М. САЛОҲИДДИНОВ

МАТЕМАТИК ФИЗИКА ТЕНГЛАМАЛАРИ

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий ўқув юртлари учун дарслик сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ "ЎЗБЕКИСТОН" 2002

Масъул муҳаррир
Физика математика фанлари доктори **Б. Исломов**

Тақризчилар:
академик **Ш.А. Алимов**, ф.м.ф. доктори,
профессор **С. Абдиназаров**

Муҳҳарир **Н. Ғоипов**

$\text{С}\ \dfrac{1604010000-76}{353(04)2002}\ 2002$

ISBN 5-640-03140-9

Ушбу китобни падари — бузрукворимнинг порлоқ хотираларига бағишлайман.

СЎЗ БОШИ

Мазкур дарслик университетларнинг математика, механика-математика факультетлари учун "математик физика тенгламалари" курси дастурига мослаб ёзилган.

Дарсликни ёзишда машҳур рус ва бошқа чет эл олимлари томонидан яратилган дарслик ва монографиялардан фойдаланилди. Фойдаланилган адабиётлар рўйхати дарсликнинг охирида берилган. Шунингдек, муаллиф дарсликни ёзишда Ўзбекистон Миллий университетининг математика, амалий математика ва механика, сўнгра механика-математика факультетларида ўқиган маърузаларидан ҳам фойдаланди.

Математик физика масалаларининг доираси ниҳоятда кенг бўлиб, улар турли физик, механик, техник, биологик ва бошқа жараёнларни ўрганиш билан узвий боғлиқдир. Бу китобда математик физиканинг хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга келадиган масалалари текширилади. Асосий эътибор математик физика тенгламаларининг учта классик: эллиптик, гиперболик ва параболик типдаги тенгламаларини ўрганишга қаратилган. Бу тенгламаларни текширишда интеграл тенгламалар усули муҳим роль ўйнагани учун чизиқли ингеграл тенгламалар назарияси ҳам қисқача баён қилинган.

Шунингдек, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишда тез-тез қўлланиладиган бир қатор усуллар, жумладан, ўзгарувчиларни ажратиш, интеграл алмаштиришлар усуллари ҳамда улар билан боғлиқ махсус функциялар ва уларнинг хоссалари келтирилган.

Шу билан бирга, дарсликдан математик физика тенгламалари курси дастурига киритилмаган аралаш типдаги тенгламаларнинг қисқача назарияси ҳам ўрин олган. Бундай материалнинг китобга киритилишининг мақсадга мувофиқлиги турли амалий масалаларни ечишда аралаш типдаги тенгламалар аҳамиятининг тобора ошиб бораётганлиги ҳамда бу йўналишнинг республикамизда юқори даражада ривож топганидир. Бу бобдан магистрлар, аспирантлар ва ёш тадқиқотчилар ҳам фойдаланишлари мумкин.

Қўлёзмани кўриб чиқиб, ўз фикр ва мулоҳазаларини билдирган академик Ш. Алимов, физика-математика фанлари докторлари С. Абдиназаров, А. Бердишев, китобнинг илмий муҳаррири физика-математика фанлари доктори Б. Исломов ҳамда қўлёзмани нашрга тайёрлашда катта ёрдам берган доцент О. Зикировга муаллиф самимий миннатдорчилик билдиради.

Бу дарслик тўғрисидаги китобхонларнинг танқидий фикр ва мулоҳазаларини муаллиф мамнуният билан қабул қилади.

Муаллиф

I БОБ

ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ КЛАССИФИКАЦИЯСИ. АСОСИЙ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИНГ ҚЎЙИЛИШИ

1- §. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва уларнинг ечими тўғрисида тушунча

D орқали декарт ортогонал координаталари $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 2$ бўлган x нуқталарнинг n — ўлчовли E^n Евклид фазосидаги соҳани, яъни очиқ боғланган (бўш бўлмаган) тўпламни белгилаймиз. Тартибланган манфий бўлмаган n та бутун соннинг $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ кетма-кетлиги *n тартибли мультииндекс* дейилади, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ сон бу *мультииндекснинг узунлиги* деб аталади.

$u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциянинг $x \in D$ нуқтадаги $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ тартибли ҳосиласини

$$D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 u = u(x)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Хусусий ҳолда $\alpha = \alpha_i$ бўлганда

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_i} u}{\partial x_i^{\alpha_i}} = D_i^{\alpha_i} u, \quad D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}, \quad D_i^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_i x_i}.$$

$F = F(x, \ldots, p_\alpha, \ldots)$ функция D соҳа x нуқталарининг ва $P_\alpha = P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = D^\alpha u$, $\alpha_i = 0, 1, \ldots$ ҳақиқий ўзгарувчининг берилган функцияси бўлиб, камида битта $\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}$, $|\alpha| = m > 0$ ҳосила нолдан фарқли бўлсин.

Ушбу

$$F(x, \ \ldots, \ D^\alpha u, \ \ldots) = 0 \qquad (1)$$

тенглик номаълум $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ функцияга нисбатан *m - тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама* дейилади.

(1) тенгламанинг чап томони эса хусусий ҳосилали *дифференциал оператор* деб аталади.

Агар F барча p_α $(|\alpha|=0,1,...,m)$ ўзгарувчиларга нисбатан чизиқли функция бўлса, (1) тенглама *чизиқли дифференциал тенглама* дейилади.

Агарда F, $|\alpha|=m$ бўлганда барча p_α ўзгарувчиларга нисбатан чизиқли функция бўлса, (1) тенглама *квазичизиқли дифференциал тенглама* деб аталади.

D соҳада аниқланган $u(x)$ функция (1) тенгламада иштирок этувчи барча ҳосилалари билан узлуксиз бўлиб, уни айниятга айлантирса, $u(x)$ ни (1) тенгламанинг *регуляр (классик) ечими* дейилади.

Хусусий ҳосилали m- тартибли чизиқли дифференциал тенгламани ушбу

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \qquad (2)$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин.

Барча $x \in D$ лар учун (2) тенгламанинг ўнг томони $f(x)$ нолга тенг бўлса, (2) тенглама *бир жинсли,* $f(x)$ функция нолга тенг бўлмаса, *бир жинсли бўлмаган тенглама* дейилади.

Агар $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар бир жинсли бўлмаган (2) тенгламанинг ечимлари бўлса, равшанки $w(x)=u(x)-v(x)$ айирма бир жинсли $(f=0)$ тенгламанинг ечими бўлади.

Агарда $u_i(x)$, $i=1,...,k$ функциялар бир жинсли $(f=0)$ тенгламанинг ечимлари бўлса, $u(x)=\sum_{i=1}^{k} c_i u_i(x)$ функция ҳам, бу ерда c_i — ҳақиқий ўзгармаслар, шу тенгламанинг ечими бўлади.

Хусусий ҳосилали иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \qquad (3)$$

кўринишда ёзилади, бу ерда A_{ij}, B_i, C, f — D соҳада берилган ҳақиқий функциялардир.

(3) тенгламанинг барча A_{ij}, $i,j=1,...,n$ коэффициентлари нолга тенг бўлган $x \in D$ нуқталарда тенглама иккин-

чи тартибли бўлмай қолади, яъни бу нуқталарда (3) тенгламанинг тартиби бузилади. Бундан кейин биз (3) тенглама берилган соҳада унинг тартиби иккига тенг деб ҳисоблаймиз. (3) тенгламада $i \neq j$ бўлганда алоҳида — алоҳида $A_{ij}u_{x_i x_j}$, $A_{ji}u_{x_j x_i}$ қўшилувчилар иштирок этмай, балки уларнинг йиғиндиси $(A_{ij}+A_{ji})\, u_{x_i x_j}$ иштирок этади. Шу сабабли ҳам умумиятликка зиён етказмай ҳамма вақт $A_{ij} = A_{ji}$ деб ҳисоблаймиз.

Эслатиб ўтамиз, D соҳада аниқланган ва k- тартибгача хусусий ҳосилалари билан узлуксиз бўлган ҳақиқий $u(x)$ функцияларнинг тўплами $C^k(D)$ орқали белгиланади.

2 - §. Характеристик форма тушунчаси, иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг классификацияси ва каноник кўриниши

Фараз қилайлик (1) тенгламада иштирок этаётган $F(x,..., p_\alpha,...)$ функция, $p_\alpha = p_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, $|\alpha| = m$ ўзгарувчилар бўйича узлуксиз биринчи тартибли ҳосилаларга эга бўлсин. (1) тенглама назариясида λ_1 , ... , λ_n ҳақиқий ўзгарувчиларга нисбатан ушбу

$$K(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{\alpha = m} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \lambda^\alpha, \quad \lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_n^{\alpha_n} \qquad (4)$$

m- тартибли форма — m даражали бир жинсли кўпҳад муҳим роль ўйнайди. Бу форма (1) тенгламага мос бўлган *характеристик форма* дейилади.

Иккинчи тартибли квазичизиқли

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x) u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}) = 0 \qquad (5)$$

дифференциал тенглама учун, бу ерда $A_{ij}(x) \in C(D)$, (4) форма

$$Q(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x) \lambda_i \lambda_j \qquad (6)$$

квадратик формадан иборат бўлади. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, шу жумладан (5) кўринишдаги иккинчи тартибли тенглама текширилаётганда, иложи борича эркли ўзгарувчиларни алмаштириб, тенгламаларни соддароқ кўринишга келтиришга ҳаракат қилинади ва айрим ҳолларда бунга эришилади ҳам. Шу мақсадда, аввало (5) тенгламада эркли ўзгарувчиларни алмаштирганда унинг $A_{ij}(x)$ коэффициентлари қандай қонун билан ўзгаришини текширамиз. $x=(x_1,\dots,x_n)$ ўзгарувчилар ўрнига $y=y(x)$, яъни

$$y_k=y_k\ (x_1,\dots,x_n)\ ,\ \ k=1,\dots,\ n$$

ўзгарувчиларни киритамиз. x ўзгарувчиларнинг бирор атрофида $y_k\in\ C^2$ бўлсин ва ушбу якобиан

$$\frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}\neq 0$$

деб ҳисоблаймиз. Бу шартга кўра x ўзгарувчиларни y лар орқали ифодалашимиз мумкин, яъни $x=x(y)$. (5) тенгламага кирган $u(x)$ функциянинг ҳосилаларини янги y ўзгарувчиларга нисбатан ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k\partial y_l}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i\partial x_j}\ .$$

Бу ифодаларни (5) тенгламага қўйиб, уни ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$\sum_{k,l=1}^{n}\tilde{A}_{kl}u_{y_k y_l}+\tilde{\Phi}(y,u,u_{y_1},\dots,u_{y_n})=0, \qquad (7)$$

бу ерда

$$\tilde{A}_{kl}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\ \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}, \qquad (8)$$

$\tilde{\Phi}$ эса, Φ дан ва биринчи тартибли ҳосилалар иштирок этган ҳадлардан ташкил топган ифода.

(5) тенглама текширилаётган D соҳада аниқ x_0 нуқтани оламиз ва

$$y_0 = y(x_0)\,,\ \beta_{ki} = \frac{\partial y_k(x_0)}{\partial x_i}$$

белгилашларни киритамиз.

(8) формула x_0 нуқтада қуйидагича ёзилади:

$$\tilde{A}_{kl}(y_0) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x_0)\beta_{ki}\beta_{lj}\,. \tag{9}$$

(6) квадратик формани x_0 нуқтада ёзиб оламиз:

$$Q = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x_0)\lambda_i\lambda_j\,. \tag{10}$$

Махсус бўлмаган ушбу

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki}\xi_k,\ \det(\beta_{ki}) \neq 0 \tag{11}$$

аффин алмаштириш натижасида (10) квадратик форма

$$Q = \sum_{k,l=1}^{n} \tilde{A}_{kl}(y_0)\xi_k\xi_l \tag{12}$$

кўринишга келади. Бу квадратик форманинг коэффициентлари ҳам (9) формула билан аниқланади.

Шундай қилиб, (5) тенгламани x_0 нуқтада x ўзгарувчилар ўрнига янги $y = y(x)$ ўзгарувчилар киритиб соддалаштириш учун, шу нуқтада (10) квадратик формани махсус бўлмаган (11) чизиқли алмаштириш ёрдами билан соддалаштириш етарлидир.

Алгебра курсида исбот қилинадики, ҳамма вақт шундай махсус бўлмаган (11) алмаштириш мавжуд бўлиб, унинг ёрдами билан (10) квадратик форма қуйидаги кўринишга олиб келинади:

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \mu_k\xi_k^2\,, \tag{13}$$

бу ерда μ_k, $k = 1,\dots,n$ коэффициентлар 1, -1, 0 қийматларни қабул қилади. Шу билан бирга мусбат (манфий) коэффициентлар сони (инерция индекси) ва нолга тенг бўлган коэффициентлар сони (форма дефекти) аффин инвариантдир, яъни бу сонлар фақат (10) форма билан аниқланиб, (11) алмаштиришнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмайди.

Бу нарса (5) дифференциал тенглама $A_{ij}(x)$ коэффициентларининг x_0 нуқтада қабул қиладиган қийматларига қараб, классификация қилиш имконини беради.

Юқорида айтилганларга асосан (7) тенглама

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k u_{y_k y_k} + \tilde{\Phi}(y, u, u_{y_1}, \ldots, u_{y_n}) = 0 \qquad (14)$$

кўринишда ёзилади.

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг аралаш ҳосилалар қатнашмаган бундай кўриниши, одатда унинг *каноник кўриниши* дейилади.

(5) тенгламани битта нуқтада эмас, ҳеч бўлмаганда $x_0 \in D$ нуқтанинг бирор кичик атрофида каноник кўринишга олиб келувчи ўзгарувчиларнинг алмаштиришини (аффин бўлиши шарт эмас) топиш мумкинми деган савол туғилади.

Бу саволга ижобий жавоб фақат $n = 2$ бўлгандагина маълум. Бу ҳолни биз алоҳида кўрамиз.

Агар барча $\mu_k = 1$ ёки барча $\mu_k = -1$, $k = 1, \ldots, n$ бўлса, яъни Q форма мос равишда мусбат ёки манфий аниқланган (дефинит) бўлса, (5) тенглама $x \in D$ нуқтада *эллиптик типдаги ёки эллиптик тенглама* дейилади.

Агар μ_k коэффициентлардан биттаси манфий, қолганлари мусбат (ёки аксинча) бўлса, (5) тенглама $x \in D$ нуқтада *гиперболик* тенглама деб аталади.

μ_k коэффициентлардан l таси, $1 < l < n - 1$, мусбат, қолган $n - l$ таси манфий бўлса, (5) тенглама *ультрагиперболик* типдаги тенглама дейилади.

Агар μ_k коэффициентлардан биттаси нолга тенг, қолганлари нолдан фарқли ва бир хил ишорали бўлса, (5) тенглама $x \in D$ нуқтада *параболик тенглама* дейилади.

Агар коэффициентлардан камида биттаси нолга тенг бўлса, (5) тенглама кенг маънода $x \in D$ нуқтада *параболик тенглама* деб аталади.

Агар (5) тенглама D соҳанинг ҳар бир нуқтасида эллиптик, гиперболик ёки параболик бўлса, у ҳолда D соҳада мос равишда *эллиптик, гиперболик ёки параболик типдаги тенглама* деб аталади.

Агар нолдан фарқли бўлган, бир хил ишорали k_0, k_1 ҳақиқий сонлар мавжуд бўлиб, барча $x \in D$ нуқталар учун ушбу

$$k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

тенгсизлик бажарилса, D соҳада эллиптик бўлган (5) тенглама *текис эллиптик тенглама* дейилади.

Масалан Трикоми номи билан юритиладиган

$$x_2 u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0$$

тенглама $x_2 > 0$ ярим текисликнинг ҳар бир нуқтасида эллиптик бўлса ҳам, бу ерда текис эллиптик эмасдир.

D соҳанинг турли қисмида *(5)* тенглама ҳар хил типга тегишли бўлса, уни *аралаш типдаги тенглама* дейилади.

Юқорида келтирилган *Трикоми тенгламаси* $x_2 = 0$ ўқнинг ихтиёрий қисмини ўз ичига олган ихтиёрий D соҳада аралаш типдаги тенгламага мисол бўлади.

Юқорида баён қилинган (5) тенгламанинг классификациясини эквивалент тарзда $A = ||A_{i,j}||$ матрицанинг характеристик сонларига асосланиб ҳам бериш мумкин. Бунинг учун алгебрадан маълум бўлган (10) квадратик форманинг (13) каноник кўринишидаги μ_k , $k = 1,\dots,n$ сонлар A матрицанинг характеристик сонларидан иборат эканлигини эслаш кифоядир. Маълумки, симметрик $(A_{i,j} = A_{i,j})$ матрицанинг барча характеристик сонлари ҳақиқий сонлардан иборатдир.

Эслатиб ўтамиз, A матрицанинг характеристик сонлари ушбу

$$\det (A - \lambda\, E) = 0$$

алгебраик тенгламанинг илдизларидан иборат, бу ерда E — бирлик матрица.

Демак, (5) тенглама берилган D соҳанинг ихтиёрий x нуқтасида A матрица характеристик сонларининг ишорасини аниқлаб, (5) тенгламанинг қайси типга тегишли эканини дарҳол билиб олиш мумкин.

Бу ерда яна бир муҳим тушунча, характеристик сиртлар тушунчасини киритиб ўтамиз.

Ушбу

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}=0$$

тенглама (5) дифференциал тенглама *характеристикаларининг тенгламаси* дейилади.

Агар $\omega(x_1, ..., x_n)$ функция характеристикалар тенгламасини қаноатлантирса,

$$\omega(x_1, \ldots, x_n)=c\ , \qquad c=\text{const}$$

тенглик билан аниқланадиган сирт берилган (5) дифференциал тенгламанинг *характеристик сирти ёки характеристикаси* дейилади.

Ўзгарувчилар сони иккита бўлганда характеристик эгри чизиқ ҳақида сўз боради.

Характеристикалар тенгламаси расман бундай тузилади: (5) дифференциал тенгламага мос бўлган (6) квадратик формани тузиб, унда $\lambda_i=\frac{\partial\omega}{\partial x_i}, \lambda_j=\frac{\partial\omega}{\partial x_j}$ деб, ҳосил бўлган ифодани нолга тенглаштирамиз.

Фараз қилайлик, $\omega\in C^2$ бўлсин. (5) тенгламани соддалаштириш мақсадида x_i ўзгарувчилар ўрнига киритилган y_i ўзгарувчилардан биттасини, масалан y_1 ни $y_1=\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ десак, у ҳолда характеристикалар тенгламасига асосан $A_{11}=0$ бўлади. Шунинг учун ҳам дифференциал тенгламанинг битта ёки бир нечта характеристикалар оиласини билиш, бу тенгламани соддароқ кўринишга келтириш имконини беради.

3- §. Юқори тартибли дифференциал тенгламаларнинг ва системаларнинг классификацияси

Хусусий ҳосилали m- тартибли квазичизиқли тенглама

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)D^\alpha u+\Phi(x,u,\ldots D^\beta u,\ldots)=0 \tag{15}$$

кўринишда ёзилади, бу ерда Φ ифода номаълум $u=u(x)$ функциянинг $m-1$ дан юқори бўлган ҳосилаларини ўз ичига олмайди.

(15) тенгламага мос бўлган характеристик форма (4) га асосан

$$K(\lambda_1,...,\lambda_n)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \lambda^\alpha \tag{16}$$

кўринишда ёзилади.

Агар D соҳанинг тайин x нуқтасида $\lambda_1,..., \lambda_n$ ўзгарувчиларнинг шундай $\lambda_i=\lambda_i\,(\mu_1,..., \mu_n)$, $i=1, ..., n$ аффин алмаштиришини (аффин алмаштириш махсус бўлмаган $\lambda=A\mu+B$ ($\det A\neq 0,\ B\in E^n$) алмаштиришдан иборатдир) топиш мумкин бўлсаки, натижада (16) формадан ҳосил бўлган форма μ_i ўзгарувчиларнинг фақат l тасини, $0<l<n$, ўз ичига олса, (15) тенглама *x нуқтада параболик* ёки *параболик бузилади* деб айтилади.

Параболик бузилиш бўлмаганда, фақатгина $\lambda_1=0$,..., $\lambda_n=0$ бўлгандагина $K\,(\lambda_1,..., \lambda_n)=0$ бўлса, (15) тенглама *$x\in D$ нуқтада эллиптик* дейилади.

Агарда $\lambda_1,..., \lambda_n$ ўзгарувчилар орасидан биттасини, масалан $\lambda_n=\lambda$ ни ажратиб олиш мумкин бўлсаки (зарур бўлган ҳолда бу ўзгарувчиларни аффин алмаштиришдан сўнг), барча $\lambda'=(\lambda_1,\ ...,\ \lambda_{n-1})\in E^{n-1}$ нуқталар учун λ га нисбатан характеристик

$$K\,(\lambda_1,\ ...,\ \lambda_{n-1},\ \lambda)=0$$

тенгламанинг барча илдизлари ҳақиқий бўлса, (15) тенглама *$x\in D$ нуқтада гиперболик* дейилади.

Агарда λ илдизларнинг бир қисми ҳақиқий, қолганлари комплекс бўлса, (15) тенглама *$x\in D$ нуқтада қўшма типдаги тенглама* дейилади.

Бу таърифга асосан $\alpha\geq 3$ бўлгандагина (15) тенглама *қўшма* тип бўлиши мумкин.

Қўшма турдаги тенгламага

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}\right)=0$$

тенглама мисол бўлади.

Худди шунга ўхшаш, чизиқли бўлмаган (1) тенглама (4) форма хусусиятига асосан типларга ажратилади. (4) форма коэффициентлари x нуқта билан бирга изланаётган $u(x)$ ечим ва унинг ҳосилаларига боғлиқ бўлгани сабабли, типларга ажратиш текширилаётган ҳолда фақат шу ечим учунгина маънога эга бўлади.

Масалан,

$$u(x)u_{x_1x_1} + \sum_{i=2}^{n} u_{x_ix_i} = 0$$

тенглама $u(x) > 0$ бўлган $x \in D$ нуқталарда эллиптик, $u(x) < 0$ бўлганда гиперболик ва $u(x) = 0$ бўлган $x \in D$ нуқталарда параболик бузилади. Энди хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасининг классификациясига қисқача тўхталиб ўтамиз.

(1) тенгламада қатнашаётган F функция N ўлчовли $F = (F_1,...,F_N)$ вектордан иборат бўлсин. Бу векторнинг $F_1,...,F_N$ компонентлари D соҳа x нуқталарнинг ҳамда $p_o^j = u_j$, $p_\alpha^j = D^\alpha u_j$, $j = 1,..., M$ ҳақиқий ўзгарувчиларнинг берилган ҳақиқий функциялари бўлсин.

Ушбу

$$F_i\,(x,..., D^a u_j ,...) = 0, \qquad i = 1,... N, j = 1,... M \qquad (17)$$

кўринишдаги тенглик, номаълум $u_1,..., u_M$ функцияларга нисбатан хусусий ҳосилали *дифференциал тенгламалар системаси* дейилади. (17) тенгламалар системасига кирган номаълум функциялар ҳосилаларининг энг юқори тартиби шу *системанинг тартиби* дейилади.

(17) системасининг тартиби m га тенг бўлсин. Агар ҳамма F_i функциялар барча p_α^j ўзгарувчиларга нисбатан чизиқли бўлса, (17) система чизиқли, агарда F_i лар, $i = 1,$ ..., $N,$ барча p_α^j, $|\alpha| = m,$ ларга нисбатан чизиқли бўлса, (17) *система квазичизиқли* дейилади.

Агар $N = M,$ $N > M,$ $N < M$ бўлса, у ҳолда (17) система мос равишда *аниқ, ортиғи билан аниқланган, етарлича аниқланмаган* дейилади. (17) система аниқ бўлиб, унинг ҳар бир тенгламасининг тартиби m га тенг бўлсин.

Ушбу

$$a_\alpha = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p_\alpha^j} \right\|, i, j = 1, \ldots, N, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = m$$

квадратик матрицани тузамиз.

$$K(\lambda_1, \ldots \lambda_n) = \det \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \lambda^\alpha = \det \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \lambda_1^{\alpha_1}, \ldots, \lambda_n^{\alpha_n} \qquad (18)$$

ифода ҳақиқий скаляр $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ параметрларга нисбатан Nm тартибли формадан иборатдир. Бу форма (17) системанинг *характеристик детерминанти* дейилади.

(18) форманинг характерига қараб, худди (15) тенгламага ўхшаш, (17) система ҳам типларга ажратилади. Жуда кўп ҳолларда амалиётда учрайдиган тенгламалар системасини битта

$$\sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha u = f \qquad (19)$$

матрица тенглама кўринишида ёзиш мумкин.

Бу ерда D^α дифференциал оператор, $u = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$ вектор-функция ёки $u = \|u_j\|$, $j = 1, \ldots, N$ матрица-устуннинг ҳар бир компонентига таъсир қилади, a_α — коэффициентлар N- тартибли матрицадан иборат бўлиб, булар ҳамда (19) системанинг ўнг томони $f = (f_1, \ldots, f_N)$ ёки $f = \|f_j\|$, номаълум $u_j(x)$ функцияларга ва уларнинг тартиби $m - 1$ дан катта бўлмаган ҳосилаларига боғлиқ бўлиши мумкин. $m = 1$ бўлганда (19) системадан биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системаси

$$\sum_{j=1}^{n} a_j D_j u + bu = f \qquad (20)$$

келиб чиқади, бу ерда b — N-тартибли квадратик матрица.

(20) тенгламалар системасига мос бўлган N- тартибли характеристик форма ушбу

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \det \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda_j$$

формула билан берилади.

Мисол учун (20) да $n = N = 2$, $b = 0$, $f = 0$,

$$a_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad a_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

бўлсин. Бу ҳолда ушбу системага эга бўламиз:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} D_1 u_1 + 0 \\ 0 + D_1 u_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 - D_2 u_2 \\ D_2 u_1 + 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} D_1 u_1 - D_2 u_2 \\ D_2 u_1 + D_1 u_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

ёки

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \tag{21}$$

Шундай қилиб, комплекс ўзгарувчили функциялар назариясидан маълум бўлган Коши — Риман системаси ҳосил бўлди. (21) системага мос бўлган характеристик форма

$$K = \det(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2) = \det \begin{Vmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{Vmatrix} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

кўринишга эга бўлади.

Демак, Коши — Риман системаси эллиптик типдаги система экан. $z = x_1 + ix_2$ комплекс ўзгарувчини ҳамда

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \bar{z} = x_1 - ix_2$$

дифференциал операторни киритиб, (21) системани битта дифференциал тенглама

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = 0$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин, бу ерда

$$W(z) = u_1(x_1, x_2) + i\, u_2(x_1, x_2).$$

4- §. Иккинчи тартибли икки ўзгарувчили дифференциал тенгламаларни каноник кўринишга келтириш

(5) тенглама $n=2$ бўлган ҳолда, яъни иккита x ва y ҳақиқий ўзгарувчили иккинчи тартибли квазичизиқли тенглама ушбу

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (22)$$

кўринишда ёзилади.

(22) тенглама характеристикаларининг тенгламаси чизиқли бўлмаган

$$A\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 = 0 \qquad (23)$$

тенгламадан иборатдир.

Бу тенгламани соддагина усул билан оддий дифференциал тенгламага келтириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $\omega(x,y)$ функция (23) тенгламанинг ечими бўлса, $\omega(x,y)=\text{const}$ эгри чизиқ (22) тенгламанинг характеристикасидир. Бу характеристика атрофида

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}dx + \frac{\partial \omega}{\partial y}dy = 0$$

ёки

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} : \frac{\partial \omega}{\partial y} = dy : (-dx)$$

муносабат бажарилади.

(23) тенгламада $\frac{\partial \omega}{\partial x} : \frac{\partial \omega}{\partial y}$ нисбатни $dy : (-dx)$ га алмаштириб,

$$Ady^2 - 2B\,dydx + C\,dx^2 = 0 \qquad (24)$$

оддий дифференциал тенгламага эга бўламиз.

Аксинча, агар $\omega = \text{const}$ (24) тенгламанинг интеграли бўлса, $\omega(x,y)$ функция (23) характеристикалар тенгламасини қаноатлантиради. (24) тенглик характеристик эгри чизиқларнинг оддий дифференциал тенгламасидан иборатдир.

(24) тенглик билан аниқланган (dx,dy) йўналиш одатда *характеристик йўналиш* дейилади.

2- § га асосан $Ady^2 + 2Bdxdy + Cdx^2$ квадратик форманинг аниқланган (мусбат ёки манфий), ишораси ўзгарувчан ёки ярим аниқланган (бузилган) бўлишига қараб, (22) тенглама эллиптик, гиперболик ёки параболик типга тегишли бўлади. Шунга мувофиқ $Ady^2 + 2Bdxdy + Cdx^2$ квадратик форманинг дискриминанти $B^2 - AC$ нолдан кичик, катта ёки нолга тенг бўлишига қараб, мос равишда, (22) тенглама эллиптик, гиперболик ёки параболик бўлади.

Шунинг учун ҳам (22) тенглама эллиптиклик соҳасида ҳақиқий характеристик йўналишларга эга эмас, ҳар бир гиперболиклик нуқтасида эса иккита турли ҳақиқий характеристик йўналиш, ҳар бир параболиклик нуқтада битта ҳақиқий характеристик йўналиш мавжуд. Демак, A, B ва C коэффицентлар етарли силлиқ функциялар бўлганда, (22) тенгламанинг гиперболиклик соҳаси характеристик эгри чизиқларнинг иккита оиласи тўри билан, параболиклик соҳаси эса характеристик эгри чизиқларнинг битта оиласи тўри билан қопланади.

Ушбу

$$\operatorname{sign} y \, |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (25)$$

тенглама учун, бу ерда m — мусбат ҳақиқий сон, (24) тенглама

$$\operatorname{sign} y \, |y|^m dy^2 + dx^2 = 0$$

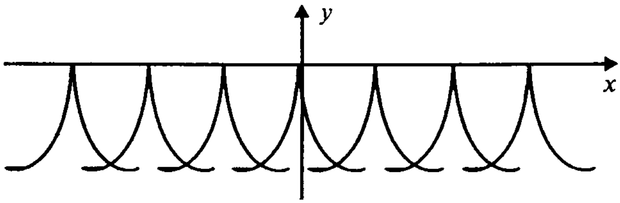
кўринишга эга бўлади. Бу тенгликдан дарҳол кўринадики, $y > 0$ ярим текисликда (25) тенглама ҳақиқий характеристикаларга эга эмас, $y < 0$ ярим текисликда характеристик эгри чизиқлар тенгламасини

$$(dx - (-y)^{\frac{m}{2}} dy)(dx + (-y)^{\frac{m}{2}} dy) = 0$$

кўринишда ёзиб ва уни интераллаб, $y < 0$ ярим текислик иккита

$$x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = \text{const}, \quad x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = \text{const}$$

характеристик эгри чизиқлар оиласи билан қопланганини кўрамиз (1-чизма).



1-чизма

Агар (22) тенгламанинг A, B ва C коэффициентлари тенглама берилган D соҳада етарли силлиқ функциялар бўлса, x ва y ўзгарувчиларнинг шундай махсус бўлмаган

$$\xi = \xi\,(x,y)\;,\; \eta = \eta\,(x,y)$$

алмаштириши мавжуд бўладики, (22) тенглама D соҳада бу алмаштириш ёрдамида қуйидаги каноник кўринишлардан бирига келади.

Эллиптик ҳолда

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0\,, \tag{26}$$

гиперболик ҳолда

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0\,, \tag{27}$$

ёки

$$u_{\xi\eta} + \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0 \tag{27'}$$

ва параболик ҳолда

$$u_{\eta\eta} + \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0\,. \tag{28}$$

(22) тенглама берилган барча D соҳада, яъни глобал уни (26), (27) ёки (28) каноник кўринишга келтириш кат-

та қийинчиликлар билан боғлиқдир. Шунинг учун ҳам, (22) тенгламани D соҳа (x,y) нуқтасининг етарли кичик атрофида, яъни локал каноник кўринишга келтириш билан чегараланамиз. (22) тенгламанинг A, B ва C коэффициентлари (x,y) нуқтанинг бирор атрофида C^2 синфга тегишли бўлиб,

$$A^2(x,y) + B^2(x,y) + C^2(x,y) \neq 0$$

бўлсин.

Умумиятликка зиён етказмай $A(x,y) \neq 0$ деб ҳисоблашимиз мумкин. Ҳақиқатан ҳам, акс ҳолда $C(x,y) \neq 0$ бўлиши мумкин. Бу ҳолда x ва y ўрнини алмаштириб, шундай тенглама ҳосил қиламизки, унда $A(x,y) \neq 0$ бўлади.

Агарда A ва C бир вақтда бирор нуқтада нолга тенг бўлса, бу нуқта атрофида $B(x,y) \neq 0$ бўлади. Бу ҳолда $x' = x + y$, $y' = x - y$ алмаштириш натижасида ҳосил бўлган тенгламада $A(x,y) \neq 0$ бўлади.

(22) тенгламада эркли ўзгарувчиларни ихтиёрий (қайтарилувчи) алмаштирамиз:

$$\xi = \xi\,(x,y)\ ,\ \eta = \eta\,(x,y).$$

Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар қуйидагича алмаштирилади:

$$u_x = u_\xi\, \xi_x + u_\eta\, \eta_x\ , \qquad u_y = u_\xi\, \xi_y + u_\eta\, \eta_y$$

$$u_{xx} = \xi^2_x\, u_{\xi\xi} + 2\xi_x\, \eta_x\, u_{\xi\eta} + \eta^2_x\, u_{\eta\eta} + \xi_{xx}\, u_\xi + \eta_{xx}\, u_\eta,$$

$$u_{xy} = \xi_x \xi_y\, u_{\xi\xi} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) u_{\xi\eta} + \eta_x \eta_y u_{\eta\eta} + \xi_{xy} u_\xi + \eta_{xy} u_\eta,$$

$$u_{yy} = \xi^2_y\, u_{\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y u_{\xi\eta} + \eta^2_y u_{\eta\eta} + \xi_{yy} u_\xi + \eta_{yy} u_\eta.$$

Буларга асосан (22) тенглама

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \overline{\Phi}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad (29)$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда

$$A_1(\xi, \eta) = A\xi^2_x + 2B\xi_x \xi_y + C\xi^2_y,$$

$$B_1(\xi, \eta) = A\xi_x \eta_x + B(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + C\xi_y \eta_y,$$

$$C_1(\xi, \eta) = A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2,$$
$$u(\xi, \eta) = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)],$$

$x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$алмаштириш эса $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ га тескари алмаштиришдир.

(23) характеристикалар тенгламасини

$$A\left(\omega_x + \frac{B+\sqrt{-\delta}}{A}\omega_y\right)\left(\omega_x + \frac{B-\sqrt{-\delta}}{A}\omega_y\right) = 0 \qquad (30)$$

кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда $\delta = AC - B^2$. Аввало (22) тенглама эллиптик типга тегишли бўлсин, яъни (x,y) нуқта атрофида $\delta(x,y) > 0$, шу билан бирга $\sqrt{-\delta} = i\sqrt{\delta}$.

Бу ҳолда (30) тенглама ҳақиқий ечимларга эга эмас. Шунинг учун

$$\omega(x,y) = \xi(x,y) + i\,\eta(x,y)$$

деб белгилаб оламиз. Агар (23) тенгламанинг чап томонини Q орқали белгиласак, бевосита ҳисоблаб,

$$Q = A_1 - C_1 + 2\,i\,B_1 \qquad (31)$$

бўлишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Шунга мувофиқ $\omega(x,y)$ функцияни ушбу иккита

$$\omega_x + \frac{B+i\sqrt{\delta}}{A}\omega_y = 0, \qquad (32)$$
$$\omega_x + \frac{B-i\sqrt{\delta}}{A}\omega_y = 0$$

тенгламадан бирининг ечими сифатида излаш табиийдир. Бу тенгламаларда ω_y олдидаги коэффициентлар ўзаро қўшма комплекс миқдорлардан иборат. (32) тенглама иккита биринчи тартибли

$$\begin{aligned} &A\xi_x + B\xi_y - \sqrt{\delta}\,\eta_y = 0, \\ &A\eta_x + B\eta_y + \sqrt{\delta}\,\xi_y = 0 \end{aligned} \qquad (33)$$

тенгламалар системасига эквивалентдир. (33) тенгламаларни *Бельтрами тенгламалари* деб аталади.

Энди $\xi(x,y)$ ва $\eta\ (x,y)$ сифатида Бельтрами тенгламаларининг якобиани

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0 \tag{34}$$

бўлган ечимларини оламиз. $\omega\ (x,y)$ функция (23) характеристикалар тенгламасининг ечими бўлгани учун (31) тенглик нолга тенг бўлади. Бундан дарҳол

$$A_1 = C_1, \quad B_1 = 0$$

келиб чиқади. (33) тенгламалардан ξ_x ва η_x ни топиб, A_1, B_1 коэффициентларнинг ифодаларига қўйсак,

$$A_1 = C_1 = \frac{\delta}{A}\left(\xi_y^2 + \eta_y^2\right) \neq 0$$

бўлишига дарҳол ишонч ҳосил қиламиз, (29) тенгламанинг барча ҳадларини нолдан фарқли бўлган

$$\frac{\delta}{A}\left(\xi_y^2 + \eta_y^2\right)$$

ифодага бўлиб, (26) тенгламани ҳосил қиламиз. Энди, (x,y) нуқта атрофида (22) гиперболик типга тегишли бўлсин, яъни $\delta < 0$,$\xi(x,y)$, $\eta\ (x,y)$ функциялар эса, мос равишда

$$\begin{aligned} &\xi_x + \frac{B+\sqrt{\delta}}{A}\xi_y = 0, \\ &\eta_x + \frac{B-\sqrt{\delta}}{A}\eta_y = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

тенгламаларнинг (34) шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлсин.

Бу ҳолда (35) га асосан

$$A_1 = C_1 = 0, \qquad B_1 = 2\frac{\delta}{A}\xi_y\ \eta_y \neq 0\ .$$

Агарда $\xi_y = 0$ ёки $\eta_y = 0$ бўлса, (35) га асосан (34) якобиан нолга тенг бўлади. $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ функцияларнинг танланишига мувофиқ бундай бўлиши мумкин эмас. Шу сабабли (x, y) нуқта атрофида $B_1 \neq 0$ бўлади. (29) тенглама $2B_1$ га бўлингандан сўнг (27_1) кўринишга келади. $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$ алмаштириш натижасида (27_1) тенгламадан (27) тенглама келиб чиқади.

Ниҳоят $\delta = 0$, яъни (x, y) нуқта атрофида (22) тенглама параболик бўлсин. $\xi (x, y)$ сифатида

$$A\xi_x + B\xi_y = 0 \tag{36}$$

тенгламанинг ўзгармас сондан фарқли бўлган ечимини оламиз.

Бу ҳолда $A_1 = B_1 = 0$ бўлади. $\eta (x,y)$ функцияни шундай танлаб оламизки, $C_1 (\xi, \eta) \neq 0$ бўлсин. Натижада, (29) дан дарҳол (28) тенглама ҳосил бўлади.

Юқорида биз ҳосил қилган хусусий ҳосилали биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар ечимларининг мавжудлиги масаласи биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар назарияси билан узвий боғлиқдир. Оддий дифференциал тенгламалар курсидан маълумки, A, B, C функциялар етарли силлиқ бўлганда хусусий ҳосилали чизиқли тенгламаларнинг (33) системаси ҳамда (35) ва (36) чизиқли тенгламалар (22) тенглама берилган D соҳа (x,y) нуқтасининг кичик атрофида якобиани нолдан фарқли бўлган ечимларга эгадир.

Шу билан (22) тенгламани (x,y) нуқта атрофида, яъни локал (26), (27), (27_1) ва (28) каноник кўринишларга келтириш мумкинлиги исботланди.

5- §. Математик физиканинг асосий тенгламаларига келадиган физика ва механиканинг айрим масалалари

Асосий тенгламаларни келтириб чиқаришдан аввал математик анализдан маълум бўлган E^n фазода соҳа бўйича олинган n ўлчовли интегрални соҳанинг чегараси бўйича олинган $(n - 1)$ ўлчовли интеграл билан алмаштириш имконини берадиган Гаусс — Остроградский формуласини эслатиб ўтамиз.

$P_i (x) = P_i (x_1,..., x_n)$ функциялар бўлаклари силлиқ S сирт билан чегараланган $\Omega \cup S$ ёпиқ соҳада узлуксиз бўлиб, уларнинг биринчи тартибли ҳосилалари Ω да узлуксиз бўлсин. Қуйидаги Гаусс — Остроградский формуласи ўринлидир:

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}\,d\Omega=\int_{S}\sum_{i=1}^{n}P_i(x)\cos(v_1,x_i)\,dS\,,$$

бу ерда $v_i=\cos\ (v,\ x_i)$ лар S сиртга ўтказилган ташқи $v=(v_1,..., v_n)$ нормалнинг йўналтирувчи косинуслари. Агар $P_i\ (x)$ функцияларни бирор P векторнинг компонентлари деб ҳисоблаб, унинг ташқи нормалдаги проекциясини P_v орқали белгилаб олсак,

$$P_v=\sum_{i=1}^{n}P_i(x)\cos(v,x_i)$$

бўлади.

$$\operatorname{div}P=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}$$

ни эътиборга олсак, Гаусс — Остроградский формуласи

$$\int_{\Omega}\operatorname{div}P\,d\Omega=\int_{S}P_v\,dS$$

кўринишда ёзилади. Агар нормал ички бўлса, сирт бўйича интеграл олдида “ — “ ишора бўлади.

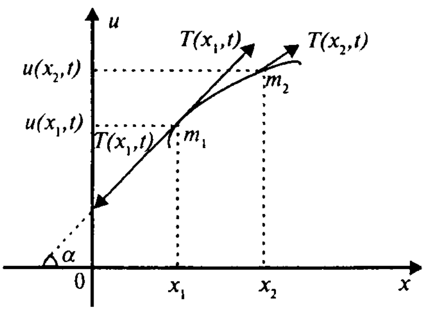
1. Тор тебранишининг тенгламаси. Механиканинг (тор, стержень, мембрана, уч ўлчовли ҳажмларнинг тебранишлари), физиканинг (электромагнит тебранишлар) кўп масалалари

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)-qu+F\ (x,t) \qquad (37)$$

кўринишдаги тебраниш тенгламаларига олиб келинади. Бундаги $u(x,t)$ номаълум функция n та фазовий координаталарга ҳамда t вақтга боғлиқдир. $\rho,\ p,\ q$ — коэффициентлар тебраниш содир бўлаётган муҳитнинг хоссалари билан аниқланади, озод ҳад $F(x,t)$ эса ташқи таъсирнинг (яъни таъсир қилаётган ташқи кучларнинг) интенсивлигини ифодалайди. (37) тенгламада иштирок этаётган div ва grad операторлар таърифга асосан

$$\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

(37) тенгламанинг келтириб чиқарилишини тор тебранишининг мисолида кўрсатамиз. Тор деганда эркин эгиладиган ингичка ип тушунилади, бошқача айтганда, тор шундай қаттиқ жисмки, унинг узунлиги бошқа ўлчовларидан анчагина ортиқ бўлади. Торга таъсир қилиб турган таранглик кучи етарли катта деб фараз қиламиз. Шу сабабли торнинг эгилгандаги қаршилигини таранглигига нисбатан ҳисобга олмаса ҳам бўлади. Икки нуқта орасида таранг қилиб тортилган торни текширамиз. Аниқлик учун бу *Ox* ўқида жойлашган бўлсин. Биз торнинг текис кўндаланг тебранишини текширамиз, яъни бу шундай тебранишки , тор ҳамма вақт бир текисликда ётади ва торнинг ҳар бир нуқтаси *Ox* ўққа перпендикуляр бўйича силжийди. Бу деган сўз, мувозанат вақтида x абсциссага эга бўлган торнинг нуқтаси тебраниш жараёнида ҳам шу абсциссага эга бўлади (2- чизма).



2- чизма

Бу нуқтанинг ординатаси u вақт ўтиши билан ўзгаради, яъни u торнинг мувозанат ҳолатидан силжишидан иборат. Тор тебранишининг математик қонунини топиш учун u нинг t вақтга ва x га қандай боғлиқлигини, яъни $u = u(x,t)$ функцияни топиш керак. Биз торнинг фақат кичик тебранишларини текширамиз, яъни $u(x,t)$ ва $\frac{\partial u}{\partial x}$ га нисбатан юқори тартибли кичикликдаги $\left(u^2, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \dots\right)$ миқдорларни ҳисобга олмаймиз.

Тор эгилишга қаршилик кўрсатмаганлиги туфайли, унинг t вақтда x нуқтадаги таранглиги $T(x,t)$ x нуқтада торга ўтказилган уринма бўйича йўналган бўлади. Торнинг ихтиёрий (x_1, x_2) қисмини оламиз. Бу қисм тебраниш даврида M_1M_2 шаклга келади. Бунинг t вақтдаги ёй узунлиги

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx x_2 - x_1,$$

яъни кичик тебранишларда тор қисмларининг узунлиги чўзилмайди ва қисқармайди. Демак, Гук қонунига асосан таранглик миқдори $|T(x,t)|$ x, t га боғлиқ бўлмаган ўзгармас бўлиб қолади, яъни $|T(x,t)| = T_0$.

Тор тебранишининг тенгламасини чиқариш учун Даламбер принципидан фойдаланамиз.

Бунга асосан, торнинг ажратилган қисмига таъсир қилувчи барча кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак. Бирлик узунликда ҳисобланган ва торга Ou ўққа параллел таъсир қиладиган ташқи куч $p(x,t)$ бўлсин.

M_1 M_2 қисмга таъсир қиладиган куч

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)\, dx$$

га тенг бўлади.

x_2 нуқтадаги тарангликнинг Ou даги проекцияси $T_0 \sin\alpha\,(x_2)$ га, x_1 нуқтадаги эса — $T_0 \sin\alpha\,(x_1)$ га тенг бўлади. Ушбу

$$\sin\alpha(x) = \frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx u_x$$

формулага асосан

$$T_0 \sin\alpha(x_2) - T_0 \sin\alpha(x_1) =$$

$$= T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right] = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

тенгликка эга бўламиз. Торнинг чизиқли зичлиги, яъни тор кичкина бўлаги массасининг унинг узунлигига бўлган нисбатининг лимити, $\rho(x)$ бўлсин.

M нуқта тезлиги $\frac{\partial u}{\partial t}$, тезланиши $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ бўлгани учун $M_1 M_2$ бўлакнинг инерция кучи

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$$

га тенг бўлади. Даламбер принципига асосан

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx = 0$$

тенгликка эга бўламиз. x_1 ва x_2 лар ихтиёрий бўлгани учун

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 . \tag{38}$$

Бу эса тор кичик кўндаланг тебранишларининг тенгламасидир.

Агар зичлик $\rho(x)$ ўзгармас бўлса, $\rho(x) = \rho$, торнинг тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{39}$$

кўринишда ёзилади, бунда $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, $f(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho}$. (39) тенглама одатда *бир ўлчовли тўлқин тенгламаси* ҳам дейилади. Торга таъсир қилаётган ташқи куч $p(x,t) = 0$ бўлса, торнинг эркин тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{40}$$

келиб чиқади.

(37) кўринишдаги

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x,t)$$

тенглама эгилувчан стерженнинг кичик бўйлама тебранишларини ҳам ифодалайди, бунда $S(x)$ — стержен кўндаланг кесимининг юзи, $E(x)-x$ нуқтадаги Юнг модули.

Худди тор тебраниш тенгламасига ўхшаш мембрананинг кичик кўндаланг тебранишларининг тенгламаси келтириб чиқарилади:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + p(x_1, x_2, t).$$

Агар $\rho = \text{const}$ бўлса, мембрана тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + F(x_1, x_2, t),\ a^2 = \frac{T_0}{\rho},\ F = \frac{p}{\rho} \tag{41}$$

икки ўлчовли тўлқин тенгламаси дейилади. *Уч ўлчовли тўлқин тенгламаси*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + F(x_1, x_2, x_3, t) \tag{42}$$

бир жинсли муҳитда товуш тарқалиши ва электр ўтказмайдиган бир жинсли муҳитда электромагнит тўлқинлари тарқалишини ифодалайди. (42) тенгламани газнинг зичлиги, босими, тезликларнинг потенциали ҳамда электр ва магнит майдонлари кучланишларининг ташкил этувчилари қаноатлантиради.

(39), (41), (42) тенгламалар қисқача

$$\Box_a u = F \tag{43}$$

кўринишда ёзилади, бунда $\Box_a$ — тўлқин оператор (Даламбер оператори):

$$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta \quad (\Box = \Box_1),$$

Δ — Лаплас оператори

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Тор ёки стержень тебраниш жараёнининг физик маъносидан шу нарса келиб чиқадики, бу жараённи бир қийматли ифодалаш учун қўшимча u силжиш ва u_t тезликнинг бошланғич вақтдаги қийматларини (бошланғич шартлар) бериш зарур:

$$u\Big|_{t=to} = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=to} = \varphi_1(x).$$

Бундан ташқари торнинг четки нуқталаридаги ҳолатини ҳам кўрсатиш керак. Торнинг текширилаётган $0 \le x \le l$ қисмининг икки чети мустаҳкамланган бўлса, изланаётган ечим

$$u\big|_{x=0} = 0, \qquad u\big|_{x=l} = 0$$

шартларни қаноатлантириши зарур. Агар торнинг ёки стерженнинг четлари мустаҳкамланмай, бирор қонун бўйича ҳаракатланаётган бўлса,

$$u\big|_{x=0} = f_1(t), \qquad u\big|_{x=l} = f_2(t)$$

шартларни бериш керак.

Агар торнинг l четига берилган $\psi(t)$ куч таъсир қилаётган бўлса,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \frac{\psi(t)}{T_0}.$$

Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} \approx T_0 \sin\alpha\big|_{x=l} = \psi(t).$$

Агар стерженнинг икки ёки бир чети, масалан $x = l$ эластик мустаҳкамланган бўлиб, α — мустаҳкамланганлик қаттиқлиги коэффициенти бўлса, Гук қонунига асосан

$$\left(E\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right)\Big|_{x=l} = 0$$

бўлади, яъни $x = l$ чет силжиши мумкин, аммо мустаҳкамланганликнинг эластик кучлари бу четда таранглик пайдо бўлишга сабаб бўлади, бу эса силжиган четни олдинги ҳолатига келтиришга интилади.

Юқорида келтириб чиқарилган тўлқин тебраниш тенгламалари равшанки, гиперболик типга тегишлидир.

2. Иссиқлик тарқалиш тенгламаси. Иссиқлик тарқалиш ёки муҳитда заррачаларнинг диффузия жараёнлари ушбу умумий диффузия тенгламаси билан ифодаланади:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) - qu + F(x,t). \tag{44}$$

Иссиқлик тарқалиш тенгламасини келтириб чиқарамиз. Муҳит $x = (x_1, x_2, x_3)$ нуқтасининг t вақтдаги ҳароратини $u(x,t)$ орқали, шу нуқтани ўз ичига олган ихтиёрий ҳажм (соҳа) ни V орқали белгилаб оламиз. V нинг чегараси S бўлсин. Маълумки, муҳит турли қисмларининг ҳарорати турлича бўлса, у ҳолда кўпроқ қизиган қисмдан озроқ қизиган қисмга қараб иссиқлик ҳаракати содир бўлади. V ҳажмда (t_1, t_2) вақт оралиғида иссиқлик ўзгаришини текширамиз.

Фурье қонунига асосан, S сиртнинг ΔS қисмидан Δt вақтда ўтувчи иссиқлик миқдори ΔQ_1, $\Delta S \cdot \Delta t$ ва ҳароратнинг нормал бўйича ҳосиласи $\frac{\partial u}{\partial n}$ га пропорционал бўлади, яъни

$$\Delta Q_1 = -k\Delta S \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = -k\Delta S \cdot \Delta t \operatorname{grad}_n u, \tag{45}$$

бу ерда $k > 0$ функция — ички иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти, n — иссиқлик ҳаракати йўналиши бўйича ΔS га ўтказилган нормал.

Текширилаётган муҳитни изотроп деб ҳисоблаймиз, яъни иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти k фақат муҳитнинг $x = (x_1, x_2, x_3)$ нуқтасига боғлиқ бўлиб, S сиртнинг нормали йўналишига боғлиқ эмас, бошқача айтганда иссиқлик тарқалаётган йўналишга боғлиқ эмас. S сирт орқали (t_1, t_2) вақт оралиғида V ҳажмга кираётган иссиқлик миқдори (45) формулага асосан

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(x) \frac{\partial u}{\partial n} ds \tag{46}$$

га тенг, n — S сиртга ўтказилган ички нормал, чунки иссиқлик S нинг ичига киряпти. V ҳажм ΔV бўлагининг ҳароратини Δt вақтда Δu га ўзгартириш учун сарф қилинадиган иссиқлик миқдори

$$\Delta Q_2 = [u(x,t + \Delta t) - u(x,t)]\ \rho(x)\ \gamma(x)\ \Delta V$$

га тенг, бунда $\rho(x)$, $\gamma(x)$ — муҳитнинг зичлиги ва иссиқлик сиғими (берилган жисмни $1^\circ\ C$ га иситиш учун зарур бўлган иссиқлик миқдори). Демак, V ҳажм ҳароратини $\Delta u = u(x, t_2) - u(x, t_1)$ га ўзгартириш учун зарур бўлган иссиқлик миқдори

$$Q_2 = \int_V [u(x, t_2) - u(x, t_1)]\gamma\rho\Delta V \tag{47}$$

га тенг.

$$u(x,t_2) - u(x,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\, dt$$

бўлгани учун (47) тенглик ушбу кўринишда ёзилади:

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dV\ . \tag{48}$$

Фараз қилайлик, текширилаётган ҳажм ичида иссиқлик манбалари бўлсин. Иссиқлик манбаларининг зичлигини (бирлик вақт ичида бирлик ҳажмдан ажралган ёки унга сингиб кетган иссиқлик миқдори) $F(x,t)$ орқали белгилаб оламиз.

V ҳажмдан (t_1, t_2) вақт оралиғида ажралаётган ёки унга сингиб кетаётган иссиқлик миқдори

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V F(x,t)dV$$

га тенг. Энди баланс тенгламасини тузамиз. Равшанки, $Q_2 = Q_1 + Q_3$, яъни

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S k \frac{\partial u}{\partial n}\, ds + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V F(x,t)dt \tag{49}$$

$u(x, t)$ функцияни x_1, x_2, x_3 фазовий координаталар бўйича икки марта, t бўйича бир марта дифференциалланувчи ва бу ҳосилалар текширилаётган соҳада узлуксиз деб ҳисоблаб,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad}_n u$$

тенгликни эътиборга олсак, Гаусс — Остроградский формуласига асосан

$$\int_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS = -\int_V \text{div}(k\text{grad}u)dV$$

тенгликка эга бўламиз. Бунга асосан (49) формула ушбу кўринишда ёзилади:

$$\int_{t_1}^{t} dt \int_V \left[\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(k\text{grad}u) - F(x,t)\right]dV = 0 .$$

Бундан дарҳол V ҳажм ва (t_1, t_2) вақт оралиғи ихтиёрий бўлгани учун

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k\text{grad}u) + F(x,t) \qquad (50)$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасини ҳосил қиламиз.

Агар муҳит бир жинсли бўлса, яъни γ, ρ ва k функциялар ўзгармас бўлса, (50) тенглама

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,t) \qquad (51)$$

кўринишга келади, бунда

$$a^2 = \frac{k}{\gamma\rho}, f = \frac{F}{\gamma\rho} .$$

(51) тенглама *иссиқлик ўтказувчанлик* тенгламаси ҳам дейилади. (51) тенгламани келтириб чиқаришда фазовий координатлар сони n ни 3 га тенг деб ҳисоблаган эдик. Бу тенгламада n сон ихтиёрий бўлиши мумкин. Агар текширилаётган муҳитда иссиқлик манбалари бўлмаса, яъни $F = 0$ бўлса, бир жинсли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u .$$

Тебраниш тенгламаларидек, иссиқлик тарқалиш жараёнини тўла ифодалаш учун муҳитда ҳароратнинг бошланғич тарқалиши (бошланғич шарт) ҳамда муҳитнинг чегарасидаги ҳолати берилиши шарт. Бошланғич шарт, тўлқин тенгламаларидан фарқли, $u(x,t)$ функциянинг бошланғич t_0 вақтдаги қийматини беришдан иборатдир, яъни

$$u\big|_{t=t_0} = \varphi(x). \tag{52}$$

Чегаравий шартлар ҳароратнинг чегарадаги режимига қараб турлича бўлиши мумкин.

1) Агар S чегарада берилган бир хил u_0 ҳарорат сақланаётган бўлса, у ҳолда

$$u\big|_S = u_0. \tag{53}$$

2) Агар Sда берилган иссиқлик оқими бир хил бўлса, у ҳолда

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = u_1. \tag{54}$$

3) Агар S да иссиқлик алмашиниши содир бўлаётган бўлса, Ньютон қонунига асосан

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial n} + h(u-u_0)\right]\Big|_S = 0 \tag{55}$$

бўлади, бунда h — иссиқлик алмашиниш коэффициенти, u_0 — атроф-муҳитнинг ҳарорати. Худди иссиқлик тарқалиш тенгламасига ўхшаш заррачалар диффузияси тенгламаси келтириб чиқарилади. Фақат бунда Фурье қонуни ўрнига бирлик вақтда сиртнинг ds қисмидан ўтувчи заррачалар оқими учун Нэрнст қонунидан фойдаланиш керак.

Бунга асосан

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial n}dS,$$

бу ерда $D(x)$ — диффузия коэффициенти, $u(x,t)$-t вақтда x нуқтадаги заррачалар зичлиги. $u(x,t)$ зичлик учун (44) кўринишдаги тенгламага эга бўламиз, унда ρ ғоваклик коэффициентини белгилайди, $\rho = D$, q эса муҳитнинг сингдиришини ифодалайди. (51) иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси параболик типдаги тенгламаларнинг яққол вакилидир.

3. Стационар тенгламалар. Стационар, яъни вақтга боғлиқ бўлмаган жараёнлар учун $F(x,t) = F(x)$, $u(x,t) = u(x)$, (37) тебранишлар ҳамда (44) диффузия тенгламалари ушбу

$$-\operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) + qu = F(x) \tag{56}$$

кўринишга эга бўлади.

$p = \text{const}$, $q = 0$ бўлганда (56) тенгламадан

$$\Delta u = f, \quad f = -\frac{F}{p} \tag{57}$$

тенглама ҳосил бўлади. Агар $F(x) = 0$ бўлса,

$$\Delta u = 0 \tag{58}$$

тенгламага эга бўламиз.

(57) тенглама *Пуассон*, (58) тенглама эса *Лаплас тенгламаси* деб аталади.

Стационар жараёнларни тўла ифодалаш учун чегарадаги ҳолатни, яъни (53), (54) ва (55) чегаравий шартлардан бирини бериш зарурдир.

Фараз қилайлик, (43) тўлқин тенгламасида ташқи таъсир $F(x, t)$ даврий бўлиб, унинг частотаси ω, амплитудаси $a^2 f(x)$ бўлсин:

$$F(x,t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}.$$

Агар $u(x,t)$ ни ҳам ω частотали ва номаълум $u(x)$ амплитудали даврий функция деб изласак, яъни

$$u(x,t) = u(x) e^{i\omega t},$$

у ҳолда $u(x)$ функция учун ушбу

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \tag{59}$$

стационар тенглама ҳосил бўлади.

(59) тенглама *Гельмгольц тенгламаси* дейилади. Юқорида келтирилган стационар тенгламалар эллиптик типга тегишли бўлган тенгламаларнинг вакилидир.

4. Гидродинамиканинг тенгламалари. Бу тенгламаларни келтириб чиқаришдан олдин математик анализнинг бир муҳим формуласини чиқарамиз. Бўлаклари силлиқ, t параметрга боғлиқ бўлган $S(t)$ ёпиқ сиртни, ҳамда бу сирт билан чегараланган ўзгарувчи $\Omega(t)$ ҳажмни текширамиз. $\rho(x, t)$, $x=(x_1, x_2, x_3)$ координатлар ва t вақтнинг бирор функцияси бўлсин. Ушбу

$$Q(t) = \int\limits_{\Omega(t)} \rho(x,t)dx, \qquad dx = dx_1 dx_2 dx_3$$

интегралнинг t бўйича олинган ҳосиласини ҳисоблашни ўз олдимизга мақсад қилиб қўямиз. Аввал хусусий ҳолни текширамиз. $\Omega(t)$ ҳажм ясовчилари x_3 ўқига параллел бўлган цилиндрик сирт, ҳамда $x_3=0$, $x_3=\varphi(x_1, x_2, t)$ сиртлар билан чегараланган бўлсин, шу билан бирга $x_3=\varphi(x_1, x_2, t)$ бўлаклари силлиқ $S(t)$ сиртнинг тенгламасидир.

$\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ ҳосила чегараланган, яъни $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| \leq M$. Бу ҳолда

$$Q(t) = \int\limits_{\Omega_1}\left[\int\limits_0^{\varphi} \rho(x,t)dx_3\right]dx_1 dx_2,$$

бу ерда Ω_1 текис соҳа бўлиб, Ω ҳажм чегарасининг $x_1 0 x$ текисликда ётган қисмидир. $\frac{\partial Q}{\partial t}$ ни ҳисоблаш учун қуйидаги айирма нисбатни тузамиз:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_{\Omega_1}\left[\int\limits_{\varphi(x_1,x_2,t)}^{\varphi(x_1,x_2,t+\Delta t)} \rho(x,t+\Delta t)dx_3\right]dx_1 dx_2 +$$

$$+\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{\Omega_1}\left\{\int\limits_0^{\varphi(x_1,x_2,t)} [\rho(x,t+\Delta t)-\rho(x,t)dx_3\right\}dx_1 dx_2,$$

$$\varphi(x_1, x_2, t+\Delta t) - \varphi(x_1, x_2, t) = \Delta\varphi$$

бўлгани учун, аввалги тенгликни бундай кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\int_{\Omega_1}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\frac{1}{\Delta\varphi}\left[\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}\rho(x,t+\Delta t)dx_3\right]dx_1dx_2+$$

$$+\int_{\Omega_1}\left[\int_0^{\varphi}\frac{\rho(x,t+\Delta t)-\rho(x,t)}{\Delta t}dx_3\right]dx_1dx_2.$$

Математик анализдан маълум бўлган ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}\rho(x_1,x_2,x_3,t+\Delta t)dx_3=\rho\left(x_1,x_2,\varphi+\alpha\Delta\varphi,t+\Delta t\right)\left(\varphi+\Delta\varphi-\varphi\right),$$

шу туфайли

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\int_{\Omega_1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\rho(x_1,x_2,\varphi,t)dx_1dx_2+\int_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}dx.$$

Бу тенгликдаги биринчи интеграл остидаги ифода асосан x_1 x_2 боғлиқ бўлгани учун Ω_1 ни $x_3=\varphi$ билан алмаштиришимиз мумкин.

Демак,

$$\frac{dQ}{dt}=\int_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}dx+\int_{x_3=\varphi}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}dx_1dx_2.$$

Агар S сиртга ўтказилган ички нормалнинг йўналишини n орқали белгилаб, $dx_1dx_2=-\cos(n,\ x_3)dS$ тенгликни эътиборга олсак, аввалги формула

$$\frac{dQ}{dt}=\int_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}dx-\int_{S}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos(n,x_3)dS$$

кўринишда ёзилади. $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ миқдор $S\ (t)$ сиртнинг Ox_3 ўқ йўналиши бўйича ҳаракатининг *гўё тезлиги* дейилади. Гўё тезлик ифодасини бошқача кўринишда ҳам ёзиш мумкин. $S(t)$ сиртлар оиласини t га нисбатан ечилган кўринишда оламиз:

$$t=S\left(x_1,x_2,x_3\right).$$

У ҳолда

$$\frac{\partial x_3}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial x_3}}.$$

Лекин $\frac{\partial t}{\partial x_3}$ S сиртга ўтказилган нормал бўйича йўналтирилган grad$t$ векторнинг Ox_3 ўқи бўйича ясовчиси бўлиб ва бу векторнинг компонентлари

$$\frac{\partial t}{\partial n}\cos(n, x_1), \quad \frac{\partial t}{\partial n}\cos(n, x_2), \quad \frac{\partial t}{\partial n}\cos(n, x_3),$$

лардан иборат. Бундан

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial x_3}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial x_3}} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n}\cos(n,x_3)}.$$

$\frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n}}$ ифода сиртнинг нормал бўйича ҳаракатининг *гўё тезлиги* дейилади. Буни v_n орқали белгилаб,

$$v_{x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{v_n}{\cos(n,x_3)}$$

тенгликка эга бўламиз.

Агар S сирт $\bar{v}$ тезлик билан ҳаракат қилаётган моддий заррачалардан ташкил топган бўлса, нормал йўналишидаги тезлик v_n қуйидагича бўлади:

$$v_n = (\bar{v} \cdot \bar{n}) = v_{x_1}\cos(n, x_1) + v_{x_2}\cos(n, x_2) + v_{x_3}\cos(n, x_3).$$

Демак, биз аввалги формулани бундай ёзишимиз мумкин:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} \rho(x,t)dx = \int\limits_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}dx - \int\limits_{S} \rho v_n dS. \tag{60}$$

S(t) ихтиёрий шаклдаги сирт бўлган ҳолда ҳам олдинги формула ўз кучини сақлаб қолади, чунки *S(t)* ни ҳар доим чекли сондаги бўлакларга ажратиш мумкин бўлиб, бу бўлакчалар ҳар бирининг нуқталари учун фазовий координаталарнинг биттаси қолган иккитасининг бир қийматли функцияси бўлади.

(60) формула гидродинамиканинг асосий тенгламаларидан биттасини дарҳол келтириб чиқариш имконини беради.

Биз суюқлик ёки газнинг ҳаракатини текширамиз. Суюқлик ҳаракат тезлигининг вектори $\bar{\upsilon}(x,t) = (\upsilon_{x_1}, \upsilon_{x_2}, \upsilon_{x_3})$, суюқликнинг зичлиги $\rho\,(x,\,t)$ бўлсин.

$S(t)$ сирт билан чегараланган $\Omega(t)$ ўзгарувчи ҳажм суюқлик билан тўлдирилган бўлсин. Бу ҳажмдаги суюқликнинг миқдори

$$Q = \int\limits_{\Omega} \rho(x,t)dx$$

га тенг. Суюқлик ташқаридан кирмаётганлиги ва йўқолмаётганлиги туфайли бундай ҳажмдаги суюқлик миқдори ўзгармас бўлиб қолади. Шунинг учун

$$\frac{dQ}{dt} = \int\limits_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx - \int\limits_{S(t)} \rho \upsilon_n dS = 0.$$

Гаусс — Остроградский формуласига асосан

$$\int\limits_{S(t)} \rho \upsilon_n dS = -\int\limits_{\Omega(t)} \operatorname{div}(\rho\bar{\upsilon})dx.$$

Бунга асосан, аввалги тенглик бундай ёзилади:

$$\int\limits_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{\upsilon})dx\right] = 0\,.$$

Бу тенглик ихтиёрий S сирт ҳамда ихтиёрий t вақтда ўринли бўлгани учун

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{\upsilon}) = 0 \qquad (61)$$

тенгламага эга бўламиз, ёки очиб ёзсак:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\upsilon_{x_1})}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho\upsilon_{x_2})}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho\upsilon_{x_3})}{\partial x_3} = 0.$$

(61) тенглама *узлуксизлик* ёки *ажралмаслик* тенгламаси дейилади.

$$\operatorname{div}(\rho\bar{\upsilon}) = \rho\operatorname{div}\bar{\upsilon} + \bar{\upsilon}\operatorname{grad}\rho$$

формулага асосан, (61) тенглама

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\operatorname{div}\bar{\upsilon} + \bar{\upsilon}\operatorname{grad}\rho = 0 \qquad (62)$$

кўринишда ҳам ёзилади.

Агарда суюқлик бир жинсли сиқилмайдиган бўлса, яъни $\rho = \text{const}$ бўлса, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, $\operatorname{grad}\rho = 0$ бўлади.

Бу ҳолда (62) тенгламадан $\operatorname{div}\bar{\upsilon} = 0$ тенгликка эга бўламиз.

Демак, бир жинсли сиқилмайдиган суюқлик ҳаракат тезлигининг вектори соленоидал вектор бўлар экан.

Энди фараз қилайлик, суюқлик потенциал ҳаракатда бўлсин, яъни:

$$\bar{\upsilon} = \operatorname{grad}u \quad \text{ёки} \quad \upsilon_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \upsilon_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \upsilon_{x_3} = \frac{\partial u}{\partial x_3}.$$

Бу ҳолда

$$\operatorname{div}\bar{\upsilon} = \operatorname{div}\operatorname{grad}u = 0$$

ёки

$$\Delta u = 0.$$

Шундай қилиб, сиқилмайдиган бир жинсли суюқлик ҳаракатининг потенциали Лаплас тенгламасини қаноатлантирар экан.

Энди идеал суюқлик ҳаракатининг тенгламасини келтириб чиқарамиз.

Идеал суюқлик деганда шундай суюқлик тушуниладики, бунда унинг заррачалари орасидаги ишқаланиш кучи, ёки бари бир ёпишқоқлик кучи бўлмайди.

Шунинг учун ҳам, агар суюқликдан S сирт билан чегараланган бирор V ҳажмни ажратиб олсак, суюқлик қолган қисмининг ажратилган қисмига таъсири S сиртнинг ҳар бир нуқтасида ички нормал бўйича йўналган кучга тўғри келади. Бирлик юзга қўйилган бу куч (босим) нинг миқдорини $p(x, t)$ орқали белгиласак, босимнинг S сиртга тенг таъсир кучи $-\int_S p\bar{n}dS$ га тенг бўлади, бунда $\bar{n}$ — S сиртга ўтказилган ташқи нормалнинг бирлик вектори.

Гаусс — Остроградский формуласига асосан

$$-\int_S p\bar{n}dS = -\int_V \mathrm{grad}\,p dx.$$

Агар бирлик массага қўйилган ташқи кучни (масалан, оғирлик кучини) $\overline{F}(x,t) = (F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3})$ орқали белгиласак, V ҳажмга қўйилган тенг таъсир қилувчи куч

$$\int_V \rho \overline{F} dx$$

га тенг бўлади.

Ниҳоят, V ҳажмга тенг таъсир қилувчи инерция кучи

$$-\int_V \rho \frac{d\bar{v}}{dt} dx$$

га тенг бўлади. Даламбер принципига асосан

$$\int_V \left(\rho \overline{F} - \rho \frac{d\bar{v}}{dt} - \mathrm{grad}\,p \right) dx = 0.$$

Бундан, V ҳажм ихтиёрий бўлгани учун, идеал суюқлик ҳаракатининг Эйлер тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \overline{F} - \frac{1}{\rho} \mathrm{grad}\,p \cdot \tag{63}$$

Текширилаётган суюқлик ҳар бир моддий нуқтаси (айрим заррачалари) нинг траекторияси ушбу

$$\frac{dx_1}{dt} = v_{x_1}(x_1,x_2,x_3,t), \quad \frac{dx_2}{dt} = v_{x_2}(x_1,x_2,x_3,t), \quad \frac{dx_3}{dt} = v_{x_3}(x_1,x_2,x_3,t)$$

тенгламалар билан аниқланади.

Буларни эътиборга олиб, (63) тенгламани скаляр кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$\bar{i}\left(\frac{\partial v_{x1}}{dt} + \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial v_{x1}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \right) + \bar{j}\left(\frac{\partial v_{x2}}{dt} + \frac{\partial v_{x2}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial v_{x2}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial v_{x2}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \right) +$$

$$+\bar{k}\left(\frac{\partial v_{x3}}{dt}+\frac{\partial v_{x3}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial v_{x3}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial v_{x3}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}\right)=$$

$$=\bar{i}F_{x_1}+\bar{j}F_{x_2}+\bar{k}F_{x_3}-\frac{1}{\rho}\left(\bar{i}\frac{\partial p}{\partial x_1}+\bar{j}\frac{\partial p}{\partial x_2}+\bar{k}\frac{\partial p}{\partial x_3}\right).$$

Бундан дарҳол қуйидаги тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_{x_1}}{\partial t}+\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1}v_{x_1}+\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_2}v_{x_2}+\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_3}v_{x_3}&=F_{x_1}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}\\
\frac{\partial v_{x_2}}{\partial t}+\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_1}v_{x_1}+\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2}v_{x_2}+\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_3}v_{x_3}&=F_{x_2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}\\
\frac{\partial v_{x_3}}{\partial t}+\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_1}v_{x_1}+\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_2}v_{x_2}+\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}v_{x_3}&=F_{x_3}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3}
\end{aligned}\right\}\qquad(64)$$

(64) тенгламаларда бешта номаълум функциялар $v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, p$ ва ρ иштирок этяпти. Бу система аниқ бўлиши учун яна иккита тенглама зарур. Бу номаълум миқдорларни боғловчи яна битта тенглама, яъни ажралмаслик тенгламаси (61) бор. Яна битта тенгламани излаб топишимиз керак.

Агар суюқликни сиқилмайдиган ва бир жинсли деб фараз қилсак

$$\rho=\mathrm{const}$$

бўлади ва биз дарҳол етарли тенгламаларга эга бўламиз.

Сиқилмайдиган суюқликларда умумий ҳолда механикадан маълумки, ҳар бир суюқлик ёки газнинг босими ва зичлиги ўзаро ҳолат тенгламаси билан боғланган бўлиб, унда яна абсолют ҳарорат T қатнашади. Идеал газлар учун бу тенглама

$$\rho=\frac{p}{RT}$$

кўринишга эга бўлади, бунда R — газ доимийси.

Бу тенглама *Клайперон тенгламаси* дейилади. Лекин бунда T ҳам номаълумдир. Кўп ҳолларда босим ва зичлик ўзаро боғланган деб фараз қилинади, яъни

$$\rho=f(p),\qquad(65)$$

бу ерда f — берилган функция.

Бундай шароитлар, масалан жараён жуда тез содир бўлиб, бир заррачадан иккинчи заррачага иссиқлик ўтиб улгурмайдиган ҳоллардагина ўринли бўлади.

Бундай жараёнлар *адиабатик жараёнлар* дейилади.

Шундай қилиб (61), (63), (65) тенгламалар гидродинамика тенгламаларининг тўла системасидир.

5. Моддий нуқтанинг оғирлик кучи таъсиридаги ҳаракати. Декарт ортогонал координатлари x,y бўлган вертикал текисликда моддий $M(x, y)$ нуқта оғирлик (ерга тортилиш) кучи таъсирида $(\xi,\eta),\eta>0$ ҳолатдан $(\xi_0,0),\xi_0>\xi$ ҳолатга ҳаракат қилаётган бўлиб, йўлдаги t вақт баландликни ўлчовчи η координатанинг функцияси бўлсин, яъни $t=t\ (\eta)$. $M(x,y)$ нуқта ҳаракатининг траекториясини топиш талаб қилинади.

Бу масала *таутохрон тўғрисидаги масала* дейилади.

Маълумки, $M(x, y)$ нуқта тезлик вектори $\bar{\upsilon}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$ модулининг квадрати учун

$$\upsilon^2=2g(\eta-y),\quad 0\le y\le\eta \tag{66}$$

тенглик ўринлидир, бу ерда g — оғирлик кучи тезланиши.

Агар $\alpha\,(x,\ y)$ — соат мили ҳаракатига қарши ҳисобланадиган тезлик вектори билан x ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчак бўлса, у ҳолда (66) га асосан

$$\frac{dy}{dt}=\upsilon\sin\alpha=\sqrt{2g(\eta-y)}\sin\alpha \tag{67}$$

тенгликка эга бўламиз. $x=x(y)$ траектория номаълум бўлгани сабабли, ушбу

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sin\alpha[x(y),y]} \tag{68}$$

миқдор ҳам номаълум бўлади. (67) ва (68) тенгликлардан

$$dt=\frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{2g(\eta-y)}}$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан дарҳол

$$t(\eta) = -\int_0^{\eta} \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{2g(\eta-y)}}$$

ёки

$$\int_0^{\eta} \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{\eta-y}} = f(\eta) \qquad (69)$$

тенгламага эга бўламиз, бунда $f(\eta) = -\sqrt{2g}t(\eta)$. (69) тенгламада номаълум функция интеграл белгиси остида бўлгани учун (69) интеграл тенгламадан иборатдир. Интеграл тенгламаларнинг қисқа назариясини биз кейинги бобда баён қиламиз.

(69) тенглама Абель номи билан аталувчи ушбу

$$\int_0^{x} \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^{\alpha}} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, \qquad x > 0$$

интеграл тенгламанинг хусусий ҳолидир. (68) га асосан, (69) интеграл тенгламанинг $|\varphi(y)| > 1$ шартни қаноатлантирувчи ечимларигина физик маънога эга бўлади.

Агар шу хоссага эга бўлган (69) тенгламанинг $\varphi(y)$ ечимини топа олсак, у ҳолда

$$\frac{dx}{dy} = \mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{\mathrm{cosec}^2\alpha - 1} = \sqrt{\varphi^2(y) - 1}$$

геометрик тенгликдан дарҳол изланаётган траекториянинг тенгламасини топамиз:

$$x = \int_0^{y} \sqrt{\varphi^2(t) - 1}dt.$$

Юқорида келтириб чиқарилган тенгламалар алоҳида ажралиб турадиган тенгламалардир.

Биз яна кўп мисолларни келтиришимиз мумкин эди, лекин математик физика тенгламаларини келтириб чиқариш бизнинг вазифамизга кирмайди, чунки асосий мақсадимиз бундай тенгламаларни текшириш ва ечишдан иборатдир.

Математик физика тенгламалари деганда табиатдаги турли ҳодисаларни ифодаловчи дифференциал, интеграл ва функционал тенгламалар тушунилади.

Биз бу китобда асосан иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни, жумладан математик физиканинг классик тенгламалари деб аталувчи тўлқин тенгламаларини, Лаплас тенгламасини ҳамда иссиқлик тарқалиш тенгламаларини ўрганамиз.

6- §. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилали чизиқли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг қўйилиши

1. Асосий масалаларнинг қўйилиши. Аввалги параграфда кўрсатиб ўтганимизга асосан бирор физик жараённи тўла ўрганиш учун, бу жараённи тасвирлаётган тенгламалардан ташқари, унинг бошланғич ҳолатини (бошланғич шартларни) ва жараён содир бўлаётган соҳанинг чегарасидаги ҳолатини (чегаравий шартларни) бериш зарурдир.

Математик нуқтаи назардан бу нарса дифференциал тенгламалар ечимининг ягона эмаслиги билан боғлиқдир.

Оддий дифференциал тенгламалар курсидан маълумки, n-тартибли

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

тенгламанинг умумий ечими n та ихтиёрий ўзгармасга боғлиқдир, яъни $y = \varphi(x, c_1, \ldots, c_n)$. Бу ўзгармасларни аниқлаш учун номаълум функция $y(x)$ қўшимча шартларни қаноатлантириши керак.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун масала мураккаброқдир. Бу тенгламаларнинг ечими ихтиёрий ўзгармасларга эмас, балки умуман айтганда, ихтиёрий функцияларга боғлиқ бўлиб, бу функцияларнинг сони тенгламанинг тартибига тенг бўлади. Ихтиёрий функциялар аргументларининг сони ечим аргументлари сонидан битта кам бўлади.

Бу фикрнинг тўғрлигига Коши — Ковалевская теоремасига асосан ишонч ҳосил қилиш мумкин. Биз бу ерда бир нечта мисолларни келтирамиз.

1) Икки x ва y ўзгарувчили

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$$

тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y) = f(y)$$

дан иборат, $f(y)$ — ихтиёрий функция.

2) Хусусий ҳосилали биринчи тартибли

$$u_x = u_y$$

тенгламани $x + y = \xi$, $x - y = \eta$, $u(x,y) = \omega(\xi,\eta)$ алмаштиришлар ёрдамида

$$2\omega_\eta = 0$$

кўринишга келтириш мумкин. Бу тенгламанинг умумий ечими $\omega(\xi,\eta) = v(\xi)$ бўлади.

Демак, бошланғич тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y) = \upsilon(x + y)$$

дан иборат.

Худди шунга ўхшаш, агар α ва β ўзгармас сонлар бўлса,

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0$$

тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y) = \upsilon(\beta x - ay)$$

дан иборатдир.

3) Ушбу

$$u_{xy} = 0$$

тенгламанинг умумий ечими

$$u(x, y) = f(x) + \varphi(y)$$

эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

4) Бир жинсли бўлмаган

$$u_{xy} = f(x,y)$$

тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta + \upsilon(x) + w(y)$$

кўринишда бўлади. Бу ерда υ, w — ихтиёрий функциялар, x_0 ва y_0 лар эса тайин сонлар.

5) Учинчи тартибли

$$u_{xyy} = 0$$

тенгламанинг умумий ечими

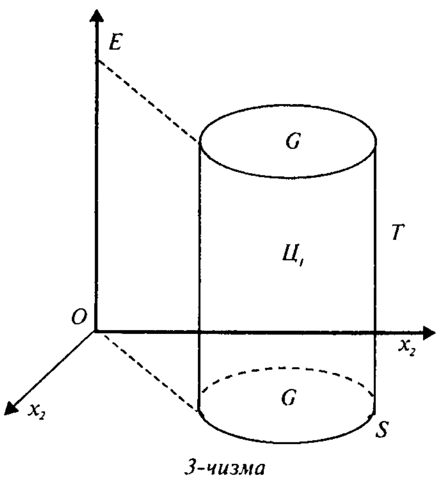
$$u(x,y) = \varphi(y) + y\psi(x) + \psi_1(x)$$

дан иборатдир.

Шундай қилиб, аниқ физик жараённи ифодаловчи ечимни ажратиб олиш учун қўшимча шартларни бериш зарурдир. Бундай қўшимча шартлар бошланғич ва чегаравий шартлардан иборатдир.

Жараён содир бўлаётган соҳа $G \in R^n$ бўлиб, S унинг чегараси бўлсин. S ни бўлаклари силлиқ сирт деб ҳисоблаймиз. Демак, G (56) тенгламадаги эркли x ўзгарувчиларнинг ўзгариш соҳаси, яъни (56) тенгламанинг берилган соҳасидир. (37) ва (44) тенгламаларнинг берилиш соҳаси асоси G ва баландлиги T бўлган $Ц_T = G \times (0,T)$ цилиндрдан иборат деб ҳисоблаймиз. Бу цилиндрнинг чегараси унинг ён сирти $S \times [0, T]$, иккита қуйи $\overline{G} \times \{0\}$ ва юқори $\overline{G} \times \{T\}$ асосларидан иборатдир (3- чизма).

(37), (44), (56) тенгламаларнинг ρ, p, q коэффицентларини t ўзгарувчига боғлиқ эмас, буларнинг физик маъносига кўра $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in \overline{G}$ деб ҳисоблаймиз.



3-чизма

Ниҳоят қурилаётган тенгламаларнинг математик маъносига кўра $\rho \in C(\overline{G})$, $p \in C^1(\overline{G})$ ва $q \in C(\overline{G})$ шартларнинг бажарилиши ҳам зарурдир. Буларга асосан (37) тенглама гиперболик, (44) парабол ик, (56) эса эллиптик типга тегишли бўлади. Дифференциал тенгламалар учун, асосан, уч типдаги масалалар бир-биридан фарқ қилади.

а) Коши масаласи. Бу масала, асосан, гиперболик ва параболик типдаги тенгламалар учун қўйилади; G соҳа бутун R^n фазо билан устма-уст тушади, бу ҳолда чегаравий шартлар бўлмайди.

б) Чегаравий масала эллиптик типдаги тенгламалар учун қўйилади; S да чегаравий шартлар берилади, бошланғич шартлар, табиий бўлмайди.

в) Аралаш масала гиперболик ва параболик типдаги тенгламалар учун қўйилади; $G \neq R^n$ бўлиб, бошланғич ва чегаравий шартлар берилади.

Юқорида айтилган масалаларни ҳар бир типдаги тенглама учун қандай қўйилишини алоҳида кўрамиз.

2. Коши масаласи ва унинг қўйилишида характеристикаларнинг роли. (37) тенглама учун (гиперболик тип) Коши масаласи бундай қўйилади:

$C^2(t>0) \cap C^1(t \geq 0)$ *синфга тегишли,* $t>0$ *ярим фазода* (37) *тенгламани ва* $t=+0$ *да*

$$u\big|_{t=+0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+0} = u_1(x) \tag{70}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ *функция топилсин.*

(44) диффузия тенгламаси учун (параболик тип) Коши масаласи қуйидагича қўйилади:

$C^2(t>0) \cap C(t \geq 0)$ *синфга тегишли* $t>0$ *ярим фазода* (44) *тенгламани ва* $t=+0$ *да*

$$u\big|_{t=+0} = u_0(x) \tag{71}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ *функция топилсин.*

Келтирилган Коши масаласини умумлаштириш мумкин. Шу мақсадда $x_1,\dots,x_n$ ўзгарувчили иккинчи тартибли ушбу квази чизиқли дифференциал тенгламани текширамиз:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{72}$$

Етарли силлиқ $S: \omega(x_1, \ ... , x_n) = 0$ сирт ва бу сиртга уринма бўлмаган, унинг ҳар бир нуқтасида бирор l йўналиш берилган бўлсин. *S сиртнинг бирор атрофида* (72) *тенгламани ва*

$$u\big|_S = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial e}\Big|_S = u_1(x) \tag{73}$$

Коши (бошланғич) шартларини қаноатлантирувчи $u(x)$ функция топилсин.

Бошланғич шартлардан фойдаланиб, S сиртда изланаётган функциянинг барча биринчи тартибли ҳосилаларини топиш мумкин. Энди олдимизга бундай масала қўямиз. (72) тенглама ва (73) шартлардан фойдаланиб, S сиртда $u(x)$ функциянинг ((72) тенгламанинг $u(x)$ ечими мавжуд деб фараз қиламиз) иккинчи тартибли ҳосилаларини топиш мумкинми?

Аввало бошланғич шартлар $x_1 = x_1^0$ гипертекисликда ($R^n - n$ ўлчовли евклид фазосидаги $(n-1)$ ўлчовли текислик *гипертекислик* дейилади; $n = 3$ да гипертекислик оддий текисликдан, $n = 2$ эса тўғри чизиқдан иборатдир) берилган ҳолни кўрамиз:

$$u\Big|_{x_1 = x_1^0} = \varphi_0(x_2, \cdots, x_n), \ \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1 = x_1^0} = \varphi_1(x_2, \cdots, x_n), \tag{74}$$

бу ерда l йўналиш сифатида нормал олиняпти. (74) шартлар асосида $x_1 = x_1^0$ гипертекисликда $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ ҳосиладан ташқари $u(x)$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини аниқлаш мумкин $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ ни аниқлаш учун (72) тенгламадан фойдаланишимиз керак. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин:

1) $A_{11}(x_1^0, x_2, \ ... , x_n) \neq 0$, 2) $A_{11}(x_1^0, x_2, \ ... , x_n) = 0$.

1) ҳолда $x_1 = x_1^0$ гипертекисликда $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ ни бирдан-бир аниқлаш мумкин;

2) ҳолда эса аниқлаб бўлмайди. Энди умумий ҳолни, яъни бошланғич шартлар бирор S:

$$\omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

сиртда берилган ҳолни кўрамиз. S сирт атрофида $x_1, \ldots, x_n$ ўзгарувчилар ўрнига янги $y_1, \ldots, y_n$ ўзгарувчиларни киритамиз:

$$y_1 = \omega_1(x),\ y_i = \omega_i(x),\ i = 2, \ldots, n. \qquad (75)$$

Шу билан бирга, $\omega_i(x)$ функциялар етарли силлиқ ва (75) алмаштиришнинг якобиани нолдан фарқли қилиб танлаб олинади. Янги ўзгарувчиларга нисбатан (72) тенгламанинг коэффицентларини $\overline{A}_{ke}$ орқали белгилаб олсак (2- § га қаралсин), $\overline{A}_{ke} = \overline{A}_{ek}$ тенгликни эътиборга олиб, (72) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб олишимиз мумкин:

$$\overline{A}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + 2\sum_{l=2}^{n} \overline{A}_{1e} \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_e} +$$

$$+\sum_{k,e=2}^{n} \overline{A}_{ke} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_e} + \overline{\Phi}\left(y, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial y_n} \right) = 0. \qquad (76)$$

S сирт тенгламаси эса $y_1 = 0$ дан иборат бўлади, яъни бу ҳолда масала аввалги хусусий ҳолга келади:

$$u\big|_{y_1=0} = \overline{\varphi}_0(y_2, \cdots, y_n),\quad \frac{\partial u}{\partial y_1}\Big|_{y_1=0} = \overline{\varphi}_1(y_2, \cdots, y_n).$$

Агар S сирт (72) тенгламанинг характеристик сирти бўлмаса, $A_{11} \neq 0$ бўлади. Бу ҳолда (76) тенгламага кирган барча ҳосилаларни $y_1 = 0$ да ҳисоблаш мумкин. Агарда S характеристик сирт бўлса, $\overline{A}_{11} = 0$ бўлади. Натижада (76) тенгламада $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}$ ҳосила иштирок этмайди. (76) дан бошланғич шартларга асосан $y = 0$ бўлганда ушбу

$$\sum_{k,e=2}^{n} \overline{A}_{ke} \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_0}{\partial y_k \partial y_e} + 2\sum_{e=2}^{n} \overline{A}_{1e} \frac{\partial^2 \overline{\varphi}_1}{\partial y_e} +$$

$$+\overline{\Phi}\left(y_2, \cdots, y_n, \overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1, \frac{\partial \overline{\varphi}_0}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial \overline{\varphi}_0}{\partial y_n} \right) = 0$$

тенглик ҳосил бўлади.

Бу тенгликдан дарҳол шу нарса келиб чиқадики, агар S характеристик сирт бўлса, бошланғич шартларда берилган φ_0 ва φ_1 функциялар ўзаро боғланган бўлиб қолади. Демак, характеристик сиртда бошланғич шартларни ихтиёрий берилиши мумкин эмас. Бу ҳолда Коши масаласи умуман ечимга эга бўлмаслиги мумкин ёки ечимга эга бўлса ҳам у ягона бўлмайди.

Мисол. Ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

тенгламанинг

$$u\big|_{y=+0} = \varphi_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=+0} = \varphi_1(x)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Равшанки, $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ тўғри чизиқлар оиласи, жумладан $y = 0$ ҳам берилган тенгламанинг характеристикаларидан иборат. Демак, бошланғич шартлар характеристикада бериляпти. Текширилаётган тенгламанинг умумий ечими

$$u(x,y) = f_1(x) + f_2(y)$$

дан иборат. Умумийликка зиён етказмай $f_2\ (0) = 0$ деб ҳисоблашимиз мумкин.

Бошланғич шартларга асосан

$$u\big|_{y=+0} = f_1(x) = \varphi_0(x), \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=+0} = f_2'(y)\big|_{y=+0} = \varphi_1(x).$$

Агар $\varphi_1(x) \neq \text{const}$ бўлса, охирги тенгликнинг бажарилиши мумкин эмас, бу ҳолда Коши масаласи ечимга эга бўлмайди.

Шундай қилиб, $\varphi_1(x) = \text{const} = a$ бўлгандагина Коши масаласи ечимга эга бўлиши мумкин. Бу ҳолда $f_2(y)$ учун ушбу функцияни олишимиз мумкин:

$$f_2(y) = ay + c(y).$$

бу ерда $c(y) \in C^2(y \geq 0)$ синфга тегишли ва $c(0) = c'(0) = 0$ шартларни қоноатлантирувчи ихтиёрий функция.

Агар $\varphi_0(x)\in C^2$ бўлса, Коши масаласининг ҳақиқатдан ҳам ечими мавжуд бўлиб, у ечим

$$u(x,y) = \varphi_0(x) + ay + c(y)$$

формула билан аниқланади, лекин ечим ягона эмас.

3. Коши — Ковалевская теоремаси. Бу бандда биз текширадиган тенгламалардаги номаълум функциялар $n+1$ ўзгарувчига боғлиқ бўлиб, булардан биттасини t орқали, қолганларини эса $x=(x_1,..., x_n)$ орқали белгилаб оламиз. Аввало иккита таъриф киритамиз.

N та номаълум $u_1,..., u_N$ функцияли ушбу

$$\frac{\partial^{k_i}u_i}{\partial t^{k_i}} = \Phi_i(x,t,u_1,\cdots,u_N,\cdots,D_t^{\alpha_0}D_x^{\alpha}u_i,\cdots) \tag{77}$$

$$i = 1, 2, ..., N$$

дифференциал тенгламалар системасининг ўнг томонидаги φ_i функцияларда t ўзгарувчи бўйича k_i-1 дан юқори тартибли бошқа ўзгарувчилар бўйича k_i дан юқори тартибли ҳосилалар иштирок этмаса, яъни $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n\le k_i$, $\alpha_0\le k_i-1$ бўлса, (77) система *t ўзгарувчига нисбатан нормал система* дейилади.

Масалан, тўлқин тенгламаси, Лаплас тенгламаси, иссиқлик тарқалиш тенгламаси ҳар бир x ўзгарувчига нисбатан нормал тенгламадир, бундан ташқари тўлқин тенгламаси t га нисбатан ҳам нормал тенгламадир.

Ихтиёрий хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасини умуман (77) кўринишга келтириш мумкин эмаслигини эслатиб ўтамиз.

Агар $f(x)$, $x=(x_1,..., x_n)$ функция, x_0 нуқтанинг бирор атрофида текис яқинлашувчи

$$f(x) = \sum_{\alpha\ge 0} C_\alpha (x-x_0)^\alpha = \sum_{\alpha\ge 0}\frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha,$$

$$C_\alpha = C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},\quad (x-x_0)^\alpha = (x_1-x_{01})^{\alpha_1}\cdots(x_1-x_{0n})^{\alpha_n}$$

даражали қатор билан ифодаланса, у x_0 нуқтада *аналитик функция* дейилади. x_0 нуқта комплекс бўлиши ҳам мумкин.

Агар $f(x)$ функция G соҳанинг ҳар бир нуқтасида аналитик бўлса, у *G соҳада аналитик* дейилади.

t га нисбатан нормал система учун Коши масаласи бундай қўйилади: (77) *системанинг $t=t_0$ да ушбу*

$$\left.\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\right|_{t=t_0} = \varphi_{ik}(x), \quad k = 0,1,\cdots,k_i-1; \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{78}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $u_1, \ldots, u_N$ ечими топилсин. Бу ерда $\varphi_{ik}(x)$ — бирор $G \subset R^n$ соҳада берилган функциялар.

Берилган (78) бошланғич шартларга асосан Φ_i функциялар иштирок этаётган барча ҳосилалар $t=t_0$ ва $x=x_0$ да маълум бўлади, масалан

$$\left.D_x^\alpha u_j(x,t)\right|_{\substack{t=t_0\\ x=x_0}} = D^\alpha \varphi_{j0}(x_0),\ \left.D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j\right|_{\substack{t=t_0\\ x=x_0}} = D^\alpha \varphi_{j\alpha_0}(x_0).$$

Хусусан, биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \Phi_i\left(x,t,u_1,\cdots,u_N,\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u_N}{\partial x_n}\right), \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{79}$$

кўринишига эга бўлади. Бунда тенгламаларнинг ўнг томони номаълум функцияларнинг t бўйича ҳосиласига, бошқа ўзгарувчилар бўйича биринчи тартибдан юқори бўлган ҳосилаларга боғлиқ эмас. Биринчи тартибли нормал система учун бошланғич шартлар

$$\left.u_i\right|_{t=t_0} = \varphi_{i0}(x),\ i = 1,2,\ \cdots,N$$

кўринишига эга булади. Бу шартларга кўра, (79) система ўнг томонидаги Φ_i функцияларнинг аргументлари (x_0,t_0) нуқтада дарҳол аниқланади.

Коши—Ковалевская теоремаси. *Агар барча $\varphi_{ik}(x)$ функциялар x_0 нуқтанинг бирор атрофида аналитик, $\Phi_i(x,t,\cdots,u_{j\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n},\cdots)$ функция эса $(x_0,t_0,\cdots,$ $D^\alpha\varphi_{i\alpha_0}(x_0),\cdots)$ нуқтанинг бирор атрофида аналитик бўлса, у ҳолда* (77), (78) *Коши масаласи (x_0,t_0) нуқтанинг бирор атрофида аналитик ечимга эга булади, шу билан бирга бу ечим аналитик функциялар синфида ягона бўлади.*

Бу теорема аналитик функциялар синфида Коши масаласининг ечими етарли кичик соҳада мавжуд ва ягона эканлигини тасдиқлайди.

Аналитик бўлмаган, лекин етарли силлиқ функциялар синфида (77), (78) масала ечимининг ягоналиги Хольмгрен томонидан исботланган.

Коши — Ковалевская теоремасининг тўла исботини Р. Курант [10], И. Г Петровский [17], Г. Н.Положий [19] китобларидан ўқиш мумкин.

4. Эллиптик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар. (56) тенглама (эллиптик тип) учун чегаравий масала бундай қўйилади; *G соҳада (56) тенгламани ва S чегарада қуйидаги шартлардан биттасини қаноатлантирувчи u (x) функция топилсин:*

I. $u|_S = \varphi_0$.

II. $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \varphi_1$.

III. $\left.\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \varphi_2$.

Бу ерда n — S сиртга ўтказилган ташқи нормал, φ_0, φ_1, φ_2, α ва β — S да берилган узлуксиз функциялар.

Масалаларни қўйишдан дарҳол шу нарса маълумки, I ҳолда $u(x)$ функция $C^2(G)\cap C(\overline{G})$ синфга, II, III ҳолларда эса $C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ синфга тегишли бўлиши керак.

Бу масалалардан I ни *биринчи чегаравий масала* ёки *Дирихле масаласи*, II ни *иккинчи чегаравий масала* ёки *Нейман масаласи*, III ни эса *учинчи чегаравий масала* дейилади.

Юқорида келтирилган масалаларда номаълум $u(x)$ функция G соҳада изланганиучун уларни мос равишда *ички масалалар* деб юритилади.

Худди шунга ўхшаш, чегараланган G соҳанинг ташқарисида (*ташқи масалалар*) чегаравий масалалар қўйилади. Буларнинг фарқи шундаки, S даги чегаравий шартлардан ташқари, соҳа чексиз бўлгани учун, чексиз узоқлашган нуқтада ҳам шарт берилади.

Масалан, бундай шартлар Лаплас тенгламаси учун $|x| \to \infty$ да

$$\bar{u}(x) = O(1) \text{ ёки } u(x) = 0 \ (1)$$

кўринишида бўлиши мумкин.

Юқоридагиларга ўхшаш G соҳада берилган умумий иккинчи тартибли чизиқли

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \qquad (80)$$

тенглама учун чегаравий масалалар қўйилади.

G соҳада (80) *тенгламанинг*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \beta(x)u(x) = \gamma(x), \ x \in S \qquad (81)$$

шартни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин.

Бу ерда $a_i(x)$, $i = 1,\dots,n$, $\beta(x)$ ва $\gamma(x)$ — S да берилган функциялар; $\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ ва $u(x)$ деганда x нуқта G соҳанинг ичидан S нуқтасига интилгандаги бу функцияларнинг лимит қийматлари тушунилади. (80), (81) масала *Пуанкаре масаласи* дейилади.

Барча S да $a_i(x) = 0$, $i = 1 ,\dots, n$, $\beta(x) \neq 0$ бўлган ҳолда (81) чегаравий шартни

$$u(x)|_S = \gamma_1(x), \ \gamma_1(x) = \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} \qquad (82)$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин. (80), (82) масала *биринчи чегаравий масала* ёки *Дирихле масаласи* дейилади.

S да $\beta(x) = 0$ бўлганда, Пуанкаре масаласининг хусусий ҳоли

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \gamma(x), \ x \in S \qquad (83)$$

масала ҳосил бўлади. (80), (83) масала *қия ҳосилали масала* дейилади.

S сиртнинг ξ нуқтасидаги йўналтирувчи косинуслари

$$\cos(N,\xi_i) = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos(n,\xi_i), \qquad i = 1, \cdots, n$$

бўлган бирлик векторни — конормални N орқали белгилаймиз. Бу ерда n — S сиртга ξ нуқтада ўтказилган ташқи нормал,

$$a^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cos(n,\xi_i)\right)^2 .$$

Агар (83) чегаравий шартда барча S да

$$a_i(x) = \cos(N, x_i)$$

бўлса, қия ҳосилали масала *иккинчи чегаравий масала* ёки *Нейман масаласи* дейилади.

5. Аралаш масала. Тебранишлар тенгламаси (гиперболик тип), яъни (37) тенглама учун аралаш масала бундай қўйилади:

$C^2(Ц_T)\cap \bar{C}^{1}(Ц_T)$ синфга тегишли, $Ц_T$ цилиндрда (37) тенгламани, $t=0$, $x\in \bar{G}$ *($Ц_T$ цилиндрининг қуйи асоси)да* (70) *бошланғич шартларни ва* $x\in S$, $0\le t\le T$ *($Ц_T$ нинг ён сирти)да I, II ёки III чегаравий шартлардан биттасини қаноатлантирувчи $u(x,t)$ функция топилсин.*

Худди шунга ўхшаш, (44) диффузия тенгламаси учун аралаш масала қўйилади: *$Ц_T$ цилиндрда (44) тенгламанинг* $C^2(Ц_T)\cap C(\bar{Ц}_T)$, $\mathrm{grad}_x u\in C(\bar{Ц}_T)$ *синфга тегишли, (71) бошланғич шартни ҳамда I, II ёки III чегаравий шартлардан биттасини қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечими топилсин.*

6. Бошқа масалалар. Иккинчи тартибли икки ўзгарувчили каноник кўринишга келтирилган ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y) \qquad (84)$$

умумий чизиқли тенглама берилган бўлсин. Бу тенгламанинг характеристикалари тенгламаси

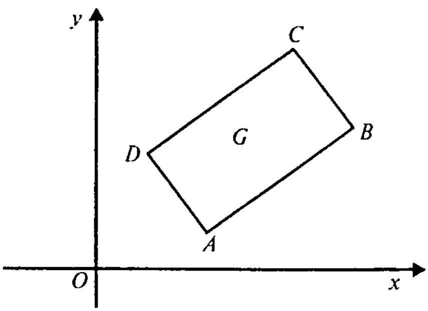
$$dy^2-dx^2=0$$

дан иборат. Бундан дарҳол $x-y=\mathrm{const}$, $x+y=\mathrm{const}$ тўғри чизиқлар оиласи (84) тенгламанинг характеристикалари эканлиги келиб чиқади.

Учлари A, B, C ва D нуқталарда, томонлари (84) тенгламанинг характеристикаларидан иборат бўлган тўртбурчакни G орқали белгилаб оламиз. Одатда бу тўртбурчак *характеристик тўртбурчак* дейилади(4- чизма).

Гурса масаласи. *G тўртбурчакда регуляр, $\overline{G}$ да узлуксиз ва*

$$u|_{AB} = \varphi, \quad u|_{AB} = \psi$$



4-чизма

шартларни қаноатлантирувчи (84) тенгламанинг $u(x,y)$ ечими топилсин.

Масаланинг қўйилишига асосан, φ ва ψ функциялар берилган соҳасида узлуксиз ва $\varphi(A) = \psi(A)$ шарт бажарилиши зарур. Демак, Гурса масаласида (84) тенгламанинг иккита кесишадиган характеристикаларида битта чегаравий шарт берилади.

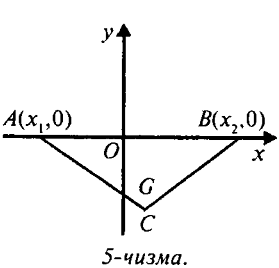
Гурса масаласида шартлар характеристикаларда берилгани учун бу масала *характеристик масала* деб ҳам юритилади.

Энди G орқали $y=0$ ўқнинг ихтиёрий $A(x_1,0)$ $B(x_2,0)$ кесмаси ва (84) тенгламанинг AC: $x+y=x_1$, BC: $x-y=x_2$ характеристикалари билан чегараланган учбурчакни белгилаймиз.

Бу учбурчак *характеристик учбурчак* дейилади (5- чизма).

Дарбу (Коши — Гурса) нинг биринчи масаласи. *G да регуляр, $\overline{G}$ да узлуксиз ва*

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad x_1 \le x \le x_2,$$
$$u|_{AC} = \psi(x), \; x_2 \le x \le \frac{x_1+x_2}{2}$$



5-чизма.

шартларни қаноатлантирувчи (84) *тенгламанинг ечими топилсин,* бунда $\tau(x)$ ва $\psi(x)$ берилган функциялар, шу билан бирга $\tau(x_1) = \psi(x_1)$.

Дарбу (Коши — Гурса) нинг иккинчи масаласи.

G да регуляр, $\overline{G}$ да узлуксиз, AB кесмагача биринчи тартибли ҳосилаларга эга бўлган ва

$$\lim_{y\to 0} u_y(x,y) = \nu(x), \qquad x_1 < x < x_2,$$

$$u|_{AC} = \psi(x),\ x_1 \le x \le \frac{x_1+x_2}{2}$$

шартларни қаноатлантирувчи (84) *тенгламанинг ечими топилсин,* бунда $\nu(x) \in C(x_1, x_2)$, $\psi(x) \in C\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$.

4- § да келтирилган аралаш типга тегишли

$$\operatorname{sign} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m = \text{const} > 0 \tag{85}$$

тенгламани текширамиз. $m=1$ бўлганда бу тенглама Трикоми тенгламаси билан устма-уст тушади, $m=0$ бўлганда эса (85) тенглама *Лаврентьев — Бицадзе тенгламаси* дейилади.

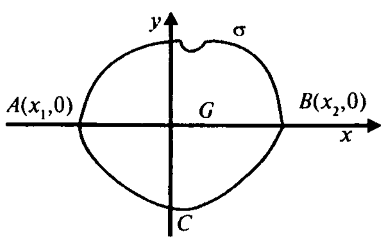
Аралаш типдаги тенглама берилган соҳа *аралаш соҳа* деб юритилади.

G — x, y ўзгарувчилар текислигида $y>0$ бўлганда учлари $A(x_1,0)$ ва $B(x_2,0)$, $x_1 < x_2$, нуқталарда бўлган Жордан эгри чизиғи σ билан $y<0$ да эса, (85) тенгламанинг

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = x_1, \quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = x_2$$

характеристикалари билан чегараланган бир боғламли аралаш соҳа бўлсин (6- чизма).

Трикоми масаласи. *G соҳада регуляр, $C(\overline{G}) \cap G^1(G)$ синфга тегишли, σ эгри чизиқда ва AC ёки BC характеристикалардан биттасида, масалан AC да берилган қийматларни қабул қилувчи, яъни*



6-чизма.

$$u|_{\sigma} = \varphi, \qquad u|_{AC} = \psi$$

(85) *тенгламанинг ечими топилсин.*

Шу билан бирга $\varphi \in C(\sigma)$, $\psi \in C(AC)$ ва $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$ бўлиши зарур. Трикоми масаласи *Т масала* деб юритилади.

7. Коррект қўйилган масала тушунчаси. Биз юқорида кўрдикки, математик физика масалаларининг қўйилишида айрим функциялар (бошланғич, чегаравий шартлар) иштирок этади: қўйилган масаланинг ечими табиий, шу функцияларга боғлиқ бўлади. Бу функциялар, одатда, тажриба асосида аниқланади, шунинг учун ҳам уларни абсолют аниқ топиш мумкин эмас.

Демак, бошланғич ва чегаравий шартларда ҳамма вақт бирор хатоликнинг бўлиши муқаррардир. Бу хатолик ўз навбатида ечимга ҳам таъсир қилади. Бошланғич ва чегаравий масалаларни текширишда, ечимнинг мавжудлиги ва ягоналигидан ташқари бошланғич ва чегаравий шартларда қўйилган хатоликнинг ечимга қандай таъсир қилишини аниқлаш ҳам муҳим аҳамиятга эгадир.

Бу фикрни аниқроқ баён қилиш учун текширилаётган масалани M орқали белгилаб оламиз. Ҳар қандай M масаланинг моҳияти берилган $\varphi \in E_\varphi$ функцияларга асосан унинг $u \in E_u$ ечимини топишдан иборатдир, бу ерда E_u ва E_φ — метрикалари ρ_u ва ρ_φ бўлган қандайдир метрик фазолар. Бу фазолар масаланинг қўйилиши билан аниқланади. M масаланинг ечими тушунчаси аниқланган бўлиб, ҳар бир $\varphi \in E_\varphi$ элементга ягона $u = R(\varphi) \in E_u$ ечим мос келсин.

Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta(\varepsilon) > 0$ сонни кўрсатиш мумкин бўлиб, $\rho_\varphi(\varphi_1, \varphi_2) \le \delta(\varepsilon)$ тенгсизликдан $\rho_u(u_1, u_2) \le \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқса, M масала (E_u, E_φ) фазолар жуфтида *турғун масала* дейилади.

Бунда $u_i = R(\varphi_i)$, $u_i \in E_u$, $\varphi_i \in E_\varphi$, $i = 1, 2, \ldots$ масаланинг ечими берилган шартлар (бошланғич ва чегаравий шартлар, тенгламанинг коэффициентлари, озод ҳади ва ҳ.к.)га узлуксиз боғлиқ бўлади.

Агар текширилаётган M масала учун ушбу

1) ихтиёрий $\varphi \in E_\varphi$ учун $u \in E_u$ ечим мавжуд ;

2) u ечим ягона;

3) масала (E_u, E_φ) фазолар жуфтлигида турғун шартлар бажарилса, M масала (E_u, E_φ) фазолар жуфтлигида *коррект (тўғри) қўйилган* ёки тўғридан—тўғри *коррект масала* дейилади.

Акс ҳолда масала *коррект қўйилмаган масала* дейилади, яъни бу ҳолда юқоридаги талаблардан камида биттаси бажарилмайди.

Шу нарсани таъкидлаб ўтамизки, коррект қўйилмаган масала таърифи берилган (E_u, E_φ) жуфтликка тааллуқлидир, чунки бошқа метрикаларда шу масаланинг ўзи коррект қўйилган бўлиши ҳам мумкин.

8. Коррект қўйилмаган масалага мисоллар. 3- бандда келтирилган Коши—Ковалевская теоремаси, унинг умумийлик тавсифига эга эканлигига қарамасдан дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси учун Коши масаласи коррект қўйилганлигини тўла ҳал қилмайди.

Ҳақиқатан ҳам, бу теорема масала ечимининг етарли кичик соҳада мавжуд ва ягоналигини таъмин этади. Одатда, бу далилларни аввалдан берилган (умуман кичик бўлмаган) соҳаларда тўғри эканлигини кўрсатиш талаб қилинади. Бундан ташқари, тенгламанинг озод ҳади ва бошланғич шартлари, умуман олганда, аналитик бўлмаган функциялар бўлади.

Ниҳоят, ечим бошланғич шартларга узлуксиз боғлиқ бўлмаслиги ҳам мумкин. Бу далилни кўрсатувчи мисол биринчи марта Адамар томонидан тузилган.

1) Адамар мисоли. *Ушбу*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг $y > 0$ *ярим текисликда*

$$u(x,0) = 0, \quad u_y(x,0) = e^{-\sqrt{k}} \cos kx$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин. Текшириб кўриш қийин эмаски, бу масаланинг бирдан-бир ечими

$$u(x,y)=\frac{1}{k}e^{-\sqrt{k}}\cos kx\,\mathrm{sh}ky,\ k=1,2...$$

кўринишда бўлади.

Кўриниб турибдики, агар $k\to+\infty$, $e^{-\sqrt{k}}\cos kx$ функция нолга текис интилади, яъни $e^{-\sqrt{k}}\cos kx\Rightarrow 0$, лекин *u(x,y)* ечим нолдан фарқли ихтиёрий *y* да

$$u(x,y)=\frac{1}{k}e^{-\sqrt{k}}\cos kx\cdot shky\not\to 0,\quad k\to+\infty$$

бўлади.

Шундай қилиб, *Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи коррект қўйилмаган масала экан.*

2) *Ушбу*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг $t<0$, $0\le x\le\pi$ соҳада

$$u(x,0)=e^{-\sqrt{k}}\sin kx,\qquad u(0,t)=u(\pi,t)=0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Бу масаланинг ечими

$$u(x,t)=e^{-\sqrt{k}}e^{-k^2t}\sin kx$$

функциядан иборатдир.

Табиий, ҳар бир k учун ўзининг бошланғич шарти ва унга мос бўлган ечими бор. Шу сабабли ҳам ёзилган ечимни ечимлар кетма-кетлиги деб қараш керак.

$e^{-\sqrt{k}}\sin kx$ функция $k\to\infty$ да нолга интилади, лекин ечим эса худди Адамар мисолидек ҳеч қандай лимитга интилмайди.

3) Тор тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

учун Дирихле масаласини текширамиз.

$0<x<\pi,\ 0<y<2\pi$ *тўртбурчакда,*

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 \le y \le \alpha\pi,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, \alpha\pi) = \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}, \quad 0 \le x \le \pi$$

шартларни қаноатлантирувчи тор тебраниш тенгламасининг ечими топилсин. Бу ерда α — мусбат иррационал сон.

Бу масаланинг ечими

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\sin kx \sin ky}{\sin k\alpha\pi}, \quad k = 1, 2 \ldots$$

формула билан аниқланади.

Равшанки, $k \to \infty$ да чегаравий шартдаги $\frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$ функция нолга интилади. Сонлар назариясидан маълумки, шундай p_k ва q_k бутун сонлар кетма-кетлиги мавжуд бўлиб, ҳар қандай α иррационал сон учун

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^2}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бунга асосан

$$|\sin q_k \alpha\pi| = |\sin(q_k\alpha - p_k)\pi| < \frac{\pi}{q_k}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Бу ҳолда, текширилаётган масаланинг ечими *u(x,y)* функция учун

$$|u(x, y)| = \left|\frac{1}{\sqrt{q_k}} \frac{\sin q_k x \cdot \sin q_k y}{\sin q_k \alpha\pi}\right| > \frac{\sqrt{q_k}}{\pi} |\sin q_k x \, \sin q_k y|$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Бундан тор тебраниш тенгламаси учун Дирихле масаласи коррект қўйилмаган масала эканлиги келиб чиқади.

II БОБ
ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1- §. Умумий тушунчалар

Интеграл тенгламалар деб, номаълум функция интеграл ишораси остида бўлган тенгламаларга айтилади.

Механика, математик физика ва техниканинг жуда кўп масалалари ушбу

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \qquad (1)$$

кўринишдаги интеграл тенгламаларни текширишга олиб келинади, бу ерда $\varphi(x)$ — номаълум функция, $K(x,y)$ ва $f(x)$ функциялар мос равишда $a\leq x\leq b$, $a\leq y\leq b$ ва $a\leq x\leq b$ (a, b — ўзгармас сонлар) ёпиқ соҳаларда берилган узлуксиз ҳақиқий функциялардир. $f(x)$ функция (1) интеграл тенгламанинг *озод ҳади*, $K(x, y)$ унинг *ядроси*, сонли λ кўпайтма тенгламанинг *параметри* дейилади. Бундай параметрни киритиш шарт эмас, агар $\lambda K(x, y)$ кўпайтмани $K_1(x, y)$ билан белгилаб, $K_1(x, y)$ ни янги ядро деб қарасак, параметр 1 га тенг бўлиб қолади. Лекин, кейинчалик биз бунга ишонч ҳосил қиламиз, бундай параметрни киритиш интеграл тенгламаларни ўрганишда фойдали бўлади. Биз бу бобда номаълум функция чизиқли иштирок этган тенгламаларни, яъни *чизиқли интеграл тенгламаларни* текширамиз. (1) тенглама *иккинчи тур чизиқли интеграл* тенглама ёки бундай тенгламаларни биринчи бўлиб ўрганган математик номи билан *Фредгольм интеграл тенгламаси* дейилади.

Фредгольмнинг *биринчи тур тенгламаси* деб,

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \qquad (2)$$

кўринишдаги интеграл тенгламага айтилади.

Агар (1) тенгламада $f(x)\equiv 0$ бўлса, яъни

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=0 \tag{3}$$

тенглама (1) га мос бўлган *бир жинсли интеграл тенглама* дейилади.

Бир жинсли

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K(y,x)\psi(y)dy=0 \tag{4}$$

тенглама (3) бир жинсли тенгламага *қўшма интеграл тенглама* дейилади.

Агар (1) тенгламада интеграл чегараларидан биттаси, масалан, юқори чегара ўзгарувчи бўлса, яъни тенглама

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy=f(x)\,,\ x>a \tag{5}$$

кўринишда бўлса, у *Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгламаси,*

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{6}$$

тенглама эса *Вольтерранинг биринчи тур интеграл тенгламаси* дейилади.

Ушбу

$$\alpha(x)\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{7}$$

тенглама *учинчи тур интеграл тенглама* деб аталади.

Агар $a\le x\le b$ кесмада $\alpha(x)\equiv 0$ бўлса, (7) дан (2) тенглама, $a(x)\equiv 1$ бўлса, (1) тенглама келиб чиқади. Лекин бу кесманинг айрим нуқталарида $a(x)$ функция нолга тенг бўлиб, қолган нуқталарида эса нолдан фарқли бўлиши ҳам мумкин. Бу ҳолда (7) тенгламани махсус текширишга тўғри келади. Биз бу бобда бундай тенгламаларни ўрганмаймиз.

Амалий масалаларда тез-тез шундай интеграл тенгламаларни ечишга тўғри келадики, буларда номаълум функция кўп аргументли бўлади. E^n Евклид фазосидаги чегараланган соҳани D орқали, бу соҳага тегишли нуқталарни $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)$ орқали белгилаб оламиз. $\varphi(x)=\varphi(x_1,...,x_n)$ номаълум, $f(x)$ берилган функция, λ — берилган сонли параметр бўлсин. Қисқалик учун D соҳа бўйича интеграллашни битта интеграл билан белгилаймиз. Бу ҳолда Фредгольмнинг кўп ўлчовли иккинчи тур интеграл тенгламаси

$$\varphi(x)-\lambda\int_D K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{8}$$

кўринишда ёзилади. (8) тенгламани текширишда (1) тенгламага нисбатан катта қийинчиликлар келиб чиқмайди. Шу сабабли, биз асосий эътиборимизни (1) тенгламани ўрганишга қаратамиз.

Текшириб кўриш қийин эмаски, *агар иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасининг умумий ечими $\Phi(x)$ мавжуд бўлса, у*

$$\Phi(x)=\varphi^0(x)+\varphi(x) \tag{9}$$

кўринишга эга бўлади, бунда $\varphi^0(x)$ (3) тенгламанинг умумий ечими, $\varphi(x)$ эса (1) тенгламанинг хусусий ечимидир.

Ҳақиқатан ҳам, агар $\Phi(x)$ ва $\varphi(x)$ мос равишда бир жинсли бўлмаган (1) тенгламанинг умумий ва хусусий ечимлари бўлса, буларнинг айирмаси $\varphi^0(x)=\Phi(x)-\varphi(x)$ (3) тенгламанинг ечимидан иборат бўлади. Бундан дарҳол (9) тенглик келиб чиқади.

2- §. Кетма-кет яқинлашиш усули

1. **Фредгольм иккинчи тур интеграл тенгламасини параметр кичик бўлганда кетма-кет яқинлашиш усули билан ечиш.** (1) тенгламани текширамиз. $K(x, y)$ ва $f(x)$ функциялар ўзлари аниқланган соҳаларда узлуксиз бўлгани учун

$$\int_a^b |K(x,y)|dy\le M, \quad a\le x\le b, \ \max_{a\le x\le b}|f(x)|=m, \tag{10}$$

бўлади.

Агар (1) *тенглама* λ *параметри*

$$|\lambda| < \frac{1}{M} \tag{11}$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда бу тенгламанинг ягона $\varphi(x)$ *ечими мавжуд бўлиб, уни кетма-кет яқинлашиш усули билан топиш мумкин.*

Нолинчи яқинлашиш сифатида (1) тенгламанинг озод ҳадини қабул қиламиз

$$\varphi_0(x) = f(x).$$

Биринчи яқинлашишни

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

муносабат билан аниқлаймиз. Бу жараённи давом эттириб, n- яқинлашишни

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{12}$$

формула билан аниқлаймиз.

Шундай қилиб, (12) рекуррент муносабатларни қаноатлантирувчи

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{13}$$

функциялар кетма-кетлигига эга бўламиз.

Математик анализдан маълумки, (13) кетма-кетликнинг яқинлашиши

$$\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)\right] \tag{14}$$

қаторнинг яқинлашишига тенг кучлидир. (12) формулани

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)\left[\varphi_{n-1}(y) - \varphi_{n-2}(y) + \varphi_{n-2}(y)\right]dy =$$

$$= f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi_{n-2}(y)dy + \lambda\int_a^b K(x,y)\left[\varphi_{n-1}(y) - \varphi_{n-2}(y)\right]dy =$$

$$= \varphi_{n-1}(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)\left[\varphi_{n-1}(y) - \varphi_{n-2}(y)\right]dy \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \quad (15)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

(10) га асосан, (15) дан дарҳол қуйидаги тенгсизликлар келиб чиқади:

$$|\varphi_0(x)| \le m$$

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \le m|\lambda|M$$

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \le m|\lambda|^2 M^2$$

....

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \le m|\lambda|^n M^n.$$

Шундай қилиб, (14) қаторнинг ҳар бир ҳади мусбат сонли

$$\sum_{n=0}^{\infty} m|\lambda|^n M^n \qquad (16)$$

қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. (16) қатор эса, (11) га асосан яқинлашувчидир. Демак, (14) қатор, натижада узлуксиз функцияларнинг (13) кетма-кетлиги узлуксиз $\varphi(x)$ функцияга абсолют ва текис яқинлашади. (12) тенгликда $n \to \infty$ лимитга ўтиб,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу эса $\varphi(x)$ функция (1) тенгламанинг ечими эканлигини кўрсатади. Энди (1) тенгламанинг $\varphi(x)$ дан бошқа ечими йўқлигини кўрсатиш қийин эмас. Бунинг учун аксинча, яъни (1) тенгламанинг $\varphi(x)$ дан бошқа яна битта $\psi(x)$ ечими бор деб фараз қиламиз. У ҳолда бу ечимларнинг айирмаси $\chi(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ (3) бир жинсли тенгламанинг ечимидан иборат бўлади, яъни

$$\chi(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\chi(y)dy,$$

$$\chi_0 = \max_{a\le x\le b} |\chi(x)|$$

деб белгилаб олсак, охирги тенгликдан

$$\chi_0 \le |\lambda| M \chi_0$$

тенгсизликка эга бўламиз. Агар $\chi_0 \ne 0$ бўлса, охирги тенгсизлик (11) тенгсизликка қарама-қаршидир. Демак, $\chi_0 = 0$, бундан $\chi(x) = 0$, яъни $\varphi(x) = \psi(x)$ эканлиги келиб чиқади.

2. Вольтерра иккинчи тур интеграл тенгламаси. (5) тенгламани кетма-кет яқинлашиш усули билан ечамиз.

1- банддаги мулоҳазаларни қайтариб,

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \dots,\ \varphi_n(x),\ \dots \tag{17}$$

функциялар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз, бунда

$$\varphi_0(x) = f(x), \qquad \varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy,$$

$$m = \max|f(x)|, \quad N = \max|K(x, y)|$$

белгилашларни киритамиз. Бу ҳолда

$$|\varphi_0(x)| \le m,$$

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left|\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi_0(y)d y\right| \le |\lambda| m N(x-a), \dots,$$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \le m\frac{|\lambda|^n N^n(x-a)^n}{n!}, \qquad n = 1,\ 2,\ \dots\ , \tag{18}$$

тенгсизларга эга бўламиз.

Мусбат ҳадли

$$m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^n N^n(x-a)^n}{n} = me^{|\lambda|N(x-a)}$$

функционал қатор λ параметрнинг ихтиёрий чекли қийматида текис яқинлашувчи бўлгани учун (18) тенгсизликларга асосан (17) функциялар кетма-кетлиги абсолют ва текис яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити бўлган

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

функция (5) тенгламанинг ечимидан иборат бўлади.

Энди (5) тенглама ечимининг ягона эканлигини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик (5) тенглама иккита $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ узлуксиз ечимларга эга бўлсин. Буларнинг айирмаси $\omega(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ бир жинсли

$$\omega(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)\omega(y)\,dy \tag{19}$$

тенгламани қаноатлантиради.

$m^* = \max|\omega(x)|$ деб белгилаб олсак, (19) дан дарҳол

$$|\omega(x)| \le |\lambda| \int_a^x |(K(x,y)||(\omega(y)|dy \le |\lambda| N m^* (x-a)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан фойдаланиб (19) тенгликдан

$$|\omega(x)| \le |\lambda| \int_a^x |K(x,y)||\omega(y)|dy \le |\lambda|^2 N^2 m^* \frac{(x-a)^2}{2}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу жараённи давом эттириб, ихтиёрий натурал n учун

$$|\omega(x)| \le m^* |\lambda|^n N^n \frac{(x-a)^n}{n!}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизликдан $n \to \infty$ да $\omega(x) = 0$ ёки $\varphi(x) = \psi(x)$ эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб қуйидаги хулосага келдик.

Вольтерранинг иккинчи тур (5) *интеграл тенгламаси, унинг ядроси $K(x, y)$ ва озод ҳади $f(x)$ узлуксиз функциялар бўлганда λ параметрнинг ҳар бир чекли қиймати учун ягона ечимга эга бўлади.*

Шу далил билан Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгламаси ҳар бир λ учун ҳам ечимга эга бўлавермайди-ган Фредгольмнинг иккинчи тур интеграл тенгламасидан тубдан фарқ қилади.

Бу бандда исботланган фикрлар каррали интегралли Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгламалари учун ҳам ўз кучини сақлаб қолади. Масалан, икки каррали Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгламаси ушбу

$$\varphi(x,y)-\lambda\int_a^x d\xi\int_c^y K(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\eta = f(x,y)$$

кўринишда ёзилади, бу ерда $K(x,y;\xi,\eta)$ ва $f(x, y)$ — берилган узлуксиз ҳақиқий функциялардир.

Юқорида юритилган мулоҳазаларни қайтариб, бу тенглама ҳам ҳақиқий λ параметрнинг ихтиёрий тайин қийматида ягона ечимга эга деган хулосага келамиз.

3. Итерацияланган ядро. Резольвента. 1-бандда (11) тенгсизлик бажарилганда (13) функциялар кетма-кетлиги (1) тенгламанинг $\varphi(x)$ ечимига яқинлашиши исботланган эди. Энди шу кетма-кет яқинлашиш структурасини батафсил ўрганамиз. Маълумки,

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy,$$

сўнгра

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt =$$

$$= f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^b K(x,t)dt\int_a^b K(t,y)f(y)dy.$$

Иккиланган интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириб,

$$K_2(x,y)=\int_a^b K(x,t)K(t,y)dt$$

деб белгилаб олиб,

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy + \lambda^2\int_a^b K_2(x,y)f(y)dy$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу жараённи давом эттириб,

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} K_i(x,y)f(y)dy \tag{20}$$

тенгликка эга бўламиз, бунда $K_i(x,y)$ лар

$$K_1(x, y) = K(x, y),$$

$$K_i(x, y = \int_a^b K(x,t)K_{i-1}(t,y)\,dt, \qquad i = 2,\ 3,\ \ldots \tag{21}$$

рекуррент муносабатлар билан аниқланади. $K_i(x,y)$ функциялар *итерацияланган* (*такрорланган*) *ядролар* деб аталади.

Интеграцияланган ядроларни (21) га нисбатан умумийроқ

$$K_i(x,y) = \int_a^b K_r(x,t)K_{i-r}(t,y)\,dt \tag{21'}$$

формула билан ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (21) да $K_{i-1}(t,y)$ ядрони яна шу (21) формула ёрдамида K_{i-2} билан ифодалаб,

$$K_i(x, y = \int_a^b K(x,t_1)\left[\int_a^b K(t_1,t_2)K_{i-2}(t_2,y)dt_2\right]dt_1 =$$

$$= \int_a^b\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)K_{i-2}(t_2,y)dt_1dt_2$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $K_{i-2}(t_2,y)$ ядрони K_{i-3} орқали ифодалаш мумкин ва ҳ.к. Бу жараённи давом эттириб, охирида

$$K_i(x,y)=\int_a^b\ldots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\ldots K(t_{i-1},y)dt_1\ldots dt_{i-1} \qquad (22)$$

формулага келамиз. t_r ўзгарувчи бўйича интегрални ажратиб, охирги формулани

$$K_i(x,y)=\int_a^b dt_r\left\{\int_a^b\ldots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\ldots K(t_{r-1},t_r)dt_1\ldots dt_{r-1}\times\right.$$

$$\left.\times\int_a^b\ldots\int_a^b K(t_r,t_{r+1})K(t_{r+1},t_{r+2})\ldots K(t_{i-1},y)dt_{r+1}\ldots dt_{i-1}\right\}$$

кўринишда ёзиб оламиз. (22) формулага асосан фигурали қавс ичидаги биринчи интеграл $K_r(x,t_r)$ га, иккинчи интеграл эса $K_{i-r}(t_r,y)$ га тенг.

Шундай қилиб,

$$K_i(x,y)=\int_a^b K_r(x,t_r)K_{i-r}(t_r,y)dt_r\,.$$

Бунда t_r ни t га алмаштириб (21') формулага келамиз.

(13) кетма-кетликнинг яқинлашишини исботлагандаги мулоҳазаларни қайтариб, (11) шарт бажарилганда $a\le x\le b,\ a\le y\le b$ квадратда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)$$

қаторнинг текис яқинлашишига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Бу қаторнинг йиғиндиси $R(x,y,\lambda)$ ни *$K(x,y)$ ядронинг ёки* (1) *интеграл тенгламанинг резольвентаси* ёки *ҳал қилувчи ядроси* дейилади.

(20) да $n\to\infty$ да лимитга ўтиб, (1) тенгламанинг ечимини резольвента ёрдамида

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,y,\lambda)f(y)dy$$

кўринишда ёзишимиз мумкин.

$R(x,y,\lambda)$ резольвента $a \le x \le b,\ a \le y \le b$ квадратда узлуксиз бўлади. Шу сабабли, аввалги формуладан $f(x)$ билан бир қаторда (1) тенгламанинг $\varphi(x)$ ечимининг узлуксизлиги келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш, Вольтерра (5) интеграл тенгламасининг ечимини резольвента орқали ёзиб олиш қийин эмас. Шу мақсадда математик анализ курсидан маълум бўлган Дирихле формуласини эслатиб ўтамиз.

Фараз қилайлик, $f(x,y)$ функция $x=y,\ x=a,\ y=b$ тўғри чизиқлардан ташкил топган тенг ёнли Δ учбурчакда узлуксиз бўлсин (7- чизма). У ҳолда Δ бўйича олинган

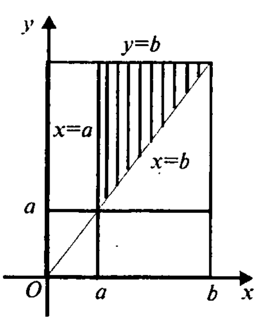
$$J = \iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy$$

интегрални икки усул билан ҳисоблаш мумкин. Аввал x ўзгарувчи бўйича a дан y гача, кейин y бўйича a дан b гача интеграллаш мумкин, яъни

$$J = \int_a^b dy \int_a^y f(x,y)dx\,.$$

Сўнгра, y бўйича x дан b гача, x бўйича эса a дан b гача интеграллаш мумкин, яъни

$$J = \int_a^b dx \int_x^b f(x,y)dy.$$



7- чизма

Бу икки тенгликдан дарҳол

$$\int_a^b dy \int_a^y f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_x^b f(x,y)dy$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенглик *Дирихле формуласи* дейилади.

(5) тенглама учун биринчи яқинлашишни

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy$$

формула билан аниқлаган эдик.

Иккинчи яқинлашиш

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi_1(t)\, dt$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \left[f(t) + \lambda \int_a^t K(t, y) f(y) dy \right] dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^x K(x, t) dt \int_a^t K(t, y) f(y) dy$$

тенглик билан аниқланади. Охирги иккиланган интегралга Дирихле формуласини қўллаймиз:

$$\int_a^x K(x, t) dt \int_a^t K(t, y) f(y) dy = \int_a^x f(y) dy \int_y^x K(x, t) K(t, y)\, dt.$$

Агар

$$K_2(x, y) = \int_y^x K(x, t) K(t, y) dt$$

деб белгиласак,

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \lambda^2 \int_a^x K_2(x, y) f(y) dy$$

бўлади.

Бу жараённи давом эттириб, худди Фредгольм тенгламасидек,

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} K_i(x, y) f(y) dy \tag{23}$$

тенгликка эга бўламиз, бунда

$$K_1(x,y) = K(x,y), \quad K_i(x,y) = \int_y^x K(x,t)K_{i-1}(t,y)dt.$$

$$i = 2, 3, \ldots$$

2- банддаги мулоҳазалардан λ параметрнинг ихтиёрий чекли қийматида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(x,y)$$

қаторнинг абсолют ва текис яқинлашиши келиб чиқади. Бу қаторнинг йиғиндисини $R(x,y,\lambda)$ орқали белгилаб оламиз. Бу ҳолда ҳам $R(x,y,\lambda)$ ни (5) Вольтерра тенгламасининг резольвентаси дейилади.

(23) тенгликда $n \to \infty$ да лимитга ўтиб, (5) тенгламанинг ечимини резольвента орқали ёзиб оламиз:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,y,\lambda) f(y)dy \ .$$

3- §. Фредгольм теоремалари

1. Айниган ядроли Фредгольм тенгламалари. Фредгольмнинг иккинчи тур (1) интеграл тенгламасининг *K(x,y)* ядроси

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) q_i(y) \tag{24}$$

кўринишида бўлса, у *айниган (бузилган)* ядро[1] деб юритилади.

Бундаги $p_i(x)$ ва $q_i(y)$, $a \le x \le b$, $a \le y \le b$ — берилган ҳақиқий узлуксиз функциялардир. Айрим адабиётларда (24) кўринишдаги ядро *Пинкерле — Гурса ядроси*, ёки қисқача *PG-ядро* деб ҳам аталади. Умумийликка зиён етказмай, барча $p_i(x)$ функцияларни ҳам, $q_i(y)$ функцияларни ҳам ўзаро боғлиқ эмас деб ҳисоблаймиз. Акс ҳолда

[1] *Русча* — вырождённое ядро.

(24) йиғиндида қўшилувчилар сонини камайтириш мумкин. (24) ифодани (1) интеграл тенгламага қўйиб,

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{b}p_i(x)q_i(y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{25}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (25) интеграл тенгламани

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_ip_i(x) \tag{26}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда

$$c_i=\int_{a}^{b}q_i(y)\varphi(y)dy, \qquad i=1,2,...n$$

лар $\varphi(y)$ номаълум функцияга боғлиқ бўлгани учун номаълум ўзгармаслардир.

Энди c_i, $i=1, 2,...,n$, ўзгармас сонларни шундай танлашга ҳаракат қиламизки, натижада (26) формула билан аниқланган $\varphi(x)$ функция (25) интеграл тенгламанинг ечимидан иборат бўлсин. Шу мақсадда (26) ифодани (25) тенгламанинг чап томонига олиб бориб қўямиз

$$f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_ip_i(x)-$$
$$-\lambda\sum_{i=1}^{n}\int_{a}^{b}p_i(x)q_i(y)\left[f(y)+\lambda\sum_{j=1}^{n}c_jp_j(y)\right]dy=f(x)$$

ёки

$$\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\left[c_i-\int_{a}^{b}q_i(y)f(y)dy-\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_{a}^{b}c_jp_j(y)q_i(y)dy\right]=0\,.$$

Бундан $p_i(x)$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлмагани учун

$$c_i-\int_{a}^{b}q_i(y)f(y)dy-\lambda\sum_{j=1}^{n}c_j\int_{a}^{b}p_j(y)q_i(y)dy=0$$

тенглик келиб чиқади. Ушбу

$$\gamma_i = \int_a^b q_i(y) f(y) dy, \quad \alpha_{ij} = \int_a^b q_i(y) p_j(y) dy$$

белгиларни киритиб, аввалги тенгликни

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_j = \gamma_i, \; i = 1, \ldots, n \tag{27}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Шундай қилиб, (25) интеграл тенгламанинг ечимини топиш масаласини (27) чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишга олиб келдик.

(27) система назариясида

$$M(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} \ldots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1 - \lambda\alpha_{22} \ldots & -\lambda\alpha_{2n} \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} \ldots 1 & -\lambda\alpha_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрица муҳим роль ўйнайди. Бу матрицанинг детерминантини $D(\lambda)$ орқали белгилаб оламиз, яъни $\det M(\lambda) = D(\lambda)$. Чизиқли алгебра курсидан маълумки, агар

$$D(\lambda) \neq 0 \tag{28}$$

бўлса, (27) система ихтиёрий γ_i ўнг томонлар учун ягона ечимга эга бўлади ва бу ечим Крамер формулалари билан аниқланади. Аммо, $D(\lambda)$ детерминант λ га нисбатан n-даражали кўпҳаддан иборатдир.

Демак, $D(\lambda)$ кўпҳаднинг илдизлари бўлган λ нинг чекли сондаги: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m,$ $m \leq n$ қийматлари учун (28) шарт бузилади. λ нинг бу қийматлари *K(x, y) ядронинг* ёки бунга мос (25) интеграл тенгламанинг *хос (характеристик) сонлари* дейилади.

Шундай қилиб, λ нинг λ_k лардан, $k = 1, 2, \ldots, m$ фарқли бўлган ҳар бир чекли қиймати учун (27) система ягона $c_1, \ldots, c_n$ ечимга эга бўлади. Бу ечимни (26) тенгликнинг ўнг томонига қўйиб, (25) интеграл тенгламанинг $\varphi(x)$ ечимига эга бўламиз.

Натижада қуйидаги теоремани исботладик.

Фредгольмнинг биринчи теоремаси. *Агар λ $K(x,y)$ ядронинг хос сони бўлмаса, ихтиёрий узлуксиз $f(x)$ озод ҳад учун* (25) *интеграл тенглама ечимга эга, шу билан бирга бу ечим ягона бўлади.*

(25) интеграл тенгламага мос бир жинсли

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^n p_i(x)q_i(y)\varphi(y)dy=0 \qquad (29)$$

тенглама (27) га мос бўлган ушбу

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}c_j=0 \qquad (30)$$

бир жинсли чизиқли алгебраик системага келади. (29) тенгламага қўшма бўлган бир жинсли тенглама, (4) га асосан

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^n p_i(y)q_i(x)\psi(y)dy=0 \qquad (31)$$

кўринишга эга бўлади. (31) тенглама эса (30) га қўшма бўлган

$$d_i-\lambda\sum_{j=1}^n \alpha_{ji}d_j=0 \qquad (32)$$

бир жинсли системага тенг кучлидир, бунда

$$d_i=\int_a^b p_i(y)\psi(y)dy\,, \quad i=1,2,\ldots,n\,.$$

Агар $\lambda=\lambda_k$, $k=1,\ldots,m$ бўлиб, $M(\lambda)$ матрицанинг ранги r га тенг бўлса, чизиқли алгебрадан маълумки, бир жинсли (30) система ҳам ва унга қўшма бўлган (32) система ҳам $n-r$ та

$$c_1^j,\ldots,c_n^j,\ d_1^j,\ldots,d_n^j,\quad j=1,2,\ldots,n-r$$

чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларга эга бўлади. Бу ечимларни (29) ва (31) дан ҳосил бўлган ушбу

$$\varphi_j(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i^j p_i(x),$$

$$\psi_j(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}d_i^j q_i(x),\qquad j=1,2,\dots,n-r \tag{33}$$

формулаларнинг ўнг томонларига қўйиб, (29) ва (31) бир жинсли интеграл тенгламаларнинг $n-r$ тадан чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларини ҳосил қиламиз.

Фредгольмнинг иккинчи теоремаси. *Бир жинсли* (29) *тенглама ва унга қўшма бўлган бир жинсли* (31) *тенглама бир хил $n-r$ тадан чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларга эга бўлади.*

Бир жинсли (29) *тенгламанинг нолга тенг бўлмаган $\varphi_j(x), j=1,\dots,n-r$ ечимлари* (25) *тенгламанинг ёки K(x,y) ядронинг λ_k хос сонга мос бўлган хос функциялари дейилади.*

Яна чизиқли алгебра курсига мурожаат қиламиз. Маълумки, $\lambda=\lambda_k$, $k=1,\dots,m$ бўлганда (27) система ихтиёрий ўнг томонлар учун ечимга эга бўлавермайди. Бу системанинг ечимга эга бўлиши учун γ_i, $i=1,2,\dots,n$ сонлар

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i d_i^j=0,\qquad j=1,\dots,n-r \tag{34}$$

шартларни қаноатлантириш зарур ва етарлидир. (34) шартларда γ_i ўрнига унинг қийматини қўйиб, (34) га тенг кучли бўлган қуйидаги тенгликлар системасига эга бўламиз:

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\gamma_i d_i^j=\lambda\sum_{i=1}^{n}d_i^j\int_a^b q_i(x)f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)\sum_{i=1}^{n}d_i^j q_i(x)dx=0.$$

Бундан (33) га асосан

$$\int_a^b f(x)\psi_j(x)dx=0,\qquad j=1,\dots,n\text{-}r$$

тенгликлар ҳосил бўлади.

Бирор D соҳада, хусусан *(a,b)* ораликда, *иккита функциянинг кўпайтмасидан олинган интеграл нолга тенг бўлса, бу функциялар ортогонал деб аталади.*

Шундай қилиб биз қуйидаги теоремани исбот қилдик.

Фредгольмнинг учинчи теоремаси. *$\lambda = \lambda_k$, $k = 1,\ldots, m$, бўлганда* (25) *интеграл тенгламанинг ечимга эга бўлиши учун унинг озод ҳади $f(x)$ нинг қўшма бир жинсли* (31) *интеграл тенгламанинг барча $\psi_j(x)$, $j = 1,\ldots, n - r$, ечимларига ортогонал бўлиши зарур ва етарлидир.*

2. Узлуксиз ядроли Фредгольмнинг иккинчи тур тенгламаси. Энди (1) тенгламанинг ядроси (24) кўринишда бўлмаган ҳолни текширамиз. Агар $K(x,y)$ функция $R: a \le x \le b$, $a \le y \le b$ квадратда узлуксиз бўлса, математик анализ курсида исботланадиган Вейерштрасс теоремасига асосан, ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун x ва y га нисбатан етарли юқори даражали шундай $K_0(x,y)$ кўпҳад мавжуд бўладики, барча R да

$$|K(x,y) - K_0(x,y)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Равшанки, $K_0(x,y)$ кўпҳаднинг ҳар бир ҳадини биттаси x га, иккинчиси y га боғлиқ бўлган иккита кўпайтувчининг кўпайтмаси сифатида ифодалаш мумкин. Шу сабабли $K(x,y)$ ядрони

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)q_i(y) + K_1(x,y) \tag{35}$$

кўринишда ёзиб олишимиз мумкин. Бундаги $K_1(x,y)$ ифода R да

$$(b-a)|K_1(x,y)| < \varepsilon \tag{36}$$

шартни қаноатлантирувчи узлуксиз функциядир.

(35) тенглик $K(x,y)$ ядрони кичик ва айниган ядролар йиғиндисига ажратилганлигини ифодаловчи формуладир.

(35) га асосан (1) тенгламани

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K_1(x,y)\varphi(y)\,dy = F(x) \tag{37}$$

кўринишда ёзиб оламиз, бунда

$$F(x) = f(x) + \lambda\sum_{i=1}^{n}\int_a^b p_i(x)q_i(y)\varphi(y)dy\,. \tag{38}$$

λ параметрнинг ихтиёрий чекли тайин қиймати учун ε сонни шундай кичик танлаб оламизки,

$$|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon} \tag{39}$$

тенгсизлик ўринли бўлсин.

(36) тенгсизликка асосан

$$\int_a^b |K_1(x,y)|\, dy < \varepsilon .$$

Демак, (37) тенглама (39) га кўра бирдан-бир ечимга эга бўлади. $K_1(x,y)$ ядронинг резольвентасини $R_1(x,y,\lambda)$ орқали белгилаб, (37) тенгламани

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b R_1(x,y,\lambda) F(y) dy \tag{40}$$

кўринишида ёзиб оламиз. (40) тенгликдаги $F(x)$ ўрнига унинг қиймати (38) ни олиб бориб қўямиз:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_a^b p_i(x) q_i(y) \varphi(y) dy +$$

$$+\lambda \int_a^b R_1(x,t,\lambda) \left[f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \int_a^b p_i(t) q_i(y) \varphi(y) dy \right] dt.$$

Ушбу

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_1(x,t,\lambda) f(t) dt ,$$

$$r_i(x) = p_i(x) + \lambda \int_a^b R_1(x,t,\lambda) p_i(t) dt$$

белгилашларни киритиб,

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} r_i(x) q_i(y) \varphi(y) dy = g(x) \tag{41}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, λ нинг ихтиёрий чекли тайин қиймати учун (1) тенглама айниган ядроли Фредгольмнинг иккинчи тур (41) тенгламасига эквивалент экан.

(41) тенглама учун аввалги бандда баён қилинган Фредгольм теоремалари ўринли бўлгани учун узлуксиз ядроли (1) тенглама учун ҳам ўринли бўлади. Бу теоремаларга асосан қуйидаги альтернатива ҳосил бўлади.

Фредгольм альтернативаси. *Агар* (1) *тенгламага мос бир жинсли* (3) *тенглама* λ *нинг ҳар бир тайин қиймати учун нолдан фарқли ечимга эга бўлмаса,* (1) *тенглама ихтиёрий озод ҳад f(x) учун ягона ечимга эга бўлади; агарда* (3) *бир жинсли тенглама нолдан фарқли ечимларга эга бўлса,* (3) *тенглама ҳам ва унга қўшма* (4) *бир жинсли тенглама ҳам бир хил чекли сондаги чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларга эга бўлади; у ҳолда* (1) *тенглама ихтиёрий f(x) учун ечимга эга бўлавермайди,* (1) *тенгламанинг ечимга эга бўлиши учун унинг озод ҳади f(x) қўшма* (4) *бир жинсли тенгламанинг барча ечимларига ортогонал бўлиши зарур ва етарлидир, яъни*

$$\int_a^b f(x)\psi_i(x)dx = 0 \qquad i = 1,2,\dots,k\ ,$$

бунда $\psi_i(x)$, $i = 1,\dots, k$, — (4) *тенгламанинг барча чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимлари.*

Айнан нолга тенг бўлган функция, равшанки, бир жинсли (3) тенгламанинг ва унга қўшма бўлган (4) тенгламанинг ечими бўлади. Бундан кейин, бир жинсли (ёки унга қўшма) тенгламанинг ечими деганда айнан нолдан фарқли ечимни тушунамиз.

Бир жинсли (3) *тенглама* $\varphi_i(x)$, $i = 1,\dots, k$, *ечимларга эга бўлган* λ *нинг қийматини, ҳудди 1-банддагидай, K(x,y) ядронинг ёки* (1) *тенгламанинг хос сони,* $\varphi(x)$ *функцияларни эса шу ядро ёки тенгламанинг* λ *хос сонга мос хос функциялари дейилади.*

Юқорида баён қилинганларга асосан, яна бир бор таъкидлаб ўтамизки, берилган хос сонга мос чизиқли боғлиқ бўлмаган хос функцияларнинг сони чеклидир.

K(x,y) ядронинг барча хос сонлари тўплами бу ядронинг спектри деб аталади.

2- § нинг 2- бандида кўрсатганимизга асосан Вольтерра тенгламаси ядросининг спектри бўш тўпламдан иборат, айниган ядроли Фредгольм иккинчи тур тенгламасининг спектри эса (1- банд) чекли сондаги элементлардан иборат.

Энди (1) тенгламани

$$\varphi(y)-\lambda\int_a^b K(y,t)\varphi(t)dt=f(y)$$

кўринишда ёзиб олиб, бунинг ҳар икки қисмини $\lambda K(x,y)$ га кўпайтирамиз ва y бўйича a дан b гача интеграллаймиз. У ҳолда

$$\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=\varphi(x)-f(x)$$

тенгликни эътиборга олиб,

$$\varphi(x)-\lambda^2\int_a^b K_2(x,t)\varphi(t)dt=f_2(x)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бунда

$$f_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy.$$

Бу жараённи давом эттириб, қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$\varphi(x)-\lambda^n\int_a^b K_n(x,y)\varphi(y)dy=f_n(x), \qquad (42)$$

бунда

$$f_n(x)=f_{n-1}(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f_{n-1}(y)dy, \quad f_1(x)=f(x).$$

$K_n(x, y)$ эса (21) формула билан аниқланади.

Шундай қилиб, биз ушбу натижага келдик: *агар λ $K(x,y)$ ядронинг хос сони, $\varphi(x)$ эса бу хос сонга мос хос функцияси бўлса, у ҳолда λ^n ва $\varphi(x)$ итерацияланган $K_n(x,y)$ ядронинг хос сони ва хос функциясидан иборат бўлади.*

Бунга тескари теорема ҳам ўринлидир. Бунинг исботига биз бу ерда тўхталиб ўтирмаймиз.

3. Олинган натижаларни умумлаштириш. Фредгольмнинг (1) ва Вольтерранинг (5) тенгламаларини текширганимизда бу тенгламаларнинг ядроси $K(x,y)$ ва озод ҳади $f(x)$ узлуксиз функциялар деб ҳисоблаган эдик. Бу функциялар узлуксиз функциялар синфидан кенгроқ бўлган квадратлари билан жамланувчи функциялар синфига тегишли бўлганда ҳам юқорида олинган натижалар шу жумладан Фредгольм теоремалари ҳам ўз кучини сақлаб қолади. Шу билан бирга исботлаш усулида деярли ўзгариш бўлмайди. (1) тенгламанинг ядроси учун

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy = M^2 < \infty$$

шарт бажарилганда, ҳақиқий ўзгарувчили функциялар назариясидаги Фубини теоремасига асосан, деярли барча $x \in (a,b)$ учун

$$\int_a^b |K(x,y)|^2\, dy$$

интеграл мавжуд ва (a, b) да жамланувчи. Худди шунга ўхшаш деярли барча $y \in (a,b)$ учун

$$\int_a^b |K(x,y)|^2\, dx$$

интеграл мавжуд ва (a, b) да жамланувчидир.

Агар λ параметр

$$|\lambda| < \frac{1}{M}$$

шартни қаноатлантирса, кетма-кет яқинлашиш усули билан ҳосил бўлган қатор квадрати билан жамланувчи функцияга ўртача яқинлашувчи бўлиб, бу функция (1) тенгламанинг ечимидан иборат бўлади. (1) тенглама учун баён қилинган барча теоремалар, 1 - § да эслатиб ўтганимиздек, кўп ўлчовли (8) тенглама учун ҳам, тенгламалар системаси учун ҳам ўз кучини сақлаб қолади. Фредгольм иккинчи тур интеграл тенгламаларининг системаси

$$\varphi_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K_{ij}(x,y)\varphi_j(y)dy = f_i(x), \quad i = 1,\ 2 \ldots n \tag{43}$$

кўринишга эга бўлади. $K_{ij}(x,y)$ ядролар $a \leq x \leq b,\ a \leq y \leq b$ квадратда, $f_i(x)$ озод ҳадлар $a \leq x \leq b$ ораликда квадрати билан жамланувчи функциялар бўлсин.

Табиий, номаълум $\varphi_i(x)$ функциялар ҳам шу синфда изланади. (43) система учун юқорида битта Фредгольм тенгламаси учун баён қилинган назария тўлалигича ўринли бўлади. Масалан, λ параметр

$$|\lambda| < \frac{1}{M}$$

тенгсизликни қаноатлантирса, бунда

$$M^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_a^b \int_a^b |K_{ij}(x,y)|^2\, dxdy.$$

(43) система учун кетма-кет яқинлашиш бу системанинг ечимига ўртача яқинлашади.

(43) системага қўшма бўлган система қуйидагича ёзилади:

$$\psi_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K_{ji}(y,x)\psi_j(y)dy = g_i(x).$$

Фредгольмнинг барча теоремалари ҳам (43) система учун ўринли бўлади. Биз Фредгольм назариясини (43) система учун асосланишига тўхталмасдан, бундай системани Фредгольм типидаги битта тенгламага келтириш мумкинлигини кўрсатиб ўтамиз.

x, y аргументлар узунлиги *(a, b)* ораликдан *n* марта катта бўлган *(a, nb — (n —* 1*)a)* ораликда ўзгарсин. Бу ораликда *Ф(х)* ва *F(x)* функцияларни қуйидагича аниқлаймиз.

Агар

$$(i-1)\,b - (i-2)a \leq x < ib - (i-1)a$$

бўлса,

$$\Phi(x)=\varphi_i(x-(i-1)(b-a)), \qquad F(x)=f_i(x-(i-1)(b-a)).$$

Худди шунга ўхшаш, $K(x,y)$ ядрони $a \le x \le nb-(n-1)a$, $a \le y \le nb-(n-1)a$ квадратда

$$(i-1)b-(i-2)a \le x < ib-(i-1)a,$$

$$(j-1)b-(j-2)a \le y < jb-(j-1)a$$

бўлганда

$$K(x,y)=K_{ij}(x-(i-1)(b-a),\ y-(j-1)(b-a))$$

деб аниқлаб оламиз. Ушбу

$$\int\limits_a^{nb-(n-1)a} = \int\limits_a^b + \int\limits_b^{2b-a} + \int\limits_{2b-a}^{3b-2a} + \ldots + \int\limits_{(n-1)b-(n-2)a}^{nb-(n-1)a}$$

тенгликни эътиборга олсак, (43) система Фредгольмнинг битта

$$\Phi(x)-\lambda\int\limits_a^{nb-(n-1)a} K(x,y)\Phi(y)dy=F(y)$$

тенгламаси кўринишида ёзилади.

4. Кучсиз махсусликка эга бўлган интеграл тенгламалар. Агар (1) тенгламанинг ядроси

$$K(x,y)=\frac{H(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}, \quad 0<\alpha<1 \qquad (44)$$

кўринишга эга бўлса, бунда $H(x,y)$ ўз аргументларининг узлуксиз (ёки чегараланган) функцияси, у ҳолда (1) тенглама *кучсиз махсусликка эга бўлган интеграл тенглама* дейилади.

Биз 2- бандда (1) тенглама ўрнига, унга ўхшаш, итерацияланган ядроли (42) тенгламани текшириш мумкинлигини кўрдик.

Бу усулдан ядроларнинг айрим махсусликларини йўқотишда фойдаланиш мумкин, чунки итерацияланган ядролар, умуман айтганда, бошланғич ядрога нисбатан силлиқроқ бўлади.

Агар (44) типдаги ядро берилган бўлса, итерацияланган $K_n(x,y)$ ядро ҳам шу типга тегишли бўлади, фақат α сон ўрнига $1-n(1-\alpha)$ сон бўлади. Ҳақиқатан ҳам, итерацияланган $K_2(x,y)$ ядро учун

$$K_2(x,y)=\int_a^b K(x,t)K(t,y)dt=\int_a^b \frac{H(x,t)H(t,y)}{|x-t|^\alpha|y-t|^\alpha}dt$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ифодани

$$K_2(x,y)=\int_a^x \frac{H(x,t)H(t,y)}{(x-t)^\alpha(y-t)^\alpha}dt+$$

$$+\int_x^y \frac{H(x,t)H(t,y)}{(t-x)^\alpha(y-t)^\alpha}dt+\int_y^b \frac{H(x,t)H(t,y)}{(t-x)^\alpha(t-y)^\alpha}dt$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу интегралларда мос равишда

$$t=x-(y-x)s,\ t=x+(y-x)s,\ t=y+(y-x)s,$$

алмаштиришларни бажарсак, бу интегралларда ҳар бири

$$\frac{H^*(x,y)}{|x-y|^{2\alpha-1}},$$

бунда $H^*(x,y)$ — узлуксиз функция, кўринишдаги функция эканлиги келиб чиқади. Бундан дарҳол

$$K_2(x,y)=\frac{H_2(x,y)}{|x-y|^{2\alpha-1}}$$

га эга бўламиз, бундаги $H_2(x,y)$ — узлуксиз функция.

Математик индукция усули билан $K_{n-1}(x,y)$ итерацияланган ядро учун

$$K_{n-1}(x,y)=\frac{H_{n-1}(x,y)}{|x-y|^{1-(n-1)(1-\alpha)}}$$

тенгликни тўғри деб ҳисобласак, юқоридаги мулоҳазаларни қайтариш натижасида

$$K_n(x,y) = \frac{H_n(x,y)}{|x-y|^{1-n(1-\alpha)}}$$

тенглик ўринли бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. Етарли катта n учун $1 - n(1 - \alpha)$ сон манфий бўлади, у ҳолда бундай n учун $K_n(x,y)$ ядро узлуксиз бўлади.

Баён қилинган фикрлар n ўлчовли (8) тенглама учун ҳам ўринли бўлади. Фақат бу ҳолда (8) тенгламанинг ядроси (44) кўринишда бўлганда, ундаги α сон $0 < \alpha < n$ тенгсизликни қаноатлантириши зарур.

Шундай қилиб, кучсиз махсусликка эга бўлган интеграл тенгламалар учун ҳам Фредгольмнинг ҳамма теоремалари ўз кучини сақлаб қолади.

5. Симметрик ядро. Агар $K(x,y)$ ядро берилган соҳадаги x ва y нинг барча қийматлари учун $K(x,y) = K(y,x)$ тенглик ўринли бўлса, бу ядро *симметрик ядро* дейилади.

Агар $K(x,y)$ симметрик ядро бўлса, итерацияланган $K_n(x,y)$ ядро ҳам симметрик бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (22) формулага асосан

$$K_n(y,x) = \int_a^b \ldots \int_a^b K(y,t_1)K(t_1,t_2)\ldots K(t_{n-1},x)dt_1\ldots dt_{n-1}$$

тенгликка эга бўламиз. $K(x,y)$ симметрик бўлгани учун, олдинги тенгликни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$K_n(y,x) = \int_a^b \ldots \int_a^b K(x,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)K(t_1,y)dt_1\ldots dt_{n-1}.$$

Энди $t_1,\ldots,t_{n-1}$ ларни $t_{n-1}, \ldots, t_1$ орқали белгилаб олсак,

$$K_n(y,x) = \int_a^b \ldots \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\ldots K(t_{n-1},y)dt_1\ldots dt_{n-1},$$

бу эса (22) формулага асосан $K_n(x,y)$ га тенгдир.

Агар $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар $K(x,y)$ симметрик ядронинг бир-биридан фарқли бўлган λ_1 ва λ_2 хос сонларига мос хос функциялари бўлса, у ҳолда бу функциялар ўзаро ортогонал бўлади, яъни

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0.$$

Хос функцияларнинг таърифига асосан

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x,y)\varphi_1(y)dy,$$

$$\varphi_2(x) = \lambda_2 \int_a^b K(x,y)\varphi_2(y)dy.$$

Бу тенгликлардан биринчисини $\lambda_2\varphi_2(x)$ га, иккинчисини эса $\lambda_1\varphi_1(x)$ га кўпайтириб x бўйича a дан b гача интеграллаймиз ва ҳосил бўлган тенгликларни иккинчисидан биринчисини айирамиз:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx =$$

$$= \lambda_1\lambda_2 \int_a^b \varphi_1(x)dx \int_a^b K(x,y)\varphi_2(y)dy - \lambda_1\lambda_2 \int_a^b \varphi_2(x)dx \int_a^b K(x,y)\varphi_1(y)dy.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириб, ядронинг симметриклигини эътиборга олсак,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx =$$

$$= \lambda_1\lambda_2 \int_a^b \varphi_1(x)dx \int_a^b [K(x,y) - K(y,x)]\varphi_2(y)dy = 0$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан $\lambda_1 \neq \lambda_2$ бўлгани учун юқорида баён қилинган фикрнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қиламиз. Бу теоремадан ўз навбатида *ҳақиқий симметрик ядронинг хос сонлари ҳақиқий сонлардан* иборат бўлиши келиб чиқади.

Фараз қилайлик, λ хос сон ва унга мос бўлган $\varphi(x)$ хос функция комплекс бўлсин:

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \quad \varphi(x) = \varphi_i(x) + i\varphi_2(x),$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy.$$

Охирги тенгликда қўшма миқдорларга ўтиб,

$$\overline{\varphi}(x) = \overline{\lambda} \int_a^b K(x,y)\overline{\varphi}(y)dy$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан дарҳол $\overline{\lambda}$ ҳам хос сон, унга мос $\overline{\varphi}(x)$ — хос функциялиги келиб чиқади. Агар $\lambda_2 \neq 0$ бўлса, исботланганга асосан

$$\int_a^b \varphi(x)\overline{\varphi}(x)dx = \int_a^b |\varphi(x)|^2 \, dx = 0.$$

Бундан $\varphi(x)$ нинг айнан нолга тенг эканлиги келиб чиқади, хос функциянинг таърифига асосан бундай бўлиши мумкин эмас.

Демак, $\lambda_2 = 0$, яъни λ — ҳақиқий сон. Симметрик ядронинг яна бир муҳим хусусиятини айтиб ўтамиз: *ҳақиқий симметрик ядронинг спектри бўш бўлмайди*. Бунинг исботига биз тўхтамаймиз.

6. Вольтерранинг биринчи тур тенгламаси. Вольтерранинг биринчи тур .

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \tag{45}$$

интеграл тенгламасини текширамиз.

Фараз қилайлик, (45) тенгламанинг ядроси ва озод ҳади қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $K_x(x,y)$, $f'(x)$ лар мавжуд ва узлуксиз функциялар,

2) $K(x,x)$ ҳеч қаерда нолга айланмайди.

Бу ҳолда (45) тенгламани x бўйича дифференциаллаб, Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгламасига олиб келамиз:

$$K(x,x)\varphi(x) + \int_a^x K_x(x,y)\varphi(y)dy = f'(x) \tag{46}$$

ёки

$$\varphi(x) + \int_a^x K^*(x,y)\varphi(y)dy = f^*(x),$$

бунда

$$K^*(x,y) = \frac{K_x(x,y)}{K(x,x)}, \qquad f^* = \frac{f'(x)}{K(x,x)}.$$

Юқорида келтирилган шартлардан энг муҳими $K(x,x)$ нинг нолга айланмаслик шартидир, чунки x нинг бирор қийматида $K(x,x)$ нолга тенг бўлиб қолса, Вольтерранинг биринчи тур интеграл тенгламасини текширишда катта қийинчиликларга дуч келинади. Бу ҳолда (46) тенглама учинчи турдаги интеграл тенгламадан иборат бўлади. Лекин айрим хусусий ҳолларда бундай тенгламаларнинг ечимларини ҳатто квадратурада ёзиб олиш мумкин бўлади.

Мисол сифатида Абель тенгламасини текширамиз.

7. Абельнинг интеграл тенгламаси. Абельнинг

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^\alpha} = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \qquad x > 0$$

интеграл тенгламасини

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)dy}{(t-y)^\alpha} = f(t)$$

кўринишда ёзиб олиб, уни $\frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}$ га кўпайтирамиз ва t бўйича 0 дан x гача интеграллаймиз:

$$\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{\varphi(y)dy}{(t-y)^\alpha} = \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Бу тенгликнинг чап томонига 2- § нинг 3- бандда келтирилган Дирихле формуласини қўллаймиз:

$$\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^\alpha} = \int_0^x \varphi(y)dy \int_y^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-y)^\alpha}.$$

Бу тengликнинг ўнг томонидаги ички интегралда $t = y + (x - y)s$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$\int_y^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-y)^{\alpha}} = \int_0^1 \frac{ds}{(1-s)^{\alpha} s^{1-\alpha}} =$$

$$= B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

бўлади.

Шундай қилиб,

$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \int_0^x \varphi(y)dy = \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

ёки

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Агар $f(x)$ узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлса, охирги тенгликнинг ўнг томонида аввал бўлаклаб интеграллаб, сўнгра дифференциаллаш амалини бажарсак,

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right]$$

формулага эга бўламиз.

Хусусий ҳолда, агар $\alpha = \frac{1}{2}$ бўлса, I боб таутохрон тўғрисидаги масалада ҳосил бўлган интеграл тенгламанинг ушбу

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)dt}{\sqrt{x-t}}$$

ечимини ҳосил қиламиз.

4- §. Сингуляр интеграл тенгламалар

1. Интегралнинг бош қиймати. Математик анализ курсидан маълумки, интеграл йиғиндиларнинг лимити сифатида аниқланган интеграл фақат чегараланган функциялар учун маънога эгадир. Агар интеграл остидаги функция чегараланмаган бўлса, у ҳолда хосмас интеграл тушунчаси киритилади. Буни эслатиб ўтамиз.

$f(x)$ функция $a \leq x \leq b$ кесмада аниқланган бўлиб, бу кесманинг c нуқтаси атрофида чегараланмаган бўлсин. Лекин мусбат ε_1 ва ε_2 сонлар қандай кичик бўлмасин $f(x)$ функция $a \leq x \leq c-\varepsilon_1$, $c+\varepsilon_2 \leq x \leq b$ кесмаларнинг ҳар бирида интегралланувчи бўлсин. Ушбу

$$\int_0^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \tag{47}$$

йиғиндини тузамиз.

Агар бу йиғинди ε_1 ва ε_2 бир-бирига боғлиқ бўлмай нолга интилганда лимитга эга бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг *хосмас интеграли* дейилади.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \right].$$

(47) йиғинди, ε_1 ва ε_2 бир-бирига боғлиқ бўлмай нолга интилганда лимитга эга бўлмаслиги, лекин ε_1 ва ε_2 бирор муносабат билан боғлиқ бўлиб нолга интилганда лимити мавжуд бўлиши мумкин.

Мисол учун $f(x) = \frac{1}{x-c}$, $a < c < b$ функцияни текширамиз. (47) йиғиндини тузиб,

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{48}$$

тенгликка эга бўламиз. (48) миқдор ε_1 ва ε_2 нолга интилганда лимитга интилмайди, чунки $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ нисбат бу ҳолда ихтиёрий ўзгариши мумкин. Агар ε_1 ва ε_2 бир-бирига боғлиқ бўлса, масалан $\varepsilon_1 = k\varepsilon_2$, бунда k — мусбат ўзгармас, у ҳолда (48) йиғинди лимитга эга бўлиб, бу лимит

$$\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln k$$

га тенг бўлади. Хусусий ҳолда $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ десак,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}\right]=\ln\frac{b-c}{c-a}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу мисолдан сўнг қуйидаги таърифни киритамиз.

$f(x)$ функция $a\le x\le b$ кесмада аниқланган бўлиб, мусбат ε сон қандай кичик бўлмасин бу функция $a\le x\le c-\varepsilon$ ва $c+\varepsilon\le x\le b$ кесмаларда интегралланувчи бўлсин. *Ушбу лимит* (агар у мавжуд бўлса)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx\right]$$

$f(x)$ функциядан $a\le x\le b$ оралиқда олинган интегралнинг Коши маъносидаги бош қиймати дейилади.

"Интегралнинг бош қиймати" ўрнига кўпинча *сингуляр (махсус) интеграл* деб айтилади.

Биз сингуляр интегрални оддий

$$\int_a^b f(x)dx$$

символ билан белгилаймиз. Сингуляр интегрални ифодалашда

$$V.P.\int_a^b f(x)dx;\ \int_a^{\cdot b} f(x)dx;\ \int_a^{*b} f(x)dx$$

символлар ҳам ишлатилади, бунда V ва P — французча valeur principale сўзларининг биринчи ҳарфлари бўлиб, ўзбекчада "бош қиймат"ни билдиради. Агар оддий (хос ёки хосмас) интеграл мавжуд бўлса, сингуляр интеграл бу оддий интеграл билан устма-уст тушади. (48) формуладан ушбу

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} \qquad (49)$$

сингуляр интегралнинг мавжудлиги келиб чиқади.

f(x) функция $a \leq x \leq b$ кесмада аниқланган бўлсин. *Агар $a \leq x \leq b$ кесманинг ихтиёрий иккита x_1 ва x_2 нуқтаси учун*

$$| f(x_1) - f(x_2) |\leq A \,| x_1 - x_2 |^{\alpha}$$

шарт бажарилса, f(x) функция $a \leq x \leq b$ кесмада Гёльдер (H) шартини қаноатлантиради дейилади, бундаги α, A — мусбат ўзгармас сонлар, шу билан бирга $0 < \alpha \leq 1$. A — Гёльдер ўзгармаси, α — Гёльдер кўрсаткичи деб юритилади.

Бу таърифда *f(x)* функция кесмада берилган эди. Аммо функция бирор очиқ ёки ёпиқ эгри чизиқда берилиши ҳам мумкин. Икки ўзгарувчили функция учун таърифни шу ҳол учун берамиз.

L — очиқ ёки ёпиқ силлиқ эгри чизиқ бўлиб, $\varphi(t, \tau)$ L да берилган функция бўлсин. Агар L да ётувчи икки жуфт t, τ ва t_1, τ_1 нуқталар учун

$$\left|\varphi(t,\tau) - \varphi(t_1,\tau_1)\right| \leq K(\left| t - t_1 \right|^{\mu} + | \tau - \tau_1 |^{\nu})$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\varphi(t, \tau)$ функция L да Гёльдер *(H)* шартини қаноатлантиради деб айтилади, бунда K, μ, ν — мусбат ўзгармас сонлар, шу билан бирга $\mu \leq 1$, $\nu \leq 1$.

Энди, юқорида кўрган интегралдан умумийроқ

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx \qquad (50)$$

интегрални текширамиз, бунда $\varphi(x)$ — Гёльдер шартини қаноатлантирувчи бирор функция. Бу интегрални

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c} = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx + \varphi(c)\int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интеграл хосмас интеграл сифатида мавжуд, чунки Гёльдер шартига асосан

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\right| < \frac{A}{|x-c|^{1-\alpha}},$$

иккинчи интеграл эса (49) билан устма-уст тушади, яъни у сингуляр интегралдир.

Шундай қилиб, *$\varphi(x)$ функция Гёльдер шартини қаноатлантирса,* (50) *интеграл Коши бўйича бош қиймат маъносида мавжуд бўлиб, у қуйидагига тенг бўлади.*

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx + \varphi(c)\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

Сингуляр интеграл тушунчаси эгри чизиқли интеграллар учун ҳам худди юқоридагидай киритилади.

L — бўлаклари силлиқ ёпиқ ёки очиқ эгри чизиқ бўлсин. L эгри чизиқ ёйининг бирор нуқтадан бошлаб саналадиган узунлиги s бўлсин. Эгри чизиқ параметрик $t(s) = x(s) + iy(s)$ тенгламасидаги $x(s)$, $y(s)$ функциялар иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин, яъни L эгри чизиқнинг эгрилиги узлуксиз. $\tau \in L$, γ — етарли кичик радиусли $|t-\tau| = \varepsilon$ айлана, L_ε — ёпиқ $|t-\tau| \le \varepsilon$ доирадан ташқарида ётувчи L нинг қисми бўлсин. Равшанки,

$$J_\varepsilon = \int_{L\varepsilon} \frac{f(t)}{t-\tau}\,dt$$

интеграл оддий тушунчада маънога эга.

Агар

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(\tau) = J(\tau)$$

лимит мавжуд бўлса, у интегралнинг *Коши маъносидаги бош қиймати ёки сингуляр интеграл* дейилади. Буни ҳам, худди юқоридагидек, интегралнинг оддий символи билан белгилаймиз:

$$J(\tau) = \int_L \frac{f(t)dt}{t-\tau}. \qquad (51)$$

Агар $f(t)$ функция Гёльдер шартини қаноатлантирса, (51) *сингуляр интеграл мавжуд бўлади.*

Энди комплекс ўзгарувчили функциялар курсидан маълум бўлган айрим тушунчаларни эслатиб ўтамиз. Ёпиқ силлиқ L эгри чизиқ билан чегараланган соҳани D^+ орқали, $D^+ + L$ нинг барча комплекс текисликкача тўлдирувчисини D^- орқали белгилаймиз. Агар $f(z)$ —D^+ да аналитик, $D^+ + L$ да узлуксиз бўлса, ушбу Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{t-z} = \begin{cases} f(z), & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^- \end{cases}$$

формуласи ўринли бўлади. Энди $f(t)$ функция бўлаклари силлиқ ёпиқ ёки очиқ L эгри чизиқда узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{t-z} \tag{52}$$

интеграл *Коши типидаги интеграл* дейилади, $f(t)$ унинг *зичлиги*, $\frac{1}{t-z}$ эса *ядроси* деб юритилади.

L ни ёпиқ силлиқ эгри чизиқ ҳисоблаб, $F^+(\tau)$ орқали z нуқта L нинг ичидан туриб L даги τ нуқтага интилгандаги $F(z)$ нинг лимит қийматини, $F^-(t)$ орқали L нинг ташқарисидан интилгандаги лимит қийматини белгилаймиз.

Агар $f(t)$ функция L да Гёльдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда

$$F^+(\tau) = \frac{1}{2} f(\tau) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{t-\tau}, \tag{53}$$

$$F^-(\tau) = -\frac{1}{2} f(\tau) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{t-\tau} \tag{54}$$

формулалар ўринли бўлади, бунда интеграллар сингуляр интеграллардир.

(53) ва (54) *Сохоцкий — Племели формулалари* деб аталади.

Бу формулалар тўғрисида айрим фикрларни айтиб ўтамиз. L эгри чизиқ бўйлаб соат милига қарши ҳаракат қилинганда, бу билан чегараланган соҳа чап томонда қолади деб фараз қиламиз. z нуқта τ га интилиши тўғрисида гапирилганда, z нуқта ҳаракати давомида чизилган эгри чизиқ L контурга уринмайди деб ҳисоблаймиз, акс ҳолда бу формулалар тўғри бўлмаслиги мумкин.

Агар L ёпиқ эгри чизиқ бўлмай, оддий ёйдан иборат бўлса, "соҳанинг ичидан" ва "соҳанинг ташқарисидан" тушунчалари маънога эга бўлмайди, шунга қарамасдан, (53) ва (54) формулалар ўз кучини сақлаб қолади. Бу ҳолда L бирор L' ёй билан соат милига қарши айланиб ўтиладиган ёпиқ контургача тўлдирилади. D — бу контур билан чегараланган соҳа бўлсин. У ҳолда (53) ва (54) формулалардаги + ва — белгиларни мос равишда D соҳанинг ичидан ёки ташқарисидан йўналиш деб тушунилади.

Ушбу $\frac{1}{t-\tau}$ ифода, бунда t ва τ — L контурнинг нуқталари, *Коши ядроси*, $\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}$ эса, бу ерда σ ва s — $[0,2\pi]$ ораликда ўзгарадиган ҳақиқий ўзгарувчилар, *Гильберт ядроси* деб айтилади.

2. Сингуляр интеграллар композициясининг формуласи. L — ёпиқ силлиқ эгри чизиқ бўлиб,

$$f_1(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)dt}{t-\tau}, \tag{55}$$

$$f_2(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f_1(t)dt}{t-\tau}$$

бўлсин, $f_2(\tau)$ функциянинг бевосита $f(t)$ орқали қандай ифодаланишини топамиз. Шу мақсадда Коши типидаги

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)dt}{t-z},$$

$$\varphi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f_1(t)dt}{t-z}$$

интегралларни текширамиз. (53) формулага асосан

$$\varphi^+(\tau)=\frac{1}{2}f(\tau)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)dt}{t-\tau},$$

$$\varphi_1^+(\tau) = \frac{1}{2} f_1(\tau) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_1(t)dt}{t-\tau}.$$

Булардан $f_1(\tau)$ ва $f_2(\tau)$ функцияларнинг аниқланишига кўра

$$f_1(\tau) = \varphi^+(\tau) - \frac{1}{2} f(\tau), \qquad f_2(\tau) = \varphi_1^+(\tau) - \frac{1}{2} f_1(\tau) \tag{56}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. (56) дан $f_1(\tau)$ нинг қийматини $\varphi_1(z)$ га олиб бориб қўямиз:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi^+(t)dt}{t-z} - \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{f(t)dt}{t-z}. \tag{57}$$

(57) даги биринчи интеграл Коши интегралидир, чунки унинг зичлиги $\varphi^+(t)$ L эгри чизиқ ичида аналитик $\varphi(z)$ функциянинг лимит қиймати. Демак, бу интеграл $\varphi(z)$ га тенг. (57) даги иккинчи интеграл эса $\frac{1}{2}\varphi(z)$ га тенг. Шундай қилиб,

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) \qquad \text{ва} \qquad \varphi_1^+(\tau) = \frac{1}{2}\varphi^+(\tau).$$

(56) тенгликдан

$$f_2(\tau) = \frac{1}{2}\varphi^+(\tau) - \frac{1}{2}\left[\varphi^+(\tau) - \frac{1}{2} f(\tau)\right] = \frac{1}{4} f(\tau)\cdot$$

$f_1(\tau)$ функциянинг ифодасини

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - t}$$

кўринишда ёзиб олсак, сингуляр интегралларнинг композицияси бўлган ушбу

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_L \frac{dt}{t-\tau} \int_L \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - t} = \frac{1}{4} f(\tau) \tag{58}$$

Пуанкаре — Бертран формуласини ҳосил қиламиз. (58) формулада икки каррали сингуляр интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириш мумкин эмас; агарда интеграллаш тартибини ўзгартирсак,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\varsigma)d\varsigma\int_L \frac{dt}{(\varsigma-t)(t-\tau)}$$

интеграл ҳосил бўлади, бу интеграл эса нолга тенг. Ҳақиқатан ҳам $\varsigma \neq \tau$ бўлса,

$$\int_L \frac{dt}{(\varsigma-t)(t-\tau)} = \frac{1}{\varsigma-\tau}\left(\int_L \frac{dt}{t-\tau} - \int_L \frac{dt}{t-\varsigma}\right).$$

(52) формулада $f(t) = 1$ бўлсин. Агар z нуқта L эгри чизиқнинг ичида ётса, $F(z) = 1$ бўлади. Бу ҳолда, *(53)* формуладан

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-\tau} = \frac{1}{2}.$$

Худди шундай

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-\varsigma} = \frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\int_L \frac{dt}{(\varsigma-t)(t-\tau)} = 0, \quad \varsigma \neq \tau.$$

Агар $f(t, \varsigma)$ функция L да Гёльдер шартини қаноатлантирса, (58) га нисбатан умумийроқ

$$\int_L \frac{dt}{t-\tau}\int_L \frac{f(t,\varsigma)}{\varsigma-t}d\varsigma = -\pi^2 f(\tau,\tau) + \int_L d\varsigma\int_L \frac{f(t,\varsigma)dt}{(t-\tau)(\varsigma-t)} \qquad (59)$$

Пуанкаре — Бертран формуласи тўғри бўлади [15]. Агар $f(t, \varsigma)$ функция t га боғлиқ бўлмаса, (59) дан дарҳол (58) формула келиб чиқади.

3. Коши ядроли сингуляр интеграл тенгламалар. Интеграл тенгламанинг $K(x,y)$ ядроси $x = y$ бўлганда чексизликка айланиб, интеграл Коши бўйича бош қиймат маъносида мавжуд бўлса, бундай интеграл тенглама *сингуляр интеграл тенглама* деб юритилади. Коши ядроли интеграл тенглама

$$a(\tau)\varphi(\tau) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{M(\tau,t)}{t-\tau}\varphi(t)dt = f(\tau) \qquad (60)$$

кўринишда ёзилади, бундаги L — очиқ ёки ёпиқ силлиқ эгри чизиқ.

L да берилган $a(\tau), f(\tau), M(\tau,t)$ функцияларни Гёльдер шартини қаноатлантиради деб ҳисоблаймиз. (60) тенгламанинг ядросини

$$\frac{M(\tau,t)}{\tau-t} = \frac{M(\tau,t)-M(\tau,\tau)}{t-\tau} + \frac{M(\tau,\tau)}{t-\tau}$$

кўринишида ёзиб оламиз. Ушбу

$$M(\tau,\tau) = b(\tau), \quad \frac{1}{\pi i}\frac{M(\tau,t)-M(\tau,\tau)}{\tau-t} = K(\tau,t)$$

белгилашларни киритсак, (60) тенглама

$$a(\tau)\varphi(\tau) + \frac{b(\tau)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-\tau}dt + \int\limits_L K(\tau,t)\varphi(t)dt = f(\tau) \qquad (61)$$

кўринишда ёзилади.

$$a(\tau)\varphi(\tau) + \frac{b(\tau)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-\tau}dt = f(\tau) \qquad (62)$$

тенглама (61) тенгламага мос бўлган *характеристик тенглама* дейилади.

Қуйидаги

$$s(t) = a(t) + b(t), \quad d(\tau) = a(\tau) - b(\tau) \qquad (63)$$

функцияларни L да нолга айланмайди деб ҳисоблаймиз.

Бу ҳолда (60) ёки (61) тенглама *нормал типдаги тенглама* деб айтилади.

Сингуляр интеграл тенгламалар учун Фредгольмнинг теоремалари, умуман айтганда, ўринли бўлмайди. Нормал типдаги (61) кўринишдаги нитеграл тенгламаларнинг назарияси Н. И. Мусхелишвилининг китобида баён қилинган [15]. Биз бу ерда айрим хусусий ҳолларни кўрамиз. Аввало (62) тенгламада $a(\tau)=0$, $b(\tau)=1$ ҳолни, яъни биринчи турдаги

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-\tau}dt = f(\tau) \tag{64}$$

тенгламани текширамиз. L — силлиқ ёпиқ контур бўлсин.

(58) Пуанкаре — Бертран формуласига асосан

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-\tau}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-t} = \frac{1}{4}\varphi(\tau). \tag{65}$$

Бундан дарҳол

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{t-\tau} \tag{66}$$

функция (64) тенгламани қаноатлантириши келиб чиқади. Бу тенгламанинг ечими ягона эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, (64) тенгламанинг ҳар икки томонини $\frac{1}{\pi i}\ \frac{1}{\tau-\varsigma}$ га кўпайтириб, τ бўйича интеграллаймиз.

(65) формулани эътиборга олсак, (66) ни ҳосил қиламиз. Қисқа қилиб айтганда, (64) ва (66) формулалар (65) га асосан, бири иккинчисининг натижасидир. Энди (62) тенгламадаги $a(\tau)$ ва $b(\tau)$ коэффициентлар ўзгармас бўлсин. L — бу ҳолда ҳам силлиқ ёпиқ контур

$$a\varphi(\tau) + \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-\tau}dt = f(\tau). \tag{67}$$

Бу тенгламанинг ҳар икки томонига

$$M\psi(t) = a\psi(t) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)}{\varsigma-t}d\varsigma$$

операторни қўллаймиз:

$$a\left[a\varphi(\tau) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\varsigma)}{\varsigma-\tau}d\varsigma\right] +$$

$$+\frac{b}{\pi i}\int_L \frac{dt}{t-\tau}\left[a\varphi(t) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\varsigma)}{\varsigma-t}d\varsigma\right] = af(\tau) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{f(\varsigma)}{\varsigma-\tau}d\varsigma.$$

Бундан дарҳол, (63) ифодалар нолдан фарқли бўлганлиги сабабли, (65) формулага асосан

$$\varphi(\tau)=\frac{a}{a^2-b^2}f(\tau)-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi i}\int\limits_L\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-\tau}d\varsigma \qquad (68)$$

ни ҳосил қиламиз. (68) формула билан аниқланган $\varphi(\tau)$ функциянинг (67) тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Умумий (61) тенгламани текширилганда

$$M\psi=a(t)\psi(t)-\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\psi(\varsigma)}{\varsigma-t}d\varsigma$$

операторни қўллаш натижасида, (61) тенглама Фредгольм тенгламасига келади. Агар a, b — ўзгармас бўлса, ҳосил бўлган Фредгольм тенгламаси (61) тенгламага эквивалент бўлади. Умумий ҳолда, қўшимча текширишларни олиб боришга тўғри келади.

Агар L — ёпиқ контур бўлмаса, Пуанкаре — Бертран формуласи ўринли бўлмайди, ва натижида юқорида баён қилинган сингуляр интеграл тенгламаларнинг ечиш усулини татбиқ қилиш мумкин бўлмай қолади. Бу ерда биз сингуляр интеграл тенгламани Риман номи билан аталувчи масалага олиб келиб ечиш усули тўғрисида тушунча бериб ўтамиз. Бу усул очиқ контурлар учунгина эмас, балки ёпиқ контурлар учун ҳам қўлланилади.

L — бўлаклари силлиқ очиқ эгри чизиқ бўлсин, (62) тенгламани текширамиз. Зичлиги $\varphi(t)$ бўлган Коши типидаги

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)}{t-z}dt$$

интегрални қараймиз. Сохоцкий — Племели формуласига асосан

$$\varphi(\tau)=F^+(\tau)-F^-(\tau),\qquad \frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)dt}{t-\tau}=F^+(\tau)+F^-(\tau)$$

тенгликларга эга бўламиз. Буларни (62) тенгламага қўйсак,

$$[a(\tau)+b(\tau)]F^+(\tau)-[a(\tau)-b(\tau)]F^-(\tau)=f(\tau)$$

ёки

$$F^{+}(\tau) = g(\tau)F^{-}(\tau) + f_1(\tau) \tag{69}$$

тенглик ҳосил бўлади, бунда

$$g(\tau) = \frac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}, \quad f_1(\tau) = \frac{f(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}.$$

Шундай қилиб, биз қуйидаги Риман масалага келдик. *Лимит қийматлари L эгри чизиқда* (69) *шартни қаноатлантирувчи $F(z)$ функция топилсин.*

Бу масала улаш масаласи ёки Гильберт масаласи ҳам деб юритилади. Риман масаласининг тўла назарияси [15] да баён қилинган.

Агар $a(\tau)$ ва $b(\tau)$ функциялар ўзгармас бўлиб, L оддий силлиқ ёйдан иборат бўлса, Риман масаласини ечиш унчалик қийин эмас. $F(z)$ функция

$$F(z) = \Phi(z)\omega(z) \tag{70}$$

кўринишга эга бўлсин деб ҳисоблаймиз ва $\omega(z)$ ни шундай танлаймизки, у

$$(a+b)\omega^{+}(\tau) = (a-b)\omega^{-}(\tau) \tag{71}$$

шартни қаноатлантирсин, яъни бир жинсли Риман масаласининг ечимидан иборат бўлсин. L ёйнинг бошланғич ва охирги нуқталарини α ва β орқали белгилаб,

$$\omega(z) = \left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)^m \tag{72}$$

функцияни текширамиз, бунда m — бирор ўзгармас сон. α нуқтанинг атрофини соат милига қарши айланиб ўтганда $\omega(z)$ функция $e^{-2\pi i m}$ кўпайтувчига эга бўлади. Шундай қилиб,

$$\omega^{-}(\tau) = e^{2\pi i m}\omega^{+}(\tau).$$

m сонни

$$e^{2\pi i m} = \frac{a+b}{a-b}$$

шартдан аниқлаймиз. Бу ҳолда (72) функция (71) тенгламани қаноатлантиради. Энди $\omega(z)$ нинг қийматини (70) га, сўнгра уни (69) га қўйсак,

$$\Phi^{+}(\tau)-\Phi^{-}(\tau)=\frac{f(\tau)}{a+b}\left(\frac{\tau-\beta}{\tau-\alpha}\right)^{m}$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу эса Риманнинг содда масаласи бўлиб, осонгина ечилади.

Сохоцкий — Племели формулаларидан кўриниб турибдики, $\Phi(z)$ учун ушбу

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i(a+b)}\int_{L}\left(\frac{t-\beta}{t-\alpha}\right)^{m}\frac{f(t)dt}{t-z}$$

Коши типидаги интегрални қабул қилиш мумкин. Бу ҳолда

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i(a+b)}\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)^{m}\int_{L}\left(\frac{t-\beta}{t-\alpha}\right)^{m}\frac{f(t)dt}{t-z}.$$

Демак, $a(\tau)$ ва $b(\tau)$ лар ўзгармас, L оддий ёй бўлган ҳолда (62) тенгламанинг ечими

$$\varphi(\tau)=F^{+}(\tau)-F^{-}(\tau)$$

Сохоцкий — Племели формуласига асосан дарҳол аниқланади:

$$\varphi(\tau)=\frac{a}{a^{2}-b^{2}}f(\tau)-\frac{b}{(a^{2}-b^{2})\pi i}\left(\frac{\tau-\alpha}{\tau-\beta}\right)^{m}\int_{L}\left(\frac{t-\beta}{t-\alpha}\right)^{m}\frac{f(t)dt}{t-\tau}. \quad (73)$$

(73) ечим, умуман айтганда, ягона эмас. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун яна қўшимча тадқиқотларни олиб бориш зарур бўлади. Текширилаётган ҳолда бир жинсли (62) тенгламанинг ечими

$$\varphi_{0}(\tau)=\frac{c}{(\tau-\alpha)^{1-m}(\tau-\beta)^{m}}$$

дан иборат бўлади. (62) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\varphi(\tau) = \frac{a}{a^2-b^2} f(\tau) - \frac{b}{(a^2-b^2)\pi i}\left(\frac{\tau-\alpha}{\tau-\beta}\right)^m \int_L \left(\frac{t-\beta}{t-\alpha}\right)^m \frac{f(t)dt}{t-\tau} +$$

$$+ \frac{c}{(\tau-\alpha)^{1-m}(\tau-\beta)^m},$$

бунда c — ихтиёрий ўзгармас сон. Бу ўзгармас сонни танлаш натижасида $\varphi(\tau)$ ечим L ейнинг у ёки бу четида, ёки иккала четида ҳам чегараланганлигини таъминлаш мумкин. Агар L ёпиқ контур бўлса, яъни $\alpha=\beta$, бу ҳолда табиий $c=0$, ва (73) дан дарҳол (68) формула келиб чиқади.

4. Гильберт ядроли сингуляр интеграл тенгламалар. Қуйидаги тенгламани кўрамиз:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma = f(s), \tag{74}$$

бунда $\varphi(s)$ — номаълум, $f(s)$ — берилган функциялар бўлиб, Гёльдер шартини қаноатлантирадилар. (74) тенгламани текширишдан аввал 3- банддаги (62) ва (64) тенгламаларни L маркази координата бошида ва радиуси бирга тенг айлана бўлган хусусий ҳолда қараймиз.

$$t - e^{i\sigma}, \quad \tau = e^{is}$$

бўлсин. У ҳолда

$$\frac{dt}{t-\tau} = \frac{ie^{i\sigma}d\sigma}{e^{i\sigma}-e^{is}}.$$

Бу ифоданинг сурат ва махражини $e^{-i\frac{\sigma+s}{2}}$ га кўпайтирамиз ва

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i\sin z$$

Эйлер формулаларидан фойдаланамиз:

$$\frac{dt}{t-\pi} = \frac{ie^{i\frac{\sigma-s}{2}}d\sigma}{e^{i\frac{\sigma-s}{2}}-e^{-i\frac{\sigma-s}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\sigma-s}{2}+i\sin\frac{\sigma-s}{2}}{\sin\frac{\sigma-s}{2}}d\sigma = \left(\frac{1}{2}ctg\,\frac{\sigma-s}{2}+\frac{i}{2}\right)d\sigma.$$

$\varphi(\tau)$ ва $f(\tau)$ ларни $\varphi(\sigma)$ ва $f(\sigma)$ орқали белгилаймиз (бутун k сон учун, табиий $\varphi(\sigma+2k\pi)=\varphi(\sigma)$, $f(\sigma+2k\pi)=f(\sigma)$ деб ҳисоблаймиз) ва $f(\sigma)$ ни $\frac{1}{i}f(\sigma)$ га алмаштирамиз. У ҳолда (62) ва (64) формулалар, мос равишда қуйидагича ёзилади.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma=f(s), \tag{75}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)d\sigma=-\varphi(s). \tag{76}$$

Бу формулалардан Гильбертнинг тескарилаш формулаларини, яъни (74) тенгламани ечиш формуласини ва унга тескари формулани осонгина топиш мумкин. (74) тенглама

$$\int_0^{2\pi}f(\sigma)d\sigma=0 \tag{77}$$

шарт бажарилгандагина ечимга эга бўлиши мумкин. (74) нинг ечими бор бўлсин. (77) ни ҳосил қилиш учун (74) нинг ҳар икки томонини s бўйича 0 дан 2π гача интеграллаймиз

$$\int_0^{2\pi}ds\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=\int_0^{2\pi}f(s)ds$$

ёки

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\delta-s}{2}ds=\int_0^{2\pi}f(s)ds.$$

Ушбу

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}ds=0 \tag{78}$$

кўриниб турган тенгликни эътиборга олсак, (77) келиб чиқади. (77) шарт бажарилди деб фараз қилиб, (74) тенгламанинг қўшимча

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)d\sigma = 0 \tag{79}$$

шартни қаноатлантирувчи ечимини излаймиз. Аммо, бу шарт бажарилганда (74) тенглама (75) тенглама билан устма-уст тушади, (75) тенгламанинг ечими эса (76) формула билан аниқланади, яъни (76) шарт бажарилганда

$$\varphi(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma\,. \tag{80}$$

(74) ва (80) формулалар (77) ва (79) шартлар билан биргаликда *Гильбертнинг тескарилаш формулаларини* ифодалайди.

Биз (74) тенгламанинг қўшимча (79) шартни қаноатлантирувчи ечимини топдик. Ҳамма бошқа ечимлар топилган ечимга ихтиёрий ўзгармас сонни қўшиш натижасида ҳосил бўлишини кўрсатамиз. Аввало, равшанки $\varphi(\sigma)+\mathrm{const}$ (78) ча асосан ечим бўлади. Энди $\varphi_1(\sigma)$ — (74) тенгламанинг бирор ечими бўлиб,

$$\varphi^*(\sigma) = \varphi_1(\sigma) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(\sigma)d\sigma \tag{81}$$

бўлсин. Бу функциянинг (74) тенгламани қаноатлантириши равшан. (81) тенгликдаги интегрални C орқали белгилаб, (81) нинг икки томонини 0 дан 2π гача интеграллasак, $\varphi^*(\sigma)$ нинг қўшимча (79) шартни қаноатлантириши ҳам келиб чиқади, лекин бундай ечим ягона бўлгани учун у топилган (80) ечим билан устма-уст тушади. Бундан дарҳол $\varphi_1(\sigma) = \varphi^*(\sigma) + C$ эканлиги келиб чиқади.

(74) ва (80) формулалардан дарҳол Гильберт ядроли сингуляр интеграллар композициясининг ушбу

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\frac{\theta-s}{2}\,d\theta\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\theta}{2}\,d\sigma = -\varphi(s)$$

формуласи келиб чиқади.

Юқорида айтилганларга асосан қуйидаги тескарилаш формулалари келиб чиқади:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma = f(s)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)d\sigma\,, \qquad (82)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma = \varphi(s)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma\,. \qquad (83)$$

Бу формулаларни бундай тушуниш керак: агар $\varphi(\sigma)$ ва $f(\sigma)$ — Гёльдер шартини қаноатлантирувчи функциялар бўлса, у ҳолда (82), (83) формулаларнинг биридан иккинчиси келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, (82) формула ўринли бўлсин, унинг ўнг томонини $\psi(s)$ орқали белгилаб оламиз, яъни

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)ctg\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=\psi(s)\,, \qquad (84)$$

$$\psi(s)=f(s)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)d\sigma. \qquad (85)$$

(84) тенгламанинг ўнг томони (77) шартни қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Бунинг учун (85) тенгликнинг ҳар икки томонини ds га кўпайтириб, 0 дан 2π гача интеграллаймиз:

$$\int_0^{2\pi}\psi(s)ds=\int_0^{2\pi}f(s)ds-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ds\left(\int_0^{2\pi}f(\sigma)d\sigma\right)=$$

$$=\int_0^{2\pi}f(s)ds-\int_0^{2\pi}f(\sigma)d\sigma=0.$$

Бундан, (78) га асосан, аввалги айтганларни эътиборга олсак,

$$\varphi(s)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+\text{const}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+c \qquad (86)$$

тенгликка эга бўламиз, бунда c — бирор ўзгармас. (86) нинг ҳар икки томонини ds га кўпайтириб, 0 дан 2π гача интеграллаб

$$2\pi c = \int_0^{2\pi} \varphi(s)ds$$

ни ҳосил қиламиз. c нинг бу қийматини (86) формулага қўйсак, (83) формула келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш, (83) дан (82) ни ҳосил қиламиз.

(82) ва (83) формулалардан бошқачароқ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma = f(s), \tag{87}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)d\sigma = \varphi(s) \tag{88}$$

формулалар ҳам ўринли бўлади.

Бу формулаларни исботлаш катта қийинчилик туғдирмайди. Фараз қилайлик, (87) тўғри бўлсин. Бунинг ҳар икки томонини ds га кўпайтириб, 0 дан 2π гача интеграллаймиз. (78) га асосан

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma = \int_0^{2\pi} f(\sigma)d\sigma$$

тенгликка эга бўламиз. Бунга асосан (87) формула (82) га келади. Кейинги мулоҳазалар аввалгиларни қайтаришдан иборат бўлади. (87) дан $f(s)$ нинг қийматини (88) га қўйиб, (78) ни эътиборга олсак, (79) шарт бажарилмаган ҳолдаги қуйидаги Гильберт формуласи келиб чиқади:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\theta-s}{2}d\theta\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\theta}{2}d\sigma &= \\ = -\varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma.\end{aligned} \tag{89}$$

Гильберт ядроли сингуляр интеграл тенглама

$$a(s)\varphi(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma+\int_0^{2\pi}K(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma=f(s) \quad (90)$$

кўринишга эга бўлади, бунда $a(s), b(s), f(s), K(s,\sigma)$ —ҳақиқий функциялар бўлиб, Гёльдер шартини қаноатланти ради, шу билан бирга $K(s, \sigma)$ ядро учун $\sigma=s$ нуқтада

$$|K(s,\sigma)|<\frac{A}{|\sigma-s|^{\alpha}}, \qquad 0\le\alpha<1$$

тенгсизлик ўринли бўлиши мумкин.

Ядро $K(s, \sigma)=0$ бўлганда, (90) га мос бўлган

$$L\varphi=a(s)\varphi(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=f(s) \quad (91)$$

характеристик тенгламага эга бўламиз.

Агар $a(s)$, $b(s)$ функциялар ўзгармас бўлса, (9 1) тенгламани қуйидаги усул билан ечиш мумкин.

Ушбу

$$M\omega=a\omega(s)-\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(\sigma)\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-s}{2}\,ds$$

белгилашни киритиб, бунда $\omega(s)$ — ихтиёрий функция, (91) тенгламанинг ҳар икки томонига бу операторни қўллаймиз:

$$ML\varphi=F(s), \qquad F(s)=Mf$$

ёки

$$ML\varphi=a\left[a\varphi(s)+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma\right]-$$

$$-\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{ctg}\,\frac{\theta-s}{2}\,d\theta\left[a\varphi(\theta)+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma-\theta}{2}\,d\sigma\right]=F(s).$$

(89) формуладан фойдалансак, бу тенглама

$$(a^2 + b^2)\varphi(s) - \frac{b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)d\sigma = F(s) \qquad (92)$$

кўринишда ёзилади.

Агар $a^2 + b^2 \neq 0$ бўлса, бу тенглама айниган ядроли содда Фредгольм тенгламасидан иборатдир.

Агар $a \neq 0$ бўлса, (92) тенглама (91) га эквивалент эканлигини кўрсатамиз. Шу мақсадда (92) тенгламани

$$ML\varphi - Mf = 0 \quad \text{ёки} \quad M(L\varphi - f) = 0$$

кўринишда ёзиб оламиз. $L\varphi - f = \omega$ белгилашни киритсак, $M\omega = 0$ ёки тўлиқроқ ёзсак,

$$a\omega(s) - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma = 0$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг ҳар икки томонига

$$L\psi = a\psi(s) + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma$$

операторни қўллаймиз. У ҳолда $\omega(s)$ функция қаноатлантириши зарур бўлган

$$a\left[a\omega(s) - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma\right] +$$

$$+ \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\theta - s}{2}\,d\theta\left[a\omega(\theta) - \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - \theta}{2}\,d\sigma\right] = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан дарҳол (89) формулани қўллаб,

$$(a^2 + b^2)\omega(s) - \frac{b^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\sigma)d\sigma = 0$$

тенгламага келамиз. Охирги тенгламадан $\omega(s)=\text{const}$ эканлиги келиб чиқади. Аввалги тенгламага $\omega(s)=\omega(\sigma)=c$ ни қўйиб, $a^2c=0$ ёки $c=0$ ни ҳосил қиламиз.

Демак, $\omega(s)=0$ ёки $L\varphi-f=0$, яъни (92) тенгламадан (91) тенглама келиб чиқди. Иккинчи томондан, юқорида кўрдикки, (91) тенгламадан (92) тенглама келиб чиққан эди.

Шундай қилиб, бу тенгламаларнинг эквивалентлиги исбот бўлди.

(92) тенгламанинг ечимини 3- § нинг 1- бандида кўрсатилган усул билан топиб олиш қийин эмас.

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)d\sigma=c$$

деб белгиласак, (92) тенгламадан

$$\varphi(s)=\frac{F(s)}{a^2+b^2}+\frac{b^2c}{2\pi(a^2+b^2)} \tag{93}$$

ни ҳосил қиламиз. $\varphi(s)$ нинг бу қийматини (92) тенгламага қўйиб c ни топамиз:

$$c=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}F(\sigma)d\sigma\,.$$

Бу c ни (93) га қўйиб, $\varphi(s)$ нинг ифодасини эътиборга олсак, (91) тенгламанинг изланаётган ечимини топамиз:

$$\varphi(s)=\frac{af(s)}{a^2+b^2}-\frac{b}{2\pi(a^2+b^2)}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}ds+ \\ +\frac{b^2}{2\pi a(a^2+b^2)}\int_0^{2\pi}f(\sigma)d\sigma. \tag{94}$$

Агар $a^2+b^2=0$ бўлса, исбот қилиш мумкинки, (91) тенглама умумий ҳолда ечимга эга бўлмайди.

Агар $a=0$ бўлса, (94) формула ярамайди, бу ҳолни биз $b=1$ деб ҳисоблаб, юқорида кўрган эдик.

$a(s)$, $b(s)$ функциялар ўзгармас бўлган ҳолда (90) тенгламанинг ҳар икки томонига M операторни қўллаб, уни эквивалент бўлган Фредгольм тенгламасига келтириш мумкин.

Умумий ҳолда (90) тенгламанинг ҳар икки томонига ушбу

$$M\omega = a(s)\omega(s) - \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\, d\sigma$$

операторни қўллаб, Фредгольм типидаги тенгламани ҳосил қиламиз. Лекин бу тенглама (90) тенгламага эквивалент бўлмаслиги мумкин. Яна шуни уқтириб ўтамизки, умумий кўринишдаги (90) тенгламанинг ҳамма хоссаларини текширишга ҳожат йўқ, чунки бу тенгламани Коши ядроли тенгламага келтириш мумкин [15].

III БОБ
ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Тўлқин тенгламаси

1. Тор тебраниш тенгламаси. Даламбер формуласи. Маълумки, торнинг эркин тебраниши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

тенглама билан тасвирланади. (1) тенгламанинг характеристикалари тенгламаси

$$dx^2-a^2dt^2=0$$

дан иборат. Бундан дархол (1) тенгламанинг характеристикалари $x-at=c_1$, $x+at=c_2$, $c_1, c_2-\text{const}$, тўғри чизиқлардан иборат эканлиги келиб чиқади.

Умумий назарияга асосан

$$\xi=x-at\,, \qquad \eta=x+at$$

деб белгилаб оламиз.

Бу янги ўзгарувчиларга нисбатан (1) тенглама

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \qquad (2)$$

тенгламага келади. (2) тенгламани

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бундан

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=f(\eta),$$

бу ерда $f(\eta)$ — ихтиёрий функция.

Ҳосил бўлган тенгламани, ξ ни параметр деб қараб, η бўйича интеграллаймиз, у ҳолда

$$u(\xi,\eta) = \int f(\eta)d\eta + f_1(\xi).$$

Ушбу

$$\int f(\eta)d\eta = f_2(\eta)$$

белгилашни киритиб,

$$u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бунда $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ — ихтиёрий функциялар.

Эски x ва t ўзгарувчиларга қайтсак, аввалги формула

$$u(x,t) = f_1(x-at) + f_2(x+at) \tag{3}$$

кўринишда ёзилади.

Агар f_1, f_2 икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар бўлса, (3) формула билан аниқланган $u(x, t)$ функция (1) тенгламанинг ечими эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. (1) тенгламанинг (3) ечими *Даламбер ечими* дейилади.

Бу ечимдан фойдаланиб, чегараланмаган тор учун Коши масаласини, яъни ушбу

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{4}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи (1) тенгламанинг ечимини топиш қийин эмас.

Бу масаланинг ечими мавжуд деб фараз қиламиз. У ҳолда, бу ечим (3) формула билан аниқланади (чунки у умумий ечим). (3) формуладаги f_1 ва f_2 функцияларни шундай топамизки, натижада (4) бошланғич шартлар қаноатлантирилсин, яъни

$$\begin{aligned} &u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = af_1'(x) + af_2'(x) = \varphi_1(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Иккинчи тенгликни интеграллаб,

$$-f_1(x)+f_2(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(s)\,ds+C \qquad (6)$$

ни ҳосил қиламиз, C — бирор ўзгармас.

(5) тенгликнинг биринчисидан ва (6) дан

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(s)\,ds-\frac{C}{2},$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(s)\,ds+\frac{C}{2}.$$

f_1 ва f_2 нинг бу қийматларини (3) формулага қўйиб, ушбу

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(s)\,ds \qquad (7)$$

формулага эга бўламиз. (7) ни *Даламбер формуласи* дейилади. Коши масаласининг ечими мавжуд деб, (7) формулани келтириб чиқардик.

Агар берилган функциялардан $\varphi(x)$ икки марта, $\varphi_1(x)$ эса бир марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, (7) формула билан аниқланган $u(x, t)$ функциянинг (1) тенгламани ва (4) бошланғич шартларни қаноатлантиришини текшириб кўриш қийин эмас. Бу масаланинг ягоналиги (7) формулани келтириб чиқариш усулидан дарҳол келиб чиқади. (7) формула билан аниқланган $u(x, t)$ ечим бошланғич шартларга узлуксиз боғлиқ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ ни кўрсатиш мумкинки, $\varphi(x)$ ва $\varphi_1(x)$ ни $\varphi^1(x)$ ва $\varphi_1^1(x)$ га алмаштириш натижасида

$$\left|\varphi(x)-\varphi^1(x)\right|<\delta, \quad \left|\varphi_1(x)-\varphi_1^1(x)\right|<\delta$$

бўлсин. $\varphi^1(x)$ ва $\varphi_1^1(x)$ бошланғич шартларга мос ечимни $u_1(x, t)$ орқали белгилаб олиб, $u(x, t)-u_1(x, t)$ айирмани баҳолаймиз:

$$\left|u(x,t)-u_1(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\left|\varphi(x-at)-\varphi^1(x-at)\right| +$$
$$+\frac{1}{2}\left|\varphi(x+at)-\varphi^1(x+at)\right| +$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\left|\varphi_1(s)-\varphi_1^1(s)\right|ds < \delta+\delta t.$$

t бирор чекли ораликда ўзгарганда (яъни $t \in [0;\ t_0]$ да) δ ни $\delta < \frac{\varepsilon}{1+t}$ шартни қаноатлантирадиган қилиб танлаб олсак,

$$\left|u(x,t)-u_1(x,t)\right| < \varepsilon, \qquad 0 \le t \le t_0.$$

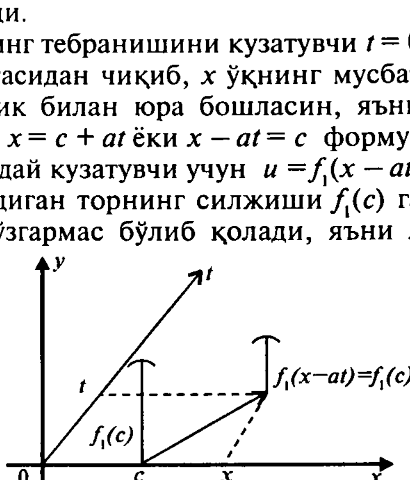
тенгсизликни ҳосил қиламиз. Демак, (1), (4) масала коррект қўйилган масала экан.

Энди (7) ечимнинг физик маъносини аниқлаймиз. Шу мақсадда аввал (3) формулага мурожаат қиламиз. Аввало $f_2 = 0$ бўлган хусусий ҳолни кўрамиз, яъни торнинг силжиши

$$u\ (x,\ t) = f_1(x-at)$$

формула билан аниқланади.

Фараз қилайлик, торнинг тебранишини кузатувчи $t = 0$ вақтда торнинг $x = c$ нуқтасидан чиқиб, x ўқнинг мусбат йўналиши бўйича a тезлик билан юра бошласин, яъни унинг абсциссаси t вақтда $x = c + at$ ёки $x - at = c$ формула билан аниқланади. Бундай кузатувчи учун $u = f_1(x - at)$ формула билан аниқланадиган торнинг силжиши $f_1(c)$ га тенг бўлиб, ҳамма вақт ўзгармас бўлиб қолади, яъни x ўқнинг мусбат томонига қараб a тезлик билан ҳаракат қилган киши торнинг нуқтасини ҳар доим $f_1(c)$ баландликда кўриши керак. Демак, тор ҳам ўнг томонга қараб a тезлик билан ҳаракат қилар экан (8- чизма).



8- чизма

$u = f_1(x - at)$ функция билан тасвирланадиган ҳодиса *тўғри тўлқиннинг тарқалиши* дейилади.

Худди шунга ўхшаш, $u = f_2(x + at)$ ечим *тескари тўлқинни* ифодалайди, бу тўлқин x ўқнинг манфий йўналиш u бўйича a тезликда тарқалади. Бошланғич импульс, яъни тор нуқталарининг бошланғич тезлиги нолга тенг бўлсин, $\varphi_1(x) = 0$. Бу ҳолда ечим

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)\right] \tag{8}$$

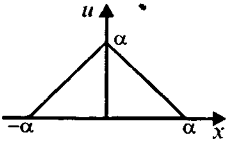
формула билан ифодаланади. Бу формуладан ечим тўғри $\varphi(x - at)$ ва тескари $\varphi(x + at)$ тўлқинларнинг ўрта арифметик қийматидан иборат эканлиги келиб чиқади. Бунинг графигини чизиш учун одатда бундай қилинади: $t = 0$ вақтда $u = \varphi(x)$ функция графигининг иккита бир хил нусхасини ясаб, устма-уст қўйилади. Сўнгра икки томонга a тезликда сурилади. Торнинг t вақтдаги графиги юқоридаги графикларнинг ўрта арифметиги сифатида ҳосил бўлади, яъни торнинг бу графиги t вақтда сурилган графиклар орасидаги ордината кесмаларини иккига бўлади.

Мисол учун бошланғич вақтда тор учбурчак шаклда бўлсин (9- чизма).

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & (-\alpha, \alpha) \text{ дан ташқарида бўлганда} \\ x + \alpha, & -\alpha \le x \le 0 \\ -x + \alpha, & 0 \le x \le \alpha. \end{cases}$$

10 - чизмаларда торнинг

$$t = \frac{\alpha}{4a}, \frac{\alpha}{2a}, \frac{\alpha}{a}, \frac{2\alpha}{a}$$

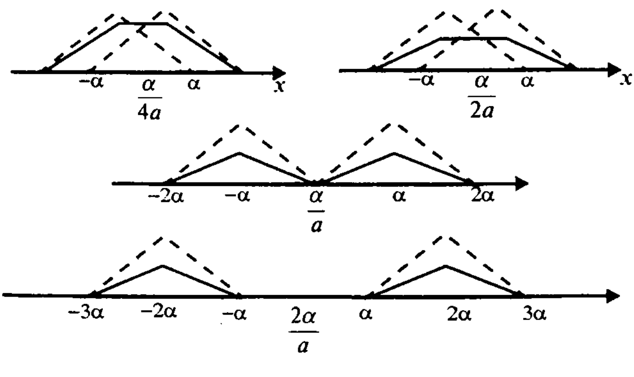


9- чизма

вақтлардаги графиги тасвирланган.

Бу чизмалардан кўриняптики, $t < \frac{\alpha}{a}$ бўлганда икки тўлқиннинг устма-уст тушадиган қисми бор; $t = \frac{\alpha}{a}$ вақтдан бошлаб, бу тўлқинлар устма-уст тушмайди ва турли томонга қараб узоқлашади.

Фараз қилайлик, $\varphi(x)$ функция бошланғич вақтда бирор $(-\alpha, \alpha)$ кесмада нолдан фарқли бўлиб, бундан ташқарида нолга тенг бўлсин. Юқорида айтилганларга асосан тайин x абсциссали тор нуқтасининг тебраниш характери тўғрисида гапириш мумкин. Агар $x > \alpha$ бўлса, бошланғич вақтда торнинг нуқтаси абсцисса ўқида ётган бўлиб, у бошланғич силжишда иштирок этмайди. Ўнг томонга қараб ҳаракат қилаётган тўлқин $t_1 = \frac{x-\alpha}{a}$ вақтда бу нуқтага етиб келади ва бу нуқтадан бошлаб торнинг нуқтаси тебрана бошлайди. Тўлқин текшираётган нуқтадан ўтиб кетиши биланоқ, яъни $t_2 = \frac{x+\alpha}{a}$ вақтдан бошлаб, бу нуқта яна тинч ҳолатда бўлади. t_1 вақтда x нуқтага тўлқиннинг *олдинги фронти,* t_2 вақтда эса — *орқа фронт* етиб боради. Шундай қилиб, торнинг текширилаётган нуқтаси $\frac{x-\alpha}{a} < t < \frac{x+\alpha}{a}$ ёки $-\alpha < x - at < \alpha$ оралиқда тебраниш жараёнида иштирок этади. Агар $0 < x < \alpha$ бўлса, нуқта орқали тўғри ва тескари тўлқинлар ўтади. Икки тўлқиннинг олдинги фронти нуқтанинг олдида жойлашган бўлади; тескари тўлқиннинг орқа фронти нуқта орқали $t_1 = \frac{\alpha-x}{a}$ вақтда, тўғри тўлқиннинг орқа фронти эса $t_2 = \frac{\alpha+x}{a}$ вақтда ўтади. $t > t_2$ бўлганда торнинг нуқтаси тинч ҳолатда бўлади, яъни x ўқда ётади.



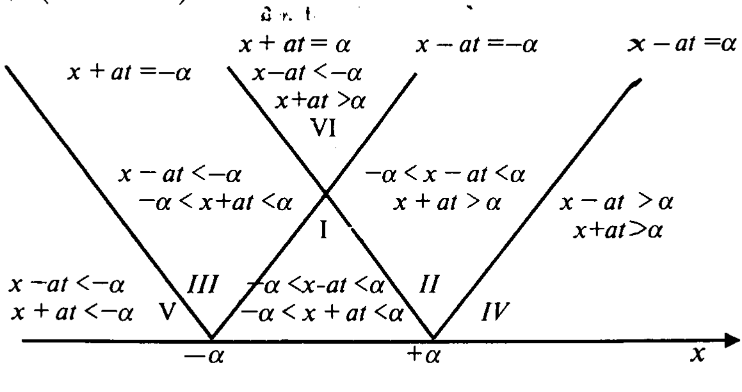
10- чизма

Худди шунга ўхшаш, $-\alpha < x + at < \alpha$ бўлганда нуқталар тебраниш жараёнида иштирок этади; агар $-\alpha < x < 0$ бўлса, нуқта орқали тескари тўлқиннинг орқа фронти ўтиб бўлганда, яъни $t = \frac{\alpha - x}{a}$ да, тебранишлар тугайди.

Агар текисликда x ва t ўзгарувчиларнинг Декарт координат системасини чизиб олсак, юқорида баён қилинган жараённи яққол тасвирлаш мумкин. Текисликдаги ҳар бир (x,t) нуқта t вақтдаги абсциссаси x бўлган торнинг нуқтасига мос келади. Хусусий ҳолда, абсцисса ($t = 0$) ўқининг нуқталари бошланғич вақтдаги торнинг нуқталарига мос келади.

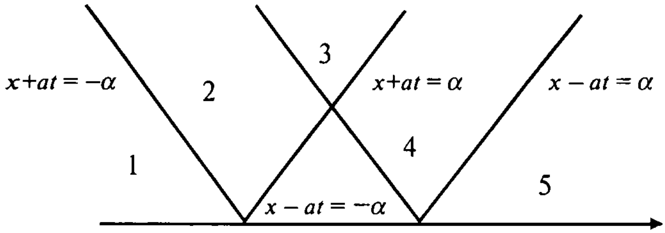
Биз юқорида кўрдикки, агар $-\alpha < x - at < \alpha$ бўлса, x нуқтадан t вақтда тўғри тўлқин, агарда $-\alpha < x + at < \alpha$ бўлса, тескари тўлқин ўтади.

Текисликда $x - at = \pm\alpha$, $x + at = \pm\alpha$ тўғри чизиқларни, яъни (1) тенгламанинг характеристикаларини чизиб оламиз. Бу ҳолда $t \geq 0$ ярим текислик олти қисмга ажралади (11- чизма).



11- чизма

Бу чизмада битта x ўқи кўрсатилган. Тебраниш фақат I, II ва III зоналардагина содир бўлади, II зонада тўғри тўлқин, III да тескари тўлқин, I да эса у ҳам, бу ҳам ҳаракат қилади. IV ва V зоналарга мос нуқталарда ҳозирча тебраниш йўқ, чунки буларга тўғри (IV зона), тескари (V зона) тўлқинларнинг олдинги фронтлари етиб келмаган, VI зо-



12- чизма

нага мос нуқталарда эса тебраниш йўқ, чунки булар орқали иккала тўлқиннинг ҳам орқа фронтлари ўтиб кетган.

Юқоридагиларга асосан, қисқа қилиб, *тўлқинлар характеристикалар бўйича тарқалади* деб айтиш мумкин.

Бошланғич силжиш нолга тенг, яъни $\varphi(x)=0$ бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда Даламбер формуласи

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi_1(s)\,ds \tag{9}$$

кўринишга эга бўлади. $\frac{1}{2a}\varphi_1(x)$ функциянинг бошланғич функциясини $\Phi_1(x)$ орқали белгилаб оламиз, яъни

$$\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\varphi_1(s)\,ds=\Phi_1(x).$$

Бунга асосан (9) формула

$$u(x,t)=\Phi_1(x+at)-\Phi_1(x-at)$$

кўринишда ёзилади. Бундан кўринадики, бу ҳолда ҳам тўғри ва тескари тўлқинларнинг тарқалишига эга бўламиз.

Фараз қилайлик, $\varphi_1(x)$ $-\alpha\le x\le\alpha$ оралиқда нолдан фарқли мусбат функция бўлсин, бу оралиқдан ташқарида эса нолга тенг бўлсин. $(-\infty,+\infty)$ оралиқни бешта бўлакка ажратамиз (12- чизма).

1. $(-\infty,\ -at-\alpha)$, 2. $(-at-\alpha,\ -at+\alpha)$,
3. $(-at+\alpha,\ at-\alpha)$, 4. $(at-\alpha,\ at+\alpha)$, 5. $(at+\alpha,\ +\infty)$.

Торнинг тебринишини $t > \frac{\alpha}{2}$ вақтдан бошлаб текширамиз. x биринчи ораликда ўзгарганда (9) интегралнинг юқори чегараси $-\alpha$ дан кичик бўлади, барча интеграллаш оралиғи $(-\alpha, \alpha)$ дан ташқарида ётади, бу ерда $\varphi_1(x) = 0$ бўлгани учун u ҳам нольга тенг бўлади. Худди шунга ўхшаш, бешинчи ораликда ҳам $u = 0$. x иккинчи ораликда ўзгарганда

$$-at - \alpha < x < -at + \alpha \quad \text{ёки} \quad -\alpha < x + at < \alpha$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Иккинчи томондан $t > \frac{\alpha}{2}$ бўлгани учун

$$-2at < -2\alpha$$

бўлади. Охирги икки тенгсизликни қўшиб,

$$x - at < -\alpha$$

ни ҳосил қиламиз.

Бунга асосан (9) формуладан

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{-\alpha} \varphi_1(s)\,ds + \frac{1}{2a}\int_{-\alpha}^{x+at} \varphi_1(s)\,ds = \frac{1}{2a}\int_{-\alpha}^{x+at} \varphi_1(s)\,ds$$

келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш, x тўртинчи ораликда ўзгарганда

$$u = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{\alpha} \varphi_1(s)\,ds$$

га эга бўламиз. Ва ниҳоят x учинчи ораликда ўзгарганда

$$x - at < -\alpha \quad \text{ва} \quad x + at > \alpha$$

тенгсизликлар ўринли бўлади, яъни

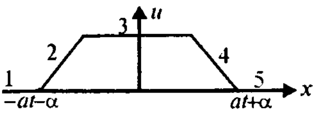
$$(-\alpha, \alpha) \subset (x - at,\ x + at).$$

Бундан

$$u = \frac{1}{2a}\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_1(s)\,ds \tag{10}$$

ҳосил бўлади, яъни бу ҳолда u миқдор ўзгармасдан иборат.

Юқоридагиларга асосан, бирор $t > \frac{\alpha}{2}$ вақтдаги торнинг шаклини қуйидагича ифодалаш мумкин. 3 бўлак x ўқидан (10) нинг ўнг томонига тенг бўлган масофада турувчи тўғри чизиқнинг қисмидан иборат (13- чизма).



13- чизма

Торнинг бу қисмидан тўғри ва тескари тўлқинлар ўтиб кетган бўлиб, бу вақтда тўғри тўлқин 4 бўлакдан,тескариси эса 2 дан ўтаётган бўлади. 1 ва 5 бўлаклар тинч ҳолатда бўлади, чунки бу ерга ҳали тўлқинлар етиб келмаган. 3 бўлакдан ўтган тўлқинлар ўзи ўтганлиги тўғрисида гўёки из қолдириб кетади. Бу бўлакнинг нуқталари бир хил масофага силжиган ҳолда қолади. Бу ерда ажралиб турадиган нарса шундан иборатки, тўлқинларнинг олдинги фронти аниқ бўлади,

13- чизмада $-at-\alpha$ ва $at+\alpha$ нуқталар билан кўрсатилган, тўлқинларнинг орқа фронти бўлмайди, яъни *тўлқинларнинг диффузияси* содир бўлади деб айтилади.

2. Чегараланган тор. Узунлиги l га тенг ва икки чети мустаҳкамланган торни текширамиз. Бундай торнинг тебраниши тўғрисидаги масала (1) тенгламанинг (4) бошланғич шартлардан ташқари

$$u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=l}=0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишга келади. Бу ҳолда, равшанки, $\varphi(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функциялар фақат $0 \le x \le l$ оралиқда берилган. Бу масалани ечишда ҳам (3) Даламбер ечимидан фойдаланиш мумкин, аммо берилган $\varphi(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функциялар $0 \le x \le l$ оралиқда аниқланган бўлгани учун бу функциялар орқали топилган $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар ҳам шу оралиқда аниқланган бўлади.

Демак, (3) формуладан фойдаланиш мумкин бўлиши учун $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларни ёки тўла эквивалент бўлгани сабабли $\varphi(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функцияларни $(0, l)$ оралиқдан ташқарига давом эттириш зарур бўлади. $\varphi(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функцияларни давом эттириш учун чегаравий шартлардан фойдаланамиз. (3) формуланинг ўнг томонига $x=0$ ва $x=1$ ни қўйиб,

$$f_1(-at)+f_2(at)=0,\quad f_1(l-at)+f_2(l+at)=0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз ёки at ни x орқали белгилаб олсак,

$$f_1(-x)=-f_2(x),\qquad f_2(l+x)=-f_1(l-x) \tag{11}$$

тенгликларга эга бўламиз. x аргумент $(0, l)$ оралиқда ўзгарганда (11) формулалардан биринчиси $f_1(x)$ функцияни $(-l, 0)$ оралиқда, иккинчиси эса, $f_2(x)$ функцияни $(l, 2l)$ оралиқда аниқлайди. Демак, иккови $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар узунлиги $2l$ га тенг бўлган оралиқда тўла аниқланади. Сўнгра, (11) дан қуйидаги тенгликлар келиб чиқади:

$$f_2(x+2l)=-f_1(-x)=f_2(x)\ ,\qquad f_1(x+2l)=f_1(x)$$

яъни $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ лар даври $2l$ га тенг бўлган даврий функциялардир. Шундай қилиб, $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар барча ҳақиқий x лар учун аниқланди. Бошланғич шартларга асосан,

$$\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x),\ \varphi_1(x)=a\left[f_2'(x)-f_1'(x)\right].$$

Булардан дарҳол

$$\varphi(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=-f_2(x)-f_1(x)=-\varphi(x),$$

$$\varphi_1(-x)=a\left[f_2'(-x)-f_1'(-x)\right]=a\left[f_1'(x)-f_2'(x)\right]=-\varphi_1(x),$$

$$\varphi(x+2l)=\varphi(x),\qquad \varphi_1(x+2l)=\varphi_1(x)$$

тенгликлар келиб чиқади. Бу формулалар шуни кўрсатадики, $\varphi(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функциялар $(0, l)$ оралиқдан $(-l, 0)$ оралиққа тоқлик қонуни бўйича $2l$ давр билан давом этади.

Муҳим бир хулосага тўхталиб ўтамиз.

Агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар ўзларининг иккинчи тартибгача ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлгандагина, (3) тенглик билан аниқланган функция (1) тенгламани қаноатлантиради. Чегараланган тор учун биз ҳосил қилган ечим шу хоссаларга эга бўладими деган савол туғилади. Бундай бўлиши учун давом эттирилган $\varphi(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функциялар

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0$$

шартларни қаноатлантириши зарур. Бу эса бошланғич ва чегаравий шартларнинг мувофиқлаштириш шартидан иборатдир.

3. Тўлқин тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг ягоналиги. Ушбу

$$\square_a u(x, t) = f(x, t) \tag{12}$$

тўлқин тенгламасини текширамиз. (12) тенгламанинг характеристикалари тенгламаси

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

дан иборатдир. Текшириб кўриш қийин эмаски, учи (x_0, t_0) нуқтада бўлган характеристик конус деб аталувчи

$$-a^2(t - t_0)^2 + |x - x_0|^2 = 0 \tag{13}$$

сирт (12) тенгламанинг характеристикасидир. Энди характеристик сиртга ўтказилган ташқи n нормалнинг йўналишини топамиз.

Соддалик учун $a = 1$ деб ҳисоблаймиз. Бу нормал t ўқ билан ўткир бурчак ҳосил қилиб, бу бурчакнинг косинуси мусбат бўлади. (13) тенгликнинг чап томонини $\omega(x, t)$ орқали белгилаб олсак, дифференциал геометриядан маълум бўлган формулага асосан

$$\cos(n,t) = -\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2}} =$$

$$= \frac{2(t-t_0)}{\sqrt{4(t-t_0)^2 + 4|x-x_0|^2}} = \frac{2(t-t_0)}{\sqrt{8(t-t_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Бу тенгликдан қуйидаги муҳим муносабат келиб чиқади

$$\sum_{i=1}^{n}\cos^2(n, x_i) + \cos^2(n, t) = 1$$

ёки

$$\sum_{i=1}^{n} \cos^2(n, x_i) = 1 - \cos^2(n, t) = \frac{1}{2}. \qquad (14)$$

Демак, n ташқи нормал характеристик конуснинг Ot ўқи билан 45° бурчак ташкил қилар экан. Бундан дарҳол, характеристик конус ясовчиларининг ҳам Ot ўқ билан 45° бурчак ташкил қилиши келиб чиқади.

$t = \text{const}$ текисликлар (12) тенглама учун характеристик сирт бўлмагани сабабли, $t = \text{const}$ да Коши шартларини бериш мумкин.

Коши масаласи. Шундай $u(x, t)$ функция топилсинки, у $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ синфга тегишли бўлиб, $t > 0$ ярим фазода (12) тенгламани ва $t = +0$ да

$$u|_{t=+0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+0} = \varphi_1(x) \qquad (15)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирсин.

Бу масала ечимининг ягоналигини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, E^n фазодаги бирор ёпиқ $|x - x_0|^2 \leq t_0^2$ шарда (12) тенглама учун қўйилган иккита Коши масаласининг бошланғич функциялари устма-уст тушсин.

Агар иккала масала ҳам биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари билан узлуксиз бўлган ечимга эга бўлса, у ҳолда бу ечимлар $t > 0$ ярим фазода учи (x_0, t_0) нуқтадаги характеристик конуснинг ичида ва чегарасида устма-уст тушади.

Бу икки ечимни $u_1(x, t)$ ва $u_2(x, t)$ орқали белгиласак, бу функциялар (12) тенгламани ва (15) бошланғич шартларни қаноатлантиради. У ҳолда буларнинг айирмаси, яъни

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

функция

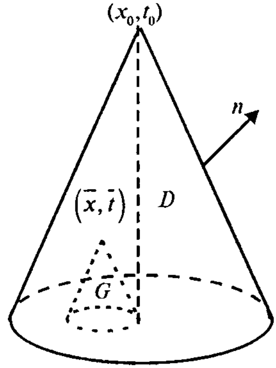
$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (16)$$

тенгламани ($a = 1$ деб ҳисоблаймиз) ва

$$u|_{t=+0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+0} = 0, \quad |x - x_0|^2 \leq t_0^2 \qquad (17)$$

бошланғич шартларни қаноатлантиради. $|x-x_0|^2 \le t_0^2$ шардан ташқарида $u|_{t=+0}$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+0}$ функциялар қийматларининг қандай бўлиши биз учун фарқи йўқ.

$(x,\ t)$ нуқталарнинг E^{n+1} фазосида $t_0-t=|x-x_0|$ характеристик конус ва $t=0$ гипертекислик билан чегараланган D соҳани текширамиз. Бу соҳанинг ичида ёки чегарасида ихтиёрий $(\bar{x},\bar{t})$ нуқта олиб, $K: \bar{t}-t=|x-\bar{x}_0|$ характеристик конус ҳосил қиламиз (14-чизма).



14- чизма

Бу янги конус ва $t=0$ гипертекислик билан чегараланган соҳани G орқали белгилаймиз. G соҳа $t=0$ гипертекисликда аввалги $|x-x_0|^2 \le t_0^2$ шарнинг бир қисми бўлган $Q: |x-\bar{x}| \le \bar{t}^2$ шар билан чегараланган. Бу янги шарда (17) шартлар ўринли бўлади. (16) тенгламанинг ҳар икки томонини $\frac{\partial u}{\partial t}$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгликни G соҳа бўйича интеграллаймиз:

$$\int_G \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u\right)dxdt=0.$$

Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$$

айниятларни эътиборга олиб, аввалги тенгликни бундай ёзиб оламиз:

$$\int_G \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\}dxdt=0.$$

Бу интегралга Гаусс — Остроградский формуласини қўллаб,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q\cup K}\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]\cos(n,t)-\right.$$
$$\left.-2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,x_i)\right\}ds=0 \tag{18}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда G соҳа $Q \cup K$ чегарасининг элементи ds орқали белгилаб олинди. (17) бошланғич шартларга асосан Q шарда $\frac{\partial u}{\partial t}\equiv 0$, $u\equiv 0$ айниятлар бажарилади. Охирги айниятни x_i ўзгарувчи бўйича дифференциаллаб, Q шарда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\equiv 0, \qquad i=1,2,\dots,n$$

айниятни ҳосил қиламиз.

Демак (18) тенгликда Q шар бўйича олинган интеграл нолга айланиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int\limits_K\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]\cos(n,t)-2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,\ x_i)\right\}ds=0.$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини ўзгармас $\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos(n,t)$ га кўпайтирамиз ва (14) муносабатни эътиборга олиб,

$$\int\limits_K\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\cos^2(n,x_i)+\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\cos^2(n,t)-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,x_i)\cos(n,t)\right]ds=0$$

ёки

$$\int\limits_K\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\cos(n,x_i)-\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,t)\right]^2 ds=0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан K конусда

$$\frac{\partial u}{\partial t}\cos(n,x_i)-\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,t)=0, \qquad i=1,2,3,\dots,n$$

тенглик келиб чиқади.

Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \cos(n, x_1) = \ldots = \frac{\partial u}{\partial x_n} : \cos(n, x_n) = \frac{\partial u}{\partial t} : \cos(n, t) = \upsilon .$$

Агар K конус ихтиёрий ясовчисининг йўналишини l орқали белгиласак, олдинги тенгликка асосан,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial t}\cos(l, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(l, x_i) =$$

$$= \upsilon\left[\cos(n,t)\cos(l,t) + \sum_{i=1}^{n}\cos(l,x_i)\cos(n,x_i)\right] = \upsilon\cos(n,l) = 0$$

тенгликка эга бўламиз, чунки конуснинг ясовчиси конус сиртига ўтказилган нормал билан ҳамма вақт тўғри бурчак ташкил қилгани учун $\cos(n, l) = 0$.

Бундан K конуснинг ихтиёрий ясовчисида $u = \text{const}$ эканлиги келиб чиқади. Жумладан, $u(x,t)$ функциянинг конуснинг (x, t) учидаги қиймати, l ясовчисининг $t = 0$ гипертекисликда ётувчи нуқтасидаги қиймати билан устма-уст тушади. Лекин бу нуқтада (17) шартга асосан $u = 0$. Бундан $u(x, t) = 0$. (x, t) нуқта D соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлгани учун, $(x,t) \in D$, $u(x,t) = 0$ бўлади.

Шу билан тўлқин тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг ягоналиги исбот бўлди.

Бу ягоналик $t < 0$ бўлган ҳолда ҳам ўз кучини сақлайди, яъни D соҳа $|x - x_0|^2 \le t_0^2$ шар ва ясовчилари Ot ўқ билан — 45° бурчак ташкил қилиб, $t < 0$ ярим фазода ётувчи $|x - x_0| = t_0 - t$ характеристик конус билан чегараланган бўлса ҳам ечим бу соҳада бирдан-бир аниқланади.

$u(x,t)$ функция (12) тенгламага $(a = 1)$ қўйилган Коши масаласининг ечими бўлиб, тенгламанинг ўнг томони $f(x, t)$ тайинланган функция бўлсин.

Исботланган теоремадан шундай нарса келиб чиқадики, $u(x, t)$ функциянинг ихтиёрий (x_0, t_0) нуқтадаги қиймати бошланғич функцияларнинг фақат $|x - x_0|^2 \le t_0^2$ шардаги қийматлари орқали аниқланади.

Бу шар (x_0, t_0) нуқта учун *боғлиқлик соҳаси* дейилади.

Агар $a \neq 1$ бўлса, (x_0, t_0) нуқта учун боғлиқлик соҳаси $|x - x_0|^2 \leq a^2 t_0^2$ шардан иборат бўлади.

Изоҳ. u ва $\frac{\partial u}{\partial t}$ лар қийматларининг $|x - x_0|^2 \leq t_0^2$ шарда берилиши, $u(x, t)$ ечимнинг $|x - x_0|^2 \leq t_0^2$ асосга эга бўлган, ясовчилари Ot ўқ билан $\pm 45°$ бурчак ташкил қилувчи ва ўқи Ot га параллел бўлган конуслардан ташқарида ётувчи ҳеч қандай A нуқтада аниқламайди.

Буни исботлаш учун шундай $\tilde{u}(x,t)$ ечим мавжуд бўлиб, $\tilde{u}$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$ лар $|x - x_0|^2 \leq t_0^2$ шарда нолга тенг бўлса ҳам $\tilde{u}(A) \neq 0$ бўлишини кўрсатиш етарлидир.

$F(\lambda)$ ихтиёрий икки марта дифференциалланувчи функция бўлиб,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1, \qquad \alpha_i = \text{const} \tag{19}$$

бўлса,

$$F\left(t + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \tag{20}$$

функция (16) тенгламани қаноатлантиради.

Ҳақиқатан,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F'\left(t + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right), \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \alpha_i F'\left(t + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = F''\left(t + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_i} = \alpha_i^2 F''\left(t + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right).$$

Бундан дарҳол, (19) шартга асосан

$$\square F = F'' - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 F'' = 0.$$

(20) функция ҳар қандай

$$t + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = C, \; C = \text{const} \tag{21}$$

гипертекисликда ўзгармас қийматга эга бўлиб, (21) гипертекисликларнинг ҳар бири Ot ўқ билан 45° бурчак ташкил қилади. Ўзгармас α_i сонларни шундай танлаб оламизки, (21) гипертекисликлар оиласининг A нуқтадан ўтадиган гипертекислиги $|x - x_0|^2 \le t_0^2$ шарни кесиб ўтмасин. Бундан сўнг, $F(\lambda)$ функцияни шундай танлаб олиш мумкинки, $F\left(t + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$ функция A нуқтада нолдан фарқли бўлиб, $|x - x_0|^2 \le t_0^2$ шарда нолга тенг бўлсин. У ҳолда

$$\tilde{u}(x,t) = F\left(t + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$$

изланган ечим бўлади.

4. Коши масаласи ечимини берадиган формулалар. Уч ўлчовли

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \tag{22}$$

тўлқин тенгламасини текширамиз ва унинг

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \; x = (x_1, x_2, x_3) \tag{23}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини излаймиз.

Берилган $\varphi(x)$ функция учинчи тартибгача, $\psi(x)$ эса иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга деб ҳисоблаймиз.

Маркази $x = (x_1, x_2, x_3)$ нуқтада ва радиуси $r = at$ бўлган $|y - x| = r^2$ сферани S_r орқали белгилаб оламиз.

Агар $\mu(x)$ — S_r да берилган икки марта узлуксиз дифференциалланувчи ихтиёрий функция бўлса,

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a} \int\limits_{S_r} \frac{\mu(y_1, y_2, y_3)}{r} dS_r$$

интеграл (22) *тенгламанинг ечими бўлади ҳамда*

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \mu(x)$$

шартларни қаноатлантиради.

y_i ўзгарувчилар ўрнига $y_i - x_i = \xi_i r$, $i = 1,2,3$ формулалар орқали янги ξ_i ўзгарувчиларни киритамиз. (ξ_1, ξ_2, ξ_3) лар $|\xi| = 1$ сфера радиусларининг йўналтирувчи косинуслари, яъни

$$\xi_1 = \sin\theta\cos\gamma, \quad \xi_2 = \sin\theta\sin\gamma, \quad \xi_3 = \cos\theta$$

бунда θ бурчак 0 дан π гача, γ бурчак эса 0 дан 2π гача ўзгаради. $y = (y_1, y_2, y_3)$ нуқта S_r сферани чизганда $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ нуқта маркази координата бошида ва радиуси бирга тенг бўлган S_1 бирлик сферани чизади, шу билан бирга

$$dS_r = r^2 dS_1 = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\gamma^* .$$

Бунга асосан, (23) интегрални

$$u(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int\limits_{S_1} \mu(x_1 + \xi_1 r, x_2 + \xi_2 r, x_3 + \xi_3 r)\, dS_1$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бундан дарҳол

$$u|_{t=0} = 0$$

эканлиги келиб чиқади. $\frac{\partial u}{\partial t}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1} \mu\, dS_1 + \frac{at}{4\pi}\int\limits_{S_1}\left(\xi_1\frac{\partial\mu}{\partial y_1} + \xi_2\frac{\partial\mu}{\partial y_2} + \xi_3\frac{\partial\mu}{\partial y_3}\right)dS_1 .$$

Охирги формуладан

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \mu(x)$$

бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Энди $u(x,t)$ функциянинг (22) тенгламани қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Шу мақсадда $\frac{\partial u}{\partial t}$ ни ушбу

---

* $dS_r = \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(r, \theta, \gamma)}\, d\theta\, d\gamma$ формулага асосан.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at}\int\limits_{S_r}\left(\xi_1\frac{\partial\mu}{\partial y_1} + \xi_2\frac{\partial\mu}{\partial y_2} + \xi_3\frac{\partial\mu}{\partial y_3}\right)dS_r$$

кўринишда ёзиб оламиз. S_r сфера билан чегараланган шарни D_r орқали белгилаб, Гаусс — Остроградский формуласини қўллаймиз

$$\int\limits_{S_r}\left(\xi_1\frac{\partial\mu}{\partial y_1} + \xi_2\frac{\partial\mu}{\partial y_2} + \xi_3\frac{\partial\mu}{\partial y_3}\right)dS_r =$$
$$= \int\limits_{D_r}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\mu}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2\mu}{\partial y_3^2}\right)dy_1dy_2dy_3$$

D_r шар бўйича олинган интегрални J орқали белгилаб, ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{J}{4\pi at}$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{J}{4\pi at^2} + \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial J}{\partial t}$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$ нинг ифодасини эътиборга олиб,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial J}{\partial t}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. J нинг ифодасида y_1, y_2, y_3 декарт координаталаридан $\rho,\ \theta,\ \gamma$ сферик координаталарга ўтамиз:

$$y_1 - x_1 = \rho\sin\theta\cos\gamma, \qquad y_2 - x_2 = \rho\sin\theta\sin\gamma,$$
$$y_3 - x_3 = \rho\cos\theta,$$
$$0 \le \rho \le r,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \gamma \le 2\pi\,.$$

Ушбу

$$dy_1dy_2dy_3 = \frac{D(y_1,y_2,y_3)}{D(r,\theta,\gamma)} = \rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\gamma$$

тенгликни эътиборга олсак, J қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$J = \int_0^{at}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y_3^2}\right)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\gamma\ .$$

Бу ифодадан, дарҳол

$$\frac{\partial J}{\partial t} = a\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y_3^2}\right)_{\rho=at} a^2t^2\sin\theta d\theta d\gamma =$$

$$= a\int_{S_r}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}dS_r$$

тенгликка эга бўламиз.

Демак,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_r}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}dS_r\ . \qquad (24)$$

Иккинчи томондан, (23) га асосан

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_r}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}dS_r\ . \qquad (25)$$

(24) ва (25) тенгликлардан (23) формула билан аниқланган *u(x,t)* функциянинг (22) тенгламани қаноатлантириши келиб чиқади.

Энди $\frac{\partial u}{\partial t}$ ни $\upsilon(x,t)$ орқали белгилаб оламиз, яъни

$$\upsilon(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}\ .$$

Агар $\mu(x)$ функция S_r *сферада уч марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса,* $\upsilon(x,t)$ *функция* (22) *тенгламани ва*

$$\upsilon(x,t)\big|_{t=0} = \mu(x),\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

шартларни қаноатлантиради.

Аввал $t\to 0$ да $u(x,t)\to\mu(x)$ эканлигини кўрсатган эдик. Маълумки,

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S_r}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}dS_r .$$

$dS_r = a^2t\,^2dS_1$ эканлигини эътиборга олсак, олдинги тенгликдан

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

бўлиши дарҳол келиб чиқади.

$\upsilon\,(x,t)$ функциянинг (22) тенгламани қаноатлантиришини кўрсатиш учун

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{J}{4\pi at}$$

ифодани эътиборга олиб, $\upsilon(x,t)$ ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\upsilon\left(x,t\right)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\mu\left(x_1+\xi_1 r,x_2+\xi_2 r,x_3+\xi_3 r\right)dS_1+$$

$$+\frac{at}{4\pi}\int\limits_{S_1}\sum_{l=1}^{3}\xi_i\frac{\partial\mu}{\partial y_i}dS_1.$$

Бундан

$$\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_i^2}=\frac{l}{4\pi}\int\limits_{S_1}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}dS_1+$$

$$+\frac{at}{4\pi}\int\limits_{S_1}\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y_2}+\xi_3\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}dS_1 .$$

(24) тенгликка асосан

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S_r}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}dS_r=\frac{a^2t}{4\pi}\int\limits_{S_1}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}dS_1 .$$

Бундан

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}=\frac{a^2}{4\pi}\int\limits_{S_1}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}dS_1+\frac{a^3t}{4\pi}\int\limits_{S_1}\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y_2}+\xi_3\frac{\partial}{\partial y_3}\right)\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2\mu}{\partial y_i^2}dS_1$$

тенгликка эга бўламиз.

Охирги тенгликлардан $\upsilon(x,t)$ функциянинг (22) тенгламани қаноатлантириши дарҳол келиб чиқади.

Берилган бошланғич шартлардаги $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларга қўйилган талабларга кўра, юқорида исботланганларга асосан ушбу

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{S_r}\frac{\psi(y_1,y_2,y_3)}{r}dS_r+\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_r}\frac{\varphi(y_1,y_2,y_3)}{r}dS_r \qquad (26)$$

формула билан аниқланган $u(x,t)$ функция (22), (23) Коши масаласининг ечимидан иборатдир.

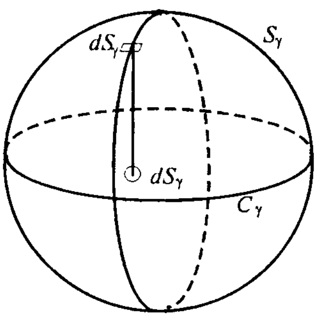
(26) формула *Кирхгоф формуласи* дейилади.

Даламбер формуласини текширганда айтганимиздек, тўлқин тенгламасининг ечими $u(x,t)$ билан тасвирланувчи физик ҳодиса *тўлқиннинг тарқалиши*, $u(x,t)$ ечимнинг ўзи эса *тўлқин* дейилади.

Тушиш методи. Агар Кирхгоф формуласидаги бошланғич функциялар φ ва ψ, x_3 ўзгарувчига боғлиқ бўлмаса, u ечим ҳам x_3 га боғлиқ бўлмайди. Бу ҳолда $u(x_1,x_2,t)$ функция

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) \qquad (27)$$

тенгламанинг ечимларидан иборат бўлади. Бошланғич функциялар x_3 ўзгарувчига боғлиқ бўлмагани учун (26) формуладаги S_r сфера бўйича олинган интегралларни, бу сферанинг x_1Ox_2 текислик билан кесишиши натижасида ҳосил бўлган C_r доира бўйича олинган интеграллар билан алмаштириш мумкин (15- чизма).



15- чизма

Сферанинг маркази $(x_1,x_2,0)$ нуқталарда бўлгани учун унинг тенгламаси

$$(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+y_3^2=r^2,\ r=at$$

кўринишда бўлади. Юқори ярим сферанинг C_r га проекциясини туширамиз, бунда

$$y_3=\sqrt{r^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}\ .$$

Маълумки, сфера юзи элементи dS_r нинг C_r доирадаги проекцияси

$$dC_r = \cos(n,x_3)dS_r$$

формула билан ифодаланади, бунда n — S_r сферанинг (y_1,y_2,y_3) нуқтадаги нормали. $\cos(n,x_3)$ ни ҳисоблаймиз:

$$\cos(n,x_3) = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(y_1-x_1)^2}{r^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}+\frac{(y_2-x_2)^2}{r^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{r^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}{r}.$$

Демак,

$$dS_r = \frac{rdC_r}{\sqrt{r^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}.$$

Қуйи ярим сферанинг ҳам худди шунга ўхшаш C_r га проекциясини туширамиз. Натижада, (26) формуладан ушбу

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{C_r}\frac{\psi(y_1,y_2)dy_1dy_2}{\sqrt{r^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{C_r}\frac{\varphi(y_1,y_2)dy_1dy_2}{\sqrt{r^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} \tag{28}$$

келиб чиқади, бунда C_r:$(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 < r^2$.

(28) тенглик *Пуассон формуласи* деб аталади.

Агар φ ва ψ бошланғич шартлар фақат битта $x = x_1$ фазовий ўзгарувчига боғлиқ бўлса, (28) формуладан дарҳол

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$$

тенглама учун

$$u|_{t=0} = \varphi(x_1),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x_1)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечим келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, (28) формулада y_1 ва y_2 ўзгарувчилар ўрнига η_1 ва η_2 ўзгарувчиларни $y_1 - x_1 = \eta_1$, $y_2 = \eta_2$ формулалар орқали киритсак, C_r доиранинг тенгламаси $\eta_1^2 + \eta_2^2 \le a^2 t^2$ дан иборат бўлади. Бу ҳолда, (28) формуладан қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{-at}^{at} \psi(x_1 + \eta_1) d\eta_1 \int\limits_{-\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}} \frac{d\eta_2}{\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-at}^{at} \varphi(x_1 + \eta_1) d\eta_1 \int\limits_{-\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}} \frac{d\eta_2}{\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{-at}^{at} \psi(x_1 + \eta_1) \arcsin \frac{\eta_2}{\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}} \Bigg|_{-\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}} d\eta_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-at}^{at} \varphi(x_1 + \eta_1) \arcsin \frac{\eta_2}{\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}} \Bigg|_{-\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{a^2t^2-\eta_1^2}} d\eta_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi(x_1 + at) + \varphi(x_1 - at)\right] + \frac{1}{2a} \int\limits_{x_1-at}^{x_1+at} \psi(s)\, ds.$$

Бизга маълум бўлган Даламбер формуласи ҳосил бўлди.

Тўлқин тенгламаси учун Коши масаласининг ечимини берувчи юқорида ҳосил қилинган формулалар бошланғич функцияларни аниқ функцияларга кўпайтириш натижасида ҳосил бўлган ифодалардан олинган интеграллар ва бундай интеграллардан вақт бўйича олинган ҳосилалардан иборат.

$n = 1$ бўлганда интеграллар фақат бошланғич функциялардан олинган. Бу ҳолда Коши масаласи ечимининг бошланғич шартларга узлуксиз боғлиқлигини кўрсатган эдик. Худди шунга ўхшаш, (26), (28) формулаларда бошланғич φ ва ψ функцияларни етарли кичик ўзгартирсак, $u(x,t)$ ечимнинг ҳам етарли кичик ўзгаришига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас, яъни *ечимнинг бошланғич шартларга узлуксиз боғлиқ бўлишига* эга бўламиз.

2- §. Бир жинсли бўлмаган тўлқин тенгламаси

1. Фазовий ўзгарувчилар учга тенг бўлган ҳол. Кечикувчан потенциал. Ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(x,t) \tag{29}$$

тенгламанинг

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Бу Коши масаласининг ечимини $u(x,t) = = \upsilon(x,t) + w(x,t)$ кўринишда излаймиз, бунда $\upsilon(x,t)$ функция (22) тенгламанинг (23) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлсин. Бундай бирдан-бир функция мавжуд бўлиб, у Крихгоф формуласи билан аниқланади.

Бу ҳолда $w(x,t)$ функция (29) тенгламани ва $w\big|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial t}\big|_{t=0} = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантиради. Шунинг учун ҳам, бошланғич шартларни аввалданоқ нолга тенг, яъни

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{30}$$

деб ҳисоблашимиз мумкин.

Шундай қилиб, асосий масала (29) тенгламанинг (30) шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишдан иборат. Бу масаланинг ечимини топиш учун қуйидаги ёрдамчи масалани текширамиз. (22) тенгламанинг ушбу

$$\upsilon\Big|_{t=\tau}=0\ ,\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=f(x,\tau) \tag{31}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Бу ерда вақтнинг бошланғич моменти учун $t = 0$ эмас, $t=\tau$ олиняпти, бунда τ — бирор параметр. (22), (31) масаланинг ечими Кирхгоф формуласи билан ифодаланади. t ни $t-\tau$ билан алмаштириб $dS_r=r^2dS_1$, $r=a(t-\tau)$, ни эътиборга олиб, S_r сферадан бирлик S_1 сферага ўтсак, бу формула

$$\upsilon(x,t,\tau)=\frac{t-\tau}{4\pi}\int\limits_{S_1}f(x_1+\xi_1r,x_2+\xi_2r,x_3+\xi_3r,\tau)dS_1$$

кўринишда бўлади.

(29), (30) масалаларнинг ечими

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\upsilon(x,t,\tau)d\tau,\quad x=(x_1,x_2,x_3) \tag{32}$$

формула билан аниқланишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\upsilon(x,t)\big|_{t=\tau}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}=\upsilon(x,t,\tau)\Big|_{t=\tau}+\int\limits_0^t\frac{\partial\upsilon}{\partial t}d\tau\ .$$

Бу тенгликдан дарҳол

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди (32) формула билан аниқланган $u(x,t)$ функциянинг (29) тенгламани қаноатлантиришини кўрсатамиз:

$$\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}=\int\limits_0^t\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_i^2}d\tau\ ,$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\Big|_{t=\tau}+\int\limits_0^t\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}d\tau=f(x,t)+\int\limits_0^t\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}d\tau\ .$$

Бу икки тенгликдан, $\upsilon(x,t)$ функция (22) тенгламанинг ечими бўлгани учун $u(x,t)$ функциянинг (29) тенгламани қаноатлантириши келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t (t-\tau)\,d\tau\int_{S_1} f\left(x_1+\xi_1 r, x_2+\xi_2 r, x_3+\xi_3 r, \tau\right)dS_1$$

тенгликка эга бўлдик.

$r=a(t-\tau)$ дан $\tau=0$ да $r=at$, $\tau=t$, $r=0$, $d\tau=-\frac{dr}{a}$ бўлишини, ҳамда $dS_1=\frac{dS_r}{r^2}$, $x_i+\xi_i r=y_i$, $i=1,2,3$ ларни эътиборга олсак, аввалги тенглик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at} r\,dr\int_{S_r} f\left(y_1,y_2,y_3,t-\frac{r}{a}\right)\frac{dS_r}{r^2}.$$

S_r сфера билан чегараланган шарни D_r орқали белгилаганимизни эсга олсак, аввалги формула ушбу

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{D_r}\frac{f\left(y_1,y_2,y_3,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dy_1dy_2dy_3 \qquad (32')$$

кўринишга эга бўлади.

(32') формуладаги f функцияда тўлқинни кузатувчи вақтдан орқада қолувчи вақтнинг $t-\frac{r}{a}$ қиймати қатнашаётгани учун (32) ифода *кечикувчи потенциал* дейилади.

2. Фазовий ўзгарувчилар сони иккита ва битта бўлган ҳол. Худди юқоридагидек, (28) формулага асосан

$$\upsilon(x_1,x_2,t,\tau)=\frac{1}{2\pi a}\int_{C_r}\frac{f(y_1,y_2,\tau)dy_1,dy_2}{\sqrt{r^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}$$

функция (27) тенгламанинг

$$\upsilon\big|_{t=\tau}=0, \qquad \frac{\partial\upsilon}{\partial t}\bigg|_{t=\tau}=f(x_1,x_2,\tau)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлгани учун ушбу

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau\int_{C_r}\frac{f(y_1,y_2,\tau)dy_1,dy_2}{\sqrt{r^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} \qquad (33)$$

ифода, бунда $r=a(t-\tau)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+f(x_1,x_2,t) \qquad (34)$$

тенгламанинг

$$u|_{t=0}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимидан иборат бўлади. Худди шунга ўхшаш бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad (35)$$

тор тенгламаси учун нолга тенг бўлган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечим

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)ds \qquad (36)$$

формула билан аниқланади.

(34), (35) тенгламаларда ва демак (33), (36) формулаларда $f(x_1,x_2,t), f(x,t)$ функциялар, мос равишда иккинчи ва биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга деб ҳисобланади.

3 - §. Коши масаласининг ечимини берувчи формулаларни текшириш

$n=3$ бўлган ҳол. Фазовий ўзгарувчилар сони $n=3$ бўлган ҳолда (26) формуладан кўринадики, (22) тўлқин тенгламаси учун Коши масаласининг ечими характеристик конус асосининг фақат чегарасидагина бошланғич функцияларга боғлиқ бўлади.

Агар $n=1$ ёки $n=2$ бўлса, Даламбер ва Пуассон формулаларидан кўриняптики, ечим бошланғич функцияларга характеристик конуснинг барча асосида боғлиқ бўлади.

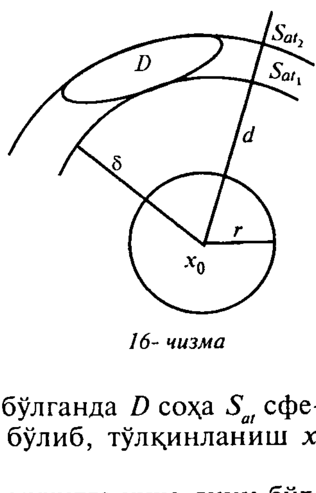
Аввало $n=3$ бўлган ҳолни текширамиз. Бу ҳолда тўлқинларнинг тарқалиши $n=2$ $(n=1)$ бўлган ҳолдан тубдан фарқ қилади.

Фараз қилайлик, бошланғич φ ва ψ функциялар бирор чекли $D \in E^3$ соҳада нолдан фарқли бўлиб, Dдан ташқарида айнан нолга тенг бўлсин.

D соҳадан ташқарида ётган бирор $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$ нуқтани оламиз. $u(x,t)$ функциянинг t вақтда x_0 нуқтадаги қиймати бошланғич функцияларнинг маркази x_0 нуқтада ва радиуси $r=at$ бўлган S_r сферадаги қийматлари орқали Кирхгоф формуласи билан аниқланади.

$u(x_0,t)$ функция S_r сфера D соҳа билан кесишган ҳолдагина нолдан фарқли бўлади. x_0 нуқтадан D соҳагача бўлган энг яқин ва энг узоқ масофаларни мос равишда δ ва d орқали белгилаб оламиз (16- чизма).

Агар t етарли кичик, яъни $t < t_1 = \frac{\delta}{a}$ бўлса, S_r сфера D соҳа билан кесишмайди ва натижада (26) формуладаги сфера бўйича олинган интеграл нолга тенг, яъни $u(x_0,t)=0$, тўлқинланиш ҳали x_0 нуқтага етиб келмаган. $t_1=\frac{\delta}{a}$ вақтдан бошлаб, $t_2=\frac{d}{a}$ вақтгача $S_{at}(t_1 < t < t_2)$ сфера D соҳа билан кесишади, яъни бу ҳолда $u(x_0,t) \neq 0$ бўлиб, x_0 нуқта тўлқинланиш ҳолатида бўлади. $t > t_2$ бўлганда D соҳа S_{at} сферанинг ичида қолади, $u(x_0,t)=0$ бўлиб, тўлқинланиш x_0 нуқтадан ўтиб кетган бўлади.



16- чизма

Агар бирор вақтда бошланғич муҳитга унча яқин бўлмаган муҳитни текширсак, бу муҳитда уч хил нуқталар бўлади: айрим нуқтар тинч ҳолатда бўлади, чунки тўлқинланиш буларгача етиб келмаган; бошқалари тўлқинланиш ҳолатида, учинчилари эса, яна тинч ҳолатда, чунки бу нуқталардан тўлқинланиш ўтиб кетган бўлади.

D соҳанинг чегарасини S орқали белгилаб, S нинг ҳар бир нуқтасини марказ қилиб at радиусли сфералар чизамиз. Бу сфераларнинг ташқи ўрамаси S_1 (яъни Dдан ташқарида S дан $\delta = at$ масофада ётган нуқталарнинг геометрик ўрни) тинч ҳолатдаги соҳани нуқталари тўлқинланишда бўлган соҳадан ажратади.

S_1 сирт тўлқинларнинг *олдинги фронти* дейилади.

Демак, тўлқинларнинг олдинги фронти тўлқинланиш содир бўлаётган соҳани тўлқинланиш етиб бормаган соҳадан ажратиб туради.

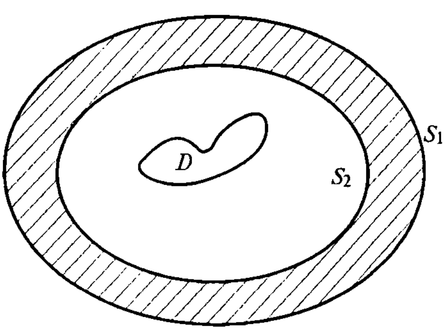
Тўлқинланиш содир бўлаётган соҳани тўлқинланиш ўтиб кетган соҳадан ажратиб турувчи S_2 сирт тўлқинларнинг *орқа фронти* дейилади (17- чизма).

Худди аввалгидек тўлқинларнинг орқа фронти x нуқтадан $t = \frac{d}{a}$ бўлган вақтда ўтади. Шундай қилиб, $n = 3$ бўлганда аниқ олдинги ва аниқ орқа фронтларга эга бўлган тўлқинларнинг тарқалишига эга бўламиз. Бу даъво тўлқинлар назариясида *Гюйгенс принципи* деб аталади.

$n = 2$ бўлган ҳол. Бошланғич функциялар чегараси Γ дан иборат бўлган G соҳада берилган бўлиб, G дан ташқарида улар нолга тенг бўлсин.

Пуассон формуласига асосан t вақтда $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ нуқтадаги $u(x_1, x_2, t)$ функциянинг қиймати маркази x_0 нуқтада ва радиуси $r = at$ бўлган C_r доирадаги бошланғич функцияларнинг қиймати орқали аниқланади. $t < t_1 = \frac{\delta}{a}$ ($\delta - x_0$ дан Γ контургача бўлган энг қисқа масофа) бўлганда $u(x_0, t) = 0$, яъни x_0 нуқтага тўлқин етиб келмаган. $t = t_1 = \frac{\delta}{a}$ моментда x_0 нуқтага тўлқинларнинг олдинги фронти етиб келади.

Агар $t > t_1$ бўлса ҳам $u(x_0, t) \neq 0$ бўлади. $t > \frac{d}{a}$ қийматларида ($d - x_0$ дан Γ гача бўлган энг катта масофа) G соҳа C_r доиранинг ичида ётади. Шу сабабли $u(x,t)$ функция бу қийматларда ҳам, $n = 3$ бўлган ҳолдан фарқли, нолга тенг бўлмайди.



17 — чизма

Бу шу нарсани билдирадики, $t = t_1$ вақтдан бошлаб, x_0 нуқтада тўлқинланиш ҳосил бўлади, умуман айтганда, у ўсади сўнгра бирор вақтдан бошлаб нолгача камаяди (чунки, Пуассон формуласи махражида t^2 бўлган учун $t \to \infty$ да $u(x,t) \to 0$).

Шундай қилиб, аниқ олдинги фронтга эга бўлган орқа фронтга эса эга бўлмаган тўлқинланишлар ҳодисаси рўй беради. Бу ҳолда *тўлқинларнинг диффузияси* (яъни орқа фронтнинг ювилиб кетиши) содир бўляпти дейилади. Юқорида кўрсатганимизга асосан, $n=3$ да диффузия бўлмайди. $n \geq 3$ тоқ сонлар учун тўлқинлар диффузияси бўлмаслигини кўрсатиш мумкин.

4- §. Коши ва Гурса масалалари

1. Умумий қўйилган Коши масаласининг ечилиши. Ҳозиргача биз Коши масаласидаги бошланғич шартлар $x_1,..., x_n$, t ўзгарувчиларнинг E^{n+1} фазосидаги $t=0$ текисликда берилган ҳолни кўрдик.

Энди

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{37}$$

тенглама мисолида Коши масаласи умумий қўйилганда (I боб, 6- §) бошланғич шартларнинг $t=0$ дан фарқли бўлган, берилиш соҳаси L қандай бўлишини ва берилган функциялар масала коррект қўйилган бўлиши учун қандай шартларни қаноатлантиришини кўрсатамиз.

D орқали x,t ўзгарувчилар текислигида чегара бўлаклари силлиқ S Жордан чизиғидан иборат бўлган соҳани белгилаймиз.

Фараз қилайлик, $u(x,t)$ функция D соҳада (37) тенгламанинг регуляр ечими бўлиб, $D \cup S$ да биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин.

Ушбу

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) = 0$$

айниятни D соҳа бўйича интеграллаб, Гаусс — Остроградский формуласини қўллаймиз:

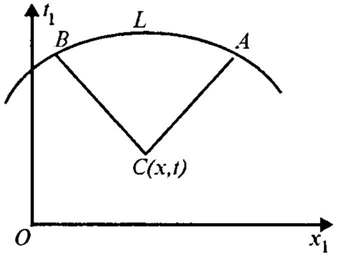
$$\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)\right]dx_1dt_1=\int_S \frac{\partial u}{\partial x_1}dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}dx_1=0. \quad (38)$$

Фараз қилайлик, L — ёпиқ бўлмаган силлиқ Жордан чизиғи бўлиб, қуйидаги икки шартни қаноатлантирсин:

a) (37) тенгламанинг $x+t=\text{const}$, $x-t=\text{const}$ характеристикалар оиласига тегишли бўлган ҳар бир тўғри чизиқ L билан биттадан ортиқ нуқтада кесишмасин;

b) L эгри чизиққа ўтказилган уринманинг йўналиши ҳеч бир нуқтада (37) тенглама характеристикаларининг йўналиши билан устма-уст тушмасин.

Ихтиёрий $C(x,t)$ нуқтадан чиқадиган $x_1-x=t_1-t$, $x_1-x=t-t_1$ характеристикалар L эгри чизиқ билан A ва B нуқталарда кесишсин (18- чизма).



18- чизма

(38) формулани AB эгри чизиқ, CA ва CB харатеристикалар билан чегараланган соҳада қўллаб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз.

$$\int_{AB+BC+CA} \frac{\partial u}{\partial x_1}dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}dx_1=0.$$

CA ва BC да, мос равишда, $dx_1=dt_1$ ва $dx_1=-dt_1$ бўлгани учун аввалги тенглик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\int_{AB} \frac{\partial u}{\partial x_1}dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1-\int_{BC} du+\int_{CA} du=0.$$

Бундан дарҳол

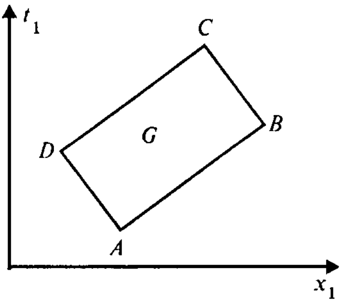
$$u(C)=\frac{1}{2}u(A)+\frac{1}{2}u(B)+\frac{1}{2}\int_{AB} \frac{\partial u}{\partial x_1}dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}dx_1 \quad (39)$$

тенгликка эга бўламиз.

Агар (37) тенгламанинг $u(x,t)$ ечими

$$u\big|_L=\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_L=\psi \quad (40)$$

шартларни қаноатлантирса, бунда φ ва ψ берилган, мос равишда икки ва бир марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар, l эса L да берилган йўналиш бўлиб, L нинг уринмаси билан устма-уст тушмайди, у ҳолда $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial t_1}$ номаълум функцияларни



19- чизма

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds}+\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{dt_1}{ds}=\frac{d\varphi}{ds},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dl}+\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dl}=\psi$$

тенгликлардан аниқлаб оламиз, бу ерда s — L нинг ёй узунлиги.

Маълум u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial t_1}$ миқдорларни (39) тенгликнинг ўнг томонига қўйиб, (37) тенгламанинг (40) шартларни қаноатлантирувчи ечимини ҳосил қиламиз. Юқорида юритилган мулоҳазалардан шу нарса келиб чиқадики, Коши масаласи келтирилган қўйилишда бирдан-бир турғун ечимга эгадир.

2. Гурса масаласи. Асгейрссон принципи. Тайин $A(x_0, y_0)$ нуқтадан чиқадиган (37) тенгаманинг AB: $x_1-x_0=t_1-t_0$, AD: $x_1-x_0=t_0-t_1$ характеристкалари ва $C(x,t)$ нуқтадан чиқадиган CB: $x_1-x=t-t_1$, CD: $x_1-x=t_1-t$ характеристкаларидан ташкил топган характеристик тўртбурчакни G орқали белгилаб оламиз (19- чизма).

G соҳа учун (38) формулани қўллаб,

$$\int\limits_{AB+BC+CD+DA}\frac{\partial u}{\partial x_1}dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}dx_1=0$$

тенгликка эга бўламиз. AB ва CD да $dx_1=dt_1$, BC ва DA да $dx_1=-dt_1$ бўлгани учун аввалги тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\int\limits_{AB}\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1-\int\limits_{BC}\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1+\int\limits_{CD}\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1-$$

$$-\int\limits_{DA}\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1=\int\limits_{AB}du-\int\limits_{BC}du+\int\limits_{CD}du-\int\limits_{DA}du=$$

$$=2u(B)-2u(A)-2u(C)+2u(D)=0\,.$$

Бундан

$$u(C)=u(B)+u(D)-u(A) \tag{41}$$

ёки

$$u(A)+u(C)=u(B)+u(D). \tag{42}$$

(42) тенглик *Асгейрссон принципи* ёки *ўрта қиймат тўғрисидаги теорема* деб айтилади.

Бунга асосан (37) *тенглама u(x,t) ечимининг характеристик тўртбурчак қарама-қарши учларидаги қийматларининг йиғиндиси бир-бирига тенгдир.*

B ва D нуқталарнинг координаталари мос равишда $\left(\frac{x+x_0+t-t_0}{2}, \frac{x-x_0+t+t_0}{2}\right)$ ва $\left(\frac{x+x_0-t+t_0}{2}, \frac{-x+x_0+t+t_0}{2}\right)$лардан иборат.

Агар Гурса масаласининг шартлари маълум бўлса, яъни

$$u\big|_{AB}=\varphi(x_1), u\big|_{AD}=\psi(x_1),\ \varphi(A)=\psi(A)$$

у ҳолда (41) га асосан

$$u(x,t)=\varphi\left(\frac{x+t+x_0-t_0}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-t+x_0+t_0}{2}\right)-\varphi(x_0). \tag{43}$$

$\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар икки марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар бўлса, (43) формула билан аниқланган $u(x,t)$ функция Гурса масаласининг ечимидан иборатдир.

Бу масаланинг ягоналиги Асгейрссон принципидан ёки (43) формулани ҳосил қилиш усулидан ҳам дарҳол келиб чиқади.

5- §. Риман усули

1. Қўшма дифференциал операторлар. Ушбу

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} A_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+A_0 u \tag{44}$$

чизиқли дифференциал операторни текширамиз.

$D-E^n$ фазода бўлаклари силлиқ S сирт билан чегараланган соҳа бўлсин. Фараз қиламиз, A_{ij} коэффициентлар иккинчи тартибли, A_i— биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга, A_0 коэффициент эса узлуксиз бўлсин.

$$Mv \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (A_i v)}{\partial x_i} + A_0 v \tag{45}$$

ифода Lu га *қўшма дифференциал оператор* дейилади.

Бевосита ҳисоблаш билан

$$vLu - uMv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[vA_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right] + A_i uv \right.$$

тенгликнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қиламиз.

Агар

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} \left[vA_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right] + A_i uv$$

белгилашни киритсак, аввалги тенглик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$vLu - uMv = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i}$$

ёки

$$vLu - uMv = \overline{P}, \qquad \overline{P} = (P_1, \ldots, P_n) \cdot$$

Агар $L \equiv M$ бўлса, L оператор *ўзи-ўзига қўшма оператор* дейилади.

L операторни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0 u.$$

Агар

$$B_i = A_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}, \; A_0 = C$$

белгилашларни киритсак, L бундай кўринишга келади:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu. \qquad (44)$$

Бу ҳолда M оператор ушбу

$$Mv = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} v + A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (A_i v)}{\partial x_i} + A_0 v =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cv \qquad (45)$$

кўринишга эга бўлади.

Агар M оператор берилган бўлса, унга қўшма оператор L бўлишини текшириб кўриш қийин эмас. (44) ва (45) формулалардан кўриняптики, қўшма операторлар фақат ўрта ҳадлари билан бир-биридан фарқ қилади.

Равшанки, $B_i \equiv 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ да фақат шу ҳолдагина $M \equiv L$ бўлади. Бундан дарҳол ўзи-ўзига қўшма операторни

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + Cu, \; A_{ij} = A_{ji}$$

кўринишга келтириш мумкин эканлиги келиб чиқади.

Бизга маълум бўлган Лаплас ва тўлқин оператори ўзи-ўзига қўшма операторлардир, лекин иссиқлик тарқалиш оператори эса ўзи-ўзига қўшма оператор бўлмайди.

2. Риман функцияси. Биринчи бобдан бизга маълумки, иккинчи тартибли икки ўзгарувчи хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг коэффициентлари етарли умумий шартларни қаноатлантирганда, уни

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y) \qquad (46)$$

каноник кўринишга келтириш мумкин. Агар (46) тенгламанинг a ва b коэффициентлари дифференциалланувчи деб ҳисобласак, L операторга қўшма бўлган оператор

$$Mv \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(av) - \frac{\partial}{\partial y}(bv) + cv$$

кўринишда ёзилади.

L операторнинг *Риман функцияси* деб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\upsilon(x,y)$ функцияга айтилади.

1. $M\upsilon=0,$ (47)

2. $x=x_1$, $y=y_1$ характеристикаларда

$$\upsilon(x_1,y)=e^{\int_{y_1}^{y}a(x_1,\tau)d\tau},\quad \upsilon(x,y_1)=e^{\int_{x_1}^{x}b(t,y_1)dt},\tag{48}$$

бу ерда (x_1,y_1) нуқта (46) тенглама берилган D соҳанинг тайин нуқтасидир.

Агар қўшимча $\frac{\partial a}{\partial x},\frac{\partial b}{\partial y}$ ва $c(x,y)$ функцияларнинг узлуксизлиги талаб қилинса, у ҳолда Риман функцияси мавжуд бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (47) тенгламани x_1 дан x гача ва y_1 дан y гача икки марта интеграллаш натижасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\upsilon(x,y)-\upsilon(x,y_1)-\upsilon(x_1,y)+\upsilon(x_1,y_1)-\int_{y_1}^{y}a(x,\tau)\upsilon(x,\tau)\,d\tau+$$
$$+\int_{y_1}^{y}a(x_1,\tau)\upsilon(x_1,\tau)\,d\tau-\int_{x_1}^{x}b(t,y)\upsilon(t,y)dt+\int_{x_1}^{x}b(t,y_1)\upsilon(t,y_1)\,dt+$$
$$+\int_{x_1}^{x}dt\int_{y_1}^{y}c(t,\tau)\upsilon(t,\tau)\,d\tau=0.\tag{49}$$

(48) шартларга асосан

$$\frac{\partial\upsilon(x_1,y)}{\partial y}=a(x_1,y)\upsilon(x_1,y),\quad \frac{\partial\upsilon(x,y_1)}{\partial x}=b(x,y_1)\upsilon(x,y_1)$$

ёки

$$\upsilon(x,y)-\int_{x_1}^{x}b(t,y_1)\upsilon(t,y_1)\,dt=1,$$
$$\upsilon(x_1,y)-\int_{y_1}^{y}a(x_1,\tau)\upsilon(x_1,\tau)\,d\tau=1,$$
$$\upsilon(x_1,y_1)=1.$$

Буларни эътиборга олсак, (49) тенглик $\upsilon(x,y)$ га нисбатан Вольтерранинг иккинчи турдаги чизиқли интеграл тенгламаси кўринишида ёзилади:

$$\upsilon(x,y)-\int_{x_1}^{x} b(t,y)\upsilon(t,y)dt-\int_{y_1}^{y} a(x,\tau)\upsilon(x,\tau)\,d\tau+$$
$$+\int_{x_1}^{x} dt\int_{y_1}^{y} c(t,\tau)\upsilon(t,\tau)\,d\tau=1. \tag{50}$$

(50) тенглама изланаётган функцияни бир қийматли

$$\upsilon(x,y)=w(x,y)+\int_{x_1}^{x} w(t,y)\,b(t,y)\exp\left(\int_t^x b(t_1,y)\,dt_1\right)dt+$$
$$+\int_{y_1}^{y} w(x,\tau)\,a(x,\tau)\exp\left(\int_\tau^y a(x,\tau_1)d\tau_1\right)d\tau$$

алмаштириш натижасида қуйидаги интеграл тенгламага келади:

$$w(x,y)+\int_{x_1}^{x} dt\int_{y_1}^{y} K_0(x,y;t,\tau)\,w(t,\tau)\,d\tau=1, \tag{51}$$

бу ерда

$$K_0(x,y;t,\tau)=c(t,\tau)-b(t,y)\,a(t,\tau)\exp\left(\int_\tau^y a(t,\tau_1)\,d\tau_1\right)-$$
$$-a(x,\tau)\,b(t,\tau)\exp\left(\int_t^x b(t_1,\tau)\,dt_1\right)+$$
$$+b(t,\tau)\int_t^x c(t_1,\tau)\exp\left(\int_t^{t_1} b(t_2,\tau)\,dt_2\right)dt_1+$$
$$+a(t,\tau)\int_\tau^y c(t,\tau_1)\exp\left(\int_\tau^{\tau_1} a(t,\tau_2)\,d\tau_2\right)d\tau_1.$$

II бобдан маълумки, (51) тенглама ягона ечимга эгадир.

Риман функцияси фақат x,y ўзгарувчиларга боғлиқ бўлмай, x_1, y_1 ўзгарувчиларга ҳам боғлиқ бўлгани учун, уни

$$\upsilon=R(x,y\,;\,x_1,y_1)$$

кўринишда белгилаб олиш табиийдир.

(48) га асосан, ушбу

$$\frac{\partial R(x_1,y;x_1,y_1)}{\partial y} - a(x_1,y)\,R(x_1,y;x_1,y_1) = 0,$$

$$\frac{\partial R(x,y_1;x_1,y_1)}{\partial x} - b(x,y_1)\,R(x,y_1;x_1,y_1) = 0, \qquad (52)$$

$$R(x_1,y_1;x_1,y_1) = 1$$

ва

$$R(x,y;x,y_1) = e^{\int_{y_1}^{y} a(x,\tau)d\tau}, \quad R(x,y;x_1,y)\,e^{\int_{x_1}^{x} b(t,y)d\tau}$$

шартларни эътиборга олиб,

$$\frac{\partial R(x,y;x,y_1)}{\partial y_1} + a(x,y_1)\,R(x,y;x,y_1) = 0,$$

$$\frac{\partial R(x,y;x_1,y)}{\partial x_1} + b(x_1,y)\,R(x,y;x_1,y) = 0, \qquad (53)$$

$$R(x,y;x,y) = 1$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Риман функцияси (47) тенгламанинг ечими бўлгани учун, яъни

$$MR(x_1,y_1;x,y) = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_1 \partial y_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}(aR) - \frac{\partial}{\partial y_1}(bR) = -cR(x_1,y_1;x,y)$$

тенглик ўринлидир. Бунга асосан, D соҳадаги етарли силлиқ $u(x_1,y_1)$ функция учун ушбу

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1,\partial y_1}\left[u(x_1,y_1)\,R(x_1,y_1;x,y)\right] - R(x_1,y_1;x,y)\,Lu(x_1,y_1) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial y_1} - aR\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial x_1} - bR\right)\right] \qquad (54)$$

айниятнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

(54) айниятни x_1 ва y_1 ўзгарувчилар бўйича $x_0 \le x_1 \le x$, $y_0 \le y_1 \le y$ ораликларда интеграллаб, бу ерда (x_0, y_0) D соҳанинг ихтиёрий нуқтаси, (52) га асосан қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= u(x_0,y)R(x_0,y;x,y) + u(x,y_0)R(x,y_0;x,y) - \\
&\quad - u(x_0,y_0)R(x_0,y_0;x,y) + \\
&\quad + \int_{y_0}^{y}\left[a(x_0,y_1)R(x_0,y_1;x,y) - \frac{\partial R(x_0,y_1;x,y)}{\partial y_1}\right]\times \\
&\quad \times u(x_0,y_1)\,dy_1 + \int_{x_0}^{x}[b(x_1,y_0)R(x_1,y_0;x,y) - \\
&\quad - \frac{\partial R(x_1,y_0;x,y)}{\partial x_1}\Big]u(x_1,y_0)\,dx_1 - \\
&\quad - \int_{x_0}^{x_1} dx_1 \int_{y_0}^{y} R(x_1,y_1;x,y)\,Lu(x_1,y_1)\,dy_1.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Бу ердаги Риман функциясининг ҳосилалари қатнашган интегралларни бўлаклаб интеграллаймиз:

$$
\begin{aligned}
\int_{y_0}^{y} u(x_0,y_1)\frac{\partial R(x_0,y_1;x,y)}{\partial y_1}dy_1 &= u(x_0,y)R(x_0,y;x,y) - \\
-u(x_0,y_0)R(x_0,y_0;x,y) &- \int_{y_0}^{y} R(x_0,y_1;x,y)\frac{\partial u(x_0,y_1)}{\partial y_1}dy_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} u(x_1,y_0)\frac{\partial R(x_1,y_0,x,y)}{\partial x_1}dx_1 &= u(x,y_0)R(x,y_0;x,y) - \\
-u(x_0,y_0)R(x_0,y_0;x,y) &- \int_{x_0}^{x} R(x_1,y_0;x,y)\frac{\partial u(x_1,y_0)}{\partial x_1}dx_1.
\end{aligned}
$$

Буларга асосан, (55) тенглик

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= u(x_0,y_0)R(x_0,y_0;x,y)+\\
&+\int_{x_0}^{x} R(x_1,y_0;x,y)\left[\frac{\partial u(x_1,y_0)}{\partial x_1}+b(x_1,y_0)u(x_1,y_0)\right]dx_1+\\
&+\int_{y_0}^{y} R(x_0,y_1;x,y)\left[\frac{\partial u(x_0,y_1)}{\partial y_1}+a(x_0,y_1)u(x_0,y_1)\right]dy_1+\\
&+\int_{x_0}^{x} dx_1\int_{y_0}^{y} R(x_1,y_1;x,y)\,Lu(x_1,y_1)dy_1
\end{aligned}
\tag{56}
$$

кўринишда ёзилади.

Агар $u(x,y) = R(x_0,y_0;x,y)$ бўлса, (56) дан (53) га асосан

$$\int_{x_0}^{x} dx_1\int_{y_0}^{y} R(x_1,y_1;x,y)\,LR(x_0,y_0;x_1,y_1)\,dy_1 = 0 \tag{57}$$

айният ҳосил бўлади.

(57) айниятдан $R(x,y;x_1,y_1)$ Риман функцияси охирги жуфт x_1, y_1 ўзгарувчиларга нисбатан бир жинсли

$$LR(x,y;\,x_1,y_1) = 0 \tag{58}$$

тенгламанинг ечими эканлиги келиб чиқади. (46) тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x,y)$ функция узлуксиз бўлганда, ушбу

$$u_0(x,y) = \int_{x_0}^{x} dx_1\int_{y_0}^{y} R(x_1,y_1;x,y)\,f(x_1,y_1)dy_1$$

функция унинг хусусий ечимларидан бири бўлади. Бунга (53) ва (58) га асосан, бевосита ҳисоблаш билан ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

3. **Гурса масаласи.** (55) айниятдаги $u(x,y)$ функцияни (46) тенгламанинг ечими деб ҳисоблаймиз. У ҳолда, (55) формуланинг ўнг томонидаги $u(x,y_0)$ ва $u(x_0,y)$ ларни ихтиёрий дифференциялланувчи функциялар билан, $u(x_0,y_0)$ ни ихтиёрий ўзгармас, $Lu(x_1,y_1)$ ни $f(x_1,y_1)$ функция билан алмаштирсак, Риман функциясининг хоссаларига асосан (55) формула (46) тенгламанинг регуляр ечимини беради.

Демак, (46) тенглама учун

$$u(x,y_0) = \varphi(x), \qquad u(x_0,y) = \psi(y).$$

Гурса масаласи, бунда $\varphi(x)$ ва $\psi(y)$ — берилган узлуксиз дифференцияланувчи, $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$ шартни қаноатлантирувчи функциялар, ягона турғун ечимга эга бўлади ва бу ечим ушбу

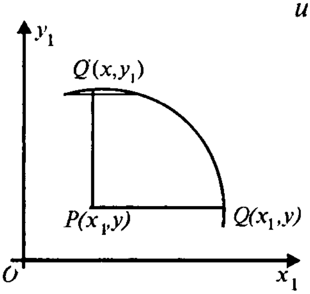
$$\begin{aligned} u(x,y) = {} & R(x,y_0;x,y)\varphi(x) + R(x_0,y;x,y)\psi(y) - \\ & - R(x_0,y_0;x,y)\varphi(x_0) + \\ & + \int_{x_0}^{x}\left[b(x_1,y_0)R(x_1,y_0;x,y) - \frac{\partial}{\partial x_1}R(x_1,y_0;x,y)\right]\varphi(x_1)\,dx_1 + \\ & + \int_{y_0}^{y}\left[a(x_0,y_1)R(x_0,y_1;x,y) - \frac{\partial}{\partial y_1}R(x_0,y_1;x,y)\right]\psi(y_1)\,dy_1 + \\ & + \int_{x_0}^{x}dx_1\int_{y_0}^{y}R(x_1,y_1;x,y)f(x_1,y_1)dy_1 \end{aligned}$$

формула билан аниқланади.

4. Коши масаласи. D соҳада ётувчи узлуксиз эгриликка эга бўлган очиқ Жордан чизиғини δ орқали белгилаймиз. Бу чизиқ шундай хоссага эга бўлсинки, ўзининг ҳеч бир нуқтасида (46) тенгламанинг характеристикалари билан уринишга эга бўлмасин $l - \delta$ да берилган вектор бўлиб, δ нинг уринмаси билан ҳеч қандай нуқтада устма-уст тушмасин.

Коши масаласи бундай қўйилади. (46) *тенгламанинг ушбу*

$$u|_\delta = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial l}|_\delta = \psi \tag{59}$$



20- чизма

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда берилган φ ва ψ мос равишда икки марта ва бир марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялардир.

$P(x,y)$ нуқтадан чиқувчи $x_1 = x$, $y_1 = y$ характеристикалар δ эгри чизиқ билан Q' ва Q нуқталарда кесишади деб фараз қиламиз.

PQ, PQ' тўғри чизиқлар ва δ эгри чизиқнинг QQ' қисми билан чегараланган соҳани G орқали белгилаб оламиз (20- чизма).

G соҳадаги ихтиёрий икки марта узлуксиз дифференциалланувчи $u(x_1,y_1)$ ва $\upsilon(x_1,y_1)$ функциялар учун қуйидаги айният ўринли бўлади:

$$2(\upsilon Lu - uM\upsilon) = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}u + 2bu\upsilon\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}u + 2au\upsilon\right) \tag{60}$$

Бу айниятни G соҳа бўйича интеграллаб, Гаусс — Остроградский формуласини қўллаш натижасида

$$2\int_G(\upsilon Lu - uM\upsilon)\,dx_1dy_1 = \int_S\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}u + 2au\upsilon\right)dy_1 - \\ -\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}u + 2bu\upsilon\right)dx_1.$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бунда S — G соҳанинг чегараси, яъни

$$PQ + QQ' + Q'P.$$

PQ да $dy_1 = 0$, PQ'да $dx_1 = 0$ бўлгани учун аввалги тенглик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$2\int_G(\upsilon Lu - uM\upsilon)\,dx_1dy_1 = \int_{QQ'}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}u + 2au\upsilon\right)dy_1 - \\ -\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}u + 2bu\upsilon\right)dx_1 + \int_{Q'}^{P}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}u + 2au\upsilon\right)dy_1 - \\ -\int_P^Q\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\upsilon - \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}u + 2au\upsilon\right)dx_1. \tag{61}$$

Бу ифоданинг ўнг томонидаги иккинчи ва учинчи интегралларда $u(x_1,y_1)$ функциянинг ҳосилалари қатнашган ҳадларни бўлаклаб интеграллаб, ушбу

$$\int_{Q'}^{P}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial y_1}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}+2au\upsilon\right)dy_1=(u\upsilon)_{Q'}^{P}-2\int_{Q}^{P}u\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y_1}-a\upsilon\right)dy_1,$$

$$\int_{P}^{Q}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_1}-u\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}+2bu\upsilon\right)dx_1=(u\upsilon)_{P}^{Q}-2\int_{P}^{Q}u\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1}-b\upsilon\right)dx_1 \qquad (62)$$

тенгликларга эга бўламиз.

(61) формулада $u(x_1,y_1)$ функция (46), (59) Коши масаласининг ечими, $\upsilon(x_1,y_1)$ эса Риман функцияси, яъни $\upsilon(x_1,y_1)=\upsilon(P')=R(x_1,y_1,x,y)=R(P',P)$ бўлсин деб ҳисоблаймиз.

У ҳолда, δ эгри чизиққа P' нуқтадан ўтказилган нормални n орқали белгилаб, $dy_1=\frac{dx_1}{dn}ds,\ dx_1=-\frac{dy_1}{dn}ds$ формулаларни эътиборга олсак, (61) дан (62) га ва Риман функциясининг (52) хоссаларига асосан

$$\begin{aligned}u(P)&=\frac{1}{2}u(Q)R(Q,P)+\frac{1}{2}u(Q')R(Q',P)-\\&-\frac{1}{2}\int_{QQ'}\left[\frac{\partial u(P')}{\partial N}R(P',P)-u(P')\frac{\partial R(P',P)}{\partial N}\right]ds-\\&-\frac{1}{2}\int_{QQ'}\left[a(P')\frac{dx_1}{dn}+b(P')\frac{dy_1}{dn}\right]R(P',P)u(P')\,dS+\\&+\int_G f(P')R(P')\,dx_1dy_1\end{aligned} \qquad (63)$$

формулани ҳосил қиламиз, бунда

$$\frac{\partial}{\partial N}=\frac{dx_1}{dn}\frac{\partial}{\partial y_1}+\frac{dy_1}{dn}\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

(59) бошланғич шартларга асосан (63) формуладаги $\frac{\partial u}{\partial N}$ ни ҳамма вақт бир қийматли аниқлаб олишимиз мумкин. (63) формула билан аниқланган $u(x,y)$ функциянинг (46) тенгламани қаноатлантиришини текшириб кўриш қийин эмас.

Шундай қилиб, (63) *формула* (46), (59) *Коши масаласининг ечимидан иборатдир.* (63) формулани ҳосил қилиш жараёнидан, бу масаланинг ягоналиги ва турғунлиги ҳам келиб чиқади.

IV БОБ
ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР

1- §. Гармоник функциялар

1.Асосий тушунчалар. Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими. Эллиптик типдаги тенгламалардан энг соддаси ва муҳими Лаплас

$$\Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{1}$$

ва Пуассон

$$\Delta u = f(x) \tag{2}$$

тенгламаларидир.

E^n фазода бирор ёпиқ S сирт билан чегараланган чекли ёки чексиз D соҳани қараймиз.

Агар $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ функция чекли D соҳада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, Лаплас тенгламасини қаноатлантирса, $u(x)$ ни D соҳада *гармоник функция* дейилади.

Агар $u(x)$ функция фазо чекли нуқтасининг етарли кичик атрофида, яъни маркази шу нуқтада бўлган етарли кичик радиусли шарда гармоник бўлса, уни шу нуқтада *гармоник* деб аталади.

Агар $u(x)$ функция чексиз D соҳанинг координата бошидан чекли масофада ётган ихтиёрий x нуқтасида гармоник бўлиб, етарли катта $|x|$ лар учун $\left(|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)$

$$|u(x)| \le \frac{c}{|x|^{n-2}}, \quad c - \text{const}$$

тенгсизлик бажарилса, $u(x)$ функция чексиз D соҳада *гармоник* дейилади.

E^n фазодаги икки $x=(x_1,...,x_n)$, $\xi=(\xi_1,..., \xi_n)$ нуқта орасидаги масофани r орқали белгилаб оламиз, яъни

$$r=|x-\xi|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2}\ .$$

Бевосита текшириш билан ишонч ҳосил қилиш мумкинки , ушбу

$$E(x,\xi)=\begin{cases} r^{2-n}, & n>2 \\ \ln\frac{1}{r}, & n=2 \end{cases} \tag{3}$$

функция $x\neq\xi$ бўлганда x бўйича ҳам, ξ бўйича ҳам Лаплас тенгламасини қаноатлантиради.

Ҳақиқатан,

$$\frac{\partial E}{\partial x_i}=(2-n)r^{1-n}\frac{\partial r}{\partial x_i}=(2-n)r^{1-n}\frac{x_i-\xi_i}{r}=(2-n)r^{-n}(x_i-\xi_i),$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2}=(2-n)r^{-n}-(2-n)nr^{-n-2}(x_i-\xi_i)^2.$$

Охирги ифодани (1) тенгламанинг чап томонига олиб бориб қўямиз. У ҳолда

$$\Delta E=n(2-n)r^{-n}-n(2-n)r^{-n-2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2=0\,.$$

Худди шунга ўхшаш $n=2$ ҳол текшириб кўрилади. $E(x,\xi)$ функция x ва ξ га нисбатан симметрик бўлгани учун бу функция $x\neq\xi$ да ξ бўйича ҳам Лаплас тенгламасини қаноатлантиради деб айтишимиз мумкин.

(3) формула билан аниқланган $E(x,\xi)$ функцияни Лаплас тенгламасининг *элементар* ёки *фундаментал ечими* дейилади.

Чексизликда

$$E(x,\xi)=O\left(\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)$$

баҳо ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $E(x,\xi)$ функциянинг етарли катта $|x|$ лардаги қиймати қизиқтираётгани учун $|x|>2|\xi|$ деб олишимиз мумкин.

У ҳолда

$$r=|x-\xi|\geq|x|-|\xi|$$

тенгсизликка асосан, $|\xi|<\frac{|x|}{2}$ бўлгани учун $|r|>\frac{|x|}{2}$ тенгсизлик келиб чиқади. Бундан дарҳол

$$E(x,\xi)<\frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Уқтириб ўтамизки, қийматлари икки нуқта ўртасидаги масофа r га боғлиқ бўлган Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи $u(r)$ функциялар орасида $C_1\ E(x,\xi)+C_2$ кўринишдаги функциялардан бошқа функция мавжуд эмас, бунда C_1, C_2 — ўзгармас сонлар.

Фараз қилайлик, шундай функция мавжуд бўлсин, яъни $u(x)=\lambda(r)$. Бу функциядан x_i ўзгарувчи бўйича ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i-\xi_i}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{(x_i-\xi_i)^2}{r^2}\frac{d^2\lambda}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr}\left[1-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{r^2}\right].$$

Бу ҳосилаларни (1) тенгламага қўйсак, Лаплас тенгламаси ўрнига

$$\lambda''+\frac{n-1}{r}\lambda'=0$$

оддий дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

Бу тенгламанинг умумий ечими

$$C_1E\,(x,\xi)+C_2$$

дан иборатдир.

2. Грин формулалари. D — бўлаклари силлиқ S сирт билан чегараланган E^n фазодаги соҳа бўлиб, $u\,(x)$ ва $\upsilon\,(x)$ функциялар $C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ синфга тегишли бўлсин.

D соҳа бўйича қуйидаги

$$\upsilon\Delta u = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right],$$

$$\upsilon\Delta u - u\Delta\upsilon = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right)$$

айниятларни интеграллаб ва Гаусс — Остраградский формуласини қўллаб,

$$\int_D \upsilon\Delta u dx = -\int_D \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}dx + \int_S \upsilon\frac{\partial u}{\partial n}ds, \tag{4}$$

$$\int_D (\upsilon\,\Delta u - u\Delta\upsilon)\,dx = \int_S\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial n}\right)ds \tag{5}$$

формулаларни ҳосил қиламиз, бунда n — S га ўтказилган ташқи нормал (4) *ни Гриннинг биринчи*, (5) *ни эса иккинчи формуласи* деб юритилади. Агар $u(x)$ ва $\upsilon(x)$ функциялар D да гармоник бўлса, у ҳолда (4) ва (5) формулалар қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\int_S \upsilon\frac{\partial u}{\partial n}ds = \sum_{i=1}^{n}\int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}dx, \tag{6}$$

$$\int_S\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial n}\right)ds = 0. \tag{7}$$

(6) ва (7) формулаларга асосан гармоник функцияларнинг қатор содда хоссалари келиб чиқади.

1) Агар D соҳада гармоник бўлган $u(x)$ функция $D \cup S$ да ўзининг биринчи тартибли ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлиб, D соҳанинг чегараси S да нолга тенг бўлса, у ҳолда барча $x \in D \cup S$ лар учун $u(x) = 0$ бўлади (гармоник функциянинг ягоналик хоссаси).

Агар (6) тенгликда $u(x) = \upsilon(x)$ десак, ундан бу хосса дарров келиб чиқади. Ҳақиқатан, $y \in S$ да $u(y) = 0$ бўлгани учун (6) дан

$$\sum_{i=1}^{n}\int_D\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = \int_S u(y)\frac{\partial u}{\partial n}\,ds \qquad (8)$$

ёки

$$\sum_{i=1}^{n}\int_D\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0$$

тенглик келиб чиқади.

Демак, $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$, $i=1,\dots,n, x\in D$, яъни барча $x\in D$ лар учун $u(x)=\mathrm{const}$. Бундан $y\in S$, $u(y)=0$ бўлгани сабабли, ёпиқ $D\cup S$ соҳада $u(x)$ нинг узлуксизлигидан барча $x\in D\cup S$ лар учун $u(x)=0$.

2) *Агар D соҳада гармоник, $D\cup S$ да биринчи тартибли ҳосилалари билан узлуксиз бўлган $u(x)$ функциянинг $\frac{\partial u}{\partial n}$ нормал ҳосиласи D нинг чегараси S да нолга тенг бўлса, барча $x\in D$ нуқталар учун $u=\mathrm{const}$ бўлади.*

Бу хосса барча $y\in S$ лар учун $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ бўлгани сабабли, (8) тенгликдан дарҳол келиб чиқади.

3) *D соҳада гармоник, $D\cup S$ да ўзининг биринчи тартибли ҳосилалари билан узлуксиз бўлган $u(x)$ функциянинг $\frac{\partial u}{\partial n}$ нормал ҳосиласидан S бўйича олинган интеграл нолга тенг.*

Ҳақиқатан, (6) формулада $\upsilon(x)=1$, $x\in D$ десак,

$$\int_S\frac{\partial u}{\partial n}\,dS=0$$

ҳосил бўлади.

3. C^2 синф функцияларининг ва гармоник функцияларнинг интеграл ифодаси. 2- бандда киритилган D соҳанинг ўзгарувчи нуқтасини ξ орқали белгилаб оламиз. $u(\xi)$ функция $C^2(D)\cap C^1(\bar{D})$ синфга тегишли бўлсин. D соҳанинг ихтиёрий x нуқтасини оламиз ва бу нуқтани марказ қилиб ε радиусли Q_ε шар чизамиз, S_ε шарнинг сирти бўлсин. ε радиусни шундай кичик қилиб оламизки, Q_ε шар D соҳада тўла ётсин. $D-Q_\varepsilon$ ни D^ε орқали белгилаб оламиз. Равшанки D^ε соҳада $u(x)$ ва $E(x,\xi)$ функциялар $C^2(D^\varepsilon)(C^1(\bar{D}^\varepsilon))$

синфга тегишли. D^{ε} соҳада бу функцияларга (5) Грин формуласини қўллаймиз:

$$\int\limits_{D^{\varepsilon}} [E(x,\xi)\Delta u - u\Delta E(x,\xi)]d\xi = \int\limits_{S} [E(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial n}]dS +$$

$$+\int\limits_{S_{\varepsilon}} \left[E(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial E(x,\xi)}{\partial n}\right]d_{\xi}S_{\varepsilon},$$

бу ерда дифференциал белгисидаги ξ индекс интеграллаш ξ бўйича бажарилаётганини билдиради.

Маълумки, $\Delta E = 0$. Аввало $n > 2$ бўлсин. S_{ε} сферада $r = |x-\xi| = \varepsilon$, n — нормал D^{ε} соҳага ташқи бўлганлиги сабабли ε радиусга қарама-қарши йўналган. Шунинг учун

$$\frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^{n-2}}\right]_{r=\varepsilon} = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}.$$

Бирлик сферани S_1 орқали белгиласак, маълумки, $dS_{\varepsilon} = \varepsilon^{n-1}dS_1$, $\xi - x = \theta\varepsilon$ алмаштиришни бажарсак, $\xi\in S_{\varepsilon}$ бўлганда, $\theta\in S_1$ бўлади. Шу сабабли аввалги формулани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\int\limits_{D^{\varepsilon}} \frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}}d\xi = \int\limits_{S}\left[\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\right]d_{\xi}S +$$

$$+\int\limits_{S_1}\left[\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n} - (n-2)\, u(x+\theta\,\varepsilon)\right]dS_1. \tag{9}$$

Равшанки,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D^{\varepsilon}} \frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}}d\xi = \int\limits_{D}\frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}}d\xi.$$

(9) формуланинг ўнг томонидаги биринчи интеграл ε га боғлиқ эмас.

$$u(\xi)\in C^1(\overline{D})$$

бўлгани учун $\left|\dfrac{\partial u}{\partial \xi_i}\right| \le M$, M — const,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \cos(n,\xi_i)\right| \le nM .$$

Бундан дарҳол

$$\left|\varepsilon\int\limits_{S_1} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS_1\right| \le \varepsilon n M \left|S_1\right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 ,$$

$|S_1|$ — бирлик сферанинг юзи.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-(n-2)\int\limits_{S_1} u(x+\theta\,\varepsilon)dS_1\right] = -(n-2)\; u(x)\left|S_1\right| .$$

Демак, (9) тенгликдан ушбу

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|}\int\limits_{S}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\right)d_\xi S -$$

$$-\frac{1}{(n-2)|S_1|}\int\limits_{D}\frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}}d\xi \tag{10}$$

формула ҳосил бўлади. Эслатиб ўтамиз, бирлик S_1 сфера сиртининг юзи $|S_1| = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $n=2$ бўлганда (10) формула ўз маъносини йўқотади. Бу ҳолда $E(x,\xi) = \ln\dfrac{1}{r}$ эканлигини эътиборга олиб, аввалги ҳисоблашларни қайтарсак,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S}\left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\ln\frac{1}{r} - u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\right] - d_\xi S -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S}\ln\frac{1}{r}\,\Delta u(\xi)d\xi \tag{11}$$

формулага эга бўламиз .

Агар x нуқта D соҳадан ташқарида ётган бўлса,

$$\int_D \frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}} d\xi = \int_S \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right) d_\xi S \ , \quad n > 2,$$

$$\int_D \ln \frac{1}{r} \Delta u(\xi) d\xi = \int_S \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right) d_\xi S, \quad n = 2$$

формулалар ҳосил бўлади.

Энди $u(\xi)$ функция (10) ва (11) формулаларни чиқаришдаги шартдан ташқари D соҳада гармоник ҳам бўлсин. Бу ҳолда (10), (11) формулаларда $\Delta u = 0$ бўлади, натижада гармоник функцияларнинг қуйидаги интеграл ифодасига эга бўламиз:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_S \left[\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right] d_\xi S, \quad n > 2, \quad (12)$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right] d_\xi S, \quad n = 2 \, . \quad (13)$$

Теорема. *Бирор соҳада гармоник бўлган $u(x)$ функция шу соҳада барча тартибли ҳосилаларга эга бўлади.*

Исбот. $u(x)$ функция D соҳада гармоник бўлсин, D да тўла ётувчи, яъни ўзининг чегараси билан бирга D_1 соҳани оламиз. D_1 ни шундай танлаб оламизки, унинг чегараси Γ_1 бўлаклари силлиқ сиртдан иборат бўлсин. Равшанки, $u(x) \in C^2(\overline{D}_1)$ ва D_1 соҳага (12) формулани қўллаймиз:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_{\Gamma_1} \left[\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right] d_\xi \Gamma_1, \quad (14)$$

$$x \in D_1.$$

x нуқтанинг атрофида (14) интеграл остидаги функция x ва ξ ўзгарувчилар бўйича узлуксиз ва x нуқтанинг барча $x_1,\ldots,x_n$ координаталари бўйича барча тартибли ҳосилаларга эга. Параметрга боғлиқ бўлган интегралларни дифференциаллаш ҳақидаги теоремага асосан, $u(x)$ функция x нуқтада $x_1,\ldots,x_n$ лар бўйича барча тартибли ҳосилаларга эга ва бу ҳосилаларни (14) формулада интеграл остида дифференциаллаш натижасида ҳосил қилиш мумкин.

4. Ўрта қиймат ҳақидаги теорема. *$u(x)$ функция бирор шарда гармоник бўлиб, шарнинг чегарасида узлуксиз бўлсин. У ҳолда, $u(x)$ функциянинг шар марказидаги қиймати, шу шарни чегаралаб турувчи сферадаги қийматларининг ўрта арифметигига тенг.*

Теорема шартидаги шарнинг маркази x_0 нуқта ва радиуси R га тенг бўлсин. Бу шарни Q_R билан ва уни чегаралаб турган сферани S_R орқали белгилаб оламиз. Q_{R_1} билан Q_R шарга концентрик бўлган $R_1 < R$ радиусли шарни, S_{R_1} орқали унинг чегарасини белгилаймиз. $u(x) \in C^2(\overline{Q}_{R_1})$ бўлгани сабабли (12) формулага асосан

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int\limits_{S_{R_1}} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right) d_\xi S_{R_1} \qquad x \in Q_{R_1}.$$

Бу формулада $x = x_0$ деб оламиз. У ҳолда $r = R_1$ бўлиб, n — ташқи нормал бўлгани учун R_1 радиус бўйича йўналган бўлади. Шу сабабли

$$\left.\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}}\right|_{r=R_1} = \left.\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}}\right|_{r=R_1} = -\frac{n-2}{R_1^{n-1}}$$

ва олдинги формула

$$u(x_0) = \frac{1}{(n-2)|S_1| R_1^{n-2}} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{\partial u}{\partial n} d_\xi S_{R_1} + \frac{1}{|S_1| R_1^{n-1}} \int\limits_{S_{R_1}} u(\xi) d_\xi S_{R_1}$$

кўринишида ёзилади. $u(x)$ функция Q_R шарда гармоник ва $C^2\left(\overline{Q}_{R_1}\right)$ синфга тегишли бўлгани учун

$$\int\limits_{S_{R_1}} \frac{\partial u}{\partial n} d_\xi S_{R_1} = 0.$$

Натижада

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1| R_1^{n-1}} \int\limits_{S_{R_1}} u(\xi) d_\xi S_{R_1} \tag{15}$$

формулага эга бўламиз. $u(x)$ функция $\overline{Q}_R$ шарда узлуксиз бўлгани учун $R_1 \to R$ да интеграл остида лимитга ўтиш мумкин.

Демак,

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1| R^{n-1}} \int\limits_{S_R} u dS_R, \quad |S_1| R^{n-1} = |S_R|. \qquad (16)$$

(16) формуланинг ўнг томони $u(x)$ функциянинг сферадаги қийматларининг ўрта арифметигидан иборатдир.

$n = 2$ бўлганда

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{S_R} u dS_R .$$

(15) формулани

$$R_1^{n-1} u(x_0) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_{R_1}} u(\xi) dS_{R_1}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенгликни R_1 бўйича $0 \le R_1 \le R$ оралиқда интеграллаб,

$$u(x_0) = \frac{n}{|S_1| R^n} \int\limits_{Q_R} u(\xi) d\xi \qquad (17)$$

формулага эга бўламиз, бунда $\frac{|S_1| R^n}{n}$ – Q_R шарнинг ҳажмидир. (16) ва (17) формулалар мос равишда *сфера* ва *шар* бўйича гармоник функциялар учун ўрта *арифметик формулалар* номи билан ҳам юритилади.

5. Экстремум принципи. *Чекли D соҳада ўзгармас сондан фарқли бўлган $u(x)$ гармоник функция D соҳанинг ички нуқталарида максимум ва минимумга эриша олмайди.*

Исбот. Фараз қилайлик, бирор $x_0 \in D$ нуқтада $u(x)$ функция максимумга эришсин, яъни $u(x_0) = M$. D соҳада ётувчи $|x - x_0| < \varepsilon$ шарни оламиз. Бу шарнинг ҳар бир нуқтасида $u(x) = M$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар y, $|y - y_0| < \varepsilon$, нуқтада $u(y) < M$ ($u(y) > M$ тенгсизлик бўлиши мумкин эмас) тенгсизлик ўринли бўлса $u(x)$, функция узлуксиз бўлгани учун бу тенгсизлик y нуқтанинг бирор $|\xi - y| < \delta$ атрофида ҳам ўринли бўлади. У ҳолда (17) формулани $|x - x_0| < \varepsilon$ шарга нисбатан қўллаш натижасида $M < M$ бўлган маъносиз тенгсизликка эга бўламиз.

Демак, барча $|x - x_0| < \varepsilon$ шарда $u(x) = M$. Энди $x - D$ соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлиб, l эса x ни x_0 билан туташтирувчи ва D да ётадиган узлуксиз эгри чизиқ бўлсин. D соҳанинг чегараси S билан l эгри чизиқ орасидаги масофадан кичик бўлган ε сонни оламиз. $|\eta - y| < \varepsilon$ шарнинг y марказини x_0 нуқтадан x нуқтага қараб l чизиқ бўйича силжитиб борамиз. Юқорида исботланганга асосан y ихтиёрий ҳолатда бўлганда ҳам бу шарнинг ичида $u = M$ ва $u(x) = M$ бўлади. Демак, барча D да $u(x) = M$. Ҳосил бўлган қарама-қаршилик теореманинг биринчи қисми тўғри эканлигини кўрсатади. Худди шунга ўхшаш иккинчи қисми, яъни минимум ҳол исботланади.

1-натижа. Агар $u(x)$ функция чекли D соҳада гармоник бўлиб, $\bar{D}$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда $u(x)$ функция ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларини соҳанинг чегарасида қабул қилади, яъни $m \le u(x) \le M$, бу ерда m ва M лар $u(x)$ функциянинг D чегарасидаги энг кичик ва энг катта қийматлари.

Бу натижанинг тўғрилиги юқорида исботланган экстремум принципи ва математик анализдан маълум бўлган Вейерштрас теоремасидан келиб чиқади .

2-натижа. Агар $u(x)$ функция чекли D соҳада гармоник бўлиб, D нинг чегараси S да нолга тенг бўлса, барча D да айнан нолга тенг бўлади .

Ҳақиқатан ҳам, $m = M = 0$ дан ихтиёрий $x \in D$ учун $u(x) = 0$ бўлади.

3-натижа. Агар u_1 ва u_2 функциялар D соҳада гармоник, $\bar{D}$ да узлуксиз бўлиб, S да бир хил қийматларни қабул қилса, барча $\bar{D}$ да улар айнан бир-бирига тенг бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $u = u_1 - u_2$ десак, $u|_S = 0$ бўлади. 2-натижага асосан барча D да $u \equiv 0$ ёки $u_1 \equiv u_2$ бўлади.

Изоҳ. Экстремум принципининг исботида асосан гармоник функциянинг узлуксизлигидан ва ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланилди. Шу сабабли экстремум принципини бошқачароқ формада келтириш мумкин.

Агар ўзгармас сондан фарқли бўлган $u(x)$ функция D соҳада узлуксиз бўлиб, бу соҳанинг ҳар бир x_0 нуқтаси учун R нинг барча кичик қийматларида

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R|}\int_{S_R} u\,dS_R \quad \text{ёки} \quad u(x) = \frac{n}{|S_1|R^n}\int_{Q_R} u(\xi)\,d\xi$$

тенглик ўринли бўлса, $u(x)$ функция D соҳанинг ички нуқталарида максимум ва минимумга эга бўлмайди.

6. Кельвин алмаштириши. Радиуси R га тенг ва маркази координаталар бошида бўлган сферани S_R орқали белгилаб оламиз.

Агар x ва y нуқталар сфера марказидан ўтувчи нурда ётиб, $|x|\cdot|y| = R^2$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу нуқталар S_R сферага нисбатан *қўшма ёки симметрик нуқталар* дейилади.

Симметрик нуқталарнинг декард координаталари қуйидаги муносабатлар билан боғланган бўлади:

$$y = \frac{R^2}{|x|^2}x, \quad x = \frac{R^2}{|y|^2}y \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \tag{18}$$

ёки

$$y_i = \frac{R^2}{|x|^2}x_i, \quad x_i = \frac{R^2}{|y|^2}y_i.$$

(18) алмаштириш *инверсия алмаштириши* дейилади.

Агар $u(x)$ функция бирор n ўлчовли соҳада гармоник бўлса, равшанки, $u\,(ax + b) = u\,(ax_1 + b_1,\ldots, ax_n + b_n)$ функция ҳам шу хоссага эга бўлади, яъни соҳа параллел кўчирилганда ва ўхшашлик маркази ихтиёрий x_0 нуқтада бўлган ўхшашлик алмаштиришида функциянинг гармониклиги бузилмайди. Инверсия алмаштиришида гармониклик сақланиб қоладими, деган савол туғилади. Умуман айтганда, $n \geq 2$ бўлганда инверсия алмаштиришининг ўзи функциянинг гармониклик хоссасини сақлаб қолмайди.

Соддалик учун $R = 1$ деб оламиз. Масалан, $n = 3$ да $u(x) = \frac{1}{|x|}$ функция $x \neq 0$ бўлган нуқталарда гармоник. $x = \frac{y}{|y|^2}$ алмаштириш натижасида ҳосил бўлган $u\left(\frac{y}{|y|^2}\right) = \frac{1}{\frac{|y|}{|y|^2}} = |y|$ функция эса гармоник бўлмайди. Лекин инверсия алмаштиришининг бу камчилигини шу алмаштирищдан сўнг функцияни $|y|^{2-n}$ га кўпайтириш натижасида бартараф қилиш мумкин.

Ушбу

$$\upsilon(y) = \frac{1}{|y|^{n-2}} u\left(\frac{y}{|y|^2}\right), \ n \geq 3 \tag{19}$$

функция $u(x)$ функциянинг *Кельвин алмаштириши* дейилади.

Кельвин теоремаси. *Агар $u(x)$ функция D соҳада гармоник бўлса,* (19) *формула билан аниқланган функция D соҳадан унинг бирлик сферага нисбатан инверсияси натижасида ҳосил бўлган D^* соҳада гармоник бўлади.*

Исбот. D_1^* соҳа ўзининг чегараси билан D^* да тўла ётувчи соҳа бўлсин, D_1 эса D_1^* нинг инверсия алмаштириши натижасида ҳосил бўлган образи бўлсин. Бу ҳолда D_1 соҳа D да ўзининг чегараси билан тўла ётувчи соҳа бўлади. D_1 соҳанинг чегарасини Γ_1 орқали белгилаб оламиз. (12) формулага асосан

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int\limits_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n} \right) d_\xi \Gamma_1 .$$

(19) Кельвин алмаштиришига кўра

$$\upsilon(y) = \frac{1}{|y|^{n-2}} u\left(\frac{y}{|y|^2}\right) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \times$$

$$\times \int\limits_{\Gamma_1} \left[\frac{1}{|y|^{n-2}\left|\frac{y}{|y|^2}-\xi\right|^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|y|^{n-2}\left|\frac{y}{|y|^2}-\xi\right|^{n-2}} \right] d_\xi \Gamma_1. \tag{20}$$

Ушбу

$$\frac{1}{|y|^{n-2}\left|\frac{y}{|y^2|}-\xi\right|^{n-2}}$$

ифода ξ га нисбатан гармоник функция, y бўйича ҳам гармоник функция бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$|y|\left|\frac{y}{|y|^2}-\xi\right|=\left|\frac{y}{|y|}-\xi|y|\right|=\left[\left(\frac{y}{|y|}-\xi|y|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left[1-2\xi y-|y|^2|\xi|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\left(\frac{\xi}{|\xi|}-y|\xi|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left|\frac{\xi}{|\xi|}-y|\xi|\right|=|\xi|\left|\frac{\xi}{|\xi|^2}-y\right|.$$

Шундай қилиб ,

$$\frac{1}{|y|^{n-2}\left|\frac{y}{|y|^2}-\xi\right|^{n-2}}=\frac{1}{|\xi|^{n-2}\left|\frac{\xi}{|\xi|^2}-y\right|^{n-2}}.$$

Бу ифода $\xi \neq \frac{y}{|y|^2}$ бўлганда гармоник функциядир, $\xi \in \Gamma_1$ да бу тенгсизлик ўринли бўлади.

Демак, (20) формула билан аниқланган $\upsilon(y)$ функция y бўйича гармоник функциядир.

Агар $n=2$ бўлса,

$$\upsilon(y)=u\left(\frac{y}{|y|^2}\right)=u\left(\frac{y_1}{|y|^2},\frac{y_2}{|y|^2}\right)$$

функция D^* соҳада гармоник бўлади. Бевосита ҳисоблаш натижасида бунга ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Кельвин теоремасидан фойдаланиб, одатда гармоник функциянинг чексиз узоқлашган нуқта атрофидаги таърифи берилади.

Агар $\upsilon(y)=|y|^{2-n}u\left(\frac{y}{|y|^2}\right)=|x|^{n-2}u(x)$ функция $y=0$ нуқтада $\lim\limits_{y\to 0}\upsilon(y)$ сифатида қўшимча аниқланган бўлиб, $y=0$ нуқта атрофида гармоник бўлса, $u(x)$ функция чексиз узоқлашган нуқта атрофида (яъни етарли катта радиусли ёпиқ $|x|\le R$ шардан ташқарида) *гармоник* деб айтилади.

Бу таърифга кўра $\upsilon(y)$ функция $y=0$ нуқта атрофида чегараланган бўлганлиги сабабли бундан дарҳол 1- бандда берилган таъриф келиб чиқади.

Лемма. Агар $u(x)$ функция чексиз узоқлашган нуқтада гармоник бўлса, ушбу тенгсизликларни қаноатлантиради.

$$|u(x)| < \frac{A}{|x|^{n-2}}, \quad |D^i u| < \frac{A}{|x|^{n-2+i}}, \quad n \geq 3, \tag{21}$$

бунда $D^i u - u(x)$ функциянинг i-тартибли ихтиёрий ҳосиласи

$$|u(x)| < A, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right| < \frac{A}{|x|^2}. \quad n = 2. \tag{22}$$

Исбот. Лемманинг шартига кўра $v(y) = |x|^{n-2} u(x)$ функция $y = 0$ нуқтада гармоник, демак $y = 0$ нуқтанинг бирор $|y| < \varepsilon$ атрофида чегараланган бўлади. Шу атрофдаги $v(y)$ функциянинг энг катта қийматини A_0 десак, $A > A_0$ да (21) тенгсизликларнинг биринчиси дарҳол келиб чиқади.

Ушбу

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \begin{cases} -2x_k |x|^{-4} x_i, & k \neq i \\ |x|^{-2} - 2|x|^{-4} x_k^2, & k = i \end{cases}$$

тенгликни эътиборга олиб, $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{1}{|x|^2} \frac{\partial u}{\partial y_k} - \frac{2x_k}{|x|^3} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial u}{\partial y_i} =$$

$$= \frac{1}{|x|^2} \frac{\partial}{\partial y_k} |y|^{n-2} v(y) - \frac{2x_k}{|x|^3} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial}{\partial y_i} |y|^{n-2} v(y) =$$

$$= \frac{1}{|x|^2} (n-2) |y|^{n-3} \frac{y_k}{|y|} v |y| + \frac{1}{|x|^2} |y|^{n-2} \frac{\partial v(y)}{\partial y_k} -$$

$$- \frac{2x_k}{|x|^3} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|} |y|^{n-3} \left[|y| \frac{\partial v}{\partial y_i} + (n-2) \frac{y_i}{|y|} v(y) \right] =$$

$$= \frac{1}{|x|^n} \frac{\partial v(y)}{\partial y} + \frac{n-2}{|x|^{n-1}} \frac{y_k}{|y|} v(y) -$$

$$- \frac{1}{|x|^{n-1}} \frac{2x_k}{|x|} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|} \left[|y| \frac{\partial v}{\partial y_i} + (n-2) \frac{y_i}{|y|} v(y) \right].$$

$|y| < \varepsilon$ атрофда $\upsilon(y)$, $\frac{\partial \upsilon(y)}{\partial y_i}$ функциялар ва $\frac{y_k}{|y|}$ нисбат, бу атрофнинг инверсияси натижасида ҳосил бўлган образида $\frac{x_k}{|x|}$ нисбат чегараланган бўлгани учун, шундай $A_k (k = 1, 2, 3, ..., n)$ сонлар мавжудки, $\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| < \frac{A_k}{|x|^{n-1}}$ тенгсизлик бажарилади. A_k сонларнинг энг каттасини A орқали белгилаб олсак, (21) тенгсизликлар $i = 1$ бўлган ҳолда келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш бошқа i лар учун (21) тенгсизликнинг ўринли бўлишига ишонч ҳосил қилиш мумкин. $n = 2$ бўлган ҳолда ҳосилалар учун камайиш тартиби, (21) формулаларга нисбатан бирга ортиқ бўлган баҳони ҳосил қилиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{1}{|x|^2} \frac{\partial \upsilon(y)}{\partial y_k} - \frac{2x_k}{|x|^3} \left(\frac{x_1}{|x|} \frac{\partial \upsilon}{\partial y_1} + \frac{x_2}{|x|} \frac{\partial \upsilon}{\partial y_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{|x|^2} \left[\frac{\partial \upsilon}{\partial y_k} - \frac{2x_k}{|x|} \left(\frac{x_1}{|x|} \frac{\partial \upsilon(y)}{\partial y_1} + \frac{x_2}{|x|} \frac{\partial \upsilon(y)}{\partial y_2} \right) \right].$$

Бундан дарҳол (22) тенгсизликлар келиб чиқади.

2- §. Лаплас тенгламаси учун Дирихле ва Нейман масалалари. Грин функцияси

1. Дирихле ва Нейман масалаларининг қўйилиши ҳамда улар ечимларининг ягоналиги. $D - E^n$ фазода чекли соҳа бўлиб, унинг чегараси S бўлаклари силлиқ сиртдан иборат бўлсин. $E^n - \overline{D}$ ни D_1 орқали белгилаб оламиз, яъни $D_1 = E^n - \overline{D}$.

Дирихленинг ички масаласи. D соҳада гармоник $\overline{D} = D \cup S$да узлуксиз ва

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in S, \quad x \in D \tag{23}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи $u(x)$ функция топилсин.

Дирихленинг ташқи масаласи. D_1 соҳада гармоник шундай $u(x)$ функция топилсинки, у S да берилган узлуксиз қийматларни қабул қилиб, яъни

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in S, \qquad x \in D_1 \tag{24}$$

$|x| \to \infty$ да $n > 2$ бўлган ҳолда $|x|^{2-n}$ дан секин бўлмай нолга интилсин, $n = 2$ да эса чекли лимитга интилсин.

Нейманнинг ички масаласи. D соҳада гармоник, $D \cup S$ да ўзининг биринчи тартибли ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлган $u(x)$ функция топилсинки, унинг нормал бўйича олинган ҳосиласи S да аввалдан берилган қийматларга тенг бўлсин, яъни

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\partial u}{\partial n} = \psi(x_0), \quad x \in D, \quad x_0 \in S, \tag{25}$$

бу ерда n — S га ўтказилган нормал.

Нейманнинг ташқи масаласи. D_1 соҳада гармоник шундай $u(x)$ функция топилсинки, унинг нормал бўйича олинган ҳосиласи S да аввалдан берилган қийматларни қабул қилсин, яъни

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\partial u}{\partial n} = \psi(x_0), \quad x \in D_1, \quad x_0 \in S \tag{26}$$

ҳамда функциянинг ўзи чексиз узоқлашган нуқтада $n > 2$ бўлган ҳолда нолга, $n = 2$ да эса чекли лимитга интилсин.

Дирихленинг ички ва ташқи масалалари биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

Ҳақиқатан ҳам, бу масалалар бир хил чегаравий шартларни қаноатлантирувчи иккита u_1 ва u_2 ечимга эга бўлсин. У ҳолда, $u = u_1 - u_2$ функция (1)тенгламани ва $u|_S = 0$ шартни қаноатлантиради. Аввал ички масалани кўрамиз. Экстремум принципининг иккинчи натижасига кўра барча D соҳада $u \equiv 0$ бўлади, демак $u_1 = u_2$.

Энди ташқи масалани текширамиз.

Аввал $n > 2$ бўлсин. Шартга асосан $u(x)$ функция D_1 соҳада гармоник, шу билан бирга $u|_S = 0$ ва x нуқта координата бошидан етарли узоқлашганда $|u(x)| \le \frac{C}{|x|^{n-2}}$, $C = \text{const}$, тенгсизлик ўринли бўлади.

Маркази координата бошида ва радиуси R га тенг бўлган ҳамда S сиртни тўла ўз ичига олувчи S_R сферани оламиз. $u(x)$ функцияни S сирт ва S_R сфера билан чегараланган D_R соҳада қараймиз. Агар радиус етарли катта бўлса, S_R сферада $|u(x)| \leq \frac{C}{R^{n-2}}$ тенгсизлик бажарилади. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонни оламиз ва R ни шундай катта қилиб танлаймизки, $CR^{2-n} < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилсин. D_R соҳада $u(x)$ функция ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига ёки S да, ёки S_R да эришади, демак, бу қийматлар модул бўйича ε дан катта эмас. $x - D_1$ соҳанинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Етарли катта R да бу нуқта D_R га тушади, шунинг учун ҳам $|u| < \varepsilon$. Аммо ε — ихтиёрий мусбат сон бўлганлиги сабабли $u(x) = 0$, демак $u_1(x) = u_2(x)$.

Агар $n = 2$ бўлса, конформ алмаштириш (масалан каср чизиқли) натижасида чексиз соҳани чекли соҳага ўтказиш мумкин. Бунда Лаплас тенгламаси яна Лаплас тенгламасига, чексиз соҳада гармоник бўлган $u(x)$ функция эса чекли соҳада гармоник бўлган функцияга ўтади ва бу функция соҳанинг чегарасида нолга тенг бўлади. Шундай қилиб, чексиз соҳа учун Дирихле масаласи ечимининг ягоналиги исбот қилинган чекли соҳадаги Дирихле масаласига келади.

Лаплас тенгламаси учун Нейманнинг ички масаласи ўзгармас сон аниқлигида топилади, яъни масаланинг иккита ечими бир-биридан ўзгармас сон билан фарқ қилади.

Фараз қилайлик, бу масала бир хил (25) шартларни қаноатлантирувчи иккита $u_1(x)$ ва $u_2(x)$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда, бу ечимларнинг айирмаси $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ функция (1) тенгламани ва $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S = 0$ шартни қаноатлантиради. Охирги шартни қаноатлантирувчи гармоник функция 2-банддаги 2) хоссага асосан барча D соҳада ўзгармас сонга тенг бўлади, яъни $u(x) = \text{const}$ ёки $u_1(x) = u_2(x) = \text{const}$. Нейманнинг ички масаласи ҳамма вақт ҳам ечимга эга бўлавермайди. 2- банддаги 3) хоссага асосан

$$\int_S \psi dS = 0 \tag{27}$$

бўлиши керак. Бу шарт Нейман ички масаласининг ечимга эга бўлиши учун зарурий шартдир. Кейинчалик (27)нинг етарли шарт эканини ҳам кўрсатамиз.

Агар фазонинг ўлчови $n>2$ бўлса, у ҳолда Нейманнинг ташқи масаласи биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

Бу фикрнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш учун юқорида киритилган чегаралари S ва S_R дан иборат бўлган D_R соҳага (8) формулани қўллаймиз:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{D_R}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx=\int_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS+\int_{S_R}u\frac{\partial u}{\partial n}dS_R\,. \qquad (28)$$

S_R сфера бўйича олинган интегрални баҳолаймиз. R етарли катта бўлганда 1-§ нинг 6- бандидаги леммага асосан

$$|u(x)|\le\frac{C}{R^{n-2}}\,,\quad\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\le\frac{C_1}{R^{n-1}}\,,\quad C,\ C_1\ -\mathrm{const}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. У ҳолда

$$\left|\int_{S_R}u\frac{\partial u}{\partial n}dS_R\right|\le\frac{CC_1|S_R|}{R^{2n-3}}=\frac{CC_1|S_1|}{R^{n-2}}\xrightarrow[R\to\infty]{}0\,.$$

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0$ бўлгани учун (28) формуладаги S бўйича олинган интеграл нолга тенг. Шундай қилиб, $R\to\infty$ да

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\to 0.$$

Демак, $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$, $i=1,\ \dots,\ n$, $u=\mathrm{const}$. Аммо $|x|\to\infty$ да $u\to 0$ учун, $u=0$ эканлиги келиб чиқади.

Агар $n=2$ бўлса, Нейманнинг ташқи масаласи ўзгармас сон аниқлигида топилади.

Бу ҳолда ҳам худди юқоридагидек, $u=\mathrm{const}$ тенгликка эга бўламиз. Чекли узоқлашган нуқтада $n=2$ да гармоник функция чегераланган бўлгани учун, юқоридаги фикримизнинг тўғрилигига дарҳол ишонч ҳосил қиламиз.

2. Дирихле масаласининг Грин функцияси. Лаплас тенгламаси учун чегараси S сиртдан иборат бўлган бирор D соҳада Дирихле масаласининг Грин функцияси деб, иккита $x,\xi \in D \cup S$ нуқталарнинг функцияси бўлган ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G(x,\xi)$ функцияга айтилади:

1) $G(x,\xi)$ ушбу кўринишга эга

$$G(x,\xi) = E(x,\xi) + g(x,\xi)\,, \tag{29}$$

бу ерда $E(x,\xi)$ — Лаплас тенгламасининг фундаментал ечими, $g(x,\xi)$ эса, $x \in D$ бўйича ҳам, $\xi \in D$ бўйича ҳам гармоник функциядир;

2) x ёки ξ нуқта D соҳанинг S чегарасида ётганда

$$G(x,\xi) = 0\,. \tag{30}$$

Бу таърифга асосан $G(x,\xi)$ функция ξ нуқтадан ташқари барча D соҳада гармоник функциядир.

Бу таърифдан яна шу нарса кўринадики, G функция $g(x,\xi)$ ёрдамида аниқланади, $g(x,\xi)$ эса, ўз навбатида D да гармоник бўлиб, S да $-\ln\frac{1}{r}$, $n = 2$ ёки $-\frac{1}{r^{n-2}}$, $n > 2$ қийматларга тенг. Бу ерда $g(x,\xi)$ шундай гармоник функцияки, у чегарада махсус қийматларни қабул қилади. Айрим ҳолларда бундай функцияни топиш анча қулай бўлади. Бу маълум бўлгандан сўнг чегарада ихтиёрий қийматни қабул қилувчи гармоник функцияни топиш мумкин бўлади. Агар (12) ёки (13) формулада $u(x)$ ни Дирихле масаласининг ечими деб ҳисоблаб, $E(x,\xi)$ ўрнига $G(x,\xi)$ ни олсак, у ҳолда (12) формулани, тўғрироғи (10) формулани чиқаришдаги мулоҳазаларни қайтариб, ҳамда (29) ва (30)ни эътиборга олсак,

$$u(x) = -\frac{1}{(n-2)|S_1|}\int\limits_S \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n}\,\varphi(\xi)\,d_\xi S \tag{31}$$

формула ҳосил бўлади.

Агар Грин функцияси мавжуд бўлса, (31) формула Дирихле масаласининг ечимини беради. (31) формула билан ифодаланган $u(x)$ функциянинг гармониклиги $G(x,\xi)$ нинг $x \neq \xi$ да x нинг гармоник функцияси эканлигидан келиб чиқади. Бу функциянинг

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in S, \quad x \in D$$

чегаравий шартни қаноатлантириши алоҳида исбот талаб қилади.

Грин функциясининг хоссалари

1) Барча D соҳада $G(x,\xi) \geq 0$. Ҳақиқатан ҳам, $G(x,\xi)$ функциянинг махсус нуқтаси ξ ни марказ қилиб етарли кичик δ радиусли $Q_\delta(\xi)$ шар чизамиз, бу шарнинг чегарасини S_δ орқали, $D - Q_\delta$ни эса D_δ орқали белгилаб оламиз. $\lim\limits_{x\to\xi} G(x,\xi) = +\infty$ бўлгани сабабли етарли кичик δ учун $Q_\delta(\xi)$ шарда $G(x,\xi) > 0$ бўлади.

Демак, D_δсоҳанинг $S + S_\delta$ чегарасида $G(x,\xi) \geq 0$.

Бундан, экстремум принципига асосан, $x\in D_\delta$ нуқталар учун ҳам $G(x,\xi) \geq 0$ бўлади. Бундан дарҳол барча $D \cup S$ да $G(x,\xi) \geq 0$ эканлиги келиб чиқади.

2) $x\in D$ нуқталарда $-\frac{1}{(n-2)|S_1|} \int\limits_S \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n} d_\xi S = 1$.

Бу тенглик (31) формуладан барча D да $u(x) = 1$ бўлганда дарҳол келиб чиқади.

3) $G(x,\xi)$ Грин функцияси x ва ξ нуқталарга нисбатан симметрик функциядир, яъни

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Бу хоссани исботлаш учун $x, \xi \in D$ нуқталарни марказ қилиб, етарли кичик ε радиусли $Q_\varepsilon(x) : |y - x| \leq \varepsilon$, $Q_\varepsilon^1(\xi) : |y - \xi| \leq \varepsilon$ шарларни чизамиз. Бу шарларнинг чегарасини C ва C^1 орқали белгилаб оламиз. $D - Q_\varepsilon(x) - Q_\varepsilon^1(\xi) = D_\varepsilon$ десак, D_εсоҳада $G(y,x)$, $G(y,\xi)$ функциялар гармоник бўлади.

Бу ҳолда (7) га асосон, ушбу

$$\int\limits_{S+C+C^1} \left[G(y,x)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n} - G(y,\xi)\frac{\partial G(y,x)}{\partial n} \right] dS = 0$$

тенглик ўринли бўлади. $G|_S = 0$ бўлгани учун

$$\int_C \left[G(y,x)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n} - G(y,\xi)\frac{\partial G(y,x)}{\partial n} \right] dC +$$
$$+\int_{C^1} \left[G(y,x)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n} - G(y,\xi)\frac{\partial G(y,x)}{\partial n} \right] dC^1 = 0 \qquad (32)$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундаги биринчи интегрални J_1 орқали белгилаб оламиз, яъни

$$J_1 = \int_C G(y,x)\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n} dC .$$

Бунда $y \in C, x \overline{\in} C$ бўлгани сабабли, C да

$$\left| \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n} \right| \le A,\ A = \text{const},\quad |J_1| \le A\int_C G(y,x)\,dS$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

$$G(y,x) = \frac{1}{r^{n-2}} + g(y,x)$$

ни эътиборга олсак, C да $r = \varepsilon$ бўлгани учун

$$|G|_C \le \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} + A_1,\ A_1 = \text{const}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бунга асосан

$$|J_1| \le \frac{A}{\varepsilon^{n-2}}\int_C dC + AA_1\int_C dC = \frac{A}{\varepsilon^{n-2}}|S_1|\varepsilon^{n-1} + AA_1|S_1|\varepsilon^{n-1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 .$$

(32) тенгликдаги иккинчи интегрални J_2 орқали белгилаб оламиз, яъни

$$J_2 = -\int_C G(y,\xi)\frac{\partial G(y,x)}{\partial n} dC .$$

n — D_ε соҳага нисбатан ташқи нормал бўлгани учун $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon}$. Шу сабабли C да

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} .$$

Демак,

$$J_2 = \int_C G(y,\xi) \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\varepsilon^{2-n} + g(y,x)\right] dC =$$

$$= (2-n)\varepsilon^{1-n}\int_C G(y,\xi)\, dC + \int_C G(y,\xi) \frac{\partial g(y,x)}{\partial n}\Big|_{n=\varepsilon} dC.$$

Равшанки,

$$\int_C G(y,\xi) \frac{\partial g(y,x)}{\partial n}\Big|_{n=\varepsilon} dC \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

$y = x + \theta\varepsilon$ алмаштиришни бажарсак, $y \in C$ бўлганда, $\theta \in S_1$ — бирлик сфера бўлади. Шу сабабли

$$\int_C G(y,\xi)\, dC = \int_{S_1} G(x+\theta\varepsilon,\xi)\varepsilon^{n-1} dS_1.$$

Бунга асосан,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_2 = (2-n)|S_1|\, G(x,\xi).$$

Худди шунга ўхшаш

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C^1} \left[G(y,x) \frac{\partial G(y,\xi)}{\partial n} - G(y,\xi) \frac{\partial G(y,x)}{\partial n} \right] dC^1 = -(2-n)|S_1|\, G(\xi,x).$$

Демак,

$$G(x,\xi) = G(\xi,x).$$

3. Дирихле масаласининг шар учун ечилиши. Агар D соҳа шардан иборат бўлса, Грин функциясининг аниқ ифодасини топиш мумкин. Бу ҳолда (31) формула билан аниқланган гармоник функциянинг чегаравий шартни қаноатлантириш ини кўрсатиш ҳам қийин эмас.

Шундай қилиб, D соҳа маркази координата бошида ва радиуси R га тенг бўлган шар бўлсин. Уни чегаралаб турган сферани S_R орқали белгилаб оламиз. x ва ξ бу шарнинг ички нуқталари бўлсин.

Фараз қилайлик, $x \neq 0$ бўлиб, x га S_R сферага нисбатан симметрик нуқта y бўлсин, яъни

$$|x| \cdot |y| = R^2. \tag{32}$$

$|x| < R$ бўлганлиги сабабли, y нуқта S_R сферадан ташқарида ётади. Ушбу

$$g(x,\xi) = \begin{cases} \ln \dfrac{R}{|x||\xi - y|}, & n = 2 \\ \left(\dfrac{R}{|x||\xi - y|}\right)^{n-2}, & n > 2 \end{cases}$$

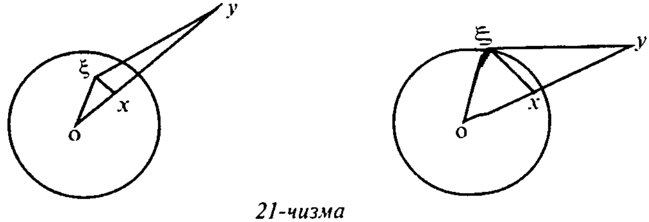
функция y нуқтадан ташқари барча ξ нуқталарда гармоник, хусусий ҳолда D соҳада ҳам гармоник бўлади. Текшириб кўриш қийин эмаски, $\xi \in S_R$ бўлганда бу функция $\ln \frac{1}{|x-\xi|}$, $n = 2$, $|x - \xi|^{2-n}$, $n > 2$ қийматни қабул қилади. Ҳақиқатан ҳам, агар $\xi \in S_R$ бўлса, $Ox\xi$ ва $O\xi y$ учбурчаклар (21- чизма) ўхшаш бўлади, чунки улар умумий O бурчакка эга ва бу бурчакни ҳосил қилган томонлари (32′) тенгликка асосан пропорционалдир.

Демак,

$$\frac{|x-\xi|}{|\xi - y|} = \frac{|x|}{R} \quad \text{ёки} \quad \frac{1}{|x-\xi|} = \frac{R}{|x||\xi - y|}.$$

Шундай қилиб, ушбу

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left[\ln \dfrac{1}{|x-\xi|} - \ln \dfrac{R}{|x||\xi - y|}\right] = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{|x||\xi - y|}{R|x-\xi|}, & n = 2, \\ \dfrac{1}{(n-2)|S_1|}\left[\dfrac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \left(\dfrac{R}{|x||\xi - y|}\right)^{n-2}\right], & n > 2 \end{cases} \tag{33}$$



21-чизма

функция соҳа шардан иборат бўлган ҳолда Грин функциясининг барча шартларини қаноатлантиради.

Бу функциядан фойдаланиб, (31) формулага асосан, шарда гармоник ва S_R сферада олдиндан берилган узлуксиз $\varphi(x)$ функцияга тенг бўладиган функцияни ҳосил қиламиз.

Агар θ орқали $\overline{Ox}$ ва $\overline{O\xi}$ векторлар орасидаги бурчакни белгилаб олсак, у ҳолда

$$|x-\xi| = \sqrt{|x|^2 + |\xi|^2 - 2|\xi||x|\cos\theta},$$

$$|\xi - y| = \sqrt{|y|^2 + |\xi|^2 - 2|\xi||y|\cos\theta}.$$

x ва y нуқталар симметрик бўлгани учун $|y| = \dfrac{R^2}{|x|}$.

Бунга асосан аввалги тенгликни бундай ёзиб оламиз:

$$|x-\xi| = \sqrt{|x|^2 + |\xi|^2 - 2|\xi||x|\cos\theta}, \quad |\xi - y| =$$

$$= \sqrt{|\xi|^2 + \frac{R^4}{|x|^2} - 2|\xi|\frac{R^2}{|x|}\cos\theta} =$$

$$= \frac{R}{|x|}\sqrt{R^2 + \frac{|\xi|^2|x|^2}{R^2} - 2|\xi||x|\cos\theta}.$$

Шар учун ташқи нормал ва радиуснинг йўналишлари устма-уст тушгани учун

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial|\xi|}\bigg|_{|\xi|=R}.$$

Бу ҳосилани ҳисоблаш учун олдинги тенгликни эътиборга олиб, $G(x,\xi)$ ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$G(x,\xi) = \frac{1}{(n-2)|S_1|}\left[|x-\xi|^{2-n} - \left(\frac{|x||\xi-y|}{R}\right)^{2-n}\right] =$$

$$= \frac{1}{(n-2)|S_1|}\left[\left(|x|^2 + |\xi|^2 - 2|x||\xi|\cos\theta\right)^{\frac{2-n}{2}} - \right.$$

$$\left. - \left(R^2 + \frac{|x|^2|\xi|^2}{R^2} - 2|x||\xi|\cos\theta\right)^{\frac{2-n}{2}}\right].$$

Бунга асосан,

$$\left.\frac{\partial G}{\partial|\xi|}\right|_{|\xi|=R}=\frac{1}{(n-2)|S_1|}\left[\frac{2-n}{2}\left(|x|^2+|\xi|^2-\right.\right.$$

$$\left.-2|x||\xi|\cos\theta\right)^{-\frac{n}{2}}\left(2|\xi|-2|x|\cos\theta\right)-$$

$$\left.\left.-\frac{2-n}{2}\left(R^2+\frac{|x|^2|\xi|^2}{R^2}-2|x||\xi|\cos\theta\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot\left(2\frac{|\xi||x|^2}{R^2}-2|x|\cos\theta\right)\right]\right|_{|\xi|=R}=$$

$$=-\frac{1}{|S_1|}\frac{R^2-|x|^2}{R\left(R^2+|x|^2-2R|x|\cos\theta\right)^{\frac{n}{2}}}=-\frac{1}{|S_1|}\frac{R^2-|x|^2}{R|x-\xi|^n}.$$

Шундай қилиб, D соҳа маркази координата бошида ва радиуси R га тенг шар бўлган ҳолда (31) формула ушбу кўринишга эга бўлади.

$$u(x)=\frac{1}{|S_1|R}\int\limits_{S_R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^n}\varphi(\xi)\,dS_R \tag{34}$$

ёки

$$u(x)=\frac{1}{|S_1|R}\int\limits_{S_R}\frac{R^2-|x|^2}{\left(R^2-|x|^2-2R|x|\cos\theta\right)^{\frac{n}{2}}}\varphi(\xi)\,dS_R. \tag{34'}$$

$n=2$ бўлган ҳолда (33) дан фойдаланиб, яна (34) ёки (34′) формулани ҳосил қиламиз. (34) ёки (34′) формула *Пуассон формуласи* дейилади, $\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^n}$ унинг *ядроси* деб аталади. Агар $\varphi(x_0)$ функция S_R сферада узлуксиз бўлса, Пуассон формуласи билан аниқланган $u(x)$ функция S_R сфера билан чегараланган шарда гармоник бўлиб,

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=\varphi(x_0),\ x_0\in S_R \tag{35}$$

шартни қаноатлантиради.

$u(x)$ функциянинг гармоник бўлишини (31) формулани ҳосил қилганда айтиб ўтган эдик. Энди (35) шартнинг бажарилишини кўрсатамиз. Грин функциясининг 2) хоссасига асосан ёки тўғридан-тўғри (34) формуладан

$$\frac{1}{|S_1|R}\int_{S_R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^n}dS_R=1 \tag{36}$$

x нуқта S_R сферанинг ичидан бу сферада ётувчи x_0 нуқтага интилаётган бўлсин. (36) формулани $\varphi(x_0)$ га кўпайтириб, сўнгра уни (34) дан айирамиз:

$$u(x)-\varphi(x_0)=\frac{1}{|S_1|R}\int_{S_R}\left[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)\right]\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^n}dS_R. \tag{37}$$

$\varphi(\xi)$ функция S_R сферада, демак, x_0 нуқтада узлуксизлигидан ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун S_R да x_0 нуқтанинг шундай $\sigma(x_0)$ атрофи мавжуд бўладики, унга тегишли барча ξ нуқталар учун

$$\left|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $u(x)-\varphi(x_0)$ айирмани баҳолаймиз. Шу мақсадда (37) интегрални қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$u(x)-\varphi(x_0)=\frac{1}{|S_1|R}\int_{\sigma}\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^n}\left[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)\right]d\sigma+$$

$$+\frac{1}{|S_1|R}\int_{S_{R-\sigma}}\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^n}\left[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)\right]dS_R=J_1+J_2.$$

Бундан

$$|J_1|=\frac{1}{|S_1|R}\left|\int_{\sigma}\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^n}\left[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)\right]d\sigma\right|<$$

$$<\frac{1}{|S_1|R}\frac{\varepsilon}{2}\int_{\sigma}\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^n}d\sigma<\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{|S_1|R}\int_{S_R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^n}dS_R=\frac{\varepsilon}{2}.$$

J_1 интеграл учун x нуқтанинг ҳолатига (яъни шарнинг қайси қисмида ётишига) боғлиқ бўлмаган баҳони ҳосил қилдик. J_2 интегрални x ва x_0 нуқталарни бир-бирига яқин олиш натижасида етарли кичик қилиб олиш мумкин. $\varphi(x)$ функция ёпиқ тўпламда узлуксиз бўлгани учун у чегараланган бўлади, яъни

$$|\varphi(\xi)| \leq M, \ |\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| \leq 2M .$$

Бунга асосан

$$| J_2 | \leq \frac{2M}{|S_1|R} \int\limits_{S_R - \sigma} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^n} dS_R .$$

x нуқтани x_0 га етарли яқин қилиб олсак, яъни $|x| \to R$ да $\xi \in S_R - \sigma$ бўлгани учун $|x - \xi| \neq 0$ бўлади. Шу сабабли, $|J_2| < \varepsilon/2$ қилиб олиш мумкин. Демак,

$$|u(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \text{ , яъни } \lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \ \forall \ x_0 \in S_R.$$

Энди $u(x)$ функция $|x - x_0| < R$ шарда гармоник, шарнинг чегараларида узлуксиз бўлиб,

$$\lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y), \quad |x - x_0| < R, \quad |y - x_0| = R$$

шартни қаноатлантирсин. У ҳолда $w(z) = u(z + x_0)$ функция $|z| < R$ шарда гармоник, $|z| \leq R$ да узлуксиз бўлиб,

$$\lim_{z \to t} w(x) = \varphi(t + x_0), \quad |z| < R, \quad |t| = R$$

шартни қаноатлантиради. (34) формулага асосан

$$w(x) = \frac{1}{|S_1|R} \int\limits_{S_R} \frac{R^2 - |z|^2}{|z - t|^n} \varphi(t + x_0) dS_R, \ S_R : |t| = R.$$

Бундан дарҳол, $t + x_0 = \xi$, $z = x - x_0$ десак, $|x - x_0| < R$ шар учун Пуассон формуласи келиб чиқади:

$$u(x) = w(z - x_0) = \frac{1}{|S_1|R} \int\limits_{S_R} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|x - \xi|^n} \varphi(\xi)\, dS_R, \qquad S_R : |\xi - x_0| = R. \tag{38}$$

(38) формуладан $x = x_0$ бўлганда, яна (16) ўрта арифметик формула келиб чиқади.

4. Шарнинг ташқариси учун Дирихле масаласи. D соҳа маркази координата бошида ва радиуси R га тенг бўлган $S_R: |x| = R$ сфера билан чегараланган $|x| < R$ шарнинг ташқи қисмидан иборат бўлсин. D да гармоник ва $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0)$ шартни қаноатлантирувчи функция топилсин. Агар $u(x)$ функция $|x| < R$ шарда гармоник бўлса, Кельвин теоремасига асосан

$$\upsilon(y) = \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right)$$

функция S_R сферага нисбатан x нуқтага симметрик бўлган, яъни $|x||y| = R^2$ шартни қаноатлантирувчи y нуқталарда гармоник бўлади. $u(x)$ функция эса, (34) формула билан аниқланади. Демак,

$$\upsilon(y) = \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} u\left(\frac{R^2}{|y|^2} y\right) = \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} \frac{1}{|S_1|R} \int\limits_{S_R} \frac{R^2 - \frac{R^4}{|y|^4} y^2}{\left|\frac{R^2}{|y|^2} y - \xi\right|^n} \varphi(\xi)\, dS_R.$$

Ушбу

$$\left|\frac{R^2}{|y|^2} y - \xi\right| = \left[\left(\frac{R^2}{|y|^2} y - \xi\right)^2\right]^{1/2} = \left(\frac{R^4}{|y|^2} - 2y\xi \frac{R^2}{|y|^2} + \xi^2\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{R}{|y|}\left(R^2 - 2y\xi + \xi^2 \frac{|y|^2}{R^2}\right)^{1/2} = \frac{R}{|y|}|y - \xi|, \quad |\xi|^2 = R^2$$

тенгликни эътиборга олсак, олдинги формула қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\upsilon(y)=\frac{1}{|S_1|R}\int\limits_{S_R}\frac{|y|^2-R^2}{|y-\xi|^n}\varphi(\xi)\,dS_R. \tag{39}$$

Бу формула шарнинг ташқариси учун *Пуассон формуласи* дейилади.

Агар y нуқта шардан ташқарида ётиб, сферадаги x_0 нуқтага интилса, $\upsilon(y)$ функция $\varphi(x_0)$ га интилади, чунки x нуқта шарнинг ичида ётиб, x_0 нуқтага интилганда $u(x)$ функция $\varphi(x_0)$ қийматга интилади.

Энди $\upsilon(y)$ функциянинг чексиз узоқлашган нуқтадаги характерини текширамиз:

$$|y-\xi|\geq|y|-|\xi|=|y|-R$$

тенгсизликка асосан

$$|\upsilon(y)|\leq\frac{|y|^2-R^2}{(|y|-R)^n}\frac{1}{|S_1|R}\int\limits_{S_R}\varphi(\xi)\,dS_R=C\frac{|y|+R}{(|y|-R)^{n-1}},$$

$$C\leq\frac{1}{|S_1|R}\int\limits_{S_R}|\varphi(\xi)|\,dS_R$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бизни $|y|$ нинг етарли катта қийматлари қизиқтираётгани учун $|y|>2R$ деб ҳисоблашимиз мумкин. Бу ҳолда

$$R<\frac{|y|}{2},\ |y|-R>\frac{|y|}{2},$$

$$|\upsilon(y)|\leq C\frac{|y|+\frac{|y|}{2}}{\left(\frac{|y|}{2}\right)^{n-1}}<C\frac{2|y|}{\left(\frac{|y|}{2}\right)^{n-1}}=\frac{2^nC}{|y|^{n-2}}.$$

Шундай қилиб, $\upsilon(y)$ функция $y\to 0$ да $n=2$ учун чегараланган бўлади. $n>2$ учун нолга интилади.

5. Ярим фазо учун Дирихле масаласини ечиш. Энди D соҳа $x_n>0$ ярим фазо билан устма-уст тушган ҳолни кўрамиз. Дирихле масаласининг изланаётган ечими чегараланган бўлсин деб ҳисоблаймиз. x ва ξ — ярим фазонинг нуқталари бўлиб, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ нуқта $\xi_n = 0$ текисликка нисбатан ξ нуқтага симметрик нуқта бўлсин. $g(x, \xi) = -E(x, \xi')$ функция $x_n > 0$, $\xi_n > 0$ бўлганда x бўйича ҳам, ξ бўйича ҳам гармоник функция бўлади. Бундан ташқари $\xi_n = 0$ да $E(x, \xi) - E(x, \xi') = 0$ бўлади. У ҳолда

$$G(x, \xi) = E(x, \xi) - E(x, \xi') \tag{40}$$

функция текширилаётган ярим фазо учун Грин функциясидан иборат бўлади. Дирихле масаласининг изланаётган $u(x)$ ечими учун (31) формула ўринли деб ҳисоблаймиз. Шундай ҳам бўлади, агар барча $x \in D$ лар учун $|x| \to \infty$ да ушбу

$$|u(x)| \le \frac{A}{|x|^h}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \le \frac{A}{|x|^{h+1}}, \qquad i = 1, \dots, n$$

тенгсизликлар бажарилса, бунда A ва h — мусбат сонлар.

Бунга мос равишда етарли катта $\rho = \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ учун $y_n = 0$ текисликда берилган $\varphi(y_1, \dots, y_{n-1})$ функция ҳам $|\varphi| < \frac{A}{\rho^h}$ шартни қаноатлантириши керак. (40) Грин функциясининг (3 1)даги нормал бўйича ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial \xi_n} = \frac{\partial}{\partial \xi_n}\left[E(x,\xi) - E(x,\xi')\right] = -\frac{\partial}{\partial \xi_n}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2\right]^{\frac{2-n}{2}} - \right.$$

$$\left. - \left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \xi_i)^2 + (x_n + \xi_n)^2\right]^{\frac{2-n}{2}}\right\} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2\right]^{-\frac{n}{2}} (2-n)(x_n - \xi_n) +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \xi_i)^2 + (x_n + \xi_n)^2\right]^{-\frac{n}{2}} (2-n)(x_n + \xi_n).$$

Бунга асосан

$$-\frac{\partial G}{\partial \xi_n}\bigg|_{\xi_n=0} = -\frac{2(n-2)x_n}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_1-\xi_1)^2+x_n{}^2\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

Бу ифодани (31) формулага қўйиб, ярим фазо $x_n > 0$ учун чегаравий шарти

$$\lim_{x\to y} u(x) = \varphi\left(y_1,\dots,y_{n-1}\right),\ \ x_n > 0,\ \ y_n = 0 \qquad (41)$$

бўлган Дирихле масаласининг ечимини берувчи қуйидаги Пуассон формуласини ҳосил қиламиз:

$$u(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} x_n \int\limits_{\xi_n=0} \frac{\varphi(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-\xi_i)^2+x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}} d\xi_1\dots d\xi_{n-1} \qquad (42)$$

ёки

$$u(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} x_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-\xi_i)^2+x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}} d\xi_1\dots d\xi_{n-1}, \qquad (42')$$

бунда берилган $\varphi(\xi)$ функция узлуксиз ва чегараланган.

(42′) формула билан аниқланган $u(x)$ функция Лаплас тенгламасини қаноатлантириши равшан, бу функциянинг (41) шартни қаноатлантиришини кўрсатамиз.

E^n фазода ихтиёрий R радиусли шар Q_R учун

$$\int\limits_{Q_R} u(\xi)\,d\xi = \int\limits_0^R dr \int\limits_{S_r} u\,dS_r$$

формула ўринлидир ((17) формулани ҳосил қилишга қаралсин). Шу билан бирга

$$|S_r| = r^{n-1}|S_1| = 2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1}.$$

Буларни эътиборга олиб $r^2 = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \xi_i)^2$ белгилашни киритсак, $R \to \infty$ да ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{\left(r^2+x_n^2\right)^{\frac{n}{2}}} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} = 2\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{r^{n-2}x_n}{\left(r^2+x_n^2\right)^{\frac{n}{2}}} dr$$

тенгликка эга бўламиз. $x_n > 0$ бўлгани учун $t = \frac{x_n}{r}$ алмаштиришни бажарсак, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$2\int_0^{\infty} \frac{r^{n-2}x_n}{\left(r^2+x_n^2\right)^{\frac{n}{2}}} dr = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^{\frac{n}{2}}}.$$

Охирги интегралда

$$s = \frac{1}{1+t^2}$$

алмаштириш бажарамиз. У ҳолда

$$2\int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^{\frac{n}{2}}} = \int_0^1 s^{\frac{n-3}{2}} (1-s)^{-\frac{1}{2}} ds = B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

чунки $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$. Демак,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\xi_i)^2+x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} = 1. \qquad (43)$$

Агар $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$, $x_n > 0$ ярим фазо чегарасидаги бирор нуқта бўлса, (42′) ва (43) га асосан

$$u(x)-\varphi(y)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_n}{\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\xi_i)^2+x_n^2\right]^{\frac{n}{2}}}\times$$
$$\times\left[\varphi(\xi)-\varphi(y)\right]d\xi_1\ldots d\xi_{n-1} \tag{44}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $\sigma(y)$ орқали y нуқтанинг

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(y_i-\xi_i)^2}<\delta$$

шарт билан аниқланувчи атрофини белгилаб оламиз. $\varphi(\xi)$ функция узлуксиз бўлгани учун δ ни етарли кичик қилиб танлаб олиш мумкинки, $\sigma(y)$ атрофига тегишли бўлган $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$ нуқталар учун

$$|\varphi(\xi)-\varphi(y)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. (44) тенгликни $\sigma(y)$ атроф ва унинг ташқариси бўйича олинган икки интегралнинг йиғиндиси сифатида ёзиб оламиз, сўнгра $|\varphi(\xi)|\leq M$ бўлганлиги сабабли

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-y_i)^2}<\frac{\delta}{2}$$

бўлганда

$$|u(x)-\varphi(y)|\leq\varepsilon+2Mx_n\int\limits_{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(\xi_i-y_i)^2}\geq\delta}^{\infty}\frac{d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}}{\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-\xi_i)^2\right]^{\frac{n}{2}}}\leq\varepsilon+M_\delta x_n,$$

бу ерда M_δ – δ га боғлиқ бўлган бирор мусбат ўзгармас.

Агар x_n ни етарли кичик деб ҳисобласак,

$$|u(x)-\varphi(y)|<2\varepsilon,$$

яъни $x_n > 0$ ярим фазодаги x нуқта унинг чегарасидаги y нуқтага интилганда $u(x) \to \varphi(y)$.

6. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага тескари теорема. $D - E^n$ фазонинг ихтиёрий чекли соҳаси ва $u(x) \in C(D)$ бўлсин.

Агар ўзининг чегараси билан D соҳада тўла ётадиган шар учун u(x) функция

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1| R^{n-1}} \int_{S_R} u(\xi)\, dS_R$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда бу функция D да гармоник бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, маркази x_0 нуқтада ва радиуси R га тенг бўлган шарни Q_R орқали белгилаймиз. $\upsilon(x)$ функция Q_R шарда $(\overline{Q_R} \subset D)$ гармоник бўлиб, $\overline{Q_R}$ да узлуксиз бўлсин ва S_R да $u(x)$ қийматни қабул қилсин. Бундай функциянинг мавжудлиги Пуассон формуласидан келиб чиқади. $\upsilon(x) - u(x)$ айирма Q_R шарда узлуксиз бўлиб, S_R да айнан нолга тенг. Бундан ташқари бу айирма учун ўрта арифметик қиймат ҳақидаги формула ўринли, чунки бу хоссага $\upsilon(x)$ ва $u(x)$ функциялар эга.

Демак, $\upsilon(x) - u(x)$ айирма ўзгармас сондан фарқли бўлса, экстремум принципидаги изоҳга асосан Q_R шарнинг ички нуқталарида максимум ва минимум қийматга эга бўлмайди.

Аммо S_R да $\upsilon(x) - u(x) = 0$ бўлгани учун барча Q_R да $\upsilon(x) - u(x) = 0$, ёки $\upsilon(x) = u(x)$ бўлади. Шундай қилиб, $u(x)$ функция Q_R да гармоник бўлади. x_0 нуқта ихтиёрий бўлганлиги учун $u(x)$ нинг барча D соҳада гармоник функция эканлиги келиб чиқади.

7. Четлаштириладиган (қутилиб бўладиган) махсуслик тўғрисидаги теорема. *Агар $u(x) = u(x_1,\dots, x_n)$ функция D соҳанинг x_0 нуқтасидан ташқари барча нуқталарда гармоник бўлиб, бу нуқтанинг бирор атрофида чегараланган бўлса, u(x) функциянинг x_0 нуқтадаги қийматини шундай аниқлаш мумкинки, натижада у барча D соҳада гармоник бўлади.*

Теоремани исботлаш учун маркази x_0 нуқтада ва радиуси ε га тенг бўлган D соҳада ётувчи Q_ε шар чизамиз. Q_ε нинг чегарасини S_ε орқали белгилаймиз.

Пуассон формуласига асосан Q_ε шарда гармоник бўлган ва S_ε да $u(x)$ билан устма-уст тушадиган $u_1(x)$ функцияни аниқлаймиз. $\delta < \varepsilon$ сонни олиб, Q_ε га концентрик бўлган Q_δ шар чизамиз, S_δ бу шарнинг чегараси бўлсин. Q_ε дан Q_δ ни чиқариб ташлаш натижасида ҳосил бўлган соҳани $Q_{\delta,\varepsilon}$ орқали белгилаб оламиз, $\upsilon(x) = u(x) - u_1(x)$ функция S_ε да нолга тенг ва δ га боғлиқ бўлмаган шундай ўзгармас $C > 0$ сонни кўрсатиш мумкинки, $\max\limits_{x\in Q_{\delta,\varepsilon}} |\upsilon| < C$ бўлади.

Ушбу

$$\upsilon_\delta(x) = \begin{cases} C\dfrac{\ln\frac{r}{\varepsilon}}{\ln\frac{\delta}{\varepsilon}}, & n = 2 \\ C\dfrac{1-\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{2-n}}{1-\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{2-n}}, & n > 2 \end{cases}$$

функцияни текширамиз, бунда $r = |x - x_0|$.

Равшанки, бу функция $Q_{\delta,\varepsilon}$ соҳада гармоник. Агар $x\in S_\varepsilon$, яъни $r = \varepsilon$ бўлса, $\upsilon_\delta(x) = 0$, $x\in S_\delta$, яъни $r = \delta$ бўлса, $\upsilon_\delta(x) = C$ бўлади. Экстремум принципига асосан, $Q_{\delta,\varepsilon}$ соҳада қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$\upsilon_\delta(x) - \upsilon(x) \geq 0,\ \upsilon_\delta(x) + \upsilon(x) \geq 0 .$$

Демак,

$$|\upsilon(x)| \leq \upsilon_\delta(x).$$

Бундан $\delta \to 0$ да лимитга ўтсак, барча Q_ε да эҳтимол x_0 нуқтадан ташқари, $\upsilon(x) = 0$ бўлади. $\upsilon(x_0) = 0$ деб ҳисоблаб, барча Q_ε да $\upsilon(x) = 0$ ёки $u(x) = u_1(x)$ бўлишига эришамиз.

Теореманинг исботидан кўринадики, $u(x)$ функция x_0 нуқта атрофида чегараланган бўлмай, $x \to x_0$ да ушбу

$$u(x) = \begin{cases} o\{\ln r\}, & n = 2 \\ o\{r^{2-n}\}, & n > 2 \end{cases}$$

шартни қаноатлантирса ҳам теорема ўз кучини сақлаб қолади, яъни $u(x)$ функция x_0 махсус нуқта атрофида $\frac{1}{r^{2-n}}\left(\ln\frac{1}{r}, n=2\right)$ га нисбатан секинроқ ўсса теорема тўғри бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\upsilon(x)$ функция $x\in S_\varepsilon$ да нолга тенг. x_0 нуқтанинг кичик атрофида шартга кўра $r^{n-2}\ u(x)$ етарли кичик, $u_1(x)$ функция бу атрофда чегараланган бўлгани учун $r^{n-2}\ u_1(x)$ ҳам етарли кичик бўлади. Шу сабабли

$$\left|\upsilon(x)\right|_{r=\delta} < \left.\frac{\varepsilon(\delta)}{r^{n-2}}\right|_{r=\delta}$$

тенгсизликка эга бўламиз, бунда $\varepsilon(\delta)$ миқдор $\delta\to 0$ да нолга интилади. Экстремум принципига асосан $\upsilon(x)$ функция учун $\frac{\varepsilon(\delta)}{r^{n-2}}$ функция можорант бўлади. Агар x_0 нуқтадан фарқли бирор нуқтада $\upsilon(x)\neq 0$ десак, дарҳол қарама-қаршиликка келамиз, чунки $\frac{\varepsilon(\delta)}{r^{n-2}}$ ни бу нуқтада δ етарли кичик бўлганда етарли кичик қилиб олиш мумкин.

Демак, $u(x_0) = u_1(x_0)$деб олсак, $u(x)$ функция $u_1(x)$ функция билан барча Q_ε да устма-уст тушади.

8. Гарнак тенгсизлиги. Лиувилл ва Гарнак теоремалари. *Агар $u(x)$ функция маркази x_0 нуқтада ва радиуси R га тенг бўлган Q_R шарда манфий бўлмаган гармоник функция бўлса, шарнинг ичидаги x нуқталардаги бу функциянинг қийматлари учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:*

$$R^{n-2}\frac{R-r}{(R+r)^{n-1}}u(x_0)\le u(x)\le R^{n-2}\frac{R+r}{(R-r)^{n-1}}u(x_0). \qquad (45)$$

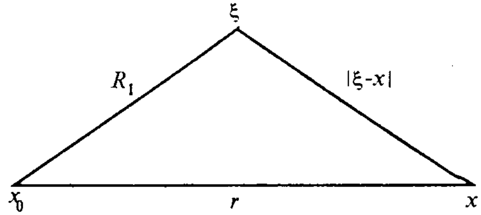
Бунда $r=|x-x_0|$ Q_{R_1} $(R_1<R)$ шарнинг x нуқталари учун

$$u(x)=\frac{1}{|S_1|R_1}\int\limits_{S_{R_1}}\frac{R_1^2-r^2}{|\xi-x|^n}u(\xi)\,dS_{R_1}, \qquad \xi\in S_{R_1}$$

Пуассон формуласи ўринли бўлади. $r<R_1$, $|\xi-x_0|=R_1$ бўлгани учун

$$R_1 - r \le |\xi - x| \le R_1 + r$$

тенгсизлик тўғри бўлади (22 - чизма).



22- чизма

Бундан $u(\xi) \ge 0$ бўлгани учун Пуассон формуласига асосан ушбу

$$\frac{R_1^2 - r^2}{(R_1 + r)^n} \frac{R_1^{n-2}}{|S_1| R_1^{n-1}} \int_{S_{R_1}} u(\xi) dS_{R_1} \le u(x) \le \frac{R_1^2 - r^2}{(R_1 - r)^n} \frac{R_1^{n-2}}{|S_1| R_1^{n-1}} \int_{S_{R_1}} u(\xi) dS_{R_1}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага асосан

$$\frac{1}{|S_1| R_1^{n-1}} \int_{S_{R_1}} u(\xi) dS_{R_1} = u(x_0).$$

Демак,

$$R_1^{n-2} \frac{R_1 - r}{(R_1 + r)^{n-1}} u(x_0) \le u(x) \le R_1^{n-2} \frac{R_1 + r}{(R_1 - r)^{n-1}} u(x_0).$$

Бу тенгсизликдан $R_1 \to R$ да дарҳол (45) келиб чиқади. (45) тенгсизлик *Гарнак тенгсизлиги* дейилади.

Лиувилл теоремаси. *Агар u(x) функция барча E^n фазода гармоник бўлиб, қуйидан ёки юқоридан чегараланган бўлса, у ҳолда u(x) ўзгармасдир.*

Ҳақиқатан ҳам, барча $x \in E^n$ нуқталар учун $u(x) \le M$ бўлсин, M — ўзгармас. $M - u(x)$ функция E^n фазода манфий бўлмаган гармоник функциядир. Бу функцияга (45) тенгсизликни қўллаб, $R \to \infty$ да лимитга ўтсак,

$M - u(x_0) \leq M - u(x) \leq M - u(x_0)$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Бундан $M - u(x) = M - u(x_0)$ ёки $u(x) = u(x_0)$.

Лиувилл теоремасига асосан 5- бандда текширилган ярим фазо учун Дирихле масаласининг чегараланган функциялар синфида ягоналигини кўрсатиш қийин эмас.

Бу масаланинг иккита $u_1(x)$ ва $u_2(x)$ ечими мавжуд бўлсин. Буларнинг айирмаси $\upsilon(x) = u_1(x) - u_2(x)$ $x_n = 0$ да $\upsilon(x) = 0$ чегаравий шартни қаноатлантиради.

Ушбу

$$W(x) = \begin{cases} \upsilon(x_1, \ldots, x_n), & x_n \geq 0 \\ -\upsilon(x_1, \ldots, -x_n), & x_n \leq 0 \end{cases}$$

функцияни текширамиз. Бу функция $x_n < 0$ да ҳам, $x_n > 0$ да ҳам гармоник бўлади. Бундан ташқари, $W(x)$ функция барча E^n фазода гармоник бўлади, чунки ихтиёрий $R > 0$ учун $|x| < R$ шарда бу функция $|x| = R$ да $W^*(x) = W(x)$ чегаравий шартни қаноатлантирувчи $W(x)$ гармоник функция билан устма-уст тушади. Шарт бўйича $W(x)$ функция чегараланган бўлганлиги сабабли, Лиувилл теоремасига асосан $у$ ўзгармасдир. Аммо $x_n = 0$ да $W(x) = 0$ бўлгани учун барча E^n фазода $W(x) = 0$. Демак $u_1(x) = u(x)$.

Гарнакнинг биринчи теоремаси. *Агар чекли D соҳада гармоник, $\bar{D}$ да узлуксиз функцияларнинг $\{u_k(x)\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ кетма-кетлиги D нинг чегараси S да текис яқинлашувчи бўлса,* у ҳолда

1) *$\{u_k(x)\}$ кетма-кетлик $\bar{D}$ ёпиқ соҳада текис яқинлашувчи бўлади;*

2) $u(x) = \lim\limits_{k \to \infty} u_k(x)$ *лимит функция D да гармоник бўлади;*

3) *D соҳанинг ихтиёрий ёпиқ $\bar{D}^*$ қисмида $u_k(x)$ функциялар ихтиёрий тартибдаги ҳосилаларининг кетма-кетлиги лимит $u(x)$ функциянинг мос тартибли ҳосиласига текис яқинлашади.*

Исбот. $\{u_k(x)\}$ кетма-кетлик S да текис яқинлашувчи бўлгани учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай N номер топиладики, $k \geq N$ лар ва ихтиёрий натурал p сон учун

$$|u_{k+p}(x) - u_k(x)| < \varepsilon \tag{46}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $u_{k+p}(x)$, $u_k(x)$ функциялар гармоник бўлгани сабабли, уларнинг айирмаси ҳам D да гармоник, $\bar{D}$ да узлуксиз бўлади. Экстремум принципига асосан (46) тенгсизлик барча D соҳада тўғри бўлади, бу эса $\{u_k(x)\}$ кетма-кетликнинг ёпиқ $\bar{D}$ соҳада текис яқинлашувчанлигини кўрсатади. Демак, $\bar{D}$ да аниқланган ва узлуксиз $u(x)=\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x)$ лимит функция мавжуд. D соҳанинг ихтиёрий x_0 нуқтасини марказ қилиб, R радиусли D да тўла ётувчи Q_R шар чизамиз. Пуассон формуласига асосан $x\in Q_R$ нуқталар учун

$$u_k(x)=\int\limits_{S_R} u_k(\xi)K(x,\xi)dS_R,\ K(x,\xi)=\frac{1}{|S_1|R}\frac{R^2-|x-x_0|^2}{|\xi-x|^n}.$$

$\{u_k(x)\}$ кетма-кетлик текис яқинлашувчи бўлгани сабабли, аввалги тенгликда $k\to\infty$ да лимитга ўтиб, лимит функция $u(x)$ учун

$$u(x)=\int\limits_{S_R} u(\xi)K(x,\xi)dS_R$$

формулага эга бўламиз. Бу формула $u(x)$ нинг Q_R да гармоник функция эканлигини кўрсатади. Бундан Q_R ихтиёрий шар бўлгани учун $u(x)$ нинг барча D соҳада гармоник функция эканлиги келиб чиқади. Аввалги тенгликларнинг ўнг томонини x нуқтанинг функцияси сифатида Q_R шарнинг ичида ихтиёрий сон марта дифференциаллаш мумкин. Ушбу

$$\left|\frac{\partial^{l}u(x)}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}-\frac{\partial^{l}u_k(x)}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}\right|\le\int\limits_{Q_R}\left|u(\xi)-u_k(\xi)\right|\left|\frac{\partial^{l}K(x,\xi)}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}\right|dS_R,$$

бунда $l=l_1+\ldots+l_n$, тенгсизликдан ҳосилалар кетма-кетлигининг $k\to\infty$ да x га нисбатан бу нуқтанинг бирор атрофида, масалан, маркази x_0 нуқтада ва радиуси Q_R шарнинг радиусидан икки марта кам бўлган шарда текис яқинлашувчанлиги келиб чиқади. Агар $\overline{D'}$ соҳа D да тўла ётувчи ёпиқ соҳа бўлса, Гейне — Борел леммасига асосан $\overline{D'}$ ни чекли сондаги шарлар билан қоплаш мумкин. Бунга асосан ҳосилалар кетма-кетлигининг $\overline{D'}$ да текис яқинлашувчи бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Гарнакнинг иккинчи теоремаси. *Агар D соҳада гармоник функцияларнинг $\{u_k(x)\}$ кетма-кетлиги монотон ўсувчи бўлиб, соҳанинг камида битта нуқтасида яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу кетма-кетлик D соҳада бирор $u(x)$ гармоник функцияга яқинлашади. Шу билан бирга ихтиёрий ёпиқ $\overline{D'} \subset D$ соҳада яқинлашиш текис бўлади.*

Исбот. Теореманинг шартига кўра $u_1(x) \le u_2(x) \le \ldots \le u_k(x)$ ва бу кетма-кетлик $x_0 \in D$ нуқтада яқинлашувчи бўлсин. Юқоридагидай маркази x_0 нуқтада бўлган $\overline{Q}_R \subset D$ шарни оламиз. $x \in Q_R$ нуқталар учун Гарнак тенгсизлиги

$$0 \le u_{k+p}(x) - u_k(x) \le \frac{R^{n-2}(R+r)}{(R-r)^{n-1}}\left[u_{k+p}(x_0) - u_k(x_0)\right]$$

ўринли бўлади. Бу тенгсизликдан маркази x_0 нуқтада бўлган бирор шарда, масалан, $\frac{R}{2}$ радиусли ёпиқ шарда $\{u_k(x)\}$ кетма-кетликнинг текис яқинлашувчанлиги келиб чиқади. D соҳанинг ихтиёрий x нуқтаси атрофида $\{u_k(x)\}$ кетма-кетликнинг текис яқинлашувчи бўлишини кўрсатиш учун x_0 нуқтани x нуқта билан D да тўла ётувчи узлуксиз эгри чизиқ билан бирлаштириб, экстремум принципининг исботидаги мулоҳазаларни қайтарамиз. Худди юқоридагидек, x нуқтани ўз ичига олган шарда $\{u_k(x)\}$ кетма-кетлик текис яқинлашувчи бўлади. *Гейне — Борел* леммасига асосан бу кетма-кетликнинг $\overline{D'}$ соҳада текис яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

3- §. Потенциаллар назарияси

1. Потенциаллар тушунчаси ва уларнинг физик маъноси. Агар D бўлаклари силлиқ S сирт билан чегараланган соҳа бўлиб, $u(x)$ функция $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ синфга тегишли бўлса, 1- § нинг 3- бандидан маълумки, $u(x)$ функция (10) ёки (11) формула билан ифодаланади. Бу интеграл ифода махсус кўринишга эга бўлган ва математик физикада муҳим роль ўйнайдиган учта интеграл операторни киритиш-га имкон беради. (10) формулада $\Delta u\ (\xi)$, $u\,(\xi)$ ва $\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}$ функцияларни ихтиёрий $\rho\,(\xi)$, $\mu\,(\xi)$ ва $\sigma\,(\xi)$ функциялар билан алмаштирамиз . Натижада, x га параметр сифатида боғлиқ бўлган учта

$$u\,(x) = \int\limits_D \frac{\rho(\xi)}{r^{n-2}}\,d\xi\ ,\quad \upsilon\,(x) = \int\limits_S \mu\,(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r^{n-2}}\,d_\xi S\,,$$

$$w\,(x) = \int\limits_S \frac{\sigma(\xi)}{r^{n-2}}\,d_\xi S\,,\quad r = |x - \xi|$$

интегралга эга бўламиз. *$u(x)$ ҳажм потенциали* ёки *Ньютон потенциали, $\upsilon\,(x)$ иккиланган қатлам потенциали, $w(x)$* эса *оддий қатлам потенциали* дейилади. $\rho\,(\xi)$, $\mu\,(\xi)$ ва $\sigma\,(\xi)$ функциялар бу потенциалларнинг *зичлиги* деб аталади.

$n = 2$ бўлган ҳолда, (11) формуладан юқоридаги потенциаллар ўрнига *логарифмик потенциаллар* деб аталувчи қуйидаги интеграллар ҳосил бўлади:

$$u\,(x) = \int\limits_D \rho\,(\xi)\ln\frac{1}{r}\,d\xi,\ \upsilon\,(x) = \int\limits_S \mu\,(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi S,$$

$$w\,(x) = \int\limits_S \sigma\,(\xi)\ln\frac{1}{r}\,d_\xi S.$$

Ҳажм ва оддий қатлам потенциаллари жуда содда физик. маънога эгадир. Фараз қилайлик, уч ўлчовли фазонинг бирор x_0 нуқтасида нуқтавий электрик q заряд жойлашган бўлсин. Физикадан маълумки, бу заряд электростатик майдон ҳосил қилади, бу майдоннинг x_0 нуқтадан фарқли ихтиёрий x нуқтадаги кучланиши $\bar{E}$ ушбу

$$\bar{E} = kq\,\frac{\bar{r}}{r^3}\qquad \bar{r} = |x - x_0|$$

формула билан аниқланади, бунда k — пропорционаллик коэффициенти, у танлаб олинган бирлик системасига боғлиқ бўлади. Аввалги формула проекцияларда қуйидагича ёзилади:

$$E_{x_1} = kq\,\frac{x_1 - x_{01}}{r^3}\,,\ E_{x_2} = kq\,\frac{x_2 - x_{02}}{r^3}\,,\ E_{x_3} = kq\,\frac{x_3 - x_{03}}{r^3}\,.$$

Бу тенгликларнинг ўнг томони тескари ишораси билан

$$u(x) = kq\,\frac{1}{r} + \mathrm{const}$$

функциянинг ҳосилаларига тенг, яъни $\overline{E} = -\operatorname{grad} u$; u берилган электростатик майдоннинг *потенциали* дейилади. Одатда $x \to \infty$ да $u(x) \to 0$ учун const $=0$ қилиб олинади. Математикада соддалик учун $k=1$ деб ҳисобланади.

Шундай қилиб, миқдори q га тенг бўлган нуқтавий заряд $u = \frac{q}{r}$ потенциал ҳосил қилади. Маълумки, бир нечта нуқтавий зарядларнинг умумий потенциалини топиш учун уларнинг потенциалларини қўшиш керак. Шу сабабли, узлуксиз тақсимланган зарядлар ҳосил қилган потенциални йиғиндининг лимити сифатида, яъни интеграл сифатида топилади.

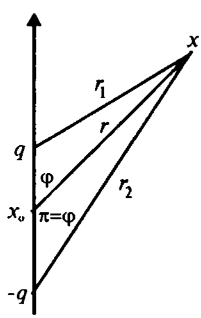
Агар заряд ҳажм зичлиги ρ бўлган V ҳажм бўйича тарқалган бўлса, бу заряд ҳосил қилган потенциал ҳажм потенциалига тенг бўлади. Агарда заряд S сирт бўйича тарқалган бўлса, потенциал оддий қатлам потенциалидан иборат бўлади.

Энди иккиланган қатлам потенциалининг физик маъносини текширамиз. Фараз қилайлик, иккита q ва $-q$ зарядлар l ўқда бир-биридан ε масофада жойлашган бўлсин. Шу билан бирга бу зарядлар $x_0\,(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ нуқтага интилаётган бўлиб, $-q$ дан q гача йўналиш l нинг мусбат йўналиши билан бир хил бўлсин (23- чизма).

x_0 нуқтадан фарқли ихтиёрий нуқтадаги потенциал бир-бирига тенг бўлишга интилаётган икки миқдорнинг айирмасидан иборат бўлади. Шу сабабли, текширилаётган потенциал нолга тенг. Агар ҳаракат вақтида q заряд шундай ўзгарсаки,

$$q\varepsilon = p = \mathrm{const}$$

бўлиб қолса, потенциал қуйидаги лимитга тенг бўлади:



23-чизма

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{p}{\varepsilon} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{p}{\varepsilon} \frac{r_2^2 - r_1^2}{(r_2 + r_1) r_1 r_2}.$$

r_1 ва r_2 масофаларни чизмага асосан дарҳол ҳисоблашимиз мумкин:

$$r_2^2 = r^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} - r\varepsilon\cos(\pi - \varphi) = r^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} + r\varepsilon\cos\varphi,$$

$$r_1^2 = r^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} - r\varepsilon\cos\varphi,\ r_2^2 - r_1^2 = 2r\cos\varphi.$$

Демак,

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{p}{\varepsilon} \frac{2r\varepsilon\cos\varphi}{(r_1 + r_2) r_1 r_2} = p\frac{\cos\varphi}{r^2}.$$

Ушбу

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{47}$$

тенгликнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x_1 - x_{01}}{r^3}\cos(l, x_1) - \frac{x_2 - x_{02}}{r^3}\cos(l, x_2) - \frac{x_3 - x_{03}}{r^3}\cos(l, x_3) =$$

$$= \frac{-1}{r^2}\left[\cos(r, x_1)\cos(l, x_1) + \cos(r, x_2)\cos(l, x_2) + \right.$$

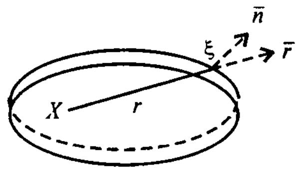
$$\left. + \cos(r, x_3)\cos(l, x_3)\right] = -\frac{\cos\varphi}{r^2}.$$

Физикада зарядларнинг лимитик жойлашиши *дипол* дейилади, p миқдор *момент,* l ўқни *диполнинг ўқи* деб айтилади. Фараз қилайлик, аниқ йўналишга эга бўлган S сирт берилган бўлсин, яъни бу сиртда ички ва ташқи томонлар аниқ кўрсатилган. Бу сиртда момент зичлиги $\mu(\xi)$, $\xi \in S$ бўлган дипол тарқалган бўлсин. Бундан ташқари ҳар бир ξ нуқтада дипол ўқининг йўналиши S сиртнинг шу нуқтадаги нормали (ички ёки ташқи) йўналиши билан бир хил бўлсин (24- чизма).

Бу дипол ҳосил қилган потенциал иккиланган қатлам потенциалидан иборат бўлади:

$$\upsilon(x) = \int_S \frac{\mu(\xi)\cos\varphi}{r^2} dS = -\int_{S'} \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{r} dS.$$

2. Параметрга боғлиқ бўлган хосмас интеграллар. Юқорида киритилган потенциалларнинг назариясини баён қилишда параметрга боғлиқ бўлган хосмас интегралларга дуч келамиз. Шу сабабли бу интеграллар назариясининг асосий тушунчаларини эслатиб ўтамиз. E^n фазодаги чегараланган D соҳада $F(x,\xi)$ функция x нуқтадан бошқа барча нуқталарда узлуксиз бўлиб, x нинг атрофида чегараланмаган бўлсин. Бу ҳолда



24 - чизма.

$$I(x)=\int_D F(x,\xi)\,d\xi \tag{48}$$

интеграл x га параметр сифатида боғлиқ бўлган хосмас интегралдир. Аввало хусусий, яъни

$$F(x,\xi)=\frac{1}{r^\alpha},\quad r=|x-\xi|$$

бўлган ҳолни кўрамиз.

Маркази x нуқтада, радиуси R га тенг ва D соҳани ўз ичига олувчи шарни Q_R орқали белгилаб оламиз. У ҳолда

$$\int_D \frac{d\xi}{r^\alpha}\leq \int_{Q_R}\frac{d\xi}{r^\alpha}.$$

Маълумки, $d\xi = dr dS_r = r^{n-1}dr\, dS_1$. Бунга асосан

$$\int_{Q_R}\frac{d\xi}{r^\alpha}=\int_{S_1}\left(\int_0^R r^{n-\alpha-1}dr\right)dS_1=\begin{cases}\dfrac{|S_1|}{n-\alpha}r^{n-\alpha}\Big|_0^R, & n\neq\alpha,\\[2mm] |S_1|\ln r\Big|_0^R, & n=\alpha.\end{cases}$$

Демак, $\alpha<n$ бўлганда юқоридаги интеграл мавжуд ва $\frac{|S_1|}{n-\alpha}R^{n-\alpha}$ га тенг, $\alpha\geq 0$ бўлганда эса у мавжуд эмас. Агар $F(x,\xi)$ функция ушбу

$$|F(x,\xi)|\leq\frac{C}{r^\alpha},\quad \alpha<n$$

тенгсизликни қаноатлантирса, (48) хосмас интеграл абсолют яқинлашувчи бўлади.

Агар ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta(\varepsilon)$ кўрсатиш мумкин бўлиб, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x нуқталар учун ва x_0 нуқтани ўз ичига олган ҳамда диаметри $d \leq \delta(\varepsilon)$ бўлган ихтиёрий D_δ соҳа учун

$$\left| \int\limits_{D\delta} F(x,\xi)\, d\varepsilon \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, (48) интеграл x_0 нуқтада *текис яқинлашувчи* дейилади.

Теорема. *Агар* (48) *интеграл x_0 нуқтада текис яқинлашувчи бўлса, $I(x)$ функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.*

Исбот. Ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ сон учун, x_0 нуқтани ўз ичига олган ва текис яқинлашувчанлик таърифидаги D_δ соҳани олиб, (48) интегрални

$$I(x) = \int\limits_{D\delta} F(x,\xi)\, d\xi + \int\limits_{D-D\delta} F(x,\xi)\, d\xi = I_1(x) + I_2(x)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу ҳолда

$$I(x) - I(x_0) = I_1(x) + I_2(x) - I_1(x_0) - I_2(x_0).$$

Бундан

$$|I(x) - I(x_0)| = |I_1(x)| + |I_1(x_0)| + |I_2(x) - I_2(x_0)|.$$

x нуқта D_δ соҳанинг ичида ётган бўлсин. У ҳолда, (48) интеграл текис яқинлашувчи бўлгани учун x_0 нуқтада

$$|I_1(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. $I_2(x)$ да интеграллаш $D - D_\delta$ соҳа бўйича бажарилаётгани, x_0 нуқта эса D_δ соҳа ичида ётгани учун $I_2(x)$ функция x_0 нуқтада ва унинг бирор атрофида узлуксиз бўлади, яъни

$$|I_2(x_0) - I_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Демак,

$$\left|I(x)-I(x_0)\right|<\varepsilon.$$

Бундан, (48) интегралнинг x_0 нуқтада узлуксизлиги келиб чиқади. (48) интеграл ўрнига умумийроқ

$$I(x)=\int_D F(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

интегрални текшириш мумкин, бу ерда $F(x,\xi)$ аввалги функция, $\varphi(x,\xi)$ эса D соҳада чегараланган функция. Бу интеграл учун ҳам исботланган теорема ўз кучини сақлаб қолади.

Юқорида киритилган тушунчалар ёпиқ S сирт бўйича олинган, параметрга боғлиқ бўлган

$$\int_S F(x,\xi)\,d\xi$$

хосмас интеграл учун ҳам ўз кучини сақлайди.

3. Ҳажм потенциали. Ушбу

$$u(x)=\int_D \frac{\rho(\xi)}{r^{n-2}}\,d\xi \qquad (49)$$

ҳажм потенциалини текширамиз. $\rho(\xi)$ зичлик D соҳада интегралланувчи функция бўлсин. Агар x нуқта D соҳадан ташқарида ётса ($r\neq 0$), (49) интеграл хос интеграл бўлади. Бу ҳолда $u(x)$ функция узлуксиз ва барча тартибли ҳосилаларга эга. Бу ҳосилаларни интеграл белгиси остида дифференциаллаш натижасида ҳосил қилиш мумкин, ҳамда D соҳадан ташқарида $u(x)$ функция Лаплас тенгламасини қаноатлантиради, яъни $\Delta u=0$.

Энди, x нуқта ихтиёрий йўналиш бўйича чексизликка интилганда

$$|u(x)|<\frac{C}{|x|^{n-2}},\quad C-\text{const}$$

тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатамиз. Етарли катта $|x|$ лар учун $|x|>2|\xi|$ деб олишимиз мумкин. Бунга асосан,

$$r = |x - \xi| \ge |x| - |\xi| \text{ . ёки } r > \frac{|x|}{2}.$$

Демак,

$$|u(x)| \le \int_D \frac{|\rho(\xi)|}{r^{n-2}} d\xi < \frac{2^{(n-2)}}{|x|^{n-2}} \int_D |\rho(\xi)| d\xi = \frac{C}{|x|^{n-2}},$$

бунда

$$C = 2^{(n-2)} \int_D |\rho(\xi)| d\xi .$$

Шундай қилиб, *u(x)* ҳажм потенциали D соҳадан ташқарида гармоник функция экан.

1- теорема. *Агар $\rho(\xi)$ зичлик D соҳада чегараланган ва интегралланувчи функция бўлса, у ҳолда u(x) потенциал ва унинг биринчи тартибли ҳосилалари барча фазода узлуксиз бўлади ва бу ҳосилаларни интеграл белгиси остида дифференциаллаш натижасида ҳосил қилиш мумкин.*

Исбот. Аввало, (49) интеграл ва уни x_i ўзгарувчи бўйича формал дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган

$$X_i(x) = -(n-2) \int_D \rho(\xi) \frac{x_i - \xi_i}{r^n} d\xi \tag{50}$$

интеграл ихтиёрий x_0 нуқтада текис яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз. D соҳа ичида x_0 нуқтани ўз ичига олган D_δ соҳани оламиз. Маркази x_0 нуқтада ва радиуси δ га тенг бўлган шарни Q_δ орқали белгилаб олсак, $|\rho(\xi)| < A$, A — const бўлгани учун ушбу

$$\left| \int_{D_\delta} \frac{\rho(\xi)}{r^{n-2}} d\xi \right| < A \int_{D_\delta} \frac{d\xi}{r^{n-2}}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Агар $Q_{2\delta}$ орқали маркази x нуқтада ва радиуси 2δ га тенг бўлган шарни белгиласак, қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$A \int_{Q_\delta(x_0)} \frac{d\xi}{r^{n-2}} < A \int_{Q_{2\delta}(x)} \frac{d\xi}{r^{n-2}} = A \int_{S_1} \left(\int_0^{2\delta} r^{n-1} r^{-n+2} dr \right) dS_1 = 2A|S_1|\delta^2.$$

Ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ учун $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2A|S_1|}}$ қилиб олсак (x_0 нуқтанинг танлаб олишига боғлиқ эмас),

$$\left| \int\limits_{D\delta} \frac{\rho(\xi)}{r^{n-2}} d\xi \right| < \varepsilon$$

бўлади. Бу тенгсизлик эса (49) интегралнинг D соҳанинг ихтиёрий x_0 нуқтасида текис яқинлашувчи эканлигини кўрсатади.

Худди шунга ўхшаш

$$\left| \int\limits_{D\delta} \rho(\xi) \frac{x_i - \xi_i}{r^n} d\xi \right| \le A \int\limits_{Q\delta(x_0)} \frac{d\xi}{r^{n-1}} < A \int\limits_{Q2\delta(x)} \frac{d\xi}{r^{n-1}} = A|S_1| 2\delta \quad < \varepsilon,$$

агар $\delta < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2A|S_1|}$. Бундан $X_i(x)$ нинг ҳам текис яқинлашувчанлиги келиб чиқади., (49) ва (50) интегралларнинг текис яқинлашувчанлиги $\rho(\xi)$ зичликнинг чегараланганлигини талаб қилиб исботланганлиги учун, бу интеграллар $\rho(\xi)$ функциянинг узилиш нуқталарида ҳам узлуксиз бўлади. D соҳа чегараси нуқталарини соҳадан ташқарида нолга тенг бўлган $\rho(\xi)$ зичликнинг узилиш нуқталари деб қараш мумкин.

Шундай қилиб, $u(x)$ потенциал ва $X_i(x)$ функция барча E^n фазода узлуксиз бўлади. Энди, $u(x)$ функциянинг хусусий ҳосиласи $X_i(x)$ функция тенглигини кўрсатамиз. x нуқтанинг x_i координатасига Δx_i орттирма бериш натижасида ҳосил бўлган нуқтани x' орқали, x' ва ξ нуқталар орасидаги масофани r_1 орқали белгилаб оламиз, яъни $r_1 = |x' - \xi|$. Ушбу

$$I(x) = \frac{u(x') - u(x)}{\Delta x_i} - X_i(x) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x_i} \int\limits_D \rho(\xi) \left(\frac{1}{r_1^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) d\xi - (n-2) \int\limits_D \rho(\xi) \frac{x_i - \xi_i}{r^n} d\xi$$

айирмани текширамиз ва уни Δx_i билан бирга чексиз кичик бўлишини кўрсатамиз. x ва x' нуқталарни ўз ичига олган, D нинг қисми бўлган $|x-\xi|<\delta$ шартни Q_δ орқали, D нинг қолган қисмини D_1 орқали белгилаб оламиз. У ҳолда

$$u(x)=\int_{Q\delta}\frac{\rho(\xi)}{r^n}d\xi+\int_{D_1}\frac{\rho(\xi)}{r^{n-2}}d\xi=u_1+u_2,$$

$$X_i(x)=-(n-2)\int_{Q\delta}\rho(\xi)\frac{x_i-\xi_i}{r^n}d\xi-$$

$$-(n-2)\int_{D_1}\rho(\xi)\frac{x_i-\xi_i}{r^{n-2}}d\xi=X_i^1+X_i^2.$$

Буларга асосан

$$I(x)=\frac{u_1(x')-u_1(x)}{\Delta x_i}-X_i^1+\frac{u_2(x')-u_2(x)}{\Delta x_i}-X_i^2.$$

Бу ифодани баҳолаймиз:

$$|I(x)|\le\left|\frac{u_1(x')-u_1(x)}{\Delta x_i}\right|+\left|X_i^1\right|+\left|\frac{u_2(x')-u_2(x)}{\Delta x_i}-X_i^2\right|.$$

x нуқта D_1 соҳага тегишли бўлмагани учун

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{u_2(x')-u_2(x)}{\Delta x_i}=X_i^2=\int_{D_1}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r^{n-2}}d\xi=$$

$$=-(n-2)\int_{D_1}\rho(\xi)\frac{x_i-\xi_i}{r^n}d\xi.$$

Аввалги тенгсизликдаги биринчи ифодани баҳолаймиз. Уни $I_1(x)$ орқали белгилаб олсак, яъни

$$|I_1(x)|=\left|\frac{u_1(x')-u_1(x)}{\Delta x_i}\right|\le\frac{1}{|\Delta x_i|}\int_{Q\delta}|\rho(\xi)|\left|\frac{1}{r_1^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right|d\xi.$$

Энди $|r_1-r|\le\Delta x_i$ тенгсизликни, ҳамда

$$r^{n-2}-r_1^{n-2}=(r-r_1)\left(r^{n-3}+r^{n-4}r_1+\ldots+r_1^{n-3}\right)$$

тенгликни эътиборга олиб, аввалги тенгсизликни

$$|I_1(x)| < A\int\limits_{Q_\delta(x)}\left(\frac{1}{r_1^{n-2}r}+\frac{1}{r_1^{n-3}r^2}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{r_1r^{n-2}}\right)d\xi$$

кўринишда ёзиб оламиз. Q_δ соҳани иккига ажратамиз: $r > r_1$ бўлган қисмини Q_δ^1, $r < r_1$ бўлганини эса Q_δ^2 орқали белгилаб оламиз, у ҳолда

$$|I_1(x)| < A(n-2)\int\limits_{Q^1\delta}\frac{d\xi}{r_1^{n-1}} + A(n-2)\int\limits_{Q^2\delta}\frac{d\xi}{r^{n-1}}.$$

Демак,

$$\int\limits_{Q_\delta^1}\frac{d\xi}{r_1^{n-1}} < \int\limits_{Q_{2\delta}(x')}\frac{d\xi}{r_1^{n-1}} = 2\delta|S_1|,\quad \int\limits_{Q_\delta^2}\frac{d\xi}{r^{n-1}} < \int\limits_{Q_\delta(x)}\frac{d\xi}{r^{n-1}} = \delta|S_1|.$$

Худди шунга ўхшаш

$$|X_i^1(x)| \le (n-2)\int\limits_{Q_\delta}|\rho(\xi)|\frac{|x_i-\xi_i|}{r^n}d\xi <$$

$$< A(n-2)\int\limits_{Q_\delta}\frac{d\xi}{r^{n-1}} = A(n-2)|S_1|\delta.$$

Шундай қилиб,

$$|I_1(x)| - |X_i^1(x)| < 2(n-2)A|S_1|\delta + (n-2)A|S_1|\delta +$$

$$+ (n-2)A|S_1|\delta = 4(n-2)A|S_1|\delta.$$

Ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ учун δ ни $\delta < \frac{\varepsilon}{8(n-2)A|S_1|}$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб танлаб олсак,

$$\left|\frac{u_1(x')-u_1(x)}{\Delta x_i} - X_i^1\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

x ва x' нуқталар D_1 соҳага тегишли бўлмагани учун, юқоридагига асосан, $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta_1 > 0$ сон топиладики, $|\Delta x_i| < \delta_1$ бўлганда

$$\left|\frac{u_2(x')-u_2(x)}{\Delta x_i} - X_i^2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилади. Агар $\delta_2 = \min\,(\delta, \delta_1)$ бўлса, $|I(\varepsilon)| < \varepsilon$ бўлади, яъни

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{u_2(x') - u_2(x)}{\Delta x_i} = X_i\left(x\right) \text{ ёки } \frac{\partial u}{\partial x_i} = -(n-2)\int_D \rho(\xi)\frac{x_i - \xi_i}{r^n}\,d\xi\,.$$

2- теорема. *Агар $\rho(\xi)$ зичлик D соҳада чегараланган биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, $u(x)$ ҳажм потенциали D да иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлади ҳамда ушбу*

$$\Delta u\left(x\right) = -\left(n-2\right)\left|S_1\right|\rho(x), \quad n > 2$$

$$\Delta u\left(x\right) = -2\pi\rho(x), \quad n = 2$$

Пуассон тенгламасини қаноатлантиради.

Исбот. $\frac{\partial}{x_i}\frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{r^{n-2}}$ бўлганлиги сабабли

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \int_D \rho\left(\xi\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r^{n-2}}\,d\xi = -\int_D \rho\left(\xi\right)\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{1}{r^{n-2}}\,d\xi = \\ &= -\int_D\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left[\rho\left(\xi\right)\frac{1}{r^{n-2}}\right] - \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i}\frac{1}{r^{n-2}}\right\}d\,\xi = \\ &= \int_D \frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{1}{r^{n-2}}\,d\xi - \int_S \frac{\rho(\xi)}{r^{n-2}}\cos\left(n, \xi_i\right)dS,\end{aligned} \tag{51}$$

бу ерда S сирт D соҳанинг чегараси, n эса ξ нуқтада S га ўтказилган ташқи нормал. (51) тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчи $x \in D$ бўлганда x_i ўзгарувчилар бўйича биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга, бу ҳосилаларни интеграл белгиси остида дифференциаллаш натижасида ҳосил қилиш мумкин. $\frac{\partial \rho}{\partial \xi_i}$ функция D соҳада чегараланган ва узлуксиз бўлгани учун *1 - теоремага* асосан (51) тенгликдаги биринчи қўшилувчи ҳам узлуксиз ҳосилаларга эга. Энди, (49) ҳажм потенциалининг Пуассон тенгламасини қаноатлантиришини кўрсатамиз. Шу мақсадда $u(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз. (51) га асосан

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r^{n-2}} d\xi - \int_S \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r^{n-2}} \cos(n, \xi_i) dS =$$

$$= \int_S \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{n-2}} \cos(n, \xi_i) dS - \int_D \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{n-2}} d\xi.$$

Демак, $x \in D$ бўлганда

$$\Delta u(x) = \int_S \rho(\xi) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{n-2}} \cos(n, \xi_i) dS = \int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{n-2}} d\xi .$$

x нуқтани марказ қилиб, $\varepsilon > 0$ радиусли D соҳада тўла ётувчи $Q_\varepsilon(x) : |x - \xi| < \varepsilon$ шар чизамиз, бу шарнинг чегараси S_ε бўлсин. D соҳанинг шардан ташқари қисмини D_ε орқали белгилаймиз, яъни $D_\varepsilon = D - Q_\varepsilon$. У ҳолда,

$$\Delta u = \int_S \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} dS - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{n-2}} d\xi . \qquad (52)$$

Бу ердаги иккинчи интеграл остидаги функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{n-2}} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{n-2}} \right) - \rho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2_i} \frac{1}{r^{n-2}} .$$

Бунга асосан,

$$\int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{n-2}} d\xi = \int_S \rho(\xi) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{n-2}} \cos(n, \xi_i) dS +$$

$$+ \int_{S_\varepsilon} \rho(\xi) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{n-2}} \cos(n, \xi_i) dS_\varepsilon - \int_{D_\varepsilon} \rho(\xi) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \frac{1}{r^{n-2}} d\xi.$$

$x \neq \xi$ бўлганда, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \frac{1}{r^{n-2}} = 0$ бўлгани учун, ушбу

$$\int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{1}{r^{n-2}} d\xi =$$

$$= \int_S \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} dS + \int_{S_\varepsilon} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} dS_\varepsilon \qquad (53)$$

тенгликка эга бўламиз. (52) ва (53) тенгликларга асосан, $x \in D$ бўлганда

$$\Delta u = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} dS_\varepsilon .$$

S_ε сферага ўтказилган ташқи нормал бу сферанинг радиусига қарама-қарши йўналганлиги учун

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} \Big|_{r=\varepsilon} = (n-2)\varepsilon^{1-n} .$$

Бунга асосан

$$\Delta u = -(n-2) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\rho(\xi)-\rho(x)}{\varepsilon^{n-1}} dS_\varepsilon - (n-2)\rho(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{d\xi}{\varepsilon^{n-1}} .$$

Бу ифодада $\xi = x + \varepsilon\theta$ алмаштириш бажарсак, $\xi \in S_\varepsilon$ бўлганда $\theta \in S_1$ бўлади ва $d\xi = \varepsilon^{n-1}\, d\theta$. Шу сабабли

$$\Delta u = -(n-2) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_1} \left[\rho(x+\varepsilon\theta) - \rho(x)\right] dS_1 -$$

$$-(n-2)\rho(x) \int_{S_1} dS_1 = -(n-2)|S_1|\rho(x) .$$

2- теоремани исботлашда қўлланилган барча амаллар ва формулалар D соҳанинг чегараси S етарли силлиқ сирт бўлгандагина ўринли бўлади.

Агар $u(x)$ функцияни

$$u(x) = \int_{D_R} \frac{\rho(x)}{r^{n-2}} d\xi + \int_{Q_R} \frac{\rho(x)}{r^{n-2}} d\xi ,\ x \in D \tag{54}$$

кўринишда ёзиб олсак, бунда $Q_R : |\xi - x| \le R$ шар D соҳада ётади, D_R эса D соҳанинг Q_R шардан ташқари қисмидир, S сиртга қўйилган шартларнинг ҳожати бўлмайди. (54) ифоданинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи Q_R шарнинг ичида гармоник функциядир, иккинчи қўшилувчига эса юқорида келтирилган мулоҳазалар тўғри бўлади. Худди шунга ўхшаш, $n = 2$ бўлган ҳолда 2- теорема исботланади.

Исботланган теоремага асосан, D соҳада

$$\Delta u = f(x) \tag{55}$$

Пуассон тенгламаси учун қўйилган

$$u|_S = \varphi$$

Дирихле масаласини Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласини ечишга дарҳол олиб келинади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $f(x)$ функция D соҳада чегараланган ва биринчи тартибли чегараланган узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса,

$$u_0(x) = -\frac{1}{(n-2)|S_1|}\int_D \frac{f(\xi)}{r^{n-2}}\,d\xi$$

функция (55) тенгламанинг ечимидан иборат бўлади. У ҳолда (55) тенгламанинг ечимини $u(x) = u_0(x) + \upsilon(x)$ кўринишда изласак, $\upsilon(x)$ функция $\Delta\upsilon = 0$ Лаплас тенгламасини ва $\upsilon(x)|_S = \varphi - u_0(x)|_S = \psi$ чегаравий шартни қаноатлантиради. Шу билан бирга берилган φ функция узлуксиз бўлса, ψ ҳам узлуксиз функция бўлади.

4. Ляпунов сиртлари. Оддий ва иккиланган қатлам потенциалларининг хоссаларини ўрганишда S нинг Ляпунов сирти бўлиши талаб қилинади. Шу муносабат билан бу сирт тушунчасини киритамиз.

Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи S сирт Ляпунов сирти дейилади:

1) S сиртнинг ҳар бир нуқтасида уринма текислик мавжуд, демак аниқ нормал мавжуддир;

2) шундай ўзгармас $d > 0$ сон мавжудки S нинг ихтиёрий x нуқтасини марказ қилиб, d радиусли ёки d дан кичик радиусли сфера чизсак, x нуқтада ўтказилган нормалга параллел тўғри чизиқлар сферанинг ичида ётган S нинг қисмини биттадан ортиқ нуқтада кесмайди;

3) S сиртнинг ихтиёрий x ва ξ нуқталаридан ўтган нормаллар орасидаги бурчак θ бўлиб, $r = |x - \xi|$ бўлса, шундай a ва α мусбат сонлар мавжуд бўладики,

$$\theta \le ar^{\alpha} \quad (0 < \alpha \le 1) \tag{56}$$

тенгсизлик бажарилади.

$n = 2$ бўлган ҳолда S ни Ляпунов эгри чизиғи дейилади.

Бу таърифдан Ляпунов сиртлари силлиқлиги $C^{(1,\alpha)}$ бўлган сиртлар синфига тегишли эканлиги келиб чиқади. Бунга биз кейинчалик ишонч ҳосил қиламиз. Биз бундан кейин d ни етарли кичик қилиб олиб,

$$ad^{\alpha} < 1 \tag{57}$$

тенгсизлик бажарилади деб фараз қиламиз, яъни S нинг x нуқтасини марказ қилиб, d радиусли $S_d(x)$ сфера чизсак, x нуқтадаги нормал билан S нинг $S_d(x)$ ичида ётган ихтиёрий ξ нуқтасидаги нормал орасидаги θ бурчак $\frac{\pi}{2}$ дан кичик бўлади.

1- шарт Ляпунов сиртининг ҳар бир нуқтасида маҳаллий $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ координата системасини тузишга имкон беради, яъни бу шундай декарт координаталар системасики, координата боши x нуқтада $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, ўқлар S га x нуқтада уринма бўлган $(n-1)$ ўлчовли текисликда жойлашган, ξ_n ўқ эса S га x нуқтада ўтказилган нормал бўйича йўналтирилган.

2- шарт шу нарсани кўрсатадики, S сиртнинг $S_d(x)$ сфера ичига тушган қисмининг тенгламасини маҳаллий координата системасида

$$\xi_n = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) \tag{58}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Маҳаллий координата системасининг координата боши бўлган x нуқтада $\xi_n = 0$ текислик S сиртга уринма бўлгани учун

$$f(0,0,\ldots,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_i} f(0,0,\ldots,0) = 0, \quad i = 1,2,3,\ldots, n-1$$

бўлади.

Энди $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ функция ва унинг биринчи тартибли ҳосилаларини $S_d(x)$ ичида кичиклик тартибини аниқлаймиз. S нинг $S_d(x)$ ичида ётган қисмига тегишли ξ нуқтани оламиз ва бу нуқтага ўтказилган нормалнинг йўналишини ν орқали белгилаймиз. У ҳолда,

$$\cos(\nu,\xi_n) = \cos(\nu,n) = \cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \geq 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

Бундан, (56) га асосан,

$$\cos(\nu,\xi_n) \geq 1 - \frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha}. \tag{59}$$

(57) га кўра $a^2 r^{2\alpha} \leq a^2 d^{2\alpha} \leq 1$ бўлгани учун

$$\cos(\nu,\xi_n) \geq \frac{1}{2}.$$

(58) тенгламага асосан

$$\cos(\nu,\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right)^2}}, \quad \cos(\nu,\xi_i) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \xi_i}}{\sqrt{1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right)^2}}. \tag{60}$$

Бундан, (57) ва (59) ни эътиборга олиб,

$$\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right)^2} = \frac{1}{\cos(\nu,\xi_n)} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha}} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha}}{1-\frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha}} < 1 + \frac{\frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha}}{1-\frac{1}{2}a^2 d^{2\alpha}} < 1 + a^2 r^{2\alpha}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз, ёки ҳар икки томонини квадратга кўтариб,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right)^2 < 2a^2 r^{2\alpha} + a^4 r^{4\alpha}$$

тенгсизликка эга бўламиз. $r \leq d$ бўлганлиги учун, (57) га асосан

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right)^2 < 3a^2 r^{2\alpha}.$$

Демак,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right| < \sqrt{3}ar^{\alpha}. \tag{61}$$

(60) формулага мувофиқ

$$\left|\cos(\nu, \xi_i)\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right| < \sqrt{3}ar^{\alpha}, \; i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{62}$$

Ушбу

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2$$

белгилашни киритамиз, у ҳолда

$$r^2 = \rho^2 + \xi_n^2. \tag{63}$$

(61) формулада ξ_i S га ўтказилган ихтиёрий йўналишни, хусусий ҳолда ρ бўйича йўналишни билдириши мумкин. У ҳолда

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| < \sqrt{3}ar^{\alpha} < \sqrt{3}ad^{\alpha} \le \sqrt{3}. \tag{64}$$

Бундан

$$|f| = \left|\int_0^{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho\right| \le \int_0^{\rho} \left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| d\rho < \sqrt{3}\rho. \tag{65}$$

Демак,

$$|\xi_n| < \sqrt{3}\rho \tag{66}$$

Бу баҳони яна ҳам яхшилаш мумкин. (63) ва (66) тенгсизликларга асосан $r \le 2\rho$ бўлади.

Бунга мувофиқ (64) тенгсизлик қуйидагича ёзилади:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| < \sqrt{3}2^{\alpha}a\rho^{\alpha}.$$

Шундай қилиб, охирги тенгсизликка кўра (65) ушбу

$$|f| = |\xi_n| < a_1\rho^{\alpha+1}, \quad a_1 = \frac{2^\alpha\sqrt{3}a}{\alpha+1},$$

кўринишга келади. $\rho \le r$ бўлгани учун

$$|\xi_n| < a_1 r^{\alpha+1} \tag{67}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Маҳаллий координата системасида координата бошидан ξ нуқтагача бўлган масофа r бўлгани учун қуйидаги тенгликни ёзамиз:

$$\cos(\nu, r) = \sum_{i=1}^{n} \cos(\nu, \xi_i)\cos(r, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{r}\cos(\nu, \xi_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi_i}{r}\cos(\nu, \xi_i) + \frac{\xi_n}{r}\cos(\nu, \xi_n).$$

(62) ва (67) тенгсизликларга асосан,

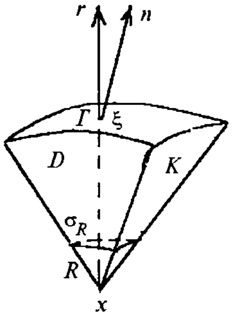
$$\frac{|\xi_i|}{r} = |\cos(r, \xi_i)| \le 1, \; |\cos(\nu, \xi_n)| \le 1$$

бўлгани учун, аввалги тенгликдан

$$|\cos(\nu, r)| \le a_2 r^a, \quad a_2 = \sqrt{3}a(n-1) + a_1 \tag{68}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

5. Телес бурчак. Бўлаклари силлиқ, умуман айтганда, ёпиқ бўлмаган ва унда нормалнинг мусбат йўналиши аниқланган Γ сиртни текширамиз. Бу сиртнинг ихтиёрий нуқтасини ξ орқали ва бу нуқтада Γ га ўтказилган нормални n орқали белгилаймиз. E^n фазонинг x нуқтаси шундай жойлашган бўлсинки, x нуқтадан ихтиёрий $\xi \in \Gamma$ нуқтага қараб кетган радиус-вектор n нормал билан ўткир, хеч бўлмаганда тўғри бурчак ташкил қилсин, яъни $\cos(n,r) \ge 0$ бўлсин. x нуқтадан Γ сиртнинг барча нуқталарига радиус-векторлар ўтказамиз. Бу радиус-векторлар Γ сирт билан ҳамда бу сиртнинг четки нуқталарига келиб тугаган радиус-векторлар ҳосил қилган K коник (коническая) сирт билан чегараланган соҳани қоплайди (25- чизма).



25 - чизма

Агар Γ ёпиқ сирт бўлса, x нуқта Γ нинг ичида ётиши керак (акс ҳолда (n,r) бурчак ўтмас бурчак бўлиб қолиши мумкин) ва юқоридаги соҳа Γ сиртнинг ичидан иборат бўлади. x нуқтани марказ қилиб ихтиёрий R радиусли сфера чизамиз. K конуснинг ичида ётган бу сферанинг қисмини σ_R орқали белгилаймиз.

Ушбу

$$\omega_x(\Gamma) = \frac{|\sigma_R|}{R^{n-1}} \tag{69}$$

нисбат R га боғлиқ бўлмайди. Уни *телес бурчак* дейилади, бу бурчак остида x нуқтадан Γ сирт кўринади.

Юқорида юритилган мулоҳазаларда Γ да $\cos(n,r) \le 0$ бўлиши ҳам мумкин. Бу ҳолда $\omega_x(\Gamma)$ телес бурчак деб, бу бурчак остида x нуқтадан Γ сирт кўринадиган (69) нинг тескари ишораси билан олинган нисбатни айтилади.

Умумий ҳолда $\cos(n,r)$ ўз ишорасини ўзгартириши мумкин. Бу ҳолда Γ ни Γ_1, Γ_2, ... қисмларга ажратиш мумкин ва бу қисмларнинг ҳар бирида $\cos(n,r)$ ишорасини сақлайди деб фараз қиламиз. Бундай сирт учун телес бурчак қуйидаги формула билан аниқланади:

$$\omega_x(\Gamma) = \sum \omega_x(\Gamma_i). \tag{70}$$

Агар (70) қатор абсолют яқинлашувчи бўлса (масалан, Γ_i ларнинг сони чекли бўлса), ҳамма ҳол учун ҳам $\omega_x(\Gamma)$ телес бурчак $n > 2$ бўлганда

$$\omega_x(\Gamma) = -\frac{1}{n-2}\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\,d\Gamma$$

формула билан аниқланишини кўрсатамиз.

Γ да $\cos(n,r)$ ишорасини ўзгартирмайдиган ҳолни текшириш етарлидир. Аввало, кейинчалик фойдали бўлган битта формулани келтириб чиқарамиз:

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{n-2}{r^{n-1}}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{n-2}{r^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial r}{\partial \xi_i}\cos(n,\xi_i).$$

Лекин

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_i} = \frac{\xi_i - x_i}{r} = \cos(n, \xi_i)$$

бўлгани учун

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} &= -\frac{n-2}{r^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\cos(r,\xi_i)\cos(n,\xi_i) = \\ &= -\frac{n-2}{r^{n-1}}\cos(r,n).\end{aligned} \tag{71}$$

$x \in \bar{\Gamma}$ ва $\cos(n,r) \geq 0$ бўлсин. R ни етарли кичик қилиб оламизки, Γ ва σ_R сиртлар умумий нуқталарга эга бўлмасин. D орқали Γ, σ_R ва булар орасидаги K конуснинг қисми билан чегараланган соҳани белгилаймиз. Бу соҳада $\frac{1}{r^{n-2}}$ функция ξ нинг функцияси сифатида гармоник бўлади. У ҳолда, маълумки, бу функция нормал ҳосиласидан D соҳа чегараси бўйича олинган интеграл нолга тенг, яъни

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}\,d\Gamma + \int_{\sigma_R}\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}\,d\sigma_R + \int_{K}\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}\,dK = 0,$$

бу ердаги ν — D га нисбатан ташқи нормал. Γ да $\nu = n$, ҳамда $\cos(n,r) \geq 0$. r радиус вектор K конуснинг ясовчиси бўлгани туфайли, ν нормал унга тик бўлади, яъни $\cos(n,\nu) = 0$.

Демак,

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\,d\Gamma = -\int_{\sigma_R}\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}\,d\sigma_R.$$

σ_R да

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}\Big|_{r=R} = \frac{n-2}{R^{n-1}}$$

бўлгани учун, дарҳол

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\,d\Gamma = -\frac{n-2}{R^{n-1}}\int_{\sigma_R}d\sigma_R = -(n-2)\frac{|\sigma R|}{R^{n-1}} = -(n-2)\omega_{x}(\Gamma)$$

формулага эга бўламиз.

Агар $\cos(r, n) \le 0$ бўлса, Γ да $\nu = -n$, у ҳолда

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} d\Gamma = \frac{n-2}{R^{n-1}} \int\limits_{\sigma_R} d\sigma_R = (n-2)\frac{|\sigma_R|}{R^{n-1}} = -(n-2)\omega_x(\Gamma).$$

Агар Γ сирт $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ бўлакларга бўлинган бўлиб, уларнинг ҳар бирида $\cos(r,n)$ ишорасини ўзгартирмаган ҳолда, равшанки

$$\sum \omega_x(\Gamma_i) = \int\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right| d\Gamma.$$

6. Гаусс интеграли. Иккиланган қатлам потенциалининг зичлиги бирга тенг бўлган ҳолда, у яъни

$$\upsilon_0(x) = \int\limits_{S} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} dS \tag{71}$$

интеграл *Гаусс интеграли* дейилади.

Агар S ёпиқ Ляпунов сирти бўлса, Гаусс интегралининг қийматлари ушбу формула билан аниқланади:

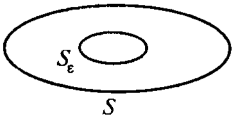
$$\upsilon_0(x) = \begin{cases} -(n-2)\,|S_1| = -\dfrac{2(n-2)\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x \text{ нуқта } S \text{ нинг ичида ётганда,} \\ 0, & x \text{ нуқта } S \text{ нинг ташқаррисида ётганда,} \\ -\dfrac{n-2}{2}\,|S_1| = -\dfrac{(n-2)\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, & x \in S; \quad n \le 2; \end{cases} \tag{72}$$

$$\int\limits_{S} \frac{\partial}{\partial n} \ln\frac{1}{r} dS = \begin{cases} -2\pi, & x \text{ нуқта } S \text{ нинг ичида ётганда} \\ 0, & x \text{ нуқта } S \text{ нинг ташқарисида ётганда,} \\ -\pi, & x \in S; \quad n = 2. \end{cases} \tag{72'}$$

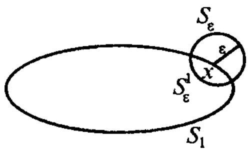
(72) формуладаги биринчи иккита тенглик ихтиёрий бўлаклари силлиқ ёпиқ S сирт учун ҳам тўғри бўлади. Ҳақиқатан ҳам, S шундай сирт бўлиб, x нуқта S нинг ичида ётсин. Бу нуқтани марказ қилиб, ε радиусли S нинг ичида ётувчи

$S_\varepsilon(x)$ сфера чизамиз (26- чизма). S ва $S_\varepsilon(x)$ сиртлар билан чегараланган соҳада $\frac{1}{r^{n-2}}$ гармоник функция бўлгани учун

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS + \int_{S_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS_\varepsilon = 0.$$



26- чизма



27- чизма

S_ε да

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}\bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}.$$

Демак,

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS_\varepsilon = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\int_{S_\varepsilon} dS_\varepsilon = (n-2)\frac{|S_\varepsilon|}{\varepsilon^{n-1}} = (n-2)\,|\,S_1\,|.$$

Агар x нуқта S сиртдан ташқарида ётган бўлса, $\frac{1}{r^{n-2}}$ функция S нинг ичида гармоник бўлади, у ҳолда

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS = 0.$$

Энди S ёпиқ Ляпунов сирти бўлиб, $x \in S$ бўлсин. x нуқтани марказ қилиб етарли кичик ε, $0 < \varepsilon < d$, радиусли $S_\varepsilon(x)$ сфера чизамиз. S сиртнинг S_ε сферадан ташқарида ётган қисмини S_1 орқали, S_ε сферанинг S ичидаги қисмини S_ε^1 орқали белгилаб оламиз (27- чизма). Хосмас интегралнинг таърифига асосан

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS_1 = \int_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}dS. \tag{73}$$

x нуқта S_1 ва S_ε^1 сиртлар билан чегараланган соҳадан ташқарида ётгани учун, бу соҳада $\frac{1}{r^{n-2}}$ гармоник функция бўлади. У ҳолда

$$\int_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\,dS_1 + \int_{S_\varepsilon^1} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\,dS_\varepsilon^1 = 0.$$

Демак, (73) га асосан

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\,dS = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon^1} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\,dS_\varepsilon^1 . \tag{74}$$

S_ε^1 бўйича олинган интегралнинг қийматини ҳисоблаймиз. S_ε^1 да

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}\bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}$$

бўлгани учун

$$\int_{S_\varepsilon^1} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\,dS_\varepsilon^1 = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\int_{S_\varepsilon^1} dS_\varepsilon^1 = (n-2)\frac{|S_\varepsilon^1|}{\varepsilon^{n-1}} .$$

ε етарли кичик бўлганда S_ε^1 сирт уринма текисликка ёпишган ярим сферага яқин бўлади. Шу сабабли

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon^1} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\,dS_\varepsilon^1 = (n-2)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|S_\varepsilon^1|}{\varepsilon^{n-1}} = (n-2)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{n-1}|S_1|}{2\varepsilon^{n-1}} = \frac{n-2}{2}|S_1| .$$

Бу мулоҳазаларга тўлароқ ишонч ҳосил қилиш учун $n=3$ бўлган ҳолда олдинги интегрални ҳисоблаймиз. Маркази x нуқтада бўлган сферик координаталарни киритамиз:

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\bigg|_{S_\varepsilon^1} = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad dS_\varepsilon^1 = \varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

У ҳолда

$$\int_{S_\varepsilon^1} \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}dS_\varepsilon^1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta(\varphi)} \sin\theta' d\theta' d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[1-\cos\theta(\varphi)\right]d\varphi =$$
$$= 2\pi - \int_0^{2\pi}\cos\theta(\varphi)\,d\varphi. \tag{75}$$

Ушбу

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\cos\theta(\varphi)\,d\varphi = 0 \tag{76}$$

тенглик бажарилишини кўрсатамиз. Шу мақсадда маркази x нуқтада бўлган маҳаллий ξ_1, ξ_2, ξ_3 координата системасини киритамиз. ξ_3 ўқни x нуқтада S сиртга ўтказилган нормал бўйича йўналтирамиз, $\xi_1\,\xi_2$ текислик сифатида x нуқтада S га ўтказилган уринма текисликни оламиз. $(\varepsilon, \varphi, \theta(\varphi))$ нуқталар S_ε сферанинг S Ляпунов сирти билан кесишган чизиғида ётишини уқдириб ўтамиз. Бу ҳолда (68) га асосан

$$|\cos\theta(\varphi)| \le a_2\,\varepsilon^{\alpha}$$

тенглик ўринлидир.

Бунга асосан $\varepsilon \to 0$ да $\cos\theta(\varphi)$ нинг нолга текис, яъни x га боғлиқ бўлмай, интилиши келиб чиқади. Бундан дарҳол (76) тенгликнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қиламиз.

Демак, (75) формулага асосан

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon^1}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}dS_\varepsilon^1 = 2\pi$$

ёки (74) га биноан

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,dS = -2\pi\,.$$

7. Иккиланган қатлам потенциали. Ушбу

$$\upsilon(x) = \int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{r^{n-2}}\,d_\xi S \tag{77}$$

иккиланган қатлам потенциалини текширамиз. *Агар $\mu(\xi)$ зичлик S да интегралланувчи бўлса, $\upsilon(x)$ потенциал S билан умумий нуқтага эга бўлмаган ихтиёрий чекли ёки чексиз соҳада гармоник функция бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, $x \in S$ да иккиланган қатлам потенциали барча тартибли ҳосилаларга эга ва бу ҳосилаларни интеграл остида дифференциаллаб ҳисоблаш мумкин. Бундан дарҳол $x \ne \xi$ да $\frac{1}{r^{n-2}}$ гармоник функция бўлгани учун $\upsilon(x)$

нинг ҳам гармониклиги келиб чиқади. x нуқта S сиртнинг ташқарисида ётган ҳолда $v(x)$ нинг чексиз узоқлашган нуқтадаги характерини аниқлаймиз.

Шу мақсадда $v(x)$ ни баҳолаймиз:

$$|v(x)| \leq \int_S |\mu(\xi)| \left| \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right| d_\xi S \leq$$

$$\leq (n-2) \int_S |\mu(\xi)| \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i - \xi_i}{r^n} \right| |\cos(n, x_i)| \, d_\xi S.$$

Ушбу

$$|r| = |x - \xi| \geq |x| - |\xi|, \; r \geq \frac{|x|}{2}, \; |x_i - \xi_i| \leq r \, |\cos(n, x_i)| \leq 1$$

тенгсизликларга асосан

$$|v(x)| \leq \frac{2^{n-1} n(n-2)}{|x|^{n-1}} \int_S |\mu(\xi)| \, d_\xi S$$

тенгсизликни хосил қиламиз. $\mu(\xi)$ зичлик интегралланувчи бўлгани учун олдинги тенгсизликнинг ўнг томонидаги интеграл чеклидир.

Шундай қилиб, иккиланган қатлам потенциали S сиртдан ташқари барча E^n фазода гармоник бўлиб, чексизда $|x|^{-(n-1)}$ каби нолга интилади. Гаусс интегралидан кўриниадики, умуман айтганда иккиланган қатлам потенциали x нуқта S сиртни кесиб ўтганда узилишга эга.

$x_0 \in S$ бўлсин. x нуқта S нинг ичида ётиб, x_0 нуқтага интилгандаги $v(x)$ нинг қийматини $v_i(x_0)$ орқали, x нуқта S дан ташқарида ётиб, x_0 га интилгандаги қийматини $v_e(x_0)$ орқали белгилаймиз. $v(x)$ нинг $x_0 \in S$ нуқтадаги қиймати бу *потенциалнинг тўғри қиймати* дейилади, ва у $\overline{v}(x_0)$ орқали белгиланади.

Теорема. *Агар S ёпиқ Ляпунов сирти бўлиб, $\mu(\xi)$ зичлик S да узлуксиз бўлса, иккиланган қатлам потенциали $v(x)$ учун қуйидаги лимит муносабатлар ўринлидир:*

$$\begin{cases} \upsilon_i(x_0) = -\frac{n-2}{2}|S_1|\mu(x_0) + \bar{\upsilon}(x_0), \\ \upsilon_e(x_0) = \frac{n-2}{2}|S_1|\mu(x_0) + \bar{\upsilon}(x_0), \end{cases} \quad n > 2; \tag{78}$$

$$\begin{cases} \upsilon_i(x_0) = -\pi\mu(x_0) + \bar{\upsilon}(x_0), \\ \upsilon_e(x_0) = \pi\mu(x_0) + \bar{\upsilon}(x_0), \end{cases} \quad n = 2. \tag{78'}$$

Исбот. $\upsilon(x)$ функцияни қуйидаги

$$\upsilon(x) = \int_S [\mu(\xi) - \mu(x_0)] \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S + \mu(x_0) \int_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S =$$
$$= \upsilon_1(x) + \mu(x_0)\upsilon_0(x). \tag{79}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

$\upsilon_1(x)$потенциалнинг x_0 нуқтада узлуксиз эканини кўрсатамиз. Шу мақсадда x_0 нуқтани марказ қилиб, η радиусли сфера чизамиз. S сиртнинг бу сфера ичидаги қисмини S_1 орқали, ташқарисидагини S_2 орқали белгилаб оламиз. У ҳолда

$$\upsilon_1(x) = \int_{S_1} [\mu(\xi) - \mu(x_0)] \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S_1 +$$
$$+ \int_{S_2} [\mu(\xi) - \mu(x_0)] \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S_2 = \upsilon_1^1(x) + \upsilon_1^2(x).$$

Бунга асосан

$$\left|\upsilon_1(x) - \bar{\upsilon}_1(x_0)\right| \le \left|\upsilon_1^1(x)\right| + \left|\bar{\upsilon}_1^1(x_0)\right| + \left|\upsilon_1^2(x) - \bar{\upsilon}_1^2(x_0)\right|. \tag{80}$$

$\mu(\xi)$ функция узлуксиз бўлгани учун η ни шундай танлаймизки, $|\xi - x_0| < \eta$ бўлганда,

$$|\mu(\xi) - \mu(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3C}$$

бўлсин, бу ерда

$$\left|\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S\right| \le C .$$

Бу ҳолда, ихтиёрий $x \in E^n$ учун

$$\left|\upsilon_1^1(x)\right| \le \int\limits_{S_1}\left|\mu(\xi)-\mu(x_0)\right|\left|\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\right|d_\xi S_1 <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3C}\int\limits_{S_1}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S_1 \le \frac{\varepsilon}{3C}\int\limits_S\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S \le \frac{\varepsilon}{3} . \qquad (81)$$

Хусусий ҳолда

$$\left|\bar{\upsilon}_1^1(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (82)$$

$\upsilon_1^2(x)$ потенциалда интеграл S_2 бўйича бажариляпти, x_0 нуқта эса S_1 да ётади. Шунинг учун узлуксиз, яъни шундай $\delta > 0$ сон мавжуд бўладики, $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$\left|\upsilon_1^2(x)-\upsilon_1^2(x_0)\right| = \left|\upsilon_1^2(x)-\bar{\upsilon}_1^2(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (83)$$

(80) — (83) муносабатларга асосан, агар $|x - x_0| < \delta$ бўлса,

$$\left|\upsilon_1(x)-\bar{\upsilon}_1(x_0)\right| < \varepsilon \qquad (84)$$

бўлади, яъни x_0 нуқтада $\upsilon_1(x)$ потенциал узлуксиз. Шундай экан $\upsilon_1(x)$ потенциалнинг лимит қийматлари ва тўғри қиймати x_0 нуқтада устма-уст тушади, яъни

$$\upsilon_{1i}(x_0) = \upsilon_{1e}(x_0) = \bar{\upsilon}_1(x_0) . \qquad (85)$$

(72) формулага асосан

$$\upsilon_{0i}(x_0) = -(n-2)|S_1|, \quad \upsilon_{0e}(x_0) = 0, \quad \bar{\upsilon}_0(x_0) = -\frac{n-2}{2}|S_1|.$$

(79) ва (85) формулалардан $\upsilon_i(x_0)$ ва $\upsilon_e(x_0)$ лимит қийматларнинг мавжудлиги келиб чиқади, шу билан бирга

$$\upsilon_i(x_0) = \bar{\upsilon}_1(x_0) + \mu(x_0)\upsilon_{0_i}(x_0) = \bar{\upsilon}_1(x_0) - (n-2)|S_1|\,\mu(x_0), \quad (86)$$

$$\upsilon_e(x_0) = \bar{\upsilon}_1(x_0) + \mu(x_0)\upsilon_{0e}(x_0) = \bar{\upsilon}_1(x_0).$$

Сўнгра

$$\bar{\upsilon}_1(x_0) = \int_S [\mu(\xi) - \mu(x_0)] \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}}\, d_\xi S =$$
$$= \bar{\upsilon}(x_0) + \frac{(n-2)|S_1|}{2} \mu(x_0). \quad (87)$$

(86) ва (87) муносабатлардан дарҳол (78) формулалар келиб чиқади.

1- изоҳ. $x \in S^p$ бўлганда, (79) дан

$$\bar{\upsilon}(x) = \bar{\upsilon}_1(x) - \frac{n-2}{2}|S_1|\,\mu(x_0).$$

Энди x нуқтани S бўйлаб x_0 га интилтирамиз, $\upsilon_1(x)$ узлуксиз бўлгани учун

$$\lim_{x \to x_0} \bar{\upsilon}(x) = \bar{\upsilon}_1(x_0) - \frac{n-2}{2}|S_1|\,\mu(x_0).$$

(79) га кўра

$$\bar{\upsilon}(x_0) = \bar{\upsilon}_1(x_0) - \frac{n-2}{2}|S_1|\,\mu(x_0).$$

Демак,

$$\lim_{x \to x_0} \bar{\upsilon}(x) = \bar{\upsilon}(x_0),$$

яъни $\mu(x)$ зичлик S да узлуксиз бўлса, $\upsilon(x)$ потенциал ҳам S да узлуксиз бўлар экан.

2- изоҳ. Иккиланган қатлам потенциали $\upsilon(x)$ ўзининг лимит қийматларига сиртнинг ичидан ҳам, ташқарисидан ҳам текис интилади. Ҳақиқатан ҳам, $\mu(x)$ зичлик S да узлуксиз, демак, S ёпиқ сирт бўлгани учун текис узлуксиз бўлади. Бу ҳолда h радиусни x_0 нуқтанинг S даги жойлашганига боғлиқ бўлмаган ҳолда танлаб олиш мумкин. $\upsilon_1^2(x)$ потенциал аслида иккита $x \in E^n$ ва $x_0 \in S$ нуқтанинг функциясидир. Агар h радиус тайин бўлса, $x_0 \in S$, $|x - x_0| < \frac{1}{2} h$ муносабатлар билан аниқланган чегараланган ёпиқ тўпламда $\upsilon_1^2(x)$ узлуксиз, демак, текис узлуксиз бўлади. Шунинг учун ҳам (84) тенгсизликда иштирок этувчи δ ни фақат ε га боғлиқ қилиб олиш мумкин. Бу эса, $x_0 \in S$ нуқтага нисбатан $x \to x_0$ да $\upsilon_1(x)$ нинг $\upsilon_1(x_0)$ га текис интилишини кўрсатади. Гаусс интеграли бўлган $\upsilon_0(x)$ функция S сиртнинг ичида ҳам, ташқарисида ҳам ўзгармас бўлганлиги сабабли, агар S нинг ичидан ёки ташқарисидан $x \to x_0$ да, $\upsilon_0(x)$ ўзининг лимит қийматларига текис интилади. (79) формуладан бу хоссага $\upsilon(x)$ нинг ҳам эга эканлиги келиб чиқади.

8. Оддий қатлам потенциали. Ушбу

$$w(x) = \int_S \frac{\sigma(\xi)}{r^{n-2}} d_\xi S \tag{88}$$

оддий қатлам потенциали $\sigma(x)$ зичлик интегралланувчи бўлганда $x \notin S$ нуқталарда гармоник функция бўлиб, чексизликда $|x|^{-(n-2)}$ каби нолга интилишига худди иккиланган қатлам потенциалига ўхшаш, ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Агар S ёпиқ Ляпунов сирти бўлиб, $\sigma(x)$ зичлик интегралланувчи ва чегараланган бўлса, оддий қатлам потенциали барча E^n фазода узлуксиз бўлади. $w(x)$ функциянинг $x \in S$ да узлуксизлиги равшан бўлгани учун, $x \in S$ нуқталарда унинг узлуксизлигини кўрсатамиз. Бунинг учун (88) интегралнинг S сирт нуқталарида текис яқинлашувчи бўлишини исботлаш кифоядир.

Шу мақсадда x нуқтани марказ қилиб, $\eta < d$ (d — Ляпунов сирти таърифидаги сон) радиусли S_η сфера чизамиз. S сиртнинг бу сфера ичидаги қисмини S_η^1, ташқарисидаги қисмини эса, S_η^2 орқали белгилаб оламиз.

y — E^n фазонинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $\eta < d$ бўлгани учун S_η^1 да x нуқтани марказ қилиб $\xi_1, \ldots, \xi_n$ маҳаллий координаталар системасини тузиш мумкин. y нуқтанинг S га x нуқтада ўтказилган уринма текисликдаги, яъни $\xi_n = 0$ текисликдаги проекцияси y' бўлсин. y' нинг маҳаллий координатлари $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, 0)$, бўлади. $\rho^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (\xi_k - y_k)^2$ белгилашни киритамиз.

ρ — ξ ва y нуқталарни бирлаштирувчи кесманинг $\xi_n = 0$ текисликдаги проекциясининг узунлигидир. Равшанки,

$\rho \le |\xi - y|$. S^1_η сиртнинг $\xi_n = 0$ текисликдаги проекциясини D^1_η десак,

$$d\xi_1, \dots, d\xi_{n-1} = \cos(\nu, \xi_n) d_\xi S$$

формулани эътиборга олиб, $|\sigma(\xi)| \le M = \text{const}$, $\cos(\nu, \xi_n) \ge \frac{1}{2}$ тенгсизликларга асосан

$$|w_1(y)| = \left| \int\limits_{S^1_\eta} \frac{\sigma(\xi)}{|\xi - y|^{n-2}} d_\xi S \right| \le 2M \int\limits_{D^1_\eta} \frac{d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}}{\rho^{n-2}}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Энди y нуқтани x га шундай яқин қилиб оламизки, $|y - x| < \frac{\eta}{2}$ бўлсин. Агар $\xi \in S^1_\eta$ бўлса,

$$\rho \le |\xi - y| = |\xi - x + x - y| \le |\xi - x| + |x - y| < \frac{3\eta}{2}.$$

Бу тенгсизлик D^1_η соҳанинг $(n-1)$ ўлчовли $\rho < \frac{3\eta}{2}$ шарда тўла ётишини кўрсатади. Демак,

$$|w_1(y)| \le 2M \int\limits_{\rho < \frac{3\eta}{2}} \frac{d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}}{\rho^{n-2}}. \tag{89}$$

E^{n-1} фазода маркази y' нуқтада бўлган сферик координаталарни киритамиз. У ҳолда, $d\xi_1, \dots, d\xi_{n-1} = \rho^{n-2} d\rho dS_1$, бу ерда dS_1 орқали E^{n-1} фазодаги S_1 бирлик сфера юзининг элементи белгиланган. У ҳолда, (89) тенгсизлик

$$|w_1(y)| \le 2M \int\limits_0^{\frac{3\eta}{2}} d\rho \int\limits_{S_1} dS_1 = 3M\eta |S_1|$$

кўринишда ёзилади. Бу баҳо x нуқта S сиртнинг қаерида ётишига боғлиқ эмас. $\varepsilon > 0$ — берилган сон бўлсин. η сонни шундай танлаймизки, $\eta = \frac{\varepsilon}{3M|S_1|}$ бўлсин. Бу ҳолда $|y - x| < \frac{\varepsilon}{3M|S_1|}$ бўлса,

$$|w_1(x)| = \left| \int\limits_{S^1_\eta} \frac{\sigma(\xi)}{|\xi - y|^{n-2}} d_\xi S \right| < \varepsilon \tag{90}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Равшанки, (90) тенгсизлик $y = x$ бўлганда ҳам тўғри бўлади. (90) тенгсизлик (88) интегралнинг x нуқтада текис яқинлашувчанлигини билдиради. Демак, 2- банддаги теоремага асосан $w(x)$ функция $x \in S$ да узлуксиз бўлади.

Оддий қатлам потенциалининг нормал ҳосиласи. Аввалгидай S ни ёпиқ Ляпунов сирти деб ҳисоблаймиз. x — E^n фазонинг ихтиёрий нуқтаси, n эса x нуқтадан ўтувчи S сиртнинг ташқи нормали бўлсин.

Агар $x \notin S$ бўлса, у ҳолда (88) потенциалнинг n нормал йўналиши бўйича ҳосиласини тўғридан-тўғри интеграл белгиси остида дифференциаллаш билан ҳисоблаш мумкин:

$$\frac{\partial w(x)}{\partial n} = \int_S \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S .$$

5- банддагига ўхшаш ҳисоблашларни бажарсак, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} = \frac{n-2}{r^{n-1}} \cos(r, n) . \tag{91}$$

Бунга асосан

$$\frac{\partial w(x)}{\partial n} = (n-2) \int_S \sigma(\xi) \frac{\cos(r,n)}{r^{n-1}} d_\xi S \tag{92}$$

$x \in S$ бўлсин. Агар $\sigma(\xi)$ зичлик интегралланувчи ва чегараланган, $|\sigma(\xi)| \le M = \text{const}$ бўлса, (92) интеграл яқинлашувчи бўлишини исботлаймиз. S сиртнинг S_η, $\eta < d$ сфера ичида ётувчи S_η^1 қисмини ажратиб оламиз. Ушбу

$$\int_{S_\eta^1} \sigma(\xi) \frac{\cos(r,n)}{r^{n-1}} d_\xi S$$

интегралнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатиш етарлидир.

Маркази x нуқтада бўлган маҳаллий координаталар системасини киритиб, охирги интегрални

$$\int_{S_\eta^1} \sigma(\xi)\frac{\cos(r,n)}{r^{n-1}}d_\xi S = \int_{D_\eta^1} \sigma(\xi)\frac{\cos(r,n)d\xi_1,\ldots,d\xi_{n-1}}{r^{n-1}\cos(\nu,\xi_n)}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу интеграл остидаги функцияни баҳолаймиз:

$$\left|\sigma(\xi)\frac{\cos(r,n)}{r^{n-1}\cos(\nu,\xi_n)}\right| \le \frac{2M}{\rho^{n-1}}\left|\cos(r,n)\right|, \quad \rho^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2 .$$

4- банддаги $|\cos(r,n)| \le a_2 r^\alpha$, $r \le 2\rho$ тенгсизликларга асосан, олдинги тенгсизлик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\left|\sigma(\xi)\frac{\cos(r,n)}{r^{n-1}\cos(\nu,\xi_n)}\right| \le \frac{2^{\alpha+1}a_2 M}{\rho^{n-1-\alpha}} .$$

Бу тенгсизлик эса, (92) интегралнинг яқинлашувчанлигини билдиради. (92) интегралнинг $x \in S$ нуқтадаги қиймати оддий қатлам потенциали нормал ҳосиласининг *тўғри қиймати* дейилади ва $\frac{\partial w}{\partial n}$ орқали белгиланади. S сиртнинг ичидан ёки ташқарисидан $x' \to x \in S$ даги $\frac{\partial w}{\partial n}$ нинг лимит қийматларини (агар улар мавжуд бўлса), яъни

$$\lim_{x' \to x}\frac{\partial w(x')}{\partial n}$$

ни $\frac{\partial w(x)}{\partial n_i}$, $\frac{\partial w(x)}{\partial n_e}$ орқали белгилаймиз.

Агар бу лимитга интилиш x га нисбатан текис бўлса, у ҳолда бу лимит қийматлар *тўғри нормал ҳосилалар* дейилади.

Теорема. *Агар S ёпиқ Ляпунов сирти (эгри чизиғи) бўлиб, $\sigma(x)$ зичлик S да узлуксиз функция бўлса, оддий қатлам потенциали S да унинг ичидан ҳам ташқарисидан ҳам тўғри нормал ҳосилаларга эга бўлади ва бу ҳосилалар қуйидаги формулалар орқали ифодаланади:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial n_i} = \dfrac{n-2}{2}|S_1|\sigma(x) + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial n}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial n_e} = -\dfrac{n-2}{2}|S_1|\sigma(x) + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial n}, \end{cases} \qquad n > 2; \qquad (93)$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w}{\partial n_i} = \pi\sigma(x) + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial n}, \\
\\
\dfrac{\partial w}{\partial n_e} = -\pi\sigma(x) + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial n},
\end{cases}
\qquad n = 2. \qquad (93')
$$

Бу теоремани исботлаш учун зичлиги $\sigma(x)$ бўлган

$$
\upsilon(x) = \int_S \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{n-1}} d_\xi S
$$

иккиланган қатлам потенциалини киритиб, ушбу

$$
F(x) = \frac{\partial w(x)}{\partial n} + \upsilon(x) = \int_S \sigma(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}\right) d_\xi S
$$

йиғиндини текширамиз. x нуқта нормал бўйича ҳаракат қилиб, S сиртни кесиб ўтганда $F(x)$ йиғиндининг узлуксиз ўзгаришини кўрсатиш қийин эмас. $x_0 \in S$ бўлиб, $n - x_0$ нуқтада S га ўтказилган нормал, x эса n нормалдаги S дан ташқарида ёки ичкарида ётувчи ихтиёрий нуқта бўлсин. x_0 нуқтани марказ қилиб, $\eta < d$ радиусли сфера чизамиз. S сиртнинг бу сфера ичидаги қисмини, худди юқоридагидек, S_η^1 ташқаридаги қисмини орқали белгилаймиз. У ҳолда

$$
F(x) = \int_{S_\eta^1} \sigma(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}\right) d_\xi S +
$$
$$
+ \int_{S_\eta^2} \sigma(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}\right) d_\xi S = F_1(x) + F_2(x). \qquad (94)
$$

Қуйидаги равшан бўлган айниятларга эгамиз:

$$
\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} = \frac{n-2}{r^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i - x_i}{r} \cos(n, \xi_i).
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{n-2}{r^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i - x_i}{r} \cos(\nu, \xi_i).
$$

Координата боши x_0 нуқтада бўлган маҳаллий координаталар системасини киритамиз. Бу системада $x=(x_1,....x_n)$ нуқта n нормалда ётганлиги учун унинг координаталари $(0,.....0,x_n)$ бўлади, яъни $1 \le i \le n-1$ да $x_i = 0, \cos(n, \xi_i) = 0$, $\cos(n, \xi_n) = 1$. У ҳолда

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}} =$$

$$= \frac{n-2}{r^{n-1}}\frac{\xi_n - x_n}{r}\left[1-\cos(\nu, \xi_n)\right] - \frac{n-2}{r^{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\xi_i}{r}\cos(\nu_1, \xi_i).$$

Агар $r_0 = |\xi - x_0|$ десак, (62) га асосан

$$|\cos(\nu, \xi_i)| \le \sqrt{3}ar_0^{\alpha},\ i = 1, 2, ..., n-1.$$

Сўнгра (59) га кўра

$$\cos(\nu, \xi_n) \ge 1 - \frac{a^2 r_0^{2\alpha}}{2}.$$

Бундан,

$$1-\cos(\nu, \xi_n) \le \frac{a^2 r_0^{2\alpha}}{2} < \frac{ar_0^{\alpha}}{2}.$$

Демак,

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}\right| \le \frac{cr_0^{\alpha}}{r^{n-1}}, \quad c - \text{const}. \tag{95}$$

Ушбу

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2$$

белгилашни киритиб, юқоридагидек S_η^1 сиртнинг x_0 нуқтада ўтказилган уринма текисликдаги проекциясини D_η^1 орқали белгилаймиз. Маълумки, $r_0 \le 2\rho$. Иккинчи томондан

$$r^2 = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2 + (\xi_n - x_n)^2 \ge \rho^2.$$

Бундан, $\rho \le r$. Энди (95) дан

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}+\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}\right|\leq\frac{2^{\alpha}c}{\rho^{n-1-\alpha}}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

$|\sigma(\xi)|\leq M$ бўлсин, у ҳолда

$$\left|F_1(x)\right|\leq 2^{\alpha}cM\int\limits_{S_\eta^1}\frac{d_\xi S}{\rho^{n-1-\alpha}}=$$

$$=2^{\alpha}cM\int\limits_{D_\eta^1}\frac{d\xi_1,\ldots,d\xi_{n-1}}{\rho^{n-1-\alpha}\cos(\nu,\xi_n)}\leq 2^{\alpha+1}cM\int\limits_{D_\eta^1}\frac{d\xi_1,\ldots,d\xi_{n-1}}{\rho^{n-1-\alpha}}.$$

D_η^1 соҳада $\rho\leq r\leq\eta$ тенгсизлик ўринли бўлгани учун, D_η^1 бутунлай $\rho\leq\eta$ шарда ётади. Шундай қилиб,

$$\left|F_1(x)\right|\leq 2^{\alpha+1}cM\int\limits_{\rho\leq\eta}\frac{d\xi_1,\ldots,d\xi_{n-1}}{\rho^{n-1-\alpha}}=$$

$$=2^{\alpha+1}cM\int\limits_{S_1}dS_1\int\limits_0^{\eta}\rho^{\alpha-1}d\rho=\frac{2^{\alpha+1}cM|S_1|}{\alpha}\eta^{\alpha}.$$

Бу баҳо, x_0 нуқтада S га ўтказилган нормалдаги x нуқтанинг ихтиёрий ҳолатида ўринлидир, шу билан бирга x нуқта x_0 билан устма-уст тушиши ҳам мумкин.

Бундан, агар $\varepsilon>0$ берилган бўлса, η ни

$$\eta<\left[\frac{\alpha\varepsilon}{3\cdot 2^{\alpha+1}cM|S_1|}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб олсак,

$$\left|F_1(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\tag{96}$$

тенгсизлик бажарилади. (94) га асосан

$$F(x)-F(x_0)=F_1(x)-F_1(x_0)+F_2(x)-F_2(x_0).$$

Бундан

$$\left|F(x)-F(x_0)\right|\leq\left|F_1(x)\right|+\left|F_1(x_0)\right|+\left|F_2(x)-F_2(x_0)\right|$$

ёки (96) га биноан

$$\left|F(x)-F(x_0)\right|\leq\frac{2\varepsilon}{3}+\left|F_2(x)-F_2(x_0)\right|.\tag{97}$$

$F_2(x)$ интегралда интеграллаш S_η^2 сирт бўйича бажарилаётгани учун, x_0 нуқта эса S_η^1 да ётганлиги сабабли $F_2(x)$ функция x_0 нуқтада ва унинг бирор атрофида узлуксиз бўлади. Шундай қилиб, x_0 нуқтага етарли яқин бўлган x нуқталар учун

$$\left|F_2(x) - F_2(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(97) га биноан

$$\left|F(x) - F(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Демак,

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$

Шундай қилиб,

$$F(x) = \frac{\partial w(x)}{\partial n} + \upsilon(x)$$

йиғинди x нуқта S сиртни кесиб ўтганда узлуксиз экан. У ҳолда, бу йиғиндининг лимит қийматлари ва тўғри қиймати устма-уст тушади:

$$\frac{\partial w(x_0)}{\partial n_i} + \upsilon_i(x_0) = \frac{\partial w(x_0)}{\partial n_e} + \upsilon_e(x_0) = \frac{\partial \overline{w}(x_0)}{\partial n} + \overline{\upsilon}(x_0).$$

Бундан, (78) га асосан

$$\frac{\partial w(x_0)}{\partial n_i} = \overline{\upsilon}(x_0) - \upsilon_i(x_0) + \frac{\partial \overline{w}(x_0)}{\partial n} = \frac{(n-2)|S_1|}{2}\sigma(x_0) + \frac{\partial \overline{w}(x_0)}{\partial n},$$

$$\frac{\partial w(x_0)}{\partial n_e} = \overline{\upsilon}(x_0) - \upsilon_e(x_0) + \frac{\partial \overline{w}(x_0)}{\partial n} = -\frac{(n-2)|S_1|}{2}\sigma(x_0) + \frac{\partial \overline{w}(x_0)}{\partial n}.$$

Бу икки тенгликни бирини иккинчисидан айирсак, оддий қатлам потенциалининг зичлигини унинг нормал ҳосилалари лимит қийматлари билан боғловчи формула келиб чиқади:

$$\frac{\partial w(x_0)}{\partial n_i} - \frac{\partial w(x_0)}{\partial n_e} = (n-2)|S_1|\sigma(x_0).$$

Энди $w(x)$ оддий қатлам потенциалининг S сиртда тўғри нормал ҳосилаларга эга эканлигини кўрсатиш қолди. Шу мақсадда

$$\frac{\partial w(x)}{\partial n}=\left[\frac{\partial w(x)}{\partial n}+\upsilon(x)\right]-\upsilon(x)=F(x)-\upsilon(x) \tag{98}$$

тенгликни текширамиз. 7- банддаги 2- изоҳда юритилган мулоҳазаларни қайтариб, x нуқта нормал бўйича S нинг ичидан ёки ташқарисидан $x_0 \in S$ нуқтага интилганда $F(x)$ ўзининг $F(x_0)$ лимит қийматига текис интилишига ишонч ҳосил қиламиз. Маълумки, иккиланган қатлам потенциали $\upsilon(x)$ ўзининг лимит қийматига текис интилади. (98) формулага асосан бу хоссага $\frac{\partial w(x)}{\partial n}$ ҳам эга бўлади. Бу эса, таърифга кўра, оддий қатлам потенциали S нинг ичида ҳам, ташқарисида ҳам тўғри нормал ҳосилага эга эканлигини билдиради.

4- §. Дирихле ва Нейман масалаларини потенциаллар ёрдамида ечиш

1. Чегаравий масалаларни интеграл тенгламаларга келтириш. Дирихле ва Нейманнинг ички ва ташқи масалаларини мос равишда D_i, D_e, N_i ва N_e орқали белгилаб оламиз. S — ёпиқ Ляпунов сирти бўлиб, бу сирт билан чегараланган чекли соҳани Ω орқали, Ω га нисбатан ташқи бўлган ва шу S сирт билан чегараланган чексиз соҳани Ω_1 билан белгилаймиз. Дирихле масаласини

$$u(x)=\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S \tag{99}$$

иккиланган қатлам кўринишида, Нейман масаласини эса

$$u(x)=\int_S \frac{\sigma(\xi)}{r^{n-2}}d_\xi S \tag{100}$$

оддий қатлам кўринишида излаймиз.

Номаълум $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$ зичликларни S да узлуксиз функциялар бўлсин деб фараз қиламиз. Чегаравий масалаларни бундай ифодалашда, дарҳол S нинг ичида ҳам, ташқарисида ҳам гармоник функцияларни ҳосил қиламиз, фақат чегаравий шартларни қаноатлантириш тўғрисида ўйлаш керак. Шу нарсани уқтириб ўтамизки, D_e ни текширган ҳолда айрим қийинчиликлар келиб чиқади, чунки ечимнинг тартиби $O(|x|^{2-n})$ бўлиши керак. Аммо (99) потенциал тезроқ камайиб боради, яъни унинг тартиби $O(|x|^{1-n})$ га тенг. Шу сабабли, ҳар қандай гармоник функцияни ҳам (99) кўринишда ифодалаб бўлавермайди.

Аввало Дирихленинг ички D_i масаласини текширамиз. (23) чегаравий шарт ва (78) формулага асосан

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = -\frac{(n-2)|S_1|}{2}\mu(x_0) + \int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|\xi - x_0|^{n-2}} d_\xi S = \varphi(x_0)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликда x_0 ўрнига яна x ёзиб, уни $-\frac{2}{(n-2)|S_1|}$ га кўпайтириб, $\mu(x)$ номаълум функцияга нисбатан ушбу

$$\mu(x) - \frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S = -\frac{2}{(n-2)|S_1|}\varphi(x)$$

интеграл тенгламага эга бўламиз. Худди шунга ўхшаш (24), (25), (26) чегаравий шартлар ва (78), (93) формулаларга асосан бошқа учта чегаравий масала учун интеграл тенгламаларни ҳосил қиламиз. Қулайлик учун барча тенгламаларни бир қатор ёзиб оламиз:

$$\mu(x) - \frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S = -\frac{2}{(n-2)|S_1|}\varphi(x), \quad (D_i)$$

$$\mu(x) + \frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S = \frac{2}{(n-2)|S_1|}\varphi(x), \quad (D_e)$$

$$\sigma(x) + \frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S = \frac{2}{(n-2)|S_1|}\psi(x), \quad (N_i)$$

$$\sigma(x) - \frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} d_\xi S = -\frac{2}{(n-2)|S_1|}\psi(x). \quad (N_e)$$

$(D_i) - (N_e)$ тенгламаларда $x\in S$. (68) ва (91) формулалар бу тенгламаларнинг кичик махсусликка эга бўлган интеграл тенгламалар эканлигини кўрсатади. Бундан ташқари $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}}$, $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}$ ядролар ҳақиқий ва бири иккинчисидан x

ва ξ нуқталарнинг ўрнини алмаштириш натижасида ҳосил бўлади. Бундан (D_i) ва (N_e), (D_e) ва (N_i) тенгламаларнинг ўзаро қўшма интеграл тенгламалар эканлиги келиб чиқади.

2. (D_i) ва (N_e) интеграл тенгламаларни текшириш. (D_i) ва (N_e) тенгламалар Дирихленинг ички ва Нейманнинг ташқи масалаларига мос келади. Бу тенгламалар ихтиёрий $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ узлуксиз функциялар учун ягона ечимга эга бўлишини кўрсатамиз.

Шу мақсадда N_e тенгламага мос бўлган ушбу

$$\sigma_0(x)-\frac{2}{(n-2)(S_1)}\int\limits_S \sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S=0 \tag{101}$$

бир жинсли тенгламани текширамиз.

Фараз қилайлик, (101) тенгламанинг нолдан фарқли бўлган узлуксиз $\sigma_0(x)$ ечими мавжуд бўлсин. Бу ечим ёрдамида қуйидаги оддий қатлам потенциалини тузамиз:

$$w_0(x)=\int\limits_S \sigma_0(\xi)\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S\,.$$

Бу потенциал S ташқарисидан тўғри нормал ҳосилага эга ва бу ҳосила (93) формулага асосан ушбу кўринишга эга:

$$\frac{\partial w_0(x)}{\partial n_e}=-\frac{n-2}{2}|S_1|\sigma_0(x)+\int\limits_S \sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S\,.$$

Бундан (101) тенгламага асосан, бу нормал ҳосиланинг нолга тенглиги келиб чиқади, яъни

$$\frac{\partial w_0(x)}{\partial n_e}=0.$$

Нейман ташқи масаласининг ягоналигига асосан

$$w_0(x)\equiv 0,\quad x\in\Omega_1.$$

Оддий қатлам потенциали барча фазода узлуксиз бўлгани учун

$$w_0(x)\equiv 0,\quad x\in S\,. \tag{102}$$

Энди, $w_0(x)$ потенциални Ω соҳада текширамиз. Бу соҳада $w_0(x)$ гармоник функция ва S да (102) шартни қаноатлантиради. D_i масала ечимининг ягоналигига асосан

$$w_0(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega.$$

Аммо бу ҳолда

$$\frac{\partial w_0(x)}{\partial n_i} \equiv 0.$$

(93) формулага асосан

$$\frac{\partial w_0(x)}{\partial n_i} - \frac{\partial w_0(x)}{\partial n_e} = (n-2)|S_1|\sigma_0(x) = 0.$$

Демак, $\sigma_0(x) = 0$, яъни (101) бир жинсли интеграл тенглама фақат нолга тенг ечимга эга. Фредгольм альтернативасига кўра N_e ташқи масаланинг интеграл тенгламаси (N_e) ихтиёрий узлуксиз $\psi(x)$ функция учун бирдан бир ечимга эга бўлади.

Шундай қилиб, параметрнинг $\lambda = \frac{2}{(n-2)|S_1|}$ қиймати $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}$ ядро учун характеристик сон эмас. Фредгольмнинг теоремасига асосан бу сон $\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}$ қўшма ядро учун ҳам характеристик сон бўлмайди. Бундан дарҳол D_i масаланинг (D_i) интеграл тенгламаси ихтиёрий $\varphi(x)$ узлуксиз функция учун ягона ечимга эга эканлиги келиб чиқади.

Агар D_i ва N_e масалаларнинг интеграл тенгламалари ечимга эга бўлса, у ҳолда масалаларнинг ўзи ҳам ечимга эга бўлади. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади.

1) Агар S Ляпунов сирти бўлса, у ҳолда Дирихленинг ички масаласи бу сирт учун ихтиёрий узлуксиз чегаравий шартларда ечимга эга ва бу ечим иккиланган қатлам потенциали билан ифодаланади.

2) Агар S Ляпунов сирти бўлса, Нейманнинг ташқи масаласи бу сирт учун ихтиёрий узлуксиз чегаравий қийматлар учун ечимга эга ва бу ечимни оддий қатлам потенциали билан ифодалаш мумкин.

3. (D_e) — (N_i) интеграл тенгламаларни текшириш. (D_e) ва (N_i) интеграл тенгламаларга кирган параметрнинг

$\lambda = \frac{2}{(n-2)|S_1|}$ қиймати $\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}$, $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}$ ядроларнинг ҳар бири учун ҳам характеристик сон бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (72) формулага асосан D_e масаланинг бир жинсли интеграл тенгламаси

$$\mu_0(x) + \frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \mu_0(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S = 0 \qquad (103)$$

нолдан фарқли $\mu_0(x) = 1$ ечимга эга. Бу эса $\lambda = \frac{-2}{(n-2)|S_1|}$ сон $\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}$ ядро учун характеристик сон эканлигини кўрсатади. Фредгольм теоремасига асосан бу сон қўшма $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}$ ядро учун ҳам характеристик сон бўлади. У ҳолда, N_i масаланинг бир жинсли интеграл тенгламаси

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S = 0 \qquad (104)$$

камида битта нолдан фарқли $\sigma_0(x)$ ечимга эга бўлади.

Энди (103) ва (104) тенгламаларнинг $\mu_0(x)$ ва $\sigma_0(x)$ ечимлари билан чизиқли боғлиқ бўлмаган нолдан фарқли ечимларга эга эмаслигини кўрсатиш қийин эмас. Яна Фредгольм теоремасига асосан бундай хоссага (104) тенгламанинг эга эканлигини кўрсатиш кифоядир. Зичлиги $\sigma_0(\xi)$ бўлган оддий қатлам потенциалини тузамиз:

$$w_0(x) = \int_S \frac{\sigma_0(\xi)}{r^{n-2}}d_\xi S.$$

(93) формула ва (104) тенгламага асосан

$$\frac{\partial w_0(x)}{\partial n_i} = 0. \qquad (105)$$

$w_0(x)$ функция S сирт билан чегараланган Ω соҳада гармоник бўлганлиги сабабли, N_i масала ечимининг ягоналиги ҳақидаги теоремага асосан

$$w_0(x) \equiv C_0 = \text{const}, \quad x \in \Omega.$$

Шу билан бирга $C_0 \neq 0$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар $C_0 = 0$ бўлса, $w_0 = 0$, $x \in \Omega$ бўлади. Оддий қатлам потенциалининг узлуксизлигига биноан, $w_0 = 0$, $x \in S$. D_e масала ечимининг ягоналигига асосан $w_0 = 0$, $x \in \Omega_1$ бўлади.

Бу ҳолда

$$\frac{\partial w_0(x)}{\partial n_e} = 0. \tag{106}$$

(93) формулага кўра

$$\frac{\partial w_0(x)}{\partial n_i} - \frac{\partial w_0(x)}{\partial n_e} = (n-2)|S_1|\sigma_0(x)$$

бўлгани учун (105) ва (106) га асосан $\sigma_0(x) \equiv 0$. Бу эса $\sigma_0(x)$ нинг нолдан фарқли ечим эканлигига қарама-қаршидир.

Шундай қилиб, $C_0 \neq 0$. Шу билан бирга йўл-йўлакай ушбу фикр ҳам исботланди.

Агар S сиртнинг ичида оддий қатлам потенциали нолга тенг бўлса, унинг зичлиги ҳам нолга тенг бўлади.

Энди, (104) тенглама яна битта $\sigma_1(x)$ ечимга эга бўлсин деб фараз қиламиз. Ушбу

$$w_1(x) = \int_S \frac{\sigma_1(\xi)}{r^{n-2}} d_\xi S$$

оддий қатлам потенциалини текширамиз. Юқоридаги мулоҳазаларни қайтариб, $x \in \Omega$ бўлганда $w_1(x) \equiv C_1 = \text{const}$ натижага келамиз.

Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$\sigma_2(x) = C_1\sigma_0(x) - C_0\sigma_1(x).$$

Равшанки, $\sigma_2(x)$ функция ҳам (104) тенгламанинг ечими бўлади. Ушбу

$$w_2(x) = \int_S \frac{\sigma_2(\xi)}{r^{n-2}} d_\xi S$$

оддий қатлам потенциали, $x \in \Omega$ бўлганда $w_2(x) = C_1C_0 - C_0C_1 = 0$ бўлади. Аввалги исботланган фикрга асосан $\sigma_2(x) \equiv 0$. Бундан

$$\sigma_1(x) = \frac{C_1}{C_0}\sigma_0(x).$$

Шундай қилиб, (104) тенгламанинг ихтиёрий ечими, $\sigma_0(x)$ ечимидан ўзгармас кўпайтувчи билан фарқ қилади.

Энди, Нейман ички масаласининг бир жинсли бўлмаган (N_i) интеграл тенгламасини текширамиз. Бу тенглама Фредгольм альтернативасига асосан $\psi(x)$ функция қўшма бир жинсли, яъни (103) тенгламанинг ҳамма ечимларига ортогонал бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолдагина ечимга эга бўлади. (103) тенглама фақат битта $\mu_0(x) \equiv 1$ ечимга эга.

Шундай қилиб, (N_i) тенгламанинг ечимга эга бўлиши учун

$$\int_S \psi(x)\,dS = 0 \qquad (107)$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Агар (N_i) тенглама ечимга эга бўлса, Нейманнинг ички масаласи ҳам ечимга эга бўлади.

Демак, (107) шарт N_i масаланинг ечимга эга бўлиши учун етарлидир. Аммо N_i масаланинг ечимга эга бўлиши учун (107) шартнинг зарурий шарт бўлиши 2- § даги 1-бандда кўрсатилган эди. Шундай қилиб, қуйидаги натижага келдик. Агар S Ляпунов сирти бўлиб, $\psi \in C(S)$ бўлса ва (107) шарт бажарилса, Нейман ички масаласининг ечими мавжуд ва бу ечимни оддий қатлам потенциали билан ифодалаш мумкин .

Энди Дирихле ташқи масаласининг (D_e) интеграл тенгламасини текшириш қолди . Бу интеграл тенгламанинг ечимга эга бўлишининг зарурий ва етарли шарти

$$\int_S \varphi(x)\sigma_0(x)\,dS = 0 \qquad (108)$$

тенгликнинг бажарилишидан иборат.

Агар (108) шарт бажарилса, (D_e) тенглама ечимга эга бўлади. У ҳолда, иккиланган қатлам потенциали билан ифодаланиладиган, демак, чексизликда $|x|^{1-n}$ каби камаядиган D_e масаланинг ечими мавжуд бўлади.

Бизга маълумки, D_e масаланинг ечими мавжуд бўлса, у ягона эди. Лекин унинг ечимга эга бўлиши учун (108) шарт келиб чиқяпти. Бунинг асосий сабаби гармоник функциянинг чексизликдаги тартиби $O(|x|^{2-n})$ бўлган ҳолда биз ечимни $O(|x|^{1-n})$ тартибга эга бўлган иккиланган қатлам потенциали орқали ифодалаганимиздадир. Агар (108) шарт бажарилмаса, (D_e) тенглама ечимга эга бўлмайди.

Бундан Дирихленинг ташқи масаласи ечимга эга эмас деган хулоса келиб чиқмайди. Фақатгина иккиланган қатлам потенциали билан ифодаланадиган ечим мавжуд эмас деган натижа келиб чиқади.

4. Дирихле ташқи масаласининг ечилиши. Координата бошини S сиртнинг ичига жойлаштирамиз. $\frac{1}{|x|^{n-2}}$ функция координат бошини ўз ичига олмаган ҳар қандай соҳада гармоник бўлади. D_e масаланинг ечимини

$$u(x)=\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S+\frac{1}{|x|^{n-2}}\int_S \mu(\xi)\,d_\xi S \tag{109}$$

кўринишда излаймиз. $\mu(\xi)$ ҳар қандай узлуксиз функция бўлмасин (109) формуланинг ўнг томони Ω_1 соҳада гармоник функция бўлади. $\mu(\xi)$ функцияни шундай танлаб олиш керакки, (24) чегаравий шарт бажарилсин. Бу шартни қаноатлантириб, номаълум $\mu(\xi)$ функция учун қуйидаги интеграл тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}\mu(x)+\frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \mu(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}}+\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)d_\xi S &= \\ =\frac{2}{(n-2)|S_1|}\varphi(x).\end{aligned} \tag{110}$$

(110) тенгламанинг $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}}+\frac{1}{|x|^{n-2}}$ ядроси $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}}$ ядро каби кичик махсусликка эга. Шунинг учун (110) тенгламага Фредгольм назариясини қўллаш мумкин. Бу тенгламага мос бир жинсли

$$\mu_0(x)+\frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \mu_0(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{n-2}}+\frac{1}{|x|^{n-2}}\right)d_\xi S=0 \tag{111}$$

тенгламани қараймиз. $\mu_0(x)$ функция (111) тенгламанинг бирор узлуксиз ечими бўлсин. Ω_1 соҳада гармоник ушбу

$$u_0(x)=\int_S \mu_0(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S+\frac{1}{|x|^{n-2}}\int_S \mu_0(\xi)\,d_\xi S \tag{112}$$

функцияни тузамиз. (111) тенгламага асосан $u_0(x)|_S\equiv 0$. Дирихле ташқи масаласининг ягоналигига биноан, $u_0(x)\equiv 0$, $x\in\Omega_1$, яъни

$$\int_S \mu_0(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S+\frac{1}{|x|^{n-2}}\int_S \mu_0(\xi)\,d_\xi S=0\,. \tag{113}$$

(113) ни $|x|^{n-2}$ га кўпайтириб, $|x|\to\infty$ да лимитга ўтамиз. Чексиз узоқлашган нуқтада иккиланган қатлам потенциали $|x|^{1-n}$ каби камаяди, шу сабабли лимитга ўтганда биринчи қўшилувчи нолга интилади ва

$$\int_S \mu_0(\xi)\,d_\xi S=0 \tag{114}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, (111) тенгламанинг ҳар қандай ечими (114) муносабатни қаноатлантиради. Бу ҳолда (111) тенглама соддалашади ва ушбу

$$\mu_0(x)+\frac{2}{(n-2)|S_1|}\int_S \mu_0(x)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{n-2}}d_\xi S=0 \tag{115}$$

кўринишга келади. Бу тенглама эса, D_e масаланинг бир жинсли интеграл тенгламаси (103) билан бир хилдир. (115) тенглама аввал исботлаганимизга биноан, фақат битта, бирга тенг ечимга эгадир. У ҳолда, унинг умумий ечими $\mu_0(x)\equiv C=\text{const}$ бўлади. Буни (114) га олиб бориб қўямиз, натижада $C|S|=0$ ёки $C=0$ ни ҳосил қиламиз, яъни $\mu(x)\equiv 0$. Демак, (111) тенглама фақат нолга тенг ечимга эга бўлади. Фредгольм альтернативасига асосан, бир жинсли бўлмаган (110) тенглама ихтиёрий узлуксиз $\varphi(x)$ функция учун ечимга эга. Шу билан бирга ихтиёрий узлуксиз чегаравий $\varphi(x)$ функция учун Дирихленинг ташқи масаласи ечимга эга ва бу ечимни (109) кўринишда ифодалаш мумкин.

5. Эркли ўзгарувчиларнинг сони иккита бўлган ҳол. Бу ҳолда ҳам Дирихле ва Нейман масалаларининг ечимини иккиланган ва оддий қатлам логарифмик потенциаллари кўринишида излаймиз:

$$u(x) = \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} d_\xi S, \tag{116}$$

$$u(x) = \int_S \sigma(\xi) \ln \frac{1}{r} d_\xi S. \tag{117}$$

Бу ерда S — ёпиқ Ляпунов эгри чизиғи. $\mu(\xi)$ ва $\sigma(\xi)$ зичликларни узлуксиз функциялар деб фараз қиламиз. Иккиланган қатлам логарифмик потенциали S эгри чизиқнинг ичида ҳам, ташқарисида ҳам гармоник функция бўлиб, чексизликда $O(|x|^{-1})$ баҳога эга бўлади. Оддий қатлам логарифмик потенциали S нинг ичида гармоник функция бўлиб, S нинг ташқарисида, $n>2$ ҳолдан фарқли, умуман айтганда, гармоник бўлмайди. Маълумки, текисликдаги чексиз соҳада гармоник бўлган функция, чексизликда чегараланган бўлиши керак, оддий қатлам логарифмик потенциали эса, умумий ҳолда чексизликда $\ln|x|$ каби ўсади. Текисликда Дирихле ва Нейманнинг масалаларини текширганда, $n>2$ бўлган ҳолдан фарқли бўлган томонларига тўхталамиз. Энг муҳими $n=2$ бўлганда N_e масаланинг иккита ечими бир-биридан ўзгармас сон билан фарқ қилади. N_e масалани текшираётгандаги яна бир хусусият қуйидаги лемма билан аниқланади.

Лемма. (117) *оддий қатлам потенциали ушбу*

$$\int_S \sigma(\xi) d_\xi S = 0 \tag{118}$$

шарт бажарилган ҳолда ва фақат шу ҳолдагина $|x| \to \infty$ *да нолга интилади. Агар* (118) *шарт бажарилмаса* (117) *формула билан аниқланган u(x) функция* $|x| \to \infty$ *да модули бўйича чексиз ўсади.*

Ҳақиқатан ҳам, текисликда ихтиёрий x нуқтани олиб, (117) интегрални қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\int_S \sigma(\xi)\ln\frac{1}{r}d_\xi S = \int_S \sigma(\xi)\ln\frac{1}{|x|}d_\xi S + \int_S \sigma(\xi)\ln\frac{|x|}{r}d_\xi S =$$
$$= \ln\frac{1}{|x|}\int_S \sigma(\xi)d_\xi S + \int_S \sigma(\xi)\ln\frac{|x|}{r}d_\xi S.$$

Бу йиғиндида $|x| \to \infty$ да иккинчи қўшилувчи нолга интилади, биринчи қўшилувчи эса

$$\int_S \sigma(\xi)\, d_\xi S \neq 0$$

шарт бажарилган ҳолда ва фақат шу ҳолдагина модули бўйича чексиз ўсади. Бундан дарҳол лемманинг тўғрилиги келиб чиқади. Дирихле ва Нейман масалаларини (116), (117) потенциаллар ёрдамида ечиш (23)—(26) чегаравий шартлар ва (78′), (93′) формулаларга асосан қуйидаги интеграл тенгламаларни ечишга келади:

$$\mu(x) - \frac{1}{\pi}\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}d_\xi S = -\frac{1}{\pi}\varphi(x), \qquad (D_i)$$

$$\mu(x) + \frac{1}{\pi}\int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}d_\xi S = \frac{1}{\pi}\varphi(x), \qquad (D_e)$$

$$\sigma(x) + \frac{1}{\pi}\int_S \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}d_\xi S = \frac{1}{\pi}\psi(x), \qquad (N_i)$$

$$\sigma(x) - \frac{1}{\pi}\int_S \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}d_\xi S = -\frac{1}{\pi}\psi(x). \qquad (N_e)$$

Бу интеграл тенгламаларнинг ядролари S Ляпунов эгри чизиғи бўлганда кичик махсусликка эга бўлади. (D_i)—(N_e) интеграл тенгламалар, $n > 2$ бўлган ҳолга ўхшаш текширилади. Аввало (N_e) тенгламани қараймиз. Бизга маълумки, N_e масаланинг ечими чексизликда чегараланган функциядир. (N_e) тенглама ечимини (агар у мавжуд бўлса) зичлик қилиб оддий қатлам потенциалини тузсак, бу потенциал чексизликда чегараланган бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолдагина у N_e масаланинг ечимидан иборат бўлади. Юқорида исботланган леммага асосан оддий қатлам потенциалининг чексизликда чегараланган бўлиши учун

$$\int_S \sigma(\xi) d_\xi S = 0$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли. (N_e) тенгламанинг ҳар икки томонини $d_x S$ га кўпайтириб, S бўйича интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} \int_S \sigma(x) d_x S - \frac{1}{\pi} \iint_{SS} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} d_\xi S d_x S = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_S \psi(x) d_x S. \end{aligned} \tag{119}$$

Икки каррали интегралда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз, яъни x ва ξ ларнинг ўрнини алмаштирамиз, бунда n нормал ν га алмашади:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \iint_{SS} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} d_\xi S d_x S = \frac{1}{\pi} \iint_{SS} \sigma(x) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} d_\xi S d_x S = \\ = \frac{1}{\pi} \int_S \sigma(x) \left\{ \int_S \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} d_\xi S \right\} d_x S. \end{aligned}$$

(72') формулага асосан олдинги тенгликдаги фигурали қавс ичидаги интегралнинг қиймати π га тенг. Буни эътиборга олсак, (119) тенгликдан

$$\int_S \psi(x) d_x S = 0 \tag{120}$$

тенглик келиб чиқади.

Шундай қилиб, (N_e) интеграл тенглама ечими ёрдамида тузилган оддий қатламнинг чексизликда чегараланган бўлиши учун (120) шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Леммага асосан, бу шарт бажарилганда тузилган потенциал чексизликда нолга интилади.

Энди (N_e) тенгламанинг ихтиёрий $\psi(x)$ узлуксиз функция учун ечимга эга эканлигини кўрсатамиз. Фредгольм альтернативасига биноан бир жинсли

$$\sigma(x) - \frac{1}{\pi}\int_S \sigma(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi S = 0 \tag{121}$$

тенгламани қараймиз.

$\sigma_0(x)$ функция бу тенгламанинг бирор ечими бўлсин. (121) тенгламанинг озод ҳади нолга тенг бўлгани учун (120) шарт бажарилади, демак,

$$u_0(x) = \int_S \sigma_0(\xi)\ln\frac{1}{r}\,d_\xi S$$

потенциал бир жинсли N_e масаланинг ечимидан иборат бўлади. N_e масала ечимининг ягоналигига асосан, S дан ташқарида $u_0(x) \equiv C =$ const. Оддий қатлам потенциали барча текисликда узлуксиз бўлгани учун S да ҳам $u_0(x) \equiv C$. Нихоят, D_i масаланинг ягоналигига биноан S нинг ичида ҳам $u_0(x) \equiv C$. У ҳолда

$$\frac{\partial u_0}{\partial n_i} = \frac{\partial u_0}{\partial n_e} \equiv 0.$$

(93′) формулага асосан

$$\sigma_0(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial u_0}{\partial n_i} - \frac{\partial u_0}{\partial n_e}\right) \equiv 0.$$

Демак, (121) тенглама нолдан фарқли ечимга эга эмас. Бундан дарҳол, (N_e) тенгламанинг ягона ечимга эга эканлиги келиб чиқади. Бунга асосан, (D_i) тенглама (N_e) тенгламага қўшма бўлгани учун (D_i) тенглама ҳам ихтиёрий $\varphi(x)$ узлуксиз функция учун ягона ечимга эга бўлади.

(D_e) ва (N_i) интеграл тенгламаларни текшириш худди $n > 2$ бўлган ҳолдагидай олиб борилади ва ўша натижалар ҳосил қилинади: (120) шарт N_i масаланинг ечимга эга бўлишининг зарур ва етарли шартидир; D_e масаланинг бир жинсли интеграл тенгламаси фақат ўзгармас ечимга эга бўлади.

D_e масаланинг ечимини

$$u(x) = \int_S \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} d_\xi S + \int_S \mu(\xi) d_\xi S$$

кўринишда излаш мумкин. Бу эса, ушбу

$$\mu(x) + \frac{1}{\pi} \int_S \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} d_\xi S + 1 \right) \mu(\xi) d_\xi S = \frac{1}{\pi} \varphi(x)$$

интеграл тенгламага олиб келади.

Худди 4- банддагидай бу тенгламанинг ҳамма вақт ечимга эга бўлиши кўрсатилади.

5- §. Иккинчи тартибли эллиптик типдаги чизиқли тенгламалар умумий назариясидан айрим маълумотлар

Биз бу параграфда иккинчи тартибли икки ўзгарувчили чизиқли эллиптик тенгламалар назариясидан айрим тушунчаларни келтирамиз. Соддалик учун тенглама чегараси S эгри чизиқдан иборат D соҳада каноник кўринишга келтирилган деб ҳисоблаймиз. Агар эркли ўзгарувчиларни x ва y орқали белгиласак, тенглама ушбу

$$Lu \equiv \Delta u + a(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y) \qquad (122)$$

кўринишда ёзилади, бу ерда $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

1. Чегаравий масалаларнинг қўйилиши. $p_1(x,y)$, $p_2(x,y)$, $q(x,y)$ ва $r(x,y)$ S да берилган ҳақиқий функциялар бўлсин. (122) тенглама учун қўйиладиган бир қатор чегаравий масалаларни Пуанкаренинг ушбу *чизиқли масаласи* ўз ичига олади: *D соҳада* (122) *тенгламанинг*

$$p_1(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + p_2(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} + q(x,y)u = r(x,y), \ (x,y) \in S \qquad (123)$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ регуляр ечими топилсин, бу ерда $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ ва $u(x,y)$ деганда бу функцияларнинг D ичидан туриб S даги лимит қийматлари тушунилади.

$p_1(x,y)=p_2(x,y)=0,\ q(x,y)\neq 0$ бўлган ҳолда (123) чегаравий шарт

$$u(x,y)=g(x,y),\,(x,y)\in S \tag{124}$$

кўринишда ёзилади, бунда $g(x,y)=r(x,y)/q(x,y)$.

(122), (124) масала *биринчи чегаравий* масала ёки *Дирихле масаласи* дейилади.

Пуанкаре масаласининг $q(x,y)=0$ бўлган ҳоли, яъни

$$p_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+p_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=r(x,y),\,(x,y)\in S \tag{125}$$

қия ҳосилали масала дейилади.

(125) шартда, барча S эгри чизиқда $p_1(x,y)=\cos\,(n,x)$, $p_2(x,y)=\cos\,(n,y)$, бу ерда n S га ўтказилган нормал бўлса, қия ҳосилали масала *иккинчи чегаравий масала* ёки *Нейман масаласи* дейилади.

2. Экстремум принципи. Дирихле масаласи ечимининг ягоналиги. Бизга маълумки, Дирихле масаласи $\Delta u=0$ Лаплас тенгламаси учун, яъни гармоник функциялар учун биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди. (122) тенглама учун ҳам шундай ягоналик теоремаси ўринли бўладими ёки йўқми деган табиий савол туғилади. Бу савол ҳар доим ҳам ижобий жавобга эга бўлавермайди.

Шу мақсадда ушбу

$$\Delta u+k^2u=0 \tag{126}$$

тенгламани текширамиз, бунда k^2 — ўзгармас сон.

(126) тенгламанинг ечимини ўзгарувчиларни ажратиш усули (биз бу усулни VII бобда тўлароқ баён қиламиз) билан, яъни

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

кўринишда қидирамиз. Бунга асосан (126) тенгламадан

$$-\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}+k^2=\text{const}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу ерда ўзгармас бирор мусбат α^2 сондан иборат бўлиб, $\alpha^2 < k^2$ бўлсин деб, ҳисоблаймиз. Аввалги тенгликлардан

$$X'' + \alpha^2 X = 0, \quad Y'' + (k^2 - \alpha^2)Y = 0$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгламаларни интеграллаб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$X = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x,$$
$$Y = C_3 \cos \sqrt{k^2 - \alpha^2}\, y + C_4 \sin \sqrt{k^2 - \alpha^2}\, y.$$

Бундан дарҳол (126) тенглама нолдан фарқли бўлган бошқа ечимлари орасида

$$u(x, y) = \sin \alpha x \sin \sqrt{k^2 - \alpha^2}\, y \qquad (127)$$

ечимга ҳам эга бўлади. Бу ечим

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le y \le \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}}$$

тўртбурчакнинг барча чегарасида нолга тенг.

Демак, (126) тенгламанинг (127) ечими юқоридаги тўртбурчакнинг чегарасида нолга тенг бўлса ҳам, тўртбурчакнинг ичида нолдан фарқлидир.

Экстремум принципи. *Агар барча D соҳада $c(x,y) \le 0$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда D соҳада*

$$Lu = 0 \qquad (128)$$

тенгламанинг $u(x,y)$ регуляр ечими хеч бир $(x,y) \in D$ нуқтада ўзининг мусбат максимумига ва манфий минимумига эришмайди.

Аввало $c < 0$ бўлсин. $u(x,y)$ ечим $(x,y) \in D$ нуқтада мусбат максимумга эришсин деб фараз қиламиз. У ҳолда, бу нуқтада

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \le 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \le 0 .$$

Бундан

$$\Delta u \le 0,\ a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0, cu < 0.$$

Демак, текширилаётган нуқтада $Lu < 0$. Бу эса (128) тенгламага қарама-қаршидир.

Худди шундай, $(x,y)\in D$ нуқтада $u(x,y)$ ечимнинг манфий минимумига эришмаслиги кўрсатилади. Энди $c\le 0$ бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда $u(x,y)$ функция ўрнига

$$u(x,y)=\left(A-e^{\alpha x}\right)\upsilon(x,y) \qquad (129)$$

алмаштириш ёрдамида янги $\upsilon(x,y)$ функция киритамиз. Бунда A, α — кейинчалик мос равишда танлаб олинадиган мусбат сонлардир. (128) тенгламага $u(x,y)$ ўрнига (129) ифодани олиб бориб қўйганимиздан сўнг, $\upsilon(x,y)$ га нисбатан (128) га ўхшаш

$$\Delta\upsilon + a^*(x,y)\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + b^*(x,y)\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + c*(x,y)\upsilon = 0$$

тенглама ҳосил бўлади, бу ерда

$$a^*\left(x,y\right)=\frac{\alpha A-e^{\alpha x}(a+2\alpha)}{A-e^{\alpha x}},\ b^*(x,y)=b(x,y),$$

$$c^*(x,y)=-\frac{e^{\alpha x}\left(\alpha^2+a\alpha+c\right)-cA}{A-e^{\alpha x}}.$$

α ни етарлича катта қилиб танлаб оламизки, D соҳада $a^2+a\alpha+c>0$ тенгсизлик ўринли бўлсин ва A учун e^{ax} функциянинг D даги юқори чегарасидан катта бўлган қийматни олсак, $A-e^{ax}>0$ тенгсизлик бажарилади. У ҳолда $-cA\ge 0$ бўлгани сабабли, $c^*<0$ тенгсизлик бажарилади.

Шу билан экстремум принципи исбот бўлди.

Бу принципдан (122), (124) Дирихле масаласи ечимининг ягоналиги дарҳол келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, бу масаланинг иккита u_1 ва u_2 ечими бор бўлсин. У ҳолда $v = u_1 - u_2$ айирма (128) нинг ечими бўлиб, D соҳанинг чегараси S да нолга тенг бўлади.

Агар v функция D нинг ичида нолга тенг бўлмаса, у D нинг ичида мусбат ёки манфий қийматларни қабул қилади.

Демак, v функция $\overline{D}$ да узлуксиз бўлганлиги учун бирор $(x,y)\in D$ нуқтада мусбат максимум ёки манфий минимумга эришади. Бу эса $c \leq 0$ бўлганда экстремум принципига қарама-қаршидир. Бу шарт бажарилганда $\forall(x,y)\in D$ нуқтада $v(x,y) = 0$, яъни $u_1 = u_2$.

Шундай қилиб, (122), (124) масаланинг бирдан бир ечимга эга бўлиши учун (122) тенглама $c(x,y)$ коэффициентининг ишораси муҳим аҳамиятга эга.

3. Иккинчи тартибли чизиқли эллиптик тенглама ечимининг мавжудлиги. (122) тенгламанинг a, b, c коэффициентлари ва f озод ҳади аналитик функциялар бўлган ҳолда бу тенгламанинг кичик D соҳалар учун ечимга эга бўлиши Коши — Ковалевская теоремасидан келиб чиқади. Аммо улар аналитик функциялар бўлмаса, (122) тенглама ечимининг мавжудлигини кўрсатиш учун бошқа усулларни қўллашга тўғри келади. a, b, c ва f функцияларни $C^1(D+S)$ синфга тегишли бўлсин деб ҳисоблаймиз. Биз *параметрикс* деб аталувчи

$$\psi(x,y;\xi,\eta) = -\ln r,\quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

функцияни текширамиз. Маълумки, ҳар бир жуфт (x,y), (ξ,η) нуқталарга нисбатан $(x,y) \neq (\xi,\eta)$ да бу функция Лаплас тенгламасининг ечимидан иборат бўлади, шу билан бирга

$$v(x,y) = \int_D \psi(x,y;\xi,\eta)\,\rho(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

ҳажм потенциали $\rho(\xi,\eta)$ зичлик $C^1(D \cup S)$ синфга тегишли бўлганда,

$$\Delta v = -2\pi\rho(x,y) \tag{130}$$

Пуассон тенгламасининг ечимидан иборат бўлади.

Энди $\rho(x,y) \in C^1(\overline{D})$ функцияни шундай танлаб олишга ҳаракат қиламизки,

$$u(x,y) = \upsilon(x,y) + \omega(x,y) \tag{131}$$

функция (122) тенгламанинг ечими бўлсин, бу ерда $\omega(x,y) - C^3(D \cup S)$ синфга тегишли ихтиёрий функциядир.

(131) ифодани (122) тенгламага олиб бориб қўямиз. (130) тенгликка асосан,

$$\Delta u = \Delta\omega - 2\pi\rho.$$

Бунга биноан, Lu оператор қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$Lu = L\omega - 2\pi\rho + \int_D \left(a\psi_x + b\psi_y + c\psi\right)\rho\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta .$$

Агар биз қисқалик учун ушбу

$$K(x,y;\xi,,\eta) = \frac{1}{2\pi}\left(a\psi_x + b\psi_y + c\psi\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[a(x,y)\frac{x-\xi}{r^2} + b(x,y)\frac{y-\eta}{r^2} + c(x,y)\ln r\right], \tag{132}$$

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(L\omega - f\right) \tag{133}$$

белгилашларни киритсак, $\rho(x,y)$ функцияни аниқлаш учун

$$\rho(x,y) - \int_D K\left(x,y;\xi,\eta\right)\rho\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta = g\left(x,y\right) \tag{134}$$

интеграл тенгламани ҳосил қиламиз. Бу интеграл тенгламанинг (132) ядроси $x = \xi$, $y = \eta$ бўлганда $\frac{1}{r}$ кўринишдаги махсусликка эга, демак, унинг квадрати D соҳада интегралланувчи бўлмайди. Шу туфайли (134) интеграл тенгламага бевосита Фредгольм назариясини қўллаш мумкин эмас. Аммо, интеграцияланган ядро

$$K_2(x,y;\xi,\eta) = \int_D K(x,y;s,t)K(s,t;\xi,\eta)dsdt \tag{135}$$

бу соҳада квадрати билан интегралланувчи бўлади. Шунинг учун (134) интеграл тенглама ўрнига аввал интеграцияланган

$$\rho(x,y)-\int_D K_2(x,y;\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = h(x,y) \qquad (136)$$

интеграл тенгламани текширамиз, бу ерда

$$h = g + \int_D K(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\,. \qquad (137)$$

ω ва f функцияларга қўйилган шартларга асосан (137) тengликдан $h(x,y)$ функцияни $C^1(\overline{D})$ синфга тегишли бўлиши келиб чиқади. Агар D кичик соҳа бўлса, яъни

$$\int_D d\xi d\eta \int_D K_2^2(x,y;\xi,\eta)\,dxdy < 1 \qquad (138)$$

шарт бажарилса, (136) интеграл тенгламага мос бўлган бир жинсли тенглама фақат тривиал, яъни нолга тенг бўлган ечимга эга бўлади.

Демак, (136) тенглама ҳамма вақт $C^1(\overline{D})$ синфга тегишли бўлган ягона ечимга эга бўлади. (134) тенгламанинг ҳар бир ечими (136) тенгламанинг ҳам ечими бўлади. Лекин (138) шарт бажарилганда, биз кўрдикки, (136) тенглама ягона $\rho(x,y)$ ечимга эга. $\rho(x,y)$ ёрдамида янги

$$\rho_1(x,y) = g(x,y) + \int_D K(x,y;\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \qquad (139)$$

функцияни ҳосил қиламиз. Агар биз барча D соҳада $\rho_1(x,y) = \rho(x,y)$ эканлигини кўрсатсак, шу билан бирга $\rho(x,y)$ (134) тенгламанинг ечими бўлиши исботланган бўлади. Шу мақсадда (136) тенгламани (135) га асосан

$$\rho(s,t) = h(s,t) +$$

$$+\int_D \rho(\xi,\eta)\left[\int_D K(s,t;s_1,t_1)K(s_1,t_1;\xi,\eta)\,ds_1dt_1\right]d\xi d\eta =$$

$$= h(s,t) + \int_D K(s,t;s_1,t_1)\left[\int_D K(s_1,t_1;\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right]ds_1dt_1$$

ёки (139) га биноан,

$$\rho(s,t) = h(s,t) + \int_D K(s,t,s_1,t_1)\left[\rho_1(s_1,t_1) - g(s_1,t_1)\right] ds_1\, dt_1$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бу ифодани $K(x,y;s,t)$ га кўпайтириб, сўнгра интеграллаб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\int_D K(x,y;s,t)\rho(s,t)\, dsdt = \int_D K(x,y;s,t)h(s,t)\, dsdt +$$

$$+\int_D K(x,y;s,t)\left\{\int_D K(s,t;s_1,t_1)\left[\rho_1(s_1,t_1) - g(s_1,t_1)\right] ds_1 dt_1\right\} dsdt =$$

$$= \int_D K(x,y;s,t)h(s,t)\, dsdt +$$

$$+\int_D K_2(x,y;s_1,t_1)\left[\rho_1(s_1,t_1) - g(s_1,t_1)\right] ds_1 dt_1.$$

(137) ва (139) тенгликларга асосан

$$\rho_1(x,y) - g(x,y) = \int_D K(x,y;s,t)g(s,t)dsdt +$$

$$+\int_D K(x,y;s,t)\left[\int_D K(s,t;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\right] dsdt +$$

$$+\int_D K_2(x,y;s_1,t_1)\rho_1(s_1,t_1)\, ds_1 dt_1 - \int_D K_2(x,y;s_1,t_1)\, g(s_1,t_1)\, ds_1 dt_1$$

ёки

$$\rho_1(x,y) - \int_D K(x,y;\xi,\eta)\rho_1(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = h(x,y)$$

тенгламага эга бўламиз, яъни $\rho_1(x,y)$ (136) тенгламанинг ечимидан иборат. Шундай қилиб, бу тенглама ягона ечимга эга бўлгани учун $\rho_1(x,y) = \rho(x,y)$ эканлиги келиб чиқади. Аммо $\rho_1 = \rho$ учун (139) тенглик (134) интеграл тенглама билан устма-уст тушади. (134) тенгламанинг $\rho(x,y)$ ечимини (131) формулага қўйиб, D соҳада (122) тенгламанинг ихтиёрий $\omega(x,y) \in C^3(\overline{D})$ функцияга боғлиқ бўлган ечимлари оиласига эга бўламиз.

Шундай қилиб, (138) шартни қаноатлантирувчи D соҳада коэффциентлари $C^1(\overline{D})$ синфига тегишли бўлган (122) тенгламанинг ҳамма вақт ечимга эга бўлиши исботланди.

4. Элементар ечимлар. (122) тенгламага мос бўлган

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \tag{140}$$

бир жинсли тенгламани қараймиз.

D соҳада (138) шарт бажарилган деб ҳисоблаймиз ва бу соҳанинг ихтиёрий нуқтасини (x_0,y_0) орқали белгилаб оламиз. D соҳадан маркази (x_0,y_0) нуқтада бўлган етарли кичик ε радиусли $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le \varepsilon^2$ доирани чиқариб ташлаб, D соҳанинг қолган қисмини D_ε билан белгилаймиз. Аввалги банддаги мулоҳазаларни қайтариб D_ε соҳада (140) тенгламанинг u_ε ечимини

$$2\pi u_\varepsilon(x,y;x_0,y_0) = -\ln r + \int_D \psi(x,y;\xi,\eta)\,\rho_\varepsilon(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \tag{141}$$

формула ёрдамида тузамиз, бу ерда ρ_ε ушбу

$$\rho_\varepsilon - \int_{D_\varepsilon} K(x,y;\xi,\eta)\,\rho_\varepsilon d\xi d\eta = g(x,y;x_0,y_0) \tag{142}$$

тенгламанинг ечимидан иборат. (142) тенгламанинг ядроси (132) формула билан аниқланади, ўнг томони эса

$$g(x,y;x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi} L \ln r.$$

(142) тенгламанинг $\rho_\varepsilon(x,y;x_0,y_0)$ ечими, кўриниб турибдики $\varepsilon \to 0$ да

$$\rho(x,y) - \int_D K(x,y;x_0,y_0)\,\rho(\xi,\eta) d\xi d\eta = g(x,y;x_0,y_0)$$

тенгламанинг $\rho(x,y;x_0,y_0)$ ечимига текис интилади.

(141) тенгликдан $\varepsilon \to 0$ да лимитга ўтиб,

$$\gamma(x,y;x_0,y_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi}\ln r + \frac{1}{2\pi}\int_D \psi(x,y;\xi,\eta)\rho(\xi,\eta;x_0,y_0)d\xi d\eta$$

функцияни ҳосил қиламиз.

Бу функция

а) $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ бўлганда D соҳада (140) тенгламанинг регуляр ечимидан иборат;

б) (x_0,y_0) нуқта атрофида

$$\gamma = O\left(\ln\frac{2R}{r}\right), \quad \gamma_x = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \gamma_y = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

баҳолар ўринли бўлади, бу ерда R — D соҳанинг диаметри.

а), б) хоссаларга эга бўлган ечимлар одатда *фундаментал* ёки *элементар ечимлар* деб аталади.

Агар (140) тенгламанинг a, b, c коэффицентлари $C^1\left(\overline{D}\right)$ синфга тегишли бўлса, бу тенгламанинг элементар ечимлари ҳеч бўлмаганда, кичик D соҳалар учун мавжуд бўлади.

Гармоник функциялар назариясига ўхшаш, бу ерда ҳам, умумлашган оддий ва иккиланган қатлам потенциаллари тушунчасини киритиб, улар ёрдамида (140) тенглама учун Дирихле ва Нейман масалаларини Фредгольмнинг иккинчи турдаги интеграл тенгламаларига келтириш мумкин.

Юқорида баён қилинган экстремум принципи ва параметрикс усули $n > 2$ бўлган ҳолда, яъни

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = F(x)$$

кўринишдаги тенгламалар учун ҳам ўз кучини сақлаб қолади.

V БОБ
ПАРАБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР

Биз бу бобда параболик типдаги тенгламаларнинг типик вакили бўлган ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,t), \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{1}$$

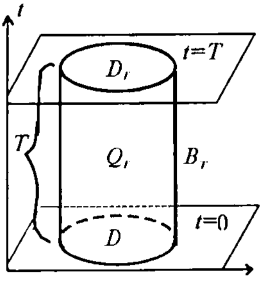
ёки

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = 0 \tag{2}$$

иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини текширамиз.

1- §. Биринчи чегаравий масала. Экстремум принципи

1. Масаланинг қўйилиши. E^n фазода ($t = 0$ текисликда) чегараси S бўлган чекли D соҳани оламиз. Асоси D ва ясовчилари t ўққа параллел бўлган цилиндрик сирт ясаймиз. Бу сиртнинг $t=0$, $t = T$ ($T=\text{const}$) текисликлар орасида ётган қисмини B_T орқали, D нинг $t = T$ текисликдаги проекциясини D_T орқали, $(x_1,\dots,x_n,t)$ фазодаги чегараси $D \cup B_T \cup D_T$ бўлган соҳани Q_T орқали белгилаймиз (28- чизма).



28- чизма

Агар $(x_1,\dots,x_n,t)$ ўзгарувчиларнинг бирор тўпламини G орқали белгиласак, G да $x_1, \dots, x_n$ ўзгарувчилар бўйича p тартибгача, t бўйича q тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган функциялар синфини $C^{(p,q)}(G)$ орқали белгилаб оламиз.

Биринчи чегаравий масала бундай қўйилади: Q_T соҳада (1) тенгламанинг $C^{(2,1)}(Q_T \cup D_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ синфга тегишли бўлган

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), x \in D \tag{3}$$

бошланғич шартни ва

$$u\big|_{B_t} = \varphi(x,t), \quad x \in S, t \in [0,T] \tag{4}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

2. Экстремум принципи. (2) *тенгламанинг Q_T соҳадаги $C(\overline{Q}_T) \cap C^{(2,1)}(Q_T \cup D_T)$ синфга тегишли бўлган $u(x,t)$ ечими ўзининг максимум ва минимум қийматларини $D \cup B_T$ да, яъни, ёки $t=0$ да, ёки Q_T цилиндрнинг ён сиртида қабул қилади.*

Агар бу принципда кўрсатилган $u(x,t)$ функция бирор нуқтада максимумга эришса, у ҳолда шу нуқтада $-u(x,t)$ функция минимумга эришади. Шу туфайли экстремум принципини максимум ҳол учун исботлаш билан чегараланамиз.

Ушбу

$$M = \max_{(x,t)\in \overline{Q}_T} u(x,t), \qquad \mu = \max_{(x,t)\in D\cup B_T} u(x,t)$$

белгилашларни киритамиз. Равшанки $\mu \le M$. Максимум принципи $\mu = M$ эканлигини кўрсатишдан иборат.

Тескарисини фараз қиламиз, яъни $\mu < M$ бўлсин.

Бу ҳолда, $u(x,t)$ функция $\overline{Q}_T$ да узлуксиз бўлгани учун максимум қийматга Q_T ёки D_T да ётувчи бирор (x_0,t_0) нуқтада эришади, яъни

$$u(x_0,t_0) = M, \qquad (x_0,t_0)\in Q_T \cup D_T.$$

Ёрдамчи

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) + \frac{M-\mu}{2T}(t_0 - t)$$

функцияни текширамиз.

Агар $(x,t) \in D \cup B_T$ бўлса, $t_0 - t \leq t_0 < T$ бўлади. Бунга асосан

$$\upsilon(x,t)\Big|_{(x,t)\in D\cup B_T} < \mu + \frac{M-\mu}{2} = \frac{M+\mu}{2} < M .$$

Иккинчи томондан,

$$\upsilon(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M .$$

Демак, $D \cup B_T$дан ташқарида шундай нуқта борки, бунда $\upsilon(x,t)$ функция M қийматни қабул қилади, ваҳоланки $D \cup B_T$ да $\upsilon(x,t)$ нинг қиймати Mдан кичик. Бундан $\upsilon(x,t)$ функция $\overline{Q}_T$ да максимумга Q_T ёки D_T да эришиши келиб чиқади.

$\upsilon(x,t)$ функция максимумга эришган нуқтани (x_1,t_1) орқали белгилаймиз. Аввало, $(x_1,t_1) \in Q_T$ бўлсин. Бу нуқтада максимумнинг зарурий

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_i^2} \leq 0, \quad i = 1,2,3,\cdots,n$$

шарти бажарилади. Бунга асосан (x_1,t_1) нуқтада

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - a^2 \Delta \upsilon \geq 0 \cdot$$

Иккинчи томондан,

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - a^2 \Delta \upsilon = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u - \frac{M-\mu}{2T} = -\frac{M-\mu}{2T} < 0 . \tag{5}$$

Бу қарама-қаршиликдан $(x_1,t_1) \bar{\in} Q_T$ келиб чиқади.

Энди, $(x_1,t_1) \in D_T$ бўлсин. Бу эса $t_1 = T$, $x_1 \in D$ эканлигини билдиради.

У ҳолда, t_1 нуқта (O,T) оралиқнинг чегара нуқтаси, x_1 эса D соҳанинг ички нуқтаси бўлгани учун (x_1,t_1) нуқтадаги максимумнинг зарурий шартига асосан

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} \geq 0 , \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_i^2} \leq 0 , \; i = 1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

Иккинчи томондан яна (5) тенгсизлик бажарилади. Бу қарама-қаршилик $(x_1, t_1) \in D_t$ эканлигини кўрсатади.

Шундай қилиб, $Q_T \cup D_T$ йиғиндига тегишли бўлиши керак бўлган нуқта Q_T га ҳам, D_T га ҳам тегишли бўлмайди.

Бу қарама-қаршилик $\mu < M$ деган фаразимизнинг нотўғри эканлигини кўрсатади. Демак, $\mu < M$. Шу билан экстремум принципи исбот бўлди.

Айрим адабиётларда бу принцип *максимум принципи* деб ҳам юритилади.

3. Биринчи чегаравий масала ечимининг ягоналиги. (1) *тенглама учун қўйилган биринчи чегаравий масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

(1) тенгламанинг (3) ва (4) шартларни қаноатлантирувчи иккита $u_1(x,t), u_2(x,t)$ ечими мавжуд бўлсин деб фараз қиламиз.

У ҳолда бу ечимларнинг айирмаси, $\upsilon(x,t) = u_1 - u_2$ функция (2) тенгламани ва бир жинсли, яъни нолга тенг бўлган бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантиради. Бундан дарҳол экстремум принципига асосан $\upsilon(x,t)$ функция максимум ва минимум қийматларининг нолга тенглиги келиб чиқади. Демак, $\upsilon(x,t) \equiv 0$, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

Агар $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ ечимлар бошланғич ва чегаравий шартларининг фарқи модули бўйича ε дан ($\varepsilon > 0$) кичик бўлса, у ҳолда экстремум принципига асосан $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$ бўлади, бу эса биринчи чегаравий масала ечимининг бошланғич ва чегаравий шартларга узлуксиз боғлиқлигини, яъни бу масала ечимининг турғунлигини билдиради.

Биринчи чегаравий масала ечимининг мавжудлигини Фурье усули билан VII бобда исботлаймиз.

2- §. Коши масаласи

Коши масаласи (1) тенглама учун қуйидагича қўйилади: $t > 0$ *ярим фазода* (1) *тенгламанинг* $C^{2,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ *синфга тегишли бўлган ва*

$$u|_{t=+0} = \varphi(x), \qquad x \in E^n \tag{7}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\varphi(x)$ берилган узлуксиз чегараланган функция.

1. Коши масаласи ечимининг ягоналиги. (1) *тенглама* (7) *бошланғич шартни қаноатлантирувчи биттадан ортиқ чегараланган ечимга эга бўлмайди.*

Ҳақиқатан ҳам, агар бундай ечимлар иккита u_1 ва u_2 бўлса, уларнинг айирмаси $\upsilon(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ (2) тенгламани ва

$$\upsilon|_{t=0} = 0 \tag{8}$$

бошланғич шартни қаноатлантиради. Бу функция иккита чегараланган функциялар айирмаси бўлгани учун чегараланган бўлади, яъни $|\upsilon(x,t)| \le M$.

$t = 0$ текисликда (яъни E^n фазода) маркази координата бошида, радиуси R га тенг бўлган W_R шарни қараймиз. Бу шарнинг чегараси S_R бўлсин.

Ясовчилари t ўққа параллел ва йўналтирувчиси S_R бўлган цилиндрик сирт ясаймиз. Бу сиртнинг $t > 0$ бўлган қисмини B орқали белгилаймиз. $(x_1,\dots,x_n,\ t)$ фазода чегараси $W_R \cup B$ бўлган соҳани Q орқали белгилаб, ушбу

$$\upsilon_R(x,t) = \frac{2Mn}{R^2}\left(\frac{x^2}{2n} + a^2 t\right), \quad x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

ёрдамчи функцияни текширамиз.

Бу функция (2) тенгламани қаноатлантиришини текшириб кўриш қийин эмас. Сўнгра

$$\upsilon_R\big|_{t=0} = \frac{Mx^2}{R^2} \ge 0.$$

(8) тенгликка асосан

$$\upsilon_R\big|_{t=0} \ge |\upsilon|\big|_{t=0} = 0.$$

Ва ниҳоят,

$$\upsilon_R\big|_B = \upsilon_R\big|_{x^2=R^2} \ge M \ge |\upsilon|\big|_B.$$

Охирги икки тенгсизликдан

$$v_R \Big|_{W_R \cup B} \geq |v|_{W_R \cup B}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Бундан дарҳол $v_R + v$, $v_R - v$ миқдорларнинг ҳар бири $W_R \cup B$ да манфий эмаслиги келиб чиқади. Бундан ташқари бу миқдорларнинг ҳар бири (2) тенгламани қаноатлантиради.

У ҳолда, экстремум принципига асосан, ёпиқ $\overline{Q}_T$ соҳада, бунда $x \in \overline{W}_R$, $0 \leq t \leq T$, $T = \mathrm{const}$, $v_R + v$ йиғинди ҳам, $v_R - v$ айирма ҳам минимум қийматни $W_R \cup B$ да қабул қилади, шу билан бу минимумлар манфий эмас. Демак,

$$v_R + v \geq 0, \; v_R - v \geq 0, \; x^2 \leq R^2, \; t \geq 0.$$

Шундай қилиб, $x^2 \leq R^2$, $t \geq 0$ да

$$-v_R \leq v \leq u_R,$$

яъни

$$|v(x,t)| \leq \frac{2Mn}{R^2}\left(\frac{x^2}{2n} + a^2 t\right).$$

x ва t ни ихтиёрий белгилаб (аниқлаб), R ни чексизликка интилтирамиз. Бу ҳолда, охирги тенгсизликдан $|v(x,t)| \leq 0$, яъни $v(x,t) = 0$.

Шу билан Коши масаласи ечимининг ягоналиги исботланди. Коши масаласи ечими ягоналигининг исботлаш усулидан унинг турғунлиги ҳам келиб чиқади.

2. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг фундаментал ечими. Ушбу

$$E(x,\xi,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}, \quad r = |x - \xi| \tag{9}$$

функция $t > 0$ ярим фазонинг барча (x,t) нуқталарида (2) тенгламанинг ечимидан иборатдир.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{n}{2(2a\sqrt{\pi\, t})^n t} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} + \frac{1}{(2a\sqrt{\pi\, t})^n t^2} \frac{r^2}{4a^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} =$$

$$= \left(\frac{r^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t} \right) E(x, \xi, t),$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = -\frac{1}{(2a\sqrt{\pi\, t})^n} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \frac{x_i - \xi_i}{2a^2 t} = -\frac{x_i - \xi_i}{2a^2 t} E(x, \xi, t),$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{2a^2 t} E(x, \xi, t) + \frac{(x_i - \xi_i)^2}{4a^4 t^2} E(x, \xi, t) =$$

$$= \left[\frac{(x_i - \xi_i)^2}{4a^4 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \right] E(x, \xi, t),$$

$$\Delta E = \left(\frac{r^2}{4a^4 t^2} - \frac{n}{2a^2 t} \right) E(x, \xi, t),$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \Delta E = \left(\frac{r^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t} \right) E(x, \xi, t) - \left(\frac{r^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t} \right) E(x, \xi, t) = 0.$$

(9) функция (2) тенгламанинг *фундаментал ечими* дейилади.

3. Коши масаласи ечимининг мавжудлиги. Ушбу

$$u(x, t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{E^n} \varphi(\xi) e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} d\xi \qquad (10)$$

формула билан аниқланган функция (2) тенглама учун Коши масаласининг ечимидан иборатдир. Бу ерда E^n бўйича олинган интегрални қуйидагича тушуниш лозим:

$$\int_{E^n} \dots d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \dots d\xi_1 \dots d\xi_n .$$

(10) формула *Пуассон формуласи* дейилади.

Аввало, Пуассон формуласи билан аниқланган $u(x,t)$ функциянинг $t>0$ бўлганда узлуксиз бўлишини исботлаймиз. Шу мақсадда $x_1,...,x_n$, t ўзгарувчилар фазосида

$$\left|x^2\right| \leq l^2, \quad 0 \leq t \leq T \tag{11}$$

тенгсизликлар билан аниқланган соҳани қараймиз, бунда l, T — мусбат ўзгармаслар.

(10) формулада иштирок этаётган

$$\int_{E^n} \varphi(\xi) e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} d\xi \tag{12}$$

интегралнинг x ва t бўйича (11) соҳада текис яқинлашувчанлигини кўрсатамиз. Етарли катта R сонни олиб,

$$\int_{|\xi|>R} \varphi(\xi) e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} d\xi$$

интегрални баҳолаймиз.

$\varphi(\xi)$ функция чегараланган, яъни $|\varphi(\xi)| \leq M = \text{const}$. Сўнгра, $r = |x-\xi| \geq |\xi| - |x| \geq |\xi| - l$, $R > 2l$ деб ҳисоблаймиз. У ҳолда

$$l < \frac{R}{2} < \frac{|\xi|}{2}, \quad r > \frac{|\xi|}{2}.$$

Бунга асосан

$$e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} < e^{-\frac{|\xi|^2}{16a^2 T}}.$$

Демак,

$$\left|\int_{|\xi|>R} \varphi(\xi) e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} d\xi\right| < M \int_{|\xi|>R} e^{-\frac{|\xi|^2}{16a^2 T}} d\xi =$$

$$= M|S_1| \int_R^\infty e^{-\frac{\rho^2}{16a^2 T}} \rho^{n-1} d\rho. \tag{13}$$

Ушбу

$$\int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\frac{\rho^2}{16a^2T}} d\rho$$

интеграл яқинлашувчи бўлгани учун, (13) нинг ўнг томонидаги интеграл R етарли катта бўлганда исталганча кичик бўлади, бу интеграл x га ҳам, t га ҳам боғлиқ бўлмагани учун (12) интеграл текис яқинлашувчи бўлади.

Бундан Пуассон формуласи билан аниқланган $u(x,t)$ функциянинг $t>0$ да узлуксизлиги келиб чиқади.

Энди $t>0$ бўлганда $u(x,t)$ функцияни t ва x нуқтанинг координатлари бўйича исталганча дифференциалланувчи эканлигини ва барча ҳосилаларни Пуассон формуласини интеграл белгиси остида дифференциаллаш натижасида ҳосил қилиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Мисол учун $\frac{\partial u}{\partial t}$ ҳосилани текширамиз. Агар Пуассон формуласининг ўнг томонини t бўйича формал дифференциалласак, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}&-\frac{n}{2(2a\sqrt{\pi})^n t^{\frac{n+2}{2}}}\int_{E^n}\varphi(\xi)e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}d\xi+\\&+\frac{1}{4a^2(2a\sqrt{\pi})^n t^{\frac{n+4}{2}}}\int_{E^n}r^2\varphi(\xi)e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}d\xi\,.\end{aligned}\tag{14}$$

Бу ифоданинг ўнг томонидаги биринчи интеграл юқорида кўрсатганимизга асосан (11) соҳада текис яқинлашувчи бўлади. Шу сингари иккинчи интегралнинг ҳам бу соҳада текис яқинлашувчанлиги текшириб кўрилади.

Бундан дарҳол $\frac{\partial u}{\partial t}$ ҳосиланинг мавжудлиги, узлуксизлиги ва (14) ифода билан устма-уст тушиши келиб чиқади.

Худди шундай $u(x,t)$ функция бошқа ҳосилаларининг мавжудлиги исбот қилинади. Пуассон формуласини бевосита дифференциаллаб, $u(x,t)$ функциянинг ҳосилаларини (2) тенгламага қўйиб, бу функциянинг (2) тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қиламиз.

Энди $u(x,t)$ функциянинг чегараланганлигини ва (7) бошланғич шартни қаноатлантиришини исбот қилиш қолди. (10) формулада $\xi = x + 2a\sqrt{t}\, s$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда бу формула ушбу

$$u(x,t) = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{E^n} \varphi(x + 2a\sqrt{t}s)\, e^{-|s|^2} ds \tag{15}$$

кўринишда ёзилади. Маълум бўлган

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho = \sqrt{\pi}$$

формулага асосан

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{E^n} e^{-|s|^2} ds = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2\right)} ds_1 \dots ds_n = \\ = \pi^{-\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} = 1 . \end{aligned} \tag{16}$$

(15) формуладан

$$|u(x,t)| \le M \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{E^n} e^{-|S|^2} ds = M .$$

Демак, $u(x,t)$ функция чегараланган.

(15) ва (16) формулаларга асосан

$$u(x,t) - \varphi(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{E^n} \left[\varphi(x + 2a\sqrt{t}s) - \varphi(x)\right] e^{-|S|^2} dS . \tag{17}$$

(17) формуладаги интегрални $|s| > R$ ва $|s| < R$, бунда R — бирор ўзгармас сон, соҳалар бўйича иккита интегралга ажратамиз.

У ҳолда

$$\left| \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{|s|>R} \left[\varphi(x + 2a\sqrt{t}s) - \varphi(x)\right] e^{-|s|^2} ds \right| \le 2M \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{|s|>R} e^{-|s|^2} ds =$$

$$= 2M\pi^{-\frac{n}{2}}\int\limits_R^\infty \rho^{n-1}e^{-\rho^2}d\rho\int\limits_{s_1} ds_1 = 2M\pi^{-\frac{n}{2}}|s_1|\int\limits_R^\infty \rho^{n-1}e^{-\rho^2}d\rho.$$

Ушбу

$$\int\limits_0^\infty \rho^{n-1}e^{-\rho^2}d\rho$$

интеграл яқинлашувчи бўлгани учун, шундай $R_0(\varepsilon)$ танлаш мумкинки, $R > R_0(\varepsilon)$ бўлганда

$$2M\pi^{-\frac{n}{2}}|s_1|\int\limits_R^\infty \rho^{n-1}e^{-\rho^2}d\rho < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилади.

Бирор $R > R_0(\varepsilon)$ сонни аниқлаб қўямиз. У ҳолда шундай $t_0(\varepsilon)$ топиш мумкинки, $0 < t < t_0(\varepsilon)$ бўлганда ва ихтиёрий s, $|s| < R$ учун қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$\left|\varphi(x + 2\sqrt{t}s) - \varphi(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ундан кейин

$$\left|\pi^{-\frac{n}{2}}\int\limits_{|s|<R}\left[\varphi\left(x + 2\sqrt{t}\,s\right) - \varphi\left(x\right)\right]e^{-|s|^2}ds\right| < \pi^{-\frac{n}{2}}\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{E^n} e^{-|s|^2}ds = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Демак,

$$|u(x,t) - \varphi(x)| < \varepsilon,\;\; 0 < t < t_0(\varepsilon),$$

яъни, $\varepsilon > 0$ ихтиёрий бўлгани учун

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \varphi(x).$$

4. Бир жинсли бўлмаган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси. $f(x,t)$, $x \in E^n$, $0 \le t < \infty$ берилган узлуксиз чегараланган функция бўлсин. Бошланғич вақт сифатида $t = 0$ ни эмас, балки $t = \tau$ ни оламиз, бу ерда τ — тайин мусбат сон.

Худди аввалги банддагидай текшириб кўриш мумкинки, ушбу

$$\upsilon(x,t,\tau)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n}\int_{E^n}\int(\xi,\tau)e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi \quad t>\tau$$

функция (2) тенгламани ва

$$\upsilon\,(x,\tau,\,\tau)=f(x,\,\tau)$$

бошланғич шартни қаноатлантиради. Бунга асосан

$$u(x,t)=\int_0^t\vartheta(x,t,\tau)d\tau=\int_0^t\int_{E^n}\frac{f(\xi,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau$$

функция (1) тенгламани ва

$$u(x,t)|_{t=0}=0$$

бошланғич шартни қаноатлантиради.

Юқорида баён қилинганларга асосан (1) тенгламанинг (7) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими

$$u(x,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int_{E^n}\varphi(\xi)e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi+$$

$$+\int_0^t\int_{E^n}\frac{f(\xi,\tau)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau$$

формула билан аниқланади.

3- §. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ечимлари силлиқлигининг хусусияти тўғрисида

1. Эллиптик ва параболик тенгламалар бўлган ҳол. Бизга IV бобнинг 1- § 3- банддан маълумки, D соҳада гармоник $u(x)$ функция D соҳада барча ўзгарувчилар бўйича ихтиёрий тартибдаги ҳосилаларга эга бўлади. Шу билан бирга, D соҳада гармоник функция шу соҳада аналитик функция бўлади, яъни абсолют яқинлашувчи даражали қатор билан ифодаланади.

$u(x)$ функция D соҳада аналитик функция эканлигини кўрсатиш учун бу соҳада тўла ётувчи ихтиёрий шарда унинг аналитиклигини кўрсатиш кифоядир.

Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $n=2$ бўлган ҳолни текшириш билан чегараланамиз. Координата бошини D соҳада жойлашган деб ҳисоблаб, $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ нуқтанинг қутб координаталарини $R,\ \alpha,\ x=(x_1,x_2)$ нуқтаникини эса $|x|$, β орқали белгиласак, яъни

$$\xi=\xi_1+i\xi_2=Re^{i\alpha},\ x=x_1+ix_2=|x|e^{i\beta}$$

бўлса, IV боб 2- § ининг 3- бандидаги берилган Пауссон формуласи қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\mathrm{R}e^{i\alpha})\frac{R^2-|x|^2}{R^2+|x|^2-2R|x|\cos(\alpha-\beta)}d\alpha. \tag{18}$$

Равшанки, $\alpha-\beta=\theta$. $\frac{|x|}{R}$ ни ρ билан белгилаб, Пауссон формуласининг ядросини ушбу

$$\frac{R^2-|x|^2}{R^2+|x|^2-2R|x|\cos\theta}=\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу ядро $\rho<1$ бўлганда даражали қаторга ёйилади. Ҳақиқатан ҳам

$$\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta} = -1 + 2Re\frac{1}{1-\rho e^{i\theta}} = -1 + 2Re\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k e^{ik\theta} =$$
$$= -1 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\cos k\theta = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos k(\alpha-\beta). \tag{19}$$

(19) қатор $\rho < 1$ да абсолют яқинлашувчи бўлади. Бунга асосан, Пауссон формуласи

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(\mathrm{Re}^{i\alpha}\right)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|x|}{R}\right)^k\cos k(\alpha-\beta)\right]d\alpha \tag{20}$$

кўринишга эга бўлади. (20) формулада $|x|\cos\beta$, $|x|\sin\beta$ ларни x_1 ва x_2 билан алмаштириб, $u(x)$ функциянинг x_1, x_2 ўзгарувчилар бўйича даражали қаторга ёйилмасини ҳосил қиламиз. Равшанки, бу қатор $|x| < R$ доирада абсолют яқинлашади. Шу билан Пауссон формуласидан $|x| < R$ доирада Лаплас тенгламаси учун Дирихли масаласининг ечими $u(x)$, $|x| = R$ айланада берилган $\varphi(x)$ чегаравий шартларнинг қийматлари фақат узлуксиз бўлганда ҳам аналитик эканлиги келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш, ушбу бобдаги (10) формуладан, $\varphi(x) = u(x,0)$, $x \in E^n$ функция чегараланган ва узлуксиз бўлганда (2) тенглама учун (7) Коши масаласининг ечими $u(x,t)$нинг ихтиёрий тартибдаги ҳосилаларининг мавжудлиги келиб чиқади.

2. Гиперболик тенгламалар бўлган ҳол. III бобда кўрилган тўлқин тенгламалари учун Коши, Гурса ва бошқа масалалар учун аввалги бандда баён қилинган фикрлар тўғри бўлмайди. Масалан, тўлқин тенгламаси учун Коши масаласининг ечими $u(x,t)$, (26) Кирхгоф формуласи билан аниқланади. Бу формуладаги берилган $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар мос равишда уч ва икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлгандагина $u(x,t)$ ечим икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлади.

Ёки тор тебраниш учун Гурса масаласининг ечими III бобдаги (43) формула билан ифодаланади. Бу формулада соддалик учун $x_0 = y_0 = 0$ десак, (43) формула

$$u(x,t)=\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-t}{2}\right)+\varphi(0) \qquad (21)$$

кўринишда ёзилади.

Бу формуладан кўринадики, *u(x,t) ечимнинг силлиқлик тартиби берилган φ (x) ва ψ(x) функцияларнинг силлиқлик тартиби билан бир хил бўлади,* яъни бу масала изланаётган *u(x,t)* ечимининг k тартибдаги ҳосилаларининг мавжуд бўлиши учун берилган *φ (x)* ва *ψ(x)* функцияларнинг k тартибли ҳосилаларининг мавжудлигини талаб қилишга тўғри келади.

Агар *φ (x)* ёки *ψ(x)* функция $x=0$ нуқтада узилишга эга бўлса, (21) формулага асосан, *u(x,t)* функция ҳам $x+t=2\xi$ ёки $x-t=2\xi$ характеристикалар бўйича узилишга эга бўлади, яъни *φ (x)* ва *ψ(x)* функцияларнинг узилиши *u(x,t)* тўлқиннинг тор тебраниши тенгламасининг характеристикалари бўйича узилишига сабаб бўлади.

4- §. Умумлашган ечимлар тўғрисида тушунча

Биз аввалги бобларда кўрдикки, математик физиканинг жуда кўп масалаларида ечимнинг мавжудлиги, бошланғич ва чегаравий масалалардаги берилган функцияларнинг анчагина силлиқлигини талаб қилиш натижасида исбот қилинади.

Масалан, III бобда Коши масаласини текширганимизда бошланғич шартлар етарли силлиқ бўлганда масаланинг коррект қўйилганлигини кўрдик. Аммо физик масалаларда ҳамма вақт ҳам бошланғич шартлардаги функциялар етарли силлиқ бўлавермайди. Агар бошланғич шартлар узлуксиз ва кераклича дифференциалланувчи бўлмаса, мос бошланғич ёки чегаравий масаланинг дифференциалланувчи ечими мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин.

Бундай ҳолларда дифференциал тенгламаларнинг *"умумлашган ечими"* тушунчасини киритиш муҳим аҳамиятга эгадир.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар умумлашган ечимларининг назарияси 1930 йилларда академик С.Л. Соболев томонидан яратилган. Бундай ечимлар ёки регуляр ечимлар кетма-кетлигининг лимити сифатида, ёки интеграл айниятлар ёрдами билан аниқланади. Мисол тариқасида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{22}$$

тенглама учун

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad a\le x\le b$$

Коши масаласини текширамиз.

Агар $\varphi(x)$ функция $a\le x\le b$ кесмада узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, I бобдаги 6- § дан маълумки, бу масаланинг $D=\{(x,t):\ a<x+t<b\}$ соҳадаги ечими

$$u(x,t)=\varphi(x+t) \tag{23}$$

формула билан аниқланади.

Энди $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз, лекин дифференциалланувчи бўлмасин. Маълумки, бундай функцияни $[a,b]$ сегментда узлуксиз ҳосилаларга эга бўлган $\varphi_n(x)$ функциялар текис яқинлашувчи кетма-кетлигининг лимити сифатида тасвирлаш мумкин.

Бу ҳолда (22) тенглама мос $\varphi_n(x+t)$ ечимларининг кетма-кетлиги D соҳада (23) функцияга текис яқинлашади. Бу нарса эса (23) функцияни (22) тенгламанинг умумлашган маънодаги ечими деб ҳисоблашга асос бўлади.

Агар бирор дифференциал тенгламанинг D соҳада регуляр ечимларининг чексиз $\{u_n\}$ кетма-кетлиги мавжуд бўлиб, бу кетма-кетлик $u(x)$ функцияга текис яқинлашса, яъни

$$\sup_{x\in D}\left|u(x)-u_n(x)\right|\to 0, \quad k\to\infty,$$

у ҳолда $u(x)$ функция D соҳада берилган тенгламанинг умумлашган ечими дейилади.

Баъзан регуляр ечимларнинг $\{u_n\}$ кетма-кетлиги $u(x)$ га ўртача яқинлашганда ҳам, яъни

$$\int_D\left[u(x)-u_n(x)\right]^2dx\to 0, k\to\infty$$

$u(x)$ ни текширилаётган дифференциал тенгламанинг *умумлашган ечими* дейилади.

Текширилаётган дифференциал тенглама битта бўлмай, бир нечта бўлганда, яъни тенгламалар системаси қаралаётган ҳолда ҳам умумлашган ечим худди юқоридагидай таърифланади.

У ёки бу чегаравий масала ечимларининг синфини кенгайтириш ечим ягоналиги сақланиб қолган ҳолдагина муҳим аҳамиятга эга бўлади.

Биз III бобда текширган тўлқин тенгламаси учун Коши масаласининг ечимини берувчи формулалар билан аниқланган функция, масалан, Даламбер формуласи билан аниқланган $u(x,t)$ функция ёки Гурса масаласининг ечимини берувчи (43) формула билан ифодаланган $u(x,t)$ функция берилган $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар узлуксиз бўлган ҳолда мос равишда Коши ва Гурса масаласининг *умумлашган ечими* дейилади.

Энди ушбу бобдаги (1), (3), (4) биринчи чегаравий масаладаги f, φ ва ψ функцияларга текис яқинлашувчи функцияларнинг 3 та

$$\{f_n\},\ \{\varphi\},\ \{\psi_n\}$$

кетма-кетлиги мавжуд бўлсин ва

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - a^2 \Delta u_n = f_n(x,t)$$

тенглама

$$u\big|_{t=0} = \varphi_n, \quad u\big|_{B_T} = \psi_n$$

шартларни қаноатлантирувчи u_n ечимга эга бўлсин.

Исбот қилинганига асосан бундай ечим ягона бўлади. Биринчи чегаравий масаланинг ечими турғун бўлганлиги сабабли

$$u_m - u_n$$

айирма, агар m ва n сонлар етарли катта бўлса, абсолют қиймати бўйича етарли кичик бўлади. Бу эса $\{u_n\}$ кетма-кетлик чегаравий шартларни қаноатлантирувчи u функцияга текис яқинлашувчанлигини билдиради. $u(x,t)$ функция ҳосилаларининг мавжудлиги тўғрисида биз ҳеч нарса билмаймиз, шунинг учун ҳам лимит функция (1) тенгламани қаноатлантиради деб айта олмаймиз.

Бу ҳолда, $u(x,t)$ функцияни (1) тенгламанинг *умумлашган ечими* деб атаймиз.

Бундай умумлашган ечим ягона бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар иккита бундай u_n ва υ_n кетма-кетликлар мавжуд деб фараз қилсак, у ҳолда буларга мос f_n ва $\overline{f}_n$, φ_n ва φ_n, ψ_n ва ψ_n функциялар битта лимитга интилган бўлиб, кетма-кетликларнинг ўзлари эса турли лимитларга интилган бўлиб қолади, шунинг учун

$$u_1,\ \upsilon_1,\ u_2,\ \upsilon_2,\ \ldots,\ u_n,\ \upsilon_n,\ldots$$

кетма-кетлик узоқлашувчи бўлиб қолади, бундай бўлиши мумкин эмас. Худди юқоридагидай

$$\Delta u = f(x)$$

Пуассон тенгламасининг

$$u|_S = \varphi$$

ёки

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi$$

шартларни қаноатлантирувчи умумлашган ечимини f_n, φ_n ёки ψ_n функциялар кетма-кетлиги f, φ ёки ψ га текис яқинлашганда

$$u|_S = \varphi_n$$

ёки

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi_n$$

шартларни қаноатлантирувчи $\Delta u = f_n$ тенгламалар ечимларининг лимити сифатида аниқланади. Бундай умумлашган ечим мавжудлигини кўрсатувчи бир мисол келтирамиз.

Ушбу

$$\Delta u(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{R^2}\left[\frac{5}{\ln R} - \frac{1}{(\ln R)^2}\right] \tag{24}$$

тенглама берилган бўлсин, бу ерда

$$R=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

$R\le\frac{1}{2}$ да

$$u_0=\left(x_1^2-x_2^2\right)\ln\left|\ln R\right|$$

функция (24) тенгламанинг

$$u\Big|_{R=\frac{1}{2}}=u_0\Big|_{R=\frac{1}{2}} \tag{25}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи умумлашган ечими бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$u_k=\left(x_1^2-x_2^2\right)\ln\left|\ln R_k\right|$$

бўлсин, бунда $R_k=\sqrt{R^2+\delta_k}$, $k\to\infty$ да $\delta_k\to 0$. Δu_k ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_1}=2x_1\ln\left|\ln R_k\right|+\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)x_1}{R_k^2\ln R_k},$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_2}=-2x_2\ln\left|\ln R_k\right|+\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)x_2}{R_k^2\ln R_k},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3}=\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)x_3}{R_k^2\ln R_k},$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2}=2\ln\left|\ln R_k\right|+\frac{4x_1^2}{R_k^2\ln R_k}+$$

$$+\left(x_1^2-x_2^2\right)\left[\frac{1}{R_k^2\ln R_k}-\frac{2x_1^2}{R_k^4\ln R_k}-\frac{x_1^2}{R_k^4\left(\ln R_k\right)^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}=-2\ln\left|\ln R_k\right|+\frac{4x_2^2}{R_k^2\ln R_k}-$$

$$-\left(x_1^2-x_2^2\right)\left[\frac{1}{R_k^2\ln R_k}-\frac{2x_2^2}{R_k^4\ln R_k}-\frac{x_2^2}{R_k^4\left(\ln R_k\right)^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_3^2} = \left(x_1^2 - x_2^2\right)\left[\frac{1}{R_k^2 \ln R_k} - \frac{2x_3^2}{R_k^4 \ln R_k} - \frac{x_3^2}{R_k^4 (\ln R_k)^2}\right].$$

Буларга асосан, $R^2 = R_k^2 - \delta_k$ ни эътиборга олиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\Delta u_k = \frac{x_1^2 - x_2^2}{R_k^2}\left[\frac{5}{\ln R_k} - \frac{1}{(\ln R_k)^2}\right] + \delta_k \frac{x_1^2 - x_2^2}{R_k^4}\left[\frac{2}{\ln R_k} - \frac{1}{(\ln R_k)^2}\right].$$

Равшанки, u_k кетма-кетлик $k \to \infty$ да u_0 функцияга текис яқинлашади. Шу билан бирга, $R \le \frac{1}{2}$ да Δu_k кетма-кетлик ҳам (24) тенгламанинг ўнг томонига текис яқинлашади.

Ҳақиқатан, $R < r$ да ва етарли кичик δ_k да Δu_k ҳам,

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{R^2}\left[\frac{5}{\ln R} - \frac{1}{(\ln R)^2}\right]$$

функция ҳам, агар r етарли кичик бўлса, истаганча кичик бўлади, $r \le R \le \frac{1}{2}$ бўлганда эса текис яқинлашиши шубҳасиздир.

Демак, u_0 функция (24) тенгламанинг умумлашган ечимидир. Аммо (0,0,0) нуқтада u_0 функциянинг иккинчи тартибли ҳосилалари маънога эга бўлмайди.

(24) тенгламанинг (25) чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуд эмас. Олдиндан шу нарсани таъкидлаб ўтамизки, u_0 функция (0,0,0) нуқтадан ташқари барча текширилаётган шарда (24) тенгламани оддий маънода қаноатлантиради.

Агарда $u(x)$ функция қўйилган масаланинг ечимидан иборат бўлса, $u - u_0$ айирма координат бошидан ташқари ҳамма жойда гармоник функция бўлиб, соҳанинг чегарасида нолга тенг бўлади.

Лекин гармоник функциянинг четлаштириладиган махсус нуқтаси тўғрисидаги теоремага асосан (IV боб 3- § 7-банд) битта нуқтадан ташқари ҳамма жойда гармоник функция бу нуқтада ҳам гармоник бўлади. Бунга биноан, шарнинг сиртида нолга тенг бўлган гармоник функция барча шарда нолга тенг бўлади. Демак, бизнинг масаламизнинг бўлиши мумкин бўлган ечими u_0 дан иборат. Бу ечим координат бошида (24) тенгламани қаноатлантирмаганлиги учун қўйилган масала умуман ечимга эга эмас. Умумлашган ечим киритишнинг бошқа усули ҳам С.Л. Соболев томонидан берилган бўлиб, бу усул интеграл айниятларга асосланган, регуляр ечимлар учун бу айниятлар текширилаётган тенгламалардан натижа сифатида келиб чиқади.

Масалан, $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ функция D соҳада узлуксиз бўлиб, ушбу

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x)u = f(x) \tag{26}$$

тенгламани қаноатлантирсин, бу ерда $a_i \in C^1(D)$, $b, f \in C(D)$, $\sigma(x)$ функция $C^1(D)$ синфга тегишли бўлиб, D соҳа чегарасининг атрофида нолга айлансин. (26) тенгламани $\sigma(x)$ кўпайтириб, D соҳа бўйича интеграллаймиз, сўнгра ҳосил бўлган ифодани бўлаклаб интеграллаб,

$$\int_D \left[u(x)M(\sigma) - f(x)\sigma(x)\right]dx = 0 \tag{27}$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бунда

$$M(\sigma) \equiv -\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^{n}\frac{\partial(a_i\sigma)}{\partial x_i} + b\sigma .$$

Шундай қилиб, (26) тенгламанинг ҳар қандай регуляр ечими (27) тенгликни қаноатлантирар экан. Лекин бу тенглик $u(x)$ функцияларнинг кенгроқ синфлари учун ҳам ўринли бўлади, чунки (27) тенгликнинг чап томонида $u(x)$ функциянинг ҳосилалари иштирок этмаяпти. Шунинг учун қуйидаги таърифни бериш табиийдир.

Агар (27) тенглик D соҳанинг чегарасигача масофаси бирор мусбат ρ_σ сондан кичик бўлган D соҳанинг барча нуқталарида нолга айланувчи ҳар қандай узлуксиз дифференциалланувчи $\sigma(x)$ функция учун ўринли бўлса, у ҳолда $u(x)$ функция (26) тенгламанинг D соҳадаги *умумлашган ечими* дейилади.

Бу таърифдаги ρ_σ сон турли σ лар учун, табиий турлича бўлади. Чегаравий масалаларнинг умумлашган ечимларини текширилаётганда, чегаравий шартларни қандай маънода тушуниш кераклигини кўрсатиб ўтиш зарурдир. Айрим ҳолларда бу шартларни (ёки уларнинг бир қисмини) умумлашган ечимни аниқловчи айниятни ўзгартириш натижасида ҳисобга олиш мумкин бўлади.

Масалан, (26) тенглама учун $x_1 \geq 0$ ярим фазонинг D соҳасида Коши масаласи текширилаётган бўлиб, D соҳанинг Γ чегараси $x_1 = 0$ гипертекисликнинг Γ_1 қисмини ўз ичига олсин, Γ_1 да эса

$$u(0, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_2, \dots, x_n) \tag{28}$$

шарт бажарилсин.

Агар $\Gamma - \Gamma_1$ атрофида нолга айланувчи ихтиёрий узлуксиз дифференциалланувчи $\sigma(x)$ функция учун бўлак-бўлак узлуксиз $u(x)$ функция

$$\int_D \left[u(x)M(\sigma) - f(x)\sigma(x)\right]dx -$$

$$-\int_{\Gamma_1} \varphi(x_2, \cdots, x_n)\sigma(0, x_2, \cdots, x_n)dx_2, \cdots, dx_n = 0$$

тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда (26), (28) Коши масаласининг *умумлашган ечими* дейилади.

Худди шунга ўхшаш

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = F(x) \tag{29}$$

тенглама учун ҳам умумлашган ечим тушунчасини киритиш мумкин. $\sigma(x)$ функция D соҳада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи, соҳанинг чегарасига яқин барча нуқталарда нолга айланувчи функция, $M\sigma$ эса Lu га қўшма оператор бўлсин.

Ушбу

$$\int_D uM\sigma dx = \int_D F\sigma dx \tag{30}$$

шартни қаноатлантирувчи ҳар бир узлуксиз $u(x)$ функция (29) тенгламанинг *умумлашган ечими* дейилади.

Агар $u(x)$ функция (30) шартни қаноатлантириб, D соҳада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда Гаусс — Остроградский формуласини қўллаб (III боб,5- §, 1- банд), σ нинг D соҳа чегарасига яқин барча нуқталарда нолга тенглигига биноан

$$\int_D (\sigma Lu - uM\sigma)\, dx = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (30) шартга асосан

$$\int_D \sigma (Lu - F)\, dx = 0 .$$

Бундан σ функция D да ихтиёрий бўлганлиги учун D соҳада $Lu = F$ деган хулосага келамиз.

Шундай қилиб, (30) шартдан $u(x)$ функция D да икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлган ҳолда, унинг D да (29) тенгламанинг регуляр ечими эканлиги келиб чиқади.

(30) таърифнинг ўзи эса, $u(x)$ функциянинг ҳатто биринчи тартибли ҳосилалари борлигини талаб қилмайди. Биз бу ерда ўқувчининг эътиборини яна бир муҳим фикрга жалб қилмоқчимиз.

Лаплас тенгламасининг умумлашган ечими

$$\int_D u\Delta\sigma dx = 0 \tag{31}$$

тенглик билан аниқланиши керак, бу ерда $\sigma(x)$ юқорида айтиб ўтилган функциядир.

Лаплас тенгламасининг ҳар бир умумлашган ечими унинг регуляр ечимидан, яъни гармоник функциядан иборат эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. *Агар D соҳада узлуксиз $u(x)$ функция* (31) *шартни қаноатлантирса, у ҳолда бу функция D да гармоник бўлади.*

Бу теоремани исботлаш учун ўрта қиймат ҳақидаги теоремага тескари бўлган теоремага (IV боб 2- § 6- банд) асосан, D соҳанинг ихтиёрий x_0 нуқтасидаги $u(x)$ функциянинг қиймати, маркази x_0 нуқтада бўлган D да тўла ётувчи шарни чегаралаб турган сферадаги қийматларнинг ўрта арифметигига тенг эканлигини кўрсатиш кифоядир.

Шу мақсадда, маркази x_0 нуқтада ва радиуси ε га тенг бўлган D соҳада тўла ётувчи шарни Q_ε орқали ва уни чегаралаб турган сферани S_ε орқали белгилаб оламиз.

Ушбу

$$\sigma(x)=\begin{cases}\left(r^n-\varepsilon^n\right)^3, \text{ агар } r\le\varepsilon \text{ бўлса, яъни } x\in Q_\varepsilon,\\ 0, \text{ агар } r>\varepsilon \text{ бўлса, яъни } x\bar{\in} Q_\varepsilon\end{cases}$$

функцияни тузиб оламиз, бунда $r=|x-x_0|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{0i})^2}$. Бу функция юқорида $\sigma(x)$ га қўйилган барча шартларни қаноатлантиради. Энди $\Delta\sigma$ ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}=3n\left(r^n-\varepsilon^n\right)^2 r^{n-2}\left(x_i-x_{0i}\right),$$

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i^2}=6n^2\left(r^n-\varepsilon^n\right)r^{2n-4}\left(x_i-x_{0i}\right)^2+$$

$$+3n(n-2)\left(r^n-\varepsilon^n\right)^2 r^{n-4}\left(x_i-x_{0i}\right)^2+3n\left(r^n-\varepsilon^n\right)^2 r^{n-2}.$$

Демак,

$$\Delta\sigma=6n^2(r^n-\varepsilon^n)r^{2n-2}+3n(n-2)(r^n-\varepsilon^n)^2r^{n-2}+3n^2(r^n-\varepsilon^n)^2r^{n-2}$$

ёки

$$\frac{1}{6n}\Delta\sigma=\begin{cases}r^{n-2}\left[(2n-1)r^{2n}-(3n-2)r^n\varepsilon^n+(n-1)\varepsilon^{2n}\right], & r\le\varepsilon,\\ 0, & r>\varepsilon.\end{cases}$$

Бунга асосан (31) формула

$$\int\limits_{Q_\varepsilon} u(x)r^{n-2}\left[(2n-1)r^{2n}-(3n-2)r^n\varepsilon^n+(n-1)\varepsilon^{2n}\right]dx=0 \quad (32)$$

кўринишда ёзилади.

(32) тенгликни ε бўйича дифференциаллаймиз. Бунинг учун

$$\int\limits_{Q_\varepsilon}\{\qquad\}dx=\int\limits_0^\varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon}\{\qquad\}drdS_\varepsilon$$

формуладан фойдаланиб, (32) интеграл остидаги ифода $r=\varepsilon$ бўлганда нолга тенглигини эътиборга олсак,

$$\int\limits_{Q_\varepsilon} u(x)r^{n-2}\left[(3n-2)\ r^n-2(n-1)\varepsilon^n\right]dx=0$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Буни яна бир бор ε бўйича дифференциаллаймиз:

$$\varepsilon^{n-1}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x)dS_\varepsilon-2(n-1)\int\limits_{Q_\varepsilon} u(x)r^{n-2}dx=0\cdot$$

Бу тенгликни

$$|S_1|\varepsilon^{2n-2}\left[\frac{1}{|S_1|\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x)dS_\varepsilon\right]-2(n-1)\int\limits_{Q_\varepsilon} u(x)r^{n-2}dx=0$$

кўринишда ёзиб оламиз. Охирги тенгликни ε бўйича яна бир марта дифференциаллаймиз:

$$|S_1|(2n-2)\varepsilon^{2n-3}\frac{1}{|S_1|\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x)dS_\varepsilon+$$

$$+|S_1|\varepsilon^{2n-2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{1}{|S_1|\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x)dS_\varepsilon\right]-2(n-1)\varepsilon^{n-2}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x)dS_\varepsilon=0$$

ёки

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\frac{1}{|S_1|\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x)dS_\varepsilon\right]=0\,.$$

Бундан дарҳол, ўрта қавс ичидаги сфера бўйича олинган ўрта қийматнинг сфера радиуси ε га боғлиқ эмаслиги келиб чиқади, яъни

$$\frac{1}{|S_1|\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x)dS_\varepsilon = C,\quad C=\text{const}\qquad |S_1|\varepsilon^{n-1}=\left|S_\varepsilon\right|.$$

Бу тенгликда $x=x_0+\theta\,\varepsilon$ алмаштиришни бажарсак, x нуқта S_ε сферани чизганда, θ бирлик S_1 сферани чизади, шу билан бирга $dS_\varepsilon=\varepsilon^{n-1}dS_1$.

У ҳолда

$$\frac{1}{|S_1|\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S_\varepsilon} u(x)dS_\varepsilon=\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_1} u(x_0+\theta\varepsilon)dS_1\,.$$

Бу ифода $\varepsilon\to 0$ да $u(x_0)$ га тенг бўлади, демак, $C=u(x_0)$.

Шу билан теорема исботланди.

Шундай қилиб, Лаплас тенгламасининг регуляр ечимидан фарқли умумлашган ечими мавжуд эмас экан.

Худди шунга ўхшаш, бир жинсли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси ва $\Delta u+lu=0$ тенгламанинг ҳар қандай (30) интеграл муносабат маъносидаги умумлашган ечими исталганча дифференциалланувчи бўлиб, оддий маънодаги ечимдан иборат бўлишини кўрсатиш мумкин [24].

VI БОБ
МАХСУС ФУНКЦИЯЛАР

1- § Эйлер интеграллари

1. Биринчи тур Эйлер интеграли (бета- функция). *Бета-функция* ушбу

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \qquad (1)$$

тенглик билан аниқланади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл *Эйлернинг биринчи тур интеграли* дейилади. Кўрсатиш қийин эмаски, $a>0$ ва $b>0$ бўлганда (1) интеграл яқинлашувчи, агар a ва b параметрларнинг биттаси нолга тенг ёки нолдан кичик бўлса ҳам узоқлашувчи бўлади. (1) интгералда $x=1-t$ алмаштириш бажариб,

$$B(a,b)=\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}\,dt=B(b,a)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, бета-функция ўзининг a ва b аргументларига нисбатан симметрик функция экан. Энди (1) интегрални бўлаклаб интеграллаймиз. Бўлаклаб интеграллаш амалларини

$$u=(1-x)^{b-1}, \qquad du=-(b-1)(1-x)^{b-2}\,dx$$

$$dv=x^{a-1}dx, \qquad v=\frac{1}{a}x^{a}$$

бажариб

$$x^{a}=x^{a-1}-x^{a-1}(1-x)$$

айниятни эътиборга олсак, $b>1$ бўлганда

$$B(a,b) = \left[\frac{(1-x)^{b-1} x^a}{a} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^a}{a} (b-1)(1-x)^{b-2}\, dx =$$

$$= \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-2}\, dx - \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1}\, dx =$$

$$= \frac{b-1}{a} B(a, b-1) - \frac{b-1}{a} B(a,b).$$

Бундан

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1). \tag{2}$$

Бета-функция a ва b га нисбатан симметрик бўлгани учун

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b), \tag{3}$$

(2) ва (3) формулаларга асосан

$$(a-1)B(a-1,b) = (b-1)B(a,b-1).$$

Агар

$$a-1 = p, b-1 = q$$

десак, у ҳолда

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p} B(p+1, q). \tag{4}$$

Агар b параметр бутун сонга тенг бўлса, яъни $b = n$, $B(a,n)$ функцияга (2) формулани кетма-кет қўллаш натижасида

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1} \frac{n-2}{a+n-2} \frac{n-3}{a+n-3} \cdots \frac{1}{a+1} B(a,1)$$

тенгликка эга бўламиз. Аммо

$$B(a,1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$$

бўлгани учун

$$B(a,n) = B(n,a) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}. \qquad (5)$$

Агарда a параметр ҳам бутун сонга тенг бўлса, яъни $a = m$, (3) формулани кетма-кет қўллаш натижасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$B(m,n) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)} B(m,1) =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)} \frac{m-1}{m} \frac{m-2}{m-1} \ldots \frac{1}{2} B(1,1),$$

бундан, $B(1,1) = 1$ бўлгани учун

$$B(m,n) = B(n,m) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Энди (1) формулада $a = b$ десак,

$$B(a,a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx$$

ёки

$$B(a,a) = 2\int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{a-1} dx.$$

Охирги интегралда $\frac{1}{2} - x = \frac{\sqrt{t}}{2}$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{a-1}\,dt$$

ёки

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

(1) интегралда

$$x = \frac{y}{1+y} \quad \text{ёки} \quad y = \frac{x}{1-x}$$

алмаштиришни бажарсак, бета-функция қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$B(a,b)=\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy. \qquad (6)$$

Бу формулада $0 < a < 1$ ҳисоблаб, $b = 1 - a$ десак,

$$B(a,1,-a)=\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}\,dy\,.$$

Ҳосил қилинган интеграл математик анализда Эйлер исми билан боғланган интеграл бўлиб, унинг қиймати $\frac{\pi}{\sin \pi a}$ га тенгдир. Шундай қилиб,

$$B(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin \pi a}\,. \qquad (7)$$

Агар хусусий ҳолда, $a = 1 - a = \frac{1}{2}$ десак,

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$$

ҳосил бўлади.

2. Иккинчи тур Эйлер интеграли (гамма-функция). *Гамма- функция* ушбу

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \qquad (8)$$

интеграл билан аниқланади ва бу интеграл *иккинчи тур Эйлер интеграли* деб аталади.

Бу интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи, $a \le 0$ да эса узоқлашувчи бўлади.

Бета ва гамма-функцияларнинг ўзаро боғланишларини ўрнатиш мақсадида (8) да $x = ty$ ($t = \text{const} > 0$) алмаштириш бажарамиз, у ҳолда

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a}=\int_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}dy\,. \qquad (9)$$

Бу ерда a ни $a + b$ билан ва t ни $1 + t$ билан алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Охирги тенгликнинг ҳар икки томонини t^{a-1} га кўпайтириб, 0 дан ∞ гача интеграллаймиз:

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-y} dy \int_0^\infty t^{a-1} e^{-ty} dt.$$

Бундан (6), (8) ва (9) га асосан

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-y} \frac{\Gamma(a)}{y^a} dy =$$

$$= \Gamma(a)\int_0^\infty y^{b-1} e^{-y} dy = \Gamma(a)\Gamma(b).$$

Демак,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{10}$$

Бўлаклаб интеграллаш натижасида ушбуни

$$a\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = x^a e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x^a e^{-x} dx = \int_0^\infty x^a e^{-x} dx,$$

яъни

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \tag{11}$$

рекурент формулани ҳосил қиламиз.

Бу формулани кетма-кет қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+1)a\Gamma(a).$$

Агар бунда $a = 1$ десак ва

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \tag{12}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\Gamma(n+1)=n! \tag{13}$$

келиб чиқади. $n=0$ бўлганда (13) формула

$$0!=\Gamma(1)=1$$

кўринишга эга бўлади. (11) дан $a\to 0$ да

$$\Gamma(a)=\frac{\Gamma(a+b)}{a}\to+\infty$$

эканлиги равшан.

Агар (10) формулада $b=1-a$ десак, у ҳолда (7) ва (12) га асосан

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(a-1)=\frac{\pi}{\sin a\pi} \tag{14}$$

формулага эга бўламиз. Бундан $a=\frac{1}{2}$ бўлганда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,.$$

2- §. Гипергеометрик функция

1. Асосий таърифлар. Ушбу

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0 \tag{15}$$

гипергеометрик тенглама ёки *Гаусс тенгламаси* деб аталувчи тенгламани текширамиз. Бу ерда a,b,c — учта ихтиёрий параметр бўлиб, ҳақиқий ёки комплекс қийматларни қабул қилади. Булардан иккитаси: a ва b тенгламада симметрик иштирок этади.

(15) тенгламанинг ечимини

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n \tag{16}$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. Бундан

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}nA_nx^{n-1}$$

ёки

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) A_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) A_{n+2} x^n.$$

Бу ҳосилаларнинг қийматини ва y ни (15) тенгламага қўямиз. У ҳолда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)(n+1)(n+2) A_{n+2} x^n +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} \left[c-(a+b+1)x\right](n+1) A_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} abA_n x^n = 0.$$

Номаълум $A_1, \dots, A_n, \dots$ ўзгармасларни топиш учун аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланамиз, бунга асосан x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни нольга тенглаш керак. x^n олдидаги умумий коэффициентларни нольга тенглаб, ушбу

$$-(n-1)nA_n + n(n+1)A_{n+1} - n(a+b+1)A_n +$$
$$+ c(n+1)A_{n+1} - abA_n = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$A_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(c+n)} A_n$$

рекуррент формулага эга бўламиз.

Бу ерда $A_0 = 1$ ва $c \neq 0, -1, -2, \dots, -n, \dots$ деб ҳисоблаймиз. (15) гипергеометрик тенгламанинг биринчи хусусий ечими y_1 ни $F(a,b,c,x)$ орқали белгилаб, A_n коэффициентларнинг топилган қийматларини (16) қаторга қўямиз. У ҳолда

$$y_1 = F(a,b,c,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} x^n. \tag{17}$$

Бунда

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \ \ldots \ (a+n-1),$$

$$(a)_0 = 1 \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ \ldots \ ,$$

хусусий ҳолда, $(1)_n = n!$

(17) қатор *гипергеометрик қатор*, бу қаторнинг йиғиндиси бўлган *F(a,b,c,x)* функция эса *гипергеометрик функция* дейилади.

Даламбер принципига асосан,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}x\right| = |x|.$$

Демак, (17) қатор $|x| < 1$ да абсолют яқинлашувчи, $|x| > 1$ да эса узоқлашувчи бўлади. Исботсиз эслатиб ўтамизки, $x = 1$ бўлганда, агар $c - a - b > 0$ бўлса, (17) қатор абсолют яқинлашувчи, агар $c - a - b \le 0$ бўлса узоқлашувчи, $x = -1$ бўлганда эса,агар $c - a - b > 0$ бўлса, абсолют яқинлашувчи, агар $-1 < c - a - b \le 0$ бўлса, абсолют бўлмай яқинлашувчи, агар $c - a - b \le -1$ бўлса узоқлашувчи бўлади.

Агар (17) формулада $b = c$ бўлса,

$$(a)_n = (-1)^n(-a)(-a-1) \ldots (-a-n+1) = (-1)^n \binom{-a}{n} n!$$

га асосан

$$F(a,b,b;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \binom{-a}{n} x^n = (1-x)^{-a}$$

биномиал қатор ҳосил бўлади.

Агарда $a = 1,\ b = c$ бўлса, (17) формула ушбу

$$F(1,b,b;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

кўринишга эга бўлади, яъни $a = 1,\ b = c$ бўлган ҳолда гипергеометрик қатор геометрик прогрессияга айланади, шунинг учун ҳам у гипергеометрик қатор деб аталган.

(15) тенгламанинг иккинчи хусусий, умуман айтганда, (17) га чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимини топиш учун (15) тенгламада

$$y = x^{\rho}\eta$$

алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда (15) тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x(1-x)\eta'' + [(c+2\rho) - (a+b+1+2\rho)x]\eta' -$$
$$-[ab + \rho(a+b+\rho) - \frac{\rho(\rho+c-1)}{x}]\eta = 0 .$$

Бу тенглама (15) тенглама типига тегишли тенглама бўлиши учун ёки $\rho = 0$, албатта бу ҳол бизни қизиқтирмайди, ёки $\rho = 1-c$ бўлиши керак. У ҳолда

$$x(1-x)\eta'' + \{(2-c) - [(a-c+1) + (b-c+1) + 1]x\}\eta' -$$
$$-(a-c+1)(b-c+1)\eta = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Шундай қилиб, $\rho = 1-c$ бўлганда $y = x^{\rho}\eta$ алмаштириш (15) тенгламани худди шу кўринишдаги тенгламага ўтказади, фақат a,b,c ларни мос равишда

$$a-c+1, \ \ b-c+1, \ \ 2-c$$

ларга алмаштириш зарур. Демак, берилган (15) тенглама y_1 га чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$y_2 = x^{1-c}F(a-c+1, \ b-c+1, \ 2-c; \ x)$$

ечимга эга бўлади. Шу билан бирга, y_2

$$2-c \neq 0, \ -1, \ -2, \ \dots, \ -n, \ \dots$$

бўлгандагина маънога эга бўлади. Шундай қилиб, (15) тенгламанинг умумий ечимини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = C_1F(a,b,c,x) + C_2x^{1-c}F(a-c+1, \ b-c+1, \ 2-c; \ x),$$

бу ерда C_1 ва C_2 — ихтиёрий ўзгармаслар.

Агар гипергеометрик функцияга симметрик бўлиб кирган a ва b параметрлардан биттаси манфий бутун сон $-n$

га тенг бўлса, (17) гипергеометрик қатор узилиб қолади ва y n- даражали кўпҳадга айланади.

Агарда $a=-n_1$, $b=-n_2$, бунда $n_1>0$, $n_2>0$ — бутун сонлар бўлса, у ҳолда гипергеометрик қатор кўпҳадга айланиб, унинг даражаси n_1, n_2 сонларнинг кичигига тенг бўлади. (17) қаторни ҳадлаб дифференциаллаш натижасида дарҳол ушбу

$$F\left(a,b,a;x\right)=\frac{ab}{c}F\left(a+1,b+1,c+1,x\right)$$

формулани ҳосил қиламиз.

(17) қаторни аввал x^a, x^b ёки x^{c-1} га кўпайтириб, сўнгра ҳадлаб дифференциалласак, қуйидаги формулалар келиб чиқади:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[x^a F\left(a,b,c;x\right)\right]=ax^{a-1}F\left(a+1,b,c;x\right),\\
&\frac{d}{dx}\left[x^b F\left(a,b,c;x\right)\right]=bx^{b-1}F\left(a,b+1,c;x\right),\\
&\frac{d}{dx}\left[x^{c-1} F\left(a,b,c;x\right)\right]=\left(c-1\right)x^{c-2}F\left(a,b,c-1;x\right).
\end{aligned}\tag{18}$$

2. Гипергеометрик функциянинг интеграл ифодаси. (17) қаторни

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

тенгликни эътиборга олиб, ушбу

$$F\left(a,b,c,x\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)n!}x^n=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)n!}x^n\right]=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)n!}x^n$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бундан (10) формулага асосан

$$B(b+n,c-b)=\frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)}$$

бўлганлиги сабабли, аввалги тенглик

$$F(a,b,c,x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{n!}x^n B(b+n,c-b)$$

кўринишда ёзилади ёки (1) га асосан

$$F(a,b,c,x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{n!}x^n\int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}\,dt.$$

Бу ердаги интеграл n нинг барча қийматларида яқинлашувчи бўлгани учун

$$b>0,\quad c-b>0\quad \text{ёки}\quad c>b>0 \tag{19}$$

шартларнинг бажарилиши зарурдир.

Аввалги тенгликни ушбу

$$F(a,b,c,x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{n!\,\Gamma(a)}\int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}x^n dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}(xt)^n\right]dt$$

кўринишда ёзиб оламиз. Интеграл остидаги йиғинди $(1-xt)^{-a}$ функциянинг чексиз қаторга ёйилмасидан иборат бўлгани учун

$$F(a,b,c,x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\,dt \tag{20}$$

формулага эга бўламиз. Бу эса гипергеометрик функциянинг интеграл ифодасидир.

(19) шартларни битта

$$a-b-c>0$$

шарт билан алмаштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар $a<0$ бўлса, $-a>0$ бўлади ва бу тенгсизликниг (19) тенгсизликни иккинчиси билан қўшиб, $a-b-c>0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз; агарда $a>0$ бўлса, бу тенгсизликдан, (19) тенгсизликларнинг иккинчисидан кучлироқ бўлган $c-b>a$ тенгсизликка эга бўламиз.

Энди гипергеометрик функциянинг $x=1$ даги қийматини ҳисоблаймиз. Шу мақсадда, (20) формуладаги интеграл $b>0$, $c>0$ ва $|x|<1$ бўлганда текис яқинлашувчи бўлгани сабабли $x\to 1$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{x\to 1} F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\lim_{x\to 1}\int_0^1\left[t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\right]dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\lim_{x\to 1}\left[t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\right]dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-a-1}\,dt=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}B(b,c-b-a)=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)}=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to 1} F(a,b,c;x)=F(a,b,c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Агар (20) формуладаги интегралда

$$t=\frac{1-s}{1-xs}\qquad \text{ёки}\quad s=\frac{1-t}{1-xt}$$

алмаштириш бажарсак, интеграл қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\,dt=$$

$$=(1-x)^{c-a-b}\int_0^1 s^{c-b-1}(1-s)^{b-1}(1-xs)^{-(c-a)}\,ds=$$

$$=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}(1-x)^{(c-a-b)}F(c-a,c-b,c;x).$$

Демак,

$$F(a, b, c; x) = (1 - x)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c, x) .$$

Бу тенглик *автотрансформация формуласи* дейилади.

(20) интегралда ўзгарувчини $t = 1 - s$ формула билан алмаштириб

$$\int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-xt)^{-b} dt =$$

$$= (1-x)^{-b} \int_0^1 s^{c-a-1} (1-s)^{a-1} \left(1 - \frac{x}{x-1} s\right)^{-b} ds$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан (20) ни эътиборга олсак,

$$F(a, b, c; x) = (1 - x)^{-b} F(c - a, b, c, \frac{x}{x-1}) \qquad (21)$$

формула ҳосил бўлади.

3- §. Бессел функциялари

1. Биринчи турдаги Бессел функциялари. Ушбу

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad (22)$$

ёки

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2}) y = 0$$

тенглама *Бессел тенгламаси* дейилади, бунда ν ўзгармас сон (22) тенгламанинг *индекси* деб аталади. (22) тенгламани (15) гипергеометрик тенгламадан келтириб чиқариш қийин эмас. Бунинг учун

$$x = \frac{\xi^2}{4ab}, \quad dx = \frac{\xi d\xi}{2ab}, \quad dx^2 = \frac{\xi^2 d\xi^2}{4a^2 b^2}$$

алмаштириш бажарсак,

$$\left(1 - \frac{\xi^2}{4ab}\right) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left[c - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab}\right) \frac{\xi^2}{4}\right] \frac{dy}{d\xi} \frac{2}{\xi} + y = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. $a \to \infty$ ва $b \to \infty$ да

$$\xi y'' + 2cy' + \xi y = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламада $y = \xi^{-\nu} z$ алмаштириш бажариб, $c = \nu + 1/2$ десак,

$$\xi^2 z'' + \xi z' + (\xi^2 - \nu^2) z = 0$$

тенглама келиб чиқади. Бу тенглама эса (22) Бессел тенгламасининг ўзгинасидир. $\nu \geq 0$ бўлсин. Кейинги ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида (22) тенгламада

$$y = x^{\nu} z$$

алмаштириш бажарамиз. У ҳолда z функцияни аниқлаш учун

$$z'' + \frac{2\nu+1}{x} z' + z = 0 \qquad (23)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламанинг ечимини

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. Бундан

$$z' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + (n+2)c_{n+2} x^{n+1} + \ldots$$
$$\frac{z'}{x} = \frac{c_1}{x} + 2c_2 + 3c_3 x + \ldots + (n+2)c_{n+2} x^n + \ldots$$

$$z'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + 3 \cdot 4c_4 x^2 + \ldots (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n + \ldots$$

Ҳосил бўлган қаторларни (23) тенгламага қўйиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\frac{2\nu+1}{x} c_1 + [2c_2 + (2\nu+1)\, 2c_2 + c_0] + [2 \cdot 3c_3 +$$

$$+ (2\nu+1) 3c_3 + c_1] x + [3 \cdot 4c_4 + (2\nu+1)\, 4c_4 + c_2] x^2 + \ldots$$
$$+ [(n+1)(n+2)c_{n+2} + (2\nu+1)\,(n+2)c_{n+2} + c_n] x^n + \ldots = 0.$$

Аниқмас коэффициентлар усулига асосан, x нинг барча даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаймиз:

$$c_1 = 0 \tag{24}$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + (2\nu+1)(n+2)c_{n+2} + c_n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Бундан

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+2\nu+2)}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{25}$$

(24) ва (25) га асосан

$$c_1 = c_3 = c_5 = \ldots = c_{2n-1} = \ldots = 0$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2\nu+2)},$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4(2\nu+4)} = \frac{c_0}{2\cdot 4\cdot(2\nu+2)(2\nu+4)},$$

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n(2\nu+2)(2\nu+4)\cdots(2\nu+2n)} =$$

$$= (-1)^n \frac{c_0}{2^{2n}\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}.$$

Шундай қилиб, (23) тенгламанинг ечими ушбу

$$z = c_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}\cdot 1\cdot 2\cdot\ \cdots\ \cdot n(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}\right] \tag{26}$$

қатор билан ифодаланади. Бунда c_0 — ўзгармасни ихтиёрий танлаб олиш мумкин. Даламбер белгисига асосан, (26) қаторнинг x нинг барча қийматларида яқинлашувчи бўлишини текшириб кўриш қийин эмас.

Даражали қаторни ҳадлаб дифференциаллаш (яқинлашиш оралиғи ичида) ҳамма вақт қонуний бўлгани учун (26) қатор билан ифодаланган z ҳақиқатдан ҳам (23) тенгламанинг ечими бўлади.

Одатда c_0 ўзгармас

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \tilde{A}(\nu+1)}$$

деб танлаб олинади. Ушбу

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! = \Gamma(n+1),$$

$$(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)\Gamma(\nu+1) = (\nu+2)(\nu+3)\ldots$$

$$(\nu+n)\Gamma(\nu+2) = \ldots = (\nu+n)\Gamma(\nu+n) = \Gamma(\nu+n+1)$$

тенгликларни эътиборга олсак, z қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$z = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+\nu} 1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot n(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)\Gamma(\nu+1)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+\nu}\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}.$$

(22) тенгламанинг ечими $y = x^{\nu} z$ функциядан иборатдир. Бу функцияни $J_{\nu}(x)$ орқали белгилаб оламиз. Демак,

$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}. \tag{27}$$

$J_{\nu}(x)$ функция *биринчи турдаги ν индексли* ёки *ν тартибли Бессел функциялари* дейилади.

Айрим адабиётларда бу функциялар *цилиндирик функциялар* деб ҳам аталади.

$J_{\nu}(x)$ функция (22) Бессел тенгламасининг ечимларидан биридир. Хусусий $\nu = 0$ бўлган ҳолда

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma^2(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}. \tag{28}$$

$\nu = 1$ да эса

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}.$$

Умуман бутун мусбат ν ларда

$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}. \tag{29}$$

(28) ва (29) формулалардан кўринадики, $\nu=0$ ёки ихтиёрий бутун ва жуфт ν лар учун $J_\nu(x)$ функция жуфт функциядан иборатдир.

Изоҳ. ν каср бўлганда $x<0$ лар учун $J_\nu(x)$ функция, умуман айтганда, мавҳум қийматларни қабул қилади. ((27) га қаралсин). Мавҳум қийматлар билан иш кўрмаслик учун $J_\nu(x)$ ни (ν каср бўлганда) $x\geq 0$ лар учун текширамиз. (22) тенгламада ν^2 иштирок этаётганлиги туфайли юқоридаги мулоҳазалар ν ни $-\nu$ билан алмаштирганда ҳам (22) тенгламанинг ечимига олиб келади. (27) да ν ни $-\nu$ га алмаштирсак

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\nu+n+1)} \tag{30}$$

функция ҳосил бўлади.

$J_{-\nu}(x)$ функция хам биринчи турдаги $-\nu$ индексли Бессел функцияси дейилади.

$J_\nu(x)$ ва $J_{-\nu}(x)$ функциялар ν индекс бутун бўлмаганда чизиқли боғлиқ бўлмайди, чунки бу функцияларни ифодаловчи (27) ва (30) қаторларнинг бошланғич ҳадлари нолдан фарқли коэффициентларга эга бўлиб, x нинг турли даражаларини ўз ичига олади.

Шундай қилиб, бутун бўлмаган индекс учун (22) тенгламанинг умумий ечими қуйидагидан иборат:

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x), \tag{31}$$

бу ерда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармаслар.

2. Иккинчи турдаги Бессел функциялари. Агар ν бутун сон бўлса, $n=0, 1, \ldots, \nu-1$ лар учун $-\nu+n+1$ ифода ноль ёки манфий бутун қийматларга тенг бўлади. Демак, n нинг бу қийматларида $\Gamma(-\nu+n+1)=\infty$ бўлади, шунинг учун ҳам (30) қаторнинг мос ҳадларини нолга тенг деб ҳисоблаймиз. Шундай қилиб, бутун ν лар учун

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\nu+n+1)}$$

ёки, $n = \nu + k$ десак,

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} = (-1)^{\nu} J_{\nu}(x). \qquad (32)$$

Демак, $\nu \geq 0$ бутун сон бўлган ҳолда (32) га асосан $J_\nu(x)$ ва $J_{-\nu}(x)$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлади, яъни бу ҳолда, аслини олганда (22) тенглама битта хусусий ечимга эга бўлади. Шунинг учун (31) Бессел тенгламасининг умумий ечими бўла олмайди. (22) тенгламанинг иккинчи хусусий ечимини аниқлаш учун каср ν лар учун (31) дан C_1 ва C_2 ўзгармасларни махсус танлаб, ушбу

$$Y_\nu(x) = \mathrm{ctg}\nu\pi\, J_\nu(x) - \mathrm{cosec}\,\nu\pi\, J_{-\nu}(x) =$$
$$= \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \qquad (33)$$

функцияни тузамиз. ν бутун бўлганда (33) формуланинг сурати $J_\nu(x)(-1)^\nu - J_\nu(x)$ га тенг бўлиб, бу ифода (32) га асосан нолга тенг, махражи ҳам нолга тенг бўлади, яъни (33) аниқмасликдан иборат бўлади. ν ни бутун сонга интилтириб, бу аниқмасликни очамиз. Лопитал қоидасига асосан

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\left[J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right]}{\frac{\partial}{\partial\nu}\sin\nu\pi} =$$

$$= \lim_{\nu\to n} \frac{\cos\nu\pi \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(x) - \pi J_\nu(x)\sin\nu\pi - \frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(x)}{\pi\cos\nu\pi} =$$

$$= \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(x)(-1)^n - \frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(x)\right]_{\nu=n}}{\pi(-1)^n}.$$

Охирги ифодада $J_\nu(x)$ ва $J_{-\nu}(x)$ ўрнига уларни ифодаловчи (27), (30) қаторларни қўйиб, ν бўйича дифференциаллаб, сўнгра ν ўрнига бутун n сонни қўйсак, бир қатор ҳисоблашлардан кейин (бу ҳисоблашлар анча майда ва Γ - функциянинг махсус хоссалари билан боғлиқ бўлгани учун уларни келтирмадик), қуйидагини хосил қиламиз:

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left(\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m}+\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right), \qquad (34)$$

бу ерда $C=0{,}577215664...$ — Эйлер ўзгармасидир. Хусусий $n=0$ бўлган ҳолда

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right).$$

$Y_n(x)$ функцияни $\nu=n$ бўлганда (22) тенгламага қўйиб, ҳақиқатан ҳам бу тенгламанинг ечими эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шу билан бирга $J_n(x)$ ва $Y_n(x)$ функцияларнинг чизиқли боғлиқ бўлиши мумкин эмас, чунки булардан биринчиси $x=0$ да чекли қийматга эга, иккинчиси эса чексизликка айланади. Демак, $Y_n(x)$ функция (22) тенгламанинг иккинчи хусусий ечими бўлади.

(34) формула билан аниқланган $Y_n(x)$ функция *иккинчи турдаги n-тартибли Бессел функцияси* ёки *Вебер функцияси* дейилади.

Бессел тенгламасининг бутун $\nu=n$ бўлганда умумий ечими ушбу

$$y=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x)$$

формула билан аниқланади. Бунда, C_1 ва C_2 — ихтиёрий ўзгармаслар.

3. Турли индексли Бессел функциялари орасидаги муносабатлар. Ихтиёрий ν учун ушбу

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]=x^{\nu}J_{\nu-1}(x), \qquad (35)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right]=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) \qquad (36)$$

формулалар ўринлидир. Худди шунга ўхшаш формулалар иккинчи турдаги мос функциялар учун ҳам тўғри бўлади.

(35) формула $J_\nu(x)$ ўрнига унинг (27) ифодасини қўйиш натижасида дарҳол келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2\nu}}{2^{2n+\nu}\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2(n+\nu)x^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu}\Gamma(n+1)(n+\nu)\Gamma(n+\nu)}=$$

$$=x^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2\nu-1}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1-1)}=x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

Худди шунга ўхшаш (36) формула исботланади. Агар (36) формулада ν ни $-\nu$ билан алмаштириб,

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_{-\nu}(x)\right]=-x^\nu J_{-\nu+1}(x) \tag{37}$$

тенгликка эга бўламиз. Аввало ν ни каср ҳисоблаб, (35) ни $\mathrm{ctg}\,\nu\pi$ га, (37) ни эса $\mathrm{cosec}\,\nu\pi$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган ифодаларни бирини иккинчисидан айирамиз. У ҳолда $\cos(\nu-1)\pi=-\cos\nu\pi,$ $\sin(\nu-1)\pi=-\sin\nu\pi$ формулаларни эътиборга олсак,

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu\,\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}\right]=x^\nu\,\frac{J_{\nu-1}\cos(\nu-1)\pi-J_{-\nu+1}}{\sin(\nu-1)\pi}$$

ёки

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu Y_\nu(x)\right]=x^\nu Y_{\nu-1}(x) \tag{38}$$

тенглик ҳосил бўлади.

(35) да ν ни $-\nu$ га алмаштирсак,

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} Y_{-\nu}(x)\right]=x^{-\nu} Y_{-\nu-1}(x) \tag{39}$$

формулага эга бўламиз.

Энди (36) ни $\mathrm{ctg}\,\nu\pi$ га, (39) ни $\mathrm{cosec}\,\nu\pi$ га кўпайтириб, уларни айирсак, $\cos(\nu+1)\pi=-\cos\nu\pi,$ $\sin(\nu-1)\pi=-\sin\nu\pi$ тенгликларга асосан, каср ν лар учун

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}Y_\nu(x)\right] = -x^{-\nu}Y_{\nu+1}(x) \qquad (40)$$

формулага эга бўламиз.

Бутун ν лар учун (38), (40) формулалар ν ни бутун сонга интилтириб, лимитга ўтиш натижасида ҳосил бўлади.

(35) ва (36) формулаларнинг натижаси сифатида қуйидаги формулалар келиб чиқади.

$$\begin{aligned}
&xJ'_\nu(x) + \nu J_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x),\\
&xJ'_\nu(x) - \nu J_\nu(x) = -xJ_{\nu+1}(x),\\
&J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_\nu(x),\\
&J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x).
\end{aligned} \qquad (41)$$

Бу формулаларнинг биринчи иккитаси (35), (36) ни бевосита дифференциаллаш натижасида, кейинги иккитаси эса аввалгиларини қўшиш ва айириш натижасида ҳосил бўлади.

Худди шундай формулалар иккинчи тур функциялар учун ҳам ўринли бўлади.

4. Бессел функцияларининг айрим хусусий ҳоллари. Математик физикада ушбу

$$J_0(x),\ J_1(x),\ Y_0(x) \text{ ва } J_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

Бессел функциялари энг кўп учрайди.

(41) формулаларнинг охиргисидан кўриняптики, $J_2(x)$, $J_3(x)$ ва ҳ. к. функцияларни ҳисоблаш $J_0(x)$, $J_1(x)$ функцияларнинг мос қийматларини ҳисоблашга келади. Энди $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, бунда n — бутун сон, функцияни қараймиз. Аввало $J_{\frac{1}{2}}(x)$, $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ функцияларнинг қийматларини ҳисоблаймиз. (27) га асосан

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}}{n!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}n!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}.$$

Маълумки,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^{n+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,.$$

Шундай қилиб,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n!1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Бу ерда охирги йиғинди $\sin x$ нинг даражали қаторга ёйилмасидан иборатдир. Демак,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\sin x\,.$$

Худди шунга ўхшаш, (30) дан

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\cos x$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

(41) формулаларнинг охиргисига асосан

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{-\sin x+\frac{3}{x}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\sin(x-\pi)+\frac{3}{x}\cos(x-\pi)\right].$$

Умуман, $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ Бессел функцияси бутун n да элементар функциялар орқали ифодаланади, яъни қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)+Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right],$$

бу ерда $P_n(\frac{1}{x})$ $-\frac{1}{x}$ га нисбатан n — даражали кўпҳад, $Q_{n-1}(\frac{1}{x})$ эса, $n-1$ даражали кўпҳад, шу билан бирга $P_n(0)=1$, $Q_{n-1}(0)=0$. Бундан, x нинг катта қийматларида Бессел функциясининг ассимптотик ифодаси келиб чиқади:

$$J_\nu(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(x^{-1}\right)\right], \tag{42}$$

бу ерда $O(x^{-1})$ орқали тартиби $\frac{1}{x}$ бўлган миқдор белгиланган.

Эслатиб ўтамизки, (42) ассимптотик формула фақат $\nu=n+\frac{1}{2}$ да эмас, балки ν нинг барча қийматларида ҳам ўринли бўлади.

5. Бессел функцияларининг ортогоналлиги ва уларнинг илдизлари. Ушбу

$$x^2y''+xy'+(k^2x^2-\nu^2)y=0 \tag{43}$$

тенгламани текширамиз, бунда k — нолдан фарқли ихтиёрий ўзгармас, x ўзгарувчи ўрнига янги $t=kx$ ўзгарувчи киритамиз. У ҳолда (43) тенглама

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left(t^2-\nu^2\right)y=0$$

Бессел тенгламасига алмашади. Демак, $y=J_\nu(kx)$ функция

$$x^2\frac{d^2J_\nu(kx)}{dx^2}+x\frac{dJ_\nu(kx)}{dx}+\left(k^2x^2-\nu^2\right)J_\nu(kx)=0$$

тенгламанинг ечимидан иборат бўлади. Бу тенгламани x га бўлиб,

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(kx)}{dx}\right]+\left(k^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(kx)=0$$

кўринишда ёзиб оламиз. k нинг иккита турли қийматларини олиб, уларга мос тенгламаларни ёзиб оламиз:

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_1x)}{dx}\right]+\left(k_1^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_1x)=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_2x)}{dx}\right]+\left(k_2^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_2x)=0.$$

Бу тенгликлардан биринчисини $J_\nu(k_2x)$ га, иккинчисини $J_\nu(k_1x)$ га кўпайтириб ва биридан иккинчисини айириб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\left(k_2^2-k_1^2\right)xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x)=$$
$$=\frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(k_2x)\frac{dJ_\nu(k_1x)}{dx}-xJ_\nu(k_1x)\frac{dJ_\nu(k_2x)}{dx}\right]. \quad (44)$$

Агар (27) формуладан ва (41) формулаларнинг иккинчисидан фойдалансак, (44) тенгликдаги квадрат қавс ичидаги ифодани x нинг даражалари бўйича қаторга ёйиш мумкинлигига ва бу ёйилмадаги x нинг энг кичик даражаси $x^{2(\nu+1)}$ эканлигига ишонч хосил қиламиз. Шунга асосан, агар $\nu>-1$ бўлса, $x=0$ да бу ифода нолга тенг бўлади.

Буни эътиборга олиб, (44) тенгликни бирор $(0,l)$ чекли оралиқ бўйича интеграллаймиз, $\frac{dJ_\nu(k_1x)}{dx}=k_1J'_\nu(k_1x)$ ва $\frac{dJ_\nu(k_2x)}{dx}=k_1J'_\nu(k_2x)$ тенгликларга биноан:

$$\left(k_2^2-k_1^2\right)\int_0^l xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x)\,dx=$$
$$=l\left[k_1J'_\nu(k_1l)J_\nu(k_2l)-k_2J'_\nu(k_2l)J_\nu(k_1l)\right]. \quad (45)$$

Хусусий $l=1$ бўлган ҳолда, бу формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left(k_2^2-k_1^2\right)\int_0^l xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x)\,dx=$$
$$=k_1J'_\nu(k_1)J_\nu(k_2)-k_2J'_\nu(k_2)J_\nu(k_1). \quad (46)$$

Энди $\nu>-1$ да $J_\nu(x)$ Бессел функцияси комплекс илдизларга эга бўлмаслигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, у $a+ib$ комплекс илдизга эга бўлсин,шу билан бирга

$a \neq 0$. Бессел функциясини ифодаловчи (27) ёйилманинг ҳамма коэффициентлари ҳақиқий бўлгани учун $J_\nu(x)$ функция $a+ib$ комплекс илдиздан ташқари қўшма $a-ib$ илдизга ҳам эга бўлиши керак. (46) формулада $k_1 = a+ib$ ва $k_2 = a-ib$ деб ҳисоблаймиз, k_1^2 k_2^2 бўлгани учун

$$\int_0^1 xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x)\,dx = 0$$

бўлади. Кўрилаётган ҳолда $J_\nu(k_1x)$ ва $J_\nu(k_2x)$ миқдорлар қўшма комплекс, яъни

$$J_\nu(k_1x) = A+iB, \quad J_\nu(k_2x) = A-iB$$

бўлади; демак,

$$J_\nu(k_1x)\; J_\nu(k_2x) = A^2 + B^2 > 0.$$

Бунга асосан, x ўзгарувчи 0 дан 1 гача оралиқда ўзгараётганлиги учун

$$\int_0^1 xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x)\,dx \neq 0.$$

Бу қарама-қаршилик $J_n(x)$ функция комплекс илдизга эга, деган фаразимизнинг нотўғри эканлигини кўрсатади.

$J_\nu(x)$ функция соф мавҳум (яъни $a=0$, $b \neq 0$) илдизга ҳам эга бўлиши мумкин эмас. Ҳақиқатан ҳам, $\pm ib$ ни (27) формулага қўйиб, фақат мусбат ҳадларни ўз ичига олган ёйилмага эга бўламиз:

$$J_\nu(bi) = (bi)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \cdot \frac{b^{2n}}{2^{\nu+2n}} \neq 0,$$

чунки (8) формулада $x>0$ да гамма функция $\Gamma(x)$ мусбат қийматларни қабул қилади. Энди $J_\nu(x)$ функциянинг ҳақиқий илдизларга эга бўлишини кўрсатамиз. Шу мақсадда Бессел функциясининг (42) асимптотик ёйилмасини қараймиз:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-1}\right)\right].$$

Бу формулага асосан, x ўзгарувчи Ox ўқининг мусбат қисми бўйлаб чексизликка интилганда квадрат қавс ичидаги иккинчи қўшилувчи нолга интилади, биринчиси эса -1 дан $+1$ га чексиз кўп марта ўзгаради, демак, чексиз кўп марта нолга айланади. Бундан дарҳол $J_\nu(x)$ функциянинг чексиз кўп ҳақиқий илдизларга эга экани келиб чиқади. Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келдик: *агар* $\nu > -1$ *бўлса* $J_\nu(x)$ *функциянинг барча илдизлари ҳақиқийдир.*

Шу билан бирга, яна шуни уқдириб ўтамизки, (27) ёйилмада x^ν ни йиғинди белгисидан ташқарига чиқариб ёзсак, йиғинди x нинг фақат жуфт даражаларини ўз ичига олади, бундан дарҳол $J_\nu(x)$ нинг илдизлари абсолют қиймати бўйича жуфт-жуфт бир хил, ишораси бўйича қарама-қаршилиги келиб чиқади. Шунинг учун ҳам мусбат илдизларни қараш етарлидир.

Ушбу

$$J_\nu(x) = 0 \tag{47}$$

тенгламанинг ρ_i ва ρ_j ҳар хил мусбат илдизлари бўлсин, $k_1 = \frac{\rho_i}{l}$, $k_2 = \frac{\rho_j}{l}$ белгилашларни киритамиз. У ҳолда (45) формуладан бевосита қуйидаги *Бессел функцияларининг ортогоналлик хоссаси* келиб чиқади:

$$\int_0^l xJ_\nu\left(\rho_i \frac{x}{l}\right)J_\nu\left(\rho_j \frac{x}{l}\right)dx = 0, \qquad i \neq j. \tag{48}$$

Энди $k = \frac{\rho}{l}$ бўлсин, бунда ρ — (47) тенгламанинг мусбат илдизи. (45) формулада $k_1 = k$ деб, k_2 ни эса, k га интилувчи ўзгарувчи деб ҳисоблаймиз, у ҳолда

$$\int_0^l xJ_\nu(kx)J_\nu(k_2x)\,dx = \frac{lkJ'_\nu(kl)J_\nu(k_2l)}{k_2^2 - k^2}.$$

Бу тенглик ўнг томони $k_2 \to k$ да аниқмасликка айланади, чунки сурати ҳам махражи ҳам нолга интилади . Бу аниқмасликни Лопитал қоидаси бўйича очиб,

$$\int_0^l xJ_\nu^2\left(\rho \frac{x}{l}\right)dx = \frac{l^2}{2}J_\nu'^2(\rho) \tag{49}$$

тенгликка эга бўламиз.

(41) формулаларнинг иккинчисида $x=\rho$ десак, ρ сон (47) тengламанинг илдизи бўлгани учун

$$J'_{\nu}(\rho) = -J_{\nu+1}(\rho)$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва (49) формула

$$\int_0^l xJ_\nu^2\left(\rho\,\frac{x}{l}\right)dx = \frac{l^2}{2}J_{\nu+1}^2(\rho)$$

кўринишда ёзилади.

Шундай қилиб, биз қуйидаги формулага эга бўлдик:

$$\int_0^l xJ_\nu\left(\rho_i\,\frac{x}{l}\right)J_\nu\left(\rho_j\,\frac{x}{l}\right)dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{агар} \quad i \neq \text{j}, \\ \frac{l^2}{2}J_\nu'^2(\rho_i) = \frac{l^2}{2}J_{\nu+1}^2(\rho_i), & \text{агар} \quad i = \text{j}, \end{cases} \quad \nu > -1, \tag{50}$$

бу ерда ρ_i ва ρ_j — $J_\nu(x)=0$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

6. Ихтиёрий функцияни Бессел функциялари бўйича қаторга ёйиш. $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ лар ўсиш тартиби бўйича жойлаштирилган $J_\nu(x)=0$ тенгламанинг мусбат илдизлари бўлсин.

Юқорида биз кўрдикки,

$$J_\nu\left(\rho_1\,\frac{x}{l}\right), J_\nu\left(\rho_2\,\frac{x}{l}\right), \ldots, J_\nu\left(\rho_n\,\frac{x}{l}\right), \ldots$$

функциялар $[0,l]$ сегментда x вазнли ортогонал системани ташкил қилади. Фараз қилайлик, ихтиёрий $f(x)$ функция ушбу

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_i J_\nu\left(\rho_i\,\frac{x}{l}\right), \quad \nu > -1 \tag{51}$$

қатор билан ифодаланган бўлсин.

Бу қаторни текис яқинлашувчи ҳисоблаб, (51) тенгликни $xJ_\nu(\rho_j\,\frac{x}{l})$ га кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган ифодани 0 дан l гача оралиқда интеграллаймиз:

$$\int_0^l xf(x)J_\nu\left(\rho_j\frac{x}{l}\right)dx=\sum_{j=1}^{n}a_i\int_0^l xJ_\nu\left(\rho_i\frac{x}{l}\right)J_\nu\left(\rho_j\frac{x}{l}\right)dx.$$

(50) формулага асосан

$$a_i=\frac{2}{l^2J^2_{\nu+1}(\rho_i)}\int_0^l xf(x)J_\nu\left(\rho_i\frac{x}{l}\right)dx. \tag{52}$$

Коэффициентлари (52) формула билан аниқланган (51) ёйилма *f(x)* функциянинг *Фурье — Бессел* қаторига ёйилмаси дейилади. *f(x)* функциянинг (51) қаторга ёйилиши учун у қандай шартларни қаноатлантириши керак деган саволга қуйидаги теорема жавоб беради, биз уни исботсиз келтирамиз.

Агар f(x) функция $(0,l)$ *оралиқда берилган бўлак-бўлак узлуксиз функция бўлиб,*

$$\int_0^l t^{\frac{1}{2}}|f(t)|dt$$

интеграл мавжуд бўлса, $\nu>-\frac{1}{2}$ *бўлганда Фурье — Бессел қатори яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси* $(0,l)$ *оралиқнинг f(x) чегараланган вариацияга эга бўлган ҳар бир x нуқтасида* $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ *га тенг бўлади.*

VII БОБ

ФУРЬЕ УСУЛИ

Фурье усули ёки ўзгарувчиларни ажратиш усули хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишда кенг қўлланиладиган усуллардан биридир. Бу усулнинг моҳиятини бир қатор мисолларда текшириб кўрсатамиз, сўнгра ўзгарувчиларни ажратиш усулининг умумий схемаси тўғрисида тушунчалар берамиз.

1- §. Тор тебраниш тенгламаси учун Фурье усули

1. Асосий аралаш масалани тор тебраниш тенгламаси учун ечиш. Маълумки, бу масала

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

тенгламанинг

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

чегаравий шартларни, ҳамда

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{3}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишдан иборатдир. Аввало (1) тенгламанинг айнан нолга тенг бўлмаган ва (2) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини

$$u\,(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

кўринишда излаймиз. Биз бу ерда $X(x)$ ни фақат x га, $T(t)$ ни эса фақат t га боғлиқ деб ҳисоблаймиз. (4) нинг ўнг томонини (1) тенгламадаги $u(x,t)$ нинг ўрнига олиб бориб қўямиз:

$$XT'' = a^2X''T \quad \text{ёки} \quad \frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}. \tag{5}$$

Охирги тенгликнинг чап томони x га, ўнг томони t га боғлиқ эмас.

Демак, $\frac{T''}{a^2T}$ ва $\frac{X''}{X}$ миқдорларнинг ҳар бири x га ҳам, t га ҳам боғлиқ эмас, яъни улар ўзгармас. Бу ўзгармасни $-\lambda$ орқали белгилаб оламиз. У ҳолда, (5) га асосан

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{7}$$

Шундай қилиб, (5) тенглама иккита тенгламага ажралди, булардан бири фақат x га боғлиқ функцияни, иккинчиси эса фақат t га боғлиқ функцияни ўз ичига олади. Бундай ҳолларда *ўзгарувчилар ажралди* деб айтилади.

(4) кўринишидаги (2) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи айнан нолга тенг бўлмаган $u(x,t)$ ечимни топиш учун (7) тенгламанинг

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{8}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи айнан нолга тенг бўлмаган ечимини топиш керак. Шундай қилиб, биз қуйидаги масалага келдик:

λ параметрнинг шундай қийматларини топиш керакки, бу қийматларда (7) тенглама (8) шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарқли ечимга эга бўлсин. Бу масала одатда *спектр масаласи* ёки *Штурм — Лиувилл масаласи* дейилади.

λ нинг бундай қийматлари (7), (8) масаланинг *хос қийматлари (сонлари),* бу қийматларга мос ечимлар эса *хос функциялари* дейилади.

(7) тенгламанинг умумий ечими $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ёки $\lambda > 0$ бўлишига қараб турли кўринишга эга бўлади.

Шунинг учун ҳам бу учта ҳолни алоҳида-алоҳида текширамиз.

1) $\lambda < 0$ бўлган ҳол. Бу ҳолда (7) тенгламанинг умумий ечими

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

кўринишга эга бўлади. Бунда C_1 ва C_2 — ихтиёрий ўзгармаслар.

(8) чегаравий шартларга асосан

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0.$$

Бу системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлгани учун $C_1 = C_2 = 0$. Демак, $X(x) \equiv 0$.

2) $\lambda = 0$ бўлган ҳол. Бу ҳолда (7) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

(8) чегаравий шартларни қаноатлантириб, $C_1 = 0$, $C_1 + C_2 l = 0$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Бундан $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ ва, демак, $X(x) \equiv 0$.

3) $\lambda > 0$ бўлган ҳол. Бу ҳолда (7) тенгламанинг умумий ечими

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \tag{9}$$

кўринишга эга бўлади. (8) чегаравий шартларга биноан

$$C_1 = 0, \quad C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Биз $C_2 \neq 0$ деб ҳисоблаймиз, акс ҳолда $X(x) \equiv 0$ бўлиб қолади. Демак,

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолдагина, яъни $\sqrt{\lambda}l = \pi n$ ёки $\lambda = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$ бўлганда, бу ерда n — бутун сон, (7), (8) масала (9) кўринишдаги айнан нолдан фарқли ечимга эга бўлади. $\sin nx$ ва $\sin(-n)x = -\sin nx$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлгани учун n нинг 1, 2, 3, ... натурал қийматлари билан чегараланиш кифоядир.

Шундай қилиб, биз қуйидаги хулосага келдик: $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, $n = 1,2,3,...$ сонлар (7), (8) масаланинг хос қийматларидир, $C_n \sin \frac{\pi n}{l} x$ функциялар эса, уларга мос хос функциялардир, C_n — нолдан фарқли ихтиёрий ҳақиқий ўзгармаслар.

Биз қуйида $C_n = 1$, $n = 1, 2,...$ деб ҳисоблаймиз.

$\lambda = \lambda_n$ бўлганда (6) тенгламанинг умумий ечими

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l}$$

кўринишга эга бўлади, бунда a_n, b_n — ихтиёрий ўзгармаслар. Демак, (1), (2) бир жинсли масала чексиз кўп чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (10)$$

ечимларга эга бўлади. (1) тенглама чизиқли ва бир жинсли бўлганлиги сабабли, (10) ечимларнинг чексиз йиғиндиси ҳам ечим бўлади.

Энди (1), (2), (3) масаланинг ечимини

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (11)$$

қатор кўринишида излаймиз. Агар бу қатор текис яқинлашувчи бўлиб, уни x ва t бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин бўлса, қаторнинг йиғиндиси ҳам (1) тенгламани қаноатлантиради. (11) қаторнинг ҳар бир ҳади (2) чегаравий шартларни қаноатлантиргани учун унинг йиғиндиси $u(x,t)$ функция ҳам бу шартни қаноатлантиради.

(11) қаторнинг a_n ва b_n коэффициентларини шундай аниқлашимиз керакки, қаторнинг йиғиндиси $u(x,t)$ функция (3) бошланғич шартларни ҳам қаноатлантирсин.

(11) қаторни t бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\left(-a_n \sin\frac{n\pi at}{l} + b_n \cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \cdot \quad (12)$$

(11) ва (12) да $t=0$ деб, (3) бошланғич шартларга асосан ушбу

$$\varphi_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (13)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. (13) формулалар берилган $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ фунцияларнинг $0\le x\le l$ оралиқда синуслар бўйича ёйилган Фурье қаторидан иборатдир. (13) ёйилмалар коэффициентлари

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\\ b_n&=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \end{aligned} \qquad (14)$$

формулалар билан аниқланади.

Энди (11) қаторни ва уни икки марта диффереиаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторларнинг текис яқинлашувчанлигини кўрсатсак, (11) қатор билан аниқланган $u(x,t)$ функция ҳақиқатан ҳам (1), (2), (3) масаланинг ечимидан иборат бўлади. Қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. *Агар $\varphi_0(x)$ функция $[0,\ l]$ сегментда икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, учинчи тартибли бўлак-бўлак узлуксиз ҳосилага эга бўлса, $\varphi_1(x)$ эса узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, иккинчи тартибли бўлак-бўлак узлуксиз ҳосилага эга бўлса, ҳамда*

$$\varphi_0(0)=\varphi_0(l)=0,\quad \varphi_1(0)=\varphi_1(l)=0,\quad \varphi_0''(0)=\varphi_0''(l)=0 \qquad (15)$$

мувофиқлаштириш шартлари бажарилса, у холда (11) *қатор билан аниқланган $u(x,t)$ функция иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб,* (1) *тенгламани,* (2) *чегаравий ва* (3) *бошланғич шартларни қаноатлантиради. Шу билан бирга* (11) *қаторни x ва t бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин бўлиб, ҳосил бўлган қаторлар ихтиёрий t да $0\le x\le l$ оралиқда абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. Аввало (15) мувофиқлаштириш шартлари қандай келиб чиқишига тўхталиб ўтамиз. (15) нинг биринчи иккита шарти $u(x,t)$ функциянинг $x=0$, $t=0$ ва $x=l$, $t=0$ нуқталарда узлуксизлигидан (2) ва (3) шартларга асосан келиб чиқади.

(15) нинг иккинчи иккита шарти эса худди шу нуқталарда $\frac{\partial u}{\partial t}$ ҳосиланинг узлуксизлигидан ҳосил бўлади. Учинчи жуфт шартни эса қуйидагича чиқариш мумкин. (1) тенгламада $t=0$ деб,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{t=0} - a^2\varphi_0''(x) = 0$$

тенгликни ҳосил киламиз. (2) шартларни дифференциаллаб,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=l} = 0$$

тенгликларга эга бўламиз. Бу ерда $t=0$ деб, олдинги тенгликда $x=0$ ва $x=l$ десак, (15) нинг учинчи иккита шарти келиб чиқади.

(14) формулалардаги интегралларни бўлаклаб интеграллаймиз. (15) шартларга асосан, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$a_n = -\frac{2l^2}{(\pi n)^3}\int_0^l \varphi_0'''(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_n = -\frac{2l^2}{a(\pi n)^3}\int_0^l \varphi_1''(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Ушбу

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0'''(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$\beta_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{\varphi_1''(x)}{a}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

белгиларни киритамиз. У ҳолда

$$a_n = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{\alpha_n}{n^3}, \tag{16}$$

$$b_n=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{\beta_n}{n^3}.$$

α_n ва β_n микдорлар $\varphi_0'''(x)$ ва $\frac{\varphi_1'''(x)}{a}$ функцияларнинг Фурье коэффициентларидан иборатдир. Тригонометрик қаторлар назариясидан маълумки [1],

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\beta_n|}{n}$$

қаторлар яқинлашувчи бўлади. (16) ни (11) қаторга олиб бориб қўямиз:

$$u(x,t)=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\alpha_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\beta_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Бу қатор ва уни икки марта ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар учун ушбу

$$C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|+|\beta_n|}{n^3},\quad C_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|+|\beta_n|}{n^2},\quad C_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|+|\beta_n|}{n},$$

C_1, C_2, C_3 — ўзгармаслар, яқинлашувчи қаторлар можаранта қаторлар ролини ўйнайди. Демак, (11) қатор ва уни икки марта дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади. Бундан (11) қаторнинг йиғиндиси $u(x,t)$ функция ўзининг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари билан бирга узлуксиз эканлиги келиб чиқади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Агар

$$a_n=A_n\sin\varphi_n,\quad b_n=A_n\cos\varphi_n$$

белгиларини киритсак, биз асосий масаламизнинг ечими (11) ни

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\left(\frac{n\pi at}{l}+\varphi_n\right)$$

кўринишда ёзиб олишимиз мумкин. Бу қаторнинг ҳар бир ҳади *турғун тўлқин* деб аталади. Бунда торнинг ҳар бир нуқтаси бир хил φ_n фазоли, $A_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ амплитудали ва $\omega_n=\frac{n a t}{l}$ частотали гармоник тебраниш ҳаракатини бажаради.

Маълумки, (III боб, 1- §, 2- банд), (1), (2), (3) масаланинг ечимини берилган $\varphi_0(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функцияларни $(0;l)$ ораликдан ташқарига $2l$ давр билан тоқлик қонуни бўйича давом эттириб, Даламбер формуласи билан ифодалаш мумкин, яъни

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds, \tag{17}$$

бу ерда Φ ва ψ функциялар бошланғич $\varphi_0(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функцияларнинг $(0;l)$ оралиқдан ташқарига давомидан иборатдир. Φ ва ψ функциялар $2l$ даврли бўлгани учун ушбу

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad \psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

қаторлар билан ифодалаш мумкин. Бу қаторларни (17) формулага қўйиб, синус ва косинусларнинг йиғиндиси ва айирмаси учун формулалардан фойдалансак, қуйидаги

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{18}$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бошланғич шартлар бажарилиши учун

$$a_n=A_n,\ b_n=\frac{l}{n\pi a}B_n$$

бўлишини эътиборга олсак, (18) қатор (11) қатор билан устма-уст тушади.

2. Асосий аралаш масала ечимининг ягоналиги. (1), (2) *ва* (3) *аралаш масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.* Бу фикрнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш учун $\varphi_0(x)\equiv\varphi_1(x)\equiv 0,\ 0\le x\le l$ бўлганда (1), (2), (3) масаланинг фақат тривиал, яъни айнан нолга тенг ечимга эга бўлишини кўрсатиш кифоядир. III бобнинг, 1- §, 3 - бандида исботланган тўлқин тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг ягоналигидан (1) тенглама учун бир жинсли

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

Коши масаласининг ечими учлари $A(0,0)$, $B(l,0)$, $C(\frac{l}{2},\frac{l}{2})$ нуқталарда бўлган тўғри бурчакли учбурчакда айнан нолга тенг бўлади.

Энди, (1) тенгламанинг AC ва AD, бунда $D = D(0, \frac{l}{2})$, кесмаларда нолга тенг бўлган ечимининг барча ACD учбурчакда нолга тенг бўлишини кўрсатиш қийин эмас (29-чизма).

(1) тенгламани $\frac{\partial u}{\partial t}$ га кўпайтириб, қуйидаги айниятга эга бўламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

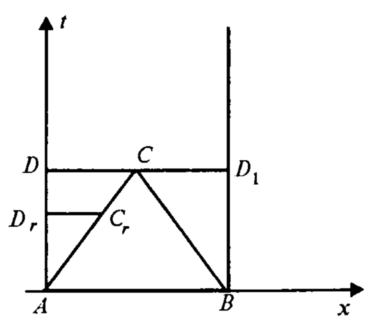
Ихтиёрий тайин τ, $0 < \tau < \frac{l}{2}$ ни олиб, $AC_\tau D_\tau$, бунда $C_\tau = C_\tau(\tau, \tau)$, $D_\tau = D_\tau(0, \tau)$ учбурчакни ҳосил қиламиз. Бу учбурчак бўйича аввалги айниятни интеграллаб, Гаусс — Остроградский формуласини қўллаймиз. У ҳолда

$$\int\limits_{AC_\tau + C_\tau D_\tau + D_\tau A} 2a^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}dt + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx = 0.$$

Бундан AC_τ ва DA_τ кесмаларда $u = 0$ бўлгани учун

$$\int\limits_{C_\tau D_\tau}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx = 0$$

тенглик келиб чиқади, яъни $D_\tau C_\tau$ кесмада $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0$. D_τ ва C_τ нуқталарда $u = 0$ бўлгани сабабли, $D_\tau C_\tau$ кесмада $u = 0$. $D_\tau C_\tau$ кесма ACD учбурчакда ихтиёрий кесма бўлгани учун, дарҳол барча ACD учбурчакда $u(x,t) = 0$ эканлиги келиб чиқади.



29- чизма

Худди шунга ўхшаш BCD_1 учбурчакда, бунда $D_1 = D_1(l, \frac{l}{2})$, $u(x,t) = 0$ эканлиги исботланади.

$u(x,t)$ функция $t = \frac{l}{2}$, $0 \le x \le l$ да бир жинсли $u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантиргани учун, юқоридаги мулоҳазаларни кетма-кет қўллаб, барча $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ да $u(x,t) = 0$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

3. Бир жинсли бўлмаган тор тенгламаси. Бир жинсли, четлари мустаҳкамланган торнинг ташқи куч таъсиридаги мажбурий тебранишларини текширамиз. Бу масала ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{19}$$

тенгламанинг

$$u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = 0 \tag{20}$$

чегаравий ва

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{21}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишдан иборатдир. Бу масаланинг ечимини

$$u(x,t) = \upsilon(x,t) + w(x,t)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $\upsilon(x,t)$ (19) тенгламанинг (20) чегаравий ва

$$\upsilon|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{22}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими, w эса

$$\frac{\partial W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{23}$$

бир жинсли тенгламанинг (20) ва (21) шартларни қаноатлантирувчи ечимидан иборатдир.

(23), (20), (21) масала 1- бандда ечилган. (19), (20), (22) масаланинг ечимини қуйидаги қатор кўринишида излаймиз:

$$\upsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (24)$$

Агар бу қатор текис яқинлашувчи бўлса, (20) чегаравий шартлар ўз-ўзидан қаноатланади.

Энди $T_n(t)$ функцияларни шундай аниқлаймизки, (24) қатор (19) тенгламани ва (22) бошланғич шартларни қаноатлантирсин. Шу мақсадда (24) қаторни (19) тенгламага қўйиб, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\omega_n^2T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x,t) \qquad (25)$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\omega_n=\frac{n\pi a}{l}.$$

$f(x,t)$ функцияни $(0,l)$ интервалда синуслар бўйича Фурье қаторига ёямиз:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\quad\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (26)$$

бунда

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad (27)$$

(25) ва (26) ёйилмаларни таққослаб, $T_n(t)$ функцияни аниқлаш учун ўзгармас коэффициентли

$$T_n''(t)+\omega_n^2T_n(t)=f_n(t),\quad (n=1,\,2,\,...) \qquad (28)$$

оддий дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. (24) қатор билан аниқланган $u(x,t)$ функция (22) бошланғич шартларни ҳам қаноатлантириши учун $T_n(t)$ функциялар

$$T_n(0)=0,\qquad T_n'(0)=0 \qquad (29)$$

шартларни қаноатлантириши етарлидир.

(28) тенгламанинг (29) шартлари қаноатлантирувчи ечими ушбу

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau$$

кўринишга эга бўлади ёки $f_n(t)$ ўрнига унинг (27) ифодасини қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$T_n(t) = \frac{2}{l\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau\int_0^l f_n(x,\tau)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad (30)$$

$T_n(t)$ функцияларнинг бу қийматларини (24) га қўйгандан сўнг, ҳосил бўлган қатор ва бу қаторни x ва t бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (24) қатор (19), (20) ва (22) масаланинг ечимидан иборат бўлади.

Агар узлуксиз $f(x,t)$ функция x бўйича иккинчи тартибгача узлуксиз ҳосилага эга бўлиб, t нинг барча қийматларида

$$f(0, t) = 0, f(l, t) = 0$$

шарт бажарилса, юқорида айтилган қаторларнинг текис яқинлашувчи бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

Шундай қилиб (19), (20) ва (21) масаланинг ечими ушбу қатор билан ифодаланади:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l} + b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

бу ерда

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

$T_n(x)$ коэффициентлар эса (30) формулалар билан аниқланади.

Агарда торнинг четлари мустаҳкамланмай, берилган қонун бўйича ҳаракат қилаётган бўлса, унинг мажбурий тебранишини аниқлаш масаласи (19) тенгламанинг (21) бошланғич шартларни ва

$$u\big|_{x=0} = \psi_1(t),\ u\big|_{x=l} = \psi_2(t) \tag{31}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишга келади. (19), (21), (31) масалани осонликча чегаравий шартлари бир жинсли бўлган масалага олиб келиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, ушбу

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \left[\psi_2(t) - \psi_1(t)\right]\frac{x}{l}$$

ёрдамчи функцияни киритамиз. Равшанки,

$$w\big|_{x=0} = \psi_1(t),\quad w\big|_{x=l} = \psi_2(t). \tag{32}$$

(19), (21), (31) масаланинг ечимини

$$u(x,t) = \upsilon(x,t) + w(x,t) \tag{33}$$

кўринишда излаймиз, бунда $\upsilon(x,t)$ — янги номаълум функция. (31) ва (32) чегаравий, (21) бошланғич шартларга асосан $\upsilon(x,t)$ функция

$$\upsilon\big|_{x=0} = 0,\quad \upsilon\big|_{x=l} = 0$$

чегаравий ва

$$\upsilon\big|_{t=0} = u\big|_{t=0} - w\big|_{t=0} = \varphi_0(x) - \psi_1(0) - \left[\psi_2(0) - \psi_1(0)\right]\frac{x}{l} = \overline{\varphi_0}(x),$$

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x) - \psi_1'(0) - \left[\psi_2'(0) - \psi_1'(0)\right]\frac{x}{l} = \overline{\varphi_1}(x)$$

бошланғич шартларни қаноатлантиради. (33) ифодани (19) тенгламага қўйиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2} + \overline{f}(x,t),$$

бу ерда

$$\overline{f}(x,t) = f(x,t) - \psi_1''(t) - \left[\psi_2''(t) - \psi_1''(t)\right]\frac{x}{l}.$$

Шундай қилиб, $u(x,t)$ функцияни аниқлаш учун ушбу

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \overline{f}(x,t),$$

$$\upsilon\big|_{x=0} = 0, \ \upsilon\big|_{x=l} = 0,$$

$$\upsilon\big|_{t=0} = \overline{\varphi_0}(x), \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \overline{\varphi_1}(x)$$

масалага келдик.

Бу масалани ечиш усулини юқорида баён қилган эдик.

2- §. Фурье усулининг умумий схемаси

Фурье усулини фақат тор тебраниш тенгламаси учун эмас, балки умумийроқ тенгламалар учун ҳам қўллаш мумкин. Биз бу параграфда аралаш масалани ечишда Фурье усулини, олинган натижаларни қатъий асосламасдан баён қиламиз.

Ушбу

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x)u \tag{34}$$

гиперболик типдаги тенгламани текширамиз, бу ерда $\rho(x)$, $\rho(x)$, $p'(x)$ ва $q(x)$ — узлуксиз функциялар, шу билан бирга $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$. (34) тенгламанинг

$$\alpha\, u(0,t) + \beta \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \tag{35}$$

$$\gamma u(l,t) + \delta \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0$$

чегаравий, бунда $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ўзгармас сонлар, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ ва

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{36}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Аввало (34) тенгламанинг тривиал бўлмаган ва (35) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини

$$u(x,t) = X(x)\ T(t) \tag{37}$$

кўринишда излаймиз. Агар бундай ечим мавжуд бўлса, уни (34) тенгламага қўйиб, $X(x)$ ва $T(t)$ функциялар қаноатлантириши зарур бўлган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$T(t)\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right]-q(x)X(x)T(t)=\rho(x)X(x)T''(t)$$

ёки

$$\frac{\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right]-q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Бу тengликнинг чап томони фақат x га, ўнг томони эса фақат t га боғлиқ бўлгани учун, бу тенглик ўзгармас сонга тенг бўлгандагина ўринли бўлади. У ўзгармас сонни $-\lambda$ орқали белгилаб оламиз.

У ҳолда номаълум $X(x)$ ва $T(t)$ функцияларни аниқлаш учун иккита оддий дифференциал тенглама ҳосил қиламиз:

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{38}$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]X(x)=0. \tag{39}$$

(34) тенгламанинг (35) шартларни қаноатлантирувчи (37) кўринишдаги тривиал бўлмаган ечимини топиш учун $X(x)$ функция

$$\alpha X(0)+\beta X'(0)=0,\quad \gamma X(l)+\delta X'(l)=0 \tag{40}$$

шартларни қаноатлантириши зарурдир.

Шундай қилиб, хос қийматлар тўғрисидаги қуйидаги масалага келдик: *λ параметрнинг шундай қийматларини топиш керакки, бу қийматларда* (39) *тенгламанинг* (40) *чегаравий шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлсин.*

Бу масала λ нинг ҳар қандай қийматида ҳам айнан нолдан фарқли (тривиал бўлмаган) ечимга эга бўлавермайди.

(39), (40) масаланинг тривиал бўлмаган ечимлари мавжуд бўлган λ нинг қийматлари *хос қийматлар (сонлар)*, бу қийматларга мос ечимлар эса *хос функциялар* дейилади. Барча хос қийматлар тўпламини берилган масаланинг *спектри* деб аталади.

(39), (40) масала хос функциялари ва хос қийматларининг асосий хоссаларини келтирамиз.

1) Масала хос қийматларининг чексиз

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \ldots$$

тўплами мавжуддир.

Бу хоссанинг исботига биз тўхталмаймиз.

2) Ҳар бир хос λ_k қийматга ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида $X_k(x)$ хос функция мос келади, яъни λ_k га иккита $X_k(x)$ ва $\bar{X}_k(x)$ хос функциялар мос келса, у ҳолда $X_k(x) = C\bar{X}_k(x)$ бўлади, бунда C — ўзгармас сон.

Ҳақиқатан ҳам $X_k(x)$, $\bar{X}_k(x)$ функциялар фаразимизга асосан

$$\alpha X_k(0) + \beta X_k'(0) = 0,$$

$$\alpha \bar{X}_k(0) + \beta \bar{X}_k'(0) = 0$$

ва $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ шартларни қаноатлантиради, у ҳолда (39) тенглама $X_k(x)$ ва $\bar{X}_k(x)$ ечимларининг Вронский детерминанти

$$\begin{vmatrix} X_k & \bar{X}_k \\ X_k' & \bar{X}_k' \end{vmatrix}$$

$x = 0$ нуқтада нолга тенг бўлади. Демак, $X_k(x)$ ва $\bar{X}_k$ функциялар чизиқли боғлиқ.

Юқорида айтиб ўтилган кўпайтувчини шундай танлаб оламизки,

$$\int_0^1 \rho(x) X_k^2(x)\,dx = 1 \qquad (41)$$

бўлсин.

(41) шартни қаноатлантирувчи хос функциялар *нормалланган* дейилади.

3) Турли хос қийматларга мос келадиган хос функциялар $[0,l]$ кесмада $\rho(x)$ вазн билан ортогонал бўлади, яъни

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x)\,dx = 0 \qquad (k \neq m) \tag{42}$$

тенгликни қаноатлантиради.

Ҳақиқатан ҳам, $X_k(x)$ ва $X_m(x)$ функциялар λ_k, λ_m хос қийматларга мос хос функциялар бўлгани учун (39) тенгламани қаноатлантиради, яъни

$$\frac{d}{dx}[p(x)X_k'(x)] + [\lambda_k \rho(x) - q(x)]X_k(x) = 0,$$
$$\frac{d}{dx}[p(x)X_m'(x)] + [\lambda_m \rho(x) - q(x)]X_m(x) = 0.$$

Бу тенгламаларнинг биринчисини $X_m(x)$ га, иккинчисини эса $X_k(x)$ га кўпайтириб, ҳадлаб айирамиз:

$$X_m \frac{d}{dx}[p(x)X_k'(x)] - X_k(x)\frac{d}{dx}[p(x)X_m'(x)] +$$
$$+ (\lambda_k - \lambda_m)\rho(x) X_k(x) X_m(x) = 0,$$

ёки

$$(\lambda_k - \lambda_m)\rho(x) X_k(x) X_m(x) =$$
$$= \frac{d}{dx}\{p(x)[X_m(x)X_k'(x) - X_k(x)X_m'(x)]\} = 0$$

Бу тенгликни x бўйича 0 дан l гача интеграллаймиз:

$$(\lambda_m - \lambda_k)\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x)\,dx =$$
$$= p(x)[X_m(x)X_k'(x) - X_k(x)X_m'(x)\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

(40) чегаравий шартларга биноан, ўнг томондаги ифода нолга тенг, у ҳолда

$$(\lambda_m - \lambda_k)\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x)\,dx = 0.$$

Бундан $\lambda_m \neq \lambda_k$ бўлгани учун

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x) dx = 0.$$

4) $q \geq 0$ бўлганда барча λ_k хос қийматлар мусбат бўлади.

Бу хоссани исботлаш учун λ_k га мос $X_k(x)$ хос функцияни нормалланган деб ҳисоблаймиз. $X_k(x)$ хос функция бўлгани сабабли

$$\frac{d}{dx}[p(x) X_k'(x)] - q(x) X_k(x) = -\lambda_k \rho(x) X_k(x).$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини $X_k(x)$ га кўпайтириб, 0 дан l гача интеграллаймиз. (41) тенгликни эътиборга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lambda_k = -\int_0^l \left\{\frac{d}{dx}[p(x) X_k'(x)] - q(x) X_k(x)\right\} X_k(x) dx.$$

Бундан, биринчи қўшилувчини бўлаклаб интеграллаб, ушбу

$$\begin{aligned} \lambda_k = \int_0^l & [p(x) X_k'^2(x) + q(x) X_k^2(x)] dx - \\ & - [p(x) X_k(x) X'(x)]\Big|_{x=0}^{x=l} \end{aligned} \tag{43}$$

тенгликка эга бўламиз. Интеграл ташқарисидаги ифода мусбат бўлмасин, яъни

$$[p(x) X_k(x) X_k'(x)]\Big|_{x=0}^{x=l} \leq 0 \tag{44}$$

деб фараз қиламиз. Шарт бўйича $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$ бўлгани учун (43) тенгликдан дарҳол (39), (40) масала хос қийматларининг мусбат эканлиги келиб чиқади.

(44) шарт татбиқда энг кўп учрайдиган.

1) $X(0) = 0$, $X(l) = 0$; 2) $X'(0) = 0$, $X'(l) = 0$;

3) $X'(0) - h_1 X(0) = 0$, $X'(l) + h_2 X(l) = 0$, $h_1 \geq 0$, $h_2 \geq 0$

чегаравий шартларда бажарилади.

(39) ва (40) масала хос қийматлари ва хос функцияларининг айрим хоссаларини аниқлаб олганимиздан сўнг, энди (38) тенгламага мурожаат қиламиз. Бу тенгламанинг $\lambda = \lambda_n$ бўлгандаги умумий ечими, уни $T_n(t)$ орқали белгилаб олсак,

$$T_n(t) = a_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + b_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t$$

кўринишга эга бўлади, бунда a_n ва b_n ўзгармас сонлар.

Шундай қилиб, (37) га асосан ҳар бир

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = (a_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + b_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t)X_n(x)$$

функция (34) тенгламанинг (35) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимидан иборат бўлади. (36) бошланғич шартларни қаноатлантириш учун, ушбу

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + b_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t)X_n(x) \tag{45}$$

қаторни тузамиз. Агар бу қатор ва уни x, t бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда, равшанки унинг йиғиндиси (35) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи (34) тенгламанинг ечими бўлади.

(36) бошланғич шартларнинг бажарилиши учун

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \tag{46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sqrt{\lambda_n}\, X_n(x) \tag{47}$$

тенгликларнинг бажарилиши зарурдир.

Шундай қилиб, биз ихтиёрий функцияни (39), (40) чегаравий масаланинг $X_n(x)$ хос функциялари бўйича қаторга ёйиш масаласига келдик.

Фараз қилайлик, ихтиёрий $\varphi(x)$ функция (39), (40) чегаравий масаланинг $X_n(x)$ хос функциялар бўйича

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) \tag{48}$$

қатор кўринишда ифодаланадиган бўлсин. (48) қаторни текис яқинлашувчи деб ҳисоблаб, унинг A_n коэффициентларини аниқлашимиз мумкин. Бунинг учун (48) тенгликнинг ҳар икки тамонини $\rho(x)\ X_n(x)$ га кўпайтириб, сўнгра x бўйича 0 дан l гача оралиқда интеграллаймиз. У ҳолда (41) ва (42) асосан

$$A_n = \int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_n(x)dx. \tag{49}$$

Исботига тўхтамасдан биз қуйидаги теоремани келтириб ўтамиз.

Теорема. (В.А. Стеклов). *Ихтиёрий биринчи тартибли узлуксиз, иккинчи тартибли бўлак-бўлак узлуксиз ҳосилага эга,* (40) *чегаравий шартларни қаноатлантирувчи* $\varphi(x)$ *функция* (39), (40) *чегаравий масаланинг хос функциялари бўйича абсолют ва текис яқинлашувчи* (48) *қаторга ёйилади.*

(46) ва (47) ёйилмаларнинг коэффициентларини топиш учун (49) формулани қўллаймиз. У ҳолда

$$a_n = \int_0^l \rho(x)\varphi_0(x)X_n(x)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^l \rho(x)\varphi_1(x)X_n(x)dx.$$

Агар (45) қатор ва уни x, t бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар текис яқинлашувчи бўлса, a_n ва b_n коэффициентларнинг топилган қийматларини (45) қаторга қўйиб (34), (35), (36) аралаш масаланинг ечимини топамиз.

Фурье усулини фазовий координаталарнинг сони кўп бўлган ҳолда ҳам қўллаш мумкин.

Биз буни аниқ масалаларда кўрсатамиз.

3- §. Мембрана тебранишларининг масаласи

1. Умумий ҳол. Четлари мустаҳкамланган эластик мембрана мувозанат ҳолида (x,y) текисликда Γ эгри чизиқ билан чегараланган бирор G соҳа билан устма-уст тушсин. У ҳолда бу мембрана тебранишлари

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{50}$$

тўлқин тенгламасининг

$$\begin{aligned} &u(0, x, y) = \varphi_0(x, y) \\ &\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x, y) \qquad (x, y) \in G \end{aligned} \tag{51}$$

бошланғич шартларни ва

$$u\ (x,y,t\ ) = 0\ , \quad t \geq 0\ , \quad (x,t) \in \Gamma \tag{52}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи $u(x,y,t)$ ечими билан тасвирланади.

Бу масаланинг ечимини ҳам, тор тебранишига ўхшаш, Фурье усули билан излаймиз:

$$u(x,y,t) = T(t)\ \upsilon\ (x,y). \tag{53}$$

Бу ифода (50) тенгламанинг ечими бўлиши учун $T(t)$ ва $\upsilon\ (x,y)$ функциялар мос равишда

$$T''(t) + a^2 \lambda T = 0 \tag{54}$$

$$\Delta \upsilon(x, t) + \lambda \upsilon(x, t) = 0 \tag{55}$$

тенгламаларни қаноатлантириши керак, бу ерда

$$\lambda = -\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\frac{\Delta \upsilon(x,y)}{\upsilon(x,y)} = \text{const}\ .$$

(55) тенглама *Гельмгольц тенгламаси* дейилади.

$u(x,y,t)$ функциянинг қийматини (53) дан (52) чегаравий шартга қўйиб,

$$T(t)\ \upsilon\ (x,y) = 0\ , \quad (x,y) \in \Gamma\ , \ t \geq 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенглик эса ўз навбатида $\upsilon\ (x,y)$ функция учун

$$\upsilon\ (x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma \tag{56}$$

чегаравий шартга тенг кучлидир.

(55) Гельгольц тенгламаси учун бир жинсли (56) Дирихле масаласи тривиал бўлмаган ечимга эга бўлган λ нинг қиймати *хос қиймат (сон)*, бу сонга мос бўлган $\upsilon(x,y)$ функция *хос функция* дейилади.

Фараз қилайлик, G соҳанинг Γ чегараси бўлак-бўлак силлиқ Жордан эгри чизиғи бўлиб, $\upsilon(x,y)$ функция (55), (56) масаланинг λ хос сонга мос хос функцияси бўлсин.

Ушбу

$$\upsilon\Delta\upsilon = \frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\right)^2$$

айниятни G соҳа бўйича интеграллаб ва Гаусс — Остроградский формуласини қўллаб, (55) тенглама ва (56) чегаравий шартга асосан

$$\int_G \left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right) dxdy = \int_\Gamma \upsilon \frac{\partial\upsilon}{\partial n} d\Gamma - \int_G \upsilon\Delta\upsilon dxdy = \lambda \int_G \upsilon^2 dxdy$$

тengликни ҳосил қиламиз. Бундан *хос сон* $\lambda > 0$ эканлиги келиб чиқади.

Шунинг учун ҳам $\lambda = \mu^2$, μ — ҳақиқий сон, белгилашни киритишимиз мумкин. Бунга асосан (54) тенгламанинг умумий ечими, маълумки,

$$T(t) = C_1\cos\mu at + C_2\sin\mu at \tag{57}$$

кўринишга эга бўлади, C_1, C_2 — ихтиёрий ҳақиқий ўзгармаслар.

(57) дан, ўз навбатида $T(t)$ нинг $2\pi/\mu a$ даврли даврий функция эканлиги келиб чиқади.

G соҳага қўйилган етарли умумий шартларда (55), (56) масала *μ_1, μ_2, ... хос сонларининг саноқли тўплами ва буларга мос $\upsilon_1(x,y)$, $\upsilon_2(x,y)$, . . . хос функциялари мавжуд бўлади.*

Биз бу фикрни кейинги бандларда G соҳа тўғри тўртбурчак ва доира бўлган ҳолда исбот қиламиз.

μ_n хос сонга мос (55) тенгламанинг (57) ечимини $T_n(t) = a_n\cos\mu_n at + b_n\sin\mu_n at$, бунда a_n ва b_n — ихтиёрий ҳақиқий ўзгармаслар, кўринишда олиб, (50) тенглама ечимларининг тўпламини

$$u_n(x,y,t) = \upsilon_n(x,y)\left(a_n \cos\mu_n at + b_n \sin\mu_n a t\right) \quad n = 1,2\ ,\ .\ .\ .$$

кўринишда ёзиб олишимиз мумкин.

Агар υ_k *ва* $\upsilon_m - \lambda_k$ ва λ_m *хос сонларга мос хос функциялар бўлса, у ҳолда*

$$\int_G \upsilon_k(x,y)\upsilon_m(x,y)dxdy = 0, \quad k \neq m. \tag{58}$$

Буни исботлаш учун ушбу

$$\upsilon_k\Delta\upsilon_m - \upsilon_m\Delta\upsilon_k = \frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon_k \frac{\partial\upsilon_m}{\partial x} - \upsilon_m \frac{\partial\upsilon_k}{\partial x}\right) + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon_k \frac{\partial\upsilon_m}{\partial y} - \upsilon_m \frac{\partial\upsilon_k}{\partial y}\right)$$

айниятдан фойдаланамиз. Гаусс — Остоградский формуласини қўллаб,

$$\Delta\upsilon_k = -\lambda_k\upsilon_k, \quad \Delta\upsilon_m = -\lambda_m\upsilon_m, \ (x,y)\in G$$
$$\upsilon_k(x,y) = \upsilon_m(x,y) = 0, \ (x,y)\in \Gamma$$

тенгликларни эътиборга олсак,

$$\int_G \left(\upsilon_k\Delta\upsilon_m - \upsilon_m\Delta\upsilon_k\right)dxdy = \left(\lambda_k - \lambda_m\right)\int_G \upsilon_k\upsilon_m dxdy = 0$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан $\lambda_k \neq \lambda_m$ бўлгани учун (58) келиб чиқади. (50), (51), (52) масаланинг ечимини

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n(x,t)\left(a_n \cos\mu_n at + b_n \sin\mu_n at\right) \tag{59}$$

қаторнинг йиғиндиси кўринишида излаймиз.

u(x,y,t) функция (51) бошланғич шартларни қаноатлантириши учун a_n ва b_n коэффициентлар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\upsilon_n(x,y) = \varphi_0(x,y), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a\mu_n b_n\upsilon_n(x,y) = \varphi_1(x,y)$$

шартларни қаноатлантириши зарур. Бу икки тенгликни $\upsilon_k(x,y)$ га кўпайтириб, (58) тенгликни эътиборга олсак, қуйидаги формулалар келиб чиқади:

$$a_n = \frac{1}{N^2(\upsilon_n)} \int\limits_G \varphi_0(x, y)\upsilon_n(x, y)dxdy,$$

$$b_n = \frac{1}{a\mu_n N^2(\upsilon_n)} \int\limits_G \varphi_1(x, y)\upsilon_n(x, y)dxdy,$$

бу ерда

$$N(\upsilon_n) = \left(\int\limits_G \upsilon_n^2(x, y)dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$N(\upsilon_n)$ сон $\upsilon_n(x,y)$ *функциянинг нормаси* дейилади

2. Тўғри бурчакли мембрананинг тебраниши. G соҳа $0 \le x \le p$, $0 \le y \le q$ тўғри тўртбурчакдан иборат бўлсин. Бундай мембрананинг кичик тебранишлари (50) тенгламанинг (51) бошланғич шартларни ва

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=p} = 0, \quad u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=q} = 0 \qquad (60)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топишдан иборатдир. Бу масаланинг ечимини (53) кўринишда излаб, $T(t)$ учун (54) тенгламага, $\upsilon(x,y)$ учун (55) тенгламага ва

$$\upsilon\big|_{x=0} = 0, \quad \upsilon\big|_{x=p} = 0, \quad \upsilon\big|_{y=0} = 0, \quad \upsilon\big|_{y=q} = 0 \qquad (61)$$

чегаравий шартларга эга бўламиз, (54) ва (55) да λ ўрнига μ^2 қўйиш керак.

(55), (61) масаланинг хос қийматлари ва хос функцияларини топамиз. (55) тенгламада

$$\upsilon(x,y) = X(x)\ Y(y) \qquad (62)$$

деб, ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{Y''}{Y} + \mu^2 = -\frac{X''}{X} = \mu_1^2.$$

Бундан иккита оддий дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$X''(x)+\mu_1^2X(x)=0, \qquad Y''+\mu_2^2Y(y)=0, \tag{63}$$

бу ерда

$$\mu_2^2=\mu^2-\mu_1^2 \quad \text{ёки} \quad \mu^2=\mu_1^2+\mu_2^2. \tag{64}$$

(61) чегаравий шартга асосан (63) нинг биринчи тенгламасини

$$X(0)=X(p)=0 \tag{65}$$

шартларда, иккинчисини эса

$$Y(0)=Y(q)=0 \tag{66}$$

шартларда ечиш керак.

(63) тенгламаларнинг умумий ечими, маълумки,

$$X(x)=C_1\cos\mu_1x+C_2\sin\mu_1x,$$
$$Y(y)=C_3\cos\mu_2y+C_4\sin\mu_2y$$

кўринишга эга бўлади.

(65) ва (66) чегаравий шартларга кўра $C_1=C_3=0$ бўлади, агар $C_2=C_4=1$ деб ҳисобласак,

$$X(x)=\sin\mu_1x, \ Y(y)=\sin\mu_2y \tag{67}$$

тенгликларга эга бўламиз, шу билан бирга

$$\sin\mu_1p=0, \ \sin\mu_2q=0 \tag{68}$$

бўлиши керак.

(68) тенгламалардан μ_1 ва μ_2 чексиз кўп

$$\mu_{1,m}=\frac{m\pi}{p}, \quad \mu_{2,n}=\frac{n\pi}{q}, \qquad m,n=1,2,3,...$$

қийматларга эга бўлиши келиб чиқади.

У ҳолда, (64) тенгликдан μ^2 нинг мос қийматларини ҳосил қиламиз:

$$\mu_{m,n}^2=\mu_{1,m}^2+\mu_{2,n}^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{p^2}+\frac{n^2}{q^2}\right). \tag{69}$$

Шундай қилиб, (69) хос қийматларга (62) ва (67) га асосан (55), (61) чегаравий масаланинг

$$v_{nm}(x,y)=\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q} \qquad (70)$$

хос функциялари мос келади.

Агар (70) формула билан аниқланган хос функцияларни $\frac{2}{\sqrt{pq}}$ сонга кўпайтирсак, бу функциялар ортонормаланган функцияларнинг системасини ҳосил қилади, яъни

$$\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m'\pi x}{p}\sin\frac{n'\pi y}{q}\,dx\,dy=$$

$$=\begin{cases}1, & \text{агар} \quad m=m', \quad n=n' \\ 0, & \text{агар} \quad m\neq m' \quad \text{ёки} \quad n\neq n'.\end{cases}$$

Бу ерда бир нарсага эътиборни жалб қиламизки, (55), (61) масаланинг топилган хос қийматлари орасида каррали хос қийматлар бўлиши мумкин, яъни шундай хос қийматларки, буларга битта эмас, бир нечта чизиқли боғлиқ бўлмаган хос функциялар мос келади.

Бу шундай ҳолларда бўладики, тўғри тўртбурчакнинг p ва q томонлари ўлчовдош бўлиб, $\frac{p}{q}$ — рационал сон, m, n ва m', n' лар шундайки, булар учун $\mu^2_{mn}=\mu^2_{m'n'}$ бўлади.

Масалан, $p=q=1$ бўлганда $\mu^2=5\pi^2$ хос қиймат икки каррали бўлади, чунки бу сонга иккита чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$v_{1,2}=\sin\pi x\sin 2\pi y\,,\quad v_{2,1}=\sin 2\pi x\sin\pi y$$

хос функциялар мос келади.

Энди (54) тенгламага мурожаат қилсак, кўрамизки, ҳар бир $\mu^2=\mu^2_{mn}$ хос қиймат учун унинг умумий ечими

$$T_{nm}(t)=A_{mn}\cos a\mu_{mn}t+B_{mn}\sin a\mu_{mn}t \qquad (71)$$

кўринишга эга бўлади, бунда A_{mn} ва B_{mn} — ихтиёрий ўзгармаслар .

Шундай қилиб, (50) тенгламанинг (60) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимлари (53), (70) ва (71) га асосан қуйидагича бўлади:

$$u_{mn}(x,y,t) = \left(A_{mn}\cos a\mu_{mn}t + B_{mn}\sin a\mu_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}.$$

Асосий (50), (51) ва (60) масаланинг ечимини ушбу

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos a\mu_{mn}t + +B_{mn}\sin a\mu_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q} \tag{72}$$

қатор кўринишида излаймиз.

Агар бу қатор ва уни x, y ва t бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар текис яқинлашувчи бўлса, унинг йиғиндиси (50) тенгламани ва (60) чегаравий шартларни қаноатлантиради. (51) бошланғич шартларнинг бажарилиши учун

$$\begin{aligned} u\Big|_{t=0} &= \varphi_0(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} &= \varphi_1(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a\mu_{mn}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q} \end{aligned} \tag{73}$$

тенгликларнинг бажарилиши зарурдир.

(73) формулалар $\varphi_0(x,y)$ ва $\varphi_1(x,y)$ функцияларнинг синуслар бўйича иккиланган Фурье қаторига ёйилмасидан иборатдир. Ёйилмаларнинг коэффициентлари ушбу

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \varphi_0(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dxdy, \\ B_{mn} &= \frac{4}{a\mu_{mn}pq}\int_0^p\int_0^q \varphi_1(x,y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dxdy \end{aligned} \tag{74}$$

формулалар билан аниқланади.

(74) ни (72) қаторга қўйиб, масаламизнинг ечимига эга бўламиз.

Агар бошланғич $\varphi_0(x,y)$ ва $\varphi_1(x,y)$ функциялар $|x| \le p$, $|y| \le q$ тўғри тўртбурчакка тоқлик қонун билан, барча x,y текисликка x бўйича $2p$ давр билан, y бўйича эса $2q$ давр билан давом эттиргандан сўнг тўрт марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, (72) қатор икки марта ҳадлаб дифференциаллангандан сўнг текис яқинлашувчи бўлади.

Бу фикрнинг тўғрилигига худди 1- § дагидай ишонч ҳосил қилиш мумкин. Демак, бу ҳолда берилган масаланинг ечими учун Фурье усули тўла асосланган бўлади.

3. Доиравий мембрананинг тебраниши. Радиуси R га тенг, маркази координата бошида бўлган ва четлари мустаҳкамланган доиравий мембрананинг эркин тебранишларини текшириш (50) тенгламанинг (51) бошланғич шартларини ҳамда

$$u\Big|_{x^2+y^2=R^2}=0 \tag{75}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечимини топишга келади. Бу масалани ўрганишда $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ тенгликлар билан аниқланадиган $r,\ \theta$ қутб координатларига ўтиш қулайлик туғдиради. Лаплас оператори қутб координаталарида ушбу

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

кўринишга эга бўлади. Бунга асосан (50), (51), (75) масала қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{76}$$

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_0(r,\theta),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(r,\theta). \tag{77}$$

$$u\Big|_{r=R}=0 \tag{78}$$

Бу масалани ечиш учун ўзгарувчиларни ажратиш усулини қўллайиз:

$$u\,(r,\ \theta,\ t\,)=\upsilon\,(r,\ \theta)\ T\,(t\,).$$

Номаълум $T\,(t\,)$ функцияни аниқлаш учун

$$T''(t)+a^2\mu^2T(t)=0$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$T(t) = C_1\cos a\mu t + C_2\sin a\mu t$$

кўринишга эга. $\upsilon(r,\theta)$ функция учун ушбу

$$\frac{\partial^2\upsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\theta} + \mu^2\upsilon = 0\,. \tag{79}$$

$$\upsilon\big|_{r=R} = 0 \tag{80}$$

чегаравий масалани ҳосил қиламиз. Бу масаланинг ечимини

$$\upsilon(r,\theta) = W(r)\Theta(\theta) \tag{81}$$

кўринишда излаймиз.

Бу ифодани (79) тенгламага қўйиб,

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{r^2W''+rW'+\mu^2r^2W}{W} = \omega = \mathrm{const}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$r^2W''(r) + rW'(r) + (\mu^2r^2 - \omega)W(r) = 0, \tag{82}$$

$$\Theta''(\theta) + \omega\Theta(\theta) = 0. \tag{83}$$

$W(r)$ функция $r = R$да нолга айланиши ва $r = 0$ да чегараланган бўлиши керак, буни эътиборга олиб,

$$W(0) \neq \infty, \quad W(R) = 0 \tag{84}$$

чегаравий шартга келамиз. $\upsilon(r,\theta)$ функция бир қийматли бўлиши учун (81) дан кўриняптики $\Theta(\theta)$ бир қийматли бўлиши зарур, яъни 2π даврли даврий функция

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$$

бўлиши керак. Бу эса, ўз навбатида (83) тенгламадаги ўзгармас $\omega = n^2$, бунда n — ихтиёрий бутун сон, бўлиши кераклигини кўрсатади. Шу сабабли, (83) тенгламанинг умумий ечими

$$\Theta_n(\theta) = \alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta\,,$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда α_n, β_n — ихтиёрий ҳақиқий ўзгармаслар. Энди (82) тенгламага қайтамиз. Бу тенглама Бессел тенгламасидан иборат бўлиб, унинг ечими $\omega = n^2$ да

$$W_n(r) = D_n J_n(\mu r) + E_n Y_n(\mu r)$$

кўринишга эга бўлади. $W(r)$ функция (84) шартга биноан $r = R$ да нолга тенг бўлиб, $r = 0$ да чегараланган бўлиши керак. $Y_n(\mu\, r)$ функция эса, $r = 0$ да чексизликка айланади. Шу сабабли, $E_n = 0$ деб ҳисоблашимиз зарур. (84) нинг иккинчи шартига кўра $D_n\, J_n(\mu R) = 0$, $D_n \neq 0$, бўлгани учун

$$J_n(\mu R) = 0.$$

$\mu R = r$ белгилашни киритсак, ρ ни аниқлаш учун

$$J_n(\rho) = 0$$

трансцендент тенгламага эга бўламиз. Маълумки, бу тенгламанинг чексиз кўп мусбат

$$\rho_1^{(n)},\ \rho_2^{(n)},\ \rho_3^{(n)},\ \ldots$$

илдизлари бор. Бу илдизларга

$$\mu_{nm} = \frac{\rho_m^{(n)}}{R},\quad m = 1, 2, \ldots,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

қийматлар мос келади. (82), (84) масаланинг мос ечимлари ушбу

$$W_{nm}(r) = J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)} r}{R}\right)$$

кўринишга эга бўлади. У ҳолда (79), (80) чегаравий масаланинг

$$\mu_{nm}^2 = \left(\frac{\rho_m^{(n)}}{R}\right)^2$$

хос қийматига иккита чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)} r}{R}\right)\cos n\theta,\quad J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)} r}{R}\right)\sin n\theta$$

$$m = 1,2,\dots,\quad n = 0,1,2,\dots$$

хос функциялар мос келади.

Юқорида баён қилинганларга асосан (76) тенглманинг (78) чегаравий шартни қаноатлантирувчи қуйидаги кўринишдаги чексиз кўп хусусий ечимларини тузиш мумкин:

$$u_{nm}(r,\theta,t) = \left[\left(A_{nm}\cos\frac{a\rho_m^{(n)}t}{R} + B_{nm}\sin\frac{a\rho_m^{(n)}t}{R}\right)\cos n\theta + \right.$$
$$\left. + \left(C_{nm}\cos\frac{a\rho_m^{(n)}t}{R} + D_{nm}\sin\frac{a\rho_m^{(n)}t}{R}\right)\sin n\theta\right] J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)}r}{R}\right).$$

Бошланғич (77) шартларни қаноатлантириш учун ушбу

$$u_{nm}(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(A_{nm}\cos\frac{a\rho_m^{(n)}t}{R} + B_{nm}\sin\frac{a\rho_m^{(n)}t}{R}\right)\cos n\theta + \right.$$
$$\left. + \left(C_{nm}\cos\frac{a\rho_m^{(n)}t}{R} + D_{nm}\sin\frac{a\rho_m^{(n)}t}{R}\right)\sin n\theta\right] J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)}r}{R}\right) \tag{85}$$

қаторни тузамиз. Бу қаторнинг коэффицентлари бошланғич шартларга асосан аниқланади. Ҳақиқатан ҳам, (85) қаторда $t = 0$ деб ҳисоблаб,

$$\varphi_0(r,\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m}J_0\left(\frac{\rho_m^{(0)}r}{R}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)}r}{R}\right)\right)\times$$
$$\times\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)}r}{R}\right)\right)\sin n\theta$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бу қатор даврий $\varphi_0(r,\theta)$ функциянинг $(0,2\pi)$ оралиқда Фурье қаторига ёйилмасидан иборатдир. Демак, $\cos n\theta$ ва $\sin n\theta$ функциялар олдидаги кўпайтмалар Фурье коэффициентларидан иборат бўлиши керак, яъни қуйидаги тенгликлар ўринли бўлиши керак:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_0(r,\theta)d\theta = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m}J_0\left(\frac{\rho_m^{(0)}r}{R}\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_0(r,\theta)\cos n\theta d\theta=\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)}r}{R}\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_0(r,\theta)\sin n\theta d\theta=\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)}r}{R}\right).$$

Бу тенгликларни кўриб чиқсак, улар ихтиёрий *Ф(r)* функциянинг Бессел функциялари бўйича

$$\Phi(r)=\sum_{m=1}^{\infty}a_mJ_n\left(\frac{\rho_m^{(n)}r}{R}\right)$$

ёйилмасидан иборат эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Аввалги бобда кўрсатган эдикки, a_m коэффицентлар ушбу

$$a_m=\frac{2}{R^2J_{n+1}^2(\rho_m^{(n)})}\int_0^R r\Phi(r)J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)}r}{R}\right)dr$$

формула билан аниқланади.

Бу формулага асосан

$$A_{0m}=\frac{1}{\pi R^2J_1^2(\rho_m^{(0)})}\int_0^R\int_0^{2\pi}\varphi_0(r,\theta)J_0\left(\frac{\rho_m^{(0)}r}{R}\right)rdrd\Theta, \qquad (86)$$

$$A_{nm}=\frac{2}{\pi R^2J_{n+1}^2(\rho_m^{(n)})}\int_0^R\int_0^{2\pi}\varphi_0(r,\theta)J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)}r}{R}\right)\cos n\theta rdrd\theta, \qquad (87)$$

$$C_{nm}=\frac{2}{\pi R^2J_{n+1}^2(\rho_m^{(n)})}\int_0^R\int_0^{2\pi}\varphi_0(r,\theta)J_n\left(\frac{\rho_m^{(n)}r}{R}\right)\sin n\theta rdrd\theta. \qquad (88)$$

Худди шунга ўхшаш, B_{om}, B_{nm}, D_{nm} коэффициентларни аниқлаймиз. Фақат бунда (86), (87) ва (88) формулаларда $\varphi_0(r,\theta)$ ни $\varphi_1(r,\theta)$ га алмаштириб, мос ифодаларни $\frac{a\rho_m^{(n)}}{R}$ га бўлиш керак. Коэффициентларнинг топилган қийматларини (85) қаторга қўйиб, текширилаётган масаланинг ечимини топамиз.

Шундай қилиб, доиравий мембрананинг (76), (77), (78) тебраниш масаласи, (85) қаторни r, θ ва t ўзгарувчилар бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин деб, ёки шунинг ўзи, берилган бошланғич шартлардаги функциялар тез яқинлашувчи Фурье қаторларига ёйилади деб ҳисоблаганимизда ечилди.

4- §. Дирихле масаласини Фурье усули билан ечиш

1. Тўғри тўртбурчак учун Дирихле масаласи. Лаплас

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (89)$$

тенгламаси учун $0 < x < p,\ 0 < y < q$ тўғри тўртбурчакда

$$u\big|_{y=0} = \varphi(x), \quad u\big|_{y=q} = \varphi_1(x), \qquad (90)$$

$$u\big|_{x=0} = \psi(y), \quad u\big|_{x=p} = \psi_1(y) \qquad (91)$$

Дирихле масаласини ечамиз. Бу ерда $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ функциялар $0 \le x \le p$ оралиқда берилган ва унинг четларида нолга айланувчи узлуксиз функциялардир. $\psi(y)$, $\psi_1(y)$ лар эса $0 \le y \le q$ оралиқда берилган, четларида нолга айланувчи узлуксиз функциялар. (89), (90), (91) масаланинг ечимини тўртбурчакнинг бурчак нуқталарида нолга айланиши, умумиятга ҳеч қанча зиён етказмайди, чунки, изланаётган ечимдан гармоник $A + Bx + Cy + Dxy$ функцияни айириб A, B, C, D ўзгармасларни мос равишда танлаб олиш натижасида эришиш мумкин (30- чизма).

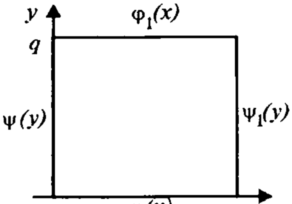
Қўйилган масалани ечиш учун, аввало (89) тенгламанинг

$$u(x,y) = X(x)\ Y(y) \qquad (92)$$

кўринишдаги ва $x = 0$, $x = p$ бўлганда $\psi(y) = \psi_1(y) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топамиз.

(92) ни (89) тенгламага қўйиб,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \qquad (93)$$



30-чизма

тенгликка эга бўламиз, бу ерда λ — ўзгармас. Бундан $X(x)$ функцияни аниқлаш учун хос қийматлар ва хос функциялар тўғрисидаги қуйидаги масалага келамиз:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$X(x)\big|_{x=0} = 0,\ X(x)\big|_{x=p} = 0.$$

1- § дан маъумки, бу масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{p^2},\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{p}x,\ n = 1, 2, \ldots$$

лардан иборат λ_n нинг бу қийматини (93) да λ нинг ўрнига қўйиб, $Y(y) = Y_n(y)$ функцияни аниқлаш учун

$$Y_n''(y) - \frac{n^2\pi^2}{p^2}Y_n(y) = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$Y_n(y) = \alpha_n \mathrm{ch}\frac{n\pi}{p}y + \beta_n \mathrm{sh}\frac{n\pi}{p}y, \quad \alpha_n, \beta_n = \mathrm{const}$$

дан иборат. $X_n(x)$ ва $Y_n(y)$ ни (92) қўйиб, (92) кўринишдаги барча ечимларни йиғиб, (89) тенгламанинг $x = 0$, $x = p$ да нолга тенг чегаравий шартларни қаноатлантирувчи

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \mathrm{ch}\frac{n\pi}{p}y + \beta_n \mathrm{sh}\frac{n\pi}{p}y\right)\sin\frac{n\pi}{p}x \tag{94}$$

ечимни ҳосил қиламиз. (94) қатордаги α_n ва β_n коэффициентларни шундай танлаймизки, натижада бу қатор (90) чегаравий шартларни қаноатлантирсин. $\varphi(x)$ ва $\varphi_1(x)$ функцияларни синуслар бўйича текис яқинлашувчи Фурье қаторларига ёйилади деб ҳисоблаймиз, яъни

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin\frac{n\pi}{p}x, \quad \varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{p}x \tag{95}$$

(94) да аввал $y = 0$, сўнгра $y = q$ деб ҳисоблаб, ҳосил бўлган қаторлар ва (95) қаторлардаги синуслар олдидаги коэффициентларни таққослаб, қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$\alpha_n = a_n, \quad \beta_n = \frac{b_n - a_n ch\frac{n\pi}{p}q}{sh\frac{n\pi}{p}q}.$$

Буларни (94) қаторга қўйиб, $\mathrm{sh}(\alpha - \beta) = \mathrm{ch}\alpha\mathrm{ch}\beta - \mathrm{ch}\alpha\mathrm{sh}\beta$ тенгликни эътиборга олсак, (89), (90), (91) масаланинг $\psi(y) = \psi_1(y) = 0$ бўлгандаги ечимини ҳосил қиламиз:

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n sh\frac{n\pi}{p}(q-y) + b_n sh\frac{n\pi}{p}y\right)\frac{1}{sh\frac{n\pi}{p}q}\sin\frac{n\pi}{p}x. \quad (96)$$

Агарда (89), (90), (91) масаланинг ечимини $\varphi(x) = \varphi_1(x) = 0$ бўлганда изласак, юқоридаги мулоҳазалар ўзгармайди, фақат x ва y нинг ўринлари алмаштирилади, яъни

$$\psi(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\bar{a}_n \sin\frac{n\pi}{q}y, \quad \psi_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\bar{b}_n \sin\frac{n\pi}{q}y$$

десак, бу ҳолда ечим ушбу

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{a}_n sh\frac{n\pi}{p}(p-x) + \bar{b}_n sh\frac{n\pi}{q}x\right)\frac{1}{sh\frac{n\pi}{q}p}\sin\frac{n\pi}{q}y \quad (97)$$

кўринишга эга бўлади.

(96), (97) қаторларни қўшиб, қуйидаги қаторга эга бўламиз:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n sh\frac{n\pi}{p}(q-y) + b_n sh\frac{n\pi}{p}y}{sh\frac{n\pi}{p}q}\sin\frac{n\pi}{p}x + \right.$$
$$\left. + \frac{\bar{a}_n sh\frac{n\pi}{q}(p-x) + \bar{b}_n sh\frac{n\pi}{q}x}{sh\frac{n\pi}{q}p}\sin\frac{n\pi}{q}y\right]. \quad (98)$$

Гиперболик синуснинг ўсиш тартибини эътиборга олсак, (98) қаторнинг $0 < x < p$, $0 < y < q$ тўғри тўртбурчакда икки марта ҳадлаб дифференциаллангандан сўнг текис яқинлашувчанлигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, бу қатор тўғри тўртбурчак учун (89), (90), (91) Дирихле масаласининг ечимини беради.

Худди шунга ўхшаш, тўғри тўртбурчак учун Лаплас тенгламасига қўйилган Нейман масаласининг ечимини топиш мумкин.

2. Доира учун Дирихле масаласи. Шу бобнинг 3- § идаги, 3- банддан бизга маълумки, Лаплас тенгламаси қутб координаталарида қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0. \tag{99}$$

Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласини соҳа доира бўлган ҳолда ечамиз. Доиранинг радиуси R, маркази координат бошида бўлсин. Доирада гармоник, доиранинг чегараси $r=R$ айланада аввалдан берилган $\varphi(\theta)$ узлуксиз қийматларни қабул қилувчи, яъни

$$u_{r=R}=\varphi(\theta), \tag{100}$$

$u(r,\theta)$ функция топилсин.

Изланаётган ечим бир қийматли бўлиши учун $\varphi(\theta)$ функция 2π даврли даврий функция бўлиши керак. Бу масаланинг хусусий ечимларини

$$u(r,\theta)=W(r)\Theta(\theta)$$

кўринишда излаб, бундаги номаълум $W(r)$ ва $\Theta(\theta)$ функциялар учун

$$\Theta''(\theta)+\lambda\,\Theta(\theta)=0, \tag{101}$$

$$r^2W''(r)+rW'(r)-\lambda W(r)=0$$

оддий дифференциал тенгламаларни ҳосил қиламиз. Маълумки, $\Theta(\theta)$ функция 2π даврли даврий бўлиши учун $\lambda=n^2$ бўлиши зарур, бунда n — бутун сон. Бунга асосан, (101) тенгламанинг ечими

$$\Theta_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

кўринишда бўлади. $W(r)$ функцияни аниқлаш учун

$$r^2W''(r) + rW'(r) - n^2W(r) = 0 \qquad (102)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу эса, $n \neq 0$ да Эйлер тенгламасидир. Эркли ўзгарувчини $r = e^{\xi}$ алмаштириш натижасида

$$W''_{\xi\xi} - n^2W = 0$$

тенгламага келамиз. Бу тенглама иккита $W = e^{n\xi}$ ва $W = e^{-n\xi}$ ёки $W = r^n$ ва r^{-n} ечимга эгадир. $n = 0$ бўлганда эса, бу тенглама $\ln r$ ва 1 чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларга эга.

Лекин, r^{-n} ва $\ln r$ ($n = 0$ да) ечимлар $r \to 0$ да чегараланган бўлмагани учун, уларни эътиборга олмаймиз.

Шундай қилиб, битта

$$W_n(r) = r^n, \qquad n = 0,1,2,...$$

ечим қолади. Буларга асосан,

$$u_n(r,\theta) = (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n$$

Лаплас тенгламаси чизиқли ва бир жинсли бўлгани учун, хусусий ечимларнинг йиғиндиси

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n \qquad (103)$$

ҳам Лаплас тенгламасининг ечими бўлади. A_0, A_n, B_n коэффициентларни шундай танлаймизки, натижада (100) чегаравий шарт бажарилсин, яъни

$$\varphi(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n R^n \cos n\theta + B_n R^n \sin n\theta).$$

Бу қатор эса, $\varphi(\theta)$ функциянинг Фурье қаторига ёйилмасидан иборат, унинг коэффициентлари қуйидаги формулалар билан аниқланади:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau, \qquad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \cos n\tau d\tau,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \sin n\tau d\tau. \qquad (104)$$

Коэффициентлари (104) формулалар билан аниқланган (103) қаторни $r < R$ да исталган марта r ва θ бўйича ҳадлаб дифференциаллаш мумкин, чунки ҳар гал ихтиёрий $r_0 < R$ да $0 \le r \le r_0$ лар учун текис яқинлашувчи қаторлар ҳосил бўлади. Бундан (103) формула билан аниқланган $u(r,\theta)$ функция (99) тенгламанинг ечими эканлиги келиб чиқади.

(103) қаторни интеграл кўринишида ҳам ёзиш мумкин. Шу мақсадда (104) коэффициентларни (103) га қўйсак, ушбу

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - \tau)\right]\varphi(\tau)d\tau$$

тенгликка эга бўламиз. Квадрат қавс ичидаги йиғиндини ҳисоблаш мумкин. Эйлер формуласига асосан

$$\cos n(\theta - \tau) = \operatorname{Re} e^{in(\theta-\tau)}.$$

Шу сабабли,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - \tau) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\theta-\tau)}\right].$$

Агар

$$q = \frac{r}{R}e^{i(\theta-\tau)}$$

белгилашни киритсак, унинг модули $|q| = r/R < 1$ бўлади. Бунга асосан, аввалги йиғинди махражи q бўлган чексиз геометрик прогрессиядан иборат бўлади:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\theta-\tau)} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

Демак,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\theta-\tau)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{r}{R}e^{i(\theta-\tau)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(\theta-\tau)}} = \frac{1}{2}\,\frac{R+re^{i(\theta-\tau)}}{R-re^{i(\theta-\tau)}}.$$

Бу ифоданинг ҳақиқий қисмини ажратиш учун сурат ва махражни махражига қўшма бўлган миқдорга кўпайтирамиз:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\frac{R+re^{i(\theta-\tau)}}{R-re^{i(\theta-\tau)}}\right]=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\frac{(R+re^{i(\theta-\tau)})(R-re^{-i(\theta-\tau)})}{(R-re^{i(\theta-\tau)})(R-re^{-i(\theta-\tau)})}\right]=$$

$$=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\frac{R^2-r^2+2iRr\sin(\theta-\tau)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\tau)+r^2}\right]=\frac{1}{2}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\tau)+r^2}.$$

Шундай қилиб,

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\tau)+r^2}\,d\tau.$$

Бу эса IV бобнинг, 2- § идаги, 3- бандда Грин функцияси ёрдамида олинган шар учун Дирихле масаласининг $n=2$ бўлган ҳолда ечимини берувчи Пуассон формуласидир.

5- §. Бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масалани Фурье усули билан ечиш

1. Бир жинсли тенглама бўлган ҳол. Масала

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (105)$$

тенгламанинг

$$u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0 \qquad (106)$$

чегаравий шартларни ва

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (107)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топишдан иборатдир, бунда берилган $\varphi(x)$ функция узлуксиз, бўлак-бўлак узлуксиз ҳосилага эга ва $x=0$, $x=l$ да нолга айланади.

Фурье усулига биноан (105) тегламанинг хусусий ечимларини

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

кўринишда излаймиз. Буни (105) га қўйиб,

$$X(x)\ T'(t) = a^2 T(t)\ X''(x)$$

ёки

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{108}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0\,. \tag{109}$$

(106) чегаравий шартларга биноан $X(x)$ функция

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0 \tag{110}$$

шартларни қаноатлантириши зарурдир.

Шу бобнинг 1- § дан бизга маълумки, (109), (110) масаланинг хос қийматлари

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2},\ n = 1,2,3,...$$

лардан, хос функциялари эса

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$$

лардан иборатдир. λ параметрнинг $\lambda = \lambda_n$ қийматларига (108) тенгламанинг

$$T_n(t) = a_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

ечимлари мос келади, бунда a_n — ихтиёрий ўзгармаслар. Шундай қилиб,

$$u_n(x,t) = a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\, e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}$$

функциялар (105) тенгламани ва (106) чегаравий шартларни қаноатлантиради.

Бошланғич (107) шартни қаноатлантириш учун ушбу

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{111}$$

қаторни тузамиз ва

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{112}$$

тengликнинг бажарилишини талаб қиламиз.

(112) қатор берилган $\varphi(x)$ функциянинг $(0,l)$ оралиқда синуслар бўйича Фурье қаторига ёйилмасидан иборатдир. Унинг коэффициентлари

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \tag{113}$$

формула билан аниқланади.

Берилган $\varphi(x)$ функциянинг узлуксиз, бўлак-бўлак узлуксиз ҳосилага ҳамда $x=0$ ва $x=l$ да нолга айланиши талаб қилингани учун коэффициентлари (113) формула билан аниқланган (112) қатор $\varphi(x)$ функцияга абсолют ва текис яқинлашади. $t \geq 0$ бўлганда

$$0 < e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \leq 1$$

тенгсизлик ўринли бўлгани учун (111) қатор $t \geq 0$ абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади.

Шунинг учун (111) қатор билан аниқланган $u(x,t)$ функция $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ соҳада узлуксиз ва (106) чегаравий, (107) бошланғич шартларни қаноатлантиради.

Ихтиёрий $t > 0$ да, агар n етарли катта бўлса,

$$0 < \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1, \qquad 0 < \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1$$

бўлгани сабабли, (111) қатордан t бўйича бир марта, x бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил бўлган қаторлар ҳам $0 < x < l$, $t > 0$ соҳада абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади. Бу эса, $u(x,t)$ функциянинг $0 < x < l$, $t > 0$ соҳада (105) тенгламани қаноатлантиришини кўрсатади.

Худди шунга ўхшаш, $0 < x < l$, $t > 0$ соҳада $u(x,t)$ функциянинг x ва t бўйича ихтиёрий тартибдаги ҳосилалари мавжудлигини кўрсатиш мумкин.

Энди чегаравий шартлар нолга тенг бўлмаган, яъни

$$u\big|_{x=0} = \psi_1(t), \qquad u\big|_{x=l} = \psi_2(t) \tag{114}$$

ҳолни текширамиз, бу ерда $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — берилган функциялар.

Бу масалада (105) тенгламанинг (107) ва (114) шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш керак.

Ечимни

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{115}$$

қатор кўринишида излаймиз, бунда

$$T_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{116}$$

(116) интегрални икки марта бўлаклаб интеграллаб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left[u(0,t) - (-1)^n u(l,t)\right] - \frac{2l}{n^2\pi^2} \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

$u(x,t)$ функция (105) тенгламани ва (114) чегаравий шартларни қаноатлантиргани учун

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left[\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)\right] - \frac{2l}{n^2\pi^2 a^2} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{117}$$

Энди (116) ифодани t бўйича дифференциаллаймиз:

$$T_n'(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{118}$$

(117) тенгликдаги интеграл ўрнига унинг қийматини (118) дан қўйиб, $T_n(t)$ коэффициентларни аниқлаш учун

$$T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = \frac{2n\pi a^2}{l^2}\left[\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)\right]$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \times$$

$$\times\left[C_n + \frac{2n\pi a^2}{l^2}\int_0^l e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \tau}(\psi_1(\tau) - (-1)^n\psi_2(\tau))d\tau\right], \qquad (119)$$

бу ерда, равшанки

$$C_n = T_n(0).$$

(107) бошланғич шартни қаноатлантириш учун

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

тенгликнинг бажарилишини талаб қиламиз. Демак,

$$T_n(0) = C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \qquad (120)$$

Шундай қилиб, (105), (107), (114) масаланинг ечими (115) қатордан иборат бўлиб, бундаги $T_n(t)$ (119) ва (120) формулалар билан аниқланади.

2. Бир жинсли бўлмаган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси. Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (121)$$

тенгламанинг

$$u\big|_{x=0} = \psi_1(t), \qquad u\big|_{x=l} = \psi_2(t) \qquad (122)$$

чегаравий шартларни ва

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (123)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласини кўрамиз.

Аввало чегаравий ва бошланғич шартлар нолга тенг бўлган, яъни

$$u\big|_{x=0}=0, \quad u\big|_{x=l}=0, \tag{124}$$

$$u\big|_{t=0}=0 \tag{125}$$

ҳолни текширамиз.

Бу масаланинг ечимини

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{126}$$

кўринишда излаймиз, бунда (124) чегаравий шартлар ўз-ўзидан бажарилади. *f(x,t)* функцияни *x* нинг функцияси деб қараб, Фурье қаторига ёйилиши мумкин деб ҳисоблаймиз, яъни

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{127}$$

бу ерда

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

(126) қаторни (121) тенгламага қўйиб, (127) ни эътиборга олсак,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=0$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан,

$$T_n'(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t). \tag{128}$$

Бошланғич (125) шартга асосан,

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0.$$

$T_n(t)$ учун

$$T_n(0)=0 \tag{129}$$

бошланғич шарт ҳосил бўлади.

(128) тенгламанинг (129) шартни қаноатлантирувчи ечими

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \tag{130}$$

кўринишга эга бўлади. Буни (126) қаторга қўйиб, (121), (124), (125) масаланинг ечимини

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{131}$$

кўринишда ҳосил қиламиз. Агар бошланғич шарт нолга тенг бўлмаса, у ҳолда (131) ечимга бир жинсли (105) тенгламанинг берилган $u|_{t=0} = \varphi(x)$ бошланғич ва (124) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи, 1- бандда олинган ечимни қўшиб қўйиш керак.

Энди бошланғич ва чегаравий шартлар нолга тенг бўлмаган ҳолни кўрамиз. Бу (121), (122), (123) масалани юқорида кўрилган масалаларга осонликча келтириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам

$$u = \upsilon + w \tag{132}$$

деб ҳисоблаймиз, бунда $\upsilon(x,t)$ функция (105) тенгламанинг (122) чегаравий ва (123) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими, $w(x,t)$ функция (121) тенгламанинг (124), (125) шартларни қаноатлантирувчи ечими.

Равшанки, (132) йиғинди (121)—(123) масаланинг ечими бўлади.

Эслатиб ўтамиз, (121)—(123) масалада чегаравий шартларни умумийликка зарар етказмай, нолга тенг қилиб олиш мумкин. Бунинг учун $u(x,t)$ функция ўрнига

$$u(x,t) = \upsilon(x,t) + U(x,t)$$

тенглик билан янги $u(x,t)$ функция киритиш кифоядир, бунда

$$U(x,t) = \psi_1(t) + [\psi_2(t) - \psi_1(t)] \frac{x}{l}.$$

Маълумки, икки ўлчовли бир жинсли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

кўринишга эга бўлади.

Агар иссиқлик тўғри бурчакли пластинкада ёки доиравий цилиндрда тарқалаётган бўлса, у ҳолда биринчи чегаравий масала Фурье усули билан худди тўғри бурчакли мембрана ёки доиравий мембрананинг тебранишларини текширгандек ўрганилади. Бу масалаларни ечишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

VIII БОБ

ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШДА ҚЎЛЛАНИЛАДИГАН АЙРИМ БОШҚА УСУЛЛАР

1- §. Интеграл алмаштиришлар усули

1. Иккинчи тартибли чизиқли оддий дифференциал тенглама ечимларининг интеграл ифодаси. Ечимлари элементар функциялар орқали ёзиладиган дифференциал тенгламалар синфи жуда ҳам тор. Аввалги бобда биз хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ечимларини чексиз қатор йиғиндиси кўринишида ифодалашга ҳаракат қилдик. Баъзан текширилаётган тенгламанинг ечимини берилган функцияни ҳамда соддароқ тенгламанинг ечимини ўз ичига олган интеграл кўринишида топиш қулай бўлади.

Ушбу

$$L(y) = p(z)y'' + q(z)y' + r(z)y = 0 \qquad (1)$$

иккинчи тартибли чизиқли оддий дифференциал тенглама қаралаётган бўлиб, унинг коэффициентлари барча комплекс текисликда z комплекс ўзгарувчининг берилган аналитик функциялари бўлсин.

(1) тенгламанинг $y(z)$ ечимини

$$y(z) = \int_C K(z,\zeta)V(\zeta)d\zeta \qquad (2)$$

интеграл кўринишда излаймиз, бу ерда C — бўлакли силлиқ контур, $V(x)$ — ҳозирча номаълум аналитик функция, $K(z,\xi)$ эса

$$\begin{gathered} p(z)\frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + q(z)\frac{\partial K}{\partial z} + r(z)K = \\ = a(\zeta)\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2} + b(\zeta)\frac{\partial K}{\partial \zeta} + c(\zeta)K \end{gathered} \qquad (3)$$

тенгламани қаноатлантирувчи z, ζ ўзгарувчиларнинг аналитик функцияси, шу билан бирга $a(\xi)$, $b(\xi)$ ва $c(\xi)$ — берилган аналитик функциялар.

Қуйида бажариладиган барча амалларни қонуний деб фараз қилиб, (2) дан

$$L(y)=\int_C L(K)V(\zeta)d\zeta$$

ёки (3) га асосан,

$$L(y)=\int_C M(K)V(\zeta)d\zeta \tag{4}$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бу ерда M — дифференциал оператор:

$$M=a(\zeta)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}+b(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}+c(\zeta).$$

(4) ифодани бўлаклаб интеграллаб ҳамда интеграл ташқарисидаги барча қўшилувчиларни нолга тенг деб ҳисоблаб,

$$L(y)=\int_C K(z,\zeta)M^*(V)d\zeta \tag{5}$$

тенгликка эга бўламиз, бунда

$$M^*(V)=\frac{d^2}{d\zeta^2}(aV)-\frac{d(b)V}{d\zeta}+c(\zeta)V$$

— *M операторга қўшма бўлган дифференциал оператор.*

Агар $V(x)$ функция

$$M^*(V)=0 \tag{6}$$

тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда (2) формула билан тасвирланган $y(z)$ функция шубҳасиз (1) тенгламанинг ечими бўлади.

Мисол сифатида Бессел

$$z^2y''+zy'+(z^2-n^2)y=0 \tag{7}$$

тенгламасини қараймиз.

(7) тенгламанинг $y(z)$ ечимини (2) формула бўйича излаймиз, бунда

$$K(z,\xi)=\mp\frac{1}{\pi}e^{-iz\sin\zeta}.$$

Бу ҳолда

$$L(K) = z^2K_{zz} + zK_z + (z^2 - n^2)K = (-z^2\sin^2\zeta - iz\sin\zeta +$$
$$+ (z^2 - n^2))K(z,\zeta) \qquad (8)$$

Иккинчи томондан

$$K_{\zeta\zeta} = (iz\sin\zeta - z^2\cos^2\zeta)K(z,\zeta),$$

бундан

$$iz\sin\zeta\ K(z,\zeta) = K_{\zeta\zeta} + z^2\cos^2\zeta\ K(z,\zeta).$$

Буни (8) га қўйиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$L(K) = z^2K_{zz} + zK_z + (z^2 - n^2)K = -K_{\zeta\zeta} - \nu^2K.$$

Бунга асосан (4) ва (5) тенгликлар қуйидагича ёзилади:

$$L(y) = -\int_C \left(K_{\zeta\zeta} + \nu^2K\right)V(\zeta)\,d\zeta = \pm\frac{1}{\pi}\int_C \left(V_{\zeta\zeta} + \nu^2V\right)e^{-iz\sin\zeta}\,d\zeta.$$

Бу тенгликдан, (6) тенглама

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} + \nu^2V = 0$$

кўринишда ёзилиши келиб чиқади.

Охирги тенгламанинг ечими эса $e^{\pm in\zeta}$ дан иборатдир.

Шундай қилиб, (2) формула билан аниқланадиган функциялар, бунда

$$K(z,\zeta) = \pm\frac{1}{\pi}e^{-iz\sin\zeta}, \qquad V(\zeta) = e^{i\nu\zeta},$$

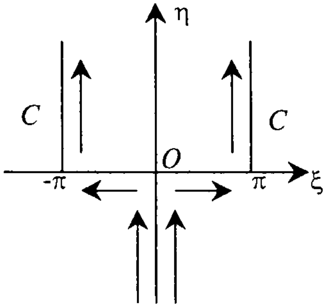
(7) Бессел тенгламасининг ечимлари бўлади.

Агар $\mathrm{Re}z > 0$ деб ҳисоблаб, (2) формулада интеграллаш йўли C сифатида, масалан,

$$\begin{aligned} &\xi = 0,\ -\infty < \eta \le 0; \\ &\eta = 0,\ -\pi \le \xi \le 0 \\ &\xi = -\pi,\ 0 \le \eta < \infty \end{aligned} \qquad (9)$$

ёки

$$\xi = 0,\ -\infty < \eta \le 0;$$



31- чизма

$$\eta = 0, \ -\pi \le \xi \le 0 \qquad (9')$$

$$\xi = \pi, \ 0 \le \eta < \infty, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

синиқ чизиқларни (31-чизма) олсак, юқорида бажарилган барча амаллар ўринли бўлади. Интеграллаш йўли C (9) синиқ чизиқ билан устма-уст тушиб, $K(z,\zeta) = -\frac{1}{\pi} e^{-iz\sin\zeta}$ бўлганда, $\mathrm{Re} z > 0$ ярим текисликда (2) формула билан аниқланган (7) тенгламанинг ечими учун қуйидаги

$$H_\nu^1(z) = -\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left(-iz\sin i\eta - \nu\eta\right)d\eta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{-\pi} \exp(-iz\sin\xi +$$

$$+i\nu\xi)d\xi - \frac{i}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(iz\sin i\eta - \nu\eta - \pi\nu i\right)d\eta \qquad (10)$$

белгилашни C йўл (9′) синиқ чизиқ билан устма-уст тушганда ва $K(z,\xi) = \frac{1}{\pi} e^{-iz\sin\zeta}$ бўлганда эса (31- чизма).

$$H_\nu^2(z) = -\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left(-iz\sin i\eta - \nu\eta\right)d\eta + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \exp\left(-iz\sin\xi + i\nu\xi\right)\times$$

$$\times d\xi + \frac{i}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(iz\sin i\eta - \nu\eta + \pi\nu i\right)d\eta \qquad (11)$$

белгилашни киритамиз. Ушбу

$$\sin i\eta = \frac{e^{-\eta} - e^{\eta}}{2i} = -\frac{\mathrm{sh}\,\eta}{i}$$

формулага асосан (10) ва (11) формулалар

$$H_\nu^1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{0} \exp(z\operatorname{sh}\eta - \nu\eta)\,d\eta + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \exp(-iz\sin\xi + i\nu\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{\infty} \exp(-z\operatorname{sh}\eta - \nu\eta - \pi\nu i)\,d\eta, \tag{12}$$

$$H_\nu^2(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{0} \exp(z\operatorname{sh}\eta - \nu\eta)\,d\eta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \exp(-iz\sin\xi + i\nu\xi)\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{0}^{\infty} \exp(-z\operatorname{sh}\eta - \nu\eta + \pi\nu i)\,d\eta \tag{13}$$

кўринишда ёзилади.

(12) ва (13) формулалар билан аниқланган (7) Бессел тенгламасининг ечимлари *Ханкел функциялари* дейилади, уларнинг

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{1}{2}\left[H_\nu^1(z) + H_\nu^2(z)\right], \\ Y_\nu(z) &= \frac{1}{2i}\left[H_\nu^1(z) - H_\nu^2(z)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

комбинациялари эса, бизга маълум бўлган Бессел ва Вебер функцияларидан иборатдир.

(12), (13) ва (14) тенгликларга асосан

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-iz\sin\xi + i\nu\xi)\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty} \exp(-z\operatorname{sh}\eta - \nu\eta)\left(e^{i\nu\pi} - e^{-i\nu\pi}\right)d\eta$$

ёки

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-iz\sin\xi + i\nu\xi)\,d\xi -$$

$$-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_{0}^{\infty} \exp(-z\operatorname{sh}\eta - \nu\eta)\,d\eta. \tag{15}$$

Агар $\nu = n$ бутун сон бўлса, (15) нинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчи нолга тенг бўлади ва

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-iz\sin\xi + i\nu\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \exp(-iz\sin\xi + i\nu\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \exp(-iz\sin\xi + i\nu\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left[\exp(iz\sin\xi - i\nu\xi) + \exp(-iz\sin\xi + i\nu\xi)\right]d\xi$$

тенглик келиб чиқади. Ушбу

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

формулага биноан

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(z\sin\xi - n\xi)\,d\xi$$

формулага эга бўламиз.

2. Лаплас, Фурье ва Меллин алмаштиришлари. Ҳақиқий t, $0 \le t \le \infty$, ўзгарувчининг ҳақиқий ёки комплекс $f(t)$ функцияси қуйидаги шартларни қаноатлантирсин: 1) чекли сондаги биринчи турдаги узилиш мумкин бўлган нуқталардан бошқа барча нуқталарда $f(t)$ узлуксиз, 2) шундай $M > 0$ ва $\xi_0 > 0$ ўзгармаслар мавжудки, барча t лар учун $|f(t)| < Ml^{\xi_0 t}$ тенгсизлик ўринли.

Бу шартлар бажарилганда

$$F(\zeta) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-\zeta t}dt \tag{16}$$

интеграл ҳақиқий қисми $\operatorname{Re}\zeta > \xi_0$ бўлган барча ζ лар учун мавжуд бўлиб, $\operatorname{Re}\zeta > \xi_0$ ярим текисликда $\zeta = \xi + i\eta$ комплекс ўзгарувчининг аналитик функциясидан иборат бўлади.

(16) формула билан аниқланган $F(\zeta)$ функция $f(t)$ функциянинг *Лаплас алмаштириши, тасвири* ёки *трансформанти* деб аталади, $f(t)$ нинг ўзи эса *оригинал функция* дейилади.

Лаплас алмаштириши қўлланилганда кўп ҳолларда $f(t)$ оригинал функцияни унинг тасвири $F(\zeta)$ билан ифодалашга тўғри келади.

Исбот қилинадики, агар: 1) $\mathrm{Re}\zeta > \xi_0$ *ярим текисликда* $F(\zeta)$ *аналитик функция,* 2) *ихтиёрий* $a > \xi_0$ *учун* $\mathrm{Re}\ \zeta \geq a$ *бўлганда* $\arg\zeta$ *га нисбатан*

$$\lim_{\zeta \to \infty} F(\zeta) = 0$$

лимит текис бўлса ва 3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(a + i\eta)\, d\eta$$

интеграл абсолют яқинлашса, у ҳолда (16) *га тескари алмаштириш мавжуд бўлиб, у*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a + i\eta)\, e^{(a+i\eta)t} d\eta \tag{17}$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда интеграл бош қиймат маъносида тушунилади.

Ушбу

$$g(t) = f(t)e^{-at}, G(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(a + i\eta)$$

белгилашларни киритсак, (16) ва (17) формулалар

$$G(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-i\eta t} g(t)\, dt, \tag{18}$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t} G(\eta)\, dt \tag{19}$$

кўринишда ёзилади.

(18) формула билан аниқланган $G(\eta)$ функция $g(t)$ функциянинг *Фурье алмаштириши* ёки *трансформанти* номи билан юритилади. Агар $-\infty < t < 0$ да $g(t) = 0$ бўлса, у ҳолда

(18) формуланинг ўнг томонидаги интегралнинг қуйи чегараси учун, равшанки, $-\infty$ ни олиш мумкин.

Агар $g(t)$ функция барча $-\infty < t < \infty$ да аниқланган бўлса-ю, аммо $-\infty < t < 0$ да нолга тенг бўлмаса, бу функциянинг Фурье алмаштириши деб

$$G(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta t} g(t)\, dt \qquad (20)$$

интегралга айтилади.

(20) Фурье алмаштиришнинг мавжуд бўлиши учун:

а) $g(t)$ функциянинг чекли сондаги экстремумларга эга бўлиши;

б) $g(t)$ нинг биринчи турдаги узилиши мумкин бўлган чекли сондаги нуқталардан ташқари барча нуқталарда узлуксиз бўлиши ва

в) $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt$

интегралнинг абсолют яқинлашувчи бўлиши етарлидир, шу билан бирга (20) *га тескари алмаштириш* (19) *формула билан аниқланади.*

Бу теореманинг исботига биз бу ерда тўхталиб ўтирмаймиз.

Ўзгарувчи η ни $-\eta$ га алмаштириш натижасида (19) *формулани Фурье алмаштиришининг бошланғич таърифи сифатида қабул қилиш мумкинлигига ишонч ҳосил қиламиз, бунинг учун* (20) *тескари алмаштиришдан иборат бўлади.*

$0 \le t < \infty$ оралиқда берилган $f(t)$ функциянинг *Меллин алмаштириши* деб

$$F(\xi) = \int_{0}^{\infty} t^{\varsigma-1} f(t)\, dt \qquad (21)$$

интегралга айтилади, бунда ζ — комплекс ўзгарувчи, $t^{\zeta-1}$ деганда бир қийматли

$$t^{\zeta-1} = e^{(\zeta-1)\ln t}$$

функция тушунилади, $\ln t$ эса бу функциянинг бош қиймати.

$\zeta = a - i\tau$ бўлганда (21) формуладаги интеграллаш ўзгарувчисини $t = e^{\xi}$ алмаштириш натижасида у формула

$$F(a - i\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{a\xi} e^{-i\tau\xi} f\left(e^{\xi}\right) d\xi \qquad (22)$$

кўринишда ёзилади.

$e^{a\xi} f(e^{\xi})$ функция Фурье алмаштиришининг мавжуд бўлиши учун етарли шартларни қаноатлантиради деб ҳисобласак, (22) дан (19) га асосан

$$e^{a\xi} f\left(e^{\xi}\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(a - i\tau) e^{-i\tau\xi} d\tau$$

тенгликка эга бўламиз ёки $t = e^{\xi}$ ўзгарувчига қайтсак,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(a - i\tau) t^{-(a-i\tau)} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(a + i\eta) t^{-(a+i\eta)} d\eta \qquad (23)$$

формулага эга бўламиз.

Шундай қилиб, (21) га тескари алмаштириш (23) формула билан аниқланади.

Бу формула баъзан

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} t^{-\varsigma} F(\zeta) d\zeta$$

кўринишда ҳам ёзилади.

Лаплас, Фурье, Меллин ва бошқа алмаштиришларнинг мунтазам назарияси амалий математика бўлимларидан биттасининг мазмунини ташкил қилади ва у *операцион ҳисоб* номи билан юритилади.

3. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар масалаларига интеграл алмаштиришларни қўллаш. Биз юқорида (1) оддий дифференциал тенгламанинг ечимини (2) интеграл кўринишда излаганимизда унинг ядроси $K(z,\xi)$ (3) хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани қаноатлантирар эди. 1- бандда биз (3) тенгламанинг аниқ $K(z,\xi)$ ечимини олиб, унинг ёрдамида (1) тенгламанинг ечимини тузган эдик. Энди, маълум маънода, тескари иш қилишга ҳаракат қиламиз. Коэффициентлари фақат фазовий x ўзгарувчига боғлиқ бўлган

$$a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c(x)\frac{\partial u}{\partial x}+d(x)\frac{\partial u}{\partial t}+e(x)u=0 \tag{24}$$

чизиқли хусусий ҳосилали тенгламанинг $0<x<l,\ t>0$ ярим полосада регуляр, $0\le x\le l,\ t\le 0$ да узлуксиз,

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \tag{25}$$

бошланғич ва

$$u(0,t)=f_1(t),\ \ u(l,t)=f_2(t) \tag{26}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Фараз қилайлик, (24) тенглама ечимларининг синфи ва комплекс ζ параметр шундай танланганки,

$$V(x,\varsigma)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-\varsigma t}dt \tag{27}$$

$$F_1(\zeta)=\int_0^\infty u(0,t)e^{-\zeta t}dt,\ \ F_2(\zeta)=\int_0^\infty u(l,t)e^{-\zeta t}dt \tag{28}$$

интеграллар мавжуд ва қуйида бажарилган амаллар ўринли бўлсин:

$$\frac{dV(x,\zeta)}{dx}=\int_0^\infty\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}e^{-\varsigma t}dt,\qquad \frac{dV^2(x,\zeta)}{dx^2}=\int_0^\infty\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}e^{-\varsigma t}dt \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-\xi t}dt&=\varsigma\int_0^\infty u(x,t)e^{-\varsigma t}dt+\left.u(x,t)e^{-\varsigma t}\right|_0^\infty=\\&=\varsigma V(x,\varsigma)-u(x,0),\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}e^{-\xi t}dt&=\varsigma\int_0^\infty\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\varsigma t}dt+\left.e^{-\varsigma t}\frac{\partial u}{\partial t}\right|_0^\infty=\\&=\varsigma^2V(x,\xi)-\varsigma u(x,0)-\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}.\end{aligned} \tag{31}$$

(24) тенгламанинг ҳар икки томонини $e^{-\varsigma t}$ га кўпайтириб, t бўйича $t=0$ дан $t=\infty$ гача интеграллаймиз. У ҳолда, (25)—(31) тенгликларга асосан

$$a\frac{d^2V(x,\varsigma)}{dx^2}+c\frac{dV(x,\varsigma)}{dx}+\left(e+d\varsigma+b\varsigma^2\right)V(x,\varsigma)=$$
$$=b\varphi(x)\varsigma+b\psi(x)+d\varphi(x), \tag{32}$$

$$V(0,\xi)=F_1(\xi x), \quad V(l,\xi)=F_2(\xi)\,. \tag{33}$$

Шундай қилиб, (24), (25), (26) *аралаш масалани ечиш (32) оддий дифференциал тенглама учун* (33) *чегаравий масаланинг $V(x,\xi)$ ечимини топишга олиб келинди.*

(32), (33) масала ечимининг мавжудлиги ҳамма вақт ҳам (27) Лаплас алмаштиришига тескари алмаштиришнинг ҳатто борлигига кафолат беролмайди.

Агар (32), (33) масала (27) Лаплас алмаштиришига тескари

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V(x,a+i\eta)e^{(a+i\eta)t}d\eta \tag{34}$$

алмаштиришни таъминловчи $V(x,\xi)$ ечимга эга, шу билан бирга бу ечим ягона бўлса, (24), (25), (26) масала, равшанки, биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди. Агарда (34) формула билан ифодаланган $u(x,t)$ функция ўзининг иккинчи тартибгача ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлса, у (24), (25), (26) масаланинг изланаётган ечими бўлади.

$u(x,t)$ функцияни (34) фомула билан топиш анча катта ҳисоблашларни бажаришни талаб қилади, шу туфайли физикада хусусий ҳосилали тенгламалар учун аниқ масалалар ечилганда Фурье алмаштиришидан фойдаланиш афзал кўрилади, бунинг устига, Фурье алмаштиришининг тескариси мавжуд бўлиши учун етарли шартларнинг бажарилиши тўла табиий ҳисобланади.

4. Тор тебраниш тенгламаси учун Коши масаласини ечишда Фурье алмаштиришини қўллаш. Тор тебраниши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{35}$$

тенгламасининг $t>0$ ярим текисликда

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \tag{36}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин, бунда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ — берилган етарли силлиқ функциялар.

Фараз қилайлик, $u(x,t)$ функция ва унинг иккинчи тартибгача ҳосилалари узлуксиз ва улар $x^2+t^2\to\infty$ да нолга шундай интилсинки, Фурье

$$V(t,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-ix\xi}dx \tag{37}$$

алмаштириши маънога эга бўлиб, қуйидаги амаллар қонуний бўлсин:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2u(\tau,t)}{\partial\tau^2}e^{-i\tau\xi}d\tau=-\frac{\xi^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau,t)e^{-i\tau\xi}d\tau=-\xi^2V(t,\xi), \tag{38}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2u(\tau,t)}{\partial t^2}e^{-i\tau\xi}d\tau=\frac{d^2V(t,\xi)}{dt^2}, \tag{39}$$

$$\begin{aligned}V(0,\xi)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)e^{-ix\xi}dx=\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ix\xi}dx=\Phi(\xi),\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV(t,\xi)}{dt}\right|_{t=0}&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}e^{-ix\xi}dx=\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-ix\xi}dx=\Psi(\xi),\end{aligned} \tag{41}$$

бу ерда $\Phi(\xi)$ ва $\Psi(\xi)$ – $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларнинг мос Фурье алмаштиришлари, (35) тengламанинг ҳар икки томонини $e^{-ix\zeta}$ га кўпайтириб, x бўйича $-\infty$ дан ∞ гача интеграллаймиз, у ҳолда (38) — (41) га асосан

$$V_{tt}(t,\xi)+a^2\xi^2V(t,x)=0, \tag{42}$$

$$V(0,\xi)=\Phi(\xi), V_t(0,\xi)=\Psi(\xi). \tag{43}$$

(42) оддий дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$V(t, \xi) = c_1(\xi)e^{ia\xi t} + c_2(\xi)\ e^{-ia\xi t} \qquad (44)$$

кўринишга эга бўлади, бунда c_1 ва c_2 — ξ параметрнинг ихтиёрий функциялари, t га нисбатан эса ўзгармаслар.

(43) ва (44) га асосан

$$c_1 + c_2 = \Phi(\xi), c_1 - c_2 = \frac{1}{ia\xi}\Psi(\xi),$$

бундан

$$c_1 = \frac{1}{2}\Phi(\xi) + \frac{\Psi(\xi)}{2ia\xi}, \quad c_2 = \frac{1}{2}\Phi(\xi) - \frac{1}{2ia\xi}\Psi(\xi).$$

c_1 ва c_2 нинг бу қийматларини (44) нинг ўнг томонига қўйиб, (42) тенгламанинг (43) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи

$$V(t,\xi) = \frac{1}{2}\Phi(\xi)\left(e^{ia\xi t} - e^{-ia\xi t}\right) + \frac{1}{2ia\xi}\Psi(\xi)\left(e^{ia\xi t} - e^{-ia\xi t}\right) \qquad (45)$$

ечимини ҳосил қиламиз.

(19) формуладан фойдалансак, (37) Фурье алмаштиришига тескари алмаштириш

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} V(t,\tau)e^{i\tau x}d\tau$$

кўринишда ёзилади, ёки (45) га асосан

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ia\tau t} + e^{-ia\tau t}\right)e^{i\tau x}\Phi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ia\tau t} - e^{-ia\tau t}\right)e^{i\tau x}\frac{\Psi(\tau)}{i\tau}\,d\tau = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\tau(x+at)} + e^{i\tau(x-at)}\right]\times \qquad (46)$$
$$\times\Phi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\tau(x+at)} - e^{i\tau(x-at)}\right]\frac{\Psi(\tau)}{i\tau}\,d\tau.$$

(19) формулага асосан, (40) ва (41) тенгликлар қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\tau)e^{i\xi\tau}d\tau,$$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) e^{i\xi\tau} d\tau,$$

демак,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau(x+at)} \Phi(\tau) d\tau = \varphi(x+at),$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau(x-at)} \Phi(\tau) d\tau = \varphi(x-at), \tag{47}$$

ҳамда

$$\int_{x-at}^{x+at} e^{i\xi\tau} d\xi = \frac{1}{i\tau} e^{i\xi\tau} \Big|_{x-at}^{x+at} = \frac{1}{i\tau}\left[e^{i\tau(x+at)} - e^{i\tau(x-at)}\right]$$

тенгликка асосан

$$\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\tau)}{\tau}\left[e^{i\tau(x+at)} - e^{i\tau(x-at)}\right] d\tau =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) d\tau \int_{x-at}^{x+at} e^{i\tau\xi} d\xi = \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \tag{48}$$

(47) ва (48) тенгликларга биноан (46) формуладан (35), (36) масаланинг бизга маълум бўлган

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

Даламбер ечимига эга бўламиз.

5. Йиғма тушунчаси. $-\infty < x < \infty$ оралиқда берилган *f(x)* ва *φ(x)* функцияларнинг $f * \varphi$ *йиғмаси* деб

$$f * \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(x-t) dt \tag{49}$$

интегралга айтилади.

Агар

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\xi} dt, \quad \Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-it\xi} d\xi \tag{50}$$

Фурье алмаштиришлари ва уларга тескари

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{it\xi}d\xi,\quad \varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)e^{it\xi}d\xi \tag{51}$$

алмаштиришлар мавжуд бўлса, у ҳолда (49) *йиғмани*

$$f*\varphi=\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)\Phi(\xi)e^{it\xi}d\xi \tag{52}$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, (51) дан

$$\varphi(x-t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)e^{i\xi(x-t)}d\xi,$$

бу ифодани (49) формуланинг ўнг томонига олиб бориб қўямиз:

$$f*\varphi=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)e^{i\xi(x-t)}d\xi.$$

Бундан, интеграллаш тартибини ўзгартириш мумкин деб ҳисоблаб,

$$f*\varphi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)e^{ix\xi}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-it\xi}dt$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи интегрални $F(\xi)$ билан алмаштириб, (50) га асосан, (52) формулани ҳосил қиламиз.

Фурье алмаштиришидан фойдаланиб, йиғма учун (49) ва (52) формулаларга асосан, иссиқлик ўтказувчанлик

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{53}$$

тенгламасининг $t>0$ ярим текисликда,

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{54}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи, V бобнинг 2- § идаги 3- бандидан бизга маълум бўлган

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi \tag{55}$$

ечимини келтириб чиқариш қийин эмас.

Ҳақиқатан ҳам, фараз қилайлик $u(x,t)$, $\varphi(x)$ функциялар етарли силлиқ бўлсин ҳамда $x^2+t^2\to\infty$ да шундай тез нолга интилсинки, ушбу

$$V(t,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\xi x}dx, \tag{56}$$

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{i\xi x}dx \tag{57}$$

Фурье алмаштиришлари мавжуд бўлиб, қуйидаги амаллар ўринли бўлсин:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-i\xi x}dx=\frac{dV(t,\xi)}{dt}, \tag{58}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}e^{-i\xi x}dx&=\frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}e^{-i\xi x}dx=\\&=-\frac{\xi^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\xi x}dx=-\xi^2V(t,\xi).\end{aligned} \tag{59}$$

(53) тенгламани $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\xi x}$ га кўпайтириб, x бўйича $-\infty$ дан ∞ гача интеграллаймиз, (54), (56)—(59) га асосан

$$\frac{dV}{dt}+a^2\xi^2V=0, \tag{60}$$

$$V(0,\xi)=\Phi(\xi) \tag{61}$$

га эга бўламиз. (60) тенгламани

$$\frac{dV}{V}=-a^2\xi^2dt$$

кўринишда ёзиб олиб, интегралласак, дарҳол унинг

$$V(t,\xi)=ce^{-a^2\xi^2t}$$

умумий ечимини ҳосил қиламиз, бунда c – ξ нинг ихтиёрий функцияси. (61) га асосан $c = \Phi(\xi)$.

Шундай қилиб, (60) тенгламанинг (61) шартни қаноатлантирувчи ечими

$$V(t,\xi) = \Phi(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}$$

функциядан иборат. $V(t,x)$ функциянинг бу қийматини (56) формулага қўямиз:

$$\Phi(\xi)e^{-a^2\xi^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\xi x}dx. \qquad (62)$$

(19) формулага асосан (62) га тескари алмаштириш қуйидагича бўлади:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi)e^{-a^2\xi^2 t + i\xi x}d\xi. \qquad (63)$$

Интеграл алмаштиришлар жадвалидан $t > 0$ бўлганда ξ га нисбатан $e^{-a^2\xi^2 t}$ функциянинг Фурье алмаштириши

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\xi^2 t}e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

функция эканлигини топиб оламиз.

(49) ва (52) формулаларни $f * \varphi$ йиғма учун қўллаб, (63) дан ушбу

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)f(x-\xi,t)d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу эса, (55) формуланинг ўзгинасидир.

6. Диракнинг δ - функцияси тўғрисида тушунча. Шу параграфнинг 2-бандида $g(x)$ функцияга Фурье алмаштиришининг мавжудлигини таъминловчи шартлар қўйилган эди. Афсуски, функцияларнинг етарли кенг синфи учун Фурье алмаштириши маънога эга бўлмай қолади. Масалан, ҳатто $G(x) = \text{const} \neq 0$ бўлган ҳолда (19) нинг ўнг томонидаги интеграл яқинлашувчи бўлмайди. Шунга қарамасдан, $G=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ўзгармасдан Фурье алмаштириши мавжудлигининг қоидаси берилади, у таърифга асосан, *Дирακнинг δ- функцияси* деб аталувчи

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}d\xi \tag{64}$$

функцияни беради.

Худди шундай (64) га тескари алмаштириш мавжудлигининг қоидаси берилади:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)e^{-ix\xi}d\xi \tag{65}$$

ёки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)e^{-ix\xi}d\xi=1.$$

Фараз қилайлик, $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, функция ўзаро тескари

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-ix\xi}d\xi, \tag{66}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{67}$$

алмаштиришлар мавжуд бўлиши учун етарли шартларни қаноатлантирсин.

(49), (52), (65), (66) ва (67) тенгликларга асосан, $f*\delta$ йиғма учун ушбу

$$f*\delta=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(x-t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x-t)\xi}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-it\xi}dt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{ix\xi}d\xi=f(x)$$

ифода ўринли.

Шундай қилиб, биз муҳим хулосага келдик: *$f * \delta$ йиғма f функциянинг x нуқтадаги қийматини беради:*

$$f * \delta = f(x). \tag{68}$$

Бу формула, квант механикасида учрайдиган катта ҳисоблашларни анчагина осонлаштиради. Хусусан, $f(x) = 1$, $-\infty < x < \infty$, бўлган ҳолда (68) ва (49) га асосан,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \tag{69}$$

тенгликка эга бўламиз.

Айрим ҳолларда Диракнинг δ - функцияси, (69) тенгликнинг ўринли бўлишини талаб қилиб, нолдан фарқли барча t лар учун нолга тенг ва $t = 0$ бўлганда ∞ га тенг функция сифатида таърифланади.

δ - функциянинг бундай таърифи математик анализнинг оддий классик тушунчалари доирасига мос келмайди.

Диракнинг δ - функцияси иштирокида юқорида бажарилган амалларнинг жиддий математик асосланиши умумлашган функцияларнинг ҳозирги замон назариясида берилади.

2- §. Чекли айирмалар усули

1. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни чекли айирмалар билан алмаштириш. Математик физика масалалари ечимларининг аналитик ифодасини топиш мумкин бўлмаган ҳолларда уларнинг тақрибий ечимларини топишга тўғри келади. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг тақрибий ечимларини топиш усулларидан бири *чекли айирмалар усули* ёки *тўрлар усули* деб аталувчи усулни қуйида қисқача баён қиламиз.

Хусусий ҳосилали иккинчи тартибли икки ўзгарувчили

$$\begin{gathered} a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + e(x,y)u = f(x,y) \end{gathered} \tag{70}$$

тенглама бирор D соҳада берилган бўлсин. x, y ларни ортогонал декарт координаталар деб ҳисоблаб, x, y ўзгарувчилар текислигини

$$x = mh,\ y = nh,\ m,n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

квадрат тўрлар билан қоплаймиз, бунда h — берилган мусбат сон. Бу тўр ҳар бир квадратининг учлари *тугунлар, ёки тугун нуқталар,* h эса, *қадам* дейилади.

Хусусий ҳосиланинг таърифига биноан, бешта (x,y), $(x-h,y)$, $(x+h,y)$, $(x,y-h)$, $(x,y+h)$ нуқта D соҳага тегишли бўлганда, ҳар бир (x,y) тугунда ҳосилаларни тақрибий

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \approx \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h},\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \approx \frac{u(x,y)-u(x,y-h)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} - \frac{u(x,y)-u(x-h,y)}{h}\right] =$$

$$= \frac{u(x+h,y)+u(x-h,y)-2u(x,y)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \approx \frac{u(x,y+h)+u(x,y-h)-2u(x,y)}{h^2}$$

қийматлари билан алмаштириш мумкин.

Демак, хусусий ҳосилали (70) тенгламани юқорида кўрсатилган ҳар бир тугунда $u(x,y)$, $u(x-h,y)$, $u(x+h,y)$, $u(x,y-h)$, $u(x,y+h)$ ларга нисбатан тақрибий чизиқли алгебраик тенглама

$$\begin{aligned} &a(x,y)\,[u(x+h,y)+u(x-h,y)-2u(x,y)] + \\ &+ b(x,y)\,[u(x,y+h)+u(x,y-h)-2u(x,y)] + \\ &+ch\,[u(x,y)-u(x-h,y)] + dh\,[u(x,y)-u(x,y-h)] + \\ &+ h^2 e(x,y)u(x,y) = h^2 f(x,y) \end{aligned} \tag{71}$$

билан алмаштиришга ҳаққимиз бор. (x,y) нуқта D соҳага тегишли тугунларни босиб ўтганда, бу тугунлардаги $u(x,y)$ нинг қийматларига нисбатан, (71) ўрнига чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системага кирган миқдорларнинг айримлари ёки (71) системага боғлиқ бўлмаган ҳолда бошланғич ва чегаравий шартларга асосан аниқланади ёки улар (71) га қўшимча чизиқли алгебраик тенгламаларни келтириб чиқаради, булар (71) билан бирга барча дастлабки масаланинг тақрибий тўрлар билан алмашувини ташкил қилади.

Шундай қилиб, ҳосил қилинган чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечими берилган масаланинг тақрибий ечими сифатида қабул қилинади.

2. Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласи. Чегараси S бўлган D соҳада Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{72}$$

учун Дирихле масаласининг

$$u(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in S \tag{73}$$

тақрибий ечими тўрлар усули билан топилсин.

Бу ҳолда (71) система

$$\begin{aligned} &u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + \\ &+ u(x,y-h) - 4u(x,y) = 0 \end{aligned} \tag{74}$$

кўринишга эга бўлади.

Q_ε орқали D да ётувчи тўрнинг шундай квадратлари тўпламини белгилаймизки, уларнинг учларидан ҳеч бўлмаганда биттаси S дан аввалдан берилган $\varepsilon > h$ сондан катта бўлмаган масофада ётсин (32- чизма).

Q_ε га кирган квадратларнинг ҳар бир учидаги u нинг қийматини шу учига энг яқин турган чегаравий нуқтадаги изланаётган гармоник функциянинг берилган (73) функция қийматига тенг деб ҳисоблаймиз (агарда бундай нуқталар S да бир нечта бўлса, у ҳолда φ нинг бу нуқталардаги берилган қийматларидан бирортаси ихтиёрий танлаб олинади ва унга $u(x,y)$ тенглаштирилади). Бу билан Q_ε га кирган ҳамма тугун нуқталарда u нинг тақрибий қийматлари маълум бўлади.

Энди Q_ε га кирмаган тугун нуқталарда u ни топиш қолади. Q_ε га кирмаган ички тугун нуқталар сони N та бўлсин. j - нуқтадаги u нинг қийматини u_j орқали, ҳар бир тенгламадаги Q_ε га тегишли тугунлардаги u ларнинг қийматлари тўпламини f_i орқали белгилаб, уларни тенгламанинг ўнг томонига ўтказиб ёзсак, (74) система

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j = f_i \qquad (i = 1, 2, ..., N) \tag{75}$$

кўринишда ёзилади (32- чизма).

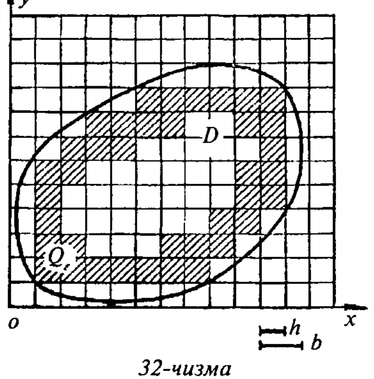
(74) ёки (75) тенгламалар системаси ҳамма вақт ягона ечимга эга бўлади.

Олий алгебрадан маълумки, бир жинсли бўлмаган (75) системанинг ҳар қандай f_i лар учун бирдан-бир ечимга эга эканлигини кўрсатиш учун унга мос бир жинсли

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., N) \tag{76}$$

система фақат тривиал, яъни нолга тенг ечимга эга эканлигини кўрсатиш кифоядир. Фараз қилайлик, (76) система нолга тенг бўлмаган ечимга эга бўлсин. B орқали $|u_j|$ $(j = 1, 2, ..., N)$ сонлардан энг каттасини белгилаб оламиз. Фаразимизга асосан B нолдан катта. Умумийликка зиён етказмай B сон u_j ларнинг бирортасига тенг деб ҳисоблашимиз мумкин, чунки u_j лардан бирортаси — B га тенг бўлганда барча u_j ларнинг ишорасини тескарисига алмаштириш натижасида аввалги ҳолга келади.

$u_{j0} = B$ бўлсин. j_0 нуқтадаги u_{j0} нинг қиймати тўртта қўшни тугун нуқталардаги u_j қийматларининг ўрта арифметик қийматига тенг бўлгани учун бу қўшни нуқталардаги u_j ларнинг қиймати B дан кичик бўла олмайди, u_j нинг тўртта нуқтадаги қийматлари йиғиндисининг тўртга бўлингани B га тенг бўлиши учун уларнинг ҳар бирида $u_j = B$ бўлиши керак. Бу қўшни тугун нуқталарнинг ҳар бирига қўшни тугун нуқталарга нисбатан ҳам шундай мулоҳазаларни юритиш мумкин.



32-чизма

Бу жараённи давом эттириб, барча ички тугун нуқталарда ва бу нуқталарга қўшни бўлган Q_ε тугун нуқталарида ҳам $u_j = B$ бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. У ҳолда барча f_i лар бир вақтда нолга тенг бўлмай қолади (чунки f_i лар Q_ε нинг тугунларидаги u_j лар қийматларининг комбинациясини тескари ишораси билан ўнг томонга ўтказилганига тенгдир). Бу эса барча (76) тенгламаларнинг ўнг томонлари нолга тенглигига қарама-қаршидир. Демак, бизнинг фаразимиз нотўғри, (75) тенгламалар системаси ягона ечимга эгадир.

Агар $u(x,y)$ (72), (73) *масаланинг аниқ ечими бўлса, у ҳолда $\varepsilon > 0$ ни етарли кичик танлаб, h ни етарли кичиклаштириш натижасида* (74) *системанинг ечими $u(x,y)$ дан жуда ҳам оз фарқ қилишини кўрсатиш мумкин.*

Биз бу фикрнинг исботини келтирмай, чекли айирмалар тенгламаларининг ечиш усулларига тўлароқ тўхталиб ўтамиз.

Чегаравий масалани чекли айирмалар усули билан ечиш жуда кўп номаълумли алгебраик тенгламалар системасини ечишга олиб келади. Бундай системани детерминантлар назарияси усули билан ечиш ниҳоятда техник қийинчиликларни туғдиради. Шунинг учун ҳам кетма-кет яқинлашиш усули билан ечиш анчагина қулай ҳисобланади. Аввало $u_1, u_2, \ldots, u_N$ ларнинг ихтиёрий қийматини оламиз ва бу қийматларни $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots, u_N^{(0)}$ орқали белгилаб, уларни (74) система ечимига нолинчи яқинлашиш деймиз. Кейинги яқинлашишларнинг топиш усулини баён қилиш учун барча $u_k^{(0)}$ лар тўрни мос тугунларида ёзилган деб тасаввур қилиш қулайдир.

Биринчи яқинлашишни (74) га асосан тузамиз, яъни биринчи тугун нуқтада $u_1^{(0)}$ нинг қийматини ўчириб, унинг ўрнига биринчи тугун нуқтага қўшни бўлган тўртта тугун нуқталардаги $u_k^{(0)}$ лар қийматларининг ўрта арифметик қийматиги тенг бўлган $u_1^{(1)}$ ни ёзамиз. Сўнгра иккинчи тугун нуқтада ёзилган $u_2^{(0)}$ нинг қийматини ўчириб, уни $u_2^{(1)}$ сон билан алмаштирамиз, бу сон учун ҳам тўртта қўшни нуқталардаги қийматларнинг ўрта арифметик қиймати олинади (булардан биттасида $u_1^{(1)}$ бўлиб қолиши ҳам мумкин) ва ҳ.к. Шу йўсинда барча ички тугун нуқталарни айланиб ўтиб, буларда $u_k^{(1)}$ $(k = 1, \ldots, N)$ ларнинг қийматини топамиз. $u_k^{(1)}$ лар $u_k^{(0)}$ лардан қандай топилган бўлса, иккинчи $u_k^{(2)}$ $(k = 1, \dots, N)$ яқинлашишнинг қийматлари ҳам $u_k^{(1)}$ лардан худди шундай топилади. Шу тарзда $u_k^{(3)}$, $u_k^{(4)}$, ... лар ҳам ҳосил қилинади.

Агар u_k (74) тенгламанинг аниқ ечими бўлса, $n \to \infty$ да барча $k(k = 1, \dots, N)$ лар учун

$$u_k^{(n)} \to u_k.$$

Буни исбот қилиш учун

$$u_k^{(n)} - u_k = \upsilon_k^{(n)}$$

деб белгилаймиз.

Биз $n \to \infty$ да $\upsilon_k^{(n)} \to 0$ бўлишини кўрсатишимиз керак. Аввало шуни укдириб ўтамизки, $u_k^{(n+1)}$ лар $u_k^{(n)}$ лардан қандай ҳосил бўлган бўлса, $\upsilon_k^{(n+1)}$ сонлар ҳам $\upsilon_k^{(n)}$ лардан худди шундай ҳосил бўлади, яъни $\upsilon_k^{(n+1)}$ лар k — тугун нуқтага қўшни бўлган тўртта тугун нуқтадаги $\upsilon_k^{(n)}$ қийматларининг ўрта арифметик қийматига тенг, шу билан бирга, агар қўшни тугун нуқталардан биттаси чегаравий нуқта ёки Q_ε даги тугун нуқталар билан устма-уст тушса, бу нуқтада $\upsilon_k^{(n)}$ нолга тенг бўлади. Шунинг учун, агар

$$\max\left\{\left|\upsilon_1^{(0)}\right|, \left|\upsilon_2^{(0)}\right|, \dots, \left|\upsilon_n^{(0)}\right|\right\} = A$$

десак, у ҳолда биринчи тугун нуқтага қўшни бўлган тугун нуқталардан ҳеч бўлмаганда биттаси чегаравий тугун нуқта бўлгани учун

$$\left|\upsilon_1^{(1)}\right| \le \frac{3}{4} A$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш

$$\left|\upsilon_2^{(1)}\right| \le \frac{\frac{3}{4}A + A + A + A}{4} = \frac{15A + A - A}{4^2} = \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) A,$$

$$\left|\upsilon_3^{(1)}\right| \le \left(1 - \frac{1}{4^3}\right) A, \dots,$$

$$\left|\upsilon_N^{(1)}\right| \le \left(1 - \frac{1}{4^N}\right) A = \alpha A, \quad \alpha = 1 - \frac{1}{4^N} < 1.$$

Шунингдек, барча n ва k лар учун

$$\left|\upsilon_K^{(n)}\right| \le \alpha^n A \qquad (\alpha < 1)$$

бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, охирги тенгсизликни математик индукция усули билан исботлаймиз. $|\upsilon_k^{(n-1)}| \le \alpha^{n-1}A$ бўлсин, у ҳолда

$$\left|\upsilon_K^{(n)}\right| \le \tfrac{3}{4}\alpha^{n-1}A \le \left(1-\tfrac{1}{4^N}\right)\alpha^{n-1}A = \alpha^n A \qquad (\alpha < 1)\cdot$$

Бу ерда тугун нуқтага қўшни нуқталардан бири чегаравий ёки Q_ε даги нуқта бўлиб қолиши эътиборга олинди.

Охирги тенгсизликдан $n \to \infty$ да $\upsilon_k^{(n)} \to 0$ бўлиши дарҳол келиб чиқади. Назарий жиҳатдан бу муносабат нолинчи яқинлашишни ихтиёрий танлашда ўринли бўлади. Аммо амалиётда бу яқинлашиш (74) системанинг аниқ ечимига яқинроқ бўлиши учун нолинчи яқинлашиш Дирихле масаласининг аниқ ечимидан катта фарқ қилмайдиган сонларни танлаб олиш маъқулроқ бўлади.

Кетма-кет яқинлашиш жараёни n нинг шундай қийматларида узилиб қоладики, бунда $u_k^{(n)}$ ларнинг қийматлари n нинг ўсиши билан сезиларли ўзгармай қолади.

Бу $u_k^{(n)}$ лар (74) системанинг тақрибий ечими деб қабул қилинади.

3. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масала. Иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{77}$$

ҳосилаларни тақрибий алмаштириш натижасида ушбу

$$\begin{gathered} a^2u(x+h,t)+a^2u(x-h,t)-2a^2u(x,t)+ \\ +hu(x,t-h)-hu(x,t)=0 \end{gathered} \tag{78}$$

кўринишга эга бўлади. D орқали x,t ўзгарувчилар текислигининг $t=0,\ \ t=H,\ \ H>0$ тўғри чизиқлар билан OA ва BN кесмалари ва $t=\text{const}$ тўғри чизиқлар билан биттадан ортиқ нуқтада кесишмайдиган силлиқ OB ва AN эгри чизиқлар билан чегараланган соҳани белгилаймиз. S D соҳа чегарасининг OB, OA ва AN лардан иборат бўлган қисми бўлсин.

Аввалги банддагидай D соҳани тўрлар билан қоплаймиз. D соҳада (77) тенгламанинг тақрибий ечимини излашда

$$u(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in S$$

чегаравий шартни ҳисобга олиш мақсадида ёпиқ $\bar{D}$ соҳадан чиқиб кетмаган тўр квадратларнинг тўпламини Q_h орқали, бунинг чегарасини эса ∂Q_h орқали белгилаб оламиз.

q_h — BN кесмага ёндашувчи юқори қатор ички квадратларидан ташқари, учларидан камида биттаси ∂Q_h да ётувчи Q_h квадратларнинг тўплами бўлсин (33- чизма).

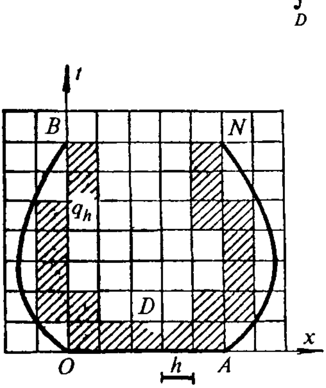
q_h квадратларининг учлари бўлган (x,t) тугунларда $u(x,t)$ учун бу тугунга энг яқин бўлган S нинг нуқтасидаги f нинг қийматини қабул қиламиз. D да ётувчи бошқа нуқталардаги $u(x,t)$ нинг номаълум қийматларини (78) чизиқли алгебраик системани ечиш натижасида топамиз.

3- §. Вариацион усуллар тўғрисида тушунча

Маълумки, вариацион ҳисоб функционалларнинг экстремум қийматларини топиш билан шуғулланувчи математиканинг бўлимидир.

Бирор D соҳа бўйича олинган

$$J=\int_D F\left(x,y,u,u_x,u_y\right)dxdy \tag{79}$$



(33- чизма)

интегрални, яъни функционални қараймиз.

Асосий масала D соҳада ўзининг иккинчи тартибгача ҳосилалари билан бирга узлуксиз, соҳанинг чегарасида берилган қийматларга эга бўлган ва (79) функционалга экстремум қиймат берувчи $u(x,y)$ функцияни топишдан иборат.

Вариацион ҳисоб курсида исботланадики, (79) функционалга экстремум қиймат берувчи $u(x,y)$ функция *Эйлер тенгламаси* деб аталувчи

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0 \qquad (80)$$

тенгламани қаноатлантириши зарурдир.

1. Дирихле принципи. Бир қатор ҳолларда татбиқ этишда учрайдиган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар *вариацион масала учун Эйлер тенгламасидан* иборат бўлади. Масалан, чегараси S бўлган D соҳа бўйича олинган

$$D(u) = \int_D \left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy \qquad (81)$$

Дирихле интегралининг минимум масаласи учун, (80) га асосан, Эйлер тенгламаси вазифасини $\Delta u(x,y) = 0$ Лаплас тенгламаси бажаради.

$D \cup S$ да узлуксиз, D да биринчи тартибли бўлак-бўлак узлуксиз ҳосилаларга ва чекли Дирихле интегралига эга бўлган, S да аввалдан берилган $\varphi(x,y)$ қийматларни қабул қилувчи функцияларни *мумкин бўлган функциялар* деб атаймиз.

D соҳада гармоник, $D \cup S$ да узлуксиз ва

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in S \qquad (82)$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функцияни топиш тўғрисидаги Дирихле масаласи билан мумкин бўлган функциялар орасидан (81) Дирихле интегралига минимум қиймат берувчи функцияни излаш ҳақидаги *биринчи вариацион масала* ўртасида яқин боғланиш мавжуд.

Агар S да берилган $\varphi(x,y)$ функция шундай бўлсаки, мумкин бўлган функциялар синфи бўш бўлмаса, у ҳолда Дирихле масаласи ва биринчи вариацион масала эквивалент бўлади.

Бу фикрнинг тўғрилигини айрим қўшимча фаразлар бажарилганда кўрсатамиз. $u(x,y)$ — биринчи вариацион масаланинг ечими бўлсин. Мумкин бўлган функциялар синфини $u(x,y) + \varepsilon\, h(x,y)$ кўринишда тасвирлаймиз, бунда ε — ихтиёрий ўзгармас, $h(x,y)$ эса

$$h(x,y) = 0, \quad (x,y) \in S \qquad (83)$$

шартни қаноатлантирувчи мумкин бўлган функциялар синфидан ихтиёрий функция. Равшанки,

$$D(u+\varepsilon h)=\int_D\left[(u+\varepsilon h)_x^2+(u+\varepsilon h)_y^2\right]dxdy=$$
$$=D(u)+2\varepsilon D(u,h)+\varepsilon^2 D(h)\geq 0, \tag{84}$$

бу ерда

$$D(u,h)=\int_D\left(u_xh_x+u_yh_y\right)dxdy.$$

(84) тенгликнинг чап томонини вақтинча ε нинг функцияси сифатида $G(\varepsilon)$ орқали белгиласак, $u(x,y)$ — минимизацияловчи функция, ε — ихтиёрий ўзгармас бўлгани учун $\varepsilon=0$ да $G(\varepsilon)$ минимумга эга бўлади, у ҳолда $G'0)=0$ бўлади, яъни

$$D(u,h)=0. \tag{85}$$

$u(x,y)$, $h(x,y)$ функцияларни ва S контурни шундай силлиқ деб ҳисоблаймизки, булар учун қуйидаги айниятлар ўринли бўлсин:

$$u_xh_x+u_yh_y=\left(u_xh\right)_x+\left(u_yh\right)_y-h\Delta u,$$
$$D(u,h)=\int_S h\frac{\partial u}{\partial n}ds-\int_D h\Delta udxdy=0, \tag{86}$$

бунда n — S га ўтказилган ташқи нормал. (83) ва (85) га асосан, (86) дан

$$\int_D h\Delta udxdy=0$$

тенглик келиб чиқади. Бундан, D да Δu ни узлуксиз функция деб ҳисоблаб, h нинг ихтиёрийлигидан $\Delta u=0$ га эга бўламиз.

Демак, қабул қилинган фаразларга асосан, биринчи вариацион масаланинг ечими Дирихле масаласининг ечими бўлади.

Энди $u(x,y)$ функция Лаплас тенгламаси учун чегаравий шартлари (82) бўлган Дирихле масаласининг ечими, $u(x,y)+\varepsilon h(x,y)$ эса худди юқоридагидай, мумкин бўлган функциялар синфи бўлиб, шу билан бирга $u(x,y)$ ва $h(x,y)$ функциялар учун (86) формула ўринли бўлсин.

Бу формуладан (83) га асосан ва $u(x,y)$ нинг гармоник функция бўлганлиги учун (85) тенглик келиб чиқади. Шунинг учун ҳам (84) дан

$$D(u) \leq D(u + \varepsilon h)$$

тенгсизликка эга бўламиз, бу эса $u(x,y)$ функция Дирихле интегралини минимизация қилишини, яъни биринчи вариацион масаланинг ечими эканлигини билдиради.

Дирихле интеграли учун вариацион масалаларга эквивалент бўлган Лаплас тенгламаси учун бошқа чегаравий масалалар ҳам мавжуд. Булар орасида, масалан, Нейман масаласи Лаплас тенгламаси учун чегаравий масалаларни Дирихле интеграли учун эквивалент вариацион масалаларга келтириш ғояси Риманга тегишлидир. Бу ғояни *Дирихле принципи* деб аташ қабул қилинган.

2. Хос қийматлар тўғрисидаги масала. VII бобнинг 3- § идаги 1- бандда хос қийматлар тўғрисидаги ушбу масала кўрилган эди: *чегараси бўлаклари силлиқ S дан иборат бўлган чегараланган D соҳада*

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (x,y) \in D, \ \lambda = \text{const} \tag{87}$$

тенгламанинг хос сонлари ва хос функцияларини аниқлаш талаб қилинади, яъни λ нинг шундай қийматларини топиш кераки, буларда (87) *тенглама D соҳада бир жинсли*

$$u(x,y) = 0, \ (x,y) \in S \tag{88}$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлсин ва бу ечимлар тузилсин.

(87), (88) масаланинг энг кичик хос сони қуйидаги *иккинчи вариацион масалани* ечиш натижасида ҳосил қилинади: (88) *шартни қаноатлантирувчи мумкин бўлган функциялар орасидан шуниси топилсинки,* бунинг учун

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}$$

функционал энг кичик қийматни қабул қилсин, бу ерда

$$H(u) = \int_D u^2 dxdy .$$

Ҳақиқатан ҳам, $u(x,y)$ — иккинчи вариацион масаланинг ечими бўлсин, шу билан бирга $J(u)$ нинг энг кичик қиймати

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)} = \lambda > 0 \qquad (89)$$

бўлсин.

Мумкин бўлган $u(x,y) + \varepsilon\, h(x,y)$ функциялар синфи учун, бу ерда ε — ихтиёрий ўзгармас, $h(x,y)$ эса (83) шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий мумкин бўлган функция

$$F(\varepsilon) = \frac{D(u+\varepsilon h)}{H(u+\varepsilon h)} = \frac{D(u)+2\varepsilon D(u,h)+\varepsilon^2 D(h)}{H(u)+2\varepsilon H(u,h)+\varepsilon^2 H(h)} \geq \lambda$$

тенгсизликка эга бўламиз, бу ерда

$$H(u,h) = \int_D uh\,dxdy.$$

$F(\varepsilon)$ функция $\varepsilon = 0$ бўлганда минимумга эга бўлгани учун

$$F'(0) = 2\,\frac{H(u)D(u,h)-D(u)H(u,h)}{H^2(u)} = 0.$$

Бундан (89) асосан, $H(u) \neq 0$ бўлгани учун

$$D(u,h) - \lambda\, H(u,h) = 0. \qquad (90)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

$u(x,y)$, $h(x,y)$ функциялар ва D соҳанинг чегарасининг силлиқлиги (86) формулаларни қўллаш имкониятини беради деб фараз қиламиз. У ҳолда

$$D(u,h) - \lambda H(u,h) = \int_D \left[(u_x h)_x + (u_y h)_y - h(\Delta u + \lambda u) \right] dxdy =$$

$$= \int_S h \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_D h(\Delta u + \lambda u)\, dxdy = 0.$$

S да h нолга тенг бўлгани сабабли

$$\int_D h(\Delta u + \lambda u)\, dxdy = H(\Delta u + \lambda u, h) = 0.$$

Бу тенгликдан, $h(x,y)$ ихтиёрий бўлганлиги учун $\Delta u+\lambda u=0$ эканлиги келиб чиқади, яъни $u(x,y)$ функция (87) тенгламани қаноатлантиради.

Агар λ^*– λ дан фарқли хос сон, $u^*(x,y)$ эса бу сонга мос (87), (88) масаланинг хос функцияси бўлса, (86) га асосан

$$H\left(\Delta u^* + \lambda^* u^*, u^*\right) = \int_D \left(\Delta u^* + \lambda^* u^*\right) u^* dxdy =$$

$$= \int_D \left[\left(u_x^* u^*\right)_x + \left(u_y^* u^*\right)_y - u_x^{*2} - u_y^{*2} + \lambda^* u^{*2}\right] dxdy =$$

$$= \int_S u^* \frac{\partial u^*}{\partial n} ds - D\left(u^*\right) + \lambda^* H\left(u^*\right) = -D\left(u^*\right) + \lambda^* H\left(u^*\right) = 0,$$

чунки u^* функция (88) шартни қаноатлантиради. Бу тенгликдан, (87), (88) масаланинг хос сонлари ўртасида λ сон энг кичиги эканлиги келиб чиқади.

Агар Дирихле интеграли ўрнига ушбу

$$E(u) = \int_D \left[p\left(u_x^2 + u_y^2\right) + 2auu_x + 2buu_y + cu^2\right] dxdy$$

квадратик функционални қаралса ҳам юқорида айтилганлар ўз кучини сақлаб қолади.

Интеграл остидаги ифода коэффициентлари етарли силлиқ бўлган, ушбу

$$p\left(\xi^2 + \eta^2\right) + c\varsigma^2 + 2a\xi\varsigma + 2b\eta\varsigma \ge \mu^2\left(\xi^2 + \eta^2\right)$$

шартни қаноатлантирувчи квадратик формадан иборат, бунда μ — ҳақиқий ўзгармас.

$E(u)$ функционал учун Эйлер тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$2au_x + 2bu_y + 2cu - 2\left(pu_x\right)_x - 2\left(pu_y\right)_y - 2(au)_x - 2(bu)_y = 0,$$

ёки

$$(pu_x)_x + (pu_y)_y + c^* u = 0,$$

бунда

$$c^* = c - a_x - b_y.$$

3. Минимизацияловчи кетма-кетликлар. Агар мумкин бўлган $\{u\}$ функциялар синфи бўш бўлмаса, $D(u)$ Дирихле интеграли қийматларининг тўплами d қуйи чегарага эга бўлади. Мумкин бўлган функция бу чегарага эришадими ёки эришмайдими биз буни билмасак ҳам, аммо бир нарса аниқ: мумкин бўлган функцияларнинг шундай u_n, $n = 1$, 2, ... кетма-кетлиги мавжудки, бу кетма-кетлик учун

$$\lim_{n\to\infty} D(u_n) = d \tag{91}$$

бўлади.

(91) тенглик ўринли бўлган u_n, $n = 1, 2, \dots$ кетма-кетлик *минимизацияловчи кетма-кетлик* дейилади.

Худди шуни $J(u)$ функционал тўғрисида ҳам айтиш мумкин.

Минимизацияловчи кетма-кетликнинг мавжудлиги ҳали текширилаётган вариацион масала ечимининг мавжудлигини билдирмайди.

Кейинчалик қуйидаги саволларга жавоб топиш керак:

1) *минимизацияловчи кетма-кетликни қандай тузиш керак;*

2) *у яқинлашадими;*

3) *унинг лимити* $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ *мумкин бўлган функция бўладими?*

Бу масалаларни батафсил текшириш учун элементлари минимизацияловчи кетма-кетликнинг ҳадларидан иборат бўлган айрим функционал фазоларни киритиш талаб қилинади. Бу фазолар ўлчовида минимизацияловчи кетма-кетлик яқинлашиши кўрсатилгандан сўнг, ҳосил қилинган лимит ёки юқорида қўйилишдаги вариацион масаланинг ечими эканлигини кўрсатиш керак ёки ечимнинг ўзи тушунчасини оқилона умумлаштириш керак. Шу билан бирга вариацион масаланинг ечими чегаравий масаланинг ёки оддий маънодаги, ёки маълум умумлашган маънодаги ечими эканлигини кўрсатиш зарур.

Биз бу масалаларнинг ечилишига тўхталмаймиз.

Вариацион ҳисобда минимизацияловчи кетма-кетликларни тузишнинг турли усуллари бор. Бу усуллар хусусий ҳосилали тенгламалар масалаларига мослаб қўлланилганда уларни *вариацион* ёки *тўғри усуллар* деб аташ қабул қилинган. Энг муҳими, айрим вариацион усуллар текширилаётган масалаларнинг тақрибий ечимларини тузиш имконини беради. Шундай усулларнинг иккитаси тўғрисида қуйида тўхталамиз.

4. Ритц усули тўғрисида тушунча. Бу усулнинг моҳияти қуйидагидан иборат. $\Phi(u)$ функционални минимизациялаш ҳақида масала қўрилаётган бўлсин. $\Phi(u)$ функционал учун мумкин бўлган функцияларнинг тўла системасини v_n, $n=1, 2, \ldots$ орқали белгилаб оламиз ва $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$, $n=1$, $2, \ldots$ кетма-кетликни тузамиз, бу ерда c_k— ҳозирча номаълум ўзгармаслар.

c_k, $k=1,\ldots,n$, коэффициентларни шундай аниқлаймизки, $\varphi_n = \Phi(u_n)$ ифода $c_1, \ldots, c_n$ ларнинг функцияси сифатида минимал бўлсин.

Функционалларнинг айрим синфлари учун Ритц шу нарсани кўрсатишга муваффақ бўлганки, $\{u_n\}$ минимизацияловчи кетма-кетлик бўлиб, яқинлашувчи бўлади ва унинг лимити текширилаётган масалани ечади.

Масалан, D соҳа $0<x<\pi$, $0<y<\pi$ квадратдан иборат бўлган ҳолда $J(u)$ функционални минимизацияловчи иккинчи вариацион масалани текширамиз. Умумийликка зиён етказмай

$$H(u)=1 \tag{92}$$

деб ҳисоблаймиз.

Юқорида кўрсатилган тўла система учун ушбу

$$\sin kx \cdot \sin ly, \quad k,l=1,2,\ldots$$

функциялар системасини олишимиз мумкин.

$$u_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl} \sin kx \sin ly, \quad m,n=1,2,\ldots$$

бўлсин.

$u_{mn}(x,y)$ функциялар равшанки, (88) шартни қаноатлантиради. Бундан ташқари

$$d_{mn} = D(u_{mn}) = \int_0^\pi\int_0^\pi\left[(u_{mn})_x^2 + (u_{mn})_y^2\right]dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\int_0^\pi\int_0^\pi c_{kl}^2\left[k^2\cos^2 kx\sin^2 ly + l^2\sin^2 \kappa x\cos^2 ly\right]dxdy = \tag{93}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\sum_{\kappa=1}^{m}\ \sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2\left(k^2 + l^2\right),$$

$$H(u_{mn}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\int_0^\pi\int_0^\pi c_{kl}^2\sin^2 kx\sin^2 lydxdy = \frac{\pi^2}{4}\sum_{\kappa=1}^{m}\ \sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2.$$

Ритц системасига биноан, (92) асосан

$$\sum_{\kappa=1}^{m}\ \sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2 = \frac{4}{\pi^2} \tag{94}$$

шарт бажарилганда (93) ифоданинг минимумини топишимиз керак.

(93), (94) шартли экстремум масалани ечиб, ихтиёрий m ва n лар учун c_{11} дан ташқари барча c_{kl} ларнинг нолга тенглигини шу билан бирга

$$c_{11} = \frac{2}{\pi},\ d_{mn} = 2$$

эканлигин топамиз. Шундай қилиб,

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} u_{mn} = u(x,y) = \frac{2}{\pi}\sin x\sin y,$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} d_{mn} = D(u) = \lambda = 2.$$

5. Хос қийматлар тўғрисидаги масаланинг тақрибий ечимини тузиш. Бубнов — Галеркин усули тўғрисида тушунча. Ритц усули хос қийматлар тўғрисида (87), (88) масаланинг тақрибий ечимини тузишга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам, $J(u)$ функционални минимизациялаш ҳақидаги иккинчи вариацион масаланинг тақрибий ечими учун

$$H(u) = 1$$

шартда, аввалги банддаги

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k(x,y)$$

функцияни қабул қилиш мумкин, бу ерда c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ коэффициентлар ушбу

$$d_n(c_1, \ldots, c_n) = D(u_n) = \min,$$
$$h_n(c_1, \ldots, c_n) = H(u_n) = 1$$

шартли минимум масаласини ечиш натижасида аниқланади.

Шундай қилиб, тузилган $u_n(x,y)$ функцияни (87), (88) масала хос функциясининг *тақрибий ифодаси* учун қабул қилиш табиийдир, шу билан

$$\lambda_n = D(u_n)$$

формула шу масаланинг хос сони учун *тақрибий ифодани* беради.

Хос қийматлар тўғрисидаги масаланинг тақрибий ечимини тузишда *Бубнов — Галеркин усули* ҳам муваффақият билан қўлланилади.

Бу усулда (87), (88) масала хос функциясининг тақрибий ифодаси учун

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k(x,y) \tag{95}$$

функция қабул қилинади, фақат бу гал c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ коэффициентлар

$$\sum_{k=1}^{n} H(\Delta u_k + \lambda v_k, v_m)\ \ c_k = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n \tag{96}$$

тенгликлардан топилади.

Бу тенгликлар эса бир жинсли чизиқли алгебраик тенгламалар системасидан иборатдир.

Чизиқли алгебрадан маълумки, бу система λ,

$$\det \begin{Vmatrix} H(\Delta v_1 + \lambda v_1, v_1) & \ldots & H(\Delta v_n + \lambda v_n, v_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ H(\Delta v_1 + \lambda v_1, v_n) & \ldots & H(\Delta v_n + \lambda v_n, v_n) \end{Vmatrix} = 0 \tag{97}$$

тенгламани қаноатлантирган ҳолда ва фақат шу ҳолдагина тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлади. (97) тенгламадан топилган λ нинг қийматларини (87), (88) масала хос сонларининг тақрибий ифодаси учун қабул қилинади. Буларга мос бўлган хос функциялар учун тақрибий ифодалар (95) формула билан берилади, ундаги c_k, $k = 1, 2, ..., n$ лар эса (96) системанинг ечимидан иборатдир.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни айниқса, бузиладиган тенгламаларни интеграл тенгламалар усули билан ечишда, ҳамда бундай тенгламалар учун нолокал масалаларни қўйишда ва уларни текширишда интегро-дифференциал операторлар муҳим роль ўйнайди.

Биз кейинги параграфни ана шундай операторларни ўрганишга бағишлаймиз.

4- §. Интегро-дифференциал операторлар

1. Каср тартибли Риман — Лиувилл интеграли $f(x)$ функция $L(a,b)$ $(a < b < \infty)$ синфдан бўлсин. Ушбу

$$D_{ax}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt, \qquad x \in (a,b) \tag{98}$$

кўринишдаги ифода α $(0 < \alpha < \infty)$ каср тартибли интеграл *(Лиувилл — Риман маъносида)* деб аталади.

$D_{ax}^{-\alpha} f(x)$ функция деярли ҳамма (a,b) да аниқланган бўлиб, $L(a,b)$ синфга тегишли бўлади.

Агар $0 < \alpha_1, \alpha_2 < \infty$ бўлса, у ҳолда деярли ҳамма (a,b) да

$$D_{ax}^{-\alpha_2} D_{ax}^{-\alpha_1} f(x) = D_{ax}^{-\alpha_1} D_{ax}^{-\alpha_2} f(x) = D_{ax}^{-(\alpha_1+\alpha_2)} f(x) \tag{99}$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$D_{ax}^{-\alpha_2} D_{ax}^{-\alpha_1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} D_{ax}^{-\alpha_2} \int_a^x (x-t)^{\alpha_1-1} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_a^x \left(\int_a^t (t-s)^{\alpha_1-1} f(s)\,ds \right) (x-t)^{\alpha_2-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_a^x f(s)\,ds \int_a^t (x-t)^{\alpha_2-1} (t-s)^{\alpha_1-1}\,dt.$$

Охирги ички интегралда $t=(x-s)\tau+s$ алмаштириш бажариш натижасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\int_s^x (x-t)^{\alpha_2-1}(t-s)^{\alpha_1-1}dt=(x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\int_0^1 \tau^{\alpha_1-1}(1-\tau)^{\alpha_2-1}d\tau=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}(x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}.$$

Бу эса (99) тенгликнинг тўғри эканлигини кўрсатади.

Таърифга асосан

$$D_{ax}^0 f(x)=f(x) \tag{100}$$

деб ҳисоблаймиз.

Агар $p>1$, $\frac{1}{p}<\alpha<\frac{1}{p}+1$ ёки $p=1$, $1\le\alpha<2$ бўлиб, $f(x)\in L_p(a,b)$ бўлса, у ҳолда $D_{ax}^{-\alpha}f(x)$ функция $\alpha-\frac{1}{p}$ кўрсаткич билан *(a,b)* да Гёльдер шартини қаноатлантиради.

Бу фикрнинг тўғрилигига Гёльдер шарти таърифидан фойдаланиб ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

2. $\alpha>0$ каср тартибли Лиувилл ҳосиласи. α $(0<\alpha<\infty)$ сон берилган бўлиб, $n\ge 1$ бутун сон $n-1<\alpha\le n$ шартдан аниқлансин. Сўнгда, *f(x)* функция *L(a,b)* синфга тегишли бўлиб,

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{D_{ax}^{-(n-\alpha)}f(x)\right\}$$

функция деярли ҳамма *(a,b)* да ҳосилага [бу ҳосила *(a,b)* да жамланувчи бўлиши шарт эмас] эга бўлсин.

У ҳолда

$$D_{ax}^{\alpha}f(x)=\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\left\{D_{ax}^{-(n-\alpha)}f(x)\right\} \tag{101}$$

функция *f(x)* функциянинг $\alpha>0$ *каср тартибли ҳосиласи* дейилади.

$\alpha=n\ge 1$ бутун сон бўлганда, (101) га асосан

$$D_{ax}^{\alpha}f(x)=\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}},$$

яъни $D_{ax}^{\alpha} f(x)$ ифода *f(x)* функциянинг α тартибли оддий ҳосиласи билан устма-уст тушади.

Ихтиёрий тартибли интегро-дифференциал операторларнинг айрим хоссаларини кўрсатиб ўтамиз.

1) Агар $f(x) \in L(a,b)$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\alpha > 0$ да деярли ҳамма $x \in (a,b)$ лар учун

$$D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{-\alpha} f(x) = f(x). \tag{102}$$

2) $D_{ax}^{\alpha} f(x) \in L(a,b)$ мавжуд бўлсин. У ҳолда

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \left[D_{ax}^{\alpha-k} f(x) \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \tag{103}$$

Бу икки хоссани умумлаштириш мумкин.

3) $f(x) \in L(a,b)$ бўлсин. У ҳолда агар $\beta \geq \alpha > 0$ бўлса,

$$D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{-\beta} f(x) = D_{ax}^{-(\beta-\alpha)} f(x), \; x \in (a,b), \tag{104}$$

агарда $\alpha > \beta > 0$ бўлиб, *f(x)* функция *(a,b)* да $D_{ax}^{\alpha-\beta} f(x)$ ҳосилага эга бўлса,

$$D_{ax}^{\alpha} D_{ax}^{-\beta} f(x) = D_{ax}^{\alpha-\beta} f(x), \; x \in (a,b). \tag{105}$$

4) $f(x) \in L(a,b)$ ва $D_{ax}^{\beta} f(x) \in L(a,b)$ ҳосила мавжуд бўлсин, бу ерда $n-1 < \beta \leq n \; (n \geq 1)$. У ҳолда ихтиёрий $\alpha > 0$ учун

$$D_{ax}^{-\alpha} D_{ax}^{\beta} f(x) = D_{ax}^{\beta-\alpha} f(x) - \sum_{k=1}^{n} \left[D_{ax}^{\beta-k} f(x) \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \tag{106}$$

Юқорида келтирилган хоссаларнинг тўғрилигига бевосита ҳисоблашлар билан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Изоҳ. $D_{ax}^{-\alpha}$, D_{ax}^{α} операторларнинг таърифида интегралнинг юқори чегараси ўзгарувчи эди, худди шунга ўхшаш интегралнинг қуйи чегараси ўзгарувчи бўлган

$$D_{xb}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad \alpha > 0, \; x \in (a,b),$$

$$D_{xb}^{\alpha} f(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left[D_{xb}^{-(n-\alpha)} f(x) \right], \qquad n-1 < \alpha \le n$$

операторлар ҳам қаралади. Бу операторлар ҳам $D_{ax}^{-\alpha}$ ва D_{ax}^{α} лар қандай хоссаларга эга бўлса, худди шундай хоссаларга эга бўлади.

5) *Каср дифференциалланадиган* $D_{ax}^{-\alpha}$ *ва* D_{xb}^{α} $(0 < \alpha < 1)$ *операторлар учун экстремум принципи.* $[a,b]$ кесмада $\omega(t)$ камаймайдиган мусбат узлуксиз функция ва $f(t)$ узлуксиз функция бўлсин.

Агар $[a,b]$ нинг $t = x$, $a < x < b$, нуқтасида $f(t)$ функция мусбат максимум (манфий минимум) га эришса ва бу нуқтанинг ихтиёрий кичик атрофида $\omega(t)\, f(t)$ кўпайтма $\gamma > \alpha$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда $D_{ax}^{\alpha}\omega f > 0$ $\left(D_{ax}^{\alpha}\omega f < 0\right)$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\Gamma(1-\alpha) D_{ax}^{\alpha} \omega f = \Gamma(1-\alpha) \frac{d}{dx} \left[D_{ax}^{-(1-\alpha)} \omega f \right] =$$

$$= \Gamma(1-\alpha) \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{\omega(t) f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt =$$

$$= \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\omega(t) f(t) - \omega(x) f(x)}{(x-t)^{\alpha}} dt + \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\omega(x) f(x)}{(x-t)^{\alpha}} dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{d}{dx} \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\omega(t) f(t) - \omega(x) f(x)}{(x-t)^{\alpha}} dt + \frac{d}{dx} \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\omega(x) f(x)}{(x-t)^{\alpha}} dt \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\omega(x-\varepsilon) f(x-\varepsilon) - \omega(x) f(x)}{\varepsilon^{\alpha}} dt - \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\left[\omega(x) f(x)\right]'}{(x-t)^{\alpha}} - \right.$$

$$-\alpha \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\omega(t) f(t) - \omega(x) f(x)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt + \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\left[\omega(x) f(x)\right]'}{(x-t)^{\alpha}} dt -$$

$$-\alpha\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{\omega\ (x)f(x)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt+\frac{\omega(x)f(x)}{\varepsilon^{\alpha}}\Bigg\}. \qquad (107)$$

Энди

$$\int\limits_a^{x-\varepsilon}\frac{dt}{(x-t)^{1+\alpha}}=\frac{1}{\alpha\varepsilon^{\alpha}}-\frac{1}{\alpha(x-a)^{\alpha}}$$

тенгликни эътиборга олсак, (107) қуйидагича ёзилади:

$$\Gamma(1-\alpha)D_{ax}^{\alpha}\omega f=\frac{\omega(x)f(t)}{(x-t)^{\alpha}}+\alpha\int\limits_a^x\frac{\omega(x)f(x)-\omega(t)f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt.$$

Бу айниятдан юқорида баён қилинган экстремум принципи дарҳол келиб чиқади. Агар $\omega(t)$, $[a,b]$ да ўсмайдиган мусбат узлуксиз функция бўлса, айтилган фикр D_{xb}^{α} оператор учун ҳам ўринли бўлади.

3. Айрим айниятлар

1) *Агар* $0<\alpha,\ \beta<1$ *ва* $(x-a)^{-\alpha}f(x)$, $(x-a)^{-\beta}f(x)\in L(a,b)$ *бўлса, у ҳолда деярли ҳамма* (a,b) *да*

$$\begin{aligned}&D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{-\beta}D_{ax}^{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}f(x)=\\&=D_{ax}^{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{-\beta}f(x)\end{aligned} \qquad (108)$$

муносабат ўринли бўлади.

(49) таърифга асосан II бобнинг 3- параграфидаги Дирихле формуласини эътиборга олсак,

$$D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{-\beta}D_{ax}^{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}f(x)=$$

$$D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{-\beta}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x(t-a)^{-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x(s-a)^{-\beta}(x-s)^{\beta-1}ds\int\limits_a^s(t-a)^{-\alpha}(s-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x(t-a)^{-\alpha}f(t)\,dt\int\limits_t^x(s-a)^{-\beta}(x-s)^{\beta-1}(s-t)^{\alpha-1}ds$$

тенглик ҳосил бўлади.

Ички интегралда $s = t + (x - t)\xi$ алмаштириш бажариб, VI бобдаги (20) формуладан фойдаланамиз, у ҳолда

$$\int_t^x (s-a)^{-\beta}(x-s)^{\beta-1}(s-t)^{\alpha-1}\,ds =$$

$$= (t-a)^{-\beta}(x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}\left(1-\frac{t-x}{t-a}\xi\right)^{-\beta} d\xi$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{-\beta}(x-t)^{\alpha+\beta-1} F\left(\alpha,\beta,\alpha+\beta,\frac{t-x}{t-a}\right).$$

Шундай қилиб,

$$D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{-\beta} D_{ax}^{-\alpha}(x-a)^{-\alpha} f(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (t-a)^{-\alpha-\beta}(x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)\, F\left(\alpha,\beta,\alpha+\beta,\frac{t-x}{t-a}\right)dt.$$

Бу тенгликдан, гипергеометрик функция биринчи икки параметрга нисбатан симметрик бўлгани учун, (108) айният келиб чиқади.

2) *Агар* $0 < 2\alpha < 1$ *ва* $(x-a)^{-a} f(x), (b-x)^{-a} f(x) \in L(a,b)$ *бўлса, у ҳолда деярли ҳамма* (a,b) *да қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:*

$$\begin{gathered} D_{ax}^{\alpha}(x-a)^{2\alpha-1} D_{ax}^{\alpha-1}(x-a)^{-\alpha} f(x) = \\ = (x-a)^{\alpha-1} D_{ax}^{2\alpha-1} f(x), \\ D_{xb}^{\alpha}(b-x)^{2\alpha-1} D_{xb}^{\alpha-1}(b-x)^{-\alpha} f(x) = \\ = (b-x)^{\alpha-1} D_{xb}^{2\alpha-1} f(x). \end{gathered} \tag{109}$$

(109) формулалар биринчисининг чап томонини $g(x)$ орқали белгилаб, (98) ва (101) формулаларга асосан

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}(t-a)^{2\alpha-1}\, at\int_a^t (s-a)^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha} f(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (s-a)^{-\alpha} f(s)ds\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha}(t-a)^{2\alpha-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (s-a)^{\alpha-1} (x-s)^{1-2\alpha} f(s)\, ds \times$$

$$\times \int_0^1 \xi^{-\alpha} (1-\xi)^{-\alpha} \left(1 - \frac{s-x}{s-a}\xi\right)^{2\alpha-1} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (s-a)^{\alpha-1} (x-s)^{1-2\alpha} f(s) \times$$

$$\times F\left(1-\alpha, 1-2\alpha, 2-2\alpha; \frac{s-x}{s-a}\right) ds$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан, VI бобдаги (21) формулага асосан

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (s-a)^{-\alpha} \left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{1-2\alpha} \times$$

$$\times F\left(1-\alpha, 1-2\alpha, 2-2\alpha; \frac{x-s}{x-a}\right) f(s)\, ds.$$

Энди VI бобдаги (18) формулаларнинг иккинчисига мувофиқ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{1-2\alpha} F\left(1-\alpha, 1-2\alpha, 2-2\alpha; \frac{x-s}{x-a}\right) =$$

$$= (1-2\alpha)\left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{-2\alpha} F\left(1-\alpha, 2-2\alpha, 2-2\alpha; \frac{x-s}{x-a}\right) \frac{s-a}{(x-s)^2}$$

ва $F(a,b,b;z) = (1-z)^{-a}$, $\Gamma(2-2a) = (1-2a)\Gamma(1-2a)$ муносабатлардан фойдалансак, ушбу

$$g(x) = \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(1-2\alpha)} \int_a^x (x-s)^{-2\alpha} f(s)\, ds = (x-a)^{\alpha-1} D_{ax}^{\;2\alpha-1} f(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Худди шунга ўхшаш, (109) формулаларнинг иккинчиси исботланади.

Агар (109) да α ни $1-\beta$ га алмаштириб, $0 < 2\beta < 1$ деб ҳисобласак, қуйидаги формулалар келиб чиқади:

$$D_{ax}^{1-\beta}(x-a)^{1-2\beta}D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{\beta-1}f(x)=(x-a)^{-\beta}D_{ax}^{1-2\beta}f(x),$$
$$D_{xb}^{1-\beta}(b-x)^{1-2\beta}D_{xb}^{-\beta}(b-x)^{\beta-1}f(x)=(b-x)^{-\beta}D_{xb}^{1-2\beta}f(x).$$

3) $f(x)\in C^{(0,\lambda)}(a,b)$ *бўлсин. У ҳолда ушбу*

$$D_{ax}^{\alpha}D_{xb}^{-\alpha}f(x)=\cos\pi\alpha\, f(x)+\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_a^b\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{f(t)dt}{t-x},$$
$$D_{xb}^{\alpha}D_{ax}^{-\alpha}f(x)=\cos\pi\alpha\, f(x)-\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_a^b\left(\frac{b-t}{b-x}\right)^{\alpha}\frac{f(t)dt}{t-x} \qquad (110)$$

айниятлар ўринли бўлади.

Бу ерда интеграллар Кошининг бош қиймати маъносида тушунилади.

Ҳақиқатан ҳам, (98) ва (101) таърифларга асосан

$$F(x)=D_{ax}^{\alpha}D_{xb}^{-\alpha}f(x)=\frac{d}{dx}D_{ax}^{-(1-\alpha)}D_{xb}^{-\alpha}f(x)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x(x-t)^{-\alpha}dt\int_t^b(s-t)^{\alpha-1}f(s)\,ds=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\times$$
$$\times\int_a^x(x-t)^{-\alpha}dt\left[\int_t^x(s-t)^{\alpha-1}f(s)\,ds+\int_x^b(s-t)^{\alpha-1}f(x)\,ds\right].$$

Бу ерда биринчи жуфт интегралга Дирихле формуласини қўллаймиз, иккинчисининг эса ўринларини алмаштирамиз, у ҳолда

$$F(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(s)\,ds\int_a^s(x-t)^{-\alpha}(s-t)^{\alpha-1}dt+\right.$$
$$\left.+\int_x^b f(s)\,ds\int_a^x(x-t)^{-\alpha}(s-t)^{\alpha-1}dt\right].$$

Ички интегралларда $\xi=\frac{s-t}{x-t}$ алмаштиришни бажариб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$F(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(s)\,ds\int_0^{(s-a)/(x-a)}\frac{\xi}{1-\xi}^{\alpha-1}d\xi-\right.$$

$$\left.-\int_x^b f(s)\,ds\int_{(s-a)/(x-a)}^{\infty}\frac{\xi}{1-\xi}^{\alpha-1}d\xi\right].$$

Ушбу

$$J_\varepsilon(x)=\int_a^{x-\varepsilon} f(s)\,ds\int_0^{(s-a)/(x-a)}\frac{\xi}{1-\xi}^{\alpha-1}d\xi-\int_{x+\varepsilon}^{b} f(s)\,ds\int_{(s-a)/(x-a)}^{\infty}\frac{\xi}{1-\xi}^{\alpha-1}d\xi$$

интегрални қараймиз. $J_\varepsilon(x)$ ни x бўйича дифференциаллаймиз, у ҳолда

$$J'_\varepsilon(x)=f(x-\varepsilon)\int_a^{(x-\varepsilon-a)/(x-a)}\frac{\xi}{1-\xi}^{\alpha-1}d\xi+$$

$$+f(x+\varepsilon)\int_{(s+\varepsilon-a)/(x-a)}^{\infty}\frac{\xi}{1-\xi}^{\alpha-1}d\xi+$$

$$+\int_a^{x-\varepsilon}\left(\frac{s-a}{x-a}\right)^\alpha\frac{f(s)ds}{s-x}+\int_{x+\varepsilon}^{b}\left(\frac{s-a}{x-a}\right)^\alpha\frac{f(s)ds}{s-x}.$$

Бу тенгликда $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$F(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\lim_{\varepsilon\to\infty}J'_\varepsilon(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}f(x)\int_0^\infty\frac{\xi}{1-\xi}^{\alpha-1}d\xi+$$

$$+\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_a^b\left(\frac{s-a}{x-a}\right)^\alpha\frac{f(s)ds}{s-x}.$$

Маълумки,

$$\int_0^\infty\frac{\xi}{1-\xi}^{\alpha-1}d\xi=\pi ctg\pi\alpha.$$

Бунга асосан, аввалги тенглик

$$F(x)=\cos\pi\alpha f(x)+\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_a^b\left(\frac{s-a}{x-a}\right)^\alpha\frac{f(s)ds}{s-x}$$

кўринишга келади.

Бундан (110) формулаларнинг биринчиси келиб чиқади. Иккинчиси ҳам худди шундай исботланади.

4) *Агар* $v(x) \in C^{(0,\lambda)}(-1,1)$, $0 < 2\beta < 1$ *бўлса, у ҳолда қуйидаги айниятлар ўринли бўлади:*

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(x-\xi)^{2\beta-1}d\xi\int_{-1}^{1}\left[|\xi-t|^{-2\beta}-(1-\xi t)^{-2\beta}\right]v(t)\,dt =$$

$$= \pi\, tg\beta\pi\, v(x) + \int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)v(t)\,dt, \tag{111}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{1}(\xi-x)^{2\beta-1}d\xi\int_{-1}^{1}\left[|\xi-t|^{-2\beta}-(1-\xi t)^{-2\beta}\right]v(t)\,dt =$$

$$= -\pi\, tg\beta\pi\, v(x) + \int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{1-xt}\right)v(t)\,dt.$$

Бу ерда ҳам худди (110) дагидай (111) айниятларнинг ўнг томонидаги интеграллар Кошининг бош қиймати маъносида тушунилади.

Ушбу ифодани қараймиз:

$$J_1(x) = \frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(x-\xi)^{2\beta-1}d\xi\int_{-1}^{1}|\xi-t|^{-2\beta}v(t)\,dt =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int_{-1}^{x}(x-\xi)^{2\beta-1}d\xi\int_{-1}^{\xi}(\xi-t)^{-2\beta}v(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{x}(x-\xi)^{2\beta-1}d\xi\int_{\xi}^{1}(t-\xi)^{-2\beta}v(t)\,dt = \right.$$

$$= \Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)\left[\frac{d}{dx}D_{-1x}^{-2\beta}D_{-1x}^{-(1-2\beta)}v(x)+\frac{d}{dx}D_{-1x}^{-2\beta}D_{x_1}^{-(1-2\beta)}v(x)\right].$$

(101), (102) формулаларга ва $\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta) = \frac{\pi}{\sin 2\beta\pi}$ асосан

$$J_1(x) = \frac{\pi}{\sin 2\pi\beta}\left[v(x) + D_{-1x}^{1-2\beta}D_{x1}^{-(1-2\beta)}v(x)\right]$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (110) айниятдан фойдаланамиз.

Унда $a=-1,\ b=1,\ \alpha=1-2\beta$ десак, ушбу

$$
\begin{aligned}
J_1(x)&=\frac{\pi}{\sin 2\beta\pi}\Big[\nu(x)+\cos(1-2\beta)\pi\,\nu(x)+\\
&+\frac{\sin(1-2\beta)\pi}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\frac{\nu(t)}{t-x}\,dt=\\
&=\pi\ tg\,\beta\pi\,\nu(x)+\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\frac{\nu(t)}{t-x}\,dt
\end{aligned}
\tag{112}
$$

формулага эга бўламиз. Энди

$$
\begin{aligned}
J_2(x)&=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(x-\xi)^{2\beta-1}d\xi\int_{-1}^{1}(1-\xi t)^{-2\beta}\nu(t)\,dt=\\
&=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\nu(t)\,dt\int_{-1}^{x}(x-\xi)^{2\beta-1}(1-\xi t)^{-2\beta}\,dt
\end{aligned}
$$

функцияни текширамиз. $x\in(-1,1)$ бўлганда

$$
s=\frac{x-\xi}{1-\xi t}
$$

алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$
J_2(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\nu(t)\,dt+\int_{0}^{\frac{1+x}{1+t}}\frac{s^{2\beta-1}}{1-ts}ds=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\frac{\nu(t)\,dt}{1-xt}. \tag{113}
$$

(112) ва (113) тенгликлардан (111) айниятларнинг биринчиси келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш (111) нинг иккинчиси исботланади.

IX БОБ
АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР

Биз I бобда аралаш типдаги тенгламаларнинг таърифини берган эдик. Бу ерда яна бир бор эслатиб ўтамиз. Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама текширилаётган соҳанинг бир қисмида эллиптик типга, иккинчи қисмида эса гиперболик типга тегишли бўлса, уни аралаш типга тегишли дейилади; бу қисмлар ўтиш чизиғи (ёки сирти) билан ажралади, бу чизиқда тенглама ёки параболик бузилади, ёки аниқланмаган бўлади.

Аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масалани XX асрнинг 20- йилларида биринчи марта Италиялик математик Франческо Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

тенглама учун қўйган ва текширган.

Биз бу бобда умумлашган Трикоми

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , \ m = \text{const} > 0 \qquad (1)$$

тенгламасини ўрганамиз. Бу тенглама $y = 0$ ўқнинг ихтиёрий қисмини ўз ичига олган соҳада аралаш типга тегишли бўлади, яъни $y > 0$ ярим текисликда эллиптик , $y < 0$ да гиперболик бўлиб, $y = 0$ да эса параболик бузилади.

$m = 0$ бўлганда (1) тенглама

$$\operatorname{sign} y u_{xx} + u_{yy} = 0$$

кўринишга эга бўлади.

Бу тенгламани аралаш типдаги тенгламаларнинг энг содда вакили сифатида ўрганишни академик М.А. Лаврентьев тавсия қилган ва унинг учун турли масалаларни академик А. В. Бицадзе текширган. Шунинг учун ҳам бу тенглама *Лаврентьев — Бицадзе тенгламаси* дейилади.

1- §. (1) тенгламани $y < 0$ ярим текисликда текшириш

$y<0$ ярим текисликда (1) тенглама гиперболик типга тегишли бўлиб, у

$$-(-y)^m u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (2)$$

кўринишга эга бўлади.

1. Коши масаласининг қўйилиши. Бизнинг асосий мақсадимиз (2) тенглама учун бошланғич шартлар параболик бузилиш чизиғида берилганда Коши масаласини ўрганишдир: (2) *тенгламанинг $y<0$ да ўзининг иккинчи тартибгача ҳосилалари билан узлуксиз бўлган ва $y=0$ ўқнинг бирор қисмида, масалан, $A(-1,0)$ $B(1,0)$ кесмада*

$$\lim_{y\to 0} u(x,y)=\tau(x), \qquad (3)$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x) \qquad (4)$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ ечими топилсин, бу ерда $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ — берилган функциялар ўзларининг иккинчи тартибгача хосилалари билан узлуксиздир.

(2) тенглама

$$\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} \qquad (5)$$

характеристик координаталарда ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{m}{2(m+2)}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{m}{2(m+2)}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0 \qquad (6)$$

кўринишда ёзилади. (6) тенглама Эйлер — Дарбу тенгламаси деб аталувчи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\alpha}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0 \qquad (7)$$

тенгламанинг хусусий ҳолидир, бу ерда α, β — ихтиёрий ўзгармаслар.

(5) алмаштириш $y<0$ да махсус бўлмаган алмаштиришдир, шу билан бирга (5) $y<0$ ярим текисликка $\eta>\xi$ ярим

текисликни мос қўяди. $y=0$ тўғри чизиқ, яъни $\eta-\xi=0$, бу алмаштиришнинг махсус чизиғидир. Ушбу

$$\eta-\xi=\frac{4}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(-y)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}}(\eta-\xi)^{\frac{m}{m+2}}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

тенгликларга асосан (3), (4) бошланғич шартлар

$$\lim_{\eta-\xi\to 0} u(\xi,\eta)=\tau(\xi),$$

$$\lim_{\eta-\xi\to 0}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}}(\eta-\xi)^{\frac{m}{m+2}}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\nu(\xi) \tag{8}$$

кўринишда ёзилади.

2. Эйлер — Дарбу тенгламаси учун Риман функцияси. Бизга III бобнинг 5- § идан маълумки, (7) Эйлер — Дарбу тенгламасининг Риман функцияси $R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ ушбу

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(-\frac{\alpha}{\xi-\eta}R\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\beta}{\xi-\eta}R\right)=0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\alpha}{\xi-\eta}\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{\beta}{\xi-\eta}\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{\alpha+\beta}{(\xi-\eta)^2}R=0 \tag{9}$$

қўшма дифференциал тенгламани қаноатлантиради ва $\xi=\xi_1$, $\eta=\eta_1$ характеристикаларда

$$R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1)=e^{-\int_{\eta_1}^{\eta}\frac{\alpha dt}{\xi_1-t}}=e^{\alpha\ln(\xi_1-t)\Big|_{\eta_1}^{\eta}}=\left(\frac{\xi_1-\eta}{\xi_1-\eta_1}\right)^{\alpha},$$

$$R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=e^{\int_{\xi_1}^{\xi}\frac{\beta dt}{t-\eta_1}}=\left(\frac{\xi-\eta_1}{\xi_1-\eta_1}\right)^{\beta} \tag{10}$$

қийматларни қабул қилади. Риман функциясини

$$R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=(\xi-\eta)^{\alpha+\beta}(\xi-\eta_1)^{-\alpha}(\xi_1-\eta)^{-\beta}F \tag{11}$$

кўринишда излаймиз, бу ерда F ҳозирча номаълум функция. (11) дан

$$R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1) = \left(\frac{\xi_1-\eta}{\xi_1-\eta_1}\right)^{\alpha} F\Big|_{\xi=\xi_1},$$

$$R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = \left(\frac{\xi-\eta_1}{\xi_1-\eta_1}\right)^{\beta} F\Big|_{\eta=\eta_1}.$$

Бу тенгликлардан (10) га асосан кўриняптики, $F\big|_{\xi=\xi_1} = F\big|_{\eta=\eta_1} = 1$ бўлиши керак. (11) да F олдидаги кўпайтмани ω орқали белгилаб олиб, R ни ва унинг ҳосилаларини (9) қўшма тенгламага қўйсак,

$$\omega F_{\xi\eta} + \left(\omega_\eta + \frac{\alpha}{\xi-\eta}\omega\right)F_\xi + \left(\omega_\xi - \frac{\beta}{\xi-\eta}\omega\right)F_\eta +$$
$$+\left(\omega_{\xi\eta} + \frac{\alpha\omega_\xi}{\xi-\eta} - \frac{\beta\omega_\eta}{\xi-\eta} - \frac{\alpha+\beta}{(\xi-\eta)^2}\omega\right)F = 0 \tag{12}$$

тенглама ҳосил бўлади.

ω нинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\omega_\xi = \left(\frac{\alpha+\beta}{\xi-\eta} - \frac{\alpha}{\xi-\eta_1}\right)\omega,\ \omega_\eta = \left(-\frac{\alpha+\beta}{\xi-\eta} + \frac{\beta}{\xi_1-\eta}\right)\omega,$$

$$\omega_{\xi\eta} = \left[\frac{(\alpha+\beta)(1-(\alpha+\beta))}{(\xi-\eta)^2} + \frac{\beta(\alpha+\beta)}{(\xi-\eta)(\xi_1-\eta)} +\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{(\xi-\eta)(\xi-\eta_1)} - \frac{\alpha\beta}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}\right]\omega.$$

ω ни ва унинг ҳосилаларини (12) тенгламага қўямиз, у ҳолда

$$F_{\xi\eta} + \beta\frac{\xi-\xi_1}{(\xi-\eta)(\xi_1-\eta)}F_\xi + \alpha\frac{\eta-\eta_1}{(\xi-\eta)(\xi-\eta_1)}F_\eta +$$
$$+ \alpha\beta\frac{(\xi_1-\eta_1)}{(\xi-\eta)(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}F = 0$$

ёки

$$\frac{(\xi-\eta)(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}{\xi_1-\eta_1}F_{\xi\eta}+\beta\frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\eta_1)}{\xi_1-\eta_1}F_{\xi}+$$
$$+\alpha\frac{(\eta-\eta_1)(\xi_1-\eta)}{\xi_1-\eta_1}F_{\eta}+\alpha\beta F=0 \qquad (13)$$

тенгламага эга бўламиз. Ушбу

$$\sigma=\frac{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}$$

белгилашни киритамиз.

Фараз қилайлик , F функция σ нинг функцияси бўлсин, яъни $F=F(\sigma)$. F ни ва унинг

$$F_{\xi}=F_{\sigma}\sigma_{\xi}\,,\qquad F_{\eta}=F_{\sigma}\sigma_{\eta}\,,\qquad F_{\xi\eta}=F_{\sigma\sigma}\sigma_{\eta}\sigma_{\xi}+F_{\sigma}\sigma_{\xi\eta}$$

ҳосилаларини ҳисоблагандан сўнг, (13) тенгламага қўямиз, содда ҳисоблашларни бажариб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\sigma(1-\sigma)\,F_{\sigma\sigma}+[1-(a+b+1)\sigma]F_{\sigma}-\alpha\beta F=0. \qquad (14)$$

Бизга VI бобдан маълумки, (14) тенглама Гаусс тенгламаси бўлиб, унинг ечими

$$F(\alpha,\beta,1,\sigma)=F\left(\alpha,\beta,1,\frac{(\xi_1-\xi)(\eta-\eta_1)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}\right)$$

гипергеометрик функциядан иборатдир.

Бундан дарҳол $F\big|_{\xi=\xi_1}=F\big|_{\eta=\eta_1}=1$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, Эйлер—Дарбу тенгламасининг Риман функцияси

$$R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=$$
$$=(\xi-\eta)^{\alpha+\beta}(\xi-\eta_1)^{-\alpha}(\xi_1-\eta)^{-\beta}F\left(\alpha,\beta,1,\frac{(\xi_1-\xi)(\eta-\eta_1)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}\right)$$

кўринишга эга бўлади.

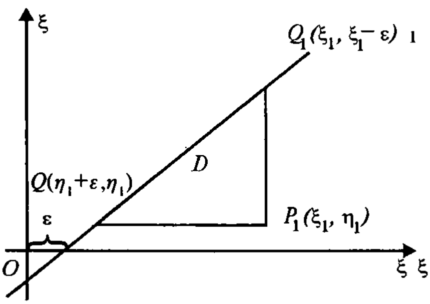
Бунга асосан, (6) тенглама учун Риман функцияси қуйидагича ёзилади:

$$R\left(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1\right)=(\xi-\eta)^{\frac{m}{m+2}}\left[(\xi-\eta_1)(\xi_1-\eta)\right]^{-\frac{m}{2(m+2)}}\times$$

$$\times F\left(\frac{m}{2m+4},\frac{m}{2m+4},1,\frac{(\xi_1-\xi)(\eta-\eta_1)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}\right).$$

3. Коши масаласининг ечилиши. Биз юқорида уқтириб ўтдикки, $\eta-\xi=0$ тўғри чизиқ (5) алмаштириш учун махсус чизиқдир, яъни бу чизиқда (6) тенгламанинг коэффициентлари чексизликка интилади. Шу билан бирга, $\xi\geq\eta+\varepsilon$ ярим текисликда, бу ерда ε — ихтиёрий мусбат сон, (6) тенглама учун Коши масаласи, биз III бобда кўрганимиздек , оддий усул билан ечилади, Коши масаласи, бошланғич шартлар $y=0$ параболик бузилиш чизиғида берилганда махсус текширишни талаб қилади.

D орқали $\xi=\eta+\varepsilon,\ \varepsilon>0$ тўғри чизиқнинг $Q(\eta_1+\varepsilon,\eta_1)$ $Q_1(\xi_1,\xi_1-\varepsilon)$ кесмаси ва (6) тенгламанинг $QP:\ \eta=\eta_1$. $Q_1P:\ \xi=\xi_1$ характеристикалари билан чегараланган соҳани белгилаймиз (34- чизма).



34- чизма

(6) тенгламанинг икки марта узлуксиз дифференциалланувчи $u(\xi,\eta)$ ечими учун III бобдан (63) формулага асосан қуйидаги айният ўринли бўлади:

$$u\left(\xi_1,\eta_1\right)=\frac{1}{2}u\left(\eta_1+\varepsilon,\eta_1\right)R\left(\eta_1+\varepsilon,\eta_1;\xi_1,\eta_1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}u\left(\xi_1,\xi_1-\varepsilon\right)R\left(\xi_1,\xi_1-\varepsilon;\xi_1,\eta_1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\overleftarrow{\sigma}}\left\{\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial N}R\left(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1\right)-u\left(\xi,\eta\right)\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial N}+\right.$$

$$+2u\left(\xi,\eta\right)R\left(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1\right)\times$$

$$\left.\times\left(-\frac{m}{2m+4}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{d\xi}{dn}+\frac{m}{2m+4}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{d\eta}{dn}\right)\right\}_{\eta=\xi-\varepsilon}ds.$$

Ушбу

$$\frac{d\xi}{dn}ds=-d\eta,\ \frac{d\eta}{dn}ds=d\xi \quad \text{ва } QQ_1 \text{ да } \quad d\xi=d\eta$$

ҳамда

$$\frac{\partial}{\partial N}ds=\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{d\eta}{dn}ds+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{d\xi}{dn}ds=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\eta}\right)d\xi$$

тенгликларни эътиборга олиб, аввалги айниятни

$$\begin{aligned} u(\xi_1,\eta_1)&=\frac{1}{2}u(\eta_1+\varepsilon,\eta_1)R(\eta_1+\varepsilon,\eta_1;\xi_1,\eta_1)+\\ &+\frac{1}{2}u(\xi_1,\xi_1-\varepsilon)R(\xi_1,\xi_1-\varepsilon;\xi_1,\eta_1)-\\ -\frac{1}{2}\int_{\eta_1+\varepsilon}^{\xi_1}&u(\xi,\xi-\varepsilon)\left[\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}-\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}-\frac{2m}{m+2}\times\right.\\ &\left.\times\frac{1}{\xi-\eta}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\right]_{\eta=\xi-\varepsilon}d\xi+ \qquad (15)\\ &+\frac{1}{2}\int_{\eta_1+\varepsilon}^{\xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=\xi-\varepsilon}R(\xi,\xi-\varepsilon;\xi_1,\eta_1)d\xi \end{aligned}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Гипергеометрик функциялар учун

$$\begin{aligned} F(a,b,c,x)&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b,1-c+a+b,1-x)+\\ &+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b,1+c-a-b,1-x), \end{aligned}$$

$$F(a,b,c,1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

тенгликлар ўринлидир. Буларга асосан, содда ҳисоблашларни бажаргандан сўнг

$$\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{2m}{m+2}\frac{1}{\xi-\eta}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\Big|_{\xi=\eta}=$$

$$=\frac{4}{m+2}\frac{\Gamma\left(-\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2m+4}\right)}(\xi_1-\eta_1)^{\frac{2}{m+2}}\left[(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)\right]^{-\frac{m+4}{2m+4}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Ушбу $\Gamma(1+x)=x\Gamma(x)$ формулага биноан,

$$\Gamma\left(-\frac{2}{m+2}\right)=-\frac{m+2}{2}\Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right).$$

Буни эътиборга олсак, (8) бошланғич шартларнинг биринчисига асосан,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{2m}{m+2}\frac{1}{\xi-\eta}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\right]_{\eta=\xi-\varepsilon}u(\xi,\xi-\varepsilon)=$$

$$=-2\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2m+4}\right)}(\xi_1-\eta_1)^{\frac{2}{m+2}}\left[(\xi-\eta_1)(\xi_1-\xi)\right]^{-\frac{m+4}{2m+4}}\tau(\xi). \qquad (16)$$

(8) бошланғич шартларнинг иккинчисига асосан эса

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=\xi-\varepsilon}R(\xi,\xi-\varepsilon;\xi_1,\eta_1)=$$

$$=\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m}{m+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+4}{2m+4}\right)}\left[(\xi-\eta_1)(\xi_1-\xi)\right]^{-\frac{m}{2m+4}}\nu(\xi). \qquad (17)$$

Шу билан бирга

$$\lim_{\varepsilon\to 0}R(\xi_1,\xi_1-\varepsilon;\xi_1,\eta_1)=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}R(\eta_1+\varepsilon,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=0. \qquad (18)$$

(16), (17), (18) тенгликларга кўра, (15) формуладан $\varepsilon\to 0$ да қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$u(\xi_1,\eta_1)=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2m+4}\right)}(\xi_1-\eta_1)^{\frac{2}{m+2}}\int_{\eta_1}^{\xi_1}\tau(\xi)\left[(\xi-\eta_1)(\xi_1-\xi)\right]^{-\frac{m+4}{2m+4}}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m}{m+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+4}{2m+4}\right)}\int_{\eta_1}^{\xi_1}\nu(\xi)\left[(\xi-\eta_1)(\xi_1-\xi)\right]^{-\frac{m}{2m+4}}d\xi.$$

Бу формулада $\xi=\frac{\xi_1-\eta_1}{2}t+\frac{\xi_1+\eta_1}{2}$ алмаштиришни бажариб,

$$\Gamma\left(\frac{m+4}{m+2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{2}{m+2}\right)=\frac{2}{m+2}\,\Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)$$

тенгликни эътиборга олсак, сўнгра

$\xi_1=x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}$, $\eta_1=x-\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}$ ларга асосан эски *(x,y)* ўзгарувчиларга қайтсак, ушбу

$$u(x,y)=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2m+4}\right)}2^{\frac{2}{m+2}}\int_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}t\right]\left(1-t^2\right)^{-\frac{m+4}{2m+4}}dt+$$

$$+2^{\frac{2}{m+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+4}{2m+4}\right)}y\int_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}t\right]\left(1-t^2\right)^{-\frac{m}{2m+4}}dt \qquad (19)$$

формулани ҳосил қиламиз.

(19) формула *Дарбу формуласи* дейилади.

Бевосита текшириб кўриш қийин эмаски, берилган $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлганда (19) формула билан аниқланган $u(x,y)$ функция x ва y бўйича иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, (2) тенгламани ҳамда (3), (4) бошланғич шартларни қаноатлантиради. Бу Коши масаласининг ягоналиги (19) формула, (2) тенгламанинг $\xi>\eta$ ярим текисликда ўзининг иккинчи тартибгача ҳосилалари билан узлуксиз бўлган ихтиёрий ечими учун ўринли бўлган (15) айниятнинг натижаси эканлигидан келиб чиқади. (19) формуланинг кўринишидан ечим бошланғич шартларга узлуксиз боғланганлиги, яъни турғунлиги ҳам дарҳол келиб чиқади

2- §. (1) тенгламани y > 0 ярим текисликда ўрганиш

$y>0$ ярим текисликда, яъни (1) тенглама эллиптик бўлганда у

$$E(u)\equiv y^m u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (20)$$

кўринишга эга бўлади.

1. (20) тенгламанинг фундаментал ечимлари. Маълумки, Лаплас тенгламаси, яъни (20) да $m = 0$ бўлганда, икки нуқта орасидаги масофага боғлиқ бўлган $\ln\frac{1}{r}$ фундаментал ечимга эга. Худди шунга ўхшаш, (20) тенгламанинг ҳам икки нуқта орасидаги масофаларга боғлиқ бўлган фундаментал ечимлари мавжуд. Бу ечимларни топиш мақсадида ушбу

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x-\xi)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}} \mp \eta^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$\rho = \frac{r^2}{r_1^2},\ \beta = \frac{m}{2(m+2)}$$

белгилашларни киритиб, (20) тенгламанинг ечимини

$$u = \left(r_1^2\right)^{-\beta}\omega(\rho) \tag{21}$$

кўринишда излаймиз. Бу функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаб, (20) тенгламага қўйганимиздан сўнг, $\omega(\rho)$ функцияга нисбатан

$$\rho(1-\rho)\omega'' + [1-(1+2\beta)\rho]\omega' - \beta^2\omega = 0 \tag{22}$$

тенгламага эга бўламиз. (22) тенглама бизга VI бобнинг 2- § идан маълум бўлган Гаусс тенгламасидан иборат бўлиб, у $\rho = 1$ нуқта атрофида иккита чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$\omega_1(\rho) = F(\beta,\ \beta,\ 2\beta,\ 1-\rho),$$
$$\omega_2(\rho) = (1-\rho)^{1-2\beta}F(1-\beta, 1-\beta,\ 2-2\beta,\ 1-\rho)$$

ечимларга эга. Буларни (21) га қўйиб, (20) тенгламанинг иккита ечимини ҳосил қиламиз:

$$g_1(x,y;\xi,\eta) = k_1\left(r_1^2\right)^{-\beta}F(\beta,\beta,2\beta,1-\rho), \tag{23}$$

$$\begin{aligned} g_2(x,y;\xi,\eta) = k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}\left(r_1^2\right)^{-\beta}(1-\rho)^{1-2\beta}\times \\ \times F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta,1-\rho), \end{aligned} \tag{24}$$

бу ерда k_1 ва k_2 — ўзгармаслар.

Гипергеометрик функциялар назариясидан маълум бўлган

$$F(a,b,a+b,1-z)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(a,b,1,z)\ln z+\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{(k!)^2}\left[2\frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)}-\frac{\Gamma'(a+k)}{\Gamma(a+k)}-\frac{\Gamma'(b+k)}{\Gamma(b+k)}\right]z^k$$

формулага асосан, $r\to 0$ ва $r\to 0$ $(y>0)$ да (23), (24) ечимлар логарифмик махсусликка эга эканлиги келиб чиқади.

Демак, улар (20) тенгламанинг фундаментал ечимларидан иборатдир. Бу фундаментал ечимлар барча x лар учун

$$\left.\frac{\partial g_1(x,y;\xi,\eta)}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\ g_2(x,0;\xi,\eta)=0 \qquad (25)$$

шартларни қаноатлантиришини текшириб кўриш қийин эмас. Шу билан бирга фундаментал ечимлар (x, y), (ξ, η) нуқталарга нисбатан симметрикдир. Бундан кейин

$$k_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)},\ k_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}$$

деб ҳисоблаймиз.

2. (20) тенглама учун асосий чегаравий масалаларнинг қўйилиши ва улар ечимларининг ягоналиги. D орқали x ўқининг $A(-1,0)$ $B(1,0)=J$ кесмаси ва $y>0$ ярим текисликда ётувчи, учлари A ва B нуқталарда бўлган силлиқ σ эгри чизиқ билан чегараланган соҳани белгилаб оламиз.

Дирихле масаласи. *D соҳада регуляр, ёпиқ $\overline{D}$ соҳада узлуксиз ва*

$$u|_{\sigma}=\varphi(s),\ u|_{\overline{J}}=\tau(x) \qquad (26)$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи (20) *тенгламанинг ечими топилсин, бу ерда s — B нуқтадан ҳисобланадиган σ эгри чизиқ ёйининг узунлиги, $\varphi(s)$* ва *$\tau(x)$* — берилган узлуксиз функциялар, шу билан бирга $\tau(A)=\varphi(l)$, $\tau(B)=\varphi(0)$, l — σ эгри чизиқ узунлиги.

N масала. *D соҳада регуляр, ёпиқ $\overline{D}$ соҳада узлуксиз ва*

$$u|_\sigma = \varphi(s), \qquad \lim_{y\to 0} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu(x) \quad x \in J \tag{27}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи (20) *тенгламанинг ечими топилсин, бу ерда* $\varphi(s)$ — $0 \le s \le l$ *да берилган узлуксиз функция,* $\nu(x)$ *эса* J *да берилган узлуксиз функция бўлиб, бу интервалнинг четки нуқталарида* $\frac{2}{m+2}$ *дан кичик бўлган тартибда чексизликка айланиши мумкин.*

Бу масалалар ечимларининг ягоналигини исботлаш учун эллиптик типдаги тенгламалар назариясидан иккита далилни келтириб ўтамиз.

Чегараси S бўлган G соҳада

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_1\frac{\partial u}{\partial y} + c_1 u = 0 \tag{28}$$

тенгламани текширамиз. G соҳада $ady^2 + 2bdxdy + cdx^2 = 0$ форма мусбат аниқланган, яъни (20) тенглама эллиптик типга тегишли бўлсин.

Хопф принципи. *Агар* $u(x,y)$ *функция* (28) *тенгламанинг айнан нолга тенг бўлмаган* G *соҳада регуляр,* $G \cup S$ *да узлуксиз ечими бўлиб,*

$$c_1 \le 0$$

шарт бажарилса, у ҳолда барча G *соҳада*

$$|u| < max_S|u|,$$

агарда $c_1 = 0$ *бўлса*

$$min_S u < u < max_S|u|$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Заремба—Жира принципи. $u(x,y)$ *функция эллиптик типга тегишли бўлган* (28) *тенгламанинг* G *соҳадаги регуляр ечими бўлсин. Агар* G *соҳа* S *чегарасининг* P *нуқтасида* $u(x,y)$ *ўзининг экстремал қийматини қабул қилиб,* S *контур шундай хоссага эга бўлсаки,* G *да ётувчи* P *нуқтадан* k *айланача ўтказиш мумкин бўлса, у ҳолда* k *айланачанинг марказига қараб йўналган* r *радиус бўйича олинган* $\frac{\partial u}{\partial r}$ *ҳосила (агар у мавжуд бўлса)* P *нуқтада нолдан фарқли бўлади; шу билан бирга максимум бўлган ҳолда* $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$, *минимум бўлган ҳолда эса* $\frac{\partial u}{\partial r} > 0$ *бўлади.*

(20), (26) *Дирихле масаласининг ечими ягона бўлади.* Ҳақиқатан ҳам, агар $u_1(x,y)$ ва $u_2(x,y)$ функциялар (20) тенгламани ва (26) чегаравий шартни қаноатлантирувчи иккита ечим бўлса, буларнинг айирмаси $u = u_1 - u_2$ (20) тенгламани ва $u|_\sigma = 0$, $u|_{\bar{J}} = 0$ бир жинсли чегаравий шартни қаноатлантиради. Бундан, Хопф принципига асосан $u \equiv 0$, яъни $u_1 = u_2$ эканлиги келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш *N масала ҳам биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.* Бу фикрнинг тўғрилиги юқорида келтирилган икки принципдан дарҳол келиб чиқади.

3. Грин формуласи ва N масаланинг Грин функцияси. Ушбу

$$uE(\upsilon) - \upsilon E(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left[y^m\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial y} - \upsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

айниятни текшириб кўриш қийин эмас. Бу айниятнинг ҳар икки томонини $y > 0$ ярим текисликда ётувчи Γ эгри чизиқ билан чегараланган Ω соҳа бўйича интеграллаб, сўнгра Гаусс — Остроградский формуласини қўллаймиз:

$$\int\limits_{\Omega}\left[uE(\upsilon) - \upsilon E(u)\right]dxdy = \int\limits_{\Gamma}\left[y^m\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\cos(n,x) +$$

$$+\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial y} - \upsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n,y)\Big]ds,$$

бу ерда n — Γ эгри чизиққа ўтказилган ташқи нормал, $\frac{dy}{ds} = \cos(n,x)$, $\frac{dx}{ds} = -\cos(n,y)$ тенгликларни эътиборга олиб,

$$A_S[\ ] = y^m\frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial y}$$

белгилашни киритсак, аввалги тенглик қуйидагича ёзилади:

$$\int\limits_{\Omega}\left[uE(\upsilon) - \upsilon E(u)\right]dxdy = \int\limits_{\Gamma}\left(uA_S[\upsilon] - \upsilon A_S[u]\right)ds. \qquad (29)$$

Бу формула Грин формуласи дейилади.

Агар u, υ — (20) тенгламанинг ечимлари бўлса, (29) дан

$$\int_{\Gamma}\left(uA_S[\upsilon]-\upsilon A_S[u]\right)ds=0 \qquad (30)$$

формула ҳосил бўлади. Одатда $A_S[\ ]$ ифода *конормал ҳосила* дейилади. (29) формулада $\upsilon\equiv 1$ бўлиб, u функция (20) тенгламанинг ечими бўлса, u ни u^2 билан алмаштириб, ушбу

$$\int_{\Omega}\left[y^m\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=\int_{\Gamma}uA_S[u]ds$$

формулага эга бўламиз. Ниҳоят, (30) формулада $\upsilon\equiv 1$ десак,

$$\int_{\Gamma}A_S[u]ds=0$$

бўлади, яъни (20) тенглама Ω соҳадаги ечимининг конормал ҳосиласидан соҳанинг чегараси бўйича олинган интеграл нолга тенг.

(20) тенглама учун *N масаланинг Грин функцияси* деб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G_1(\xi,\eta;\,x,y)$ функцияга айтилади.

1) $G_1(\xi,\eta;\,x\,,\,y)$ функция (x,y) нуқтадан ташқари барча D соҳада (20) тенгламанинг ечимидан иборат;

2) ушбу

$$G_1\left(\xi,\eta,x,y\right)\big|_{\sigma}=0,\frac{\partial G_1}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}=0,\ \left(x,y\right)\in D \qquad (31)$$

чегаравий шартларни қаноатлантиради;

3)

$$G_1(\xi,\,\eta;\,x\,,y)=g_1(\xi,\,\eta;\,x,\,y)+\upsilon_1(\xi,\,\eta;\,x,\,y) \qquad (32)$$

кўринишга эга бўлади, бунда $g_1(\xi,\,\eta;\,x,\,y)$ (20) тенгламанинг фундаментал ечими, $\upsilon_1(\xi,\,\eta;\,x,\,y)$ эса барча D соҳада (20) тенгламанинг $(x,\,y)$ бўйича ҳам, $(\xi,\,\eta)$ бўйича ҳам регуляр ечимидир.

Грин функциясини тузиш (25), (31) ва (32) ларга асосан унинг

$$\upsilon_1\left(\xi,\eta,x,y\right)\big|_{\sigma}=-g_1\left(\xi,\eta,x,y\right)\big|_{\sigma}\,,\ \frac{\partial\upsilon_1(\xi,\eta,x,y)}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}=0,\ \left(x,y\right)\in D$$

шартларни қаноатлантирувчи $\upsilon_1(\xi, \eta; x, y)$ регуляр қисмини топишга келади.

Лаплас тенгламасини текширганимизда потенциалларни тузиб, қандай ўрганган бўлсак, бу ерда ҳам $g_1(\xi, \eta; x, y)$, $g_2(\xi, \eta; x, y)$ фундаментал ечимларга асосланиб оддий ва иккиланган қатлам потенциалларини тузиб, уларнинг хоссаларини текшириб, булар ёрдамида $\upsilon_1(\xi, \eta; x, y)$ регуляр ечимни топиб олишимиз мумкин. Бу масалаларни текширишга биз бу ерда тўхталмаймиз. Лекин, σ эгри чизиқ *нормал эгри чизиқ* деб аталувчи

$$\sigma_0 : x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = 1$$

эгри чизиқ билан устма-уст тушганда Грин функциясини дарҳол ёзиб олишимиз мумкин. У ушбу

$$G_1(\xi,\eta,x,y) = g_1(\xi,\eta,x,y) - \left(R^2\right)^{-\beta} g_1\left(\xi,\eta,\overline{x},\overline{y}\right)$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда

$$R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, \quad \overline{x} = \frac{x}{R^2}, \quad \overline{y}^{\frac{m+2}{2}} = \frac{y^{\frac{m+2}{2}}}{R^2}.$$

4. N масаланинг ечими. σ_0 нормал эгри чизиқ ва $y = \delta$ тўғри чизиқнинг кесмаси билан чегараланган соҳани D_δ орқали белгилаймиз. $y = \delta$ тўғри чизиқнинг σ_0 билан кесишиш натижасида ҳосил бўлган нуқталарнинг абсциссаларини x_1 ва x_2 орқали белгилаймиз. D_δ соҳанинг (x, y) нуқтасини марказ қилиб етарли кичик ε радиусли ва D_δ да тўла ётувчи C_ε айлана чизамиз. σ_0 , x_1 x_2 ва C_ε билан чегараланган соҳада Грин функцияси $G_1(\xi, \eta; x, y)$ (20) тенгламанинг регуляр ечимидан иборат бўлади. $u(x, y)$ функция (27) шартларни қаноатлантирувчи (20) тенгламанинг регуляр ечими бўлсин. Бу икки функцияга (30) формулани қўллаймиз:

$$\int\limits_{\sigma_0 + x_1x_2 + C_\varepsilon} \left(uA_S[G_1] - G_1A_S[u]\right) ds = 0.$$

(27) ва (31) шартларни эътиборга олсак,

$$\int\limits_{\overleftarrow{\sigma_0}} \varphi(s) A_S[G_1] ds + \int\limits_{x_1}^{x_2} \nu(\xi) G_1(\xi, 0, x, y) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\overrightarrow{C_\varepsilon}} \left(u A_t [G_1] - G_1 A_t [u] \right) dt = 0$$

ёки

$$- \int\limits_{\overleftarrow{C_\varepsilon}} \left(u A_t [G_1] - G_1 A_t [u] \right) dt = - \int\limits_{x_1}^{x_2} \nu(\xi) G_1(\xi, 0, x, y) d\xi -$$
$$- \int\limits_{\sigma_0} \varphi(S) A_S[G_1] \quad ds \tag{33}$$

тенглик ҳосил бўлади. C_ε нинг тенгламасини ҳозирча $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ десак, бевосита ҳосилаларни ҳисоблаш натижасида ушбу

$$A_t \left[g_1(\xi, \eta, x, y) \right] = \eta^m \frac{\partial g_1}{\partial \xi} \eta'(t) - \frac{\partial g_1}{\partial \eta} \xi'(t) =$$
$$- u_1 \eta^{-1} (m+2) \left[(\xi - x) \frac{2}{m+2} \eta^{m+1} \eta'(t) - \right.$$
$$\left. - \frac{4\xi'(t)}{(m+2)^2} \eta^{\frac{m+2}{2}} \left(\eta^{\frac{m+2}{2}} + y^{\frac{m+2}{2}} \right) \right] - u_2 \frac{4}{m+2} \eta^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m+2}{2}} \frac{h(x,y,t)}{r^2} \tag{34}$$

ифодага эга бўламиз, бу ерда

$$u_1 = \frac{\beta k_1}{\left(r_1^2\right)^{\beta+1}} F(\beta, \beta, 2\beta, 1-\rho), \; u_2 = \frac{\beta k_1}{\left(r_1^2\right)^{\beta+1}} F(\beta, \beta, 2\beta+1, 1-\rho),$$

$$h(x, y, t) = 2(\xi - x) \frac{2\eta^{m+1}}{m+2} \eta'(t) +$$
$$+ \xi'(t)(x - \xi)^2 - \frac{4\xi'(t)}{(m+2)^2} \left(\eta^{m+2} - y^{m+2} \right).$$

Энди C_ε айлананинг тенгламасини қутб координаталарда $\xi - x = \varepsilon \cos t$, $\eta - y = \varepsilon \sin t$ ёзиб оламиз. У ҳолда

$$\left(y+\varepsilon\sin t\right)^{\frac{m+2}{2}}=y^{\frac{m+2}{2}}+\frac{m+2}{2}\varepsilon y^{\frac{m}{2}}\sin t+\alpha_1\left(y,t,\varepsilon\right)$$

тенгликка асосан

$$r^2=\varepsilon^2\cos^2 t+\frac{4}{(m+2)^2}\left[\left(y+\varepsilon\sin t\right)^{\frac{m+2}{2}}-y^{\frac{m+2}{2}}\right]^2=$$

$$=\varepsilon^2\cos^2 t+\varepsilon^2 y^m\sin^2 t+\alpha_2\left(y,t,\varepsilon\right),\quad \alpha_2=O\left(\varepsilon^3\right)$$

$$\eta^{m+2}=\left(y+\varepsilon\sin t\right)^{m+2}=y^{m+2}+(m+2)\varepsilon y^{m+1}\sin t+\gamma_1\left(y,t,\varepsilon\right),$$

$$h(x,y,t)=2\varepsilon^2\cos^2 t\frac{2}{m+2}\left(y+\varepsilon\sin t\right)^{m+1}-\varepsilon\sin t\varepsilon^2\cos^2 t+$$

$$+\frac{4}{(m+2)^2}\varepsilon\sin t(m+2)\varepsilon y^{m+1}\sin t+\gamma_2\left(y,t,\varepsilon\right)=\frac{4}{m+2}\varepsilon^2\times$$

$$\times\left[\cos^2 t\left(y+\varepsilon\sin t\right)^{m+1}-\varepsilon\frac{m+2}{4}\sin t\cos^2 t+y^{m+1}\sin^2 t+\gamma_3\left(y,t,\varepsilon\right)\right],$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\gamma_3=0$$

Юқоридаги тengликларни эътиборга олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{h(x,y,t)}{r^2}=\frac{\frac{4}{m+2}y^{m+1}}{\cos^2 t+y^{m+1}\sin^2 t},\tag{35}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left(r_1^2\right)^{-(\beta+1)}=\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta-2}y^{-\frac{3m+4}{2}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}u_2=\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta-2}y^{-\frac{3m+4}{2}}\beta k_1F\left(\beta,\beta,1+2\beta,1\right)=$$

$$=2k_1\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta-2}\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}y^{-\frac{3m+4}{2}}.\tag{36}$$

Биз бу ерда VI бобдаги (11), (21) формулалардан фойдаландик. Энди, (35) ва (36) га асосан, k_1 нинг қийматини эътиборга олсак,

$$\lim_{\varepsilon\to0}u_2\frac{4}{m+2}\eta^{\frac{m}{2}}y^{\frac{m+2}{2}}\frac{h(x,y,t)}{r^2}=\frac{1}{2\pi}\frac{y^{\frac{m}{2}}}{\cos^2 t+y^m\sin^2 t}.\tag{37}$$

$u(x, y)$ ва $\left(R^2\right)^{-\beta} g_1\left(\xi,\eta;\bar{x},\bar{y}\right)$ функциялар (20) тенгламанинг регуляр ечимлари бўлганлиги сабабли

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c_\varepsilon} G_1 A_t[u]dt = 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c_\varepsilon} uA_t\left[\left(R^2\right)^{-\beta} g_1\left(\xi,\eta;\bar{x},\bar{y}\right)\right]dt = 0$$

бўлади. Шунинг учун ҳам, (34) ва (37) га асосан

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overleftarrow{c_\varepsilon}} uA_t[g_1]dt = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} u\left(x+\varepsilon\cos t, y+\varepsilon\sin t\right) A_t[g_1]dt =$$

$$= u(x,y)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{y^{\frac{m}{2}}}{\cos^2 t+y^m\sin^2 t}dt = u(x,y)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{y^{\frac{m}{2}}}{\cos^2 t}}{1+y^m tg^2 t}dt = u(x,y).$$

Шундай қилиб, (33) формулада $\varepsilon\to 0$ ва $\delta\to 0$ да лимитга ўтсак,

$$u(x,y) = -\int_{-1}^{1}\nu(\xi)G_1(\xi,0,x,y)d\xi - \int_{\sigma_0}\varphi(s)A_S[G_1]ds \qquad (38)$$

формулага эга бўламиз. (38) формула билан аниқланган $u(x, y)$ функциянинг ҳақиқатан ҳам N масаланинг ечими эканлигига бевосита текшириб кўриш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

5. Дирихле масаласининг ечими. (20) тенглама учун *Дирихле масаласининг Грин функцияси* деб, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $G_2(\xi, \eta; x, y)$ функцияга айтилади:

1) бу функция (x, y) нуқтадан ташқари барча D соҳада (20) тенгламанинг ечимидан иборат;

2) (x, y) ёки (ξ, η) нуқта D соҳанинг чегарасида ётганда бу функция нолга тенг, яъни

$$G_2(\xi, \eta; x, y)\big|_{\sigma+AB} = 0;$$

3) ушбу

$$G_2(\xi, \eta; x, y) = g_2(\xi, \eta; x, y) + \upsilon_2(\xi, \eta; x, y)$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда $g_2(\xi, \eta; x, y)$ — (20) тенгламанинг фундаментал ечими, $\upsilon_2(\xi, \eta; x, y)$ эса барча D соҳада (20) тенгламанинг регуляр ечими.

D соҳа σ_0 нормал эгри чизиқ билан чегараланганда, одатда бу ҳолда соҳани ҳам *нормал соҳа* деб юритилади, Грин функцияси

$$G_2(\xi, \eta; x, y) = g_2(\xi, \eta; x, y) - (R^2)^{-\beta} g_2(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y})$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда

$$R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}, \ \bar{x} = \frac{x}{R^2}, \ \bar{y}^{\frac{m+2}{2}} = \frac{y^{\frac{m+2}{2}}}{R^2}.$$

Бу ҳолда Дирихле масаласининг ечими ушбу

$$u(x, y) = \int_{-1}^{1} \tau(\xi) \left.\frac{\partial G_2(\xi, \eta, x, y)}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} d\xi - \int_{\sigma_0} \varphi(s) A_S[G_2] ds \qquad (39)$$

формула билан ифодаланади. N масаланинг ечими қандай мулоҳазалар билан ҳосил қилинган бўлса, (39) формула ҳам худди шундай мулоҳазалар натижасида келтириб чиқарилади.

3- §. Трикоми масаласи

1. (1) тенглама учун Трикоми масаласининг қўйилиши. $D - x, y$ ўзгарувчилар текислигида учлари $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ нуқталарда бўлган $y > 0$ юқори ярим текисликда ётувчи Жордан эгри чизиғи σ билан, $y < 0$ ярим текисликда эса (1) тенгламанинг

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = -1, \ BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

характеристикалари билан чегараланган чекли бир боғламли аралаш соҳа бўлсин. D соҳанинг $y > 0$ ва $y < 0$ ярим текисликларда ётувчи қисмларини D^+ ва D^- орқали белгилаб оламиз. (1) тенглама бу қисмларнинг бирида эллиптик, иккинчисида эса гиперболик бўлгани учун уларни D соҳанинг *эллиптик ва гиперболик қисмлари* деб атаймиз.

Т масала. *D соҳада регуляр, $\overline{D}$ да узлуксиз σ эгри чизиқда ва характеристикалардан биттасида, масалан, AC да берилган*

$$u|_{\sigma} = \varphi(s), \qquad u|_{AC} = \psi(x) \tag{40}$$

қийматларни қабул қилувчи (1) *тенгламанинг ечими топилсин, бу ерда $\varphi(l) = \psi(0)$, l –σ* эгри чизиқнинг узунлиги.

Т масаланинг шартига кўра $\tau(x) = u(x, 0)$ функция $-1 \le x \le 1$ кесмада узлуксиз бўлиши керак. Бундан ташқари, $\nu(x) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0}$ ва $\frac{d\tau}{dx}$ функциялар очиқ $-1 < x < 1$ кесмада узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлиши керак.

2. D соҳанинг D^- гиперболик қисмидан келтирилган $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар орасидаги муносабат. D^- соҳада Коши масаласининг ечимидан иборат бўлган, (19) Дарбу формуласи билан аниқланган $u(x, y)$ функцияни (40) шартларнинг иккинчисига асосан $AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = -1$ характеристикада берилган $\psi(x)$ функцияга тенглаймиз:

$$\psi(x) = \gamma_1 2^{\frac{2}{m+2}} \int_{-1}^{1} \tau\left[x + (x+1)t\right]\left(1 - t^2\right)^{\beta-1} dt - \gamma_2 (1+x)^{\frac{2}{m+2}} \times$$
$$\times \int_{-1}^{1} \nu\left[x + (x+1)t\right]\left(1 - t^2\right)^{-\beta} dt, \ -1 \le x \le 0, \tag{41}$$

бу ерда

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \ \gamma_2 = \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}} \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Агар $x = \frac{x_1-1}{2}$ алмаштиришни бажарсак, $x \in [-1, 0]$ бўлганда $x_1 \in [-1, 1]$ бўлади, сўнгра x_1 ўрнига яна x ёзсак, (41)

$$\psi\left(\frac{x-1}{2}\right) = \gamma_1 2^{\frac{2}{m+2}} \int_{-1}^{1} \tau\left(\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{2}t\right)\left(1 - t^2\right)^{\beta-1} dt -$$
$$-\gamma_2 \left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{2}{m+2}} \int_{-1}^{1} \nu\left(\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{2}t\right)\left(1 - t^2\right)^{-\beta} dt, -1 \le x \le 1$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликда $\frac{x-1}{2}+\frac{x+1}{2}t=s$ алмаштиришни бажарсак, у қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\psi\left(\frac{x-1}{2}\right)=\gamma_1(1+x)^{1-2\beta}\int_{-1}^{x}\tau(s)(1+s)^{\beta-1}(x-s)^{\beta-1}ds-$$
$$-\gamma_2\int_{-1}^{x}\nu(s)(1+s)^{-\beta}(x-s)^{-\beta}ds,\ -1\le x\le 1 \qquad (42)$$

Бу формулани қулайроқ кўринишда ёзиб олиш мақсадида VIII бобда киритилган каср тартибли интегралдан фойдаланамиз. Шунга мувофиқ

$$\int_{-1}^{x}\tau(s)(1+s)^{\beta-1}(x-s)^{\beta-1}ds=\Gamma(\beta)D_{-1x}^{-\beta}(1+x)^{\beta-1}\tau(x)$$

$$\int_{-1}^{x}\nu(s)(1+s)^{-\beta}(x-s)^{-\beta}ds=\Gamma(1-\beta)D_{-1x}^{-(1-\beta)}(1+x)^{-\beta}\nu(x).$$

Буларга асосан, (42) тенглик, ушбу

$$D_{-1x}^{-\beta}(1+x)^{\beta-1}\tau(x)=\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}{\gamma_1\Gamma(\beta)}(1+x)^{2\beta-1}D_{-1x}^{-(1-\beta)}(1+x)^{-\beta}\nu(x)+$$
$$+\frac{(1+x)^{2\beta-1}}{\gamma_1\Gamma(\beta)}\psi\left(\frac{x-1}{2}\right) \qquad (43)$$

кўринишда ёзилади. (43) тенгликнинг ҳар икки томонига D_{-1x}^{β} оператор билан таъсир қиламиз. У ҳолда VIII бобдаги (102), (109) формулаларга асосан

$$(1+x)^{\beta-1}\tau(x)=\frac{\gamma_1\Gamma(1-\beta)}{\gamma_2\Gamma(\beta)}(1+x)^{\beta-1}D_{-1x}^{2\beta-1}\nu(x)+$$
$$+\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\beta)}D_{-1x}^{\beta}(1+x)^{2\beta-1}\psi\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

ёки

$$\tau(x)=\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}{\gamma_1\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)}\int_{-1}^{x}\nu(s)(x-s)^{-2\beta}ds+\psi_1(x), \qquad (44)$$

бу ерда

$$\psi_1(x) = \frac{(1+x)^{1-\beta}}{\gamma_1 \Gamma(\beta)} D_{-1x}^{\beta} (1+x)^{2\beta-1} \psi\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

Ушбу

$$\frac{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)}{\gamma_1 \Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)} = 2k_1 \sin \beta\pi$$

тенгликни бевосита текшириб кўриш қийин эмас. Бунга асосан, (44)

$$\tau(x) = 2k_1 \sin \beta\pi \int_{-1}^{x} \nu(s)(x-s)^{-2\beta} ds + \psi_1(x) \tag{45}$$

кўринишда ёзилади.

(45) формула, (1) тенгламанинг $u(x, y)$ ечими D^- соҳада AC характеристикада берилган $\psi(x)$ қийматни қабул қилишидан аниқланадиган *биринчи функционал тенгламани* беради. Агар $\psi(x) = 0$ бўлса, (45) формула соддароқ

$$\tau(x) = 2k_1 \sin \beta\pi \int_{-1}^{x} \nu(s)(x-s)^{-2\beta} ds =$$
$$= 2k_1 \sin \beta\pi \, \Gamma(1-2\beta) D_{-1x}^{2\beta-1} \nu(x)$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонига $D_{-1x}^{2\beta-1}$ оператор билан таъсир қилиб, $\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta) = = \frac{\pi}{\sin 2\beta\pi}$, $\sin 2\beta\pi = 2\sin\beta\pi\cos\beta\pi$ тенгликларга ва VIII бобдаги (101) формулага асосан

$$\frac{\pi k_1}{\cos \beta\pi} \nu(x) = \frac{d}{dx} \int_{-1}^{x} \tau(s)(x-s)^{2\beta-1} ds \tag{46}$$

формулага эга бўламиз.

3. Экстремум принципи ва Т масала ечимининг ягоналиги. *AC характеристикада нолга тенг бўлган T масаланинг $u(x, y)$ ечими ёпиқ $\overline{D}^+$ соҳада мусбат максимумни ва манфий минимумни σ эгри чизиқда қабул қилади.*

Ҳақиқатан ҳам, Хопф принципига асосан D^+ соҳанинг ичида $u(x, y)$ функция экстремумга эришмайди. Фараз қилайлик, мусбат максимумга $u(x, y)$ функция $\overline{D}^+$ ёпиқ соҳада $-1 < x < 1$ кесманинг бирор ички $P(x_0, 0)$ нуқтасида эришсин. (46) тенгликни

$$\frac{\pi k_1}{\cos\beta\pi}\nu(x)=\frac{\tau(x)}{(1+x)^{1-2\beta}}+(1-2\beta)\int_{-1}^{x}\frac{\tau(x)-\tau(s)}{(1+x)^{2-2\beta}}ds$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу формулага мувофиқ $x = x_0$ да $\tau(x_0) > 0$, $\tau(x_0) - \tau(s) \geq 0$ бўлганлиги сабабли $\nu(x_0) > 0$ бўлади. Бу тенгсизлик эса Заремба — Жиро принципига қарама-қаршидир. Экстремум принципидан Т масала ечимининг ягоналиги келиб чиқади. Чиндан ҳам, агар бир жинсли, яъни $\varphi = \psi = 0$ бўлган T масалани қарасак, ҳозиргина исботланган принципга кўра D^+ соҳада регуляр, $\overline{D}^+$ да узлуксиз бўлган $u(x, y)$ ечим ўзининг экстремумини σ да қабул қилади, σ да эса $u = 0$.

Демак, барча $\overline{D}^+$ да $u \equiv 0$ бўлади. (46) формуладан $\nu(x) = 0$ эканлиги келиб чиқади. У ҳолда (19) Дарбу формуласидан $u(x, y)$ функция D^- соҳада ҳам айнан нолга тенг бўлади.

4. Т масала ечимининг мавжудлиги. Аввало (1) тенглама учун Трикоми масаласи ечими мавжудлигининг Трикоми тавсия қилган исботнинг ғояси тўғрисида тўхталиб ўтамиз. Бу ғоя шундан иборатки, $\nu(x) = \lim\limits_{y\to 0} u_y(x, y)$ функцияни маълум деб ҳисоблаб, D^+ соҳада N масала, D^- соҳада эса Коши ёки Коши—Гурса масаласи ечилади. Сўнгра ҳосил қилинган иккита ечимни ва уларнинг биринчи тартибли ҳосилаларини параболик бузилиш чизиғининг AB кесмасида бир-бирига уланади, яъни тенглаштирилади. Шундай қилиб, T масала ечими мавжудлигининг исботи $\nu(x)$ функцияга нисбатан, T масалага эквивалент бўлган сингуляр интеграл тенгламани ечишга келади. Бу тенгламанинг ечилиши T масала ечимининг ягоналигидан келиб чиқди. Энди

$$g_1(x,0;\xi,0)=k_1\,|\,x-\xi\,|^{-2\beta},$$

$$g_1(\bar{x},0;\xi,0)=k_1\left(\frac{x}{x^2}-\xi\right)^{-2\beta}=k_1x^{2\beta}(1-x\xi)^{-2\beta}$$

тенгликларни эътиборга олиб, N масаланинг ечимини берувчи (38) формулада $y = 0$ десак,

$$\tau(x) = -k_1 \int_{-1}^{1} \nu(\xi)\left[|x-\xi|^{-2\beta} - (1-x\xi)^{-2\beta}\right] d\xi + \varphi_1(x) \quad (47)$$

формулани ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\varphi_1(x) = -\int_{\sigma_0} \varphi(s) A_S\left[G_1(\xi,\eta;x,0)\right] ds.$$

(47) формула (1) тенгламанинг $u(x, y)$ ечими D^+ соҳанинг σ чегарасида берилган $\varphi(s)$ қийматни қабул қилишидан аниқланадиган AB кесмадаги *иккинчи функционал тенгламани* беради.

Аввалги бандларда олинган натижаларга асосан (1) тенглама учун Трикоми масаласи ечимининг мавжудлиги масаласи (45) ва (47) тенгламаларнинг ечилиш масаласига эквивалентдир. Бу тенгламалардан $\tau(x)$ ни чиқариб ташлаш натижасида

$$\int_{-1}^{x} \nu(s)(x-s)^{-2\beta} ds = -\frac{1}{2\sin\beta}\int_{-1}^{1} \nu(\xi)\left[|x-\xi|^{-2\beta} - (1-x\xi)^{-2\beta}\right]\times$$

$$\times d\xi + \frac{1}{2k_1 \sin\beta\pi}\left[\varphi_1(x) - \psi_1(x)\right] \quad (48)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Ушбу

$$\int_{-1}^{x} \nu(s)(x-s)^{-2\beta} ds = \Gamma(1-2\beta) D_{-1x}^{2\beta-1}\nu(x)$$

формулани эътиборга олиб, (48) тенгликнинг ҳар икки томонига $D_{-1x}^{1-2\beta}$ оператор билан таъсир қиламиз, у ҳолда

$$\nu(x) = \frac{-1}{2\Gamma(1-2\beta)\sin\beta\pi} D_{-1x}^{1-2\beta}\times$$

$$\times\left\{\int_{-1}^{1} \nu(\xi)\left[|x-\xi|^{-2\beta} - (1-x\xi)^{-2\beta}\right] d\xi\right\} + h(x),$$

бу ерда

$$h(x) = \frac{1}{2k_1\Gamma(1-2\beta)\sin\beta\pi} D_{-1x}^{1-2\beta}\left[\varphi_1(x) - \psi_1(x)\right]$$

ёки

$$\nu(x) = -\frac{\cos\beta\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\times$$

$$\times\left\{\int_{-1}^{x}(x-t)^{2\beta-1}dt\int_{-1}^{1}\nu(\xi)\left[|t-\xi|^{-2\beta}-(1-t\xi)^{-2\beta}\right]d\xi\right\}dt+h(x).$$

VIII бобдаги (111) айниятга асосан ушбу

$$\nu(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\nu(t)dt = h_1(x) \qquad (49)$$

тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$h_1(x) = \frac{h(x)}{1+\sin\beta\pi}, \qquad \lambda = \frac{\cos\beta\pi}{\pi(1+\sin\beta\pi)}.$$

Шундай қилиб, Трикоми масаласини унга эквивалент бўлган $\nu(x)$ функцияга нисбатан сингуляр интеграл тенгламага олиб келдик. Ушбу

$$\frac{1+t}{1+x}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)=\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}$$

айниятдан фойдаланиб, (49) тенгламани

$$\nu(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right)\nu(t)dt+\lambda\int_{-1}^{1}K(x,t)\nu(t)=h_1(x) \quad (50)$$

кўринишда ёзиб оламиз, бу ерда

$$K(x,t)=\left[\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{2\beta}-1\right]\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right).$$

(50) тенгламада ўзгарувчиларни

$$\frac{2x}{1+x^2}=y,\ \frac{2t}{1+t^2}=\eta$$

формулалар билан алмаштирамиз. У ҳолда,

$$\eta-y=\frac{2t}{1+t^2}-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2(t-x)(1-tx)}{(1+t^2)(1+x^2)}$$

ёки

$$\frac{1}{\eta-y}=\frac{\left(1+t^2\right)\left(1+x^2\right)}{2(t-x)(1-tx)}=\frac{\left(1+t^2\right)\left(1+x^2\right)}{2\left(1-t^2\right)}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right).$$

Шу билан бирга

$$d\eta=\frac{2\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}dt,\ dt=\frac{\left(1+t^2\right)^2}{2\left(1-t^2\right)}d\eta .$$

Буларни эътиборга олсак, (50) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\mu(y)+\lambda\int_{-1}^{1}\frac{\mu(\eta)d\eta}{\eta-y}+\lambda\int_{-1}^{1}K_1(y,\eta)\mu(\eta)d\eta+h_2(y), \quad (51)$$

бу ерда

$$\mu(y)=\left(1+x^2\right)\nu(x),\ h_2(y)=\left(1+x^2\right)h_1(x),$$

$$K_1(y,\eta)=\frac{\left(1+t^2\right)\left(1+x^2\right)}{2\left(1-t^2\right)}K(x,t).$$

(51) кўринишдаги сингуляр интеграл тенгламалар назарияси ҳозирги вақтда тўла яратилган бўлиб, бу назария академик Н.И. Мусхелешвилининг [15] китобида батафсил баён қилинган. Бу масалалар бизнинг дарслигимиз доирасидан ташқарида бўлгани учун уларни биз бу ерда келтира олмаймиз.

Аммо, (49) тенгламанинг ечимини Карлеман усули билан бевосита топиш мумкин, агар унинг ўнг томони $h_1(x)$ $-1<x<1$ интервалда Гёлрдер шартини қаноатлантириб, $h_1(x)\in L_p(-1,1)$, $p>1$ бўлса, (49) сингуляр интеграл тенгламанинг бирдан-бир ечими $x^{1-2\beta}\nu(x)\in L_p(-1,1)$ функциялар синфида ушбу

$$\nu(x)=\frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left[h_1(x)-\lambda\int_{-1}^{1}h_1(t)\left(\frac{1-t^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}-\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)dt\right]$$

формула билан аниқланади [23].

4- §. Айрим бошқа аралаш масалалар

1. Геллерстедт масалалари. D — 3- § нинг 1- бандида аниқланган соҳа бўлсин. $A(-1,\ 0)$ $B(1,\ 0)$ кесмада ихтиёрий $P(x_0,\ 0)$ $(-1<x_0<1)$ нуқтани олиб, бу нуқтадан (1) тенгламанинг

$$PC_1 : x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=x_0,\ PC_2 : x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=x_0$$

характеристикаларини ўтказамиз. σ эгри чизиқ, AC_1, PC_1, PC_2 ва BC_2 характеристикалар билан чегараланган соҳани Q орқали белгилаб оламиз (35- чизма).

G_1 масала. *Q соҳада* (1) *тенгламанинг*

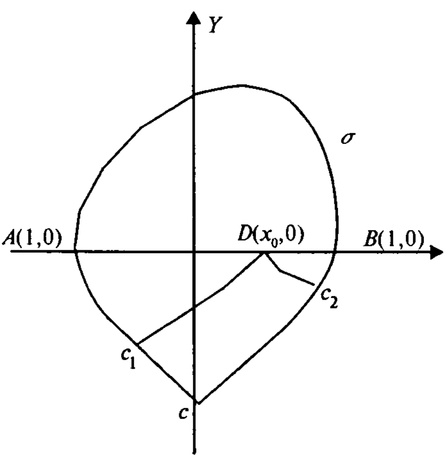
$$u|_\sigma=\varphi(s),\ u|_{PC_1}=\psi_1(x),$$
$$u|_{PC_2}=\psi_2(x),\ \psi_1(x_0)=\psi_2(x_0) \tag{52}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

G_2 масала. *Q соҳада* (1) *тенгламанинг ушбу*

$$u|_\sigma=\varphi(s),\ u|_{AC_1}=\psi_1(x),\ u|_{BC_2}=\psi_2(x),$$
$$\varphi(-1)=\psi_1(-1),\ \varphi(0)=\psi_2(1) \tag{53}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.



35 - чизма

Уқтириб ўтамиз, P нуқта A ёки B нуқта билан устма-уст тушганда G_1 ва G_2 масалалар T масаладан иборат бўлади. Бу масалалар ечимларининг ягоналиги 3- § нинг 3-бандида исбот қилинган экстремум принципига асосан исботланади. Ҳақиқатан ҳам, (1) тенглама учун қўйилган Коши масаласининг ечимини AC_1P ва PC_2B характеристик учбурчаклар учун Дарбу формуласи ((19) формула) билан ёзиб оламиз. Бу формуладан, агар (1) тенгламанинг регуляр ечими PC_1, PC_2 ёки AC_1, BC_2 характеристикаларда нолга тенг бўлса, худди юқоридагидай, $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар орасидаги $-1 < x < x_0$, $x_0 < x < 1$ интервалларда (46) га ўхшаш муносабатларни ёзиб оламиз. Буларга асосан, (1) тенгламанинг PC_1, PC_2 ёки AC_1, BC_2 характеристикаларда нолга тенг бўлган регуляр ечими $-1 < x < x_0$, $x_0 < x < 1$ оралиқларда мусбат максимум ва манфий минимумга эришмаслиги келиб чиқади.

Бунга мувофиқ G_1 масаланинг $u(x,y)$ ечими $P(x_0,0)$ нуқтада нолга тенг бўлгани учун, $u(x,y)$ нинг барча соҳада ва шу билан бирга $y < 0$ бўлган соҳаларда ҳам нолга тенглиги келиб чиқади.

G_2 масалада $u(x,y)$ ечим $P(x_0,0)$ нуқтада нолга тенг эмас. Лекин, $u(x,y)$ ечим $P(x_0,0)$ нуқтада мусбат максимум ва манфий минимумга эриша олмаслигини исботлаш қийин эмас [23]. У ҳолда, экстремум принципидан G_2 масаланинг ечими биттадан ортиқ бўлмаслиги келиб чиқади.

Бу масалалар ечимларининг мавжудлиги, T масалага ўхшаш, интеграл тенгламаларга олиб келиш билан исботланади. Яна шу нарсага ўқувчининг эътиборини жалб қиламизки, G_1 ва G_2 масаланинг ечими (52) ва (53) шартларга асосан фақат Q соҳада аниқланмай, балки PC_1CP_2 характеристик тўртбурчакда ҳам аниқланади. Чунки, G_1 масалада изланаётган $u(x,y)$ ечимнинг қийматлари PC_1 ва PC_2 характеристикаларда берилганлиги сабабли, бу масала PC_1CC_2 тўртбурчакда (1) тенглама учун Гурса масаласидан иборатдир. Бу масала эса ягона ечимга эгадир. G_2 масалани қаралаётган ҳолда, аввал масалани Q соҳада ечганимиздан сўнг, $u(x,y)$ ечимнинг қийматлари PC_1 ва PC_1 характеристикаларда ҳам маълум бўлади. Демак, яна Гурса масаласига келамиз. Бу масалани батафсил текшириб чиқишни ўқувчига ҳавола қиламиз.

2. Нейман — Трикоми масаласи. (1) тенгламани 3- § нинг 1-бандида аниқланган D соҳада текширамиз.

T_N масала. (1) *тенгламанинг D соҳада регуляр, ёпиқ $\bar{D}$ соҳада узуликсиз, $D \cup \sigma$ да узуликсиз u_x ва u_y ҳосилаларга эга бўлган ва*

$$A_S[u] \equiv \left[y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y} \right]\Bigg|_\sigma = \varphi(s), \quad 0 < s < l,$$

$$u\,|_{AC} = \psi(x) \quad , \quad -1 \le x \le 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечим топилсин, бу ерда $\varphi(s)$ ва $\psi(x)$ — берилган функциялар.

T_N масаланинг шартига кўра $u(x) = \tau(x)$ функция $[-1,1]$ кесмада узлуксиз, $\nu(x) = \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y}$ ва $\tau'(x)$ функциялар эса $-1 < x < 1$ да узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлиши керак. Шу билан бирга $\nu(x)$ функця $x \to 0$ ва $x \to 1$ да $\frac{2}{m+2}$ дан кичик тартибда (x ва $1-x$ га нисбатан) чексизликка айланиши мумкин.

Бу масала ечимининг ягоналиги 3- § нинг 3- бандида исбот қилинган экстремум принципдан келиб чиқади, яъни, агар $u(x)$ функция $u|_{AC} = 0$, $A_S[u]|_\sigma = 0$ шартларни қаноатлантирувчи (1) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда $\bar{D}$ да $u(x,y) \equiv 0$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, акс ҳолда ёки $u(x,y)$, ёки $-u(x,y)$ σ нинг бирор M нуқтасида ўзининг энг катта мусбат қийматига эришган бўлар эди. Унда, Заремба — Жиро принципига асосан, M нуқтада $A_S[u] < 0$ бўлади.

Бу ҳосил қилинган қарама-қаршилик $\bar{D}^+$ да $u(x,y) \equiv 0$ бўлишини исботлайди. D^- да Коши масаласи ечимининг ягоналигидан $\bar{D}^-$ да $u(x,y) \equiv 0$ бўлиши келиб чиқади.

T_N масала ечимининг мавжудлиги худди T масалага ўхшаш сингуляр тенгламалар ёрдамида исботланади.

3. *M* масала. D орқали учлари $A(-1,0)$, $B(1,0)$ нуқталарда бўлиб, $y > 0$ юқори ярим текисликда ётувчи σ жордан эгри чизиғи билан, $y < 0$ қуйи ярим текисликда эса ACB характеристик учбурчак ичида жойлашган L: $y = -\gamma(x)$, $-1 \le x \le l$ монотон эгри чизиқ билан $\gamma(-1) = 0$, $l + \gamma(l) = 1$ ва (1) тенгламанинг C_1B: $y = x - 1$, $l \le x \le 1$ характеристикаси билан чегараланган соҳани белгилаймиз (36- чизма).

M масала D соҳада (1) *тенгламанинг σ ва L эгри чизиқларда берилган*

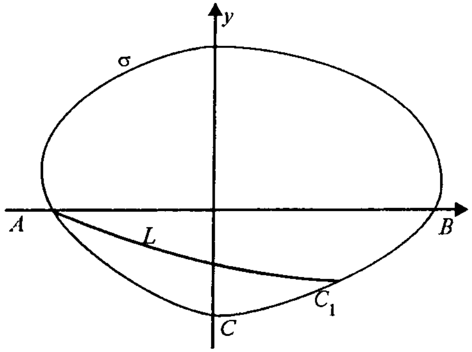
$$u|_\sigma = \varphi(s), \quad u|_L = \psi(x), \quad \varphi(A) = \psi(A)$$

шартларни қабул қилувчи ечимини топишдан иборатдир.

M масала ҳам *L* эгри чизиққа маълум шартлар қўйилганда бирдан-бир ечимга эга бўлади. Аммо *M* масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлигини исботлаш, юқоридаги масалалардан фарқли ўлароқ, анча мураккабдир. Шунинг учун ҳам биз бу ерда бунга тўхталмаймиз.

Уқдириб ўтамиз, аралаш типдаги (1) тенглама ва ундан умумийроқ бўлган тенгламалар учун юқорида келтирилган локал масалалардан ташқари бир қатор локал ва нолокал масалалар фақат текисликда эмас, балки фазода ҳам қўйилган ва ўрганилган.

Аралаш типдаги тенгламалар, ҳозирги вақтда, хусусий ҳосилали тенгламалар назариясининг тез ривожланиб бораётган катта бир қисмини ташкил қилади.



36- чизма.

Адабиёт

1. Азларов Т., Мансуров Ҳ. Математик анализ, 2- қисм, Тошкент, "Ўқитувчи", 1989.

2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции, Москва, "Наука", 1974.

3. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики, Москва, "Наука", 1982.

4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных, Москва, "Наука", 1981.

5. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа, Москва, Издательство АНСССР, 1959.

6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, Москва, "Наука", 1971.

7. Годунов С.К. Уравнения математической физики, Москва, "Наука", 1971.

8. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики, Москва, Физматгиз, 1962.

9. Кузнецов Д.С. Специальные функции, Москва, "Высшая школа", 1962.

10. Курант Р. Уравнения с частными производными, Москва, Издательство, "Мир", 1964.

11. Михайлов В.П. Уравнения математической физики, Москва, "Наука", 1975.

12. Михлин С.Г. Курс математической физики, Москва, “Наука”, 1968.

13. Михлин С.Г Линейние уравнения в частных производных, Москва, “Высшая школа”, 1977.

14. Михлин С.Г Лекции по линейным интегральным уравнениям, Москва, Физматгиз, 1959.

15. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения, Москва, Физматгиз, 1962.

16. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии, Москва, “Высшая школа”, 1995.

17. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, Москва, Физматгиз, 1961.

18. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных управнений. Москва — Ленинград, Издательство технико-теоретической литературы, 1951.

19. Полоэний Г.Н. Уравнения математической физики, Москва, “Высшая школа”, 1964.

20. Смирнов В.И. Курс высшей математики, Т. II, Москва, Издательство технико-теоритической литературы, 1953.

21. Смирнов В.И. Курс высшей математики Т. IV, Москва, Издательство технико-теоретической литературы, 1951.

22. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, Москва, “Наука”, 1964.

23. Смимрнов М.М. Уравнения смешанного типа, Москва, “Высшая школа”, 1985.

24. Соболев С.Л. Уравнения математической физики, Москва, Издательство технико-теоретической литературы, 1954.

25. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций , Москва, “Наука”, 1968.

26. Тихонов А.Н. и Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва, Издательство иностранной литературы, 1957.

27. Трикоми Ф. Интегральные уравнения, Москва, Издательство иностранной литературы, 1960.

28. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных, Москва, Издательство иностранной литературы, 1957.

МУНДАРИЖА

II боб. Интеграл тенгламалар

III боб. Гиперболик типдаги тенгламалар

IV боб. Эллиптик типдаги тенгламалар

V боб. Параболик типдаги тенгламалар

VI боб. Махсус функциялар

VII боб. Фурье усули

VIII боб. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани ечишда қўлланиладиган айрим бошқа усуллар

IX боб. Аралаш типдаги тенгламалар

Маҳмуд Салоҳиддинов

МАТЕМАТИК ФИЗИКА ТЕНГЛАМАЛАРИ

Тошкент — "Ўзбекистон" нашриёти — 2002.

Бадиий муҳаррир *Т. Қаноатов*
Техник муҳаррир *У. Ким*
Мусаҳҳиҳ *М. Раҳимбекова*

Теришга берилди 6.05.2002. Босишга рухсат этилди 20.08.2002.
Бичими $84 \times 108^1/_{32}$. Офсет босма усулида босилди.
Шартли босма т. 23,52. Нашр т. 18,5. Нусхаси 2000.
Буюртма № 98.

"Ўзбекистон" нашриёти, 700129, Тошкент,
Навоий кўчаси, 30 уй. Нашр. № 59-2002.

Ўзбекистон матбуот ва ахборот агентлигининг
1-босмахонасида босилди.
700002, Тошкент, Сағбон кўчаси, 1-берк кўча, 2-уй.

22.161
С27

Салохиддинов М.

Математик физика тенгламалари: Олий ўқув юртларининг талабалари учун дарслик.— Т.: "Ўзбекистон", 2002.— 448 б.

ББК 22.161я73