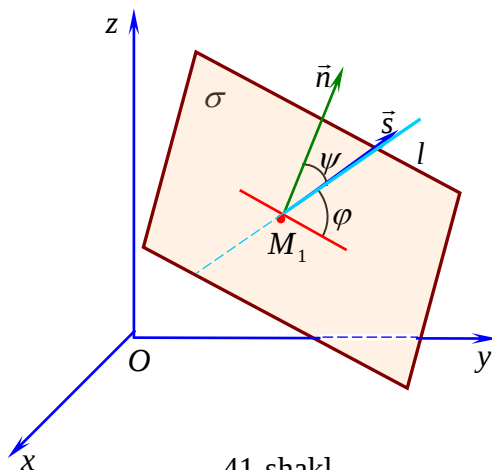
$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r} \quad (3.5.14)$$

to'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikularlik sharti kelib chiqadi.

To'g'ri chiziq bilan tekislikning paralellik sharti

$l \parallel \sigma$ bo'lsin. U holda, $\vec{s} \perp \vec{n}$ bo'ladi.

Bundan



41-shakl

$$Ap + Bq + Cr = 0. \quad (3.5.15)$$

Bu tenglik to'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik shartini ifodalaydi.

5.4-misol. $M_0(-1;2;-3)$ nuqtadan o'tuvchi va $2x - 3y + 6z - 1 = 0$ tekislikka perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. To'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikularlik shartidga ko'ra

$$\frac{2}{p} = \frac{-3}{q} = \frac{6}{r}.$$

Bundan $q = -\frac{3}{2}p$, $r = 3p$. (3.5.1) tenglamadan topamiz:

$$\frac{x+1}{p} = \frac{y-2}{-\frac{3}{2}p} = \frac{z+3}{3p} \quad \text{yoki} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}.$$

Bu masalani boshqacha yechish mumkin. To'g'ri chiziq tekislikka perpendikular bo'lgani sababli tekislikning normal vektori to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori bo'ladi, ya'ni $\vec{s} = \{2; -3; 6\}$.

U holda $M_0(-1;2;-3)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}$$

5.5-misol. m ning qanday qiymatida $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{m} = \frac{z+3}{m+1}$ to'g'ri chiziq va $3x + y - 3z - 1 = 0$ tekislik parallel bo'ladi?

Yechish. m ning izlanayotgan qiymatini to'g'ri chiziq va tekislikning parallellik shartidan topamiz: $3 \cdot 3 + 1 \cdot m + (-3) \cdot (m+1) = 0$. Bundan $m = 3$.

To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishishi

Agar $l \parallel \sigma$ bo'lmasa, u holda to'g'ri chiziq va tekislik kesishadi. Shu sababli

$$Ap + Bq + Cr \neq 0 \quad (3.5.16)$$

bo'ladi. Bu shart to'g'ri chiziq bilan tekislikning keshishishini belgilaydi.

Shunday qilib, (3.5.16) shart bajarilsa to'g'ri chiziq bilan tekislik qandaydir nuqtada kesishadi. Bu nuqta $M_1(x_1, y_1, z_1)$ bo'lsin. U holda $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtaning koordinatalari to'g'ri chiziq va tekislikning tenglamalarini qanoatlantiradi:

$$\frac{x_1 - x_0}{p} = \frac{y_1 - y_0}{q} = \frac{z_1 - z_0}{r}, \quad \text{Fazodagi to'g'ri chiziq} \quad (3.5.17)$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \quad (3.5.18)$$

Bu tenglamalardan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtani topish quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1°. (3.5.17) tenglama parametrik ko'rihishga keltiriladi:

$$x_1 = x_0 + pt, \quad y_1 = y_0 + qt, \quad z_1 = z_0 + rt; \quad (3.5.19)$$

2°. x_1, y_1 va z_1 lar (3.5.18) tenglamaga qo'yiladi va u t ga nisbatan yechiladi;
 3°. t ning topilgan qiymati (3.5.19) tenglamalarga qo'yiladi va $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta aniqlanadi.

5.6-misol. . $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$ to'g'ri chiziq bilan $2x + 3y - z - 3 = 0$ tekislikning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. 1°. $\frac{x_1+2}{-1} = \frac{y_1+1}{-2} = \frac{z_1-1}{3} = t,$

$$x_1 = -2 - t, \quad y_1 = -1 - 2t, \quad z_1 = 1 + 3t;$$

$$2^\circ. 2(-2 - t) + 3(-1 - 2t) - (1 + 3t) - 3 = 0 \Rightarrow t = -1;$$

$$3^\circ. x_1 = -2 - (-1) = -1, \quad y_1 = -1 - 2 \cdot (-1) = 1, \quad z_1 = 1 + 3 \cdot (-1) = -2.$$

Demak, $M_1(-1; 1; -2)$.

To'g'ri chiziqning tekislikda yotishi

l to'g'ri chiziq σ tekislikda yotsin. U holda birinchidan $\vec{s} \perp \vec{n}$ bo'ladi va ikkinchidan to'g'ri chiziqning $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtasi tekislikda ham yotadi.

Shu sababli

$$\begin{cases} Ap + Bq + Cr = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \quad (3.5.20)$$

(3.5.20) shart to'g'ri chiziqning tekislikda yotishini belgilaydi.

3.5.4. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqta va $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ tenglama bilan l to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. l to'g'ri chiziq $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o'tadi va $\vec{s} = \{p; q; r\}$ yo'naltiruvchi vektorga ega bo'ladi. $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa d bo'lsin.

Izlanayotgan d masofa $\overrightarrow{M_0M_1}$ va $\vec{s}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm balandligining uzunligiga teng bo'ladi (42-shakl). Bu parallelogrammning yuzi

$|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|$ ga teng.

Bundan
 152 Puzodagi to'g'ri chiziq

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} \quad (3.5.21)$$

kelib chiqadi.

5.7-misol. $M_1(1;-1;-2)$ nuqtadan

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2} \text{ to'g'ri chiziqqacha}$$

bo'lgan masofani toping.

Yechish. Misolning shartiga ko'ra:

$$M_1(1;-1;-2), M_0(-3;-2;8), \vec{s} = \{3;2;-2\}.$$

Bundan

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{1 - (-3); -1 - (-2); -2 - 8\} = \{4;1;-10\}.$$

U holda

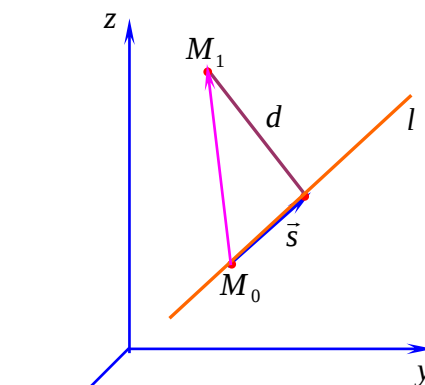
$$\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2 + 20)\vec{i} - (-8 + 30)\vec{j} + (8 - 3)\vec{k} = 18\vec{i} - 22\vec{j} + 5\vec{k},$$

$$|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}| = \sqrt{18^2 + (-22)^2 + 5^2} = 7\sqrt{17}, |\vec{s}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}.$$

(3.5.21) formula bilan topamiz:

$$d = \frac{7\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 7(b).$$



42-shakl

3.5. Mashqlar

3.5.1. Berilgan to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamasini tuzing: 1) $M_1(1;1;-2)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{s} = \{2;3;-1\}$ vektorga parallel; 2) $M_2(2;-3;-1)$ nuqtadan o'tuvchi va Oy o'qqa parallel; 3) $M_3(2;-1;-2)$ nuqtadan o'tuvchi va $6x + 2y - 4z - 5 = 0$ tekislikka perpendikular.

3.5.2. $M_0(2;-3;5)$ nuqtadan o'tuvchi berilgan to'g'ri chiziq larga parallel to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing:

$$1) \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}; \quad 2) x = 3 + 2t, y = -1 + 3t, z = 1 - t; \quad 3) \begin{cases} x + 3y + z + 6 = 0, \\ 2x - y - 4z + 3 = 0. \end{cases}$$

3.5.3. $M(-3;6;2)$ nuqtadan o'tuvchi va Oz o'qni to'g'ri burchak ostida kesuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

$$\text{3.5.4. } M(-1;2;-3) \text{ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlari bilan } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{2\pi}{3}$$

burchaklar tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamalarini tuzing.

3.5.5. Berilgan nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasini tuzing:

$$1) M_1(-1;2;2), M_2(3;1;-2);$$

$$2) M_1(1;-2;1), M_2(3;1;-1).$$

3.5.6. $M(2;2;-1)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{a} = \{1;1;2\}$, $\vec{b} = \{-1;3;1\}$ vektorlarga perpendikular to'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasini tuzing.

3.5.7. To'g'ri chiziq tenglamasini parametrik ko'rinishga keltiring:

$$1) \begin{cases} 5x + y - 3z + 5 = 0, \\ 8x - 4y - z + 6 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

3.5.8. To'g'ri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring:

$$1) \begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0, \\ y - z - 2 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

3.5.9. Uchburchakning uchlari berilgan: $A(-1;2;3), B(-1;-2;1), C(3;4;5)$. A uchdan o'tkazilgan mediana tenglamasini tuzing.

3.5.10. $ABCD$ parallelogrammning ikki uchi $A(-1;2;0), B(4;1;3)$ va diagonallari kesishish nuqtasi $O(-2;1;2)$ berilgan. Parallelogramm CD tomonining tenglamasini tuzing.

3.5.11. To'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchakni toping:

$$1) x = -2 + 3t, y = 0, z = 3 - t \text{ va } x = -1 + 2t, y = 0, z = -3 + t;$$

$$2) \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3} \text{ va } \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

3.5.12. $M(-2;3;-1)$ nuqtadan o'tuvchi va berilgan to'g'ri chiziqlarga perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing:

$$1) \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}, \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}; \quad 2) \frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2}, \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{4}.$$

3.5.13. $M(1;-1;2)$ nuqtadan o'tuvchi va $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

3.5.14. To'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishini aniqlang:

$$1) \frac{x-5}{-4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{2}, x = 2 + 8t, y = 6t, z = -3 - 4t;$$

$$2) \frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}, \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}.$$

3.5.15. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni toping:

$$1) \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}, 2x + 2y - 9 = 0; \quad 2) \begin{cases} x - 2y - 1 = 0, \\ y - z - 2 = 0, \end{cases} x + 2y - z + 6 = 0.$$

3.5.16. To'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro joylashishini aniqlang:

$$1) \begin{cases} x - y + 4z - 6 = 0, \\ 2x + y - z + 3 = 0, \end{cases} 3x - y + 6z - 12 = 0; \quad 2) \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+2}{3}, 2x + y - 4z - 8 = 0.$$

3.5.17. To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini toping:

$$1) \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{5} = \frac{z-5}{4}, x - 3y - 2z + 5 = 0; \quad 2) \frac{x}{2} = \frac{y+13}{17} = \frac{z+7}{13}, 5x - z - 4 = 0.$$

3.5.18. $M(4;5;-6)$ nuqtadan berilgan tekislikka tushirilgan perpendikular tenglamasini tuzing: 1) $x - 2y - 3 = 0$; 2) $x - y + z - 5 = 0$.

154. Fazodagi to'g'ri chiziq

3.5.19. m va n ning qanday qiymatlarida $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-1}$ to'g'ri chiziq:

$$1) mx + 2y - 4z + n = 0 \text{ tekislikda yotadi}; \quad 2) mx + ny + 3z - 5 = 0 \text{ tekislikka perpendikular}$$

bo'ladi; 3) $2x + 3y + 2mz - n = 0$ tekislikka parallel bo'ladi.

3.5.20. $M(1;-1;-1)$ nuqtadan o'tuvchi va berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikular tekislik tenglamasini tuzing:

$$1) \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+2}{4};$$

$$2) \frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-2}.$$

3.5.21. $M(0;1;2)$ nuqtadan va $\begin{cases} x-3y+5=0, \\ 2x+y+z-2=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

3.5.22. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{5}$ to'g'ri chiziq bilan $x+y-2z-4=0$ tekislikning kesishish nuqtasini toping.

3.5.23. $M(2;3;4)$ nuqtaning $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ to'g'ri chiziqdagi proyeksiyasini toping.

3.5.24. $\begin{cases} 8x+2y+3z+6=0, \\ 2x+4y+z+1=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{-2}$ to'g'ri chiziqqa parallel tekislik tenglamasini tuzing.

3.5.25. $\begin{cases} 3x+y-4z+5=0, \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqdan va $M(1;-1;2)$ nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasini tuzing.

3.5. 26. $M(2;-3;-1)$ nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping:

$$1) \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{5};$$

$$2) \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

3.6. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

Oxyz koordinatalar sistemasida x, y, z o'zgaruvchilarning ikkinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanuvchi sirt *ikkinchi tartibli sirt* deyiladi.

Uchta x, y va z o'zgaruvchining ikkinchi darajali tenglamasi umumiy ko'rinishda

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0, \quad (3.6.1)$$

kabi yoziladi, bu yerda $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L$ – o'zgarmaslarlar; $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Har qanday (3.6.1) ko'rinishdagi tenglamani koordinata o'qlarini parallel ko'chirish va burish orqali *kanonik ko'rinishga* keltirish mumkin. Kanonik tenglamada har bir o'zgaruvchi faqat bir marta, bitta (yo nolinch, yo birinchi, yo ikkinchi) darajada qatnashadi. (3.6.1) tenglama koordinatalar sistemasining o'qlari sirtning simmetriya o'qlari bilan ustma-ust tushganida va koordinatalar boshi

maxsus tanlanganida (**masalan**, markaziy-simmetrik sirtlarda simmetriya markazi tanlanadi) kanonik ko'rinishni oladi.

Shu bilan birga ikkinchi tartibli sirt

$$F(x, y) = 0 \quad (G(x, y) = 0, \quad H(x, z) = 0) \quad (3.6.2)$$

tenglama bilan berilishi mumkin. Bunday tenglama bilan aniqlanuvchi sirtlar silindrik sirtlar deyiladi.

Sirtlarning shaklini tasavvur qilish va chizish uchun *«parallel kesimlar usuli»* deb ataluvchi usulni qo'llaymiz. Bunda sirtning shakli uning koordinata tekisliklari yoki bu tekisliklarga parallel tekisliklar bilan keshishish chiziqlarini (kesimlarini) tekshirish yordamida o'rganiladi.

3.6.1. Sfera

Fazoda markaz deb ataluvchi nuqtadan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga *sfera* deyiladi.

$M_0(x_0; y_0; z)$ nuqtadan R masofada yotuvchi fazodagi nuqtalarni qaraymiz. Bu nuqtalardan biri $M(x; y; z)$ nuqta bo'lsin.

Sferaning ta'rifiga ko'ra $|M_0M| = R$. Bundan

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

yoki

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \quad (3.6.3)$$

(2.6.2) tenglamaga *sferaning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Bunda $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta *sfera markazi*, R masofa *sfera radiusi* deb ataladi.

6.1-misol. Markazi $M_0(-2; 2; 1)$ nuqtada yotgan va $2x + y - 2z - 5 = 0$ tekislikka uringan sfera tenglamasini tuzing.

Yechish. Sfera tekislikka uringani sababli uning $M_0(-2; 2; 1)$ markazidan $2x + y - 2z - 5 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa sferaning radiusiga teng bo'ladi.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa formulasidan topamiz:

$$R = \frac{|2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

U holda (3.6.3) formulaga ko'ra

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9.$$

3.6.2. Ellipsoid

Oxyz koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.6.4)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga *ellipsoid* deyiladi.

Ellipsoidning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimlarini qaraymiz. Bu tekisliklarning har biri $z = h$ tenglamaga ega bo'ladi. Bunda h – birorta son.

Kesimda hosil bo'lgan chiziq

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases} \quad (3.6.5)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi.

(3.6.5) sistema tenglamalarini tekshiramiz.

$|h| > c$ bo'lganda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$ bo'ladi. Demak, (3.6.5) sirtning $z = h$ tekislik bilan kesishish nuqtasi mavjud bo'lmaydi.

$|h| = c$, ya'ni $h = \pm c$ bo'lganda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ bo'ladi. Bunda sirtlar $(0;0;c)$ va $(0;0;-c)$ nuqtalarga kesishadi va $z = c$ va $z = -c$ tekisliklar berilgan sirtga urinadi.

$|h| < c$ bo'lganda (3.6.5) tenglamalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

bu yerda $a_1 = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, $b_1 = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$.

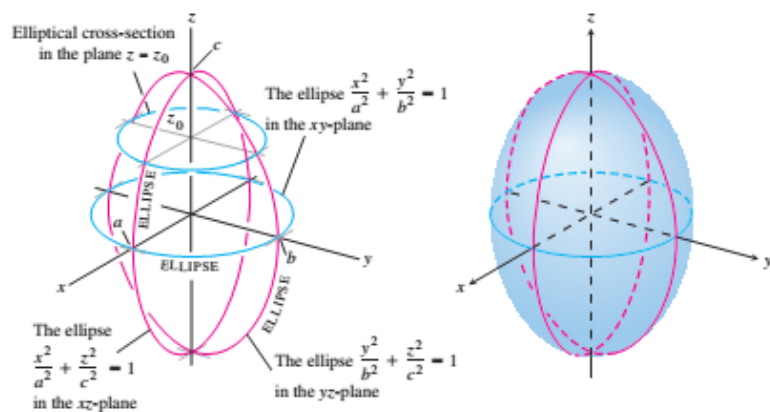
Demak, kesimda yarim o'qlari a_1 va b_1 bo'lgan ellips hosil bo'ladi (43-shakl). Bunda $|h|$ qancha kichik bo'lsa yarim o'qlar shuncha katta bo'ladi. $h = 0$ da ular o'zlarining eng katta qiymatlariga erishadi: $a_1 = a$, $b_1 = b$.

(3.6.4) sirtning $x = h$ va $y = h$ tekisliklar bilan kesimlari ham ellipslardan iborat bo'ladi.

Shunday qilib,

qaralgan kesimlar (3.6.4) tenglama bilan aniqlanuvchi sirt 43-shaklda keltirilgan ellipsoiddan iborat bo'lishini ko'rsatadi. a, b, c kattaliklar ellipsoidning *yarim o'qlari* deyiladi. Yarim o'qlar har xil bo'lganda ellipsoid *uch o'qli ellipsoid* bo'ladi. Yarim o'qlardan istalgan ikkitasi bir-biriga teng bo'lganda ellipsoid *aylanish ellipsoidi* bo'ladi. Yarim o'qlarning uchala teng bo'lganda ellipsoid tenglamasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad R = a = b = c \quad (3.6.6)$$



43-shakl

bo'lgan sferaga aylanadi.

6.2-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning Ox va Oy oqlari atrofida aylanishidan hosil

bo'lgan sirtlarning tenglamalarini toping.

Yechish. Agar ikkinchi tartibli chiziq $F(x, y) = 0$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, u holda bu sirtning Ox oqi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt $F(x; \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ tenglama bilan, Oy oqi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt esa $F(\pm\sqrt{x^2 + z^2}; y) = 0$ tenglama bilan aniqlanadi.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning Ox oqi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt tenglamasini topamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2}{b^2} = 1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Ellipsning Oy oqi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt tenglamasini shu kabi topiladi:

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hosil bo'lgan tenglamalarning har ikkalasi aylanish ellipsoidini aniqlaydi.

3.6.3. Giperboloidlar

Oxyz koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.6.7)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga *bir pallali giperboloid* deyiladi.

Bu sirtni Oxy tekislikka parallel $z = h$ tekisliklar bilan kesamiz.

Kesimda

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan bilan aniqlanuvchi chiziq hosil bo'ladi. Bu chiziq

yarim o'qlari $a_1 = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ va $b_1 = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ bo'lgan ellipsdan iborat. Yarim o'qlar $h=0$ da eng kichik qiymatlariga erishadi: $a_1 = a, b_1 = b$. $|h|$ ning o'sishi bilan ular o'sib boradi.

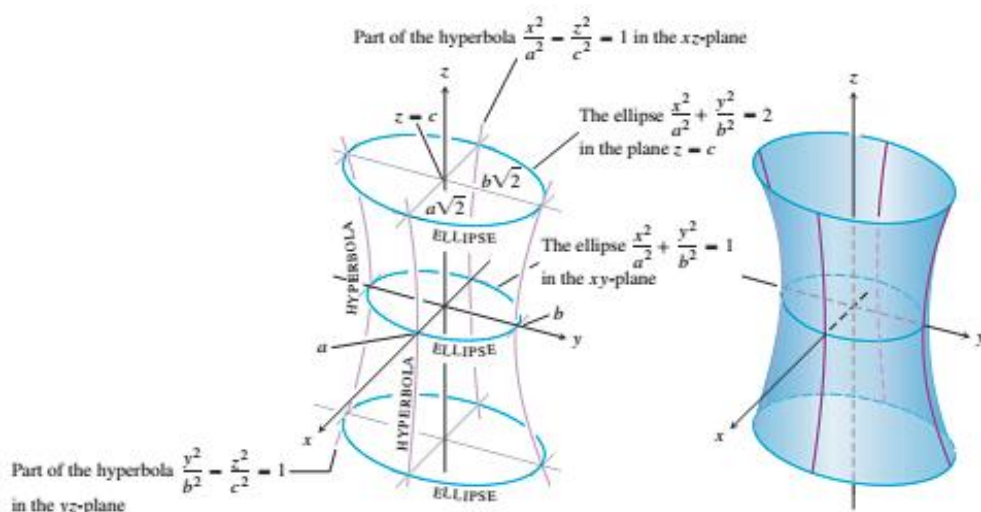
Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlarini

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemalari bilan aniqlanuvchi giperbolalardan iborat bo'ladi.

Kesimlarning tahlili shuni ko'rsatadiki (3.6.7) tenglama bilan aniqlanuvchi giperboloid musbat va manfiy yo'nalishlarida chegaralanmagan holda kengayuvchi «trubka» ko'rinishdagi sirtan iborat bo'ladi (44-shakl).

$a = b$ bo'lganda (3.6.7) tenglama *bir pallali aylanish giperboloid*ni ifodalaydi.



44-shakl

$Oxyz$ kordinatlar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (3.6.8)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga *ikki pallali giperboloid* deyiladi.

Bu sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesishish chizig'i

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h \end{cases} \quad (3.6.9)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. Bunda $|h| < c$ bo'lganda $z = h$ tekislik sirtni kesmaydi, $|h| = c$ bo'lganda $z = c$ va $z = -c$ tekisliklar sirtga $(0;0;c)$ va $(0;0;-c)$ nuqtalarga urinadi, $|h| > c$ bo'lganda $z = h$ tekislik sirtni kesadi.

$|h| > c$ bo'lganda (3.6.9) tenglamalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad \text{bu yerda } a_1 = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b_1 = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

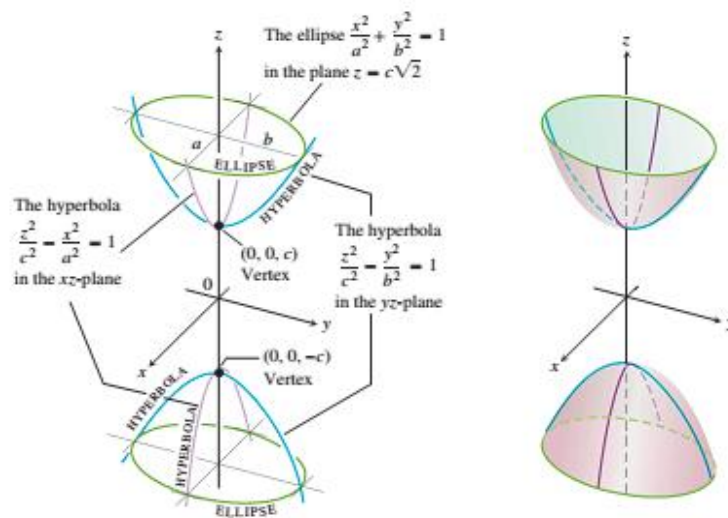
Bu chiziq $|h|$ ning o'sishi bilan yarim o'qlari o'suvchi ellipsni beradi.

Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlari

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemalari bilan aniqlanuvchi giperbolalar bo'ladi.

Bu kesimlar (45-shakl) (3.6.8) sirtning ikki pallali giperboloid deb atalishiga sabab bo'ladi. $a = b$ bo'lganda (3.6.8) tenglama *ikki pallali aylanish giperboloid*ni aniqlaydi.



45-shakl

6.3-misol. $x^2 - 4y^2 + 4z^2 + 2x + 8y - 7 = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi sirt tupini toping.

Yechish. Tenglamaning chap tomonini to'la kvadratlarga ajratamiz:

$$x^2 + 2x + 1 - 4(y^2 + 2y + 1) + 4z^2 - 1 + 4 - 7 = 0 \quad \text{yoki}$$

$$(x + 1)^2 - 4(y - 1)^2 + 4z^2 = 4.$$

Bundan

$$\frac{(x + 1)^2}{2^2} + \frac{z^2}{1^2} - \frac{(y - 1)^2}{1^2} = 1.$$

$x' = x + 1$, $y' = y - 1$, $z' = z$ deb, $Oxyz$ sistema markazini $O'(-1; 1; 0)$ nuqtaga parallel ko'chirish orqali $O'x'y'z'$ sistemaga o'tamiz. Bu sistemada tenglama

$$\frac{x'^2}{2^2} + \frac{z'^2}{1^2} - \frac{y'^2}{1^2} = 1$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglama $O'y'$ oq bo'ylab yo'nalgan bir pallali giperboloidni aniqlaydi.

3.6.4. Konuslar

Oxyz koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (3.6.10)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirt *ikkinchi tartibli konus* deyiladi.

(3.6.10) sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesishish chizigi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, z = h \text{ bo'ladi. U } h = 0$$

da $O(0;0;0)$ nuqtaga aylanadi.

$h \neq 0$ bo'lsa, kesimda

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

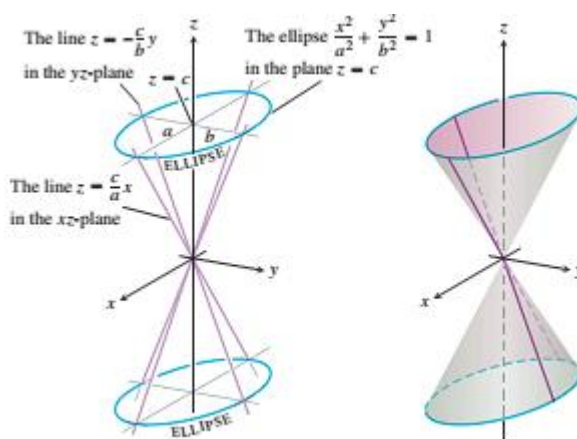
tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi.

Bu ellipsning yarim o'qlari $|h|$ ning o'sishi bilan o'sadi.

Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlari

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

sistemalar bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi(46-shakl).



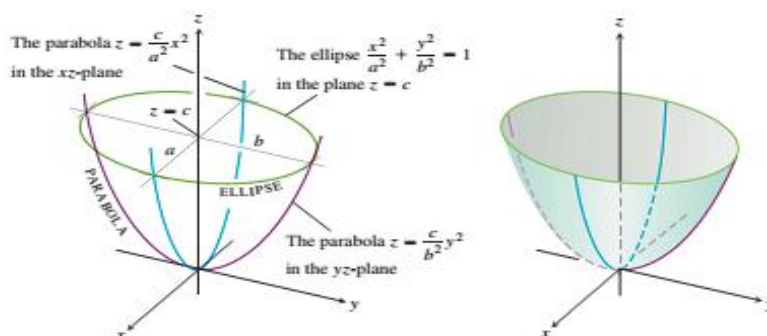
46-shakl

3.6.5. Paraboloidlar

Oxyz koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, a > 0, b > 0, c > 0 \quad (3.6.11)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirt *elliptik paraboloid* deyiladi.



47-shakl

Bu sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimi ushbu

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(ah)^2} + \frac{y^2}{(bh)^2} = 1, \\ z = h, h > 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi ellips bo'ldi. Uning yarim o'qlari $|h|$ ning o'sishi bilan o'sadi.

Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlarida $z = \frac{x^2}{a^2}$ va $z = \frac{y^2}{b^2}$

parabolalar hosil bo'ldi (47-shakl). Shu sababli (3.6.11) tenglama bilan aniqlanuvchi sirt elliptik paraboloid deyiladi.

$a = b$ bo'lganda (3.6.11) tenglama *aylanish paraboloidini* aniqlaydi.

6.4-misol. $M_1(0;b;0)$ nuqtadan va $y = -b$ tekislikdan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rnini topaing.

Yechish. $M(x; y; z)$ izlanayotgan nuqta bo'lsin.

Masala shartiga ko'ra $|M_1M| = |y + b|$ yoki

$$\sqrt{x^2 + (y - b)^2 + z^2} = |y + b|.$$

Bundan

$$x^2 + y^2 - 2yb + b^2 + z^2 = y^2 + 2yb + b^2,$$

$$x^2 + z^2 = 4by \text{ yoki}$$

$$\frac{x^2}{4b} + \frac{z^2}{4b} = y.$$

Sirtning Oxz tekislikka parallel tekislik bilan kesimi ushbu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4bh, \\ y = h, h > 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi aylanalardan iborat. Sirtning Oxy va Oyz

tekisliklar bilan kesimlarida $y = \frac{x^2}{4b}$ va $y = \frac{z^2}{4b}$ parabolalar hosil bo'ldi.

Shunday qilib bu sirt aylanish paraboloididan iborat bo'ldi (48-shakl).

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

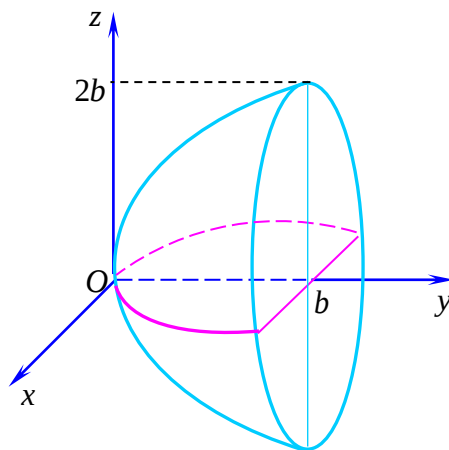
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \quad a > 0, \quad b > 0 \quad (3.6.12)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirt *giperbolik paraboloid* deyiladi.

Sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(ah)^2} - \frac{y^2}{(bh)^2} = 1, \\ z = h, h > 0 \end{cases}$$

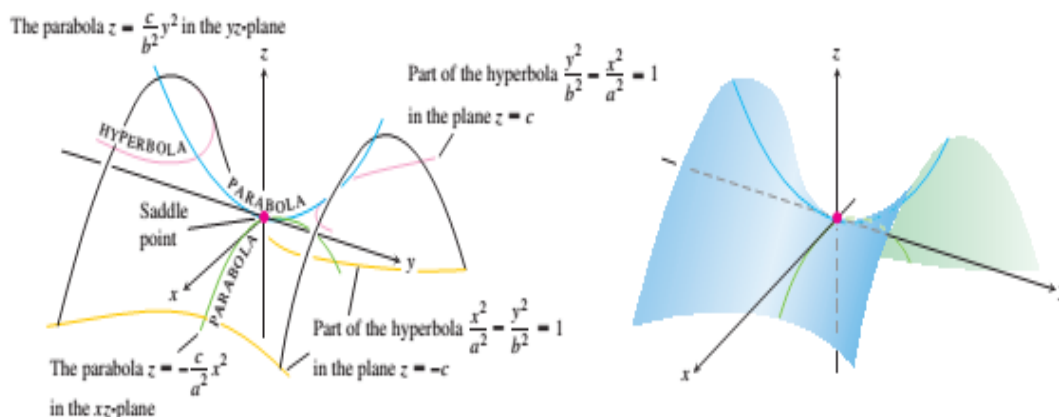
tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi giperboladan, Oxz va Oyz tekisliklar



48-shakl

bilan kesimlari $z = \frac{x^2}{a^2}$ va $z = \frac{y^2}{b^2}$ parabolalardan iborat bo'ladi.

Shunday qilib (3.6.12) tenglama bilan aniqlanuvchi sirtning ko'rinishi «egar» shaklida bo'ladi (49-shakl). Bu sirt giberbolik paraboloid deb ataladi.



49-shakl

3.6.6. Silindrik sirtlar

Tekislikda L chiziq va bu tekislikka perpendikular l to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

L chiziqning har bir nuqtasi orqali l to'g'ri chiziqqa parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziqlar to'plamidan hosil bo'lgan sirtga *silindrik sirt* deyiladi. Bunda L chiziq *silindrik sirtning yo'naltiruvchisi*, l to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar *silindrik sirtning yasovchilari* deb ataladi (50-shakl).

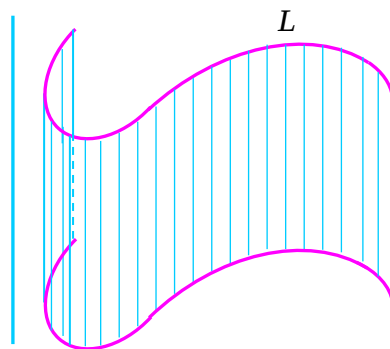
Oxyz koordinatalar sistemasini Oz o'q l yasovchiga parallel va L yo'naltiruvchi Oxy tekislikda yotadigan qilib tanlaymiz.

L yo'naltiruvchining Oxy tekislikdagi tenglamasi $F(x, y) = 0$ bo'lsin. U holda $F(x, y) = 0$ tenglama yasovchilari Oz o'qqa parallel bo'lgan silindrik sirtning ifodalaydi.

Silindrik sirtning nomlanishi va tenglamasi L yo'naltiruvchining shakli asosida aniqlanadi.

Agar Oxy tekislikdagi yo'naltiruvchi ellipsdan iborat bo'lganda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglama *elliptik silindrni* ifodalaydi. $x^2 + y^2 = R^2$ tenglama bilan aniqlanuvchi *doiraviy silindr* elliptik silindrning xususiy holi bo'ladi.

Shu kabi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglama *giperbolik silindrni*, $y^2 = 2px$ tenglama *parabolik silindrni* ifodalaydi.



50-shakl

Misol tariqasida silindrik sirtlarning grafiklarini *Maple* kompyuter sistemasida keltiramiz.

Elliptik tsilindr: $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}y^2 = 1$

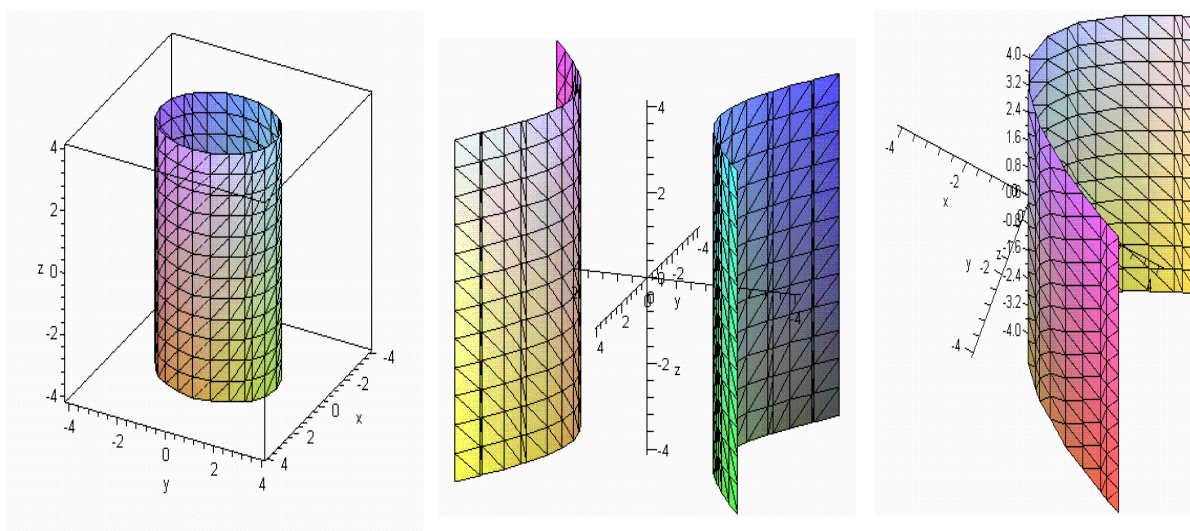
> with(plots):
implicitplot3d([x^2/4+y^2/6=1], x=-4..4, y=-4..4, z=-4..4, grid=[13,13,13]);

Giperbolik tsilindr: $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}y^2 = 1$

> with(plots):
implicitplot3d([x^2/4-y^2/6=1], x=-4..4, y=-4..4, z=-4..4, grid=[13,13,13]);

Parabolik tsilindr: $y^2 = 2x$

> with(plots):
implicitplot3d([y^2=2*x], x=-4..4, y=-4..4, z=-4..4, grid=[13,13,13]);



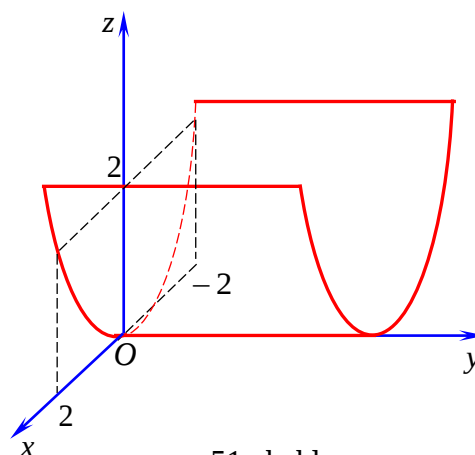
6.5-misol. $x^2 = 2z$ tenglama bilan aniqlanuvchi sirt shaklini chizing.

Yechish. Berilgan tenglamada y qatnashmaydi va $x^2 = 2z$ chiziq Oxz tekislikda yotuvchi parabolani ifodalaydi.

Shu sababli $\begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0 \end{cases}$ tenglama

yosovchilari Oy o'qqa parallel bo'lgan parabolik silindrni ifodalaydi.

Parabola $y=0$ tekislikda Oz o'qqa nisbatan simmetrik bo'ladi, uchi $O(0;0;0)$ nuqtada yotadi va $M_1(-2;0;2), M_2(2;0;2)$ nuqtalardan o'tadi (51-shakl).



51-shakl

3.6.7. Ikkinchi tartibli sirtlarning to'g'ri chiziqli yasovchilari

To'g'ri chiziqlarning harakatidan hosil bo'ladigan sirlarga *to'g'ri chiziqli sirtlar* deyiladi. Bu sirtlarning yasovchilari *to'g'ri chiziqli yasovchilar* deb ataladi.

To'g'ri chiziqli sirtlarga konus sirtlar va silindrik sirtlarlar misol bo'la oladi. Bundan tashqari bir pallali giperboloid va giperbolik paraboloid ham to'g'ri chiziqli sirtlar bo'lishi isbotlangan.

Bir pallali giperboloidning har bir nuqtasi orqali

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = k \left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \text{ va } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = l \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{l} \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (3.6.13)$$

tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlar oilasidan faqat bitta chiziq o'tishi ko'rsatilgan, bu yerda a, b, c – bir pallali giperboloidning yarim o'qlari, k, l – nolga teng bo'lmagan sonlar.

Shunday qilib, (3.6.13) tenglamalar k va l ning turli qiymatlarida bir pallali giperboloidda yotuvchi va uni to'liq qoplovchi cheksiz to'g'ri chiziqlar sistemasini tashkil qiladi. Bu to'g'ri chiziqlarga bir pallali giperboloidning *to'g'ri chiziqli yasovchilari* deyiladi.

Shu kabi

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = kz, \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{b} = \frac{1}{k} \end{cases} \text{ va } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = \frac{1}{l}, \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{b} = lz \end{cases} \quad (3.6.14)$$

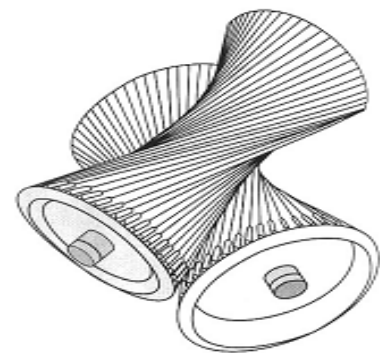


52-shakl

tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlar giperbolik paraboloidning to'g'ri chiziqli yasovchilari bo'ladi.

To'g'ri chiziqlardan bir pallali giperboloid sirtlarning yasovchilari qurilish va texnikaning konstruksiyalarida keng foydalaniladi.

Masalan, bir pallali giperboloidning to'g'ri chiziqli yasovchilari bo'yicha metal balkalar joylashtirilgan radiomachta, suv va yadro qurilmalari minoralari, teleminoralar (masalan, Guanjou (Xitoy) teleminorasi, 52-shakl), tirgaklar va uzatmalar (53-shakl) kabi konstruksiyalar ishlab chiqilgan. Bunday konstruksiyalar engil va mustahkam bo'lgani sababli keng tatbiq etiladi.



Hyperboloids produce gear transmission.

53-shakl

3.6. Mashqlar

3.6.1. Sferaning tenglamasini tuzing: 1) diametrlaridan birining uchlari $M_1(4;1;-3)$ va $M_2(2;-3;5)$ nuqtalarda yotgan; 2) markazi $M_0(3;-5;-2)$ nuqtada yotgan va $2x - y - 3z + 11 = 0$ tekislikka uringan.

3.6.2. Sfera markazining koordinatalarini va radiusini toping:

1) $x^2 + y^2 + z^2 + x - y + z = 0$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 25 = 0$.

3.6.3. Har bir nuqtasidan $M_1(-3;0;0)$ va $M_2(3;0;0)$ nuqtalargacha bo'lgan masofalar kvadratlarining yig'indisi 36 teng bo'lgan fazoviy nuqtalarning geometrik o'rnini toping.

3.6.4. $M\left(0; \frac{5}{2}; 0\right)$ nuqtadan va $y = -\frac{5}{2}$ tekislikdan teng uzoqlikda yotgan fazoviy nuqtalarining geometrik o'rnini toping.

3.6.5. Har bir nuqtasidan $M_1(0;0;-4)$ va $M_2(0;0;4)$ nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi 10 teng bo'lgan sirtning tenglamasini tuzing.

3.6.6. Har bir nuqtasidan $M_1(-5;0;0)$ va $M_2(5;0;0)$ nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduli 6 teng bo'lgan sirtning tenglamasini tuzing.

3.6.7. Berilgan sirtning ko'rsatilgan o'qlar atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt tenglamasini tuzing:

1) $z = -\frac{x^2}{2}$, Ox va Oz ; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$, Ox va Oy ; 3) $\frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{16} = 1$, Oy va Oz .

3.6.8. Markazi koordinatalar boshida yotgan va yo'naltiruvchilari $x^2 - 2z + 1 = 0$, $y - z + 1 = 0$ tenglamalar bilan berilgan konus tenglamasini tuzing.

3.6.9. m ning qanday qiymatlarida $x + my - 2 = 0$ tekislik $\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{3} = y$ elliptik paraboloidni 1) ellips bo'yicha; 2) parabola bo'yicha kesadi?

3.6.10. Berilgan sirtlarning kesishish chizig'ini aniqlang:

1) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z$, $3x - y + 6z - 14 = 0$; 2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 2z$, $3x - y + 6z - 14 = 0$;
3) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{3} = 2z$, $x - 2y - 1 = 0$; 4) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = -1$, $5x + 2z + 5 = 0$.

3.6.11. Har bir nuqtasidan $M(3;0;0)$ nuqtagacha va $x = 1$ tekislikkacha bo'lgan masofalar nisbati $\sqrt{3}$ ga teng bo'lgan fazoviy nuqtalarning geometrik o'rnini toping.

3.6.12. Berilgan sirt va to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini toping:

1) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4}$; 2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

3.6.13. Berilgan tenglama bilan aniqlanuvchi sirt tupini aniqlang:

1) $36x^2 + 64y^2 - 144z^2 + 576 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 22 = 0$;
3) $3x^2 + 2y^2 - 12z = 0$; 4) $16x^2 + 3y^2 + 16z^2 - 64x - 6y + 19 = 0$;
5) $25x^2 - 9y^2 - 225 = 0$; 6) $9x^2 - 4y^2 - 36z = 0$;
7) $4x^2 + 3y^2 - 5z^2 + 60 = 0$; 8) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$;

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I. Sprinder-Verlag Italia, Milan 2008.
2. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis II. Sprinder-Verlag Italia, Milan 2010.
3. Lay, David C. Linear algebra and its applications. 2012.
4. Erving Kreyszig, Herbert Kreyszig, Edward Normuton. Advanced engineering Mathematics. New York, 2011.
5. L. Kenneth. Elementary Linear Algebra. 2015.
6. M.Corrall. Vector Calculus. Coryright, 2008.
7. Izu Vaisman. Analytical Geometry. Coryright, 1997.
8. B. George, Jr.Thomas, Ross L Finney. Calculus and Analytic Geometry. Coryright, 1996.
9. Additional Topics in Analytic Geometry. Chapter 11, 962-1040 s.
10. Polar Equations of Conics. Section 10.9 973-800
11. J.Stewart. Calculus, Broks/Cole, Cengage Learning,2012.
12. Jr. Thomas. Calculus. 2005
13. Zbigniew H.Nitecki. Calculus 3D.2012.
14. Gerd Baumann. Mathematics for Engineers I. Munchen, 2010.
15. Wolfgang Ertel.Advanced Mathematics for ingeneers.2012
16. V.V.Konev. Linear algebra, Vektor algebra, Analitical geometry. TextBook. Tomsk, TPU Press, 2009.
17. V.V.Konev. Linear algebra, Vektor algebra, Analitical geometry. WorkBook. Tomsk, TPU Press, 2009.
18. А.Б.Соболев,А.Ф.Рыбалко. Математика. Екатеринбург, Часть 1,2004.
19. Soatov Yo.U. Oliy matematika. I- tom, T.: O‘qituvchi, 1992.
20. Xurramov Sh.R. Oliy matematika.Misollar.Nazorat topshiriqlari. 1-qism. T.: Fan va texnologiyalar, 2015

JAVOBLAR

1.1. Matritsalar

1.1.2. $A = 3X + 4Y + 5Z$. 1.1.3. $a = 2, b = -4$. 1.1.4. $1 \times 30, 30 \times 1, 2 \times 15, 15 \times 2, 3 \times 10, 10 \times 3,$

$5 \times 6, 6 \times 5$. 1.1.5. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. 1.1.6. $\begin{pmatrix} 3 & -12 \\ -13 & 5 \\ -4 & 23 \end{pmatrix}$. 1.1.7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -7 & 6 \\ 2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$.

1.1.8. $\begin{pmatrix} 2-\nu & -1 & 2 \\ 5 & -3-\nu & 3 \\ -1 & 0 & -2-\nu \end{pmatrix}$. 1.1.10. $x = 3, y = 0$. 1.1.11. 3×5 . 1.1.12. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

1.1.13. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. 1.1.14. $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -2 & -3 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$. 1.1.15. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. 1.1.16. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -8 & -3 & 13 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.1.17. $\begin{pmatrix} -8 & 20 \\ -38 & 30 \end{pmatrix}$. 1.1.18. $\begin{pmatrix} 35 & 67 \\ 154 & 166 \end{pmatrix}$. 1.1.19. $\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -9 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 23 & -4 & 6 \\ -4 & 17 & 12 \\ 2 & 4 & 19 \end{pmatrix}$.

1.1.20. $\begin{pmatrix} 4 & -34 \\ 0 & 38 \end{pmatrix}$. 1.1.21. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$. 1.1.22. $I, -I, \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix}$.

1.2. Determinantlar

1.2.1. $\lambda^n \det A$. 1.2.5. 1. 1.2.6. 1) -2 ; 2) -125 ; 3) 1 ; 4) 8 . 1.2.7. 1) -12 ; 2) -243 ; 3) 64 ; 4) 4 . 1.2.8. $-x^2$. 1.2.9. $-b(a+b)$. 1.2.10. $\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)$. 1.2.11. $2\sin \alpha$. 1.2.12. -47 . 1.2.13. -18 . 1.2.14. $b^2(b-2)$. 1.2.15. $4x$. 1.2.16. $-2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. 1.2.17. $-tg \alpha - tg \beta$. 1.2.18. $(a-b)(a-c)(b-c)$. 1.2.19. $a(x-y)(x-z)(z-y)$. 1.2.20. $a^2(a+3b)$. 1.2.21. $-xyz$. 1.2.22. 0 . 1.2.23. $\cos 2\alpha$. 1.2.24. 63 . 1.2.25. 100 . 1.2.26. $2a-8b+c+5d$. 1.2.27. -6 .

1.3. Matritsalar ustida almashtirishlar

1.3.3. $ad - bc \neq 0$. 1.3.7. B, D . 1.3.8. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 1.3.9. 1); 2) 3). 1.3.10. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3.11. $\frac{1}{22} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. 1.3.12. 1) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -9 & 14 & -3 \\ -4 & 8 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. 1.3.13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 1.3.14. 0 . 1.3.15. -10 .

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1.3.16.} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -2 & -3 \\ -6 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{1.3.17.} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & 14 & -10 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}. \\
& \mathbf{1.3.18.} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -4 \\ -4 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{1.3.19.} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{1.3.20.} \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \\
& 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad 4) \text{ mavjud emas}; \\
& 5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1.3.21. 3. **1.3.22.** 2. **1.3.23.** 2. **1.3.24.** 3.

1.4. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish

1.4.1. Birgalikda emas. **1.4.2.** Birgalikda, aniqmas. **1.4.3.** Birgalikda, aniq. **1.4.4.** Birgalikda emas.

1.4.5. $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$. **1.4.6.** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

1.4.7. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. **1.4.8.** $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$.

1.4.9. $x_1 = 2$, $x_2 = c + 1$, $x_3 = 2c - 1$, $x_4 = c$. **1.4.10.** $x_1 = 5c_2 - 13c_1 - 3$, $x_2 = 5c_2 - 8c_1 - 1$,

$x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$. **1.4.11.** $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$. **1.4.12.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

1.4.13. $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = -6$. **1.4.14.** $x_1 = -5$, $x_2 = -4$, $x_3 = 0$.

1.4.15. $x_1 = -5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. **1.4.16.** $x_1 = -11$, $x_2 = -6$, $x_3 = -3$.

1.4.17. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$. **1.4.18.** $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$.

1.4.19. $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. **1.4.20.** $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. **1.4.21.** $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

1.4.22. $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. **1.4.23.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. **1.4.24.** $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

1.4.25. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. **1.4.26.** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{a}$, $x_3 = 0$, $a(a-1)(a+2) \neq 0$.

1.4.27. $x_1 = -c$, $x_2 = 0$, $x_3 = c$. **1.4.28.** $x_1 = -15c$, $x_2 = 11c$, $x_3 = 14c$.

1.4.29. $x_1 = 7c$, $x_2 = -11c$, $x_3 = -5c$. **1.4.30.** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

1.4.31. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. **1.4.32.** $x_1 = -2c$, $x_2 = 7c$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3c$.

1.4.33. $\left(1, 0 - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $(0, 1, 0, -1)$. **1.4.34.** $(1, 0 - 2, 3)$, $(0, 1, 1, 2)$.

2.1. Vektorlar

$$\mathbf{2.1.1.} \vec{a} \perp \vec{b}. \quad \mathbf{2.1.2.} \quad \mathbf{2.1.5.} \overrightarrow{AN} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}. \quad \mathbf{2.1.6.} \overrightarrow{NM} = \vec{n} - 2\vec{m}. \quad \mathbf{2.1.7.} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

2.1.8. $-\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. **2.1.9.** $m = 2\sqrt{3}$. **2.1.10.** $m = 1, n = -3$. **2.1.11.** $\Pi p_l \vec{AB} = 2\sqrt{2}$,
 $\Pi p_l \vec{AD} = -\sqrt{2}$, $\Pi p_l \vec{DC} = \sqrt{2}$, $\Pi p_l \vec{AC} = 0$. **2.1.12.** $\Pi p_l \vec{AB} = 3$, $\Pi p_l \vec{BC} = 0$, $\Pi p_l \vec{CA} = -3$,
 $\Pi p_l \vec{AD} = 3$, $\Pi p_l \vec{BF} = -\frac{3}{2}$, $\Pi p_l \vec{CE} = -\frac{3}{2}$. **2.1.13.** $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$. **2.1.14.** $\left\{\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.
2.1.15. $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$. **2.1.16.** $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$. **2.1.17.** $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} = \frac{\vec{a} - \vec{c}}{2}$, $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.
2.1.18. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. **2.1.19.** 1) $\{-7; 17; -12\}$; 2) $\left\{\frac{5}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right\}$. **2.1.20.** 1) $\{-8; -4; 0\}$; 2) $\{7; -3; 2\}$.
2.1.21. $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$. **2.1.22.** $\sqrt{10}$. **2.1.23.** $M(\pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3}; \pm\sqrt{3})$.
2.1.24. $\vec{a} = \{2; \pm 2\sqrt{2}; -2\}$. **2.1.25.** $B(5; -3; -3)$. **2.1.26.** $A(-3; -1; -3)$.
2.1.27. 1) $|\vec{AB}|^\circ = \left\{\frac{12}{25}; \frac{3}{5}; -\frac{16}{25}\right\}$; 2) $|\vec{AB}|^\circ = \left\{-\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; -\frac{12}{13}\right\}$. **2.1.28.** $\vec{a}^\circ = \left\{-\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7}\right\}$.
2.1.29. $\alpha = -3$. **2.1.30.** $\vec{b} = \left\{\frac{48}{5}; -\frac{36}{5}; 9\right\}$. **2.1.31.** $p = 12$. **2.1.33.** $O\left(\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{130}}{2}$.
2.1.34. $M(-3; -5)$. **2.1.35.** $(-2; 1)$. **2.1.36.** $D(-3; -7)$. **2.1.37.** $AD = 7b$.

2.2. Vektorlarni ko'paytirish

2.2.1. $-\frac{3}{2}$. **2.2.2.** -19 . **2.2.3.** 1) 112; 2) 252. **2.2.4.** 1) -89 ; 2) 86. **2.2.5.** 1) $m = 1$;
 2) $m = 2$, $m = 3$. **2.2.6.** $-\frac{3}{2}$. **2.2.7.** $\frac{\pi}{2}$. **2.2.8.** $\frac{\pi}{4}$. **2.2.9.** $\frac{\pi}{3}$. **2.2.10.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) π .
2.2.11. 1) $\frac{21}{13}$; 2) $\frac{261}{13}$. **2.2.12.** 10 (ish.b.). **2.2.13.** $\vec{x} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. **2.2.14.** $\vec{x} = 7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$.
2.2.15. 1) $12\vec{e}^0$; 2) 132. **2.2.16.** 1) $\frac{3}{2}(y.b.)$; 2) $66\sqrt{3}(y.b.)$. **2.2.17.** $25\sqrt{3}$. **2.2.18.** ± 15 .
2.2.19. 1) $\{9; 9; -3\}$; 2) $\{63; 63; -21\}$. **2.2.20.** 1) $9\sqrt{2}$; 2) $\frac{49}{2}$. **2.2.21.** $h = \frac{14}{\sqrt{13}}(u.b.)$.
2.2.22. $\vec{M} = \{-8; -9; -4\}$; $\vec{M} = \{1; -4; -7\}$. **2.2.23.** 28, $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$, $\cos \beta = -\frac{6}{7}$, $\cos \gamma = \frac{2}{7}$.
2.2.24. $\alpha = -9$. **2.2.25.** $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = 2$. **2.2.26.** 1) $\{3; 2\}$; 2) $\{-2; 3\}$. **2.2.27.** $\{-6; -24; 8\}$.
2.2.28. 1) yo'q; 2) ha. **2.2.29.** 1) $\alpha = \frac{1}{3}$; 2) $\alpha = -3$. **2.2.30.** 1) $V = 14(h.b.)$, $h = \sqrt{14}(u.b.)$;
 2) $V = 2(h.b.)$, $h = 3\sqrt{2}(u.b.)$. **2.2.31.** 1) o'ng uchlik, $V = 12(h.b.)$; 2) chap uchlik, $V = 27(h.b.)$.

3.1. Tekislikdagi to'g'ri chiziqlik

3.1.1. 1) $k = -\frac{3}{4}$, $a = 4$, $b = 3$; 2) $k = \frac{1}{3}$, $a = -2$, $b = \frac{2}{3}$; 3) $k = \frac{1}{2}$, $a = 5$, $b = -\frac{5}{2}$;
 4) $k = -\frac{3}{5}$, $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. **3.1.2.** 1) $3x + 4y + 6 = 0$; 2) $3x + y + 9 = 0$; 3) $x + 2 = 0$;
 4) $x + y - 5 = 0$. **3.1.3.** 2 va 3. **3.1.4.** 1) $M_0(1; 2)$, $\varphi = 45^\circ$; 2) $M_0(2; -1)$, $\varphi = 90^\circ$;
 3) $M_0 \in \emptyset$, $\varphi = 0$; 4) $M_0(2; 2)$, $\varphi = 45^\circ$. **3.1.5.** 1) $m = -6$, $n \neq 3$ va $m = 6$, $n \neq -3$;

2) $m = -6, n = 3$ va $m = 6, n = -3$; 3) $m = 0, n$ – chekli son. **3.1.6.** 1) $m = -\frac{3}{2} da \parallel$,
 $m = \frac{2}{3} da \perp$; 2) $m = 4 da \parallel$, $m = -9 da \perp$. **3.1.7.** (1;6). **3.1.8.** $x - y - 2 = 0$ va $x - 4y + 4 = 0$.
3.1.9. $3x + 2y - 11 = 0$. **3.1.10.** $x - 5y + 2 = 0$. **3.1.11.** $12x + 9y - 17 = 0$.
3.1.12. $5x - y + 3 = 0$, $x + 5y + 11 = 0$. **3.1.13.** $3x + y - 4 = 0$, $x + 5y + 8 = 0$, $3x + y + 10 = 0$,
 $x + 5y - 6 = 0$. **3.1.14.** $M(4;4), \varphi = \frac{\pi}{2}$. **3.1.15.** $3x - 3y - 8 = 0$. **3.1.16.** $3x + 4y - 12 = 0$.
3.1.17. $x + 2y - 7 = 0$, $7x + 2y - 37 = 0$, $5x - 2y + 1 = 0$. **3.1.18.** $y = 2x$.
3.1.19. $x - y + 7 = 0$, $7x + 4y - 6 = 0$, $6x + 5y + 9 = 0$. **3.1.20.** $2x + y + 9 = 0$, $x - y - 3 = 0$.
3.1.21. $29x - 2y + 33 = 0$. **3.1.22.** $2x - 3y + 8 = 0$ **3.1.23.** $29(y.b)$. **3.1.24.** $\frac{23}{10}(u.b)$.
3.1.25. $6\sqrt{2}(u.b)$. **3.1.26.** $x - 2 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$. **3.1.27.** $y - 3 = 0$, $4x + y + 5 = 0$.
3.1.28. $(-12;5)$. **3.1.29.** $3x + 4y - 20 = 0$ va $3x + 4y + 10 = 0$.

3.2. Tekislikdagi ikkinchi tartibli chizilar

3.2.1.1) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 36$; 2) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 50$; 3) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 2$;
4) $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$, $(x-20)^2 + (y+20)^2 = 400$; 5) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$.
3.2.2. 1) $M_0(-4;7)$, $R = 7$; 2) $M_0(-2;3)$, $R = 4$; 3) $M_0\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, $R = \frac{3}{2}$; 4) $M_0\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$,
 $R = 4$. **3.2.3.** 1) aylanada; 2) aylana ichkarisida; 3) aylanada; 4) aylana ichkarisida.
3.2.4. $5\sqrt{2}(u.b)$. **3.2.5.** $(x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. **3.2.6.** $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$.
3.2.7. $M_0(3;2)$, $R = 5$. **3.2.8.** $0 < k < \frac{8}{15}, k_1 = 0$ va $k_2 = \frac{8}{15}$. **3.2.9.** $y = 0$ va $4x - 3y = 0$.
3.2.10. 1) $\begin{cases} x = 8(1 + \cos t), \\ y = 8 \sin t, t \in [0; 2\pi]; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2(1 + \sin t), t \in [0; 2\pi]; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos tt, \\ y = 1 + \sqrt{2} \sin t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$ **3.2.11.** 1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$; 2) $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1$; 3) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} = 1$;
4) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$. **3.2.12.** $12(kv.b)$. **3.2.13.** $x + y + 5 = 0$ va $x + y - 5 = 0$. **3.2.14.** $\frac{32}{5}(u.b)$.
3.2.15. $M_1\left(-\frac{15\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{126}}{4}\right)$, $M_2\left(-\frac{15\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{126}}{4}\right)$. **3.2.16.** $M(3;0)$.
3.2.17. $16x^2 + 25y^2 = 400$. **3.2.18.** 1) $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 4 \sin t, t \in [0; 2\pi]; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 12 \sin t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$
3.2.19. $\left(4; \frac{3}{2}\right)$, (3;2). **3.2.20.** 1) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$; 2) $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$; 3) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$; 4) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$.
3.2.21. 1) $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{8} = 1$; 2) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$; 3) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{27} = 1$; 4) $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$. **3.2.22.** $\frac{2\pi}{3}$.

$$3.2.23. \sqrt{2}. \quad 3.2.24. x^2 - y^2 = 6. \quad 3.2.25. \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1. \quad 3.2.26. y = \frac{-3x+10}{x-2}. \quad 3.2.27. y' = -\frac{29}{9x'}.$$

$$3.2.28.) \quad x = -\frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{2}y; \quad 2) \quad y = \frac{1}{10}x^2 - x + 3. \quad 3.2.29. \quad 1) A(-4;1), \quad y = 1; \quad 2) A(2;3), \quad x = 2.$$

3.2.30. 1) $x^2 - y^2 = 1$ – giperbola; 2) $y^2 = \frac{9}{2}x$ – parabola; 3) giperbolaning pastgi yarim tekislikdagi tarmog‘i; 4) giperbolaning chap yarim tekislikdagi tarmog‘i.

$$3.2.33. \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1. \quad 3.2.34. \frac{x'^2}{2} - y'^2 = 1. \quad 3.2.36. x - 3y + 12 = 0. \quad (\text{Ko‘rsatma. urinma}$$

tenglamalari: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ – ellips, $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ – giperbola, $yy_0 = p(x + x_0)$ – parabola).

$$3.2.37. 4x + y - 4 = 0. \quad 3.2.37. 2\sqrt{5}x - 3y + 4 = 0. \quad 3.2.38. 2x - y - 16 = 0.$$

3.3. Qutb koordinatalarda chiziqlar

$$3.3.1. A\left(2; \frac{\pi}{6}\right), B\left(2; \frac{5\pi}{6}\right). \quad 3.3.2. A(1; -\sqrt{3}), B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad 3.3.3. 7 \quad b. \quad 3.3.4. S = \frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

$$3.3.5. 4 \quad y.b. \quad 3.3.6. 64 \quad y.b. \quad 3.3.7. 1) x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}; \quad 2) \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4};$$

$$3) (x^2 + y^2)^2 = 2xy; \quad 4) (x^2 + y^2)^3 = 4(x^2 - y^2); \quad 5) x^2 = 4(1 - y); \quad 6) y^2 = 3(3 + 2x);$$

$$7) \frac{\left(x + \frac{3}{8}\right)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = \frac{1}{64}; \quad 8) \frac{x^2}{16} - \frac{(y-5)^2}{9} = \frac{13}{3}. \quad 3.3.8. 1) r = \frac{5}{\sin \varphi}; \quad 2) r = \frac{1}{2 \cos \varphi - \sin \varphi};$$

$$3) r = \frac{4 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}; \quad 4) r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}; \quad 5) r = 2a \cos \varphi; \quad 6) r^2 = \frac{2}{\sin 2\varphi}; \quad 7) r = \frac{16}{1 - \frac{9}{25} \cos^2 \varphi};$$

$$9) r = \frac{-4}{1 - \frac{10}{9} \cos^2 \varphi}. \quad 3.3.9. 1) \text{ ellips; } 2) \text{ giperbola; } 3) \text{ parabola; } 4) \text{ ellips.}$$

3.4. Tekislik

$$3.4.1. 2x - y + 3z - 14 = 0. \quad 3.4.2. 2x - 3y + 4z + 20 = 0. \quad 3.4.3. 2x - 3y + 5z + 10 = 0.$$

$$3.4.4. x + 3y - 4z - 21 = 0. \quad 3.4.5. 1) 2y + 3z = 0; \quad 2) y + 1 = 0; \quad 3) z - 4 = 0;$$

$$4) x + z - 3 = 0; \quad 5) 22x + 14y - 5z = 0. \quad 3.4.6. 1) 2x - z = 0; \quad 2) x - 3 = 0; \quad 3) y + 3 = 0;$$

$$4) x + 3z + 4 = 0; \quad 5) 8x - y + 6z = 0. \quad 3.4.7. A(-3;0;0), B(0;-6;0), C(0;0;2). 1).$$

$$3.4.8. a = -15, b = -10, c = 6. \quad 3.4.9. x + y + z - 4 = 0. \quad 3.4.10. x + 3y + z - 15 = 0.$$

$$3.4.11. 1) x + 3y - z - 6 = 0; \quad 2) x - y - z = 0. \quad 3.4.12. x + y + z - 6 = 0.$$

$$3.4.13. x + y - 2z = 0. \quad 3.4.14. x - 2y - 3z + 3 = 0. \quad 3.4.15. 1) 2x - 5y + z - 15 = 0;$$

$$2) 2x + 4y + 9z - 21 = 0. \quad 3.4.16. x - y - 2z + 5 = 0. \quad 3.4.17. \frac{x}{\frac{11}{9}} + \frac{y}{-\frac{11}{2}} + \frac{z}{\frac{11}{6}} = 1;$$

$$\frac{9}{11}x - \frac{2}{11}y + \frac{6}{11}z - 1 = 0. \quad 3.4.18. \frac{x}{-6} + \frac{y}{7} + \frac{z}{7} = 1; \quad -\frac{7}{11}x + \frac{6}{11}y + \frac{6}{11}z - \frac{42}{11} = 0.$$

$$3.4.19. 1) 45^\circ; \quad 2) 90^\circ; \quad 3) 90^\circ; \quad 4) \arccos(0,4). \quad 3.4.20. 1) m = -\frac{6}{5}, n = -\frac{15}{2}; \quad 2) m = 3, n = -4.$$

3.4.21. 1) $m=13$; 2) $m=1$. 3.4.22. 1) a) $x-2y-3z-4=0$; b) $2x+3y+z-8=0$;
 2) a) $2x+3y+4z-3=0$; b) $4x+y-7z+19=0$; 3) a) $5x+7y+3=0$; b) $y-z+7=0$;
 c) $5x+7z-46=0$. 3.4.23. $7x+14y-2z+6=0$. 3.4.24. $x-y+z+1=0$.
 3.4.25. $x+2y+\sqrt{5}z-2=0$ va $x+2y-\sqrt{5}z-2=0$. 3.4.26. 1) $M(-2;1;2)$; 2) $M(2;-1;1)$.
 3.4.27. 4(b). 3.4.28. $M(-15;0;0)$ va $M(1;0;0)$. 3.4.29. $2x-y-2z=0$ va $2x-y-2z-18=0$.
 3.4.30. 8(h.b.). 3.4.31. -2 . 3.4.32. -3 . 3.4.33. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

3.5. Fazodagi to'g'ri chiziq

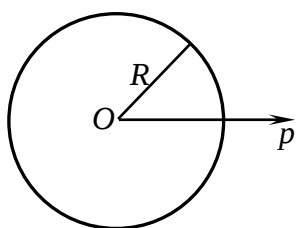
3.5.1. 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$; 2) $\frac{x-2}{0} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{0}$; 3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$.
 3.5.2. 1) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{3}$; 2) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{-1}$; 3) $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-2}{-7}$.
 3.5.3. $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{0}$. 3.5.4. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{\sqrt{2}} = \frac{z+3}{-1}$. 3.5.5. 1) $\begin{cases} x+4y-7=0, \\ x+z-1=0; \end{cases}$
 2) $\begin{cases} 3x-2y-7=0, \\ 2y+3z+1=0. \end{cases}$ 3.5.6. $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$. 3.5.7. 1) $x=13t, y=1+19t, z=2+28t$;
 2) $x=t, y=1-3t, z=-2t$. 3.5.8. 1) $\frac{x}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-5}{2}$; 2) $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$.
 3.5.9. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{0}$. 3.5.10. $\frac{x+3}{-5} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$. 3.5.11. 1) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
 3.5.12. 1) $\frac{x+2}{-5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$; 2) $\frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{16} = \frac{z+1}{17}$. 3.5.13. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$.
 3.5.14. 1) parallel; 2) ayqash. 3.5.15. 1) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{6}$. 3.5.16. 1) parallel; 2) to'g'ri chiziq
 tekisligida yotadi. 3.5.17. 1) $M(3;2;1)$; 2) $M(2;4;6)$. 3.5.18. 1) $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+6}{0}$; 2)
 $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+6}{1}$. 3.5.19. 1) $m=3, n=-23$; 2) $m=12, n=-12$.
 3.5.20. 1) $2x-3y+4z-1=0$; 2) $4x-y-2z-7=0$; 3) $z+1=0$. 3.5.21. $3x+5y+2z-9=0$.
 3.5.22. $(-2;0;-3)$. 3.5.23. $M(2;3;4)$. 3.5.24. $5x-2y+2z+5=0$.
 3.5.25. $8x+2y-9z+12=0$. 3.5.26. 1) $\frac{\sqrt{102}}{10}(u.b.)$; 2) $\frac{\sqrt{41}}{3}(u.b.)$.

3.6. Ikkinchi tartibli sirtlar

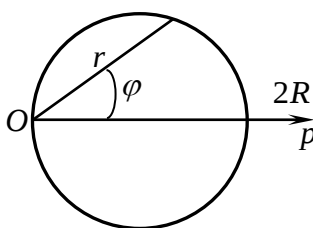
3.6.1. 1) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$; 2) $(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = 56$.
 3.6.2. 1) $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), R = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $M(3;-4;-5), R=5$. 3.6.3. 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
 3.6.4. $x^2 + z^2 = 10y$. 3.6.5. $\frac{x^2+y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$. 3.6.6. $\frac{y^2+z^2}{16} - \frac{x^2}{9} = -1$.
 3.6.7.1) $4y^2 - x^4 + 4z^2 = 0, z = -\frac{x^2+y^2}{2}$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2+z^2}{25} = 1, \frac{y^2}{25} - \frac{x^2+z^2}{16} = -1$;
 3) $\frac{y^2}{64} + \frac{x^2+z^2}{16} = 1, \frac{x^2+y^2}{64} + \frac{z^2}{16} = 1$. 3.6.8. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. 3.6.9.1) $m \neq 0$ va $m \geq -\frac{1}{4}$;

2) $m = 0$. **3.6.10.** 1) ellips; 2) giperbola; 3) parabola; 4) nuqta. **3.6.11.** $y^2 + z^2 - 2x^2 = -6$ (ikki pallali giperboloid). **3.6.12.** 1) $M_1(3;4;-2), M_2(6;-2;2)$; 2) $M(4;-3;2)$. **3.6.13.** 1) ikki pallali giperboloid; 2) sfera; 3) elliptik paraboloid; 4) aylanish ellipsoidi; 5) giperbolik silindr; 6) giperbolik paraboloid; 7) ikki pallali giperboloid; 8) doiraviy silindr.

Ayrim chiziqlarning grafiklari va tenglamalari

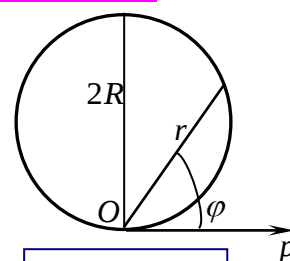


$$r = R$$

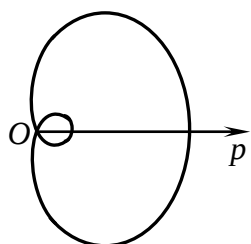


$$r = 2R \cos \varphi$$

R radiusli aylana

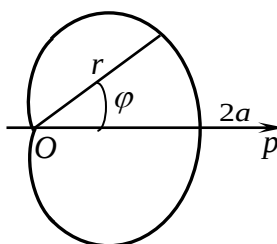


$$r = 2R \sin \varphi$$



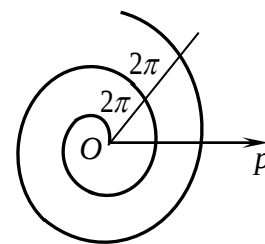
$$r = b + a \cos \varphi \quad (a > b)$$

Paskal chigʻanogʻi



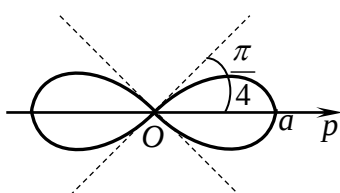
$$r = a(1 + \cos \varphi) \quad (a > 0)$$

Kardioida



$$r = a\varphi \quad (a > 0)$$

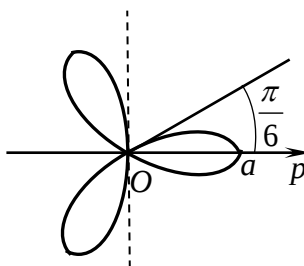
Arximed spirali



$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi} \quad (a > 0)$$

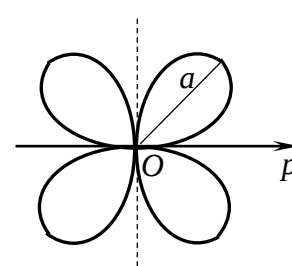
$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

Bernulli limniskatasi



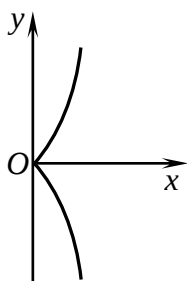
$$r = a \cos 3\varphi \quad (a > 0)$$

Uch yaproqli gul



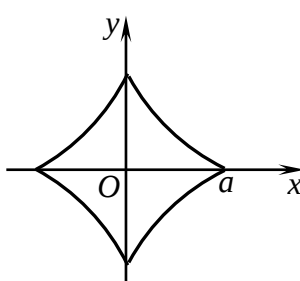
$$r = a \sin 2\varphi \quad (a > 0)$$

Toʻrt yaproqli gul



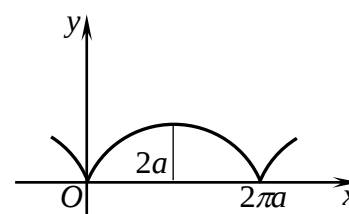
$$y^2 = x^3 \text{ yoki } \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$$

Yarimkubik parabola



$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \text{ yoki } \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

Astroida



$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad a > 0$$

Sikloida

MUNDARIJA

SO‘Z BOSHI	3
I. CHIZIQLI ALGEBRA	
Matritsalar	4
Determinantlar	14
Vatritsalar ustida almashtirishlar	24
Chiziqli tenglamalar sistemasi	38
II. VEKTORLI ALGEBRA	
Vektorlar	62
Vektorlarni kopaytirish	79
III. ANALITIK GEOMETRIYA	
Tekislikdagi to‘g‘ri chiziq	96
Ikkinchi tartibli chiziqlar	110
Qutb koordinatalarida chiziqlar	129
Tekislik	135
Fazodagi to‘g‘ri chiziq	145
Ikkinchi tartibli sirtlar	155
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR	167
JAVOBLAR	168
ILOVA	175

