С. Г. МИХЛИН

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Издание второе, стереотипное

Санкт-Петербург
2002

ББК 22.3
М 69

Михлин С. Г.

М 69 Курс математической физики. 2-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2002. — 576 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 5-8114-0468-9

Учебник С. Г. Михлина «Курс математической физики» представляет собой изложение авторских лекций.

Курс содержит теорию линейных уравнений в частных производных. Особое внимание уделяется наиболее разработанным и наиболее важным трем классическим типам уравнений: эллиптическим, параболическим, гиперболическим.

Учебник предназначен для студентов физико-математических факультетов.

ББК 22.3

Оформление обложки
С. Л. ШАПИРО, А. Ю. ЛАПШИН

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К НОВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемая книга является переизданием учебника «Курс математической физики» профессора Соломона Григорьевича Михлина, который много лет работал на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского (Ленинградского) университета. С. Г. Михлин — крупный отечественный ученый, широко известный в России и за рубежом (доктор Honoris Causa Технического университета Карл-Маркс-Штадта, член Академии естествоиспытателей Леопольдина, иностранный член Итальянской национальной Академии Linčei). В то же время С. Г. Михлин был блестящим лектором и автором многих книг (учебников и монографий), которые и в настоящее время не потеряли своей актуальности.

Изложение материала в книге построено столь искусно, что читатель без усилий сразу попадает в прекрасный математический мир, сплетенный из элементов теории обобщенных производных, теорем вложения С. Л. Соболева, элементов вариационного исчисления и теории минимума энергетического функционала. Далее следуют элементы теории интегральных уравнений, задачи Дирихле и Неймана для эллиптических уравнений второго порядка, нестационарные уравнения (уравнения теплопроводности, волновое и метод Фурье для них); заключительный раздел посвящен корректным и некорректным задачам. В четырех добавлениях кратко рассмотрены эллиптические системы, задачи Коши для гиперболических уравнений, некоторые вопросы теории общих дифференциальных операторов и нелинейные эллиптические уравнения второго порядка; последние три добавления написаны профессорами В. М. Бабичем, В. Г. Мазья и И. Я. Бакельманом соответственно.

Книга содержит вполне современное изложение фундаментальных фактов математической физики; при этом подаваемый материал легко воспринимается и запоминается. Эта книга принесет несомненную пользу студентам, аспирантам и всем тем читателям, которые заинтересованы в быстром освоении курса математической физики.

А. И. КОШЕЛЕВ
Ю. К. ДЕМЬЯНОВИЧ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый вниманию читателей курс представляет собой несколько расширенное изложение лекций по математической физике, которые я читал студентам-математикам Ленинградского университета в течение последних лет.

Как обычно, курс содержит только теорию линейных уравнений в частных производных, почти исключительно второго порядка. Естественным образом основное место в книге занимают наиболее разработанные и наиболее важные для приложений три классических типа уравнений: эллиптические, параболические и гиперболические.

Уравнений двух последних типов можно, по крайней мере локально, рассматривать как абстрактные обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие неизвестную функцию также и под знаком эллиптического оператора. Отсюда можно сделать вывод, что эллиптический тип — основной для классической математической физики и что начинать изучение нужно именно с него.

Легко выявляются особая роль и особая разработанность положительно определенных задач (т. е. задач с положительно определенной энергией) Они хорошо решаются вариационным методом, при этом естественным образом вводятся обобщенные решения. Такая точка зрения позволяет без дополнительно определенных задач и тем самым сразу выйти далеко за пределы классического курса.

Я считаю целесообразным до перехода к нестационарным уравнениям и к методу Фурье дать теорию собственного спектра положительно определенных операторов, что легко делается с помощью вариационного метода. На основе этой теории решается смешанная задача для нестационарных уравнений: метод Фурье сводится к разложению по собственному спектру и без большого труда может быть обоснован в терминах обобщенных (а иногда и классических) решений. Спектральное разложение используется и для решения задачи Коши, но для уравнений с постоянными коэффициентами — теплопроводности и волнового — она проще и с достаточной общностью решается через преобразование Фурье по координатам.

Свое место в курсе находит и теория потенциала. Ограничиться только положительно определенными задачами невозможно: это видно хотя бы на задачах Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в случае бесконечной области или на задаче о косой производной. Метод потенциалов излагается для уравнения Лапласа, где его легче применять и где он сразу дает убедительные результаты.

Все изложение строится для общего случая многомерного пространства.

Сказанное приводит к следующему построению курса. Основной текст делится на семь разделов неодинаковой величины. Из них первые три раздела — вспомогательные. Впрочем, раздел II («Элементы вариационного исчисления») имеет и самостоятельное значение. Небольшой раздел IV содержит необходимый формальный аппарат, а также формулировку основных понятий и постановку важнейших задач.

Раздел V — самый большой в книге, что вполне объясняется особой ролью эллиптических уравнений. Отметим в этом разделе последнюю главу, посвященную задаче о косой производной в двумерной области, задаче, индекс которой может быть отличен от нуля.

В разделе VI рассмотрены уравнение теплопроводности и волновое уравнение как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Объединение их в одном разделе кажется мне целесообразным: несмотря на различие свойств этих уравнений, решаются они достаточно сходными методами. Небольшой раздел VII посвящен вопросу о корректности задач математической физики.

Кроме основного текста, книга содержит еще четыре небольших по объему добавления, в которых излагаются некоторые более современные идеи и результаты теории уравнений в частных производных. Только добавление 1 написано мною; остальные добавления любезно согласились написать В. М. Бабич, В. Г. Мазья и И. Я. Бакельман, которым я рад принести свою искреннюю признательность.

Общий план и основное содержание книги я неоднократно обсуждал с моими коллегами по кафедре математической физики Ленинградского университета, возглавляемой акад. В. И. Смирновым. Всем им приношу свою глубокую благодарность. Особой благодарностью я обязан В. М. Бабичу и В. Г. Мазья, советами которых я воспользовался в ряде случаев. В частности, на их соображениях построено изложение вопроса о поверхностях Ляпунова в гл. 18. Хочу поблагодарить также моих слушателей И. Н. Кроля, С. М. Минееву и К. Г. Семенову за помощь при подготовке рукописи. Наконец, особой благодарностью я обязан редактору книги В. В. Арестову, который чрезвычайно внимательно прочитал рукопись и значительно способствовал ее улучшению.

С. МИХЛИН

Ленинград, январь 1968 г.

ВВЕДЕНИЕ

Математическая физика представляет собой часть общей теории дифференциальных уравнений в частных производных. Название «математическая физика» связано с тем, что эта часть возникла из рассмотрения нескольких простых и важных задач физики. Рассмотрим некоторые из них.

1. Задача о колебании струны. Допустим, что начальное положение струны совпадает с осью Ox и что колебания происходят в вертикальной плоскости. Пусть в силу тех или иных причин струна выведена из состояния равновесия. Такой причиной может оказаться, например, удар по струне. Струна при этом изменит свою форму; каждая точка струны испытает некоторое смещение. Допустим для простоты, что смещение перпендикулярно к оси Ox и происходит все время в одной и той же плоскости (x, u) (рис. 1). Ордината u дает отклонение струны от положения равновесия. Очевидно, u есть функция двух переменных $u = u(x, t)$. Предполагая, что струна однородна, а толщина ее постоянна и что в моменты времени, следующие за начальным, на струну не действуют никакие внешние силы и, наконец, что струна нерастяжима, но не сопротивляется изгибу, можно доказать, что функция u удовлетворяет линейному уравнению в частных производных

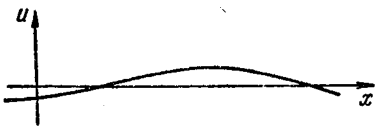

Рис. 1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Здесь a — постоянная величина, зависящая от физических свойств струны.

Уравнение (1) приближенное, оно пригодно в случае так называемых малых колебаний струны. Это уравнение носит название *волнового уравнения* с двумя независимыми переменными или *уравнения колебаний струны.*

Более сложные задачи физики приводят к дифференциальным уравнениям, сходным с уравнением (1), но более сложным. Так, поперечные колебания тонкой мембраны, которая в положении равновесия расположена в плоскости (x, y) (рис. 2), описываются при известных условиях дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a=\text{const}. \tag{2}$$

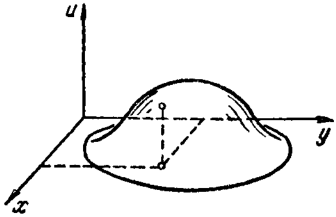

Рис. 2.

Уравнение (2) называется *уравнением колебаний мембраны* или *волновым уравнением с тремя независимыми переменными.* Как и уравнение струны, оно достаточно точно описывает только малые колебания мембраны.

Волновое уравнение с четырьмя независимыми переменными имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Это уравнение определяет, например, поле скоростей колеблющегося газа, если эти скорости малы и имеют потенциал, т. е. если существует такая функция u, что $\boldsymbol{v}=\operatorname{grad} u$, где $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости частицы газа.

2. Рассмотрим однородное тело, часть поверхности которого подогревается. В таком теле возникает температурное поле, причем температура, очевидно, меняется при переходе от одной точки тела к другой и от одного момента времени к другому. Обозначая температуру через u, видим, что u есть функция независимых переменных x, y, z, t

$$u=u(x, y, z, t).$$

Можно доказать, что эта функция удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=k\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad k=\text{const}. \tag{4}$$

Заметим, что выражение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

обычно называют *оператором Лапласа* от функции u и обозначают символом Δ:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

уравнение (4) можно, следовательно, переписать в виде

$$\Delta u=k\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{4'}$$

Уравнение (4) (или (4′)) называется *уравнением теплопроводности.* Это — линейное уравнение в частных производных второго порядка. Оно было известно еще Эйлеру, но чаще его связывают с именем Фурье.

3. Рассмотрим температурный процесс, установившийся во времени. Тогда u есть функция пространственных координат и не зависит от времени:

$$u=u(x, y, z).$$

Уравнение (4) переходит в следующее:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{5}$$

или

$$\Delta u=0. \tag{5'}$$

Уравнение (5) (или (5′)) называется *уравнением Лапласа*; оно представляет собой линейное уравнение в частных производных второго порядка.

В приведенных выше примерах мы каждый раз приходили к линейному уравнению в частных производных второго порядка. Однако такими уравнениями приложения математической физики не исчерпываются.

Представляют интерес для физических приложений многие линейные уравнения более высоких порядков. Задачи геометрии и физики нередко приводят к нелинейным уравнениям в частных производных, а также к системам дифференциальных уравнений. Так, хорошо известны системы дифференциальных уравнений теории упругости, гидродинамики, электродинамики.

Приведенные выше уравнения — волновое, теплопроводности и Лапласа — соответствуют различным физическим задачам, но они различны и в плане чисто математическом. Они являются представителями трех важнейших типов уравнений в частных производных: *гиперболического, параболического, эллиптического*. Изучение этих типов составляет предмет математической физики, которому посвящена настоящая книга. Нужно подчеркнуть, что этими тремя типами не исчерпывается многообразие уравнений в частных производных; мы выделяем их по принципу максимальной изученности и наибольшей важности для приложений.

Несколько слов скажем о принятых в книге обозначениях и системе нумерации.

Евклидово пространство m измерений обозначается символом E_m. Если точка этого пространства обозначена, например, буквой x, то декартовы координаты этой точки обозначаются через $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Нам неоднократно придется выполнять интегрирование по множествам различной размерности, расположенным в пространстве E_m; чаще всего нам придется интегрировать по области или по $(m-1)$-мерной поверхности. Такое интегрирование мы всегда будем обозначать одним знаком интеграла независимо от его кратности. Если переменная точка интегрирования обозначена, например, буквой x, то элемент лебеговой меры («элемент объема») в пространстве E_m будем обозначать через dx. Элемент меры на поверхности («элемент площади поверхности») обозначим через dS, $d\Gamma, \ldots$, если сама поверхность была обозначена через $S, \Gamma, \ldots$. Если M — множество точек пространства E_m, то замыкание этого множества будем обозначать через $\overline{M}$. В частности, если Ω — некоторая область в пространстве E_m, а Γ — ее граница, то $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Ниже мы будем широко пользоваться следующей символикой: если область обозначена буквой Ω, то объем этой области будет обозначен через $|\Omega|$. Аналогично $|\Gamma|$ будет обозначать площадь поверхности Γ.

Сфера радиуса R в пространстве E_m будет обозначаться через S_R. Площадь ее поверхности

$$|S_R| = R^{m-1} |S_1|,$$

где S_1 — сфера радиуса единица.

Хорошо известна формула

$$|S_1| = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

где Γ — эйлеров интеграл второго рода.

В книге принята сквозная нумерация глав, но нумерация параграфов — своя в каждой главе. При ссылке на формулу того же параграфа указывается только ее номер; при ссылке на формулу другого параграфа, но той же главы, сперва ставится в скобках номер параграфа, затем — номер формулы. Если нужно сослаться на формулу из другой главы, то в скобках пишутся номер параграфа и номер формулы, а вне скобок — номер главы.

В конце книги приводится краткий список литературы к каждому разделу и добавлению. В нем содержится перечень основных учебников и монографий (реже — журнальных статей), относящихся к данному разделу. В тексте иногда встречаются ссылки на эту литературу. В таком случае в квадратных скобках ставится номер цитируемого издания по списку данного раздела.

РАЗДЕЛ I

СРЕДНИЕ ФУНКЦИИ И ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

ГЛАВА I

СРЕДНИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Усредняющее ядро[1])

Пусть x и y — произвольные точки пространства E_m, а h — произвольное положительное число. Функцию $\omega_h(x, y)$ назовем *усредняющим ядром*, если она обладает следующими свойствами:

1. Функция $\omega_h(x, y)$ зависит только от h и r, где через r обозначено расстояние между точками x и y; $r = |x - y|$. В соответствии с этим обычно будем писать $\omega_h(r)$ вместо $\omega_h(x, y)$.

2. $\omega_h(r) > 0, \quad r < h,$
$\omega_h(r) = 0, \quad r \geqslant h.$

3. $\int\limits_{r<h} \omega_h(r)\,dy = \int\limits_{r<h} \omega_h(r)\,dx = 1.$

4. $\omega_h(r)$ бесконечно дифференцируема по декартовым координатам каждой из точек x и y.

Убедимся в существовании по крайней мере одного такого ядра. Пусть

$$\omega_h(r) = \begin{cases} c_h e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}}, & r < h,\ c_h = \text{const} > 0; \\ 0, & r \geqslant h. \end{cases} \tag{1}$$

---

[1]) Понятие усредняющего ядра и тесно связанное с ним понятие средней функции (см. ниже) впервые были введены В. А. Стекловым. Дальнейшее развитие эти понятия получили у С. Л. Соболева, идеи которого мы здесь и излагаем. С. Л. Соболев также ввел и исследовал понятие обобщенных производных, о которых будет идти речь в гл. 2.

Свойства 1 и 2 не вызывают сомнений. Свойство 3 будет иметь место, если мы положим

$$c_h = \left\{ \int\limits_{r<h} e^{-\frac{h^2}{h^2-r^2}} dy \right\}^{-1}. \tag{2}$$

Заметим, что интегралу (2) можно придать более простую форму. Введем сферические координаты с центром в x, воспользовавшись при этом известной формулой $dy = r^{m-1}\,dr\,dS_1$, и сделаем затем подстановку $r = ht$. Тогда для c_h получится выражение

$$c_h = \frac{1}{h^m |S_1|} \left\{ \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} t^{m-1}\,dt \right\}^{-1}.$$

Установим свойство 4. Функция (1) симметрична относительно x и y, поэтому достаточно проверить бесконечную дифференцируемость этой функции по координатам $y_1, y_2, \ldots, y_m$ при фиксированном x. Для этого достаточно проверить, что названная функция имеет производные любого порядка по r. Последнее очевидно, если $r < h$ или $r > h$, причем в случае $r > h$ все производные равны нулю. Достаточно установить поэтому, что функция (1) имеет при $r = h$ производные по r любого порядка, равные нулю, и что производные, вычисленные при $r < h$, стремятся к нулю при $r \to h$.

Доказательство проведем для первой производной; для высших производных оно аналогично.

а) Функция $\omega_h(r)$ непрерывна при $r = h$. Действительно, из формулы (1) видно, что $\omega_h(h+0) = 0 = \omega_h(h)$, а

$$\omega_h(h-0) = \lim_{r \to h-0} e^{-\frac{h^2}{r^2-h^2}} = 0,$$

так как

$$-\frac{h^2}{h^2-r^2} \xrightarrow[r \to h-0]{} -\infty.$$

б) Производная $\omega_h'(h)$ существует и равна нулю. Действительно,

$$\lim_{r \to h+0} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{h-r} = \lim_{r \to h+0} 0 = 0.$$

В то же время

$$\lim_{r \to h-0} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{r-h} = \lim_{r \to h-0} \frac{e^{-\frac{h^2}{r^2-h^2}}}{r-h} = 0,$$

в чем можно убедиться хотя бы по правилу Лопиталя. Таким образом, существует и равен нулю предел

$$\lim_{r \to h} \frac{\omega_h(r) - \omega_h(h)}{r - h} = \omega_h(h).$$

в) Справедливо соотношение

$$\lim_{r \to h-0} \omega_h'(r) = \lim_{r \to h-0} \frac{2rh^2}{(h^2 - r^2)^2} e^{-\frac{h^2}{h^2 - r^2}} = 0,$$

которое легко проверяется по тому же правилу Лопиталя.

Таким образом, первая производная $\omega_h'(r)$ существует и непрерывна при любом r. Точно так же доказывается существование и непрерывность следующих производных. Свойство 4 установлено.

§ 2. Средние функции

Пусть Ω — конечная область пространства E_m и $u(y)$ — функция, суммируемая в Ω. Доопределим эту функцию вне Ω, положив ее там равной нулю. Пусть x — произвольная точка пространства E_m. Положим

$$u_h(x) = \int_{\Omega} \omega_h(r) u(y)\, dy, \tag{1}$$

где $\omega_h(r)$ — какое-нибудь усредняющее ядро, обладающее свойствами 1—4 § 1. Функция u_h называется *средней функцией* по отношению к u; число h называется *радиусом усреднения*. Среднюю функцию можно представить еще в двух формах:

1) приняв во внимание, что $u(y) = 0$, $y \overline{\in} \Omega$, можно интеграл (1) распространить на все пространство, и тогда

$$u_h(x) = \int_{E_m} \omega_h(r) u(y)\, dy; \tag{1a}$$

2) в силу свойства 2 усредняющего ядра можно интегрировать не по всему пространству, а только по шару радиуса h с центром в точке x:

$$u_h(x) = \int_{r<h} \omega_h(r) u(y)\, dy. \tag{1б}$$

Отметим простейшие свойства средних функций:

1. Средняя функция бесконечно дифференцируема во всем пространстве; ее производные любого порядка можно получить дифференцированием под знаком интеграла в любой из формул (1), (1а), (1б).

В силу свойства 4 усредняющего ядра средняя функция бесконечно дифференцируема и интеграл (1) можно дифференцировать под знаком интеграла, поэтому производные от средних функций можно вычислить по любой из следующих формул:

$$\frac{\partial^k u_h}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_m^{k_m}}=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial^k\omega_h(r)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_m^{k_m}}u(y)\,dy, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^k u_h}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_m^{k_m}}=\int\limits_{E_m}\frac{\partial^k\omega_h(r)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_m^{k_m}}u(y)\,dy, \tag{2а}$$

$$\frac{\partial^k u_h}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_m^{k_m}}=\int\limits_{r<h}\frac{\partial^k\omega_h(r)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_m^{k_m}}u(y)\,dy. \tag{2б}$$

Совокупность функций, бесконечно дифференцируемых на каком-нибудь множестве M, будем обозначать через $C^{(\infty)}(M)$. В этих обозначениях свойство 1 коротко записывается так: $u_h\in C^{(\infty)}(E_m)$. Вообще, через $C^{(k)}(M)$ мы будем обозначать совокупность функций, k раз непрерывно дифференцируемых на множестве M. Совокупность функций, непрерывных на M, будем обозначать через $C(M)$.

2. Средняя функция равна нулю во всех точках, расстояние которых до области[1]) Ω не меньше h. Действительно, в этом случае шар $r<h$ целиком лежит вне Ω, и под знаком интеграла (1б) $u(y)\equiv 0$.

Таким образом, средняя функция может быть отлична от тождественного нуля лишь в области, которую мы обозначим $\Omega^{(h)}$ и которую можно построить так: из каждой точки

---

[1]) Расстояние $\rho(x,\Omega)$ от точки x до Ω определяется формулой

$$\rho(x,\Omega)=\inf_{y\in\Omega}|x-y|.$$

Очевидно, $\rho(x,\Omega)=0$, если $x\in\Omega$.

$x \in \Omega$ как из центра опишем шар радиуса h; объединение этих шаров и есть $\Omega^{(h)}$. Ясно, что $\Omega^{(h)} \supset \Omega$; если, например, Ω есть шар радиуса R, то $\Omega^{(h)}$ есть концентрический с Ω шар радиуса $R+h$.

§ 3. Сходимость средних функций

Теорема 1.3.1. *Если $u \in C(\Omega)$, то средняя функция*

$$u_h(x) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} u(x)$$

равномерно во всякой замкнутой внутренней подобласти[1]) *области Ω.*

Пусть Ω' — внутренняя подобласть области Ω. Построим область Ω'', которая является внутренней подобластью для Ω и для которой Ω' является внутренней подобластью (рис. 3).

Границы областей Ω' и Ω'' обозначим через Γ' и Γ'' соответственно, и пусть h_0 — наименьшее расстояние между точками границ Γ' и Γ''. Возьмем $h < h_0$. По формуле (2.1б) и по свойству 3 усредняющего ядра (§ 1) имеем

$$u_h(x) - u(x) = \int\limits_{r<h} [u(y) - u(x)]\, \omega_h(r)\, dy. \quad (1)$$

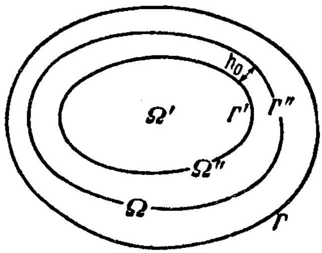

Рис. 3.

Если $x \in \overline{\Omega'}$, то в интеграле (1) $y \in \overline{\Omega''}$. В замкнутой области $\overline{\Omega''}$ непрерывная функция u равномерно непрерывна, поэтому при достаточно малом h и $r \leqslant h$ будет $|u(y) - u(x)| < \varepsilon$, где ε — произвольно малое положительное число. Имея в виду, что $\omega_h(r) \geqslant 0$ (свойство 2), из формулы (1) получаем

$$|u_h(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon \int\limits_{r<h} \omega_h(r)\, dy = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.3.2. *Норма в $L_2(\Omega)$ не возрастает при усреднении.*

---

[1]) Подобластью области Ω называется всякая область $\Omega' \subset \Omega$. Подобласть Ω' называется внутренней, если ее замыкание $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, т. е. если Ω' вместе со своей границей лежит внутри Ω.

Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Докажем, что в метрике $L_2(\Omega)$

$$\|u_h\| \leqslant \|u\|. \tag{2}$$

Оценим квадрат средней функции по неравенству Буняковского:

$$u_h^2(x) = \left\{\int_\Omega u(y)\,\omega_h(r)\,dy\right\}^2 = \left\{\int_\Omega u(y)\sqrt{\omega_h(r)}\sqrt{\omega_h(r)}\,dy\right\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega u^2(y)\,\omega_h(r)\,dy \int_\Omega \omega_h(r)\,dy \leqslant \int_\Omega u^2(y)\,\omega_h(r)\,dy, \tag{3}$$

так как по свойству 2 усредняющего ядра

$$\int_\Omega \omega_h(r)\,dy = \int_{\Omega \cap (r<h)} \omega_h(r)\,dy \leqslant \int_{r<h} \omega_h(r)\,dy = 1.$$

Интегрируя неравенство (3) по области Ω, получим

$$\|u_h\|^2 = \int_\Omega u_h^2(x)\,dx \leqslant \int_\Omega u^2(y)\left[\int_\Omega \omega_h(r)\,dx\right]dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega u^2(y)\,dy = \|u\|^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.3.3. *Если $u \in L_2(\Omega)$, то*

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Известно[1]), что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить полином f так, чтобы

$$\|u - f\|_{L_2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Применим неравенство треугольника

$$\|u - u_h\| \leqslant \|u - f\| + \|f - f_h\| + \|f_h - u_h\|.$$

По теореме 2

$$\|f_h - u_h\| \leqslant \|f - u\|,$$

поэтому

$$\|u - u_h\| \leqslant 2\|f - u\| + \|f - f_h\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \|f - f_h\|.$$

---

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, изд. 2-е, 1959, стр. 185.

Выберем область Ω_1, для которой Ω будет строго внутренней подобластью. Полином f непрерывен в Ω_1, и поэтому

$$f_h \xrightarrow[h \to 0]{} f$$

равномерно в любой внутренней замкнутой подобласти Ω_1, в частности в $\bar{\Omega}$. Но из равномерной сходимости в замкнутой области следует сходимость в среднем, и для достаточно малых h

$$\|f - f_h\|_{L_2(\Omega)} < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Отсюда уже легко вытекает наше утверждение.

Определение. Функция φ называется *финитной* в Ω, если она в Ω бесконечно дифференцируема и отлична от нуля лишь в некоторой внутренней подобласти области Ω.

Финитную функцию можно определить несколько иначе. Пусть Γ — граница области Ω. *Пограничной полоской* области Ω называется совокупность точек этой области, обладающих тем свойством, что их расстояния до Γ не превосходят заданной постоянной δ, называемой *шириной полоски*. Функция называется финитной в Ω, если она в Ω бесконечно дифференцируема и обращается в нуль в некоторой пограничной полоске области Ω.

Пограничную полоску области Ω, имеющую ширину δ, будем обозначать через Ω_δ.

Теорема 1.3.4. *Множество функций, финитных в области Ω, плотно в пространстве $L_2(\Omega)$.*

Надо доказать, что любую функцию $u \in L_2(\Omega)$ можно с любой степенью точности аппроксимировать в метрике $L_2(\Omega)$ финитной функцией.

Число δ выберем так, чтобы мера полоски Ω_δ была достаточно мала, а именно: зададим $\varepsilon > 0$ и выберем δ так, чтобы

$$\int_{\Omega_\delta} u^2\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Рассмотрим функцию, определяемую равенством

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_\delta, \\ 0, & x \in \Omega_\delta. \end{cases}$$

Очевидно, $v \in L_2(\Omega)$; при этом

$$\|u-v\|^2=\int\limits_{\Omega_\delta} u^2\,dx<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2,$$

и, следовательно,

$$\|u-v\|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Возьмем $h<\frac{\delta}{2}$ и построим среднюю функцию $v_h(x)$. Она финитна в Ω, так как она бесконечно дифференцируема и равна нулю в пограничной полоске $\Omega_{\delta-h}$ (свойства 1, 2 средней функции, § 2). По теореме 1.3.3 можно выбрать число h_0 так, чтобы при $h<h_0$ было

$$\|v-v_h\|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Из неравенства треугольника и соотношений (4) и (5) вытекает, что

$$\|u-v_h\|\leqslant\|u-v\|+\|v-v_h\|<\varepsilon, \qquad h<h_0.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.3.1. *Если $M\subset L_2(\Omega)$ — множество, содержащее множество всех финитных в Ω функций, то M плотно в $L_2(\Omega)$.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что усреднение не увеличивает норму в пространствах $L_p(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

2. Доказать, что если $u\in L_p(\Omega)$, $1<p<\infty$, то

$$\|u-u_h\|_{L_p(\Omega)}\xrightarrow[h\to 0]{}0.$$

3. Можно рассматривать усредняющие ядра, обладающие свойствами 1, 2, 3, но не обладающие свойством 4. Простейший пример такого ядра:

$$\omega_h(r)=\begin{cases} c_h, & r\leqslant h\\ 0, & r>h,\end{cases}$$

где c_h — подходящим образом выбранная постоянная. Требуется вычислить постоянную c_h и доказать, что

а) если $u\in L(\Omega)$, то $u_h\in C(\bar\Omega)$; если $u\in C^{(k)}(\bar\Omega)$, то $u_h\in C^{(k+1)}(\Omega\setminus\Omega_h)$;

б) верны теоремы 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, а также утверждения упражнений 1 и 2.

ГЛАВА 2

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

§ 1. Понятие обобщенной производной

Предварительно выведем одну важную формулу интегрального исчисления, известную под названием *формулы интегрирования по частям.*

Пусть Ω — конечная область m-мерного евклидова пространства, ограниченная кусочно гладкой поверхностью Γ. Напомним формулу Остроградского:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x_k} dx = \int_{\Gamma} P \cos(\nu, x_k)\, d\Gamma;$$

здесь ν — нормаль к поверхности Γ, внешняя по отношению к Ω. От функции $P(x)$ достаточно потребовать, чтобы она принадлежала классу $C^{(1)}(\bar{\Omega})$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Omega} P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k}(PQ)\, dx - \int_{\Omega} Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx,$$

где $P, Q \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$. Заменяя первый интеграл справа по формуле Остроградского, мы и получим формулу интегрирования по частям:

$$\int_{\Omega} P \frac{\partial Q}{\partial x_k} dx = -\int_{\Omega} Q \frac{\partial P}{\partial x_k} dx + \int_{\Gamma} PQ \cos(\nu, x_k)\, d\Gamma.$$

Отметим некоторые следствия из этой формулы. Если одна из функций P и Q обращается на Γ в нуль, то поверхностный интеграл исчезает и получается более простая формула:

$$\int_\Omega P\frac{\partial Q}{\partial x_k}dx = -\int_\Omega Q\frac{\partial P}{\partial x_k}dx.$$

Рассмотрим интеграл несколько более сложного вида:

$$\int_\Omega P\frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}dx.$$

Если функция P имеет нужные непрерывные производные, то этот интеграл можно взять по частям k раз так, чтобы под знаком объемного интеграла освободить функцию Q от дифференцирования:

$$\int_\Omega P\frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}dx = -\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_1^{k_1-1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}dx +$$
$$+\int_\Gamma P\frac{\partial^{k-1} Q}{\partial x_1^{k_1-1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}\cos(\nu, x_1)\,d\Gamma = \ldots$$
$$\ldots = (-1)^k\int_\Omega Q\frac{\partial^k P}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}dx + \int_\Gamma R(P, Q)\,d\Gamma;$$

через $R(P, Q)$ обозначено выражение, зависящее от функций P, Q и их производных до порядка $k-1$ включительно.

Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ функций, непрерывных, k раз непрерывно дифференцируемых в Ω и равных нулю в пограничной полоске (своей для каждой функции) области Ω. Очевидно, $\mathfrak{M}^{(k+1)}(\Omega)\subset\mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ и $\mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)\subset\mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ при любом k.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ суммируемы в Ω и пусть для любой функции $\varphi\in\mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ справедливо тождество

$$\int_\Omega u\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}dx = (-1)^k\int_\Omega v\varphi\,dx. \qquad (1)$$

Тогда v называется *обобщенной производной* k-го порядка от функции u в области Ω. Для обозначения обобщенной производной используют обычный символ и пишут

$$v(x) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}. \qquad (2)$$

Теорема 2.1.1. *Обобщенная производная вида* (2) *единственна.*

Надо доказать следующее: если функция $u(x)$ суммируема в Ω и если существуют две функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$, также суммируемые в Ω и удовлетворяющие при любой $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$ тождествам

$$\left.\begin{aligned} \int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx &= (-1)^k \int_\Omega v_1 \varphi dx, \\ \int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx &= (-1)^k \int_\Omega v_2 \varphi dx, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

то $v_1(x) \equiv v_2(x)$. Как обычно, мы считаем, что две функции равны между собой, если они эквивалентны (могут различаться лишь на множестве меры нуль).

Вычитая из первого тождества (3) второе и полагая $v_1(x) - v_2(x) = w(x)$, получаем тождество

$$\int_\Omega w(x) \varphi(x) dx = 0, \tag{4}$$

верное, если $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$. Докажем, что тождество (4) верно для любой ограниченной измеримой функции $\varphi(x)$, равной нулю в некоторой пограничной полоске. Пусть $\varphi(x)$ — такая функция и пусть она равна нулю в полоске ширины δ. Возьмем $h < \frac{\delta}{2}$ и построим среднюю функцию $\varphi_h(x)$. Она бесконечно дифференцируема и равна нулю в пограничной полоске ширины $\delta - h$. Поэтому $\varphi_h \in \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$ и, тем более, $\varphi_h \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$. Для функции $\varphi_h(x)$ тождество верно:

$$\int_\Omega w(x) \varphi_h(x) dx = 0. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что при любом h функции $\varphi_h(x)$ ограничены одной и той же постоянной: если $|\varphi(x)| < N = \text{const}$, то

$$|\varphi_h(x)| = \left| \int_{r<h} \varphi(y) \omega_h(r) dy \right| \leqslant N \int_{r<h} \omega_h(r) dy = N.$$

Ограниченная и измеримая в Ω функция φ во всяком случае суммируема в Ω с квадратом. По теореме 1.2.3

$$\|\varphi_h - \varphi\|_{L_2(\Omega)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

По известной теореме о последовательностях функций, сходящихся в среднем[1], можно выбрать такую последовательность чисел $h_n \to 0$, что

$$\varphi_{h_n}(x) \qquad \varphi(x)$$

почти всюду в Ω.

В тождестве (5) положим $h = h_n$.

Под знаком интеграла (5) подынтегральная функция не превосходит суммируемой функции $N|w(x)|$ и при $n \to \infty$ почти всюду стремится к функции $w(x)\varphi(x)$. По известной теореме о предельном переходе под знаком интеграла Лебега получаем

$$\int_\Omega w(x)\varphi(x)\,dx = 0,$$

что и требовалось доказать. Теперь положим в тождестве (4)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_{\delta/2}, \\ \operatorname{sign} w(x), & x \in \Omega' = \Omega \setminus \Omega_{\delta/2}. \end{cases}$$

Мы получим тогда

$$\int_{\Omega'} |w(x)|\,dx = 0, \tag{6}$$

и, следовательно, $w(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$. Так как число $\delta > 0$ произвольно, то $w(x) \equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

Если функция $u(x)$ непрерывна в Ω вместе со своими производными до k-го порядка включительно, то ее обобщенные производные k-го порядка существуют и совпадают с обычными. Действительно, интеграл в левой части формулы (1) можно взять по частям k раз; при этом поверхностные интегралы исчезнут, потому что на границе области Ω как функция φ, так и ее производные до $(k-1)$-го порядка включительно равны нулю. В результате получится

---

[1]) См., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, изд. 2-е, 1957, стр. 184.

равенство

$$\int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx = (-1)^k \int_\Omega \varphi \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx, \quad (7)$$

где справа стоит обычная (непрерывная) производная от u. Равенство (7) показывает, что обобщенная производная в этом случае существует и равна непрерывной производной

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}.$$

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Пусть Ω — интервал $(-1, 1)$. Функция $u(x) = |x|$ имеет обобщенную производную $u'(x) = \operatorname{sign} x$. Действительно, пусть $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, +1)$, тогда $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[-1, +1]$ и $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$. Имеем

$$\int_{-1}^{1} |x| \varphi'(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} x \varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{1} x \varphi'(x)\, dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_{-1}^{1} |x| \varphi'(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} \varphi(x) \operatorname{sign} x dx,$$

и наше утверждение доказано.

Пример 2. Функция $\operatorname{sign} x$ в интервале $(-1, 1)$ не имеет обобщенной первой производной (хотя она, как и функция $|x|$, имеет непрерывную производную при $x \neq 0$). Чтобы в этом убедиться, составим интеграл

$$\int_{-1}^{1} \varphi'(x) \operatorname{sign} x\, dx = -\int_{-1}^{0} \varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{1} \varphi'(x)\, dx = -2\varphi(0), \quad (8)$$

где $\varphi \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, 1)$.

Не существует функции $v(x)$, суммируемой в интервале $(-1, 1)$ и при любой функции $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, +1)$ удовлетворяющей тождеству

$$\int_{-1}^{+1} v(x) \varphi(x)\, dx = 2\varphi(0). \quad (9)$$

Действительно, пусть такая функция существует. Тогда функция

$$V(x) = \int_0^x v(y)\, dy$$

абсолютно непрерывна на сегменте $[-1, 1]$ и имеет в нем суммируемую производную $v(x)$. Беря интеграл (9) по частям, в силу формулы (8) получим тождество, верное для любой функции $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{(1)}(-1, +1)$:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi'(x)\,[\operatorname{sign} x - V(x)]\,dx = 0.$$

Но тогда [1])

$$\operatorname{sign} x = V(x) + \mathrm{const}, \qquad x \in (-1, +1),$$

что нелепо, так как в точке $x = 0$ левая часть разрывна, а правая — непрерывна.

Пример 3. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны на сегменте $[-1, 1]$, но ни в одной его точке не дифференцируемы. Можно доказать, что непрерывная в квадрате $0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1$ функция двух переменных

$$u(x) = u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) \tag{10}$$

не имеет обобщенных первых производных. Однако эта функция имеет обобщенную производную второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2}$, и эта производная равна нулю. Чтобы установить это, достаточно доказать, что для любой функции $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$, где Ω — квадрат $-1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1$, справедливо тождество

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} u(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_1\, dx_2 = 0.$$

Но это тождество вытекает из цепочки равенств:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} u(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_{-1}^{+1} f(x_1) \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_2 \right\} dx_1 + \int_{-1}^{+1} g(x_2) \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_1 \right\} dx_2 =$$

$$= \int_{-1}^{+1} f(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Bigg|_{x_2=-1}^{x_2=+1} dx_1 + \int_{-1}^{+1} g(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \Bigg|_{x_1=-1}^{x_1=+1} dx_2 = 0.$$

Этот пример показывает, что из существования обобщенной производной какого-либо порядка не следует существование предшествующих ей обобщенных производных.

---

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. V, изд. 2-е, 1959, стр. 159, теорема 12.

§ 2. Простейшие свойства обобщенной производной

Теорема 2.2.1. *Пусть в области Ω функция $u(x)$ имеет обобщенную производную $v(x)$ вида* (1.2). *Тогда в области $\Omega \setminus \Omega_h$ средняя функция от этой производной равна производной того же вида от средней функции.*

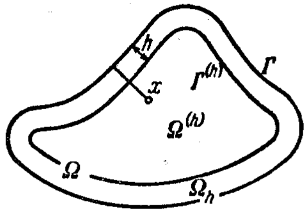

Рис 4

Напомним, что Ω_h означает пограничную полоску области Ω ширины h. Множество $\Omega^{(h)} = \Omega \setminus \Omega_h$ — открытое, и, если $x \in \Omega \setminus \Omega_h$, то расстояние от точки x до границы области Ω больше h (рис. 4), поэтому усредняющее ядро $\omega_h(r) \in \mathfrak{M}^{(\infty)}(\Omega)$. По формуле (1.1)

$$\int_\Omega u(y) \frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \dots \partial y_m^{k_m}} dy = (-1)^k \int_\Omega v(y)\, \omega_h(y)\, dy = (-1)^k v_h(x). \quad (1)$$

Усредняющее ядро $\omega_h(r)$ зависит только от разности $x - y$, поэтому

$$\frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \dots \partial y_m^{k_m}} = (-1)^k \frac{\partial^k \omega_h(r)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}}.$$

Подставив это в равенство (1), получим

$$v_h(x) = \frac{\partial^k u_h(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.2.2. *Пусть Ω' — подобласть области Ω. Если $v(x)$ есть обобщенная производная от $u(x)$*

$$v(x) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_m^{k_m}} \quad (2)$$

в области Ω, то $v(x)$ является такой же обобщенной производной от $u(x)$ в области Ω'.

Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega')$. Доопределим функцию $\varphi(x)$ в $\Omega \setminus \Omega'$, положив ее там равной нулю. Очевидно, тогда $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$. К функциям $u(x)$ и $\varphi(x)$ применим формулу (1.1). Отбросив в обеих ее частях интегралы по $\Omega \setminus \Omega'$, равные нулю, получим формулу

$$\int\limits_{\Omega'} u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} dx = (-1)^k \int\limits_{\Omega'} v\varphi dx,$$

которая и означает, что $v(x)$ есть обобщенная производная вида (2) от $u(x)$ в подобласти Ω'.

Теорема 2.2.3. *Если в области Ω функция $v(x)$ есть обобщенная производная от $u(x)$ вида* (2), *а $w(x)$ есть обобщенная производная от $v(x)$ вида*

$$w(x) = \frac{\partial^l v}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_m^{l_m}},$$

то $w(x)$ в той же области Ω есть обобщенная производная от $u(x)$ вида

$$w(x) = \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x_1^{k_1+l_1} \partial x_2^{k_2+l_2} \ldots \partial x_m^{k_m+l_m}}.$$

Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}^{(k+l)}(\Omega)$. Тогда $\dfrac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_m^{l_m}} \in \mathfrak{M}^{(k)}(\Omega)$, и по формуле (1.1)

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial^{k+l} \varphi}{\partial x_1^{k_1+l_1} \partial x_2^{k_2+l_2} \ldots \partial x_m^{k_m+l_m}} dx = (-1)^k \int\limits_{\Omega} v \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_m^{l_m}} dx. \qquad (3)$$

По той же формуле (1.1)

$$\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_m^{l_m}} dx = (-1)^l \int\limits_{\Omega} w\varphi dx.$$

Подставив этот результат в равенство (3), получим формулу

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial^{k+l} \varphi}{\partial x_1^{k_1+l_1} \partial x_2^{k_2+l_2} \ldots \partial x_m^{k_m+l_m}} dx = (-1)^{k+l} \int\limits_{\Omega} w\varphi dx,$$

из которой и вытекает теорема 2.2.3.

Теорема 2.2.4. *Функция, обобщенный градиент которой существует и тождественно равен нулю, есть постоянная.*

Пусть функция $u(x)$ суммируема в Ω и пусть существуют и тождественно равны нулю в Ω обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $k=1, 2, \ldots, m$. Построим среднюю функцию $u_h(x)$. По теореме 2.2.1 $\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\equiv 0$ и, следовательно, $u_h\equiv\mathrm{const}$ в подобласти $\Omega\diagdown\Omega_h$. Произвольно зафиксируем число $\delta>0$. Если $h<\delta$, то $u_h\equiv\mathrm{const}$ в $\Omega\diagdown\Omega_\delta$. По теореме 1.3.3 $u\equiv\mathrm{const}$ в $\Omega\diagdown\Omega_\delta$. Так как число δ произвольно, то $u\equiv\mathrm{const}$ в Ω.

§ 3. Предельные свойства обобщенных производных

В настоящем параграфе мы будем предполагать, что как данные функции, так и те их обобщенные производные, о которых будет идти речь, суммируемы с квадратом в области Ω, которая по-прежнему считается конечной.

Теорема 2.3.1. *Пусть функции $u_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, имеют в Ω обобщенные производные одного и того же вида:*

$$v_n(x)=\frac{\partial^k u_n}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}.$$

Если обе последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся в метрике $L_2(\Omega)$ к пределам $u(x)$ и $v(x)$ соответственно, то в области Ω функция $v(x)$ есть обобщенная производная от $u(x)$ того же вида.

По определению обобщенной производной

$$\int_\Omega u_n\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}\,dx=(-1)^k\int_\Omega v_n\varphi\,dx,\quad \varphi\in\mathfrak{M}^{(k)}(\Omega). \tag{1}$$

Каждый из интегралов в тождестве (1) есть скалярное произведение двух функций из $L_2(\Omega)$, а под знаком скалярного произведения можно делать предельный переход. Выполнив его, придем к формуле (1.1), и теорема доказана.

Теорема 2.3.2. *Пусть $v(x)$ — обобщенная производная от $u(x)$ в области Ω:*

$$v(x)=\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_m^{k_m}}.$$

В любой внутренней подобласти $\Omega'\subset\Omega$ можно построить *последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\{u_n(x)\}$ таких, что в метрике пространства $L_2(\Omega')$*

$$u_n \to u, \qquad \frac{\partial^k u_n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \to v. \tag{2}$$

Доказательство очень просто. Можно взять

$$u_n(x) = u_{h_n}(x),$$

где h_n — стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда первое соотношение (2) вытекает из теоремы 1.3.3, второе соотношение — из теорем 1.3.3 и 2.2.2.

§ 4. Случай одной независимой переменной

В этом случае класс функций, имеющих обобщенную первую производную, оказывается тесно связанным с классом абсолютно непрерывных функций. Напомним, что функция $u(x)$ вещественной переменной x абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$, если существует такая суммируемая на этом сегменте функция $v(x)$, что

$$u(x) = \int_a^x v(t)\,dt + \text{const}, \qquad x \in [a, b].$$

Из известных теорем Лебега вытекает, что функция $u(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ почти всюду обычную производную, равную $v(x)$.

Теорема 2.4.1. *Пусть функция $u(x)$, определенная почти всюду в интервале (a, b) и суммируемая с квадратом на этом интервале, имеет в (a, b) обобщенную производную $v(x)$, также суммируемую с квадратом. Тогда $u(x)$ эквивалентна функции, которая абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и почти всюду в (a, b) имеет обычную производную, равную $v(x)$.*

Пусть сегмент $[\alpha, \beta]$ лежит в интервале (a, b). По теореме 2.3.2 существует последовательность $u_n(x) \in C^{(\infty)}[\alpha, \beta]$ таких, что в метрике $L_2(\alpha, \beta)$

$$u_n \to u, \qquad u_n' \to v.$$

По формуле Ньютона—Лейбница

$$u_n(x) - u_n(\alpha) = \int_\alpha^x u_n'(t)\,dt,$$

откуда

$$u_n(\alpha) = u_n(x) - \int_\alpha^x u_n'(t)\,dt. \tag{1}$$

Правая часть равенства (1) сходится в метрике $L_2(\alpha, \beta)$ к пределу, равному

$$u(x) - \int_\alpha^x v(t)\,dt.$$

В таком случае сходится в той же метрике и левая часть. Но для функций, каждая из которых постоянна, сходимость в среднем есть обычная сходимость числовой последовательности. Поэтому существует предел — обозначим его через c — последовательности $\{u_n(\alpha)\}$:

$$\lim_{n \to \infty} u_n(\alpha) = c.$$

Полагая теперь в равенстве (1) $n \to \infty$, находим

$$u(x) = \int_\alpha^x v(t)\,dt + c. \tag{2}$$

Равенство (2) имеет место почти всюду на сегменте $[\alpha, \beta]$. Однако правая часть этого равенства определена и непрерывна всюду на этом сегменте. Примем теперь, что равенство (2) верно на сегменте $[\alpha, \beta]$ всюду; это равносильно тому, что данную функцию $u(x)$ мы заменили некоторой другой, ей эквивалентной. Теперь функция $u(x)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$; очевидно также, что $c = u(\alpha)$.

В формуле (2) x может означать любую точку интервала (a, b), так как α и β можно взять сколь угодно близкими к a и b соответственно Зафиксируем α и положим в формуле (2) $x \to b$. Функция $v(t)$ суммируема на всем интервале (a, b), поэтому правая часть этой формулы имеет предел, равный

$$\int_\alpha^b v(t)\,dt + u(\alpha).$$

Если мы положим

$$u(b) = \int_\alpha^b v(t)\,dt + u(\alpha),$$

то функция $u(x)$ окажется абсолютно непрерывной на сегменте $[\alpha, b]$, где α — любое число из интервала (a, b).

Можно написать теперь новое представление для функции $u(x)$:

$$u(x) = u(b) - \int_x^b v(t)\,dt. \tag{3}$$

При $x \to a$ правая часть формулы (3) имеет предел

$$u(b) - \int_a^b v(t)\,dt.$$

Положив

$$u(a) = u(b) - \int_a^b v(t)\,dt,$$

мы сделаем функцию $u(x)$ абсолютно непрерывной на всем сегменте $[a, b]$.

Теорема 2.4.2. *Пусть функция $u(x)$ определена почти всюду на интервале (a, b), суммируема на нем с квадратом и имеет обобщенную k-ю производную $u^{(k)}(x) = v(x)$, также суммируемую с квадратом. Тогда функция $u(x)$ эквивалентна функции, которая $(k-1)$ раз непрерывно дифференцируема на сегменте $[a, b]$, и почти всюду на нем имеет обычную производную k-го порядка $u^{(k)}(x) = v(x)$. При этом производная $u^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$.*

Доказательства проводить не станем — оно такое же, как в теореме 2.4.1.

§ 5. Соболевские пространства и теоремы вложения

Пусть Ω — конечная область в пространстве E_m. Рассмотрим множество функций, которые суммируемы в Ω и имеют в этой области всевозможные обобщенные производные данного порядка l, суммируемые с некоторой степенью p, $1 < p < \infty$. Упомянутое множество, очевидно, линейно. Его можно превратить в банахово пространство, если ввести норму

$$\| u \| = \int_\Omega | u(x) |\,dx + \left\{ \int_\Omega \sum \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_l}} \right|^p dx \right\}^{1/p}; \tag{1}$$

сумма во втором интеграле распространена на все наборы индексов $i_1, i_2, \ldots, i_l$, каждый из которых независимо пробегает значения

$1, 2, \ldots, m$. Полученное таким образом пространство называется *соболевским* и обозначается символом $W_p^{(l)}(\Omega)$.

Вводить норму по формуле (1) не совсем обязательно: в пространстве $W_p^{(l)}(\Omega)$ допустима любая норма, эквивалентная норме (1).

В современном анализе, и особенно в теории уравнений в частных производных, большую роль играют так называемые «теоремы вложения»; они были впервые получены С. Л. Соболевым и затем многократно усиливались и обобщались. Сущность теорем вложения такова. Если область Ω удовлетворяет так называемому «условию конуса» (см. ниже § 3 гл. 16) и если функция $u \in W_p^{(l)}(\Omega)$, то она имеет всевозможные обобщенные производные всех предшествующих порядков. Производные порядка меньше l, а также и сама функция суммируемы в Ω с некоторой степенью, большей чем p. Эта степень тем выше, чем ниже порядок производной.

Из сказанного следует, что если $l_1 < l$, то при некотором $p_1 > p$ любой элемент пространства $W_p^{(l)}(\Omega)$ принадлежит пространству $W_{p_1}^{(l_1)}(\Omega)$; пространство $W_p^{(l)}(\Omega)$ «вкладывается» в пространство $W_{p_1}^{(l_1)}(\Omega)$. Обозначим через E оператор, который каждой функции $u(x)$ — элементу пространства $W_p^{(l)}(\Omega)$ — приводит в соответствие ту же функцию $u(x)$, но рассматриваемую как элемент пространства $W_{p_1}^{(l_1)}(\Omega)$. Оператор E называется *оператором вложения* пространства $W_p^{(l)}(\Omega)$ в пространство $W_{p_1}^{(l_1)}(\Omega)$. Одна из важнейших теорем вложения состоит в том, что оператор вложения E ограничен и (возможно, при меньшем p_1) вполне непрерывен. Следствиями теорем вложения являются приводимые ниже неравенства Фридрихса (гл. 14) и Пуанкаре (гл. 16).

Обобщенные производные порядка меньше l суммируемы с некоторой степенью, большей чем p, не только в Ω, но и на лежащих в Ω кусочно гладких многообразиях некоторых низших размерностей. Чем ниже порядок производной, тем ниже можно взять размерность многообразия. Производные достаточно низкого порядка могут оказаться просто непрерывными. Справедливы теоремы об ограниченности и полной непрерывности соответствующих операторов вложения.

Затронутые здесь вопросы обстоятельно изложены в книгах [1] и [2].

УПРАЖНЕНИЯ

1. Теорему 2.3.1 доказать для пространства L_p, $1 < p < \infty$, заменив сильную сходимость слабой.

2. Пусть Ω — область m-мерного евклидова пространства E_m, $u \in L_p(\Omega)$ и существует обобщенная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} \in L_p(\Omega)$. Пусть l — прямая, параллельная оси x_1, (a, b) — интервал, по которому прямая l пересекается с областью Ω. Доказать, что почти на

всех интервалах (a, b) функция u абсолютно непрерывна и имеет почти всюду обычную производную $\partial u/\partial x_1$.

3. Ω — область m-мерного пространства, которую можно заключить в прямоугольный параллелепипед со сторонами $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Функция $u(x)$ непрерывна в замкнутой области Ω, равна нулю на границе области Ω и имеет обобщенные первые производные

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega), \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказать неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |u|^2 dx \leqslant \frac{1}{\pi^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2}} \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 dx.$$

Указание. Воспользоваться разложением в ряд Фурье.

РАЗДЕЛ II

ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ГЛАВА 3

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Примеры на экстремум функционала

1. Зарождение вариационного исчисления относят обычно к 1696 г., когда И. Бернулли поставил так называемую *задачу о брахистохроне*: точки $A(0, 0)$ и $B(a, b)$ расположены в вертикальной плоскости (x, y) (рис. 5). Какова должна быть кривая, лежащая в плоскости (x, y) и соединяющая точки A и B, чтобы материальная точка, двигаясь без трения, скатывалась по этой кривой из точки A в точку B в кратчайшее время? Искомая кривая и была названа *брахистохроной*.

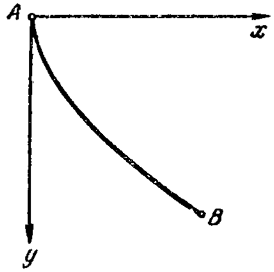

Рис. 5.

Пусть уравнение кривой AB есть $y = u(x)$. Рассмотрим некоторый момент времени t, и пусть в этот момент движущаяся точка находится на расстоянии y от оси x. Тогда $v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gu}$, где v — скорость движущейся точки, g — ускорение силы тяжести. В то же время

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + u'^2}\,\frac{dx}{dt}.$$

Отсюда

$$dt = \sqrt{\frac{1 + u'^2}{2gu}}\,dx.$$

Обозначим через T время, в течение которого материальная точка достигнет точки B. Интегрируя, находим

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\,dx. \tag{1}$$

Задача сводится к следующему: надо найти функцию $y=u(x)$, удовлетворяющую условиям

$$u(0)=0; \qquad u(a)=b \tag{2}$$

и сообщающую интегралу (1) наименьшее значение. Условия (2) означают, что искомая кривая должна проходить через заданные точки A и B; такого типа условия принято называть *граничными*, или *краевыми*, так как они относятся к концам промежутка, на котором должна быть определена искомая функция.

2. Рассмотрим еще одну задачу, сходную с задачей о брахистохроне. Пусть свет распространяется в оптически неоднородной среде со скоростью $v(x, y, z)$. Требуется найти траекторию светового луча, соединяющего точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. По известному принципу Ферма траектория светового луча обладает тем свойством, что, распространяясь по этой траектории, свет придет из точки A в точку B в кратчайшее время.

Пусть уравнения искомой траектории суть

$$y=u_1(x), \qquad z=u_2(x).$$

В соответствии с принципом Ферма задача сводится к отысканию двух функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u_1(x_1)=y_1, \qquad u_1(x_2)=y_2, \qquad u_2(x_1)=z_1, \qquad u_2(x_2)=z_2 \tag{3}$$

и сообщающих наименьшее значение интегралу

$$T=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+u_1'^2(x)+u_2'^2(x)}{v(x, y, z)}}\,dx. \tag{4}$$

3. Следующая задача несколько отлична от первых двух. Мы сформулируем ее так: среди всех плоских кривых, имеющих данную длину l и оканчивающихся в точках $A(a, 0)$ и $B(b, 0)$, найти кривую, ограничивающую вместе с отрезком $[a, b]$ оси x область с наибольшей площадью.

Пусть уравнение кривой будет $y=u(x)$. Задача заключается в том, чтобы найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую краевым условиям

$$u(a)=u(b)=0 \tag{5}$$

и тождеству

$$\int_a^b \sqrt{1+u'^2}\,dx=l \tag{6}$$

и сообщающую интегралу

$$S=\int_a^b u\,dx \tag{7}$$

наибольшее значение.

По сравнению с первыми двумя задачами новым здесь является то, что искомая функция должна удовлетворять не только краевым условиям (5), но и тождеству (6), которое, очевидно, не носит характера краевого условия. Общим во всех трех задачах является то, что мы каждый раз ищем функцию (или, как в задаче (2), совокупность функций — ее можно рассматривать как вектор-функцию), удовлетворяющую тем или иным заранее поставленным условиям и сообщающую экстремальное (минимальное или максимальное) значение заданному функционалу. Так, в задаче о брахистохроне искомая функция должна удовлетворять краевым условиям (2) и сообщать минимальное значение функционалу (1). Приведенные в настоящем параграфе три задачи, так же как и многие другие задачи того же рода, относятся к ветви математического анализа, называемой *вариационным исчислением*. Точная формулировка основных задач вариационного исчисления будет дана в следующем параграфе.

§ 2. Постановка задачи вариационного исчисления

Напомним определение функционала. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество элементов произвольной природы, и пусть каждому элементу $u \in \mathfrak{M}$ приведено в соответствие одно и только одно число $F(u)$. В этом случае говорят, что на множестве $\mathfrak{M}$ задан *функционал* F. Множество $\mathfrak{M}$ называется *областью определения* функционала F и обозначается через $D(F)$; число $F(u)$ называется *значением* функционала F на элементе u. Функционал F называется вещественным, если все его значения вещественны. Функционал F называется линейным, если его область определения есть линейное множество и если[1])

$$F(\lambda u+\mu v)=\lambda F(u)+\mu F(v).$$

Задача вариационного исчисления состоит в следующем: дан функционал F с областью определения $D(F)$; требуется найти элемент $u_0 \in D(F)$, сообщающий функционалу либо минимальное значение

$$F(u_0)=\inf_{u\in D(F)} F(u), \tag{1}$$

либо максимальное значение

$$F(u_0)=\sup_{u\in D(F)} F(u). \tag{2}$$

Задача о максимуме функционала F тождественна с задачей о минимуме функционала $-F$, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только задачу о минимуме.

Вряд ли можно решать задачу вариационного исчисления в только что приведенной общей формулировке, поэтому мы постараемся наложить на функционал F некоторые ограничения, по возможности простые и естественные.

Будем считать, что $D(F)$ есть часть некоторого банахова пространства X. Чтобы сформулировать дальнейшие ограничения, введем понятие линейного многообразия. Пусть M — линейное множество элементов пространства X и $\bar{u}$ — некоторый фиксированный элемент этого пространства. *Линейным многообразием* в пространстве X назовем совокупность элементов, каждый из которых можно представить в виде

$$u=\bar{u}+\eta, \quad \eta\in M. \tag{3}$$

Если $\bar{u}\in M$ (например, если $\bar{u}=0$), то, очевидно, так определенное линейное многообразие совпадает с M.

Требование 1. *Область определения $D(F)$ функционала F есть линейное многообразие, плотное в X*[2]).

[1]) Мы считаем, что основные свойства линейных функционалов известны читателю из курса функционального анализа.

[2]) Можно было бы рассмотреть и более общий случай, когда $D(F)$ есть пересечение плотного линейного многообразия с некоторым шаром или с иным открытым множеством.

Заметим, что линейное множество M тогда тоже будет плотным в X. Действительно, пусть u — произвольный элемент пространства X и M' — плотное в нем многообразие элементов вида $\bar{u}+\eta$, где η пробегает линейное множество M. Элемент $(u+\bar{u})\in X$, и можно найти такой элемент $\eta\in M$, что $\|(u+\bar{u})-(\bar{u}+\eta)\|<\varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. Но тогда $\|u-\eta\|<\varepsilon$; произвольный элемент $u\in X$ можно сколь угодно точно аппроксимировать элементом множества M. Это и означает, что множество M плотно в X. Точно так же доказывается и обратное утверждение: если η — произвольный элемент плотного в X линейного множества и $\bar{u}$ — фиксированный элемент пространства X, то линейное многообразие элементов вида $\bar{u}+\eta$ плотно в X.

Пример. Рассмотрим задачу о световом луче. Для простоты допустим, что траектория лежит в плоскости (x, y) и что скорость v не зависит от z. Тогда уравнение траектории можно написать в виде $y=u(x)$, причем $u(x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x_1)=y_1, \qquad u(x_2)=y_2, \tag{4}$$

и задача заключается в том, чтобы найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям (4) и минимизирующую функционал

$$T=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+u'^2(x)}{v(x, u(x))}}\,dx. \tag{5}$$

Естественно допустить, что скорость света строго положительна:

$$v(x, y)\geqslant v_0=\text{const}>0.$$

В качестве X можно взять, например, пространство $L_2(x_1, x_2)$ функций, суммируемых с квадратом на промежутке (x_1, x_2). Функционал (5) естественно задать на множестве $D(T)$ функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых на сегменте $[x_1, x_2]$ и удовлетворяющих условиям (4). Докажем, что это множество является линейным многообразием.

Обозначим

$$\bar{u}(x)=y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2-y_1)$$

и положим $u(x)=\bar{u}(x)+\eta(x)$. Если $u\in D(T)$, то $\eta(x)$ есть непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая краевым условиям

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0. \tag{6}$$

Очевидно, множество M функций $\eta(x)$, удовлетворяющих только что перечисленным условиям, линейно. Это множество содержит как свою часть множество функций, финитных на сегменте $[x_1, x_2]$. По следствию 1.3.1 множество M плотно в $L_2(\Omega)$.

На рассматриваемые функционалы наложим еще одно очень важное ограничение. Будем считать, что пространство X бесконечномерно, — в противном случае вариационная задача оказалась бы просто задачей на минимум функции конечного числа независимых переменных. Тогда плотное в X линейное множество M также бесконечномерно и, следовательно, из него можно выделять конечномерные подпространства.

Требование 2. *Если η пробегает любое конечномерное подпространство, содержащееся в M, то на этом подпространстве функционал $F(u) = F(\bar{u} + \eta)$ непрерывно дифференцируем достаточное число раз.*

Поясним наше требование. Пусть η пробегает какое-либо n-мерное подпространство M_n. Возьмем в нем некоторый базис $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Тогда, если $\eta \in M_n$, то η необходимо имеет вид

$$\eta = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_n\eta_n,$$

и, следовательно,

$$F(u) = F(\bar{u} + a_1\eta_1 + \ldots + a_n\eta_n).$$

Здесь $\bar{u}$ фиксировано, элементы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ также фиксированы. Таким образом, F есть функция переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В силу требования 2 эта функция достаточное число раз дифференцируема по $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Введем понятия об абсолютном и относительном минимуме функционала. Функционал F достигает на элементе $u_0 \in D(F)$ *абсолютного минимума*, если неравенство

$$F(u_0) \leqslant F(u) \tag{7}$$

справедливо для любого элемента $u \in D(F)$. Тот же функционал достигает на элементе u_0 *относительного минимума*, если неравенство (7) справедливо для элементов $u \in D(F)$, достаточно близких к u_0.

§ 3. Вариация и градиент функционала

1. Будем рассматривать функционал F, подчиненный требованиям 1, 2 § 2. Возьмем произвольный элемент $u \in D(F)$ и произвольный элемент $\eta \in M$. Обозначим через α произвольное вещественное число. Нетрудно видеть, что элемент

$$u + \alpha\eta \in D(F).$$

Действительно, пусть $u = \bar{u} + \eta_0$, $\eta_0 \in M$. Тогда

$$u + \alpha\eta = \bar{u} + (\eta_0 + \alpha\eta). \tag{1}$$

Каждое из слагаемых в скобке принадлежит линейному множеству M, поэтому и их сумма $\eta_0 + \alpha\eta$ принадлежит M. Но тогда, очевидно, элемент $u + \alpha\eta \in D(F)$.

Составим выражение $F(u + \alpha\eta)$. Элемент $\eta_0 + \alpha\eta$ принадлежит двумерному подпространству, проходящему через элементы η_0 и η. В силу требования 2 $F(u + \alpha\eta)$ есть непрерывно дифференцируемая функция от α. Вычислим ее производную и возьмем значение этой производной при $\alpha = 0$:

$$\left.\frac{dF(u + \alpha\eta)}{d\alpha}\right|_{\alpha = 0}. \tag{2}$$

В результате мы получим число, которое можно рассматривать как значение функционала (2), зависящего от двух элементов u и η.

Определение. Функционал

$$\left.\frac{dF(u + \alpha\eta)}{d\alpha}\right|_{\alpha = 0}$$

называется *вариацией* (или *первой вариацией*) функционала F в точке u и обозначается символом $\delta F(u, \eta)$:

$$\delta F(u, \eta) = \left.\frac{dF(u + \alpha\eta)}{d\alpha}\right|_{\alpha = 0}. \tag{3}$$

Будем считать элемент u фиксированным. Тогда вариация $\delta F(u, \eta)$ есть функционал от η.

Легко доказать, что вариация есть однородный функционал первой степени по отношению к η, т. е. если t — произвольное число, то

$$\delta F(u, t\eta) = t\delta F(u, \eta).$$

Действительно,

$$\delta F(u, t\eta) = \left.\frac{d}{d\alpha} F(u + \alpha t\eta)\right|_{\alpha = 0} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{F(u + \alpha t\eta) - F(u)}{\alpha}.$$

Полагая здесь $t\alpha = \beta$, имеем

$$\delta F(u, t\eta) = \lim_{\beta \to 0} t\, \frac{F(u + \beta\eta) - F(u)}{\beta} =$$

$$= t \left.\frac{d}{d\beta} F(u + \beta\eta)\right|_{\beta = 0} = t\delta F(u, \eta).$$

В общем случае этот функционал не аддитивен, однако существует достаточно много важных случаев, когда вариация является аддитивным функционалом от η. В связи с этим наложим на функционалы F еще одно

Требование 3. *Вариация $\delta F(u, \eta)$ — не только однородный, но и аддитивный функционал от η.*

Аддитивные и однородные функционалы мы будем называть *линейными*: таким образом, требование ограниченности мы не включаем в определение линейного функционала. Наше новое ограничение на функционалы F можно сформулировать так: вариация $\delta F(u, \eta)$ функционала F есть линейный функционал от η.

При произвольно выбранном $u \in D(F)$ этот функционал, вообще говоря, не ограничен. Выделим множество N тех элементов $u \in D(F)$, для которых вариация есть ограниченный функционал от η.

Если $u \in N$, то существует ограниченный функционал g такой, что

$$\delta F(u, \eta) = (g, \eta), \tag{4}$$

где через (g, η) обозначен результат воздействия функционала g на элемент η.

Соответствие $u \to g$ определяет на N оператор P такой, что

$$Pu = g, \qquad D(P) = N, \tag{5}$$

и, следовательно,

$$\delta F(u, \eta) = (Pu, \eta); \qquad u \in N, \qquad \eta \in M. \tag{6}$$

Линейный ограниченный в X функционал g есть элемент пространства X^*, сопряженного с X. Поэтому оператор P, определенный формулой (5) (или (6), что равносильно), действует из банахова пространства X в сопряженное пространство X^*.

Определение. Оператор P, определенный формулой (6), называется *градиентом* функционала $F(u)$ и обозначается символом

$$P = \operatorname{grad} F. \tag{7}$$

Если $u \in D(P)$, то вариацию функционала $F(u)$ можно записать следующим образом:

$$\delta F(u, \eta) = \frac{d}{d\alpha} F(u + \alpha\eta)\Big|_{\alpha=0} = (\operatorname{grad} F, \eta). \tag{8}$$

В общем случае $D(P)$ — область определения градиента — уже, чем область определения $D(F)$ функционала F.

2. Рассмотрим следующий важный для дальнейшего пример.

Пусть функция $\Phi(x, y, z)$ определена и непрерывна, когда

$$x \in [a, b], \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Будем предполагать, что функция $\Phi(x, y, z)$ имеет частные производные Φ_y и Φ_z, непрерывные в той же самой области изменения переменных x, y, z. Рассмотрим функционал

$$F(u) = \int_a^b \Phi(x, u(x), u'(x))\,dx, \tag{9}$$

область определения $D(F)$ которого состоит из функций, удовлетворяющих следующим условиям: $u \in C^{(1)}[a, b]$ и

$$u(a) = A, \qquad u(b) = B, \tag{10}$$

где A и B — заданные постоянные. Условия (10) означают, что кривые $y = u(x)$, где $u \in D(F)$, проходят через две фиксированные точки (a, A) и (b, B).

Докажем, что функционал (9) удовлетворяет требованиям 1, 2 § 2 и требованию 3 настоящего параграфа. В качестве X возьмем пространство $L_2(a, b)$. Очевидно, $D(F)$ принадлежит этому пространству.

Прежде всего убедимся, что $D(F)$ — линейное многообразие. Положим

$$\bar{u}(x) = A + \frac{x-a}{b-a}(B - A). \tag{11}$$

Очевидно, $\bar{u} \in C^{(1)}[a, b]$ и $\bar{u}$ удовлетворяет условиям (10). Пусть $u \in D(F)$. Рассмотрим разность $\eta(x) = u(x) - \bar{u}(x)$. Очевидно, $\eta \in C^{(1)}[a, b]$ и

$$\eta(a) = \eta(b) = 0. \tag{12}$$

Ясно, что множество M функций η линейно. Оно содержит множество функций, финитных на сегменте $[a, b]$. По следствию 1.3.1 множество M плотно в $L_2(a, b)$, а тогда в $L_2(a, b)$ плотно и линейное многообразие $D(F)$. Требование 1 выполнено.

Обратимся к требованию 2. Имеем

$$F(\bar{u}+a_1\eta_1+a_2\eta_2+\ldots+a_n\eta_n)=$$
$$=\int_a^b \Phi\Big(x,\ \bar{u}(x)+\sum_{k=1}^{n} a_k\eta_k(x),\ \bar{u}'(x)+\sum_{k=1}^{n} a_k\eta_k'(x)\Big)\,dx. \qquad (13)$$

Функция (13) непрерывно дифференцируема по переменным $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Действительно, из предположений относительно функций Φ вытекает, что подынтегральная функция в (13) и ее первые производные по $a_1, a_2, \ldots, a_n$ непрерывно зависят от $x, a_1, \ldots, a_n$. Из теоремы о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, вытекает, что функция (13) имеет непрерывные частные производные по переменным $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и эти производные можно получить дифференцированием под знаком интеграла.

Требования 1 и 2 выполнены, можно составить вариацию функционала (9):

$$\delta F(u,\ \eta)=\frac{d}{d\alpha}F(u+\alpha\eta)\Big|_{\alpha=0}=$$
$$=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b \Phi(x,\ u+\alpha\eta,\ u'+\alpha\eta')\,dx\Big|_{\alpha=0}=$$
$$=\int_a^b [\Phi_u(x,\ u,\ u')\eta+\Phi_{u'}(x,\ u,\ u')\eta']\,dx. \qquad (14)$$

Из формулы (14) видно, что требование 3 выполнено; вариация $\delta F(u,\ \eta)$ есть линейный функционал от η, так как подынтегральная функция в (14) линейно зависит от η и η'. Раз вариация оказалась линейной, можно ставить вопрос о градиенте функционала F. Выясним, какой должна быть функция $u \in D(F)$, чтобы вариация $\delta F(u,\ \eta)$ была ограниченным функционалом от η.

Пространство $L_2(a,\ b)$ гильбертово. По известной теореме Риса любой линейный ограниченный функционал в этом пространстве имеет вид

$$(\eta,\ g)=\int_a^b g(x)\,\eta(x)\,dx, \qquad (15)$$

где $g(x)$ — вполне определенная функция из $L_2(a,\ b)$.

Интеграл (14) распадается на два; в первом из них множитель Φ_u непрерывен и, тем более, суммируем с квадратом на промежутке (a, b); первый интеграл в (14) есть ограниченный функционал от η. Относительно второго интеграла

$$\int_a^b \Phi_{u'}\eta'\,dx \tag{16}$$

этого утверждать, вообще говоря, нельзя, если функция $u(x)$ произвольна.

Пусть функция $u(x)$ такова, что $\Phi_{u'}(x, u(x), u'(x))$ есть абсолютно непрерывная функция от x, и ее производная суммируема с квадратом на (a, b). Докажем, что тогда интеграл (16) есть ограниченный функционал от η; мы используем при этом, что $\eta(x)$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет краевым условиям (12).

Если функция $\Phi_{u'}(x, u(x), u'(x))$ абсолютно непрерывна, то существуют постоянная c и функция $\omega \in L_2(a, b)$ такие, что

$$\Phi_{u'}(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x \omega(t)\,dt; \tag{17}$$

при этом почти всюду в (a, b)

$$\omega(x) = \frac{d}{dx}\Phi_{u'}(x, u(x), u'(x)).$$

Если так, то интеграл

$$\int_a^b \Phi_{u'}\eta'\,dx$$

можно взять по частям:

$$\int_a^b \Phi_{u'}\eta'\,dx = -\int_a^b \eta\frac{d}{dx}\Phi_{u'}\,dx + \eta\Phi_{u'}\Big|_a^b = -\int_a^b \eta\frac{d}{dx}\Phi_{u'}\,dx.$$

Так как $\frac{d}{dx}\Phi_{u'} = \omega \in L_2(a, b)$, то в силу теоремы Риса последний интеграл есть ограниченный функционал от η. А тогда будет ограниченным функционалом от η и вариация $\delta F(u, \eta)$, которую теперь можно представить в виде

$$\delta F(u, \eta) = \int_a^b \left[\Phi_u - \frac{d}{dx}\Phi_{u'}\right]\eta\,dx. \tag{18}$$

Из соотношения (18) вытекает формула для grad F:

$$\operatorname{grad} F = \Phi_u(x, u, u') - \frac{d}{dx}\Phi_{u'}(x, u, u'). \tag{19}$$

Действительно, из формул (8) и (18) следует, что

$$\left(\operatorname{grad} F - \left[\Phi_u - \frac{d}{dx}\Phi_{u'}\right], \eta\right) = 0.$$

Разность

$$\operatorname{grad} F - \left[\Phi_u - \frac{d}{dx}\Phi_{u'}\right]$$

оказывается ортогональной к множеству функций η, плотному в $L_2(a, b)$. Но тогда

$$\operatorname{grad} F - \left[\Phi_u - \frac{d}{dx}\Phi_{u'}\right] = 0,$$

что равносильно формуле (19).

Таким образом, градиент функции F определен на функции $u \in D(F)$, если $\Phi_{u'}$ — абсолютно непрерывная функция, производная которой суммируема с квадратом

Докажем, что справедливо и обратное утверждение:

Если функция $u(x) \in D(F)$ и одновременно $u \in D(\operatorname{grad} F)$, то на сегменте $[a, b]$ функция $\Phi_{u'}(x, u, u')$ абсолютно непрерывна, производная $\frac{d}{dx}\Phi(x, u, u')$ суммируема с квадратом на отрезке (a, b) и

$$(\operatorname{grad} F)(u) = \Phi_u - \frac{d}{dx}\Phi_{u'}.$$

Если $u \in D(\operatorname{grad} F)$, то вариация $\delta F(u, \eta)$ есть ограниченный функционал от η. В таком случае интеграл (16) также есть ограниченный функционал от η. По теореме Риса существует такая функция $g \in L_2(a, b)$, что

$$\int_a^b \Phi_{u'}\eta'(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,\eta(x)\,dx. \tag{20}$$

Построим функцию

$$G(x) = -\int_a^x g(t)\,dt$$

и возьмем по частям интеграл в правой части формулы (20). Так как функция $\eta(x)$ удовлетворяет условиям (12), то

$$\int_a^b g(x)\eta(x)\,dx = \int_a^b G(x)\eta'(x)\,dx. \tag{21}$$

Формулы (20) и (21) в совокупности дают

$$\int_a^b [\Phi_{u'} - G]\,\eta'\,dx = 0. \tag{22}$$

Тождество (22) верно для любой функции $\eta(x)$, непрерывно дифференцируемой на сегменте $[a, b]$ и равной нулю на концах того сегмента. Имея это в виду, положим в тождестве (22)

$$\eta(x) = \sin\frac{k\pi(x-a)}{b-a}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Мы получим тогда

$$\int_a^b [\Phi_{u'} - G]\cos\frac{k\pi(x-a)}{b-a} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Как хорошо известно, система функций

$$\cos k\pi\frac{x-a}{b-a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

полна в $L_2(a, b)$. Функция $\Phi_{u'} - G$ ортогональна ко всем функциям этой системы, за исключением функции, тождественно равной единице. Но тогда функция $\Phi_{u'} - G$ может отличаться от единицы только постоянным множителем:

$$\Phi_{u'} - G = c = \text{const}.$$

Отсюда

$$\Phi_{u'} = c - \int_a^x g(t)\,dt,$$

и, следовательно, функция $\Phi_{u'}$ абсолютно непрерывна. Далее, $\frac{d}{dx}\Phi_{u'} = -g(x) \in L_2(a, b)$, и наше утверждение доказано. Полученные здесь результаты позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.3.1. *Пусть функционал* (9) *задан на непрерывно дифференцируемых функциях, удовлетворяющих* *краевым условиям* (10), *и пусть область определения этого функционала рассматривается как множество в пространстве* $L_2(a, b)$. *Тогда область определения градиента функционала* (9) *состоит из тех и только тех функций, которые обладают следующими свойствами: они непрерывно дифференцируемы на сегменте* $[a, b]$ *и удовлетворяют условиям* (10); *будучи подставлены в выражение* $\Phi_{u'}(x, u, u')$, *они обращают его в абсолютно непрерывную на сегменте* $[a, b]$ *функцию, производная которой на этом сегменте суммируема с квадратом.*

§ 4. Уравнение Эйлера

Рассмотрим функционал F, удовлетворяющий требованиям 1, 2, 3 §§ 2, 3. Пусть этот функционал определен на линейном многообразии $D(F)$, элементы которого имеют вид $u = \bar{u} + \eta$, где $\bar{u}$ — фиксированный элемент данного пространства X, а η пробегает линейное множество M, плотное в X.

Пусть функционал F достигает в точке u_0 относительного минимума. Возьмем произвольный элемент $\eta \in M$ и произвольное вещественное число α. Тогда, если абсолютная величина α достаточно мала, то норма разности

$$\|(u_0 + \alpha\eta) - u_0\| = |\alpha| \|\eta\|$$

будет сколь угодно мала, а в таком случае по определению относительного минимума

$$F(u_0 + \alpha\eta) \geqslant F(u_0). \tag{1}$$

Это неравенство означает, что функция одной вещественной переменной α, равная $F(u_0 + \alpha\eta)$, имеет относительный минимум при $\alpha = 0$. Но тогда необходимо

$$\frac{d}{d\alpha} F(u_0 + \alpha\eta)\Big|_{\alpha=0} = 0$$

или, что то же,

$$\delta F(u_0, \eta) = 0. \tag{2}$$

Мы получили необходимое условие минимума: *если функционал в некоторой точке достигает минимума, то в этой точке вариация функционала равна нулю.*

Линейный функционал, тождественно равный нулю, очевидно, ограничен, а в таком случае $u_0 \in D(\operatorname{grad} F)$. Обозначим

$$\operatorname{grad} F = Pu. \tag{3}$$

Тогда

$$\delta F(u_0, \eta) = (Pu_0, \eta) = 0. \tag{4}$$

Выражение Pu_0 есть функционал над элементом η, определенный на том множестве M, которое пробегает η. Значит, функционал Pu_0 задан на плотном множестве и на этом множестве все его значения равны нулю. По непрерывности его можно продолжить на все пространство X, и на всем пространстве его значения также будут равны нулю. Но это означает, что

$$Pu_0 = 0.$$

Нами доказана

Теорема 3.4.1. *Если функционал F, удовлетворяющий требованиям* 1 — 3, *имеет относительный экстремум в точке u_0, то $u_0 \in D(\operatorname{grad} F)$ и в этой точке удовлетворяется уравнение*

$$(\operatorname{grad} F)(u_0) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) называется *уравнением Эйлера*.

В качестве примера рассмотрим так называемую простейшую задачу вариационного исчисления. Это — задача о минимуме функционала

$$F(u) = \int_a^b \Phi(x, u, u')\,dx, \tag{6}$$

область определения $D(F)$ которого состоит из функций, непрерывно дифференцируемых на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяющих краевым условиям

$$u(a) = A, \qquad u(b) = B. \tag{7}$$

Этот функционал описан в § 3. Мы допустим здесь, что функция $\Phi(x, u, u')$ удовлетворяет всем ограничениям, наложенным на нее в § 3. Если функция $u(x)$ реализует минимум (относительный или, тем более, абсолютный), то по теореме Эйлера 3.4.1 и по формуле (3.19) эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}\Phi_{u'}(x,\ u,\ u')-\Phi_u=0; \qquad (8)$$

будучи элементом множества $D(F)$, она удовлетворяет также условиям (7). Подробнее мы исследуем простейшую задачу вариационного исчисления в гл. 4.

В качестве примера рассмотрим задачу о брахистохроне. В данном случае

$$\Phi(x,\ u,\ u')=\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}};$$

непосредственно сослаться на уравнение (8) нельзя, потому что функция Φ терпит разрыв при $u=0$ и, следовательно, не удовлетворяет условиям § 3. Докажем, что уравнение (8) применимо.

Пусть задача о брахистохроне имеет решение $u_0(x)$. Из физических соображений ясно, что $u_0(x)>0$ при $x>0$, — в противном случае на некоторых участках пути движущаяся материальная точка поднималась бы вверх, а на это затрачивалось бы лишнее время.

На интервале $(0,\ a)$ возьмем произвольную точку a'. Построим функцию $\eta(x)$, обладающую следующими свойствами: а) $\eta\in C^{(1)}[0,\ a]$; б) $\eta(x)\equiv 0$, $0\leqslant x\leqslant a'$; в) $\eta(a)=0$; в остальном функция η произвольна. Положим

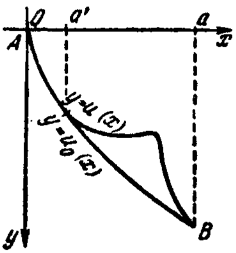

Рис. 6.

$$F(u)=\int_0^a\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\,dx,$$

и пусть $u(x)=u_0(x)+\alpha\eta(x)$ (рис. 6). Если число α достаточно мало, то $u(x)>0$, $x>0$; кроме того, $u(0)=0$, $u(a)=b$. В таком случае $F(u)=F(u_0+\alpha\eta)\geqslant F(u_0)$ и функция переменной α

$$F(u_0+\alpha\eta)=\int_0^{a'}\sqrt{\frac{1+u_0'^2}{u_0}}\,dx+\int_{a'}^{a}\sqrt{\frac{1+(u_0'+\alpha\eta')^2}{u_0+\alpha\eta}}\,dx \qquad (9)$$

имеет минимум при $\alpha=0$. Подынтегральная функция во втором интеграле (9) непрерывно зависит от x и α, и можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{d}{d\alpha}F(u_0+\alpha\eta)\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{a'}^{a}\left[\frac{\partial}{\partial u'}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\,\eta'+\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\,\eta\right]_{u=u_0}dx=0. \qquad (10)$$

Чтобы упростить рассуждения, допустим — на самом деле это нетрудно доказать, — что на сегменте $[a', a]$ существует суммируемая с квадратом производная

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial u'}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\right]_{u=u_0}.$$

Тогда первый интеграл в (10) можно взять по частям. Из определения функции $\eta(x)$ вытекает, что $\eta(a')=\eta(a)=0$, и внеинтегральный член исчезает. Мы приходим к равенству

$$\int_{a'}^{a}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial u'}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}-\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\right]_{u=u_0}\eta(x)\,dx=0.$$

Это тождество верно для любой функции $\eta\in C^{(1)}[a', a]$, $\eta(a')=\eta(a)=0$. Множество таких функций плотно в $L_2(a', a)$ (ср. § 3), поэтому необходимо

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial u'}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}-\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}\right]_{u=u_0}=0, \qquad (11)$$

что совпадает с уравнением (8) для функции $\sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}$.

Уравнение (11) легко приводится к виду

$$\frac{d}{dx}\sqrt{u_0(1+u_0'^2)}=0.$$

Отсюда

$$u_0(1+u_0'^2)=c.$$

Положим $u_0'=\operatorname{tg}\varphi$. Тогда $u_0=\frac{c}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{c}{2}(1+\cos 2\varphi)$. Дифференцируя, получим $u_0'=-c\sin 2\varphi\cdot\varphi'$. Замена $u_0'=\operatorname{tg}\varphi$ дает дифференциальное уравнение относительно φ'

$$\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{c\sin 2\varphi}.$$

Далее,

$$dx = -2c\cos^2\varphi\, d\varphi; \quad x = c_1 - \frac{c}{2}(2\varphi + \sin 2\varphi).$$

Положив $2\varphi = \pi + \theta$, $C_1 - \frac{\pi c}{2} = C$, получим

$$x = C - \frac{c}{2}(\theta - \sin\theta), \quad u_0 = \frac{c}{2}(1 - \cos\theta).$$

Мы пришли к выводу, что если задача о брахистохроне имеет решение, то это решение есть ц и к л о и д а.

§ 5. Вторая вариация. Достаточное условие экстремума

Сохраним обозначения предшествующих параграфов и рассмотрим функцию $F(u+\alpha\eta)$ от вещественной переменной α; элементы $u \in D(F)$ и $\eta \in M$ считаем фиксированными. Эту функцию разложим в ряд Тейлора и в полученном разложении положим $\alpha = 1$:

$$F(u+\eta) = F(u) + \left[\frac{d}{d\alpha}F(u+\alpha\eta)\right]_{\alpha=0} + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}F(u+\alpha\eta)\right]_{\alpha=\theta} =$$
$$= F(u) + \delta F(u, \eta) + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}F(u+\alpha\eta)\right]_{\alpha=\theta}; \quad 0<\theta<1. \qquad (1)$$

Выражение

$$\delta^2 F(u, \eta) = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}F(u+\alpha\eta)\right]_{\alpha=0} \qquad (2)$$

называется *второй вариацией* функционала F в точке u.

Имеем

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}F(u+\alpha\eta)\right]_{\alpha=\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\beta^2}F(u+\theta\eta+\beta\eta)\right]_{\beta=0} =$$
$$= \delta^2 F(u+\theta\eta, \eta),$$

и разложение (1) принимает следующий вид:

$$F(u+\eta) = F(u) + \delta F(u, \eta) + \delta^2 F(u+\theta\eta, \eta), \quad 0<\theta<1. \qquad (3)$$

Пусть функционал F достигает минимума, относительного или абсолютного, в точке u_0. Тогда $\delta F(u_0, \eta) = 0$, и формула (3) дает

$$F(u_0+\eta) = F(u_0) + \delta^2 F(u_0+\theta\eta, \eta). \qquad (4)$$

Формула (4) позволяет сразу сформулировать условие, необходимое и достаточное для того, чтобы элемент u_0, удовлетворяющий уравнению Эйлера, сообщал функционалу минимальное значение. Для абсолютного минимума это условие имеет вид

$$\delta^2 F(u_0 + \theta\eta, \eta) \geqslant 0, \qquad \forall \eta \in M; \tag{5}$$

для относительного минимума оно состоит в том, что неравенство (5) выполняется, когда элемент η достаточно мал по норме. Условие (5) в конкретных задачах трудно проверить, потому что величина θ обычно неизвестна, и непосредственно им, как правило, воспользоваться не удается. Однако из него можно получить более просто проверяемые условия, либо необходимые, либо достаточные. В частности, из соотношения (5) вытекают следующие достаточные условия минимума:

Теорема 3.5.1. *Пусть элемент u_0 удовлетворяет уравнению Эйлера. Если при $\eta \neq 0$ вторая вариация функционала F положительна в любой точке $u \in D(F)$, то этот функционал имеет в точке u_0 абсолютный минимум. Если при $\eta \neq 0$ вторая вариация положительна в некоторой окрестности точки u_0, то в этой точке функционал имеет относительный минимум.*

Доказательство очень просто. В первом случае при любом $\eta \in M$, $\eta \neq 0$, имеем

$$\delta^2 F(u_0 + \theta\eta, \eta) > 0.$$

Если u — произвольный элемент из $D(F)$, отличный от u_0, то, полагая $\eta = u - u_0$, найдем из (4), что $F(u) > F(u_0)$. Рассмотрим теперь второй случай. Существует такое число $\rho > 0$, что при $u \in D(F)$, $\|u - u_0\| < \rho$ и $\eta \neq 0$ будет $\delta^2 F(u, \eta) > 0$. Возьмем такое u, $u \neq u_0$, и опять положим $\eta = u - u_0$. Тогда

$$F(u) = F(u_0) + \delta^2 F(u_0 + \theta\eta, \eta).$$

Имеем

$$\|(u_0 + \theta\eta) - u_0\| = \|\theta\eta\| = |\theta| \, \|\eta\| \leqslant \|\eta\| = \|u - u_0\| < \rho.$$

Отсюда вытекает, что $\delta^2 F(u_0 + \theta\eta, \eta) > 0$, и, следовательно, $F(u) > F(u_0)$.

§ 6. Изопериметрическая задача

Изопериметрическая задача ставится следующим образом: даны функционалы F, G_1, G_2, ..., G_n и постоянные l_1, l_2, ..., l_n; среди элементов области определения $D(F)$ функционала F, удовлетворяющих уравнениям

$$G_k(u) = l_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

требуется найти элемент, доставляющий функционалу F наименьшее значение. Постановка изопериметрической задачи требует, конечно, чтобы не было пустым пересечение

$$D_0 = D(F) \cap D(G_1) \cap D(G_2) \cap \ldots \cap D(G_n). \tag{2}$$

Это условие далее считается выполненным.

Частным случаем изопериметрической задачи является третья из задач § 1. Здесь $n = 1$,

$$F(u) = \int_a^b u(x)\,dx, \quad G_1(u) = \int_a^b \sqrt{1 + u'^2}\,dx, \quad l_1 = l.$$

За $D(F)$ можно принять множество тех функций из $C[a, b]$, которые обращаются в нуль при $x = a$ и $x = b$ (условие (5.1)), а за $D(G_1)$ — множество функций из $C^{(1)}[a, b]$, удовлетворяющих тем же условиям (5.1). Очевидно, $D(G_1) \subset D(F)$ и пересечение $D(G_1) \cap D(F) = D(G_1)$ не пусто.

Ниже будем считать, что функционалы $F, G_1, G_2, \ldots, G_n$ удовлетворяют требованиям 1—3 §§ 2, 3. Пересечение линейных многообразий само есть линейное многообразие, поэтому существуют элемент $\bar{u} \in D_0$ и линейное множество M_0 такое, что любой элемент $u \in D_0$ имеет вид $u = \bar{u} + \eta$, $\eta \in M_0$.

Будем считать также, что множество M_0 плотно в рассматриваемом пространстве.

Справедлива теорема, принадлежащая Эйлеру и известная под названием *правила множителей для изопериметрической задачи.*

Теорема 3.6.1. *Пусть элемент $u_0 \in D_0$ решает изопериметрическую задачу. Если существуют такие элементы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in M_0$, что определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta G_1(u_0, \eta_1) & \delta G_2(u_0, \eta_1) & \ldots & \delta G_n(u_0, \eta_1) \\ \delta G_1(u_0, \eta_2) & \delta G_2(u_0, \eta_2) & \ldots & \delta G_n(u_0, \eta_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta G_1(u_0, \eta_n) & \delta G_2(u_0, \eta_n) & \ldots & \delta G_n(u_0, \eta_n) \end{vmatrix} \tag{3}$$

отличен от нуля, то найдутся такие постоянные λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, что

$$\left(\operatorname{grad}\left(F + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k G_k\right)\right)(u_0) = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Введем вещественные переменные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и элементы $\eta_k \in M_0$, $k=0, 1, \ldots, n$. Положим

$$u = u_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \eta_k. \tag{5}$$

При любых значениях α_k элемент $u \in D_0$. Действительно, $u_0 = \bar{u} + \eta$, $\eta \in M_0$. Но тогда

$$u = \bar{u} + \left(\eta + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \eta_k\right).$$

Выражение в скобке — линейная комбинация элементов из M_0, которая, следовательно, сама принадлежит M_0, а тогда $u \in D_0$.

Зафиксируем элементы η_k и положим

$$G_j\left(u_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \eta_k\right) = \varphi_j\,(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Вычислим первые частные производные функции (6) при $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \varphi_j (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\Bigg|_{\alpha_i = 0} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} G_j \left(u_0 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k \eta_k + \alpha_i \eta_i\right)\Bigg|_{\alpha_i = 0} =$$

$$= \delta G\left(u_0 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k \eta_k,\ \eta_i\right).$$

Положив дополнительно $\alpha_k = 0$, $k \neq l$, получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \varphi_j (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\Big|_{\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0} = \delta G_j (u_0, \eta_j). \tag{7}$$

Элементы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ выберем так, чтобы определитель (3) был отличен от нуля, и рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_j (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) - l_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Для системы (8) выполнены условия теоремы о неявных функциях: в точке $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ система (8) удовлетворяется, и в этой точке якобиан

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}$$

отличен от нуля — в силу соотношений (7) он совпадает с определителем (3). Отсюда следует, что существуют функции $\alpha_k = \omega_k(\alpha_0)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, обращающие уравнения системы (8) в тождества; эти функции непрерывно дифференцируемы при α_0, близких к нулю, и $\omega_k(0) = 0$.

Уравнения (8) означают, что

$$G_j\left(u_0 + \alpha_0\eta_0 + \sum_{k=1}^{n} \omega_k(\alpha_0)\eta_k\right) = l_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. что при любых α_0, достаточно близких к нулю, элемент

$$u(\alpha_0) = u_0 + \alpha_0\eta_0 + \sum_{k=1}^{n} \omega_k(\alpha_0)\eta_k$$

удовлетворяет изопериметрическим равенствам (1). В таком случае

$$F(u(\alpha_0)) \geqslant F(u_0).$$

При $\alpha_0 = 0$ имеем $u(0) = u_0$; функция $F(u(\alpha_0))$ от вещественной переменной α_0 имеет минимум при $\alpha_0 = 0$, и потому

$$\frac{d}{d\alpha_0} F(u(\alpha_0))\Big|_{\alpha_0 = 0} = 0.$$

Имеем

$$\frac{d}{d\alpha_0} F(u(\alpha_0))\Big|_{\alpha_0=0} = \frac{\partial F\left(u_0 + \alpha_0\eta_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\eta_k\right)}{\partial\alpha_0}\Bigg|_{\alpha_0=\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F\left(u_0 + \alpha_0\eta_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\eta_k\right)}{\partial\alpha_k}\,\omega_k'(\alpha_0)\Bigg|_{\alpha_0=\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0}$$

или, короче,

$$\frac{d}{d\alpha} F(u(\alpha_0))\Big|_{\alpha_0=0} = \delta F(u_0, \eta_0) + \sum_{k=1}^{n} \delta F(u_0, \eta_k)\,\omega_k'(0). \quad (9)$$

Значения $\omega_k'(0)$ можно определить из системы (8). В уравнения этой системы подставим $\alpha_k = \omega_k(\alpha_0)$, полученные тождества продифференцируем по α_0 и положим $\alpha_0=0$. Аналогично соотношению (9) мы получим равенства

$$\delta G_j(u_0, \eta_0)+\sum_{k=1}^{n} \delta G_j(u_0, \eta_k)\,\omega_k'(0)=0, \quad j=1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Эти равенства представляют собой линейную систему с неизвестными $\omega_k'(0)$; ее определитель, равный определителю (3), отличен от нуля. Как легко видеть, решение системы (10) имеет вид

$$\omega_k'(0)=\sum_{m=1}^{n} A_{km}\,\delta G_m(u_0, \eta_0), \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

где A_{km} — некоторые постоянные. Подставив это в (9), изменив порядок суммирования и введя обозначения

$$\lambda_j=\sum_{k=1}^{n} A_{kj}\,\delta F(u_0, \eta_k), \qquad J=F+\sum_{k=1}^{n} \lambda_j G_j,$$

получим

$$\delta J(u_0, \eta_0)=0.$$

Повторяя рассуждения, использованные в § 4 при выводе уравнения Эйлера, найдем

$$(\operatorname{grad} J)(u_0)=\left(\operatorname{grad}\left(F+\sum_{j=1}^{n} \lambda_j G_j\right)\right)(u_0)=0,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что доказанная здесь теорема Эйлера дает только необходимое условие минимума для изопериметрической задачи.

Техника решения изопериметрических задач такова: составляем функционал $J=F+\sum_{k=1}^{n} \lambda_k G_k$, где λ_k — неизвестные постоянные, и пишем для этого функционала уравнение Эйлера. Оно содержит в качестве неизвестных элемент u_0 и постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Эти неизвестные определяются из уравнения Эйлера (4) и изопериметрических равенств (1).

В качестве примера рассмотрим задачу 3 § 1, упомянутую также в начале настоящего параграфа. В соответствии с теоремой Эйлера введем постоянный множитель λ и составим функционал

$$J(u)=F(u)+\lambda G_1(u)=\int_a^b\left(u+\lambda\sqrt{1+u'^2}\right)dx;$$

$$u(a)=u(b)=0.$$

Функционал J является частным случаем функционала простейшей задачи вариационного исчисления; в данном случае $\Phi(x, u, u')=u+\lambda\sqrt{1+u'^2}$. Уравнение Эйлера $(\operatorname{grad} J)(u)=0$ для функционала J в соответствии с формулой (4.8) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\frac{\lambda u'}{\sqrt{1+u'^2}}-1=0.$$

Интегрирование дает

$$\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}=\frac{x-c}{\lambda}.$$

Отсюда

$$u'=-\frac{x-c}{\sqrt{\lambda^2-(x-c)^2}}.$$

Интегрируя еще раз, придем к уравнению окружности радиуса λ:

$$(x-c)^2+(u-c_1)^2=\lambda^2.$$

Таким образом, если решение существует, то это — дуга окружности. Для определения ее радиуса λ и центра (c, c_1) имеем три уравнения:

$$u(a)=0, \quad u(b)=0, \quad \int_a^b\sqrt{1+u'^2}\,dx=l.$$

Взяв начало координат посередине отрезка $[a, b]$, будем иметь $a=-b$; наши уравнения принимают вид

$$(c+b)^2+c_1^2=\lambda^2, \quad (c-b)^2+c_1^2=\lambda^2,$$

$$\int_{-b}^{b}\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-(\lambda-c)^2}}\,dx=l.$$

Отсюда $c=0$, $c_1=\sqrt{\lambda^2-b^2}$, $2\lambda\arcsin\frac{b}{\lambda}=l$. В частном случае, когда $l=\pi b$, $\lambda=b$, и решение — полуокружность.

§ 7. Минимизирующая последовательность

Пусть F — произвольный ограниченный снизу функционал. В таком случае существует нижняя грань его значений

$$\mu = \inf_{u \in D(F)} F(u).$$

Последовательность $\{u_n\}$ элементов из $D(F)$ называется *минимизирующей* для функционала F, если существует предел $F(u_n)$, равный μ.

Теорема 3.7.1. *Функционал, ограниченный снизу, имеет по крайней мере одну минимизирующую последовательность.*

Из определения нижней грани следует, что: 1) для любого элемента $u \in D(F)$ справедливо неравенство $F(u) \geqslant \mu$; 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $u^{(\varepsilon)}$ из $D(F)$, что $F(u^{(\varepsilon)}) < \mu + \varepsilon$. Положим $\varepsilon = 1/n$ и обозначим $u^{(1/n)} = u_n$. Тогда

$$\mu \leqslant F(u_n) < \mu + \frac{1}{n},$$

откуда следует, что $\lim F(u_n) = \mu$.

Теорема 3.7.2. *Пусть $D(F)$ — линейное многообразие некоторого банахова пространства X. Если функционал F непрерывен в $D(F)$ и существует предел минимизирующей последовательности $u_0 = \lim u_n$, то элемент u_0 сообщает функционалу F минимальное значение.*

Доказательство очень просто: в силу непрерывности функционала

$$F(u_0) = \lim F(u_n) = \mu = \inf F(u_n).$$

Теоремы настоящего параграфа создают возможность решать задачу о минимуме функционала, минуя уравнения Эйлера. Для этого надо прежде всего погрузить множество $D(F)$ в такое банахово пространство X, в котором функционал F был бы непрерывен. Далее, следует построить минимизирующую последовательность. Если она сходится (в смысле сходимости в пространстве X), то ее предел решает вариационную задачу.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Обозначим через $C_0^{(1)}[a,b]$ множество функций, непрерывно дифференцируемых на сегменте $[a,b]$ и равных нулю в точках a и b. Функционал

$$F(u)=\int_a^b \Phi(x, u(x), u'(x))\,dx$$

зададим на множестве $C_0^{(1)}[a,b]$, которое погрузим в гильбертово пространство H, определенное следующим образом: элементы пространства H суть абсолютно непрерывные на $[a,b]$ функции, равные нулю в точках a и b и имеющие суммируемые с квадратом первые производные. Скалярное произведение и норму в H зададим формулами

$$(u,v)_H=\int_a^b u'(x)\,v'(x)\,dx;$$

$$\|u\|_H^2=\int_a^b u'^2(x)\,dx.$$

Функция $\Phi(x,u,u')$ непрерывно дифференцируема в области $x\in[a,b]$, $-\infty<u<+\infty$, $-\infty<u'<+\infty$. Найти выражение $\operatorname{grad} F$ и область его определения.

2. Поставим изопериметрическую задачу: найти минимум функционала

$$\Phi(u)=\int_0^1 \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+q(x)\,u^2\right]dx$$

при условиях

$$u\in C_0^{(1)}[0,1],\qquad \int_0^1 u^2dx=1.$$

Предполагаем, что $p(x), p'(x), q(x)\in C[0,1]$ и что $p(x)\geqslant p_0=\mathrm{const}>0$, а $q(x)\geqslant 0$. Положим

$$u_n=\sum_{k=1}^n a_k\sin k\pi x$$

и определим коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из условий

$$\int_0^1 u_n^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2=1$$

и $\Phi(u_n) = \min$. Доказать, что функции u_n можно построить и что они образуют минимизирующую последовательность для функционала Φ.

3. В упражнении 2 взять u_n равной

$$u_n = x(1-x)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ по-прежнему определить из условий

$$\int_0^1 u_n^2(x)\,dx = 1, \quad \Phi(u_n) = \min.$$

Доказать то же, что и в упражнении 2.

ГЛАВА 4

ФУНКЦИОНАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Простейшая задача вариационного исчисления

Мы уже рассматривали эту задачу в § 4 гл. 3. Напомним, что дело идет о минимуме интеграла

$$F(u)=\int_a^b \Phi(x, u, u')\,dx, \tag{1}$$

где функция $u(x)$ подчинена краевым условиям

$$u(a)=A, \quad u(b)=B, \tag{2}$$

A и B — заданные постоянные. Относительно подынтегральной функции $\Phi(x, u, u')$ было предположено, что она непрерывна и имеет непрерывные частные производные по u и u' в области

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad -\infty<u<+\infty, \quad -\infty<u'<+\infty. \tag{3}$$

За область определения $D(F)$ функционала (1) было принято линейное многообразие функций из $C^{(1)}[a, b]$, удовлетворяющих условиям (2); многообразие $D(F)$ мы рассматривали как часть пространства $L_2(a, b)$. При этом оказалось, что градиент функционала F определен на тех и только тех функциях $u\in D(F)$, для которых функция

$$\Phi_{u'}(x, u, u')$$

абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет также суммируемую с квадратом производную; самый градиент определяется формулой

$$(\operatorname{grad} F)(u)=\Phi_u-\frac{d}{dx}\Phi_{u'}. \tag{4}$$

Уравнение Эйлера для функционала (1) сводится к дифференциальному уравнению

$$(\operatorname{grad} F)(u) = \Phi_u - \frac{d}{dx}\Phi_{u'} = 0 \tag{5}$$

с краевыми условиями (2). Таким образом, если простейшая задача вариационного исчисления имеет решение, то оно должно удовлетворять дифференциальному уравнению (5) и краевым условиям (2). Решения уравнения (5) обычно называют *экстремалями* функционала (1).

Наложим на подынтегральную функцию $\Phi(x, u, u')$ некоторые дополнительные ограничения. Потребуем, чтобы она имела в области (3) непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным x, u, u' и частные производные второго порядка $\Phi_{xu'}$, $\Phi_{uu'}$, $\Phi_{u'^2}$ и чтобы $\Phi_{u'^2} \neq 0$. Докажем, что при этих предположениях каждая экстремаль функционала (1) имеет непрерывную вторую производную. Мы докажем вначале, что при сделанных нами предположениях о функции Φ любая функция из области $D(\operatorname{grad} F)$ имеет почти всюду вторую производную, суммируемую с квадратом.

Пусть $u \in D(\operatorname{grad} F)$. Тогда, тем более, $u \in D(F)$ и, следовательно, $u \in C^{(1)}[a, b]$. В то же время $\frac{d}{dx}\Phi_{u'} \in L_2(a, b)$. Обозначим

$$\frac{d}{dx}\Phi_{u'}(x, u, u') = \omega(x).$$

Почти всюду существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi_{u'}(x + \Delta x, u + \Delta u, u' + \Delta u') - \Phi_{u'}(x, u, u')}{\Delta x} = \omega(x),$$

здесь $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$; $\Delta u' = u'(x + \Delta x) - u'(x)$. По формуле Лагранжа

$$\frac{\Phi_{u'}(x + \Delta x, u + \Delta u, u' + \Delta u') - \Phi_{u'}(x, u, u')}{\Delta x} =$$
$$= \Phi_{xu'}(x + \theta\Delta x, u + \theta\Delta u, u' + \theta\Delta u') +$$
$$+ \Phi_{uu'}(x + \theta\Delta x, u + \theta\Delta u, u' + \theta\Delta u')\frac{\Delta u}{\Delta x} +$$
$$+ \Phi_{u'^2}(x + \theta\Delta x, u + \theta\Delta u, u' + \theta\Delta u')\frac{\Delta u'}{\Delta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Найдем отсюда частное $\frac{\Delta u'}{\Delta x}$; это возможно, потому что $\Phi_{u'^2} \neq \neq 0$. Для краткости письма опустим аргументы у вторых производных:

$$\frac{\Delta u'}{\Delta x} = \frac{1}{\Phi_{u'^2}} \left\{ \frac{\Phi_{u'}(x + \Delta x, u + \Delta u, u' + \Delta u') - \Phi_{u'}(x, u, u')}{\Delta x} - \right.$$
$$\left. - \Phi_{xu'} - \Phi_{uu'} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right\}.$$

При $\Delta x \to 0$ правая часть последнего равенства почти всюду имеет предел, равный

$$\frac{1}{\Phi_{u'^2}(x, u, u')} \left\{ \frac{d}{dx} \Phi_{u'}(x, u, u') - \Phi_{xu'}(x, u, u') - \Phi_{uu'}(x, u, u')\, u' \right\} =$$
$$= \frac{1}{\Phi_{u'^2}(x, u, u')} \left\{ \omega(x) - \Phi_{xu'}(x, u, u') - \Phi_{uu'}(x, u, u')\, u' \right\}.$$

Но тогда почти всюду существует вторая производная

$$u'' = \frac{-1}{\Phi_{u'^2}(x, u, u')} \left\{ \omega(x) - \Phi_{xu'}(x, u, u') - \Phi_{uu'}(x, u, u')\, u' \right\},$$

суммируемая с квадратом.

Если u — экстремаль, то в силу уравнения Эйлера $\omega(x) = = \Phi_u(x, u, u')$ и

$$u'' = \frac{-1}{\Phi_{u'^2}(x, u, u')} \left\{ \Phi_u(x, u, u') - \Phi_{xu'}(x, u, u') - \Phi_{uu'}(x, u, u')\, u' \right\} \tag{6}$$

из ограничений, наложенных на Φ, следует, что это есть функция, непрерывная на сегменте $[a, b]$.

Уравнение (6) представляет собой видоизмененную запись уравнения Эйлера. Таким образом, в случае простейшей задачи вариационного исчисления экстремаль определяется из дифференциального уравнения второго порядка. Его общий интеграл содержит две произвольные постоянные. Обозначим общий интеграл через $\varphi(x, C_1, C_2)$. Произвольные постоянные должны быть определены из уравнений

$$\varphi(a, C_1, C_2) = A, \qquad \varphi(b, C_1, C_2) = B, \tag{7}$$

вытекающих из краевых условий (2).

§ 2. Исследование второй вариации

В случае простейшей задачи вариационного исчисления вторая вариация имеет вид

$$\delta^2 F(u, \eta) = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_a^b \Phi(x, u(x) + \alpha\eta(x), u'(x) + \alpha\eta'(x))\,dx\right]_{\alpha=0}.$$

Можно дифференцировать под знаком интеграла, и мы получаем

$$\delta^2 F(u, \eta) = \frac{1}{2}\int_a^b [\Phi_{u^2}(x, u, u')\eta^2(x) + 2\Phi_{uu'}(x, u, u')\eta(x)\eta'(x) + \\ + \Phi_{u'^2}(x, u, u')\eta'^2(x)]\,dx. \quad (1)$$

Пусть функция $u_0(x)$ удовлетворяет уравнению (1.5) и краевым условиям (1.2). Как было показано в § 5 гл. 3, для того чтобы эта функция сообщала функционалу (1.1) относительный минимум, необходимо (и достаточно), чтобы для элементов $\eta \in M$, достаточно малых по норме, выполнялось неравенство $\delta^2 F(u_0 + \theta\eta, \eta) \geqslant 0$. Заметим, что в данном случае M есть совокупность функций из $C^{(1)}[a, b]$, равных нулю в точках a и b. Эта совокупность была выше обозначена через $C_0^{(1)}[a, b]$.

Покажем, что необходимым условием минимума является неравенство $\delta^2 F(u_0, \eta) \geqslant 0$, $\forall\, \eta \in C_0^{(1)}[a, b]$, или, в более подробной записи,

$$\int_a^b [\Phi_{u^2}(x, u_0, u_0')\eta^2 + 2\Phi_{uu'}(x, u_0, u_0')\eta\eta' + \\ + \Phi_{u'^2}(x, u_0, u_0')\eta'^2]\,dx \geqslant 0, \quad \forall\, \eta \in C_0^{(1)}[a, b]. \quad (2)$$

Действительно, пусть для некоторой функции $\eta_0 \in C_0^{(1)}[a, b]$ оказалось, что $\delta^2 F(u_0, \eta_0) = -\gamma < 0$. Положив $\eta = \varepsilon\eta_0$, где ε — достаточно малое по абсолютной величине число, получим

$$\delta^2 F(u_0, \eta) = -\gamma\varepsilon^2.$$

Далее,

$$\delta^2 F(u_0+\theta\eta, \eta) - \delta^2 F(u_0, \eta) =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_a^b \{[\Phi_{u^2}(x, u_0+\theta\varepsilon\eta_0, u_0'+\theta\varepsilon\eta_0') - \Phi_{u^2}(x, u_0, u_0')]\,\eta_0^2 +$$
$$+ 2[\Phi_{uu'}(x, u_0+\theta\varepsilon\eta_0, u_0'+\theta\varepsilon\eta_0') - \Phi_{uu'}(x, u_0, u_0')]\,\eta_0\eta_0' +$$
$$+ [\Phi_{u'^2}(x, u_0+\theta\varepsilon\eta_0, u_0'+\theta\varepsilon\eta_0') - \Phi_{u'^2}(x, u_0, u_0')]\,\eta'^2\}\,dx.$$

При ε достаточно малом последний интеграл будет сколь угодно малым. Выберем ε так, чтобы этот интеграл по абсолютной величине оказался меньше, чем γ. Тогда

$$|\delta^2 F(u_0+\theta\eta, \eta) - \delta^2 F(u_0, \eta)| < \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2.$$

Отсюда

$$\delta^2 F(u_0+\theta\eta, \eta) < \delta^2 F(u_0, \eta) + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 = -\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 < 0,$$

и необходимое условие минимума нарушено.

Необходимое условие (2) можно упростить; именно, справедлива следующая

Теорема 4.2.1. (условие Лежандра). *Для того чтобы условие* (2) *было выполнено при любой* $\eta \in C_0^{(1)}[a, b]$, *необходимо, чтобы* $\Phi_{u'^2}(x, u_0(x), u_0'(x)) \geqslant 0$ *при любом* $x \in [a, b]$.

Для упрощения записи положим

$$\Phi_{u'^2}(x, u_0(x), u_0'(x)) = p(x),$$
$$\Phi_{uu'}(x, u_0(x), u_0'(x)) = q(x),$$
$$\Phi_{u^2}(x, u_0(x), u_0'(x)) = r(x).$$

Условие (2) принимает вид

$$\int_a^b [p(x)\,\eta'^2 + 2q(x)\,\eta\eta' + r(x)\,\eta^2]\,dx \geqslant 0, \qquad \eta \in C_0^{(1)}[a, b]. \tag{3}$$

Интеграл в (3) обозначим через $I(\eta)$. Допустим, что в точке $x_0 \in [a, b]$ $p(x_0) < 0$. Тогда $p(x) < 0$ на некотором интервале, содержащем точку x_0. А тогда найдутся сегмент $[\alpha, \beta]$, содержащийся в этом интервале, и положительная постоянная p_0 такие, что $p(x) < -p_0$, $x \in [\alpha, \beta]$. Положим теперь

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 0, & a \leqslant x \leqslant \alpha, \\ \sin^2 \frac{n\pi (x-\alpha)}{\beta - \alpha}, & \alpha < x < \beta, \\ 0, & \beta \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$$

где n — натуральное число. Очевидно, $\eta_n \in C_0^{(1)}[a, b]$. Имеем теперь

$$I(\eta_n) = \int_\alpha^\beta [p(x)\eta_n'^2 + 2q(x)\eta_n\eta_n' + r(x)\eta_n^2]\, dx.$$

Непрерывные функции $q(x)$ и $r(x)$ ограничены. Пусть $|q(x)| < q_0$, $|r(x)| < r_0$, где q_0 и r_0 — постоянные. Тогда

$$I(\eta_n) < -p_0 \frac{n^2\pi^2}{2(\beta - \alpha)} + 2q_0 n + r_0(\beta - \alpha);$$

правая часть этого неравенства отрицательна при достаточно больших n. Теорема доказана.

В правой части равенства (1) возьмем по частям второй интеграл. Имея в виду, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, получим

$$\delta^2 F(u, \eta) = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\Phi_{u'^2}\eta'^2 + \left(\Phi_{u^2} - \frac{d}{dx} \Phi_{uu'} \right) \eta^2 \right] dx; \tag{4}$$

мы предполагаем при этом, что функция $\Phi_{uu'}(x, u(x), u'(x))$ имеет непрерывную производную по x.

Теперь можно указать прием, который приводит к сравнительно просто проверяемому достаточному условию минимума функционала (1). При умножении функции η на постоянную c вторая вариация умножается на c^2 — это сразу видно из формулы (4). Поэтому достаточно, чтобы $\delta^2 F(u, \eta) > 0$ для таких $\eta \in C_0^{(1)}[a, b]$, что $\| \eta \| = 1$. Поставим следующую вариационную задачу: считая $u = u_0$, где u_0 — решение уравнения Эйлера, найти функцию η, реализующую минимум функционала

$$\int_a^b \left[\Phi_{u'^2}\eta'^2 + \left(\Phi_{u^2} - \frac{d}{dx} \Phi_{uu'} \right) \eta^2 \right] dx$$

при краевых условиях

$$\eta(a) = \eta(b) = 0$$

и изопериметрическом условии

$$\|\eta\|^2 = \int_a^b \eta^2(x)\,dx = 1.$$

Если этот минимум окажется положительным, то при любом $\eta \in C_0^{(1)}(a, b)$, $\eta \not\equiv 0$, будет $\delta^2 F(u_0, \eta) > 0$, и функция u_0 реализует минимум функционала (1).

§ 3. Случай многих независимых переменных

Рассмотрим конечную область Ω в m-мерном евклидовом пространстве. Будем считать, что граница Γ области Ω состоит из конечного числа кусочно гладких $(m-1)$-мерных поверхностей; в таком случае для поверхности Ω справедлива формула интегрирования по частям (см. § 1 гл. 2).

Пусть функция

$$\Phi(x, u, z_1, z_2, \ldots, z_m) \tag{1}$$

определена, когда $x \in \overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$, а $u, z_1, z_2, \ldots, z_n$ — числовые переменные, принимающие любые конечные значения. Потребуем, чтобы в указанной области изменения независимых переменных функция Φ была непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядка по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m, u, z_1, z_2, \ldots, z_m$.

Рассмотрим функционал

$$F(u) = \int_\Omega \Phi\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) dx. \tag{2}$$

Зададим этот функционал на множестве $D(F)$ функций $u \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих граничному условию

$$u|_\Gamma = g(x), \tag{3}$$

где $g(x)$ — функция, заданная и непрерывная на поверхности Γ. Будем предполагать, что существует хотя бы одна функция $u(x)$, удовлетворяющая обоим требованиям:

$$\bar{u} \in C^{(1)}(\overline{\Omega}),\ \bar{u}|_\Gamma = g(x). \tag{4}$$

Заметим, что последнее предположение существенно: в отличие от случая одной переменной, здесь при соответствующем выборе функции $g(x)$, непрерывной на Γ, может оказаться, что не существует функции $\bar{u}(x)$, удовлетворяющей условиям (4). В этом случае область $D(F)$ пуста и задача о минимуме функционала (2) теряет смысл.

Если функция $\bar{u}$ существует, то множество $D(F)$ содержит линейное многообразие функций вида $u(x) = \bar{u}(x) + \eta(x)$, где функции η непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Omega}$ и вместе с первыми производными равны нулю на ее границе.

Многообразие $D(F)$ будем рассматривать как часть пространства $L_2(\Omega)$. Из следствия 1.3.1 сразу вытекает, что множество $\mathfrak{M}^{(1)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$. А тогда нетрудно доказать, что функционал (2) удовлетворяет условиям 1 — 3 из §§ 2, 3 гл. 3.

Поставим задачу минимизации функционала (2) и выведем необходимое условие. Нам известно общее необходимое условие (§ 4 гл. 3): если элемент u_0 сообщает минимальное значение функционалу F, то $u_0 \in D(\operatorname{grad} F)$ и $(\operatorname{grad} F)(u_0) = 0$.

Составим вариацию

$$\delta F(u, \eta) = \frac{d}{d\alpha} F(u + \alpha\eta)\,|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{d}{d\alpha} \int\limits_{\Omega} \Phi(x, u + \alpha\eta, u_1 + \alpha\eta_1, \ldots, u_m + \alpha\eta_m)\,dx\,|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\eta + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}\eta_k\right] dx. \qquad (5)$$

Здесь приняты обозначения

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad \eta_k = \frac{\partial \eta}{\partial x_k};$$

под знаками производных от Φ опущены аргументы x, $u(x)$, $u_1(x)$, ..., $u_k(x)$.

Функция $u \in D(F)$ принадлежит области $D(\operatorname{grad} F)$ тогда и только тогда, когда интеграл в правой части равенства (5) есть ограниченный в $L_2(\Omega)$ функционал. Указанный интеграл распадается на $(m+1)$ интегралов:

$$\delta F(u, \eta) = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial u}\eta\,dx + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}\eta_k\,dx =$$

$$= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \eta\right) + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, \eta_k\right).$$

Функции $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial u_k}$ непрерывны в $\bar{\Omega}$; тем более, они принадлежат $L_2(\Omega)$, поэтому первое скалярное произведение ограничено в $L_2(\Omega)$; об остальных произведениях этого в общем случае сказать нельзя.

Пусть функция $u \in D(F)$ такова, что существуют обобщенные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

Тогда, по формуле (1.1) гл. 2

$$\int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \eta_k dx = \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega \eta \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} dx,$$

и, следовательно,

$$\delta F(u, \eta) = \int_\Omega \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}\right] \eta \, dx, \qquad \forall \eta \in \mathfrak{M}^{(1)}(\Omega). \tag{7}$$

Допустим еще, что

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \in L_2(\Omega). \tag{8}$$

Тогда

$$\delta F(u, \eta) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, \ \eta\right)$$

есть функционал от η, ограниченный в $L_2(\Omega)$; если так, то $u \in D(\operatorname{grad} F)$ и

$$(\operatorname{grad} F)(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}, \qquad u|_\Gamma = g(x). \tag{9}$$

Таким образом, область определения градиента F во всяком случае содержит функции, обладающие следующими свойствами: 1) эти функции принадлежат к $C^{(1)}(\bar{\Omega})$ и удовлетворяют условию (3); 2) существуют обобщенные производные (6); 3) выполняется условие (8). В частности, множество $D(\operatorname{grad} F)$ содержит те функции из $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, которые удовлетворяют условию (3).

Теперь легко написать уравнение Эйлера нашей вариационной задачи, если допустить, что функция, реализующая минимум функционала (2), обладает только что описанными свойствами. Уравнение Эйлера состоит из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} = 0, \quad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k} \tag{10}$$

и граничного условия (3).

Пример 1. Пусть

$$F(u) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx, \qquad u\,|_{\Gamma} = g(x). \tag{11}$$

Дифференциальное уравнение Эйлера для (11) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \tag{12}$$

или, короче, $\Delta u = 0$. Это уравнение надо интегрировать при граничном условии $u\,|_{\Gamma} = g(x)$; при этом предполагается, что существует функция $\bar{u}(x)$, удовлетворяющая условиям (4). Интеграл (11) обычно называют *интегралом Дирихле*.

Пример 2. Пусть

$$F(u) = \int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 - 2fu\right] dx, \qquad u\,|_{\Gamma} = 0. \tag{13}$$

Дифференциальное уравнение Эйлера для функционала (13) легко приводится к виду

$$-\Delta u = f(x); \tag{14}$$

его нужно интегрировать при граничном условии $u\,|_{\Gamma} = 0$. В этом случае существование функции $\bar{u}(x)$ тривиально: можно положить $\bar{u}(x) \equiv 0$.

§ 4. Функционалы, зависящие от производных высших порядков

Рассмотрим функционал вида

$$F(u) = \int_a^b \Phi(x, u, u', u'', \ldots, u^{(k)})\, dx. \tag{1}$$

Примем для простоты, что функция $\Phi(x, z_0, z_1, \ldots, z_k)$

определена в области изменения переменных

$$x \in [a, b]; \qquad -\infty < z_j < \infty, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, k, \tag{2}$$

и в этой области k раз непрерывно дифференцируема. Функционал (1) зададим на функциях $u \in C^{(k)}[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям

$$\begin{aligned} &u(a) = A_0, \quad u'(a) = A_1, \ \ldots, \ u^{(k-1)}(a) = A_{k-1}, \\ &u(b) = B_0, \quad u'(b) = B_1, \ \ldots, \ u^{(k-1)}(b) = B_{k-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где A_j, B_j — заданные постоянные. В качестве $\bar{u}(x)$ можно взять полином степени $2k-1$, удовлетворяющий условиям (3); как известно, такой полином построить можно. Ясно теперь, что $D(F)$ есть линейное многообразие функций вида $u(x) = \bar{u}(x) + \eta(x)$, где $\eta \in \mathfrak{M}^{(k-1)}(a, b)$; если рассматривать $D(F)$ как часть пространства $L_2(a, b)$, то, как нетрудно видеть, функционал F удовлетворяет требованиям 1 — 3 §§ 2, 3 гл. 3.

Составим вариацию

$$\delta F(u, \eta) = \\ = \frac{d}{d\alpha} \int_a^b \Phi(x, u + \alpha\eta, u' + \alpha\eta', \ldots, u^{(k)} + \alpha\eta^{(k)})\, dx \,\Big|_{\alpha=0} = \\ = \int_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\eta(x) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}} \eta^{(j)}(x)\right] dx. \tag{4}$$

Пусть функция $u(x)$ такова, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}}(x, u(x), u'(x) \ldots u^{(k)}(x)), \qquad j = 1, 2, \ldots, k,$$

имеет обобщенную производную j-го порядка[1]), и сумма

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}} \in L_2(a, b). \tag{5}$$

[1]) По теореме 2.4.2 это означает, что указанная функция непрерывна на сегменте $[a, b]$ вместе с производными до порядка $j-1$ включительно, причем производная порядка $j-1$ абсолютно непрерывна на этом сегменте.

По формуле (1.1) гл. 2 имеем тогда

$$\int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}} \eta^{(j)}(x)\,dx = (-1)^j \int_a^b \eta(x) \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}}\,dx,$$

и, следовательно,

$$\delta F(u, \eta) = \int_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}}\right] \eta(x)\,dx. \tag{6}$$

Интеграл (6) есть функционал от η, ограниченный в $L_2(\Omega)$; отсюда следует, что функция $u(x)$ с описанными выше свойствами принадлежит области $D(\operatorname{grad} F)$, и для такой функции

$$(\operatorname{grad} F)(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}}. \tag{7}$$

Допуская, что функция, реализующая минимум функционала (1) при условиях (3), существует и обладает свойствами, описанными выше, можно для этой функции написать уравнение Эйлера. Оно состоит из дифференциального уравнения порядка $2k$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial \Phi}{\partial u^{(j)}} = 0 \tag{8}$$

и краевых условий (3).

Сказанное в этом параграфе очевидным образом переносится на случай многих независимых переменных. Для функционала

$$\int_\Omega \Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}\right) dx \tag{9}$$

при краевых условиях

$$u|_\Gamma = g_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = g_1(x), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = g_{k-1}(x), \tag{10}$$

где ν — нормаль к Γ, уравнение Эйлера состоит из граничных условий (10) и дифференциального уравнения в частных производных $2k$-го порядка

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)} + \sum_{j_1, j_2=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}\right)} + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_k=1}^{k} \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}}\right)} = 0. \quad (11)$$

Так, например, для функционала

$$\int_{\Omega} \sum_{j, k=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2 dx$$

дифференциальное уравнение Эйлера имеет вид

$$2 \sum_{j, k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = 0,$$

что легко приводится к виду

$$\Delta^2 u = 0.$$

§ 5. Функционалы, зависящие от нескольких функций

Для упрощения записи ограничимся случаем одной независимой переменной и двух функций; допустим еще, что функционал зависит от производных этих функций порядка не выше первого. Переход к общему случаю не вызывает затруднений.

Итак, рассмотрим функционал

$$F(u, v) = \int_a^b \Phi(x, u, v, u', v')\, dx. \quad (1)$$

Зададим его на парах $\{u, v\}$ функций из $C^{(1)}[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u(a) = A_1, \quad u(b) = B_1, \quad v(a) = A_2, \quad v(b) = B_2, \quad (2)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — постоянные. Как обычно, множество таких пар обозначим через $D(F)$. Каждую такую пару будем называть вектором.

Построим вектор $\{\bar{u}, \bar{v}\}$, где

$$\bar{u}(x) = A_1 + \frac{B_1 - A_1}{b-a}(x-a), \qquad \bar{v}(x) = A_2 + \frac{B_2 - A_2}{b-a}(x-a).$$

Тогда любой вектор $\{u, v\} \in D(F)$ можно представить в виде

$$\{u, v\} = \{\bar{u} + \eta, \quad \bar{v} + \zeta\},$$

где $\eta(x)$ и $\zeta(x)$ — функции из $C^{(1)}[a, b]$, удовлетворяющие краевым условиям

$$\eta(a) = \eta(b) = \zeta(a) = \zeta(b) = 0. \tag{3}$$

Множество векторов $\{\eta, \zeta\}$, очевидно, линейное, и $D(F)$ есть линейное многообразие.

Будем рассматривать $D(F)$ как часть пространства $L_2(a, b)$ вектор-функций, суммируемых с квадратом на интервале (a, b); скалярное произведение и норму в $L_2(a, b)$ зададим соотношениями

$$(\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}) = \int_a^b (u_1 u_2 + v_1 v_2)\, dx;$$

$$\|\{u, v\}\|^2 = \int_a^b (u^2 + v^2)\, dx.$$

Легко проверить, что функционал (1) удовлетворяет условиям 1 — 3 из §§ 2, 3 гл. 3.

Вариация функционала (1) имеет вид

$$\delta F(u, v, \eta, \zeta) =$$
$$= \frac{d}{d\alpha} \int_a^b \Phi(x, u + \alpha\eta, v + \alpha\zeta, u' + \alpha\eta', v' + \alpha\zeta')\, dx \,\Big|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_a^b \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\zeta + \frac{\partial \Phi}{\partial u'}\eta' + \frac{\partial \Phi}{\partial v'}\zeta'\right) dx.$$

Повторяя рассуждения, использованные нами при исследовании простейшей вариационной задачи, легко доказать следующие утверждения:

1) область определения градиента grad F состоит из тех и только тех векторов $\{u, v\}$, которые входят в область $D(F)$ и для которых $\frac{\partial \Phi}{\partial u'}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial v'}$ суть функции, абсолютно непрерывные на сегменте $[a, b]$, производные которых на этом сегменте суммируемы с квадратом;

2) градиент функционала F есть вектор, определяемый формулой

$$(\operatorname{grad} F)(\{u, v\}) = \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial v'}\right\}; \tag{4}$$

3) уравнение Эйлера для функционала F сводится к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u'} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial v'} = 0 \tag{5}$$

и к краевым условиям (2).

§ 6. Естественные краевые условия

1. Чтобы выяснить понятие естественных краевых условий и происхождение этого понятия, рассмотрим следующую задачу вариационного исчисления.

Найти минимум функционала

$$F(u) = \int_a^b \Phi(x, u, u')\,dx \tag{1}$$

на множестве функций $u \in C^{(1)}[a, b]$; никаким краевым условиям функции $u(x)$ заранее не подчиняются. На функцию $\Phi(x, u, u')$ наложим те же условия, что и в простейшей задаче вариационного исчисления.

Важное отличие новой задачи вариационного исчисления от простейшей состоит в отсутствии краевых условий для функций, на которых ищется минимум.

В нашем случае $D(F) = C^{(1)}[a, b]$. Это множество линейное, и его можно рассматривать как линейное многообразие (можно положить $\bar{u} = 0$). Будем рассматривать его как часть пространства $L_2(a, b)$. Легко проверить, что функционал (1) удовлетворяет условиям 1 — 3 §§ 1, 3 гл. 2.

Найдем градиент функционала (1). Докажем следующую теорему.

Теорема 4.6.1. *Для того, чтобы функция $u(x)$ принадлежала области определения градиента функционала (1), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:* 1) $u \in C^{(1)}[a, b]$; 2) *функция* $\frac{\partial \Phi}{\partial u'} = \Phi_{u'}(x, u(x), u'(x))$ *на сегменте* $[a, b]$ *абсолютно непрерывна и имеет производную, суммируемую с квадратом*; 3) *функция* $u(x)$ *удовлетворяет следующим краевым условиям*:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=a} &= \Phi_{u'}(a, u(a), u'(a)) = 0; \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=b} &= \Phi_{u'}(b, u(b), u'(b)) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Необходимость. Пусть $u \in D(\operatorname{grad} F)$. Условие 1) необходимо; это следует просто из того, что $D(\operatorname{grad} F) \subset D(F) = C^{(1)}(a, b)$. Обратимся к условиям 2) и 3). Как и в § 3 гл. 3, вариация функционала (1) равна

$$\delta F(u, \eta) = \frac{d}{d\alpha} \int_a^b \Phi(x, u + \alpha\eta, u' + \alpha\eta')\, dx \Big|_{\alpha=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial u'}\eta'\right) dx.$$

По-прежнему она будет ограниченным функционалом от η, если таким же будет функционал

$$\int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial u'}\eta'\, dx. \tag{3}$$

Пусть $u \in D(\operatorname{grad} F)$. Тогда функционал (3) ограничен и существует такая функция $g \in L_2(a, b)$, что

$$\int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial u'}\eta'(x)\, dx = \int_a^b g(x)\eta(x)\, dx, \qquad \forall \eta \in C^{(1)}[a, b]. \tag{4}$$

Введем функцию

$$G(x) = -\int_a^x g(t)\, dt + C, \qquad C = \text{const}.$$

Взяв интеграл справа в (4) по частям, получим

$$\int_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u'} - G(x)\right] \eta'(x)\,dx = G(a)\,\eta(a) - G(b)\,\eta(b). \qquad (5)$$

Тождество (5) верно для любой функции $\eta \in C^{(1)}[a, b]$. Допустим дополнительно, что

$$\eta(a) = \eta(b) = 0. \qquad (6)$$

Тогда

$$\int_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u'} - G(x)\right] \eta'(x)\,dx = 0. \qquad (7)$$

Тождество (7) совпадает с тождеством (3.22) гл. 3, и из него можно сделать тот же вывод:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u'} = G(x) + \mathrm{const} = -\int_a^x g(t)\,dt + \mathrm{const}. \qquad (8)$$

Этим доказана необходимость утверждения 2) теоремы.

Теперь интеграл (3) можно взять по частям:

$$\int_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \eta' dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \eta\, dx + \eta(b)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=b} - \eta(a)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=a},$$

и для вариации получается следующее выражение:

$$\delta F(u, \eta) =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right] \eta\, dx + \eta(b)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=b} - \eta(a)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=a}. \qquad (9)$$

Интеграл в (9) по предположению есть ограниченный в $L_2(a, b)$ функционал от η; ограниченным же в $L_2(a, b)$ функционалом должно быть и выражение

$$\left.\begin{aligned} &\eta(b)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=b} - \eta(a)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)_{x=a}, \\ &\eta \in C^{(1)}[a, b]. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Но значение функции $\eta(x)$ в заданной точке есть функционал от η, в $L_2(a, b)$ неограниченный. Отсюда следует, что выражение (10) будет ограниченным в $L_2(a, b)$ функционалом только тогда, когда

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u'}\right)_{x=a}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u'}\right)_{x=b}=0.$$

Необходимость условий теоремы доказана.

Из равенства (9) теперь вытекает формула для градиента:

$$(\operatorname{grad} F)(u)=\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial u'}. \tag{11}$$

Достаточность. Если условия 1) — 3) теоремы выполнены, то интеграл (3) можно взять по частям. Используя краевые условия (2), получим

$$\delta F(u, \eta)=\int_a^b\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial u'}\right]\eta dx. \tag{12}$$

Выражение в квадратных скобках есть элемент пространства $L_2(a, b)$, интеграл (12) есть ограниченный в этом пространстве функционал и, следовательно, $u\in D(\operatorname{grad} F)$. Теорема доказана полностью.

Таким образом, в рассмотренной нами задаче функции из области $D(\operatorname{grad} F)$ необходимо удовлетворяют некоторым краевым условиям (в данном случае — условиям (2)), которым не обязательно удовлетворяют функции из области $D(F)$. Такие условия называются *естественными* для функционала F.

В нашем случае краевые условия (2) — естественные для функционала (1).

Краевые условия, которым удовлетворяют все функции из области $D(F)$, называются *главными* для функционала F. Так, для функционала простейшей задачи вариационного исчисления краевые условия (3.10) гл. 3 — главные.

Нетрудно теперь написать необходимое условие минимума — уравнение Эйлера — для функционала (1). Уравнение Эйлера в данном случае сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial u'}=0 \tag{13}$$

и краевым условиям (2), при которых это уравнение и надо интегрировать.

Замечание. Уравнение Эйлера можно было бы получить, не прибегая к теореме 4.6.1.

Пусть функция u_0 сообщает минимум нашему функционалу. Положим $u_0(a) = A$, $u_0(b) = B$. В качестве кривой, с которой будем сравнивать экстремальную, возьмем кривую, проходящую через точки (a,A) и (b,B) (рис. 7), т.е. такую кривую, для которой $u(a) = A$, $u(b) = B$ (на рис. 7 она обозначена пунктиром). Тогда $F(u) \geqslant F(u_0)$, и мы оказались в условиях простейшей задачи вариационного исчисления. А тогда функция $u_0(x)$ должна удовлетворять уравнению (13). Но этого уравнения недостаточно: мы должны сравнивать u_0 и с такими кривыми, которые не проходят через точки (a, A) и (b, B), например с кривой $y = u_1(x)$ на рис. 7.

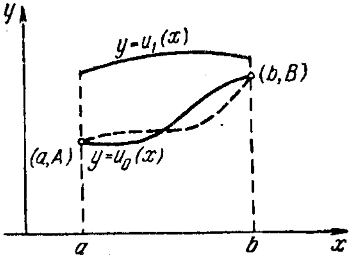

Рис. 7.

Рассмотрим наряду с u_0 функции $u_0 + \alpha\eta$, где α — произвольное вещественное число, а η — непрерывно дифференцируемая функция, не подчиненная никаким краевым условиям. Тогда $F(u_0 + \alpha\eta) \geqslant F(u_0)$ и, как обычно,

$$\delta F(u, \eta) = \int_a^b [\Phi_u \eta + \Phi_{u'}\eta']\, dx.$$

Второй интеграл возьмем по частям. Получим

$$\delta F(u_0, \eta) = \Phi_{u'}\eta \Big|_a^b + \int_a^b \left[\Phi_u - \frac{d}{dx}\Phi_{u'}\right]\eta\, dx,$$

и условие минимума принимает такой вид:

$$\Phi_{u'}\big|_{x=b}\,\eta(b) - \Phi_{u'}\big|_{x=a}\,\eta(a) = 0.$$

В силу произвольности η можно потребовать, чтобы $\eta(b) = 1$, $\eta(a) = 0$. Тогда $\Phi_{u'}|_{x=b} = 0$. Аналогично получим $\Phi_{u'}|_{x=a} = 0$.

2. Рассмотрим три примера.

1. Определенный на $C^{(1)}[a, b]$ функционал

$$F_1(u) = \int_a^b [p(x)u'^2 + q(x)u^2 - 2f(x)u]\, dx \tag{14}$$

является частным случаем функционала (1). Мы примем, что функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ непрерывны [1]) на сегменте $[a, b]$ и что $p(x)>0$ [2]). Градиент функционала (14) определен на функциях из $C^{(1)}[a, b]$, для которых произведение $p(x)u'(x)$ абсолютно непрерывно и имеет суммируемую с квадратом производную на сегменте $[a, b]$ [3]) и которые удовлетворяют естественным краевым условиям

$$u'(a)=u'(b)=0; \tag{15}$$

сам градиент равен

$$2\left[q(x)u-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)-f(x)\right]. \tag{16}$$

Уравнение Эйлера для функционала (14) состоит из совокупности краевых условий (15) и дифференциального уравнения

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=f(x). \tag{17}$$

2. Рассмотрим функционал

$$F_2(u)=\int_a^b\left[p(x)u'^2+q(x)u^2-2f(x)u\right]dx+\alpha u^2(a)+\beta u^2(b);$$
$$u\in C^{(1)}[a, b]. \tag{18}$$

Здесь α и β — постоянные, а функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ подчинены тем же условиям, что и в примере 1. Из-за наличия двух последних членов функционал F_2 не подходит под тип (1), однако использованная нами схема пригодна и в этом случае.

Найдем область $D(\operatorname{grad} F_2)$ и выражение для $\operatorname{grad} F_2$. Вариация функционала (18) равна

$$\delta F_2(u, \eta)=2\left\{\int_a^b[p(x)u'\eta'+q(x)u\eta-f(x)\eta]\,dx+\right.$$
$$\left.+\alpha u(a)\eta(a)+\beta u(b)\eta(b)\right\};\quad \eta\in C^{(1)}[a, b]. \tag{19}$$

---

[1]) Эти требования можно ослабить.

[2]) Условие $p(x)>0$ является для функционала (14) усилением условия Лежандра § 2, которое в данном случае имеет вид $p(x)\geqslant 0$.

[3]) Исходя из свойств функции $p(x)$, легко доказать, что это условие равносильно такому: на сегменте $[a, b]$ производная $u'(x)$ абсолютно непрерывна, а u'' суммируема с квадратом.

Пусть $u \in D(\operatorname{grad} F_2)$. Тогда правая часть в (19) есть ограниченный в $L_2(a, b)$ функционал от η. Он останется таким, разумеется, если мы подчиним η каким-нибудь добавочным ограничениям. Потребуем временно, чтобы

$$\eta(a) = \eta(b) = 0. \tag{20}$$

Тогда

$$\delta F_2(u, \eta) = 2\int_a^b [p(x)u'\eta' + q(x)u\eta - f(x)\eta]\,dx;$$

мы оказываемся в условиях простейшей задачи вариационного исчисления для функционала (14) и можем утверждать следующее: если $u \in D(\operatorname{grad} F_2)$, то $u'(x)$ абсолютно непрерывна, а $(p(x)u'(x))'$ квадратично суммируема[1]) на сегменте $[a, b]$. Приняв это во внимание, откажемся от дополнительных ограничений (20) и проинтегрируем по частям первый член в (19):

$$\delta F_2(u, \eta) = 2\int_a^b [-(p(x)u')' + q(x)u - f(x)]\,\eta\,dx +$$
$$+ 2\{[p(b)u'(b) + \beta u(b)]\,\eta(b) - [p(a)u'(a) - \alpha u(a)]\eta(a)\}. \tag{21}$$

Интеграл в (19) есть ограниченный в $L_2(a, b)$ функционал от η, ограниченным в $L_2(a, b)$ должен быть и функционал в фигурных скобках (21). Те же рассуждения, что и в общем случае, приведут нас к соотношениям

$$p(a)u'(a) - \alpha u(a) = 0, \quad p(b)u'(b) + \beta u(b) = 0, \tag{22}$$

которые являются естественными для функционала (18). Легко видеть теперь, что $\operatorname{grad} F_2$ определяется выражением (16). Уравнение Эйлера для функционала F_2 сводится к совокупности дифференциального уравнения (17) и краевых условий (22).

3. Функционал

$$F_3(u) = \int_0^1 \left(u^2 + u'^2 + u''^2 - 2f(x)u\right)dx \tag{23}$$

зададим на множестве функций из $C^{(2)}[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{24}$$

---

[1]) См. сноску [3]) на предыдущей странице.

Это множество, как обычно, будем считать частью пространства $L_2(0, 1)$. Вариация функционала (23) равна

$$\delta F_3(u, \eta) = 2\int_0^1 (u\eta + u'\eta' + u''\eta'' - f\eta)\,dx. \tag{25}$$

Здесь η — любая функция из $C^{(2)}[0, 1]$, удовлетворяющая условиям (24), так что

$$\eta(0) = \eta(1) = 0.$$

Если $u \in D(\operatorname{grad} F_3)$, то интеграл (25) есть ограниченный в $L_2(0, 1)$ функционал от η; он останется ограниченным, если η подчинить дополнительным условиям

$$\eta'(0) = \eta'(1) = 0. \tag{26}$$

Но тогда мы оказываемся в условиях § 4. В нашем случае

$$\Phi = u^2 + u'^2 + u''^2 - 2f(x)\,u$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u'} = 2u', \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial u''} = 2u''.$$

Как и в § 4, допустим, что $\frac{\partial\Phi}{\partial u''} = 2u''$ имеет обобщенную вторую производную. Это значит, что u''' абсолютно непрерывна, а $u^{(4)}$ суммируема. В соответствии с формулой (4.5) потребуем, чтобы

$$[-u'' + u^{(4)}] \in L_2(0, 1).$$

Но u'' просто непрерывна, поэтому надо требовать, чтобы $u^{(4)} \in L_2(0, 1)$. При этом, как в том же § 4,

$$(\operatorname{grad} F_3)(u) = 2\,[u - u'' + u^{(4)} - f(x)]. \tag{27}$$

Откажемся теперь от условий (26) и проинтегрируем по частям второй и третий члены справа в (25):

$$\delta F_3(u, \eta) = 2\int_0^1 [u - u'' + u^{(4)} - f(x)]\,\eta\,dx + \\ + u''(1)\,\eta'(1) - u''(0)\,\eta'(0). \tag{28}$$

Интеграл в (28) — ограниченный функционал от η, а $\eta'(1)$

и $\eta'(0)$, как нетрудно видеть, неограниченные. Поэтому, если $u(x) \in D(\operatorname{grad} F_3)$ и удовлетворяет указанным выше условиям дифференцируемости, то $u(x)$ необходимо удовлетворяет следующим условиям, естественным для функционала (23):

$$u''(0) = u''(1) = 0. \tag{29}$$

Уравнение Эйлера для этого функционала сводится к дифференциальному уравнению

$$u^{(4)} - u'' + u = f(x) \tag{30}$$

и краевым условиям (24) и (29).

ГЛАВА 5

МИНИМУМ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

§ 1. Понятие о квадратичном функционале

В настоящей главе мы будем рассматривать функционалы, области определения которых принадлежат вещественному гильбертову пространству. В некоторых случаях (они будут оговариваться особо) мы будем считать это пространство сепарабельным. Напомним, что банахово пространство называется сепарабельным, если оно содержит плотное счетное множество. Для гильбертова пространства можно дать другое, равносильное определение: гильбертово пространство называется сепарабельным, если в нем есть полная счетная ортонормированная система. Одно из важнейших сепарабельных гильбертовых пространств — это пространство $L_2(\Omega)$, где Ω — измеримое множество в конечномерном пространстве.

Пусть дано гильбертово пространство H. Рассмотрим в H *билинейный* функционал $\Phi(u, v)$ — так называется функционал, зависящий от двух элементов пространства H и обладающий следующим свойством: при фиксированном v это линейный функционал от u:

$$\Phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 \Phi(u_1, v) + \alpha_2 \Phi(u_2, v), \tag{1}$$

а при фиксированном u — линейный функционал от v:

$$\Phi(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \Phi(u, v_1) + \alpha_2 \Phi(u, v_2). \tag{2}$$

В равенствах (1) и (2) α_1 и α_2 суть вещественные числа.

Мы будем рассматривать только *симметричные* билинейные функционалы, т. е. такие, для которых

$$\Phi(u, v) = \Phi(v, u). \tag{3}$$

Простейший билинейный симметричный функционал — это скалярное произведение (u, v) элементов u и v.

Однородным квадратичным функционалом или *квадратичной формой* называется выражение $\Phi(u, u)$, где $\Phi(u, v)$ есть симметричный билинейный функционал. Для краткости будем писать $\Phi(u)$ вместо $\Phi(u, u)$.

Выведем простое и важное соотношение, которому удовлетворяет любая квадратичная форма. Пусть $\Phi(u, v)$ — билинейный функционал, α_1, α_2, β_1, β_2 — числа. Применяя последовательно формулы (1) и (2), получим

$$\Phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \ \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) =$$
$$= \alpha_1\beta_1\Phi(u_1, v_1) + \alpha_1\beta_2\Phi(u_1, v_2) + \alpha_2\beta_1\Phi(u_2, v_1) + \alpha_2\beta_2\Phi(u_2, v_2).$$

В частности, если функционал Φ симметричен, то

$$\Phi(u+v, u+v) = \Phi(u, u) + 2\Phi(u, v) + \Phi(v, v)$$

или

$$\Phi(u+v) = \Phi(u) + 2\Phi(u, v) + \Phi(v). \tag{4}$$

Это и есть искомое соотношение.

Пример. Интеграл Дирихле

$$\Phi(u) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$$

— квадратичная форма, которая соответствует симметричному билинейному функционалу

$$\Phi(u, v) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx.$$

Квадратичным функционалом будем называть выражение

$$F(u) = \Phi(u) - l(u), \tag{5}$$

где $\Phi(u)$ — квадратичная форма, $l(u)$ — линейный функционал.

Пример. Самое простое гильбертово пространство есть вещественная ось. Скалярное умножение здесь — умножение чисел, а норма — абсолютная величина числа. Многочлен второй степени без свободного члена есть квадратичный функционал.

Другой, более важный пример, с которым нам придется иметь дело впоследствии, — это квадратичный функционал

$$F(u) = \int_\Omega \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 - 2f(x)\,u \right\} dx. \tag{6}$$

§ 2. Положительно определенные операторы

1. Во всем последующем мы часто будем рассматривать операторы, действующие в гильбертовом пространстве H. Если этот оператор будет обозначен, скажем, буквой A, то область его определения будем обозначать через $D(A)$, область значений — через $R(A)$. Говоря, что оператор A действует в пространстве H, мы, как обычно, понимаем под этим, что $D(A) \subset H$ и $R(A) \subset H$.

Говоря об операторе A, действующем в гильбертовом пространстве H, мы всегда будем предполагать, что A — линейный[1]) оператор и что область его определения плотна в H, т. е. $\overline{D(A)} = H$ (здесь черта сверху обозначает замыкание в метрике пространства H).

Оператор A, действующий в гильбертовом пространстве, называется *симметричным*, если $\overline{D(A)} = H$ и если для любых $u, v \in D(A)$ справедливо тождество

$$(Au, v) = (u, Av). \tag{1}$$

Если A — симметричный оператор, то (Au, v), где $u, v \in D(A)$, — симметричный билинейный функционал и (Au, u) — квадратичная форма.

Пример 1. В пространстве $H = L_2(\Omega)$ рассмотрим интегральный оператор

$$Ku = \int_\Omega K(x, y)\, u(y)\, dy. \tag{2}$$

Предположим, что интеграл кратности $2m$

$$\int_\Omega \int_\Omega K^2(x, y)\, dx\, dy$$

конечен. Такой оператор определен на всем пространстве (см. ниже, теорема 7.2.1). Если $K(x, y) = K(y, x)$, то оператор (2) симметричен. Докажем это.

Составим скалярное произведение

$$(Ku, v) = \int_\Omega v(x) \left\{ \int_\Omega K(x, y)\, u(y)\, dy \right\} dx.$$

По теореме Фубини можно изменить порядок интегрирования:

$$(Ku, v) = \int_\Omega u(y) \left\{ \int_\Omega K(x, y)\, v(x)\, dx \right\} dy.$$

[1]) То есть аддитивный и однородный, но, может быть, неограниченный.

Изменим обозначение x на y, а y на x:

$$(Ku, v) = \int_\Omega u(x) \left\{ \int_\Omega K(y, x) v(y)\, dy \right\} dx =$$

$$= \int_\Omega u(x) \left\{ \int_\Omega K(x, y) v(y)\, dy \right\} dx = (Kv, u) = (u, Kv),$$

так как в вещественном пространстве порядок множителей скалярного произведения можно менять.

Пример 2. В пространстве $H = L_2(0, 1)$ рассмотрим оператор

$$Au = -\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{3}$$

Пусть $D(A)$ состоит из функций u, удовлетворяющих следующим двум требованиям:

$$u \in C^{(2)}[0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, что определенный таким образом оператор A линейный. Докажем, что он симметричный и что $\overline{D(A)} = H$.

Множество $D(A)$ функций из $C^{(2)}[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям (4), содержит как свою часть плотное в $L_2(0,1)$ множество функций, финитных на сегменте $[0, 1]$. По следствию 1.3.1 множество $D(A)$ само плотно в $L_2(0, 1)$.

Остается доказать, что оператор A удовлетворяет условию симметричности (1). Для этого составим скалярное произведение (Au, v), где $u, v \in D(A)$, т. е. $u, v \in C^{(2)}[0, 1]$ и

$$u(0) = u(1) = 0; \qquad v(0) = v(1) = 0.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что внеинтегральные члены исчезают в силу только что написанных краевых условий, получим

$$(Au, v) = -\int_0^1 v(x) u''(x)\, dx = \int_0^1 u'(x) v'(x)\, dx =$$

$$= -\int_0^1 u(x) v''(x)\, dx = (u, Av).$$

2. **Определение 1.** Симметричный оператор A называется *положительным*, если квадратичная форма $(Au, u) \geqslant 0$ и $(Au, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Например, оператор (3) — (4) положительный. Чтобы убедиться в этом, составим квадратичную форму

$$(Au, u) = -\int_0^1 u \frac{d^2u}{dx^2}\, dx.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание условия (4), найдем

$$(Au,\ u)=\int_0^1 u'^2(x)\,dx\geqslant 0. \tag{5}$$

Допустим, что $(Au,\ u)=0$ и, следовательно, $\int_0^1 u'^2 dx=0$. Но тогда $u'(x)\equiv 0$ и $u(x)\equiv\text{const}$. Теперь из условий (4) вытекает, что $u(x)\equiv 0$.

Определение 2. Симметричный оператор A называется *положительно определенным*, если

$$\inf_{\substack{u\in D(A)\\ u\neq 0}}\frac{(Au,\ u)}{\|u\|^2}>0. \tag{6}$$

Это определение равносильно такому: симметричный оператор A называется положительно определенным, если существует такая постоянная $\gamma^2>0$, что

$$(Au,\ u)\geqslant\gamma^2\|u\|^2. \tag{7}$$

Неравенство (7) будем называть *неравенством положительной определенности*.

Очевидно, что всякий положительно определенный оператор одновременно является и положительным. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. Докажем, что оператор (3) — (4) положительно определенный. Напишем формулу Ньютона — Лейбница:

$$u(x)-u(0)=\int_0^x u'(t)\,dt. \tag{8}$$

Но $u(0)=0$ в силу условий (4), поэтому

$$u(x)=\int_0^x u'(t)\,dt.$$

По неравенству Буняковского

$$u^2(x)\leqslant\int_0^x 1\ dt\cdot\int_0^x u'^2(t)\,dt=x\int_0^x u'^2(t)\,dt\leqslant\int_0^1 u'^2(t)\,dt.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по x в пределах от 0 до 1:

$$\| u \|^2 = \int_0^1 u^2(x)\, dx \leqslant \int_0^1 u'^2(x)\, dx. \tag{9}$$

Сопоставив это с формулой (5), получим

$$(Au,\ u) \geqslant \| u \|^2.$$

Оператор A положительно определен; число γ можно принять равным единице.

3. Существуют операторы положительные, но не положительно определенные. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример.

Пусть оператор B определяется формулой

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2},\ 0 < x < \infty. \tag{10}$$

Будем рассматривать B как оператор в гильбертовом пространстве $L_2(0, \infty)$. За область определения $D(B)$ этого оператора примем множество функций, удовлетворяющих следующим требованиям: 1) $u \in C^{(2)}[0, \infty)$, 2) $u(0) = 0$, 3) для каждой функции $u \in D(B)$ существует свое число a_u такое, что $u(x) \equiv 0$ при $x > a_u$. Очевидно, $D(B) \subset L_2(0,\ \infty)$.

Докажем, что определенный так оператор B положителен, но не положительно определен. Прежде всего докажем, что $\overline{D(B)} = L_2(0, \infty)$. Достаточно доказать, что для любой функции $\varphi \in L_2(0,\ \infty)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется функция $u \in D(B)$ такая, что $\| \varphi - u \| < \varepsilon$. Интеграл

$$\int_0^\infty \varphi^2(x)\ dx$$

конечен, поэтому можно найти числа $\delta > 0$ и $N > 0$ такие, что

$$\int_0^\delta \varphi^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{8}, \qquad \int_N^\infty \varphi^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Введем функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \delta. \\ \varphi(x), & \delta < x < N, \\ 0, & x \geqslant N. \end{cases}$$

Ясно, что $\psi \in L_2(0, \infty)$; при этом

$$\|\varphi-\psi\|^2=\int_0^\infty (\varphi(x)-\psi(x))^2\,dx=$$

$$=\int_0^\delta \varphi^2(x)\,dx+\int_N^\infty \varphi^2(x)\,dx<\frac{\varepsilon^2}{4},$$

и, следовательно, $\|\varphi-\psi\|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Усредним теперь функцию ψ, взяв радиус усреднения $h<\frac{\delta}{2}$, и положим $u(x)=\psi_h(x)$. Очевидно, $\psi_h(x)\in D(B)$: функция $\psi_h(x)$ бесконечно дифференцируема, обращается в нуль при $x=0$ (более того, при любом $x<\frac{\delta}{2}$); наконец, число a_u можно взять равным $N+\frac{\delta}{2}$. Далее,

$$\|u-\psi\|^2=\int_0^\infty (u(x)-\psi(x))^2\,dx=\int_0^{N+\delta/2} (u(x)-\psi(x))^2\,dx=$$

$$=\int_0^{N+\delta/2} (\psi_h(x)-\psi(x))^2\,dx.$$

По теореме 1.3.3 при достаточно малом h последний интеграл будет меньше, чем $\frac{\varepsilon^2}{4}$, и, следовательно $\|u-\psi\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Теперь по неравенству треугольника

$$\|u-\varphi\|\leqslant\|u-\psi\|+\|\psi-\varphi\|<\varepsilon,$$

и наше утверждение доказано.

Легко доказать, что оператор B симметричен. В самом деле, пусть $u, v\in D(B)$, следовательно, каждая из функций u, v удовлетворяет условиям 1) — 3).

Составим билинейный функционал

$$(Bu, v)=-\int_0^\infty v\frac{d^2u}{dx^2}\,dx=-\int_0^N v\frac{d^2u}{dx^2}\,dx.$$

Здесь N — любое число, большее чем a_u и a_v; при $x=N$ обе функции u и v и все их производные обращаются в нуль.

Интегрирование по частям дает

$$(Bu,\ v)=\int_0^N u'(x)\,v'(x)\,dx=\int_0^\infty u'(x)\,v'(x)\,dx. \tag{11}$$

Аналогично

$$(Bv,\ u)=\int_0^\infty u'(x)\,v'(x)\,dx,$$

и, следовательно,

$$(Bu,\ v)=(Bv,\ u)=(u,\ Bv),$$

т. е. B — симметричный оператор.

Докажем теперь, что B — положительный оператор. По формуле (11) имеем

$$(Bu,\ u)=\int_0^\infty u'^2(x)\,dx\geqslant 0.$$

При этом, если $(Bu,\ u)=0$, то

$$\int_0^\infty u'^2(x)\,dx=0.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то $u'(x)\equiv 0$ и $u(x)\equiv \text{const}$; но $u(0)=0$, и окончательно $u(x)\equiv 0$.

Оператор B не положительно определен. Чтобы убедиться в этом, докажем, что нижняя грань отношения $\frac{(Bu,\ u)}{\|u\|^2}$ равна нулю.

Возьмем последовательность функций

$$u_n(x)=\begin{cases} x(n-x)^3, & \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant n,\\ 0, & \text{если} \quad x>n.\end{cases}$$

Легко видеть, что $u_n\in D(B)$. Найдем норму u_n. Имеем

$$\|u_n\|^2=\int_0^\infty u_n^2(x)\,dx=\int_0^n x^2(n-x)^6\,dx.$$

Сделаем замену $x=nt$:

$$\|u_n\|^2=n^9\int_0^1 t^2(1-t)^6\,dt.$$

Последний интеграл есть положительная постоянная, не зависящая от n; обозначим ее через c_1. Тогда $\|u_n\|^2 = c_1 n^9$.

Далее,

$$(Bu_n, u_n) = \int_0^\infty u_n'^2(x)\,dx = \int_0^n (n-4x)^2 (n-x)^4\,dx.$$

Замена $x = nt$ дает

$$(Bu_n, u_n) = n^7 \int_0^1 (1-t)^4 (1-4t)^2\,dt = c_2 n^7, \qquad c_2 = \text{const}.$$

Теперь

$$\frac{(Bu_n, u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{c_2}{c_1 n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

и, следовательно,

$$\inf \frac{(Bu, u)}{\|u\|^2} = 0.$$

§ 3. Энергетическое пространство

1. С каждым положительно определенным оператором можно связать некоторое гильбертово пространство, которое мы будем называть *энергетическим пространством* данного оператора.

Пусть H — гильбертово пространство и A — оператор, положительно определенный в этом пространстве. Построим новое гильбертово пространство. К числу его элементов отнесем все элементы множества $D(A)$ и на них определим новое скалярное произведение:

$$[u, v]_A = (Au, v); \qquad u, v \in D(A). \tag{1}$$

Как известно, скалярное произведение в гильбертовом пространстве должно удовлетворять трем аксиомам:

А. Симметричность [1]: если (u, v) есть скалярное произведение элементов u и v, то

$$(u, v) = (v, u).$$

[1]) Мы рассматриваем вещественное гильбертово пространство. Аксиома симметричности для комплексного гильбертова пространства выражается равенством $(u, v) = \overline{(v, u)}$.

В. Линейность: если λ_1 и λ_2 суть числа, то

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 (u_1, v) + \lambda_2 (u_2, v).$$

С. Положительность:

$$(u, u) \geqslant 0,$$

причем $(u, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$ (т. е. u есть нулевой элемент пространства).

Докажем, что выражение $[u, v]_A$, определенное равенством (1), удовлетворяет аксиомам А — С.

А. Симметричность. Имеем

$$[u, v]_A = (Au, v) = (u, Av) = (Av, u) = [v, u]_A.$$

Здесь мы воспользовались симметричностью оператора A и симметричностью скалярного произведения в исходном пространстве H.

Б. Линейность. Воспользуемся линейностью оператора A. Тогда

$$[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v]_A = (A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v) = \\ = (\lambda_1 A u_1 + \lambda_2 A u_2, v) = \lambda_1 (Au_1, v) + \lambda_2 (Au_2, v) = \\ = \lambda_1 [u_1, v]_A + \lambda_2 [u_2, v]_A.$$

В. Положительность. По неравенству положительной определенности (2.7) имеем $[u, u]_A \geqslant \gamma^2 \| u \|^2 \geqslant 0$. Далее, если $[u, u]_A = 0$, т. е. $(Au, u) = 0$, то из того же неравенства (2.7) вытекает, что $u = 0$. Очевидно, верно и обратное: из того, что $u = 0$, следует $(Au, u) = 0$ и $[u, u]_A = 0$.

Итак, выражение (1) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Приняв $[u, v]_A$ за скалярное произведение, мы превратим множество $D(A)$ в гильбертово пространство. Оно может оказаться неполным, — в этом случае обычным способом пополним его. Пополненное пространство назовем *энергетическим* и будем обозначать через H_A.

Новое скалярное произведение порождает новую норму, которую мы обозначим символом $| \; |_A$:

$$|u|_A = \sqrt{[u, v]_A}. \tag{2}$$

Если $u \in D(A)$, то

$$|u|_A = \sqrt{(Au, u)}$$

и по неравенству положительной определенности

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u|_A. \tag{3}$$

Ниже будет показано, что неравенство (3) справедливо для всех элементов пространства H_A.

Величины $[u, v]_A$ и $|u|_A$ будем называть соответственно *энергетическим произведением* элементов u и v и *энергетической нормой* элемента u.

В некоторых случаях, когда это не может вызвать недоразумений, мы будем опускать значок A в обозначениях энергетического произведения и энергетической нормы и будем писать $[u, v]$ и $|u|$.

В энергетическом пространстве H_A будем различать «старые» элементы — элементы множества $D(A)$, и «новые», или идеальные, элементы, полученные при пополнении. Из известных теорем функционального анализа вытекает следующее.

Если u — идеальный элемент пространства H_A, то существует последовательность старых элементов $\{u_n\}$, сходящаяся к u в энергетической норме:

$$|u - u_n| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Очевидно, последовательность $\{u_n\}$ при этом сходится в себе в энергетической метрике. Множество старых элементов плотно в энергетическом пространстве.

Теорема 5.3.1. *Если оператор A положительно определенный, то все элементы его энергетического пространства принадлежат исходному пространству.*

Доказательство. Достаточно показать, что между элементами энергетического пространства H_A и некоторыми элементами исходного пространства H можно установить линейно изоморфное соответствие. Это означает следующее: 1) каждому элементу $u \in H_A$ приводится в соответствие один и только один элемент $u' \in H$; 2) если элементам $u, v \in H_A$ приведены в соответствие элементы $u', v' \in H$, то линейной комбинации $\lambda u + \mu v \in H_A$ приводится в соответствие элемент $\lambda u' + \mu v' \in H$; 3) разным элементам пространства H_A приводятся в соответствие разные элементы пространства H.

Для любого элемента u энергетического пространства можно построить последовательность $\{u_n\}$ старых элементов, такую, что $|u_n - u| \to \infty$, $n \to \infty$. Действительно, для идеального элемента такая возможность была отмечена выше, если же u — старый элемент, то достаточно положить $u_n = u$. Очевидно, $u_n - u_m \in D(A)$ и

$$|u_n - u_m| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty. \tag{4}$$

По соотношению (3) между старой и новой нормой

$$\| u_n - u_m \| \leqslant \frac{1}{\gamma} | u_n - u_m |,$$

и последовательность $\{u_n\}$ сходится в себе в смысле старой нормы. В силу полноты пространства H существует такой элемент $u' \in H$, что

$$\| u' - u_n \| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Его-то мы и приведем в соответствие элементу $u \in H_A$.

Докажем единственность элемента u'. Допустим, что вместо последовательности $\{u_n\} \in D(A)$ мы взяли другую последовательность $\{v_n\} \in D(A)$, такую, что $|u - v_n| \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Проводя аналогичные рассуждения, получим, что существует элемент $v' \in H$ такой, что

$$\| v' - v_n \| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Покажем, что $u' = v'$. По неравенству треугольника

$$|u_n - v_n| = |(u_n - u) - (v_n - u)| \leqslant \\ \leqslant |u_n - u| + |v_n - u| \underset{n \to \infty}{\to} \infty.$$

Так как $(u_n - v_n) \in D(A)$, то

$$\| u_n - v_n \| \leqslant \frac{1}{\gamma} | u_n - v_n | \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\| u' - v' \| = 0$, что и требовалось доказать.

Пусть элементам $u_1, u_2 \in H_A$ соответствуют последовательности элементов $u_{1n}, u_{2n} \in D(A)$, таких, что

$$|u_1 - u_{1n}| \underset{n \to \infty}{\to} 0, \quad |u_2 - u_{2n}| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Пусть, далее, тем же элементам u_1 и u_2 соответствуют элементы u_1' и u_2' пространства H. Элементы u_1', u_2' таковы, что

$\|u_1' - u_{1n}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $\|u_2' - u_{2n}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Но тогда по неравенству треугольника

$$|(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) - (\lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n})| = |\lambda_1 (u_1 - u_{1n}) + \\ + \lambda_2 (u_2 - u_{2n})| \leqslant |\lambda_1|\, |u_1 - u_{1n}| + |\lambda_2|\, |u_2 - u_{2n}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\|(\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2') - (\lambda_1 u_{1n} + \lambda_2 u_{2n})\| = \|\lambda_1 (u_1 - u_{1n}) + \\ + \lambda_2 (u_2 - u_{2n})\| \leqslant |\lambda_1|\, \|u_1' - u_{1n}\| + |\lambda_2|\, \|u_2' - u_{2n}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Эти два соотношения и означают, что элементу $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in H_A$ соответствует элемент $\lambda_1 u_1' + \lambda_2 u_2' \in H$; тем самым доказана линейность соответствия.

Докажем теперь, что различным элементам $u_1, u_2 \in H_A$ соответствуют различные же элементы $u_1', u_2' \in H$.

Допустим противное: пусть $u_1' = u_2'$. Покажем, что тогда $u_1 = u_2$. Введем разность $u_1 - u_2 = v$. Очевидно, $v \in H_A$, и так как соответствие линейно, то элементу v соответствует нулевой элемент пространства H: существует последовательность $v_n \in D(A)$ такая, что

$$\|v_n - 0\| = \|v_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad |v - v_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Пусть η — произвольный элемент множества $D(A)$. В силу непрерывности скалярного произведения

$$[v_n, \eta] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} [v, \eta].$$

С другой стороны,

$$[v_n, \eta] = (v_n, A\eta).$$

Так как $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $(v_n, A\eta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0, A\eta) = 0$ и, следовательно, $[v, \eta] = 0$. Последнее равенство означает, что элемент v ортогонален в метрике H_A к множеству $D(A)$, плотному в H_A. Но тогда v — нулевой элемент энергетического пространства и $u_1 = u_2$, что окончательно доказывает теорему.

Множества $D(A)$, H_A, H связаны соотношениями

$$D(A) \subset H_A \subset H. \tag{5}$$

Включение $D(A) \subset H_A$ вытекает из того, что H_A получено пополнением множества $D(A)$, а включение $H_A \subset H$ — из теоремы 5.3.1.

Так как множество $D(A)$ плотно в H, то, как видно из соотношения (5), множество элементов, образующих энергетическое пространство положительно определенного оператора, плотно в исходном пространстве.

Выше мы получили неравенство (3), устанавливающее соотношение между двумя нормами элемента множества $D(A)$:

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u|, \quad u \in D(A).$$

Докажем, что это неравенство верно для любого элемента энергетического пространства. Пусть $u \in H_A$. Существует последовательность элементов $u_n \in D(A)$ такая, что

$$|u_n - u| \underset{n \to \infty}{\to} 0, \quad \|u_n - u\| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Для элементов u_n неравенство (3) справедливо:

$$\|u_n\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u_n|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и пользуясь непрерывностью нормы, получим

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u|, \quad u \in H_A,$$

что и требовалось доказать.

Мы ввели энергетическое произведение с помощью равенства (1):

$$[u, v] = (Au, v), \quad u, v \in D(A).$$

Докажем справедливость этого равенства в более общем случае $u \in D(A)$, $v \in H_A$.

Если $v \in H_A$, то существует последовательность $\{v_n\}$,

$$v_n \in D(A), \quad |v_n - v| \underset{n \to \infty}{\to} 0, \quad \|v_n - v\| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Для элементов u и v_n равенство (1) справедливо:

$$[u, v_n] = (Au, v_n).$$

По непрерывности скалярного произведения

$$[u, v_n] \underset{n \to \infty}{\to} [u, v], \quad (Au, v_n) \underset{n \to \infty}{\to} (Au, v).$$

Сопоставляя правые части, находим

$$[u, v] = (Au, v); \qquad u \in D(A), \qquad v \in H_A. \tag{6}$$

2. В качестве примера найдем энергетическое пространство оператора A § 2. Напомним, что в этом случае $H = L_2(0, 1)$, оператор определен формулой

$$Au = -\frac{d^2u}{dx^2},$$

а функции u из $D(A)$ удовлетворяют условиям

$$u \in C^{(2)}[0, 1], \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Докажем, что в рассматриваемом случае пространство H_A состоит из тех и только тех функций, которые обладают следующими свойствами: 1) они абсолютно непрерывны на сегменте $[0, 1]$; 2) их первые производные на этом сегменте суммируемы с квадратом; 3) в точках $x = 0$ и $x = 1$ эти функции обращаются в нуль.

Как мы видели в § 2,

$$[u, v]_A = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx; \qquad u, v \in D(A).$$

Полагая здесь $v = u$, получим формулу для нормы

$$|u|_A^2 = \int_0^1 u'^2(x)\, dx, \qquad u \in D(A). \tag{7}$$

1. Пусть u — произвольный элемент пространства H_A. По теореме 5.3.1 $u \in L_2(0, 1)$ и существует такая последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in D(A)$, что

$$|u_n - u|_{\substack{\\ n\to\infty}} \to 0, \qquad \|u_n - u\|_{\substack{\\ n\to\infty}} \to 0.$$

Будучи сходящейся к элементу u, эта последовательность сходится в себе, поэтому

$$|u_n - u_m| \underset{m,\, n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Но $u_n - u_m \in D(A)$ и для этой разности верна формула (7), поэтому

$$\int_0^1 (u_n'(x) - u_m'(x))^2\, dx \underset{m,\, n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Последнее соотношение, которому можно придать вид

$$\| u'_n - u'_m \|^2 \underset{m,\, n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

показывает, что последовательность производных $\{u'_n\}$ сходится в себе в метрике $L_2(0, 1)$. Пространство $L_2(0, 1)$ полное, поэтому существует функция $w \in L_2(0, 1)$ такая, что

$$\| u'_n - w \| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Соотношения

$$\| u_n - u \| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \| u'_n - w \| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

вместе с теоремой 2.3.1 позволяют заключить, что функция $u(x)$ имеет обобщенную первую производную $u'(x) = w(x)$; будучи элементом пространства $L_2(0, 1)$, эта производная суммируема с квадратом на сегменте $[0, 1]$. Из теоремы 2.4.1 вытекает, что функция $u(x)$ на том же сегменте абсолютно непрерывна.

Остается доказать, что $u(0) = u(1) = 0$. Функции $u_n(x)$ принадлежат множеству $D(A)$ и потому удовлетворяют аналогичным соотношениям

$$u_n(0) = u_n(1) = 0.$$

По формуле Ньютона — Лейбница

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u'_n(t)\, dt = \int_0^x u'_n(t)\, dt. \tag{8}$$

Если $n \to \infty$, то $u_n(x) \to u(x)$ в метрике $L_2(0, 1)$. Докажем, что одновременно

$$\int_0^x u'_n(t)\, dt \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_0^x w(t)\, dt$$

равномерно на сегменте $[a, b]$. Действительно, по неравенству Буняковского

$$\left[\int_0^x u'_n(t)\, dt - \int_0^x w(t)\, dt \right]^2 = \left[\int_0^x [u'_n(t) - w(t)]\, dt \right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x 1^2 dt \int_0^x [u'_n(t) - w(t)]^2\, dt = x \int_0^x [u'_n(t) - w(t)]^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 [u'_n(t) - w(t)]^2\, dt = \| u'_n - w \|^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Переходя к пределу в соотношении (8), получим

$$u(x)=\int_0^x w(t)\,dt.$$

Отсюда $u(0)=0$. Если бы мы написали формулу Ньютона—Лейбница в виде

$$u_n(x)=u_n(1)-\int_x^1 u_n'(t)\,dt=-\int_x^1 u_n(t)\,dt,$$

то тем же путем мы нашли бы, что $u(1)=0$.

2. Пусть теперь функция $u(x)$ удовлетворяет сформулированным выше требованиям: на сегменте $[0, 1]$ она абсолютно непрерывна, имеет почти всюду производную $u' \in L_2(0, 1)$ и, наконец, $u(0)=u(1)=0$. Докажем, что $u \in H_A$.

Достаточно доказать, что существует последовательность $\{u_n\}$ функций из $D(A)$ такая, что

$$|u_n-u_m|\underset{n,\,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{и} \quad \|u_n-u\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Функция $u(x)$ имеет производную из $L_2(0, 1)$. Разложим ее в ряд Фурье по косинусам:

$$u'(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\pi x.$$

На самом деле нулевого члена в этом ряде нет, так как

$$a_0=\int_0^1 u'(x)\,dx=u(1)-u(0)=0,$$

поэтому

$$u'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x.$$

Последнее равенство проинтегрируем в пределах от нуля до x; ряд сходится в среднем, и его можно интегрировать почленно. Приняв во внимание, что $u(0)=0$, получим

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x,$$

где

$$b_k = \frac{a_k}{k\pi}.$$

Построим последовательность функций

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\pi x.$$

Очевидно, $u_n \in D(A)$. В силу сходимости ряда Фурье

$$\| u_n - u \| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Надо показать, что $| u_n - u_m | \underset{n,\, m \to 0}{\to} 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $n > m$. Тогда

$$u_n(x) - u_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} b_k \sin k\pi x.$$

Запишем квадрат энергетической нормы разности $u_n - u_m$:

$$| u_n - u_m |^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k \cos k\pi x \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{n} a_k^2 \underset{n,\, m \to \infty}{\to} 0.$$

Тем самым доказано, что $u \in H_A$.

§ 4. Задача о минимуме квадратичного функционала

Пусть A — положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H, а f — данный элемент этого пространства. Квадратичный функционал

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) \tag{1}$$

имеет область определения, очевидно, совпадающую с областью определения оператора A, так что $D(F) = D(A)$. Функционал (1) будем называть *функционалом энергии* для оператора A.

Поставим задачу о минимуме функционала энергии на множестве $D(A)$. Докажем следующую теорему.

Теорема 5.4.1. *Для того чтобы некоторый элемент $u_0 \in D(A)$ сообщал минимальное значение функцио-*

налу энергии, необходимо и достаточно, чтобы этот элемент удовлетворял уравнению

$$Au_0 = f. \tag{2}$$

Такой элемент — единственный.

Необходимость. Если элемент u_0 реализует минимум функционала F, то $(\operatorname{grad} F)(u_0) = 0$. Найдем $\operatorname{grad} F$.

Имеем, по определению вариации,

$$\delta F(u, \eta) = \frac{d}{d\alpha} F(u + \alpha\eta)\Big|_{\alpha=0} =$$
$$= \frac{d}{d\alpha}[(A(u+\alpha\eta),\ u+\alpha\eta) - 2(u+\alpha\eta, f)]_{\alpha=0}.$$

Раскрывая скобки и пользуясь симметричностью оператора A, получим

$$F(u+\alpha\eta) = F(u) + 2\alpha(Au - f, \eta) + \alpha^2(A\eta, \eta). \tag{3}$$

Отсюда

$$\delta F(u, \eta) = 2(Au - f, \eta). \tag{4}$$

Правая часть выражения (4) есть скалярное произведение фиксированного элемента $Au - f$ и произвольного элемента $\eta \in D(F)$. Такое скалярное произведение есть функционал, ограниченный в H. Отсюда ясно, что

$$D(\operatorname{grad} F) = D(F) = D(A)$$

и

$$(\operatorname{grad} F)(u) = 2(Au - f); \tag{5}$$

уравнение Эйлера $(\operatorname{grad} F)(u_0) = 0$ совпадает с уравнением (2), что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть u_0 удовлетворяет уравнению (2). Если u — произвольный элемент из $D(A)$, отличный от u_0, то можно положить $u = u_0 + \eta$, $\eta \neq 0$. В равенстве (3) заменим u на u_0 и положим $\alpha = 1$. Учтя уравнение (2), получим

$$F(u) = F(u_0) + (A\eta, \eta).$$

Но A — положительно определенный оператор, а $\eta \neq 0$, поэтому $(A\eta, \eta) > 0$ и, следовательно, $F(u) > F(u_0)$. Последнее соотношение показывает, что в точке u_0 функционал F достигает минимума.

Остается доказать единственность элемента u_0. Пусть минимум F достигается еще и на элементе u_1. По только что доказанному $F(u_1) > F(u_0)$. Но точно так же можно доказать, что $F(u_0) > F(u_1)$. Полученное противоречие доказывает, что минимум функционала (1) может достигаться лишь в одной точке.

Заметим, что мы установили равносильность следующих задач: решения уравнения $Au = f$ и отыскания минимума функционала энергии

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f);$$

если одна из этих задач разрешима, то разрешима и другая, и элемент, решающий одну из этих задач, решает и другую. Однако существование решения этих задач теоремой 5.4.1 не доказано. Более того, решение может не существовать, как видно из следующего примера.

Пусть $H \in L_2(0, 1)$ и пусть в уравнении (2) A означает оператор, рассмотренный в § 2:

$$Au = -\frac{d^2u}{dx^2}, \tag{6}$$

причем $D(A)$ состоит из функций $u \in C^{(2)}[0, 1]$, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{7}$$

Решить уравнение

$$Au = f$$

означает в нашем примере следующее: $f(x)$ есть функция, суммируемая с квадратом; требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям (7) и имеющую непрерывную вторую производную, которая только знаком отличается от $f(x)$. Но это явно невыполнимо, если функция $f(x)$ разрывна.

Тот же пример показывает, что задача может стать разрешимой, если разумным образом расширить область определения оператора A: в примере достаточно включить в $D(A)$ функции с абсолютно непрерывными первыми производными и квадратично суммируемыми вторыми производными; условия (7), разумеется, следует сохранить.

Если $f \in L_2(0, 1)$, то уравнение $Au = f$ теперь имеет решение. Действительно, это уравнение означает, что $u(x)$

удовлетворяет условиям (7) и дифференциальному уравнению

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x).$$

Такая функция существует и равна

$$u(x)=x\int_x^1(1-t)f(t)\,dt+(1-x)\int_0^x tf(t)\,dt;$$

легко проверить, что в расширенную область определения нашего оператора эта функция входит.

Проще и удобнее оказывается, однако, расширять область определения не оператора A, а связанного с ним функционала энергии. Об этом будет сказано в следующем параграфе.

§ 5. Обобщенное решение

Пусть, как и прежде, A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, f — данный элемент этого пространства и F — соответствующий функционал энергии

$$F(u)=(Au,\ u)-2(u,\ f). \tag{1}$$

Формула (1) определяет функционал F на множестве $D(A)$; легко расширить этот функционал на все энергетическое пространство H_A. Для этого достаточно заметить, что $(Au,\ u)=\|u\|_A^2$ и, следовательно,

$$F(u)=\|u\|_A^2-2(u,f). \tag{2}$$

В формуле (2) первое слагаемое справа определено на элементах $u\in H_A$. Второе слагаемое определено, если $u\in H$, тем более, если $u\in H_A$. Теперь ясно, что формула (2) позволяет определить функционал F на всем энергетическом пространстве H_A.

Возвращаясь к нашему примеру

$$Au=-\frac{d^2u}{dx^2},\quad u\in C^{(2)}[0,\ 1],\quad u(0)=u(1)=0,$$

мы видим, что функционал F может быть записан в форме

$$F(u)=-\int_0^1 u\frac{d^2u}{dx^2}\,dx-2\int_0^1 fu\,dx$$

и в то же время в виде

$$F(u) = \int_0^1 u'^2 dx - 2\int_0^1 fu dx,$$

причём вторая запись функционала пригодна для всех $u \in H_A$. Она-то и позволяет расширять функционал энергии на все энергетическое пространство.

Теперь будем искать минимум функционала F не в $D(A)$, а в H_A. Докажем следующую теорему.

Теорема 5.5.1. *В энергетическом пространстве существует один и только один элемент, на котором функционал энергии достигает минимума.*

Доказательство будет основано на следующей теореме Риса, хорошо известной из функционального анализа.

Пусть l — линейный ограниченный функционал в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, определенный на всем пространстве. Тогда существует один и только один элемент $u_0 \in \mathfrak{H}$ такой, что

$$lu = (u, u_0)_{\mathfrak{H}}. \tag{3}$$

Символом $(\ldots, \ldots)_{\mathfrak{H}}$ здесь обозначено скалярное произведение в $\mathfrak{H}$.

По неравенству Коши имеем

$$|(u, f)| \leqslant \|u\| \|f\|,$$

а по соотношению между старой и новой нормой (неравенство (3.3))

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u|.$$

Отсюда

$$|(u, f)| \leqslant c|u|, \qquad c = \frac{\|f\|}{\gamma}, \tag{4}$$

и функционал (u, f) ограничен в H_A. По теореме Риса существует один и только один такой элемент $u_0 \in H_A$, что

$$(u, f) = [u, u_0], \qquad u \in H_A. \tag{5}$$

Формула (5) позволяет следующим образом преобразовать выражение для функционала F:

$$F(u) = |u|^2 - 2[u, u_0] = [u, u] - 2[u, u_0] + [u_0, u_0] - [u_0, u_0] = \\ = [u - u_0, u - u_0] - [u_0, u_0]$$

или, еще проще,

$$F(u) = \| u - u_0 \|^2 - \| u_0 \|^2, \qquad u \in H_A. \tag{6}$$

Из формулы (6) делается совершенно очевидным, что минимум функционала F в пространстве H_A достигается на элементе $u = u_0$ и только на этом элементе. При этом очевидно, что

$$\min F(u) = -\| u_0 \|^2. \tag{7}$$

Теорема доказана.

Элемент $u_0 \in H_A$, реализующий минимум функционала (2), будем называть *обобщенным решением* уравнения

$$Au = f. \tag{8}$$

Может случиться, что $u_0 \in D(A)$; тогда по теореме 5.4.1 u_0 будет обычным решением уравнения (8).

Если энергетическое пространство сепарабельно, то можно указать простой прием, позволяющий построить обобщенное решение уравнения (8). В сепарабельном гильбертовом пространстве существует полная счетная ортонормированная система $\{\omega_n\}$:

$$[\omega_j, \omega_k] = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \qquad j, k = 1, 2, \ldots$$

Пусть u_0 — обобщенное решение уравнения (8). Разложим его в ряд Фурье по системе $\{\omega_k\}$:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} [u_0, \omega_k] \, \omega_k. \tag{9}$$

Этот ряд сходится в энергетической норме: если мы положим

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} [u_0, \omega_k] \, \omega_k,$$

то $\| u_0 - \varphi_n \| \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

Коэффициенты Фурье $[u_0, \omega_k]$ легко вычисляются по формуле (5): положив в ней $u = \omega_k$, находим

$$[u_0, \omega_k] = (f, \omega_k). \tag{10}$$

Отсюда

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \omega_k)\,\omega_k. \tag{11}$$

Как было отмечено, ряд (11) сходится в норме энергетического пространства H_A; нетрудно видеть, что он сходится и в норме исходного пространства H. Действительно, обозначая по-прежнему через φ_n частную сумму ряда (11), имеем по неравенству (3.3)

$$\| u_0 - \varphi_n \| \leqslant \frac{1}{\gamma} \| u_0 - \varphi_n \| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

В связи с теоремой 5.5.1 возникает вопрос об условиях сепарабельности энергетического пространства. Этот вопрос будет решен в следующем параграфе.

§ 6. О сепарабельности энергетического пространства

Как и выше, под A будем понимать положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве.

Лемма 5.6.1. *Если последовательность $\{f_n\}$ полна в исходном пространстве H и если $\{\varphi_n\}$ — обобщенное решение уравнения $A\varphi_n = f_n$, то последовательность $\{\varphi_n\}$ полна в энергетическом пространстве H_A.*

Пусть $u \in D(A)$. Обозначая $Au = v$, имеем $v \in H$. Введем обозначения

$$\sum_{k=1}^{N} a_k f_k = s_N, \qquad \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k = \sigma_N. \tag{1}$$

Оценим квадрат нормы разности

$$\| u - \sigma_N \|^2 = [u - \sigma_N,\ u - \sigma_N].$$

Обозначим $u - \sigma_N = \eta$. Тогда

$$[u - \sigma_N,\ u - \sigma_N] = [u - \sigma_N,\ \eta] = [u,\ \eta] - [\sigma_N,\ \eta].$$

Так как $u \in D(A)$, $\eta \in H_A$, то

$$[u,\ \eta] = (Au,\ \eta) = (v,\ \eta).$$

Далее,

$$[\sigma_N, \eta] = \sum_{k=1}^{N} a_k [\varphi_k, \eta],$$

но по формуле (5.10)

$$[\varphi_k, \eta] = (f_k, \eta);$$

окончательно

$$[\sigma_N, \eta] = \sum_{k=1}^{N} a_k (f_k, \eta) = (s_N, \eta)$$

и

$$|u - \sigma_N|^2 = (v - s_N, \eta). \tag{2}$$

Система $\{f_n\}$ полна в H, поэтому можно так выбрать натуральное число N и коэффициенты a_k, чтобы имело место неравенство

$$\|v - s_N\| < \varepsilon,$$

где ε — произвольно заданное положительное число. Теперь из формулы (2) получаем

$$|u - \sigma_N|^2 = (v - s_N, \eta) \leqslant \|v - s_N\| \|\eta\| < \frac{\varepsilon}{\gamma} |\eta| = \\ = \frac{\varepsilon}{\gamma} |u - \sigma_N|.$$

Если $|u - \sigma_N| \neq 0$, то отсюда получаем неравенство

$$|u - \sigma_N| < \frac{\varepsilon}{\gamma}; \tag{3}$$

это неравенство справедливо, очевидно, и тогда, когда $|u - \sigma_N| = 0$. Таким образом, если элемент $u \in D(A)$, то его можно с любой степенью точности аппроксимировать линейными комбинациями элементов системы $\{\varphi_n\}$.

Пусть теперь $u \in H_A$. Множество $D(A)$ плотно в H_A, поэтому существует такой элемент $u' \in D(A)$, что

$$|u - u'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, как было только что доказано, существует номер N и числа $a_1, a_2, \ldots, a_N$ такие, что

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А тогда по неравенству треугольника

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right\| < \varepsilon,$$

что и доказывает лемму.

Теорема 5.6.1. *Для того чтобы энергетическое пространство положительно определенного оператора было сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы было сепарабельным исходное пространство.*

Необходимость. Пусть A — положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H и пусть энергетическое пространство H_A сепарабельно. Тогда в нем существует счетное плотное множество $\{\psi_n\}$. Докажем, что оно плотно и в исходном пространстве H. Пусть u — некоторый элемент пространства H. Множество элементов энергетического пространства плотно в исходном пространстве, поэтому если задано число $\varepsilon > 0$, то можно выбрать элемент $u' \in H_A$ так, чтобы $\|u - u'\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, можно выбрать элемент ψ_ν так, чтобы

$$|u' - \psi_\nu| < \frac{\varepsilon\gamma}{2}.$$

Здесь γ — постоянная положительной определенности, входящая в неравенство (2.7). По соотношению между старой и новой нормой (неравенство (3.3))

$$\|u' - \psi_\nu\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а по неравенству треугольника

$$\|u - \psi_\nu\| \leqslant \|u - u'\| + \|u' - \psi_\nu\| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство означает, что пространство H содержит плотное счетное множество $\{\psi_n\}$, следовательно, это пространство сепарабельно.

Достаточность. Пусть пространство H сепарабельно и счетная последовательность $\{f_n\}$ полна в H. Построим элементы $\varphi_n \in H_A$ — обобщенные решения уравнений $A\varphi_n = f_n$. По лемме 5.6.1 последовательность $\{\varphi_n\}$ полна в H_A. Построим элементы вида

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \tag{4}$$

где α_k — рациональные числа. Множество таких элементов счетное. Докажем, что оно плотно в H_A.

Действительно, если даны число $\varepsilon > 0$ и элемент $u \in H_A$, то можно выбрать натуральное число $N > 0$ и вещественные числа a_k так, чтобы

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем теперь рациональные числа α_k столь близкими к соответствующим числам a_k, чтобы

$$\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k - a_k| \, \|\varphi_k\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$$

и множество (4) плотно в пространстве H_A. Отсюда следует, что это пространство сепарабельно.

§ 7. Расширение положительно определенного оператора

Пусть A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Формула (5.5) приводит в соответствие каждому элементу $f \in H$ один и только один элемент $u_0 \in H_A$, реализующий минимум функционала энергии $F(u)$. Тем самым эта формула определяет некоторый линейный оператор G:

$$u_0 = Gf, \tag{1}$$

действующий в пространстве H. Область определения этого оператора $D(G) = H$, а область значений $R(G)$ есть часть множества элементов, образующих энергетическое пространство $H_A: R(G) \subset H_A$.

Лемма 5.7.1. *Оператор G симметричен и ограничен.* Запишем формулу (5.5) в виде

$$(u, f) = [u, Gf], \quad u \in H_A. \tag{2}$$

Возьмем произвольный элемент $h \in H$ и положим $u = Gh$, тогда $u \in H_A$. Теперь формула (2) дает

$$(Gh, f) = [Gh, Gf] = [Gf, Gh].$$

По той же формуле (2)

$$[Gf, Gh] = (Gf, h) = (h, Gf).$$

Окончательно

$$(Gh, f) = (h, Gf), \tag{3}$$

и оператор G симметричен. Далее, полагая в формуле (2) $u = Gf$, получаем

$$\| Gf \|_A^2 = (Gf, f).$$

Применив к правой части неравенство Коши и заменив левую часть меньшей величиной $\gamma^2 \| Gf \|^2$, найдем

$$\gamma^2 \| Gf \|^2 \leqslant \| Gf \| \, \| f \|.$$

Отсюда

$$\| Gf \| \leqslant \frac{1}{\gamma^2} \| f \|.$$

Из этого неравенства следует ограниченность оператора G; при этом

$$\| G \| \leqslant \frac{1}{\gamma^2}. \tag{4}$$

Лемма 5.7.2. *Существует оператор, обратный оператору G.*

Достаточно доказать, что уравнение $Gf = 0$ имеет единственное решение $f = 0$. Пусть $Gf = 0$. Формула (2) дает тогда

$$(u, f) = 0, \quad u \in H_A.$$

Элемент f оказывается ортогональным к плотному в H множеству, а именно, к множеству элементов энергетического пространства. Но тогда $f = 0$.

Оператор G^{-1}, обратный оператору G, будем обозначать через $\tilde{A}$. Очевидно, $D(\tilde{A}) = R(G) \subset H_A$ и $R(\tilde{A}) = D(G) = H$.

Теорема 5.7.1. *Оператор $\tilde{A}$ есть положительно определенное расширение оператора A. Нижние грани отношений*

$$\frac{(Au, u)}{\|u\|^2}, \quad \frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \tag{5}$$

равны между собой. Уравнение

$$\tilde{A}u = f \tag{6}$$

имеет одно и только одно решение при любом $f \in H$.

Пусть $u_0 \in D(A)$. Положим $Au_0 = f$. По теореме 5.4.1 элемент u_0 реализует минимум функционала $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$. По формуле (1) $u_0 = Gf$ и, следовательно, $\tilde{A}u_0 = f$. Отсюда следует, что: 1) $u_0 \in D(\tilde{A})$ и, так как u_0 — произвольный элемент множества $D(A)$, то $D(A) \subset D(\tilde{A})$; 2) если $u_0 \in D(A)$, то $Au_0 = \tilde{A}u_0$. Утверждения 1) и 2) в совокупности и означают, что $\tilde{A}$ есть расширение оператора A.

Докажем теперь, что $\tilde{A}$ — симметричный оператор. Прежде всего его область определения плотна в H, так как $D(\tilde{A}) \supset D(A)$. Далее, возьмем в области $D(\tilde{A})$ два произвольных элемента u и v и положим $\tilde{A}u = f$, $\tilde{A}v = h$. Тогда $u = Gf$, $v = Gh$. Подставив это в формулу (3), получим равенство

$$(v, \tilde{A}u) = (u, \tilde{A}v),$$

означающее симметричность оператора $\tilde{A}$.

Оператор $\tilde{A}$ есть расширение A, поэтому множество значений отношения $\frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2}$ шире, чем то же множество для отношения $\frac{(Au, u)}{\|u\|^2}$, а в таком случае

$$\inf_{u \in D(\tilde{A})} \frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \leqslant \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}. \tag{7}$$

С другой стороны, обозначая

$$\inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} = \gamma_0^2, \quad \gamma_0^2 > 0, \tag{8}$$

имеем $(Au, u) \geqslant \gamma_0^2 \|u\|^2$, и, следовательно, $|u|_A \geqslant \gamma_0 \|u\|$, $u \in H_A$. В тождестве (2) положим $u = Gf$, так что $f = \tilde{A}u$:

$$(u, \tilde{A}u) = (\tilde{A}u, u) = [Gf, Gf]_A = |u|_A^2 \geqslant \gamma_0^2 \|u\|^2.$$

Отсюда

$$\frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \geqslant \gamma_0^2,$$

и потому

$$\inf_{u \in D(\tilde{A})} \frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \geqslant \gamma_0^2 = \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}. \tag{9}$$

Сравнение соотношений (7) и (9) показывает, что

$$\inf_{u \in D(\tilde{A})} \frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2} = \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2}. \tag{10}$$

Разрешимость уравнения (6) при любом $f \in H$ есть лишь иная формулировка отмеченного выше факта, что $R(\tilde{A}) = H$. Действительно, если $f \in H$, то $f \in R(\tilde{A})$, и, значит, существует такой элемент u_0, что $\tilde{A}u_0 = f$. Единственность решения есть следствие положительной определенности оператора $\tilde{A}$ (см. теоремы 5.4.1 и 5.5.1).

Из разрешимости уравнения (6) при любом $f \in H$ вытекает, что для этого уравнения обобщенное решение есть обычное решение. Заметим также, что обобщенное решение уравнения $Au = f$ есть обычное решение уравнения $\tilde{A}u = f$.

Расширение $\tilde{A}$ положительно определенного оператора A, описанное в этом параграфе, было построено К. Фридрихсом. Мы будем ниже называть $\tilde{A}$ *расширением оператора A по Фридрихсу*.

Замечание. Для читателя, знакомого с понятием самосопряженного оператора, укажем, что расширение $\tilde{A}$ положительно определенного оператора A по Фридрихсу есть самосопряженное расширение этого оператора.

Доказательство этого утверждения можно найти в статье К. Фридрихса [7] и в книге автора [5], приведенных в списке литературы к разделу II.

Величина γ_0^2 (формула (8)) называется *нижней гранью* положительно определенного оператора A. Мы приходим, таким образом, к теореме К. Фридрихса.

Теорема 5.7.2. *Положительно определенный оператор можно расширить до самосопряженного с той же нижней гранью.*

Теорема 5.7.3. *Энергетические пространства положительно определенного оператора и его расширения по Фридрихсу совпадают.*

Пусть A — положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H и $\tilde{A}$ — расширение оператора A по Фридрихсу. Надо доказать, что пространства H_A и $H_{\tilde{A}}$ состоят из одних и тех же элементов и что

$$|u_0|_{\tilde{A}} = |u_0|_A, \qquad u_0 \in H_A. \tag{11}$$

1. Любой элемент из H_A принадлежит $H_{\tilde{A}}$ и его нормы в обоих пространствах одинаковы. Это утверждение очевидно для элементов из области $D(A)$: если $u_0 \in D(A)$, то $u_0 \in D(\tilde{A}) \subset H_{\tilde{A}}$; при этом $|u_0|_A^2 = (Au_0, u_0) = (\tilde{A}u_0, u_0) = |u_0|_{\tilde{A}}^2$. Далее, для идеальных элементов пространства H_A соотношение $u_0 \in H_A$ означает, что существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in D(A)$, со свойствами

$$\|u_n - u_0\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \qquad |u_n - u_m|_A^2 \xrightarrow[n,\, m \to \infty]{} 0. \tag{12}$$

Но раз $u_n, u_m \in D(A)$, то $u_n, u_m \in D(\tilde{A})$ и

$$|u_n - u_m|_A^2 = (A(u_n - u_m), u_n - u_m) = (\tilde{A}(u_n - u_m), u_n - u_m) = |u_n - u_m|_{\tilde{A}}^2.$$

Таким образом, существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in D(\tilde{A})$ со свойствами

$$\|u_n - u_0\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \qquad |u_n - u_m|_{\tilde{A}} \xrightarrow[n,\, m \to \infty]{} 0; \tag{13}$$

отсюда следует, что $u_0 \in H_{\tilde{A}}$. При этом в соответствии с определением идеальных элементов

$$|u_n - u_0|_A \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \qquad |u_n - u_0|_{\tilde{A}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0;$$

отсюда

$$|u_0|_A = \lim_{n \to \infty} |u_n|_A = \lim_{n \to \infty} |u_n|_{\tilde{A}} = |u_0|_{\tilde{A}}.$$

2. Докажем теперь, что из соотношения $u \in H_{\tilde{A}}$ вытекают соотношение $u \in H_A$ и равенство (11). Если $u \in H_{\tilde{A}}$, то существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in D(\tilde{A})$, со свойствами (13). Выше мы видели, что $D(\tilde{A}) \subset H_A$; поэтому $u_n \in H_A$, и по доказанному в п. 1

$$|u_n - u_m|_{\tilde{A}} = |u_n - u_m|_A,$$

свойства (13) переходят в свойства (12), а тогда $u \in H_A$. Для элементов $u \in H_A$ равенство (11) было установлено в п. 1. Теорема доказана.

Нами была установлена формула (3.6)

$$[u, v]_A = (Au, v), \quad u \in D(A), \quad v \in H_A.$$

Справедлива и следующая, несколько более общая формула:

$$[u, v]_A = (\tilde{A}u, u), \quad u \in D(\tilde{A}), \quad v \in H_A. \tag{14}$$

Действительно, если $u \in D(\tilde{A})$, $v \in H_A = H_{\tilde{A}}$, то по формуле (3.6)

$$[u, v]_{\tilde{A}} = (\tilde{A}u, v). \tag{15}$$

В пространствах H_A и $H_{\tilde{A}}$ совпадают нормы, но тогда в них совпадают и скалярные произведения:

$$[u, v]_{\tilde{A}} = \frac{1}{4}\left\{\|u+v\|_{\tilde{A}}^2 - \|u-v\|_{\tilde{A}}^2\right\} = \\ = \frac{1}{4}\left\{\|u+v\|_A^2 - \|u-v\|_A^2\right\} = [u, v]_A.$$

Заменив в равенстве (15) $[u, v]_{\tilde{A}}$ через $[u, v]_A$, мы и получим формулу (14).

§ 8. Простейшая краевая задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u(x) = f(x) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти интеграл этого уравнения на сегменте $[a, b]$ при краевых условиях

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

Будем предполагать, что $p, p', q \in C[a, b]$, $f \in L_2(a, b)$. Далее, допустим, что $p(x) \geqslant p_0 = \text{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$. Так как функции $p(x)$ и $q(x)$ еще и непрерывны на сегменте $[a, b]$, то имеют место неравенства

$$p_0 \leqslant p(x) \leqslant p_1, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant q_1, \quad x \in [a, b],$$

где p_1 и q_1, так же как и p_0, — положительные постоянные.

В качестве основного пространства H возьмем $L_2(a, b)$. За область определения оператора

$$Au = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u(x) \tag{3}$$

примем совокупность функций $u(x)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$u \in C^{(2)^*}[a, b], \qquad u(a) = u(b) = 0.$$

Докажем положительную определенность оператора A. Область его определения плотна в $L_2(a, b)$ — это вытекает из следствия 1.3.1. Проверим симметричность оператора A. Пусть $u, v \in D(A)$, тогда

$$(Au, v) = -\int_a^b v\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x)\,dx.$$

Первый интеграл возьмем по частям. Учитывая, что функция $v(x)$ удовлетворяет краевым условиям (2), получим явно симметричное выражение

$$(Au, v) = \int_a^b \left[p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + q(x)uv\right]dx, \tag{4}$$

которое и показывает, что $(Au, v) = (u, Av)$, т. е. что оператор A симметричен.

Положив в формуле (4) $v = u$, получим

$$(Au, u) = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2(x)\right]dx. \tag{5}$$

Учитывая ограничения на коэффициенты, найдем отсюда

$$(Au, u) \geqslant p_0\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx.$$

Далее,

$$\int_a^x u'(t)\,dt = u(x) - u(a) = u(x).$$

По неравенству Буняковского

$$u^2(x) \leqslant (x-a)\int_a^x u'^2(t)\,dt \leqslant (b-a)\int_a^b u'^2(t)\,dt.$$

Отсюда

$$\|u\|^2 = \int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant (b-a)^2 \int_a^b u'^2(t)\,dt.$$

Окончательно

$$(Au,\ u) \geqslant \frac{p_0}{(b-a)^2}\|u\|^2,$$

что и означает положительную определенность; можно положить

$$\gamma = \frac{\sqrt{p_0}}{b-a}.$$

Оператор A оказался положительно определенным, и мы можем ввести энергетическое пространство H_A. Докажем, что H_A состоит из абсолютно непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций, обращающихся в нуль на концах сегмента и имеющих суммируемую с квадратом первую производную.

Допустим, что $u \in H_A$. Это означает существование последовательности $u_n \in D(A)$, обладающей следующими свойствами:

$$|u_n - u_m| \xrightarrow[n,\ m\to\infty]{} 0, \qquad \|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Если $u \in D(A)$, то

$$|u|^2 = (Au,\ u) = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)\,u^2(x)\right]dx.$$

Следовательно,

$$|u_n - u_m|^2 = \int_a^b [p(x)(u_n' - u_m')^2 + q(x)(u_n - u_m)^2]\,dx \xrightarrow[n,\ m\to\infty]{} 0,$$

и так как оба слагаемых под интегралом неотрицательны, то

$$\int_a^b p(x)(u_n' - u_m')^2\,dx \xrightarrow[n,\ m\to\infty]{} 0.$$

Вспоминая ограничения на p, получаем

$$p_0\int_a^b (u'_n - u'_m)^2\,dx \leqslant \int_a^b p(x)(u'_n - u_m)^2\,dx \leqslant p_1\int_a^b (u'_n - u'_m)^2\,dx,$$

и, значит, то обстоятельство, что

$$\int_a^b p(x)(u'_n - u'_m)^2\,dx \xrightarrow[n,\,m\to\infty]{} 0,$$

равносильно следующему:

$$\int_a^b (u'_n - u'_m)^2\,dx \xrightarrow[n,\,m\to\infty]{} 0. \tag{6}$$

В свою очередь последняя запись означает, что последовательность производных $\{u'_n\}$ сходится в себе в метрике $L_2(a, b)$. Пространство $L_2(a, b)$ полное, и указанная последовательность сходится к некоторой функции $v \in L_2(a, b)$.

В тождестве

$$\int_a^x u'_n(t)\,dt = u_n(x) - u_n(a) = u_n(x)$$

можно перейти к пределу:

$$u(x) = \int_a^x v(t)\,dt.$$

Последнее равенство означает абсолютную непрерывность функции $u(x)$, при этом $u' = v \in L_2(a, b)$. Очевидно также, что $u(a) = 0$, и остается показать, что $u(b) = 0$. Это можно сделать, например, так: в тождестве

$$\int_x^b u'_n(t)\,dt = u_n(b) - u_n(x) = -u_n(x)$$

перейдем к пределу:

$$u(x) = -\int_x^b v(t)\,dt,$$

и ясно, что $u(b) = 0$.

Выше мы видели, что для функций $u \in D(A)$ верна формула

$$|u|^2 = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2(x)\right]dx. \qquad (7)$$

Докажем, что эта формула верна для любой функции из энергетического пространства. Пусть $u \in H_A$. Возьмем последовательность $u_n \in D(A)$ со свойствами

$$|u_n - u| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Формула (6) дает еще одно соотношение:

$$\|u_n' - u'\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Норма предела равна пределу нормы, поэтому

$$\|u_n\|^2 \to \|u\|^2, \qquad |u_n|^2 \to |u|^2, \qquad \|u_n'\|^2 \to \|u'\|^2. \qquad (8)$$

Для функций u_n формула (7) верна:

$$|u_n|^2 = \int_a^b [pu_n'^2 + qu_n^2]\,dx.$$

Из соотношений (8) вытекает, что при $n \to \infty$ левая часть последнего равенства имеет пределом $|u|^2$. Докажем, что предел правой части равен

$$\int_a^b [pu'^2 + qu^2]\,dx.$$

Имеем

$$\left|\int_a^b [pu_n'^2 + qu_n^2]\,dx - \int_a^b [pu'^2 + qu^2]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant p_1 \int_a^b |u_n'^2 - u'^2|\,dx + q_1 \int_a^b |u_n^2 - u^2|\,dx.$$

По неравенству Буняковского

$$\int_a^b |u_n'^2 - u'^2|\,dx \leqslant \left\{\int_a^b (u_n' + u')^2\,dx\right\}^{1/2} \left\{\int_a^b (u_n' - u')^2\,dx\right\}^{1/2} =$$

$$= \|u_n' + u'\|\,\|u_n - u'\|.$$

Но $\|u_n'\| \to \|u'\|$, а тогда $\|u_n'+u'\| \leqslant \|u_n'\| + \|u'\|$ есть величина ограниченная, поэтому

$$\int_a^b |u_n'^2 - u'^2|\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_a^b |u_n^2 - u^2|\, dx \to 0,$$

и формула (7) доказана для любой функции из H_A.

Теперь надо показать обратное, а именно, если функция u удовлетворяет трем сформулированным выше условиям, то $u \in H_A$. Последнее означает, что существует последовательность $\{u_n\}$ со свойствами

$$u_n \in D(A), \quad |u_n - u_m| \xrightarrow[n,\, m\to\infty]{} 0, \quad \|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Чтобы это показать, разложим производную функции u в ряд Фурье по косинусам

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi (x-a)}{b-a}.$$

Свободный член отсутствует, потому что

$$a_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b u'(x)\, dx = \frac{1}{b-a} [u(b) - u(a)] = 0.$$

Интегрируя почленно, получим

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi (x-a)}{b-a}, \qquad b_k = \frac{a_k (b-a)}{k\pi}.$$

В качестве u_n достаточно взять частную сумму последнего ряда.

Обобщенное решение $u_0(x)$ задачи (1)—(2) существует и единственно; это — функция, реализующая минимум функционала энергии

$$F(u) = |u|^2 - 2(u, f)$$

в энергетическом пространстве. Как показывает формула (7), в нашем случае

$$F(u)=\int_a^b [p(x)u'^2+q(x)u^2-2f(x)u]\,dx; \tag{9}$$

будучи элементом энергетического пространства, функция $u(x)$ должна удовлетворять условиям (2).

Функция $u_0 \in D(\operatorname{grad} F)$. Вариация функционала (9) в точке u_0 имеет вид

$$\delta F(u_0, \eta)=$$
$$=2\int_a^b [p(x)u_0'(x)\eta'(x)+q(x)u_0(x)\eta(x)-f(x)\eta(x)]\,dx,\ \eta \in H_A.$$

Она будет ограниченным в $L_2(a, b)$ функционалом от η тогда и только тогда, когда этим свойством будет обладать интеграл

$$\int_a^b p(x)u_0'(x)\eta'(x)\,dx;$$

так же как и в простейшей вариационной задаче, доказывается, что для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $p(x)\dfrac{du_0}{dx}$ была абсолютно непрерывна и имела суммируемую с квадратом производную на сегменте $[a, b]$. Но функция $p(x)$ строго положительна и непрерывно дифференцируема, и последнее требование равносильно такому: $u_0'(x)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[a, b]$, а $u_0'' \in L_2(a, b)$.

Мы выяснили, между прочим, что если через $\tilde{A}$ обозначить расширение по Фридрихсу оператора A нашей задачи (формулы (3) и (2)), то область определения $D(\tilde{A})$ этого расширения состоит из функций, обладающих следующими свойствами: сами функции и их первые производные на сегменте $[a, b]$ абсолютно непрерывны, а вторые производные суммируемы с квадратом; на концах сегмента эти функции обращаются в нуль.

§ 9. Более общая задача о минимуме квадратичного функционала

1. В § 4 была поставлена вариационная задача для квадратичного функционала вида

$$F(u)=(Au, u)-2(u, f).$$

Важной его особенностью является то, что его линейная часть

$2(u, f)$ ограничена в исходном пространстве; в § 5 мы использовали эту особенность при доказательстве существования обобщенного решения вариационной задачи.

Здесь мы рассмотрим задачу о минимуме квадратичного функционала более общего вида

$$F(u) = (Au, u) - 2l(u), \tag{1}$$

где A — положительно определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, а l — линейный (но не обязательно ограниченный) функционал в том же пространстве; множитель 2 введен для удобства.

Введя энергетическое пространство H_A оператора A, можно записать функционал (1) в виде

$$F(u) = |u|^2 - 2l(u) \tag{2}$$

и рассматривать его как функционал, заданный на элементах (некоторых или всех) энергетического пространства. Интерес представляет тот случай, когда $D(l)$ — область определения функционала l — плотна в H_A; очевидно, $D(F) = D(l)$.

Могут представиться две возможности.

1. Функционал l не ограничен в энергетическом пространстве. В этом случае функционал F не ограничен снизу. Действительно, в этом случае существует последовательность $\{u_n\}$ со свойствами

$$|u_n| = 1, \qquad |l(u_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Изменив в случае надобности знаки у элементов u_n, можно добиться того, что $l(u_n) \to +\infty$. А тогда

$$F(u_n) = 1 - 2l(u_n) \to -\infty.$$

Задача о минимуме функционала (2) в этом случае лишена смысла.

2. Функционал l ограничен в энергетическом пространстве. Тогда он может быть расширен по непрерывности на все это пространство; тем самым на все пространство H_A будет расширен и функционал (2). По теореме Риса существует один и только один элемент $u_0 \in H_A$, удовлетворяющий тождеству $l(u) = [u, u_0]$. Теперь

$$F(u) = |u|^2 - 2[u, u_0].$$

Повторив без изменений рассуждения § 5, мы убедимся, что элемент u_0 реализует минимум функционала (2).

Если пространство H_A сепарабельно, то легко вывести формулу, аналогичную формуле (5.11) и дающую решение задачи о минимуме функционала (2). Пусть ω_n, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность, полная и ортонормированная в энергетическом пространстве, тогда

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n] \omega_n.$$

В отмеченной выше формуле $l(u) = [u, u_0]$ положим $u = \omega_n$. Тогда $[u_0, \omega_n] = [\omega_n, u_0] = l(\omega_n)$ и, следовательно,

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} l(\omega_n) \omega_n. \tag{3}$$

2. Пусть A — оператор, рассмотренный в предыдущем параграфе (формулы (3) и (2) § 8); мы сохраняем введенные в этом параграфе предположения о коэффициентах $p(x)$ и $q(x)$ и о функциях, образующих область определения оператора A. Поставим задачу о минимуме квадратичного функционала

$$F(u) = \|u\|^2 - 2u(c) = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2\right]dx - 2u(c), \quad a < c < b, \tag{4}$$

в энергетическом пространстве оператора A. В частности, это означает, что функция u, от которой зависит функционал (4), должна удовлетворять краевым условиям

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что линейный функционал $l(u) = u(c)$ ограничен в энергетической метрике. Действительно, по неравенству Буняковского

$$|u(c)|^2 = \left|\int_a^c u'(x)\,dx\right|^2 \leqslant (c-a)\int_a^c u'^2 x(dx) \leqslant (c-a)\int_a^b u'^2(x)dx.$$

По формуле (8.7)

$$\|u\|^2 = \int_a^b [p(x)u'^2(x) + q(x)u^2(x)]\,dx \geqslant p_0 \int_a^b u'^2(x)\,dx,$$

поэтому

$$|u(c)| \leqslant \sqrt{\frac{c-a}{p_0}}\,\|u\|. \tag{6}$$

Формула (6) показывает, что в данном случае функционал l ограничен, причем $\|l\| \leqslant \sqrt{\frac{c-a}{p_0}}$. Решение нашей вариационной задачи существует; по формуле (3) оно может быть представлено рядом

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(c)\,\omega_n(x), \tag{7}$$

где $\{\omega_n\}$ — система, полная и ортогональная в H_A. Ряд (8) сходится в метрике пространства H_A, а следовательно, и в метрике $L_2(a, b)$.

Пример. Рассмотрим частный случай $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, так что $Au = -\frac{d^2u}{dx^2}$. В этом случае систему, полную и ортонормированную в энергетическом пространстве, образуют функции

$$\omega_n(x) = \frac{\sqrt{2(b-a)}}{n\pi} \sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

доказать это мы предоставляем читателю. Минимум функционала

$$\int_a^b u'^2\,dx - 2u(c), \qquad u(a) = u(b) = 0 \tag{8}$$

реализует функция

$$u_0(x) = \frac{2(b-a)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi(c-a)}{b-a} \sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}.$$

Последний ряд легко просуммировать, если, например, составить и решить уравнение Эйлера для функционала (8); это мы также предоставляем сделать читателю.

§ 10. Случай только положительного оператора

Положительный, но не положительно определенный оператор будем называть *только положительным*. Для только положительного оператора можно построить энергетическое пространство так же, как это делалось для оператора положительно определенного. При этом возникает, однако, одно существенное различие: можно доказать, что среди идеальных элементов энергетического пространства обязательно будут такие, которые не принадлежат исходному гильбертову пространству.

Рассмотрим, например, оператор B, исследованный в § 2. Напомним, что он определяется формулой

$$Bu = -\frac{d^2u}{dx^2}, \qquad 0 \leqslant x < \infty,$$

и что область его определения состоит из функций класса $C^{(2)}[0, \infty)$, которые обращаются в нуль при $x=0$ и при $x \geqslant a_u$, где a_u — постоянная, своя для каждой функции $u \in D(B)$. Нетрудно доказать, что энергетическое пространство H_B состоит из функций со следующими свойствами: 1) на сегменте $[0, a]$, где a — любое положительное число, функция $u \in H_B$ абсолютно непрерывна; 2) $u(0)=0$; 3) $u' \in L_2(0, \infty)$. Так, функция $u(x) = \ln(1+x)$ принадлежит пространству H_B, но не принадлежит исходному пространству $L_2(0, \infty)$.

Для только положительного оператора остается в силе теорема 5.6.1: энергетическое пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельно исходное пространство.

Если A — только положительный оператор, а l — линейный функционал, то задача о минимуме функционала

$$F(u) = (Au, u) - 2l(u), \quad u \in D(A),$$

решается в точности так же, как в предшествующем параграфе: так как $(Au, u) = |u|^2$, мы запишем функционал F в виде

$$F(u) = |u|^2 - 2l(u).$$

Если l не ограничен в H_A, то наша вариационная задача не имеет смысла, если же l в H_A ограничен и определен на множестве, плотном в H_A, то $l(u) = [u, u_0]$, где $u_0 \in H_A$ существует и определяется единственным образом; этот элемент и реализует минимум F в энергетическом пространстве.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Оператор T_p задан формулой

$$T_p u = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right], \quad 0 < x \leqslant 1,$$

где $p(x) \in C^{(1)}[0, 1]$; $p(0) = 0$, $p(x) > 0$, $x > 0$ и интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{p(x)}$$

сходится. Область $D(T_p)$ состоит из функций $u(x)$, подчиненных следующим требованиям: а) $u(x)$ и $p(x)\,u'(x)$ непрерывны на сегменте $[0, 1]$ и абсолютно непрерывны на любом сегменте $[\delta, 1]$, $0 < \delta < 1$; б) $T_p u \in L_2(0, 1)$; в) $u(0) = u(1) = 0$. Доказать, что оператор T_p положительно определенный в пространстве $L_2(0, 1)$.

2. Пусть $p(x) \in C^{(1)}[0, 1]$; $p(0) = 0$, $p(x) > 0$, $x > 0$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{p(x)} = \infty, \qquad \int_0^1 \frac{x\,dx}{p(x)} < \infty.$$

Оператор T_p определим той же формулой, что и в упражнении 1; за область $D(T_p)$ примем множество функций $u(x)$, удовлетворяющих тем же условиям, что и в упражнении 1, кроме условия $u(0) = 0$. Доказать, что оператор T_p положительно определенный в пространстве $L_2(0, 1)$.

3. Описать множество элементов энергетического пространства в упражнениях 1 и 2.

4. Доказать положительную определенность оператора

$$T_{x^2} u = -\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{du}{dx}\right), \quad 0 < x \leqslant 1,$$

определенного на множестве функций из упражнения 2 при $p(x) = x^2$. Доказать, что нижняя грань оператора равна $1/4$.

5. Доказать, что при $\alpha > 2$ оператор T_{x^α} только положителен.

ГЛАВА 6

СОБСТВЕННЫЙ СПЕКТР ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОГО ОПЕРАТОРА

§ 1. Понятие о собственном спектре оператора

Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Число λ и элемент u называются соответственно *собственным числом* и *собственным элементом* оператора A, если u не есть нулевой элемент пространства H и

$$Au - \lambda u = 0. \tag{1}$$

Заметим, что если H есть, например, пространство L_2, то требование $u \neq 0$ равносильно тому, что $u(x) \not\equiv 0$.

О собственном элементе u говорят, что он *соответствует* собственному числу λ. Из уравнения (1) вытекает формула, позволяющая найти собственное число, если известен соответствующий собственный элемент. Именно, умножив скалярно обе части уравнения (1) на u, получим

$$(Au,\ u) - \lambda \| u \|^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{(Au,\ u)}{\| u \|^2}. \tag{2}$$

В комплексном пространстве собственные числа, естественно, могут быть как вещественными, так и комплексными. В вещественном пространстве определено умножение элементов только на вещественные числа; в соответствии с этим определением в вещественном пространстве следовало бы рассматривать только вещественные собственные числа. Но уже простейшие примеры показывают, что это было бы нецелесообразно. Так, вещественная квадратная матрица порядка m

порождает линейный оператор в m-мерном евклидовом пространстве; собственные числа этого оператора совпадают с собственными числами его матрицы, которые, как хорошо известно, могут быть и комплексными. Поэтому мы несколько расширим определение собственных чисел так, чтобы они могли быть и комплексными.

Исходя из заданного вещественного гильбертова пространства H, построим комплексное гильбертово пространство H^*. Для этого поступим так: за множество элементов нового пространства H^* примем множество всевозможных формальных сумм вида $U = u' + iu''$, где $i = \sqrt{-1}$, а u', $u'' \in H$. На новом множестве введем обычным способом сложение и умножение на комплексные числа; эти два действия не выводят из множества H^*, которое теперь можно считать линейным. Нулевым элементом в нем является элемент $0 + i0$, где 0 означает нулевой элемент пространства H; вместо $0 + i0$ будем писать просто 0; вообще вместо $u + i0$ и $0 + iv$ будем писать u и iv. В H^* введем скалярное умножение по следующему правилу: если $U = u' + iu''$, $V = v' + iv''$, где u', u'', v', v'' $\in H$, то

$$(U, V)^* = (u', v') + (u'', v'') + i[(u'', v') - (u', v'')]. \tag{3}$$

Легко видеть, что при таком определении удовлетворены все аксиомы скалярного умножения в комплексном пространстве, именно:

А. $(U, V)^* = \overline{(V, U)^*}$.

Б. $(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2, V)^* = \alpha_1 (U_1, V)^* + \alpha_2 (U_2, V)^*$.

В. $(U, U)^* \geqslant 0$; при этом $(U, U)^* = 0$ тогда и только тогда, когда $U = 0$.

Оператор A распространим на элементы вида $U = u' + iu''$, где u', $u'' \in D(A) \subset H$, по формуле

$$AU = Au' + iAu''. \tag{4}$$

При таком новом определении может оказаться, что оператор A, который первоначально был определен в вещественном пространстве H, имеет в H^* комплексные собственные числа $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ и соответствующие собственные элементы $u' + iu''$; равенство

$$A(u' + iu'') = (\lambda' + i\lambda'')(u' + iu'')$$

равносильно системе равенств

$$\begin{aligned} Au' &= \lambda' u' - \lambda'' u'', \\ Au'' &= \lambda'' u' + \lambda' u''. \end{aligned} \tag{5}$$

Одному и тому же собственному числу может соответствовать несколько собственных элементов; если $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — такие элементы, то любая отличная от нулевого элемента линейная комбинация

$$\sum_{k=1}^{n} c_k u_k$$

также есть собственный элемент, соответствующий тому же собственному числу. Сказанное позволяет рассматривать только линейно независимые собственные элементы, соответствующие данному собственному числу, каждый же собственный элемент можно считать нормированным.

Число линейно независимых собственных элементов называется *кратностью* (иногда *рангом*) соответствующего собственного числа. В сепарабельном пространстве кратность любого собственного числа — конечная или счетная.

Совокупность собственных чисел оператора называется его *собственным спектром.*

§ 2. Собственные числа и собственные элементы симметричного оператора

Теорема 6.2.1. *Собственные числа симметричного оператора вещественны.*

Скалярно умножим первое из равенств (1.5) на u'', второе — на u' и из второго вычтем первое:

$$(Au'', u') - (Au', u'') = \lambda''(\|u'\|^2 + \|u''\|^2); \tag{1}$$

в силу симметричности оператора A это равно нулю. Собственный элемент $u' + iu'' \neq 0$. Тогда либо u', либо u'' отлично от нуля и скобка в (1) положительна. Отсюда следует, что $\lambda'' = 0$ и собственные числа вещественны. Система (1.5) принимает вид

$$Au' = \lambda' u', \qquad Au'' = \lambda' u'',$$

и каждый из отличных от нуля элементов u', u'' есть собственный элемент, соответствующий собственному числу λ', Теорема 6.2.2. *Собственные элементы симметричного оператора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.*

Пусть λ_1 и λ_2 — собственные числа симметричного оператора A и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть собственному числу λ_1 соответствует собственный элемент u_1, а собственному числу λ_2 — собственный элемент u_2.

Напишем тождества

$$Au_1 = \lambda_1 u_1, \qquad Au_2 = \lambda_2 u_2.$$

Первое тождество умножим скалярно на u_2, второе — на u_1 и вычтем второе из первого:

$$(Au_1,\ u_2) - (Au_2,\ u_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)(u_1,\ u_2).$$

Так как A — симметричный оператор, то левая часть равна нулю и, следовательно,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1,\ u_2) = 0.$$

Но $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Отсюда

$$(u_1,\ u_2) = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие 6.2.1. *В сепарабельном гильбертовом пространстве симметричный оператор имеет не более чем счетное множество собственных чисел.*

Если одному собственному числу соответствует несколько линейно независимых элементов, то их можно подвергнуть процессу ортогонализации. Собственные элементы можно также и нормировать, и мы приходим к следующему важному выводу: *всегда можно считать, что собственные элементы симметричного оператора образуют ортонормированную систему.*

§ 3. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора

Всякий положительно определенный оператор симметричен, поэтому все сказанное в предшествующем параграфе справедливо и для положительно определенных операторов. Но для этих операторов оказывается целесообразным ввести еще понятие обобщенного собственного спектра — более определенно, обобщенных собственных чисел и соответствующих им обобщенных собственных элементов; мы введем его по аналогии с понятием обобщенного решения.

Пусть A — положительно определенный оператор, λ — его собственное число и u — собственный элемент, соответствующий собственному числу λ. Это значит, что $u \neq 0$, $u \in D(A)$ и имеет место тождество

$$Au = \lambda u. \tag{1}$$

Возьмем произвольный элемент $\eta \in H_A$. Умножим обе части равенства (1) скалярно на η:

$$(Au, \eta) = \lambda (u, \eta).$$

В этом тождестве $u \in D(A)$, $\eta \in H_A$. А тогда по формуле (3.6) гл. 5

$$(Au, \eta) = [u, \eta]_A.$$

Мы нашли, таким образом, что собственное число λ и соответствующий собственный элемент u удовлетворяют тождеству

$$[u, \eta]_A = \lambda (u, \eta), \qquad \forall \eta \in H_A. \tag{2}$$

Обратно, пусть $u \in D(A)$, $u \neq 0$, вместе с некоторым числом λ удовлетворяет тождеству (2). По формуле (3.6) гл. 5

$$[u, \eta]_A = (Au, \eta).$$

Подставив это в тождество (2), получим

$$(Au - \lambda u, \eta) = 0, \qquad \forall \eta \in H_A.$$

Итак, вполне определенный элемент $Au - \lambda u$ пространства H ортогонален любому элементу $\eta \in H_A$, но множество элементов пространства H_A плотно в исходном пространстве H, а элемент, ортогональный к плотному множеству, равен нулю. Отсюда следует, что

$$Au - \lambda u = 0.$$

Последнее равенство означает, что u есть собственный элемент, а λ — собственное число оператора A.

Элемент $u \in H_A$, $u \neq 0$ и число λ назовем *обобщенным собственным элементом* и *обобщенным собственным числом оператора* A, если они удовлетворяют тождеству (2).

Теорема 6.3.1. *Обобщенные собственные числа и собственные элементы положительно определенного оператора суть обычные собственные числа и собственные элементы для расширения этого оператора по Фридрихсу.*

Доказательство очень просто. Если λ и u суть обобщенные собственное число и собственный элемент положительно определенного оператора A, то они удовлетворяют тождеству (2). Положив в его правой части $\lambda u = f$, приведем его к виду

$$[\eta, u]_A = (\eta, f), \quad \forall \eta \in H_A. \tag{3}$$

Сравнив равенство (3) с равенством (5.5) гл. 5, видим, что они отличаются только обозначениями; отсюда следует, что элемент u, входящий в формулу (3), реализует минимум функционала

$$F(v) = \| v \|^2 - 2(f, v), \quad \forall v \in H_A.$$

Но тогда $u \in D(\tilde{A})$, где $\tilde{A}$ — расширение оператора A по Фридрихсу, и $\tilde{A}u = f$, или

$$\tilde{A}u = \lambda u,$$

что и требовалось доказать.

Оператор $\tilde{A}$ симметричен, поэтому для обобщенных собственных чисел и собственных элементов верны теоремы 6.2.1 и 6.2.2. Отметим еще два свойства обобщенных собственных чисел и собственных элементов положительно определенного оператора; слово «обобщенные» ниже для краткости будем опускать.

Теорема 6.3.2. *Собственные элементы положительно определенного оператора ортогональны в энергетическом пространстве, если они ортогональны в исходном пространстве.*

Пусть u_1, u_2 — два собственных элемента положительно определенного оператора A и пусть $(u_1, u_2) = 0$. Полагая в тождестве (2) $u = u_1$, $\eta = u_2$, найдем, что $[u_1, u_2]_A = 0$.

Теорема 6.3.3. *Любое собственное число положительно определенного оператора не меньше нижней грани этого оператора.*

Пусть γ_0^2 — нижняя грань оператора A. По теореме 5.7.1 нижняя грань оператора $\tilde{A}$, полученного расширением оператора A по Фридрихсу, также равна γ_0^2. Если λ и u —

собственное число и соответствующий ему собственный элемент (оба — обобщенные) оператора A, то по формуле (1.2) и теореме 6.3.1

$$\lambda = \frac{(\tilde{A}u, u)}{\|u\|^2} \geqslant \gamma_0^2. \tag{4}$$

Заметим еще, что формуле (1.2) в нашем случае можно придать вид

$$\lambda = \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2}. \tag{5}$$

Правая часть не изменится, если u умножить на отличную от нуля постоянную. Выберем эту постоянную так, чтобы собственный элемент u был нормирован в метрике исходного пространства: $\|u\| = 1$. Тогда для собственного числа получается формула, в некоторых отношениях более удобная:

$$\lambda = |u|_A^2, \quad \|u\|^2 = 1. \tag{6}$$

§ 4. Вариационная формулировка задачи о собственном спектре

Начнем со следующего замечания: если γ_0^2 — нижняя грань положительно определенного оператора A, то

$$\inf_{\substack{u \in H_A \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} = \gamma_0^2. \tag{1}$$

Докажем это. Так как $D(A) \subset H_A$, то

$$\inf_{\substack{u \in H_A \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} \leqslant \inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} = \inf_{\substack{u \in D(A) \\ u \neq 0}} \frac{(Au, u)}{\|u\|^2} = \gamma_0^2.$$

С другой стороны, $D(A)$ плотно в H_A; если $u \in H_A$, то можно подобрать элемент $v \in D(A)$ так, чтобы $|v - u|_A < \varepsilon$ и $\|v - u\| < \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое число. Но тогда $\big||v|_A - |u|_A\big| < \varepsilon$, $\big|\|v\| - \|u\|\big| < \varepsilon$; если бы оказалось, что для некоторого элемента $u \in H_A$

$$\frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} < \gamma_0^2,$$

то при достаточно малом ε было бы также

$$\frac{|v|_A^2}{\|v\|^2}=\frac{(Av,\ v)}{\|v\|^2}<\gamma_0^2,$$

что противоречит определению нижней грани.

Теорема 6.4.1. *Если существует элемент u_1, на котором нижняя грань отношения* (1) *достигается, то γ_0^2 есть наименьшее обобщенное собственное число, а u_1 — соответствующий собственный элемент оператора A.*

При умножении элемента u на постоянную отношение

$$\Psi(u)=\frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} \tag{2}$$

не меняется, поэтому элемент u можно считать нормированным. Тогда

$$\Psi(u)=|u|_A^2, \qquad \|u\|=1. \tag{3}$$

Обозначим еще $\gamma_0^2=\lambda_1$.

То, что нижняя грань достигается на элементе u_1, означает, что

$$u_1\in H_A, \qquad \|u_1\|^2=1, \qquad |u_1|^2=\lambda_1.$$

Возьмем произвольное $\eta\in H_A$ и произвольное вещественное α и составим отношение

$$\frac{|u_1+\alpha\eta|^2}{\|u_1+\alpha\eta\|^2}. \tag{4}$$

Если зафиксировать η, то отношение (4) есть функция от α, которая достигает минимума при $\alpha=0$. Но тогда ее производная по α должна обратиться в нуль при $\alpha=0$

$$\frac{d}{d\alpha}\left.\frac{[u_1,\ u_1]+2\alpha[u_1,\ \eta]+\alpha^2[\eta,\ \eta]}{(u_1,\ u_1)+2\alpha(u_1,\ \eta)+\alpha^2(\eta,\ \eta)}\right|_{\alpha=0}=0.$$

Выполнив дифференцирование, получим

$$2(u_1,\ u_1)[u_1,\ \eta]-2(u_1,\ \eta)[u_1,\ u_1]=0. \tag{5}$$

Заметим, что

$$(u_1,\ u_1)=\|u_1\|^2=1, \qquad [u_1,\ u_1]=|u_1|^2=\lambda_1.$$

Подставив это в выражение (5), найдем

$$[u_1,\ \eta]-\lambda_1(u_1,\ \eta)=0.$$

Последнее равенство показывает, что λ_1 и u_1 суть соответственно собственное число и собственный элемент оператора A. То, что λ_1 — наименьшее собственное число, вытекает из теоремы 6.3.3.

Допустим, что мы уже нашли наименьшее собственное число λ_1 и соответствующий элемент u_1 оператора A. Как найти следующее собственное число λ_2 и собственный элемент u_2? Очевидно, что надо искать λ_2 среди значений отношения (2) на функциях, ортогональных к u_1 в метриках обоих пространств H и H_A.

Обозначим через $H^{(1)}$ подпространство пространства H, ортогональное к элементу u_1, а через $H_A^{(1)}$ — подпространство пространства H_A, ортогональное к u_1 уже в смысле новой метрики:

$$[u, u_1] = 0, \quad u \in H_A^{(1)}.$$

Докажем, что

$$H_A^{(1)} = H_A \cap H^{(1)}.$$

Пусть $u \in H_A^{(1)}$. Запишем тождество, определяющее первый собственный элемент:

$$[u_1, \eta] = \lambda_1 (u_1, \eta).$$

Положив в нем $\eta = u$, получим $(u_1, u) = \frac{1}{\lambda_1}[u_1, u] = 0$. Это означает, что $u \in H^{(1)}$ и, следовательно, $u \in H_A \cap H^{(1)}$.

Обратно, пусть $u \in H_A \cap H^{(1)}$; это означает, что $u \in H_A$ и $(u, u_1) = 0$. Совершенно аналогично приходим к равенству

$$[u_1, u] = \lambda_1 (u_1, u) = 0,$$

откуда следует, что $u \in H_A^{(1)}$.

Если нам известны попарно ортогональные собственные элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$, то можно ввести подпространства $H^{(n)}$ и $H_A^{(n)}$ пространств H и H_A, соответственно ортогональные (каждое в своей метрике) к $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Аналогично доказывается, что $H_A^{(n)} = H_A \cap H^{(n)}$.

Теорема 6.4.2. *Допустим, что для положительно определенного оператора A нам известны n первых собственных чисел*

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$$

и соответствующие им собственные элементы

$$u_1, u_2, \ldots, u_n,$$

которые мы предполагаем попарно ортогональными. Пусть λ_{n+1} *есть точная нижняя грань* $\|u\|^2$ *на нормированных элементах* $u \in H_A^{(n)}$. *Если она достигается, то* λ_{n+1} — *собственное число оператора* A, *непосредственно следующее за* λ_n, *а элемент, на котором эта нижняя грань достигается, есть собственный элемент, соответствующий собственному числу* λ_{n+1}.

Рассуждая, как при доказательстве предшествующей теоремы, мы придем к тождеству

$$[u_{n+1}, \zeta] - \lambda_{n+1}(u_{n+1}, \zeta) = 0, \qquad \forall \zeta \in H_A^{(n)}. \tag{6}$$

Пусть η — произвольный элемент пространства H_A. Положим

$$\zeta = \eta - \sum_{k=1}^{n} (\eta, u_k) u_k. \tag{7}$$

Тогда $\zeta \in H^{(n)}$ и, следовательно, $\zeta \in H_A^{(n)}$; для построенного нами элемента ζ тождество (6) верно. Подставив выражение (7) в это тождество и учитывая, что $[u_{n+1}, u_k] = (u_{n+1}, u_k) = 0$, найдем

$$[u_{n+1}, \eta] - \lambda_{n+1}(u_{n+1}, \eta) = 0, \qquad \forall \eta \in H_A.$$

Теорема доказана.

§ 5. Теорема о наименьшем собственном числе

Теорема 6.4.1 носит в известной мере условный характер: утверждается, что $\lambda_1 = \gamma_0^2$ — нижняя грань функционала (4.3)

$$\Psi(u) = \|u\|_A^2, \qquad \|u\| = 1, \tag{1}$$

есть наименьшее собственное число оператора A, если указанная нижняя грань достигается. В настоящем параграфе для этого будет установлено некоторое достаточное условие.

Теорема 6.5.1. *Пусть* $\{w_n\}$ — *минимизирующая последовательность для функционала* (1). *Если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в метрике исходного пространства* H, *то* $\lambda_1 = \inf \Psi(u)$ *есть наименьшее собственное число данного оператора, а предел выделенной подпоследовательности есть соответствующий собственный элемент.*

По условию теоремы из последовательности $\{w_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{w_{n_k}\}$. Для краткости обозначим $w_{n_k} = \varphi_k$. Нетрудно видеть, что подпоследовательность $\{\varphi_k\}$ тоже будет минимизирующей. Поэтому будем считать, что нам дана минимизирующая последовательность $\{\varphi_k\}$, сходящаяся в H. Элементы φ_k обладают следующими свойствами: 1) $\varphi_k \in H_A$; 2) $\|\varphi_k\| = 1$; 3) $\lim |\varphi_k|_A^2 = \lambda_1$; 4) существует такой элемент $u_1 \in H$, что $\|\varphi_k - u_1\| \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Заметим, что

$$\|\varphi_k - \varphi_m\| \underset{k,\, m\to\infty}{\to} 0. \tag{2}$$

Наша цель — доказать, что $u_1 \in H_A$ и что $|u_1|_A^2 = \lambda_1$.

Возьмем произвольный элемент $\eta_k \in H_A$, и пусть t — произвольное вещественное число. Элемент $\varphi_k + t\eta_k$ принадлежит пространству H_A и, вообще говоря, отличен от нуля. Подставив его в отношение (4.2), получим

$$\frac{|\varphi_k + t\eta_k|_A^2}{\|\varphi_k + t\eta_k\|^2} \geqslant \inf \frac{|u|_A^2}{\|u\|^2} = \lambda_1.$$

Освобождаясь от знаменателя, найдем

$$[\varphi_k + t\eta_k, \varphi_k + t\eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k + t\eta_k, \varphi_k + t\eta_k) \geqslant 0,$$

откуда

$$t^2\{|\eta_k|_A^2 - \lambda_1\|\eta_k\|^2\} + 2t\{[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)\} + \\ + |\varphi_k|_A^2 - \lambda_1\|\varphi_k\|^2 \geqslant 0.$$

Квадратный трехчлен слева неотрицателен при любых вещественных t, поэтому его дискриминант неположителен и

$$|[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)| \leqslant \sqrt{|\eta_k|_A^2 - \lambda_1\|\eta_k\|^2}\,\sqrt{|\varphi_k|_A^2 - \lambda_1};$$

мы учли здесь, что $\|\varphi_k\| = 1$.

Усилим последнее неравенство, отбросив вычитаемое под первым радикалом

$$|[\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1(\varphi_k, \eta_k)| \leqslant |\eta_k|_A \sqrt{|\varphi_k|_A^2 - \lambda_1}. \tag{3}$$

Элементы $\eta_k \in H_A$ произвольны. Потребуем, чтобы они были ограничены в совокупности, т. е. чтобы для любого k было

$$\| \eta_k \|_A \leqslant C, \qquad C = \text{const}. \tag{4}$$

Тогда из неравенства (3) следует

$$| [\varphi_k, \eta_k]_A - \lambda_1 (\varphi_k, \eta_k) | \leqslant C \sqrt{\| \varphi_k \|_A^2 - \lambda_1}. \tag{5}$$

В неравенстве (5) правая часть стремится к нулю, а следовательно, стремится к нулю и левая часть, причем это стремление равномерно относительно выбора элементов η_k, удовлетворяющих неравенству (4). Имея это в виду, положим

$$\eta_k = \varphi_k - \varphi_m,$$

где номер m произволен. Такой выбор η_k допустим по следующим соображениям: числовая последовательность $\| \varphi_n \|_A$ стремится к пределу и потому ограничена: существует такая постоянная C, что $\| \varphi_n \|_A \leqslant C$, а тогда $\| \eta_k \|_A \leqslant 2C$.

Теперь из неравенства (5) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \{ [\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m]_A - \lambda_1 (\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m) \} = 0,$$

причем стремление к нулю равномерно относительно m. Если так, то можно устремить $m \to \infty$, и тогда

$$\lim_{k, m \to \infty} \{ [\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m]_A - \lambda_1 (\varphi_k, \varphi_k - \varphi_m) \} = 0. \tag{6}$$

Номера k и m здесь равноправны; поменяем их местами

$$\lim_{k, m \to \infty} \{ [\varphi_m, \varphi_m - \varphi_k]_A - \lambda_1 (\varphi_m, \varphi_m - \varphi_k) \} = 0. \tag{7}$$

Сложив неравенства (6) и (7), получим

$$\lim_{k, m \to \infty} \{ \| \varphi_k - \varphi_m \|_A^2 - \lambda_1 \| \varphi_k - \varphi_m \|^2 \} = 0,$$

и в силу соотношения (2)

$$\| \varphi_k - \varphi_m \|_A^2 \underset{k, m \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{8}$$

Итак, минимизирующая последовательность сходится в себе в пространстве H_A. Но это пространство полное, следовательно, последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится в H_A, причем к тому же элементу, к которому она сходится и в H. Таким образом, $u_1 \in H_A$ и

$$|\varphi_k - u_1|_A \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Но тогда

$$|u_1|_A^2 = \lim_{k\to\infty} |\varphi_k|_A^2 = \lambda_1;$$

при этом

$$\|u_1\| = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\| = 1.$$

Итак, существует элемент $u_1 \in H_A$ такой, что $\|u_1\| = 1$ и $|u_1|_A = \lambda_1$. Это означает, что нижняя грань функционала (1) достигается. По теореме 6.4.1 эта нижняя грань λ_1 есть наименьшее собственное число, а u_1 — соответствующий ему собственный элемент оператора A.

§ 6. Теорема о дискретности спектра

Формулировке и доказательству основной теоремы настоящего параграфа предпошлем следующее замечание.

Допустим, что мы построили первые n собственных чисел

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$$

и соответствующие им ортонормированные в метрике пространства H собственные элементы оператора A

$$u_1, u_2, \ldots, u_n.$$

Рассмотрим функционал [1]

$$\Psi_n(u) = |u|_A^2, \qquad u \in H_A^{(n)}, \qquad \|u\| = 1. \tag{1}$$

Он отличен от функционала (5.1), так как он определен на более узком множестве. Обозначим

$$\lambda_{n+1} = \inf \Psi_n(u) = \inf |u|_A^2,$$

где $u \in H_A^{(n)}$, $\|u\| = 1$.

Построим для функционала (1) минимизирующую последовательность. Если из нее можно выделить подпоследова-

[1] Определение подпространства $H_A^{(n)}$ было дано в § 4.

тельность, сходящуюся в метрике пространства H, то λ_{n+1} есть $(n+1)$-е собственное число, а предел выделенной последовательности есть $(n+1)$-й собственный элемент оператора A.

Доказательство этого утверждения проводится без изменений по сравнению с доказательством теоремы 6.5.1.

Определение. Будем говорить, что симметричный оператор A имеет *дискретный спектр*, если

1) оператор A имеет бесконечную последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ собственных чисел с единственной предельной точкой на бесконечности;

2) последовательность $\{u_n\}$ собственных элементов полна в пространстве H.

Существование единственной предельной точки на бесконечности означает, что собственные числа можно расположить в порядке возрастания их абсолютных величин

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots$$

и при этом $|\lambda| \to \infty$. Если положительно определенный оператор имеет дискретный спектр, то его собственные числа можно расположить просто в порядке их возрастания

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots, \quad \lambda_n \to \infty.$$

Теорема 6.6.1. *Пусть положительно определенный оператор таков, что любое множество, ограниченное в энергетической метрике, компактно в метрике исходного пространства. Тогда обобщенный спектр этого оператора дискретен.*

Доказательство.

1. Рассмотрим число

$$\lambda_1 = \inf |u|^2, \quad u \in H_A, \quad \|u\| = 1.$$

Построим минимизирующую последовательность $\{\omega_k\}$. Это значит, что

$$\text{а) } \omega_k \in H_A; \quad \text{б) } \|\omega_k\| = 1; \quad \text{в) } \lim_{k\to\infty} |\omega_k| = \lambda_1.$$

Числовая последовательность, имеющая предел, ограничена, поэтому существует такая постоянная C, что $|\omega_k| \leqslant C$. Если так, то минимизирующая последовательность ограничена в метрике H_A. По условию теоремы эта последовательность компактна в старой метрике, а тогда в силу теоремы 6.5.1

λ_1 есть наименьшее собственное число оператора; соответствующий собственный элемент обозначим через u_1.

2. Допустим, что мы уже построили первые n собственных чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

и соответствующие им собственные элементы

$$u_1, u_2, \ldots, u_n.$$

Обозначим $\lambda_{n+1} = \inf |u|^2, u \in H_A^{(n)}, \|u\| = 1$ и построим минимизирующую последовательность $\left\{\omega_k^{(n)}\right\} (k = 1, 2, \ldots)$. Тогда $\left|\omega_k^{(n)}\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_{n+1}$, следовательно, существует постоянная C такая, что

$$\left|\omega_k^{(n)}\right| \leqslant C.$$

Последовательность $\left\{\omega_k^{(n)}\right\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ компактна в старой метрике, а тогда по замечанию, сделанному в начале этого параграфа, λ_{n+1} есть $(n+1)$-е собственное число оператора A и существует соответствующий этому числу собственный элемент u_{n+1}.

Процесс оборвется, если условия $\|u\| = 1$ и $u \in H_A^{(n)}$ станут противоречить друг другу. Это может случиться, когда пространство $H_A^{(n)}$ состоит из одного нуля, а последнее может быть, когда H_A есть конечномерное пространство. Но H_A плотно в H и будет конечномерным тогда и только тогда, когда само пространство H конечномерно. Этот случай мы из рассмотрения исключаем и будем предполагать, что пространство H, а с ним и H_A бесконечномерно. В таком случае процесс не оборвется и мы получим бесконечную последовательность собственных чисел

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots \tag{2}$$

и последовательность соответствующих им собственных элементов

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, \tag{3}$$

ортогональных в H и в H_A и нормированных в H.

3. Докажем, что собственные числа стремятся к бесконечности. Допустим противное, и пусть последовательность $\{\lambda_n\}$

ограничена

$$\lambda_n \leqslant K = \text{const}.$$

Тогда

$$| u_n | = \sqrt{\lambda_n} \leqslant \sqrt{K};$$

собственные элементы ограничены в H_A, и потому их последовательность компактна в метрике H. Получается, что последовательность, которая в H ортогональна и нормирована, компактна в H, а это, как известно, невозможно.

4. Докажем, что система собственных элементов полна в H_A. Допустим противное. Рассмотрим подпространство $H_A^{(\infty)}$ пространства H_A, ортогональное ко всем собственным элементам $u_n, n = 1, 2, \ldots$. Это подпространство содержит отличные от нуля, а следовательно, и нормированные элементы. Обозначим

$$\lambda_\infty = \inf | u |^2, \quad u \in H_A^{(\infty)}, \quad \| u \| = 1.$$

Повторяя слово в слово приведенные выше рассуждения, найдем, что λ_∞ есть собственное число оператора.

Сравним λ_∞ с λ_n. Это — нижние грани одной и той же величины $\frac{| u |_A^2}{\| u \|^2}$ на различных множествах $H_A^{(\infty)}$ и $H_A^{(n)}$. Первое множество — более узкое, чем второе, и на нем нижняя грань больше (в крайнем случае не меньше), чем на втором. Но тогда $\lambda_\infty \geqslant \lambda_n$, что нелепо, потому что числа λ_n в совокупности не ограничены. Из полученного противоречия вытекает, что последовательность $\{u_n\}$ полна в H_A.

5. Докажем, что последовательность собственных элементов полна в H. Возьмем $u \in H_A$. Система (3) полна в H_A: для любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральное число N и числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ такие, что

$$\left| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right|_A < \varepsilon.$$

А тогда по неравенству (3.3) гл. 5

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Таким образом, любой элемент энергетического пространства можно аппроксимировать линейной комбинацией элементов (3) в старой метрике.

Пусть теперь $u \in H$. Пространство H_A плотно в H, т. е. для любого положительного числа ε существует $u' \in H_A$, такое, что

$$\|u - u'\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Подберем номер N и коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ так, чтобы выполнялось

$$\left\| u' - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А теперь по неравенству треугольника

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \right\| < \varepsilon,$$

что доказывает теорему.

§ 7. Задача Штурма — Лиувилля

Рассмотрим оператор

$$Au = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u \tag{1}$$

на множестве $D(A)$ функций u, непрерывных на сегменте $[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную первую производную и суммируемую с квадратом вторую производную, при краевых условиях

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2}$$

На функции $p(x)$ и $q(x)$ налагаем те же условия, что и в § 8 гл. 5. Напомним эти условия: функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, $p(x) \geqslant p_0$, где p_0 — положительная постоянная; $q(x) \geqslant 0$. Задача состоит в исследовании спектра оператора A.

Докажем, что этот оператор имеет в $L_2(a, b)$ дискретный спектр. Мы знаем, что оператор A положительно определен, и достаточно убедиться в том, что он переводит множество, ограниченное в H_A, в множество, компактное в

$$H = L_2(a, b).$$

По формуле (8.7) гл. 5 имеем

$$\|u\|^2 = \int_a^b [p(x) u'^2 + q(x) u^2]\, dx.$$

Отсюда

$$\|u\|^2 \geqslant p_0 \int_a^b u'^2\, dx. \tag{3}$$

Дальнейшее опирается на следующую теорему, которую мы пока примем без доказательства. Более общая теорема будет доказана ниже, в § 2 гл. 7 (теорема 7.2.2).

Теорема 6.7.1. *Пусть функция $K(x, t)$ определена почти всюду в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$, измерима и ограничена в нем. Тогда интегральный оператор*

$$\int_a^b K(x, t)\, u(t)\, dt \tag{4}$$

переводит всякое множество функций, ограниченное в $L_2(a, b)$, в множество функций, компактное в том же пространстве.

Для функций $u \in H_A$ справедливо тождество

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\, dt. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение ограниченную функцию

$$K(x, t) = \begin{cases} 1, & a \leqslant t \leqslant x, \\ 0, & x < t \leqslant b \end{cases}$$

и перепишем последнее тождество в виде

$$u(x) = \int_a^b K(x, t)\, u'(t)\, dt.$$

Пусть дано множество $\mathfrak{M}$ функций, ограниченное в энергетической метрике

$$\forall u \in \mathfrak{M}, \quad \|u\| \leqslant C = \text{const}, \quad \mathfrak{M} \subset H_A. \tag{6}$$

Тогда из неравенства (6) следует

$$\int_a^b u'^2(t)\,dt \leqslant \frac{C^2}{p_0}, \qquad \|u'\| \leqslant \frac{C}{\sqrt{p_0}}.$$

Таким образом, множество производных u', где $u \in \mathfrak{M}$, ограничено в $L_2(a, b)$. А так как оператор (5) переводит любое множество, ограниченное в $L_2(a, b)$, в множество, компактное в том же пространстве, то $\mathfrak{M}$ компактно в $L_2(a, b)$. По теореме 6.6.1 спектр оператора A дискретен: этот оператор имеет бесконечную последовательность собственных чисел

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots, \quad \lambda_n \to \infty \tag{7}$$

и соответствующие им собственные функции

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots, \tag{7'}$$

относительно которых можно считать, что $\|u\| = 1$ и $(u_k, u_m) = 0$ $(k \neq m)$; система (7′) полна в каждом из пространств L_2 (a, b) и H_A. В энергетической метрике собственные функции по-прежнему ортогональны: $[u_k, u_m] = 0$ $(k \neq m)$, но они там не нормированы, так как $|u_n| = \sqrt{\lambda_n}$.

Напомним, что отыскание спектра оператора A, рассмотренного в настоящем параграфе, равносильно следующей задаче: найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + \lambda u = 0,$$

удовлетворяющие краевым условиям (2).

Можно поставить более общую задачу. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + \lambda r(x)u = 0 \tag{8}$$

с краевыми условиями (2); коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ подчиним прежним условиям и будем еще считать, что $r \in C[a, b]$ и что $r(x) \geqslant r_0 = \text{const} > 0$. Исследование спектра этой задачи подходит под общую схему настоящей главы.

Разделив уравнение (8) на $r(x)$, приведем его к виду

$$\frac{1}{r(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u\right] + \lambda u = 0. \tag{9}$$

Введем пространство $L_2(r; a, b)$ функций, которые на интервале (a, b) квадратично суммируемы с весом $r(x)$ [1]; норма и скалярное произведение в этом пространстве определяются формулами

$$\| u \|^2 = \int_a^b r(x)\, u^2(x)\, dx, \quad (u, v) = \int_a^b r(x)\, u(x)\, v(x)\, dx. \tag{10}$$

В этом пространстве рассмотрим оператор B, который действует по формуле

$$Bu = \frac{1}{r(x)}\left[-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)\, u\right]. \tag{11}$$

Определим этот оператор на том же множестве функций, что и рассмотренный выше оператор A; таким образом, $D(B)$ есть множество функций, непрерывных на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям (2); первые производные этих функций на том же сегменте абсолютно непрерывны, а вторые суммируемы с квадратом.

Оператор B положительно определен в пространстве $H = L_2(r; a, b)$. Действительно, он симметричен: если $u, v \in D(B)$, то

$$(Bu, v) = \int_a^b u\left[-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + quv\right) dx = (u, Bv).$$

Далее, он положительно определен, что доказывается так. Прежде всего

$$(Bu, u) = \int_a^b (pu'^2 + qu^2)\, dx \geqslant p_0 \int_a^b u'^2 dx. \tag{12}$$

Функция $u(x)$ обращается в нуль на концах сегмента $[a, b]$, поэтому $u(a) = 0$ и

$$\sqrt{r(x)}\, u(x) = \sqrt{r(x)} \int_a^x u'(t)\, dt.$$

Будучи непрерывной на сегменте, функция $r(x)$ ограничена. Пусть $r(x) \leqslant r_1$, тогда

$$r(x)\, u^2(x) \leqslant r_1 \left(\int_a^x u'(t)\, dt\right)^2 \leqslant r_1 (x - a) \int_a^x u'^2(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant r_1 (b - a) \int_a^b u'^2(t)\, dt.$$

[1]) Очевидно, пространства $L_2(r; a, b)$ и $L_2(a, b)$ состоят из одних и тех же функций.

Интегрируя это по x в пределах от a до b, находим

$$\int_a^b u'^2(t)\,dt \geqslant \frac{1}{r_1(b-a)^2}\int_a^b r(x)\,u^2(x)\,dx = \frac{1}{r_1(b-a)^2}\,\|u\|^2;$$

в конечном счете

$$(Bu, u) \geqslant \frac{p_0}{r_1(b-a)^2}\int_a^b r(x)\,u^2(x)\,dx = \frac{p_0}{r_1(b-a)^2}\,\|u\|^2,$$

что и доказывает положительную определенность нашего оператора.

Докажем, наконец, что любое множество, ограниченное в H_B, компактно в $H = L_2(r; a, b)$. Нетрудно убедиться, что пространство H_B состоит из тех же функций, что и энергетическое пространство оператора (1) — (2); эти функции, в частности, удовлетворяют условиям (2), и потому для них справедлива формула (5).

Пусть $\mathfrak{M} \subset H_B$ — множество функций, ограниченное в норме H_B

$$\|u\|_B \leqslant C = \text{const}, \qquad u \in \mathfrak{M}.$$

Из формулы (12) легко усмотреть, что

$$\|u\|_B^2 = \int_a^b (pu'^2 + qu^2)\,dx \geqslant p_0\int_a^b u'^2\,dx,$$

и, следовательно,

$$\|u'\|^2 = \int_a^b u'^2 dx \leqslant \frac{C}{p_0}, \quad u \in \mathfrak{M}. \tag{13}$$

Формулу (5) преобразуем к виду

$$\sqrt{r(x)}\,u(x) = \int_a^b K_1(x, t)\,u'(t)\,dt, \tag{14}$$

где

$$K_1(x, t) = \begin{cases}\sqrt{r(x)}, & a \leqslant t < x,\\ 0, & x < t \leqslant b.\end{cases}$$

Функция $K_1(x, t)$ ограничена, а тогда интегральный оператор (14) преобразует множество функций $u'(x)$, ограниченное в $L_2(a, b)$ (неравенство (13)!), в множество функций $\sqrt{r(x)}\,u(x)$, компактное в $L_2(a, b)$. Это значит следующее: из множества $\mathfrak{M}$ можно выделить такую последовательность $\{u_n(x)\}$, что

$$\|\sqrt{r}\,u_n - \sqrt{r}\,u_m\|^2_{L_2(a,\,b)} = \int_a^b r(x)\,[u_n(x) - u_m(x)]^2\,dx \underset{n,\,m\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Но последнее соотношение означает просто, что

$$\| u_n - u_m \|_{L_2(r;\, a,\, b)} \underset{n,\, m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Таким образом, из множества $\mathfrak{M}$ можно выделить последовательность, которая сходится в себе в норме $L_2(r;\, a,\, b)$, значит, в пространстве $L_2(r;\, a,\, b)$ множество $\mathfrak{M}$ компактно. По теореме 6.6.1 оператор B имеет дискретный спектр, иначе говоря, существует счетное множество чисел $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, при которых задача (8), (2) имеет нетривиальные решения, и совокупность этих решений полна как в $L_2(r;\, a,\, b)$, так и в H_B. Если по-прежнему эти решения обозначить через $u_n(x)$, то они ортонормированы в $L_2(r;\, a,\, b)$ и ортогональны в H_B

$$\int_a^b r(x)\, u_n(x)\, u_m(x)\, dx = \delta_{mn},$$

$$\int_a^b [p(x)\, u_n'(x)\, u_m'(x) + q(x)\, u_m(x)\, u_n(x)]\, dx = 0, \quad m \neq n.$$

Кроме того,

$$\int_a^b [p(x)\, u_n'^2(x) + q(x) u_n^2(x)]\, dx = \lambda_n.$$

Собственные числа λ_n все простые — это следует из того, что дифференциальное уравнение (8) второго порядка. Действительно, пусть собственному числу λ_n соответствуют две линейно независимые собственные функции: $u_n(x)$ и $u_m(x)$. Прежде всего, $u_n'(0) \neq 0$ — в противном случае функция $u_n(x)$, отличная от тождественного нуля, была бы решением задачи Коши для однородного уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) - qu + \lambda_n r u = 0 \tag{15}$$

при однородных начальных условиях

$$u_n(0) = u_n'(0) = 0,$$

что противоречит теореме единственности для задачи Коши. Аналогично $u_m'(0) \neq 0$. Теперь функция

$$u(x) = \frac{u_n(x)}{u_n'(0)} - \frac{u_m(x)}{u_m'(0)},$$

отличная от тождественного нуля, решает ту же однородную задачу Коши, что невозможно.

§ 8. Элементарные случаи

Фактическое определение собственных чисел и собственных функций оператора на основании теорем §§ 4—7 наталкивается на большие технические трудности, поэтому представляют интерес те частные случаи, когда спектр оператора можно найти элементарными средствами. Два таких случая приводятся ниже.

1. Оператор A (§ 7) рассмотрим в том простейшем частном случае, когда $p(x)\equiv 1$, $q(x)\equiv 0$. Дело сводится к отысканию тех значений λ, при которых дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda u=0 \qquad (1)$$

имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям

$$u(a)=u(b)=0. \qquad (2)$$

Общий интеграл уравнения (1) можно записать так:

$$u(x)=C\sin\sqrt{\lambda}(x-a)+C_1\cos\sqrt{\lambda}(x-a).$$

Условие $u(a)=0$ дает $C_1=0$ и $u(x)=C\sin\sqrt{\lambda}(x-a)$. Из условия $u(b)=0$ находим $C\sin\sqrt{\lambda}(b-a)=0$. При этом необходимо $C\neq 0$ — в противном случае получится тривиальное решение $u=0$. Но тогда $\sin\sqrt{\lambda}(b-a)=0$. Отсюда находим собственные числа

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2},\quad n=1,\,2,\,\ldots, \qquad (3)$$

и собственные функции

$$u_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}. \qquad (4)$$

Постоянную C_n получим из условия нормировки

$$\|u_n\|^2=C_n^2\int_a^b\sin^2 n\pi\frac{x-a}{b-a}\,dx=1,$$

откуда $C_n=\sqrt{\dfrac{2}{b-a}}$ и

$$u_n(x)=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}. \qquad (4a)$$

2. Найдем нетривиальные решения уравнения (1) при краевых условиях

$$u'(a) = u'(b) = 0. \tag{5}$$

По-прежнему общий интеграл $u(x) = C\sin\sqrt{\lambda}(x-a) + C_1\cos\sqrt{\lambda}(x-a)$. Из условия $u'(a) = 0$ вытекает, что $C = 0$, а из условия $u'(b) = 0$, что $\sin\sqrt{\lambda}(b-a) = 0$. Отсюда находим собственные числа

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

и нормированные собственные функции

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

§ 9. Минимаксимальный принцип

Пусть A — положительно определенный оператор, удовлетворяющий условию теоремы 6.6.1: любое множество, ограниченное в энергетической метрике, компактно в метрике исходного пространства. Тогда спектр этого оператора дискретен; пусть λ_n и u_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — собственные числа и соответствующие им собственные элементы оператора A, ортонормированные в исходном пространстве. Поставим следующую задачу: найти минимум функционала

$$\Phi_A(u) = |u|_A^2 \tag{1}$$

на множестве элементов энергетического пространства H_A, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$\|u\|^2 = 1 \tag{2}$$

и

$$(u, v_1) = 0,\ (u, v_2) = 0,\ \ldots,\ (u, v_{k-1}) = 0, \tag{3}$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ — фиксированные элементы исходного пространства H. Описанное здесь множество элементов будем рассматривать как область определения функционала Φ_A и обозначать через $D(\Phi_A)$. Докажем, что на множестве $D(\Phi_A)$ минимум $\Phi_A(u)$ достигается. Заметим прежде всего, что функционалы (u, v_j) ограничены в H_A

$$|(u, v_j)| \leqslant \|u\|\cdot\|v_j\| \leqslant \frac{\|v_j\|}{\gamma_0}|u|_A,$$

где γ_0 — нижняя грань оператора A. По теореме Риса существуют такие элементы $w_j \in H_A$, что

$$(u, v_j) = [u, w_j]_A; \quad j = 1, 2, \ldots, k-1; \quad u \in H_A.$$

Дополнительные условия (3), которым теперь можно придать вид

$$[u, w_1] = 0, \ [u, w_2] = 0, \ \ldots, \ [u, w_{k-1}] = 0,$$

определяют подпространство H_A, ортогональное к $w_1, w_2, \ldots$ $\ldots, w_{k-1}$; обозначим его через $\mathfrak{H}_k$.

Нашу вариационную задачу можно сформулировать так: найти минимум функционала (1) на множестве элементов подпространства $\mathfrak{H}_k$, удовлетворяющих дополнительному условию (2). Теперь достаточно повторить рассуждения п. 1 теоремы 6.6.1, и мы убедимся, что в $\mathfrak{H}_k$ существует элемент w, $\| w \| = 1$, реализующий минимум нашего функционала. Этот минимум обозначим через $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$.

Минимаксимальный принцип состоит в равенстве

$$\max \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \lambda_k; \tag{4}$$

максимум берется по всевозможным наборам элементов v_1, $v_2, \ldots, v_{k-1}$, принадлежащих исходному пространству H. Доказательство минимаксимального принципа сводится к установлению двух фактов: 1) $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \leqslant \lambda_k$; 2) существуют такие элементы $v_j^{(0)} \in H$, что $\lambda(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \ldots, v_{k-1}^{(0)}) = \lambda_k$. Установим эти факты.

Пусть u — произвольный элемент энергетического пространства H_A. Система $\{u_n\}$ ортонормирована и полна в пространстве H; разложим по этой системе элементы u и v_j

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \tag{5}$$

$$v_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_{jn} u_n, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Система $\{u_n\}$ ортогональна и полна в H_A; при этом $\| u_n \|_A^2 = \lambda_n$. Но тогда система $\{u_n / \sqrt{\lambda_n}\}$ в H_A ортонормирована и полна; разложение элемента $u \in H_A$ по этой системе, очевидно, имеет вид

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, a_n \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}. \tag{6}$$

По уравнению замкнутости

$$\| u \|_A^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2. \tag{7}$$

Возьмем в качестве u конечную сумму

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^{k} a_n u_n, \tag{8}$$

где числа a_n произвольны. Если мы потребуем, чтобы элемент (8) удовлетворял условиям (3), то получим систему $k-1$ линейных однородных уравнений с k неизвестными $a_1, a_2, \ldots, a_k$

$$\sum_{n=1}^{k} b_{jn} a_n = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{9}$$

Число уравнений меньше числа неизвестных; поэтому система (9) имеет бесконечное множество решений. Из них хотя бы одно можно выбрать так, чтобы

$$\| \bar{u} \|^2 = \sum_{n=1}^{k} a_k^2 = 1.$$

Тогда $\bar{u} \in D(\Phi_A)$. При этом по формуле (7)

$$\| \bar{u} \|_A^2 = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n a_n^2.$$

Заменив здесь все λ_n наибольшим из них, λ_k, получим

$$\| \bar{u} \|_A^2 \leqslant \lambda_k \sum_{n=1}^{k} a_k^2 = \lambda_k.$$

Но $\bar{u}$ есть один из элементов множества $D(\Phi_A)$, поэтому тем более,

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \min_{u \in D(\Phi_A)} \Phi_A(u) \leqslant \lambda_k.$$

Что знак равенства достигается, доказывается совсем просто: достаточно взять

$$v_j^0 = u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Справедливость минимаксимального принципа доказана.

Из минимаксимального принципа вытекает важная теорема, позволяющая во многих случаях сравнивать собственные числа двух операторов. Прежде чем формулировать эту теорему, введем одно новое понятие.

Пусть A и B — положительно определенные операторы, действующие в одном и том же гильбертовом пространстве H. Будем говорить, что *оператор A не меньше оператора B*, и записывать это в виде $A \geqslant B$ или $B \leqslant A$, если 1) любой элемент пространства H_A принадлежит и пространству H_B; 2) для любого элемента $u \in H_A$ справедливо неравенство

$$\| u \|_A \geqslant \| u \|_B. \tag{10}$$

Теорема 6.9.1. *Пусть A и B — положительно определенные операторы, удовлетворяющие условию теоремы 6.6.1, и пусть $A \geqslant B$. Если λ_k и μ_k — расположенные в порядке возрастания собственные числа операторов A и B, то*

$$\lambda_k \geqslant \mu_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Обозначим через $\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ и $\mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ минимумы функционалов $\| u \|_A^2$ и $\| u \|_B^2$ при условиях (2) и (3). Обозначим через $\tilde{u}$ тот элемент, на котором достигается первый минимум. По неравенству (10)

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) = \| \tilde{u} \|_A^2 \geqslant \| \tilde{u} \|_B^2 \geqslant \min \| u \|_B^2 = \\ = \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}).$$

Но тогда

$$\min \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}) \geqslant \min \mu(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}),$$

что тождественно с неравенством (11).

§ 10. О росте собственных чисел задачи Штурма — Лиувилля

Обозначим через λ_n собственные числа оператора задачи Штурма — Лиувилля

$$Au = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu, \qquad u(a) = u(b) = 0. \tag{1}$$

На коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ наложим те же ограничения, что и выше, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ непрерывны, $p(x) \geqslant p_0$, $q(x) \geqslant 0$ на сегменте $[a, b]$. В § 8 гл. 5 мы видели, что множество функций, образующих энергетическое пространство оператора (1), не зависит от коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ и что

$$|u|_A^2 = \int_a^b \left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2\right]dx. \tag{2}$$

Непрерывные на сегменте функции $p(x)$ и $q(x)$ ограничены

$$p(x) \leqslant p_1, \qquad q(x) \leqslant q_1, \qquad x \in [a, b].$$

Обозначим

$$A_0 u = -p_0 \frac{d^2u}{dx^2}, \qquad u(a) = u(b) = 0,$$

$$A_1 u = -p_1 \frac{d^2u}{dx^2} + q_1 u, \qquad u(a) = u(b) = 0.$$

Операторы A_0 и A_1 суть частные случаи оператора A, получаемые при $p(x) \equiv p_0$, $q(x) \equiv 0$ и $p(x) \equiv p_1$, $q(x) \equiv q_1$ соответственно. Из формулы (2) следует

$$|u|_{A_0}^2 = p_0 \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx, \qquad |u|_{A_1}^2 = p_1 \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + q_1 \int_a^b u^2\,dx.$$

Ясно, что

$$|u|_{A_0}^2 \leqslant |u|_A^2 \leqslant |u|_{A_1}^2,$$

и, следовательно,

$$A_0 \leqslant A \leqslant A_1.$$

Если μ_k и ν_k суть собственные числа операторов A_0 и A_1 соответственно, то по теореме 6.9.1

$$\mu_k \leqslant \lambda_k \leqslant \nu_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Числа μ_k и ν_k легко найти.

Числа μ_k суть собственные числа задачи

$$p_0 \frac{d^2u}{dx^2} + \mu u = 0, \qquad u(a) = u(b) = 0.$$

Положив здесь $\frac{\mu}{p_0} = \lambda$, мы придем к задаче п. 1 § 8. В таком случае

$$\mu_k = \frac{p_0 \pi^2 k^2}{(b-a)^2}. \tag{4}$$

Точно так же числа ν_k суть собственные числа задачи

$$p_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + (\nu - q_1) u = 0, \qquad u(a) = u(b) = 0,$$

и сравнение с результатами § 8 дает

$$\nu_k = \frac{p_1 \pi^2 k^2}{(b-a)^2} + q_1. \tag{5}$$

Соотношения (3) — (5) дают неравенство, определяющее порядок роста собственных чисел задачи Штурма — Лиувилля

$$\frac{p_0 \pi^2 k^2}{(b-a)^2} \leqslant \lambda_k \leqslant \frac{p_1 \pi^2 k^2}{(b-a)^2} + q_1. \tag{6}$$

УПРАЖНЕНИЕ

1. Доказать дискретность спектра оператора T_p упражнений 1 и 2 гл. 5.

РАЗДЕЛ III

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГЛАВА 7

ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Необходимые сведения из функционального анализа

В настоящем параграфе приводятся преимущественно без доказательств понятия и факты, необходимые для исследования интегральных уравнений. Подробное изложение этих вопросов можно найти, например, в книгах Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [1] или Ф. Риса и Б. Секефальви-Надь [5], указанных в списке литературы к данному разделу.

1. Линейный оператор, действующий из банахова пространства X в банахово же пространство Y и определенный на множестве, плотном в X, называется *вполне непрерывным*, если он преобразует любое ограниченное множество из области своего определения в множество, компактное в Y. Вместо слов «вполне непрерывный оператор» мы часто будем писать только начальные буквы в. н. о.

2. Всякий в. н. о. ограничен. Обратное утверждение верно для конечномерных пространств и неверно для пространств бесконечномерных. В частности, в бесконечномерном пространстве тождественный оператор не вполне непрерывен.

Ограниченный, заданный на плотном множестве в. н. о. можно расширить по непрерывности на все пространство X. Ниже мы всегда будем предполагать, что такое расширение уже выполнено.

3. Сумма конечного числа в. н. о. есть в. н. о. Произведение (независимо от порядка) двух операторов, из которых один вполне непрерывен, а другой ограничен, есть в. н. о.

4. Конечномерным оператором называется оператор вида

$$Tu = \sum_{k=1}^{n} l_k(u) v_k, \tag{1}$$

где число n конечно и не зависит от u, l_k — функционалы, линейные и ограниченные в X, а v_k — фиксированные элементы из Y.

Всякий конечномерный оператор есть в. н. о.

5. Пусть T_n, $n=1, 2, \ldots,$ — последовательность в. н. о., действующих из X в Y, и пусть существует оператор T, действующий из X в Y и такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \| T-T_n \| = 0.$$

Тогда T есть в. н. о.

6. Если T — в. н. о., то сопряженный с ним оператор T^* будет также вполне непрерывным.

Ниже будет рассматриваться только тот случай, когда пространства X и Y совпадают.

Теорема 7.11. *Пусть T — в. н. о., действующий в гильбертовом пространстве H. Каково бы ни было число $\varepsilon>0$, можно построить такой конечномерный оператор T_ε, что*

$$\| T-T_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Обозначим через $\sum$ единичную сферу в H, т. е. множество элементов пространства H, нормы которых равны единице. Через $T(\sum)$ обозначим то множество, в которое оператор T преобразует множество $\sum$. Это последнее ограничено, а оператор T вполне непрерывен, поэтому множество $T(\sum)$ компактно. По известной теореме Хаусдорфа при любом $\varepsilon>0$ для множества $T(\sum)$ существует конечная ε-сеть, т. е. существует конечное число r элементов $v_k \in H$, $k=1, 2, \ldots, r$, обладающих следующим свойством: каков бы ни был элемент $u \in \sum$, найдется такой элемент v_j, что

$$\| Tu-v_j \| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Из конечной последовательности $v_1, v_2, \ldots, v_r$ вычеркнем элементы, линейно зависящие от остальных; оставшиеся элементы (их число обозначим через s) подвергнем ортогонализации по Шмидту. В результате получатся s элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ таких, что $(\varphi_j, \varphi_k)=\delta_{jk}$ и каждый из элементов ε-сети линейно выражается через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$

$$v_k = \sum_{l=1}^{s} a_{kl}\varphi_l.$$

Теперь неравенство (3) принимает вид

$$\left\| Tu - \sum_{l=1}^{s} a_{jl}\varphi_l \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Положим теперь

$$T_\varepsilon u = \sum_{l=1}^{s} (Tu, \varphi_l)\varphi_l = \sum_{l=1}^{s} (u, T^*\varphi_l)\varphi_l. \tag{4}$$

Как известно из теории ортогональных рядов,

$$\| Tu - T_\varepsilon u \| \leqslant \left\| Tu - \sum_{l=1}^{s} a_{jl}\varphi_l \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Это неравенство верно для любого элемента $u \in H$, $\|u\| = 1$. Но тогда $\|T - T_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$; в то же время оператор T_ε, как это видно из формулы (4), конечномерный. Теорема доказана.

§ 2. Оператор Фредгольма

Пусть Ω — измеримое множество m-мерного евклидова пространства; это множество может быть ограниченным или неограниченным — безразлично. Пусть x и ξ — произвольные точки множества Ω. Измеримая функция этих точек $K(x, \xi)$ называется *фредгольмовским ядром*, если (мы ограничиваемся случаем вещественного ядра)

$$\int_\Omega \int_\Omega K^2(x, \xi)\, dx\, d\xi < \infty. \tag{1}$$

Интегральный оператор

$$(Ku)(x) = \int_\Omega K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi, \tag{2}$$

где $K(x, \xi)$ — фредгольмовское ядро, называется *оператором Фредгольма*.

Отметим один важный класс фредгольмовских ядер. Если множество Ω имеет конечную лебегову меру (например, если Ω ограничено), а ядро $K(x, \xi)$ ограничено, то оно — фредгольмовское. Действительно, если $|K(x, \xi)| \leqslant C = \text{const}$, то

$$\int_\Omega \int_\Omega |K^2(x, \xi)|\, dx\, d\xi \leqslant C^2 (\text{mes}\, \Omega)^2,$$

и неравенство (1) выполнено.

Теорема 7.2.1. *Оператор Фредгольма определен на всем пространстве $L_2(\Omega)$ и ограничен в нем; при этом*

$$\|K\| \leqslant \left\{ \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega K^2(x, \xi)\, dx\, d\xi \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Докажем, что тогда интеграл (2) существует при почти всех $x \in \Omega$ и представляет собой функцию от x, квадратично суммируемую в Ω. Имеем

$$|K(x, \xi)\, u(\xi)| \leqslant \frac{1}{2} K^2(x, \xi) + \frac{1}{2} u^2(\xi). \tag{4}$$

Интеграл (1) сходится; по теореме Фубини функция $K^2(x, \xi)$ суммируема по ξ почти при всех $x \in \Omega$; функция $u^2(\xi)$ просто суммируема по ξ. Таким образом, правая часть неравенства (4) суммируема по ξ при почти всех x. Но тогда этим же свойством обладает и левая часть неравенства (4), и интеграл (2) существует при почти всех $x \in \Omega$.

По неравенству Буняковского

$$|(Ku)(x)|^2 \leqslant \int\limits_\Omega K^2(x, \xi)\, d\xi \int\limits_\Omega u^2(\xi)\, d\xi = \|u\|^2 \int\limits_\Omega K^2(x, \xi)\, d\xi.$$

Проинтегрировав это по x, получим неравенство

$$\|Ku\|^2 \leqslant \|u\|^2 \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega K^2(x, \xi)\, dx\, d\xi,$$

равносильное неравенству (3). Теорема доказана.

Теорема 7.2.2. *Оператор Фредгольма вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$.*

Обозначим через $\Omega \times \Omega$ множество точек $2m$-мерного евклидова пространства, определяемое следующим образом: это множество состоит из точек $(z_1, z_2, \ldots, z_{2m})$, обладающих тем свойством, что обе точки $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ и $(z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{2m})$ принадлежат множеству Ω. Если $x \in \Omega$ и $\xi \in \Omega$, то любую функцию от x и ξ можно рассматривать как функцию точки множества $\Omega \times \Omega$. Очевидно и обратное. Неравенство (1) означает, что фредгольмовское ядро можно рассматривать как элемент пространства $L_2(\Omega \times \Omega)$.

Пространство $L_2(\Omega)$ сепарабельно; выберем в нем полную счетную ортонормированную последовательность $\varphi_k(x)$,

$k=1, 2, \ldots$ Тогда последовательность

$$\varphi_k(x)\varphi_n(\xi); \quad k, n=1, 2, \ldots, \tag{5}$$

ортонормирована в $L_2(\Omega\times\Omega)$; докажем, что в этом пространстве последовательность (5) полна.

Допустим, что некоторая функция $\omega(x, \xi)\in L_2(\Omega\times\Omega)$ ортогональна ко всем функциям последовательности (5)

$$\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega \omega(x, \xi)\varphi_k(x)\varphi_n(\xi)\,dx\,d\xi=0; \quad k, n=1, 2, \ldots$$

Заменяя кратный интеграл повторным, получаем

$$\int\limits_\Omega \varphi_k(x)\left\{\int\limits_\Omega \omega(x, \xi)\varphi_n(\xi)\,d\xi\right\}dx=0; \quad k, n=1, 2, \ldots \tag{6}$$

Зафиксируем номер n и положим

$$\int\limits_\Omega \omega(x, \xi)\varphi_n(\xi)\,d\xi=\omega_n(x).$$

Функцию $\omega(x, \xi)$ можно рассматривать как фредгольмовское ядро; из доказанной выше теоремы 7.2.1 вытекает, что $\omega_n\in L_2(\Omega)$.

Равенство (6) принимает вид

$$\int\limits_\Omega \omega_n(x)\varphi_k(x)\,dx=0, \quad k=1, 2, \ldots$$

Но последовательность $\{\varphi_k(x)\}$ полна в $L_2(\Omega)$, поэтому

$$\omega_n(x)=\int\limits_\Omega \omega(x, \xi)\varphi_n(\xi)\,d\xi=0, \quad n=1, 2, \ldots$$

Это равенство верно почти для всех $x\in\Omega$. Зафиксируем такое x. Тогда функция от ξ, равная $\omega(x, \xi)$, ортогональна к полной системе $\{\varphi_n(\xi)\}$. Отсюда следует, что $\omega(x, \xi)=0$ почти для всех ξ, и полнота системы (5) доказана.

Функцию $K(x, \xi)$ можно разложить в ряд Фурье по системе (5). Пусть этот ряд имеет вид

$$K(x, \xi)=\sum_{k, n=1} A_{kn}\varphi_k(x)\varphi_n(\xi).$$

Положим теперь

$$K_1(x, \xi)=\sum_{k, n=1}^{N} A_{kn}\varphi_k(x)\varphi_n(\xi),$$

число N возьмем столь большим, чтобы

$$\sum_{k>N \text{ или } n>N} A_{kn}^2 < \varepsilon^2;$$

это возможно, потому что ряд $\sum\limits_{k,\, n=1}^{\infty} A_{kn}^2$ сходится.

Положим еще

$$K'_\varepsilon(x, \xi) = K(x, \xi) - K_\varepsilon(x, \xi)$$

и обозначим через K_ε и K'_ε соответственно фредгольмовские операторы с ядрами $K_\varepsilon(x, \xi)$ и $K'_\varepsilon(x, \xi)$. Оператор K_ε конечномерный, так как

$$(K_\varepsilon u)(x) = \int_\Omega \sum_{k,\, n=1}^{N} A_{kn}\varphi_k(x)\,\varphi_n(\xi)\,u(\xi)\,d\xi =$$

$$= \sum_{k,\, n=1}^{N} A_{kn}\varphi_k(x) \int_\Omega \varphi_n(\xi)\,u(\xi)\,d\xi = \sum_{n=1}^{N} (u, \varphi_n)\,\psi_n(x),$$

где

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{N} A_{kn}\varphi_k(x).$$

Оценим норму оператора K'_ε. Имеем

$$K'_\varepsilon(x, \xi) = \sum_{k>N \text{ или } n>N} A_{kn}\varphi_k(x)\,\varphi_n(\xi).$$

По уравнению замкнутости

$$\int_\Omega \int_\Omega [K'_\varepsilon(x, \xi)]^2\,dx\,d\xi = \sum_{k>N \text{ или } n>N} A_{kn}^2 < \varepsilon^2,$$

и из формулы (3) вытекает, что $\|K'_\varepsilon\| < \varepsilon$. Теперь $\|K - K_\varepsilon\| < \varepsilon$; если положить $\varepsilon \to 0$, то $\|K - K_\varepsilon\| \to 0$. В силу утверждения п. 5 § 1 фредгольмовский оператор K вполне непрерывен.

§ 3. Интегральный оператор со слабой особенностью

Пусть Ω — ограниченное измеримое множество m-мерного евклидова пространства, x и ξ — его точки, $r = |x - \xi|$ — расстояние между этими точками. Пусть $A(x, \xi)$ — функция, заданная и ограниченная для $x, \xi \in \Omega$

$$|A(x, \xi)| \leqslant C = \text{const}. \tag{1}$$

Функция точек x и ξ

$$K(x, \xi) = \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha}, \quad \alpha = \text{const}, \quad 0 \leqslant \alpha < m, \tag{2}$$

называется *ядром со слабой особенностью*, а интегральный оператор K, определяемый формулой

$$(Ku)(x) = \int_\Omega K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = \int_\Omega \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha} u(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

называется *интегральным оператором со слабой особенностью*.

Теорема 7.3.1. *Интегральный оператор со слабой особенностью определен на всем пространстве $L_2(\Omega)$ и ограничен в нем. Норма этого оператора не превосходит величины*

$$\frac{C\,|S_1|\,H^{m-\alpha}}{m-\alpha}, \tag{4}$$

где C — постоянная неравенства (1), *H — верхняя грань расстояний между точками* (диаметр) *множества Ω.*

Напомним, что

$$|S_1| = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}. \tag{5}$$

Доказательство.

1. Докажем, что интеграл

$$\int_\Omega \frac{d\xi}{r^\alpha}, \quad x \in \bar{\Omega} \tag{6}$$

ограничен. Очевидно, множество Ω лежит в шаре радиуса H с центром в точке x, поэтому

$$\int_\Omega \frac{d\xi}{r^\alpha} \leqslant \int_{r<H} \frac{d\xi}{r^\alpha}.$$

Введем сферические координаты с центром в точке x. Тогда, как известно, $d\xi = r^{m-1} dr\, dS_1$, где dS_1 — элемент меры на единичной сфере S_1. Теперь имеем

$$\int\limits_{r<H} \frac{d\xi}{r^\alpha} = \int\limits_{S_1} \left\{ \int\limits_0^H r^{m-\alpha-1}\,dr \right\} dS_1 = \frac{|S_1|\,H^{m-\alpha}}{m-\alpha}.$$

Отсюда

$$\int\limits_\Omega \frac{d\xi}{r^\alpha} \leqslant \frac{|S_1|\,H^{m-\alpha}}{m-\alpha}, \qquad x \in \bar\Omega. \tag{7}$$

Заметим сразу же, что по симметрии

$$\int\limits_\Omega \frac{dx}{r^\alpha} \leqslant \frac{|S_1|\,H^{m-\alpha}}{m-\alpha}, \qquad \xi \in \bar\Omega. \tag{7_1}$$

2. Очевидно, существует $2m$-кратный интеграл

$$\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{u^2(\xi)}{r^\alpha}\,dx\,d\xi = \int\limits_\Omega u^2(\xi) \left\{ \int\limits_\Omega \frac{dx}{r^\alpha} \right\} d\xi \leqslant \frac{|S_1|\,H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \|u\|^2.$$

А тогда, по теореме Фубини, почти при всех $x \in \Omega$ существует и суммируема в Ω функция точки x, определяемая интегралом

$$\int\limits_\Omega \frac{u^2(\xi)}{r^\alpha}\,d\xi. \tag{8}$$

3. Имеем очевидное неравенство

$$|K(x, \xi)\,u(\xi)| \leqslant C \frac{1}{r^{\alpha/2}} \frac{|u(\xi)|}{r^{\alpha/2}} \leqslant \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{r^\alpha} + \frac{C}{2} \cdot \frac{u^2(\xi)}{r^\alpha}.$$

Как это доказано в пп. 1 и 2, первое слагаемое справа суммируемо по ξ в Ω при всех $x \in \Omega$, а второе — при почти всех $x \in \Omega$. Но тогда функция $K(x, \xi)\,u(\xi)$ суммируема по ξ почти при всех $x \in \Omega$.

4. По неравенству Буняковского

$$[(Ku)(x)]^2 = \left\{ \int\limits_\Omega K(x, \xi)\,u(\xi)\,d\xi \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \left\{ \int\limits_\Omega \frac{1}{r^{\alpha/2}} \cdot \frac{u(\xi)}{r^{\alpha/2}}\,d\xi \right\}^2 \leqslant C^2 \int\limits_\Omega \frac{d\xi}{r^\alpha} \int\limits_\Omega \frac{u^2(\xi)}{r^\alpha}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^2\,|S_1|\,H^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int\limits_\Omega \frac{u^2(\xi)}{r^\alpha}\,d\xi.$$

Функция (8) суммируема в Ω, а тогда интеграл (3) суммируем в Ω с квадратом. Это означает, что оператор K определен на всем пространстве $L_2(\Omega)$. Интегрируя последнее неравенство по x, получим

$$\|Ku\|^2 \leqslant \frac{C^2 |S_1|^2 H^{2(m-\alpha)}}{(m-\alpha)^2} \|u\|^2.$$

Отсюда

$$\|K\| \leqslant \frac{C |S_1| H^{m-\alpha}}{m-\alpha}.$$

Теорема доказана.

Теорема 7.3.2. *Оператор со слабой особенностью вполне непрерывен в пространстве* $L_2(\Omega)$.

Зададим число $\varepsilon > 0$ и положим

$$K_\varepsilon(x, \xi) = \begin{cases} K(x, \xi), & r \geqslant \varepsilon, \\ 0, & r < \varepsilon; \end{cases}$$

$$K'_\varepsilon(x, \xi) = \begin{cases} 0, & r \geqslant \varepsilon, \\ K(x, \xi), & r < \varepsilon, \end{cases}$$

так что

$$K(x, \xi) = K_\varepsilon(x, \xi) + K'_\varepsilon(x, \xi).$$

Как и в предшествующем параграфе, обозначим через K_ε и K'_ε интегральные операторы, ядра которых суть $K_\varepsilon(x, \xi)$ и $K'_\varepsilon(x, \xi)$. Очевидно, $K = K_\varepsilon + K'_\varepsilon$. Ядро $K_\varepsilon(x, \xi)$ ограничено:

$$|K_\varepsilon(x, \xi)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{C}{r^\alpha}, & r \geqslant \varepsilon, \\ 0, & r < \varepsilon, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$|K_\varepsilon(x, \xi)| \leqslant \frac{C}{\varepsilon^\alpha}.$$

В таком случае оператор K_ε — фредгольмовский и по теореме 7.2.2 вполне непрерывный в $L_2(\Omega)$. Оценим норму оператора K'_ε. Обозначая для краткости $(K'_\varepsilon u)(x) = v(x)$, имеем

$$|v(x)| = \left| \int\limits_{\Omega \cap (r<\varepsilon)} \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha} u(\xi)\, d\xi \right| \leqslant C \int\limits_{\Omega \cap (r<\varepsilon)} \frac{|u(\xi)|}{r^{\alpha/2}} \frac{1}{r^{\alpha/2}}\, d\xi$$

и по неравенству Буняковского

$$v^2(x) \leqslant C^2 \int\limits_{\Omega \cap (r<\varepsilon)} \frac{u^2(\xi)}{r^\alpha}\,d\xi \int\limits_{\Omega \cap (r<\varepsilon)} \frac{d\xi}{r^\alpha} \leqslant C^2 \int\limits_{\Omega} \frac{u^2(\xi)}{r^\alpha}\,d\xi \int\limits_{r<\varepsilon} \frac{d\xi}{r^\alpha}.$$

Введя сферические координаты с центром в точке x, получим

$$\int\limits_{r<\varepsilon} \frac{d\xi}{r^\alpha} = \int\limits_{S_1} \left\{ \int\limits_0^\varepsilon r^{m-\alpha-1}\,dr \right\} dS_1 = \frac{|S_1|\,\varepsilon^{m-\alpha}}{m-\alpha}, \tag{9}$$

и, следовательно,

$$v^2(x) \leqslant \frac{C^2 |S_1|\, \varepsilon^{m-\alpha}}{m-\alpha} \int\limits_\Omega \frac{u^2(\xi)}{r^\alpha}\,d\xi.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по x и воспользовавшись неравенством (7_1), получим

$$\|v\|^2 = \|K'_\varepsilon u\|^2 \leqslant \frac{C^2 |S_1|^2 (\varepsilon H)^{m-\alpha}}{(m-\alpha)^2} \|u\|^2.$$

Отсюда

$$\|K'_\varepsilon\| \leqslant \frac{C\,|S_1|\,(\varepsilon H)^{\frac{m-\alpha}{2}}}{m-\alpha}. \tag{10}$$

Если $\varepsilon \to 0$, то $\|K'_\varepsilon\| \to 0$ и оператор K вполне непрерывен.

З а м е ч а н и е. Определения и теоремы §§ 2 и 3 об операторах Фредгольма и операторах со слабой особенностью без изменений переносятся на тот случай, когда Ω есть гладкая m-мерная поверхность в пространстве $m+1$ измерений, а $d\xi$ означает элемент площади поверхности.

§ 4. Операторы со слабой особенностью в пространстве непрерывных функций

В настоящем параграфе предполагается, что Ω — ограниченное замкнутое множество в m-мерном евклидовом пространстве и что в формуле (3.2) $A(x, \xi)$ есть функция, непрерывная в Ω по совокупности точек x и ξ.

Т е о р е м а 7.4.1. *Интегральный оператор со слабой особенностью* (3.3) *вполне непрерывен в пространстве* $C(\Omega)$ *функций, непрерывных в* Ω.

Пусть M — множество функций из $C(\Omega)$ таких, что

$$\|u\| = \max_{x \in \Omega} |u(x)| \leqslant c = \text{const}. \tag{1}$$

Достаточно доказать, что множество $K(M)$, где K — оператор (3.3), компактно в $C(\Omega)$. В силу теоремы Арцеля для этого в свою очередь достаточно доказать, что множество $K(M)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Пусть $u \in M$. Положим

$$v(x) = (Ku)(x) = \int_\Omega \frac{A(x, \xi)}{r^\alpha} u(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Воспользовавшись неравенствами (3.1) и (3.7), получим

$$|v(x)| \leqslant Cc \int_\Omega \frac{d\xi}{r^\alpha} \leqslant \frac{Cc\,|S_1|\,H^{m-\alpha}}{m-\alpha} = \text{const}. \tag{3}$$

Последнее неравенство (3) показывает, что множество $K(M)$ равномерно ограничено. Оценим разность $v(x+h) - v(x)$. Имеем

$$v(x+h) - v(x) = \int_\Omega \left[\frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha}\right] u(\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

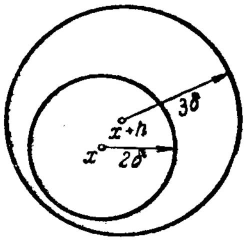

Рис. 8.

Точку x вырежем шаром $Ш_{2\delta}$ радиуса 2δ, где δ — произвольное пока положительное число. Часть множества Ω, расположенную вне этого шара, обозначим через Ω_1. Потребуем, чтобы было $|h| < \delta$, тогда точка $x+h$ находится в шаре $Ш_{2\delta}$ на расстоянии, не меньшем δ, от поверхности шара (рис. 8).

Из формулы (4) вытекает

$$|v(x+h) - v(x)| \leqslant Cc \left\{ \int_{Ш_{2\delta}} \frac{dx}{|x+h-\xi|^\alpha} + \int_{Ш_{2\delta}} \frac{d\xi}{|x-\xi|^\alpha} \right\} + \\ + c \int_{\Omega_1} \left| \frac{A(x+h, \xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x, \xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right| d\xi. \tag{5}$$

По формуле (3.9)

$$\int\limits_{Ш_{2\delta}} \frac{d\xi}{|x-\xi|^\alpha} = \int\limits_{r<2\delta} \frac{d\xi}{|x-\xi|^\alpha} = \frac{|S_1|(2\delta)^{m-\alpha}}{m-\alpha}. \quad (6)$$

Если $\xi \in Ш_{2\delta}$, то $|x-\xi| \leqslant 2\delta$ и

$$|x+h-\xi| \leqslant |x-\xi| + |h| < 3\delta.$$

Это значит, что точка ξ лежит внутри шара радиуса 3δ с центром в точке $x+h$ (рис. 8). Иначе говоря, шар $Ш_{2\delta}$ целиком лежит внутри шара $r_1 < 3\delta$, $r_1 = |x+h-\xi|$. Отсюда

$$\int\limits_{Ш_{2\delta}} \frac{d\xi}{|x+h-\xi|^\alpha} < \int\limits_{r_1<3\delta} \frac{d\xi}{r_1^\alpha} < \frac{|S_1|(3\delta)^{m-\alpha}}{m-\alpha}. \quad (7)$$

Зададим число $\varepsilon > 0$ и выберем δ столь малым, чтобы

$$Cc\,\frac{(2^{m-\alpha}+3^{m-\alpha})\,|S_1|\,\delta^{m-\alpha}}{m-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда из соотношений (5) — (7) вытекает, что

$$|v(x+h)-v(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + c\int\limits_{\Omega_1} \left| \frac{A(x+h,\xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right| d\xi. \quad (8)$$

Число δ зафиксируем. В области Ω_1 выполняется неравенство $|x-\xi| \geqslant \delta$, поэтому функция $\frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha}$ равномерно непрерывна по совокупности точек x и ξ. Можно поэтому выбрать столь малое h_0, чтобы при $|h| < h_0$ было

$$\left| \frac{A(x+h,\xi)}{|x+h-\xi|^\alpha} - \frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha} \right| < \frac{\varepsilon}{2c|\Omega|}.$$

Тогда по формуле (8)

$$|v(x+h)-v(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon|\Omega_1|}{2|\Omega|} < \varepsilon, \quad |h| < h_0.$$

Число h_0 зависит только от ε; оно не зависит ни от точки x, ни от функции u. Отсюда следует, что множество $K(M)$ равностепенно непрерывно, и теорема доказана.

Теорема 7.4.1 очевидным образом распространяется на тот случай, когда Ω есть гладкая m-мерная поверхность в евклидовом пространстве $m+1$ измерений, а $d\xi$ означает элемент площади поверхности.

В доказательстве теоремы 7.4.1 была использована на самом деле не непрерывность функции $u(x)$, а только ее ограниченность. Поэтому справедливо следующее утверждение:

Если Ω — ограниченное замкнутое множество, а функция $A(x, \xi)$ непрерывна в Ω, то оператор со слабой особенностью

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} \frac{A(x, \xi)}{r^{\alpha}} u(\xi)\, d\xi = v(x)$$

переводит ограниченную функцию $u(x)$ в непрерывную функцию $v(x)$.

Пусть по-прежнему Ω — ограниченное замкнутое множество и пусть $K(x, \xi)$ — непрерывное ядро. Его можно рассматривать как ядро со слабой особенностью, у которого $\alpha = 0$. А тогда из теоремы 7.4.1 вытекает такое следствие.

Следствие 7.4.1. *Если Ω — ограниченное замкнутое множество и ядро $K(x, \xi)$ непрерывно в Ω, то фредгольмовский оператор K, определяемый формулой*

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi,$$

вполне непрерывен в $C(\Omega)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что при $\alpha < \frac{m}{2}$ оператор со слабой особенностью есть также и фредгольмовский оператор в $L_2(\Omega)$.

2. Пусть $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Пусть еще $\alpha p' < m$. Доказать, что оператор со слабой особенностью вполне непрерывен как оператор из $L_p(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$.

3. Известно, что так называемый сингулярный интегральный оператор S, где

$$(Su)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{u(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{u(\xi)}{\xi - x}\, d\xi + \int_{x+\varepsilon}^{1} \frac{u(\xi)}{\xi - x}\, d\xi \right\},$$

ограничен в $L_2(-1, 1)$. Пусть функция $a(x)$ непрерывна на сегменте $[-1, 1]$. Доказать, что оператор T, где

$$(Tu)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{a(\xi) - a(x)}{\xi - x} u(\xi)\, d\xi,$$

вполне непрерывен в $L_2(-1, 1)$.

ГЛАВА 8

ТЕОРИЯ ФРЕДГОЛЬМА

§ 1. Уравнение с в. н. о. Интегральные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$u - \lambda T u = f, \tag{1}$$

где T — в. н. о., действующий в банаховом пространстве X, f — данный, а u — искомый элемент этого пространства, λ — числовой параметр. Сопряженным к уравнению (1) называется уравнение

$$v - \bar{\lambda} T^* v = g, \tag{2}$$

в котором T^* — в. н. о., сопряженный с T, g и v — данный и искомый элементы пространства X^*, сопряженного с X. Если f (соответственно g) отлично от нулевого элемента, то уравнение (1) (соответственно уравнение (2)) называется *неоднородным*, в противном случае получаются *однородные уравнения*

$$u - \lambda T u = 0 \tag{3}$$

и

$$v - \bar{\lambda} T^* v = 0. \tag{4}$$

Значения λ, при которых существуют нетривиальные (т. е. отличные от нулевого элемента) решения уравнения (3), называются *характеристическими числами* оператора T, а сами нетривиальные решения — его *собственными элементами, соответствующими данному характеристическому числу*. Число линейно независимых собственных элементов, отвечающих данному характеристическому числу, называется *рангом* этого характеристического числа. Нехарактеристические значения называются *правильными*.

Для уравнения (1) справедливы следующие четыре теоремы, известные под названием *теорем Фредгольма.*

Теорема 8.1.1 (теорема 1 Фредгольма). *Каждое характеристическое число уравнения* (1) *имеет конечный ранг.*

Теорема 8.1.2 (теорема 2 Фредгольма). *Уравнение* (1) *имеет либо конечное, либо счетное множество характеристических чисел; если это множество счетное, то оно имеет единственную предельную точку на бесконечности.*

Теорема 8.1.3 (теорема 3 Фредгольма) *Если* λ — *характеристическое число уравнения* (1), *то* $\bar{\lambda}$ *есть характеристическое число уравнения* (2), *и притом того же ранга.*

Теорема 8.1.4 (теорема 4 Фредгольма). *Для того чтобы уравнение* (1) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы свободный член* f *этого уравнения был ортогонален ко всем решениям сопряженного однородного уравнения* (4).

Ортогональность здесь понимается в следующем смысле. Пусть при данном λ уравнение (4) имеет некоторое решение v. Это решение принадлежит пространству X^* и является, следовательно, функционалом в пространстве X. Говоря, что f ортогонально к v, мы понимаем под этим, что

$$(v, f) = 0, \tag{5}$$

где (v, f) есть значение функционала v на элементе f.

Наиболее важными видами уравнений с в. н. о. являются *уравнения Фредгольма* и *уравнения со слабой особенностью*; оба эти вида мы будем рассматривать как уравнения в пространстве $X = L_2(\Omega)$; в силу известной теоремы Риса тогда и $X^* = L_2(\Omega)$. Уравнение вида

$$u(x) - \lambda \int_\Omega K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x) \tag{6}$$

называется *интегральным уравнением Фредгольма,* если $K(x, \xi)$ — фредгольмовское ядро, а $f(x)$ и $u(x)$ принадлежат пространству[1]) $L_2(\Omega)$.

---

[1]) Можно рассматривать уравнения Фредгольма и в некоторых других функциональных пространствах. Мы не будем останавливаться на этом.

Если $K(x, \xi)$ — ядро со слабой особенностью (при этом множество Ω необходимо ограничено), то уравнение (6) называется *интегральным уравнением со слабой особенностью.*

Уравнение, сопряженное с уравнением (6), в пространстве $L_2(\Omega)$ имеет вид

$$v(x) - \bar{\lambda}\int_{\Omega} \overline{K(\xi, x)}\, v(\xi)\, d\xi = g(x). \tag{7}$$

Чтобы доказать это, достаточно установить, что оператор K^*, сопряженный с оператором Фредгольма K, где

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi, \tag{8}$$

определяется формулой

$$(K^*v)(x) = \int_{\Omega} \overline{K(\xi, x)}\, v(\xi)\, d\xi. \tag{9}$$

Линейный и ограниченный функционал в $L_2(\Omega)$ можно в силу теоремы Риса отождествить с некоторым элементом пространства $L_2(\Omega)$. Пусть $v(x)$ — такой элемент. Тогда

$$(K^*v, u) = (v, Ku) = \int_{\Omega}\int_{\Omega} \overline{K(x, \xi)}\, \overline{u(\xi)}\, v(x)\, dx\, d\xi =$$
$$= \int_{\Omega} \overline{u(\xi)} \left\{ \int_{\Omega} \overline{K(x, \xi)}\, v(x)\, dx \right\} d\xi = \int_{\Omega} \overline{u(x)} \left\{ \int_{\Omega} \overline{K(\xi, x)}\, v(\xi)\, d\xi \right\} dx.$$

Отсюда видно, что

$$(K^*v)(x) = \int_{\Omega} \overline{K(\xi, x)}\, v(\xi)\, d\xi,$$

что и требовалось доказать.

В §§ 2—4 настоящей главы будут даны доказательства теорем Фредгольма для уравнений с в. н. о. в гильбертовом пространстве. Тем самым указанные теоремы будут доказаны для уравнений Фредгольма и уравнений со слабой особенностью. В §§ 5 и 6 будет дан ответ на один специальный вопрос — об условиях, при которых суммируемое с квадратом решение уравнения со слабой особенностью будет также и непрерывным.

§ 2. Сведение к конечномерному уравнению. Доказательство первой и второй теорем Фредгольма

Теорема 8.2.1 (теорема Банаха). *Пусть A — ограниченный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X, и пусть $|\lambda| < \|A\|^{-1}$. Тогда оператор $(I-\lambda A)^{-1}$, где I — единичный оператор, существует, определен на всем пространстве X и ограничен.*

Ряд

$$I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots + \lambda^n A^n + \ldots \tag{1}$$

сходится по норме, потому что ряд из норм его членов сходится:

$$1 + |\lambda| \, \|A\| + |\lambda|^2 \|A^2\| + \ldots + |\lambda|^n \|A^n\| + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant 1 + |\lambda| \, \|A\| + |\lambda|^2 \|A\|^2 + \ldots + |\lambda|^n \|A\|^n +$$
$$+ \ldots = \frac{1}{1 - |\lambda| \, \|A\|}.$$

В таком случае ряд (1) представляет оператор, определенный на всем пространстве и ограниченный; обозначая сумму ряда (1) через R_λ^A, имеем

$$\|R_\lambda^A\| \leqslant \frac{1}{1 - |\lambda| \cdot \|A\|}. \tag{2}$$

Непосредственным умножением проверяется, что $(I-\lambda A) \times R_\lambda^A = R_\lambda^A (I - \lambda A) = I$ и, следовательно,

$$(I - \lambda A)^{-1} = R_\lambda^A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n. \tag{3}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь уравнение

$$(I - \lambda T) u = f, \tag{4}$$

где T — в. н. о. в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Зададим произвольное положительное число R и будем считать, что параметр λ меняется в замкнутом круге $|\lambda| \leqslant R$ комплексной λ-плоскости. На основании теоремы 7.1.1 можно построить конечномерный оператор — обозначим его через T'' — так, чтобы разность $T' = T - T''$ удовлетворяла неравенству

$$\|T'\| \leqslant \frac{1}{2R}. \tag{5}$$

По теореме Банаха оператор

$$R'_\lambda = R^T_\lambda = (I - \lambda T')^{-1}, \qquad |\lambda| \leqslant R$$

существует, определен на всем пространстве $\mathfrak{H}$ и ограничен. Уравнение (4) умножим слева на R'_λ. При этом

$$R'_\lambda (I - \lambda T) = R'_\lambda (I - \lambda T' - \lambda T'') = I - \lambda R'_\lambda T'',$$

и мы получаем новое уравнение

$$(I - \lambda R'_\lambda T'') u = R'_\lambda f, \tag{6}$$

очевидно, равносильное уравнению (4).

Докажем, что произведение $R'_\lambda T''$ конечномерно. Действительно, конечномерный оператор T'' определяется формулой вида

$$T'' u = \sum_{k=1}^{n} l_k(u) v_k,$$

где $l_k(u)$ — ограниченные линейные функционалы, а v_k — фиксированные элементы пространства $\mathfrak{H}$. Но тогда

$$R'_\lambda T'' u = \sum_{k=1}^{n} l_k(u) w_k, \qquad w_k = R'_\lambda v_k,$$

и оператор $R'_\lambda T''$ конечномерный. Отметим, что элемент w_k зависит еще и от λ, поэтому ниже мы будем обозначать его через $w_{k,\lambda}$. Далее, по теореме Риса $l_k(u) = (u, u_k)$, где u_k — фиксированные элементы пространства $\mathfrak{H}$. Окончательно

$$R'_\lambda T'' u = \sum_{k=1}^{n} (u, u_k) w_{k,\lambda}. \tag{7}$$

Уравнение (6), а с ним и уравнение (4) легко сводятся к эквивалентной линейной алгебраической системе. Положим

$$(u, u_k) = c_k. \tag{8}$$

Тогда из соотношений (6) и (7) получаем

$$u = R'_\lambda f + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k w_{k,\lambda}. \tag{9}$$

Обе части последнего равенства скалярно умножим на u_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что и даст упомянутую систему

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}(\lambda) c_k = f_j(\lambda), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha_{jk}(\lambda) = (w_{k,\lambda}, u_j), \qquad f_j(\lambda) = (R'_\lambda f, u_j). \tag{11}$$

Уравнение (4) и система (10) эквивалентны в следующем смысле. Каждому решению системы (10) соответствует по формуле (9) некоторое решение уравнения (4); наоборот, каждому решению уравнения (4) формула (8) приводит в соответствие некоторое решение системы (10).

Важно отметить, что $\alpha_{jk}(\lambda)$, так же как и $f_j(\lambda)$, суть голоморфные функции комплексной переменной λ в замкнутом круге $|\lambda| \leqslant R$. Действительно,

$$R'_\lambda = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s T'^s,$$

причем ряд сходится в круге $|\lambda| < 2R$ — это следует из неравенства (5). Теперь

$$\alpha_{jk}(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s (T'^s v_k, u_j). \tag{12}$$

Степенной ряд (12) по-прежнему сходится в круге $|\lambda| < 2R$, поэтому функция $\alpha_{jk}(\lambda)$ голоморфна в этом круге и, тем более, в замкнутом круге $|\lambda| \leqslant R$. В том же круге голоморфен и определитель системы (10)

$$D_R(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11}(\lambda) & -\lambda\alpha_{12}(\lambda) & \ldots & -\lambda\alpha_{1n}(\lambda) \\ -\lambda\alpha_{21}(\lambda) & 1 - \lambda\alpha_{22}(\lambda) & \ldots & -\lambda\alpha_{2n}(\lambda) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \ldots & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ -\lambda_1\alpha_{n1}(\lambda) & -\lambda\alpha_{n2}(\lambda) & \ldots & 1 - \lambda\alpha_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Если $|\lambda| \leqslant R$ и $D_R(\lambda) \neq 0$, то однородная система

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}(\lambda) c_k = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

а с ней и однородное уравнение

$$(I-\lambda T)u=0 \tag{15}$$

имеют только тривиальное решение. Если же $D_R(\lambda)=0$, то система (14) и уравнение (15) имеют конечное число линейно независимых нетривиальных решений. Отсюда следует, что *характеристические числа оператора T, лежащие в замкнутом круге $|\lambda|\leqslant R$, совпадают с корнями определителя $D_R(\lambda)$, лежащими в том же круге.*

Теперь нетрудно доказать первую теорему Фредгольма. Пусть λ_0 — характеристическое число оператора T. Возьмем $R>|\lambda_0|$. Тогда $D_R(\lambda_0)=0$; система (14) и уравнение (15) имеют при $\lambda=\lambda_0$ только конечное число линейно независимых решений и, значит, ранг характеристического числа λ_0 конечный.

Докажем вторую теорему Фредгольма.

Голоморфная в замкнутом круге $|\lambda|\leqslant R$ функция $D_R(\lambda)$ имеет в этом круге только конечное число корней. Отсюда следует, что в любом кольце $N\leqslant|\lambda|\leqslant N+1$, $N=0, 1, 2, \ldots$, находится только конечное число характеристических чисел оператора T. Указанные кольца покрывают всю λ-плоскость, множество всех характеристических чисел оператора T представляет собой объединение счетного множества конечных множеств, а такое объединение — либо конечное, либо счетное. Наконец, характеристические числа не могут иметь предельной точки на конечном расстоянии от начала — в противном случае нашелся бы круг, содержащий бесконечное множество характеристических чисел.

§ 3. Доказательство третьей теоремы Фредгольма

Рассмотрим однородное уравнение

$$(I-\bar{\lambda}T^*)v=0, \qquad |\lambda|\leqslant R, \tag{1}$$

сопряженное с уравнением (2.4). Мы сведем его к эквивалентной линейной алгебраической системе приемом, немного отличающимся от приема предшествующего параграфа.

Разложению $T=T'+T''$ соответствует разложение сопряженного оператора $T^*=T'^*+T''^*$; при этом $\|T'^*\|=$

$=\|T'\| \leqslant \frac{1}{2R}$, а оператор T''^* конечномерный: если

$$T''u = \sum_{k=1}^{n} (u, u_k) v_k,$$

то

$$T''^* v = \sum_{k=1}^{n} (v, v_k) u_k. \tag{2}$$

На основании теоремы Банаха (теорема 8.2.1) заключаем, что оператор

$$R_{\bar\lambda}'^* = (I - \bar\lambda T'^*)^{-1}$$

существует, определен на всем пространстве и ограничен. Заметим еще, что операторы $R_{\bar\lambda}'^*$ и R_λ' сопряженные.

В уравнении (1) сделаем замену неизвестной функции

$$v = R_{\bar\lambda}'^* w; \tag{3}$$

уравнение (1) примет вид

$$(I - \bar\lambda T^*) R_{\bar\lambda}'^* w = 0.$$

Имеем

$$(I - \bar\lambda T^*) R_{\bar\lambda}'^* = (I - \bar\lambda T'^* - \bar\lambda T''^*) R_{\bar\lambda}'^* = I - \bar\lambda T''^* R_{\bar\lambda}'^*,$$

и новая неизвестная удовлетворяет уравнению

$$(I - \bar\lambda T''^* R_{\bar\lambda}'^*) w = 0. \tag{4}$$

Оператор $T''^* R_{\bar\lambda}'^*$ конечномерный

$$T''^* R_{\bar\lambda}'^* w = \sum_{k=1}^{n} (R_{\bar\lambda}'^* w, v_k) u_k = \sum_{k=1}^{n} (w, R_\lambda' v_k) u_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (w, w_{k,\lambda}) u_k. \tag{5}$$

Обозначим

$$(w, w_{k,\lambda}) = \gamma_k. \tag{6}$$

Из соотношений (4) и (5) находим

$$w - \bar{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k = 0.$$

Умножив это скалярно на w_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, получим однородную систему

$$\gamma_j - \bar{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_{kj} \gamma_k = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

эквивалентную уравнению (1); величина α_{kj} определена формулой (2.11). Определитель системы (7) равен $\overline{D_R(\lambda)}$ (см. формулу (2.13)).

Пусть λ_0, $|\lambda_0| \leqslant R$, есть характеристическое число оператора T. Тогда $D_R(\lambda_0) = 0$, и матрица системы (2.10) вырождается. Пусть r, $0 \leqslant r < n$, — ранг этой матрицы. Тогда однородная система (2.14) имеет ровно $n - r$ линейно независимых решений. Столько же решений имеет и уравнение (2.15); это означает, что ранг характеристического числа λ_0 равен $n - r$.

Матрицы систем (2.14) и (7) сопряженные, и их ранги равны. Отсюда следует, что $\bar{\lambda}_0$ есть характеристическое число оператора T^* ранга $n - r$. Третья теорема Фредгольма доказана.

§ 4. Доказательство четвертой теоремы Фредгольма

Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$, $s \geqslant 0$, — линейно независимые решения однородного уравнения

$$(I - \bar{\lambda} T^*) v = 0. \tag{1}$$

сопряженного с уравнением

$$(I - \lambda T u) = f. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathfrak{H}_0^*$ подпространство, натянутое на элементы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$; если $s = 0$ (уравнение (1) не имеет нетривиальных решений), то $\mathfrak{H}_0^*$ состоит из одного нуля. Ортогональное дополнение к подпространству $\mathfrak{H}_0^*$ обозначим через $\mathfrak{H}_1^*$,

$$\mathfrak{H}_1^* = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0^*.$$

Введем еще следующие обозначения. Линейно независимые решения однородного уравнения

$$(I-\lambda T)u=0 \tag{3}$$

обозначим через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$, натянутое на них подпространство — через $\mathfrak{H}_0$. Положим еще

$$\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_0.$$

Наконец, положим $A=I-\lambda T$, и пусть $R(A)$ — область значений оператора $A: R(A)=A(\mathfrak{H})$. Заметим, что подпространства $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_0^*$ совпадают соответственно с множествами решений однородных уравнений (3) и (1) или, что то же, уравнений $Au=0$ и $A^*v=0$.

Четвертая теорема Фредгольма равносильна утверждению, что

$$R(A)=\mathfrak{H}_1^*. \tag{4}$$

Необходимость условия теоремы означает, что

$$R(A)\subset\mathfrak{H}_1^*, \tag{5}$$

а достаточность — что

$$R(A)\supset\mathfrak{H}_1^*. \tag{6}$$

Справедливость включений (5) и (6) мы и будем доказывать.

Необходимость. Пусть уравнение (1.1), которое можно записать в виде

$$Au=f, \tag{1'}$$

разрешимо: существует элемент $u\in\mathfrak{H}$, обращающий уравнение (1') в тождество. Тогда $f\in R(A)$. Пусть φ — произвольный элемент подпространства $\mathfrak{H}_0^*$. Тогда

$$(f, \varphi)=(Au, \varphi)=(u, A^*\varphi)=0.$$

Таким образом, f ортогонально к $\mathfrak{H}_0^*$, следовательно, $f\in\mathfrak{H}_1^*$. Включение (5) доказано.

Достаточность. Введем в рассмотрение оператор A_1, определенный только на подпространстве $\mathfrak{H}_1$ и совпадающий там с оператором A,

$$A_1u=Au, \qquad u\in\mathfrak{H}_1; \tag{7}$$

A_1 называется *сужением* оператора A на подпространство $\mathfrak{H}_1$. Ясно, что [1]) $R(A_1) \subset R(A)$. Мы будем доказывать, что

$$R(A_1) \supset \mathfrak{H}_1^*. \tag{8}$$

Уравнение $A_1u=0$ имеет только тривиальное решение $u=0$. Действительно, если $A_1u=0$, то $Au=0$ и $u \in \mathfrak{H}_0$. Но по определению оператора A_1 $u \in \mathfrak{H}_1$. Будучи элементом двух ортогональных пространств, u ортогонален самому себе и, следовательно, $u=0$. Отсюда следует, что оператор A_1 имеет обратный A_1^{-1}; его область определения $D(A_1^{-1})=R(A_1) \subset R(A)$ и, раз включение (5) уже доказано, $D(A_1^{-1}) \subset \mathfrak{H}_1^*$.

Докажем прежде всего, что множество $D(A_1^{-1})=R(A_1)$ плотно в $\mathfrak{H}_1^*$. Действительно, в противном случае нашелся бы элемент $\omega \in \mathfrak{H}_1^*$, $\omega \neq 0$, такой, что $(A_1u, \omega)=(Au, \omega)=0$ для всех $u \in \mathfrak{H}_1$. Равенство $(Au, \omega)=0$, очевидно, верно и тогда, когда $u \in \mathfrak{H}_0$. Но тогда оно верно всюду в $\mathfrak{H}$. Теперь

$$(u, A^*\omega)=(Au, \omega)=0, \quad \forall u \in \mathfrak{H}.$$

Элемент $A^*\omega$ ортогонален ко всему пространству, поэтому $A^*\omega=0$ и $\omega \in \mathfrak{H}_0^*$. Таким образом, ω принадлежит одновременно двум ортогональным подпространствам $\mathfrak{H}_1^*$ и $\mathfrak{H}_0^*$ и, следовательно, $\omega=0$.

Докажем теперь, что оператор A_1^{-1} ограничен. Допустим противное. Тогда найдется последовательность элементов $u_n \in D(A_1^{-1})$ таких, что

$$\frac{\|A_1^{-1}u_n\|}{\|u_n\|} > n, \qquad n=1, 2, \ldots$$

Положим $A_1^{-1}u_n=\psi_n$; очевидно, $\psi_n \in R(A_1^{-1})=D(A_1)=\mathfrak{H}_1$. Теперь $u_n=A_1\psi_n=A\psi_n$ и

$$\frac{\|A\psi_n\|}{\|\psi_n\|} < \frac{1}{n}.$$

Далее положим $w_n=\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}$. Тогда $w_n \in \mathfrak{H}_1$, $\|w_n\|=1$ и

$$Aw_n=w_n-\lambda Tw_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{9}$$

Множество $\{w_n\}$ ограничено, а оператор T вполне непрерывен. Выберем подпоследовательность $\{w_{n_k}\}$ так, чтобы λTw_{n_k}

[1]) На самом деле, как нетрудно видеть, $R(A_1)=R(A)$.

стремилось к некоторому пределу, который мы обозначим через w_0. Из соотношения (9) ясно, что

$$w_{n_k} - \lambda T w_{n_k} \to 0. \tag{10}$$

Отсюда $w_{n_k} \to w_0$, $w_0 \in \mathfrak{H}_1$ и $\|w_0\| = \lim \|w_{n_k}\| = 1$. Переходя в формуле (10) к пределу, получим

$$Aw_0 = w_0 - \lambda T w_0 = 0$$

и, следовательно, $w_0 \in \mathfrak{H}_0$. Но, как мы видели, $w_0 \in \mathfrak{H}_1$, и необходимо $w_0 = 0$, что противоречит равенству $\|w_0\| = 1$. Итак, оператор A_1^{-1} ограничен.

Теперь можно доказать справедливость включения (6). Пусть $f \in \mathfrak{H}_1^*$. Множество $D(A_1^{-1})$ плотно в $\mathfrak{H}_1^*$, поэтому можно найти последовательность $\{f_n\}$ такую, что $f_n \in D(A_1^{-1})$ и $f_n \to f$. Положим $u_n = A_1^{-1} f_n$. Оператор A_1^{-1} ограничен, а последовательность $\{f_n\}$ сходится, поэтому сходится и последовательность $\{u_n\}$; пусть $u_0 = \lim u_n$. Имеем, далее, $f_n = A_1 u_n$; оператор A_1, очевидно, ограничен, и в последнем соотношении можно перейти к пределу: $f = A_1 u_0$. Отсюда следует, что $f \in R(A_1) \subset R(A)$, и включение (6) доказано.

§ 5. Альтернатива Фредгольма

Из теорем третьей и четвертой Фредгольма вытекает важное предложение, известное под названием *альтернативы Фредгольма:*

Пусть T есть в. н. о. в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Либо уравнение

$$(I - \lambda T) u = 0 \tag{1}$$

имеет только тривиальное решение, и тогда неоднородное уравнение

$$(I - \lambda T) u = f \tag{2}$$

разрешимо при любом свободном члене $f \in \mathfrak{H}$ и решение этого уравнения единственно; либо уравнение (1) *имеет нетривиальные решения, и тогда уравнение* (2) *или неразрешимо, или имеет бесконечно много решений.*

Доказательство. Если уравнение (1) имеет только тривиальное решение, то данное значение λ — правильное для оператора T. Тогда значение $\bar{\lambda}$ — правильное для оператора

T^* (теорема 3 Фредгольма), уравнение

$$(I-\bar{\lambda}T^*)v=0 \tag{3}$$

имеет только тривиальное решение $v=0$. Любой элемент $f\in\mathfrak{H}$ к этому решению ортогонален; по теореме 4 Фредгольма уравнение (2) имеет решение. Это решение единственное: если u_1 и u_2 — два решения уравнения (2), то

$$(I-\lambda T)u_1=(I-\lambda T)u_2=f.$$

Вычитая, находим

$$(I-\lambda T)w=0, \qquad w=u_1-u_2.$$

Так как значение λ правильное, то $w=0$ и $u_1=u_2$. Первая часть альтернативы Фредгольма доказана.

Пусть теперь уравнение (1) имеет s линейно независимых решений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$. Тогда для оператора T данное значение λ характеристическое, ранга s. По теореме 3 Фредгольма $\bar{\lambda}$ есть характеристическое значение оператора T^* того же ранга s. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ — соответствующие линейно независимые собственные элементы. По теореме 4 Фредгольма уравнение (2) неразрешимо, если верны не все равенства

$$(f, \omega_k)=0, \qquad k=1, 2, \ldots, s. \tag{4}$$

Если все равенства (4) выполнены, то уравнение (2) имеет бесконечно много решений. Действительно, по теореме 4 Фредгольма в этом случае уравнение (2) имеет хотя бы одно решение u_0; общее решение u уравнения (2), как всегда, можно получить, прибавив к u_0 общее решение однородного уравнения (1)

$$u=u_0+\sum_{k=1}^{s}c_k\varphi_k, \tag{5}$$

где c_k — произвольные постоянные. Вторая часть альтернативы Фредгольма также полностью доказана.

§ 6. О непрерывности решений уравнения со слабой особенностью

Рассмотрим интегральное уравнение со слабой особенностью

$$u(x)-\int_{\Omega}\frac{A(x,\xi)}{r^{\alpha}}u(\xi)\,d\xi=f(x), \tag{1}$$

где $0\leqslant\alpha<m$, $|A(x,\xi)|\leqslant C=\mathrm{const}$ и множество Ω ограничено. Если $f(x)\in L_2(\Omega)$ и выполнены условия ортогональности, предписанные теоремой 4 Фредгольма, то существует решение уравнения (1), также принадлежащее $L_2(\Omega)$.

В приложениях теории интегральных уравнений часто бывают интересны случаи непрерывности решений уравнения (1). Простой случай такого рода описывается следующей теоремой.

Теорема 8.6.1. *Если Ω — ограниченное замкнутое множество, а функции $f(x)$ и $A(x,\xi)$ непрерывны в Ω, то любое решение уравнения* (1), *принадлежащее классу $L_2(\Omega)$, непрерывно в Ω.*

Выберем произвольно малое число ε и непрерывную функцию $\eta(t)$ вещественной переменной t, определенную при $t\geqslant 0$ и удовлетворяющую соотношениям

$$\eta(t)=1,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\qquad 0<\eta(t)<1,\quad \frac{\varepsilon}{2}<t<\varepsilon,$$
$$\eta(t)=0,\quad t\geqslant\varepsilon.$$

Положим

$$K_1(x,\xi)=\frac{A(x,\xi)\,\eta(r)}{r^{\alpha}},\qquad K_2(x,\xi)=\frac{A(x,\xi)[1-\eta(r)]}{r^{\alpha}}.$$

При этом

$$\frac{A(x,\xi)}{r^{\alpha}}=K_1(x,\xi)+K_2(x,\xi);$$

ядро уравнения (1) представлено в виде суммы двух ядер, из которых первое имеет слабую особенность, но отлично от нуля лишь при $r<\varepsilon$, а второе просто непрерывно.

Пусть $u(x)$ — какое-либо решение уравнения (1), причем $u\in L_2(\Omega)$. Уравнение запишем в виде

$$u(x)-(K_1u)(x)=g(x), \tag{2}$$

где

$$(K_1u)(x)=\int_\Omega K_1(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

$$g(x)=f(x)+\int_\Omega K_2(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

Функция $g(x)$ в Ω непрерывна — это легко вытекает из непрерывности функций $f(x)$ и $K_2(x, \xi)$ и из соотношения

$$|(K_2u)(x_1)-(K_2u)(x_2)|=\left|\int_\Omega [K_2(x_1, \xi)-K_2(x_2, \xi)]\, u(\xi)\, d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_\Omega [K_2(x_1, \xi)-K_2(x_2, \xi)]^2\, d\xi\right\}^{1/2}\| u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Если $|A(x, \xi)|\leqslant C$, то и $|A(x, \xi)\,\eta(r)|\leqslant C$. Число ε выберем столь малым, чтобы одновременно выполнялись два неравенства:

$$\frac{C\,|S_1|\,(\varepsilon H)^{\frac{m-\alpha}{2}}}{m-\alpha}<1, \tag{5}$$

$$\frac{C\,|S_1|\,\varepsilon^{m-\alpha}}{m-\alpha}<1; \tag{6}$$

в неравенстве (5) H означает диаметр множества Ω.

В силу формулы (3.10) гл. 7 из неравенства (5) следует, что

$$\| K_1\|_{L_2(\Omega)}<1;$$

рассматривая соотношение (2) как интегральное уравнение с неизвестной $u(x)$ и данной $g(x)$, видим, что к этому уравнению применима теорема 8.2.1 Банаха, и функцию $u(x)$ можно представить в виде ряда

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(K_1^n g)(x), \tag{7}$$

сходящегося в метрике пространства $L_2(\Omega)$. Докажем, что этот ряд сходится в Ω равномерно. Функция $g(x)$ ограничена; пусть $|g(x)|\leqslant M=\mathrm{const}$. Тогда

$$|(K_1g)(x)|=\left|\int_\Omega \frac{A(x, \xi)\,\eta(r)}{r^\alpha}\, g(\xi)\, d\xi\right|=$$

$$=\left|\int_{\Omega\cap(r<\varepsilon)} \frac{A(x, \xi)\,\eta(r)}{r^\alpha}\, g(\xi)\, d\xi\right|\leqslant MC\int_{r<\varepsilon}\frac{d\xi}{r^\alpha},$$

и по формуле (3.9) гл. 7

$$|(K_1 g)(x)| \leqslant \frac{MC\,|S_1|\,\varepsilon^{m-\alpha}}{m-\alpha}.$$

По индукции

$$|(K_1^n g)(x)| \leqslant M\left[\frac{C\,|S_1|\,\varepsilon^{m-\alpha}}{m-\alpha}\right]^n;$$

в силу неравенства (6) ряд (7) равномерно сходится в Ω. По теореме 7.4.1 члены этого ряда непрерывны, а тогда его сумма — функция $u(x)$ — также непрерывна.

РАЗДЕЛ IV

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ГЛАВА 9

УРАВНЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Дифференциальное выражение и дифференциальное уравнение

В самом общем случае дифференциальное уравнение в частных производных с m независимыми переменными можно написать в виде

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}\right) = 0, \tag{1}$$

наивысший порядок k производной от неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называется его *порядком*. Нетрудно написать также общий вид *системы* дифференциальных уравнений в частных производных.

В этой книге рассматриваются почти исключительно *линейные уравнения в частных производных второго порядка*. Как и в предшествующих разделах, совокупность значений переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будем рассматривать как точку x m-мерного евклидова пространства E_m с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

В уравнениях, связанных с задачами физики, независимые переменные часто суть время и пространственные координаты; для их обозначения мы иногда будем пользоваться буквами t, x, y, z.

Линейное уравнение второго порядка с неизвестной функцией u и с независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в самом общем случае имеет вид

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{k=1}^{m} A_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x) u = f(x), \tag{2}$$

где A_{jk}, A_k, A_0, f суть заданные функции от x.

Уравнение (2) на самом деле содержит при $j \neq k$ не отдельные слагаемые $A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ и $A_{kj}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}$, а их сумму

$$(A_{jk}+A_{kj})\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Выражение $A_{jk}+A_{kj}$ можно разбить на два слагаемых каким угодно способом, и мы всегда будем считать, что

$$A_{kj}(x) = A_{jk}(x), \tag{3}$$

так что матрица коэффициентов при вторых производных («матрица старших коэффициентов») оказывается симметричной. Эта матрица в дальнейшем будет играть весьма важную роль.

Левую часть уравнения (2) будем называть *дифференциальным выражением второго порядка.*

Функция $f(x)$, стоящая в правой части уравнения (2), называется его *свободным членом.* Как обычно, различают уравнения *однородные,* когда $f(x) \equiv 0$, и *неоднородные,* когда $f(x) \not\equiv 0$.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. *Уравнение колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \tag{4}$$

Здесь $m = 2$; свободный член $f(x, t)$ пропорционален внешней силе, действующей в точке x струны в момент времени t. Матрица старших коэффициентов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В более сложном случае, когда струна колеблется в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, уравнение колебаний струны записывается так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \quad h = \text{const.} \tag{6}$$

Матрица старших коэффициентов по-прежнему имеет вид (5).

2. *Уравнение колебаний мембраны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y, t). \tag{7}$$

Матрица его старших коэффициентов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

3. Для *уравнения теплопроводности*

$$k\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(x, y, z, t) \tag{9}$$

матрица старших коэффициентов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

4. Для *уравнения Лапласа*

$$\Delta u=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=f(x) \tag{11}$$

матрица старших коэффициентов есть единичная матрица порядка m.

5. Уравнение

$$(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{12}$$

имеет матрицу старших коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 1+y^2 & -xy \\ -xy & 1+x^2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

§ 2. Классификация уравнений второго порядка

Уравнения второго порядка в частных производных классифицируются в зависимости от свойств характеристических чисел матрицы старших коэффициентов данного уравнения.

Напомним, что характеристические числа матрицы

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

суть корни уравнения (I — единичная матрица)

$$\operatorname{Det}(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

и что все характеристические числа симметричной матрицы вещественны.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, несколько более общее, чем уравнение (1.2)

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}+ \\ +\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)=0, \quad (1)$$

где Φ — произвольная функция своих аргументов. Матрица его старших коэффициентов симметрична, а тогда все ее характеристические числа вещественны. Зафиксируем некоторую точку x, в которой определены коэффициенты уравнения (1), и пусть в этой точке матрица его старших коэффициентов имеет α положительных, β отрицательных и γ нулевых характеристических чисел; очевидно,

$$\alpha+\beta+\gamma=m.$$

Будем говорить в этом случае, что в рассматриваемой точке x уравнение (1) принадлежит к типу (α, β, γ). Уравнение (1) принадлежит к типу (α, β, γ) на некотором точечном множестве, если оно принадлежит к типу (α, β, γ) в каждой точке данного множества. Очевидно, если старшие коэффициенты A_{jk} в уравнении (1) постоянные, то тип этого уравнения один и тот же во всем пространстве. Если изменить знаки всех членов дифференциального уравнения, то числа α и β поменяются местами, поэтому мы будем считать тождественными типы (α, β, γ) и (β, α, γ).

Рассмотрим в качестве примеров уравнения пп. 1—5 предшествующего параграфа. В примерах 1—4 матрицы старших коэффициентов — диагональные и их характеристические числа совпадают с элементами главной диагонали. Отсюда сразу видно, что в любой точке пространства уравнение струны имеет тип (1, 1, 0), уравнение мембраны — тип (2, 1, 0), уравнение теплопроводности — тип (3, 0, 1), уравнение Лапласа в m-мерном пространстве — тип (m, 0, 0).

Характеристические числа матрицы (1.13) суть корни уравнения

$$\begin{vmatrix} 1+y^2-\lambda & -xy \\ -xy & 1+x^2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

они равны

$$\lambda_1 = 1 + x^2 + y^2, \qquad \lambda_2 = 1.$$

Отсюда видно, что в любой точке (x, y) уравнение (1.12) имеет тип (2,0,0).

Нетрудно указать уравнения, тип которых в различных точках может оказаться различным. Таково, например, *уравнение Трикоми*

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Матрица его старших коэффициентов

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

имеет характеристические числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = y$; поэтому названное уравнение имеет при $y > 0$ тип (2,0,0), при $y < 0$ — тип (1,1,0), а при $y = 0$ — тип (1,0,1).

Три из рассмотренных здесь типов уравнений в частных производных играют в математической физике особую роль.

А. Тип $(m, 0, 0) = (0, m, 0)$ называется *эллиптическим*. Уравнение (1), следовательно, принадлежит к эллиптическому типу в данной точке, если в ней все характеристические числа матрицы старших коэффициентов отличны от нуля и имеют один и тот же знак.

Важнейшим примером уравнения эллиптического типа является *уравнение Лапласа*. Эллиптическим является уравнение (1.12), а также уравнение Трикоми при $y > 0$.

Б. Тип $(m-1, 0, 1) = (0, m-1, 1)$ называется *параболическим*. Таким образом, уравнение (1) принадлежит в данной точке к параболическому типу, если в этой точке матрица старших коэффициентов имеет одно характеристическое число, равное нулю, а все остальные — отличные от нуля и одного знака.

Важнейшим примером параболического уравнения является *уравнение теплопроводности*, которое мы здесь напишем в виде

$$k\frac{\partial u}{\partial x_m}-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=f(x). \qquad (3)$$

Ниже (см. раздел VI) мы придадим этой записи, а также записи волнового уравнения (см. ниже) несколько иную форму. Частным случаем уравнения (3) является уравнение (1.9). К параболическому типу принадлежит уравнение Трикоми при $y=0$.

В. Тип $(m-1,\ 1,\ 0)=(1,\ m-1,\ 0)$ называется *гиперболическим*. Уравнение (1) будет, следовательно, гиперболическим в данной точке, если в этой точке характеристические числа матрицы его старших коэффициентов все отличны от нуля, причем одно из этих чисел отличается по знаку от всех остальных.

Важнейший пример гиперболического уравнения — это *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=f(x); \qquad (4)$$

его частными случаями являются уравнения колебаний струны и мембраны. К гиперболическому типу принадлежит и уравнение Трикоми при $y<0$.

Важность выделенных здесь трех типов уравнений в частных производных — эллиптического, параболического и гиперболического — определяется двумя обстоятельствами. С одной стороны, все до сих пор известные задачи физики приводят, как правило, к уравнениям названных типов; с другой стороны, теория этих уравнений разработана с несравненно большей полнотой, чем теория уравнений в частных производных других типов.

Уравнения типа $(\alpha, \beta, 0)$, где $\alpha \geqslant 2$ и $\beta \geqslant 2$, часто объединяют под общим названием *ультрагиперболических*. Простейшее ультрагиперболическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}=0.$$

Эллиптические, параболические и гиперболические уравнения мы будем рассматривать как уравнения математической физики.

Имеется довольно много работ, посвященных уравнениям так называемых «смешанных» типов, т. е. уравнениям, тип которых может меняться от точки к точке. Подробно об этом см. [2] и [3]. Появился ряд работ, в которых изучаются уравнения типов $(\alpha, 0, \gamma)$ («эллиптико-параболические уравнения»). Из последних работ этого направления укажем статью [1].

§ 3. Краевые условия и краевые задачи

Желая полностью охарактеризовать физическую задачу, мы не можем ограничиться только дифференциальным уравнением; необходимо добавить некоторые дополнительные соотношения, которые обычно носят характер так называемых краевых (или граничных) условий.

Поясним сказанное на простых примерах. Колебания струны описываются уже известным нам дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t). \tag{1}$$

Допустим, что струна имеет длину l и в состоянии равновесия она занимала отрезок $[0, l]$ оси x. Далее допустим, что в момент времени $t = 0$ струна была выведена из положения равновесия и начала колебаться. Задача состоит в том, чтобы исследовать отклонение $u(x, t)$ точки струны с произвольной абсциссой $x \in [0, l]$ и в произвольный момент, следующий за начальным, т. е. в произвольный момент $t > 0$. Иначе говоря, функция $u(x, t)$, удовлетворяющая уравнению (1), должна быть определена на плоскости переменных x и t в области, изображенной на рис. 9; граница этой области состоит из отрезка $[0, l]$ оси x и из двух лучей $x = 0$, $t > 0$ и $x = l$, $t > 0$.

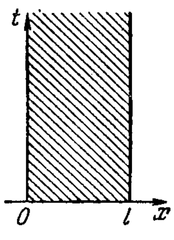

Рис. 9.

Единственными данными в дифференциальном уравнении (1) являются величина a^2, которая определенным образом зависит от физических свойств струны (от ее плотности и натяжения), и функция $f(x, t)$, характеризующая внешнюю силу, которая в момент времени t действует на точку x струны. Но уравнение (1) не содержит, например, никакой информации о том, каким образом струна была выведена из положения равновесия, а также о том, каково состояние концов струны; они могут быть жестко закреплены или, наоборот, свободны; может случиться, что концы струны не закреплены, но их перемещения стеснены теми или иными ограничениями. Указанная информация должна быть сообщена особо. Вывести струну из состояния равновесия можно, сообщив ее точкам либо начальное смещение, либо начальную скорость, либо и то и другое вместе. Пусть точке x струны, $0 \leqslant x \leqslant l$, сообщены начальное смещение $\varphi_0(x)$ и начальная скорость $\varphi_1(x)$. Тогда искомая функция $u(x, t)$ должна удовлетворять соотношениям

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{2}$$

Пусть еще известны законы колебания концов струны: пусть в момент времени $t \geqslant 0$ смещение левого конца струны равно $\psi_1(t)$, а смещение правого конца — $\psi_2(t)$. Тогда должны выполняться еще соотношения

$$u\,|_{x=0} = \psi_1(t), \qquad u\,|_{x=l} = \psi_2(t). \tag{3}$$

Условия (3) нет нужды ставить, если струна бесконечная, т. е. если она в состоянии равновесия заполняет всю ось x.

Дополнительные условия (2) и (3) должны выполняться на линиях $t=0$, $x=0$, $x=l$, т. е. на границе области (рис. 9), в которой должна быть определена функция $u(x, t)$. По этой причине указанные условия и называются граничными или краевыми.

Заметим, что условия (2) и (3) не вполне независимы: если требовать, чтобы искомая функция $u(x, t)$ была непрерывной не только внутри, но и на границе области своего определения, то необходимо, чтобы

$$\varphi_0(0) = \psi_1(0), \qquad \varphi_0(l) = \psi_2(0). \tag{4}$$

Соотношения (4) называются *условиями согласования*. Они вытекают из требования, чтобы смещение концов струны было непрерывным в начальный момент времени. Если требовать, чтобы на границе области (рис. 9) были непрерывны также некоторые из производных функции $u(x, t)$, то могут возникнуть новые условия согласования. Так, если требовать непрерывности первых производных, то необходимо

$$\varphi_1(0)=\psi_1'(0), \qquad \varphi_1(l)=\psi_2'(0); \tag{4а}$$

если требовать непрерывности вторых производных, то появляются условия

$$\begin{aligned}\psi_1''(0)-a^2\varphi_0''(0)&=f(0,0),\\ \psi_2''(0)-a^2\varphi_0''(l)&=f(l,0).\end{aligned} \tag{4б}$$

Ниже (раздел VI) будет показано, что при достаточно слабых ограничениях уравнение (1) имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее краевым условиям (2) и (3). Это означает, что уравнения (1) — (3) содержат всю информацию, необходимую для исследования колебания струны (решение единственно), и не содержит избыточной, противоречивой информации (решение существует).

Рассмотрим еще один пример. Пусть некоторое однородное изотропное тело занимает в трехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3) область Ω, ограниченную поверхностью Γ. Допустим, что в этом теле распределены источники тепла интенсивности $F(x)=F(x_1, x_2, x_3)$, не зависящей от времени. Это означает, что в любой подобласти $\Omega'\subset\Omega$ за любой промежуток времени длительности δt выделяется количество тепла, равное

$$\delta t\int_{\Omega'}F(x)\,dx.$$

Допустим, что в теле установилось стационарное, т. е. не зависящее от времени, распределение температур. Тогда температура в точке $x=(x_1, x_2, x_3)$ тела удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=-f(x), \tag{5}$$

где функция $f(x)$ только постоянным множителем отличается от $F(x)$. Одного дифференциального уравнения (5) недостаточно, чтобы вполне определить распределение температур в теле Ω; это видно хотя бы потому, что уравнение (5) имеет бесчисленное множество решений. Необходима дополнительная информация. Ее можно получить, например, так.

Поверхность Γ рассматриваемого тела доступна для наблюдений, и в любой ее точке температуру можно измерить. Допустим, что нами измерена температура во всех точках поверхности Γ, и пусть в точке $x \in \Gamma$ температура u равна $\varphi(x)$. Тогда мы получаем дополнительное краевое условие

$$u|_\Gamma = \varphi(x), \qquad x \in \Gamma. \tag{6}$$

В разделе V будет показано, что задача (5) — (6) имеет, в довольно широких условиях, одно и только одно решение.

Если тело неоднородно и неизотропно, то мы приходим не к уравнению (5), а к более общему уравнению вида

$$-\sum_{j,\,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x), \tag{7}$$

которое, так же как уравнение (5), — эллиптическое. Задачу интегрирования уравнения (7) (в частности, уравнения Лапласа (5) при краевом условии (6)) называют *задачей Дирихле.*

Дополнительная информация для уравнения (7) может описываться краевыми условиями, отличными от условия (6). Так, если известно, что в точке $x \in \Gamma$ интенсивность теплового потока равна заданной функции $\Psi(x)$, то

$$\left[\sum_{j,\,k=1}^{3} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\right]_\Gamma = \psi(x), \tag{8}$$

где $\psi(x)$ отличается от $\Psi(x)$ только некоторым постоянным множителем, а ν — внешняя нормаль к поверхности Γ. Для уравнения Лапласа

$$A_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases}$$

и краевое условие (8) принимает вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \psi(x). \tag{9}$$

Задача (7) — (8) (в частности, задача (5), (9)) носит название *задачи Неймана.*

Задачи Дирихле и Неймана можно ставить не только в трехмерном, но и в любом m-мерном пространстве.

Дадим теперь общую формулировку понятий краевых условий и краевой задачи.

Пусть нам дано некоторое дифференциальное уравнение в частных производных

$$Lu = f(x). \tag{10}$$

Будем считать, что решение этого уравнения подлежит определению в некоторой области Ω пространства E_m; границу этой области обозначим через Γ. На всей границе Γ или на некоторой ее части задаются значения одного, а иногда и нескольких дифференциальных выражений от искомой функции u

$$G_k u\,|_\Gamma = \varphi_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, l. \tag{11}$$

Уравнения (11) называются *краевыми условиями*, а задача об интегрировании дифференциального уравнения (10) при краевых условиях (11) называется *краевой задачей*.

§ 4. Задача Коши

Для уравнения (1.2) задача Коши ставится следующим образом. В пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ задана некоторая гладкая поверхность Γ. С каждой точкой $x \in \Gamma$ (x — точка с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$) связывается некоторое направление λ, некасательное к Γ. В окрестности (односторонней или двусторонней) поверхности Γ требуется найти решение уравнения (1.2), удовлетворяющее так называемым *условиям Коши*

$$u\,\Big|_\Gamma = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial \lambda}\Big|_\Gamma = \varphi_1(x). \tag{1}$$

Здесь $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — функции, заданные на Γ; будем считать, что $\varphi_1(x)$ — непрерывная, а $\varphi_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ называются *данными Коши*, а Γ — *поверхностью, несущей данные Коши*, или просто *поверхностью Коши*.

Заметим, что краевые условия (3.2) суть условия Коши для уравнения колебаний струны; роль поверхности Коши играет отрезок $[0, l]$ оси x.

От краевых задач, рассмотренных в § 3, задача Коши отличается тем, что здесь заранее не указывается область, в которой должно быть определено искомое решение. Тем не менее мы будем рассматривать задачу Коши как одну из краевых задач.

В дальнейшем окажется полезным следующее замечание: зная условия Коши (1), можно найти значения всех первых производных искомой функции на поверхности Коши Г. Для доказательства возьмем на Г произвольную точку x и построим в ней *местную систему координат* $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Так называется система декартовых координат, начало которой находится в точке x, оси $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$ расположены

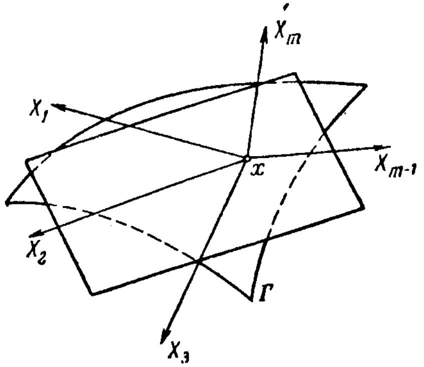

Рис. 10.

в $(m-1)$-мерной плоскости, касательной к Г в точке x, а ось X_m направлена по нормали к Г в той же точке (рис. 10). Зная значение функции $u=\varphi_0(x)$ на Г, мы сразу найдем производные по $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial X_k}\right|_\Gamma = \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_k}, \quad k=1, 2, \ldots, m-1.$$

Далее

$$\varphi_1(x) = \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial X_k} \cos(\lambda, X_k).$$

Угол (λ, X_m) отличен от прямого, потому что направление λ — некасательное к Г. Но тогда $\cos(\lambda, X_m) \neq 0$ и последнее равенство дает нам значение недостающей производной:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial X_m}\right|_\Gamma = \frac{1}{\cos(\lambda, X_m)}\left[\varphi_1(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \varphi_0}{\partial X_k} \cos(\lambda, X_k)\right].$$

Зная производные в местной системе координат, мы найдем значения производных в системе координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ по формуле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_\Gamma = \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial u}{\partial X_j}\right|_\Gamma \cos(X_j, x_k).$$

§ 5. Проблемы существования, единственности и корректности для краевой задачи

1. Пусть поставлена некоторая краевая задача. Решить ее — значит найти все функции, удовлетворяющие данному дифференциальному уравнению и данным краевым условиям. Обычно искомую функцию подчиняют еще некоторым ограничениям общего характера, которые часто дают возможность рассматривать эту функцию как элемент того или иного функционального пространства; обозначим его через B_1. Так, ставя задачу Дирихле для уравнения Лапласа, можно требовать, чтобы искомая функция была непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$; в таком случае искомая функция, если она существует, есть элемент пространства $C(\bar{\Omega})$. Можно искомую функцию подчинить другим ограничениям, например, можно потребовать, чтобы интегралы

$$\int_\Omega u^2 dx, \quad \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 dx = \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$$

были конечными. В этом случае искомую функцию можно рассматривать как элемент такого гильбертова пространства, в котором норма определена формулой

$$\| u \|^2 = \int_\Omega \{u^2 + (\operatorname{grad} u)^2\} dx.$$

Ограничения, накладываемые на искомую функцию, вынуждают накладывать некоторые ограничения и на заданные функции, входящие в правые части дифференциального уравнения и краевых условий. Обычно в таких случаях оказывается, что совокупность этих правых частей также можно рассматривать как элемент некоторого другого функционального пространства B_2. Во многих интересных случаях пространства B_1 и B_2 банаховы.

Рассмотрим тот случай, когда дифференциальные выражения, входящие как в дифференциальное уравнение, так и в краевые условия, линейны. Совокупность этих дифференциальных выражений порождает некоторый линейный оператор $\mathfrak{A}$, который действует из пространства B_1 в пространство B_2 и преобразует искомую функцию $u(x)$ в упомянутую выше совокупность правых частей дифференциального уравнения и краевых условий. Обозначая эту совокупность через Φ, можно записать нашу краевую задачу в виде уравнения

$$\mathfrak{A}u = \Phi. \tag{1}$$

Оператор $\mathfrak{A}$ будем называть *оператором данной краевой задачи.*

Теперь можно сказать, что решить краевую задачу — значит найти все элементы пространства B_1, которые преобразуются оператором $\mathfrak{A}$ в заданный элемент $\Phi \in B_2$.

Обычно стараются ставить краевые условия так, чтобы краевая задача имела одно и только одно решение. Это требует в каждом случае доказательства теоремы существования и теоремы единственности. Теорема единственности равносильна утверждению, что существует оператор $\mathfrak{A}^{-1}$, обратный оператору $\mathfrak{A}$, а теорема существования — что область значений оператора $\mathfrak{A}$ совпадает с пространством B_2. Если верны обе теоремы — единственности и существования, то оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ существует и определен на всем пространстве B_2.

При решении краевых задач играет важную роль, кроме вопросов существования и единственности решения, еще и вопрос о так называемой *корректности* краевой задачи.

К понятию корректности легко подойти с помощью простых физических соображений. В основе определения физических величин в конечном счете лежит процесс измерения, который всегда связан с некоторой погрешностью. В частности, с погрешностью определяется и элемент Φ в уравнении (1) — совокупность данных краевой задачи. Возникает вопрос: как погрешность в данных краевой задачи отразится на ее решении? В связи с этим вопросом находится следующее определение.

Краевая задача называется *корректной в паре банаховых пространств B_1 и B_2, если решение краевой задачи единственно в B_1 и существует при любых данных из B_2 и если достаточно малому изменению начальных данных в норме B_2 соответствует сколь угодно малое изменение решения в норме B_1.*

К вопросу о корректности мы вернемся в конце книги, в разделе VII, где, в частности, будет показано, что корректность задачи (1) равносильна ограниченности оператора $\mathfrak{A}^{-1}$. Здесь мы ограничимся тем, что приведем два примера некорректных краевых задач. Первый пример принадлежит Адамару, который впервые ввел понятие корректности краевой задачи.

2. Рассмотрим уравнение Лапласа на плоскости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

В качестве поверхности Γ возьмем ось x и на ней зададим данные Коши. Окрестностью, в которой мы будем искать решение, пусть будет полоса $0<y<\delta$, где δ — произвольное положительное число; эту полосу обозначим через Ω. В качестве некасательного направления λ возьмем y. Условия Коши пусть будут такие:

$$u\Big|_{y=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=0,\quad -\infty<x<\infty. \tag{3}$$

Задание совокупности данных равносильно заданию единственной функции $\varphi(x)$, которую будем считать непрерывной и ограниченной на всей оси. Тогда эту функцию можно рассматривать как элемент пространства $C(-\infty,+\infty)$, которое в нашем случае играет роль пространства B_2. За B_1 примем пространство $C(\Omega)$ функций, непрерывных и ограниченных в полосе Ω. За область определения оператора краевой задачи (2) — (3) примем множество функций из $C(\Omega)$, имеющих непрерывные вторые производные и удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=0.$$

Докажем, что в паре пространств B_1, B_2 задача (2) — (3) некорректна. Можно доказать единственность решения этой задачи. Отсюда легко следует, что функции $\varphi(x)\equiv 0$ соответствует решение $u \equiv 0$. Сообщим теперь функции $\varphi(x) \equiv 0$ малое (в норме пространства B_2) изменение: рассмотрим задачу Коши для уравнения (2) с данными Коши

$$u\Big|_{y=0} = \frac{\cos nx}{n}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \tag{4}$$

где n — достаточно большое натуральное число.

Решение новой задачи есть

$$u(x, y) = \frac{\cos nx \operatorname{ch} ny}{n},$$

что легко проверяется подстановкой в уравнения (2) и (4). Очевидно,

$$\|\varphi\|_{B_2} = \left\|\frac{\cos nx}{n}\right\|_{B_2} = \max_{-\infty<x<+\infty}\left|\frac{\cos nx}{n}\right| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

В то же время

$$\|u\|_{B_1} = \max_{\substack{-\infty<x<\infty \\ 0\leqslant y\leqslant \delta}}\left|\frac{\cos nx \operatorname{ch} ny}{n}\right| = \frac{\operatorname{ch} n\delta}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Таким образом, сколь угодно малые (по норме B_2) изменения данных могут вызвать сколь угодно большие (по норме B_1) изменения решения. Это значит, что задача Коши для уравнения Лапласа в рассмотренной нами паре пространств некорректна.

3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \tag{5}$$

Это уравнение — гиперболического типа. Действительно, матрица его старших коэффициентов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

ее характеристические числа — корни уравнения

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

— суть $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$; они отличны от нуля и имеют разные знаки. Заметим еще, что уравнение (5) переходит в однородное уравнение колебаний струны, если сделать замену независимых переменных

$$x_1 = x + at, \qquad x_2 = x - at.$$

Для уравнения (5) поставим задачу Дирихле в квадрате рис. 11; этот квадрат обозначим через Ω, а его контур — через Γ. Условия на Γ пусть имеют вид

$$\begin{aligned} u|_{x_1=0} &= \varphi_1(x_2), & u|_{x_2=0} &= \psi_1(x_1), \\ u|_{x_1=1} &= \varphi_2(x_2), & u|_{x_2=1} &= \psi_2(x_1). \end{aligned} \tag{6}$$

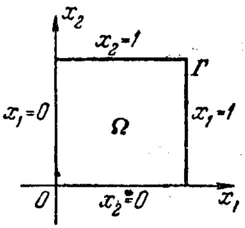

Рис. 11.

За B_1 и B_2 примем пространства $C(\overline{\Omega})$ и $C(\Gamma)$ соответственно. Чтобы решение могло быть непрерывным, должны быть выполнены условия согласования

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \psi_1(0), & \varphi_2(0) &= \psi_1(1), \\ \varphi_1(1) &= \psi_2(0), & \varphi_2(1) &= \psi_2(1). \end{aligned} \tag{7}$$

Задача (5) — (6) неразрешима при произвольно заданных непрерывных функциях (6). Чтобы убедиться в этом, найдем общее решение уравнения (5). Представив его в виде $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0$, видим, что $\frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_2)$, где функция f произвольна. Интегрируя, далее, по x_2, получим

$$u(x_1, x_2) = F_1(x_1) + F_2(x_2), \qquad F_2'(x_2) = f(x_2),$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции. Можно удовлетворить первым двум условиям (6):

$$\begin{aligned} F_1(0) + F_2(x_2) &= \varphi_1(x_2), \\ F_1(x_1) + F_2(0) &= \psi_1(x_1). \end{aligned}$$

Одна из постоянных $F_1(0)$ и $F_2(0)$, очевидно, остается произвольной. Положим $F_2(0) = 0$. Тогда

$$F_1(x_1) = \psi_1(x_1), \qquad F_2(x_2) = \varphi_1(x_2) - \psi_1(0).$$

Решение определено полностью; равенство $F_2(0) = 0$ вытекает из первого равенства (7). Ясно, что удовлетворить оставшимся краевым условиям (6) невозможно, если функции φ_2 и ψ_2 произвольны.

Из сказанного следует, что задача (5) — (6) некорректна в паре пространств $C(\overline{\Omega})$ и $C(\Gamma)$.

ГЛАВА 10

ХАРАКТЕРИСТИКИ. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД. ФОРМУЛЫ ГРИНА

§ 1. Преобразование независимых переменных

Пусть дано уравнение в частных производных второго порядка, линейное относительно старших производных

$$\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}+\Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)=0. \qquad (1)$$

Допустим, что вместо независимых переменных x_1, x_2, …, x_m введены новые независимые переменные

$$\xi_r=\xi_r(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad r=1, 2, \ldots, m. \qquad (2)$$

Выясним, как при этом изменится наше уравнение.

Для упрощения записи условимся не писать знака суммы, руководствуясь при этом следующим правилом: если в некотором одночленном выражении дважды повторяется переменный индекс, принимающий значения от 1 до m, то по этому индексу производится суммирование от 1 до m. Уравнение (1) можно теперь записать проще:

$$A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}+\Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right)=0.$$

Допустим, что в некоторой области изменения точки x преобразование (2) взаимно однозначно, а его якобиан отличен от нуля. Такое преобразование независимых переменных будем называть *невырожденным*. Предположим еще, что функции ξ_r имеют непрерывные вторые производные. Вычислим встречающиеся в уравнении (1) производные

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\frac{\partial u}{\partial \xi_r}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r \partial \xi_s}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_s}{\partial x_j}+\frac{\partial u}{\partial \xi_r}\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (1), получим новое уравнение

$$A_{jk}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_r\partial\xi_s}+\Phi_1\left(\xi_1, \ldots, \xi_m, u, \frac{\partial u}{\partial\xi_1}, \frac{\partial u}{\partial\xi_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial\xi_m}\right)=0,$$

$$\Phi_1=\Phi+A_{jk}\frac{\partial^2\xi_r}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial\xi_r}.$$

Введем обозначение

$$A_{jk}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_j}=\tilde{A}_{rs}. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\tilde{A}_{rs}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_r\partial\xi_s}+\Phi_1\left(\xi_1, \ldots, \xi_m, u, \frac{\partial u}{\partial\xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial\xi_m}\right)=0. \tag{4}$$

Таким образом, при преобразовании независимых переменных уравнение (1) переходит в уравнение того же вида, что и исходное; меняются лишь его коэффициенты. Заметим, что матрица старших коэффициентов уравнения (4) симметрична

$$\tilde{A}_{rs}=A_{jk}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_j}=A_{kj}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_k}.$$

Меняя в последней сумме обозначения j и k местами, получаем

$$\tilde{A}_{rs}=A_{jk}\frac{\partial\xi_s}{\partial x_k}\frac{\partial\xi_r}{\partial x_j}=\tilde{A}_{sr}.$$

Теорема 10.1.1. *Тип уравнения в частных производных* (1.1) *не меняется при невырожденном преобразовании независимых переменных.*

Из алгебры известен следующий факт. Пусть некоторая матрица приведена невырожденным преобразованием к диагональному виду. Тогда количества положительных, отрицательных и нулевых собственных чисел данной матрицы соответственно равны количествам положительных, отрицательных и нулевых диагональных элементов преобразованной матрицы.

Обозначим через J якобиеву матрицу преобразования (2). Ее определитель — якобиан этого преобразования — отличен от нуля, поэтому существует обратная матрица J^{-1}. Формула (3) равносильна матричному равенству

$$\tilde{A}=JAJ', \tag{5}$$

в котором штрих обозначает транспонированную матрицу.

Пусть невырожденное линейное преобразование с матрицей σ преобразует матрицу A в диагональную матрицу D

$$A = \sigma D \sigma'.$$

Тогда по формуле (5)

$$\tilde{A} = J\sigma D\sigma' J' = (J\sigma) D (J\sigma)',$$

и матрица A сводится невырожденным преобразованием (с матрицей $J\sigma$) к той же диагональной матрице D. В таком случае количества положительных, отрицательных и нулевых собственных чисел матриц A и $\tilde{A}$ соответственно совпадают. Это и требовалось доказать.

§ 2. Характеристики. Соотношение между данными Коши на характеристике

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \Phi\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0, \tag{1}$$

линейное относительно старших производных. Составим уравнение первого порядка

$$A_{jk}(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0. \tag{2}$$

Оно называется *уравнением характеристик* дифференциального уравнения (1). Если функция $\omega(x_1\ x_2, \ldots, x_m)$ удовлетворяет уравнению характеристик, то поверхность (в случае двух измерений — линия), определяемая уравнением

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m) = C, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная, называется *характеристической поверхностью* (соответственно *характеристической линией*) или *характеристикой* данного дифференциального уравнения (1).

Формально уравнение характеристик строится так: надо составить квадратичную форму

$$(At, t) = A_{jk} t_j t_k, \tag{4}$$

соответствующую матрице A старших коэффициентов уравнения (1), положить в этой форме $t_k = \frac{\partial \omega}{\partial x_t}$ и полученное выражение приравнять нулю.

Отметим важное свойство характеристик: они инвариантны при преобразовании независимых переменных. Это означает следующее: если $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ есть решение уравнения (2) и если преобразование независимых переменных (1.2) переводит функцию $\omega(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в функцию $\tilde{\omega}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, то эта новая функция есть решение уравнения

$$\tilde{A}_{jk} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi_k} = 0, \tag{2a}$$

которое является уравнением характеристик для преобразованного дифференциального уравнения (1.4).

Действительно,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_k}.$$

Подставив это в уравнение (2) и воспользовавшись формулой (1.3), найдем, что $\tilde{\omega}$ удовлетворяет уравнению (2а).

Уравнение эллиптического типа не имеет вещественных характеристик. Действительно, если уравнение (1) — эллиптическое, то квадратичная форма (4) — определенная и обращается в нуль (при вещественных t_k) только тогда, когда $t_1 = t_2 = \ldots = t_m = 0$. В таком случае уравнение характеристик имеет решением только $\omega \equiv \mathrm{const}$, что не определяет никакой поверхности.

Покажем, что на характеристической поверхности данные Коши связаны некоторым соотношением. Отсюда будет следовать, что на характеристической поверхности данные Коши нельзя задавать независимо.

Пусть данные Коши заданы на достаточно гладкой поверхности Г, определяемой уравнением

$$\xi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \tag{5}$$

и имеют следующий вид:

$$u \Big|_\Gamma = \psi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial \lambda}\Big|_\Gamma = \psi_1(x), \tag{6}$$

где λ — направление, некасательное к Г. Как было выяснено в § 4 гл. 9, зная данные (6), можно найти значения всех первых производных функции u на поверхности Коши Г, Введем новую систему координат. Координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ введем произвольно, а ξ_m положим равным ξ; выбирая координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$, позаботимся только о том, чтобы преобразование было взаимно однозначным с отличным от нуля якобианом и чтобы функции ξ_r имели непрерывные вторые производные. В новых координатах уравнение поверхности Коши Г принимает особо простую форму $\xi_m = 0$.

Допустим теперь, что Г — характеристическая поверхность, т. е. что

$$A_{jk} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} = 0.$$

В переменных ξ_r коэффициент при производной $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_m^2}$ тогда обращается в нуль, и наше уравнение по отношению к переменной ξ_m есть уравнение первого порядка.

Покажем, что *на поверхности* Г *можно вычислить все производные, входящие в преобразованное уравнение* (1), *исходя только из данных Коши*. Действительно, величина $u|_\Gamma = \psi_0(x)$ известна. Первые производные $\left.\frac{\partial u}{\partial \xi_r}\right|_\Gamma$ можно определить так, как об этом сказано выше. Вторые производные, не содержащие двукратного дифференцирования по ξ_m, можно найти, дифференцируя первые производные по $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$, т. е. по направлениям, касательным к Г. Единственная вторая производная, которую нельзя вычислить, исходя только из данных Коши, — это $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_m^2}$, но как раз она в преобразованном уравнении отсутствует.

Значения всех слагаемых в левой части уравнения (1), преобразованного к переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, могут быть вычислены на поверхности Коши Г. Подставив эти значения в уравнение, получим, что некоторая заданная функция должна тождественно равняться нулю. Это и есть соотношение между данными Коши на характеристике; если оно нарушено, то задача Коши с данными на характеристике решения не имеет.

Для примера рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0. \tag{7}$$

Его уравнение характеристик есть

$$-\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2=0,$$

откуда $\omega=f(x_m)$, где f — произвольная функция. Уравнение характеристической поверхности имеет вид $f(x_m)=\text{const}$; решая его относительно x_m, получим уравнение вида $x_m=\text{const}$. Таким образом, характеристики уравнения (7) суть плоскости $x_m=\text{const}$. Пусть поверхность Коши есть плоскость $x_m=0$, а условия Коши имеют вид

$$u\Big|_{x_m=0}=\varphi_0(x_1,\ \ldots,\ x_{m-1}),\qquad \frac{\partial u}{\partial x_m}\Big|_{x_m=0}=\varphi_1(x_1,\ \ldots,\ x_{m-1}). \tag{8}$$

Полагая в уравнении (7) $x_m=0$, мы сразу получим соотношение

$$\varphi_1=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_k^2}.$$

Отсюда видно, что второе из условий (8) задавать нет смысла — достаточно задать только условие

$$u\,|_{x_m=0}=\varphi_0(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{m-1}).$$

§ 3. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим специально случай линейного невырожденного преобразования переменных

$$\xi_r=j_{rk}x_k;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad j_{rk}=\text{const}. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение матрицу J с элементами j_{rk}. Преобразование (1) можно записать в виде

$$\xi=Jx. \tag{1$_1$}$$

Зафиксируем точку x, тогда матрица A старших коэффициентов уравнения станет постоянной. Матрицу J можно выбрать так, чтобы преобразованная матрица старших коэффициентов (формула (1.5)) $\tilde{A}=JAJ'$ была диагональной:

$\tilde{A}_{jk}=0$, $j \neq k$. Тогда в зафиксированной нами точке уравнение (1.1) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \Phi_1\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_m}\right) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\nu_k = \tilde{A}_{kk}$. Такой вид уравнения второго порядка, когда отсутствуют смешанные вторые производные, называется *каноническим видом* этого уравнения. Таким образом, *уравнение в частных производных второго порядка, линейное относительно старших производных, можно в любой точке пространства привести к каноническому виду с помощью линейного преобразования независимых переменных.*

Очевидно, что уравнение можно привести к каноническому виду сразу во всем пространстве, если старшие коэффициенты A_{jk} постоянные.

Уравнения Лапласа, теплопроводности и волновое имеют канонический вид.

Канонический вид уравнения тесно связан с его типом. В силу закона инерции квадратичных форм среди чисел ν_k столько же положительных, отрицательных и нулей, сколько их среди чисел λ_k — характеристических чисел матрицы старших коэффициентов. Поэтому тип уравнения в частных производных второго порядка, линейного относительно старших производных, можно определить так: уравнение (1.1) принадлежит к типу (α, β, γ), если в канонической форме (2) этого уравнения среди чисел ν_k есть α положительных, β отрицательных и γ нулей.

§ 4. Случай двух независимых переменных

Уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными примечательно тем, что его можно привести к каноническому виду не только в отдельно взятой точке, но и в некоторой области, в которой тип уравнения не меняется.

Будем обозначать независимые переменные через x и y, старшие коэффициенты — через A, B, C. Тогда уравнение можно записать в виде

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0; \qquad (1)$$

будем считать, что в каждой точке хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

Напишем матрицу старших коэффициентов

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

и уравнение ее характеристических чисел

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix}=0$$

или

$$\lambda^2-(A+C)\lambda+AC-B^2=0.$$

Это уравнение имеет вещественные корни

$$\lambda_{1,2}=\frac{A+C\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}}{2};$$

они одного знака, если $AC-B^2>0$, и разных знаков, если $AC-B^2<0$; если $AC-B^2=0$, то один из корней равен нулю, а другой отличен от нуля. Отсюда следует, что *уравнение* (1) *эллиптическое, если* $AC-B^2>0$, *параболическое, если* $AC-B^2=0$, *и гиперболическое, если* $AC-B^2<0$; другие типы невозможны.

Уравнение характеристик

$$A\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2=0 \tag{2}$$

можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению следующим простым приемом. Пусть $\omega(x, y)$ — решение этого уравнения. Рассмотрим характеристику

$$\omega(x, y)=\text{const}.$$

Вдоль этой характеристики выполняется соотношение

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega}{\partial y}dy=0$$

или

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}:\frac{\partial\omega}{\partial y}=dy:(-dx).$$

Уравнение (2) однородно относительно $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial\omega}{\partial y}$; заменив их пропорциональными величинами dy и $-dx$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$A\,dy^2-2B\,dx\,dy+C\,dx^2=0. \tag{3}$$

Обратно, если $\omega(x, y)=\text{const}$ есть общий интеграл уравнения (3), то легко убедиться, что функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет уравнению характеристик.

Уравнение (3) распадается на два уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx}&=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}, \\ \frac{dy}{dx}&=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

совпадающие, если уравнение (1) параболическое, и различные в остальных случаях.

Рассмотрим, прежде всего, случай, когда уравнение (1) эллиптическое: $AC-B^2>0$. Правые части уравнений (4) суть сопряженные между собой комплексные величины. Пусть $\xi(x, y)+i\eta(x, y)=\text{const}$ есть общий интеграл первого уравнения (4); мы считаем при этом, что ξ и η вещественны при вещественных x и y. Примем ξ и η за новые независимые переменные, и пусть $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ — новые старшие коэффициенты. В § 1 было указано, что характеристики инвариантны при преобразовании независимых переменных; поэтому новому уравнению характеристик

$$\tilde{A}\left(\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\xi}\right)^2+2\tilde{B}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\xi}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\eta}+\tilde{C}\left(\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial\eta}\right)^2=0 \tag{5}$$

должна удовлетворять функция $\tilde{\omega}=\xi+i\eta$. Отсюда $\tilde{A}=\tilde{C}$, $\tilde{B}=0$; разделив преобразованное уравнение на $\tilde{A}$, приведем его к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\Phi_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0. \tag{6}$$

Обратимся к параболическому случаю. Пусть $\xi(x, y)=\text{const}$ — общий интеграл каждого из уравнений (4). Введем новые переменные ξ и η, где $\eta=\eta(x, y)$ — какая-либо функция, независимая от $\xi(x, y)$. Уравнение (5) имеет решение $\tilde{\omega}=\xi$, поэтому $\tilde{A}=0$. Кроме того, тип уравнения не изменился при замене переменных, поэтому $\tilde{A}\tilde{C}-\tilde{B}^2=0$. Отсюда $\tilde{B}=0$. Разделив преобразованное уравнение (1) на $\tilde{C}$, приведем его к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\Phi_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0. \tag{7}$$

В гиперболическом случае в качестве новых независимых переменных введем $\xi_1=\xi+\eta$, $\eta_1=\xi-\eta$, где $\xi(x, y)=\text{const}$ и $\eta(x, y)=\text{const}$ суть общие интегралы уравнений (4). Уравнение (5) имеет два решения: $\tilde{\omega}=\frac{1}{2}(\xi_1+\eta_1)$ и $\tilde{\omega}=\frac{1}{2}(\xi_1-\eta_1)$, поэтому $\tilde{A}=-\tilde{C}$ и $\tilde{B}=0$. Разделив преобразованное уравнение (1) на $\tilde{A}$, приведем его к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1^2}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial\eta_1^2}+\Phi_1\left(\xi_1, \eta_1, u, \frac{\partial u}{\partial\xi_1}, \frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right)=0. \tag{8}$$

§ 5. Формально сопряженные дифференциальные выражения

Рассмотрим линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$Lu = A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u. \tag{1}$$

В евклидовом пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ зададим конечную область Ω, ограниченную кусочно гладкой поверхностью Γ. Будем предполагать, что в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$ коэффициенты A_{jk} имеют непрерывные вторые производные, A_k — непрерывные первые производные, а коэффициент A_0 непрерывен. Будем также предполагать, что $u \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$, т. е. что функция $u(x)$ непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

Построим дифференциальное выражение M, которое назовем *формально сопряженным с* L:

$$Mu = \frac{\partial^2 (A_{jk} u)}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial (A_k u)}{\partial x_k} + A_0 u. \tag{2}$$

Удобно преобразовать L к следующему виду:

$$\begin{gathered} Lu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu, \\ B_k = A_k - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_j}, \qquad C = A_0. \end{gathered} \tag{3}$$

Если L записано в такой форме, то M примет вид

$$Mu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial (B_k u)}{\partial x_k} + Cu. \tag{4}$$

Исходя из этого выражения, легко проверить, что *формальная сопряженность есть свойство взаимное*, т. е. что выражение, формально сопряженное с M, есть L. Действительно,

$$Mu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + \left(C - \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right) u.$$

Пусть N есть дифференциальное выражение, сопряженное с M, тогда

$$Nu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial (B_k u)}{\partial x_k} + \left(C - \frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right) u = Lu.$$

Если $M \equiv L$, то выражение L называется *формально самосопряженным.*

Как видно из формул (3) и (4), формально сопряженные выражения отличаются только средними членами этих формул. Ясно, что $M \equiv L$ тогда и только тогда, когда $B_k \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому дифференциальное выражение L будет формально самосопряженным тогда и только тогда, когда $B_k \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Отсюда следует, что самосопряженное дифференциальное выражение второго порядка можно привести к виду

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu, \quad A_{jk} = A_{kj}. \tag{5}$$

Оператор Лапласа и волновой оператор формально самосопряжены; оператор теплопроводности не является формально самосопряженным.

§ 6. Формулы Грина

Пусть дифференциальное выражение L определено формулой (5.3), коэффициенты которой удовлетворяют условиям § 5. Пусть, далее, функции u, $v \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$. Составим интеграл

$$\int_\Omega vLu\,dx = \int_\Omega v\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dx + \int_\Omega v\left(B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu\right)dx. \tag{1}$$

Применив к первому интегралу справа формулу интегрирования по частям (§ 1 гл. 2), получим так называемую *первую формулу Грина*

$$\int_\Omega vLu\,dx = -\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx + \\ + \int_\Omega v\left(B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu\right)dx + \int_\Gamma vA_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\,d\Gamma. \tag{2}$$

Здесь ν — внешняя (по отношению к области) нормаль к поверхности Γ.

Напишем первую формулу Грина для формально сопряженного дифференциального выражения M, поменяв при этом местами u и v:

$$\int_\Omega uMv\,dx = -\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k}dx + \int_\Omega u\left\{-B_k\frac{\partial v}{\partial x_k}+\left(C-\frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right)v\right\}dx + \int_\Gamma uA_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j)\,d\Gamma. \tag{3}$$

Вычтем формулу (3) из формулы (2). Можно убедиться, что все объемные интегралы справа исчезнут. Действительно, так как $A_{jk}=A_{kj}$, то первые интегралы в правых частях формул (2) и (3) совпадают. Далее, интегрируя по частям, получаем

$$-\int_\Omega uB_k\frac{\partial v}{\partial x_k}dx = \int_\Omega v\frac{\partial(B_k u)}{\partial x_k}dx - \int_\Gamma B_k uv\cos(\nu,\ x_k)\,d\Gamma = \int_\Omega\left\{vB_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+uv\frac{\partial B_k}{\partial x_k}\right\}dx - \int_\Gamma B_k uv\cos(\nu,\ x_k)\,d\Gamma.$$

Отсюда ясно, что объемные интегралы в формулах (2) и (3) справа тождественны.

В результате вычитания получаем *вторую формулу Грина*

$$\int_\Omega (vLu - uMv)\,dx = \int_\Gamma\left[A_{jk}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_j}-u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)+B_k uv\right]\cos(\nu,\ x_k)\,d\Gamma. \tag{4}$$

Формулы Грина несколько упрощаются для формально самосопряженных дифференциальных выражений. В этом случае $B_k\equiv 0$, и мы получаем следующие, более простые формулы: первая формула Грина

$$\int_\Omega vLu\,dx = -\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx + \int_\Omega Cuv\,dx + \int_\Gamma vA_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j)\,d\Gamma; \tag{5}$$

вторая формула Грина

$$\int\limits_{\Omega}(vLu-uLv)\,dx=\int\limits_{\Gamma}A_{jk}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k}-u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\cos(\nu,\ x_j)\,d\Gamma. \tag{6}$$

Напишем формулы Грина для трех важнейших дифференциальных выражений (их обычно называют операторами) математической физики: Лапласа, теплопроводности и волнового.

1. Оператор Лапласа

$$\Delta=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

— формально самосопряженный; его коэффициенты имеют значения $A_{jk}=\delta_{jk}$, $C=0$. Подставив эти значения в формулу (5), получим *первую формулу Грина для оператора Лапласа*:

$$\int\limits_{\Omega}v\Delta u\,dx=-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}dx+\int\limits_{\Gamma}v\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma. \tag{7}$$

Отметим два частных случая формулы (7).

При $u=v$ получаем

$$\int\limits_{\Omega}u\,\Delta u\,dx=-\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2dx+\int\limits_{\Gamma}u\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma. \tag{8}$$

Как уже отмечалось (§ 3 гл. 4), интеграл

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2dx$$

называется *интегралом Дирихле*.

Полагая в (7) $v\equiv 1$, получаем важную для дальнейшего формулу

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma=\int\limits_{\Omega}\Delta u\,dx. \tag{9}$$

Вторая формула Грина для оператора Лапласа имеет вид

$$\int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx = \int_\Gamma \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\Gamma. \tag{10}$$

2. Оператор теплопроводности

$$L = \frac{\partial}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

не является формально самосопряженным. Для этого оператора

$$A_{mm} = 0;\ A_{kk} = -1,\ 1 \leqslant k \leqslant m-1;\ A_{jk} = 0,\ j \neq k;$$
$$B_m = 1;\ B_k = 0,\quad 1 \leqslant k \leqslant m-1;\quad C = 0.$$

Оператор M, формально сопряженный с оператором теплопроводности, имеет вид

$$M = -\frac{\partial}{\partial x_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

По формулам (2) и (4) находим

$$\int_\Omega vLu\,dx = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k} + v\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) dx + \\ + \int_\Gamma v \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu,\ x_k)\,d\Gamma; \tag{11}$$

$$\int_\Omega (vLu - uMv)\,dx = \\ = \int_\Gamma \left[\sum_{k=1}^{m-1} \left(v\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\cos(\nu,\ x_k) + uv\cos(\nu,\ x_m)\right] d\Gamma. \tag{12}$$

3. Волновой оператор часто обозначают символом $\square$

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Этот оператор — формально самосопряженный; значения его коэффициентов таковы:

$$A_{mm}=1;\quad A_{kk}=-1,\quad 1\leqslant k\leqslant m-1;\quad A_{jk}=0,\\ j\neq k;\quad C=0.$$

Формулы (5) и (6) для волнового оператора имеют следующий вид:

$$\int\limits_{\Omega} v\Box u\,dx=\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial v}{\partial x_m}\right]dx+\\ +\int\limits_{\Omega} v\left[\frac{\partial u}{\partial x_m}\cos(\nu,\ x_m)-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_k)\right]d\Gamma,\tag{13}$$

$$\int\limits_{\Omega}(v\Box u-u\Box v)\,dx=\int\limits_{\Gamma}\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x_m}-u\frac{\partial v}{\partial x_m}\right)\cos(\nu,\ x_m)-\right.\\ \left.-\sum_{k=1}^{m-1}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k}-u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\cos(\nu,\ x_k)\right]d\Gamma.\tag{14}$$

РАЗДЕЛ V

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

ГЛАВА 11

УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Основные понятия

Мы начнем с самого простого и важного из эллиптических уравнений, а именно с *уравнения Лапласа*. Это уравнение имеет вид

$$-\Delta u = f(x). \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ — заданная функция. Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (1) называется *неоднородным уравнением Лапласа*. При $f(x) \equiv 0$ имеем *однородное уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0. \tag{2}$$

Неоднородное уравнение Лапласа часто называют *уравнением Пуассона*.

В более подробной записи уравнения Лапласа — неоднородное и однородное — выглядят так:

$$-\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x)$$

и соответственно

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

Рассмотрим некоторую замкнутую поверхность Г, не обязательно связную, и пусть Г ограничивает область Ω, конечную (рис. 12) или бесконечную (рис. 13). В обоих случаях предполагается, что сама поверхность Г конечна. Будем изучать поведение решений однородного уравнения Лапласа в подобных областях.

Функция $u(x)$ называется *гармонической в конечной области* Ω, если она в этой области дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет однородному уравнению Лапласа.

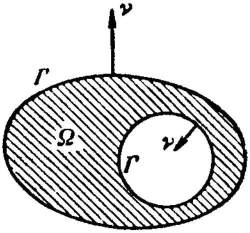

Рис. 12.

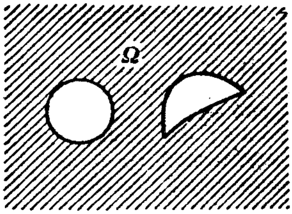

Рис. 13.

Будем говорить, что функция $u(x)$ *гармоническая в бесконечной области* Ω, если в каждой точке этой области, находящейся на конечном расстоянии от начала, $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, удовлетворяет однородному уравнению Лапласа и на бесконечности имеет порядок $O\left(\frac{1}{|x|^{m-2}}\right)$, так что для достаточно больших $|x|$ имеет место неравенство

$$|u(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{m-2}}, \tag{3}$$

где m — размерность пространства, а C — некоторая постоянная. В случае двумерной области ($m=2$) условие (3) означает, что гармоническая в бесконечной области функция ограничена на бесконечности.

Подчеркнем, что определение гармонической функции относится только к случаю *открытой области* (т. е. открытого связного множества); если говорят о функции, гармонической в замкнутой области, то под этим понимают, что данная функция гармонична в более широкой открытой области.

Заметим еще, что определение гармонической функции не накладывает никаких ограничений на поведение функции на границе области.

Пример 1. Если Ω — бесконечная область, то функция $u(x)\equiv 1$ гармоническая только при $m=2$. Если $m>2$, то в бесконечной области эта функция негармонична. Однако она гармонична в любой конечной области при любом m.

Пример 2. В двумерной плоскости функция

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2},$$

где $z=x+iy$, гармонична в любой области, которая не содержит начала координат.

Пример 3. Функция $\operatorname{Re}\sqrt{z}$, $z=x+iy$, гармонична в круге $|z|<R$ (R — любое положительное число), разрезанном вдоль какого-либо из его радиусов.

Пример 4. Функция двух переменных $u=x^2+y^2$ не является гармонической ни в какой области, так как она не удовлетворяет однородному уравнению Лапласа

$$\Delta(x^2+y^2)=4\neq 0.$$

Пример 5. Функция $u=x^2-y^2$ гармонична в любой конечной области.

На двумерной плоскости конформное преобразование не меняет однородного уравнения Лапласа (см. § 3 гл. 13). В случае любого m это не так, но все же существует преобразование, которое переводит любую гармоническую функцию в гармоническую же. Это *преобразование Кельвина*, которое переводит точку $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в точку $x'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$, симметричную с точкой x относительно сферы данного радиуса R с центром в начале координат, а данную функцию $u(x)$ переводит в функцию

$$w(x')=\frac{R^{m-2}}{|x'|^{m-2}}u(x). \tag{4}$$

Напомним, что точки x и x' называются симметричными относительно названной выше сферы, если они лежат на одном луче, исходящем из начала, и если $|x|\cdot|x'|=R^2$. Декартовы координаты симметричных точек связаны соотношением

$$x_k=x_k'\frac{R^2}{|x'|^2}. \tag{5}$$

Простой, хотя и довольно громоздкий подсчет приводит к соотношению

$$\Delta_{x'}w=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k'^2}=\frac{|x|^{m+2}}{R^{m+2}}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=\frac{|x|^{m+2}}{R^{m+2}}\Delta_x u,$$

поэтому если $\Delta_x u=0$, то $\Delta_{x'}w=0$.

§ 2. Сингулярное решение уравнения Лапласа

Пусть $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $\xi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ — две точки m-мерного евклидова пространства E_m. Обозначим

$$r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - \xi_k)^2} \tag{1}$$

и рассмотрим функцию

$$v(x, \xi) = \frac{1}{r^{m-2}} \tag{2}$$

в предположении, что $m > 2$. Будем считать точку ξ фиксированной, так что $v(x, \xi)$ можно рассматривать как функцию точки x.

Функция $v(x, \xi)$ разрывна при $x = \xi$. Докажем, что в любой области, которая не содержит точки ξ, функция $v(x, \xi)$ гармоническая. Прежде всего, в такой области функция $v(x, \xi)$ непрерывна вместе с производными любого порядка. Далее, на бесконечности

$$v(x, \xi) = O\left(\frac{1}{|x|^{m-2}}\right). \tag{3}$$

Действительно, $r = |x - \xi| \geqslant |x| - |\xi|$. Нас интересует поведение функции v при достаточно больших $|x|$, поэтому мы можем считать, что $|x| > 2|\xi|$. Тогда $|\xi| < \frac{1}{2}|x|$, $r > \frac{1}{2}|x|$ и

$$v(x, \xi) < \frac{2^{m-2}}{|x|^{m-2}}.$$

Соотношение (3) существенно, если рассматриваемая область бесконечная.

Наконец, функция (2) удовлетворяет однородному уравнению Лапласа.

В самом деле, $\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k - \xi_k}{r}$; отсюда

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = -\frac{m-2}{r^{m-1}} \frac{\partial r}{\partial x_k} = -\frac{(m-2)(x_k - \xi_k)}{r^m}.$$

Далее

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = -\frac{m-2}{r^m} + \frac{m(m-2)(x_k - \xi_k)^2}{r^{m+2}} = \frac{m-2}{r^m}\left(\frac{m(x_k - \xi_k)^2}{r^2} - 1\right).$$

Суммируя, находим

$$\Delta v = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = \frac{m-2}{r^m}\left[\frac{m}{r^2}\sum_{k=1}^{m}(x_k-\xi_k)^2 - m\right] = 0.$$

Функция $v(x, \xi)$ называется *сингулярным решением уравнения Лапласа.*

Как мы увидим ниже, для применений сингулярного решения важно то, что оно с определенной скоростью стремится к бесконечности при $x \to \xi$. При $m=2$ функция (2) делается тождественно равной единице; такая функция не может служить сингулярным решением.

В случае $m=2$ сингулярным решением уравнения Лапласа называется функция

$$v(x, \xi) = \ln\frac{1}{r}. \tag{4}$$

Эта функция гармонична в любой конечной области, не содержащей точки ξ.

Сингулярное решение уравнения Лапласа есть симметричная функция от x и ξ. Поэтому при фиксированном x функция $v(x, \xi)$ представляет собой гармоническую функцию от ξ в любой области, не содержащей точки x; в случае двух измерений эта область должна быть конечной.

Замечание. Для читателя, знакомого с понятием обобщенных функций, заметим, что сингулярное решение уравнения Лапласа удовлетворяет уравнению

$$-\Delta v = c\delta(x-\xi),$$

где δ — функция Дирака, а c — подходящим образом выбранная постоянная.

§ 3. Интегральное представление функций класса $C^{(2)}$

Рассмотрим конечную область Ω в пространстве m переменных $(m>2)$, ограниченную кусочно гладкой поверхностью Γ, и в ней функцию $u(\xi)$; ξ — переменная точка области. Предположим, что $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$. Зададим в области Ω произвольную точку x. Вырежем эту точку шаром $Ш_\varepsilon$ с центром в точке x и радиусом ε; поверхность шара $Ш_\varepsilon$ обозначим через S_ε. Радиус ε возьмем столь малым, чтобы шар $Ш_\varepsilon$ целиком находился внутри области Ω (рис. 14).

В области $\Omega^{(\varepsilon)} = \Omega \setminus \overline{Ш}_\varepsilon$ обе функции $u(\xi)$ и сингулярное решение уравнения Лапласа

$$v(x, \xi) = \frac{1}{r^{m-2}}$$

принадлежат классу $C^{(2)}(\overline{\Omega}^{(\varepsilon)})$, и к этим функциям можно применить формулу Грина (6.10) гл. 10

$$\int\limits_{\Omega \setminus Ш_\varepsilon} (v \Delta u - u \Delta v)\, d\xi =$$
$$= \int\limits_\Gamma \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d_\xi \Gamma + \int\limits_{S_\varepsilon} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d_\xi S_\varepsilon. \qquad (1)$$

Индекс ξ у знака дифференциала означает, что интегрирование совершается по переменной точке ξ.

Формулу (1) можно несколько упростить, заметив, что $\Delta v = 0$ в $\Omega \setminus \overline{Ш}_\varepsilon$. Далее на сфере S_ε $r = \varepsilon$, а нормаль ν, будучи внешней по отношению к области $\Omega \setminus \overline{Ш}_\varepsilon$, направлена против радиуса. Поэтому на S_ε

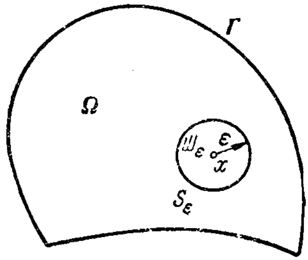

Рис. 14.

$$v = \frac{1}{\varepsilon^{m-2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}.$$

Воспользуемся известной формулой $dS_r = r^{m-1}\, dS_1$, где S_r — сфера радиуса r. При $r = \varepsilon$ получаем

$$dS_\varepsilon = \varepsilon^{m-1}\, dS_1.$$

Наконец, введем обозначение

$$\theta = \frac{\xi - x}{\varepsilon}.$$

Если $\xi \in S_\varepsilon$, то $|\theta| = 1$ и, следовательно, $\theta \in S_1$. При этом $\xi = x + \varepsilon\theta$. Теперь можно формулу (1) преобразовать к более простому виду:

$$\int\limits_{\Omega \setminus Ш_\varepsilon} \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u(\xi)\, d\xi = \int\limits_\Gamma \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right) d_\xi \Gamma +$$
$$+ \int\limits_{S_1} \left[\varepsilon \frac{\partial u(x + \varepsilon\theta)}{\partial \nu} - (m-2)\, u(x + \varepsilon\theta)\right] dS_1. \qquad (2)$$

В формуле (2) положим $\varepsilon \to 0$. Левая часть формулы имеет пределом несобственный интеграл

$$\int_\Omega \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u(\xi)\, d\xi.$$

Справа первый интеграл не зависит от ε и совпадает со своим пределом. Второй интеграл распадается на два:

$$\int_{S_1} \left[\varepsilon \frac{\partial u(x+\varepsilon\theta)}{\partial\nu} - (m-2)\, u(x+\varepsilon\theta)\right] dS_1 =$$
$$= \varepsilon \int_{S_1} \frac{\partial u(x+\varepsilon\theta)}{\partial\nu} dS_1 - (m-2) \int_{S_1} u(x+\varepsilon\theta)\, dS_1. \qquad (3)$$

Первые производные функции $u(\xi)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{\Omega}$ и потому ограничены. Пусть

$$\left|\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\right| \leqslant M = \mathrm{const}.$$

Тогда

$$\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\cos(\nu, \xi_k)\right| \leqslant mM.$$

Отсюда

$$\left|\varepsilon \int_{S_1} \frac{\partial u(x+\varepsilon\theta)}{\partial\nu} dS_1\right| \leqslant \varepsilon m M |S_1| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Во втором слагаемом справа в формуле (3) можно перейти к пределу под знаком интеграла, потому что функция u непрерывна; предел этого слагаемого, следовательно, равен

$$-(m-2) \int_{S_1} u(x)\, dS_1 = -(m-2)\,|S_1|\, u(x).$$

В результате предельного перехода в формуле (2) получается соотношение

$$\int_\Omega \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u(\xi)\, d\xi =$$
$$= \int_\Gamma \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial\nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right) d_\xi\Gamma - (m-2)\,|S_1|\, u(x).$$

Отсюда

$$u(x)=\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)d_{\xi}\Gamma-$$

$$-\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r^{m-2}}\Delta u(\xi)\,d_{\xi}\Gamma. \qquad (4)$$

Формула (4) называется *интегральным представлением функции класса* $C^{(2)}$.

При $m=3$ $|S_1|=4\pi$, и интегральное представление (4) принимает вид

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r}\right)d_{\xi}\Gamma-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta u(\xi)\,d\xi. \qquad (5)$$

При $m=2$ формула (4) теряет смысл. Но если исходить из соответствующего сингулярного решения $v(x,\xi)=\ln\frac{1}{r}$ и повторить предшествующий вывод, то можно получить формулу

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\nu}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\right)d_{\xi}\Gamma-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega}\ln\frac{1}{r}\Delta u(\xi)\,d\xi, \qquad (6)$$

которая дает интегральное представление функции класса $C^{(2)}$ в случае двух независимых переменных.

Из интегрального представления (4) вытекает ряд важных следствий; их установлением мы займемся в последующих параграфах настоящей главы.

§ 4. Интегральное представление гармонической функции

Пусть $u(x)$ — функция, гармоническая в конечной области Ω с кусочно гладкой границей Γ; по самому определению гармонической функции $u\in C^{(2)}(\Omega)$. Допустим еще, что $u\in C^{(2)}(\bar{\Omega})$, тогда для функции $u(x)$ можно написать интегральное представление (3.4). При этом $\Delta u=0$, объемный интеграл исчезает и получается формула

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d_\xi \Gamma, \qquad (1)$$

которая называется *интегральным представлением гармонической функции.*

Для $m = 2$ интегральное представление гармонической функции получается из формулы (3.5) при $\Delta u = 0$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{r} \right) d_\xi \Gamma. \qquad (2)$$

Теорема 11.4.1. *Функция, гармоническая в некоторой области, имеет в этой области производные всех порядков.*

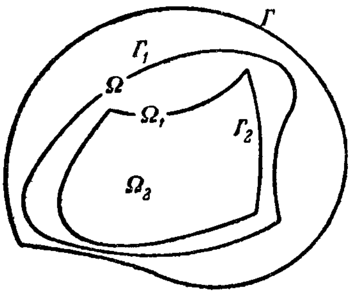

Рис. 15.

Пусть функция $u(x)$ гармонична в области Ω, конечной или бесконечной. Из области Ω выделим конечную внутреннюю подобласть Ω_1; термин «внутренняя» означает, что Ω_1 вместе со своей границей Γ_1 лежит внутри Ω (рис. 15); подобласть Ω_1 выберем так, чтобы ее граница была кусочно гладкой. Очевидно, $u \in C^{(2)}(\overline{\Omega}_1)$; к области Ω_1 можно применить интегральное представление (1):

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d_\xi \Gamma, \qquad (3)$$

$$x \in \Omega_1.$$

Построим подобласть Ω_2, внутреннюю по отношению к Ω_1 (рис. 15), и будем считать, что $x \in \overline{\Omega}_2$. Тогда подынтегральная функция в (3) непрерывна по совокупности переменных x и ξ и имеет непрерывные же производные всех порядков по декартовым координатам $x_1, x_2, \ldots, x_m$ точки x. По известной теореме о дифференцировании интеграла по параметру функция $u(x)$ имеет производные всех порядков по x_1,

$x_2, \ldots, x_m$, и эти производные можно получить дифференцированием под знаком интеграла в формуле (1).

Чтобы завершить доказательство, остается заметить следующее: подобласти Ω_1 и Ω_2 можно выбрать так, чтобы любая заранее указанная точка $x \in \Omega$ попала в Ω_2.

§ 5. Понятие о потенциалах

Интегральное представление (3.4) дает повод ввести три интегральных оператора специального вида.

Пусть Γ — ограниченная кусочно гладкая поверхность. В интегралах представления (3.4) заменим функции $\Delta u(\xi)$, $\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu}$, $u(\xi)$ соответственно произвольными функциями $\rho(\xi)$, $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$. Мы получим тогда три интеграла, зависящих от x как от параметра:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{r^{m-2}} \mu(\xi)\, d_\xi \Gamma, \qquad \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \sigma(\xi)\, d_\xi \Gamma, \qquad \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r^{m-2}} \rho(\xi)\, d\xi,$$

которые называются соответственно *потенциалом простого слоя, потенциалом двойного слоя и объемным потенциалом*. Функции $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$, $\rho(\xi)$ называются *плотностями* этих потенциалов.

Исследуем простейшие свойства потенциалов простого и двойного слоя. В отличие от формулы (3.4), в которой обязательно требуется, чтобы точка x лежала внутри Γ, мы будем здесь предполагать, что x может находиться как внутри, так и вне Γ. Случай $x \in \Gamma$ требует особого рассмотрения, которое будет проведено в гл. 18.

Теорема 11.5.1. *Если плотности суммируемы на* Γ, *то потенциалы простого и двойного слоя гармоничны в любой области, конечной или бесконечной, замыкание которой не имеет общих точек с поверхностью* Γ.

В любой точке $x \overline{\in} \Gamma$ потенциалы простого и двойного слоя имеют производные всех порядков — в этом можно убедиться, повторив дословно соответствующие рассуждения теоремы 11.4.1. Если D — область, о которой сказано в условии настоящей теоремы, то оба потенциала имеют в D производные всех порядков и, тем более, вторые производные.

Далее, потенциал простого или двойного слоя удовлетворяет однородному уравнению Лапласа. Действительно, если

$x \in \Gamma$, то дифференцировать можно под знаком интеграла. Обозначая

$$v(x) = \int_{\Gamma} \frac{1}{r^{m-2}} \mu(\xi)\, d_{\xi}\Gamma,$$

$$w(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \sigma(\xi)\, d_{\xi}\Gamma,$$

имеем

$$\Delta_x v(x) = \int_{\Gamma} \Delta_x \left(\frac{1}{r^{m-2}}\right) \mu(\xi)\, d_{\xi}\Gamma = 0;$$

индекс x у буквы Δ означает, что дифференцирование совершается по координатам точки x. Далее,

$$\Delta_x w(x) = \int_{\Gamma} \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\right) \sigma(\xi)\, d_{\xi}\Gamma =$$

$$= \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}} \cos(\nu, x_k)\right) d_{\xi}\Gamma.$$

Так как ν — нормаль, проведенная в точке ξ, то $\cos(\nu, x_k)$ не зависит от x, и его можно вынести за знак операции Δ_x:

$$\Delta_x w(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \cos(\nu, x_k) \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}}\right) d_{\xi}\Gamma =$$

$$= \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \cos(\nu, x_k) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \Delta_x \left(\frac{1}{r^{m-2}}\right) d_{\xi}\Gamma = 0.$$

В случае конечной области D доказательство теоремы на этом заканчивается. Если же область D бесконечная, то надо еще доказать, что $v(x)$ и $w(x)$ имеют на бесконечности оценку (1.3).

Поместим начало координат внутри Γ. Обозначим через H наибольшее расстояние между точками поверхности Γ.

Повторив рассуждение, проведенное в § 2, найдем, что при $|x| > 2H$ будет $r > \frac{1}{2}|x|$, и, следовательно,

$$|v(x)| \leqslant \frac{2^{m-2}}{|x|^{m-2}} \int_{\Gamma} |\mu(\xi)|\, d_{\xi}\Gamma;$$

последний интеграл конечен, потому что функция $\mu(\xi)$ суммируема на Г. Для функции $v(x)$ оценка (1.3) установлена со значением постоянной C, равным

$$C = 2^{m-2} \int_{\Gamma} |\mu(\xi)| \, d_{\xi}\Gamma.$$

Рассмотрим теперь потенциал двойного слоя $w(x)$. Имеем

$$|w(x)| \leqslant \int_{\Gamma} |\sigma(\xi)| \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_{\xi}\Gamma \leqslant$$

$$\leqslant (m-2) \int_{\Gamma} |\sigma(\xi)| \left| \frac{\xi_k - x_k}{r^m} \right| \cdot |\cos(\nu, \; x_k)| \, d_{\xi}\Gamma,$$

и так как $|\xi_k - x_k| \leqslant r$ и $|\cos(\nu, x_k)| \leqslant 1$, то

$$|w(x)| \leqslant m(m-2) \int_{\Gamma} |\sigma(\xi)| \frac{d_{\xi}\Gamma}{r^{m-1}}.$$

Если $|x| > 2H$, то $r > \frac{1}{2}|x|$, и окончательно

$$|w(x)| \leqslant \frac{2^{m-1} m (m-2)}{|x|^{m-1}} \int_{\Gamma} |\sigma(\xi)| \, d_{\xi}\Gamma.$$

Функция $\sigma(\xi)$ суммируема на Г, и интеграл справа — конечный.

Таким образом, для потенциала двойного слоя верна оценка, даже более сильная, чем оценка (1.3): потенциал двойного слоя убывает на бесконечности, как $|x|^{-(m-1)}$.

Теорема доказана полностью.

Свойства потенциалов простого и двойного слоя будут полнее изучены в гл. 18.

Если поверхность Г делит пространство на две области — внутреннюю и внешнюю, то как потенциал простого слоя, так и потенциал двойного слоя определяет две гармонические функции: одна гармонична во внутренней области, другая — во внешней.

§ 6. Свойства объемного потенциала

Пусть Ω — конечная область m-мерного евклидова пространства, ограниченная кусочно гладкой поверхностью Г, и пусть $\rho(\xi) \in C(\bar{\Omega})$. Рассмотрим объемный потенциал

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\xi)}{r^{m-2}} d\xi; \tag{1}$$

в формуле (1) x может означать любую точку пространства E_m.

Теорема 11.6.1. *Если плотность ρ измерима и ограничена в Ω, то объемный потенциал* (1) *непрерывен и непрерывно дифференцируем во всем пространстве E_m.*

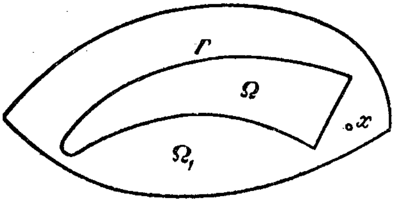

Рис. 16.

Функция $\rho(\xi)$ по условию теоремы ограничена. Пусть $|\rho(\xi)| \leqslant C$. Доопределим эту функцию, положив $\rho(\xi) \equiv 0$, $\xi \overline{\in} \bar{\Omega}$. Доопределенная таким образом функция $\rho(\xi)$ также удовлетворяет условиям теоремы: она измерима и ограничена; при этом по-прежнему $|\rho(\xi)| \leqslant C$. Пусть x — произвольно заданная точка пространства E_m. Построим какую-нибудь конечную область Ω_1, содержащую внутри себя как точку x, так и область Ω (рис. 16); если $x \in \Omega$, то можно взять $\Omega_1 = \Omega$. Функция $\rho(\xi) \equiv 0$ в $\Omega_1 \diagdown \Omega$, поэтому потенциал (1) можно записать в виде

$$\varphi(x) = \int_{\Omega_1} \frac{\rho(\xi)}{r^{m-2}} d\xi. \tag{2}$$

Непрерывность функции $\varphi(x)$ в точке x вытекает из утверждения, приведенного в конце § 4 гл. 7.

Докажем теперь, что объемный потенциал (1) имеет в точке x непрерывные первые производные по $x_1, x_2, \ldots, x_m$. С этой целью продифференцируем формально интеграл (2) по x_k под знаком интеграла. Это приведет нас к интегралу

$$-(m-2) \int_{\Omega_1} \rho(\xi) \frac{x_k - \xi_k}{r^m} d\xi, \tag{3}$$

который сходится равномерно, так как

$$\frac{|x_k-\xi_k|}{r^m}\leqslant\frac{1}{r^{m-1}}.$$

Перепишем интеграл (3) в виде

$$\int\limits_{\Omega_1}\frac{A(x,\xi)}{r^{m-\frac{1}{2}}}\rho(\xi)\,d\xi;\qquad A(x,\xi)=-\frac{(m-2)(x_k-\xi_k)}{\sqrt{r}}.$$

Функция $A(x, \xi)$ непрерывна, а функция $\rho(\xi)$ ограничена в $\overline{\Omega}_1$. Из упомянутого выше утверждения § 4 гл. 7 вытекает, что интеграл (3) есть непрерывная функция от x в $\overline{\Omega}_1$. По теореме о дифференцировании интегралов, зависящих от параметра, производная $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ существует в точке $x\in\Omega_1$ и равна интегралу (3):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=\int\limits_{\Omega_1}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi.$$

Отбросив равный нулю интеграл по $\Omega_1\setminus\Omega$, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=\int\limits_{\Omega}\rho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi. \tag{4}$$

Таким образом, первые производные объемного потенциала можно получить дифференцированием под знаком интеграла.

Теорема 11.6.2. *Если плотность ρ измерима и ограничена в Ω, то в каждой из областей, дополнительных к Ω, объемный потенциал* (1) *гармоничен.*

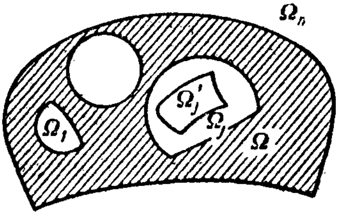

Рис. 17.

Если граница Г области Ω не связная, то существует несколько областей $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, дополнительных к Ω (рис. 18). Пусть Ω_j — одна из этих областей. Возьмем произвольную внутреннюю по отношению к Ω_j подобласть Ω_j', и пусть $x\in\Omega_j'$. Тогда в интеграле (1) расстояние r ограничено снизу положительным числом δ, равным наименьшему расстоянию между точками границ областей Ω_j и Ω_j' (рис. 17).

Подынтегральная функция $\frac{\rho(\xi)}{r^{m-2}}$, а также ее производные любого порядка по $x_1, x_2, \ldots, x_m$ непрерывны по совокупности точек $x \in \overline{\Omega}_j'$ и $\xi \in \overline{\Omega}$. Отсюда следует, что функция $\varphi(x)$ имеет в Ω_j' непрерывные производные всех порядков, которые можно получить дифференцированием под знаком интеграла, и что в этой области

$$\Delta_x\varphi(x) = \int_\Omega \rho(\xi)\, \Delta_x \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi = 0.$$

Так как Ω_j' — произвольная подобласть, то последние заключения верны во всей области Ω_j. Если эта область конечная, то гармоничность функции (1) доказана, если же область Ω_j бесконечна, то надо еще установить оценку (1.3) на бесконечности. Это делается так же, как в теореме 11.5.1: если H — диаметр границы Γ, а начало координат лежит в Ω, то при $|x| > 2H$ будет $r > \frac{1}{2}|x|$ и $|\varphi(x)| \leqslant \frac{2^{m-2}C\,|\Omega|}{|x|^{m-2}}$.

Теорема 11.6.3. *Если плотность* $\rho \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$, *то объемный потенциал* (1) *имеет в* Ω *непрерывные вторые производные и удовлетворяет неоднородному уравнению Лапласа*

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= (m-2)\,|S_1|\,\rho(x), & m &> 2,\\ -\Delta\varphi &= 2\pi\rho(x), & m &= 2. \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство проведем для $m > 2$; для $m = 2$ оно проводится аналогично.

Функция $\frac{1}{r^{m-2}}$ зависит только от разностей $x_k - \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}.$$

Подставив это в формулу (4) и проинтегрировав затем по частям, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = -\int_\Omega \rho(\xi)\,\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi =$$
$$= \int_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi - \int_\Gamma \rho(\xi)\cos(\nu, x_k)\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma. \tag{6}$$

Производная $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ оказалась суммой двух потенциалов. Первый из них — объемный потенциал с непрерывной плотностью $\frac{\partial\rho}{\partial\xi_k}$, который, как мы доказали, имеет первые производные. Второй — потенциал простого слоя с кусочно непрерывной плотностью $\rho(\xi)\cos(\nu, x_k)$, который, по теореме 11.5.1, имеет внутри области Ω производные всех порядков.

Итак, правая часть формулы (6) имеет первые производные в области Ω, что в свою очередь означает существование вторых непрерывных производных от φ в той же области. Осталось доказать, что в области Ω функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (5). Рассмотрим произвольную внутреннюю подобласть Ω' области Ω. Очевидно, $\varphi \in C^{(2)}(\bar{\Omega}')$. Введем в рассмотрение функцию $\psi(\xi)$ со следующими свойствами:

$$\psi \in C^{(2)}(\bar{\Omega}); \qquad \psi(\xi) \equiv 0, \qquad \xi \in \Omega \setminus \Omega'. \tag{7}$$

Из соотношений (7) следует, что

$$\psi\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma} = 0 \tag{8}$$

и

$$\psi\Big|_{\Gamma'} = \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma'} = 0, \tag{9}$$

где Γ' — граница области Ω'.

Для функции ψ справедливо интегральное представление (3.4):

$$\psi(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \psi\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right)d_\xi\Gamma - \\ - \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r^{m-2}}\Delta\psi\,d\xi,$$

откуда, учитывая граничные равенства (8), получаем

$$\psi(x) = -\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r^{m-2}}\Delta\psi\,d\xi.$$

Напишем формулу Грина для оператора Лапласа в Ω':

воспользовавшись равенствами (9), получим

$$\int_{\Omega'} (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi)\,dx = \int_{\Gamma'} \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right) d\Gamma' = 0.$$

Отсюда

$$\int_{\Omega'} \varphi\,\Delta\psi\,dx = \int_{\Omega'} \psi\,\Delta\varphi\,dx;$$

в последней формуле вместо Ω' можно ставить Ω, так как $\psi(x) \equiv 0$, если $x \in \Omega \setminus \Omega'$:

$$\int_{\Omega} \psi\,\Delta\varphi\,dx = \int_{\Omega} \varphi\,\Delta\psi\,dx.$$

Заменив справа φ ее выражением (1), получим

$$\int_{\Omega} \psi\,\Delta\varphi\,dx = \int_{\Omega} \left\{\int_{\Omega} \rho(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi\right\} \Delta\psi(x)\,dx.$$

Справа изменим порядок интегрирования; одновременно поменяем местами обозначения x и ξ:

$$\int_{\Omega} \psi\,\Delta\varphi\,dx = \int_{\Omega} \rho(x) \left\{\int_{\Omega} \frac{\Delta\psi(\xi)}{r^{m-2}}\,d\xi\right\} dx =$$

$$= -(m-2)\,|S_1| \int_{\Omega} \rho(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Перенося все члены в левую часть, получим

$$\int_{\Omega} [\Delta\varphi(x) + (m-2)\,|S_1|\,\rho(x)]\,\psi(x)\,dx = 0. \tag{10}$$

В области Ω' возьмем произвольную точку x_0 и положим

$$\psi(x) = \omega_h(|x - x_0|), \tag{11}$$

где ω_h — усредняющее ядро; радиус усреднения h возьмем меньшим, чем расстояние от точки x_0 до границы Γ. Формула (10) дает тогда

$$\Delta\varphi_h(x_0) + (m-2)\,|S_1|\,\rho_h(x_0) = 0.$$

Полагая $h \to 0$, получаем

$$\Delta\varphi(x_0) + (m-2)\,|S_1|\,\rho(x_0) = 0.$$

Таким образом, уравнение (5) установлено для точек подобласти Ω'. Но эта подобласть произвольная, поэтому уравнение (5) верно во всей области Ω.

Ввиду большой важности уравнения (5) дадим еще один его вывод.

Формулу (6) продифференцируем по x_k:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2} = \int\limits_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial\xi_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi - \int\limits_\Gamma \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu, x_k)\,d_\xi\Gamma =$$

$$= -\int\limits_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial\xi_k}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi + \int\limits_\Gamma \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu, x_k)\,d_\xi\Gamma. \quad (12)$$

Точку x вырежем шаром достаточно малого радиуса ε с центром в точке x (обозначения см. рис. 14, стр. 227). Тогда

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega\setminus Ш_\varepsilon} \frac{\partial\rho}{\partial\xi_k}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi + \int\limits_\Gamma \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu, x_k)\,d_\xi\Gamma.$$

Интегрирование по частям дает

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\Omega\setminus Ш_\varepsilon} \rho(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi_k^2}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi - \int\limits_{S_\varepsilon} \rho(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\cos(\nu, x_k)\,dS_\varepsilon\right\}. \quad (13)$$

Нужно отметить, что в формулах для $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2}$ суммирование по значку k не производится; этот значок фиксирован.

Рассмотрим второй интеграл в формуле (13). Положим $\xi = x + \varepsilon\theta$. Если $\xi \in S_\varepsilon$, то $\theta \in S_1$. Нормаль к S_ε в данном случае направлена против радиуса, следовательно,

$$\cos(\nu, x_k) = -\cos(r, x_k) = -\frac{\xi_k - x_k}{\varepsilon}.$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\bigg|_{r=\varepsilon} = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\partial r}{\partial\xi_k}\bigg|_{r=\varepsilon} = -\frac{(m-2)(\xi_k - x_k)}{\varepsilon^m}.$$

и

$$dS_\varepsilon = \varepsilon^{m-1}\,dS_1.$$

Теперь

$$\int_{S_\varepsilon} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}} \cos(\nu, x_k)\, dS_\varepsilon =$$

$$= (m-2) \int_{S_1} \rho(x+\varepsilon\theta) \left(\frac{\xi_k - x_k}{\varepsilon}\right)^2 dS_1 =$$

$$= (m-2) \int_{S_1} \rho(x+\varepsilon\theta) \cos^2(\nu, x_k)\, dS_1.$$

Последнее равенство показывает, что при $\varepsilon \to 0$ второй интеграл справа в (13) имеет предел, равный

$$(m-2)\rho(x) \int_{S_1} \cos^2(r, x_k)\, dS_1.$$

Очевидно теперь, что и первый член справа в (13) имеет предел, и формуле (13) можно придать вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus Ш_\varepsilon} \rho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi -$$

$$- (m-2)\rho(x) \int_{S_1} \cos^2(r, x_k)\, dS_1. \quad (14)$$

Суммирование по k дает

$$\Delta\varphi = -(m-2)\,|S_1|\,\rho(x),$$

что совпадает с уравнением (5).

Замечание. Теорема 11.6.3 доказана здесь в предположении, что плотность $\rho \in C^{(1)}(\Omega)$. На самом же деле эта теорема и, в частности, уравнение (5) имеют место при более слабых ограничениях. Приведем без доказательства относящиеся сюда результаты.

1. Пусть в замкнутой области $\bar{\Omega}$ плотность $\rho(x)$ удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем α

$$|\rho(\xi) - \rho(x)| \leqslant A r^\alpha; \quad A = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Тогда в открытой области Ω существуют вторые производные потенциала (1), которые можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus Ш_\varepsilon} \rho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{1}{r^{m-2}}\, d\xi - \frac{(m-2)\,|S_1|}{m} \delta_{jk}\, \rho(x). \quad (15)$$

В любой внутренней подобласти эти производные удовлетворяют условию Липшица с тем же показателем α, если $\alpha < 1$, и с любым меньшим показателем, если $\alpha = 1$.

2. Пусть плотность $\rho \in L_p(\Omega)$, где p — постоянная такая, что $1 < p < \infty$. Тогда вторые производные объемного потенциала (1) существуют как обобщенные; они суммируемы в Ω с той же степенью p и могут быть вычислены по формуле (15). Входящий в эту формулу предел существует в Ω почти всюду.

3. В обоих случаях объемный потенциал удовлетворяет неоднородному уравнению Лапласа (5); в случае 1 это уравнение выполняется всюду, а в случае 2 — почти всюду в Ω.

Уравнение (5) позволяет строить частное решение неоднородного уравнения Лапласа и тем самым свести последнее к однородному уравнению.

Пусть нам дано неоднородное уравнение Лапласа

$$-\Delta u = f(x). \tag{16}$$

Его общее решение представляет собой сумму какого-либо частного решения и общего решения однородного уравнения Лапласа. Если предположить, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема[1]) в замкнутой области $\bar{\Omega}$, то частное решение уравнения (16) можно получить по формуле

$$u_0(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{\Omega} \frac{f(\xi)}{r^{m-2}}\, d\xi .$$

Если сделать замену неизвестной функции в нашем уравнении по формуле $u = u_0 + w$, то получится однородное уравнение Лапласа

$$\Delta w = 0.$$

§ 7. Теорема о среднем

Теорема 11.7.1 (прямая теорема о среднем). *Пусть функция $u(x)$ гармонична в некотором шаре и непрерывна в нем вплоть до границы. Тогда значение этой функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на сфере, ограничивающей данный шар.*

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим одну формулу, которая будет играть важную роль и в последующем. Пусть в формуле (6.9) гл. 10 $u(x)$ — функция класса $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, гармоническая в Ω. Тогда $\Delta u = 0$, правая часть упомянутой

---

[1]) Или хотя бы удовлетворяет одному из условий, указанных в сделанном выше замечании.

формулы обращается в нуль, и мы получаем

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma = 0. \tag{1}$$

Переходим к доказательству теоремы. Обозначим через $Ш_R$ шар, о котором идет речь в формулировке теоремы, через x_0 — его центр и через R — радиус. Сферу, ограничивающую шар $Ш_R$, обозначим через S_R. Пусть еще $Ш_{R'}$ — концентрический с $Ш_R$ шар радиуса $R' < R$ и $S_{R'}$ — сфера, ограничивающая шар $Ш_{R'}$. Очевидно, $u \in C^{(2)}(\overline{Ш}_{R'})$. По формуле (4.1)

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_{S_{R'}} \left(\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right) dS_{R'};\quad x \in Ш_{R'}. \tag{2}$$

Положим в формуле (2) $x = x_0$. Тогда $r = R'$. Далее, нормаль ν — внешняя по отношению к шару и, следовательно, направлена по радиусу, поэтому

$$\left.\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right|_{r=R'} = \left.\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^{m-2}}\right|_{r=R'} = -\frac{m-2}{R'^{m-1}}.$$

Формула (2) принимает вид

$$u(x_0) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|\,R'^{m-2}}\int_{S_{R'}} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS_{R'} + \frac{1}{|S_1|\,R'^{m-1}}\int_{S_{R'}} u\, dS_{R'}.$$

Первый интеграл исчезает в силу формулы (1), и в результате

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1|\,R'^{m-1}}\int_{S_{R'}} u\, dS_{R'}.$$

Положим $R' \to R$. В шаре $\overline{Ш}_R$ функция u непрерывна, и можно перейти к пределу под знаком интеграла. Окончательно

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1|\,R^{m-1}}\int_{S_R} u\, dS_R. \tag{3}$$

Правая часть формулы (3) и есть то, что называется средним арифметическим значений функции u по сфере S_R, — это частное от деления интеграла названной функции по сфере S_R на площадь поверхности этой сферы. Прямая теорема о среднем доказана.

Теорема 11.7.2 (обратная теорема о среднем). *Пусть Ω — конечная область пространства E_m и $u \in C(\Omega)$. Если для любого шара, который целиком вместе со своей границей принадлежит области Ω, функция $u(x)$ удовлетворяет тождеству* (3), *то эта функция гармонична в Ω.*

Возьмем произвольную точку $x \in \Omega$ и опишем из этой точки шар $Ш_a$ фиксированного радиуса a, лежащий вместе со своей границей в Ω (рис. 18). Если $r \leqslant a$ и S_r есть сфера радиуса r с центром в x, то по условию теоремы верна формула

$$u(x) = \frac{1}{r^{m-1}|S_1|}\int\limits_{S_r} u(\xi)\,dS_r. \qquad (4)$$

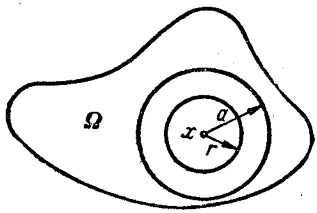

Рис. 18.

Пусть $\omega_a(|\xi - x|) = \omega_a(r)$ — средняя функция с радиусом усреднения $h = a$. Обе части равенства (4) умножим на $r^{m-1}\omega_a(r)\,dr$ и проинтегрируем по r в пределах от нуля до a. Слева получится выражение $cu(x)$, где $c = \int\limits_0^a r^{m-1}\omega_a(r)\,dr$. По свойству 3 усредняющего ядра (§ 1 гл. 1) $c = |S_1|^{-1}$, и мы получаем равенство

$$u(x) = \int\limits_0^a \int\limits_{S_r} u(\xi)\,\omega_a(r)\,dr\,dS_r = \int\limits_{Ш_a} u(\xi)\,\omega_a(r)\,d\xi. \qquad (5)$$

Вне шара $Ш_a$ усредняющее ядро $\omega_a(r) = 0$, поэтому формулу (5) можно записать в виде

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} u(\xi)\,\omega_a(r)\,d\xi. \qquad (6)$$

Новая форма имеет то преимущество, что область интегрирования Ω не зависит от выбора точки x.

Формула (5), а с ней и формула (6), верна для любой точки $x \in \Omega \setminus \Omega_a$, где Ω_a — пограничная полоса ширины a.

Усредняющее ядро имеет непрерывные производные всех порядков, функция $u(\xi)$ непрерывна, поэтому подынтегральная функция в (6) имеет производные всех порядков по x_1, x_2, …, x_m, непрерывные по совокупности точек x и ξ.

В таком случае интеграл (6), т. е. функция $u(x)$, имеет в области $\Omega \setminus \Omega_a$ непрерывные производные всех порядков, что можно записать так: $u \in C^{(\infty)}(\Omega \setminus \Omega_a)$. Но число a можно взять сколь угодно малым; поэтому $u \in C^{(\infty)}(\Omega)$.

Теперь докажем, что $\Delta u = 0$. В шаре $Ш_a$, описанном выше, напишем интегральное представление (3.4):

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{S_a} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) dS_a - \\ - \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{Ш_a} \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u \, d\xi. \tag{7}$$

Напомним, что x есть центр шара $Ш_R$.

Рассмотрим второй член справа. По-прежнему

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{m-2}} \Big|_{r=a} = -\frac{m-2}{a^{m-1}};$$

второй поверхностный интеграл равен

$$\frac{1}{a^{m-1}\,|S_1|} \int\limits_{S_a} u(\xi)\, d\xi,$$

что по формуле (4) равно $u(x)$. Теперь формула (7) дает

$$\frac{1}{a^{m-2}} \int\limits_{S_a} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_a - \int\limits_{Ш_a} \frac{1}{r^{m-2}} \Delta u \, d\xi = 0.$$

По формуле (6.9) гл. 10

$$\int\limits_{S_a} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_a = \int\limits_{Ш_a} \Delta u \, d\xi.$$

Собирая оба члена под знаком объемного интеграла, получим

$$\int\limits_{Ш_a} \left(\frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{r^{m-2}} \right) \Delta u(\xi)\, d\xi = 0. \tag{8}$$

Заметим, что в шаре $Ш_a$ $r = |\xi - x| \leqslant a$; поэтому

$$\frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{r^{m-2}} \leqslant 0.$$

Далее, функция Δu непрерывна. К интегралу (8) применим интегральную теорему о среднем:

$$\Delta u(x') \int\limits_{Ш_a} \left(\frac{1}{a^{m-2}} - \frac{1}{r^{m-2}}\right) d\xi = 0;$$

x' — некоторая точка внутри шара $Ш_a$.

Интеграл от отрицательной функции отличен от нуля; следовательно, $\Delta u(x') = 0$. Устремим a к нулю; тогда $x' \to x$ и, по непрерывности вторых производных, $\Delta u(x) = 0$.

§ 8. Принцип максимума

Теорема 11.8.1. *Если функция, гармоническая в конечной области, достигает максимума или минимума в ее внутренней точке, то эта функция постоянная.*

Пусть гармоническая в конечной области Ω функция $u(x)$ достигает максимума в точке $x_0 \in \Omega$. Докажем, что $u(x) \equiv \equiv u(x_0)$. Построим шар $Ш_R(x_0)$ радиуса R и с центром в точке x_0, вместе с границей лежащий в Ω; пусть S_R — ограничивающая его сфера. Прежде всего покажем, что $u(\xi) \equiv u(x_0)$ на сфере S_R. Напишем формулу, выражающую теорему о среднем:

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R|} \int\limits_{S_R} u(\xi)\, dS_R; \tag{1}$$

здесь через $|S_R|$ обозначена площадь поверхности сферы S_R:

$$|S_R| = R^{m-1} |S_1|.$$

По условию теоремы $u(\xi) \leqslant u(x_0)$, $\xi \in S_R$. Пусть в некоторой точке $\xi' \in S_R$ имеет место строгое неравенство $u(\xi') < < u(x_0)$. На сфере S_R функция u непрерывна; поэтому на той же сфере в некоторой окрестности S' точки ξ' будет выполнено неравенство $u(\xi) < u(x_0)$. Обозначая $S_R \setminus S' = S''$, имеем

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R|} \left\{ \int\limits_{S'} u(\xi)\, dS_R + \int\limits_{S''} u(\xi)\, dS_R \right\}.$$

Но

$$\int\limits_{S'} u(\xi)\,dS_R < u(x_0)\int\limits_{S'} dS_R,$$

$$\int\limits_{S''} u(\xi)\,dS_R \leqslant u(x_0)\int\limits_{S''} dS_R;$$

отсюда

$$u(x_0) < \frac{1}{|S_R|}u(x_0)\left\{\int\limits_{S'} dS_R + \int\limits_{S''} dS_R\right\} =$$

$$= \frac{1}{|S_R|}u(x_0)\int\limits_{S_R} dS_R = u(x_0),$$

что нелепо.

Итак, $u(\xi)\equiv u(x_0)$, $\xi\in S_R$. Заменяя R произвольной меньшей величиной, убедимся, что последнее тождество справедливо во всем шаре $Ш_R(x_0)$:

$$u(\xi)\equiv u(x_0),\qquad \xi\in Ш_R(x_0). \tag{2}$$

Теперь докажем, что тождество (2) верно во всей области Ω. Возьмем произвольную точку $x\in\Omega$ и соединим

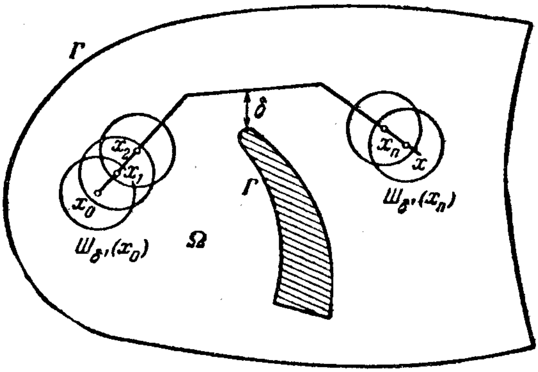

Рис. 19.

точки x_0 и x ломаной, целиком лежащей в Ω (рис. 19). Пусть δ — наименьшее расстояние от точек ломаной до точек границы Γ области Ω и $\delta'=\frac{1}{2}\delta$. Любой шар радиуса δ'

с центром на ломаной лежит целиком, вместе со своей границей, в области Ω.

Пусть $Ш_{\delta'}(y)$ означает шар радиуса δ' с центром в y. Внутри шара $Ш_{\delta'}(x_0)$ возьмем на ломаной точку x_1 так, чтобы было $|x_1 - x_0| > \frac{1}{2}\delta'$, и построим шар $Ш_{\delta'}(x_1)$. Внутри нового шара возьмем на ломаной точку x_2 так, чтобы было $|x_2 - x_1| > \frac{1}{2}\delta'$ и чтобы точка x_1 лежала между точками x_0 и x_2. Продолжая этот процесс, легко убедимся, что конечным числом таких шаров можно покрыть всю ломаную. Пусть это будут шары $Ш_{\delta'}(x_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. По построению, $x_j \in Ш_{\delta'}(x_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Как показывает тождество (2), в шаре $Ш_{\delta'}(x_0)$ функция u имеет постоянное значение, равное максимальному. Но тогда эта функция принимает максимальное значение и в точке x_1: $u(x_1) = u(x_0)$. По тому же тождеству (2) $u(\xi) = u(x_1) = u(x_0)$, $\xi \in Ш_{\delta'}(x_1)$. Продолжая эти рассуждения, придем в конечном счете к тождеству

$$u(\xi) = u(x_0), \qquad \forall \xi \in Ш_{\delta'}(x_n).$$

Но $x \in Ш_{\delta'}(x_n)$, поэтому $u(x) = u(x_0)$, что и требовалось доказать.

Случай минимума сводится к случаю максимума заменой u на $-u$.

Следствие 11.8.1. *Гармоническая функция, отличная от тождественной постоянной, не достигает в конечной области ни максимума, ни минимума.*

Следствие 11.8.2. *Если функция $u(x)$ гармонична в конечной области Ω и, кроме того, $u \in C(\bar{\Omega})$, то $u(x)$ принимает как наибольшее, так и наименьшее значение на границе области.*

Следствие 11.8.2 называется *принципом максимума для гармонических функций.*

§ 9. О сходимости последовательностей гармонических функций

Теорема 11.9.1 (теорема Харнака). Пусть $\{u_n(x)\}$ — *последовательность функций, гармонических в конечной области Ω с кусочно гладкой границей* Г. *Пусть еще функции $u_n(x)$ непрерывны в замкнутой* *области* $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. *Если последовательность* $\{u_n(x)\}$ *равномерно сходится на* Γ, *то*

1) *последовательность* $\{u_n(x)\}$ *равномерно сходится в замкнутой области* $\overline{\Omega}$;

2) *предельная функция гармонична в* Ω;

3) *в любой замкнутой подобласти* $\overline{\Omega}'$ *области* Ω *производные любого порядка от функции* $u_n(x)$ *равномерно сходятся к соответствующим производным предельной функции.*

Доказательство. Последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится на Γ равномерно. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n \geqslant N$ и любом натуральном p имеет место неравенство

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Gamma. \tag{1}$$

Под знаком абсолютной величины написана разность двух гармонических функций; следовательно, она сама гармонична. Более того, она непрерывна в $\overline{\Omega}$. Но такая функция принимает как наименьшее, так и наибольшее значение на границе области.

Из неравенства (1) следует, что

$$-\varepsilon < \min_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] \leqslant \max_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] < \varepsilon,$$

а из принципа максимума для любого $x \in \Omega$ вытекает неравенство

$$\min_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)] \leqslant u_{n+p}(x) - u_n(x) \leqslant \max_{\xi \in \Gamma} [u_{n+p}(\xi) - u_n(\xi)].$$

Но тогда

$$-\varepsilon < u_{n+p}(x) - u_n(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

или

$$|u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Последнее неравенство означает, что последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно сходится в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Существует, следовательно, предельная функция

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x), \tag{2}$$

определенная и непрерывная в $\overline{\Omega}$.

Пусть $x \in \Omega$. Построим шар $Ш_R(x)$ с центром в точке x и радиусом R столь малым, чтобы шар $Ш_R$ вместе со своей границей — сферой S_R — целиком лежал внутри Ω. По прямой теореме о среднем

$$u_n(x) = \frac{1}{|S_R|} \int\limits_{S_R} u_n(\xi)\, dS_R. \qquad (3)$$

Пусть $n \to \infty$. Так как последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится в $\bar{\Omega}$ равномерно, то можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$u(x) = \frac{1}{|S_R|} \int\limits_{S_R} u(\xi)\, d\xi. \qquad (4)$$

В силу обратной теоремы о среднем функция $u(x)$ гармонична в Ω.

Остается доказать равномерную сходимость производных. Рассмотрим произвольную внутреннюю подобласть Ω' области Ω и обозначим наименьшее расстояние между границами областей Ω и Ω' через $2a$. Воспользуемся формулой (7.6); применим ее к функции $u_n(x)$, предполагая, что $x \in \bar{\Omega}'$:

$$u_n(x) = \int\limits_{\Omega} u_n(\xi)\, \omega_a(r)\, d\xi. \qquad (5)$$

Дифференцируя это выражение по координатам точки x, получаем

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} = \int\limits_{\Omega} u_n(\xi) \frac{\partial^k \omega_a(r)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}\, d\xi. \qquad (6)$$

Здесь k — любое натуральное число и $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = k$. Аналогично

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} = \int\limits_{\Omega} u(\xi) \frac{\partial^k \omega_a(r)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}\, d\xi. \qquad (7)$$

Последовательность $\{u_n(\xi)\}$ сходится равномерно в $\bar{\Omega}$ к функции $u(\xi)$, а функция

$$\frac{\partial^k \omega_a(r)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}$$

непрерывна при любых ξ и x. В таком случае интеграл в (6) равномерно стремится к интегралу (7) и, следовательно,

$$\frac{\partial^k u_n(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}$$

равномерно в $\overline{\Omega}'$. Теорема доказана.

Теорема 11.9.2 (теорема о сходимости в среднем). *Пусть Ω — конечная область с кусочно гладкой границей Γ. Пусть $\{u_n(x)\}$ — последовательность гармонических в Ω функций, сходящаяся в метрике $L_p(\Omega)$, где $1<p<\infty$. Тогда:* 1) *предельная функция гармонична в Ω;* 2) *в любой внутренней подобласти как данная последовательность, так и последовательности, полученные из нее дифференцированием, сходятся равномерно.*

По условию теоремы существует предел

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

в смысле сходимости в среднем с показателем p. Это значит, что $u \in L_p(\Omega)$ и

$$\int_\Omega |u(\xi) - u_n(\xi)|^p d\xi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Воспользуемся формулой (5). Имеем

$$\left.\begin{aligned} u_n(x) &= \int_\Omega u_n(\xi)\,\omega_a(r)\,d\xi, \\ u_k(x) &= \int_\Omega u_k(\xi)\,\omega_a(r)\,d\xi, \end{aligned}\right\} \forall x \in \overline{\Omega}'.$$

Вычтя и затем применив неравенство Гельдера, найдем

$$|u_n(x) - u_k(x)| \leqslant \left\{\int_\Omega |u_n(\xi) - u_k(\xi)|^p d\xi\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_\Omega \omega_a^{p'}(r)\,d\xi\right\}^{\frac{1}{p'}}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

При фиксированном радиусе усреднения a функция $\omega_a(r)$ ограничена. Далее, по условию теоремы первый интеграл в (8) справа стремится к нулю. А тогда из неравенства (8) следует, что последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно в $\bar{\Omega}'$. Отсюда следует, что в $\bar{\Omega}'$ функция $u(x)$ непрерывна; так как Ω' — произвольная внутренняя подобласть, то $u(x)$ непрерывна в открытой области Ω.

В формуле (3) положим $n \to \infty$, что приведет нас к формуле (4); как и выше, отсюда можно заключить, что функция $u(x)$ гармонична в Ω. Утверждение о сходимости производных последовательности $\{u_n(x)\}$ доказывается так же, как в теореме 11.9.1.

Из теорем настоящего параграфа вытекают такие следствия:

Следствие 11.9.1. *Пусть Ω — конечная область с кусочно гладкой границей. В пространстве $C(\bar{\Omega})$ гармонические функции образуют подпространство. Из сходимости в этом подпространстве вытекает равномерная сходимость производных любого порядка в любой внутренней замкнутой подобласти.*

Следствие 11.9.2. *Пусть Ω — конечная область с кусочно гладкой границей и постоянная p заключена в пределах $1 < p < \infty$. В пространстве $L_p(\Omega)$ гармонические функции образуют подпространство. Из сходимости в этом подпространстве вытекает равномерная сходимость как самих функций, так и их производных любого порядка в любой внутренней замкнутой подобласти.*

§ 10. Распространение на уравнения с переменными коэффициентами

Результаты настоящей главы в значительной степени можно распространить на эллиптические уравнения с переменными коэффициентами. В данном параграфе мы не станем заниматься общим случаем, а приведем — во многих случаях без доказательства — основные факты, относящиеся к самосопряженному эллиптическому уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)\,u=0. \qquad (1)$$

Более полное изложение относящихся сюда вопросов дано в книгах К. Миранда [10] и автора [11], указанных в списке литературы к данному разделу в конце книги.

Пусть Ω — конечная область m-мерного евклидова пространства, ограниченная кусочно гладкой поверхностью Γ. Примем, что $A_{jk} \in C^{(3)}(\bar{\Omega})$, $C \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$ (в некоторых случаях эти условия можно было бы ослабить). Уравнение (1) мы считаем эллиптическим в $\bar{\Omega}$ —

это означает, что все характеристические числа матрицы $A(x) = \| A_{jk}(x) \|_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}$ отличны от нуля и имеют один и тот же знак; мы примем, что они все положительны. Пусть $\lambda_1(x)$ — наименьшее характеристическое число матрицы $A(x)$; оно является корнем уравнения $\operatorname{Det}(A(x) - \lambda I) = 0$, у которого все коэффициенты суть непрерывные в Ω функции от x, причем старший коэффициент равен $(-1)^m$. Но тогда корни этого уравнения непрерывны в $\overline{\Omega}$; функция $\lambda_1(x)$, непрерывная и положительная в $\overline{\Omega}$, имеет положительную нижнюю грань:

$$\lambda_1(x) \geqslant \mu_0 = \mathrm{const} > 0, \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{2}$$

Как известно из теории квадратичных форм, для любых вещественных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$ справедливо неравенство

$$A_{jk}(x)\, t_j t_k \geqslant \lambda_1(x) \sum_{k=1}^{m} t_k^2.$$

Из неравенства (2) вытекает тогда важное соотношение

$$A_{jk}(x)\, t_j t_k \geqslant \mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2, \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{3}$$

Будем рассматривать только те решения уравнения (1), которые принадлежат классу $C^{(2)}(\Omega)$.

1. Принцип максимума для уравнения (1) имеет место в такой ослабленной форме:

Теорема 11.10.1. *Если $C(x) > 0$, $\forall\, x \in \Omega$, то решение уравнения (1) не может иметь внутри области ни отрицательного минимума, ни положительного максимума. Если $C(x) < 0$, $\forall\, x \in \Omega$, то такое решение не может иметь внутри области ни положительного минимума, ни отрицательного максимума.*

Доказательство проведем для случая минимума при $C(x) > 0$ — остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть $C(x) > 0$, $x \in \Omega$ и пусть в точке $x_0 \in \Omega$ решение $u(x)$ уравнения (1) имеет отрицательный минимум. Тогда в точке x_0

$$u < 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \geqslant 0; \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Соотношения (4) верны в любой системе координат. Повернем оси координат так, чтобы в точке x_0 уравнение (1) стало каноническим. Тогда

$$A_{kk}(x_0) > 0; \qquad A_{jk}(x_0) = 0, \qquad j \neq k. \tag{5}$$

Положив в уравнении (1) $x = x_0$, получим

$$-\sum_{k=1}^{m} A_{kk}(x_0) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)_{x = x_0} + C(x_0)\, u(x_0) = 0.$$

Последнее равенство, однако, невозможно: в силу соотношений (4) и (5) первый член слева неположителен, а второй — строго отрицателен, так что вся левая часть отрицательна.

Замечание. Принцип максимума верен и для более общего — несамосопряженного — уравнения эллиптического типа

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+B_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu=0.$$

Действительно, члены, содержащие коэффициенты B_k, не влияют на проведенные выше рассуждения, потому что в точке минимума или максимума $\frac{\partial u}{\partial x_k}=0$.

2. Сингулярное решение. Пусть

$$a(x)=A^{-1}(x)=\left\|a_{jk}(x)\right\|_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(x, \xi)=$$
$$=\frac{1}{(m-2)\,|S_1|\sqrt{D(\xi)}}\left[a_{jk}(\xi)(x_j-\xi_j)(x_k-\xi_k)\right]^{-\frac{m-2}{2}},\quad m>2, \tag{6}$$

где $D(\xi)=\operatorname{Det} A(\xi)$. При фиксированном ξ функция $\psi(x, \xi)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(\xi)\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)=0.$$

Функция (6) называется *параметриксом* уравнения (1). При $m=2$ параметрикс определяется формулой

$$\psi(x, \xi)=\frac{1}{2\pi\sqrt{D(\xi)}}\ln\left[a_{jk}(\xi)(x_j-\xi_j)(x_k-\xi_k)\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{6_1}$$

Сингулярным решением уравнения (1) называется функция $v(x, \xi)$, обладающая следующими свойствами:

1) функция $v(x, \xi)$ представима в виде

$$v(x, \xi)=\psi(x, \xi)+\psi_1(x, \xi), \tag{7}$$

где при $x\to\xi$

$$\psi_1(x, \xi)=O\left(r^{\varkappa+2-m}\right),\qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial x_k}=O\left(r^{\varkappa+1-m}\right), \tag{8}$$
$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_j\,\partial x_k}=O\left(r^{\varkappa-m}\right);\qquad \varkappa=\text{const}>0;$$

2) при фиксированном ξ, $\xi\neq x$, функция $v(x, \xi)$ удовлетворяет уравнению (1).

Доказательство существования сингулярного решения можно найти в уже упомянутой книге К. Миранда [10].

Существуют сингулярные решения уравнения (1), симметричные относительно x и ξ (см. К. Миранда [10]). Ниже, говоря о сингулярном решении, мы предполагаем, что оно симметрично.

3. Интегральное представление. Пусть Ω' — внутренняя подобласть области Ω и пусть граница Γ' этой подобласти кусочно гладкая. Пусть функция $u \in C^2(\overline{\Omega'})$. Используя сингулярное решение уравнения (1), можно построить интегральное представление, сходное с представлением (3.4).

Пусть $x \in \Omega'$. Вырежем точку x областью σ_ε, определенной неравенством

$$a_{jk}(x)(x_j-\xi_j)(x_k-\xi_k)<\varepsilon^2;$$

ограничивающий эту область эллипсоид

$$a_{jk}(x)(x_j-\xi_j)(x_k-\xi_k)=\varepsilon^2$$

обозначим через Γ_ε. Пусть $v(x, \xi)$ — симметричное сингулярное решение уравнения (1). По формуле Грина (6.6) гл. 10 получим, учтя, что $Lv=0$,

$$\int\limits_{\Omega'\setminus\sigma_\varepsilon} vLu\,d\xi=\int\limits_{\Gamma'} A_{jk}(\xi)\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi_k}-u\frac{\partial v}{\partial\xi_k}\right)\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma'+$$
$$+\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} A_{jk}(\xi)\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi_k}-u\frac{\partial v}{\partial\xi_k}\right)\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon; \qquad (9)$$

через L обозначено дифференциальное выражение, стоящее в левой части уравнения (1).

Пусть $\varepsilon\to 0$. При этом

$$\int\limits_{\Omega'\setminus\sigma_\varepsilon} vLu\,d\xi\to\int\limits_{\Omega'} vLu\,d\xi,$$

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} vA_{jk}\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon\to 0,$$

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} uA_{jk}\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi_k}\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon\to 0.$$

Остается найти предел интеграла

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(\xi)\,A_{jk}(\xi)\,\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma_\varepsilon. \qquad (10)$$

Сингулярное решение симметрично относительно x и ξ, поэтому можно писать $v(x, \xi)=\psi(\xi, x)+\psi_1(\xi, x)$ и в интеграле (10) понимать под ψ выражение [1])

$$\psi=\psi(\xi, x)=\frac{1}{(m-2)\,|S_1|\,\sqrt{D(x)}}\left[a_{jk}(x)(\xi_j-x_j)(\xi_k-x_k)\right]^{-\frac{m-2}{2}}$$

[1]) Как обычно, внутри квадратной скобки выполнено суммирование по j и k от 1 до m.

Теперь имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k} = -\frac{1}{|S_1|\sqrt{D(x)}} \frac{a_{pk}(x)(\xi_p - x_p)}{[a_{jl}(x)(\xi_j - x_j)(\xi_l - x_l)]^{\frac{m}{2}}},$$

или, если воспользоваться уравнением эллипсоида Γ_ε,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi_k} = \frac{1}{|S_1|\varepsilon^m\sqrt{D(x)}} a_{pk}(x)(x_p - \xi_p),$$

и интеграл (10) принимает вид

$$\frac{1}{|S_1|\varepsilon^m\sqrt{D(x)}} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(\xi)\, a_{pk}(x)\, A_{jk}(x)(x_p - \xi_p)\cos(\nu, x_j)\, d_\xi\Gamma_\varepsilon. \tag{11}$$

Интеграл (11) можно упростить. Прежде всего, матрицы A и a — взаимно обратные и симметричные, поэтому

$$a_{pk}(x)\, A_{jk}(x) = a_{pk}(x)\, A_{kj}(x) = \delta_{pj},$$

и интеграл (11) преобразуется к виду

$$\frac{1}{|S_1|\varepsilon^m\sqrt{D(x)}} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u(\xi)(x_j - \xi_j)\cos(\nu, x_j)\, d_\xi\Gamma_\varepsilon.$$

Если $u(\xi)$ заменить на $u(x)$, то последний интеграл изменится на величину, которая стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, предел интеграла (10) совпадает с пределом величины

$$\frac{1}{|S_1|\varepsilon^m} \frac{u(x)}{\sqrt{D(x)}} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} (x_j - \xi_j)\cos(\nu, x_j)\, d_\xi\Gamma_\varepsilon. \tag{12}$$

Последний интеграл преобразуем по формуле Остроградского в объемный:

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} (x_j - \xi_j)\cos(\nu, x_j)\, d_\xi\Gamma_\varepsilon = \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial(x_j - \xi_j)}{\partial\xi_j}\, d\xi = -m \int\limits_{\sigma_\varepsilon} d\xi = -m\,|\sigma_\varepsilon|.$$

Вычислим величину $|\sigma_\varepsilon|$.

Объем эллипсоида равен произведению объема единичной сферы и всех полуосей эллипсоида. Если $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ суть характеристические числа матрицы $A(x)$, то полуоси эллипсоида Γ_ε суть $\varepsilon\sqrt{\lambda_k(x)}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Теперь

$$|\sigma_\varepsilon| = \frac{|S_1|\varepsilon^m}{m} \sqrt{\prod_{k=1}^{m} \lambda_k(x)} = \frac{|S_1|\varepsilon^m}{m} \sqrt{D(x)};$$

величина (12) не зависит от ε и равна $-u(x)$, и в результате предельного перехода в формуле (9) мы получаем следующее интегральное представление:

$$u(x)=\int_{\Gamma'} A_{jk}(\xi)\left(v\frac{\partial u}{\partial \xi_k}-u\frac{\partial v}{\partial \xi_k}\right)\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma'-\int_{\Omega'} vLu\,d\xi. \tag{13}$$

Если $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1), то $Lu=0$, и получается интегральное представление для решений уравнения (1):

$$u(x)=\int_{\Gamma'} A_{jk}(\xi)\left(v\frac{\partial u}{\partial \xi_k}-u\frac{\partial v}{\partial \xi_k}\right)\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma'. \tag{14}$$

4. Теорема о среднем. Пусть $u(x)\in C^{(2)}(\Omega)$ — решение уравнения (1). В формуле (14) в качестве поверхности Γ' возьмем поверхность уровня функции $v(x, \xi)$, т. е. поверхность

$$v(x, \xi)=v_0=\text{const}.$$

Примем, что постоянная v_0 достаточно велика и что точка x фиксирована. Тогда

$$u(x)=v_0\int_{v=v_0} A_{jk}(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma'-\\ -\int_{v=v_0} u(\xi)\,A_{jk}(\xi)\frac{\partial v}{\partial \xi_k}\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma'.$$

По формуле Остроградского [1])

$$\int_{v=v_0} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\cos(\nu, x_j)\,d_\xi\Gamma'=\int_{v>v_0}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right)d\xi=\int_{v>v_0} C(\xi)\,u(\xi)\,d\xi.$$

Обозначая еще для краткости

$$-A_{jk}\frac{\partial v}{\partial \xi_k}\cos(\nu, x_j)=N(v),$$

получаем формулу, аналогичную формуле теоремы о среднем:

$$u(x)=\int_{v=v_0} u(\xi)\,N(v)\,d_\xi\Gamma'+v_0\int_{v>v_0} C(\xi)\,u(\xi)\,d\xi. \tag{15}$$

Формула (15) верна для решений уравнения (1). Справедливо и обратное утверждение: если функция $u\in L_p(\Omega)$, $1<p<\infty$, и удовлетворяет соотношению (15), то $u\in C^{(2)}(\Omega)$ и эта функция удовлетворяет уравнению (1). Это утверждение будет установлено попутно при доказательстве теоремы следующего пункта.

---

[1]) Очевидно, внутри поверхности $v=v_0$ лежит область $v>v_0$.

Правая часть формулы (15) содержит поверхностный интеграл. Нетрудно построить формулу того же типа, содержащую только объемный интеграл. Пусть $\Phi(\rho)$ — бесконечно дифференцируемая функция вещественной переменной ρ, отличная от нуля только на интервале $0 < \rho < \rho_1$, где ρ_1 — достаточно малая положительная постоянная. Будем считать, что расстояние $r = |x - \xi|$ достаточно мало, тогда $v(x, \xi) > 0$. Положим

$$\rho(x, \xi) = [v(x, \xi)]^{-\frac{1}{m-2}}, \qquad \rho_0 = v_0^{-\frac{1}{m-2}}.$$

Очевидно, $\rho(x, \xi) = O(r)$ и $d\xi = \dfrac{d\rho\, d_\xi \Gamma'}{\partial\rho/\partial\nu}$, где Γ' есть поверхность $v = \text{const}$, а ν — внешняя к ней нормаль. Обе части равенства (15) умножим на $\Phi(\rho_0) \dfrac{1}{(\partial\rho/\partial\nu)_{\rho=\rho_0}} d\rho_0$ и проинтегрируем по ρ_0 в пределах $(0, +\infty)$. Мы придем тогда к формуле вида

$$u(x) = \int\limits_{\rho<\rho_0} K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi, \tag{16}$$

где $K(x, \xi)$ — непрерывная функция точек x и ξ, имеющая непрерывные первые и вторые производные по координатам точки x.

5. Подпространства решений.

Теорема 11.10.2. *Множество решений уравнения* (1), *принадлежащих пересечению $C^{(2)}(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, где $1 < p < \infty$, образует подпространство в $L_p(\Omega)$. Сходимость в этом подпространстве влечет за собой равномерную сходимость как самих функций, так и их производных первого и второго порядка в любой замкнутой внутренней подобласти.*

Пусть $\{u_n(x)\}$ — последовательность решений уравнения (1), принадлежащих пересечению $C^{(2)}(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, и пусть эта последовательность сходится в метрике $L_p(\Omega)$ к некоторой функции $u(x)$. Возьмем внутреннюю подобласть Ω' и выберем число $\rho_2 > 0$ столь малым, чтобы область $\rho(x, \xi) < \rho_2$ лежала внутри Ω каждый раз, когда $x \in \overline{\Omega'}$. Если $\rho_1 \leqslant \rho_2$, то для любой точки $x \in \overline{\Omega'}$ и для любой из функций $u_n(x)$ верна формула (16)

$$u_n(x) = \int\limits_{\rho<\rho_1} K(x, \xi)\, u_n(\xi)\, d\xi.$$

Положив здесь $n \to \infty$, найдем, что предельная функция $u(x)$ также удовлетворяет соотношению (16). Так как ядро $K(x, \xi)$ имеет непрерывные вторые производные, то $u \in C^{(2)}(\Omega')$. Из соотношения (16) вытекает также, что в $\overline{\Omega'}$ функции $u_n(x)$ и их производные первого и второго порядка равномерно стремятся к функции $u(x)$ и ее соответствующим производным.

Будучи решениями уравнения (1), функции $u_n(x)$ удовлетворяют соотношению (15). Полагая $n \to \infty$, найдем, что тому же соотношению удовлетворяет и предельная функция $u(x)$. Пусть теперь в представлении (13) Γ' есть поверхность $v=v_0$. Тогда из соотношений (13) и (15) вытекает тождество для предельной функции

$$\int\limits_{v>v_0}(v-v_0)\,Lu\,d\xi=0.$$

Так как $v-v_0>0$, то к последнему интегралу можно применить интегральную теорему о среднем

$$(Lu)_{x=x'}\int\limits_{v>v_0}(v-v_0)\,dx=0,$$

где x' — некоторая точка области $v(x,\xi)>v_0$. Отсюда $(Lu)_{x=x'}=0$. Полагая $v_0\to\infty$, получим $(Lu)(x)=0$, что и требовалось доказать.

Совершенно так же доказывается теорема, аналогичная теореме 11.10.2, в которой $L_p(\Omega)$ заменено на $C(\overline{\Omega})$.

ГЛАВА 12

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА

§ 1. Постановка задач

Будем рассматривать два типа областей: *конечные* и *бесконечные*. В обоих случаях границу области будем предполагать конечной; как всегда, граница предполагается состоящей из конечного числа кусочно гладких поверхностей (рис. 12 и 13). В последующих главах иногда — это будет каждый раз особо оговариваться — будут рассматриваться так называемые *полубесконечные* области, границы которых бесконечны. Простейшим примером полубесконечной области является полупространство.

Краевая задача для эллиптического уравнения называется *внутренней*, если искомая функция должна быть определена в конечной области, и *внешней*, если эта функция должна быть определена в бесконечной области.

Важнейшими краевыми задачами для эллиптического уравнения второго порядка являются *задача Дирихле* (первая краевая задача) и *задача Неймана* (вторая краевая задача).

Рассмотрим эллиптическое уравнение общего вида

$$-A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u = F(x). \qquad (1)$$

Внутреннюю задачу Дирихле для этого уравнения сформулируем следующим образом.

Пусть Ω — конечная область с кусочно гладкой границей Γ и $\varphi(x)$ — функция, заданная и непрерывная на границе Γ. Требуется найти решение уравнения (1), которое принадлежало бы классу $C^{(2)}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и совпадало бы на границе с заданной функцией $\varphi(x)$:

$$u(x) = \varphi(x), \qquad x \in \Gamma. \qquad (2)$$

Внутреннюю задачу Неймана для того же уравнения (1) сформулируем таким образом.

Найти решение $u(x)$ уравнения (1), обладающее свойствами: $u \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$; на множестве тех точек $x \in \Gamma$, в которых существует нормаль ν к поверхности Γ, выполняется равенство

$$\lim_{x' \to x} A_{jk}(x') \frac{\partial u(x')}{\partial x'_k} \cos(\nu, x_k) = \psi(x). \tag{3}$$

Здесь x' — точка, лежащая внутри Ω на нормали ν, x'_k — декартовы координаты этой точки, а $\psi(x)$ — функция, заданная на упомянутом множестве точек поверхности Γ.

Краевое условие задачи Неймана мы будем ниже записывать короче в виде

$$A_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_k)\Big|_{\Gamma} = \psi(x). \tag{3_1}$$

Запись (3_1) можно понимать буквально, если $u \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$.

Если $A_{jk} = \delta_{jk}$, то старшие члены уравнения (1) образуют оператор Лапласа; само уравнение принимает вид

$$-\Delta u + A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u = F(x). \tag{4}$$

Краевое условие (3_1) принимает в этом случае особенно простую форму:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma} = \psi(x). \tag{5}$$

Замечание. Приведенные выше формулировки краевых задач Дирихле и Неймана не являются совершенно общими. Так, например, можно рассматривать случай, когда в краевом условии (2) задачи Дирихле функция $\varphi(x)$ разрывна на Γ. В этом случае нельзя требовать, чтобы $u \in C(\bar{\Omega})$, — это условие надо заменить некоторым другим; краевое условие (2) должно выполняться только в точках непрерывности функции $\varphi(x)$. Можно также отказаться от требования кусочной гладкости границы.

Внешние задачи отличаются от соответствующих внутренних только тем, что на неизвестную функцию накладывается добавочное требование

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{m-2}}\right), \qquad x \to \infty. \tag{6}$$

§ 2. Теоремы единственности для уравнения Лапласа

Теорема 12.2.1. *Как внутренняя, так и внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет не более одного решения.*

Допустим, что задача Дирихле имеет два решения: $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Тогда справедливы следующие две системы тождеств:

$$-\Delta u_1 = F(x), \qquad u_1|_\Gamma = \varphi(x); \tag{1}$$

$$-\Delta u_2 = F(x), \qquad u_2|_\Gamma = \varphi(x). \tag{2}$$

Введем обозначение $u_1(x) - u_2(x) = v(x)$. Вычитая тождество (1) из (2), получим

$$\Delta v = 0, \qquad v|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле. Дело сводится к отысканию гармонической в Ω функции $v(x)$, непрерывной в $\overline{\Omega}$. По принципу максимума ее наибольшее и наименьшее значения достигаются на границе, но тогда они равны между собой и равны нулю. Отсюда следует, что $v \equiv 0$ и $u_1(x) \equiv u_2(x)$.

Перейдем к внешней задаче Дирихле. Если $m = 2$, то конформным преобразованием (например, дробно-линейным) можно перевести бесконечную область в конечную. Уравнение Лапласа при этом переходит опять в уравнение Лапласа, функция v, гармоническая в бесконечной области, переходит в функцию, гармоническую в конечной области, и эта функция по-прежнему равна нулю на границе области. Дело сводится, таким образом, к уже доказанной единственности задачи Дирихле в конечной области. Поэтому дальше нам достаточно рассмотреть случай $m > 2$. В силу условия (1.6) разность решений $v = u_1 - u_2$ гармонична в Ω. Окружим границу Γ шаром радиуса R с поверхностью S_R и рассмотрим функцию $v(x)$ в кольцевой области Ω_R, заключенной между Γ и S_R (рис. 20). Нам известно, что $v|_\Gamma = 0$; кроме того, на достаточно большом расстоянии от начала координат, которое мы

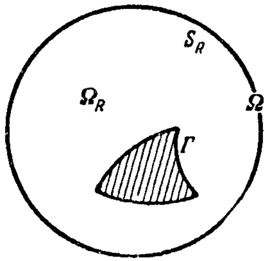

Рис. 20.

поместим в центре сферы S_R,

$$|v(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{m-2}}, \qquad C = \text{const}.$$

Следовательно, на поверхности шара S_R, если только радиус R достаточно велик,

$$|v(x)| \leqslant \frac{C}{R^{m-2}}.$$

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем R настолько большим, чтобы $CR^{2-m} < \varepsilon$. В кольцевой области Ω_R наибольшее и наименьшее значения функция $v(x)$ принимает либо на Γ, либо на S_R; эти значения, следовательно, по модулю не превосходят ε.

Пусть x — произвольная точка области Ω. При достаточно большом R эта точка попадет в область Ω_R и потому $|v(x)| < \varepsilon$. Но ε — произвольное положительное число, поэтому $v(x) = 0$ и $u_1(x) \equiv u_2(x)$.

Замечание. Об условиях единственности решения задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка (1.1) см. книгу Миранда [10]. Если матрица старших коэффициентов положительно определенная в замкнутой области $\bar{\Omega}$ и $A_0(x) > 0$, то единственность решения задачи Дирихле вытекает из принципа максимума (§ 10 гл. 11).

Займемся задачей Неймана. Будем говорить, что функция $u(x)$, определенная в области Ω, имеет на границе Γ этой области *правильную нормальную производную*, если существует непрерывный на Γ предел

$$\lim_{x' \to x} \frac{\partial u(x')}{\partial \nu}, \qquad \forall x \in \Gamma,$$

причем стремление к пределу — равномерное относительно x; через x', как и выше, обозначена точка области, лежащая на нормали ν, проходящей через точку x.

Если функция $u \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, а граница Γ гладкая, то, очевидно, $u(x)$ имеет на Γ правильную нормальную производную.

Рассмотрим конечную область Ω с границей Γ и поставим для этой области внутреннюю задачу Неймана:

$$\Delta u = F(x), \quad x \in \Omega, \quad u \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),$$

$$\lim_{x' \to x} \frac{\partial u(x')}{\partial \nu} = \psi(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{4}$$

причем будем требовать, чтобы *искомая функция имела правильную нормальную производную*. Предположим еще, что граница Γ есть *регулярная поверхность*. Это означает следующее: 1) в каждой точке x поверхности существует определенная нормаль; 2) если в любой точке $x \in \Gamma$ построить местную систему координат, в которой ось x_m направлена по нормали, а оси $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ лежат в касательной плоскости, то вблизи точки x можно задать поверхность явным уравнением вида $x_m = f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$; 3) при $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ достаточно малых $f \in C^{(2)}$.

Покажем, что задача Неймана (4) в общем случае неразрешима, и выведем необходимое условие ее разрешимости.

В каждой точке x поверхности Γ проведем нормаль, направленную внутрь области, и на нормали отложим отрезок фиксированной длины h, один конец которого совпадает с точкой x. Геометрическое место вторых концов образует поверхность Γ_h, о которой говорят, что она *параллельна* поверхности Γ. Из дифференциальной геометрии известно, что при h достаточно малом поверхность Γ_h гладкая и что нормаль к одной параллельной поверхности является нормалью и к другой. Обозначим через $\Omega^{(h)}$ область, заключенную внутри Γ_h; очевидно, $\Omega^{(h)} = \Omega \setminus \overline{\Omega}_h$, где Ω_h — пограничная полоска области Ω ширины h.

Если u — решение задачи (4), то, очевидно, $u \in C^{(2)}(\overline{\Omega}^{(h)})$ и к функциям u и $v \equiv 1$ можно применить формулу Грина (6.10) гл. 10. В данном случае эта формула дает

$$-\int_{\Omega^{(h)}} F(x)\,dx = \int_{\Gamma_h} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma_h.$$

Функция u имеет правильную нормальную производную, поэтому $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_h}$ равномерно стремится к $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = \psi(x)$ при $h \to 0$. Переходя в последней формуле к пределу при $h \to 0$, получим

$$\int_{\Omega} F(x)\,dx + \int_{\Gamma} \psi(x)\,d\Gamma = 0. \tag{5}$$

Этому соотношению необходимо должны удовлетворять данные нашей задачи. В общем случае, как мы видим, внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа решения не имеет — решение может существовать лишь тогда, когда выполнено условие (5).

В частных случаях однородного краевого условия или однородного дифференциального уравнения должно выполняться соответственно одно из двух равенств:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\Omega} F(x) \, dx = 0, \tag{6}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \psi(x) \, d\Gamma = 0. \tag{7}$$

С другой стороны, очевидно, что решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа (если оно существует) не единственно: если функция $u(x)$ решает задачу (4), то, как легко видеть, функция $u(x) + C$, где C — произвольная постоянная, решает ту же задачу. Теоремой единственности в данном случае является утверждение, по которому выражение $u(x) + C$ исчерпывает все решения этой задачи.

Теорема 12.2.2. *Два решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа могут отличаться только на постоянное слагаемое.*

Докажем эту теорему, предполагая поверхность Γ регулярной.

Пусть задача (4) имеет два решения. Их разность $v(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\Delta v = 0, \qquad \left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = 0. \tag{8}$$

К функции v и области $\Omega^{(h)}$ (см. выше) применим формулу Грина (6.8) гл. 10:

$$\int_{\Omega^{(h)}} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k} \right)^2 dx = \int_{\Gamma_h} v \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\Gamma_h. \tag{9}$$

Функция v непрерывна и, следовательно, ограничена в $\overline{\Omega}$. В то же время величина $\left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_h}$ равномерно стремится к нулю. Переходя в соотношении (9) к пределу при $h \to 0$, получим

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k} \right)^2 dx = 0.$$

Отсюда $\frac{\partial v}{\partial x_k} \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и, следовательно, $v = \mathrm{const}$.

Замечание 1. Если предположить, что искомое решение имеет в Ω непрерывные первые производные, то нетрудно доказать теорему 12.2.2, предполагая поверхность Γ только кусочно гладкой.

Замечание 2. Для $m=3$ теорема 12.2.2 доказана в довольно широких предположениях. См. В. И. Смирнов [17], т. IV, п. 205.

Теорема единственности для внешней задачи Неймана будет доказана ниже, в § 7.

§ 3. Решение задачи Дирихле для шара

Здесь и ниже в этой главе (за исключением § 7) мы будем рассматривать только однородное уравнение Лапласа — неоднородное сводится к нему приемом, указанным в § 6 гл. 11; напомним, что этот прием основан на построении частного решения неоднородного уравнения Лапласа в виде объемного потенциала.

Итак, пусть дан шар $Ш_R$ радиуса R с центром в начале координат. Поставим задачу об отыскании функции $u \in C(\overline{Ш}_R)$, гармонической в шаре и удовлетворяющей краевому условию

$$u\big|_{S_R} = \varphi(x), \tag{1}$$

где S_R — граница шара и $\varphi(x)$ — функция, заданная и непрерывная на сфере S_R.

Решать нашу задачу будем следующим образом. Предполагая, что решение существует и удовлетворяет некоторым более жестким требованиям, мы построим формулу, определяющую решение по данным задачи. После этого мы докажем, что построенная формула на самом деле дает решение задачи.

Пусть поставленная нами задача имеет решение $u(x)$, принадлежащее классу $C^{(2)}(\overline{Ш}_R)$.

Напишем интегральное представление этого решения (формула (4.1) гл. 11)

$$u(x) = \frac{1}{(m-2)\,|S_1|} \int\limits_{S_R} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d_\xi S_R. \tag{2}$$

Возьмем точку x внутри шара, и пусть x' — точка, симметричная с точкой x относительно сферы S_R (рис. 21). Это значит, что точки x и x' лежат на одном луче, проходящем через центр шара, и что

$$|x|\cdot|x'|=R^2. \tag{3}$$

Обозначим

$$r=|x-\xi|, \qquad r'=|x'-\xi|.$$

Заметим, что $r'\neq 0$, когда точка ξ движется внутри сферы или по ее поверхности. Введем функцию

$$v(\xi)=\frac{1}{r'^{m-2}}; \tag{4}$$

она гармонична в любой области, не содержащей точки x'. В частности, функция (4) гармонична в шаре $Ш_R$.

К паре функций u и v применим формулу Грина (6.10) гл. 10. Обе функции гармоничны, поэтому объемный интеграл исчезает, и мы получаем

$$\int\limits_{S_R}\left(\frac{1}{r'^{m-2}}\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r'^{m-2}}\right)d_\xi S_R=0. \tag{5}$$

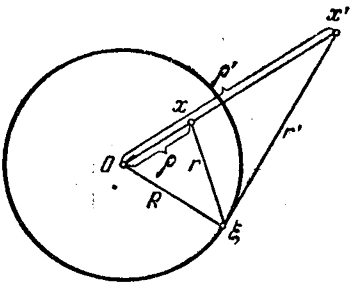

Рис. 21.

Для дальнейшего важно то обстоятельство, что первые члены под интегралами (2) и (5) отличаются только множителем, не зависящим от ξ. Это можно доказать на основании того простого соображения, что треугольники $Ox\xi$ и $Ox'\xi$ (рис. 21) подобны. Действительно, у этих треугольников угол в точке O общий, а заключающие этот угол стороны пропорциональны в силу соотношения (3). Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{r}{r'}=\frac{|x|}{R}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{r}=\frac{R}{|x|\,r'}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{r^{m-2}}=\left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2}\frac{1}{r'^{m-2}},$$

так что $\frac{1}{r^{m-2}}$ и $\frac{1}{r'^{m-2}}$ отличаются множителем $\left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2}$, не зависящим от ξ.

Будем далее обозначать $|x|=\rho$, $|x'|=\rho'$.

Умножим формулу (5) на

$$\frac{1}{(m-2)|S_1|}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}$$

и вычтем из формулы (3):

$$u(x)=\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int\limits_{S_R}u(\xi)\left[\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r'^{m-2}}-\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right]d_\xi S_R.$$

Замечая, что в силу краевого условия задачи Дирихле

$$u(\xi)\big|_{S_R}=\varphi(\xi),$$

получаем формулу для решения (в предположении, что оно существует и принадлежит классу $C^{(2)}(\overline{Ш_R})$):

$$u(x)=\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int\limits_{S_R}\varphi(\xi)\left[\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r'^{m-2}}-\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right]d_\xi S_R. \tag{6}$$

Формулу (6) можно упростить. Прежде всего, для шара направления внешней нормали и радиуса совпадают, поэтому

$$\cos(\nu,\ x_k)=\frac{\xi_k}{R}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\nu}=\frac{\xi_k}{R}\frac{\partial}{\partial\xi_k}.$$

Отметим еще формулы

$$\frac{\partial r}{\partial\xi_k}=\frac{\xi_k-x_k}{r},\qquad \frac{\partial r'}{\partial\xi_k}=\frac{\xi_k-x'_k}{r'};$$

здесь x_k и x'_k — координаты точек x и x' соответственно

Легко вычислить второй член под знаком интеграла (6):

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}=-(m-2)\frac{\xi_k}{R}\frac{1}{r^{m-1}}\frac{\partial r}{\partial\xi_k}=$$
$$=-\frac{m-2}{r^mR}\xi_k(\xi_k-x_k)=-\frac{m-2}{r^mR}(R^2-\xi_kx_k). \quad (7)$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r'^{m-2}}=-\frac{m-2}{r'^mR}(R^2-\xi_kx'_k).$$

Умножим это выражение на $\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}$; учитывая ранее полученное соотношение $\frac{R}{\rho r'}=\frac{1}{r}$, получаем

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r'^{m-2}}=-\frac{m-2}{r^mR}\left(\rho^2-\xi_kx'_k\frac{\rho^2}{R^2}\right).$$

Точки x и x' лежат на одном луче, проходящем через начало, поэтому

$$x_k=x'_k\frac{|x|}{|x'|}=x'_k\frac{\rho^2}{\rho\rho'}=x'_k\frac{\rho^2}{R^2}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m-2}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r'^{m-2}}=-\frac{m-2}{r^mR}(\rho^2-\xi_kx_k). \quad (8)$$

Подставив выражения (7) и (8) в интеграл (6), получим окончательно

$$u(x)=\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R}\varphi(\xi)\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}d_\xi S_R. \quad (9)$$

Формула (9) называется *формулой Пуассона*, а выражение

$$\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m},\quad \rho\leqslant R,$$

— *ядром Пуассона*.

Из наших рассуждений следует, что формула Пуассона во всяком случае справедлива для любой гармонической функции класса $C^{(2)}(\overline{Ш_R})$.

Отметим некоторые свойства ядра Пуассона.

1. Ядро Пуассона неотрицательно. При $\rho = R$ оно всюду равно нулю, кроме точки $x = \xi$, вблизи которой оно неограничено.

2. Если точка x меняется внутри шара, то ядро Пуассона есть гармоническая функция от x.

Докажем это. Если точка x лежит внутри шара, то $r \neq 0$ и ядро Пуассона имеет непрерывные производные всех порядков. Остается доказать, что оно удовлетворяет однородному уравнению Лапласа. По формуле Лейбница

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \frac{R^2 - \rho^2}{r^m} = \frac{1}{r^m} \frac{\partial^2 (R^2 - \rho^2)}{\partial x_k^2} + 2 \frac{\partial (R^2 - \rho^2)}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r^m}\right) + (R^2 - \rho^2) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{1}{r^m}\right).$$

Замечая, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\rho}, \qquad \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k - \xi_k}{r},$$

и суммируя по k, получим

$$\Delta \frac{R^2 - \rho^2}{r^m} = \frac{2m}{r^m} \left[-1 + \frac{1}{r^2} (R^2 + \rho^2 - 2x_k \xi_k) \right],$$

что равно нулю, так как

$$r^2 = (\xi - x,\ \xi - x) = R^2 + \rho^2 - 2(\xi, x) = R^2 + \rho^2 - 2x_k \xi_k.$$

3. Справедлива формула

$$\frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{R^2 - \rho^2}{R r^m} d_\xi S_R \equiv 1, \quad \rho < R. \tag{10}$$

В самом деле, будем искать функцию, гармоническую в шаре и принимающую на границе значение 1. В силу теоремы единственности решение этой задачи Дирихле всюду будет равно 1. Очевидно, что $1 \in C^{(2)}(\overline{Ш_R})$, и для нее справедлива формула Пуассона, которая в данном случае совпадает с формулой (10).

Докажем теперь, что *если функция $\varphi(x)$ непрерывна на сфере S_R, то формула Пуассона дает гармоническую в $Ш_R$ функцию, которая имеет в любой точке x_0 сферы S_R предельное значение $\varphi(x_0)$.*

Пусть $u(x)$ — функция точки x, определенная внутри шара $Ш_R$ формулой Пуассона (9). Очевидно, что эта функция непрерывна и имеет производные всех порядков внутри шара. Легко видеть, что она гармоническая:

$$\Delta u = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \varphi(\xi)\, \Delta_x \frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}\, d_\xi S_R = 0.$$

Пусть точка x стремится изнутри сферы S_R к точке x_0, лежащей на этой сфере. Из формулы (9) вычтем формулу (10), предварительно умноженную на $\varphi(x_0)$:

$$u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)] \frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}\, d_\xi S_R. \qquad (11)$$

Функция $\varphi(x)$ непрерывна на сфере S_R; выберем на S_R сферическую окрестность σ точки x_0 столь малую, чтобы

$$|\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad \forall \xi \in \sigma,$$

где ε — произвольно выбранное положительное число. Заметим, что в $S_R \setminus \sigma$

$$|\xi - x_0| \geqslant \delta,$$

где δ — радиус окрестности σ.

Оценим разность $u(x) - \varphi(x_0)$, для чего интеграл (11) разобьем на два: по σ и по $S_R \setminus \sigma$

$$u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{|S_R|} \int\limits_{\sigma} \frac{R^2-\rho^2}{Rr^m} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]\, d_\xi S_R + \\ + \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R \setminus \sigma} \frac{R^2-\rho^2}{Rr^m} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]\, d_\xi S_R.$$

Для первого интеграла имеем

$$\frac{1}{|S_1|} \left| \int\limits_{\sigma} \frac{R^2-\rho^2}{Rr^m} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]\, d_\xi S_R \right| < \\ < \frac{\varepsilon}{2|S_1|} \int\limits_{\sigma} \frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}\, d_\xi S_R < \frac{\varepsilon}{2|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}\, d_\xi S_R = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Мы получили оценку для первого интеграла независимо от положения точки x. Второй интеграл можно сделать малым за счет близости точек x и x_0. Возьмем эти точки столь близкими, чтобы выполнялось неравенство $|x-x_0|<\delta/2$. Тогда

$$r=|\xi-x|=|(\xi-x_0)+(x_0-x)|\geqslant$$
$$\geqslant|\xi-x_0|-|x_0-x|\geqslant\frac{\delta}{2},$$

откуда

$$\frac{1}{r}<\frac{2}{\delta}.$$

Теперь

$$\frac{R^2-\rho^2}{Rr^m}=\frac{(R+\rho)(R-\rho)}{Rr^m}<\frac{2^{m+1}(R-\rho)}{\delta^m}.$$

Функция φ непрерывна на замкнутом множестве и потому ограничена. Пусть $|\varphi(\xi)|\leqslant M=\text{const}$, тогда $|\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\leqslant 2M$. Теперь имеем

$$|u(x)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2^{m+2}M(R-\rho)}{\delta^m}\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R\setminus\sigma}dS_R<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2^{m+2}MR^{m-1}(R-\rho)}{\delta^m}.$$

Возьмем число $h>0$ столь малым, чтобы

$$\frac{2^{m+2}MR^{m-1}h}{\delta^m}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда если $|x_0-x|<h$, то $R-\rho=|x_0|-|x|\leqslant\leqslant|x_0-x|<h$ и $|u(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=\varphi(x_0),\qquad\forall\, x_0\in S_R. \tag{12}$$

Функцию $u(x)$, определенную в открытом шаре формулой Пуассона (9), доопределим на сфере S_R, положив $u(x)=\varphi(x)$, $x\in S_R$. Доопределенная таким образом функция гармонична внутри шара, непрерывна, в силу формулы (12), в замкнутом шаре и удовлетворяет краевому условию (4). Задача Дирихле для шара решена.

Формула (2), а с ней и все доказательство, требует, чтобы $m>2$. Однако формула Пуассона верна и для $m=2$. В этом случае формулу можно получить, исходя из интегрального представления (4.2). Другой вывод формулы Пуассона для $m=2$ будет дан в § 1 гл. 13.

§ 4. Теорема Лиувилля

Теорема 12.4.1 (теорема Лиувилля). *Функция, гармоническая в любой конечной области и ограниченная сверху или снизу, есть постоянная.*

Если функция $u(x)$ гармоническая и $u(x) \leqslant M$, $M = \mathrm{const}$, то $-u(x)$ также гармоническая и $-u(x) \geqslant -M$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда гармоническая функция ограничена снизу: $u(x) \geqslant m = \mathrm{const}$. Можно считать, что $m > 0$, — если это не так, то можно прибавить к $u(x)$ достаточно большую положительную постоянную.

Зафиксируем произвольную точку x и опишем вокруг начала шар $Ш_R$ столь большого радиуса R, чтобы точка x оказалась внутри шара. Данная функция $u(x)$, гармоническая в любой конечной области, гармонична и в шаре, и для нее верна формула Пуассона

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{R^2 - \rho^2}{Rr^m} u(\xi)\, d_\xi S_R,$$

где S_R — граница шара.

Легко видеть, что $R - \rho \leqslant r \leqslant R + \rho$, и так как функция $u(x)$ положительна, то получается следующая оценка:

$$\frac{R-\rho}{R(R+\rho)^{m-1}} \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} u(\xi)\, dS_R \leqslant u(x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{R+\rho}{R(R-\rho)^{m-1}} \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} u(\xi)\, dS_R. \quad (1)$$

По теореме о среднем

$$u(0) = \frac{1}{|S_1| R^{m-1}} \int\limits_{S_R} u(\xi)\, dS_R,$$

и неравенство (1) принимает вид

$$\frac{(R-\rho)R^{m-2}}{(R+\rho)^{m-1}} u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{(R+\rho)R^{m-2}}{(R-\rho)^{m-1}} u(0).$$

Устремляя R к бесконечности, приходим к неравенству

$$u(0) \leqslant u(x) \leqslant u(0).$$

Отсюда $u(x) = u(0)$. Теорема доказана.

§ 5. Задача Дирихле для внешности сферы

Пусть Ω — внешность шара радиуса R с границей S_R и пусть требуется найти функцию $u(x)$, гармоническую в Ω и удовлетворяющую краевому условию

$$u|_{S_R} = \varphi(x). \tag{1}$$

Докажем, что решение этой задачи дается *формулой Пуассона*

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{\rho^2 - R^2}{Rr^m} \varphi(\xi)\, d_\xi S_R, \qquad \rho > R, \tag{2}$$

где, как и в § 3, $r = |\xi - x|$ и $\rho = |x|$.

Как и в § 3, доказывается, что функция $u(x)$, определяемая формулой (2), имеет вне сферы S_R непрерывные производные всех порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа. Исследуем поведение этой функции на бесконечности. Очевидно, $r \geqslant \rho - R$. Отсюда

$$|u(x)| \leqslant c\, \frac{\rho + R}{(\rho - R)^{m-1}}; \qquad c = \frac{1}{|S_1|\, R} \int\limits_{S_R} |\varphi(\xi)|\, dS_R.$$

Нас интересуют большие значения ρ. Будем поэтому считать, что $\rho > 2R$. Тогда $R < \frac{1}{2}\rho$ и $\rho - R > \frac{1}{2}\rho$. Теперь

$$|u(x)| < \frac{2^m c}{\rho^{m-2}},$$

и функция $u(x)$ гармонична вне шара.

Остается доказать предельное равенство

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \qquad \forall x_0 \in S_R. \tag{3}$$

Для этого вычислим интеграл (2) при значении $\varphi(\xi) = 1$.

Введем в рассмотрение точку x', симметричную с точкой x относительно сферы S_R. Имеем ($\rho = |x|$, $\rho' = |x'|$, $r' = |\xi - x'|$)

$$\rho^2 = \frac{R^4}{\rho'^2}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} \cdot \frac{R}{\rho},$$

и ядро Пуассона можно преобразовать к виду

$$\frac{\rho^2 - R^2}{Rr^m} = \frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}} \cdot \frac{R^2 - \rho'^2}{Rr'^m}.$$

Точка x' лежит внутри сферы S_R, и по формуле (3.10)

$$\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}\,dS_R=\frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}}\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R}\frac{R^2-\rho'^2}{Rr'^m}\,dS_R=\frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}}. \tag{4}$$

Умножим равенство (4) на $\varphi(x_0)$ и вычтем из формулы Пуассона (2)

$$u(x)-\frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}}\varphi(x_0)=\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}\left[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)\right]dS_R.$$

Повторив дословно рассуждения § 3, получим

$$\lim_{x\to x_0}\left[u(x)-\frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}}\varphi(x_0)\right]=0.$$

Отсюда

$$|u(x)-\varphi(x_0)|\leqslant\left|u(x)-\frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}}\varphi(x_0)\right|+$$
$$+|\varphi(x_0)|\left(1-\frac{R^{m-2}}{\rho^{m-2}}\right)\xrightarrow[x\to x_0]{}0,$$

и равенство (3) доказано.

§ 6. Производные гармонической функции на бесконечности

Теорема 12.6.1. *Пусть $u(x)$ — функция, гармоническая в бесконечной области Ω с конечной границей Γ, и пусть $D^k u$ — любая из производных порядка k от функции u. Тогда для достаточно больших $|x|$ имеет место неравенство*

$$|D^k u|\leqslant\frac{C_k}{|x|^{m-2+k}}, \tag{1}$$

где C_k не зависит от x.

Доказательство проведем для $k=1$; общий случай рассматривается аналогично.

Граница Γ конечна, поэтому можно построить сферу S_R столь большого радиуса R, чтобы Γ целиком лежала внутри этой сферы. Для функции $u(x)$ во внешности сферы S_R справедлива формула Пуассона:

$$u(x)=\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}u(\xi)\,d_\xi S_R,\qquad \rho=|x|.$$

Найдем какую-нибудь из первых производных, например, производную по x_1:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R} u(\xi)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}\,d_\xi S_R. \tag{2}$$

Вычислим производную под знаком интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}=2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\cdot\frac{1}{Rr^m}-\frac{m(\rho^2-R^2)}{Rr^{m+1}}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_1}=$$
$$=\frac{2x_1}{Rr^m}-\frac{m(\rho^2-R^2)}{Rr^{m+1}}\cdot\frac{x_1-\xi_1}{r}.$$

Пусть ρ достаточно велико, например, пусть $\rho>2R$. Тогда $r>\rho-R>\frac{1}{2}\rho$, и мы получаем следующую оценку ядра интеграла (2):

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\rho^2-R^2}{Rr^m}\right|\leqslant\frac{2^{m+1}}{R\rho^{m-1}}+\frac{2^{m+1}m}{R\rho^{m-1}}=\frac{C_1}{\rho^{m-1}}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что для $m=2$ можно получить оценку производных с порядком убывания на единицу более высоким, чем в формуле (1).

§ 7. Теорема единственности для внешней задачи Неймана

Теорема 12.7.1. *В случае $m>2$ внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа имеет не более одного решения.*

Доказательство проведем в предположении, что граница рассматриваемой области регулярна.

Итак, пусть бесконечная область Ω имеет регулярную границу Γ и пусть в этой области задача Неймана имеет два решения; их разность $v(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\Delta v=0,\quad x\in\Omega;\quad v(x)=O(|x|^{-m+2}),\quad x\to\infty; \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|_\Gamma=0. \tag{2}$$

Построим поверхность Γ_h, параллельную поверхности Γ и расположенную внутри Ω (рис. 22). Проведем сферу S_R с центром в начале и радиусом R столь большим, чтобы вся поверхность Γ_h оказалась внутри S_R. Обозначим через $\Omega_R^{(h)}$ область, ограниченную поверхностями Γ_h и S_R, и через Ω_R — область, ограниченную поверхностями Γ и S_R.

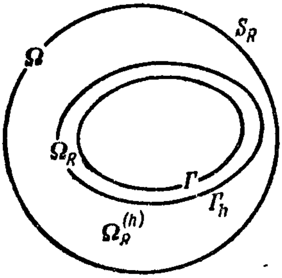

Рис. 22.

Область $\Omega_R^{(h)}$ конечна, причем $v \in C^{(2)}(\bar{\Omega}_R^{(h)})$; можно, следовательно, применить формулу Грина (6.8) гл. 10:

$$\int\limits_{\Omega_R^{(h)}} v \Delta v dx = - \int\limits_{\Omega_R^{(h)}} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 dx + \int\limits_{\Gamma_h} v \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma_h + \int\limits_{S_R} v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS_R.$$

Перейдя к пределу при $h \to 0$ и приняв во внимание уравнения (1) и (2), придем к тождеству

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 dx = \int\limits_{S_R} v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS_R. \tag{3}$$

Пусть $R \to \infty$. Соотношения (1) показывают, что функция v гармонична в Ω, и при достаточно больших R

$$|v(x)|_{|x|=R} \leqslant \frac{C}{R^{m-2}}, \quad C = \text{const}.$$

Далее, по неравенству (6.1)

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{|x|=R} \leqslant \frac{C_1}{R^{m-1}}, \quad C_1 = \text{const},$$

и для правой части формулы (3) получается оценка

$$\left|\int\limits_{S_R} v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS_R\right| \leqslant \frac{CC_1 |S_R|}{R^{2m-3}} = \frac{CC_1 |S_1|}{R^{m-2}}.$$

По предположению $m > 2$; поэтому

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 dx = \lim_{R \to \infty} \int\limits_{S_R} v \frac{\partial v}{\partial \nu} dS_R \leqslant \lim_{R \to \infty} \frac{CC_1 |S_1|}{R^{m-2}} = 0;$$

отсюда очевидным образом следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} \equiv 0, \qquad v \equiv \text{const}.$$

Вспоминая, что $v(x)$ на бесконечности обращается в нуль, получаем $v(x) \equiv 0$. Теорема доказана.

Пусть $m=2$. В § 6 мы отмечали, что в этом частном случае первые производные убывают быстрее, чем в общем случае. Используя это обстоятельство, легко получим равенство

$$v \equiv \text{const}.$$

В то же время требование $|v(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{m-2}}$ дает лишь ограниченность на бесконечности. Отсюда следует, что при $m=2$ единственность внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа имеет место лишь с точностью до постоянного слагаемого.

ГЛАВА 13

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА

§ 1. Задачи Дирихле и Неймана для круга

В этом и ближайших параграфах будет рассмотрено однородное уравнение Лапласа на двумерной плоскости. В отличие от обозначений, применяемых в остальной части книги, мы будем здесь обозначать декартовы координаты переменной точки через x и y или через ξ и η; соответственно самые точки будут обозначаться символами (x, y) или (ξ, η). Мы будем также пользоваться обозначениями $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, где $i = \sqrt{-1}$.

Хорошо известна связь между гармоническими и аналитическими функциями: если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функция, голоморфная в некоторой области, то ее вещественная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ гармоничны в той же области. С другой стороны, если вещественная функция $u(x, y)$ гармонична в *односвязной* области, то можно найти гармоническую в той же области функцию $v(x, y)$ (она называется *сопряженной* с функцией $u(x, y)$) так, чтобы сумма $u(x, y) + iv(x, y)$ была в указанной области голоморфной функцией от z. Если область многосвязна, то написанная выше сумма будет, вообще говоря, многозначной.

Если n — натуральное число, то функция z^n голоморфна в любой конечной области; если n — целое отрицательное, то функция z^n голоморфна в любой области, не содержащей начала. Отсюда следует, что полиномы

$$\operatorname{Re}(z^n), \qquad \operatorname{Im}(z^n), \qquad n \geqslant 0 \tag{1}$$

гармоничны в любой конечной области, а рациональные дроби

$$\operatorname{Re}(z^{-n}), \qquad \operatorname{Im}(z^{-n}), \qquad n \geqslant 1 \tag{2}$$

гармоничны в любой области, не содержащей начала.

Введем полярные координаты ρ и θ с полюсом в начале. Тогда $z = \rho e^{i\theta}$; функции (1) и (2) принимают соответственно вид

$$\rho^n \cos n\theta, \qquad \rho^n \sin n\theta, \qquad n \geqslant 0 \tag{1'}$$

и

$$\frac{\cos n\theta}{\rho^n}, \qquad -\frac{\sin n\theta}{\rho^n}, \qquad n \geqslant 1. \tag{2'}$$

1. Поставим задачу Дирихле для круга. Пусть требуется найти функцию $u(x, y)$, гармоническую в круге $|z| < R$ и совпадающую на окружности этого круга с заданной непрерывной функцией $\varphi(\theta)$:

$$u|_{\rho=R} = \varphi(\theta). \tag{3}$$

Допустим, что функция $\varphi(\theta)$ разлагается в ряд Фурье, сходящийся при всех θ. Пусть

$$\varphi(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{4}$$

Легко написать формальное решение нашей задачи:

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{R^n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{5}$$

Ряд (5) сходится в круге $|z| < R$ и его сумма в этом круге гармонична (докажите!). Если в этом ряде допустим почленный переход к пределу при $\rho \to R$, то

$$u(x, y)|_{\rho=R} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \varphi(\theta)$$

и формула (5) действительно решает задачу.

По известной теореме Абеля такой предельный переход допустим при тех значениях θ, при которых ряд (5) сходится. Этот ряд сходится к $\varphi(\theta)$ при всех θ, если, например, $\varphi(\theta)$ 2π-периодична, абсолютно непрерывна и имеет производную $\varphi'(\theta) \in L_2(0, 2\pi)$. Для такого рода граничных функций ряд (5) действительно решает задачу Дирихле.

Просуммируем ряд (5). По известным формулам для коэффициентов Фурье

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\,d\omega,\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\cos n\omega\,d\omega,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\sin n\omega\,d\omega.$$

Подставив это в ряд (5), получим

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\omega-\theta)\right]d\omega.$$

Мы переставили здесь порядок суммирования и интегрирования; законность этого при $\rho<R$ нетрудно доказать.

Имеем $\rho e^{i\theta}=z$. Положим еще $Re^{i\omega}=\zeta$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\omega-\theta)=\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\zeta^n}=\operatorname{Re}\frac{z}{\zeta-z}$$

и

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\operatorname{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\omega=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\varphi(\omega)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Эта формула известна под названием *формулы Шварца*. Далее,

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\operatorname{Re}\frac{(\zeta+z)(\bar\zeta-\bar z)}{|\zeta-z|^2}=\frac{R^2-\rho^2}{r^2};\qquad r=|\zeta-z|,$$

и окончательно

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{r^2}\varphi(\omega)\,d\omega. \tag{6}$$

Это — формула Пуассона для круга. Нетрудно видеть, что $r^2=R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\omega-\theta)$, и мы приходим к более обычной записи формулы Пуассона:

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\omega-\theta)}\varphi(\omega)\,d\omega.$$

2. Решение задачи Дирихле для внешности круга $|z|>R$ при том же краевом условии (3) дается рядом

$$u(x,\ y)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^n}{\rho^n}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta). \qquad (5_1)$$

Ряд (5_1) можно просуммировать и получить формулу Пуассона для внешности круга:

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-R^2}{r^2}\,\varphi(\omega)\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-R^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\omega-\theta)}\,\varphi(\omega)\,d\omega. \qquad (6_1)$$

3. Задача Неймана для круга $|z|<R$ при краевом условии

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\rho=R}=\psi(\theta) \qquad (7)$$

решается так. Разложим $\psi(\theta)$ в ряд Фурье:

$$\psi(\theta)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta).$$

Но если решение $u(x,\ y)$ существует, то

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\theta)\,d\theta=\frac{1}{2\pi R}\int_{\rho=R}\psi(\theta)\,d\Gamma=\frac{1}{2\pi R}\int_{\rho=R}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma=0 \qquad (8)$$

в силу формулы (2.7) гл. 12; через $d\Gamma$ здесь обозначен элемент длины окружности $|z|=R$: $d\Gamma=R\,d\theta$. Теперь

$$\psi(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta). \qquad (9)$$

Имея в виду, что для круга $\rho=|z|=R$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}=\left.\frac{\partial}{\partial\rho}\right|_{\rho=R},$$

можно написать формальное решение задачи Неймана в следующем виде:

$$u(x, y)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{nR^{n-1}}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta); \tag{10}$$

C — произвольная постоянная. Ряд (10) сходится и допускает почленное дифференцирование в замкнутом круге $|z|\leqslant R$, если, например, функция $\psi(\theta)$ удовлетворяет условиям, которые выше были наложены на функцию $\varphi(\theta)$; кроме того, конечно, функция $\psi(\theta)$ должна удовлетворять равенству (8). В этих условиях ряд (10) дает решение задачи Неймана для круга $|z|<R$.

4. Если функция $\psi(\theta)$ удовлетворяет всем только что сформулированным условиям, то задача Неймана для внешности круга $|z|>R$ при том же краевом условии (7) решается формулой

$$u(x, y)=C-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{n\rho^n}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta), \tag{11}$$

где C — по-прежнему произвольная постоянная.

5. Ряд (10) нетрудно просуммировать. По формулам для коэффициентов Фурье

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\omega)\cos n\omega\,d\omega,\qquad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\omega)\sin n\omega\,d\omega.$$

Подставим это в (10) и изменим порядок суммирования и интегрирования (доказать законность этого легко):

$$u(x, y)=C+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\omega)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{nR^{n-1}}\cos n(\omega-\theta)\,d\omega=$$

$$=C+\frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\omega)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Re}\left\{\frac{\rho^n}{R^n}e^{in(\theta-\omega)}\right\}d\omega=$$

$$=C+\frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\omega)\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\zeta^n}\,d\omega;\qquad \zeta=Re^{i\omega}$$

Вспоминая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \ln \frac{1}{1-t}, \qquad |t| < 1,$$

и что $\operatorname{Re} \ln \tau = \ln |\tau|$, находим

$$u(x, y) = C + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{R}{\rho} \psi(\omega)\, d\omega = C + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} \psi(\omega)\, d\omega. \tag{12}$$

Формула (12) известна под названием *формулы Дини*.

Аналогично суммируется и ряд (11).

§ 2. Задача Дирихле для кругового кольца

Пусть кольцо определено неравенствами $R_0 < \rho < R_1$; $\rho = |z|$. Значения граничной функции на окружностях $\rho = R_0$ и $\rho = R_1$ обозначим соответственно через $\varphi_0(\theta)$ и $\varphi_1(\theta)$. Краевые условия для искомой гармонической функции $u(x, y)$ можно записать в виде

$$u|_{\rho=R_0} = \varphi_0(\theta), \qquad u|_{\rho=R_1} = \varphi_1(\theta). \tag{1}$$

Гармоническая функция $u(x, y)$ есть вещественная часть некоторой аналитической функции $f(z)$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z).$$

Кольцо — двусвязная область, и функция $f(z)$, вообще говоря, неголоморфна. Можно доказать, что

$$f(z) = C \ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n,$$

где C — вещественная постоянная. Полагая

$$C_n = A_n - iB_n,$$

видим, что функцию $u(x, y)$ можно искать в форме

$$u(x, y) = C \ln \rho + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n \rho^n + A_{-n} \rho^{-n}) \cos n\theta + \\ + (B_n \rho^n - B_{-n} \rho^{-n}) \sin n\theta\}. \tag{2}$$

Функции $\varphi_0(\theta)$ и $\varphi_1(\theta)$ разложим в ряды Фурье. Пусть

$$\begin{gathered}\varphi_0(\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),\\ \varphi_1(\theta)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta).\end{gathered} \tag{3}$$

Разложения (2) и (3) подставим в краевое условие (1) и приравняем коэффициенты при $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$. Это приведет нас к последовательности алгебраических систем второго порядка:

$$\begin{aligned} &C\ln R_0+A_0=a_0, &&C\ln R_1+A_0=\alpha_0;\\ &A_nR_0^n+A_{-n}R_0^{-n}=a_n, &&A_nR_1^n+A_{-n}R_1^{-n}=\alpha_n;\\ &B_nR_0^n-B_{-n}R_0^{-n}=b_n, &&B_nR_1^n-B_{-n}R_1^{-n}=\beta_n.\end{aligned}$$

Определители этих систем отличны от нуля, и можно определить все коэффициенты разложения (2). Тем самым формальное решение задачи построено. Обоснование этого решения мы предоставляем читателю.

Тот же метод позволяет решить для кругового кольца и задачу Неймана.

§ 3. Применение конформного преобразования

Пусть голоморфная функция $z=z(\zeta)=x(\xi,\ \eta)+iy(\xi,\ \eta)$ конформно преобразует область D плоскости ζ в область Ω плоскости z. Пусть, далее, $u(x,\ y)$ — функция, гармоническая в Ω. Тогда функция $\tilde{u}(\xi,\ \eta)=u(x(\xi,\ \eta),\ y(\xi,\ \eta))$ гармонична в D.

Для доказательства вычислим величину

$$\Delta_\zeta\tilde{u}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}.$$

Имеем

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}$$

и

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\\+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2}.$$

Последние равенства сложим. Учтем при этом, что $x(\xi, \eta)$ и $y(\xi, \eta)$ суть соответственно вещественная и мнимая части голоморфной функции $z(\zeta)$; поэтому x и y суть гармонические функции от ξ и η, связанные уравнениями Коши — Римана. Справедливы, следовательно, соотношения

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}=\frac{\partial y}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial x}{\partial\eta}=-\frac{\partial y}{\partial\xi},$$
$$\Delta_\zeta x=\Delta_\zeta y=0.$$

Теперь

$$\Delta_\zeta\tilde{u}=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2\right]\Delta_z u=|z'(\zeta)|^2\,\Delta_z u;$$

здесь

$$\Delta_z u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Если $\Delta_z u=0$ то, очевидно, $\Delta_\zeta\tilde{u}=0$, что и требовалось доказать.

Коротко можно сказать, что конформное преобразование переводит гармоническую функцию в гармоническую. Оказывается, что конформное преобразование переводит также задачу Дирихле в задачу Дирихле и задачу Неймана в задачу Неймана.

Действительно, пусть в области Ω поставлена задача Дирихле:

$$\Delta u=0,\qquad u|_\Gamma=\varphi(s). \tag{1}$$

Здесь Γ — контур области Ω и s — параметр, определяющий положение точки на Γ.

Пусть функция $z(\zeta)$, реализующая конформное преобразование области D на область Ω, непрерывна в замкнутой области[1]) $\bar{D} = D \cup \Gamma_1$, где Γ_1 — контур области D. Конформное преобразование, как мы видели, не меняет уравнения Лапласа, и преобразованная функция $\tilde{u}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\zeta \tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} = 0. \tag{2}$$

Как известно, если преобразование конформно, то соответствие между контурами взаимно однозначно: тот же параметр s может служить для определения положения точки на Γ_1, а в таком случае краевое условие (1) не меняется при конформном преобразовании, и мы имеем

$$u\big|_{\Gamma_1} = \varphi(s). \tag{3}$$

Совокупность уравнений (2) и (3) показывает, что преобразованная функция $\tilde{u}$ есть решение задачи Дирихле в области D.

Обратимся к задаче Неймана. Известно, например, что производная $z'(\zeta)$ остается непрерывной на регулярных[2]) участках контура. По-прежнему преобразованная функция удовлетворяет уравнению (2); выясним, какому краевому условию она удовлетворяет.

Пусть функция $u(x, y)$ удовлетворяет условию задачи Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma} = \psi(s). \tag{4}$$

Обозначим через ν_1 нормаль к контуру Γ_1 в точке, соответствующей значению s параметра. При конформном отображении контур переходит в контур и, следовательно, направление касательной переходит в направление касательной; так как при этом углы сохраняются, то направление нормали ν переходит в направление нормали ν_1. Поясним последнее утверждение. Пусть z и ζ — точки контуров Γ и Γ_1, соответствующие друг другу при конформном преобразовании. Если в области Ω провести нормаль ν, пересекающую контур Γ в точке z, то при конформном преобразовании эта

---

[1]) Для этого необходимо и достаточно, чтобы область D была ограничена жордановой кривой.

[2]) Определение регулярной границы см. стр. 263.

нормаль перейдет в кривую, которая в точке ζ касается нормали ν_1 (рис. 23). На нормали ν возьмем точку $z_1 = x_1 + iy_1$.

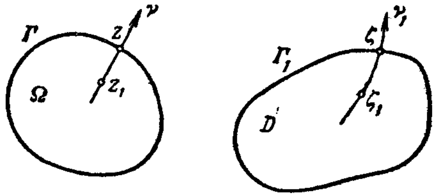

Рис. 23.

Пусть ей в области D соответствует точка $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$. Обозначим $h = |z - z_1|$, $k = |\zeta - \zeta_1|$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lim_{z_1 \to z} \frac{u(x, y) - u(x_1, y_1)}{h} = \lim_{\zeta_1 \to \zeta} \frac{\tilde{u}(\xi, \eta) - \tilde{u}(\xi_1, \eta_1)}{k} \frac{k}{h} =$$
$$= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_1} \lim_{\zeta_1 \to \zeta} \frac{k}{h}.$$

Из конформности преобразования следует, что

$$\lim_{\zeta_1 \to \zeta} \frac{k}{h} = \frac{1}{|z'(\zeta)|},$$

и окончательно

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_1} = \frac{\partial u}{\partial \nu} |z'(\zeta)|. \tag{5}$$

Если функция u удовлетворяет краевому условию (4), то преобразованная функция $\tilde{u}$ удовлетворяет краевому условию

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu_1} \right|_{\Gamma_1} = \psi(s) \, |z'(\zeta)|, \tag{6}$$

т. е. опять-таки краевому условию задачи Неймана.

Решения задач Дирихле и Неймана для круга и кругового кольца нам известны — они построены в предшествующих параграфах. Из доказанного выше следует, что если нам известно конформное преобразование данной области на круг или на круговое кольцо, то для такой области мы можем написать решения задач Дирихле и Неймана. Перечислим некоторые такие области.

1. Полуплоскость отображается на круг дробно-линейным преобразованием.

2. Внешность эллипса отображается на круг преобразованием вида (a и b — постоянные)

$$z = a\zeta + \frac{b}{\zeta}. \tag{7}$$

3. Многоугольник отображается на круг с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца.

4. Область, ограниченная двумя окружностями, отображается на круговое кольцо с помощью дробно-линейного преобразования.

5. С помощью функции (7) можно отобразить кольцо между двумя софокусными эллипсами на круговое кольцо.

Число таких примеров можно увеличить.

§ 4. Сферические функции и их свойства

Полное изложение теории и применений сферических функций можно найти в книгах В. И. Смирнова [17], т. III; Е. В. Гобсона [3]; Н. Я. Виленкина [1]. Здесь мы приведем определение и (без доказательств) простейшие свойства сферических функций.

Рассмотрим m-мерное евклидово пространство точек с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и в нем однородные полиномы степени n, удовлетворяющие уравнению Лапласа; здесь n — любое целое неотрицательное число. Такие полиномы, очевидно, гармоничны в любой области. Гармонические однородные полиномы нетрудно построить: для этого достаточно взять однородный полином данной степени n с произвольными коэффициентами, составить его оператор Лапласа и последний приравнять нулю. Это дает нам некоторые соотношения между коэффициентами; полиномы, коэффициенты которых удовлетворяют этим соотношениям, и будут гармоническими.

Для примера рассмотрим случай трех независимых переменных x_1, x_2, x_3. Очевидно, любой полином нулевой или первой степени — гармонический. Однородный полином второй степени в общем случае имеет вид

$$\sum_{j,\,k=1}^{3} a_{jk}x_jx_k, \qquad a_{jk} = a_{kj}.$$

Его оператор Лапласа равен $2(a_{11} + a_{22} + a_{33})$. Приравняв его нулю, получим

$$a_{33} = -(a_{11} + a_{22}).$$

Это дает нам общую форму гармонического полинома второй степени с тремя независимыми переменными:

$$a_{11}(x_1^2 - x_3^2) + a_{22}(x_2^2 - x_3^2) + 2a_{11}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Последняя формула, между прочим, показывает, что среди упомянутых полиномов имеется пять линейно независимых. Это, например, полиномы

$$x_1^2 - x_3^2, \quad x_1^2 - x_2^2, \quad x_1x_2, \quad x_1x_3, \quad x_2x_3.$$

Существует $2n+1$ линейно независимых однородных гармонических полиномов степени n с тремя независимыми переменными. В общем случае m независимых переменных число линейно независимых однородных гармонических полиномов степени n равно

$$(2n + m - 2)\frac{(m+n-3)}{(m-2)!\,n!}. \tag{1}$$

Величину (1) будем далее обозначать через $k_{n,m}$.

В случае $m=2$, $n>0$ существует только два линейно независимых однородных гармонических полинома степени n, а именно полиномы $\operatorname{Re}(z^n)$ и $\operatorname{Im}(z^n)$, где $z = x_1 + ix_2$.

От декартовых координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$ перейдем к сферическим координатам $\rho, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-2}, \vartheta_{m-1}$ по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos\vartheta_1, \\ x_2 &= \rho\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{m-1} &= \rho\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\cos\vartheta_{m-1}, \\ x_m &= \rho\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\ldots\sin\vartheta_{m-2}\sin\vartheta_{m-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Сферические координаты меняются в пределах

$$0 \leqslant \rho < \infty; \quad 0 \leqslant \vartheta_k \leqslant \pi, \quad k \leqslant m-2; \quad 0 \leqslant \vartheta_{m-1} \leqslant 2\pi.$$

Если $\rho = 1$, то получаем точку единичной сферы; такая точка вполне определяется угловыми координатами $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$. Обратно, задание угловых координат вполне определяет точку на единичной сфере.

Пусть $P_{n,m}(x)$ — однородный гармонический полином степени n от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Заменим последние по формулам (1). Так как данный полином — однородный степени n, то он примет вид

$$P_{n, m}(x) = \rho^n Y_{n, m}(\theta). \tag{3}$$

Здесь через θ обозначена точка единичной сферы с угловыми координатами $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$.

Функция $Y_{n, m}(\theta)$ называется *m-мерной сферической функцией порядка n*. В дальнейшем размерность m пространства будет оставаться фиксированной и мы будем опускать слово «m-мерная» в названии сферической функции.

Перечислим важнейшие свойства сферических функций. Одни из этих свойств очевидны, другие требуют доказательств, которых мы не приводим.

1. Сферические функции суть полиномы от синусов и косинусов угловых координат.

2. $Y_{0, m}(\theta) = \mathrm{const}$.

3. Сферические функции различных порядков ортогональны на единичной сфере:

$$\int_{S_1} Y_{n,m}(\theta)\, Y_{n',m}(\theta)\, dS_1 = 0, \quad n \neq n'. \tag{4}$$

4. Если $n \neq 0$, то существует $k_{n, m}$ линейно независимых сферических функций данного порядка n. Будем обозначать эти функции через $Y^{(k)}_{n, m}(\theta)$, $k = 1, 2, \ldots, k_{n, m}$. Для единообразия обозначений будем считать, что $k_{0, m} = 1$, и будем писать $Y^{(1)}_{0, m}(\theta)$ вместо $Y_{0, m}(\theta)$.

5. При данном n можно функции $Y^{(k)}_{n, m}(\theta)$ подвергнуть процессу ортогонализации. Будем считать, что ортогонализация выполнена. Тогда система функций

$$Y^{(k)}_{n, m}(\theta); \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, k_{n, m}$$

ортонормирована по единичной сфере S_1:

$$\int_{S_1} Y^{(k)}_{n, m}(\theta)\, Y^{(k')}_{n', m}(\theta)\, dS_1 = \begin{cases} 0, & n \neq n' \text{ или } k \neq k', \\ 1, & n = n' \text{ и } k = k'. \end{cases} \tag{5}$$

6. Система сферических функций (5) полна в $L_2(S_1)$. Отсюда следует, что любая функция, определенная почти всюду на единичной сфере S_1 и на ней квадратично суммируемая, может быть разложена в ряд по сферическим функциям, и на сфере S_1 этот ряд будет сходиться в среднем к данной функции. Если $f(\theta)$ — данная функция, то ее разложение в ряд по

сферическим функциям имеет вид

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta), \tag{6}$$

где

$$a_n^{(k)} = \int_{S_1} f(\theta) Y_{n,m}^{(k)}(\theta)\, dS_1. \tag{7}$$

7. Если $m = 2$, то существуют две ортогональные сферические функции порядка $n > 0$. За такие функции можно принять, например, $\cos n\vartheta$ и $\sin n\vartheta$, где ϑ — полярный угол в двумерной плоскости.

8. Функции

$$\rho^n Y_{n,m}^{(k)}(\theta), \qquad \frac{Y_{n,m}^{(k)}(\theta)}{\rho^{m+n-2}}, \qquad n \geqslant 0 \tag{8}$$

гармоничны: первая — в любой конечной области, вторая — в любой области, не содержащей начала координат.

§ 5. Задачи Дирихле и Неймана, решаемые с помощью сферических функций

В настоящем параграфе мы будем строить формальные решения рассматриваемых задач в виде рядов по сферическим функциям. Слово «формальные» означает здесь, что мы не будем исследовать сходимость рядов, допустимость почленного дифференцирования и предельного перехода и т. п. Если построенные ряды сходятся и все выполнявшиеся над ними действия законны, то формальное решение задачи и является ее решением.

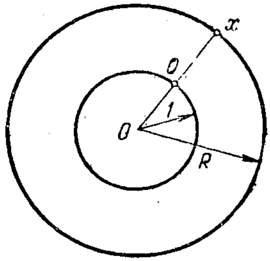

Рис. 24.

1. **Задача Дирихле для шара.** Пусть требуется найти функцию $u(x)$, гармоническую в шаре $\rho = |x| < R$ и совпадающую на сфере $\rho = R$ с заданной на этой сфере функцией $\varphi(x)$. На сфере $\rho = R$ величина ρ постоянна, и положение точки x можно определить, задав только ее угловые координаты, иначе говоря, задав ту точку θ на единичной сфере, которая лежит на одном луче с точкой x (рис. 24).

Это позволяет нам рассматривать $\varphi(x)$ как функцию точки θ; мы будем писать поэтому $\varphi(\theta)$ вместо $\varphi(x)$ и будем записывать краевое условие задачи Дирихле в виде

$$u|_{\rho=R}=\varphi(\theta). \tag{1}$$

Пусть функция $\varphi(\theta)$ разлагается в ряд по сферическим функциям:

$$\varphi(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta). \tag{2}$$

Решение задачи Дирихле для шара $\rho<R$ дается рядом

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{R^n}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta). \tag{3}$$

2. Задача Дирихле для внешности шара. Пусть требуется найти функцию $u(x)$, гармоническую в области $\rho=|x|>R$ и удовлетворяющую краевому условию (1). Если функция $\varphi(\theta)$ разлагается в ряд (2), то искомая функция представляется рядом

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{n+m-2}}{\rho^{n+m-2}}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta). \tag{4}$$

3. Задача Неймана для шара. Пусть требуется найти функцию $u(x)$, гармоническую в шаре $\rho<R$ и удовлетворяющую краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\rho=R}=\psi(\theta); \tag{5}$$

здесь ν — внешняя нормаль к сфере $\rho=R$, она совпадает по направлению с радиусом, идущим в точку x; поэтому $\frac{\partial}{\partial\nu}=\left.\frac{\partial}{\partial\rho}\right|_{\rho=R}$, и условие (5) можно представить в виде

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=R}=\psi(\theta). \tag{6}$$

В силу формулы (2.7) гл. 12 для разрешимости задачи Неймана необходимо, чтобы

$$\int\limits_{\rho=R}\psi(\theta)\,dS_R=0.$$

Но $dS_R = R^{m-1}\, dS_1$, где S_1 — единичная сфера, и последнее условие равносильно следующему:

$$\int_{S_1} \psi(\theta)\, dS_1 = 0. \tag{7}$$

Функцию $\psi(\theta)$ разложим в ряд по сферическим функциям:

$$\psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta). \tag{8}$$

Член с номером $n=0$ отсутствует в силу формул (7), (4.7) и свойства 2 сферических функций (§ 4).

Решение задачи Неймана представляется рядом

$$u(x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{nR^{n-1}} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta), \tag{9}$$

где C — произвольная постоянная.

4. Задача Неймана для внешности шара. Пусть ищется функция $u(x)$, гармоническая в области $\rho > R$ и удовлетворяющая краевому условию (5). Для бесконечной области условие (2.7) гл. 12 не необходимо, и разложение функции $\psi(\theta)$ в ряд по сферическим функциям может содержать также и нулевой член. Пусть

$$\psi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta). \tag{10}$$

Решение задачи Неймана дается формулой

$$u(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+m-1}}{(n+m-2)\,\rho^{n+m-2}} \sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_n^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta). \tag{11}$$

5. Задачи Дирихле и Неймана для шарового слоя. Будем искать функцию, гармоническую в шаровом слое $R_0 < \rho < R_1$ и удовлетворяющую краевым условиям задачи Дирихле

$$u|_{\rho=R_0} = \varphi_0(\theta), \qquad u|_{\rho=R_1} = \varphi_1(\theta). \tag{12}$$

Функции $\varphi_0(\theta)$ и $\varphi_1(\theta)$ разложим в ряды по сферическим функциям:

$$\begin{aligned}\varphi_0(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_{0n}^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta),\\ \varphi_1(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_{1n}^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta).\end{aligned} \tag{13}$$

Решение задачи будем искать в виде ряда

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} \left(A_n^{(k)}\rho^n + \frac{B_n^{(k)}}{\rho^{n+m-2}}\right) Y_{n,m}^{(k)}(\theta). \tag{14}$$

Полагая в формуле (14) $\rho = R_0$ и $\rho = R_1$ и сравнивая полученные ряды с рядами (13), получим систему уравнений для неизвестных коэффициентов $A_n^{(k)}$ и $B_n^{(k)}$:

$$\begin{aligned}A_n^{(k)}R_0^n + B_n^{(k)}R_0^{2-m-n} &= a_{0n}^{(k)},\\ A_n^{(k)}R_1^n + B_n^{(k)}R_1^{2-m-n} &= a_{1n}^{(k)}.\end{aligned} \tag{15}$$

Определитель системы (15), равный

$$R_0^n R_1^n\left(R_0^{2-m-2n} - R_1^{2-m-2n}\right),$$

отличен от нуля и коэффициенты $A_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}$ можно определить, что приводит к решению задачи Дирихле.

В случае задачи Неймана краевые условия имеют вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\rho=R_0} = \psi_0(\theta), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\rho=R_1} = \psi_1(\theta). \tag{16}$$

Соотношение (2.7) гл. 12 в данном случае означает, что функции $\psi_0(\theta)$ и $\psi_1(\theta)$ должны удовлетворять равенству

$$R_0^{m-1}\int_{S_1}\psi_0(\theta)\,dS_1 + R_1^{m-1}\int_{S_1}\psi_1(\theta)\,dS_1 = 0 \tag{17}$$

— без этого задача Неймана не имеет решения.

Функции $\psi_0(\theta)$ и $\psi_1(\theta)$ разложим в ряды по сферическим функциям:

$$\psi_0(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_{0n}^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta), \quad \psi_1(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} b_{1n}^{(k)} Y_{n,m}^{(k)}(\theta). \tag{18}$$

Равенство (17) вместе с формулой (4.7) приводит к следующему соотношению между свободными членами рядов (18):

$$R_0^{m-1}b_{00}^{(1)}+R_1^{m-1}b_{10}^{(1)}=0. \tag{19}$$

Решение задачи будем искать в виде ряда (14). Примем во внимание, что $\frac{\partial}{\partial\nu}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R_0}$ на внутренней сфере и $\frac{\partial}{\partial\nu}=\frac{\partial}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R_1}$ на внешней сфере. Продифференцировав ряд (14) по нормали и сравнив полученные ряды с рядами (18), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -nR_0^{n-1}A_n^{(k)}+\frac{n+m-2}{R_0^{n+m-1}}B_n^{(k)}&=b_{0n}^{(k)},\\ nR_1^{n-1}A_n^{(k)}-\frac{n+m-2}{R_1^{n+m-1}}B_n^{(k)}&=b_{1n}^{(k)}. \end{aligned} \tag{20}$$

Определитель системы (20), равный

$$\frac{n(n+m-2)}{(R_0R_1)^{n+m-1}}\left(R_0^{2n+m-2}-R_1^{2n+m-2}\right),$$

отличен от нуля при $n\neq 0$. Отсюда следует, что коэффициенты $A_n^{(k)}$ и $B_n^{(k)}$ при $n>0$ определяются единственным образом. При $n=0$ система (20) дает два значения для одной и той же величины $B_0^{(1)}$:

$$B_0^{(1)}=R_0^{m-1}\frac{b_{00}^{(1)}}{m-2}, \qquad B_0^{(1)}=-R_1^{m-1}\frac{b_{10}^{(1)}}{m-2}.$$

Эти значения совпадают в силу соотношения (19). Коэффициент $A_0^{(1)}$, как и следовало ожидать, остался произвольным.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить задачу Неймана для кругового кольца.
2. Для кругового кольца $R_0<|z|<R_1$ решить смешанную задачу

$$u|_{\rho=R_0}=\varphi(\theta), \qquad \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\rho=R_1}=\psi(\theta).$$

ГЛАВА 14

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ. ДРУГИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ

В настоящей главе будет изложен метод решения задачи Дирихле, отличный от элементарных методов предшествующих глав. Новый метод опирается на решение задачи о минимуме квадратичного функционала, изложенное в гл. 5. Этот метод позволяет в довольно общих условиях решить задачу Дирихле для формально самосопряженного невырождающегося эллиптического уравнения, а также ряд других задач теории уравнений в частных производных.

Как было только что отмечено, вариационный метод дает довольно общие результаты; в то же время он накладывает на задачу существенные ограничения. Достаточно полно задача Дирихле решается только для конечной области. В случае неоднородного краевого условия граничную функцию приходится подчинять некоторому достаточно жесткому требованию (см. ниже, § 5).

Вариационный метод будет использован и в последующих главах: в гл. 15 с помощью этого метода мы изучим спектр задачи Дирихле, в гл. 16 — задачу Неймана. Гл. 17 мы посвятим несколько более сложному вопросу о формально несамосопряженных эллиптических уравнениях.

§ 1. Неравенство Фридрихса

Пусть в m-мерном евклидовом пространстве E_m задана конечная область Ω; для простоты предположим, что ее граница Γ кусочно гладкая. Пусть функция $u \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$ удовлетворяет краевому условию

$$u|_\Gamma = 0. \qquad (1)$$

Докажем, что тогда справедливо так называемое *неравенство Фридрихса*

$$\int_{\Omega} u^2\,dx \leqslant \varkappa \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx. \tag{2}$$

Здесь $\varkappa$ — постоянная, которая не зависит от функции u и целиком определяется областью Ω.

Систему координат выберем так, чтобы область Ω оказалась расположенной в той части пространства, где все координаты положительны. Поместим эту область внутрь некоторого параллелепипеда П, определяемого неравенствами

$$0 \leqslant x_k \leqslant a_k; \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

(рис. 25).

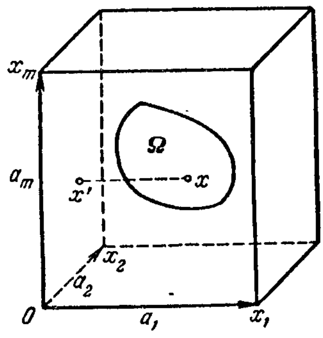

Рис. 25.

Доопределим функцию $u(x)$, положив ее тождественно равной нулю в области $П \setminus \Omega$. После этого функция $u(x)$ останется непрерывной, так как $u|_\Gamma = 0$. Производные этой функции могут терпеть разрыв при переходе через границу Г. Для таких функций справедлива формула Ньютона—Лейбница.

В параллелепипеде П возьмем точку $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и спроектируем ее на координатную плоскость, ортогональную оси Ox_1. Проекцию обозначим через x'. Можно рассматривать x' как точку $(m-1)$-мерного евклидова пространства с координатами $x_2, \ldots, x_m$. Будем пользоваться обозначением $x = (x_1, x')$ и ему аналогичными.

По формуле Ньютона — Лейбница

$$u(x) - u(0, x') = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\, d\xi.$$

Но точка $(0, x')$ лежит вне области Ω, поэтому $u(0, x') = 0$ и $u(x) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\, d\xi.$

По неравенству Буняковского

$$u^2(x) \leqslant \int_0^{x_1} d\xi \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 d\xi \leqslant a_1 \int_0^{a_1} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 d\xi.$$

Последнее неравенство проинтегрируем по параллелепипеду Π

$$\int_\Pi u^2(x)\,dx \leqslant a_1^2 \int_0^{a_1} d\xi \int_0^{a_2} dx_2 \ldots \int_0^{a_m} \left(\frac{\partial u(\xi, x')}{\partial \xi}\right)^2 dx_m =$$

$$= a_1^2 \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2} dx_2 \ldots \int_0^{a_m} \left(\frac{\partial u(x_1, x')}{\partial x_1}\right)^2 dx_m = a_1^2 \int_\Pi \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right)^2 dx.$$

Слева и справа отбросим интегралы по $\Pi \setminus \Omega$, равные нулю; кроме того, к подынтегральной функции справа прибавим неотрицательную сумму

$$\sum_{k=2}^{m} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)^2.$$

Это приведет нас к неравенству

$$\int_\Omega u^2(x)\,dx \leqslant a_1^2 \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx, \tag{3}$$

которое совпадает с неравенством (2), если в последнем положить $\varkappa = a_1^2$. Разумеется, в качестве $\varkappa$ можно взять любое из чисел a_k^2 (в частности, наименьшее из них). Вопрос о наименьшем возможном значении $\varkappa$ будет решен в следующей главе.

§ 2. Оператор задачи Дирихле

Пусть

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(x)u \tag{1}$$

— дифференциальное выражение, коэффициенты которого определены в некоторой конечной области Ω евклидова m-мерного пространства E_m. Границу Γ области Ω будем считать кусочно гладкой. Примем еще, что $A_{jk} \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, $C \in C(\bar{\Omega})$.

Дифференциальное выражение (1) будем считать эллиптическим в замкнутой области $\bar{\Omega}$. В этом случае все собственные числа $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ матрицы старших коэффициентов $A_{jk}(x)$ имеют в $\bar{\Omega}$ один и тот же знак. Изменив, если это нужно, знак выражения L, можно всегда считать, что $\lambda_k(x) > 0$, $x \in \bar{\Omega}$.

Уравнение

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \ldots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет старший коэффициент $(-1)^m$, постоянный и отличный от нуля; прочие коэффициенты этого уравнения непрерывны в $\bar{\Omega}$. Отсюда следует, что корни $\lambda_k(x)$ этого уравнения суть непрерывные в $\bar{\Omega}$ функции от x. Будучи положительными в компактной замкнутой области $\bar{\Omega}$, они в этой области ограничены снизу некоторой положительной постоянной, которую мы обозначим через μ_0:

$$\lambda_k(x) \geqslant \mu_0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}; \quad \mu_0 = \text{const} > 0. \tag{2}$$

Эллиптическое дифференциальное уравнение, удовлетворяющее неравенству (2), называется *невырождающимся* в Ω.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_m$ — произвольные вещественные числа. Если $\lambda_1(x)$ — наименьшее из собственных чисел матрицы $\| A_{jk} \|_{j,k=1}^{j,k=m}$ то, как известно,

$$A_{jk}(x) t_j t_k \geqslant \lambda_1(x) \sum_{k=1}^{m} t_k^2.$$

Воспользовавшись неравенством (2), получим

$$A_{jk}(x) t_j t_k \geqslant \mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2. \tag{3}$$

Неравенство (3) и характеризует невырожденное эллиптическое выражение. Это неравенство будет играть важную роль в последующем.

От дифференциального выражения (1) потребуем еще, чтобы

$$C(x) \geqslant 0, \qquad \forall x \in \bar{\Omega}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь задачу Дирихле с однородным краевым условием:

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + Cu = f(x), \tag{5}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{6}$$

Будем считать, что $f \in L_2(\Omega)$, и будем искать решение задачи (5) — (6), также принадлежащее пространству $L_2(\Omega)$. Задача (5) — (6), как и всякая краевая задача, порождает некоторый оператор, который мы обозначим через $\mathfrak{A}$. Он действует по формуле

$$\mathfrak{A}u = Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + Cu;$$

за его область определения $D(\mathfrak{A})$ можно принять множество тех функций из $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, которые удовлетворяют краевому условию (6). Ясно, что $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как оператор, действующий в пространстве $L_2(\Omega)$.

Докажем, что *оператор* $\mathfrak{A}$ *в* $L_2(\Omega)$ *положительно определенный.* В соответствии с определением (§ 2 гл. 5) достаточно установить три факта: 1) множество $D(\mathfrak{A})$ плотно в $L_2(\Omega)$; 2) оператор $\mathfrak{A}$ симметричен

$$(\mathfrak{A}u,\ v) = (u,\ \mathfrak{A}v); \qquad u,\ v \in D(\mathfrak{A}); \tag{7}$$

3) оператор $\mathfrak{A}$ удовлетворяет неравенству положительной определенности

$$(\mathfrak{A}u,\ u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2; \qquad \gamma^2 = \mathrm{const} > 0. \tag{8}$$

Множество $D(\mathfrak{A})$ плотно в $L_2(\Omega)$ — это сразу вытекает из следствия 1.3.1, так как $D(\mathfrak{A})$, очевидно, содержит множество всех финитных в Ω функций.

Докажем симметричность оператора $\mathfrak{A}$. Пусть $u, v \in D(\mathfrak{A})$. Это значит, что $u,\ v \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ и

$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = 0. \tag{9}$$

Составим разность

$$(\mathfrak{A}u,\ v)-(u,\ \mathfrak{A}v)=(Lu,\ v)-(u,\ Lv)=\int\limits_{\Omega}(vLu-uLv)\,dx.$$

Применив к последнему интегралу вторую формулу Грина (формула (6.6) гл. 10), получим

$$(\mathfrak{A}u,v)-(u,\mathfrak{A}v)=\int\limits_{\Gamma}A_{jk}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_k}-u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\cos(\nu,\ x_j)\,d\Gamma.$$

В силу равенств (9) интеграл справа равен нулю. Тождество (7), а с ним и симметричность оператора $\mathfrak{A}$ доказаны.

Остается доказать неравенство (8). Имеем

$$(\mathfrak{A}u,\ u)=(Lu,\ u)=-\int\limits_{\Omega}u\frac{\partial}{\partial x_j}A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx+\int\limits_{\Omega}Cu^2\,dx.$$

К первому интегралу применим первую формулу Грина (формула (6.5) гл. 10). В силу краевого условия (6) интеграл по поверхности исчезнет, и мы получим

$$(\mathfrak{A}u,\ u)=\int\limits_{\Omega}\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu^2\right]dx. \tag{10}$$

Интеграл (10) оценим снизу. Прежде всего, отбросим неотрицательное слагаемое Cu^2. Далее, воспользуемся неравенством (3), положив в нем $t_k=\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$:

$$A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\geqslant\mu_0\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2.$$

Теперь

$$(\mathfrak{A}u,\ u)\geqslant\mu_0\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2dx. \tag{11}$$

Для функции $u\in D(\mathfrak{A})$ очевидным образом справедливо неравенство (1.2) Фридрихса, и окончательно

$$(\mathfrak{A}u,\ u)\geqslant\frac{\mu_0}{\varkappa}\int\limits_{\Omega}u^2\,dx=\frac{\mu_0}{\varkappa}\,\|u\|^2. \tag{12}$$

Неравенство (8) установлено $\left(\text{со значением постоянной } \gamma^2 = \frac{\mu_0}{\varkappa}\right)$; тем самым доказано, что $\mathfrak{A}$ — положительно определенный оператор.

Замечание. Оператор $\mathfrak{A}$ положительно определен и тогда, когда $C(x) \equiv 0$. Это позволяет несколько ослабить условие (4). Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ тот оператор, в который превращается оператор $\mathfrak{A}$ при $C(x) \equiv 0$, и пусть $\gamma_0^2 > 0$ — нижняя грань оператора $\mathfrak{A}_0$. Тогда

$$(\mathfrak{A}_0 u, u) \geqslant \gamma_0^2 \| u \|^2. \tag{13}$$

Очевидно, $\mathfrak{A}u = \mathfrak{A}_0 u + C(x) u$. Отсюда

$$(\mathfrak{A}u, u) = (\mathfrak{A}_0 u, u) + (Cu, u) \geqslant \gamma_0^2 \| u \|^2 + (Cu, u). \tag{14}$$

Допустим, что $C(x)$ удовлетворяет неравенству

$$C(x) \geqslant \varepsilon - \gamma_0^2, \qquad \forall x \in \bar{\Omega}, \tag{15}$$

где ε — положительная постоянная. Тогда

$$(Cu, u) = \int_\Omega C(x) u^2(x)\, dx \geqslant (\varepsilon - \gamma_0^2) \int_\Omega u^2(x)\, dx = (\varepsilon - \gamma_0^2) \| u \|^2.$$

Подставив это в (13), найдем, что

$$(\mathfrak{A}u, u) \geqslant \varepsilon \| u \|^2 \tag{16}$$

и оператор $\mathfrak{A}$ положительно определенный. Таким образом, условие (4) можно заменить более слабым условием (15).

§ 3. Энергетическое пространство задачи Дирихле

С оператором $\mathfrak{A}$ задачи Дирихле, как и со всяким положительно определенным оператором, можно связать свое энергетическое пространство $H_\mathfrak{A}$. Исследуем его ближе.

Теорема 14.3.1. *Энергетическое пространство $H_\mathfrak{A}$ состоит из тех и только тех функций, которые* 1) *в Ω квадратично суммируемы и имеют квадратично суммируемые обобщенные первые производные,* 2) *удовлетворяют краевому условию* (2.6) *в следующем смысле: если $u \in H_\mathfrak{A}$, то существует последовательность функций $u_n \in D(\mathfrak{A})$*

таких, что

$$\int\limits_{\Omega} (u_n - u)^2\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1}$$

В пространстве $H_{\mathfrak{A}}$ энергетические произведение и норма определяются формулами

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = \int\limits_{\Omega} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + Cuv\right) dx, \tag{2}$$

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2 = \int\limits_{\Omega} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right) dx. \tag{3}$$

Докажем сперва, что если функция $u \in H_{\mathfrak{A}}$, то эта функция обладает свойствами, перечисленными в теореме.

Функция $u \in L_2(\Omega)$ — это сразу следует из теоремы 5.3.1, по которой все элементы энергетического пространства $H_{\mathfrak{A}}$ принадлежат исходному пространству $L_2(\Omega)$.

Как и всякое пространство, полученное пополнением, энергетическое пространство $H_{\mathfrak{A}}$ состоит из старых элементов — в данном случае элементов из области $D(\mathfrak{A})$ — и из идеальных элементов. Если u — идеальный элемент, то существует последовательность $\{u_n\}$ старых элементов таких, что

$$\| u_n - u \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad | u_n - u |_{\mathfrak{A}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4}$$

Пусть пока u и v — старые элементы. Применяя первую формулу Грина (формула (6.5) гл. 10) и учитывая равенства (2.9), получим

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}u, v) = \int\limits_{\Omega} \left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} + Cuv\right) dx.$$

Но $A_{jk} = A_{kj}$, и последний интеграл совпадает с интегралом в формуле (2), которая тем самым оказывается верной для старых элементов.

Полагая в формуле (2) $v = u$, видим, что для старых элементов верна и формула (3).

Пусть теперь u — идеальный элемент пространства $H_{\mathfrak{A}}$. Построим последовательность элементов $u_n \in D(\mathfrak{A})$, $n = 1, 2, \ldots$ так, чтобы имели место формулы (4). Вторая из этих формул влечет за собой как следствие, что

$$\|u_n - u_s\|^2 = (\mathfrak{A}(u_n - u_s),\ u_n - u_s) =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \left[A_{jk}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right) + C(u_n - u_s)^2\right] dx \xrightarrow[n,\, s\to\infty]{} 0.$$

Теперь из неравенства (2.11) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right)^2 dx = \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right\|^2 \xrightarrow[n,\, s\to\infty]{} 0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

т. е. в метрике $L_2(\Omega)$ последовательности производных $\frac{\partial u_n}{\partial x_k}$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, сходятся в себе.

Отсюда следует, что существуют пределы

$$v_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m;\ v_k \in L_2(\Omega).$$

В силу первого соотношения (4) по теореме 2.3.1

$$v_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}. \tag{5}$$

Остается доказать, что формулы (2) и (3) верны и для идеальных элементов. Пусть u — идеальный элемент, а последовательность $u_n \in D(\mathfrak{A})$ удовлетворяет соотношениям (4). Тогда

$$\|u\|^2_{\mathfrak{A}} = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{\mathfrak{A}} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} \left[A_{jk}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_k} + Cu_n^2\right] dx. \tag{6}$$

Докажем, что последний предел равен

$$\int\limits_{\Omega} \left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right] dx.$$

Для этого оценим величину

$$J_n = \left|\int\limits_{\Omega} \left[A_{jk}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(u_n^2 - u^2)\right] dx\right|.$$

Непрерывные в замкнутой области функции $A_{jk}(x)$ и $C(x)$ ограничены. Пусть $|A_{jk}(x)| \leqslant M$, $|C(x)| \leqslant M$; $M = \mathrm{const}$. Тогда

$$J_n \leqslant M \int\limits_{\Omega} \sum_{j,k=1}^{m} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| dx + M\int\limits_{\Omega} |u_n^2 - u^2|\, dx. \tag{7}$$

Второй интеграл оценивается так:

$$\int_\Omega |u_n^2 - u^2|\, dx = \int_\Omega |u_n + u| \cdot |u_n - u|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\int_\Omega (u_n + u)^2\, dx\right\}^{1/2} \cdot \left\{\int_\Omega (u_n - u)^2\, dx\right\}^{1/2} = \| u_n + u \| \cdot \| u_n - u \|.$$

Второй множитель стремится к нулю, а первый сходится к пределу (равному $2\|u\|$) и потому ограничен, следовательно, второе слагаемое в (7) стремится к нулю.

Сходным образом оценивается и первое слагаемое:

$$\int_\Omega \sum_{j,k=1}^m \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} \right| dx =$$
$$= \int_\Omega \sum_{j,k=1}^m \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial u}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j,k=1}^m \left\{ \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\| + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\| \right\}.$$

Справа первые множители ограничены, а вторые стремятся к нулю, и все выражение стремится к нулю. Окончательно,

$$|u|_{\mathfrak{A}}^2 = \int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 \right] dx,$$

и формула (3) верна для идеальных элементов энергетического пространства.

Если теперь u и v — два таких элемента, то

$$[u, v]_{\mathfrak{A}} = \frac{1}{4}\{|u + v|_{\mathfrak{A}}^2 - |u - v|_{\mathfrak{A}}^2\}.$$

Заменив нормы справа по формуле (3) и проведя элементарные упрощения, мы придем к формуле (2), которая тем самым установлена и для идеальных элементов.

Докажем теперь обратное утверждение: если функция $u \in L_2(\Omega)$ имеет обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega)$ и если существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in D(\mathfrak{A})$, удовлетворяющая соотношениям (1), то $u \in H_{\mathfrak{A}}$.

Последовательность $\{u_n\}$ сходится в себе в энергетической метрике. Действительно,

$$|u_n - u_s|_{\mathfrak{A}}^2 = \int_{\Omega} \left[A_{jk}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right) + C(u_n - u_s)^2\right] dx.$$

Коэффициенты A_{jk} и C ограничены постоянной M. Характеристические числа матрицы старших коэффициентов, будучи непрерывными функциями коэффициентов A_{jk}, также ограничены; пусть $N = \text{const}$ — их верхняя граница. Тогда

$$A_{jk} t_j t_k \leqslant N \sum_{k=1}^{m} t_k^2$$

и, следовательно,

$$|u_n - u_s|_{\mathfrak{A}}^2 \leqslant N \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right)^2 dx + M \int_{\Omega} (u_n - u_s)^2\, dx,$$

что стремится к нулю при $n,\ s \to \infty$ в силу соотношений (1).

Энергетическое пространство — полное, поэтому в нем существует элемент w такой, что $|w - u_n|_{\mathfrak{A}} \to 0$. Первое из соотношений (1) показывает, что $w = u$. Окончательно, $u \in H_{\mathfrak{A}}$.

§ 4. Обобщенное решение задачи Дирихле

1. Оператор $\mathfrak{A}$ задачи Дирихле (2.5) — (2.6) — положительно определенный в $L_2(\Omega)$. По доказанному в § 5 гл. 5 при любом $f \in L_2(\Omega)$ упомянутая задача имеет одно и только одно обобщенное решение $u_0 \in H_{\mathfrak{A}}$. По теореме 14.3.1 функция u_0 суммируема с квадратом, имеет суммируемые с квадратом обобщенные первые производные и обращается на границе области в нуль в смысле соотношений (3.1).

Уравнение (2.5) — второго порядка, и было бы интересно выяснить, существуют ли вторые производные от обобщенного решения задачи Дирихле. Для оператора Лапласа частичный ответ на этот вопрос будет дан ниже, в § 6. Более полный ответ дан в книгах [8] и [11].

Обобщенное решение $u_0(x)$ есть решение задачи о минимуме функционала

$$F(u) = \| u \|_{\mathfrak{A}}^2 - 2(u, f) = \int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} - 2fu \right] dx \tag{1}$$

при краевом условии (2.6). Это решение можно представить в виде ряда (см. § 5 гл. 5)

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)\, \omega_n(x), \tag{2}$$

где $\{\omega_n(x)\}$ — последовательность, ортонормированная и полная в пространстве $H_{\mathfrak{A}}$.

2. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$-\Delta u = f(x), \tag{3}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{4}$$

в параллелепипеде Ω, заданном неравенствами

$$0 \leqslant x_k \leqslant a_k; \qquad k = 1, 2, \ldots, m; \tag{5}$$

через Γ обозначена поверхность параллелепипеда (5). В данном случае $A_{jk} = \delta_{jk}$, $C = 0$; формулы (3.2) и (3.3) упрощаются и принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} [u, v]_{\mathfrak{A}} &= \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx, \\ \| u \|_{\mathfrak{A}}^2 &= \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Система функций

$$\frac{2^{m/2}}{\pi \sqrt{|\Omega|}} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k^2}{a_k^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{m} \sin \frac{n_k \pi x_k}{a_k}, \quad n_k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

ортонормирована и полна в $H_{\mathfrak{A}}$ (докажите!); здесь $|\Omega| = \prod_{k=1}^{m} a_k$ есть объем параллелепипеда (5).

По формуле (2) находим

$$u_0(x)=\frac{2^m}{\pi^2|\Omega|}\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{n_k^2}{a_k^2}\right)^{-1}a_{n_1n_2\ldots n_m}\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{n_k\pi x_k}{a_k};$$

$$a_{n_1n_2\ldots n_m}=\int_{\Omega}f(x)\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{n_k\pi x_k}{a_k}\,dx. \tag{8}$$

§ 5. Задача Дирихле для однородного уравнения

Пусть область Ω и коэффициенты $A_{jk}(x)$, $C(x)$ удовлетворяют условиям § 2 и пусть функция $\varphi(x)$ задана на поверхности Γ — границе области Ω.

Рассмотрим в области Ω задачу Дирихле для однородного эллиптического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)-Cv=0 \tag{1}$$

при неоднородном краевом условии

$$v|_\Gamma=\varphi(x). \tag{2}$$

Поставим задачу о минимуме однородного квадратичного функционала

$$\Phi(v)=\int_{\Omega}\left[A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k}+Cv^2\right]dx \tag{3}$$

на множестве $D(\Phi)$ функций, определенных почти всюду в Ω, удовлетворяющих краевому условию (2) и сообщающих интегралу (3) конечное значение. Последнее означает, что функция $v\in L_2(\Omega)$, что существуют обобщенные производные $\frac{\partial v}{\partial x_k}\in L_2(\Omega)$, $k=1, 2, \ldots, m$.

Задачу (2) — (3) будем решать при одном дополнительном требовании и в слегка измененной постановке. Требование, о котором здесь идет речь, весьма важно для вариационного метода и состоит в следующем: существует функция $\psi(x)$ такая, что $\psi(x)|_\Gamma=\varphi(x)$ и интеграл $\Phi(\psi)$ имеет конечное значение[1]). Для упрощения рассуждений мы будем далее считать, что $\psi \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$.

Постановку задачи мы изменим таким образом: говоря, что функция $v(x)$ удовлетворяет краевому условию (2), мы будем понимать под этим, что

$$(v-\psi) \in H_{\mathfrak{A}}, \tag{4}$$

где $H_{\mathfrak{A}}$ — энергетическое пространство задачи Дирихле (2.5) — (2.6). Положим $v(x)-\psi(x)=u(x)$. Тогда $u \in H_{\mathfrak{A}}$ и

$$\Phi(v)=\Phi(u)+2\Phi(u, \psi)+\Phi(\psi),$$

где $\Phi(u, \psi)$ — билинейный функционал

$$\Phi(u, \psi)=\int\limits_{\Omega}\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_k}+Cu\psi\right]dx; \tag{5}$$

очевидно, $\Phi(u, \psi)$ есть линейный функционал от u.

Так как $\Phi(\psi)$ есть постоянная, то ясно, что вариационная задача (2) — (3) равносильна следующей задаче: в пространстве $H_{\mathfrak{A}}$ найти функцию, сообщающую функционалу

$$\Phi(u)+2\Phi(u, \psi) \tag{6}$$

наименьшее значение.

Докажем, что эта последняя задача имеет решение, и притом единственное. Из условий (2.3) и (2.4) следует, что однородный квадратичный функционал Φ неотрицателен, и для него справедливо неравенство Коши

$$|\Phi(u, \psi)| \leqslant \sqrt{\Phi(u)}\sqrt{\Phi(\psi)}. \tag{7}$$

Если $u \in H_{\mathfrak{A}}$, то $\sqrt{\Phi(u)}=\|u\|_{\mathfrak{A}}$ (формула (3.3)) и, следовательно,

$$|\Phi(u, \psi)| \leqslant \sqrt{\Phi(\psi)}\,\|u\|_{\mathfrak{A}}. \tag{8}$$

Функция ψ — фиксированная: поэтому $\sqrt{\Phi(\psi)}$ есть величина постоянная и неравенство (8) показывает, что функционал

---

[1]) Если не существует ни одной функции $\psi(x)$ с указанными свойствами, то множество $D(\Phi)$ пусто и вариационная задача (2) — (3) теряет смысл. Необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на функцию $\varphi(x)$ для того, чтобы множество $D(\Phi)$ не было пустым, даны в работе [16].

$\Phi(u, \psi)$ ограничен в $H_{\mathfrak{A}}$. Теперь из результатов § 9 гл. 5 вытекает, что задача о минимуме функционала (6) имеет в пространстве $H_{\mathfrak{A}}$ одно и только одно решение.

Обозначим это решение через $u_0(x)$, и пусть $v_0(x) = u_0(x) + \psi(x)$. Очевидно, функция $v_0(x)$ решает вариационную задачу (2) — (3).

Теорема 14.5.1. *Если v_0 — решение вариационной задачи (2) — (3) и $v_0 \in C^{(2)}(\Omega)$, то эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению* (1).

Как показывает соотношение (4), область определения $D(\Phi)$ функционала Φ представляет собой линейное многообразие (см. § 2 гл. 3) функций вида: $v = \psi + u$, $u \in H_{\mathfrak{A}}$. Положив $v - v_0 = \eta$, можно написать также $v = v_0 + \eta$, $\eta \in H_{\mathfrak{A}}$. Так как v_0 доставляет функционалу Φ минимум, то в точке v_0 вариация этого функционала равна нулю (см. § 4 гл. 3)

$$\delta\Phi(v_0, \eta) = 0. \tag{9}$$

Функционал Φ — однородный квадратичный. Отсюда легко вывести, что

$$\delta\Phi(v, \eta) = 2\Phi(v, \eta) = 2\int_\Omega \left[A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_k} + Cv\eta\right]dx.$$

Таким образом, уравнение (9) равносильно следующему:

$$\int_\Omega \left[A_{jk}\frac{\partial v_0}{\partial x_j}\frac{\partial \eta}{\partial x_k} + Cv_0\eta\right]dx = 0, \quad \forall\eta \in H_{\mathfrak{A}}. \tag{10}$$

Зададим число $\delta > 0$, построим пограничную полоску Ω_δ ширины δ и в качестве η возьмем функцию, финитную в $\Omega \setminus \Omega_\delta$ и равную нулю в Ω_δ; такая функция, конечно, финитна и в Ω.

В уравнении (10) отбросим равный нулю интеграл по Ω_δ

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\delta} \left[A_{jk}\frac{\partial v_0}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} + Cv_0\eta\right]dx = 0.$$

Первый член возьмем по частям, освободив η от дифференцирования. При этом поверхностный интеграл исчезнет, потому что $\eta = 0$ на границе области $\Omega \setminus \Omega_\delta$, и мы получаем

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\delta} \left[-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial v_0}{\partial x_k}\right) + Cv_0\right]\eta\,dx = 0. \tag{11}$$

Множество финитных функций плотно в $L_2(\Omega \setminus \Omega_\delta)$. С другой стороны, раз функция $v_0 \in C^{(2)}(\Omega)$, то выражение в квадратных скобках в интеграле (11) есть элемент пространства $L_2(\Omega \setminus \Omega_\delta)$. Будучи ортогональным к плотному множеству финитных функций, указанное выражение тождественно равно нулю; это значит, что в области $\Omega \setminus \Omega_\delta$ функция v_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial v_0}{\partial x_k}\right) - Cv_0 = 0. \tag{12}$$

Но δ можно взять сколь угодно малым. Отсюда следует, что уравнение (12) удовлетворяется всюду в Ω. Теорема доказана.

Теорема 14.5.1 делает целесообразным следующее определение.

Функция $v_0(x)$, решающая вариационную задачу (2) — (3), называется *обобщенным решением задачи Дирихле* (1) — (2). Слово «обобщенное» мы часто будем опускать.

§ 6. О существовании вторых производных решения задачи Дирихле

Теорема 14.6.1. *Обобщенное решение задачи Дирихле в конечной области Ω для однородного уравнения Лапласа с неоднородным краевым условием есть функция, гармоническая в Ω.*

Для уравнения Лапласа $A_{jk} = \delta_{jk}$, $C = 0$, и тождество (5.10) принимает вид

$$\int_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k}\frac{\partial \eta}{\partial \xi_k}\,d\xi = 0. \tag{1}$$

Мы заменили здесь обозначение x на ξ.

Возьмем произвольную точку $x \in \Omega$ и положим в равенстве (1) $\eta = \omega_h(r)$, где $r = |\xi - x|$, а ω_h — усредняющее ядро (§ 1 гл. 1); радиус усреднения h следует взять меньшим, чем расстояние от точки x до Γ — границы области Ω, — тогда $\omega_h(r)|_\Gamma = 0$. Функция $\omega_h(r)$ зависит только от разности $\xi - x$, поэтому

$$\frac{\partial \omega_h(r)}{\partial \xi_k} = -\frac{\partial \omega_h(r)}{\partial x_k},$$

и тождеству (1) можно придать следующую форму:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_0}{\partial \xi_k}\omega_h(r)\,d\xi=0.$$

По теореме 2.2.1

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v_0}{\partial \xi_k}\omega_h(r)\,d\xi=\frac{\partial v_{0h}(x)}{\partial x_k}$$

и, следовательно,

$$\Delta v_{0h}=0. \tag{2}$$

Если $h\to 0$, то $v_{0h}\to v_0$ в метрике $L_2(\Omega)$ (теорема 1.3.3). По теореме 11.9.2 функция $v_0(x)$ гармонична в Ω.

Теорема 14.6.2. *Если $f\in C^{(1)}(\bar{\Omega})$ и $u_0(x)$ есть обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа*

$$-\Delta u=f(x),\qquad u|_{\Gamma}=0, \tag{3}$$

то $u_0(x)\in C^{(2)}(\Omega)$.

Введем в рассмотрение объемный потенциал

$$\psi(x)=\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Omega}f(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi.$$

Из результатов § 6 гл. 11 вытекает, что

$$\psi\in C^{(1)}(\bar{\Omega})\cap C^{(2)}(\Omega)$$

и что $-\Delta\psi=f(x)$.

Функция $u_0(x)$ решает задачу о минимуме функционала

$$F(u)=\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right)^2-2fu\right]d\xi,\qquad u\in H_{\mathfrak{A}};$$

поэтому вариация функционала F в точке u_0 равна нулю:

$$\delta F(u_0,\eta)=2\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial u_0}{\partial \xi_k}\frac{\partial \eta}{\partial \xi_k}-f\eta\right]d\xi=0,\qquad \forall\eta\in H_{\mathfrak{A}}.$$

Сделаем замену $u_0=v_0+\psi$

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial v_0}{\partial \xi_k}\frac{\partial \eta}{\partial \xi_k}+\frac{\partial \psi}{\partial \xi_k}\frac{\partial \eta}{\partial \xi_k}-f\eta\right]d\xi=0. \tag{4}$$

В тождестве (4) положим $\eta=\omega_h(r)$, где ω_h — усредняющее ядро, $r=|\xi-x|$, x — точка области Ω и радиус усреднения h меньше, чем расстояние от точки x до Γ — границы области Ω.

Второй интеграл в (4) возьмем по частям:

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\eta}{\partial\xi_k}\,d\xi=-\int\limits_\Omega \eta\Delta\psi\,d\xi+\int\limits_\Gamma \eta\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\,d\Gamma=\int\limits_\Omega f\eta\,d\xi;$$

интеграл по Γ, очевидно, пропадает. Тождество (4) принимает вид

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v_0}{\partial\xi_k}\frac{\partial\omega_h(r)}{\partial\xi_k}\,d\xi=0.$$

Те же преобразования, что и в предшествующей теореме дают, что $\Delta v_{0h}=0$ и, следовательно, функция v_0 гармонична в Ω. Тем более, $v_0\in C^{(2)}(\Omega)$. Но тогда и $u_0=(v_0+\psi)\in C^{(2)}(\Omega)$. Теорема доказана.

Замечание. Известны более сильные теоремы о дифференциальных свойствах обобщенного решения задачи Дирихле, чем теорема 14.6.2. Сформулируем некоторые из них.

1. Если в уравнении (3) функция $f(x)$ удовлетворяет в $\bar\Omega$ условию Липшица с показателем α, $0<\alpha<1$, то вторые производные обобщенного решения $u_0(x)$ удовлетворяют тому же условию в любой внутренней замкнутой подобласти.

2. Если $f\in L_p(\Omega)$, $1<p<\infty$, то функция u_0 имеет всевозможные вторые обобщенные производные $\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_j\partial x_k}\in L_p(\Omega')$, где Ω' — произвольная внутренняя подобласть Ω.

Обе эти теоремы вытекают из свойств объемного потенциала, сформулированных в замечании к § 6 гл. 11 (стр. 240—241). Подробнее об этом см. [12].

§ 7. Эллиптические уравнения высших порядков и системы уравнений

Вариационный метод позволяет решать задачи, значительно более общие и сложные, чем задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка. Для примера рассмотрим первую краевую задачу (с однородным краевым условием) для эллиптического уравнения, порядок которого выше двух.

В самом общем случае можно записать формально самосопряженное уравнение порядка $2s$ в пространстве E_m в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k \sum \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}\left(A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\ldots\partial x_{j_k}}\right)=f(x). \tag{1}$$

Суммирование во внутренней сумме производится по всевозможным наборам индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и $j_1, j_2, \ldots, j_k$, каждый из которых независимо от других пробегает значения $1, 2, \ldots, m$. Коэффициенты $A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ не меняются ни при каких перестановках верхних или нижних индексов, а также если поменять местами все верхние и все нижние индексы.

Как и в случае уравнения второго порядка, принадлежность уравнения (1) к эллиптическому типу определяется поведением его старших коэффициентов, соответствующих значению индекса $k=s$. Уравнение (1) называется *невырождающимся эллиптическим* в области $\Omega \subset E_m$, если выполнено следующее условие. Пусть $t_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ — вещественные переменные, которые не меняются при перестановках индексов $i_1, i_2, \ldots, i_s$; существует такая постоянная $\mu_0 > 0$, что при любом $x \in \overline{\Omega}$ и при любых значениях переменных $t_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ выполняется неравенство

$$\sum A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_s}(x)\, t_{i_1 i_2 \ldots i_s} t_{j_1 j_2 \ldots j_s} \geqslant \mu_0 \sum t^2_{i_1 i_2 \ldots i_s}. \tag{2}$$

Это условие ниже предполагается выполненным.

Первой краевой задачей (при однородных краевых условиях) для уравнения (1) называется задача об интегрировании этого уравнения в данной области Ω при краевых условиях:

$$u|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}\right|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}\right|_\Gamma = 0, \ldots,$$
$$\left.\frac{\partial^{s-1} u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_{s-1}}}\right|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

где Γ обозначает границу области Ω, а значки $i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}$ независимо друг от друга пробегают все значения $1, 2, \ldots, m$. Будем считать область Ω конечной, а границу Γ кусочно гладкой, и примем, что $A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} \in C^{(k)}(\overline{\Omega})$, $k = 0, 1, \ldots, s$.

С задачей (1), (3) естественным образом связывается оператор, который мы обозначим через $\mathfrak{A}_s$. За область его определения $D(\mathfrak{A}_s)$ примем множество функций, которые принадлежат классу $C^{(2s)}(\bar{\Omega})$ и удовлетворяют условиям (3); действует этот оператор по формуле

$$\mathfrak{A}_s u = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \sum \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \left(A_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} \right).$$

Докажем, что оператор $\mathfrak{A}_s$ — положительно определенный в пространстве $L_2(\Omega)$, если младшие члены уравнения (1) удовлетворяют неравенствам

$$\sum A_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) t_{i_1 i_2 \ldots i_k} t_{j_1 j_2 \ldots j_k} \geqslant 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, s-1, \tag{4}$$

где $t_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — произвольные вещественные числа, которые не меняются при перестановках индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Составим скалярное произведение

$$(\mathfrak{A}_s u, u) = \\ = \int_\Omega u \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \sum \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \left(A_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} \right) dx.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что поверхностные интегралы исчезнут в силу краевых условий (3), получим

$$(\mathfrak{A}_s u, u) = \\ = \int_\Omega \sum_{k=0}^{s} \sum A_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}} dx. \tag{5}$$

Отбросив справа неотрицательные суммы, соответствующие значениям индекса $k = 0, 1, \ldots, s-1$, и оценив оставшуюся сумму по неравенству (2), придем к соотношению

$$(\mathfrak{A}_s u, u) \geqslant \mu_0 \int_\Omega \sum \left(\frac{\partial^s u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_s}} \right)^2 dx. \tag{6}$$

Как это видно из условий (3), для самой функции $u(x)$ и для всех ее производных, фигурирующих в упомянутых условиях, справедливо неравенство Фридрихса. Это дает нам следующую цепочку неравенств:

$$\|u\|^2=\int\limits_{\Omega} u^2\,dx \leqslant \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}\right)^2 dx \leqslant \varkappa^2 \int\limits_{\Omega} \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}}\right) dx \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \varkappa^s \int\limits_{\Omega} \sum \left(\frac{\partial^s u}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_s}}\right)^2 dx. \qquad (7)$$

Сравнив соотношения (6) и (7), получим неравенство

$$(\mathfrak{A}_s u,\ u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varkappa^s}}, \qquad (8)$$

которое и показывает, что оператор $\mathfrak{A}_s$ — положительно определенный. Отсюда следует, что задача (1), (3) имеет одно и только одно обобщенное решение; его можно получить как решение задачи о минимуме функционала

$$\int\limits_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^{s} \sum A_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}} \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1}\,\partial x_{j_2}\ldots\partial x_{j_k}} - 2fu\right] dx \qquad (9)$$

в соответствующем энергетическом пространстве.

Запись (1) может означать и систему некоторого числа N уравнений с N неизвестными функциями, если под $u(x)$ и $f(x)$ понимать N-компонентные вектор-функции, а под $A_{j_1 j_2 \ldots j_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)$ — квадратные матрицы порядка N. Будем считать, что эти матрицы не меняются ни при каких перестановках верхних или нижних индексов, а при замене верхних индексов нижними и наоборот матрица переходит в сопряженную. Условие (2) для системы следует записывать так:

$$\left(\sum A_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s}(x)\, t_{i_1 i_2 \ldots i_s},\ t_{j_1 j_2 \ldots j_s}\right) \geqslant \mu_0 \sum \|t_{i_1 i_2 \ldots i_s}\|^2. \qquad (10)$$

Здесь μ_0 — положительная постоянная, $t_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ — произвольный N-компонентный вектор, который не меняется при перестановках индексов $i_1, \ldots, i_s$, символы (,) и $\| \|$ означают соответственно скалярное произведение и норму векторов в N-мерном евклидовом пространстве. Аналогично изменяется и условие (4).

Системы вида (1), удовлетворяющие условию (10), принадлежат к классу так называемых «сильно эллиптических» систем [1]).

На системы вида (1), удовлетворяющие условию (10) и должным образом измененному условию (4), без труда распространяются все результаты настоящего параграфа.

§ 8. Задача Дирихле для бесконечной области

Пусть в эллиптическом уравнении

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+Cu=f(x)$$

матрица коэффициентов $A_{jk}(x)$ положительна, а коэффициент $C(x)$ удовлетворяет неравенству

$$C(x)\geqslant C_0=\text{const}>0.$$

Тогда, как легко проверить, оператор соответствующей задачи Дирихле остается положительно определенным и в случае бесконечной области, и эта задача (при однородном краевом условии) имеет обобщенное решение.

Интерес представляет случай, когда $C(x)\equiv 0$.

Для простоты мы ограничимся уравнением Лапласа с однородным краевым условием. Подробнее случай бесконечных областей рассмотрен в книге [13].

Пусть Ω — бесконечная область с *конечной* кусочно гладкой границей Γ. Поставим в этой области задачу Дирихле

$$-\Delta u=f(x), \tag{1}$$

$$u|_\Gamma=0. \tag{2}$$

Оператор, порождаемый этой задачей, обозначим через $\mathfrak{B}$. За область его определения $D(\mathfrak{B})$ удобно принять множество функций класса $C^{(2)}(\overline{\Omega})$, обращающихся в нуль на границе Γ и в окрестности (своей для каждой функции) бесконечно удаленной точки; действует оператор $\mathfrak{B}$ по формуле $\mathfrak{B}u=-\Delta u$. Будем рассматривать $\mathfrak{B}$ как оператор в $L_2(\Omega)$. Докажем, что этот оператор положительный, но не

---

1) Подробнее о сильно эллиптических системах см. статью М. И. Вишика [2].

положительно определенный. Составим скалярное произведение

$$(\mathfrak{B}u,\ v) = -\int_{\Omega} u\Delta v\, dx. \qquad (3)$$

Функция $u(x)$ отлична от нуля только в некоторой конечной области, по которой фактически и берется интеграл (3). Поэтому к интегралу (3) можно применить формулу Грина (формула (6.8) гл. 10). Приняв во внимание, что на границе упомянутой области $u = 0$, получаем

$$(\mathfrak{B}u,\ v) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx,$$

и оператор $\mathfrak{B}$ симметричен. При $v = u$ имеем

$$(\mathfrak{B}u,\ u) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \geqslant 0. \qquad (4)$$

Если $(\mathfrak{B}u,\ u) = 0$, то, очевидно

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} \equiv 0, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

и

$$u(x) \equiv \mathrm{const}.$$

Но $u|_{\Gamma} = 0$, поэтому $u(x) \equiv 0$. Положительность оператора $\mathfrak{B}$ доказана.

В бесконечной области Ω с конечной границей можно расположить куб со сколь угодно большим ребром a. Систему координат выберем так, чтобы куб определялся неравенствами

$$0 \leqslant x_k \leqslant a, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Рассмотрим функцию

$$u_a(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{m} \sin^3 \dfrac{\pi x_k}{a} & \text{внутри куба,} \\ 0 & \text{вне куба.} \end{cases} \qquad (5)$$

Очевидно, $u_a(x) \in D(\mathfrak{B})$. Простой подсчет показывает, что

$$\frac{(\mathfrak{B}u_a,\ u_a)}{\|u_a\|^2} = \frac{c}{a^2}, \qquad c = \mathrm{const}.$$

Отсюда

$$\lim_{a\to\infty}\frac{(\mathfrak{B}u_a,\ u_a)}{\|u_a\|^2}=0$$

и, следовательно,

$$\inf_{u\in D(\mathfrak{B})}\frac{(\mathfrak{B}u,\ u)}{\|u\|^2}=0. \tag{6}$$

Равенство (6) означает, что $\mathfrak{B}$ не положительно определенный оператор.

В соответствии со сказанным в § 10 гл. 5, с оператором $\mathfrak{B}$ можно связать энергетическое пространство $H_{\mathfrak{B}}$. Так как оператор $\mathfrak{B}$ только положителен, то не все элементы пространства $H_{\mathfrak{B}}$ принадлежат исходному пространству $L_2(\Omega)$. Можно доказать (предоставляем сделать это читателю), что пространство $H_{\mathfrak{B}}$ состоит из тех и только тех функций, которые: 1) определены почти всюду в Ω; 2) имеют обобщенные первые производные, квадраты которых суммируемы в Ω; 3) удовлетворяют краевому условию (2) в следующем смысле: если $u\in H_{\mathfrak{B}}$, то существует последовательность функций $\{u_n(x)\}$, $u_n\in C^{(1)}(\bar\Omega)$ таких, что $u_n(x)=0$ на поверхности Γ и при достаточно больших $|x|$, и удовлетворяющих соотношению

$$\int_\Omega\sum_{k=1}^m\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Как это было доказано в § 10 гл. 5, задача (1)—(2) имеет обобщенное решение тогда и только тогда, когда функционал $(u,\ f)$, где $u\in H_{\mathfrak{B}}$, ограничен в $H_{\mathfrak{B}}$. Можно доказать, что для этого в свою очередь необходимо и достаточно существование такого вектора $F(x)$, что $f(x)=\operatorname{div}F(x)$ и $\|F(x)\|\in L_2(\Omega)$. Здесь дивергенция понимается в обобщенном смысле (аналогично обобщенной производной), а символ $\|F(x)\|$ означает норму вектора $F(x)$ в m-мерном евклидовом пространстве.

Можно указать более простое, но только достаточное условие: обобщенное решение задачи (1)—(2) существует, если размерность пространства $m>2$ и если сходится интеграл

$$\int_\Omega|x|^2 f^2(x)\,dx.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что ряд (4.8) можно дважды дифференцировать почленно, и это приводит к рядам, сходящимся в метрике L_2. Вывести отсюда, что при $f \in L_2(\Omega)$ обобщенное решение задачи (4.3)—(4.4) имеет вторые обобщенные производные, суммируемые с квадратом в Ω.

2. Доказать, что энергетическое пространство $H_{\mathfrak{A}_s}$ оператора $\mathfrak{A}_s$ (§ 7) состоит из тех и только тех функций, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) как сами функции, так и их всевозможные обобщенные производные порядка $\leqslant s$ принадлежат классу $L_2(\Omega)$;

2) эти функциии удовлетворяют краевым условиям (7.2) в указанном ниже смысле: для любой функции $u \in H_{\mathfrak{A}_s}$ существует последовательность функций $u_n(x) \in C^{(s)}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (7.2) и предельным соотношениям

$$\left\| \frac{\partial^k (u_n - u)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} \right\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Здесь норма берется в смысле метрики $L_2(\Omega)$, $k = 0, 1, \ldots, s$, а значки $i_1, i_2, \ldots, i_k$ пробегают независимо друг от друга значения $1, 2, \ldots, m$.

3. Простейшим эллиптическим уравнением порядка $2s$ является так называемое *полигармоническое* уравнение

$$(-1)^s \Delta^s u = f(x).$$

Сингулярным решением однородного полигармонического уравнения

$$\Delta^s u = 0$$

называется функция

$$v(x, \xi) = \begin{cases} c r^{2s-m} \ln \dfrac{1}{r}, & m \text{ — четное, } 2s > m, \\ c r^{2s-m} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь c — постоянная, $r = |x - \xi|$.

Доказать, что если $f \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$ и

$$\psi(x) = \int_\Omega v(x, \xi) f(\xi) \, d\xi,$$

то $\psi \in C^{(2s-1)}(\bar{\Omega}) \cap C^{(2s)}(\Omega)$ и, при подходящем выборе постоянной c, $(-1)^s \Delta^s \psi(x) = f(x)$. Найти это значение c.

4. Доказать: если $u_0(x)$ есть решение уравнения $(-1)^s \Delta^s u = f(x)$ при краевых условиях (7.3) и если $f \in C^{(1)}(\Omega)$, то $u_0 \in C^{(2s)}(\Omega)$.

ГЛАВА 15
СПЕКТР ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

§ 1. Интегральное представление функции, равной нулю на границе конечной области

Пусть Ω — конечная область m-мерного евклидова пространства, ограниченная кусочно гладкой поверхностью Γ. Пусть, далее, функция $u \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$ и

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{1}$$

Переменную точку области Ω обозначим через ξ. Возьмем в этой области некоторую точку x и окружим ее шаром $Ш_\varepsilon$ (рис. 14, стр. 227) столь малого радиуса ε, чтобы шар целиком лежал в Ω. В области $\Omega \diagdown Ш_\varepsilon$ функции $u(\xi)$ и $v(\xi) = \frac{1}{r^{m-2}}$, $r = |x - \xi|$, непрерывно дифференцируемы вплоть до границы и к ним можно применить первую формулу Грина для оператора Лапласа (формула (6.7) гл. 10)

$$\int\limits_{\Omega \diagdown Ш_\varepsilon} u \Delta v \, d\xi = - \int\limits_{\Omega \diagdown Ш_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi + \int\limits_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma + \int\limits_{S_\varepsilon} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS_\varepsilon; \tag{2}$$

здесь S_ε — сфера, ограничивающая шар $Ш_\varepsilon$.

Функция $v(\xi)$ гармонична в $\Omega \diagdown Ш_\varepsilon$, поэтому интеграл слева исчезнет. Исчезнет и интеграл по Γ в силу условия (1). Формула (2) упрощается и принимает следующий вид:

$$\int\limits_{\Omega \diagdown Ш_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi = \int\limits_{S_\varepsilon} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS_\varepsilon. \tag{3}$$

При $\varepsilon \to 0$ левая часть равенства (3) имеет пределом несобственный интеграл

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial v}{\partial \xi_k} d\xi = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r^{m-2}} d\xi.$$

11-1567

Предел правой части был уже вычислен нами в § 3 гл. 11 при выводе интегрального представления функций класса $C^{(2)}$; он равен $(m-2)|S_1|u(x)$. Приравняв полученные пределы, приходим к искомому интегральному представлению:

$$u(x)=\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi. \tag{4}$$

Формула (4) верна, если $m>2$. При $m=2$ она заменяется следующей:

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\ln\frac{1}{r}\,d\xi. \tag{5}$$

Интегральное представление (4) (соответственно (5)) выведено в предположении, что функция $u\in C^{(1)}(\bar{\Omega})$ и что она равна нулю на Г. Для дальнейшего важно, что это представление можно распространить на функции из энергетического пространства $H_{\mathfrak{A}}$ задачи Дирихле (§ 3 гл. 14).

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}=-\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\partial r}{\partial\xi_k}=-\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\xi_k-x_k}{r}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\right|\leqslant\frac{m-2}{r^{m-1}}.$$

Последняя оценка показывает, что интеграл в правой части формулы (4) есть оператор со слабой особенностью (§ 3 гл. 7) над $\frac{\partial u}{\partial\xi_k}$; он, следовательно, ограничен в $L_2(\Omega)$ (теорема 7.3.1).

По теореме 14.3.1, если $u\in H_{\mathfrak{A}}$, то существует последовательность $\{u_n\}$ такая, что $u_n\in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, $u_n|_\Gamma=0$ и

$$\|u_n-u\|_{L_2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0;\quad\left\|\frac{\partial u_n}{\partial\xi_k}-\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\right\|_{L_2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\qquad k=1,\,2,\,\ldots,\,m.$$

Для функций u_n представление (4) доказано:

$$u_n(x)=\frac{1}{(m-2)|S_1|}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u_n}{\partial\xi_k}\frac{\partial}{\partial\xi_k}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi.$$

При $n\to\infty$ левая часть последнего равенства стремится к $u(x)$ в метрике $L_2(\Omega)$. Одновременно в той же метрике

$\frac{\partial u_n}{\partial \xi_k} \to \frac{\partial u}{\partial \xi_k}$. Интегральный оператор справа ограничен, и можно перейти к пределу под знаком интеграла. Это опять приведет нас к формуле (4), но установленной уже для функций из пространства $H_{\mathfrak{A}}$.

§ 2. Спектр задачи Дирихле для конечной области

Теорема 15.2.1. *В случае конечной области с кусочно гладкой границей оператор задачи Дирихле для невырождающегося самосопряженного эллиптического уравнения имеет дискретный спектр.*

Пусть M — ограниченное множество в пространстве $H_{\mathfrak{A}}$:

$$|u|_{\mathfrak{A}} \leqslant c = \text{const}, \qquad \forall u \in M.$$

По формуле (3.3) гл. 14 имеем

$$\int\limits_{\Omega} \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 \right] dx \leqslant c^2.$$

Из соотношения (2.3) гл. 14 вытекает теперь неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \leqslant \frac{c^2}{\mu_0}.$$

Тем более,

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \right\}^{1/2} \leqslant \frac{c}{\sqrt{\mu_0}}.$$

Таким образом, производные функции $u \in M$ образуют множество, ограниченное в $L_2(\Omega)$. Интегральный оператор (1.4) есть оператор от $\frac{\partial u}{\partial \xi_k}$, вполне непрерывный в $L_2(\Omega)$ (теорема 7.3.2); он преобразует указанное выше множество производных во множество, компактное в $L_2(\Omega)$. Но это последнее множество совпадает с M, потому что оператор (1.4) восстанавливает любую функцию из M по ее первым производным. Отсюда следует, что *множество M компактно в пространстве $L_2(\Omega)$*.

Итак, любое множество, ограниченное в $H_{\mathfrak{A}}$, компактно в $L_2(\Omega)$. По теореме 6.6.1 оператор $\mathfrak{A}$ имеет дискретный спектр.

Из доказанной только что теоремы и теоремы 6.6.1 вытекает следующее утверждение:

Существует счетное множество $\{\lambda_n\}$ значений параметра λ, для которых задача

$$\Delta u + \lambda u = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad u|_\Gamma = 0 \tag{1}$$

имеет нетривиальное решение. Значения λ_n суть собственные числа оператора задачи Дирихле (короче, собственные числа задачи Дирихле), а соответствующие нетривиальные решения задачи (1) суть собственные функции, отвечающие собственному числу λ_n. Каждому собственному числу отвечает только конечное число линейно независимых собственных функций. Будем повторять каждое собственное число столько раз, сколько ему соответствует собственных функций. Все собственные числа $\lambda_n > 0$, и

$$\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty. \tag{2}$$

Систему $\{u_n\}$ собственных функций можно считать ортонормированной в $L_2(\Omega)$

$$(u_j, u_k) = \delta_{jk}; \quad j, k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Она также ортогональна, но не нормирована и в $H_\mathfrak{A}$, а именно

$$[u_j, u_k]_\mathfrak{A} = 0, \quad j \neq k; \quad [u_k, u_k]_\mathfrak{A} = |u_k|^2_\mathfrak{A} = \lambda_k. \tag{4}$$

Система собственных функций $\{u_n\}$ полна в каждом из пространств $L_2(\Omega)$ и $H_\mathfrak{A}$.

§ 3. Элементарные случаи

Построить фактически спектр положительно определенного оператора, опираясь на теорему 6.6.1, чрезвычайно трудно. Это видно хотя бы из того, что при этом приходится выделять из минимизирующей последовательности сходящуюся подпоследовательность. Поэтому представляют интерес частные примеры, в которых спектр задачи Дирихле удается построить явно. Ниже приведены примеры областей, для которых можно дать элементарные выражения собственных чисел и собственных функций задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

1. Параллелепипед в пространстве m измерений. Если n — натуральное число, то функция вещественной переменной t

$$u_n(t) = \sin\frac{n\pi t}{a} \tag{1}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u_n'' + \frac{n^2\pi^2}{a^2}u_n = 0$$

и краевым условиям $u_n(0) = u_n(a) = 0$. Отсюда следует, что функция

$$u_{n_1 n_2 \ldots n_m}(x) = c\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{n_k\pi x_k}{a_k}, \quad c = \text{const}, \tag{2}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta u + \lambda u = 0, \qquad \lambda = \pi^2\sum_{k=1}^{m}\frac{n_k^2}{a_k^2}$$

и обращается в нуль на поверхности параллелепипеда

$$0 < x_k < a_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Таким образом, функции (2) суть собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа в параллелепипеде (3); соответствующие собственные числа суть

$$\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \pi^2\sum_{k=1}^{m}\frac{n_k^2}{a_k^2}. \tag{4}$$

Система (2) ортогональна в метрике $L_2(\Omega)$, где на этот раз Ω — параллелепипед (3); она будет и нормированной, если положить

$$c = 2^{m/2}\prod_{k=1}^{m}a_k^{-1/2}. \tag{5}$$

Система (2) полна в $L_2(\Omega)$, — это легко доказать, исходя из того, что система функций (1) полна в $L_2(0, a)$, и используя соображения § 2 гл. 7. Отсюда следует, что формулой (2) исчерпывается система собственных функций задачи Дирихле для уравнения Лапласа в параллелепипеде.

2. Круг на двумерной плоскости. В плоскости полярных координат ρ, θ рассмотрим уравнение

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

или, в более подробной записи [1]),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda u = 0, \tag{6}$$

при краевом условии

$$u|_{\rho=1} = 0. \tag{7}$$

Будем искать нетривиальные решения задачи (6), (7) по так называемому *методу разделения переменных*, именно, будем искать решения, имеющие вид

$$u = f(\rho)\varphi(\theta). \tag{8}$$

Условие (7) приводит к краевому условию для функции $f(\rho)$

$$f(1) = 0. \tag{9}$$

Подставив выражение (8) в уравнение (6), мы легко приведем последнее к виду

$$\frac{\rho^2}{f}\left(f'' + \frac{1}{\rho}f' + \lambda f\right) = -\frac{\varphi''}{\varphi}. \tag{10}$$

---

[1]) Если x и y — декартовы координаты на плоскости, то $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

и далее

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{2}{\rho}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} + \\ + \frac{1}{\rho^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\sin 2\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} + \\ + \frac{1}{\rho^2}\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\sin 2\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Теперь

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

В уравнении (10) левая часть не зависит от θ, а правая — от ρ; будучи равными между собой, обе части уравнения (10) не зависят ни от ρ, ни от θ и, следовательно, равны некоторой постоянной, которую мы обозначим через n^2. Теперь уравнение (10) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\varphi''(\theta) + n^2\varphi(\theta) = 0 \tag{11}$$

и

$$f''(\rho) + \frac{1}{\rho} f'(\rho) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\rho^2}\right) f(\rho) = 0. \tag{12}$$

Общий интеграл уравнения (11) имеет вид

$$\varphi(\theta) = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta. \tag{13}$$

Функция (8) должна быть однозначной функцией точки на плоскости, поэтому n должно быть целым числом. Достаточно рассматривать лишь неотрицательные n — изменение знака n отразилось бы только на постоянной C_2.

Общий интеграл уравнения (12) выражается через функции Бесселя[1])

$$f(\rho) = C_3 J_n\left(\sqrt{\lambda}\rho\right) + C_4 Y_n\left(\sqrt{\lambda}\rho\right).$$

По определению собственная функция задачи Дирихле принадлежит энергетическому пространству $H_{\mathfrak{A}}$ (§ 3 гл. 14) и, следовательно, первые производные этой функции суммируемы с квадратом в круге $\rho < 1$. Функция Бесселя второго рода $Y_n\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)$ этим свойством не обладает, поэтому необходимо $C_4 = 0$. Значение постоянной C_3 для дальнейшего несущественно (необходимо только, чтобы $C_3 \neq 0$), и мы положим $C_3 = 1$. Теперь

$$f(\rho) = J_n\left(\sqrt{\lambda}\rho\right).$$

Из условия (9) следует теперь, что

$$\lambda = j_{n,k}^2, \tag{14}$$

где $j_{n,k}$ есть k-й положительный корень функции Бесселя первого рода J_n. Окончательно

$$f(\rho) = J_n(j_{n,k}\rho). \tag{15}$$

---

[1]) Обозначения функций Бесселя соответствуют принятым в книге: Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949

Формулы (13)—(15) позволяют заключить, что числа

$$j_{n,k}^2; \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{16}$$

суть собственные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа в единичном круге; каждому из чисел $j_{0,k}^2$ соответствует одна собственная функция

$$J_0(j_{0,k}\rho), \tag{17$_1$}$$

каждому собственному числу $j_{n,k}^2$, $n>0$, соответствуют две собственные функции

$$J_n(j_{n,k}\rho)\cos n\theta, \qquad J_n(j_{n,k}\rho)\sin n\theta. \tag{17$_2$}$$

Если через Ω обозначить круг $\rho<1$, то в $L_2(\Omega)$ функции (17) ортогональны (но не нормированы) и образуют полную систему, — и то, и другое вытекает из известных свойств функций Бесселя и из соображений о полноте системы произведений (теорема 7.2.2). Отсюда следует, что формулы (16) и (17) исчерпывают всю совокупность собственных чисел и собственных функций задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Замечание. Собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа в случае шара любого числа измерений выражаются через бесселевы и сферические функции.

§ 4. Оценка роста собственных чисел

1. Уравнение Лапласа в m-мерном кубе. В m-мерном кубе Q, определяемом неравенствами

$$0 \leqslant x_k \leqslant a, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

собственные числа задачи Дирихле для уравнения Лапласа равны (формула (3.4))

$$\lambda_{n_1 n_2 \ldots n_m} = \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^{m} n_k^2. \tag{1}$$

Числа (1) расположим в порядке возрастания (точнее, неубывания) и будем их обозначать через λ_n, так что $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ Наша задача заключается в том, чтобы дать оценку порядка роста величины λ_n при $n \to \infty$.

Несколько удобнее будет оценивать не числа λ_n, а числа

$$\lambda'_n = \frac{a^2}{\pi^2}\lambda_n = \sum_{k=1}^{m} n_k^2. \tag{2}$$

Рассмотрим m-мерное евклидово пространство и в нем шар $Ш_N$ радиуса N с центром в начале координат; число N возьмем достаточно большим и притом таким, чтобы значение одного из чисел $\lambda'_N = N^2$. Таких чисел λ'_n может оказаться несколько. Обозначим соответственно через ν_1 и ν_2 наименьшее и наибольшее значения n, для которых $\lambda'_n = N^2$. Величина ν_2 показывает, сколько чисел вида (2) лежит в замкнутом шаре $\overline{Ш}_N$. Из той же формулы (2) видно, что ν_2 равно количеству точек, имеющих положительные целочисленные координаты и заключенных в шаре $Ш_N$. Указанное количество равно объему кубической сетки T_m с единичным ребром, которую можно вписать в первый октант шара $Ш_N$ (на рис. 26 изображен случай двух измерений). Объем сетки T_m меньше объема самого октанта:

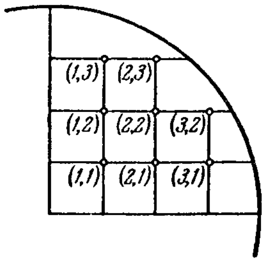

Рис. 26.

$$\nu_2 < \frac{|S_1|}{2^m m} N^m. \tag{3}$$

Построим теперь шар $Ш_{N-2}$ радиуса $N-2$ с центром в начале. Нетрудно убедиться, что первый октант этого шара содержится в сетке T_m. Для этого достаточно доказать, что для любой граничной вершины $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ сетки T_m

$$\sum_{k=1}^{m} n_k^2 > (N-2)^2. \tag{4}$$

Пусть n_j — наибольшее из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Граничная вершина характеризуется тем, что для нее одновременно

$$n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_m^2 = \sum_{k=1}^{m} n_k^2 \leqslant N^2$$

$$n_1^2 + n_2^2 + \ldots + (n_j+1)^2 + \ldots + n_m^2 = \sum_{k=1}^{m} n_k^2 + 2n_j + 1 > N^2 \tag{5}$$

Из второго неравенства (5) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{m} n_k^2 > N^2 - 2n_j - 1 \geqslant N^2 - 2N - 1 = (N-1)^2 - 2,$$

что больше, чем $(N-2)^2$, если N достаточно велико.

Теперь

$$\nu_2 > \frac{|S_1|}{2^m m}(N-2)^m, \tag{6}$$

неравенства (3) и (6) показывают, что при N достаточно большом верна оценка

$$\nu_2 = \frac{|S_1|}{2^m m} N^m + o(N^m) = \frac{\pi^{m/2} N^m}{2^{m-1} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + o(N^m). \tag{7}$$

Оценим величину ν_1. Очевидно, $\nu_1 = \nu_2 - \sigma$, где через σ обозначено число точек с положительными целочисленными координатами, лежащих на сфере

$$\sum_{k=1}^{m} n_k^2 = N^2,$$

ограничивающей шар $Ш_N$. Проведем через указанные точки прямые, параллельные m-й оси. На этих прямых первые $n-1$ координат — целые положительные; в пересечении с плоскостью $n_m = 0$ названные прямые дают сетку точек, позволяющую построить кубическую сетку T_{m-1}, аналогичную сетке T_m, но размерности на единицу меньшей. Отсюда ясно, что число σ равно объему ($(m-1)$-мерному) сетки T_{m-1} и, следовательно, справедлива формула, аналогичная формуле (7):

$$\sigma = \frac{\pi^{(m-1)/2} N^{m-1}}{2^{m-2}(m-1)\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} + o(N^{m-1}). \tag{8}$$

Из соотношений (7) и (8) и равенства $\nu_1 = \nu_2 - \sigma$ вытекает, что

$$\nu_1 = \frac{\pi^{m/2} N^m}{2^{m-1} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + o(N^m). \tag{9}$$

Напомним, что мы обозначили через n любой номер, для которого $\lambda'_n = N^2$, и что $\nu_1 \leqslant n \leqslant \nu_2$. Равенства (7) и (9) дают

$$n = \frac{\pi^{m/2} N^m}{2^{m-1} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + o(N^m).$$

Отсюда

$$\lambda_n = c_m n^{2/m} + o(n^{2/m}), \tag{10}$$

где c_m — постоянная, которую нетрудно вычислить.

2. Общий случай. Рассмотрим оператор $\mathfrak{A}$ задачи Дирихле (§ 2 гл. 14); коэффициенты A_{jk} и C пусть удовлетворяют условиям (2.3) и (2.4) гл. 14, так что справедливо неравенство (2.11) гл. 14. Для дальнейшего важно, что справедливо неравенство обратного вида.

Коэффициенты $A_{jk}(x)$ непрерывны и, следовательно, ограничены в замкнутой области $\bar{\Omega}$. Отсюда следует, что наибольшее собственное число матрицы коэффициентов $A_{jk}(x)$ также ограничено. Пусть M_0 — его верхняя граница. Тогда

$$A_{jk}(x) t_j t_k \leqslant M_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2. \tag{11}$$

Коэффициент $C(x)$ также непрерывен и ограничен в $\bar{\Omega}$. Пусть $C(x) \leqslant M_1$. Теперь, если $u \in D(\mathfrak{A})$, то

$$(\mathfrak{A}u, u) \leqslant M_0 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + M_1 \int_{\Omega} u^2\, dx.$$

Применив ко второму интегралу неравенство Фридрихса, получим окончательно

$$(\mathfrak{A}u, u) \leqslant \mu_1 \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx; \qquad \mu_1 = M_0 + \varkappa M_1. \tag{12}$$

Построим два куба Q_1 и Q_2, первый из которых содержит область Ω, а другой содержится в этой области. Обозначим соответственно через $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ операторы задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кубах Q_1 и Q_2.

Обозначим еще через λ_n, $\lambda_n^{(1)}$, $\lambda_n^{(2)}$ собственные числа операторов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, расположенные в порядке неубывания.

Названные операторы связаны неравенствами (докажите!)

$$\mu_0\mathfrak{A}_1 \leqslant \mathfrak{A} \leqslant \mu_1\mathfrak{A}_2.$$

Здесь μ_0 — постоянная неравенства (2.11) гл. 14. В силу минимаксимального принципа

$$\mu_0\lambda_n^{(1)} \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_1\lambda_n^{(2)}. \tag{13}$$

Но числа $\lambda_n^{(1)}$ и λ_n^{2} удовлетворяют соотношениям вида (10), и для чисел λ_n — собственных чисел оператора $\mathfrak{A}$ — получается двусторонняя оценка

$$c_1 n^{2/m} \leqslant \lambda_n \leqslant c_2 n^{2/m}; \qquad c_1,\ c_2 = \text{const} > 0. \tag{14}$$

Замечание. Справедливо более точное утверждение: существует предел

$$\lim \frac{n}{\lambda_n^{m/2}}$$

и этот предел равен величине

$$c'_m \int\limits_{\Omega} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{Det} A(x)}}, \qquad c'_m = \text{const},$$

где $A(x)$ — матрица коэффициентов $A_{ik}(x)$, а c_m зависит только от размерности m пространства. См. статью Т. Карлемана [5] и книгу В. И. Смирнова [17], т. IV.

ГЛАВА 16

ЗАДАЧА НЕЙМАНА

§ 1. Случай положительного $C(x)$

Рассмотрим формально самосопряженное уравнение эллиптического типа

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)u=f(x), \tag{1}$$

решение которого ищется в конечной области $\Omega\subset E_m$ с кусочно гладкой границей Γ.

Будем предполагать, что

$$A_{jk}\in C^{(1)}(\bar{\Omega}),\qquad C\in C(\bar{\Omega})$$

и что уравнение (1) в $\bar{\Omega}$ не вырождается, так что для любых вещественных чисел $t_1, t_2, \ldots, t_m$ справедливо неравенство

$$A_{jk}(x)t_jt_k\geqslant\mu_0\sum_{k=1}^{m}t_k^2, \tag{2}$$

где μ_0 — положительная постоянная.

Для уравнения (1) поставим однородное краевое условие задачи Неймана

$$A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\Big|_{\Gamma}=0; \tag{3}$$

здесь ν — внешняя нормаль к Γ.

Оператор, порождаемый задачей Неймана, обозначим через $\mathfrak{N}$. За область его определения $D(\mathfrak{N})$ примем множество функций из $C^{(2)}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих условию (3); на этом множестве оператор $\mathfrak{N}$ действует по формуле

$$\mathfrak{N}u=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+Cu.$$

Будем рассматривать $\mathfrak{N}$ как оператор в $L_2(\Omega)$ и докажем, что он симметричен. Его область определения плотна в $L_2(\Omega)$, потому что она, очевидно, содержит плотное в $L_2(\Omega)$ множество финитных функций.

Составим теперь скалярное произведение

$$(\mathfrak{N}u,\ v) = -\int_\Omega v\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)dx + \int_\Omega Cuv\,dx.$$

Первый интеграл возьмем по частям:

$$(\mathfrak{N}u,\ v) = -\int_\Gamma vA_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j)\,d\Gamma + \int_\Omega A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx + \int_\Omega Cuv\,dx.$$

В силу краевого условия (3) первый интеграл справа исчезает, а два оставшихся очевидным образом симметричны. Тем самым симметричность оператора $\mathfrak{N}$ доказана. Попутно получается формула

$$(\mathfrak{N}u,\ v) = \int_\Omega \left[A_{jk}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cuv\right]dx. \tag{4}$$

Положим в этой формуле $v = u$

$$(\mathfrak{N}u,\ u) = \int_\Omega \left[A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right]dx. \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\int_\Omega A_{jk}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx \geqslant \mu_0\int_\Omega \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \geqslant 0,$$

и легко получается следующее достаточное условие положительной определенности оператора $\mathfrak{N}$:

$$C(x) \geqslant C_0 = \mathrm{const} > 0; \tag{6}$$

в этом случае

$$(\mathfrak{N}u,\ u) \geqslant C_0\int_\Omega u^2\,dx = C_0\|u\|^2,$$

а это и есть неравенство положительной определенности, со значением постоянной $\gamma=\sqrt{C_0}$. Естественно, в случае таких $C(x)$ применима ранее развитая теория, и задача Неймана имеет одно и только одно обобщенное решение.

§ 2. Случай $C(x)\equiv 0$

Этот случай, которому посвящены все остальные параграфы настоящей главы, более интересен и несколько более труден. Если $C(x)\equiv 0$, то

$$\mathfrak{N}u=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \tag{1}$$

и

$$(\mathfrak{N}u,\ u)=\int_\Omega A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx; \tag{2}$$

краевое условие (1.3) остается без изменения.

В рассматриваемом случае оператор $\mathfrak{N}$ не только не положительно определенный, но даже не положительный. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функцию $u_0(x)\equiv 1$. Она имеет все производные и удовлетворяет краевому условию (1.3), следовательно, $u_0\in D(\mathfrak{N})$; очевидно также, что $\|u_0\|>0$. В то же время $(\mathfrak{N}u_0,\ u_0)=0$, что было бы невозможно, если бы $\mathfrak{N}$ был положительным оператором.

Задача Неймана

$$\mathfrak{A}u=f \tag{3}$$

или, в более подробной записи,

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(x),\\ &A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,\ x_j)\Big|_\Gamma=0,\end{aligned}\right\} \tag{3_1}$$

неразрешима, если функция $f(x)$ не подчинена некоторому специальному условию, которое мы сейчас выясним.

Допустим, что задача (3) имеет решение $u\in D(\mathfrak{N})$.

Обе части дифференциального уравнения (3_1) проинтегрируем по Ω. Взяв интеграл слева по частям и воспользовавшись краевым условием (3_1), получим искомое условие

$$\int_\Omega f(x)\,dx=(f,\ 1)=0. \tag{4}$$

Таким образом, целесообразно рассматривать уравнение (3) не при произвольных $f \in L_2(\Omega)$, а лишь при таких f, которые принадлежат подпространству, ортогональному к единице. Это подпространство будем обозначать через $\tilde{L}_2(\Omega)$. Полученное только что условие (4) допускает и такую формулировку: при $C(x) \equiv 0$ оператор $\mathfrak{N}$ преобразует любую функцию из $D(\mathfrak{N})$ в функцию из $\tilde{L}_2(\Omega)$.

С другой стороны[1], если задача (3) имеет решение, то оно не единственное: если функция $u_0(x)$ решает задачу (3), то ее же решает и функция $u_0(x)+c$, где c — произвольная постоянная. Других решений не существует. Действительно, если $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — два решения задачи (3), то разность $v(x)=u_0(x)-u_1(x)$ удовлетворяет однородному уравнению $\mathfrak{N}v=0$. По формуле (1.5), в которой следует положить $C(x)\equiv 0$, имеем

$$\int_\Omega A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = 0.$$

Матрица коэффициентов A_{jk} положительно определенная, поэтому необходимо $\frac{\partial v}{\partial x_k} \equiv 0$, $k=1, 2, \ldots, m$ и $v(x) \equiv \text{const}$, что и требовалось доказать.

Решение задачи Неймана можно сделать единственным, если потребовать, чтобы оно принадлежало введенному выше подпространству $\tilde{L}_2(\Omega)$, — это требование единственным образом определяет постоянную c.

Последнее требование можно сформулировать так: мы сужаем оператор $\mathfrak{N}$, заменяя его область определения $D(\mathfrak{N})$ более узкой областью $D(\mathfrak{N}) \cap \tilde{L}_2(\Omega)$. Этот суженный оператор будем обозначать через $\mathfrak{N}_0$. Его область определения $D(\mathfrak{N}_0) = D(\mathfrak{N}) \cap \tilde{L}_2(\Omega)$, а область значений по-прежнему принадлежит $\tilde{L}_2(\Omega)$.

Таким образом, как область определения, так и область значений оператора $\mathfrak{N}_0$ принадлежат подпространству $\tilde{L}_2(\Omega)$. Но тогда $\tilde{L}_2(\Omega)$ можно рассматривать как пространство, в котором действует оператор $\mathfrak{N}_0$. Нетрудно видеть, что

[1]) Рассуждения, аналогичные нижеследующим, были использованы в гл. 12 для уравнения Лапласа.

в этом пространстве оператор $\mathfrak{N}_0$ положителен. Действительно, для этого оператора очевидным образом остается верной формула (1.5):

$$(\mathfrak{N}_0 u,\ u) = \int\limits_{\Omega} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx. \tag{5}$$

Отсюда $(\mathfrak{N}_0 u,\ u) \geqslant 0$. Если $(\mathfrak{N}_0 u,\ u) = 0$, то $\frac{\partial u}{\partial x_k} \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$ и $u(x) = c = \text{const}$. Но $u \in \tilde{L}_2(\Omega)$, поэтому

$$0 = (c,\ 1) = c \int\limits_{\Omega} d\Omega = c\,|\,\Omega\,|.$$

Отсюда $c = 0$ и $u(x) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Нашей ближайшей целью является доказательство того, что оператор $\mathfrak{N}_0$ положительно определенный. Этому посвящены следующие три параграфа.

§ 3. Интегральное представление С. Л. Соболева

Рассмотрим конечную область $\Omega \subset E_m$, обладающую следующим свойством: любая точка самой области или ее границы может быть сделана вершиной шарового сектора, имеющего фиксированные радиус R и угол раствора 2α и целиком (кроме, может быть, вершины) лежащего в области Ω (рис. 27). О таких областях принято говорить, что они *удовлетворяют условию конуса.*

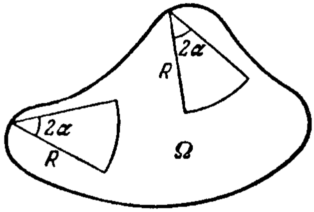

Рис. 27.

Введем в рассмотрение функцию $\psi(t)$ вещественной переменной t, бесконечно дифференцируемую на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем

$$\psi(t) = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3},$$

$$\psi(t) = 0, \quad \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1,$$

Такую функцию можно построить, усреднив, например, функцию

$$\psi_0(t)=\begin{cases}1, & t<\frac{1}{2},\\ 0, & t>\frac{1}{2}\end{cases}$$

с радиусом усреднения $h<\frac{1}{6}$.

Пусть $u\in C^{(1)}(\Omega)$. Возьмем в Ω точку x и построим шаровой сектор с вершиной x, лежащий в Ω. Введем сферические координаты[1] $r=|x-\xi|$, $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$ с центром в точке x; эти координаты выберем так, чтобы коническая поверхность шарового сектора имела уравнение $\vartheta_1=\alpha$. Положим

$$v(\xi)=v(r,\ \theta)=v(r,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \ldots,\ \vartheta_{m-1})=u(\xi)\,\psi\left(\frac{r}{R}\right). \tag{1}$$

Очевидно,

$$v(0,\ \theta)=u(x),\qquad v(R,\ \theta)=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=u(\xi)\,\frac{\partial\psi\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial r}+\psi\left(\frac{r}{R}\right)\frac{\partial u(\xi)}{\partial r}. \tag{3}$$

Из формул (2) вытекает, что

$$u(x)=-\int_0^R\frac{\partial v}{\partial r}\,dr. \tag{4}$$

Равенство (4) проинтегрируем по той части S_1' единичной сферы S_1, в которой $0\leqslant\vartheta_1\leqslant\alpha$ (т. е. по той ее части, которую вырезает боковая поверхность шарового сектора). Левая часть при этом умножится на положительную постоянную $b=|S_1'|$; разделив на b, получим формулу

$$u(x)=-\frac{1}{b}\int_{V_x}\frac{\partial v}{\partial r}\,dr\,dS_1=-\frac{1}{b}\int_{V_x}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{d\xi}{r^{m-1}}; \tag{5}$$

здесь V_x — шаровой сектор с вершиной x.

---

[1]) Мы предполагаем здесь, что $m>2$; последующие рассуждения нетрудно видоизменить и для случая $m=2$.

Заменим $\frac{\partial v}{\partial r}$ по формуле (3). Примем во внимание, что

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\cos(\xi_k, r).$$

Здесь ξ_k — фиксированные декартовы координатные оси. Введем еще обозначения

$$B_0(x, \xi)=\begin{cases}-\frac{1}{b}\,\frac{\partial\psi\left(\frac{r}{R}\right)}{\partial r}, & \xi\in V_x,\\ 0, & \xi\,\overline{\in}\,V_x;\end{cases}$$

$$B_k(x, \xi)=\begin{cases}-\frac{1}{b}\psi\left(\frac{r}{R}\right)\cos(\xi_k, r), & \xi\in V_x,\\ 0, & \xi\,\overline{\in}\,V_x,\end{cases}$$

$$k=1, 2, \ldots, m;$$

функции $B_0(x, \xi)$ и $B_k(x, \xi)$, очевидно, ограничены. Теперь формуле (5) можно придать вид

$$u(x)=\int_\Omega \frac{B_0(x, \xi)}{r^{m-1}}\,u(\xi)\,d\xi+\int_\Omega \frac{B_k(x, \xi)}{r^{m-1}}\,\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\,d\xi. \tag{6}$$

Это и есть интегральное представление С. Л. Соболева.

Для дальнейшего важно, что интегралы (6) суть вполне непрерывные операторы в $L_2(\Omega)$ над u и $\frac{\partial u}{\partial \xi_k}$ соответственно. Действительно, при $r<\frac{R}{3}$ функция $B_0(x, \xi)\equiv 0$, ядро первого интеграла (6) ограничено и этот интеграл есть оператор Фредгольма над u. Что касается остальных интегралов (6), то они суть интегральные операторы со слабой особенностью над производными $\frac{\partial u}{\partial \xi_k}$.

В последующих параграфах настоящей главы предполагается, что область Ω конечна и удовлетворяет условию конуса.

Представление (6) получено для функций класса $C^{(1)}(\Omega)$. Нетрудно распространить это представление на функции, которые в Ω суммируемы и имеют обобщенные первые производные, суммируемые с некоторой степенью $p>1$. Мы предоставляем это сделать читателю.

Замечание. Представление (6) на самом деле есть частный случай более общего представления, полученного С. Л. Соболевым (см. [18], [19]). Интегральное представление С. Л. Соболева послужило основой для вывода теорем вложения (§ 5 гл. 2).

§ 4. Исследование оператора $\mathfrak{N}_0$

Положим

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_0 + I, \tag{1}$$

где I — тождественный оператор в пространстве $\tilde{L}_2(\Omega)$. Очевидно, $D(\mathfrak{N}_1) = D(\mathfrak{N}_0)$. Далее,

$$(\mathfrak{N}_1 u, u) = (\mathfrak{N} u, u) + \| u \|^2 = \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx + \| u \|^2. \tag{2}$$

Интеграл неотрицателен, поэтому

$$(\mathfrak{N}_1 u, u) \geqslant \| u \|^2, \tag{3}$$

и оператор $\mathfrak{N}_1$ положительно определенный.

Повторяя рассуждения § 3 гл. 14, легко доказать, что функции, входящие в энергетическое пространство $H_{\mathfrak{N}_1}$ оператора $\mathfrak{N}_1$, суммируемы в области Ω с квадратом, имеют в этой области обобщенные первые производные, также суммируемые с квадратом, и что для энергетической нормы и энергетического произведения справедливы формулы, вытекающие из соотношения (2):

$$| u |^2_{\mathfrak{N}_1} = \int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + u^2 \right] dx; \tag{4}$$

$$[u, v]_{\mathfrak{N}_1} = \int_\Omega \left[A_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + uv \right] dx. \tag{5}$$

Докажем, что спектр оператора $\mathfrak{N}_1$ дискретен.

В силу теоремы 6.6.1 достаточно доказать, что любое множество функций, ограниченное в энергетической метрике оператора $\mathfrak{N}_1$, компактно в $\tilde{L}_2(\Omega)$ или, что то же, в $L_2(\Omega)$.

Пусть множество $M \subset H_{\mathfrak{N}_1}$ и пусть

$$| u |_{\mathfrak{N}_1} \leqslant c = \text{const}, \qquad \forall u \in M.$$

Последнее неравенство означает, что

$$\int\limits_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx+\|u\|^2\leqslant c^2.$$

По неравенству (1.2)

$$\mu_0\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2dx+\|u\|^2\leqslant c^2.$$

Отсюда

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|\leqslant\frac{c}{\sqrt{\mu_0}},\qquad \|u\|\leqslant c.$$

Таким образом, само множество M и множества первых производных от функций из M ограничены в метрике $L_2(\Omega)$. Напишем для функции $u\in M$ интегральное представление (3.6). Вполне непрерывные интегральные операторы, входящие в это представление, преобразуют указанные здесь ограниченные множества в компактные. Этим доказано, что множество M компактно в $L_2(\Omega)$.

Пусть

$$\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\ldots\leqslant\nu_n\leqslant\ldots$$

— собственные числа оператора $\mathfrak{N}_1$, а $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — соответствующие собственные функции.

В силу теоремы 6.4.1 имеем

$$\nu_1=\frac{\|u_1\|^2_{\mathfrak{N}_1}}{\|u_1\|^2}\geqslant 1.$$

Докажем, что знак равенства невозможен и, следовательно, $\nu_1>1$. Предположим противное, и пусть $\nu_1=1$. Тогда из формулы (4) следует, что

$$\int\limits_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}dx=0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_k}\equiv 0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\qquad u_1\equiv c_1=\text{const}.$$

Но $u_1\in\tilde{L}_2(\Omega)$, поэтому

$$0=(u_1,\ 1)=(c_1,\ 1)=\int\limits_{\Omega}c_1\,dx=c_1|\Omega|,$$

и $c_1 = 0$. Окончательно, $u_1(x) \equiv 0$, что противоречит определению собственной функции. Наше утверждение доказано.

Как следствие мы получаем следующую важную теорему.

Теорема 16.4.1. *Оператор $\mathfrak{N}_0$ положительно определенный.*

Действительно,

$$\inf_{u \in H_{\mathfrak{N}_1}} \frac{|u|^2_{\mathfrak{N}_1}}{\|u\|^2} = \nu_1.$$

Отсюда

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_1} \geqslant \nu_1 \|u\|^2, \qquad u \in H_{\mathfrak{N}_1}. \tag{6}$$

В частности, если $u \in D(\mathfrak{N}_1) = D(\mathfrak{N}_0)$, то

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_1} = (\mathfrak{N}_1 u, u) = (\mathfrak{N}_0 u, u) + \|u\|^2 \tag{7}$$

и, следовательно, $(\mathfrak{N}_0 u, u) \geqslant (\nu_1 - 1)\|u\|^2$; так как $\nu_1 > 1$, то последнее неравенство означает, что оператор $\mathfrak{N}_0$ положительно определен.

Введем в рассмотрение энергетическое пространство $H_{\mathfrak{N}_0}$ положительно определенного оператора $\mathfrak{N}_0$. Покажем, что энергетические пространства $H_{\mathfrak{N}_1}$ и $H_{\mathfrak{N}_0}$ состоят из одних и тех же элементов, причем

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_1} = |u|^2_{\mathfrak{N}_0} + \|u\|^2. \tag{8}$$

Доказательство нужно проводить только для идеальных элементов. Пусть u — идеальный элемент пространства $H_{\mathfrak{N}_0}$. Тогда существует последовательность функций $u_n \in D(\mathfrak{N}_0) = D(\mathfrak{N}_1)$ такая, что

$$|u_n - u_m|_{\mathfrak{N}_0} \xrightarrow[m,\, n \to \infty]{} 0, \qquad \|u_n - u\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Написав тождество (7) для разности $u_n - u_m$, видим, что одновременно выполняются и соотношения

$$|u_n - u_m|_{\mathfrak{N}_1} \xrightarrow[m,\, n \to \infty]{} 0, \qquad \|u_n - u\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

которые показывают, что $u \in H_{\mathfrak{N}_1}$. Точно так же доказывается и обратное утверждение: если $u \in H_{\mathfrak{N}_1}$, то одновременно $u \in H_{\mathfrak{N}_0}$.

Из формулы (7) следует, что соотношение (8) справедливо для элементов области $D(\mathfrak{N}_0)=D(\mathfrak{N}_1)$; предельным переходом оно устанавливается и для идеальных элементов энергетических пространств.

Формула (2.5) показывает, что для функций $u\in D(\mathfrak{N}_0)$ верны равенства

$$|u|^2_{\mathfrak{N}_0}=\int\limits_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx \tag{9}$$

и

$$[u,\ v]_{\mathfrak{N}_0}=\int\limits_{\Omega} A_{jk}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx. \tag{10}$$

Предельным переходом они распространяются на любые функции из $H_{\mathfrak{N}_0}$.

Теорема 16.4.2. *Оператор $\mathfrak{N}_0$ имеет дискретный спектр; его собственные числа и собственные функции суть ν_k-1 и u_k, где ν_k и u_k — собственные числа и собственные функции оператора $\mathfrak{N}_1$.*

Число ν_k и функция $u_k(x)$ суть обобщенное собственное число и соответствующая ему обобщенная собственная функция оператора $\mathfrak{N}_1$. В таком случае они связаны соотношением

$$[u_k,\ \eta]_{\mathfrak{N}_1}=\nu_k(u_k,\ \eta),\qquad \forall\eta\in H_{\mathfrak{N}_1}. \tag{11}$$

Из соотношения (8) для норм вытекает аналогичное соотношение для скалярных произведений:

$$[u,\ v]_{\mathfrak{N}_1}=[u,\ v]_{\mathfrak{N}_0}+(u,\ v).$$

Вспоминая еще, что пространства $H_{\mathfrak{N}_1}$ и $H_{\mathfrak{N}_0}$ состоят из одних и тех же элементов, мы можем преобразовать соотношение (11) к виду

$$[u_k,\ \eta]_{\mathfrak{N}_0}=(\nu_k-1)(u_k,\ \eta),\qquad \forall\eta\in H_{\mathfrak{N}_1}. \tag{12}$$

Равенство (12) показывает, что оператор $\mathfrak{N}_0$ имеет счетное множество положительных и возрастающих до бесконечности обобщенных собственных чисел ν_k-1; им соответствуют обобщенные собственные функции $u_k(x)$, система которых ортонормирована и полна в $\tilde{L}_2(\Omega)$. Тем самым теорема доказана.

§ 5. Обобщенное решение задачи Неймана

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathfrak{N}_0 u = f, \qquad f \in \tilde{L}_2(\Omega), \tag{1}$$

или, что то же, дифференциальное уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x) \tag{2}$$

при краевом условии

$$A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu, x_j)\big|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

где коэффициенты $A_{jk} \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$ таковы, что выполняется неравенство

$$A_{jk}(x)\,t_j t_k \geqslant \mu_0 \sum_{k=1}^{m} t_k^2; \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \mu_0 = \text{const} > 0.$$

Напомним, что по принятому нами допущению, Ω — конечная область, удовлетворяющая условию конуса, а условие $f \in \tilde{L}_2(\Omega)$ означает, что

$$\int_\Omega f(x)\,dx = 0, \qquad \int_\Omega f^2(x)\,dx < \infty. \tag{4}$$

Оператор $\mathfrak{N}_0$ — положительно определенный в $\tilde{L}_2(\Omega)$, поэтому уравнение (1) имеет в $H_{\mathfrak{N}_0}$ одно и только одно обобщенное решение $u_0(x)$. Как и любой элемент энергетического пространства $H_{\mathfrak{N}_0}$, $u_0 \in \tilde{L}_2(\Omega)$, т. е. $u_0(x)$ квадратично суммируема в Ω и

$$\int_\Omega u_0(x)\,dx = 0. \tag{4$_1$}$$

Далее, $u_0(x)$ имеет обобщенные первые производные, квадратично суммируемые в Ω. Функция $u_0(x)$ реализует минимум функционала

$$\|u\|_{\mathfrak{N}_0} - 2(u, f) = \int_\Omega \left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} - 2uf\right]dx, \quad u \in H_{\mathfrak{N}_0} \tag{5}$$

Дальнейшее исследование проведем для уравнения Лапласа

$$-\Delta u = f(x). \tag{6}$$

Краевое условие принимает более простую форму

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0. \tag{7}$$

Условия (4) и (4_1) сохраняются. Как и в общем случае, существует обобщенное решение $u_0(x)$ задачи (6)—(7); оно реализует минимум функционала

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 - 2uf\right] dx, \qquad u \in H_{\mathfrak{N}_0}, \tag{8}$$

и потому вариация функционала (8) в точке u_0 обращается в нуль. Это дает тождество

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi_k}\frac{\partial \eta}{\partial \xi_k} - f\eta\right) d\xi = 0, \qquad \forall \eta \in H_{\mathfrak{N}_0}. \tag{9}$$

Теорема 16.5.1. *Если* $f \in C^{(1)}(\bar{\Omega})$, *то* $u_0 \in C^{(2)}(\Omega)$.

Доказательство почти дословно такое же, как и в теореме 14.6.2: вводим объемный потенциал

$$\psi(x) = -\frac{1}{(m-2)\,|S_1|}\int_{\Omega} f(\xi)\,\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi,$$

так что $-\Delta\psi = f(x)$ и $\psi \in C^{(1)}(\bar{\Omega}) \cap C^{(2)}(\Omega)$, и в тождестве (9) делаем замену $u_0 = v_0 + \psi$. Мы получаем новое тождество

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_0}{\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\,d\xi = 0, \qquad \forall \eta \in H_{\mathfrak{N}_0}. \tag{10}$$

Положим $\eta(\xi) = \omega_h(r)$, $r = |x - \xi|$, $x \in \Omega$ и h меньше, чем расстояние от x до границы области Ω. Это можно сделать, потому что: 1) $\omega_h(r)$ бесконечно дифференцируема; 2) вблизи границы $\omega_h(r) \equiv 0$ и, следовательно, $\omega_h(r)$ удовлетворяет краевому условию (7). В таком случае $\omega_h(r) \in D(\mathfrak{N}_0)$ и, тем более, $\omega_h(r) \in H_{\mathfrak{N}_0}$.

Итак,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_0}{\partial \xi_k}\frac{\partial \omega_h(r)}{\partial \xi_k}\,d\xi = 0.$$

Как и в теореме 14.6.2, отсюда следует, что v_{0h}, а значит, и v_0 гармонична в Ω. Но тогда

$$v_0 \in C^{(2)}(\Omega), \qquad u_0 = (v_0 + \psi) \in C^{(2)}(\Omega),$$

и теорема доказана.

Замечания, сделанные после доказательства теоремы 14.6.2, остаются в силе и в данном случае.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что любая функция $u \in \tilde{L}_2(\Omega)$, такая, что обобщенные первые производные $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, принадлежит энергетическому пространству $H_{\mathfrak{N}_0}$ (§ 4). Вывести отсюда *неравенство Пуанкаре*

$$\int_\Omega u^2\,dx \leqslant c_1 \int_\Omega \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + c_2 \left(\int_\Omega u\,dx\right)^2; \qquad c_1,\ c_2 = \text{const}.$$

Область Ω предполагается конечной и удовлетворяющей условию конуса.

2. Исходя из интегрального представления С. Л. Соболева, доказать:

Если функция $u(x)$ имеет обобщенные первые производные $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то она эквивалентна функции, определенной почти всюду и суммируемой с квадратом на любой кусочно гладкой $(m-1)$-мерной поверхности $\Sigma \subset \Omega$.

3. Доказать, что обобщенное решение $u_0(x)$ задачи Неймана

$$-\Delta u = f(x), \quad f \in \tilde{L}_2(\Omega) \cap C^{(1)}(\overline{\Omega}), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0$$

удовлетворяет краевому условию в следующем смысле: пусть Ω_n — внутренняя подобласть области Ω с кусочно гладкой границей Γ_n и $\Omega_n \to \Omega$. Тогда

$$\int_{\Gamma_n} \eta \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall \eta \in H_{\mathfrak{N}_0}.$$

4. Пусть коэффициент $C(x)$ непрерывен и неотрицателен в замкнутой области $\overline{\Omega}$, причем на некотором множестве положительной меры $C(x) > 0$. Примем еще, что коэффициенты $A_{jk}(x)$ обладают свойствами, перечисленными в § 1, а область Ω конечная и удовлетворяет условию конуса. Доказать, что оператор $\mathfrak{N}$ (§ 1) положительно определенный и его спектр дискретен.

ГЛАВА 17

НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Обобщенное решение

Рассмотрим уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+B_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}+C(x)u=f(x) \qquad (1)$$

и поставим для него задачу Дирихле

$$u|_\Gamma=0, \qquad (2)$$

где Γ — кусочно гладкая граница конечной области Ω в пространстве E_m переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Будем предполагать, что

$$A_{jk}\in C^{(1)}(\bar{\Omega}); \qquad B_k, C\in C(\bar{\Omega}),$$

а также что наше уравнение — невырожденное эллиптическое в $\bar{\Omega}$, так что

$$A_{jk}(x)t_jt_k\geqslant\mu_0\sum_{k=1}^{m}t_k^2, \quad \mu_0=\mathrm{const}>0.$$

Введем в рассмотрение задачу с формально самосопряженным эллиптическим выражением в левой части

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(x), \quad u|_\Gamma=0; \qquad (3)$$

оператор этой задачи обозначим через $\mathfrak{A}$. В гл. 14 было выяснено, что оператор $\mathfrak{A}$ положительно определенный, поэтому если $f\in L_2(\Omega)$, то у задачи (3) существует обобщенное решение u_0, принадлежащее энергетическому пространству $H_{\mathfrak{A}}$. Таким образом, каждому элементу $f\in L_2(\Omega)$ приводится в соответствие элемент $u_0\in H_{\mathfrak{A}}$ — обобщенное решение задачи (3).

Это соответствие порождает оператор, который мы обозначим через G:

$$Gf = u_0. \tag{4}$$

Очевидно, $D(G) = L_2(\Omega)$ и $R(G) \subset H_{\mathfrak{A}}$.

Оператору G можно дать явное выражение: если $\{\omega_n\}$ — полная ортонормированная в $H_{\mathfrak{A}}$ система, то (см. формулу (5.11) гл. 5)

$$Gf = u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)\, \omega_n. \tag{5}$$

По определению оператор G действует из $L_2(\Omega)$ в $H_{\mathfrak{A}}$; ясно, что G можно рассматривать и как оператор, действующий из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Обобщенное решение u_0 реализует минимум функционала

$$F(u) = [u, u]_{\mathfrak{A}} - 2(u, f)$$

и, следовательно, обращает в нуль его вариацию:

$$\delta F(u_0, \eta) = 2[u_0, \eta]_{\mathfrak{A}} - 2(f, \eta) = 0, \qquad \forall \eta \in H_{\mathfrak{A}}.$$

Заменяя здесь u_0 на Gf, получим формулу

$$[Gf, \eta]_{\mathfrak{A}} = (f, \eta) \tag{6}$$

верную для любых элементов $f \in L_2(\Omega)$ и $\eta \in H_{\mathfrak{A}}$ [1]).

Обозначим через K оператор, область определения которого совпадает с $H_{\mathfrak{A}}$ и который действует по формуле

$$Ku = B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu. \tag{7}$$

Теперь задача (1) — (2) может быть записана следующим образом:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x) - Ku, \qquad u|_\Gamma = 0. \tag{8}$$

Ее решение (если оно существует и принадлежит $H_{\mathfrak{A}}$) может быть записано в виде

$$u = G(f - Ku) = Gf - GKu. \tag{9}$$

---

[1]) Заметим, что наши утверждения об операторе G и его свойствах справедливы в случае любого положительно определенного оператора $\mathfrak{A}$.

Введем обозначения:

$$Gf = F, \quad GK = T.$$

Очевидно, $F \in H_{\mathfrak{A}}$, а оператор T определен на всем пространстве $H_{\mathfrak{A}}$ и действует из $H_{\mathfrak{A}}$ в $H_{\mathfrak{A}}$. Уравнение (9) принимает вид

$$u + Tu = F. \tag{10}$$

Введем теперь следующее определение:

Обобщенным решением задачи (1) — (2) *называется функция* $u \in H_{\mathfrak{A}}$, *удовлетворяющая уравнению* (10).

§ 2. Теоремы Фредгольма

Лемма 17.2.1. *Оператор G вполне непрерывен в* $L_2(\Omega)$.

Спектр оператора $\mathfrak{A}$ дискретен (см. гл. 15). Пусть λ_n и $u_n(x)$ — собственные числа и собственные функции этого оператора, причем, как обычно, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, а функции u_n ортонормированы в $L_2(\Omega)$. Тогда они ортогональны, но не нормированы и в $H_{\mathfrak{A}}$, именно

$$[u_j, u_k]_{\mathfrak{A}} = 0, \quad j \neq k; \qquad \|u_k\|^2_{\mathfrak{A}} = \lambda_k.$$

Напомним еще, что система $\{u_n\}$ полна в $H_{\mathfrak{A}}$. Теперь ясно, что система $\left\{\frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$ ортонормирована и полна в $H_{\mathfrak{A}}$.

В формуле (1.5) положим

$$\omega_n = \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Это дает нам следующее представление оператора G:

$$Gf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, u_n)}{\lambda_n} u_n. \tag{1}$$

Введем обозначения:

$$G = G'_n + G''_n, \qquad G'_n f = \sum_{k=1}^{n} \frac{(f, u_k)}{\lambda_k} u_k,$$
$$G''_n f = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(f, u_k)}{\lambda_k} u_k. \tag{2}$$

Первый оператор конечномерный и, следовательно, вполне непрерывный. Оценим норму второго оператора. Имеем

$$\|G_n''f\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(f, u_k)^2}{\lambda_k^2} \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (f, u_k)^2.$$

В силу неравенства Бесселя

$$\|G_n''f\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \|f\|^2.$$

Отсюда

$$\|G_n''\| \leqslant \frac{1}{\lambda_{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

и, следовательно,

$$\|G - G_n'\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теперь оператор G вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$ как предел (в смысле сходимости по норме) вполне непрерывных операторов.

Теорема 17.2.1. *Оператор $T = GK$ вполне непрерывен в $H_{\mathfrak{A}}$.*

Оператор G вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$, поэтому если M — множество, ограниченное в $L_2(\Omega)$, то из этого множества можно выделить такую последовательность $\{v_n\}$, что последовательность $\{Gv_n\}$ сходится и, следовательно,

$$\|Gv_n - Gv_k\| \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0.$$

Рассмотрим теперь произвольное множество $N \subset H_{\mathfrak{A}}$, ограниченное в энергетической метрике:

$$|u|_{\mathfrak{A}} \leqslant a, \qquad \forall u \in N, \qquad a = \text{const}.$$

Докажем, что если элемент u пробегает множество N, то Ku пробегает множество $K(N)$, ограниченное в $L_2(\Omega)$. Действительно,

$$a^2 \geqslant |u|_{\mathfrak{A}}^2 = \int_\Omega A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx \geqslant \mu_0 \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx =$$

$$= \mu_0 \sum_{k=1}^{m} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|^2.$$

Отсюда

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\| \leqslant \frac{a}{\sqrt{\mu_0}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

В то же время

$$\| u \| \leqslant \frac{1}{\gamma} | u | \leqslant \frac{a}{\gamma},$$

где γ — нижняя грань оператора $\mathfrak{A}$.

Было предположено, что коэффициенты $B_k(x)$ и $C(x)$ непрерывны и, следовательно, ограничены в замкнутой области $\bar{\Omega}$; пусть $|B_k(x)| \leqslant b$, $|C(x)| \leqslant b$, $b = \text{const}$. Тогда

$$\| Ku \| \leqslant b \left(\sum_{k=1}^{m} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\| + \| u \| \right) \leqslant ab \left(\frac{m}{\sqrt{\mu_0}} + \frac{1}{\gamma} \right) = c = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Как было указано выше, из ограниченного в $L_2(\Omega)$ множества $K(N)$ можно выбрать такую последовательность $\{Kv_n\}$, что

$$\| GKv_n - GKv_k \| = \| Tv_n - Tv_k \| \underset{k,\, n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3}$$

Соотношение (3) означает, что T вполне непрерывен как оператор из $H_{\mathfrak{A}}$ и $L_2(\Omega)$. Остается показать, что T вполне непрерывен как оператор из $H_{\mathfrak{A}}$ в $H_{\mathfrak{A}}$. Для этого достаточно показать, что

$$| Tv_n - Tv_k |_{\mathfrak{A}} \underset{n,\, k \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4}$$

Оценим квадрат последней нормы. Используя формулу (1.6), получим

$$| Tv_n - Tv_k |_{\mathfrak{A}}^2 = [T(v_n - v_k), T(v_n - v_k)]_{\mathfrak{A}} = [GK(v_n - v_k), T(v_n - v_k)]_{\mathfrak{A}} = (Kv_n - Kv_k, Tv_n - Tv_k) \leqslant$$
$$\leqslant \| Kv_n - Kv_k \| \cdot \| Tv_n - Tv_k \| \leqslant 2c \| Tv_n - Tv_k \| \underset{n,\, k \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим при том же краевом условии (1.2) уравнение, несколько более общее, нежели уравнение (1.1):

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \lambda \left(B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu \right) = f(x). \tag{5}$$

Очевидно, что эта задача сведется к такой:

$$u + \lambda T u = F. \tag{6}$$

Из ранее развитой общей теории (см. раздел III) следует, что существует не более чем счетное множество характеристических чисел этой задачи, которые могут сгущаться лишь на бесконечности; для всех остальных λ решение уравнения (5) существует и единственно. Если же λ характеристическое, то, вообще говоря, решение не существует. В этом случае для его существования необходимо и достаточно, чтобы функция F удовлетворяла конечному числу условий ортогональности. Именно, если $w_1, w_2, \ldots, w_s$ суть собственные функции уравнения $w + \bar{\lambda} T^* w = 0$, то для разрешимости уравнения (6) необходимо и достаточно, чтобы

$$[F, w_j]_{\mathfrak{A}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Последнее условие, на основании формулы (1.6) и соотношения $F = Gf$, может быть записано в виде

$$(f, w_j) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, s. \tag{7}$$

Если условие ортогональности выполнено, то обобщенное решение существует, но оно не единственно. Действительно, пусть выполнены условия ортогональности и u_0 — какое-либо частное решение уравнения (6). Тогда $u = u_0 + \tilde{u}$, где $\tilde{u}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\tilde{u} + \lambda T \tilde{u} = 0 \tag{8}$$

и имеет вид $\tilde{u} = \sum_{j=1}^{s} c_j \tilde{u}_j$. Здесь c_j — произвольные постоянные, а $\tilde{u}_j$ — линейно независимые решения уравнения (8).

Все сказанное относительно задачи Дирихле справедливо и для задачи Неймана, если положить $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}_1$, гда $\mathfrak{R}_1$ — оператор, рассмотренный в § 4 гл. 16.

УПРАЖНЕНИЕ

Доказать, что характеристические числа оператора T расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > -q$, где q — достаточно большая постоянная.

ГЛАВА 18

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Развитый в предшествующих главах вариационный метод решения задач Дирихле и Неймана при всех его преимуществах имеет и некоторые слабые стороны. Так, однородную задачу Дирихле удастся решить лишь при условии существования функции $\psi(x)$, о которой сказано в § 5 гл. 14. Наиболее ограничительным, однако, является то обстоятельство, что вариационный метод требует, чтобы оператор задачи был положительно определенным (или, как в предшествующей главе, чтобы он отличался от положительно определенного только более слабым слагаемым). По этой причине вариационный метод оказывается недостаточно хорошо приспособленным к случаю бесконечной области. Если от одного эллиптического уравнения перейти к эллиптическим системам общего вида, то уже задача Дирихле для конечной области перестает быть положительной и вариационный метод оказывается неприменимым.

Ценность метода потенциалов, о котором будет идти речь в настоящей главе, заключается в том, что он освобождает нас от многих перечисленных здесь трудностей. Однако метод потенциалов связан с громоздкими вычислениями, причем применение его резко усложняется в случае области с негладкой границей. Мы будем рассматривать поэтому только уравнение Лапласа, которое мы вправе считать однородным (см. § 6 гл. 11). От рассматриваемой области мы потребуем, чтобы ее граница обладала определенной гладкостью; более отчетливо это требование формулируется в следующих параграфах. Всюду в этой главе, кроме последних §§ 13 и 14, предполагается, что размерность пространства $m > 2$.

12-1567

§ 1. Поверхности Ляпунова

Поверхность Γ в пространстве E_m называется *ляпуновской*, если она удовлетворяет следующим двум *условиям Ляпунова*:

1. В любой точке поверхности Γ существует определенная нормаль.

2. Пусть x и ξ — точки поверхности Γ, $r=|x-\xi|$, n и ν — нормали к Γ в точках x и ξ соответственно, ϑ — угол между этими нормалями. Существуют такие положительные постоянные a и α, что

$$\vartheta \leqslant ar^{\alpha}. \tag{1}$$

Теорема 18.1.1. *Пусть Γ — замкнутая ляпуновская поверхность. Существует такая постоянная $d>0$, что если произвольная точка $x\in\Gamma$ принята за центр сферы радиуса d, то прямая, параллельная нормали к поверхности Γ в точке x, может пересечь Γ внутри сферы только в одной точке.*

Сферу, о которой идет речь в этой теореме, будем называть *сферой Ляпунова* и обозначать через $S(x)$.

Выберем d столь малым, чтобы

$$ad^{\alpha}<1. \tag{2}$$

Докажем, что при таком значении d справедливо заключение теоремы. Допустим противное: пусть сфера радиуса d с центром в некоторой точке $x\in\Gamma$ вырезает из поверхности Γ часть $\Gamma'(x)$ такую, что некоторый луч n', параллельный нормали n, проведенной в точке x, встречает Γ в двух точках: ξ' и ξ (рис. 28). Будем считать, что направление n есть направление внешней нормали. Пусть прямая n' пересекает Γ так, что в точке ξ' эта прямая выходит из области, ограниченной поверхностью Γ, а в точке ξ входит в эту область. Проведем в точке ξ касательную плоскость и внешнюю нормаль ν к Γ. Нормали ν и $n'=n$ направлены по разные стороны касательной плоскости; так как ν перпендикулярно к ней, то угол $\vartheta=(\nu, n)>\frac{\pi}{2}$. Это невозможно, так как $|x-\xi|<d$, и по неравенству (2) $(\nu, n)<1<\frac{\pi}{2}$.

Может случиться, что в точке ξ луч n' касается поверхности Γ (рис. 29). Тогда $(\nu, n) = \frac{\pi}{2}$, что по-прежнему противоречит неравенству (2).

Ниже мы будем предполагать, что радиус d ляпуновской сферы удовлетворяет неравенству (2).

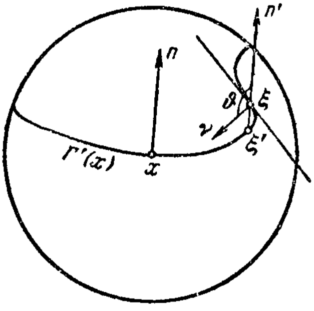

Рис. 28.

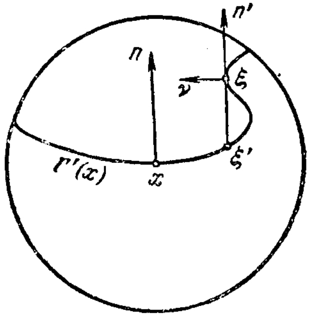

Рис. 29.

На поверхности Γ возьмем произвольную точку x и построим в ней местную систему координат: точку x сделаем началом этой системы, ось ξ_m направим по нормали n к поверхности Γ в точке x, а оси $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ расположим в плоскости, касательной к Γ в той же точке. Из теоремы 18.1.1 вытекает следующее: часть поверхности Γ, заключенная в сфере Ляпунова $S(x)$, может быть в местной системе координат задана явным уравнением вида

$$\xi_m = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}), \quad f \in C^{(1)}. \tag{3}$$

При этом, очевидно,

$$f(0, 0, \ldots, 0) = 0; \; f_{\xi_j}(0, 0, \ldots, 0) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{4}$$

Ближайшая задача — оценить порядок малости функции f и ее первых производных внутри сферы $S(x)$. Часть поверхности Γ, заключенную внутри сферы $S(x)$, будем обозначать, как и выше, через $\Gamma'(x)$.

Пусть $\xi \in \Gamma'(x)$ и ν — нормаль к Γ в точке ξ. Оценим, прежде всего, направляющие косинусы нормали ν в местной системе координат. Имеем

$$\cos(\nu, \xi_m) = \cos(\nu, n) = \cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \ldots$$

В силу неравенств (1) и (2) $\vartheta < 1$, и последний ряд — знакопеременный, с монотонно убывающими членами; если в этом ряде сохранить конечное число членов, то остаток имеет знак первого отброшенного члена. Отсюда

$$\cos(\nu, \xi_m) \geqslant 1 - \frac{\vartheta^2}{2}. \tag{5}$$

Далее по неравенству (1)

$$\cos(\nu, \xi_m) \geqslant 1 - \frac{1}{2} a^2 r^{2\alpha}. \tag{6}$$

По неравенству (2) $a^2 r^{2\alpha} \leqslant a^2 d^{2\alpha} < 1$, и

$$\cos(\nu, \xi_m) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Обе оценки (6) и (7) понадобятся в дальнейшем.

Если поверхность задана уравнением

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = 0,$$

то направляющие косинусы нормали к этой поверхности определяются формулой

$$\cos(\nu, \xi_k) = \pm \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \xi_k}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} \left(\dfrac{\partial F}{\partial \xi_j}\right)^2}}.$$

Уравнение поверхности $\Gamma(x)$ имеет вид

$$\xi_m - f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}) = 0,$$

кроме того, $\cos(\nu, \xi_m) > 0$. Отсюда следует, что

$$\cos(\nu, \xi_k) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \xi_k}}{\sqrt{1 + \sum\limits_{j=1}^{m-1} \left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi_j}\right)^2}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{8}$$

и

$$\cos(\nu, \xi_m) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2}}. \tag{9}$$

По неравенствам (6) и (2)

$$\sqrt{1+\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{2}a^2r^{2\alpha}} = 1+\frac{\frac{1}{2}a^2r^{2\alpha}}{1-\frac{1}{2}a^2r^{2\alpha}} <$$

$$< 1+\frac{\frac{1}{2}a^2r^{2\alpha}}{1-\frac{1}{2}a^2d^{2\alpha}} < 1+a^2r^{2\alpha}.$$

Возведя это в квадрат, получим

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_m}\right)^2 < 2a^2r^{2\alpha}+a^4r^{4\alpha}.$$

Но $r \leqslant d$; в силу неравенства (2)

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right)^2 < 3a^2r^{2\alpha}, \tag{10}$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right| < \sqrt{3}\,ar^{\alpha}, \quad k=1,\,2,\,\ldots,\,m-1. \tag{11}$$

Теперь из формулы (8) вытекает оценка

$$|\cos(\nu,\,\xi_k)| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right| < \sqrt{3}\,ar^{\alpha}, \quad k=1,2,\,\ldots,\,m-1. \tag{12}$$

Оценим величину $|\xi_m|$ на участке $\Gamma'(x)$ поверхности Γ. Обозначим

$$\rho^2=\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k^2.$$

Очевидно,

$$r^2=\rho^2+\xi_m^2. \tag{13}$$

В формуле (11) ξ_k может означать любое направление в касательной плоскости к Γ и, в частности, направление ρ. Поэтому

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| < \sqrt{3}\,ar^{\alpha} \leqslant \sqrt{3}\,ad^{\alpha} \leqslant \sqrt{3}.$$

Отсюда

$$|f| \leqslant \int_0^\rho \left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| d\rho < \sqrt{3}\,\rho,$$

и, следовательно,

$$|\xi_m| < \sqrt{3}\,\rho. \tag{14}$$

Эту оценку можно существенно улучшить. Из формул (13) и (14) следует, что

$$r \leqslant 2\rho. \tag{15}$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| < 2^\alpha \sqrt{3}\, a\rho^\alpha.$$

Теперь

$$|f| = |\xi_m| \leqslant a_1 \rho^{\alpha+1}, \quad a_1 = \frac{2^\alpha \sqrt{3}\, a}{\alpha+1}. \tag{16$_1$}$$

Но $\rho \leqslant r$, и окончательно

$$|\xi_m| \leqslant a_1 r^{\alpha+1}. \tag{16$_2$}$$

Ниже будем обозначать буквой r как расстояние между точками x и ξ, так и направленный от x к ξ вектор. Выведем оценку для $\cos(\nu, r)$ в предположении, что $x \in \Gamma$ и $\xi \in \Gamma'(x)$. В местной системе координат

$$\cos(\nu, r) = \cos(r, x_k)\cos(\nu, x_k) = \frac{\xi_k - x_k}{r}\cos(\nu, x_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\xi_k}{r}\cos(\nu, x_k) + \frac{\xi_m}{r}\cos(\nu, x_m).$$

По неравенствам (12) и (16), приняв во внимание, что $\frac{|\xi_k|}{r} = |\cos(r, x_k)| \leqslant 1$ и $|\cos(\nu, x_m)| \leqslant 1$, найдем

$$|\cos(\nu, r)| \leqslant c r^\alpha, \tag{17}$$

где $c = \sqrt{3}\,(m-1)\,a + a_1 = \text{const}$.

§ 2. Телесный угол

Рассмотрим кусочно гладкую поверхность $\sum$, вообще говоря, незамкнутую, на которой определено положительное направление нормали.

Обозначим через ξ произвольную точку поверхности $\sum$ и через ν — нормаль к $\sum$, проведенную в точке ξ. Пусть точка $x \in E_m$ расположена так, что в любой точке $\xi \in \sum$ радиус-вектор r, идущий от точки x к точке ξ, образует с нормалью ν острый или в крайнем случае прямой угол, так что $\cos(r, \nu) \geqslant 0$. Из точки x проведем радиусы-векторы ко всем точкам поверхности $\sum$. Эти радиусы-векторы заполняют область, ограниченную поверхностью $\sum$ и конической поверхностью K, которую образуют радиусы-векторы, оканчивающиеся в точках края поверхности $\sum$ (рис. 30). Заметим, что если $\sum$ — замкнутая поверхность, то точка x должна находиться внутри $\sum$ (в противном случае угол (r, ν) может быть и тупым), и упомянутая область совпадает с внутренностью $\sum$. Из точки x как из центра опишем сферу произвольного радиуса R. Обозначим через σ_R часть этой сферы, заключенную в упомянутом выше конусе. Отношение

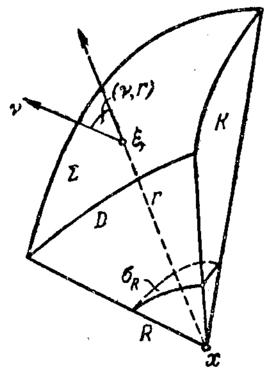

Рис. 30.

$$\omega_x(\sum) = \frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} \tag{1}$$

не зависит от R. Оно называется *телесным углом, под которым поверхность $\sum$ видна из точки x*.

Описанное только что построение можно выполнить и тогда, когда на поверхности $\sum$ $\cos(r, \nu) \leqslant 0$. В этом случае телесным углом $\omega_x(\sum)$, под которым поверхность $\sum$ видна из точки x, называется отношение (1), взятое со знаком минус.

В общем случае, когда $\cos(r, \nu)$ может менять знак, будем предполагать, что поверхность $\sum$ можно разбить на части $\sum_1$, $\sum_2$, ..., на каждой из которых $\cos(r, \nu)$ сохраняет знак.

Для такой поверхности телесный угол определяется формулой

$$\omega_x(\Sigma) = \sum \omega_x(\Sigma_k), \tag{2}$$

если только ряд (2) абсолютно сходится (например, если частей Σ_k конечное число).

Докажем, что во всех перечисленных случаях телесный угол $\omega_x(\Sigma)$ определяется формулой

$$\omega_x(\Sigma) = -\frac{1}{m-2}\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Sigma. \tag{3}$$

Достаточно рассмотреть случай, когда $\cos(r, \nu)$ сохраняет знак на поверхности Σ.

Выведем предварительно одну вспомогательную формулу, которая окажется полезной и в дальнейшем. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\partial r}{\partial\xi_k}\cos(\nu, \xi_k).$$

Но

$$\frac{\partial r}{\partial\xi_k} = \frac{\xi_k - x_k}{r} = \cos(r, \xi_k).$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\cos(r, \xi_k)\cos(\nu, \xi_k)$$

или окончательно

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{m-2}{r^{m-1}}\cos(r, \nu). \tag{4}$$

Пусть $\cos(r, \nu) \geqslant 0$. Радиус R возьмем достаточно малым, так чтобы поверхности σ_R и Σ не имели общих точек (рис. 30).

Рассмотрим область D, ограниченную поверхностями Σ, σ_R и заключенной между ними частью конуса K. В этой области $\frac{1}{r^{m-2}}$ есть гармоническая функция точки ξ, поэтому (формула (6.9) гл. 10)

$$\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Sigma + \int_{\sigma_R}\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\sigma_R + \int_K \frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi K = 0.$$

Через ν^* здесь обозначена нормаль к поверхности, внешняя по отношению к области D; так как $\cos(r, \nu) \geqslant 0$ на Σ, то на этой поверхности $\nu^* = \nu$.

На поверхности K $\cos(r, \nu^*) = 0$, так как r направлено по образующей, а ν^* к ней перпендикулярно. В силу формулы (4) интеграл по K исчезает, и

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_{\xi} \Sigma = - \int_{\sigma_R} \frac{\partial}{\partial \nu^*} \frac{1}{r^{m-2}} d_{\xi} \sigma_R.$$

На σ_R нормаль ν^* направлена против радиуса, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \nu^*} \frac{1}{r^{m-2}} = - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{m-2}} \Big|_{r=R} = \frac{m-2}{R^{m-1}}.$$

Теперь

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_{\xi} \Sigma = - \frac{m-2}{R^{m-1}} \int_{\sigma_R} d_{\xi} \sigma_R = -(m-2) \frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} =$$
$$= -(m-2)\,\omega_x(\Sigma),$$

что и требовалось доказать.

Если $\cos(r, \nu) \leqslant 0$, то $\nu^* = -\nu$ на Σ; рассуждая по-прежнему, получим в этом случае

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_{\xi} \Sigma = \frac{m-2}{R^{m-1}} \int_{\sigma_R} d_{\xi} \sigma_R = (m-2) \frac{|\sigma_R|}{R^{m-1}} =$$
$$= -(m-2)\,\omega_x(\Sigma).$$

Если поверхность Σ разбита на части $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, на каждой из которых $\cos(r, \nu)$ сохраняет знак, то, очевидно,

$$\sum |\omega_x(\Sigma_k)| = \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_{\xi} \Sigma. \tag{5}$$

Теорема 18.2.1. *Если Γ — конечная ляпуновская поверхность, то существует такая постоянная C, что*

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_{\xi} \Gamma \leqslant C, \qquad \forall x \in E_m. \tag{6}$$

Пусть d — радиус ляпуновской сферы для поверхности Γ. Может случиться, что расстояние от точки x до поверхности Γ не меньше, чем $\frac{d}{2}$. Тогда $r = |x - \xi| \geqslant \frac{d}{2}$, по формуле (4)

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| = (m-2) \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} \leqslant \frac{2^{m-1}(m-2)}{d^{m-1}}$$

и

$$\int\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi \Gamma \leqslant \frac{2^{m-1}(m-2)}{d^{m-1}} |\Gamma|. \tag{7}$$

Пусть теперь расстояние от точки x до поверхности Γ меньше, чем $\frac{d}{2}$. Существует точка $x_0 \in \Gamma$ такая, что

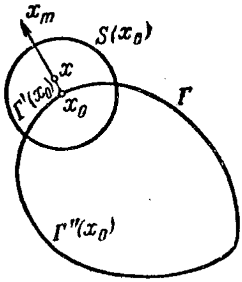

Рис. 31.

$$|x - x_0| = \min_{\xi \in \Gamma} |x - \xi| < \frac{d}{2}. \tag{8}$$

Как известно, точка x лежит на нормали n_0 к Γ, проведенной через точку x_0.

Построим ляпуновскую сферу $S(x_0)$. Обозначим соответственно через $\Gamma'(x_0)$ и $\Gamma''(x_0)$ части поверхности Γ, лежащие внутри и вне сферы $S(x_0)$ (рис. 31). Если $\xi \in \Gamma''(x_0)$, то $|\xi - x_0| \geqslant d$ и

$$|\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| > \frac{d}{2}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\Gamma''(x_0)} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi \Gamma \leqslant \frac{2^{m-1}(m-2)\,|\Gamma''(x_0)|}{d^{m-1}} < \frac{2^{m-1}(m-2)\,|\Gamma|}{d^{m-1}}. \tag{9}$$

Остается рассмотреть интеграл

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d_\xi \Gamma = (m-2) \int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d_\xi \Gamma.$$

Построим местную систему координат с началом в точке x_0; ось x_m направим по нормали к Γ в x_0. Положим $|x - x_0| = \delta$, $\delta < \frac{d}{2}$. Местные координаты точки x суть $(0, 0, \ldots, 0, \pm\delta)$. Обозначим через $G'(x_0)$ проекцию поверхности $\Gamma'(x_0)$ на касательную плоскость в точке x_0. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d_\xi\Gamma = \int\limits_{G'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-1}\cos(\nu, \xi_m)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{G'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}; \quad (10)$$

мы здесь воспользовались оценкой (1.7).

Положим $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2$; ρ есть расстояние от точки x_0 до проекции точки ξ на касательную плоскость в точке x_0. Из формулы

$$r^2 = \sum_{k=1}^{m} (\xi_k - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2 + (\xi_m - x_m)^2 = \rho^2 + (\xi_m \pm \delta)^2$$

вытекает, что $r \geqslant \rho$. С другой стороны, область $G'(x_0)$ определяется неравенством $r < d$. Но $r \geqslant \rho$, поэтому и $\rho < d$. Это значит, что область $G'(x_0)$ лежит в $(m-1)$-мерном шаре $\rho \leqslant d$, и из формулы (10) получаем

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d_\xi\Gamma \leqslant 2 \int\limits_{\rho < d} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}. \quad (11)$$

Если $\delta = 0$ (т. е. $x = x_0 \in \Gamma$), то по неравенству (1.17)

$$\frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} \leqslant \frac{c}{r^{m-1-\alpha}} \leqslant \frac{c}{\rho^{m-1-\alpha}}, \quad (12)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^{m-1}} d_\xi\Gamma \leqslant 2c \int\limits_{\rho < d} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}} = \text{const}. \quad (13)$$

Попутно мы доказали, что интеграл (6) существует при любом $x \in \Gamma$.

Пусть теперь $\delta > 0$. Имеем

$$|\cos(r, \nu)| = |\cos(r, \xi_k)\cos(\nu, \xi_k)| \leqslant \sqrt{3}(m-1)\, a r_0^\alpha +$$

$$+ \frac{|\xi_m \pm \delta|}{r} \leqslant c r_0^\alpha + a_1 \frac{r_0^{\alpha+1}}{r} + \frac{\delta}{r}.$$

Здесь $r_0 = |\xi - x_0|$; мы воспользовались оценками (1.12), (1.16) и (1.17). Теперь

$$2\int\limits_{\rho<d}\frac{|\cos(r,\nu)|}{r^{m-1}}d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_{m-1}\leqslant 2c\int\limits_{\rho<d}\frac{r_0^\alpha d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_{m-1}}{r^{m-1}}+$$
$$+2a_1\int\limits_{\rho<d}\frac{r_0^{\alpha+1}d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_{m-1}}{r^m}+2\delta\int\limits_{\rho<d}\frac{d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_{m-1}}{r^{m-1}}. \quad (14)$$

Оценим величины r_0 и r через ρ. Величина r_0 оценивается по формуле (1.15), так как в последней r есть расстояние от точки ξ до начала местной системы координат. Таким образом, $r_0 \leqslant 2\rho$. Чтобы оценить r, поступим так. Имеем

$$r^2=\rho^2+\xi_m^2+\delta^2\pm 2\xi_m\delta.$$

Далее $|2\xi_m\delta_m|\leqslant\frac{1}{2}\delta^2+2\xi_m^2$. Отсюда

$$r^2\geqslant\rho^2+\frac{1}{2}\delta^2-\xi_m^2.$$

По формуле (1.16_2)

$$|\xi_m|\leqslant a_1\rho^{\alpha+1}\leqslant a_1 d^\alpha\rho.$$

Радиус d можно взять сколь угодно малым. Пусть он таков, что

$$a_1 d^\alpha\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$r^2\geqslant\frac{1}{2}(\rho^2+\delta^2).$$

Теперь нетрудно оценить интегралы в (14) справа. Первые два оцениваются совсем просто

$$\int\limits_{\rho<d}\frac{r_0^\alpha d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_{m-1}}{r^{m-1}}\leqslant\int\limits_{\rho<d}\frac{2^{m-1+\alpha}\rho^\alpha d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{\frac{m-1}{2}}}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{m-1+\alpha}\int\limits_{\rho<d}\frac{d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}}=\text{const}$$

и аналогично

$$\int\limits_{\rho<d}\frac{r_0^{\alpha+1}d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_{m-1}}{r^m}\leqslant 2^{m+1+\alpha}\int\limits_{\rho<d}\frac{d\xi_1 d\xi_2\dots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}}=\text{const}.$$

Перейдем к оценке последнего интеграла. Используя оценку для r, находим

$$\delta \int\limits_{\rho<d} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^m} \leqslant 2^{\frac{m}{2}} \delta \int\limits_{\rho<d} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{\frac{m}{2}}} <$$

$$< 2^{\frac{m}{2}} \delta \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{\frac{m}{2}}};$$

E_{m-1} — евклидово пространство $m-1$ измерений. В последнем интеграле положим

$$\xi_k = \delta\eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1; \quad \sum_{k=1}^{m-1} \eta_k^2 = \rho_1^2.$$

Тогда

$$\delta \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{(\rho^2+\delta^2)^{\frac{m}{2}}} = \int\limits_{E_{m-1}} \frac{d\eta_1 d\eta_2 \ldots d\eta_{m-1}}{(\rho_1^2+1)^{\frac{m}{2}}}.$$

Последний интеграл сходится и равен некоторой постоянной.

Теперь ясно, что при $0<\delta<\frac{d}{2}$ интеграл (14) не превосходит некоторой постоянной. Но это утверждение верно и при $\delta=0$ (формула (13)). В таком случае существует такая постоянная C', что

$$\int\limits_{\Gamma'(x_0)} \frac{|\cos(r, \nu)|}{r^m} d_\xi\Gamma \leqslant C', \qquad 0 \leqslant \delta < \frac{d}{2}.$$

Приняв во внимание неравенство (9), видим, что теорема 18.2.1 верна и при $\delta<\frac{d}{2}$; при этом можно положить

$$C = \frac{2^{m-1}(m-2)|\Gamma|}{d^{m-1}} + C'.$$

§ 3. Потенциал двойного слоя и его прямое значение

В § 5 гл. 11 был определен потенциал двойного слоя как интеграл вида

$$W(x) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial\nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma, \tag{1}$$

где ν — внешняя нормаль к поверхности Γ в точке ξ. Было доказано, что $W(x)$ — функция, гармоническая как внутри, так и вне Γ; на самой поверхности Γ потенциал (1) не был определен.

Будем считать теперь, что Γ — замкнутая ляпуновская поверхность и что плотность $\sigma(\xi)$ непрерывна на этой поверхности. При таких условиях справедлива следующая теорема.

Теорема 18.3.1. *Потенциал двойного слоя* (1) *имеет вполне определенное значение при любом x, лежащем на поверхности Γ. Это значение непрерывно меняется, когда x пробегает поверхность Γ.*

То, что интеграл (1) существует, если $x \in \Gamma$, доказывается просто. Плотность $\sigma(\xi)$ непрерывна на замкнутом компактном множестве Γ и потому ограничена. Пусть $|\sigma(\xi)| \leqslant M = \text{const}$. Тогда

$$\left|\sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right| \leqslant M\left|\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right|. \tag{2}$$

В предыдущем параграфе было доказано, что интеграл (2.6) существует при $x \in \Gamma$, иначе говоря, что при $x \in \Gamma$ функция $\left|\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right|$ суммируема на Γ. Но тогда суммируема на Γ и левая часть неравенства (2) и, следовательно, для указанных x интеграл (1) существует.

Докажем теперь, что при $x \in \Gamma$ интеграл (1) непрерывен. Оценка (1.17) показывает, что потенциал (1) есть интегральный оператор со слабой особенностью над функцией $\sigma(\xi)$; ядро этого оператора

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{(m-2)\cos(r, \nu)}{r^{m-1}}$$

представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{(m-2)\,r^{-\frac{\alpha}{2}}\cos(r, \nu)}{r^{m-1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

Обозначая числитель через $A(x, \xi)$, видим, что при $x \neq \xi$ функция $A(x, \xi)$ непрерывна на Γ. Если $x \in \Gamma$ и $x \to \xi$, то в силу неравенства (1.17) $A(x, \xi) \to 0$. Положим $A(x, x) = 0$, тогда $A(x, \xi)$ непрерывна на Γ при любом положении точек x и ξ. По теореме 7.4.1 интегральный оператор (1) переводит непрерывную функцию в непрерывную. Но $\sigma(\xi)$ по предположению непрерывна, а тогда и потенциал двойного слоя непрерывно меняется, когда точка x движется по поверхности Г. Теорема доказана.

Значение потенциала двойного слоя при $x \in \Gamma$ называется *прямым значением* этого потенциала. Теорему 18.3.1 можно, очевидно, сформулировать так:

Если Г *— замкнутая ляпуновская поверхность и плотность* $\sigma(\xi)$ *непрерывна на* Г, *то прямое значение потенциала двойного слоя* (1) *непрерывно на* Г.

§ 4. Интеграл Гаусса

Так называется потенциал двойного слоя, плотность которого тождественно равна единице:

$$W_0(x) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial\nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi\Gamma. \tag{1}$$

Здесь Г — замкнутая поверхность и ν — внешняя к ней нормаль в точке ξ. Для этого интеграла справедлива следующая теорема.

Теорема 18.4.1. *Если поверхность* Г *замкнутая ляпуновская, то значения интеграла Гаусса определяются формулой*

$$W_0(x) = \begin{cases} -(m-2)\,|S_1| = -\dfrac{2(m-2)\,\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} & \text{для } x \text{ внутри } \Gamma, \\ 0 & \text{для } x \text{ вне } \Gamma, \\ -\dfrac{m-2}{2}\,|S_1| = -\dfrac{(m-2)\,\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} & \text{для } x \in \Gamma. \end{cases} \tag{2}$$

Сразу же заметим, что первые два равенства (2) верны для любой замкнутой кусочно гладкой поверхности Г, — это мы и будем доказывать.

Итак, пусть Γ — кусочно гладкая замкнутая поверхность и пусть точка x лежит внутри Γ. Опишем вокруг этой точки сферу S_ε радиуса ε; последний возьмем достаточно малым, так чтобы сфера S_ε лежала внутри Γ (рис. 32). В области, ограниченной поверхностями Γ и S_ε, функция $\frac{1}{r^{m-2}}$ гармонична, поэтому в силу формулы (6.9) гл. 10

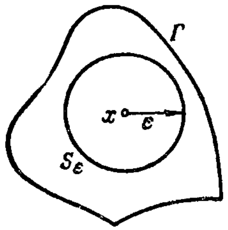

Рис. 32.

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\Gamma + \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,dS_\varepsilon = 0. \tag{3}$$

На S_ε нормаль ν направлена против радиуса. Отсюда

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,dS_\varepsilon = \int_{S_\varepsilon} \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}}\,dS_\varepsilon = (m-2)\,\frac{|S_\varepsilon|}{\varepsilon^{m-1}} = (m-2)\,|S_1|, \tag{4}$$

и первое равенство (2) доказано. Еще проще доказывается второе равенство (2): если точка x лежит вне Γ, то функция $\frac{1}{r^{m-2}}$ гармонична внутри Γ и

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\Gamma = 0.$$

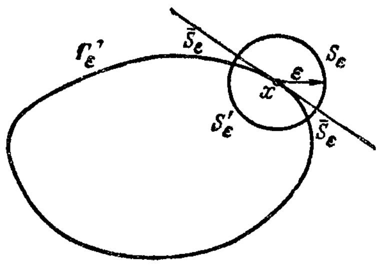

Рис. 33.

Займемся третьим равенством (2). Пусть Γ — замкнутая ляпуновская поверхность и $x \in \Gamma$. Речь идет о прямом значении интеграла Гаусса, существование которого вытекает из теоремы предшествующего параграфа. Остается это значение вычислить, что мы сделаем следующим образом.

Возьмем число ε, $0 < \varepsilon < d$, и опишем вокруг точки $x \in \Gamma$ сферу S_ε радиуса ε. Часть поверхности Γ, лежащую вне сферы, обозначим через Γ'_ε, а часть сферы, лежащую внутри Γ, — через S'_ε (рис. 33). Так как интеграл Гаусса сходится при $x \in \Gamma$, то

$$W_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma. \tag{5}$$

Точка x лежит вне области, ограниченной поверхностями Γ'_ε и S'_ε; в этой области функция $\frac{1}{r^{m-2}}$ гармонична и, следовательно,

$$\int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma + \int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S_\varepsilon = 0.$$

Но тогда

$$W_0(x) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S_\varepsilon. \tag{6}$$

В интеграле (6) нормаль ν направлена против радиуса, поэтому

$$\int_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi S_\varepsilon = \frac{m-2}{\varepsilon^{m-1}} \int_{S'_\varepsilon} d_\xi S_\varepsilon = (m-2) \frac{|S'_\varepsilon|}{\varepsilon^{m-1}}. \tag{7}$$

При ε достаточно малом поверхность S'_ε близка к полусфере, опирающейся на касательную плоскость (рис. 33); величина $|S'_\varepsilon|$ отличается от площади поверхности полусферы $\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$ на площадь (взятую с тем или иным знаком) поверхности пояска $\overline{S}_\varepsilon$, заключенного между Γ и касательной плоскостью. Высота этого пояска равна максимальному значению $|\varepsilon_m|$ в точках пересечения поверхности Γ и сферы S_ε. Так как $\varepsilon < d$, то эти точки лежат внутри ляпуновской сферы и для них верна оценка (1.16_3)

$$|\xi_m| \leqslant a_1 r^{\varkappa+1} = a_1 \varepsilon^{\varkappa+1}.$$

Отсюда нетрудно усмотреть (подробности вывода предоставляем читателю), что площадь поверхности пояска имеет порядок $O(\varepsilon^{m-1+\alpha})$. Теперь ясно, что

$$\int\limits_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi S_\varepsilon = \frac{(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} + O(\varepsilon^\alpha),$$

и, следовательно,

$$W_0(x) = \frac{(m-2)\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, \qquad x \in \Gamma.$$

Теорема доказана полностью.

§ 5. Предельные значения потенциала двойного слоя

На примере интеграла Гаусса ясно, что, вообще говоря, потенциал двойного слоя терпит разрыв, когда точка x пересекает поверхность Γ. Вместе с тем, как мы сейчас увидим, при довольно широких условиях существуют пределы значений потенциала двойного слоя, когда точка x стремится к произвольной точке $x_0 \in \Gamma$ либо изнутри, либо извне Γ. Будем обозначать через $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ соответственно предельные значения потенциала двойного слоя $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$, когда $x \to x_0$ изнутри, соответственно извне Γ. Прямое значение этого потенциала в точке x_0 обозначим через $\overline{W(x_0)}$.

Теорема 18.5.1. *Пусть Γ — ляпуновская поверхность и $\sigma(\xi)$ — плотность, непрерывная на Γ. Тогда для потенциала двойного слоя* (3.1) *справедливы следующие предельные соотношения*:

$$\left.\begin{aligned} W_i(x_0) &= -\frac{(m-2)|S_1|}{2}\sigma(x_0) + \overline{W(x_0)}, \\ W_e(x_0) &= \frac{(m-2)|S_1|}{2}\sigma(x_0) + \overline{W(x_0)}, \end{aligned}\right\} x_0 \in \Gamma. \tag{1}$$

Формулу (3.1) перепишем так:

$$W(x) = W_1(x) + \sigma(x_0)\, W_0(x). \tag{2}$$

Здесь W_0 — интеграл Гаусса, а

$$W_1(x) = \int_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial\nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma; \tag{3}$$

$W_1(x)$ есть потенциал двойного слоя, плотность которого, $\sigma(\xi) - \sigma(x_0)$, обращается в нуль при $\xi = x_0$. Докажем, что этот потенциал непрерывен в точке x_0.

Из точки x_0 как из центра опишем сферу некоторого радиуса η; тем самым поверхность Γ разобьется на две части: $\Gamma = \Gamma' \bigcup \Gamma''$, из которых Γ' лежит внутри сферы, а Γ'' — вне ее. Соответственно потенциал $W_1(x)$ тоже распадется на два:

$$W_1(x) = W_1'(x) + W_1''(x),$$

где

$$W_1'(x) = \int_{\Gamma'} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial\nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma,$$

$$W_1''(x) = \int_{\Gamma''} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial\nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma.$$

Напишем очевидное неравенство

$$|W_1(x) - \overline{W_1(x_0)}| \leqslant |W_1'(x)| + |W_1'(x_0)| + \\ + |W_1''(x) - \overline{W_1''(x_0)}|; \tag{4}$$

черта сверху означает прямое значение соответствующего потенциала.

Оценим правую часть неравенства (4). Выберем η так, чтобы при $|\xi - x_0| < \eta$ выполнялось неравенство

$$|\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3C},$$

где ε — произвольно заданное положительное число, а C — постоянная, входящая в неравенство (2.6). Такой выбор η возможен, потому что плотность $\sigma(\xi)$ непрерывна. Тогда при любом $x \in E_m$ имеем

$$|W_1'(x)| \leqslant \int_{\Gamma'} |\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| \left| \frac{\partial}{\partial\nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d\Gamma < \\ < \frac{\varepsilon}{3C} \int_{\Gamma'} \left| \frac{\partial}{\partial\nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d\Gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{3C} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial\nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right| d\Gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

В частности,

$$|\overline{W_1'(x_0)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Зафиксируем радиус η и будем считать, что точка x достаточно близка к x_0, именно, что $|x - x_0| \leqslant \frac{1}{2}\eta$. Тогда на поверхности Γ''

$$r = |\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}\eta;$$

подынтегральная функция в интеграле $W_1''(x)$ непрерывна и сам интеграл непрерывен. В этом случае существует такое число $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ необходимо

$$|W_1''(x) - W_1''(x_0)| = |W_1''(x) - \overline{W_1''(x_0)}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Из соотношений (4) — (7) следует, что

$$|W_1(x) - \overline{W_1(x_0)}| < \varepsilon, \text{ если } |x - x_0| < \delta, \tag{8}$$

т. е. что потенциал $W_1(x)$ непрерывен в точке x_0. Если это так, то в указанной точке совпадают предельные значения потенциала $W_1(x)$ и его прямое значение

$$W_{1i}(x_0) = W_{1e}(x_0) = \overline{W_1(x_0)}. \tag{9}$$

Формула (4.2) показывает, что предельные значения интеграла Гаусса $W_0(x)$ существуют и равны соответственно

$$W_{0i}(x_0) = -(m-2)|S_1|, \qquad W_{0e}(x_0) = 0,$$

а прямое значение

$$\overline{W_0(x_0)} = -\frac{m-2}{2}|S_1|.$$

Теперь из формул (2) и (9) следует, что предельные значения $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ существуют, причем

$$\begin{aligned} W_i(x_0) = \overline{W_1(x_0)} + \sigma(x_0) W_{0i}(x_0) = \\ = \overline{W_1(x_0)} - (m-2)|S_1|\sigma(x_0), \end{aligned} \tag{10}$$

$$W_e(x_0) = \overline{W_1(x_0)} + \sigma(x_0) W_{0e}(x_0) = \overline{W_1(x_0)}.$$

Далее

$$\overline{W_1(x_0)} = \int\limits_{\Gamma} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma =$$

$$= \overline{W(x_0)} + \frac{(m-2)\,|S_1|}{2} \sigma(x_0), \quad r_0 = |\xi - x_0|, \tag{11}$$

и формулы (1) сразу вытекают из соотношений (10) и (11). Теорема доказана.

Из формул (1) вытекает простое соотношение, связывающее плотность потенциала двойного слоя с его предельными значениями

$$W_i(x_0) - W_e(x_0) = -(m-2)\,|S_1|\,\sigma(x_0). \tag{12}$$

Замечание 1. Если плотность $\sigma(\xi)$ на Γ не непрерывна, а лишь суммируема, то, как оказывается, предельные значения потенциала двойного слоя существуют почти всюду на Γ и выражаются по тем же формулам (1).

Замечание 2. Для нормальной производной потенциала двойного слоя верна следующая теорема Ляпунова. Пусть Γ — ляпуновская поверхность и плотность $\sigma(\xi)$ на Γ непрерывна. Если нормальная производная потенциала двойного слоя имеет предел, когда $x \to x_0 \in \Gamma$ изнутри (извне), то существует равный ему предел той же производной извне (изнутри).

Теорема 18.5.2. *Если поверхность замкнутая ляпуновская, а плотность на этой поверхности непрерывна, то потенциал двойного слоя равномерно стремится к своим предельным значениям как изнутри, так и извне поверхности.*

Сохраним обозначения, использованные при доказательстве теоремы 18.5.1. Плотность $\sigma(\xi)$ непрерывна, а потому и равномерно непрерывна на Γ. В таком случае радиус η можно выбрать независимо от положения точки x_0 на поверхности Γ. Далее, потенциал $W_1''(x)$ на самом деле есть функция двух точек: точки $x \in E_m$ и точки $x_0 \in \Gamma$. Если радиус η фиксирован, то на ограниченном замкнутом множестве, определяемом соотношениями

$$x_0 \in \Gamma, \qquad |x - x_0| \leqslant \frac{1}{2}\eta,$$

упомянутая функция непрерывна и, следовательно, равномерно непрерывна, поэтому число δ, фигурирующее в неравенстве (8), можно выбрать зависящим только от ε. То же соотношение (8) показывает тогда, что $W_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} W_1(x_0)$ равномерно относительно $x_0 \in \Gamma$.

Наконец, потенциал $W_0(x)$ постоянен как внутри, так и вне Γ, поэтому если $x \to x_0$ либо изнутри, либо извне Γ, то $W_0(x)$ стремится к своему предельному значению равномерно.

Теперь из формулы (2) видно, что тем же свойством обладает и потенциал $W(x)$.

§ 6. Непрерывность потенциала простого слоя

Теорема 18.6.1. *Если Γ — замкнутая ляпуновская поверхность, а плотность $\mu(\xi)$ измерима и ограничена, то потенциал простого слоя*

$$V(x) = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma \tag{1}$$

непрерывен во всем пространстве E_m.

Непрерывность потенциала (1) при $x \overline{\in} \Gamma$ очевидна, и остается рассмотреть только случай $x \in \Gamma$.

Докажем прежде всего, что при $x \in \Gamma$ интеграл (1) сходится и, следовательно, потенциал простого слоя $V(x)$ на поверхности Γ определен. Построим ляпуновскую сферу $S(x)$, и пусть $\Gamma'(x)$ — часть Γ, заключенная внутри сферы $S(x)$. Имеем

$$V(x) = \int\limits_{\Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma + \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma.$$

Во втором интеграле подынтегральная функция непрерывна, и достаточно рассмотреть первый интеграл. Введем местную систему координат $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ с центром в точке x и с осью ξ_m, направленной по нормали к Γ в этой точке. Положим

$$\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2.$$

Обозначая через $G'(x)$ проекцию поверхности $\Gamma'(x)$ на плоскость $\xi_m = 0$, касательную к Γ в точке x, имеем

$$\int\limits_{\Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d\xi = \int\limits_{G'(x)} \mu(\xi) \frac{d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_{m-1}}{r^{m-2} \cos(\nu, \xi_m)}; \tag{2}$$

если $|\mu(\xi)| \leqslant M = \text{const}$, то подынтегральная функция не превосходит величины

$$\frac{2M}{\rho^{m-2}};$$

эта оценка показывает, что интеграл (2) сходится.

Докажем теперь, что в любой точке $x \in \Gamma$ потенциал (1) непрерывен. Пусть y — произвольная точка пространства E_m. Вокруг точки x опишем сферу радиуса $\eta < d$; обозначим через Γ'_η и Γ''_η части поверхности Γ, заключенные соответственно внутри и вне сферы. Интеграл (1) разобьем на два, взятые по Γ'_η и Γ''_η; эти интегралы обозначим через V' и V''. Тогда, очевидно,

$$|V(y) - V(x)| \leqslant |V'(y)| + \\ + |V'(x)| + |V''(y) - V''(x)|. \quad (3)$$

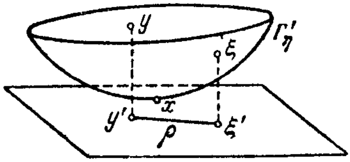

Рис. 34.

Оценим первое слагаемое в (3). Так как $\eta < d$, то $\Gamma'_\eta \subset \Gamma'(x)$, и на Γ'_η можно ввести местные координаты с началом в x. Обозначим через y' проекцию точки y на плоскость, касательную в x (рис. 34). Местные координаты точки y' пусть будут $(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, 0)$. Положим

$$\rho^2 = \sum_{k=1}^{m-1} (\xi_k - y_k)^2;$$

ρ есть длина проекции отрезка, соединяющего точки ξ и y, на плоскость, касательную в x. Ясно, что $\rho \leqslant |\xi - y|$. Далее

$$|V'(y)| = \left| \int_{\Gamma'_\eta} \mu(\xi) \frac{d\xi}{|\xi - y|^{m-2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{G'_\eta} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-2} \cos(\nu, \xi_m)} \leqslant 2M \int_{G'_\eta} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_m}{\rho^{m-2}};$$

здесь G'_η — проекция поверхности Γ'_η на касательную плоскость в точке x.

Возьмем точку y столь близкой к x, чтобы $|y-x|<\frac{1}{2}\eta$. Тогда если $\xi\in\Gamma'_\eta$, то

$$\rho\leqslant|\xi-y|\leqslant|\xi-x|+|x-y|<\frac{3}{2}\eta.$$

Это значит, что область G'_η целиком лежит в $(m-1)$-мерном шаре $\rho<\frac{3}{2}\eta$ и, следовательно,

$$|V'(y)|\leqslant 2M\int\limits_{\rho<\frac{3}{2}\eta}\frac{d\xi_1\ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-2}}. \tag{4}$$

В $(m-1)$-мерном пространстве введем сферические координаты с центром в точке y'. Тогда $d\xi_1\ldots d\xi_{m-1}=\rho^{m-2}\,d\rho\,d\sigma_1$, где мы обозначили через σ_1 единичную сферу в $(m-1)$-мерном пространстве, а через $d\sigma_1$ — элемент площади ее поверхности. Формула (4) принимает вид

$$|V'(y)|\leqslant 2M\int\limits_{\sigma_1}d\sigma_1\int\limits_0^{\frac{3}{2}\eta}d\rho=3M\,|\sigma_1|\,\eta.$$

Пусть ε — произвольно заданное положительное число. Возьмем $\eta=\frac{\varepsilon}{9M\,|\sigma_1|}$. Тогда если $|y-x|<\frac{\varepsilon}{18M\,|\sigma_1|}$, то $|V'(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Последнее неравенство, очевидно, верно и для $y=x$:

$$|V'(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь неравенство (3) дает

$$|V(y)-V(x)|<\frac{2}{3}\varepsilon+|V''(y)-V''(x)|.$$

Выберем число $\delta>0$ столь малым, чтобы $\delta<\frac{\varepsilon}{18M\,|\sigma_1|}$ и чтобы при $|y-x|<\delta$ было $|V''(y)-V''(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $|V(y)-V(x)|<\varepsilon$. Теорема доказана.

§ 7. Нормальная производная потенциала простого слоя

По-прежнему будем рассматривать потенциал простого слоя (6.1), предполагая Γ замкнутой ляпуновской поверхностью.

Пусть x — произвольная точка пространства E_m и n — внешняя нормаль к поверхности Γ, проходящая через точку x. Если $x \overline{\in} \Gamma$, то можно вычислить производную потенциала (6.1) по направлению нормали n, просто дифференцируя под знаком интеграла

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma. \tag{1}$$

Выкладка, аналогичная той, которая была проделана в § 2, приводит к формуле

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{m-2}{r^{m-1}} \cos(r, n). \tag{2}$$

Отсюда

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n} = (m-2) \int\limits_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}} d_\xi \Gamma. \tag{3}$$

Пусть $x \in \Gamma$. Если плотность $\mu(\xi)$ измерима и ограничена, $|\mu(\xi)| \leqslant M = \text{const}$, то интеграл (3) сходится. Докажем это. Выделим часть $\Gamma'(x)$ поверхности Γ, лежащую внутри ляпуновской сферы $S'(x)$. Достаточно доказать, что сходится интеграл

$$\int\limits_{\Gamma'(x)} \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}} d_\xi \Gamma.$$

Введя местные координаты с началом в точке x, приведем последний интеграл к виду

$$\int\limits_{\sigma'(x)} \mu(\xi) \frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}}{\cos(\nu, \xi_m)}; \tag{4}$$

здесь $\sigma'(x)$ — проекция $\Gamma'(x)$ на касательную плоскость в точке x. Подынтегральная функция в (4) ограничена величиной

$$\frac{2M}{\rho^{m-1}} |\cos(r, n)|, \qquad \rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2.$$

Далее

$$\cos(r, n) = \cos(r, \xi_m) = \frac{\xi_m}{r};$$

по неравенствам (1.16) и (1.15)

$$|\cos(n, r)| \leqslant a_1 r^\alpha \leqslant 2^\alpha a_1 \rho^\alpha, \tag{5}$$

и для подынтегральной функции в (4) окончательно получаем оценку

$$\frac{2^\alpha M a_1}{\rho^{m-1-\alpha}},$$

которая показывает, что интеграл (3) сходится.

Как мы увидим несколько ниже, значение интеграла (3) при $x \in \Gamma$ нельзя рассматривать как нормальную производную потенциала (6.1). Значение интеграла (3) при $x \in \Gamma$ называется *прямым значением нормальной производной потенциала простого слоя* и обозначается символом $\overline{\frac{\partial V(x)}{\partial n}}$.

Будем обозначать через $\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i}$ и $\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e}$ предельные значения (если они существуют) нормальной производной $\frac{\partial V(x)}{\partial n}$, когда $x \to x_0 \in \Gamma$ изнутри, соответственно извне Γ.

Теорема 18.7.1. *Если Γ — замкнутая ляпуновская поверхность, а плотность $\mu(\xi)$ непрерывна на Γ, то на поверхности Γ потенциал простого слоя* (6.1) *имеет правильную нормальную производную как изнутри, так и извне Γ. Предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя выражаются формулами*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i} &= \frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\,\mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}, \\ \frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e} &= -\frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\,\mu(x_0) + \overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Введем в рассмотрение потенциал двойного слоя с плотностью

$$W(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}\, d_\xi \Gamma \tag{7}$$

и составим сумму

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n}+W(x)=\int\limits_{\Gamma}\mu(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right]d_\xi\Gamma.$$

Докажем, что эта сумма меняется непрерывно, когда точка x пересекает поверхность Г, двигаясь по нормали к ней.

Пусть x_0 — точка на поверхности Г, n — нормаль к Г в этой точке и x — произвольная точка на нормали n, лежащая внутри или вне Г. Вокруг точки x_0 опишем сферу радиуса $\eta<d$ и обозначим через Γ'_η часть поверхности Г, расположенную внутри упомянутой сферы. Рассуждения предшествующего параграфа показывают, что достаточно установить такой факт: при достаточно малом η справедливо неравенство

$$A=\left|\int\limits_{\Gamma'_\eta}\mu(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right]d_\xi\Gamma\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

где ε — произвольно заданное положительное число. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}=\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\xi_k-x_k}{r}\cos(n,\ \xi_k),$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}=\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\xi_k-x_k}{r}\cos(\nu,\ \xi_k).$$

Введем местную систему координат с центром в точке x_0. В этой системе $x_k=0$, $\cos(n,\ \xi_k)=0$ при $1\leqslant k\leqslant m-1$ и $\cos(n,\ \xi_m)=1$. Но тогда

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}=$$
$$=\frac{m-2}{r^{m-1}}\frac{\xi_m-x_m}{r}\left[1-\cos(\nu,\ \xi_m)\right]-\frac{m-2}{r^{m-1}}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\xi_k}{r}\cos(\nu,\ \xi_k).$$

Далее по неравенствам (1.12) и (1.6)

$$|\cos(\nu,\ \xi_k)|\leqslant\sqrt{3}\,ar_0^\alpha,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,$$

$$\cos(\nu,\ \xi_m)\geqslant 1-\frac{a^2r_0^{2\alpha}}{2},$$

где $r_0=|\xi-x_0|$. Из последнего неравенства следует, что

$$1-\cos(\nu,\ \xi_m)\leqslant\frac{a^2r_0^{2\alpha}}{2}<\frac{ar_0^\alpha}{2}.$$

Теперь легко видеть, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right|\leqslant\frac{c_1r_0^\alpha}{r^{m-1}},\qquad c_1=\text{const}. \tag{8}$$

Положим $\rho^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_{m-1}^2$ и обозначим через G'_η проекцию поверхности Γ'_η на касательную плоскость в точке x_0. По формуле (1.15) $r_0\leqslant 2\rho$. С другой стороны,

$$r^2=\sum_{k=1}^{m}(\xi_k-x_k)^2=\sum_{k=1}^{m-1}\xi_k^2+(\xi_m-x_m)^2\geqslant\rho^2.$$

Отсюда $r\geqslant\rho$. Теперь из формулы (8) следует

$$\left|\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\right|\leqslant\frac{2^\alpha c_1}{\rho^{m-1-\alpha}}. \tag{9}$$

Пусть $|\mu(\xi)|\leqslant M$. Тогда

$$A\leqslant 2^\alpha c_1M\int\limits_{\Gamma'_\eta}\frac{d_\xi\Gamma}{\rho^{m-1-\alpha}}=2^\alpha c_1M\int\limits_{G'_\eta}\frac{d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}\cos(\nu,\xi_m)}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{\alpha+1}c_1M\int\limits_{G'_\eta}\frac{d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}}.$$

В области G'_η верно неравенство $\rho\leqslant r\leqslant\eta$, поэтому G'_η целиком лежит в шаре $\rho\leqslant\eta$ и, следовательно,

$$A\leqslant 2^{\alpha+1}c_1M\int\limits_{\rho<\eta}\frac{d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_{m-1}}{\rho^{m-1-\alpha}}=2^{\alpha+1}c_1M\int\limits_{\sigma_1}d\sigma_1\int\limits_0^\eta\rho^{\alpha-1}\,d\rho=$$
$$=\frac{2^{\alpha+1}c_1M\,|\sigma_1|}{\alpha}\eta^\alpha;$$

здесь σ_1 — единичная сфера в $(m-1)$-мерном пространстве. Очевидно, достаточно взять

$$\eta<\left[\frac{\alpha\varepsilon}{3\cdot 2^{\alpha+1}c_1M\,|\sigma_1|}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

и мы получим, что

$$A<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

Повторяя рассуждения §§ 3 и 6, мы на основании оценки (10) убедимся, что сумма $\dfrac{\partial V(x)}{\partial n}+W(x)$ непрерывна при переходе точки x через поверхность Г. Но тогда для этой суммы предельные значения и прямое значение совпадают

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i}+W_i(x_0)=\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e}+W_e(x_0)=\overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}+\overline{W(x_0)}.$$

Отсюда следуют искомые равенства

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i}=\overline{W(x_0)}-W_i(x_0)+\overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}=\frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\mu(x_0)+\overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}},$$

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e}=\overline{W}(x_0)-W_e(x_0)+\overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}=-\frac{(m-2)\,|S_1|}{2}\mu(x_0)+\overline{\frac{\partial V(x_0)}{\partial n}}.$$

Вычитая равенства (6), получим формулу, связывающую плотность потенциала простого слоя с предельными значениями его нормальной производной

$$\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_i}-\frac{\partial V(x_0)}{\partial n_e}=(m-2)\,|S_1|\,\mu(x_0). \tag{11}$$

Остается доказать, что $\frac{\partial V(x)}{\partial n_i}$ и $\frac{\partial V(x)}{\partial n_e}$ суть правильные нормальные производные. Имеем

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n}=\left[\frac{\partial V(x)}{\partial n}+W(x)\right]-W(x). \tag{12}$$

По доказанному выражение в квадратных скобках непрерывно и потому равномерно стремится к своему предельному значению; на этот раз безразлично, стремится точка x к точке $x_0\in\Gamma$ изнутри или извне Г. Далее, если $x\to x_0$ либо изнутри, либо извне Г, то по теореме 18.5.2 потенциал двойного слоя $W(x)$ стремится к своему предельному значению равномерно. В силу формулы (12) этим же свойством обладает и $\frac{\partial V(x)}{\partial n}$. По определению (§ 2, гл. 12) потенциал (6.1) имеет правильную нормальную производную как изнутри, так и извне Г.

§ 8. Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям

Рассмотрим замкнутую ляпуновскую поверхность, ограничивающую две области: Ω — внутреннюю и Ω' — внешнюю. Поставим одновременно четыре краевые задачи для однородного уравнения Лапласа: найти функцию $u(x)$, гармоническую в области Ω или Ω' и удовлетворяющую либо условию задачи Дирихле

$$u|_\Gamma = \varphi(x), \tag{1}$$

либо условию задачи Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \psi(x). \tag{2}$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будем считать непрерывными на Γ.

Внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле будем обозначать через D_i и D_e, а внутреннюю и внешнюю задачи Неймана — через N_i и N_e соответственно. Задачи эти будем решать, отыскивая решение в виде некоторого потенциала. Точнее, решение задачи Дирихле будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma, \tag{3}$$

решение задачи Неймана — в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_\Gamma \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi\Gamma; \tag{4}$$

потребуем при этом, чтобы искомые плотности $\sigma(\xi)$ и $\mu(\xi)$ были непрерывны на Γ.

При таком представлении решения мы автоматически получаем функции, гармонические в соответствующей области, и нам остается позаботиться лишь о краевых условиях. Заметим, однако, что в случае задачи D_e нас ожидают некоторые трудности: решение на бесконечности должно иметь порядок $O(|x|^{2-m})$, а потенциал (3) убывает быстрее — он имеет порядок $O(|x|^{1-m})$ и, следовательно, не всякую гармоническую в Ω' функцию можно представить в виде (3).

Рассмотрим, например, внутреннюю задачу Дирихле D_i. Краевое условие (1) следует понимать так: если $x \in \Omega$ и

$x \to x_0 \in \Gamma$, то

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0). \tag{5}$$

Но $u(x)$ есть потенциал двойного слоя, плотность которого, по предположению, непрерывна. В таком случае по формуле (5.1)

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = -\frac{(m-2)|S_1|}{2}\sigma(x_0) + \int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|\xi - x_0|^{m-2}}\,d_\xi\Gamma.$$

Подставив это в формулу (5), заменив обозначение x_0 на x и разделив на $-\frac{(m-2)|S_1|}{2}$, получим интегральное уравнение для неизвестной функции $\sigma(x)$

$$\sigma(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = -\frac{2}{(m-2)|S_1|}\varphi(x), \quad x \in \Gamma.$$

Используя формулы (5.1), (7.6) для предельных значений, а также краевые условия (1) и (2), получим интегральные уравнения для трех остальных задач. Для удобства выпишем все четыре интегральные уравнения вместе:

$$(D_i) \quad \sigma(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = -\frac{2}{(m-2)|S_1|}\varphi(x), \tag{6}$$

$$(D_e) \quad \sigma(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\varphi(x), \tag{7}$$

$$(N_i) \quad \mu(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\psi(x), \tag{8}$$

$$(N_e) \quad \mu(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = -\frac{2}{(m-2)|S_1|}\psi(x). \tag{9}$$

В уравнениях (6) — (9) $x \in \Gamma$.

Отметим следующие свойства уравнений (6) — (9).

1. Оценка (1.17), а также формулы (7.2) и (7.5) показывают, что уравнения (6) — (9) суть интегральные уравнения со слабой особенностью.

2. Ядра

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}}, \quad \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}}$$

получаются одно из другого перестановкой аргументов. Так как эти ядра еще и вещественные, то они сопряженные (см. § 1 гл. 8). Отсюда следует, что уравнения (6) и (9), а также уравнения (7) и (8) — попарно сопряженные.

3. Любое суммируемое с квадратом решение каждого из уравнений (6) — (9) непрерывно на Γ. Действительно, как показано в § 3,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{A(x, \xi)}{r^{m-1-\frac{\alpha}{2}}},$$

где функция $A(x, \xi)$ на Γ непрерывна. Переставив аргументы x и ξ, получим

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} = \frac{A(\xi, x)}{r^{m-1-\frac{\alpha}{2}}},$$

и функция $A(\xi, x)$ тоже непрерывна на Γ. Напомним еще, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны по предположению. Теперь наше утверждение вытекает из теоремы 8.6.1.

Уравнения (6) — (9) обычно называют *интегральными уравнениями теории потенциала.*

§ 9. Задачи Дирихле и Неймана в полупространстве

До сих пор мы не давали определения функции, гармонической в полупространстве или, вообще, в области с бесконечной границей. Распространим на этот случай определение, данное для конечной области: в области с бесконечной границей функция называется гармонической, если в этой области функция имеет вторые производные, непрерывные в каждой точке, и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Полученные в предшествующем параграфе интегральные уравнения позволяют решить задачи Дирихле и Неймана для однородного уравнения Лапласа в полупространстве; надо только потребовать, чтобы заданные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с определенной скоростью убывали на бесконечности. Точнее мы об этом скажем чуть ниже.

При некоторых естественных ограничениях теоремы о потенциалах, доказанные выше, распространяются и на случай, когда поверхность Г бесконечная. Так, если Г есть гиперплоскость $\xi_m = 0$, то надо дополнительно потребовать, чтобы плотность $\sigma(\xi)$ потенциала двойного слоя имела на бесконечности оценку

$$\sigma(\xi) = O(\rho^{-\beta}), \quad \rho^2 = \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2, \quad \beta = \text{const} > 0, \tag{1}$$

а плотность $\mu(\xi)$ потенциала простого слоя — оценку

$$\mu(\xi) = O(\rho^{-\beta-1}); \tag{2}$$

при этих оценках интегралы (3.1) и (6.1) сходятся.

В случае полупространства достаточно говорить только о внутренней задаче и рассматривать только интегральные уравнения (8.6) и (8.8). По формуле (2.4) ядро уравнения (6) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}} = -\frac{(m-2)}{r^{m-1}}\cos(r, \nu).$$

В данном случае нормаль ν, внешняя к полупространству $\xi_m > 0$, направлена против оси ξ_m; если обе точки x и ξ лежат на плоскости $\xi_m = 0$, то на той же плоскости лежит и вектор r. Но тогда $\cos(r, \nu) \equiv 0$ и ядро уравнения (8.6) есть тождественный нуль. Таково же и сопряженное с ним ядро в уравнении (8.8). Теперь эти уравнения сразу дают

$$\sigma(x) = -\frac{2}{(m-2)|S_1|}\varphi(x), \qquad \mu(x) = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\psi(x).$$

Решение задачи Дирихле для полупространства $x_m > 0$ дается формулой

$$u(x) = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_m}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi_1\ldots d\xi_{m-1}, \tag{3}$$

а решение задачи Неймана — формулой

$$u(x) = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi_1\ldots d\xi_{m-1}; \tag{4}$$

формулы (3) и (4) пригодны, если на бесконечности

$$\varphi(\xi)=O(\rho^{-\beta}),\quad \psi(\xi)=O(\rho^{-\beta-1}),\quad \beta=\mathrm{const}>0.$$

Выполнив дифференцирование в формуле (3), мы приведем ее к виду

$$u(x)=\frac{2x_m}{|S_1|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{r^m}\,d\xi_1\ldots d\xi_{m-1}, \tag{3_1}$$

$$r^2=\sum_{k=1}^{m-1}(\xi_k-x_k)^2+x_m^2.$$

§ 10. Исследование первой пары сопряженных уравнений

Дальнейшее исследование интегральных уравнений теории потенциала мы проведем в предположении, что поверхность Γ замкнутая и регулярная. Заметим, что регулярная поверхность обязательно ляпуновская, причем показатель $\alpha=1$ (докажите!).

В настоящем параграфе мы докажем, что интегральные уравнения (8.6) и (8.9), соответствующие внутренней задаче Дирихле D_i и внешней задаче Неймана N_e, разрешимы, и притом единственным образом, при любых непрерывных функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. С этой целью рассмотрим однородное интегральное уравнение внешней задачи Неймана; неизвестную в этом уравнении обозначим через $\mu_0(x)$

$$\mu_0(x)-\frac{2}{(m-2)|S_1|}\int\limits_{\Gamma}\mu_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\,d\xi=0. \tag{1}$$

Пусть $\mu_0\in L_2(\Gamma)$ — какое-нибудь решение этого уравнения. Как было доказано в § 8, функция μ_0 непрерывна на Γ. Построим потенциал простого слоя с плотностью μ_0

$$V_0(x)=\int\limits_{\Gamma}\mu_0(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma. \tag{2}$$

Потенциал (2) имеет правильную нормальную производную извне Γ, а уравнение (1) означает, что эта нормальная производная равна нулю

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e}=0. \tag{3}$$

По теореме единственности для внешней задачи Неймана

$$V_0(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega'. \tag{4}$$

Но потенциал простого слоя — функция, непрерывная во всем пространстве, поэтому

$$V_0(x) \equiv 0, \quad x \in \Gamma. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь потенциал $V_0(x)$ в области Ω, расположенной внутри Γ. В этой области функция $V_0(x)$ гармонична и, как показывает соотношение (5), обращается в нуль на границе области. По теореме единственности для внутренней задачи Дирихле

$$V_0(x) \equiv 0, \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

Но тогда в Ω и

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} \equiv 0.$$

Сопоставляя это с формулой (3) и воспользовавшись формулой (7.11), найдем, что $\mu_0(x) \equiv 0$.

Итак, однородное интегральное уравнение (1) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма (§ 5 гл. 8), интегральное уравнение внешней задачи Неймана (уравнение (8.9)) разрешимо, и притом единственным образом, для любой функции $\psi \in L_2(\Gamma)$ и, тем более, для любой непрерывной функции $\psi(x)$.

Таким образом, значение параметра

$$\lambda = \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}$$

— правильное для ядра $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}$; по теореме 3 Фредгольма оно правильное и для сопряженного ядра $\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r^{m-2}}$. Отсюда следует, что интегральное уравнение внутренней задачи Дирихле разрешимо (и притом единственным образом) для любой функции $\varphi \in L_2(\Gamma)$ и, тем более, для любой непрерывной функции $\varphi(x)$.

Если интегральные уравнения задач D_i и N_e разрешимы, то разрешимы и сами задачи. Это приводит нас к следующим утверждениям:

1. Если Γ — регулярная поверхность, то внутренняя задача Дирихле для этой поверхности разрешима при любых

непрерывных граничных данных, и решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.

2. Если Γ — регулярная поверхность, то внешняя задача Неймана для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных, и решение можно представить в виде потенциала простого слоя.

§ 11. Исследование второй пары сопряженных уравнений

Значение параметра

$$\lambda = -\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}, \tag{1}$$

входящее в интегральные уравнения задач D_e и N_i (уравнения (8.7) и (8.8)), — характеристическое для каждого из ядер

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}, \qquad \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}.$$

Действительно, третье равенство (4.2) показывает, что однородное интегральное уравнение задачи D_e

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_\Gamma \sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = 0 \tag{2}$$

имеет нетривиальное решение $\sigma_0(x) \equiv 1$, а это означает, что число (1) — характеристическое для ядра $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}$. На основании третьей теоремы Фредгольма это же число — характеристическое и для сопряженного ядра $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}$. В таком случае однородное интегральное уравнение задачи N_i

$$\mu_0(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_\Gamma \mu_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma = 0 \tag{3}$$

имеет по крайней мере одно нетривиальное решение; обозначим его через $\mu_0(x)$.

Докажем, что уравнения (2) и (3) не имеют нетривиальных решений, линейно независимых с указанными выше решениями $\sigma_0(x)$ и $\mu_0(x)$. В силу третьей теоремы Фредгольма достаточно показать, что этим свойством обладает уравнение (3). Составим потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(\xi)$

$$V_0(x) = \int_\Gamma \mu_0(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma. \tag{4}$$

Из уравнения (3) следует, что

$$\frac{\partial V_0}{\partial n_i} \equiv 0. \tag{5}$$

Так как $V_0(x)$ — гармоническая функция в области Ω, лежащей внутри Γ, то по теореме единственности задачи N_i

$$V_0(x) \equiv c_0 = \text{const}, \qquad x \in \Omega. \tag{6}$$

При этом $c_0 \neq 0$. В самом деле, если $c_0 = 0$, то $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. В силу непрерывности потенциала простого слоя $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Gamma$; по теореме единственности внешней задачи Дирихле $V_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega'$. Но тогда

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} \equiv 0. \tag{7}$$

Из соотношений (6) и (7) и из формулы (7.11) вытекает, что $\mu_0(x) \equiv 0$, а это противоречит тому, что решение $\mu_0(x)$ нетривиальное.

Попутно мы доказали следующее утверждение: если внутри Γ потенциал простого слоя тождественно равен нулю, то его плотность также тождественно равна нулю.

Допустим теперь, что уравнение (3) имеет еще одно решение $\mu_1(x)$. Построим потенциал

$$V_1(x) = \int_\Gamma \mu_1(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d\xi.$$

Повторяя предшествующие рассуждения, докажем, что если $x \in \Omega$, то потенциал $V_1(x) \equiv c_1 = \text{const}$. Положим

$$\mu_2(x) = c_1\mu_0(x) - c_0\mu_1(x). \tag{8}$$

Очевидно, $\mu_2(x)$ есть решение того же уравнения (3). Построим потенциал

$$V_2(x) = \int_\Gamma \mu_2(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_\xi \Gamma = c_1 V_0(x) - c_0 V_1(x).$$

Если $x \in \Omega$, то $V_2(x) = c_1c_0 - c_0c_1 = 0$. По доказанному выше $\mu_2(x) \equiv 0$. Отсюда

$$\mu_1(x) = \frac{c_1}{c_0}\mu_0(x). \tag{9}$$

Таким образом, любое решение уравнения (3) только постоянным множителем отличается от $\mu_0(x)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение задачи N_i (уравнение (8.8)). В силу четвертой теоремы Фредгольма это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда функция $\psi(x)$ ортогональна ко всем решениям сопряженного однородного уравнения (8.7). Но это последнее уравнение имеет только одно линейно независимое решение $\sigma_0(x) \equiv 1$. Таким образом, для разрешимости уравнения (8.8) необходимо и достаточно, чтобы $(\psi, 1) = 0$ или, в более подробной записи,

$$\int_\Gamma \psi(x)\,d_x\Gamma = 0. \tag{10}$$

Если уравнение (8.8) имеет решение, то, очевидно, разрешима и задача N_i. Таким образом, условие (10) достаточно для того, чтобы задача N_i была разрешима; с другой стороны, если функция $u(x)$ гармоническая внутри Γ и имеет необходимые непрерывные производные, то

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x\Gamma = 0.$$

Но

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \psi(x),$$

следовательно,

$$\int_\Gamma \psi(x)\,d_x\Gamma = 0.$$

Итак, условие разрешимости, которые мы получили как достаточное, является и необходимым.

Мы можем теперь сформулировать следующий результат.

Пусть Γ — регулярная поверхность и $\psi \in C(\Gamma)$. Условие (10) необходимо и достаточно для того, чтобы внутренняя задача Неймана с краевым условием $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \psi(x)$ имела решение; это решение можно представить в виде потенциала простого слоя.

Нам осталось рассмотреть интегральное уравнение внешней задачи Дирихле (уравнение (8.7)).

Нетрудно записать необходимое и достаточное условие его разрешимости

$$(\varphi, \mu_0) = \int_\Gamma \varphi(x) \mu_0(x) \, d_x\Gamma = 0. \tag{11}$$

Если условие (11) выполнено, то интегральное уравнение (8.7) разрешимо. В этом случае существует решение внешней задачи Дирихле, представимое в виде потенциала двойного слоя и, следовательно, убывающее на бесконечности как $|x|^{1-m}$.

Если условие (11) нарушено, то не существует решения уравнения (8.7). Это не означает, однако, что внешняя задача Дирихле неразрешима; можно только утверждать, что эта задача не имеет такого решения, которое можно представить в виде потенциала двойного слоя.

§ 12. Решение внешней задачи Дирихле

Поместим начало координат внутри поверхности Г. Функция $\frac{1}{|x|^{m-2}}$ гармонична в любой области, не содержащей начала координат. В частности, эта функция гармонична в Ω'.

Решение задачи D_e будем искать в виде

$$u(x) = \int_\Gamma \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \, d_\xi\Gamma + \frac{1}{|x|^{m-2}} \int_\Gamma \sigma(\xi) \, d_\xi\Gamma. \tag{1}$$

Какова бы ни была непрерывная функция $\sigma(\xi)$, правая часть формулы (1) гармонична в Ω'; остается подобрать $\sigma(\xi)$ так, чтобы выполнялось краевое условие (8.1).

Повторив рассуждения § 8, получим интегральное уравнение для неизвестной функции $\sigma(x)$

$$\sigma(x) + \frac{2}{(m-2)|S_1|} \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{1}{|x|^{m-2}}\right] d_\xi\Gamma = \frac{2}{(m-2)|S_1|} \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Ядро уравнения (2)

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} + \frac{1}{|x|^{m-2}},$$

так же как и ядро $\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}$, имеет слабую особенность, и к названному уравнению можно применить теорию Фредгольма.

Рассмотрим однородное интегральное уравнение, получающееся из уравнения (2) при $\varphi(x)\equiv 0$

$$\sigma_0(x)+\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{1}{|x|^{m-2}}\right]\sigma_0(\xi)\,d_\xi\Gamma=0. \tag{3}$$

Пусть $\sigma_0\in L_2(\Gamma)$ — какое-либо решение уравнения (3). Как и в § 8, можно доказать, что это решение непрерывно. Построим функцию

$$u_0(x)=\int\limits_{\Gamma}\sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma+\frac{1}{|x|^{m-2}}\int\limits_{\Gamma}\sigma_0(\xi)\,d_\xi\Gamma, \tag{4}$$

гармоническую в Ω'.

Из уравнения (3) следует, что $u_0(x)|_\Gamma\equiv 0$; по теореме единственности для внешней задачи Дирихле $u_0(x)\equiv 0$, $x\in\Omega'$. Имея это в виду, умножим выражение (4) на $|x|^{m-2}$ и положим $|x|\to\infty$. На бесконечности потенциал двойного слоя убывает как $|x|^{1-m}$, поэтому в пределе первое слагаемое исчезнет и мы получим

$$\int\limits_{\Gamma}\sigma_0(\xi)\,d_\xi\Gamma=0. \tag{5}$$

Итак, любое решение уравнения (3) удовлетворяет соотношению (5). Но тогда уравнение (3) упрощается и принимает вид

$$\sigma_0(x)+\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r^{m-2}}\sigma_0(\xi)\,d_\xi\Gamma=0, \tag{6}$$

что совпадает с уравнением (11.2). Как было доказано в § 11, уравнение (6) имеет только одно линейно независимое решение — единицу, в таком случае его общее решение есть $\sigma_0(\xi)\equiv C=\text{const}$. Подставив это в (5), получим $C\,|\Gamma|=0$ или $C=0$. Теперь $\sigma_0(\xi)\equiv 0$ и уравнение (3) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма неоднородное уравнение (2) разрешимо при любой непрерывной функции $\varphi(x)$. Вместе с тем для любой непрерывной граничной функции $\varphi(x)$ разрешима и внешняя задача Дирихле; ее решение может быть представлено в форме (1).

Замечание 1. Все результаты §§ 10—12 можно распространить на произвольные замкнутые ляпуновские поверхности, если потребовать, чтобы данные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяли *условию Липшица с показателем* λ (его называют также *условием Гельдера*)

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leqslant A\,|x_1-x_2|^{\lambda},$$

где A и λ — положительные постоянные.

Замечание 2. Исследование интегральных уравнений теории потенциала несколько усложняется, когда область Ω (или Ω') ограничена не одной, а несколькими замкнутыми ляпуновскими поверхностями; результаты оказываются несколько иными, чем в случае одной граничной поверхности. Подробно эти вопросы изложены в книге Н. М. Гюнтера [4].

Замечание 3. Метод потенциалов можно применять и к некоторым другим краевым задачам. Пусть, например, требуется найти функцию $u(x)$, гармоническую либо внутри, либо вне замкнутой регулярной поверхности Γ и удовлетворяющей краевому условию вида

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(x)\,u\right]_{\Gamma}=\omega(x), \tag{7}$$

где $\beta(x)$ и $\omega(x)$ — функции, непрерывные на Γ, n — внешняя нормаль к Γ в точке $x\in\Gamma$. Такого рода задачу называют часто *третьей краевой задачей*. Будем искать ее решение в виде потенциала простого слоя

$$u(x)=\int\limits_{\Gamma}\mu(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}\,d_{\xi}\Gamma. \tag{8}$$

Воспользовавшись теоремой о предельных значениях нормальной производной потенциала (8), получим для $\mu(\xi)$ интегральное уравнение со слабой особенностью

$$\mu(x)\pm\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}+\frac{\beta(x)}{r^{m-2}}\right]\mu(\xi)\,d_{\xi}\Gamma=$$
$$=\pm\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\,\omega(x),\quad x\in\Gamma. \tag{9}$$

Знак плюс соответствует внутренней задаче, знак минус — внешней.

Если задача (7) для гармонической функции имеет не более одного решения, то уравнение (9) разрешимо при любой $\omega(x)$ и наша задача имеет решение; если решение неединственно (именно, если однородная задача (7) имеет k линейно независимых собственных функций), то оно существует тогда и только тогда, когда $\omega(x)$ удовлетворяет k условиям ортогональности. По первой теореме Фредгольма число k конечно. Внутренняя (внешняя) задача (7) для гармонической функции имеет единственное решение, если $\beta(x)\geqslant 0$ и $\beta(x)>0$ на множестве положительной меры на Γ (соответственно $\beta(x)\leqslant 0$ и $\beta(x)<0$ на множестве положительной меры на Γ). Докажите!

§ 13. Случай двух независимых переменных

В случае $m=2$ сингулярным решением уравнения Лапласа является функция $\ln \frac{1}{r}$, $r=|\xi - x|$. В соответствии с этим потенциалы простого и двойного слоя на двумерной плоскости определяются формулами

$$V(x)=\int_{\Gamma} \mu(\xi) \ln \frac{1}{r} d_{\xi}\Gamma, \tag{1}$$

$$W(x)=\int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial\nu} \ln \frac{1}{r} d_{\xi}\Gamma; \tag{2}$$

Γ — кривая, о которой мы предположим, что она замкнутая ляпуновская. Неравенство (2.6) заменяется таким:

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial\nu} \ln \frac{1}{r} \right| d_{\xi}\Gamma \leqslant C = \text{const}. \tag{3}$$

Плотности $\sigma(\xi)$ и $\mu(\xi)$ будем считать непрерывными.

Потенциалы (1) и (2) принято называть *логарифмическими*. Логарифмический потенциал двойного слоя гармоничен как внутри, так и вне Γ; на бесконечности он имеет оценку $O(|x|^{-1})$. Логарифмический потенциал простого слоя гармоничен внутри Γ; вне Γ он (в отличие от случая $m>2$), вообще говоря, негармоничен: функция, гармоническая в бесконечной области на двумерной плоскости, должна быть ограниченной на бесконечности, а потенциал простого слоя в общем случае растет на бесконечности как $\ln|x|$.

Для потенциалов (1) и (2) справедливы теоремы, аналогичные (но не всегда тождественные) теоремам, доказанным для случая $m>2$: потенциал простого слоя непрерывен на всей плоскости, кроме, может быть, бесконечно удаленной точки; имеют место предельные соотношения для потенциала двойного слоя

$$\begin{aligned} W_i(x) &= -\pi\sigma(x) + \overline{W(x)}, \\ W_e(x) &= \pi\sigma(x) + \overline{W(x)} \end{aligned} \tag{4}$$

и для нормальной производной потенциала простого слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial n_i} &= \pi\mu(x) + \overline{\frac{\partial V(x)}{\partial n}}, \\ \frac{\partial V(x)}{\partial n_e} &= -\pi\mu(x) + \overline{\frac{\partial V(x)}{\partial n}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Эта нормальная производная — правильная.

Интеграл Гаусса вычисляется по формуле

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu} \ln\frac{1}{r}\, d_\xi\Gamma = \begin{cases} -2\pi, & x \text{ внутри } \Gamma, \\ 0, & x \text{ вне } \Gamma, \\ -\pi, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{6}$$

Задачи Дирихле и Неймана ставятся как обычно; мы сохраняем также обозначения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ для функций, заданных в этих задачах. Важно отметить, что при $m=2$ внешняя задача Неймана N_e отличается некоторыми особенностями. Теорема единственности для задачи N_e в данном случае формулируется так же, как и для задачи N_i: два решения этой задачи могут отличаться только на постоянное слагаемое. Верно и обратное: две функции, гармонические вне Γ и различающиеся только постоянным слагаемым, решают одну и ту же задачу N_e.

Другая особенность задачи N_e на двумерной плоскости определяется следующей леммой.

Лемма 18.13.1. *Для того чтобы при $m=2$ задача N_e имела решение, необходимо, чтобы*

$$\int_\Gamma \psi(x)\,dx = 0. \tag{7}$$

Допустим, что решение $u(x)$ задачи N_e существует. Вокруг начала координат опишем окружность S_R столь большого радиуса R, чтобы кривая Γ лежала внутри S_R. Функция $u(x)$ гармонична вне S_R и непрерывна в соответствующей замкнутой области, поэтому справедлива формула Пуассона (формула (1.6_1) гл. 13)

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\omega-\theta) + R^2}\, u(R,\omega)\,d\omega; \tag{8}$$

здесь R, ω — полярные координаты точки ξ, $u(R,\omega) = u(\xi)$, ρ, θ — полярные координаты точки x и $\rho > R$.

Продифференцируем формулу (8) по декартовым координатам точки x. Это проще всего проделать так. Положим $z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$, где x_1, x_2 и ξ_1, ξ_2 — декартовы координаты точек x и ξ. Тогда $z = \rho e^{i\theta}$, $\zeta = Re^{i\omega}$ и (ср. § 1 гл. 13)

$$\frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\omega - \theta) + R^2} = \operatorname{Re}\frac{z+\zeta}{z-\zeta}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\omega - \theta) + R^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{Re}\frac{z+\zeta}{z-\zeta} =$$
$$= \operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial z}\frac{z+\zeta}{z-\zeta} = -\operatorname{Re}\frac{2\zeta}{(z-\zeta)^2}.$$

Теперь

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi} u(R, \omega)\operatorname{Re}\frac{\zeta}{(z-\zeta)^2}\,d\omega = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right).$$

Аналогично найдем, что и $\frac{\partial u}{\partial x_2} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$. Последние оценки верны при достаточно больших $|x|$.

Напишем теперь формулу (2.7) гл. 12 для области $\Omega'_{\bar R}$, ограниченной кривыми Γ и $S_{\bar R}$, где $\bar R > R$:

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x\Gamma + \int_{S_{\bar R}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x S_{\bar R} = 0;$$

здесь n — внешняя нормаль к Γ, соответственно к $S_{\bar R}$ в точке x; перед первым интегралом поставлен знак минус, потому что нормаль n на Γ — внутренняя для области $\Omega'_{\bar R}$.

Последней формуле можно придать вид

$$-\int_\Gamma \psi(x)\,d_x\Gamma + \int_{S_{\bar R}} \frac{\partial u}{\partial n}\,d_x S_{\bar R} = 0. \tag{9}$$

Из полученных выше оценок следует, что при $\bar R$ достаточно большом на окружности $S_{\bar R}$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(n, x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(n, x_2)\right| \leqslant \frac{c}{\bar R^2}, \quad c = \text{const}.$$

Но тогда

$$\left|\int\limits_{S_{\overline{R}}} \frac{\partial u}{\partial n} d_x S_{\overline{R}}\right| \leqslant \frac{c}{\overline{R}^2} 2\pi\overline{R} = \frac{2\pi c}{\overline{R}} \xrightarrow[\overline{R}\to\infty]{} 0;$$

положив в формуле (9) $\overline{R}\to\infty$, придем к соотношению (7). Лемма доказана.

Как и в общем случае, будем искать решение задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя (2), а решение задачи Неймана — в виде потенциала простого слоя (1). Это приведет нас к интегральным уравнениям

$$\sigma(x) \mp \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma = \mp\frac{1}{\pi}\varphi(x) \qquad (D)$$

для задачи Дирихле и

$$\mu(x) \pm \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma = \pm\frac{1}{\pi}\psi(x) \qquad (N)$$

для задачи Неймана. Ядра этих уравнений имеют слабую особенность. В данном случае легко показать, что они ограничены, если показатель Ляпунова $\alpha = 1$, и непрерывны, если кривая Γ имеет непрерывную кривизну. По-прежнему уравнения задач D_i и N_e, а также задач D_e и N_i образуют сопряженные пары. Ниже предполагаем, что кривизна кривой Γ непрерывна.

Исследование интегральных уравнений (D) и (N) проведем, опираясь на следующую лемму.

Лемма 18.13.2. *Если интегральное уравнение задачи N_e*

$$\mu(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma = -\frac{1}{\pi}\psi(x) \qquad (10)$$

разрешимо, а $\psi(x)$ удовлетворяет равенству (7), *то потенциал простого слоя* (1) *решает задачу N_e.*

Пусть уравнение (10) разрешимо. Взяв его решение за плотность потенциала (1), мы получим функцию, удовлетворяющую краевому условию задачи N_e и гармоническую вне Γ всюду, кроме, может быть, бесконечно удаленной точки, где эта функция может оказаться неограниченной. Остается доказать, что если условие (7) выполнено, то потенциал (1) на бесконечности ограничен. Обе части уравнения (10) умножим на $d_x\Gamma$ и проинтегрируем по Г. Учитывая условие (7), получим

$$\int_\Gamma \mu(x)\,d_x\Gamma - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma\,d_x\Gamma = 0. \qquad (11)$$

В двойном интеграле переставим обозначения x и ξ; при этом n заменится на ν. Используя третье из равенств (6), найдем

$$\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma\,d_x\Gamma = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \mu(x)\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma\,d_x\Gamma =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(x)\left\{\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma\right\}d_x\Gamma = -\int_\Gamma \mu(x)\,d_x\Gamma.$$

Теперь из равенства (11) следует

$$\int_\Gamma \mu(x)\,d_x\Gamma = 0. \qquad (12)$$

В равенстве (12) заменим обозначение x на ξ, затем умножим это равенство на $\ln|x|$ и сложим с равенством (1). В результате получим новое выражение для потенциала (1)

$$V(x) = \int_\Gamma \mu(\xi)\ln\frac{|x|}{r}\,d_\xi\Gamma. \qquad (13)$$

При $|x|\to\infty$ интеграл (13) ограничен (он даже стремится к нулю). Лемма доказана.

Анализ интегральных уравнений (D) и (N) проводится, по существу, так же, как и в §§ 10—12; вкратце наметим этот анализ.

Прежде всего докажем, что уравнение (10) задачи N_e разрешимо при любой непрерывной функции $\psi(x)$. В соответствии с альтернативой Фредгольма рассмотрим однородное уравнение

$$\mu_0(x) - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu_0(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma = 0. \qquad (14)$$

Пусть $\mu_0(x)$ — какое-либо его решение. Свободный член уравнения (14), равный нулю, очевидно, удовлетворяет условию (7), и в силу леммы 18.13.2 потенциал

$$V_0(x) = \int_\Gamma \mu_0(\xi)\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma$$

решает однородную задачу N_e. По теореме единственности задачи N_e $V_0(x) \equiv C = \text{const}$ вне Г. Будучи непрерывным на всей плоскости, потенциал $V_0(x) \equiv C$ и на Г. Наконец, из теоремы единственности задачи D_i вытекает, что $V_0(x) \equiv C$ и внутри Г. Но тогда

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} = \frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e} \equiv 0,$$

из формул (5) следует, что

$$\mu_0(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial V_0(x)}{\partial n_i} - \frac{\partial V_0(x)}{\partial n_e}\right] \equiv 0.$$

Из леммы 18.13.2 вытекает теперь, что *условие* (7) *не только необходимо, но и достаточно для разрешимости задачи N_e на двумерной плоскости.*

Вместе с уравнением (10) всегда разрешимо и сопряженное с ним интегральное уравнение задачи D_i. Отсюда следует, что и на двумерной плоскости задача D_i всегда разрешима.

Исследование интегральных уравнений задач D_e и N_i проводится так же, как в общем случае, и приводит к тем же результатам: условие (7) необходимо и достаточно для разрешимости задачи N_i; однородное интегральное уравнение задачи D_e

$$\sigma_0(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \sigma_0(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\, d_\xi\Gamma = 0 \tag{15}$$

имеет решением только постоянную.

Решение задачи D_e на двумерной плоскости можно построить, отыскивая его в виде суммы

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi)\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r}\, d_\xi\Gamma + \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi)\, d_\xi\Gamma. \tag{16}$$

Это приводит к интегральному уравнению

$$\sigma(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial}{\partial \nu}\ln\frac{1}{r} + 1\right]\sigma(\xi)\, d_\xi\Gamma = \frac{1}{\pi}\varphi(x). \tag{17}$$

Как и в § 12, доказывается, что уравнение (17) всегда разрешимо.

§ 14. Уравнения теории потенциала для круга

Пусть Γ — окружность $x_1^2+x_2^2=R^2$. Вычислим ядро потенциала двойного слоя в предположении, что обе точки $x(x_1, x_2)$ и $\xi(\xi_1, \xi_2)$ лежат на этой окружности. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\xi_1}\cos(\nu, \xi_1)-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\xi_2}\cos(\nu, \xi_2)=-\frac{\cos(\nu, r)}{r}.$$

На окружности направление ν совпадает с направлением радиуса, проведенного в точку ξ. Из рис. 35 ясно, что (мы обозначили угол $(\nu, r)=\beta$)

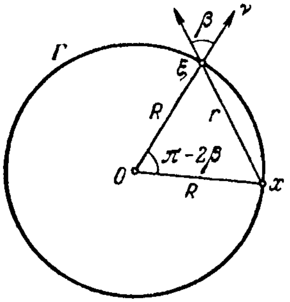

Рис. 35.

$$r=2R\sin\frac{\pi-2\beta}{2}=2R\cos\beta.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}=-\frac{1}{2R}; \qquad x, \xi\in\Gamma. \tag{1}$$

Поменяв местами x и ξ, получим

$$\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r}=-\frac{1}{2R}; \qquad x, \xi\in\Gamma. \tag{2}$$

Ядра уравнений (D) и (N) оказались вырожденными, и эти уравнения решаются элементарно. Мы разберем здесь уравнения внутренних задач; решить интегральные уравнения внешних задач мы предоставляем читателю.

Обозначим через θ и ω углы, которые радиусы-векторы Ox и $O\xi$ образуют с осью x_1. Тогда $d_\xi\Gamma=Rd\omega$. Далее функцию точки $x\in\Gamma$ можно рассматривать как функцию от θ. Соответственно с этим будем писать $\sigma(\theta)$ вместо $\sigma(x)$ и т. п.

Уравнение внутренней задачи Дирихле принимает вид

$$\sigma(\theta)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\omega)\,d\omega=-\frac{1}{\pi}\varphi(\theta). \tag{3}$$

Положим $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\omega)\,d\omega=c$. Тогда

$$\sigma(\theta)+c=-\frac{1}{\pi}\varphi(\theta).$$

Интегрируя, получаем

$$c = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\,d\omega.$$

Теперь $\sigma(\theta) = -\frac{1}{\pi}\varphi(\theta) - c$ и

$$u(x) = -\int_\Gamma \left[\frac{1}{\pi}\varphi(\omega) + c\right]\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma =$$

$$= -\frac{R}{\pi}\int_\Gamma \varphi(\omega)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d\omega - c\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d_\xi\Gamma.$$

Точка x теперь лежит внутри круга; по формуле (13.6) имеем

$$u(x) = -\frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r}\,d\omega - 2\pi c =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[2R\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r} - 1\right]\varphi(\omega)\,d\omega.$$

Далее

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}[(\xi_1 - x_1)\cos(\nu, \xi_1) + (\xi_2 - x_2)\cos(\nu, \xi_2)] =$$

$$= -\frac{1}{r^2R}[(\xi_1 - x_1)\xi_1 + (\xi_2 - x_2)\xi_2] = -\frac{R^2 - (\xi_1x_1 + \xi_2x_2)}{r^2R}.$$

Имея в виду, что

$$r^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 = R^2 + \rho^2 - 2(\xi_1x_1 + \xi_2x_2),$$

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

получаем

$$-\left[2R\frac{\partial}{\partial\nu}\ln\frac{1}{r} - 1\right] = \frac{R^2 - \rho^2}{r^2},$$

и, следовательно,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\frac{R^2 - \rho^2}{r^2}\,d\omega. \qquad (4)$$

Мы пришли к интегралу Пуассона для круга.

Уравнение задачи N_i для круга имеет вид

$$\mu(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\psi(\theta). \tag{5}$$

Полагая $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(\omega)\,d\omega = c_1$, имеем

$$\mu(\theta) - c_1 = \frac{1}{\pi}\psi(\theta).$$

Интегрирование этого равенства приводит к уже известному нам необходимому условию

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\theta)\,d\theta = 0; \tag{6}$$

постоянная c_1 остается произвольной. Если условие (6) выполнено, то решение уравнения (5) имеет вид

$$\mu(\theta) = \frac{1}{\pi}\psi(\theta) + c_1;$$

решение задачи N_i дается формулой

$$u(x) = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\omega)\ln\frac{1}{r}\,d\omega + c_1 R\int_{-\pi}^{\pi}\ln\frac{1}{r}\,d\omega.$$

Нетрудно доказать, что второй интеграл есть постоянная, и мы приходим к формуле Дини

$$u(x) = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\omega)\ln\frac{1}{r}\,d\omega + C, \qquad C = \mathrm{const}.$$

ГЛАВА 19

ЗАДАЧА О КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 1. Постановка задачи

Краевые задачи, рассмотренные в предшествующей главе, обладали «фредгольмовскими» свойствами: либо эти задачи допускали одно и только одно решение (задачи D_i и D_e, задача N_e при $m > 2$), либо нарушалась теорема единственности, и однородная задача имела линейно независимые решения — тогда число таких решений оказывалось конечным, а неоднородная задача была разрешима тогда и только тогда, когда заданная краевая функция удовлетворяла такому же числу условий ортогональности (задача N_i, задача N_e при $m = 2$). В настоящей главе будет рассмотрена новая краевая задача, которая в общем случае не является фредгольмовской, — это задача о косой (иногда пишут «наклонной») производной.

В m-мерном евклидовом пространстве E_m рассмотрим область Ω. Для определенности допустим, что эта область конечная и что ее граница Γ есть регулярная поверхность.

Рассмотрим некоторую окрестность поверхности Γ. С каждой точкой x' этой окрестности свяжем некоторое направление $\lambda = \lambda(x')$; будем считать, что $\lambda(x')$ есть непрерывная функция от x'. Поставим задачу: в области Ω найти решение эллиптического уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + B_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu = f(x) \qquad (1)$$

при краевом условии

$$\lim_{x' \to x} \frac{\partial u(x')}{\partial \lambda} = \psi(x), \qquad x \in \Gamma. \qquad (2)$$

Задача (1)—(2) и называется *задачей о косой производной.*

Если на поверхности Г направляющие косинусы $\cos(\lambda, x_k)$ пропорциональны величинам

$$A_{jk}\cos(\nu, x_j),$$

где ν — нормаль к Г, то задача о косой производной переходит в задачу Неймана.

Задачу о косой производной будем решать в следующих, весьма частных, предположениях: область Ω есть круг

$$x_1^2+x_2^2<1 \tag{3}$$

двумерной плоскости (в дальнейшем будем писать просто «плоскость»), а уравнение (1) есть однородное уравнение Лапласа

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0. \tag{4}$$

Будем пользоваться обозначениями

$$x_1+ix_2=z=\rho e^{i\theta}, \qquad i=\sqrt{-1};$$

если $\xi(\xi_1, \xi_2)$ — точка на окружности Г круга (3), то будем также писать

$$\xi_1+i\xi_2=\zeta=e^{i\omega}.$$

Очевидно, $d_\xi\Gamma=d\omega$, $d_x\Gamma=d\theta$.

Краевое условие (2) несколько преобразуем: обозначим $\cos(\lambda, x_1)=a(\theta)$, $\cos(\lambda, x_2)=b(\theta)$ и вместо $\psi(x)$ будем писать $\psi(\theta)$. Тогда краевое условие принимает вид (знак предела отбрасываем)

$$a(\theta)\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_\Gamma+b(\theta)\frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_\Gamma=\psi(\theta). \tag{5}$$

Функции $a(\theta)$ и $b(\theta)$ связаны равенством

$$a^2(\theta)+b^2(\theta)=1 \tag{6}$$

и по предположению 2π-периодичны и непрерывны. Мы примем, что эти функции непрерывно дифференцируемы по θ.

§ 2. Оператор Гильберта

Рассмотрим множество M 2π-периодических, абсолютно непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций, имеющих на этом отрезке суммируемую с квадратом производную. Пусть $\varphi(\theta) \in M$. Разложим функцию $\varphi(\theta)$ в ряд Фурье

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}. \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| \tag{2}$$

сходится и, следовательно, ряд (1) сходится абсолютно и равномерно. Действительно, для $n \neq 0$ имеем

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega) e^{-in\omega} d\omega =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\varphi(\omega)\frac{e^{-in\omega}}{in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi i n}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\omega) e^{-in\omega} d\omega = \frac{\alpha_n}{in}, \tag{3}$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\omega) e^{-in\omega} d\omega$$

есть n-й коэффициент Фурье производной $\varphi'(\omega)$. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \tag{4}$$

сходится в силу неравенства Бесселя; из неравенства

$$|a_n| = \left|\frac{\alpha_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |\alpha_n|^2\right)$$

вытекает, что ряд (2) сходится.

На множестве M зададим линейный оператор P, который действует следующим образом: если функция $\varphi \in M$

разлагается в ряд (1), то

$$(P\varphi)(\theta)=i\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{in\theta}-i\sum_{n=-1}^{-\infty}a_ne^{in\theta}. \tag{5}$$

Оператор P называется *оператором Гильберта.*

Если функция $\varphi(\theta)$ вещественная, то функция $(P\varphi)(\theta)$ также вещественна. Действительно, в этом случае $a_{-n}=\bar{a}_n$, следовательно,

$$-ia_{-n}e^{-in\theta}=\overline{ia_ne^{in\theta}}.$$

Лемма 19.2.1. *Если $\varphi\in M$, то и $P\varphi\in M$.*

Составим ряд

$$i\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_ne^{in\theta}-i\sum_{n=-1}^{-\infty}\alpha_ne^{in\theta}, \tag{6}$$

где коэффициенты α_n определены соотношением (3). В силу сходимости ряда (4) последний ряд сходится в метрике $L_2(-\pi,\pi)$ и сумма его, которую мы обозначим через $\sigma(\theta)$, суммируема с квадратом на отрезке $[-\pi,\pi]$. Интегрируя ряд (6) почленно, мы восстановим ряд (5) с точностью до постоянной.

Таким образом,

$$(P\varphi)(\theta)=\int_0^\theta\sigma(\omega)\,d\omega+C,\qquad C=\text{const},$$

и функция $(P\varphi)(\theta)$ оказывается абсолютно непрерывной, причем ее производная $\frac{d}{d\theta}(P\varphi)(\theta)=\sigma(\theta)$ квадратично суммируема. Наконец, функция $(P\varphi)(\theta)$ 2π-периодична — это следует из того, что члены ряда (5) 2π-периодичны.

Лемма 19.2.2. *Справедлива формула*

$$(P^2\varphi)(\theta)=-\varphi(\theta)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\,d\omega. \tag{7}$$

Если $\varphi\in M$, то, как только что было показано, $P\varphi\in M$ и к $P\varphi$ можно применить еще раз оператор P. По формуле (5)

$$(P^2\varphi)(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\theta} - \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n e^{in\theta} =$$
$$= -\varphi(\theta) + a_0 = -\varphi(\theta) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega)\,d\omega.$$

Пусть теперь $F(z) = U(x_1, x_2) + iV(x_1, x_2)$ — функция, голоморфная в круге $|z| < 1$ и непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Допустим, что значение этой функции на окружности $|z| = 1$ есть элемент множества M

$$F(e^{i\theta}) \subset M \tag{8}$$

и что $F(0)$ есть величина вещественная

$$\operatorname{Im} F(0) = V(0, 0) = 0. \tag{9}$$

Из включения (8) следует, что ряд Тейлора функции $F(z)$ сходится абсолютно и равномерно в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Действительно, пусть

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n. \tag{10}$$

Коэффициенты A_n вычисляются по известной формуле (Γ_ρ — окружность $|z| = \rho < 1$)

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\rho e^{-i\omega})\,\rho^{-n} e^{-in\omega}\,d\omega.$$

При $0 < \rho \leqslant 1$ подынтегральная функция непрерывна по совокупности переменных ρ и ω. Можно поэтому, положив $\rho \to 1$, перейти к пределу под знаком интеграла. Мы получим тогда

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\omega})\,e^{-in\omega}\,d\omega.$$

Повторив рассуждения начала параграфа, убедимся, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$ сходится и, следовательно, ряд (10) сходится абсолютно и равномерно при $|z| \leqslant 1$.

Заметим, что коэффициент A_0 вещественный. Обозначим $F(e^{i\theta}) = \varphi(\theta) + i\chi(\theta)$, так что

$$\varphi(\theta) = U(x_1, x_2)|_{z=e^{i\theta}}, \quad \chi(\theta) = V(x_1, x_2)|_{z=e^{i\theta}}.$$

Очевидно, $\varphi \in M$ и $\chi \in M$; при этом

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}[F(e^{i\theta}) + \overline{F(e^{i\theta})}] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}, \tag{11}$$

где

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} A_n, & n > 0, \\ A_0, & n = 0, \\ \frac{1}{2} \bar{A}_{-n}, & n < 0, \end{cases} \tag{12}$$

и

$$\chi(\theta) = \frac{1}{2i}[F(e^{i\theta}) - \overline{F(e^{i\theta})}] =$$

$$= -i \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\theta} + i \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n e^{in\theta} = -(P\varphi)(\theta). \tag{13}$$

Формула (13) описывает весьма важное свойство оператора Гильберта, которое мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 19.2.1. *Пусть гармоническая в круге $|z| < 1$ функция $U(x_1, x_2)$ принимает на окружности $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, значение $\varphi(\theta)$, где $\varphi \in M$. Пусть, далее, $V(x_1, x_2)$ — та из сопряженных с $U(x_1, x_2)$ гармонических функций, которая обращается в нуль при $z = 0$. Тогда*

$$V(x_1, x_2)|_{z=e^{i\theta}} = -(P\varphi)(\theta). \tag{14}$$

Как следствие из только что сформулированной теоремы вытекают следующие два свойства оператора Гильберта.

1. Если функция $\varphi \in M$, то функция

$$\varphi(\theta) - i(P\varphi)(\theta) \tag{15}$$

представляет собой значение на единичной окружности $z = e^{i\theta}$ некоторой функции $f^+(z)$, голоморфной в круге $|z| < 1$. При этом, если функция $\varphi(\theta)$ вещественна, то величина $f^{+}(0)$ также вещественна.

Действительно, если $\varphi(\theta)$ представима рядом (1), то

$$\varphi(\theta)-i(P\varphi)(\theta)=a_0+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{in\theta}.$$

Сумма этого ряда есть значение при $z=e^{i\theta}$ функции

$$f^{+}(z)=a_0+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n, \tag{16}$$

голоморфной в круге $|z|<1$. Если функция $\varphi(\theta)$ вещественна, то число

$$f^{+}(0)=a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)\,d\omega$$

также вещественно.

2. При том же условии $\varphi\in M$ функция

$$\varphi(\theta)+i(P\varphi)(\theta) \tag{17}$$

есть значение при $z=e^{i\theta}$ голоморфной во внешности круга $|z|>1$ функции $f^{-}(z)$; при этом

$$f^{-}(\infty)=f^{+}(0). \tag{18}$$

Действительно, функция (17) разлагается в ряд

$$\varphi(\theta)+i(P\varphi)(\theta)=a_0+2\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n e^{in\theta}.$$

Сумма последнего ряда есть значение голоморфной в области $|z|>1$ функции

$$f^{-}(z)=a_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n} \tag{19}$$

на единичной окружности. При этом $f^{-}(\infty)=a_0=f^{+}(0)$.

Отметим соотношения, вытекающие из приведенных выше формул:

$$\begin{aligned}\varphi(\theta)&=\frac{1}{2}[f^{+}(z)+f^{-}(z)],\\ (P\varphi)(\theta)&=\frac{i}{2}[f^{+}(z)-f^{-}(z)],\end{aligned} \tag{20}$$

где $z=e^{i\theta}$.

Вообще, в последующем верхними значками $+$ и $-$ будут обозначаться функции, голоморфные соответственно внутри или вне окружности $|z|=1$.

Замечание 1. Множество M легко превратить в полное нормированное пространство: если функция $\varphi \in M$ представима рядом (1), то положим

$$\|\varphi\| = |a_0| + \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

где a_n определено формулой (3)

Очевидно, в этом пространстве норма оператора Гильберта равна единице.

Замечание 2. Норма оператора Гильберта равна единице и в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$, на котором этот оператор определяется теми же формулами (1) и (5). Можно доказать, что оператор Гильберта ограничен также в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$, если $1 < p < \infty$.

Замечание 3. Можно представить оператор Гильберта в виде так называемого *сингулярного интеграла*

$$(P\varphi)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega)\operatorname{ctg}\frac{\omega-\theta}{2}\,d\omega =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\theta-\varepsilon} \varphi(\omega)\operatorname{ctg}\frac{\omega-\theta}{2}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\theta+\varepsilon}^{\pi} \varphi(\omega)\operatorname{ctg}\frac{\omega-\theta}{2}\,d\omega\right\}. \tag{21}$$

Формула (21) делает ясной связь оператора Гильберта с теорией *сингулярных интегральных уравнений*, играющих важную роль в современной теории уравнений в частных производных. Подробное изложение теории сингулярных интегральных уравнений можно найти в книгах [14] и [12].

§ 3. Уравнения с оператором Гильберта

Рассмотрим уравнение

$$a(\theta)\varphi(\theta) + b(\theta)(P\varphi)(\theta) = g(\theta). \tag{1}$$

Здесь $a(\theta)$, $b(\theta)$, $g(\theta)$ — данные функции, $\varphi(\theta)$ — искомая функция класса M; тому же классу принадлежит и функция $g(\theta)$. Предполагается далее, что $a(\theta)$ и $b(\theta)$ — 2π-периодические функции, непрерывные и непрерывно дифференцируемые.

Уравнение (1) [1]) будем решать в предположении, что коэффициенты $a(\theta)$ и $b(\theta)$ удовлетворяют неравенству

$$a^2(\theta)+b^2(\theta)\neq 0, \qquad -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi. \tag{2}$$

Воспользуемся формулами (2.20). С их помощью уравнение (1) преобразуется к виду

$$f^+(z)+\frac{a(\theta)-ib(\theta)}{a(\theta)+ib(\theta)}f^-(z)=g_1(\theta),\quad z=e^{i\theta}, \tag{3}$$

где $g_1(\theta)=\dfrac{2g(\theta)}{a(\theta)+ib(\theta)}$. Свойства функций $f^+(z)$ и $f^-(z)$ описаны в предшествующем параграфе.

Функция $\dfrac{a(\theta)-ib(\theta)}{a(\theta)+ib(\theta)}$ непрерывна и 2π-периодична, поэтому при изменении θ от $-\pi$ до π аргумент этой функции меняется на величину, кратную 2π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\arg\frac{a(\theta)-ib(\theta)}{a(\theta)+ib(\theta)}=2\varkappa\pi, \tag{4}$$

где $\varkappa$ — некоторое целое число.

Обозначим

$$\alpha(\theta)=\ln e^{-i\varkappa\theta}\frac{a(\theta)-ib(\theta)}{a(\theta)+ib(\theta)}. \tag{5}$$

Из определения числа $\varkappa$ следует, что функция $\alpha(\theta)$ 2π-периодична: $\alpha(-\pi)=\alpha(\pi)$; ясно также, что эта функция, так же как и функции $a(\theta)$ и $b(\theta)$, непрерывна и непрерывно дифференцируема. В таком случае $\alpha\in M$ и, следовательно, $P\alpha\in M$.

Построим функции $\beta^+(z)$ и $\beta^-(z)$, голоморфные соответственно в областях $|z|<1$ и $|z|>1$ и принимающие на окружности $|z|=1$ значения

$$\begin{aligned}\beta^+(e^{i\theta})&=\frac{1}{2}[\alpha(\theta)-i(P\alpha)(\theta)],\\ \beta^-(e^{i\theta})&=-\frac{1}{2}[\alpha(\theta)+i(P\alpha)(\theta)].\end{aligned} \tag{6}$$

Как видно из формул (2.16) и (2.19), ряд Тейлора функции $\beta^+(z)$ сходится абсолютно и равномерно в замкнутом

[1]) Уравнение (1) принадлежит к классу сингулярных интегральных уравнений, о которых было упомянуто в конце предыдущего параграфа.

круге $|z| \leqslant 1$, а ряд Лорана функции $\beta^-(z)$ абсолютно и равномерно сходится в замкнутой области $|z| \geqslant 1$. Отсюда следует, что обе эти функции ограничены и, следовательно, функции $e^{\pm\beta^+(z)}$ и $e^{\pm\beta^-(z)}$ в соответствующих замкнутых областях ограничены и не обращаются в нуль.

Из формул (5) и (6) следует, что

$$\frac{a(\theta)-ib(\theta)}{a(\theta)+ib(\theta)}=z^{\varkappa}e^{\beta^+(z)-\beta^-(z)}, \quad z=e^{i\theta}.$$

Подставим это выражение в уравнение (3) и умножим обе его части на $e^{-\beta^+(z)}$. Введя обозначения

$$\begin{aligned} f^+(z)\,e^{-\beta^+(z)}&=\Phi^+(z),\\ f^-(z)\,e^{-\beta^-(z)}&=\Phi^-(z),\\ g_1(\theta)\,e^{-\beta^+(e^{i\theta})}&=g_2(\theta), \end{aligned} \tag{7}$$

мы преобразуем уравнение (3) к следующему, более простому уравнению:

$$\Phi^+(z)+z^{\varkappa}\Phi^-(z)=g_2(\theta), \qquad z=e^{i\theta}. \tag{8}$$

Дальнейшее зависит от значения целого числа $\varkappa$.

1. $\varkappa=0$. Уравнение (8) принимает вид

$$\Phi^+(z)+\Phi^-(z)=g_2(\theta), \qquad z=e^{i\theta}. \tag{9}$$

Одно из решений этого уравнения определяется формулами

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(e^{i\theta})&=\frac{1}{2}\left[g_2(\theta)-i(Pg_2)(\theta)\right],\\ \Phi_1^-(e^{i\theta})&=\frac{1}{2}\left[g_2(\theta)+i(Pg_2)(\theta)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

и последующим аналитическим продолжением функций $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_1^-(z)$ с помощью ряда Тейлора или Лорана. Более явно можно это решение описать так: разложим $g_2(\theta)$ в ряд Фурье

$$g_2(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in\theta}. \tag{11}$$

Тогда

$$\Phi_1^+(z)=\frac{1}{2}b_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \qquad \Phi_1^-(z)=\frac{1}{2}b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{-n}}{z^n}. \tag{12}$$

Чтобы найти общее решение уравнения (9), рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\Phi_0^+(z)+\Phi_0^-(z)=0, \qquad z=e^{i\theta}. \tag{13}$$

В силу теоремы Римана об аналитическом продолжении через кривую[1]), функции $\Phi_0^+(z)$ и $\Phi_0^-(z)$ аналитически продолжают одна другую на всю плоскость переменной z. По теореме Лиувилля $\Phi_0^+(z)\equiv C$, $\Phi_0^-(z)\equiv -C$, где C — постоянная.

Итак, общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\Phi^+(z)=\Phi_1^+(z)+C, \qquad \Phi^-(z)=\Phi_1^-(z)-C, \tag{14}$$

где C — произвольная постоянная, а $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_1^-(z)$ определяются формулами (12).

Зная $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, мы восстановим $f^+(z)$ и $f^-(z)$ по формулам (7). При этом постоянную C следует выбрать так, чтобы выполнялось равенство (2.18). Из формул (6) легко усмотреть, что $\beta^-(\infty)=-\beta^+(0)$. Обозначая $e^{\beta^+(0)}=\delta$, получаем для C уравнение

$$C\left(\delta+\frac{1}{\delta}\right)=-\frac{b_0}{2}\left(\delta-\frac{1}{\delta}\right). \tag{15}$$

Если $\delta\neq\pm i$, то постоянная C, а с ней и функции $f^+(z)$ и $f^-(z)$ определяются единственным образом. Уравнение (1) имеет в этом случае одно и только одно решение, которое определяется первой из формул (2.20)

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{2}[f^+(e^{i\theta})+f^-(e^{i\theta})].$$

Если же $\delta=\pm i$, то для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$b_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_2(\omega)\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(\omega)\,e^{-\beta^+(e^{i\omega})}}{a(\omega)+ib(\omega)}\,d\omega=0. \tag{16}$$

Ясно также, что при $\delta=\pm i$ однородное уравнение

$$a(\theta)\,\varphi_0(\theta)+b(\theta)\,(P\varphi_0)(\theta)=0 \tag{17}$$

имеет одно линейно независимое решение.

---

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, п°. 24.

Таким образом, случай $\varkappa=0$ находится в соответствии с альтернативой Фредгольма: либо (если $\delta\neq\pm i$) однородное уравнение имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение всегда разрешимо, либо (если $\delta=\pm i$) однородное уравнение имеет одно линейно независимое решение, а неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда его свободный член $g(\theta)$ удовлетворяет одному условию ортогональности (16).

2. $\varkappa>0$. Будем искать такое решение уравнения (8), в котором ряд Лорана функции $\Phi^-(z)$ начинается с члена, содержащего $z^{-\varkappa}$. Тогда функция $\Psi^-(z)=z^\varkappa\Phi^-(z)$ голоморфна во внешности круга $|z|>1$. Обозначая еще $\Phi^+(z)=\Psi^+(z)$, приходим к уравнению

$$\Psi^+(z)+\Psi^-(z)=g_2(\theta),\qquad z=e^{i\theta},$$

тождественному с уравнением (9), и ясно, что одно из искомых нами решений уравнения (8) на окружности $z=e^{i\theta}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(e^{i\theta})&=\frac{1}{2}[g_2(\theta)-i(Pg_2)(\theta)],\\ \Phi_1^-(e^{i\theta})&=\frac{1}{2}[g_2(\theta)+i(Pg_2)(\theta)]\,e^{-i\varkappa\theta};\end{aligned}\tag{18}$$

внутри и вне окружности $|z|=1$ оно определяется соответственно рядами

$$\Phi_1^+(z)=\frac{1}{2}b_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n,$$

$$\Phi_1^-(z)=\frac{b_0}{2z^\varkappa}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{-n}}{z^{n+\varkappa}}.$$

Решение (18) не единственное. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим однородное уравнение

$$\Phi_0^+(z)+z^\varkappa\Phi_0^-(z)=0,\qquad z=e^{i\theta}.\tag{19}$$

Функции $\Phi_0^+(z)$ и $-z^\varkappa\Phi_0^-(z)$ аналитически продолжают одна другую на всю конечную плоскость. Функция $\Phi_0^-(z)$ на бесконечности ограничена. Поэтому произведение $z^\varkappa\Phi_0^-(z)$ имеет на бесконечности полюс порядка не выше $\varkappa$. По теореме Лиувилля $z^{\varkappa}\Phi_0^-(z)$ есть полином степени $\leqslant \varkappa$; пусть

$$z^{\varkappa}\Phi_0^-(z) = -(c_0 + c_1 z + \ldots + c_{\varkappa} z^{\varkappa}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_0^+(z) &= c_0 + c_1 z + \ldots + c_{\varkappa} z^{\varkappa}, \\ \Phi_0^-(z) &= -\left(\frac{c_0}{z^{\varkappa}} + \frac{c_1}{z^{\varkappa-1}} + \ldots + c_{\varkappa}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Формулы (20) определяют общее решение уравнения (19). Общее решение неоднородного уравнения (8) дается формулами

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \Phi_1^+(z) + c_0 + c_1 z + \ldots + c_{\varkappa} z^{\varkappa}, \\ \Phi^-(z) &= \Phi_1^-(z) - \frac{c_0}{z^{\varkappa}} - \frac{c_1}{z^{\varkappa-1}} - \ldots - c_{\varkappa}, \end{aligned} \tag{21}$$

где $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_1^-(z)$ заданы равенствами (18).

По формулам (7) найдем функции $f^+(z)$ и $f^-(z)$; при этом произвольные постоянные $c_0, c_1, \ldots, c_{\varkappa}$ следует подчинить условию (2.18). Нетрудно видеть, что это условие приводит к уравнению

$$c_0\delta + \frac{c_{\varkappa}}{\delta} = \frac{b_0}{2}\left(\delta - \frac{1}{\delta}\right), \qquad \delta = e^{\beta^+(0)}. \tag{22}$$

Уравнение (22) позволяет выразить c_0 через $c_{\varkappa}$; формулы (21), а с ними и решение уравнения (1), содержат $\varkappa$ произвольных постоянных. Отсюда следует, что в случае $\varkappa > 0$ неоднородное уравнение (1) разрешимо при любом свободном члене и имеет бесконечное множество решений, зависящих от произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_{\varkappa}$. Однородное уравнение (17) имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений.

Как мы видим, случай $\varkappa > 0$ находится в несоответствии с альтернативой Фредгольма, которая в данном случае не имеет места.

3. $\varkappa < 0$. Обозначим $k = -\varkappa$, тогда $k > 0$. Запишем уравнение (8) в виде

$$\Phi^+(z) + z^{-k}\Phi^-(z) = g_2(\theta), \qquad z = e^{i\theta}. \tag{23}$$

Функция $\Psi^-(z) = z^{-k}\Phi^-(z)$ голоморфна при $|z| > 1$. Обозначая еще $\Phi^+(z) = \Psi^+(z)$, получаем уравнение

$$\Psi^+(z) + \Psi^-(z) = g_2(\theta), \qquad z = e^{i\theta},$$

общее решение которого, как мы видели, дается формулами

$$\Psi^+(z)=\frac{1}{2}b_0+C+\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n,\quad \Psi^-(z)=\frac{1}{2}b_0-C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{-n}}{z^n},$$

вытекающими из соотношений (11), (12) и (14).

Очевидно, $\Psi^-(\infty)=0$, поэтому необходимо $C=\frac{1}{2}b_0$. Это дает нам

$$\Phi^+(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\quad \Phi^-(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{-n}}{z^{n-k}}. \tag{24}$$

Но функция $\Phi^-(z)$ должна быть ограниченной на бесконечности, поэтому формулы (24) дают решение уравнения (23) тогда и только тогда, когда в разложении (24) функции $\Phi^-(z)$ отсутствуют положительные степени z. Это накладывает на свободный член уравнения (1) $k-1$ условий ортогональности

$$b_{-n}=0,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,$$

или, более подробно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(\omega)\,e^{in\omega-\beta^+(e^{i\omega})}}{a(\omega)+ib(\omega)}\,d\omega=0,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1. \tag{25}$$

Равенство (2.18) дает еще одно условие ортогональности:

$$b_0\delta-\frac{b_{-k}}{\delta}=0$$

или

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\delta-\frac{e^{ik\omega}}{\delta}\right)g(\omega)\,d\omega=0. \tag{26}$$

Если условия ортогональности (25) и (26) выполнены, то уравнение (1) имеет единственное решение, которое строится по формулам (24), (7) и (2.20).

В случае $\varkappa<0$, очевидно, альтернатива Фредгольма также не имеет места.

Введем следующие определения. Пусть некоторая задача состоит в том, чтобы решить уравнение

$$Au=f, \tag{27}$$

где $u \in X$, $f \in Y$; X, Y — банаховы пространства и A — замкнутый линейный оператор, действующий из X в Y. Данная задача называется *нормально разрешимой*, если для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы свободный член удовлетворял некоторым условиям ортогональности, т. е. условиям вида

$$(F_j, f) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

где F_j — линейные ограниченные в метрике пространства Y функционалы. Мы не исключаем и тот случай, когда число условий ортогональности равно нулю, — в этом случае нормально разрешимая задача имеет решение при любом свободном члене. Мы будем говорить также о нормальной разрешимости уравнения (27) или оператора A.

Почти все рассмотренные в предшествующих главах задачи нормально разрешимы в соответственно выбранных парах пространств: уравнения с вполне непрерывными операторами, задачи Дирихле и Неймана для невырождающегося эллиптического уравнения в конечной области; те же задачи для однородного уравнения Лапласа в конечной или бесконечной области. Как выяснено в настоящем параграфе, нормально разрешимо уравнение (1) с оператором Гильберта, если выполнено условие (2).

Отметим, не проводя доказательств, что уравнение (1) не является нормально разрешимым, если условие (2) нарушено в конечном числе точек. Другой пример не нормально разрешимой задачи — это задача $-\Delta u = f(x)$, $u\,|_\Gamma = 0$, в случае, когда конечная поверхность Γ ограничивает бесконечную область Ω, и задача рассматривается в $L_2(\Omega)$.

Пусть оператор A нормально разрешим и пусть $\alpha(A)$ означает число линейно независимых решений однородного уравнения $Au = 0$, а $\beta(A)$ — число условий ортогональности (28), необходимых и достаточных для разрешимости уравнения (27). Допустим, что хотя бы одно из чисел $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ конечное. Тогда разность $\alpha(A) - \beta(A)$ называется *индексом* оператора A или соответствующей линейной задачи и обозначается через $\operatorname{Ind} A$

$$\operatorname{Ind} A = \alpha(A) - \beta(A).$$

Если T — вполне непрерывный, а I — тождественный оператор, то $\operatorname{Ind}(I + T) = 0$, — это вытекает из альтернативы

Фредгольма. Вообще, если для некоторой задачи имеет место альтернатива Фредгольма, то индекс этой задачи равен нулю. Нетрудно убедиться, что индекс уравнения (1) равен $\varkappa$; условие (2) предполагается выполненным. Индексы остальных перечисленных выше нормально разрешимых задач равны нулю.

§ 4. Число решений и индекс задачи о косой производной на двумерной плоскости

Вернемся к задаче о косой производной, поставленной в § 1: найти функцию $u(x)=u(x_1, x_2)$, гармоническую в круге $|z|<1$, $z=x_1+ix_2$, и удовлетворяющую краевому условию

$$a(\theta)\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{z=e^{i\theta}}+b(\theta)\frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{z=e^{i\theta}}=\psi(\theta), \tag{1}$$

$$a^2(\theta)+b^2(\theta)=1. \tag{2}$$

Напомним, что $a(\theta)=\cos(\lambda, x_1)$, $b(\theta)=\cos(\lambda, x_2)$. Как и в § 1, будем считать, что $a(\theta)$ и $b(\theta)$ непрерывно дифференцируемы, а $\psi\in M$; множество M определено в § 2. Решение будем искать такое, чтобы $\varphi\in M$, где

$$\varphi(\theta)=\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{z=e^{i\theta}}. \tag{3}$$

Если $u=\operatorname{Re}(w(z))$, где $w(z)$ — голоморфная функция, и $v=\operatorname{Im}(w(z))$, то

$$w'(z)=\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial v}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}-i\frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Отсюда следует, что гармонические функции $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ и $-\frac{\partial u}{\partial x_2}$ сопряженные. Поэтому, если обозначить

$$\chi(\theta)=\frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{z=e^{i\theta}},\qquad l=\frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{z=0}, \tag{4}$$

то по теореме 19.2.1

$$\chi(\theta)=(P\varphi)(\theta)+l. \tag{5}$$

Подставив выражения (3) и (5) в уравнение (1), приведем его к виду

$$a(\theta)\varphi(\theta)+b(\theta)(P\varphi)(\theta)=\psi(\theta)-lb(\theta). \tag{6}$$

Вычислим индекс уравнения (6)

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d \arg \frac{a(\theta) - ib(\theta)}{a(\theta) + ib(\theta)}$$

или, если воспользоваться соотношением (2),

$$\varkappa = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d \arg [a(\theta) - ib(\theta)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d \arg e^{-i(\lambda,\ x_1)} =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d(\lambda,\ x_1) = -\frac{[(\lambda,\ x_1)]_\Gamma}{\pi}; \tag{7}$$

через $[(\lambda,\ x_1)]_\Gamma$ обозначено приращение угла $(\lambda,\ x_1)$ при обходе окружности Γ в положительном направлении. Отметим, что индекс уравнения (6) четный.

Найдем число решений и индекс задачи (1) — (2). Нам придется рассмотреть несколько случаев.

1. $\varkappa = 0$, $\delta \neq \pm l$. Однородное уравнение (6) имеет только тривиальное решение, а однородная задача (1) — (2) имеет два линейно независимых решения: одно за счет величины l, которая остается произвольной, другое за счет того, что решение $u(x)$ можно изменить на произвольное слагаемое, не нарушая этим ни уравнение Лапласа, ни краевое условие (1). Это последнее решение нам придется учитывать и в последующих случаях. Условия ортогональности отсутствуют, и индекс задачи (1) — (2) в данном случае равен 2.

2. $\varkappa = 0$, $\delta = \pm l$. Есть одно условие ортогональности — условие (3.16) — и одно линейно независимое решение однородного уравнения (6). Если функция $b(\theta)$ удовлетворяет условию (3.16), то величина l остается произвольной; однородная задача (1) — (2) имеет три линейно независимых решения, а для разрешимости неоднородной задачи (1) — (2) необходимо и достаточно выполнение одного условия ортогональности. Индекс этой задачи равен 2. Если $b(\theta)$ не удовлетворяет условию (3.16), то из этого условия определяется величина l; условие ортогональности удовлетворено и не должно больше учитываться, а однородная задача (1) — (2) имеет два нетривиальных решения. Индекс задачи (1) — (2) равен 2.

3. $\varkappa > 0$. Условий ортогональности нет; однородное уравнение (6) имеет $\varkappa$ линейно независимых решений. Однородная задача (1) — (2) имеет $\varkappa + 2$ решений — два дополнительных решения возникают так же, как в случае 1. Индекс задачи (1) — (2) равен $\varkappa + 2$.

4. $\varkappa < 0$. Однородное уравнение (6) имеет только тривиальное решение; имеется $-\varkappa$ условий ортогональности (3.25) и (3.26). Если $b(\theta)$ удовлетворяет этим условиям, то l произвольна и однородная задача (1) — (2) имеет два линейно независимых решения; индекс задачи (1) — (2) равен $\varkappa + 2$. Если же $b(\theta)$ не удовлетворяет всем условиям ортогональности, то постоянную l можно исключить; при этом число условий ортогональности уменьшается на единицу и делается равным $-\varkappa - 1$. Однородная задача (1) — (2) имеет одно нетривиальное решение — постоянную, о которой сказано в п. 1. Индекс задачи (1) — (2) равен $\varkappa + 2$.

Анализ, проведенный в пп. 1 — 4, позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 19.4.1. *Индекс задачи о косой производной для двумерного круга равен*

$$\varkappa + 2 = -\frac{[(\lambda, x_1)]_\Gamma}{\pi} + 2.$$

Пример. В задаче Неймана для круга направление λ совпадает с направлением радиуса-вектора, поэтому $(\lambda, x_1) = \theta$ и $[(\lambda, x_1)]_\Gamma = 2\pi$; индекс задачи Неймана равен нулю.

Замечание. Теорема 19.4.1. верна не только для круга, но и для любой области, ограниченной конечным числом замкнутых непересекающихся регулярных кривых.

В пространстве m измерений, $m > 2$, справедливо следующее утверждение. Пусть область ограничена конечным числом замкнутых непересекающихся регулярных поверхностей и $\cos(\lambda, \xi_j)$, где λ — направление дифференцирования, суть достаточно гладкие функции. Если направление λ нигде не касательно к границе области, то индекс задачи о косой производной равен нулю.

РАЗДЕЛ VI

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В настоящем разделе изучаются уравнения параболического и гиперболического типов. Точнее говоря, изучаются два класса уравнений, которые можно рассматривать как обобщение уравнения теплопроводности и волнового уравнения на случай сред с более сложными физическими свойствами (неоднородные и неизотропные среды) в пространстве любого числа измерений.

Как в уравнении теплопроводности, так и в волновом уравнении, одна из независимых переменных означает время, остальные — пространственные координаты. В связи с этим мы будем употреблять следующие обозначения, несколько отличные от обозначений разделов IV и V. Общее число независимых переменных будет обозначаться не через m, а через $m+1$; первые m переменных обозначаются через $x_1, x_2, \ldots, x_m$, последняя — через t. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ рассматриваются как декартовы координаты некоторой точки x, принадлежащей m-мерному евклидову пространству E_m. Будем придерживаться правила записи суммы, принятого в предшествующих разделах: если в некоторое одночленное выражение входит переменный индекс, который меняется в пределах от 1 до m, и если в указанном выражении этот индекс повторяется дважды, то по нему производится суммирование в пределах от 1 до m.

Иногда мы будем для упрощения записи писать x_{m+1} вместо t.

ГЛАВА 20

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 1. Уравнение теплопроводности и его характеристики

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с $m+1$ независимыми переменными

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A_{jk}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x, t)u = \\ = f(x, t), \quad A_{jk} = A_{kj}. \qquad (1)$$

Матрица его старших коэффициентов имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} -A_{11} & -A_{12} & \ldots & -A_{1n} & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & \ldots & -A_{2n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_{n1} & -A_{n2} & \ldots & -A_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Одно из характеристических чисел этой матрицы равно чулю, а остальные только знаком отличаются от характеристических чисел матрицы коэффициентов A_{jk}. Если эти числа — все одного знака, то уравнение (1) принадлежит к типу $(m, 0, 1)$ и, следовательно, является параболическим; в этом случае будем уравнение (1) называть *уравнением теплопроводности.*

Важно отметить, что входящее в уравнение теплопроводности дифференциальное выражение

$$-A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0 u \qquad (2)$$

— эллиптическое в переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

В последующем будем предполагать, что матрица коэффициентов A_{jk} имеет положительные характеристические числа, т. е. что эта матрица положительно определенная.

Найдем характеристики уравнения (1). Если $\omega(x, t) = \text{const}$ есть уравнение характеристической поверхности, то (см. § 2 гл. 10) функция ω удовлетворяет уравнению

$$A_{jk} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0.$$

Но раз матрица $\|A_{jk}\|_{j,\,k=1}^{k=m}$ положительно определенная, то необходимо $\frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, функция ω зависит только от t, и уравнение характеристической поверхности принимает вид $\omega(t) = \text{const}$. Если на некотором промежутке $\omega'(t) \equiv 0$, то ω есть тождественная постоянная на этом промежутке и уравнение $\omega = \text{const}$ не определяет никакой поверхности. Если же $\omega'(t) \not\equiv 0$, то в окрестности любого значения t, где $\omega'(t) \neq 0$, можно уравнение $\omega(t) = \text{const}$ решить относительно t и мы получим

$$t = \text{const}. \tag{3}$$

Таким образом, *характеристики уравнения теплопроводности суть m-мерные плоскости, нормальные к оси t.*

В последующем будем рассматривать уравнение теплопроводности в следующих, более частных предположениях.

1. Эллиптическое дифференциальное выражение (2) имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \tag{4}$$

так что само уравнение теплопроводности принимает форму

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x, t). \tag{5}$$

Иногда мы будем предполагать, что $f(x, t) \equiv 0$ и будем рассматривать однородное уравнение теплопроводности вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0. \tag{6}$$

2. Коэффициенты A_{jk} не зависят от t и непрерывно дифференцируемы по $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

3. Эллиптическое выражение (4) невырождающееся.

§ 2. Принцип максимума

В плоскости $t=0$ (т. е. в m-мерном евклидовом пространстве E_m) рассмотрим конечную область Ω с границей Γ. Построим цилиндрическую поверхность с направляющей Γ и образующими, параллельными оси t; часть этой поверхности, заключенную между плоскостями $t=0$ и $t=T$, где T — положительная постоянная, обозначим через B_T. Далее обозначим через Ω_T проекцию области Ω на плоскость $t=T$ и через Q_T — область пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ с границей $\Omega \cup B_T \cup \Omega_T$ (рис. 36).

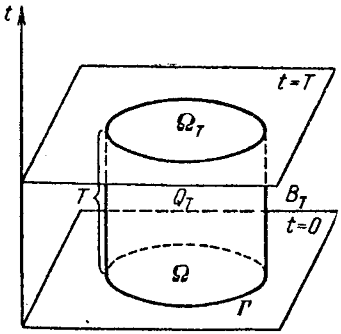

Рис. 36.

Введем следующее обозначение: если D — некоторое множество в пространстве переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$, то $C^{(p,q)}(D)$ будет обозначать класс функций, которые на множестве D имеют непрерывные производные по $x_1, x_2, \ldots, x_m$ порядка $\leqslant p$ и непрерывные производные по t порядка $\leqslant q$.

Теорема 20.2.1. *Пусть функция $u(x, t)$ принадлежит пересечению*

$$C(\bar{Q})_T \cap C^{(2,1)}(Q_T \cup \Omega_T) \tag{1}$$

и удовлетворяет в Q_T однородному уравнению теплопроводности (1.6). *Тогда как наибольшее, так и наименьшее свое значение в замкнутой области $\bar{Q}_T$ функция $u(x, t)$ принимает на $\Omega \cup B_T$.*

Теорема 20.2.1 называется *принципом максимума для уравнения теплопроводности.*

Достаточно провести доказательство для случая максимума: если функция $u(x, t)$, указанная в условии теоремы, в некоторой точке достигает минимума, то в той же точке достигает максимума функция $-u(x, t)$, также удовлетворяющая условиям теоремы.

Обозначим

$$M = \max_{(x,t)\in\bar{Q}_T} u(x, t), \qquad \mu = \max_{(x,t)\in\Omega\cup B_T} u(x, t).$$

Очевидно, $\mu \leqslant M$. Утверждение теоремы состоит в том, что $\mu = M$. Допустим противное: пусть $\mu < M$. Тогда функция $u(x, t)$, непрерывная в $\overline{Q}_T$, достигает максимума в некоторой точке (x_0, t_0), которая лежит либо в Q_T, либо на Ω_T,

$$u(x_0, t_0) = M, \qquad (x_0, t_0) \in Q \bigcup \Omega_T.$$

Построим вспомогательную функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M-\mu}{2T}(t_0 - t). \tag{2}$$

Если $(x, t) \in \Omega \bigcup B_T$, то $t_0 - t \leqslant t_0 < T$ и, следовательно,

$$v(x, t)\big|_{(x, t) \in \Omega \bigcup B_T} < \mu + \frac{M-\mu}{2} = \frac{M+\mu}{2} < M.$$

С другой стороны,

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M.$$

Итак, вне $\Omega \bigcup B_T$ есть точка, в которой функция v принимает значение M, тогда как на $\Omega \bigcup B_T$ значения v строго меньше, нежели M. Отсюда следует, что $v(x, t)$ достигает в $\overline{Q}_T$ максимума в точке, принадлежащей либо Ω_T, либо Q_T.

Обозначим через (x_1, t_1) точку, в которой функция $v(x, t)$ достигает максимума. Допустим сперва, что $(x_1, t_1) \in Q_T$. При любом выборе ортогональных осей $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_m$ в точке (x_1, t_1) выполняются необходимые условия максимума

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} \leqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Обозначим для краткости через L дифференциальное выражение в левой части уравнения теплопроводности (1.6). Вычислим величину Lv в точке (x_1, t_1):

$$Lv\big|_{(x_1, t_1)} = \left[\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k} - A_{jk}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k}\right]_{(x_1, t_1)} =$$

$$= -A_{jk}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k}\bigg|_{(x_1, t_1)}.$$

Выберем такое направление координатных осей Ox_k, чтобы в точке x_1 матрица $\|A_{jk}\|_{j, k=1}^{j, k=m}$ оказалась диагональной; это возможно в силу ее симметричности. Но эта матрица еще и положительно определенная, поэтому в выбранной системе координат

$$A_{jj}(x_1) > 0, \qquad A_{jk}(x_1) = 0, \qquad j \neq k,$$

и

$$Lv\Big|_{(x_1,\, t_1)} = -\sum_{j=1}^{m} A_{jj} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\Big|_{(x_1,\, t_1)} \geqslant 0.$$

С другой стороны,

$$Lv = Lu + \frac{M-\mu}{2T} L(t_0 - t) = -\frac{M-\mu}{2T} < 0,$$

и из полученного противоречия следует, что $(x_1, t_1) \overline{\in} Q_T$.

Пусть теперь $(x_1, t_1) \in \Omega_T$. Это значит, что $t_1 = T$, $x_1 \in \Omega$. Тогда t_1 есть граничная точка интервала $(0, T)$, а x_1 — внутренняя точка области Ω; необходимые условия максимума в точке (x_1, t_1) имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} \leqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

По-прежнему

$$Lv\Big|_{(x_1,\, t_1)} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{(x_1,\, t_1)} - \left[\sum_{j=1}^{m} A_{jj} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\right]_{(x_1,\, t_1)} \geqslant 0.$$

С другой стороны, как и выше, $Lv < 0$; новое противоречие показывает, что $(x_1, t_1) \overline{\in} \Omega_T$.

Итак, точка (x_1, t_1), которая должна принадлежать объединению $Q_T \cup \Omega_T$, не принадлежит ни Q_T, ни Ω_T. Из этого противоречия следует, что допущение $\mu < M$ неверно и, следовательно, $\mu = M$. Теорема доказана.

Из хода доказательства ясно, что для случая максимума оно останется в силе, если уравнение $Lu = 0$ заменить неравенством $Lu \leqslant 0$. Справедливо поэтому следующее усиление принципа максимума:

Теорема 20.2.2. *Пусть функция $u(x, t)$ принадлежит пересечению* (1). *Если $Lu \leqslant 0$ всюду в Q, то функция $u(x, t)$ достигает максимума на $\Omega \cup B_T$. Если же $Lu \geqslant 0$ всюду в Q, то на $\Omega \cup B_T$ достигается минимум функции $u(x, t)$.*

§ 3. Задача Коши и смешанная задача

В § 2 гл. 10 было показано, что для уравнения теплопроводности можно задавать только одно из данных Коши, поэтому задача Коши для уравнения теплопроводности (1.5) ставится так: определить решение этого уравнения при любом $x \in E_m$ и любом $t > 0$, если задано значение этого решения при $t = 0$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in E_m. \tag{1}$$

Задача Коши для уравнения теплопроводности допускает простую физическую интерпретацию. Пусть теплопроводящая среда (вообще говоря, неоднородная и неизотропная) заполняет все пространство. Допустим, далее, что в этой среде распределены источники тепла интенсивности (при подходящем выборе единиц измерения) $f(x, t)$, которая предполагается известной. Наконец, примем, что в начальный момент времени нам известна температура среды в любой точке. Задача Коши состоит в том, чтобы определить температуру в любой точке среды в моменты времени, следующие за начальным.

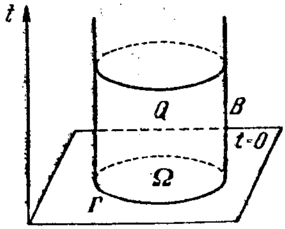

Рис. 37.

Важную роль играют так называемые смешанные задачи, которые формулируются следующим образом. Пусть Ω — область евклидова пространства E_m (рис. 37), Γ — ее граница и B — цилиндрическая поверхность с направляющей Γ и образующими, параллельными оси t; точнее, за B мы примем ту часть этой поверхности, на которой $t > 0$. Смешанная задача для уравнения (1.5) ставится так: требуется найти решение этого уравнения, определенное в полубесконечной области пространства переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ с границей $\Omega \cup B$; при $t = 0$ это решение должно удовлетворять условию Коши

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

а на цилиндрической поверхности B — тому или иному краевому условию.

Различные типы краевых условий приводят к различным смешанным задачам.

Наиболее интересны следующие три типа краевых условий:
1) условие первой краевой задачи

$$u|_B = \psi(x,\ t); \tag{3}$$

2) условие второй краевой задачи

$$\left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n,\ x_j)\right]_B = \chi(x,\ t); \tag{4}$$

3) условие третьей краевой задачи

$$\left[A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n,\ x_j) + \sigma(x,\ t)\, u\right]_B = \omega(x,\ t). \tag{5}$$

В условиях (3) — (5) ψ, χ, ω, σ суть заданные на B и, скажем, непрерывные функции, n — нормаль к Γ в точке x.

Перечисленные здесь смешанные задачи допускают физическую интерпретацию. Во всех трех случаях дело идет о теплопроводящей среде, заполняющей в пространстве область Ω. В этой среде распределены источники данной интенсивности $f(x,\ t)$; дана также температура в любой точке среды в начальный момент времени. Далее предполагается данной некоторая информация о взаимодействии теплопроводящей среды с окружающей ее средой; это взаимодействие осуществляется через поверхность Γ, а информация о нем формулируется в виде краевого условия.

Условие (3) означает, что известна температура в любой точке границы Γ в любой момент времени, следующий за начальным. Такую информацию в принципе возможно получить, если граница теплопроводящей среды доступна для наблюдений.

Левая часть уравнения (4) пропорциональна интенсивности теплового потока через малую окрестность точки $x \in \Gamma$ в момент времени t. Таким образом, условие второй краевой задачи означает, что в любой момент времени, следующий за начальным, нам известен тепловой поток через границу теплопроводящей среды.

В условии (5) третьей краевой задачи функция $\omega(x,\ t)$ пропорциональна температуре окружающей среды в точке x в момент t; это условие описывает процесс теплообмена с окружающей средой в предположении, что температура окружающей среды известна.

Физическая сторона задач, связанных с уравнением теплопроводности, более подробно освещена в книге [9].

Ниже мы будем рассматривать только одну из смешанных задач, а именно первую (краевое условие (3)).

§ 4. Теоремы единственности

Теорема 20.4.1. *Смешанная задача для уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x, t) \tag{1}$$

при начальном и краевом условиях

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega; \quad u|_B = \psi(x, t) \tag{2}$$

имеет в классе

$$C(\bar{\Omega} \times [0, \infty)) \cap C^{(2,1)}(\Omega \times (0, \infty)) \tag{3}$$

не более одного решения.

Пусть существуют два решения задачи (1) — (2). Разность $w(x, t)$ этих решений удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (1.6) и принадлежит классу (3). В силу принципа максимума как наибольшее, так и наименьшее свое значение функция $w(x, t)$ принимает либо в Ω, либо на цилиндре B. Но функция w удовлетворяет еще и однородным условиям — начальному и краевому

$$w|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega; \quad w|_B = 0.$$

Отсюда следует, что как наибольшее, так и наименьшее значения $w(x, t)$ равны нулю. В таком случае $w(x, t) \equiv 0$, и оба решения задачи (1) — (2) совпадают.

Единственность решения задачи Коши мы исследуем для простейшего случая, когда $A_{jk} = \delta_{jk}$, так что эллиптическое выражение, входящее в уравнение теплопроводности, превращается в оператор Лапласа.

Теорема 20.4.2. *Уравнение*

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) \tag{4}$$

имеет в классе

$$C(E_m \times [0, \infty)) \cap C^{(2,1)}(E_m \times (0, \infty)) \tag{5}$$

не более одного ограниченного решения, удовлетворяющего условию Коши

$$u|_{t=0}=\varphi(x)$$

с заданной функцией $\varphi(x)$.

Если таких решений два, то их разность $w(x, t)$ решает однородную задачу Коши

$$Lw=\frac{\partial w}{\partial t}-\Delta w=0, \tag{6}$$

$$w|_{t=0}=0 \tag{7}$$

и принадлежит классу (5). Она ограничена как разность двух ограниченных функций; пусть $|w(x, t)|\leqslant M$.

В плоскости $t=0$ (т. е. в евклидовом пространстве E_m) рассмотрим шар $Ш_R$ радиуса R и с центром в начале координат; ограничивающую его сферу обозначим через S_R. Построим цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси t, и с направляющей S_R; часть этой поверхности, на которой $t>0$, обозначим через B. Область пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ с границей $Ш_R\cup B$ обозначим через Q[1]).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v_R(x, t)=\frac{2Mm}{R^2}\left(\frac{x^2}{2m}+t\right), \qquad x^2=\sum_{k=1}^{m}x_k^2. \tag{8}$$

Легко видеть, что функция v_R удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности. Далее

$$v_R|_{t=0}=\frac{2Mx^2}{R^2}\geqslant 0;$$

в силу равенства (7)

$$v_R|_{t=0}\geqslant|w|\,|_{t=0}.$$

Наконец,

$$v_R|_B=v_R|_{x^2=R^2}\geqslant M\geqslant|w|\,|_B.$$

Последние два соотношения означают, что

$$v_R|_{Ш_R\cup B}\geqslant|w|\,|_{Ш_R\cup B},$$

[1]) Описанное здесь построение соответствует рис. 37 (стр. 427) при $\Omega=Ш_R$.

и ясно, что каждая из величин v_R+w и v_R-w на $Ш_R \cup B$ неотрицательна. Кроме того, каждая из этих величин удовлетворяет уравнению (6). Но тогда по принципу максимума в замкнутой области $\bar{Q}_T$, в которой $x \in \bar{\Omega}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $T=\mathrm{const}$ (рис. 36), как сумма v_R+w, так и разность v_R-w достигает минимума на $Ш_R \cup B$, причем эти минимумы неотрицательны. Отсюда следует, что

$$v_R+w \geqslant 0, \quad v_R-w \geqslant 0, \quad x^2 \leqslant R^2, \quad t \geqslant 0.$$

Таким образом, при $x^2 \leqslant R^2$, $t \geqslant 0$ выполняется неравенство $-v_R \leqslant w \leqslant v_R$ или, что то же,

$$|w(x, t)| \leqslant \frac{2Mm}{R^2}\left(\frac{x^2}{2m}+t\right).$$

Произвольно зафиксируем x и t и устремим $R \to \infty$. Из последнего неравенства следует тогда, что $|w(x, t)| \leqslant 0$, т. е. что $w(x, t)=0$. Теорема доказана.

§ 5. Абстрактные функции вещественной переменной

Будем говорить, что на множестве E числовой оси определена *абстрактная функция* $u(t)$ со значениями в пространстве X, если любому числу $t \in E$ по некоторому закону приведен в соответствие один и только один элемент $u(t) \in X$. Ниже будем предполагать, что пространство X банахово.

В банаховом пространстве существует два типа сходимости: сильная, или сходимость по норме, и слабая. В соответствии с этим для абстрактных функций вещественной переменной можно установить понятия сильной и слабой непрерывности, сильной и слабой производной и т. п. Имея в виду дальнейшие приложения, ограничимся рассмотрением сильной непрерывности и сильной производной; слово «сильная» дальше будем опускать.

Абстрактная функция $u(t)$ непрерывна в точке $t=t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} \|u(t)-u(t_0)\|_X = 0;$$

она непрерывна на некотором множестве значений t, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Абстрактная функция $u(t)$ имеет в точке t производную $u'(t)$, если

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-u'(t)\right\|_X=0.$$

Как обычно, функция, имеющая в некоторой точке производную, называется дифференцируемой в этой точке. Очевидно, что функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в ней. Естественным образом определяются и высшие производные абстрактной функции.

Важную роль в дальнейшем будет играть следующая формула дифференцирования скалярного произведения: если $u(t)$ и $v(t)$ — абстрактные функции со значениями в гильбертовом пространстве и если эти функции дифференцируемы в точке t, то

$$\frac{d}{dt}(u(t),\ v(t))=(u'(t),\ v(t))+(u(t),\ v'(t)). \qquad (1)$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt}(u(t),\ v(t))=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[(u(t+h),\ v(t+h))-(u(t),\ v(t))\right]=$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h},\quad v(t+h)\right)+\left(u(t),\ \frac{v(t+h)-v(t)}{h}\right)\right];$$

переходя к пределу под знаком скалярного произведения, получим формулу (1).

Естественным образом вводится и понятие интеграла от абстрактной функции.

Ниже мы будем пользоваться следующими обозначениями. Рассмотрим абстрактные функции, значения которых принадлежат некоторому классу объектов $\mathfrak{K}$, и пусть эти функции непрерывны на множестве E значений переменной t. Множество этих функций будем обозначать через $C(E;\ \mathfrak{K})$. Если на E указанные функции k раз непрерывно дифференцируемы, то это множество функций будем обозначать через $C^{(k)}(E;\ \mathfrak{K})$.

§ 6. Обобщенное решение смешанной задачи

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(x,\ t),\quad x\in\Omega,\quad t>0, \qquad (1)$$

при однородном краевом условии

$$u\Big|_B = 0 \tag{2}$$

и начальном, вообще говоря, неоднородном условии

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in \Omega. \tag{3}$$

Область Ω считаем конечной, а ее границу Γ кусочно гладкой.

Будем считать, что искомое решение $u(x, t)$ принадлежит классу $C(\bar{\Omega}\times[0, \infty)) \cap C^{(2,1)}(\bar{\Omega}\times(0, \infty))$. При фиксированном $t \geqslant 0$ условие (2) означает, что

$$u\Big|_\Gamma = 0, \tag{4}$$

и $u(x, t)$ можно при фиксированном t трактовать как элемент области определения $D(\mathfrak{A})$ оператора $\mathfrak{A}$ задачи Дирихле для эллиптического дифференциального выражения

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \quad x \in \Omega.$$

Тем более, ее можно трактовать как элемент соответствующего энергетического пространства $H_\mathfrak{A}$.

Поставленную выше смешанную задачу можно сформулировать иначе, если воспользоваться понятием абстрактной функции.

Функцию $f(x, t)$ будем рассматривать как абстрактную функцию $f(t)$ со значениями в $L_2(\Omega)$, функцию $\varphi(x)$ — как элемент φ пространства $L_2(\Omega)$. Наконец, искомую функцию $u(x, t)$ будем считать абстрактной функцией $u(t)$ со значениями в области $D(\mathfrak{A})$; значения этой функции, следовательно, суть элементы обоих пространств $L_2(\Omega)$ и $H_\mathfrak{A}$ одновременно. Задача (1) — (3) сведена теперь к следующей абстрактной задаче Коши: проинтегрировать абстрактное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{du}{dt} + \mathfrak{A}u = f(t), \qquad t > 0, \tag{5}$$

при начальном условии

$$u\Big|_{t=0} = \varphi. \tag{6}$$

Допустим, что задача (5) — (6) имеет решение.

Возьмем произвольную абстрактную функцию $\eta(t)$ со значениями в $H_{\mathfrak{A}}$ и умножим обе части уравнения (5) скалярно (в смысле метрики $L_2(\Omega)$) на $\eta(t)$. Вспоминая определение энергетического произведения, получим

$$\left(\frac{du}{dt},\ \eta\right)+[u,\ \eta]=(f,\ \eta); \tag{7}$$

значок $\mathfrak{A}$ у энергетического произведения или нормы здесь и ниже опускаем.

Обратно, если $u\in C^{(1)}((0,\ \infty);\ D(\mathfrak{A}))$ и эта функция удовлетворяет тождеству (7), то она удовлетворяет и уравнению (5). Действительно, если $u\in D(\mathfrak{A})$, то $[u,\ \eta]=(\mathfrak{A}u,\ \eta)$, и тождеству (7) можно придать вид

$$\left(\frac{du}{dt}+\mathfrak{A}u-f,\ \eta\right)=0, \qquad \forall\, \eta\in H_{\mathfrak{A}},$$

и так как элементы пространства $H_{\mathfrak{A}}$ образуют множество, плотное в $L_2(\Omega)$, то

$$\frac{du}{dt}+\mathfrak{A}u-f=0.$$

Абстрактную функцию $u(t)$ будем называть *обобщенным решением смешанной задачи* (1) — (3), если она удовлетворяет следующим требованиям: 1) $u(t)$ одновременно принадлежит классам

$$C([0,\ \infty);\ L_2(\Omega)),\ C([0,\ \infty);\ H_{\mathfrak{A}}),\ C^{(1)}((0,\ \infty);\ L_2(\Omega)),$$

т. е. эта функция непрерывна при $t\geqslant 0$ и непрерывно дифференцируема при $t>0$ как абстрактная функция со значениями в $L_2(\Omega)$; одновременно она непрерывна при $t>0$ как абстрактная функция со значениями в $H_{\mathfrak{A}}$; 2) $u(t)$ удовлетворяет тождеству (7) при любом $t>0$ и любой абстрактной функции $\eta(t)$ со значениями в $H_{\mathfrak{A}}$; 3) $u(t)$ удовлетворяет начальному условию (6). Последнее требование понимается в том смысле, что

$$\lim_{t\to 0}\left\|u(t)-\varphi\right\|_{L_2(\Omega)}=0.$$

Из доказанного выше следует, что обобщенное решение $u(t)$ есть также и обычное решение, если $u(t)\in D(\mathfrak{A})$ при любом $t>0$ и если $u(x, t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\varphi(x)$ не только в метрике $L_2(\Omega)$, но и равномерно.

Теорема 20.6.1. *Обобщенное решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности единственно.*

Пусть существуют две функции, удовлетворяющие тождеству (7) и начальному условию (6). Их разность, которую мы обозначим через $w(t)$, удовлетворяет тождеству

$$\left(\frac{dw}{dt}, \eta\right)+[w, \eta]=0 \tag{8}$$

и начальному условию

$$w\Big|_{t=0}=0. \tag{9}$$

Положив в тождестве (8) $\eta=w$ и воспользовавшись формулой (5.1), получим

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2+2\,\|w\|^2=0.$$

Отсюда видно, что $\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2\leqslant 0$ и, следовательно, числовая функция $\|w(t)\|^2$ не возрастает при возрастании t. Но по соотношению (9) $\|w(0)\|^2=0$. Отсюда $\|w(t)\|^2=0$, $t>0$, и теорема доказана.

ГЛАВА 21

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 1. Понятие о волновом уравнении

Волновым уравнением называется уравнение второго порядка вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A_{jk}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + A_k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_k} + A_0(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

в котором матрица коэффициентов A_{jk} положительно определенная. Матрица старших коэффициентов уравнения (1) имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} -A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1m} & 0 \\ -A_{21} & -A_{22} & \dots & -A_{2m} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_{m1} & -A_{m2} & \dots & -A_{mm} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|. \quad (2)$$

Одно из характеристических чисел матрицы (2) равно единице, остальные совпадают с характеристическими числами матрицы $-\|A_{jk}\|$ и, следовательно, отрицательны. Отсюда следует, что волновое уравнение принадлежит к типу $(m, 1, 0)$, т. е. к гиперболическому типу.

Уравнение характеристик волнового уравнения имеет вид

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - A_{jk}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1), как и всякое гиперболическое уравнение, имеет и вещественные характеристики. Заметим, что функция $\omega(x, t) \equiv t$ не удовлетворяет уравнению (3), поэтому плоскости $t = \text{const}$ не являются характеристическими поверхностями волнового уравнения, и при $t=\mathrm{const}$ можно задавать оба данных Коши.

Мы будем рассматривать ниже менее общее волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(x,\ t). \tag{4}$$

С физической точки зрения уравнение (4) описывает малые колебания среды под действием непрерывно распределенных источников, интенсивность которых пропорциональна величине $f(x,\ t)$. В общем случае колеблющаяся среда неоднородна и неизотропна и ее физические свойства меняются с течением времени. Если свойства среды неизменны во времени, то коэффициенты A_{jk} не зависят от t, — *этот случай мы и будем далее рассматривать*. Если среда однородна, то $A_{jk}=\mathrm{const}$; в этом случае подходящим аффинным преобразованием координат $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ можно преобразовать матрицу $\|A_{jk}\|$ в единичную. Мы приходим тогда к простейшей форме волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=f(x,\ t). \tag{5}$$

Для физических приложений большой интерес представляет несколько более сложное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=f(x,\ t),\quad a^2=\mathrm{const}. \tag{6}$$

Заметим, что уравнение (6) примет форму (5), если изменить единицу времени, именно, если сделать замену $t'=at$.

Как уже было сказано, мы примем, что в уравнении (4) коэффициенты A_{jk} не зависят от времени; мы предположим также, что эти коэффициенты непрерывно дифференцируемы и что матрица $\|A_{jk}\|$ не вырождается.

§ 2. Смешанная задача и ее обобщенное решение

Постановка смешанной задачи для волнового уравнения весьма близка к постановке той же задачи для уравнения теплопроводности.

Сформулируем задачу подробнее. В плоскости $t=0$ (т. е. в пространстве E_m) дана конечная область Ω с кусочно гладкой границей Г. В области Q рис. 37 (стр. 427) требуется найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(x,\ t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x) \tag{2}$$

и одному из написанных ниже краевых условий:

$$u\Big|_B=\psi(x,\ t) \tag{3}$$

(первая задача);

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n,\ x_j)\right]_B=\chi(x,\ t) \tag{4}$$

(вторая задача);

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n,\ x_j)+\sigma(x,\ t)u\right]_B=\omega(x,\ t) \tag{5}$$

(третья задача). Возможны, конечно, и другие типы краевых условий.

В последующем мы ограничимся случаем однородного краевого условия первой задачи

$$u\Big|_B=0. \tag{6}$$

Как и для уравнения теплопроводности, смешанную задачу для волнового уравнения можно сформулировать в операторных терминах. Будем пока считать, что решение $u(x,\ t)$ смешанной задачи принадлежит классу

$$C(\overline{\Omega}\times[0,\ \infty))\cap C^{(2,2)}(\overline{\Omega}\times(0,\ \infty)).$$

Тогда это решение можно трактовать как абстрактную функцию $u(t)$ со значениями в $D(\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ — оператор задачи Дирихле; эта функция имеет две непрерывные производные в интервале $(0,\ \infty)$. Функцию $f(x,\ t)$ будем рассматривать как абстрактную функцию со значениями в $L_2(\Omega)$. Наконец, будем считать, что функция $\varphi_0(x)$ есть элемент φ_0 энергетического пространства $H_{\mathfrak{A}}$, а функция $\varphi_1(x)$ есть элемент φ_1 пространства $L_2(\Omega)$. Теперь смешанную задачу для уравнения (1) при начальных условиях (2) и краевом условии (6) можно трактовать как задачу Коши для абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\mathfrak{A}u=f(t) \tag{7}$$

при начальных условиях

$$u(0)=\varphi_0, \qquad u'(0)=\varphi_1. \tag{8}$$

Возьмем произвольную функцию $\eta(t)$, принадлежащую пересечению

$$K=C([0, \infty); H_{\mathfrak{A}})\cap C^{(1)}([0, \infty); L_2(\Omega)). \tag{9}$$

Обе части уравнения (7) умножим скалярно (в метрике $L_2(\Omega)$) на $\eta(t)$

$$\left(\frac{d^2u(t)}{dt^2}, \eta(t)\right)+(\mathfrak{A}u(t), \eta(t))=(f(t), \eta(t)),$$

что приводится к виду[1])

$$\left(\frac{d^2u(t)}{dt^2}, \eta(t)\right)+[u(t), \eta(t)]=(f(t), \eta(t)), \quad \eta\in K. \tag{10}$$

Тождество (10) можно было бы использовать для определения обобщенного решения. Однако это было бы нецелесообразно — такое обобщенное решение должно было бы иметь вторую производную по t. Поэтому поступим следующим образом. Выберем произвольный момент времени $T>0$ и потребуем, чтобы $\eta(T)=0$. Проинтегрируем по t обе части тождества (10) в промежутке $(0, T)$. По формуле (5.1) гл. 20 имеем

$$\left(\frac{d^2u(t)}{dt^2}, \eta(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{du(t)}{dt}, \eta(t)\right)-\left(\frac{du(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right).$$

Используя равенства $\eta(T)=0$, $u'(0)=\varphi_1$, получим

$$-\int_0^T\left(\frac{du(t)}{dt}\frac{d\eta(t)}{dt}\right)dt+\int_0^T[u(t), \eta(t)]\,dt-(\varphi_1, \eta(0))=$$
$$=\int_0^T(f(t), \eta(t))\,dt, \quad \eta\in K_T. \tag{11}$$

[1]) Значок $\mathfrak{A}$ у энергетического произведения или нормы здесь и ниже опускаем.

Через K_T здесь обозначен класс функций $\eta(t)$ таких, что $\eta \in K$ и $\eta(T)=0$. Тождеством (11) мы и воспользуемся, чтобы ввести понятие обобщенного решения.

Будем говорить, что абстрактная функция $u(t)$ есть *обобщенное решение* смешанной задачи (1), (2), (6), если 1) $u \in K$; 2) $u(0)=\varphi_0$; это равенство следует понимать в том смысле, что

$$\lim_{t \to 0} \| u(t) - \varphi_0 \| = 0;$$

3) $u(t)$ удовлетворяет тождеству (11), в котором $\eta(t)$ есть произвольная функция класса K_T.

Легко убедиться, что обобщенное решение $u(t)$, принадлежащее пересечению

$$C^{(1)}([0, \infty); D(\mathfrak{A})) \cap C^{(2)}((0, \infty); D(\mathfrak{A})),$$

есть и обычное решение смешанной задачи для волнового уравнения.

Теорема 21.2.1. *Смешанная задача для волнового уравнения имеет не более одного обобщенного решения.*

Разность $w(t)$ двух обобщенных решений одной и той же смешанной задачи для волнового уравнения (1) есть элемент класса K, удовлетворяющий тождеству

$$-\int_0^T \left(\frac{dw(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt + \int_0^T [w(t), \eta(t)]\, dt = 0, \quad \forall \eta \in K_T, \tag{12}$$

и начальному условию

$$w(0) = 0. \tag{13}$$

В тождестве (12) положим

$$\eta(t) = \int_t^T w(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Это можно сделать, потому что при этом, очевидно, $\eta \in K_T$. Из формулы (14) следует, что $w(t) = -\frac{d\eta(t)}{dt}$, и мы получаем

$$\int_0^T \left(\frac{d^2\eta(t)}{dt^2}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt - \int_0^T \left[\frac{d\eta(t)}{dt}, \eta(t)\right] dt = 0. \tag{15}$$

Далее

$$\left(\frac{d^2\eta(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\eta(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) = \\ = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\eta(t)}{dt}\right\|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2,$$

$$\left[\frac{d\eta(t)}{dt}, \eta(t)\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}[\eta(t), \eta(t)] = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}|\eta(t)|^2.$$

Подставив это в равенство (15), получим

$$\|w(T)\|^2 - \|w(0)\|^2 - |\eta(T)|^2 + |\eta(0)|^2 = 0.$$

Но $w(0) = 0$, $\eta(T) = 0$, поэтому

$$\|w(T)\|^2 + |\eta(0)|^2 = 0.$$

Отсюда $w(T) = 0$, что и требовалось доказать, так как T произвольно.

§ 3. Волновое уравнение с постоянными коэффициентами. Задача Коши. Характеристический конус

Ниже в настоящей главе мы будем рассматривать волновое уравнение простейшего вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t). \tag{1}$$

Как мы выяснили в § 1, поверхность $t = 0$ для уравнения (1) не характеристическая. Задача Коши для этого уравнения ставится следующим образом: при любом $x \in E_m$ и любом $t > 0$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{2}$$

Важным инструментом исследования и решения задачи Коши для волнового уравнения является так называемый *характеристический конус*.

Возьмем некоторую точку (x_0, t_0) и рассмотрим поверхность, определяемую уравнением

$$t_0 - t = r, \quad r = |x - x_0|. \tag{3}$$

Это — нижняя полость конуса с вершиной в точке (x_0, t_0) и осью, параллельной оси t. Нетрудно видеть, что поверхность (3) характеристическая для волнового уравнения (1). Действительно, полагая $\omega(x, t) = t_0 - t - r$, можем написать уравнение (3) в виде $\omega(x, t) = 0$. Уравнение характеристик для уравнения (1) имеет вид

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 = 0. \qquad (4)$$

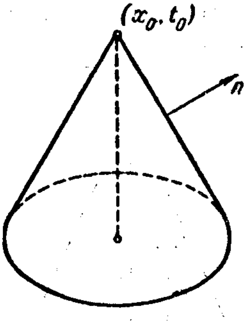

Рис. 38.

В данном случае

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -1, \ \frac{\partial\omega}{\partial x_k} = -\frac{\partial r}{\partial x_k} = -\frac{x_k - x_{k0}}{r},$$

где x_{k0} есть k-я координата точки x_0. Теперь

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 = \\ = 1 - \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k0})^2 = 0.$$

Конус (3) называется *характеристическим конусом* волнового уравнения.

Найдем направление внешней нормали n к характеристическому конусу (рис. 38). Она образует острый угол с осью t, и косинус этого угла положителен; по известной формуле дифференциальной геометрии

$$\cos(n, t) = -\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 + \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (5)$$

Отсюда вытекает еще одно соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} \cos^2(n, x_k) = 1 - \cos^2(n, t) = \frac{1}{2}. \qquad (6)$$

§ 4. Теорема единственности для задачи Коши. Область зависимости

Теорема 21.4.1. *Пусть в некотором замкнутом шаре* $|x - x_0|^2 \leqslant t_0^2$ *пространства* E_m *начальные функции двух задач Коши для волнового уравнения* (3.1) *совпадают.*

Если обе задачи имеют решения, непрерывные вместе со своими производными первых двух порядков, то эти решения совпадают при $t > 0$ внутри и на границе характеристического конуса с вершиной (x_0, t_0).

Разность $w(x, t)$ решений двух задач Коши, о которых сказано в условии теоремы, удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = 0 \qquad (1)$$

и начальным условиям вида

$$w|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad (2)$$

$$|x - x_0| \leqslant t_0.$$

Значения $w|_{t=0}$ и $\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}$ вне шара $|x - x_0|^2 \leqslant t_0^2$ для нас безразличны.

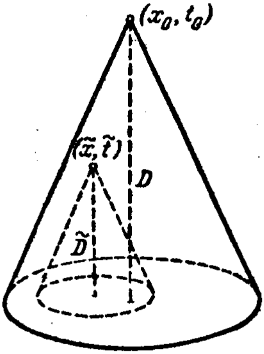

Рис. 39.

Рассмотрим область D пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$, ограниченную плоскостью $t = 0$ и характеристическим конусом $t_0 - t = |x - x_0|$ (рис. 39). Внутри или на границе этой области возьмем произвольную точку $(\tilde{x}, \tilde{t})$ и построим новый характеристический конус $\tilde{t} - t = |\tilde{x} - x|$. Через $\tilde{D}$ обозначим область, ограниченную плоскостью $t = 0$ и новым конусом. Важно отметить, что область $\tilde{D}$ ограничена в плоскости $t = 0$ шаром $|x - \tilde{x}|^2 \leqslant \tilde{t}^2$, который составляет часть первоначального шара $|x - x_0|^2 \leqslant t_0^2$; отсюда следует, что в новом шаре верны соотношения (2).

Обе части уравнения (1) умножим на $\frac{\partial w}{\partial t}$ и проинтегрируем по области $\tilde{D}$. Приняв во внимание очевидные тождества

$$\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2$$

и применив формулу Остроградского, получим

$$\int\limits_{\tilde D} \frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w\right) dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{Ш \cup K} \left\{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2\right] \cos(n, t) - \right.$$

$$\left. - 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x_k} \cos(n, x_k)\right\} dS = 0. \qquad (3)$$

Здесь через $Ш$ обозначен шар $|x - \tilde x| \leqslant \tilde t$, через K — характеристический конус $\tilde t - t = |x - \tilde x|$, через dS — элемент меры на границе $Ш \cup K$ области $\tilde D$. В силу условий (2) в шаре $Ш$ выполнены тождества $\frac{\partial w}{\partial t} \equiv 0$ и $w \equiv 0$. Дифференцируя последнее тождество по координате x_k, получим также $\frac{\partial w}{\partial x_k} \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. В среднем члене двойного равенства (3) интеграл по $Ш$ исчезает, и мы получаем более простое равенство

$$\int\limits_{K} \left\{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2\right] \cos(n, t) - \right.$$

$$\left. - 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x_k} \cos(n, x_k)\right\} dS = 0.$$

Умножим обе части последнего равенства на постоянную $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(n, t)$, которую внесем под знак интеграла. Учитывая равенство (3.6), получим

$$\int\limits_{K} \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial w}{\partial t} \cos(n, x_k) - \frac{\partial w}{\partial x_k} \cos(n, t)\right]^2 dS = 0,$$

откуда следует, что на конусе K

$$\frac{\partial w}{\partial t} \cos(n, x_k) - \frac{\partial w}{\partial x_k} \cos(n, t) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} : \cos(n, x_1) = \ldots = \frac{\partial w}{\partial x_m} : \cos(n, x_m) = \frac{\partial w}{\partial t} : \cos(n, t).$$

Эти равенства означают, что на конусе K вектор $\operatorname{grad} w$ параллелен нормали.

На конусе K возьмем произвольную точку (x, t) и проведем через нее образующую l этого конуса. Очевидно, вектор $\operatorname{grad} w$ ортогонален к l. В таком случае

$$\frac{\partial w}{\partial l} = \text{Пр}_l \operatorname{grad} w = 0.$$

Отсюда следует, что $w = \text{const}$ вдоль любой образующей конуса K. В частности, значение w в вершине $(\tilde{x}, \tilde{t})$ совпадает с значением w в той точке образующей l, которая лежит в плоскости $t = 0$. Но в этой точке $w = 0$ по условиям (2). Отсюда $w(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0$, и так как точка $(\tilde{x}, \tilde{t})$ была взята произвольно в $\bar{D}$, то $w(x, t) \equiv 0$, $(x, t) \in \bar{D}$. Теорема доказана.

Заметим, что теорема 21.4.1 верна и тогда, когда дело идет о двух волновых уравнениях вида (1), правые части которых совпадают в области D.

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи Коши для уравнения (1); пусть правая часть $f(x, t)$ этого уравнения фиксирована. Как вытекает из теоремы настоящего параграфа, значение функции u в любой точке (x_0, t_0) определяется только значениями начальных функций в шаре $|x - x_0| \leqslant t_0^2$. Этот шар называется *областью зависимости* для точки (x_0, t_0).

Если вместо уравнения (1) рассматривать уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, t),$$

то областью зависимости для точки (x_0, t_0) будет шар $|x - x_0| \leqslant a t_0$.

§ 5. Явление распространения волн

Из теоремы единственности, доказанной в предшествующем параграфе, вытекают некоторые следствия физического характера, о которых мы здесь коротко скажем.

Рассмотрим однородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \qquad a = \text{const}, \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in E_m. \tag{2}$$

Допустим, что начальные функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ тождественно равны нулю вне некоторой конечной области $D \subset E_m$ (рис. 40); внутри этой области начальные функции предполагаются, вообще говоря, отличными от нуля. Будем считать, что поставленная здесь задача Коши имеет решение.

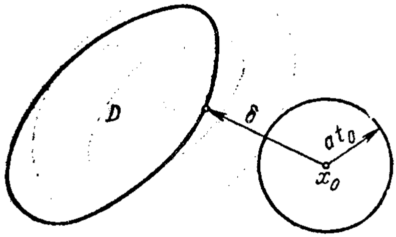

Рис. 40.

Возьмем какую-нибудь точку $x_0 \in E_m$, лежащую вне области D. В начальный момент значение u в точке x_0 равно нулю, как это видно из начальных условий; в этот момент точка x_0 находится в состоянии покоя. Рассмотрим момент времени t_0, достаточно близкий к начальному, именно, пусть

$$t_0 < \frac{\delta}{a},$$

где δ — кратчайшее расстояние от точки x_0 до границы области D. Область зависимости для точки x_0 в момент времени t_0 — шар радиуса at_0 с центром в x_0 — не пересекается с областью D. В таком случае в области зависимости начальные функции равны нулю; по теореме предшествующего параграфа $u(x_0, t_0) = 0$, и точка x_0 в момент времени t_0 остается в состоянии покоя до тех пор, пока $t_0 < \frac{\delta}{a}$.

Пусть теперь $t_0 > \frac{\delta}{a}$. Область зависимости пересекается с областью D (на рис. 41 это пересечение заштриховано), в этой области начальные функции отличны от тождественного нуля и, вообще говоря, $u(x_0, t_0) \neq 0$.

Таким образом, момент времени $t_0 = \frac{\delta}{a}$ можно рассматривать как момент, когда возмущение приходит в точку x_0; до этого момента указанная точка находится в состоянии покоя, после — в состоянии возмущения.

Нетрудно ответить и на такой вопрос: дан момент времени t_0; каковы области покоя и возмущения в этот мемент?

Пусть Γ — граница области начального возмущения D. Из каждой точки границы Γ как из центра опишем сферу

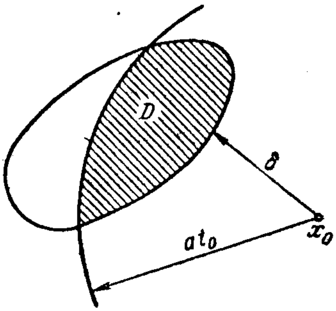

Рис. 41.

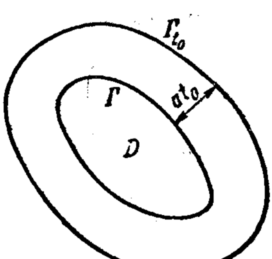

Рис. 42.

радиуса at_0. Огибающая Γ_{t_0} этих сфер (точнее, геометрическое место точек, которые лежат вне D и находятся на расстоянии at_0 от Γ) отделяет область покоя от области, точки которой находятся, вообще говоря, в состоянии возмущения (рис. 42). Поверхность Γ_{t_0} называется *передним фронтом волны*.

Волной называется процесс распространения возмущения. Очевидно, возмущение распространяется со скоростью a в направлении нормали к Γ.

Замечание. Если размерность пространства нечетная, бóльшая единицы, то в однородной среде при некоторых условиях наблюдается так называемый *задний фронт* волны: возмущение в каждой точке исчезает после некоторого момента времени. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 24.

§ 6. Обобщенное решение задачи Коши

Постановка задачи Коши для волнового уравнения, данная в § 3, предполагает, что искомая функция обладает по крайней мере теми производными, которые входят в дифференциальное уравнение. При известных условиях это на самом деле так. С. Л. Соболев показал, что решение задачи Коши для однородного волнового уравнения имеет непрерывные вторые производные, если начальная функция $\varphi_0(x)$ имеет непрерывные производные порядка до $\left[\frac{m}{2}\right]+3$, а функция $\varphi_1(x)$ — до порядка $\left[\frac{m}{2}\right]+2$. Если $m \geqslant 5$, то указанные числа не могут быть, вообще говоря, уменьшены; при $m=1, 2, 3$ от начальных функций можно потребовать меньшего числа производных. Так, нетрудно проверить, что функция [1])

$$u(x, t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_0(x+t)+\varphi_0(x-t)\right] \qquad (1)$$

решает задачу Коши для уравнения струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (2)$$

при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0. \qquad (3)$$

Ясно, что решение $u(x, t)$ в этом случае имеет вторые производные, если существует вторая производная $\varphi_0''(x)$. Однако из физических соображений требование, чтобы вторая производная $\varphi''(x)$ существовала, не вытекает. В самом деле, условия (3) означают,

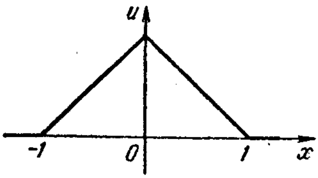

Рис. 43.

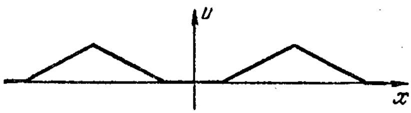

Рис. 44.

что в начальный момент струну вывели из состояния равновесия, сообщив ей начальное отклонение $\varphi_0(x)$ и не сообщив ей начальной скорости. График уравнения $u=\varphi_0(x)$ дает форму струны в начальный момент времени.

Допустим, что график функции $\varphi_0(x)$ есть ломаная рис. 43. У этой функции в трех точках $x=-1, 0, 1$ нет даже первых производных, тем не менее задача о колебаниях струны с такой начальной формой вполне осмыслена, и решение этой задачи дается той же формулой (1): форма струны в моменты времени, не слишком близкие к начальному, показана на рис. 44. Ясно, что функция (1) не имеет не только вторых, но и первых производных при значениях переменных, связанных соотношениями $x \pm t=-1, 0, 1$.

---

[1]) Подробнее об этом см. ниже, § 7 гл. 24.

Возникает необходимость ввести в рассмотрение обобщенные решения задачи Коши; с такого рода обобщениями мы уже не раз встречались на протяжении настоящей книги. Мы введем сперва определение *обобщенного решения дифференциального уравнения*.

Пусть L — линейное дифференциальное выражение, скажем, второго порядка, а M — дифференциальное выражение, формально сопряженное с L.

Пусть функция $u \in C^{(2)}(\Omega)$ удовлетворяет в конечной области Ω уравнению

$$Lu = f(x); \tag{4}$$

здесь через x обозначена совокупность всех независимых переменных. Пусть, далее, функция $\Phi(x) \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega)$ (§ 1 гл. 2). Применим к функциям $u(x)$ и $\Phi(x)$ формулу Грина (формула (6.4) гл. 10). При этом интеграл по поверхности исчезнет, потому что на границе области Ω функция Φ и ее производные равны нулю, и мы приходим к соотношению

$$\int\limits_\Omega uM\Phi\, dx = \int\limits_\Omega f\Phi\, dx, \qquad \forall\, \Phi \in \mathfrak{M}^{(2)}(\Omega). \tag{5}$$

Нетрудно доказать, что функция $u \in C^{(2)}(\Omega)$, удовлетворяющая соотношению (5), удовлетворяет также и уравнению (4).

Введем следующее определение: *функция* $u(x)$, *суммируемая в* Ω *и удовлетворяющая соотношению* (5), *называется обобщенным решением уравнения* (4).

Нетрудно убедиться, что введенные раньше в этой книге понятия обобщенных решений различных задач находятся в согласии с только что данным определением. В соответствии с этим определением будем называть функцию $u(x, t)$ обобщенным решением волнового уравнения

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t) \tag{6}$$

в полупространстве $t > 0$, если в любой конечной области D изменения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ эта функция суммируема и удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_D u \Box \Phi\, dx\, dt = \int\limits_D f\Phi\, dx\, dt, \qquad \Phi \in \mathfrak{M}^{(2)}(D). \tag{7}$$

Теперь введем понятие обобщенного решения задачи Коши. Пусть уравнению (6) сопутствуют начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \tag{8}$$

Функцию $u(x, t)$ назовем обобщенным решением задачи Коши (6), (8), если эта функция: 1) является обобщенным решением уравнения (6); 2) суммируема с квадратом и имеет суммируемые с квадратом обобщенные первые производные в любой конечной области изменения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$; 3) в любой конечной области Ω изменения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}\left\{[u(x, t)-\varphi_0(x)]^2+\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_k}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_k}\right]^2+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}-\varphi_1(x)\right]^2\right\}dx=0. \qquad (9)$$

Данное здесь определение требует, чтобы в любой конечной области $\Omega\subset E_m$ начальные функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ были суммируемы с квадратом, а функция $\varphi_0(x)$ имела еще суммируемые с квадратом обобщенные первые производные.

Подробнее об обобщенных решениях волнового уравнения см. книгу С. Л. Соболева [7]. Определение обобщенного решения краевой задачи дано в книге О. А. Ладыженской [3].

ГЛАВА 22

МЕТОД ФУРЬЕ

По существу своему метод Фурье есть метод решения смешанных задач и задачи Коши, основанный на использовании спектральных свойств входящего в уравнение эллиптического оператора. В классических работах самого Фурье и его последователей метод Фурье был связан с разделением переменных в дифференциальном уравнении; этот последний прием был применен в § 3 гл. 15. В этой главе на основе метода Фурье будет дано решение смешанных задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.

§ 1. Метод Фурье для уравнения теплопроводности

В настоящем параграфе будет дан способ построения обобщенного решения смешанной задачи теплопроводности; отсюда, как следствие, получится доказательство существования этого решения. Понятие обобщенного решения и доказательство его единственности были даны в § 6 гл. 20. Напомним, что обобщенное решение в данном случае есть абстрактная функция от t класса

$$C([0, \infty); L_2(\Omega)) \cap C((0, \infty), H_{\mathfrak{A}}) \cap C^{(1)}((0, \infty); L_2(\Omega)),$$

удовлетворяющая соотношению

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, \eta(t)\right) + [u(t), \eta(t)]_{\mathfrak{A}} = (f(t), \eta(t)) \tag{1}$$

и начальному условию

$$u(0) = \varphi. \tag{2}$$

Здесь $\mathfrak{A}$ — оператор задачи Дирихле (см. § 2 гл. 14) для конечной области $\Omega \subset E_m$ с кусочно гладкой границей Γ;

$\eta(t)$ — произвольная абстрактная функция от t со значениями в энергетическом пространстве $H_{\mathfrak{A}}$, φ — элемент пространства $L_2(\Omega)$. Наконец, $f(t)$ — абстрактная функция от t со значениями в $L_2(\Omega)$; примем, что $f \in C^{(1)}([0, \infty); L_2(\Omega))$.

Допустим, что решение $u(t) = u(x, t)$ задачи (1)—(2) существует. При любом $t \geqslant 0$ оно является элементом пространства $L_2(\Omega)$ и разлагается в ряд по любой полной и ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системе, в частности, по системе собственных элементов оператора $\mathfrak{A}$. Обозначим эти элементы через $u_n = u_n(x)$, а соответствующие им собственные числа — через λ_n. Обозначая

$$(u(t),\ u_n) = c_n(t), \tag{3}$$

имеем

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\, u_n. \tag{4}$$

Дело сводится к вычислению коэффициентов $c_n(t)$. Для этого положим в тождестве (1) $\eta(t) = u_k$. Элемент u_k не зависит от t, и по формуле (5.1) гл. 20

$$\left(\frac{du(t)}{dt},\ u_k\right) = \frac{d}{dt}(u(t),\ u_k) = c_k'(t).$$

По определению (обобщенной) собственной функции (см. формулу (3.2) гл. 6)

$$[u(t),\ u_k] = \lambda_k (u(t),\ u_k) = \lambda_k c_k(t).$$

Обозначая

$$(f(t),\ u_k) = f_k(t), \tag{5}$$

получаем окончательно

$$c_k(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t). \tag{6}$$

Это — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с числовыми функциями: заданной $f_k(t)$ и неизвестной $c_k(t)$. Общий интеграл этого уравнения

$$c_k(t) = e^{\ \lambda_k t}\left[C_k + \int_0^t e^{\lambda_k \tau} f_k(\tau)\, d\tau\right], \qquad C_k = \text{const}.$$

Из формул (2) и (3) вытекает начальное условие для уравнения (6)

$$c_k(0) = (\varphi, u_k).$$

Отсюда $C_k = (\varphi, u_k)$ и

$$c_k(t) = (\varphi, u_k)e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau. \qquad (7)$$

Остается подставить (7) в формулу (4), и мы приходим к следующему выводу.

Если смешанная задача теплопроводности (1)—(2) имеет обобщенное решение, то оно представляется рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n) e^{-\lambda_n t} u_n(x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau. \qquad (8)$$

Из этого, между прочим, вытекает единственность обобщенного решения, доказанная в § 6 гл. 20.

§ 2. Обоснование метода

Докажем, что ряд (1.8) действительно дает обобщенное решение задачи теплопроводности. Доказательство сводится к проверке утверждений, формулируемых ниже.

а) Ряд (1.8) сходится в метрике $L_2(\Omega)$ равномерно по t на любом сегменте $[0, T]$.

Ряд (1.8) — ортогональный в $L_2(\Omega)$, и достаточно проверить, что равномерно на сегменте $[0, T]$ сходится ряд из квадратов коэффициентов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{(\varphi, u_n)e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right\}^2 \leqslant \\ \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)^2 e^{-2\lambda_n t} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right\}^2. \qquad (1)$$

Абстрактная функция $f(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$; отсюда следует, что на сегменте $[0, T]$ непрерывна величина $\|f(t)\|$.

Теперь нетрудно доказать, что второй ряд справа в (1) сходится равномерно. Действительно, по неравенству Буняковского

$$\left\{\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right\}^2 \leqslant \int_0^t e^{-2\lambda_n(t-\tau)}\,d\tau \int_0^t f_n^2(\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1-e^{-2\lambda_n t}}{2\lambda_n} \int_0^t f_n^2(\tau)\,d\tau < \frac{1}{2\lambda_n} \int_0^t f_n^2(\tau)\,d\tau. \qquad (2)$$

Заменив здесь λ_n наименьшим значением этой величины λ_1, найдем, что общий член упомянутого выше ряда имеет оценку $\frac{1}{2\lambda_1} \int_0^t f_n^2(\tau)\,d\tau$. Равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(\tau) = \|f(\tau)\|^2 \qquad (3)$$

показывает, что ряд (3) с неотрицательными непрерывными членами сходится и имеет непрерывную сумму. По известной теореме Дини ряд (3) равномерно сходится на сегменте $[0, T]$ при любом $T > 0$. А тогда равномерно сходится и второй ряд справа в (1).

Проще устанавливается сходимость первого ряда (1)

$$2(\varphi, u_n)^2 e^{-2\lambda_k t} \leqslant 2(\varphi, u_n)^2,$$

а ряд $2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)^2$ сходится в силу неравенства Бесселя.

Из доказанного следует, что сумма ряда (1.8)

$$u(x, t) = u(t) \in C([0, \infty); L_2(\Omega)).$$

б) Ряд (1.8) сходится в метрике $H_{\mathfrak{A}}$ равномерно по t на любом сегменте $[\bar{t}, T]$, где $0 < \bar{t} < T < \infty$.

В метрике $H_{\mathfrak{A}}$ функции $\frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}$ ортонормированы; ряд (1.8) можно представить в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left\{(\varphi, u_n) e^{-\lambda_n t} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right\} \frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}. \qquad (4)$$

Достаточно, чтобы равномерно сходился ряд из квадратов коэффициентов; оценим эти последние. Имеем

$$\sqrt{\lambda_n}\, e^{-\lambda_n t} = \frac{1}{t\sqrt{\lambda_n}} \lambda_n t e^{-\lambda_n t} \leqslant \frac{1}{\bar{t}\sqrt{\lambda_n}} \max z e^{-z} = \frac{1}{\bar{t} e \sqrt{\lambda_n}}. \tag{5}$$

Теперь

$$\lambda_n c_n^2(t) \leqslant 2\left(\sqrt{\lambda_n}\, e^{-\lambda_n t}\right)^2 (\varphi,\ u_n)^2 + 2\lambda_n \left(\int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\bar{t}^2 e^2 \lambda_n} (\varphi,\ u_n)^2 + \int_0^t f_n^2(\tau)\, d\tau; \tag{6}$$

мы воспользовались здесь оценкой (2). Ряд с общим членом (6) сходится равномерно, и утверждение б) доказано. Из этого утверждения следует, что

$$u(x,\ t) = u(t) \in C((0,\ \infty);\ H_{\mathfrak{A}}).$$

в) Ряд, полученный дифференцированием ряда (1.8) по t, сходится в метрике $L_2(\Omega)$ равномерно по t в любом сегменте $[\bar{t},\ T]$, где $0 < \bar{t} < T < \infty$.

После дифференцирования ряда (1.8) по t мы получаем следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{-\lambda_n (\varphi,\ u_n) e^{-\lambda_n t} + f_n(t) - \lambda_n \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right\} u_n(x)$$

или, если взять интеграл по частям,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{-\lambda_n (\varphi, u_n) e^{-\lambda_n t} + f_n(0) e^{-\lambda_n t} + \right.$$

$$\left. + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n'(\tau)\, d\tau\right\} u_n(x). \tag{7}$$

Это — по-прежнему ряд по полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системе $\{u_n(x)\}$. Оценим его коэффициенты. По неравенству Коши квадрат коэффициента при $u_n(x)$ в ряде (7) не превосходит величины

$$3\left(\lambda_n e^{-\lambda_n t}\right)^2 (\varphi,\ u_n)^2 + 3 f_n^2(0) e^{-2\lambda_n t} + 3\left(\int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n'(\tau) d\tau\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{(\bar{t}e)^2} (\varphi,\ u_n)^2 + 3 f_n^2(0) + \frac{3}{2\lambda_n} \int_0^t [f_n'(\tau)]^2\, d\tau. \tag{8}$$

Из сделанных нами предположений о функциях $\varphi(x)$ и $f(x, t)$ следует, что ряд с общим членом (8) сходится. В таком случае ряд (7) сходится в метрике $L_2(\Omega)$ равномерно на сегменте $[t, T]$. Утверждение в) доказано. Из этого утверждения следует, что сумма ряда (1.8)

$$u(x, t) = u(t) \in C^{(1)}((0, \infty); L_2(\Omega)).$$

г) Сумма ряда (1.8) удовлетворяет начальному условию (1.2).

Действительно, в силу доказанного в п. а) в этом ряде можно почленно переходить к пределу при $t \to 0$, поэтому

$$\lim_{t\to 0} \|u(t) - \varphi\|_{L_2} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n) u_n - \varphi \right\| = 0.$$

д) Сумма ряда (1.8) удовлетворяет интегральному соотношению (1.1).

Пусть $\eta(t)$ — произвольная абстрактная функция от t, $0 < t < \infty$, со значениями в $H_{\mathfrak{A}}$. Обе части ряда (1.8), предварительно продифференцированного по t, умножим скалярно (в метрике $L_2(\Omega)$) на $\eta(t)$

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, \eta(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t)(u_n, \eta(t)).$$

Заменяя $c_n'(t)$ по формуле (1.6), получаем

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, \eta(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)(u_n, \eta(t)) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n(t)(u_n, \eta(t)) =$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) u_n, \eta(t)\right) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)[u_n, \eta(t)] = (f(t), \eta(t)) -$$
$$- \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) u_n, \eta(t)\right] = (f(t), \eta(t)) - [u(t), \eta(t)].$$

Наше утверждение доказано.

§ 3. О существовании классического решения. Частный случай

После того как в довольно широких условиях доказано существование обобщенного решения смешанной задачи теплопроводности, уместно поставить такой вопрос: какие ограничения достаточно наложить на данные, чтобы решение было «классическим»; под этим мы понимаем, что это решение непрерывно в $Q \bigcup B \bigcup \Omega$ (рис. 37, стр. 427) и имеет в Q непрерывную первую производную по t и непрерывные вторые производные по координатам.

Решение этого вопроса мы дадим для простейшего случая, когда $m=1$, область Ω есть интервал (0, 1) оси Ox, и уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \qquad (1)$$

Начальное и краевое условия принимают форму

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \qquad (2)$$

$$u(0,\ t)=u(1,\ t)=0; \qquad (3)$$

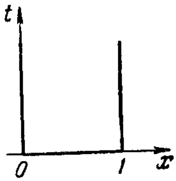

Рис. 45.

решение определено в полуполосе (рис. 45).

Если решение $u(x,\ t)$ нашей задачи непрерывно в полуполосе $0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0$, то, прежде всего, необходимо, чтобы $\varphi(x)$ была непрерывной. Далее функция $u(x,\ t)$ должна быть непрерывной в точках $x=0,\ t=0$ и $x=1,\ t=0$. В каждой из этих точек можно вычислить значения $u(x,\ t)$, исходя как из начального условия, так и из краевых условий (3), и оба способа должны приводить к одному и тому же результату. Отсюда следует, что функция $\varphi(x)$ необходимо должна удовлетворять *условиям согласования*

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0. \qquad (4)$$

Теперь можно сформулировать ответ на вопрос, поставленный выше: *обобщенное решение задачи* (1) — (3) *будет и классическим, если начальная функция* $\varphi(x)$ *абсолютно непрерывна на сегменте* $[0,\ 1]$, *ее производная* $\varphi' \in L_2(0,\ 1)$ *и удовлетворяются условия согласования* (4). Докажем это.

В данном случае оператор $\mathfrak{A}$ действует по формуле $\mathfrak{A}u=-\frac{d^2u}{dx^2}$ и определен на функциях класса $C^{(2)}(0,\ 1)$, которые обращаются в нуль при $x=0$ и $x=1$. Формулы (8.3) и (8.4а) гл. 6 дают собственные числа и собственные функции оператора $\mathfrak{A}$

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad u_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x.$$

По формуле (1.8) находим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x, \tag{5}$$

где для краткости обозначено

$$b_n = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin n\pi x\,dx. \tag{6}$$

Докажем вначале, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$, ряд (5) сходится равномерно. Для этого возьмем интеграл (6) по частям; учитывая условия (4), получим $b_n = \frac{\beta_n}{n}$, где

$$\beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \varphi'(x)\cos n\pi x\,dx$$

есть n-й коэффициент Фурье функции $\frac{\sqrt{2}}{\pi}\varphi'(x)$ при ее разложении по ортонормированной системе $\{\sqrt{2}\cos n\pi x\}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n^2$ сходится, а тогда в силу неравенства $|b_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(\beta_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$ сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|. \tag{7}$$

Но ряд (7) — мажорантный для ряда (5), который поэтому сходится абсолютно и равномерно; члены ряда (5) непрерывны, и его сумма также непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$.

Докажем теперь, что функция $u(x, t)$ — сумма ряда (5) — имеет при $t > 0$ производные всех порядков по x и по t. Для этого достаточно доказать, что после дифференцирования ряда (5) по x и t любое число раз получается ряд, сходящийся равномерно при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant \bar{t}$, где $\bar{t}$ — произвольная положительная постоянная. Продифференцировав ряд (5) p раз по x и q раз по t, получим ряд

$$(-1)^q \sum_{n=1}^{\infty} n^{p+2q} \pi^{p+2q} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin\left(n\pi x + p\frac{\pi}{2}\right). \qquad (8)$$

Коэффициенты Фурье b_n, очевидно, ограничены, и ряд (8) мажорируется следующим рядом:

$$C \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} e^{-n^2\pi^2 \bar{t}}, \quad C = \text{const}, \quad 2s \geqslant p + 2q, \quad s = \text{const}.$$

Далее

$$n^{2s} e^{-n^2\pi^2\bar{t}} < \frac{n^{2s}}{1 + n^2\pi^2\bar{t} + \ldots + \dfrac{n^{2s+2}}{(2s+2)!}(\pi^2\bar{t})^{2s+2}} < \frac{(2s+2)!}{(\pi^2\bar{t})^{2s+2}\, n^2},$$

и можно построить более сильный мажорантный ряд

$$C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad C_1 = \text{const},$$

который, очевидно, сходится. Наше утверждение доказано.

Как видно из хода доказательства, существование бесконечного числа производных при $t > 0$ можно установить, предполагая лишь, что $\varphi \in L(0, 1)$; дополнительные допущения о функции $\varphi(x)$ понадобились только для доказательства непрерывности решения при $t = 0$.

§ 4. Метод Фурье для волнового уравнения

Обобщенное решение $u(x, t) = u(t)$ смешанной задачи для волнового уравнения (см. § 2 гл. 21) есть абстрактная функция от t, принадлежащая классу K (формула (2.9) гл. 21) и удовлетворяющая тождеству

$$-\int_0^T \left(\frac{du(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt + \int_0^T [u(t), \eta(t)]\, dt - (\varphi_1, \eta(0)) =$$
$$= \int_0^T (f(t), \eta(t))\, dt, \quad \eta \in K_T, \qquad (1)$$

и начальному условию

$$u(0)=\varphi_0. \tag{2}$$

Здесь $\varphi_0 \in H_{\mathfrak{A}}$, $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$. Примем, что $f(t)=f(x, t)$ — абстрактная функция класса $C([0, \infty); L_2(\Omega))$. Условие (2) понимается в смысле предельного перехода в энергетической метрике

$$\lim_{t\to 0} |u(t)-\varphi_0| = 0.$$

Допустим, что решение $u(t)$ задачи (1)—(2) существует. Разложим его в метрике $L_2(\Omega)$ в ряд по системе собственных элементов оператора $\mathfrak{A}$

$$u(t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\, u_n, \qquad c_n(t)=(u(t), u_n). \tag{3}$$

Этот же ряд, записанный в виде

$$u(t)=\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, c_n(t) \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}},$$

дает разложение решения $u(t)$ в метрике $H_{\mathfrak{A}}$ по полной ортонормированной системе $\frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}$.

В тождестве (1) положим $\eta(t)=(T-t)\,u_n$. Вспомнив, что

$$[u(t), u_n]=\lambda_n(u(t), u_n)=\lambda_n c_n(t),$$

мы получим следующее уравнение для неизвестного коэффициента $c_n(t)$:

$$\int_0^T c_n(t)\,dt - T(\varphi_1, u_n)+\lambda_n\int_0^T (T-t)\,c_n(t)\,dt = \int_0^T (T-t)\,f_n(t)\,dt, \tag{4}$$

где

$$f_n(t)=(f(t), u_n). \tag{5}$$

Уравнение (4) продифференцируем по T и заменим обозначения T и t соответственно на t и τ:

$$c_n'(t) - (\varphi_1, u_n) + \lambda_n \int_0^t c_n(\tau)\, d\tau = \int_0^t f_n(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Уравнение (6) показывает, что существует вторая производная $c_n''(t)$. Дифференцируя, видим, что $c(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 c_n(t)}{dt^2} + \lambda_n c_n(t) = f_n(t); \tag{7}$$

начальные условия для этого уравнения получаем из соотношений (2) и (6)

$$c_n(0) = (\varphi_0, u_n), \qquad c_n'(0) = (\varphi_1, u_n). \tag{8}$$

Решение задачи имеет вид

$$c_n(t) = (\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\, (t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau. \tag{9}$$

Отсюда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\varphi_0, u_n) \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}\, t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n}\, (t - \tau) f_n(\tau)\, d\tau \right\} u_n(x). \tag{10}$$

Таким образом, если обобщенное решение смешанной задачи для волнового уравнения существует, то оно необходимо имеет вид (10). Как и для уравнения теплопроводности, из этого вытекает единственность обобщенного решения.

Формула (10) несколько громоздка, поэтому ее обоснование проведем следующим образом.

Пусть функции $v(x, t)$ и $w(x, t)$ суть обобщенные решения следующих задач: однородного волнового уравнения с неоднородными начальными условиями

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\mathfrak{A}v=0,\qquad v|_{t=0}=\varphi_0,\quad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}=\varphi_1 \tag{11}$$

и неоднородного волнового уравнения с однородными начальными условиями

$$\frac{d^2w}{dt^2}+\mathfrak{A}w=f(t),\quad w|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0}=0. \tag{12}$$

Тогда, очевидно, $u=v+w$. Из общей формулы (10) вытекают следующие формулы для v и w:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\varphi_0,u_n)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+\frac{(\varphi_1,u_n)}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}\,t\right\}u_n(x), \tag{13}$$

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t\sin\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)f_n(\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

В последующих двух параграфах мы проведем обоснование метода Фурье отдельно для каждой из задач (11) и (12).

§ 5. Обоснование метода для однородного уравнения

Как и для случая уравнения теплопроводности (§ 3), обоснование метода Фурье сводится к проверке нескольких утверждений.

а) Ряд (4.13) сходится в метрике $H_{\mathfrak{A}}$ равномерно по t на всей оси.

Запишем ряд (4.13) в виде

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\sqrt{\lambda_n}(\varphi_0,u_n)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+$$
$$+(\varphi_1,u_n)\sin\sqrt{\lambda_n}\,t\Big\}\frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\varphi_0,\frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+(\varphi_1,u_n)\sin\sqrt{\lambda_n}\,t\right\}\frac{u_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}. \tag{1}$$

Последний ряд есть ряд по системе функций $\left\{\frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$, ортонормированной в метрике $H_{\mathfrak{A}}$, и достаточно доказать, что равномерно по t сходится ряд из квадратов коэффициентов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]\cos\sqrt{\lambda_n}\,t+(\varphi_1, u_n)\sin\sqrt{\lambda_n}\,t\right\}^2. \tag{2}$$

Сумма этого ряда не превосходит величины

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]^2+2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_1, u_n)^2.$$

По неравенству Бесселя оба ряда сходятся. В то же время их члены не зависят от t. По теореме Вейерштрасса ряд (2) сходится равномерно.

Ряд (4.13) сходится равномерно по t и в метрике $L_2(\Omega)$ — это сразу вытекает из неравенства положительной определенности (неравенство (3.3) гл. 5).

Из утверждения настоящего пункта вытекает также, что

$$v(x, t)=v(t)\in C([0, \infty), H_{\mathfrak{A}}).$$

б) Ряд, полученный дифференцированием ряда (4.13) по t

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\sqrt{\lambda_n}\,(\varphi_0, u_n)\sin\sqrt{\lambda_n}\,t+(\varphi_1, u_n)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\right\}u_n(x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]\sin\sqrt{\lambda_n}\,t+(\varphi_1, u_n)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\right\}u_n(x), \tag{3}$$

сходится равномерно по t в метрике $L_2(\Omega)$.

Достаточно написать неравенство

$$\left\{-\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]\sin\sqrt{\lambda_n}\,t+(\varphi_1, u_n)\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\right\}^2\leqslant$$
$$\leqslant 2\left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right]^2+2(\varphi_1, u_n)^2,$$

а затем, как и в п. а), сослаться на неравенство Бесселя и теорему Вейерштрасса.

Из доказанного в пп. а) и б) вытекает, что

$$v(x, t) = v(t) \in C^{(1)}([0, \infty); L_2\Omega)),$$

и, следовательно, $v(t) \in K$.

в) Сумма ряда (4.13) удовлетворяет начальным условиям (4.11). Действительно, в силу доказанного в п. а) в ряде (1) можно почленно перейти к пределу (в метрике $H_{\mathfrak{N}}$) при $t \to 0$. Отсюда

$$\lim_{t \to 0} \| v(t) - \varphi_0 \| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_0, \frac{u_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right] \frac{u_n}{\sqrt{\lambda}} - \varphi_0 \right\| = 0.$$

Далее по доказанному в п. б) сумма ряда (3) равна $\frac{dv(t)}{dt}$, и в этом ряду также можно почленно переходить к пределу при $t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{dv(t)}{dt} - \varphi_1 \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1, u_n) u_n - \varphi_1 \right\| = 0.$$

г) Сумма ряда (4.13) удовлетворяет тождеству

$$-\int_0^T \left(\frac{dv(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt + \int_0^T [u(t), \eta(t)]\, dt - (\varphi_1, \eta(0)) = 0,$$

$$\forall \eta \in K_T, \tag{4}$$

которое получается из тождества (4.1) при $f \equiv 0$.

Обозначим для краткости через $\gamma_n(t)$ коэффициенты ряда (4.13)

$$\gamma_n(t) = (\varphi_0, u_n) \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + \frac{(\varphi_1, u_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n}\, t.$$

Тогда

$$v(x, t) = v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) u_n.$$

Коэффициенты $\gamma_n(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (4.7), в котором следует положить $f_n(t) \equiv 0$:

$$\gamma_n''(t) + \lambda_n \gamma_n(t) = 0. \tag{5}$$

Имеем

$$-\int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, \frac{d\eta}{dt}\right) dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \gamma_n'(t)\left(u_n, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt.$$

Почленное интегрирование допустимо, потому что ряд (3) сходится равномерно по t. Интегрируя по частям, получаем

$$-\int_0^T \gamma_n(t)\left(u_n, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt = \int_0^T \gamma_n''(t)(u_n, \eta(t))\, dt -$$

$$- \gamma_n'(t)(u_n, \eta(t))\Big|_{t=0}^{t=T} =$$

$$= \int_0^T \gamma_n''(t)(u_n, \eta(t))\, dt + (\varphi_1, u_n)(u_n, \eta(0)).$$

Отсюда

$$-\int_0^T \left(\frac{dv(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \gamma_n''(t)(u_n, \eta(t))\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1, u_n)(u_n, \eta(0)).$$

Но по равенству Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1, u_n)(u_n, \eta(0)) = (\varphi_1, \eta(0)),$$

и, следовательно,

$$-\int_0^T \left(\frac{dv(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n''(t)(u_n, \eta(t))\, dt + (\varphi_1, \eta(0)). \quad (6)$$

Далее

$$\int_0^T [u(t), \eta(t)]\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \gamma_n(t)[u_n, \eta(t)]\, dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \lambda_n \gamma_n(t)(u_n, \eta(t))\, dt. \quad (7)$$

Если теперь сложить равенства (6) и (7) и воспользоваться уравнением (5), то получится тождество (4).

§ 6. Обоснование метода для однородных начальных условий

Докажем теперь, что сумма ряда (4.14) есть обобщенное решение задачи (4.12). С этой целью докажем, что для ряда (4.14) справедливы все утверждения а) — г) предыдущего параграфа, с той, однако, разницей, что равномерная сходимость имеет место не на всей оси t, а только на любом сегменте вида $[0, \bar{t}]$, $\bar{t} = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство утверждения а) сводится к проверке того, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n} (t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau \right\}^2 \tag{1}$$

сходится равномерно на сегменте $[0, \bar{t}]$. По неравенству Буняковского

$$\left\{ \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n} (t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau \right\}^2 \leqslant \left\{ \int_0^t |f_n(t)|\, dt \right\}^2 \leqslant \bar{t} \int_0^t f_n^2(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

В силу равенства Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(\tau) = \|f(\tau)\|^2. \tag{3}$$

Ряд (3) с непрерывными неотрицательными членами сходится к непрерывной функции. По теореме Дини ряд (3) сходится равномерно. Но тогда и проинтегрированный ряд сходится равномерно. Из неравенства (2) следует теперь, что ряд (1) также сходится равномерно.

Из доказанного следует, что ряд (4.14) равномерно на сегменте $[0, t]$ сходится в метрике $L_2(\Omega)$, а также, что $w(x, 0) = 0$.

Перейдем к утверждению б). Формально продифференцировав ряд (4.14) по t, получим новый ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \int_0^t \cos \sqrt{\lambda_n} (t-\tau) f_n(\tau)\, d\tau.$$

Мы докажем равномерную сходимость этого ряда в метрике

$L_2(\Omega)$, если установим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t \cos\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\,f_n(\tau)\,d\tau\right\}^2$$

сходится равномерно на сегменте $[0, \bar{t}]$. Но это доказывается так же, как в п. а). Теперь ясно, что

$$\frac{dw(t)}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\int_0^t \cos\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\,f_n(\tau)\,d\tau$$

и что $\left.\dfrac{dw(t)}{dt}\right|_{t=0}=0$.

Утверждения п. в) были доказаны попутно.

Обратимся к п. г). Докажем, что $w(x, t)$ удовлетворяет тождеству (4.1), которое в данном случае принимает вид

$$-\int_0^T\left(\frac{dw(t)}{dt},\frac{d\eta(t)}{dt}\right)dt+\int_0^T[w(t),\eta(t)]\,dt=$$
$$=\int_0^T(f(t),\eta(t))\,dt,\quad \eta\in K_T. \quad (4)$$

Имеем

$$\int_0^T\left(\frac{dw(t)}{dt},\frac{d\eta(t)}{dt}\right)dt=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left(u_n,\frac{d\eta(t)}{dt}\right)\left\{\int_0^t \cos\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\,f_n(\tau)\,d\tau\right\}dt.$$

Внешний интеграл возьмем по частям

$$\int_0^T\left(u_n,\frac{d\eta(t)}{dt}\right)\left\{\int_0^t \cos\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\,f_n(\tau)\,d\tau\right\}dt=$$
$$=\left[(u_n,\eta(t))\int_0^t \cos\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\,f_n(\tau)\,d\tau\right]_{t=0}^{t=T}-$$
$$-\int_0^T(u_n,\eta(t))\left\{f_n(t)-\int_0^t\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\,f_n(\tau)\,d\tau\right\}dt.$$

Внеинтегральный член исчезнет, потому что $\eta(T)=0$. Приняв во внимание, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,u_n = f(t)$$

и что

$$\sqrt{\lambda_n}\,(u_n,\ \eta(t)) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\,[u_n,\ \eta(t)],$$

находим, что

$$\int_0^T \left(\frac{dw(t)}{dt},\ \frac{d\eta(t)}{dt}\right) dt = -\int_0^T (f(t), \eta(t))\,dt + \int_0^T [u(t), \eta(t)]\,dt,$$

и соотношение (4) доказано.

§ 7. Уравнение колебаний струны. Условия существования классичсского решения

Вопрос о том, при каких условиях обобщенное решение смешанной задачи для волнового уравнения будет одновременно и классическим, мы исследуем только для простейшего уравнения струны [1])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ t \geqslant 0. \tag{1}$$

Будем решать это уравнение при краевых условиях

$$u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{3}$$

В данном случае $\lambda_n = n^2\pi^2$, $u_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$; по общей формуле (4.13) обобщенное решение имеет вид

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\pi t + \frac{b_n}{n\pi} \sin n\pi t\right) \sin n\pi x, \tag{4}$$

[1]) По поводу общего случая см. книгу [3].

где

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^1 \varphi_0(x)\sin n\pi\, dx, \\
b_n &= 2\int_0^1 \varphi_1(x)\sin n\pi x\, dx.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Решение (4) назовем классическим, если при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t > 0$ оно непрерывно вместе со своими производными первых двух порядков. Это будет иметь место, если ряд (4) и ряды, полученные из него одно- или двукратным дифференцированием, будут сходиться равномерно.

Докажем, что такая равномерная сходимость имеет место, если выполнены следующие условия: 1) функции

$$\varphi_0^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, 2; \quad \varphi_1^{(k)}(x), \quad k = 0, 1$$

абсолютно непрерывны на сегменте $[0, 1]$;

2) $\varphi_0''' \in L_2(0, 1)$, $\varphi_1'' \in L_2(0, 1)$;

3) выполнены условия согласования

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(1) = 0, \ \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0, \ \varphi_0''(0) = \varphi_0''(1) = 0. \tag{6}$$

Заметим, что условия согласования необходимы для того, чтобы решение (4) было классическим. Первые два условия (6) вытекают из непрерывности функции $u(x, t)$ в точках $x = 0$, $t = 0$ и $x = 1$, $t = 0$; вторые два условия (6) — из непрерывности в тех же точках производной $\frac{\partial u}{\partial t}$. Третью пару можно получить так. Полагая в уравнении (1) $t = 0$, получим

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0} - \varphi''(x) = 0.$$

Дифференцируя тождества (2), получим

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=1} = 0.$$

Полагая здесь $t = 0$, а в предшествующем соотношении $x = 0$ и $x = 1$, получим третью часть условий (6).

Коль скоро условия 1) — 3) сформулированы, дальнейшее получается просто. Формулы для коэффициентов a_n и b_n

преобразуем интегрированием по частям

$$a_n = -\frac{2\varphi_0(x)\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \varphi_0'(x)\cos n\pi x\,dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \varphi_0'(x)\cos n\pi x\,dx = \frac{2\varphi_0'(x)\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \varphi_0''(x)\sin n\pi x\,dx = -\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \varphi_0''(x)\sin n\pi\,x\,dx =$$

$$= \frac{2\varphi_0''(x)\cos n\pi x}{n^3\pi^3}\Big|_0^1 - \frac{2}{n^3\pi^3}\int_0^1 \varphi_0'''(x)\cos n\pi x\,dx =$$

$$= -\frac{2}{n^3\pi^3}\int_0^1 \varphi_0'''(x)\cos n\pi x\,dx.$$

Точно так же

$$b_n = -\frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \varphi_1''(x)\sin n\pi x\,dx.$$

Обозначим

$$\alpha_n = -\frac{2}{\pi^3}\int_0^1 \varphi_0'''(x)\cos n\pi x\,dx, \quad \beta_n = -\frac{2}{\pi^3}\int_0^1 \varphi_1''(x)\sin n\pi x\,dx.$$

Тогда

$$a_n = \frac{\alpha_n}{n^3}, \quad b_n = \frac{\beta_n\pi}{n^2}.$$

Величины α_n и β_n суть коэффициенты Фурье функций $-\frac{\sqrt{2}}{\pi^3}\varphi_0'''(x)$ и $-\frac{\sqrt{2}}{\pi^3}\varphi_1''(x)$, принадлежащих пространству $L_2(0, 1)$. Отсюда следует, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2$ сходятся. Формула (4) принимает вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(\alpha_n\cos n\pi t + \beta_n\sin n\pi t)\sin n\pi x. \qquad (6)$$

Мажорантами для ряда (6) и для рядов его первых и вторых производных служат ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n^3}, \quad C' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n^2}, \quad C'' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n| + |\beta_n|}{n},$$

$$C', \ C'' = \text{const},$$

которые все сходятся. Отсюда следует, что сумма ряда (4) — функция $u(x, t)$ — непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными, что и требовалось доказать.

ГЛАВА 23

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 1. Некоторые свойства преобразования Фурье

В этом параграфе будут изложены простейшие свойства многомерного преобразования Фурье. Понятие об одномерном преобразовании Фурье и его основные свойства предполагаются известными.

Будем рассматривать функцию $u \in L(E_m)$, так что

$$\int_{E_m} |u(x)|\, dx < \infty.$$

Преобразование Фурье этой функции определим формулой

$$(Fu)(x) = \tilde{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} e^{-i(x,\, y)} u(y)\, dy. \qquad (1)$$

Здесь через (x, y) обозначено скалярное произведение в пространстве E_m

$$(x, y) = x_k y_k.$$

Функция $\tilde{u}$ определена и непрерывна в каждой точке $x \in E_m$ в силу абсолютной и равномерной сходимости интеграла (1).

Кратное преобразование Фурье можно получить, применяя последовательно одномерное преобразование Фурье: если построить последовательно функции

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\, e^{-ix_m y_m}\, dy_m,$$

$$u_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, x_m)\, e^{-ix_{m-1} y_{m-1}} dy_{m-1} =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, y_m)\, e^{-i(x_{m-1}y_{m-1} + x_m y_m)} dy_{m-1} dy_m,$$

. . . .

$$u_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{m-1}(y_1, x_2, \ldots, x_m)\, e^{-ix_1 y_1} dy_1 =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} u(y_1, y_2, \ldots, y_m)\, e^{-i(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_m y_m)}\, dy_1 dy_2 \ldots dy_m, \tag{2}$$

то, очевидно, $u_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \tilde{u}(x)$.

Теорема 23.1.1 *Если k — натуральное число и произведение $(1 + |x|^k)\, u(x)$ суммируемо в E_m, то преобразование Фурье функции $u(x)$ имеет непрерывные производные порядка, не превосходящего k, всюду в E_m.*

Так как $|u(x)| \leqslant (1 + |x|^k)\, |u(x)|$, то функция $u \in L(E_m)$ и преобразованная функция $\tilde{u}(x)$ существует и непрерывна в E_m.

Формально продифференцируем интеграл (1) l_1 раз по $x_1, \ldots, l_m$ раз по x_m; пусть

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_m = l \leqslant k.$$

Это приведет нас к интегралу

$$(-i)^l (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \ldots y_m^{l_m}\, u(y)\, e^{-i(x,y)} dy,$$

который сходится абсолютно и равномерно, так как

$$\left| y_1^{l_1} y_2^{l_2} \ldots y_m^{l_m} \right| \leqslant |y|^l,$$

и, следовательно, при достаточно больших $|y|$

$$\left| e^{-i(x,\,y)} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \ldots y_m^{l_m} u(y) \right| \leqslant |y|^l \, |u(y)| \leqslant (1 + |y|^k) \, |u(y)|.$$

Мажоранта не зависит от x и суммируема, поэтому дифференцирование под знаком интеграла законно

$$\frac{\partial^l \tilde{u}}{\partial y_1^{l_1} \partial y_2^{l_2} \ldots \partial y_m^{l_m}} = (-i)^l (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \ldots y_m^{l_m} e^{-i(x,\,y)} u(y)\, dy, \tag{3}$$

и производные порядка, не превосходящего k, непрерывны.

Теорема 23.1.2 *Пусть функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема k раз в любой точке $x \in E_m$. Пусть, далее, сама функция $u(x)$ и все ее производные порядка, не превосходящего k, суммируемы в E_m и обращаются в нуль на бесконечности. Тогда при достаточно больших значениях $|x|$*

$$\tilde{u}(x) = (Fu)(x) = O(|x|^{-k}).$$

Рассмотрим некоторую точку $x \in E_m$ и обозначим через j номер ее координаты, наибольшей по модулю. Интеграл (1) возьмем k раз по частям по переменной y_j. При этом внеинтегральные члены обратятся в нуль, и мы получим

$$\tilde{u}(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} (ix_j)^{-k} \int\limits_{E_m} \frac{\partial^k u}{\partial y_j^k} e^{-i(x,\,y)} dy.$$

Оценим $\tilde{u}(x)$ по модулю

$$|\tilde{u}(x)| \leqslant (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |x_j|^{-k} \int\limits_{E_m} \left| \frac{\partial^k u}{\partial y_j^k} \right| dy.$$

Координата x_j — наибольшая по модулю, поэтому

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2} \leqslant \sqrt{m}\, |x_j|, \qquad \frac{1}{|x_j|} \leqslant \frac{\sqrt{m}}{|x|},$$

и окончательно

$$|\tilde{u}(x)| \leqslant \frac{c}{|x|^k},$$

где можно, например, положить

$$c = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} m^{\frac{k}{2}} \int\limits_{E_m} \sum \left| \frac{\partial^k u(y)}{\partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2} \ldots \partial y_m^{k_m}} \right| dy;$$

суммирование распространено на все наборы неотрицательных индексов $k_1, k_2, \ldots, k_m$ таких, что $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = k$.

При некоторых условиях, наложенных на функцию $u(x)$, справедлива *формула обращения преобразования Фурье*

$$u(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \tilde{u}(y) e^{i(x, y)} dy. \tag{4}$$

Функция $\tilde{u}$, вообще говоря, не суммируема в E_m, поэтому необходимо каждый раз указывать, в каком смысле следует понимать интеграл (4). Разумеется, если $\tilde{u}$ суммируема в E_m, то этот интеграл можно понимать в обычном смысле. Справедлива, например, следующая теорема.

Теорема 23.1.3. *Пусть функция $u(x)$ отлична от нуля только в некоторой конечной области и имеет во всем пространстве непрерывные первые производные. Тогда справедлива формула обращения* (4), *в которой интеграл понимается в следующем смысле:*

$$\int\limits_{E_m} \tilde{u}(y) e^{i(x, y)} dy =$$

$$= \lim_{N_m \to \infty} \int\limits_{-N_m}^{N_m} \left\{ \ldots \lim_{N_2 \to \infty} \int\limits_{-N_2}^{N_2} \left\{ \lim_{N_1 \to \infty} \int\limits_{-N_1}^{N_1} \tilde{u}(y) e^{ix_1 y_1} dy_1 \right\} \times \right.$$

$$\left. \times e^{ix_2 y_2} dy_2 \ldots \right\} e^{ix_m y_m} dy_m. \tag{5}$$

Доказательство. Конечную область, в которой функция $u(x)$ отлична от нуля, можно поместить внутри некоторого куба. Пусть это будет куб

$$-a \leqslant x_k \leqslant a, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Очевидно, функция $u(x)$ суммируема по x_m при фиксированных значениях остальных аргументов и в каждой точке пространства имеет производную по x_m; применив теорему обращения однократного интеграла Фурье к функции u_1 (формула (2)), получим

$$u(x)=\lim_{N_m\to\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-N_m}^{N_m}u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\,e^{ix_my_m}dy_m.$$

Имеем, далее,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)|\,dx_{m-1}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\,e^{-ix_my_m}dy_m\right|dx_{m-1}\leqslant$$

$$\leqslant(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)|\,dx_{m-1}dy_m=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}|u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)|\,dx_{m-1}dy_m\leqslant\frac{Ma^2}{\sqrt{2\pi}};$$

через M обозначена верхняя граница значений функции u. Таким образом, функция $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$ суммируема по x_{m-1} при всех значениях остальных аргументов.

Докажем теперь, что производная $\frac{\partial u_1}{\partial x_{m-1}}$ существует в любой точке. Представим u_1 в виде

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-a}^{a}u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, y_m)\,e^{-ix_my_m}dy_m.$$

Справа — интеграл от непрерывно дифференцируемой функции, распространенный по конечному промежутку. Такой интеграл имеет непрерывные производные по всем аргументам, от которых он зависит, в частности по x_{m-1}.

Та же теорема обращения однократного интеграла Фурье дает теперь

$$u_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\lim_{N_{m-1}\to\infty}\int_{-N_{m-1}}^{N_{m-1}}u_2(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, x_m)\,e^{ix_{m-1}y_{m-1}}dy_{m-1}$$

и, следовательно,

$$u(x) = (2\pi)^{-1} \lim_{N_m \to \infty} \int_{-N_m}^{N_m} \left\{ \lim_{N_{m-1} \to \infty} \int_{-N_{m-1}}^{N_{m-1}} u_2(x_1, x_2, \ldots, y_{m-1}, y_m) \times \right.$$

$$\left. \times e^{ix_{m-1}y_{m-1}} dy_{m-1} \right\} e^{-ix_m y_m} dy_m.$$

Продолжая этот процесс, мы в конечном счете придем к формуле (5)[1].

§ 2. Вывод формулы Пуассона

Рассмотрим однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \tag{1}$$

при краевом условии

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{2}$$

Будем предполагать, что все выполняемые ниже действия законны, и в этом предположении выведем формулу для решения задачи Коши (1) — (2).

Обе части уравнения (1) подвергнем преобразованию Фурье по x

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \frac{\partial u(y, t)}{\partial t} e^{-i(x, y)} dy -$$

$$- (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial y_k^2} e^{-i(x, y)} dy = 0. \tag{3}$$

Интегрирование по y и дифференцирование по t независимы, поэтому вынесем в первом слагаемом дифференцирование

---

[1]) Более общая теорема доказана в книге [9]; там же приведены и другие теоремы, утверждающие в разных условиях справедливость формулы обращения (4).

по t за знак интеграла. В результате получим

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \frac{\partial u(y, t)}{\partial t} e^{-i(x, y)} dy = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{E_m} u(y, t) e^{-i(x, y)} dy = \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial t},$$

где $\tilde{u}(x, t)$ означает преобразование Фурье функции $u(x, t)$

$$\tilde{u}(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} u(y, t) e^{-i(x, y)} dy.$$

Каждый интеграл во втором слагаемом в (3) возьмем по частям

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial y_k^2} e^{-i(x, y)} dy = -(2\pi)^{-\frac{m}{2}} x_k^2 \int\limits_{E_m} u(y, t) e^{-i(x, y)} dy = -x_k^2 \tilde{u}(x, t).$$

Уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + |x^2| \tilde{u} = 0. \tag{4}$$

Это — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с независимой переменной t; координаты $x_1, x_2, \ldots, x_m$ играют роль параметров.

Интегрируя уравнение (4), получаем

$$\tilde{u}(x, t) = C(x) e^{-|x|^2 t}.$$

Полагая здесь $t = 0$, найдем

$$C(x) = \tilde{u}(x, 0).$$

Таким образом, функция $C(x)$ есть преобразование Фурье начального значения функции $u(x, t)$. В силу условия (2) $u(x, 0) = \varphi(x)$, следовательно,

$$C(x) = \tilde{\varphi}(x) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \varphi(y) e^{-i(x, y)} dy$$

и

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{\varphi}(x) e^{-|x|^2 t}.$$

Воспользуемся формулой обращения интеграла Фурье (1.4)

$$u(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{\varphi}(y)\, e^{-|y|^2 t + i(x, y)} dy.$$

Заменим здесь $\tilde{\varphi}(y)$ его выражением и изменим порядок интегрирования

$$u(x, t) = (2\pi)^{-m} \int_{E_m} \varphi(z) \left\{ \int_{E_m} e^{-|y^2|t + i(x-z, y)} dy \right\} dz. \tag{5}$$

Займемся вычислением внутреннего интеграла в формуле (5). Имеем

$$\int_{E_m} e^{-|y|^2 t + i(x-z, y)} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum_{k=1}^{m} [-y_k^2 t + i(x_k - z_k) y_k]} dy_1 dy_2 \ldots dy_m =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 t + i(x_k - z_k) y} dy. \tag{6}$$

В интеграле справа y — вещественная переменная, которая меняется в пределах $-\infty < y < \infty$.

Выделим k-й множитель в произведении (6). Обозначим для краткости $x_k - z_k = \alpha$. Дело сводится к вычислению интеграла

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 t + i\alpha y} dy =$$

$$= e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(y - \frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy.$$

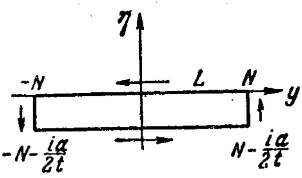

Рис. 46.

Рассмотрим плоскость комплексной переменной $\zeta = y + i\eta$. Для определенности примем, что $\alpha > 0$. Построим прямоугольник с контуром L, как показано на рис. 46. По теореме Коши

$$\int_L e^{-t\zeta^2} d\zeta = 0$$

или, в более подробной записи,

$$\int_{-N}^{+N} e^{-t\left(y-\frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy + \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(N+i\eta)^2}\, i\, d\eta - \int_{-N}^{N} e^{-ty^2} dy -$$

$$- \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(-N+i\eta)^2}\, i\, d\eta = 0.$$

Пусть теперь $N \to \infty$. При этом второй и четвертый интегралы стремятся к нулю. Действительно,

$$\left| \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(N\pm i\eta)^2}\, i\, d\eta \right| \leqslant \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{-t(N^2-\eta^2)}\, d\eta =$$

$$= e^{-tN^2} \int_{-\frac{\alpha}{2t}}^{0} e^{t\eta^2}\, d\eta \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(y-\frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2}\, dy.$$

Легко видеть, что случай $\alpha < 0$ приводит к тому же результату. Замена $y\sqrt{t} = s$ дает, далее,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ty^2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Теперь

$$e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(y-\frac{i\alpha}{2t}\right)^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x_k-z_k)^2}{4t}},$$

и интеграл (6) оказывается равным величине

$$\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{4t^2}\sum\limits_{k=1}^{m}(x_k-z_k)^2} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t^2}}, \quad r = |x - z|.$$

Подставив этот результат в формулу (5), получим так называемую *формулу Пуассона*

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m} \int\limits_{E_m} \varphi(z) e^{-\frac{r^2}{4t}} dz. \tag{7}$$

§ 3. Обоснование формулы Пуассона

Мы не будем пытаться доказывать законность действий предшествующего параграфа. Вместо этого мы непосредственно установим, что формула Пуассона дает ограниченное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (2.1) в единственном предположении, что начальная функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена в пространстве E_m.

Докажем прежде всего, что формула Пуассона определяет функцию, непрерывную при $t > 0$.

В пространстве $m+1$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ рассмотрим область, определенную неравенствами

$$|x^2| \leqslant a^2, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где a и T — положительные постоянные. Докажем, что входящий в формулу Пуассона интеграл

$$\int\limits_{E_m} \varphi(z) e^{-\frac{r^2}{4t}} dz \tag{2}$$

сходится равномерно по x и t в области (1). Возьмем достаточно большое число R и оценим интеграл

$$\int\limits_{|z|>R} \varphi(z) e^{-\frac{r^2}{4t}} dz.$$

Функция $\varphi(z)$ ограничена; пусть $|\varphi(z)| \leqslant M = \text{const}$. Далее $r = |x - z| \geqslant |z| - |x| \geqslant |z| - a$. Будем считать, что $R > 2a$. Тогда $a < \frac{R}{2} \leqslant \frac{|z|}{2}$ и $r > \frac{|z|}{2}$. Теперь

$$e^{-\frac{r^2}{4t}} < e^{-\frac{|z|^2}{16T}}.$$

и, следовательно,

$$\left| \int\limits_{|z|>R} \varphi(z) e^{-\frac{r^2}{4t}} dz \right| < M \int\limits_{|z|>R} e^{-\frac{|z|^2}{16T}} dz =$$

$$= M|S_1| \int\limits_R^\infty e^{-\frac{\rho^2}{16T}} \rho^{m-1} d\rho. \qquad (3)$$

Интеграл

$$\int\limits_0^\infty \rho^{m-1} e^{-\frac{\rho^2}{16T}} d\rho$$

сходится, поэтому интеграл справа в (3) сколь угодно мал при R достаточно большом; так как он не зависит ни от x, ни от t, то интеграл (2) сходится равномерно. Отсюда следует, что функция, определяемая формулой Пуассона, непрерывна при $t>0$.

Докажем, что при $t>0$ функция $u(x, t)$ бесконечно дифференцируема по t и по координатам точки x и что все производные можно получить, дифференцируя формулу Пуассона под знаком интеграла.

Рассмотрим, например, производную $\frac{\partial u}{\partial t}$. Если формально продифференцировать по t правую часть формулы Пуассона, то получится выражение

$$-\frac{m}{2^{m+1}\pi^{\frac{m}{2}} t^{\frac{m+2}{2}}} \int\limits_{E_m} \varphi(z) e^{-\frac{r^2}{4t}} dz + \frac{1}{2^{m+2}\pi^{\frac{m}{2}} t^{\frac{m+4}{2}}} \int\limits_{E_m} r^2 \varphi(z) e^{-\frac{r^2}{4t}} dz. \qquad (4)$$

Как мы видели, первый интеграл сходится равномерно в области (1). Точно так же проверяется, что в той же области равномерно сходится и второй интеграл. Отсюда, как обычно, следует, что производная существует, непрерывна и совпадает с выражением (4). Существование остальных производных устанавливается аналогично.

Непосредственным дифференцированием доказывается, что функция, определяемая формулой Пуассона, удовлетворяет уравнению теплопроводности (2.1).

Остается доказать, что функция $u(x, t)$ ограничена и удовлетворяет начальному условию (2.2)

$$\lim_{t\to 0} u(x, t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m} \int\limits_{E_m} \varphi(z) e^{-\frac{r^2}{4t}} dz = \varphi(x).$$

Сделаем замену $z = x + 2\sqrt{t}\,\xi$, тогда формула Пуассона примет вид

$$u(x, t) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \varphi(x + 2\sqrt{t}\,\xi) e^{-|\xi|^2} d\xi. \tag{5}$$

По известной формуле

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho^2} d\rho = \sqrt{\pi}$$

легко находим

$$\pi^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} e^{-|\xi|^2} d\xi = 1. \tag{6}$$

Теперь из формулы (5) следует

$$|u(x, t)| \leqslant M\pi^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} e^{-|\xi|^2} d\xi = M,$$

и функция $u(x, t)$ ограничена. Далее по формулам (5) и (6)

$$u(x, t) - \varphi(x) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} [\varphi(x + 2\sqrt{t}\,\xi) - \varphi(x)] e^{-|\xi|^2} d\xi. \tag{7}$$

Интеграл в формуле (7) разобьем на два интеграла, взятые по областям $|\xi| > R$ и $|\xi| < R$, где R — некоторая постоянная. Имеем

$$\left| \pi^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{|\xi| > R} [\varphi(x + 2\sqrt{t}\,\xi) - \varphi(x)] e^{-|\xi|^2} d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2M\pi^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{|\xi| > R} e^{-|\xi|^2} d\xi = 2M\pi^{-\frac{m}{2}} |S_1| \int\limits_R^{\infty} \rho^{m-1} e^{-\rho^2} d\rho.$$

Интеграл

$$\int_0^\infty \rho^{m-1} e^{-\rho^2} d\rho$$

сходится, и можно выбрать такое $R_0(\varepsilon)$, что при $R > R_0(\varepsilon)$ будет

$$2M\pi^{-\frac{m}{2}} |S_1| \int_R^\infty \rho^{m-1} e^{-\rho^2} d\rho < \varepsilon.$$

Зафиксируем какое-нибудь $R > R_0(\varepsilon)$. Тогда можно найти такое $t_0(\varepsilon)$, чтобы при $0 < t < t_0(\varepsilon)$ и для любого ξ, $|\xi| \leqslant R$, было

$$|\varphi(x + 2\sqrt{t}\,\xi) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь

$$\left| \pi^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{|\xi| < R} [\varphi(x + 2\sqrt{t}\,\xi) - \varphi(x)] e^{-|\xi|^2} d\xi \right| <$$

$$< \pi^{-\frac{m}{2}} \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{E_m} e^{-|\xi|^2} d\xi = \frac{\varepsilon}{2},$$

и окончательно

$$|u(x, t) - \varphi(x)| < \varepsilon, \qquad 0 < t < t_0(\varepsilon).$$

Этим завершено обоснование формулы Пуассона.

Если предстоит интегрировать неоднородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t) \tag{8}$$

при условии Коши (2.2), то, применяя преобразование Фурье по координатам, можно получить дифференциальное уравнение

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + x^2 \tilde{u} = \tilde{f}(x, t) \tag{9}$$

и начальное условие

$$\tilde{u}(x, 0) = \tilde{\varphi}(x); \tag{10}$$

в уравнении (9)

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{E_m} f(y, t) e^{-i(x, y)} dy.$$

Уравнениям (9) и (10) удовлетворяет функция

$$\tilde{u}(x, t) = e^{-|x|^2 t}\tilde{\varphi}(x) + \int_0^t e^{-x^2(t-\tau)}\tilde{f}(x, \tau)\,d\tau.$$

Применив к ней обратное преобразование Фурье, получим в конечном счете следующее выражение для искомой функции:

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m}\int_{E_m} \varphi(z)\,e^{-\frac{r^2}{4t}}\,dz +$$
$$+ \int_0^t \int_{E_m} f(z, \tau)\frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^m}\,e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}}\,dz\,d\tau, \qquad r = |z - x|.$$

§ 4. Бесконечная скорость теплопередачи

Из формулы Пуассона вытекает, что тепло распространяется с бесконечной скоростью. Действительно, представим себе, что теплопередающая среда заполняет все пространство E_m. Пусть в начальный момент вся среда, кроме некоторой конечной области D, имеет нулевую температуру ($\varphi(x) \equiv 0$), а точки области D нагреты до некоторой температуры $\varphi(x) > 0$. В любой точке $x \in E_m$ и в любой момент времени $t > 0$ температура среды $u(x, t)$ определяется формулой Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m}\int_D \varphi(z)\,e^{-\frac{r^2}{4t}}\,dz; \tag{1}$$

интеграл по $E_m \setminus D$ исчезает, потому что в этой области $\varphi(x) = 0$. Но из формулы (1) ясно, что $u(x, t) > 0$. Таким образом, как бы ни было мало t и как бы ни была далека точка x от области D, тепло из этой области за промежуток времени t успевает дойти до точки x. Это и означает, что тепло распространяется с бесконечной скоростью.

Этот физически противоречивый вывод на практике осложнений не доставляет. Если $|x|$ велик, а t мало, то в формуле (1) отрицательный показатель $-\frac{r^2}{4t}$ велик по абсолютной величине, и значение температуры $u(x, t)$ пренебрежимо мало. Практически, следовательно, формула Пуассона дает (с точностью до пренебрежимо малых величин) некоторую конечную скорость распространения тепла.

ГЛАВА 24

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

§ 1. Применение преобразования Фурье

Будем искать решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \tag{1}$$

во всем пространстве E_m и в моменты времени $t > 0$. Пусть искомая функция удовлетворяет начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{2}$$

Примем, что все выполняемые ниже операции законны. К обеим частям уравнений (1) и (2) применим преобразование Фурье. Поступая так же, как в случае уравнения теплопроводности, мы придем к следующей задаче Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2} + |x|^2\tilde{u} = 0, \tag{3}$$

$$\tilde{u}\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_0(x), \qquad \frac{d\tilde{u}}{dt}\bigg|_{t=0} = \tilde{\varphi}_1(x); \tag{4}$$

символ $\sim$ означает преобразование Фурье.

Общий интеграл уравнения (3) имеет вид

$$\tilde{u}(x, t) = A(x)\cos|x|t + B(x)\sin|x|t.$$

При $t = 0$ находим

$$\tilde{\varphi}_0(x) = A(x), \qquad \tilde{\varphi}_1(x) = |x|B(x),$$

и мы получаем решение задачи (3) — (4)

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{\varphi}_0(x) \cos |x| t + \tilde{\varphi}_1(x) \frac{\sin |x| t}{|x|}. \tag{5}$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, придем к следующей формуле для искомого решения:

$$u(x, t) = \\ = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \left[\tilde{\varphi}_0(y) \cos |y| t + \tilde{\varphi}_1(y) \frac{\sin |y| t}{|y|} \right] e^{i(x, y)} dy. \tag{6}$$

Обоснование формулы (6) проведем при следующих предположениях. Мы примем, что функция $\varphi_0(x)$ имеет во всем пространстве E_m непрерывные производные до порядка, $m+3$ включительно, а функция $\varphi_1(x)$ — непрерывные производные до порядка $m+2$ включительно. Далее мы примем, что сами начальные функции и их производные только что указанных порядков отличны от нуля лишь в некоторой конечной области пространства E_m.

Из теоремы 23.1.2 вытекает, что при достаточно больших $|x|$ верны оценки

$$\tilde{\varphi}_0(x) = O(|x|^{-m-3}), \quad \tilde{\varphi}_1(x) = O(|x|^{-m-2}).$$

В таком случае подынтегральная функция в (6) имеет на бесконечности оценку $O(|y|^{-m-3})$, первые и вторые производные подынтегральной функции по $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ имеют оценки $O(|y|^{-m-2})$ и $O(|y|^{-m-1})$ соответственно. Во всех случаях эти оценки равномерны относительно x и t. Отсюда следует, что как интеграл (6), так и интегралы, полученные из него дифференцированием, однократным или двукратным, сходятся равномерно по x и t. А в таком случае функция (6) непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема по координатам и времени, причем производные можно получить дифференцированием под знаком интеграла.

Теперь нетрудно доказать, что функция (6) удовлетворяет начальным условиям (2) и волновому уравнению (1). Полагая в (6) $t=0$, найдем

$$u(x, 0) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \tilde{\varphi}_0(y) e^{i(x, y)} dy = \varphi_0(x);$$

нетрудно видеть, что условия теоремы 23.1.3 в данном случае выполнены. Продифференцировав формулу (6) по t и положив $t=0$, найдем также

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \tilde{\varphi}_1(y)\, e^{i(x, y)}\, dy = \varphi_1(x).$$

Далее

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} =$$

$$= -(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} |y|^2 \left[\tilde{\varphi}_0(y) \cos|y|\, t + \tilde{\varphi}_1(y) \frac{\sin|y|\, t}{|y|}\right] e^{i(x, y)}\, dy,$$

$$\Delta u = -(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} |y|^2 [\tilde{\varphi}_0(y) \cos|y|\, t +$$

$$+ \tilde{\varphi}_1(y) \frac{\sin|y|\, t}{|y|}\Big] e^{i(x, y)}\, dy = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

функция (6), следовательно, удовлетворяет волновому уравнению.

Тот же прием — сведение к обыкновенному дифференциальному уравнению с помощью преобразования Фурье — можно применить и к неоднородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t). \tag{7}$$

Пусть для этого уравнения поставлена задача Коши с начальными условиями (2). Применим преобразование Фурье по координатам. Обозначая

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{E_m} f(y, t)\, e^{-i(x, y)}\, dy,$$

получим

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2} + |x|^2\, \tilde{u} = \tilde{f}(x, t). \tag{8}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (4), есть функция

$$\tilde{u}(x, t) = \tilde{\varphi}_0(x) \cos |x| t + \tilde{\varphi}_1(x) \frac{\sin |x| t}{|x|} + \\ + \int_0^t \tilde{f}(x, \tau) \sin \frac{|x|(t-\tau)}{|x|} d\tau. \quad (9)$$

Если функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $f(x, t)$ имеют достаточное число производных и отличны от нуля только в конечной области изменения переменных[1]), то обратное преобразование Фурье, примененное к формуле (9), дает решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения.

§ 2. Преобразование решения

Формула (1.6), дающая решение задачи Коши для волнового уравнения, может быть улучшена. Прежде всего, если заменить функции $\tilde{\varphi}_0(y)$ и $\tilde{\varphi}_1(y)$ их выражениями через φ_0 и φ_1 в виде интегралов Фурье, то получатся интегралы кратности $2m$; на самом деле можно обойтись интегралами гораздо меньшей кратности. Далее, для обоснования формулы (1.6) пришлось потребовать существования производных излишне высокого порядка от начальных функций; излишне также требование, чтобы эти функции были отличны от нуля только в конечной области. Наконец, из вида формулы (1.6) сразу не ясно, что значение $u(x, t)$ определяется только через значения начальных функций в области зависимости (§ 4 гл. 21).

Мы постараемся преобразовать формулу (1.6) так, чтобы она стала более доступной для анализа. Окончательные формулы будут выведены в следующем параграфе для случая $m=3$; здесь будут выполнены некоторые предварительные преобразования для общего случая.

Введем обозначение

$$T_\omega(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \tilde{\omega}(y) \frac{\sin |y| t}{|y|} e^{i(x, y)} dy. \quad (1)$$

[1]) Эти требования можно существенно ослабить.

Если дифференцирование под знаком интеграла законно, то

$$\frac{\partial}{\partial t} T_\omega(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \tilde{\omega}(y) e^{i(x, y)} \cos|y| t dy,$$

и формуле (1.6) можно придать несколько более удобный вид

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} T_{\varphi_0}(x, t) + T_{\varphi_1}(x, t). \qquad (2)$$

Нашей задачей будет придать выражению $T_\omega(x, t)$ по возможности простую форму. Заменяя $\tilde{\omega}(y)$ его выражением

$$\tilde{\omega}(y) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \omega(z) e^{-i(y, z)} dz,$$

получаем

$$T_\omega(x, t) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \frac{\sin|y|t}{|y|} e^{i(x, y)} \left\{ \int\limits_{E_m} \omega(z) e^{-i(y, z)} dz \right\} dy.$$

Менять здесь порядок интегрирования нельзя — это привело бы к расходящемуся интегралу. Чтобы избежать этой трудности, введем в рассмотрение новую величину

$$T_\omega(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{E_m} \tilde{\omega}(y) e^{-\lambda|y|} \frac{\sin|y|t}{|y|} e^{i(x, y)} dy, \qquad \lambda > 0. \qquad (3)$$

Пусть функция $\omega(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и $\varphi_1(x)$ (см. § 1). Из этих условий и из теоремы 23.1.2 вытекает, что $\tilde{\omega} \in L(E_m)$. Пусть t меняется на сегменте $[0, \bar{t}]$, $\bar{t} = \text{const} > 0$. Из неравенства $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$ вытекает, что подынтегральная функция в (3) имеет суммируемую мажоранту $\bar{t}|\tilde{\omega}(y)|$, которая не зависит от x, t, λ. Отсюда следует, что

$$T_\omega(x, t, \lambda) \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} T_\omega(x, t) \qquad (4)$$

равномерно по x и t, когда x меняется в E_m, а t — в любом конечном промежутке.

В интеграле

$$T_\omega(x, t, \lambda) = \\ = (2\pi)^{-m} \int\limits_{E_m} e^{-\lambda|y| + i(x, y)} \frac{\sin|y|t}{|y|} \left\{ \int\limits_{E_m} \omega(z) e^{-i(z, y)}\, dz \right\} dy \qquad (5)$$

можно изменить порядок интегрирования

$$T_\omega(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{E_m} \omega(z) \left\{ \int\limits_{E_m} e^{-\lambda|y| + i(x-z, y)} \frac{\sin|y|t}{|y|}\, dy \right\} dz.$$

Внутренний интеграл сходится; вычислим его.

Обозначим $x - z = p$ и

$$\Phi(p, t, \lambda) = \int\limits_{E_m} e^{-\lambda|y| + i(p, y)} \frac{\sin|y|t}{|y|}\, dy. \qquad (6)$$

Тогда

$$\frac{\partial\Phi(p, t, \lambda)}{\partial t} = \int\limits_{E_m} e^{-\lambda|y| + i(p, y)} \cos|y|t\, dy; \qquad (7)$$

при этом из формулы (6) видно, что $\Phi|_{t=0} = 0$. Заметим, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\Phi_1(p, t, \lambda) + \frac{1}{2}\Phi_1(p, -t, \lambda), \qquad (8)$$

где

$$\Phi_1(p, t, \lambda) = \int\limits_{E_m} \exp\left\{-(\lambda - it)|y| + i(p, y)\right\} dy. \qquad (9)$$

Введем сферические координаты с центром в начале координат. Обозначим эти координаты через $\rho, \nu_1, \ldots, \nu_{m-1}, \nu_{m-1}$, так что $|y| = \rho$. При этом $dy = \rho^{m-1}\, d\rho\, dS_1$. Обозначим еще через r расстояние между точками x и z: $r = |x - z| = |p|$, и через γ — угол между векторами p и y. Тогда

$$(p, y) = r\rho\cos\gamma.$$

Теперь

$$\Phi_1(p, t, \lambda) = \int\limits_{S_1} \left\{ \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda - it - ir\cos\gamma)\rho} \rho^{m-1}\, d\rho \right\} dS_1 = \\ = (m-1)! \int\limits_{S_1} \frac{dS_1}{(\lambda - it - ir\cos\gamma)^m}. \qquad (10)$$

Выберем декартовы координаты так, чтобы ось Oy_1 была направлена по вектору p; остальные оси можно выбрать произвольно, но так, чтобы система координат оставалась прямоугольной. При таком выборе координат $\nu_1 = \gamma$; общей формуле

$$dS_1 = \sin^{m-2}\nu_1 \sin^{m-3}\nu_2 \ldots \sin\nu_{m-2}\, d\nu_1 d\nu_2 \ldots d\nu_{m-1}$$

можно придать вид

$$dS_1 = \sin^{m-2}\gamma\, d\gamma\, d\sigma_1,$$

где

$$d\sigma_1 = \sin^{m-3}\nu_2 \ldots \sin\nu_{m-2}\, d\nu_2 \ldots d\nu_{m-1}$$

есть элемент площади поверхности единичной сферы в $(m-1)$-мерном пространстве. Подставив это в формулу (10), получим

$$\Phi_1(p, t, \lambda) = (m-1)!\,|\sigma_1| \int_0^\pi \frac{\sin^{m-2}\gamma\, d\gamma}{(\lambda - it - ir\cos\gamma)^m},$$

или, так как в $(m-1)$-мерном пространстве площадь поверхности единичной сферы равна

$$|\sigma_1| = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)},$$

то

$$\Phi_1(p, t, \lambda) = \frac{2(m-1)!\,\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{\sin^{m-2}\gamma\, d\gamma}{(\lambda - it - ir\cos\gamma)^m}. \qquad (11)$$

Последний интеграл элементарный и легко может быть вычислен Однако в общем случае результат оказывается несколько громоздким, поэтому мы ограничимся дальше лишь случаем $m = 3$.

§ 3. Случай трехмерного пространства

Если $m=3$, то $\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)=\Gamma(1)=1$, и формула (2.11) дает

$$\Phi_1(p,\ t,\ \lambda)=4\pi\int_0^\pi \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{(\lambda-it-ir\cos\gamma)^3}=$$

$$=\frac{2\pi}{ir}\left[\frac{1}{(\lambda-it-ir)^2}-\frac{1}{(\lambda-it+ir)^2}\right].$$

По формуле (2.8)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\pi}{ir}\left[\frac{1}{(\lambda-it-ir)^2}-\frac{1}{(\lambda-it+ir)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(\lambda+it-ir)^2}-\frac{1}{(\lambda+it+ir)^2}\right],$$

и так как $\Phi|_{t=0}=0$, то

$$\Phi(p,\ t,\ \lambda)=\frac{8\pi t\lambda}{[\lambda^2+(t-r)^2]\,[\lambda^2+(t+r)^2]}.$$

Отсюда по формуле (2.5)

$$T_\omega(x,\ t,\ \lambda)=\frac{t}{\pi^2}\int_{E_3}\frac{\lambda\omega(z)\,dz}{[\lambda^2+(t-r)^2]\,[\lambda^2+(t+r)^2]}$$

и окончательно

$$T_\omega(x,\ t)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{t}{\pi^2}\int_{E_3}\frac{\lambda\omega(z)\,dz}{[\lambda^2+(t-r)^2]\,[\lambda^2+(t+r)^2]}. \tag{1}$$

Заметим, что если $r\neq t$, то при $\lambda\to 0$ подынтегральная функция стремится к нулю.

Введем сферические координаты с центром в точке x, одной из них будет r; при этом $dz=r^2\,dr\,dS_1$ и

$$T_\omega(x,\ t)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{t}{\pi^2}\int_{S_1}\left\{\int_0^\infty\frac{\lambda\omega(z)\,r^2\,dr}{[\lambda^2+(t-r)^2]\,[\lambda^2+(t+r)^2]}\right\}dS_1. \tag{2}$$

Предельный переход в интеграле (2) будем проводить нестрого, без достаточного обоснования. В нем нет необходимости, потому что строгое обоснование будет потом дано для окончательной формулы (так называемой формулы Кирхгофа).

Во внутреннем интеграле разобьем промежуток интегрирования на три

$$(0, \infty) = (0, t-\delta) \cup [t-\delta, t+\delta] \cup (t+\delta, \infty);$$

здесь δ — постоянная, такая, что $0 < \delta < t$.

Формула (2) примет вид

$$T_\omega(x, t) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{t}{\pi^2} \left\{ \int_{S_1} \left[\int_0^{t-\delta} \frac{\lambda\omega(z)\, r^2 dr}{[\lambda^2 + (t-r)^2][\lambda^2 + (t+r)^2]} \right] dS_1 + \right.$$

$$+ \int_{S_1} \left[\int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{\lambda\omega(z)\, r^2\, dr}{[\lambda^2 + (t-r)^2][\lambda^2 + (t+r)^2]} \right] dS_1 +$$

$$\left. + \int_{S_1} \left[\int_{t+\delta}^{\infty} \frac{\lambda\omega(z)\, r^2 dr}{[\lambda^2 + (t-r)^2][\lambda^2 + (t+r)^2]} \right] dS_1 \right\}. \qquad (2a)$$

В промежутках $(0, t-\delta)$ и $(t+\delta, \infty)$ величина $|r-t| > \delta$, и в этих промежутках подынтегральная функция стремится к нулю, когда $\lambda \to 0$. Примем, не доказывая этого, что первое и третье слагаемые в формуле (2а) также стремятся к нулю вместе с λ. Мы придем тогда к более простому выражению для $T_\omega(x, t)$:

$$T_\omega(x, t) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{t}{\pi^2} \int_{S_1} \left\{ \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{\lambda\omega(z)\, r^2\, dr}{[\lambda^2 + (r-t)^2][\lambda^2 + (r+t)^2]} \right\} dS_1. \quad (3)$$

Обозначим введенные выше сферические координаты точки z через r, ϑ, φ и будем писать

$$\omega(z) = \omega(x + r\theta),$$

где θ — точка единичной сферы с угловыми координатами ϑ и φ. Подынтегральную функцию в (3) представим в виде произведения двух множителей

$$\frac{\lambda}{\lambda^2 + (t-r)^2} \, \frac{\omega(z)\, r^2}{\lambda^2 + |t+r|^2}.$$

Если величина δ достаточно мала, то в интеграле (3) r мало отличается от t; при λ и δ достаточно малых второй из написанных выше множителей мало отличается от $\frac{1}{4}\omega(x + \theta t)$.

Заменим поэтому второй множитель указанной величиной и примем, что

$$T_\omega(x, t) = \frac{t}{4\pi^2} \lim_{\lambda\to 0} \int\limits_{S_1} \omega(x + t\theta) \left\{ \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{\lambda\, dr}{\lambda^2 + (t-r)^2} \right\} dS_1. \quad (4)$$

Далее

$$\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{\lambda\, dr}{\lambda^2 + (t-r)^2} = 2\operatorname{arctg} \frac{\delta}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \pi$$

и, следовательно,

$$T_\omega(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_1} \omega(x + \theta t)\, dS_1 =$$

$$= \frac{t}{4\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \omega(x + \theta t) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi. \quad (5)$$

Этому интегралу можно придать и несколько иной вид. Уравнение $r = t$ есть уравнение сферы S_t радиуса t с центром в точке x; при этом $dS_t = t^2 dS_1$, и формула (5) принимает вид

$$T_\omega(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t} \omega(z)\, dS_t. \quad (6)$$

Теперь по формуле (2.2) мы получаем решение задачи Коши для волнового уравнения в трехмерном пространстве в виде

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t} \varphi_0(z)\, dS_t + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t} \varphi_1(z)\, dS_t; \quad (7)$$

здесь, как об этом было сказано выше, S_t есть сфера $|z - x| = t$. Формула (7) называется *формулой Кирхгофа.*

§ 4. Обоснование формулы Кирхгофа

Докажем, что формула Кирхгофа решает задачу Коши для волнового уравнения, если в любой точке пространства E_3 функция $\varphi_0(z)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно, а функция $\varphi_1(z)$ — непрерывные производные первого и второго порядка; никаких ограничений на поведение начальных функций и их производных на бесконечности накладывать нет необходимости.

Пусть $\omega(z)$ — функция, имеющая в любой точке пространства непрерывные первые и вторые производные. Рассмотрим функцию

$$u_1(x,\ t) = T_\omega(x,\ t) = \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S_t} \omega(z)\,dS_t. \tag{1}$$

Если воспользоваться формулой (3.5), то функции $u_1(x,\ t)$ можно дать и другое выражение:

$$u_1(x,\ t) = \frac{t}{4\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \omega(x+\theta t)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi. \tag{2}$$

Очевидно,

$$u_1(x,\ 0) = u_1(x,\ t)\big|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Составим производную $\frac{\partial u_1}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \omega(x+t\theta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi + {}$$
$$+ \frac{t}{4\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial\omega}{\partial x_k}\theta_k\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi. \tag{4}$$

Как обычно, по повторяющемуся индексу k производится суммирование — на этот раз в пределах от 1 до 3; через θ_k обозначены составляющие вектора θ. Их значения суть

$$\theta_1 = \cos\vartheta, \qquad \theta_2 = \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad \theta_3 = \sin\vartheta\sin\varphi.$$

Полагая в формуле (4) $t=0$, находим

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\omega(x)}{4\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = \omega(x). \tag{5}$$

Итак, функция $u_1(x,\ t)$ удовлетворяет начальным условиям (3) и (5). Докажем еще, что $u_1(x,\ t)$ удовлетворяет волновому уравнению.

Формулу (4) преобразуем так:

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \frac{u_1(x, t)}{t} + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S_t} \frac{\partial \omega(z)}{\partial z_k}\theta_k\, dS_t, \quad z = x + t\theta.$$

Заметим, что $\theta_k = \cos(r, x_k) = \cos(\nu, x_k)$, где ν — внешняя нормаль к сфере S_t. По формуле Остроградского

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \frac{u_1(x, t)}{t} + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{Ш_t} \Delta_z \omega\, dz =$$

$$= \frac{u_1(x, t)}{t} + \frac{I(x, t)}{4\pi t}. \tag{6}$$

Здесь $Ш_t$ — шар радиуса t с центром в точке x,

$$I(x, t) = \int\limits_{Ш_t} \Delta_z \omega\, dz. \tag{7}$$

Дифференцируя еще раз по t и воспользовавшись формулой (6), получаем

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t}\frac{\partial I(x, t)}{\partial t}. \tag{8}$$

Представив формулу (7) в виде

$$I(x, t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} r^2 \Delta_z \omega \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

и продифференцировав по t, найдем

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = \int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} t^2 \Delta_z \omega \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \int\limits_{S_t} \Delta_z \omega\, dS_t.$$

С другой стороны, дифференцируя формулу (2) по координатам, найдем

$$\Delta u_1(x, t) = \frac{t}{4\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \Delta_z \omega \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S_t} \Delta_z \omega\, dS_t,$$

$$z = x + t\theta, \tag{9}$$

и из формул (8) и (9) вытекает, что

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \Delta u_1 = 0. \tag{10}$$

Допустим теперь, что функция $\omega(z)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно, и рассмотрим функцию

$$u_2(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} T_\omega(x, t) = \frac{\partial u_1}{\partial t}. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что функция u_2 имеет непрерывные вторые производные. Она удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \Delta u_2 = \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} - \Delta \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \Delta u_1\right) = 0. \tag{12}$$

Формула (5) показывает, что

$$u_2(x, t)|_{t=0} = \omega(x). \tag{13}$$

Далее

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \Delta u_1|_{t=0} = \Delta u_1(x, 0),$$

что равно нулю в силу соотношения (3). Таким образом,

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{14}$$

Полагая теперь один раз $\omega = \varphi_0$, другой раз $\omega = \varphi_1$ и используя соотношения (3), (5), (13) и (14), а также уравнения (10) и (12), мы убедимся, что функция, определяемая формулой Кирхгофа, удовлетворяет как волновому уравнению, так и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

§ 5. Задний фронт волны

Формула Кирхгофа позволяет обнаружить интересную особенность явления распространения волн в трехмерном пространстве — возникновение так называемого *заднего фронта* волны. Особенность эту нетрудно выявить, исходя из того, что формула Кирхгофа содержит интегрирование только по сфере переменного радиуса.

Ясно, что в формуле Кирхгофа $u(x, t) = 0$, если $\varphi_0(z) \equiv 0$, $\varphi_1(z) \equiv 0$ при $z \in S_t$. Допустим теперь, что начальные функции отличны от нуля только в некоторой области D пространства E_3 (рис. 47). Пусть точка x находится, например, вне области D. Обозначим через δ и δ_1 соответственно наименьшее и наибольшее расстояния от точки x до точек границы области D.

В моменты времени, близкие к начальному, именно пока $t < \delta$, сфера S_t не пересекается с областью D (сфера S_{t_1} на рис. 47), на этой сфере начальные функции равны нулю и $u(x, t) = 0$. Если $\delta < t < \delta_1$, то сфера S_t пересекает область D (сфера S_{t_2} на рис. 47); на той части сферы S_t, которая лежит внутри D, начальные функции отличны от тождественного нуля и, вообще говоря, $u(x, t) \neq 0$. Оба эти случая были выявлены нами в свое время, в § 5 гл. 21, для волнового уравнения в пространстве любого числа измерений.

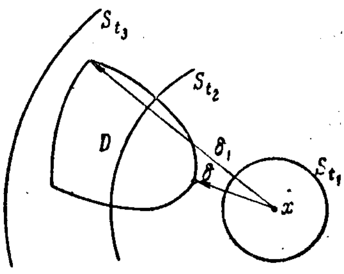

Рис. 47.

Пусть теперь $t > \delta_1$. Сфера S_t не пересекается с областью D (сфера S_{t_3} на рис. 47) и опять $u(x, t) = 0$; точка x находилась в состоянии возмущения в течение промежутка времени $\delta < t < \delta_1$ и затем вернулась в состояние покоя.

Если рассмотреть колеблющуюся среду в момент времени, не слишком близкий к начальному, то мы обнаружим в этой среде точки трех типов: одни точки находятся в покое, потому что возмущение до них еще не дошло, другие точки находятся в состоянии возмущения, третьи опять находятся в покое — через эти точки возмущение уже прошло. Передний фронт волны (см. § 5 гл. 21) определяет область, до которой возмущение еще не дошло, от области, находящейся в состоянии возмущения. Поверхность, отделяющая область возмущения от области, через которую возмущение уже прошло, называется задним фронтом волны. Если, как мы это сделали выше, обозначить через δ_1 наибольшее расстояние от точки x до границы области D, то задний фронт волны проходит через точку x в момент времени $t = \delta_1$.

Если волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \qquad a = \text{const},$$

то все сказанное в настоящем параграфе остается в силе, надо только заменить t на at.

§ 6. Случай $m = 2$ (уравнение колебаний мембраны)

Решение задачи Коши для уравнения колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u\Big|_{t=0} &= \varphi_0(x) = \varphi_0(x_1, x_2), \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} &= \varphi_1(x) = \varphi_1(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{2}$$

можно получить из формулы Кирхгофа, если принять, что в этой формуле начальные функции φ_0 и φ_1 не зависят от координаты x_3.

Рассмотрим функцию

$$T_\omega(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S_t} \omega(z)\, dS_t$$

и допустим, что $\omega(z)$ не зависит от третьей координаты z_3, т. е. $\omega(z) = \omega(z_1, z_2)$.

Сферу S_t разобьем на две полусферы плоскостью, проходящей через точку x параллельно плоскости (x_1, x_2); на эту последнюю каждая полусфера проектируется в виде круга радиуса t с центром в точке (x_1, x_2). Обозначим этот круг через C_t. Раз $\omega(z)$ не зависит от z_3, то интегралы по обеим полусферам равны между собой, и каждый из них можно заменить интегралом по кругу C_t, если учесть, что

$$dS_t = \frac{dz_1 dz_2}{|\cos(\nu, z_3)|},$$

где ν — внешняя нормаль к сфере S_t. Таким образом,

$$T_\omega(x, t) = \frac{1}{2\pi t} \iint\limits_{C_t} \frac{\omega(z_1, z_2)}{|\cos(\nu, z_3)|}\, dz_1 dz_2.$$

Нормаль к сфере направлена по радиусу, поэтому

$$|\cos(\nu, z_3)| = \frac{|z_3 - x_3|}{t} = \frac{1}{t}\sqrt{t^2 - (z_1 - x_1)^2 - (z_2 - x_2)^2}$$

и

$$T_\omega(x, t) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_t} \frac{\omega(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2}{\sqrt{t^2 - (z_1 - x_1)^2 - (z_2 - x_2)^2}}.$$

Теперь формула Кирхгофа переходит в формулу

$$u(x, t) = u(x_1, x_2, t) = \\ = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_t} \frac{\varphi_0(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2}{\sqrt{t^2 - (z_1 - x_1)^2 - (z_2 - x_2)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{C_t} \frac{\varphi_1(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2}{\sqrt{t^2 - (z_1 - x_1)^2 - (z_2 - x_2)^2}}, \qquad (3)$$

решающую задачу Коши для уравнения колебаний мембраны; здесь C_t — двумерный круг, определенный неравенством $|z - x| \leqslant t$.

§ 7. Уравнение колебаний струны

Из формулы (6.3) можно получить решение задачи Коши для уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \qquad (1)$$

проще, однако, получить это решение непосредственно.

Нетрудно получить формулу, содержащую все решения уравнения струны. Для этого введем новые переменные $\xi = x + t$, $\eta = x - t$. Уравнение (1) преобразуется к следующему:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Представив последнее уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0,$$

находим отсюда $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \vartheta(\xi)$, где $\vartheta(\xi)$ — произвольная функция.

Интегрируя по ξ, получаем

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta), \quad \theta_1(\xi) = \int \vartheta(\xi)\,d\xi,$$

где θ_1 и θ_2 — произвольные дифференцируемые функции. Возвращаясь к старым переменным, приходим к общему решению уравнения (1)

$$u(x, t) = \theta_1(x+t) + \theta_2(x-t). \tag{2}$$

Формула (2) называется *интегралом Даламбера*.

Найдем решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши:

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Полагая в формуле (2) $t=0$, получаем

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x). \tag{3}$$

Дифференцируя формулу (2) по t и полагая затем $t=0$, получим еще

$$\theta_1'(x) - \theta_2'(x) = \varphi_1(x).$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = \int_0^x \varphi_1(z)\,dz + C. \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) находим

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) + \int_0^x \varphi_1(z)\,dz + C\right],$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x) - \int_0^x \varphi_1(z)\,dz - C\right].$$

Теперь формула (2) дает искомое решение

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(z)\,dz. \tag{5}$$

Формула (5) называется *формулой Даламбера*.

§ 8. Волновое уравнение с переменными коэффициентами[1]

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)u=0. \tag{1}$$

Примем следующие допущения: 1) коэффициенты A_{jk} непрерывно дифференцируемы, а коэффициент C непрерывен во всем пространстве E_m; 2) в том же пространстве упомянутые коэффициенты ограничены; 3) $C(x)\geqslant 0$; 4) матрица $\left\|A_{jk}(x)\right\|_{j,\,k=1}^{j,\,k=m}$ положительно определенная при любом $x\in E_m$.

В пространстве $L_2(E_m)$ зададим оператор $\hat{A}$. Область определения $D(\hat{A})$ этого оператора пусть образуют функции, дважды непрерывно дифференцируемые в E_m и обращающиеся в нуль вне некоторого шара (своего для каждой функции). Самый оператор $\hat{A}$ пусть действует по формуле

$$\hat{A}u=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+Cu. \tag{2}$$

Легко видеть, что оператор $\hat{A}$ положителен: он будет положительно определенным, если $C(x)\geqslant C_0$, где C_0 — положительная постоянная. Оператор $\hat{A}$ можно расширить по Фридрихсу (§ 7 гл. 5) до самосопряженного[2]). Это самосопряженное расширение обозначим через A и вместо уравнения (1) будем рассматривать абстрактное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2}+Au=0; \tag{3}$$

---

[1]) Для понимания этого параграфа необходимо знать теорему о спектральном разложении функции самосопряженного оператора. Излагаемые ниже соображения можно применить и к уравнению теплопроводности с переменными коэффициентами.

[2]) Если $\hat{A}$—положительно определенный оператор, то, как было отмечено в § 7 гл. 5, его расширение по Фридрихсу есть самосопряженное расширение. Если $\hat{A}$ только положителен, то рассмотрим положительно определенный оператор $\hat{B}=\hat{A}+I$ (I — тождественный оператор). Если B есть самосопряженное расширение оператора $\hat{B}$, то $A=B-I$ есть самосопряженное расширение оператора $\hat{A}$.

будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0)=\varphi_0, \qquad u'(0)=\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t=0}=\varphi_1. \tag{3_1}$$

Будем считать, что

$$\varphi_0 \in D(A), \qquad \varphi_1 \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right). \tag{4}$$

Нетрудно доказать, что при этом решение задачи (1)—(2) является обобщенным решением задачи Коши (см. § 6 гл. 21) для волнового уравнения (1) при начальных условиях (3_1). Если бы A был постоянным численным множителем, то решение задачи (3)—(3_1) давалось бы формулой

$$u(t)=\cos\sqrt{A}t\varphi_0+\frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}\varphi_1. \tag{5}$$

Покажем, что эта формула остается в силе и в нашем случае, только под символами $\cos\sqrt{A}t$ и $\frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}$ следует понимать соответствующие функции от оператора A.

Числовые функции $\cos\sqrt{\lambda}t$ и $\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}$ ограничены, поэтому при любом t ограничены и операторы $\cos\sqrt{A}t$, $\frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}$; формула (5) определяет функцию $u(t)$ со значениями в $L_2(E_m)$. Нетрудно видеть, что $u(t)\in D(A)$ при любом t. Действительно, самосопряженный оператор перестановочен с любой своей ограниченной функцией, поэтому

$$A\left(\cos\sqrt{A}t+\frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}\right)=(\cos\sqrt{A}t)A+(\sin\sqrt{A}t)\sqrt{A};$$

в силу условий (4) имеет смысл выражение

$$Au=A\left(\cos\sqrt{A}t\varphi_0+\frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}\varphi_1\right)=$$
$$=(\cos\sqrt{A}t)A\varphi_0+(\sin\sqrt{A}t)\sqrt{A}\varphi_1. \tag{6}$$

Теперь докажем, что функция (5) имеет вторую производную по t, и вычислим эту производную.

Пусть $\mathfrak{E}_\lambda$ — спектральная функция оператора A. Оператор A положителен, поэтому его спектр содержится в полуоси $0 \leqslant \lambda < \infty$. Имеем

$$u(t) = \int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}t\, d\mathfrak{E}_\lambda\varphi_0 + \int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\, d\mathfrak{E}_\lambda\varphi_1. \qquad (7)$$

Положим

$$v(t) = \int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}t\, d\mathfrak{E}_\lambda\varphi_0, \qquad w(t) = \int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\, d\mathfrak{E}_\lambda\varphi_1. \qquad (8)$$

Мы утверждаем, что каждая из функций $v(t)$ и $w(t)$ имеет первую и вторую производную по t, и эти производные можно получить формальным дифференцированием интегралов (8). Доказательство проведем для функции $v(t)$, для $w(t)$ оно проводится так же с некоторыми очевидными изменениями. Обозначим

$$v_1(t) = -\int_0^\infty \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t\, d\mathfrak{E}_\lambda\varphi_0. \qquad (9)$$

Интеграл (9) сходится равномерно по t, так как

$$\left\| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t\, d\mathfrak{E}_\lambda\varphi_0 \right\|^2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\sin^2\sqrt{\lambda}t\, \|d\mathfrak{E}_\lambda\varphi_0\|^2 \leqslant \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\, \|d\mathfrak{E}_\lambda\varphi_0\|^2.$$

Последний интеграл стремится к нулю при $\lambda_1, \lambda_2 \to \infty$, так как сходится интеграл

$$\int_0^\infty \lambda^2 \|d\mathfrak{E}_\lambda\varphi_0\|^2 = \|A\varphi_0\|^2.$$

Теперь легко доказать обычными средствами, что

$$\left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - v_1(t) \right\|^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{dv}{dt} = v_1(t) = -\int_0^\infty \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t\, d\mathfrak{E}_\lambda\varphi_0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\int_0^\infty \lambda \cos \sqrt{\lambda}\, t\, d\mathfrak{E}_\lambda \varphi_0,$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -\int_0^\infty \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t\, d\mathfrak{E}_\lambda \varphi_1.$$

Но тогда существует вторая производная $\frac{d^2u}{dt^2}$, причем

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\int_0^\infty \lambda \left[\cos \sqrt{\lambda}\, t\, d\mathfrak{E}_\lambda \varphi_0 + \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}}\, d\mathfrak{E}_\lambda \varphi_1\right].$$

Правая часть последнего равенства равна $-Au$ и, следовательно, функция u удовлетворяет уравнению (3).

Нетрудно доказать, что функция (5) удовлетворяет также начальным условиям (3_1), понимаемым в следующем смысле:

$$\lim_{t\to 0} \| u(t) - \varphi_0 \|_{L_2(E_m)} = 0,$$

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{du(t)}{dt} - \varphi_1 \right\|_{L_2(E_m)} = 0.$$

РАЗДЕЛ VII

КОРРЕКТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

ГЛАВА 25

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Основная теорема

В гл. 9 (§ 5) мы ввели понятие о корректности задач математической физики. Сущность этого понятия сводилась к следующему. Обозначим через Φ совокупность данных задачи, через U — совокупность искомых, через A — оператор, который преобразует U в Φ, так что

$$AU = \Phi. \tag{1}$$

Задача состоит в том, чтобы найти U по заданным A и Φ. Допустим, что U и Φ можно рассматривать как элементы метрических пространств B_1 и B_2 соответственно. Мы говорим, что задача (1) корректна в паре пространств B_1, B_2, если при любом $\Phi \in B_2$ она имеет одно и только одно решение и если достаточно малому (в метрике B_2) изменению Φ соответствует сколь угодно малое (в метрике B_1) изменение U. Нас будет интересовать далее только тот случай, когда оператор A линейный, а пространства B_1 и B_2 банаховы. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 25.1.1. *Для того чтобы линейная задача* (1) *была корректной в паре банаховых пространств* (B_1, B_2), *необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор* $R = A^{-1}$, *действующий из* B_2 *в* B_1, *причем* $D(R) = B_2$ *и* R *ограничен как оператор из* B_2 *в* B_1.

Необходимость. Если задача (1) корректна, то, прежде всего, ее решение существует при любом $\Phi \in B_2$ и единственно. Единственность решения означает существование оператора $R = A^{-1}$, а существование решения при любом $\Phi \in B_2$ — что оператор R определен на всем пространстве B_2.

Заменим, далее, элемент Φ на $\Phi+\varphi$, где $\varphi\in B_2$, и пусть измененное решение задачи (1) будет $U+u$. Тогда $A(U+u)=\Phi+\varphi$, и так как A — линейный оператор, то $Au=\varphi$. Задача (1) корректна, поэтому если задано число $\varepsilon>0$, то можно найти такое число $\delta>0$, что при $\|\varphi\|<\varepsilon$ будет $\|u\|=\|R\varphi\|<\delta$. Зафиксируем как ε, так и соответствующее ему δ. Если $\psi\in B_2$ и $\|\psi\|=1$, то $\left\|\frac{\varepsilon}{2}\psi\right\|=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ и, следовательно, $\left\|R\frac{\varepsilon}{2}\psi\right\|=\frac{\varepsilon}{2}\|R\psi\|<\delta$. Отсюда

$$\|R\psi\|<\frac{2\delta}{\varepsilon},\ \|\psi\|=1,$$

а это значит, что $\|R\|\leqslant\frac{2\delta}{\varepsilon}$. Оператор R ограничен.

Достаточность. Если оператор R существует, то задача (1) имеет не более одного решения. Если $D(R)=B_2$, то задача (1) разрешима при любом $\Phi\in B_2$. Наконец, если R — ограниченный оператор, и $\|\varphi\|_{B_2}<\varepsilon$, то $\|u\|_{B_1}=\|R\varphi\|_{B_1}<\delta$, где $\delta=\varepsilon\|R\|$.

Важно подчеркнуть, что корректность или некорректность задачи зависит от того, в какие пространства мы погружаем данные и искомые величины; одна и та же задача может оказаться корректной в одной паре пространств и некорректной в другой. Более обстоятельно мы исследуем этот вопрос в § 8.

В задачах математической физики (как и в анализе вообще) некорректные задачи играют довольно важную роль. Так, например, можно доказать, что в паре пространств $(C^{(1)}(\Omega), C(\Gamma))$ задача Дирихле для однородного уравнения Лапласа некорректна, однако в механике деформируемых сред (в частности, в теории упругости) с этой задачей приходится иметь дело. Одна из простейших некорректных задач — это нахождение решения уравнения

$$Tu=f, \tag{2}$$

в котором T — вполне непрерывный оператор, действующий из бесконечномерного банахова пространства X в такое же пространство Y. Частным случаем уравнения (2) является так называемое интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_{\Omega} K(x, y)\, u(y)\, dy=f(x),$$

где $K(x, y)$ — фредгольмовское ядро.

Некорректность задачи (2) легко вытекает из следующих соображений. Если бы она была корректной, то существовал бы ограниченный оператор T^{-1}, а тогда тождественный оператор $I=T^{-1}T$ был бы вполне непрерывным в бесконечномерном пространстве X.

В последнее время появилось много работ, посвященных приближенному решению некорректных задач (разумеется, при условии, что точное решение существует). Одной из первых в этом направлении была работа А. Н. Тихонова [3], предложившего метод, основанный на том, что решение некорректной задачи рассматривается как предел решений специальным образом построенной последовательности корректных задач.

§ 2. Положительно определенные задачи

1. Пусть A — положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим уравнение

$$Au=f. \tag{1}$$

Построим энергетическое пространство H_A оператора A и будем искать обобщенное решение уравнения (1), т. е. элемент пространства H_A, удовлетворяющий тождеству

$$[u, \eta]=(f, \eta), \qquad \forall \eta \in H_A. \tag{2}$$

Это решение существует и единственно; таким образом, существует оператор $R=A^{-1}$, действующий из H в H_A и определенный на всем пространстве H. Положим $B_1=H_A$, $B_2=H$.

Докажем, что оператор R ограничен. Пусть u — обобщенное решение задачи (1). Положив в тождестве (2) $\eta=u$, получим

$$|u|_A^2=(f, u)\leqslant \|f\|\cdot\|u\|.$$

Пусть γ^2 — нижняя грань оператора A. Тогда $\|u\|\leqslant\frac{1}{\gamma}|u|_A$. Подставив это в предыдущее неравенство, получим

$$|u|_A=|Rf|_A\leqslant\frac{1}{\gamma}\|f\|.$$

Это значит, что

$$\|R\|_{H\to H_A}\leqslant\frac{1}{\gamma},$$

и задача (1), в случае положительно определенного оператора A, корректна в паре пространств (H_A, H).

2. Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть $\Omega \subset E_m$ — конечная область с кусочно гладкой границей Г. Рассмотрим задачу Дирихле

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+C(x)u=f(x), \quad u|_\Gamma=0. \tag{3}$$

Коэффициенты $A_{jk}(x)$ и $C(x)$ подчиним обычным условиям (см. гл. 14). Оператор $\mathfrak{A}$ задачи (3) положительно определенный в пространстве $L_2(\Omega)$, и эта задача корректна в паре пространств $(H_{\mathfrak{A}}, L_2(\Omega))$. Напомним, что в $H_{\mathfrak{A}}$ метрика задается формулой

$$\|u\|_{\mathfrak{A}}^2=\int_\Omega\left(A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu^2\right)dx. \tag{4}$$

2. Пусть в уравнении (3) $C(x)\geqslant C_0=\text{const}>0$. Поставим краевое условие задачи Неймана

$$\left[A_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_k)\right]_\Gamma=0. \tag{5}$$

Оператор $\mathfrak{N}$ этой задачи положительно определен в $L_2(\Omega)$, и задача Неймана корректна в паре пространств $(H_{\mathfrak{N}}, L_2(\Omega))$. Метрика в $H_{\mathfrak{N}}$ определяется той же формулой (4).

3. Пусть теперь $C(x)\equiv 0$. В этом случае оператор $\mathfrak{N}_0$ задачи Неймана положительно определен в пространстве $\tilde{L}_2(\Omega)$ — подпространстве пространства $L_2(\Omega)$, ортогональном к единице, и задача Неймана корректна в паре пространств $(H_{\mathfrak{N}_0}, \tilde{L}_2(\Omega))$.

§ 3. Задача Дирихле для однородного уравнения Лапласа

Пусть Г — регулярная поверхность и Ω — область внутри или вне Г. Поставим задачу Дирихле для однородного уравнения Лапласа

$$\Delta u=0, \quad u|_\Gamma=\varphi(x). \tag{1}$$

Легко указать пару пространств, в которой эта задача корректна. Можно взять $B_1=G(\bar\Omega)$, $B_2=C(\Gamma)$; через $G(\bar\Omega)$ мы обозначили подпространство пространства $C(\bar\Omega)$, образованное функциями, гармоническими в Ω и непрерывными в $\bar\Omega$

(см. следствие 11.9.1). Действительно, при любой функции $\varphi \in C(\Gamma)$ задача (1) имеет решение, и притом единственное, непрерывное в $\overline{\Omega}$. Пусть дальше речь идет о внутренней задаче Дирихле. Из принципа максимума вытекает, что

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{x\in\Gamma} |u(x)| = \max_{x\in\Gamma} |\varphi(x)|,$$

или

$$\|u\|_{B_1} = \|\varphi\|_{B_2}. \tag{2}$$

Если через R обозначить оператор, который преобразует заданную функцию $\varphi(x)$ в искомую функцию $u(x)$: $u = R\varphi$, то из равенства (2) будет вытекать, что $\|R\| = 1$, и, следовательно, задача (1) корректна.

Перейдем к внешней задаче Дирихле. Пусть сперва $m > 2$. Тогда из условия $u(x) = O(|x|^{2-m})$, $|x| \to \infty$ вытекает, что $u(x) \underset{|x|\to\infty}{\to} 0$. Построим сферу S_R достаточно большого радиуса R (рис. 20, стр. 261), так чтобы поверхность Γ лежала внутри сферы. В конечной области Ω_R, ограниченной поверхностями Γ и S_R, верен принцип максимума:

$$\max_{x\in\Omega_R} |u(x)| = \max\left\{\max_{x\in\Gamma} |u(x)|,\ \max_{x\in S_R} |u(x)|\right\} =$$
$$= \max\left\{\max_{x\in\Gamma} |\varphi(x)|,\ \max_{x\in S_R} |u(x)|\right\}.$$

Устремим $R \to \infty$. Это приведет нас к соотношению

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| = \max\left\{\max_{x\in\Gamma} |\varphi(x)|,\ 0\right\} = \max_{x\in\Gamma} |\varphi(x)|.$$

Дальнейшее — как в случае внутренней задачи.

Если $m = 2$ и область Ω бесконечная, то внешнюю задачу Дирихле можно свести к внутренней, если конформно отобразить Ω на конечную область, и таким путем доказать корректность внешней задачи Дирихле.

§ 4. Внешняя задача Неймана

Пусть бесконечная область Ω ограничена регулярной поверхностью Γ. Примем, что размерность пространства $m > 2$. Если функция $\psi(x)$ непрерывна на Γ, то внешняя задача

Неймана

$$\Delta u = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \psi(x) \tag{1}$$

имеет одно и только одно решение, непрерывное в $\bar{\Omega}$ и представимое в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{r^{m-2}} d_{\xi}(\Gamma) \tag{2}$$

с непрерывной плотностью $\mu(\xi)$. Эта плотность удовлетворяет интегральному уравнению (§ 8 гл. 18)

$$\mu(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d_{\xi}\Gamma = -\frac{2}{(m-2)|S_1|} \psi(x). \tag{3}$$

Как было выяснено в гл. 18, это уравнение имеет одно и только одно непрерывное на Γ решение, коль скоро на Γ непрерывна функция $\psi(x)$. Это решение можно представить в виде

$$\mu = Q\psi, \tag{4}$$

где Q — оператор, обратный оператору в левой части уравнения (3). Из сказанного выше следует, что оператор Q действует в пространстве $C(\Gamma)$ функций, непрерывных на Γ, и определен на всем этом пространстве. Докажем, что оператор Q ограничен в $C(\Gamma)$.

Допустим противное. Тогда существует последовательность функций $\psi_n \in C(\Gamma)$ таких, что

$$\|\mu_n\| \geqslant n\|\psi_n\|, \qquad \mu_n = Q\psi_n.$$

Положим

$$\frac{\psi_n(x)}{\|\mu_n\|} = \psi_n^*(x), \qquad \frac{\mu_n(x)}{\|\mu_n\|} = \mu_n^*(x).$$

Тогда $\mu_n^* = Q\psi_n^*$, $\|\mu_n^*\| = 1$, $\|\psi_n^*\| \to 0$. Первое равенство означает, что μ_n^* удовлетворяет уравнению

$$\mu_n^*(x) - \frac{2}{(m-2)|S_1|} \int_{\Gamma} \mu_n^*(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d_{\xi}\Gamma = -\frac{2}{(m-2)|S_1|} \psi_n^*(x).$$

Если обозначить для краткости

$$\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\int\limits_{\Gamma}\mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{m-2}}\,d_\xi\Gamma=(K\mu)(x),$$

то последнее уравнение запишется короче:

$$\mu_n^*-K\mu_n^*=-\frac{2}{(m-2)\,|S_1|}\psi_n^*. \tag{5}$$

Оператор со слабой особенностью K вполне непрерывен в $C(\Gamma)$ (см. § 4 гл. 7), а последовательность $\{\mu_n^*\}$ ограничена ($\|\mu_n^*\|=1$). В таком случае можно выделить такую подпоследовательность $\mu_{n_k}^*$, что существует предел

$$\lim K\mu_{n_k}^*=\mu^*.$$

Одновременно $\psi_{n_k}^*\to 0$, и из уравнения (5) следует, что $\mu_{nk}^*\to\to\mu^*$. Теперь, переходя в (5) к пределу под знаком оператора K, найдем, что μ^* удовлетворяет однородному интегральному уравнению

$$\mu^*-K\mu^*=0. \tag{6}$$

Уравнение (3) имеет единственное решение, значит, соответствующее однородное уравнение (6) имеет только тривиальное решение. Отсюда $\mu^*=0$. С другой стороны,

$$\|\mu^*\|=\lim\|\mu_{n_k}^*\|=1.$$

Полученное противоречие доказывает, что оператор Q ограничен. Существует, следовательно, такая постоянная α, что

$$\|\mu\|\leqslant\alpha\,\|\psi\|. \tag{7}$$

Здесь μ — решение уравнения (3), и норма берется в метрике пространства $C(\Gamma)$.

Из формулы (2) следует

$$|u(x)|\leqslant\max_{\eta\in\Gamma}|\mu(\eta)|\int\limits_{\Gamma}\frac{d_\xi\Gamma}{r^{m-2}},\quad x\in\Omega.$$

Последний интеграл есть потенциал простого слоя с непрерывной плотностью, равной единице. Такой потенциал непрерывен во всем пространстве E_m и, кроме того, равен нулю на бесконечности. Отсюда следует, что упомянутый потенциал ограничен:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{d_\xi \Gamma}{r^{m-2}} \leqslant \beta = \text{const.}$$

В таком случае

$$|u(x)| \leqslant \beta \max_{\xi \in \Gamma} |\mu(\xi)| = \beta \|\mu\| \leqslant \alpha\beta \|\psi\|.$$

Беря максимум левой части, получаем окончательно

$$\|u\|_{G(\overline{\Omega})} \leqslant \alpha\beta \|\psi\|_{C(\Gamma)}. \tag{8}$$

Теперь ясно, что при $m > 2$ внешняя задача Неймана корректна в паре пространств $(G(\overline{\Omega}), C(\Gamma))$. Действительно, обозначим через R оператор, который переводит функцию $\psi(x)$ в функцию $u(x)$ — решение внешней задачи Неймана. Тогда: 1) оператор R существует (решение единственно); 2) он определен на всем пространстве $C(\Gamma)$ (решение существует для любой непрерывной функции $\psi(x)$); 3) он ограничен как оператор из $C(\Gamma)$ в $G(\overline{\Omega})$ (неравенство (8)).

§ 5. Внутренняя задача Неймана

Результаты настоящего параграфа будут справедливы и для внешней задачи Неймана в случае $m = 2$, так как она переводится конформным преобразованием во внутреннюю задачу Неймана.

Пусть Γ — по-прежнему регулярная поверхность, но Ω — область, лежащая внутри Γ. Задача состоит в определении гармонической в Ω функции по краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \psi(x). \tag{1}$$

В паре пространств $(G(\overline{\Omega}), C(\Gamma))$ внутренняя задача Неймана некорректна уже потому, что она не всегда разрешима, а решение (если оно существует) не единственно.

Введем в рассмотрение пространство $C^{\perp}(\Gamma)$, которое является подпространством пространства $C(\Gamma)$ и определяется дополнительным соотношением

$$\int\limits_{\Gamma} \psi(\xi)\, d_\xi \Gamma = 0. \tag{2}$$

Если в краевом условии (1) $\psi \in C^{\perp}(\Gamma)$, то внутренняя задача Неймана разрешима, но не единственным образом; нам надо позаботиться о том, чтобы из бесконечного множества решений выбрать одно. Решение внутренней задачи Неймана можно представить (см. § 11 гл. 18) в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{d_{\xi}\Gamma}{r^{m-2}} \tag{3}$$

с непрерывной плотностью $\mu(\xi)$; за $\mu(\xi)$ можно принять любое решение интегрального уравнения

$$\mu(x) + \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{m-2}} d_{\xi}\Gamma = \\ = \frac{2}{(m-2)\,|S_1|} \psi(x). \tag{4}$$

Если $m=2$, то $u(x)$ следует представить в виде логарифмического потенциала; соответственно изменится уравнение (4). На последующих рассуждениях это не скажется.

Уравнение (4) разрешимо, если $\psi \in C^{\perp}(\Gamma)$, и его решения непрерывны. Их бесконечно много: однородное уравнение имеет одно линейно независимое решение $\mu_0(x)$. Если обозначить какое-либо решение уравнения (4) через $\hat{\mu}(x)$, то его общее решение есть

$$\mu(x) = \hat{\mu}(x) + c\mu_0(x), \tag{5}$$

где c — произвольная постоянная. Различным c соответствуют различные решения задачи Неймана. Все эти решения непрерывны в $\bar{\Omega}$.

Мы остановимся на следующем способе выбора постоянной c в формуле (5): потребуем, чтобы в метрике $L_2(\Gamma)$ функция $\mu(x)$ была ортогональна к $\mu_0(x)$. Это дает следующие значения c и $\mu(x)$:

$$c = \frac{(\hat{\mu}, \mu_0)_{L_2}}{\|\mu_0\|^2_{L_2}} = -\frac{\int_{\Gamma} \hat{\mu}(x)\mu_0(x)\,d\Gamma}{\int_{\Gamma} \mu_0^2(x)\,d\Gamma},$$

$$\mu(x) = \hat{\mu}(x) - \frac{(\hat{\mu}, \mu_0)_{L_2}}{\|\mu_0\|^2_{L_2}} \mu_0(x). \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что функция $\mu(x)$, определяемая формулой (6), не зависит от выбора частного решения $\hat{\mu}(x)$ и, следовательно, определяется единственным образом.

Ниже под $\mu(x)$ будем понимать функцию (6), а под решением внутренней задачи Неймана — потенциал (3), плотность которого совпадает с функцией (6). Такое решение единственно.

Докажем теперь, что при таком выборе решения внутренняя задача Неймана корректна в паре пространств $(G(\overline{\Omega}), C^{\perp}(\Gamma))$. Мы уже убедились, что в этой паре пространств внутренняя задача Неймана имеет одно и только одно решение. Остается доказать ограниченность оператора R, который преобразует функцию $\psi(x)$ в решение $u(x)$ внутренней задачи Неймана.

Докажем сперва существование такой постоянной α, что

$$\|\mu\|_{C(\Gamma)} \leqslant \alpha \|\psi\|_{C(\Gamma)}. \tag{7}$$

Пусть это не так. Тогда, как и в предшествующем параграфе, мы убедимся, что существуют две последовательности $\{\psi_n^*\}$ и $\{\mu_n^*\}$, связанные уравнением (4), такие, что

$$\|\mu_n^*\| = 1, \qquad \|\psi_n^*\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Сохраняя обозначение K для интегрального оператора, введенное в предшествующем параграфе, мы можем записать уравнение (4) для функций μ_n^* и ψ_n^* в такой форме:

$$\mu_n^* + K\mu_n^* = \frac{2}{(m-2)|S_1|}\psi_n^*.$$

Дальнейшее протекает, как в § 4: выделяем последовательность $\mu_{n_k}^*$, такую, что существует предел

$$\mu^* = \lim K\mu_{n_k}^* = -\lim \mu_{n_k}^*.$$

Этот предел удовлетворяет однородному уравнению

$$\mu^* + K\mu^* = 0.$$

Отсюда необходимо

$$\mu^*(x) = C\mu_0(x).$$

Далее

$$(\mu^*, \mu_0)_{L_2(\Gamma)} = \lim (\mu_{n_k}^*, \mu_0)_{L_2(\Gamma)} = 0.$$

Но тогда $C=0$ и $\mu^*(x)\equiv 0$, что невозможно, потому что $\|\mu^*\|=\lim\|\mu^*_{n_k}\|=1$.

Неравенство (7) установлено; как и в § 4, из него следует, что

$$\|u\|_{G(\Omega)}\leqslant\alpha\beta\,\|\psi\|_{C^\perp(\Gamma)}.$$

Последнее неравенство показывает, что оператор R ограничен, и внутренняя задача Неймана в данной выше формулировке корректна.

§ 6. Задачи теплопроводности

1. Смешанная задача. Рассмотрим задачу, изученную в §§ 1, 2 гл. 20: в области Q (рис. 36, стр. 424) найти обобщенное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=f(x,\ t) \tag{1_1}$$

при краевом и начальном условиях

$$u|_B=0,\qquad u|_{t=0}=\varphi(x). \tag{1_2}$$

Эта задача имеет решение, и притом единственное, в классе $C^{(1)}((0,\ \infty);\ H_{\mathfrak{A}})\cap C([0,\ \infty);\ L_2(\Omega))$, если $\varphi\in L_2(\Omega)$ и $f\in C^{(1)}([0,\ \infty);\ L_2(\Omega))$.

Будем рассматривать решение в области Q_T рис. 36, стр. 424, т. е. в области $\Omega\times[0,\ T]$. Рассуждения §§ 1, 2 гл. 20 без всякого труда видоизменяются для того случая, когда t изменяется только на конечном отрезке $[0,\ T]$; при этом достаточно предположить, что $f\in C^{(1)}([0,\ T];\ L_2(\Omega))$, и можно будет доказать, что решение задачи (1) в классе $C^{(1)}((0,\ T];\ H_{\mathfrak{A}})\cap C([0,\ T];\ L_2(\Omega))$ существует и единственно.

Введем теперь пространства B_1 и B_2, фигурирующие в определении корректности. За B_1 примем пространство $C([0,\ T];\ L_2(\Omega))$, в котором мы введем норму следующим образом:

$$\|u\|_1=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2}$$

За B_2 примем пространство пар вида

$$\Phi=(\varphi(x);\ f(t,\ x)), \tag{3}$$

где $\varphi \in L_2(\Omega)$ и $f \in C^{(1)}([0, T]; L_2(\Omega))$; норму в новом пространстве определим формулой

$$\|\Phi\|_2 = \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \max_{0 \le t \le T} \|f(t)\|_{L_2(\Omega)} + \max_{0 \le t \le T} \|f'(t)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (4)$$

Докажем, что задача (1) корректна в паре пространств (B_1, B_2). О существовании и единственности решения было уже сказано, и нам достаточно будет убедиться в ограниченности оператора R, который действует из B_2 в B_1 и переводит элемент Φ в решение u.

Мы докажем более сильное и простое утверждение: оператор R ограничен как оператор из B_3 в B_1, где B_3 — пространство элементов (3) с метрикой

$$\|\Phi\|_3 = \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \max_{0 \le t \le T} \|f(t)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Обратимся к формуле (1.8) гл. 22. Система $\{u_n\}$ ортонормирована в $L_2(\Omega)$, поэтому

$$\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\varphi, u_n) e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau\right]^2.$$

Последний ряд совпадает с рядом (2.1) гл. 22: из оценок, проведенных в § 2 гл. 22, сразу вытекает, что сумма этого ряда не превосходит величины

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n)^2 + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(\tau)\, d\tau =$$

$$= 2\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^t \|f(\tau)\|^2_{L_2(\Omega)}\, d\tau.$$

Отсюда

$$\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le 2\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{T}{\lambda_1} \max_{0 \le t \le T} \|f(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le \alpha^2 \|\Phi\|^2_3,$$

где $\alpha^2 = \max\left(2, \frac{T}{\lambda_1}\right)$. Беря максимум левой части, находим

$$\|u\|_1 \le \alpha \|\Phi\|_3$$

и, следовательно,

$$\|R\|_{B_3 \to B_1} \le \alpha.$$

2. Задача Коши. За B_2 примем пространство функций, непрерывных и ограниченных в E_m, с нормой

$$\|\varphi\|_2 = \sup_{x \in E_m} |\varphi(x)|. \tag{5}$$

За B_1 примем пространство функций, непрерывных и ограниченных в $E_m \times [0, \infty)$, с нормой

$$\|u\|_1 = \sup_{x \in E_m,\ t \geqslant 0} |u(x, t)|. \tag{6}$$

Если $\varphi \in B_2$, то решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{7}$$

в пространстве B_1 существует (§ 3 гл. 23) и единственно (§ 4 гл. 20). Это означает, что оператор R, который переводит начальную функцию φ в решение, существует и определен на всем пространстве B_2. Далее, из формулы Пуассона, записанной в виде (3.4) гл. 23:

$$u(x, t) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} \varphi(x + 2\sqrt{t}\,\xi)\, e^{-\xi^2} d\xi,$$

следует

$$|u(x, t)| \leqslant \sup_{z \in E_m} |\varphi(z)|\, \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{E_m} e^{-\xi^2} d\xi = \sup_{z \in E_m} |\varphi(z)| = \|\varphi\|_2.$$

Это неравенство не нарушится, если заменить в нем левую часть ее верхней гранью:

$$\|u\|_1 = \|R\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_2,$$

и, следовательно, $\|R\| \leqslant 1$. Таким образом, задача Коши для уравнения теплопроводности корректна в паре пространств (B_1, B_2), в которых нормы заданы формулами (6) и (5).

§ 7. Задачи для волнового уравнения

Мы не будем останавливаться на смешанной задаче для волнового уравнения, корректность которой исследуется по той же схеме, что и для уравнения теплопроводности; формулировку и доказательство соответствующих утверждений мы предоставляем читателю.

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,$$
$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{1}$$

Введем в качестве B_1 пространство $C^{(2)}(E_m \times [0, \infty))$ функций, которые при любом $x \in E_m$ и любом $t \geqslant 0$ непрерывны и ограничены вместе со своими первыми и вторыми производными; за норму элемента u этого пространства примем величину

$$\|u\|_1 = \max\left\{|u(x)| + \sum_{k=1}^{m+1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| + \sum_{j,\ k=1}^{m+1}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\right|\right\},$$
$$x_{m+1} = t. \tag{2}$$

За B_2 примем пространство пар $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1)$ с нормой

$$\|\Phi\|_2 = \max\left\{\sum_{n=0}^{m+3}\sum\left|\frac{\partial^n \varphi_0}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_n}}\right| + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=0}^{m+2}\sum\left|\frac{\partial^n \varphi_1}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_n}}\right|\right\}; \tag{3}$$

внутреннее суммирование производится по всевозможным наборам неотрицательных индексов $i_1, i_2, \dots, i_n \leqslant m$, сумма которых равна n.

Как обычно, обозначим через R оператор, который переводит пару Φ начальных функций в решение $u(x, t)$ задачи Коши (1).

Из теоремы единственности для задачи Коши (§ 4 гл. 21) вытекает, что оператор R существует, а из результатов § 1 гл. 24 — что этот оператор действует из B_2 в B_1 и определен на всем пространстве B_2. Более того, из формулы (1.6) гл. 24 и из теоремы 23.1.2 вытекает, что R как оператор из B_2 в B_1 ограничен. Отсюда следует, что задача Коши для волнового уравнения корректна в паре определенных здесь пространств B_1 и B_2.

§ 8. О некорректности задач математической физики

Мы уже отмечали в § 1, что одна и та же задача может быть корректной в одной паре пространств и некорректной в другой паре. Здесь мы поясним это утверждение на двух простых примерах.

1. Задача Дирихле для однородного уравнения Лапласа. Эта задача была рассмотрена в § 3, где было выяснено следующее: если Ω — область и Γ — ее контур, то задача корректна в паре пространств $(C(\overline{\Omega}), C(\Gamma))$. Однако в ряде случаев бывает важно знать величину интеграла Дирихле от искомой функции

$$D(u) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx;$$

этот интеграл обычно пропорционален энергии состояния, описываемого функцией u. В связи с этим мы поставим вопрос о корректности задачи Дирихле для однородного уравнения Лапласа в паре пространств $(H_2(\Omega), C(\Gamma))$, где $H_2(\Omega)$ — пространство функций, квадратично суммируемых в Ω вместе со своими первыми производными; норма в $H_2(\Omega)$ определяется формулой

$$\| u \|^2_{H_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left[u^2 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right] dx. \tag{1}$$

Легко убедиться, что ответ на этот вопрос отрицателен. Рассмотрим известный *пример Адамара*. Пусть Ω — круг $x_1^2 + x_2^2 < 1$. Поставим задачу: найти гармоническую в Ω функцию $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющую краевому условию

$$u\,|_{\rho=1} = \varphi(\theta), \qquad \varphi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(2^{2n}\theta). \tag{2}$$

Здесь ρ и θ — полярные координаты точки (x_1, x_2).

Члены ряда (2) непрерывны на окружности Γ: $\rho = 1$, а самый ряд сходится равномерно, так как он имеет сходящуюся мажоранту

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Отсюда следует, что $\varphi \in C(\Gamma)$. Решение задачи (2) можно представить в виде ряда (см. § 1 гл. 13)

$$u(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho^{2^{2n}} \cos(2^{2n}\theta). \tag{3}$$

Интеграл Дирихле функции (3) расходится. Действительно, нетрудно подсчитать, что если $0 < \rho_0 < 1$, то

$$\iint\limits_{\rho<\rho_0} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] dx_1\, dx_2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \rho_0^{2^{2n+1}}. \tag{4}$$

Сумма ряда (4) стремится к бесконечности при $\rho_0 \to 1$. Действительно, зададим произвольное натуральное число N и выберем $\rho_1 < 1$ так, чтобы $\rho_1^{2^{2N+1}} > \frac{1}{2}$. Тогда при $\rho_0 > \rho_1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_0^{2^{2n+1}} > \sum_{n=1}^{N} \rho_0^{2^{2n+1}} > \frac{N}{2} \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty.$$

Если бы интеграл Дирихле функции (3) по кругу радиуса единица сходился, то меньший интеграл (4) был бы ограничен.

Таким образом, решение задачи (2) не принадлежит пространству $H_2(\Omega)$. Рассмотрим теперь оператор R, который переводит краевую функцию $\varphi(\theta)$ в решение задачи Дирихле $u(x_1, x_2)$. Если этот оператор рассматривать как оператор из $C(\Gamma)$ в $H_2(\Gamma)$, то он определен не на всем пространстве $C(\Gamma)$. Отсюда уже следует, что задача Дирихле некорректна в паре пространств $(H_2(\Gamma), C(\Gamma))$.

2. Задача Коши для уравнения струны. Поставим задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u\,|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{5}$$

при следующих предположениях: функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ заданы на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$, причем

$$\varphi_0 \in C^{(2)}[0, 1], \qquad \varphi_1 \in C^{(1)}[0, 1].$$

Сегмент $[0, 1]$ является областью зависимости для треугольника T рис. 48; в этом треугольнике решение задачи

Коши существует, единственно и представимо формулой Даламбера (формула (7.5) гл. 24). Из этой формулы легко усмотреть, что решение задачи (5) $u \in C^{(2)}(\overline{T})$ и что названная задача корректна в паре пространств $(C^{(2)}(\overline{T}), B_2)$, где B_2 есть пространство пар $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1)$ с нормой

$$\|\Phi\| = \|\varphi_0\|_{C^{(2)}} + \|\varphi_1\|_{C^{(1)}}.$$

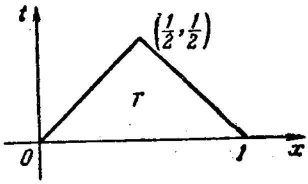

Рис. 48.

Та же формула Даламбера показывает, что задача (5) некорректна, например, в паре пространств $(C^{(k)}(\overline{T}), B_2)$ при любом $k > 2$.

ДОБАВЛЕНИЯ

ДОБАВЛЕНИЕ I

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

1. Определение эллиптических систем. Рассмотрим систему N линейных уравнений в частных производных с N неизвестными функциями $u_1, u_2, \ldots, u_N$ и с m независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Нашу систему можно записать так:

$$\sum_{k=1}^{N} L_{jk} u_k = f_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1}$$

Здесь L_{jk} — некоторые линейные дифференциальные выражения; x, как обычно, обозначает точку m-мерного евклидова пространства с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

В дальнейшем нам будет удобнее записывать систему (1) в несколько иной форме.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — целые неотрицательные числа. Упорядоченную совокупность $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ назовем *мультииндексом*; через $|\alpha|$ будем обозначать сумму составляющих мультииндекса α:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m.$$

Если ξ — m-компонентный вектор: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, то будем писать

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_m^{\alpha_m}.$$

Положим еще

$$D_k u = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

и будем писать также

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_m^{\alpha_m}.$$

Если порядок дифференциального выражения L_{jk} равен s_{jk}, то, очевидно, можно написать

$$L_{jk}u_k = \sum_{|\alpha| \leq s_{jk}} A_{jk}^{(\alpha)}(x) D^{\alpha} u_k.$$

Введем обозначение

$$\sum_{|\alpha| \leq s_{jk}} A_{jk}^{(\alpha)}(x) D^{\alpha} = L_{jk}(x, D); \tag{2}$$

ясно, что $L_{jk}(x, D)$ есть полином относительно $D_1, D_2, \ldots, D_m$. Теперь систему (1) можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{N} L_{jk}(x, D) u_k = f_j(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

или, если ввести матрицу порядка N

$$L(x, D) = \| L_{jk}(x, D) \|_{j,\, k=1}^{j,\, k=N}$$

и N-компонентные векторы

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_N),$$
$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_N),$$

— в виде

$$L(x, D) u = f(x). \tag{3}$$

Обозначим через $L_{jk}^0(x, D)$ так называемую *главную часть* полиномиальной матрицы $L(x, D)$; она получается, если в формуле (2) удержать в левой части только те слагаемые, у которых $|\alpha| = s_{jk}$:

$$L_{jk}^0(x, D) = \sum_{|\alpha| = s_{jk}} A_{jk}^{(\alpha)}(x) D^{\alpha}. \tag{4}$$

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ — произвольная точка пространства E_m. Положим

$$L_{jk}^0(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = s_{jk}} A_{jk}^{(\alpha)}(x) \xi^{\alpha}. \tag{5}$$

Система (1) (или (3)) называется *эллиптической по И. Г. Петровскому* [5] в точке x, если в этой точке определитель $\mathrm{Det}\, L^0(x, \xi)$, где

$$L^0(x, \xi) = \left\| \begin{matrix} L_{11}^0(x, \xi) & L_{12}^0(x, \xi) & \dots & L_{1N}^0(x, \xi) \\ L_{21}^0(x, \xi) & L_{22}^0(x, \xi) & \dots & L_{2N}^0(x, \xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{N1}^0(x, \xi) & L_{N2}^0(x, \xi) & \dots & L_{NN}^0(x, \xi) \end{matrix} \right\|, \qquad (6)$$

обращается в нуль только при $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0$. Система (1) называется эллиптической на некотором множестве, если она эллиптична в каждой точке этого множества.

Легко видеть, что в случае одного уравнения второго порядка определение эллиптичности по И. Г. Петровскому совпадает с определением § 2 гл. 9.

Более общее определение эллиптической системы дано в статье [11].

Пример 1. Уравнение

$$\Delta^n u = f(x), \qquad (7)$$

где Δ — оператор Лапласа, а n — натуральное число, эллиптическое по И. Г. Петровскому. Действительно, в данном случае $N = 1$, матрица (6) сводится к одному элементу

$$L_{11}^0(x, \xi) = L_{11}(x, \xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2)^n,$$

и ясно, что последнее выражение обращается в нуль лишь при $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0$.

Пример 2. Система уравнений статической теории упругости имеет вид

$$\Delta u + \omega \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f(x). \qquad (8)$$

Здесь $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ и $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ — m-компонентные векторы, ω — численный параметр. Матрица (6) в данном случае имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} \xi^2 + \omega\xi_1^2 & \omega\xi_1\xi_2 & \dots & \omega\xi_1\xi_m \\ \omega\xi_2\xi_1 & \xi^2 + \omega\xi_2^2 & \dots & \omega\xi_2\xi_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega\xi_m\xi_1 & \omega\xi_m\xi_2 & \dots & \xi^2 + \omega\xi_m^2 \end{matrix} \right\|,$$

здесь обозначено $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2$.

Определитель последней матрицы вычисляется просто; он равен

$$(1 + \omega)\, \xi^{2m}.$$

Отсюда ясно, что система (8) эллиптична при всех значениях параметра ω, за исключением $\omega = -1$.

Если заменить $f(x)$ на $\omega f(x)$, то при $\omega = \infty$ получаем систему

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} u = f(x).$$

Она не эллиптична: для нее определитель матрицы (6) есть тождественный нуль. Можно сказать поэтому, что система уравнений статической теории упругости эллиптична при всех значениях параметра ω, за исключением значений $\omega = -1$ и $\omega = \infty$.

2. **Постановка краевой задачи. Условие дополнительности.** Если размерность пространства $m \geqslant 3$, то определитель матрицы (6) для эллиптической системы есть полином четной степени относительно ξ; при этом если ξ и ξ' — линейно независимые векторы в пространстве E_m, то полином $\operatorname{Det} L^0(x, \xi + \tau\xi')$ имеет относительно τ одинаковое число нулей как с положительной, так и с отрицательной мнимой частью (см. [4], [11]).

Если $m = 2$, то будем рассматривать только такие эллиптические системы, у которых определитель матрицы (6) обладает обоими указанными здесь свойствами.

Пусть Ω — конечная область пространства E_m, граница Γ которой есть $(m-1)$-мерная поверхность; для простоты будем считать ее бесконечно дифференцируемой. Пусть краевые условия имеют вид

$$\left[\sum_{k=1}^{N} B_{jk}(x, D)\, u_k\right]_\Gamma = \varphi_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, N_1, \tag{9}$$

где B_{jk} суть полиномы относительно D и, следовательно, левые части равенств (9) суть значения некоторых дифференциальных выражений от функций u_k, вычисленные на поверхности Γ.

Будем считать, что коэффициенты полиномов $L_{jk}(x, D)$ и $B_{jk}(x, D)$ суть бесконечно дифференцируемые функции от x в $\overline{\Omega}$.

Подчиним выражения B_{jk} следующему условию, которое в статьях [10] и [11] названо *условием дополнительности*. В несколько иной форме оно было ранее сформулировано в работах [4] и [9].

Обозначим через $B^0_{jk}(x, D)$ главную часть полинома $B_{jk}(x, D)$. Пусть $x \in \Gamma$, ξ — произвольный ненулевой касательный вектор к Γ в точке x, ν — единичный вектор нормали к Γ в той же точке. Через $\tau_k(x, \xi)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, обозначим корни уравнения $\operatorname{Det} L^0(x, \xi+\tau\nu)=0$, $\operatorname{Im}\tau_k>0$, и через $M(x, \xi, \tau)$ — полином (относительно переменной τ)

$$M(x, \xi, \tau)=\prod_{k=1}^{p}(\tau-\tau_k(x, \xi)).$$

Наконец, через $C^0(x, \xi)$ обозначим матрицу, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы (6).

Условие дополнительности состоит в следующем:

Строки матрицы $B^0(x, \xi+\tau\nu)\,C^0(x, \xi+\tau\nu)$ должны быть линейно независимы по модулю $M(x, \xi, \tau)$.

Пример 3. Пусть система (1) представляет собой одно невырождающееся эллиптическое уравнение второго порядка. Для такого уравнения в задачах Дирихле и Неймана условие дополнительности удовлетворяется; если размерность пространства $m\geqslant 3$, то в задаче о косой производной условие дополнительности удовлетворяется в тех и только тех точках границы, в которых направление дифференцирования не касательно к границе. Если $m=2$, то в задаче о косой производной условие дополнительности удовлетворяется на всей границе.

Пример 4. Для системы (8) уравнений статической теории упругости поставим задачу Дирихле: $u|_\Gamma=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — векторная функция, заданная на границе Γ упругого тела. Пространство предположим трехмерным: $m=3$. Условие дополнительности удовлетворяется при $\omega\neq-2$ и нарушается при $\omega=-2$; при этом, разумеется, мы не рассматриваем значений $\omega=\infty$ и $\omega=-1$, при которых система (8) перестает быть эллиптической.

К условию дополнительности можно прийти следующим образом. Зафиксируем точку $x_0\in\Gamma$ и сделаем ее началом местной системы координат $y_1, y_2, \ldots, y_m$; как обычно, ось y_m направим по нормали к Γ, остальные оси расположатся тогда в касательной плоскости. В системе (1) и в краевых условиях (9) сохраним только главные члены и «заморозим» в них коэффициенты, заменив точку x на x_0. Систему (1) сделаем однородной, заменив в ней свободные члены $f_j(x)$ нулями. Наконец, заменим область Ω полупространством $y_m>0$. Мы придем, таким образом, к весьма упрощенной краевой задаче: уравнения и граничные условия однородны относительно порядка дифференцирования и их коэффициенты постоянны, дифференциальные уравнения задачи однородны и в обычном смысле, решение ищется в простейшей области — в полупространстве. Если выполнить преобразование Фурье по $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, то получится некоторая краевая задача для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на полуоси $y_m>0$. Условие дополнительности необходимо и достаточно для того, чтобы последняя задача имела одно и только одно решение, которое стремится к нулю при $y_m\to\infty$.

3. О пространствах С. Л. Соболева [7, 8] и Л. Н. Слободецкого [6]. О пространствах $W_p^{(l)}(\Omega)$, С. Л. Соболева было сказано в § 5 гл. 2. Норму в $W_p^{(l)}(\Omega)$ можно задать формулой

$$\|u\| = \int_\Omega |u(x)|\,dx + \left\{\int_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}, \tag{10}$$

которая лишь обозначениями отличается от формулы (5.1) гл. 2. Норма

$$\left\{\int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l} |D^\alpha u(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \tag{11}$$

эквивалентна норме (10); если $p=2$, то норма (11) делает пространство $W_2^{(l)}(\Omega)$ гильбертовым.

Функции, образующие пространство $W_p^{(l)}(\Omega)$, могут быть и векторными. В этом случае под $|u(x)|$ или $|D^\alpha u(x)|$ в формулах (10) и (11) следует понимать длину соответствующего вектора.

При $l=0$ пространство С. Л. Соболева превращается в пространство $L_p(\Omega)$.

Пусть теперь l — положительное, но не целое число. Положим $l_0=[l]$, $\lambda=l-[l_0]$. Пространство Л. Н. Слободецкого $W_p^{(l)}(\Omega)$ образуют функции $u(x)$, имеющие в области Ω всевозможные обобщенные производные порядка l_0, суммируемые со степенью p, причем эти производные таковы, что

$$\sum_{|\alpha|=l_0} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{\lambda p+m}}\,dx\,dy < \infty.$$

Норму в пространстве Л. Н. Слободецкого можно задать формулой

$$\|u\|^p = \sum_{|\alpha|=0}^{l_0} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p\,dx + \sum_{|\alpha|=l_0} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{\lambda p+m}}\,dx\,dy. \tag{12}$$

Ниже мы будем рассматривать только случай $p=2$. При этом пространство $W_2^{(l)}$ с нормой (12) будет гильбертовым.

Можно рассматривать пространства $W_p^{(l)}$, которые образованы функциями, заданными не в области, а на каком-нибудь многообразии, в частности на некоторой поверхности.

4. Коэрцитивные краевые задачи. Краевая задача (1), (9) называется *эллиптической*, или *коэрцитивной*, в области Ω, если: 1) система (1) эллиптична в замкнутой области $\overline{\Omega}$; 2) во всех точках границы области Ω удовлетворяется условие дополнительности.

Обозначим через L оператор, порождаемый левой частью матричного уравнения (3), через B — оператор, порождаемый матрицей операторов B_{jk}, входящих в краевые условия (9). Наконец, через A обозначим пару (L, B). Потребуем, чтобы все дифференциальные выражения L_{jk} имели один и тот же порядок s.

Пусть m_j — наивысший порядок дифференцирования в j-м условии (9) и пусть n — любое целое число, не меньшее чем $1+\max m_j$. Через $V^{(n)}(\Gamma)$ обозначим ортогональную сумму пространств Л. Н. Слободецкого $W_2^{\left(n-m_j-\frac{1}{2}\right)}(\Gamma)$, $j=1, 2, \ldots, N_1$. Далее, если l — достаточно большое целое число, то через $H_l(\Omega, \Gamma)$ обозначим ортогональную сумму векторного соболевского пространства $W_2^{(l)}(\Omega)$ и пространства $V^{(l)}(\Gamma)$. Будем считать, что $l\geqslant l_0=\max(s, m_j+1)$.

Введенный выше оператор A действует, очевидно, из $W_2^{(l)}(\Omega)$ в $H_l(\Omega, \Gamma)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Коэрцитивность задачи* (1), (9) *равносильна каждому из следующих условий*:

1. *Если* $u\in W_2^{(l_0)}(\Omega)$, $Lu\in W_2^{(l-s)}(\Omega)$ *и* $Bu\in V^{(l)}(\Gamma)$, *то* $u\in W_2^{(l)}(\Omega)$ *и верна оценка*

$$\|u\|_{W_2^{(l)}}\leqslant C\left\{\|Lu\|_{W_2^{(l-s)}}+\|Bu\|_{V^{(l)}}+\|u\|_{L_2}\right\}, \tag{13}$$

в которой постоянная C не зависит от функции u.

2. *Оператор A нормально разрешим и имеет конечный индекс.*

Сформулированная здесь теорема доказана в статье [1] для более широкого класса так называемых *сингулярных интегро-дифференциальных* краевых условий, по отношению к которым рассмотренные здесь условия (9) являются частным случаем.

5. Об индексе коэрцитивной задачи. Из приведенной в п. 4 теоремы вытекает, что всякая коэрцитивная задача имеет конечный индекс. Значительный интерес пред-

ставляет проблема вычисления этого индекса и исследования его свойств.

Весьма общая формула индекса, пригодная для широкого класса задач и, в частности, для коэрцитивной задачи (1), (9), дана М. Ф. Атийа и И. М. Зингером [12]. Однако фактически вычислять индекс по этой формуле затруднительно, и представляют интерес случаи, когда можно высказать об индексе те или иные утверждения, формулируемые более просто. Приведем одно такое утверждение.

Пусть две коэрцитивные задачи типа (1), (9) *различаются только краевыми условиями. Тогда разность индексов этих задач равна индексу некоторой системы сингулярных интегральных уравнений, которая целиком определяется данными обеих задач* [1].

Индекс системы сингулярных интегральных уравнений вычисляется сравнительно просто. Поэтому если для данной эллиптической системы (1) индекс известен при каких-нибудь краевых условиях, то его нетрудно вычислить и при любых других краевых условиях, удовлетворяющих условию дополнительности.

6. Некоэрцитивные задачи для эллиптических систем. Изучение этих задач наталкивается на большие трудности. Более разработана задача о косой производной для одного невырождающегося эллиптического уравнения второго порядка в случае, когда направление дифференцирования касается поверхности границы на многообразии низшей размерности. Изложение основных результатов, относящихся к задаче о косой производной в некоэрцитивном случае, а также библиографические данные можно найти в работах [2], [3], [13].

ДОБАВЛЕНИЕ 2

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. М. БАБИЧ

1. Решение задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$$

в настоящем курсе было построено для случая, когда начальные данные задавались при $t = 0$.

Можно вывести формулу, решающую гораздо более общую задачу Коши:

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 \Delta u &= f(x,\ t), \\ u\,|_S &= u_0(t,\ x), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S &= u_1(t,\ x). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь f, u_0, u_1 — достаточно гладкие функции, u_0, u_1 заданы на достаточно гладкой поверхности S, n — направление нормали к S. Поверхность S должна удовлетворять еще одному важному условию: должно выполняться неравенство

$$\cos^2(n,\ t) - a^2 \sum_{i=1}^{m} \cos^2(n,\ x_i) > 0. \tag{2}$$

Поверхность S, удовлетворяющая условию (2), называется *ориентированной пространственным образом* или *поверхностью пространственного типа.*

Наметим путь, следуя которому можно в квадратурах построить решение задачи (1).

Пусть m — четное число и (x_0, t_0) — та точка, в которой мы хотим вычислить функцию u (предполагаем, что решение задачи (1) существует). Пусть характеристический конус с вершиной в точке (x_0, t_0)

$$a^2(t-t_0)^2 - \sum_{i=1}^{m}(x_i - x_i^0) = 0 \tag{3}$$

вырезает из S конечный участок $\sum$ с достаточно гладкой $(m-1)$-мерной границей σ. Пользуясь условием (2), легко доказать, что в том случае, когда точка (x_0, t_0) находится вблизи S, последнее предположение всегда имеет место.

Применим формулу Грина

$$\begin{gathered}\int_{\Xi} uLv\,d\Xi = \int_{F}(uPv - vPu)\,dF + \int_{\Xi} vLu\,d\Xi, \\ L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta, \quad P = \cos(n, t)\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{m}\cos(n, x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\end{gathered} \tag{4}$$

к искомому решению задачи (1) и к функции

$$v = v_\lambda(x, t, x_0, t_0) = \\ = \frac{(-1)^{(m-2)/2}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{2\pi^{(m+1)/2}a}\left[a^2(t-t_0)^2 - \sum_{i=1}^{m}(x_i - x_i^0)^2\right]_+^\lambda. \tag{5}$$

Здесь Γ — гамма-функция Эйлера, λ — комплексное число, $\zeta_+^\lambda = \zeta^\lambda$ при $\zeta > 0$ и $\zeta_+^\lambda = 0$ при $\zeta \leqslant 0$. Область интегрирования Ξ здесь ограничена поверхностью конуса (3) и участком $\sum$, который этот конус вырезает из S. Граница этой области обозначена через F. Обе части равенства (4) — регулярные функции λ при $\operatorname{Re}\lambda > 2$. Продолжая аналитически обе части формулы (5) в точку $\lambda = -\frac{m-1}{2}$ (можно доказать, что такое аналитическое продолжение возможно), слева в формуле (4) получим $u(x_0, t_0)$, справа же — некоторое выражение, не содержащее неизвестных функций.

В самом деле, при $\operatorname{Re}\lambda > 2$ v и Pv на поверхности конуса равны нулю, $Lu = f$, $u|_S = u_0$; $P(u)$ нетрудно выразить через $u|_S = u_0$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = u_1$.

Формула, получающаяся намеченным путем, решает задачу (1), что можно показать непосредственной проверкой.

Функция (5) при $\lambda = -\frac{m-1}{2}$, продолженная нулем в область $a^2(t-t_0)^2 - \sum_{i=1}^{m}(x_i - x_i^0)^2 < 0$ и в полупространство $t > t_0$ (или $t < t_0$), называется *фундаментальным решением задачи Коши* для волнового уравнения. В частности, при $m = 2$ фундаментальным решением задачи Коши будет функция

$$v = \frac{1}{2\pi a}[a^2(t-t_0)^2 - (x_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0)^2]_+^{-1/2}. \tag{6}$$

Заметим, что формула, решающая задачу Коши для волнового уравнения в плоском случае, имеет вид (см. § 6 гл. 24)

$$u(x_0, t_0) = \iint\limits_{t=0} u_1 v\, dx_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{t=0} u_0 v\, dx_1\, dx_2.$$

Если число m пространственных переменных нечетное и больше единицы, то решение задачи (1) получается тем же способом, только вместо функции (5) в формулу Грина (4) следует подставить функцию

$$v = v_\lambda = \frac{1}{2\pi^{(m-1)/2}a}\frac{\left[a^2(t-t_0)^2 - \sum\limits_{i=1}^{m}(x_i - x_i^0)^2\right]_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)},$$

$$\operatorname{Re}\lambda > 2$$

и обе части полученного тождества аналитически продолжить в точку $\lambda = -\frac{m-1}{2}$.

Фундаментальное решение задачи Коши есть обобщенная функция v [1]), решающая задачу

$$\begin{gathered} Lv = \delta(x_1 - x_1^0, \ldots, x_m - x_m^0, t - t_0), \\ v|_{t>t_0} = 0 \ (\text{или } v|_{t<t_0} = 0). \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь δ — дельта-функция Дирака.

---

[1]) С обобщенными функциями читатель может ознакомиться по монографии [5] (см. также добавление 3, стр. 543—546).

В случае нечетного m фундаментальное решение задачи Коши имеет вид

$$v = \frac{1}{2\pi^{(m-1)/2}a}\,\delta^{\frac{m-3}{2}}\left[a^2(t-t_0)^2 - \sum_{i=1}^{m}(x_i - x_i^0)^2\right], \tag{8}$$

$$v\,|_{t>t_0} = 0 \qquad (\text{или } v\,|_{t<t_0} = 0).$$

В случае четного m фундаментальное решение задачи Коши дает функция (5), если положить $\lambda = \frac{1-m}{2}$.

2. Для гиперболического уравнения

$$Lu = \sum_{i,j=0}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^{m} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x),$$

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_m), \tag{9}$$

хорошо изучена задача Коши

$$Lu = f, \qquad u\,|_S = u_0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = u_1, \tag{10}$$

если S — поверхность пространственного типа.

В каждой точке x_0 построим конус

$$\sum_{i,j=0}^{m} A_{ij}(x_0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) = 0. \tag{11}$$

Матрица $A_{ij}(x_0)$ обратна матрице $a_{ij}(x_0)$. Конус (11) можно получить, аффинно преобразуя конус (3). Конус (11) делит пространство на три области: две «внутренних» и одну «внешнюю». Поверхность S ориентирована пространственным образом в том и только том случае, когда для каждой точки $x_0 \in S$ нормаль в этой точке не имеет общих точек ни с конусом (11) (кроме, разумеется, точки x_0), ни с его внешней областью.

Для дифференциального оператора (9) можно ввести понятие фундаментального решения задачи Коши.

Фундаментальным решением задачи Коши в этом случае называется обобщенная функция v, удовлетворяющая на некоторой поверхности (пространственного типа) нулевым начальным условиям и вблизи S уравнению

$$Lv = \delta(x_0 - x_0^0, \ldots, x_m - x_m^0) \qquad (x_0 = (x_0^0, \ldots, x_m^0) \in S).$$

Особенности фундаментального решения лежат на характеристическом коноиде, соответствующем точке x_0, — так называется характеристическая поверхность, имеющая в x_0 коническую особую точку.

Особенности фундаментальных решений в случае волнового оператора и оператора (10) при одинаковых m имеют сходный аналитический характер, если характеристический коноид оператора (10) не имеет особенностей, отличных от точки x_0.

Если характеристический коноид имеет особые точки, то в их окрестности фундаментальное решение имеет очень сложную структуру. Заметим, что фундаментальное решение для оператора (10) в случае $m=1$ называется *функцией Римана*, а при четном m — *элементарным решением Адамара*.

3. Интенсивно изучались разрывные решения (решения в обобщенном смысле или в смысле обобщенных функций) уравнения (10). В естественных предположениях можно доказать, что решение уравнения (10) при гладких a_{ij}, b_i, c, f может иметь разрывы только на характеристиках.

Пусть уравнение (10) ($m=3$) описывает физический процесс распространения волн.

Характеристика $F(x_1, x_2, x_3, t)=0$, $t=x_0$, на которой u имеет разрыв, с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе координат x_1, x_2, x_3, представляет собой движущуюся поверхность, вдоль которой функция u меняется особенно быстро. Эти поверхности называются *волновыми фронтами*. В случае волнового уравнения с переменной скоростью

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt} - \Delta u = 0, \qquad x=(x_1, x_2, x_3), \tag{12}$$

ортогональные траектории к волновым фронтам называются *лучами*; лучи удовлетворяют принципу Ферма: вдоль луча равна нулю вариация *функционала Ферма*

$$\int \frac{ds}{c(x)} = \int \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}}{c(x_1, x_2, x_3)}. \tag{13}$$

Разработана формальная методика отыскания сингулярностей решения задач для уравнения (12), в которой важной составной частью является построение лучей, т. е. экстремалей интеграла (13). Эта методика, известная под названием *лучевого метода*, широко, хотя и без строгого обоснования, при-меняется в математических задачах теории нестационарных волн.

Строгое обоснование лучевого метода в общем случае — трудная и еще не решенная задача.

4. Вернемся к волновому уравнению при $c(x) = a = \text{const}$. Пусть начальные функции $u_0(x_1, \ldots, x_m) = u|_{t=0}$ и $u_1(x_1, \ldots, x_m) = u_t|_{t=0}$ равны нулю вне некоторой области Ξ. Построим характеристические конусы (см. формулу (3)) с вершинами в каждой точке $t = 0$, $x_1^0, \ldots, x_m^0$, где $x_1^0, \ldots, x_m^0 \in \Xi$.

Определим множество F формулой

$$F = \bigcup_{(x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \Xi} \left\{(t, x_1, \ldots, x_m)\colon\ a^2t^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2\right\}.$$

Множество F есть объединение точек, принадлежащих характеристическим конусам, вершины которых лежат на плоскости $t = 0$ в точках области Ξ. Очевидно, что если Ξ стягивается в точку x_0, то множество F стягивается в характеристический конус

$$a^2t^2 = (x - x_0)^2.$$

Как следует из формулы Кирхгофа при $m = 3$ (см. § 3, гл. 24), решение задачи Коши $u(t, x_1, x_2, x_3)$ будет равно нулю вне множества F. Обычно этот факт выражают словами «для волнового уравнения при $m = 3$ отсутствует диффузия волн». (Подробнее см. [9].)

Понятие *уравнения без диффузии волн* легко распространяется на общий случай уравнения (9). Роль характеристических конусов здесь будут играть характеристические коноиды.

Нетрудно показать, что при $m = 5, 7, 9, \ldots$ в случае волнового уравнения диффузия волн будет отсутствовать, в то же время при $m = 1, 2, 4, 6, 8, \ldots$ вне множества F функция u не будет, вообще говоря, равна нулю. Точнее, u будет равна нулю вне множеств

$$F_1 = \bigcup_{(x_1^0, \ldots, x_m^0) \in \Xi} \left\{(t, x_1, \ldots, x_m)\colon\ a^2t^2 \geqslant \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2\right\}$$

и будет отлична от тождественного нуля на множестве F_1

Равенство u нулю вне F_1 — следствие конечности области зависимости решения задачи Коши от начальных данных (см.

п. 7). Четкие аналоги этого факта имеют место для самых общих гиперболических уравнений, в то время как отсутствие диффузии волн — явление в некотором смысле исключительное.

В случае гиперболического уравнения с переменными коэффициентами при четном m диффузия всегда имеет место. Очевидно, при нечетном m для уравнений, сводящихся к волновому заменой переменных, тоже диффузии волн не будет. При $m=5, 7, 9, \ldots$ существуют уравнения, не сводящиеся к волновому заменой переменных, для которых диффузии волн не будет [13]. При $m=3$ неизвестно [1]), существуют или нет уравнения без диффузии, не сводящиеся к волновому. Если бы удалось доказать, что уравнений «без диффузии», не сводящихся к волновому уравнению, не существует, то это бы указывало на исключительный характер физического пространственно-временного континуума (x_1, x_2, x_3, t).

Вопросы, которых мы кратко здесь коснулись, подробно рассматриваются в классическом труде Ж. Адамара [10], в статье М. Риса [12] и в монографии Р. Куранта [7]. Лучевому методу и его приложениям посвящена большая часть статей сборника [3].

5. Рассмотрим уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами

$$Lu = \sum_{\Sigma\alpha_i = p} a_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_m} \frac{\partial^p u}{\partial t^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}, \qquad a_{p0\ldots0}=1, \quad a_{\alpha_0\ldots\alpha_m}=\mathrm{const}. \tag{14}$$

Уравнение (14) называется *гиперболическим по И. Г. Петровскому*, если при любых, не равных нулю одновременно числах $\omega_1, \ldots, \omega_m$ полином по λ (с коэффициентами, зависящими от $\omega=(\omega_1 \ldots \omega_m)$)

$$\Delta(\lambda, \omega) = \sum_{\Sigma\alpha_i=p} a_{\alpha_0\ldots\alpha_m}\lambda^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1}\ldots\omega_m^{\alpha_m}$$

---

[1]) Польский математик М. Матиссон доказал, что если в операторе (10) $m=3$, $a_{ij}=\mathrm{const}$ и уравнение $Lu=0$ — уравнение без диффузии, то это уравнение можно свести к волновому заменой переменных [11].

имеет ровно p вещественных корней и эти корни все различны. Будем искать решение уравнения (14) в виде

$$u = f\left(vt + \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i\right), \qquad \sum_{i=1}^{m} \omega_i^2 = 1, \tag{15}$$

где f — произвольная функция.

Решение уравнения (14), имеющее вид (15), называют решением *типа плоской волны*, распространяющейся со скоростью v в направлении $-\omega$. Очевидно, что

$$u = f\left(vt + \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i\right) = \text{const},$$

если

$$vt + \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i = C = \text{const}, \tag{16}$$

т. е. решение типа плоской волны (15) сохраняет постоянное значение на плоскостях, ортогональных к вектору ω и движущихся в направлении $-\omega$ со скоростью v.

Подставляя выражение (15) в уравнение (14), получим

$$Lf\left(vt + \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i\right) = \Delta(v, \omega) f^{(p)}\left(vt + \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i\right).$$

Для того чтобы уравнение (14) удовлетворялось при любой функции f, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta(v, \omega) = 0.$$

Таким образом, условие гиперболичности по И. Г. Петровскому уравнения (14) равносильно утверждению, что для любого направления ω существует ровно p плоских волн с различными скоростями, распространяющихся в направлении $-\omega$.

Фундаментальным решением задачи Коши для уравнения (14) называется обобщенная функция h, удовлетворяющая условиям

$$Lh = \delta(x - x_0, t - t_0),$$
$$h|_{t > t_0} = 0.$$

Фундаментальное решение h при $p \geqslant 2$ позволяет выписать в квадратурах решение задачи

$$Lv = F(x), \qquad v|_{t=0} = v_0(x), \ \ldots, \ \frac{\partial^{p-1} v}{\partial t^{p-1}}\bigg|_{t=0} = v_{p-1}(x)$$

(F, v_i — достаточно гладкие функции).

Фундаментальное решение h можно построить с помощью наложения плоских волн при любых $m = 1, 2, 3, \ldots$ и $p = 1, 2, 3, \ldots$ Например, при нечетном m и $p \geqslant m + 1$

$$h = -\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{2(2\pi)^{m-1}(p-m-1)!} \times$$

$$\times \int\limits_{\Xi} \left(\sum_{k=1}^{m} X_k \xi_k + t - t_0\right)^{p-m-1} \operatorname{sgn}\left(\sum_{k=1}^{m} X_k \xi_k + t - t_0\right) d\Xi,$$

$$d\Xi = \frac{d\sigma}{|\operatorname{grad} H| \operatorname{sgn} \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k H_{\xi_k}}.$$

Здесь $H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \equiv \Delta(1, \xi_1, \ldots, \xi_m)$, $X_k = x_k - x_k^0$, $d\sigma$ — элемент поверхности $H = 0$.

Вывод формул для фундаментальных решений можно найти в монографии [1].

6. Характеристикой уравнения (14) называется поверхность $\gamma(t, x_1, \ldots, x_m) = 0$ такая, что в ее точках

$$\Delta\left(\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \gamma}{\partial x_m}\right) = 0.$$

Интересно отметить, что фундаментальные решения сингулярны только на характеристическом коноиде. Характеристическим коноидом [1]) называется поверхность в пространстве $x_1, \ldots, x_m, t$,

---

[1]) Для гиперболического уравнения второго порядка с непостоянными, вообще говоря, характеристиками было дано другое определение характеристического коноида (см. п. 2). Оба определения одновременно применимы только в случае одного гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$u_{tt} = a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad a_{ij} = \text{const},$$

и приводят к одному и тому же характеристическому коноиду

$$(t - t_0)^2 = A_{ij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0),$$

$$\|A_{ij}\|_{i,j=1}^{i,j=m} = \|a_{ij}\|^{-1}.$$

огибающая семейство плоскостей

$$v(t-t_0)+\sum_{i=1}^{m}\omega_i(x_i-x_i^0)=0,$$

где

$$\Delta(v, \omega)=0, \quad \omega=(\omega_1, \ldots, \omega_m).$$

В случае

$$m=2 \text{ и } \Delta(v, \omega)\equiv v^2-a^2\sum_{i=1}^{m}\omega_i^2$$

уравнение (14) совпадает с волновым, а характеристический коноид совпадает с конусом (3). В общем случае характеристический коноид является характеристической поверхностью уравнения (14) с особой точкой $x_i=x_i^0$, $t=t_0$. Характеристический коноид представляет собой, вообще говоря, $\left[\frac{p-1}{2}\right]+1$ конусов, имеющих точку $x_i=x_i^0$, $t=t_0$ своей общей вершиной ($[\ldots]$ — знак целой части). Особенности фундаментального решения в окрестности регулярной точки характеристического коноида исследованы в работе [2]. Оказалось, что они могут иметь лишь алгебраический, логарифмический или «дельтообразный» характер.

В окрестности особых точек характеристического коноида особенности фундаментальных решений имеют очень сложный характер и до конца еще не изучены.

7. Вне «самого широкого» конуса из конусов, составляющих характеристический коноид, фундаментальное решение равно нулю. Это обстоятельство связано с одним очень важным свойством гиперболических уравнений.

Если начальные данные задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt}-a^2\Delta u=0$ заданы при $t=0$, то решение в точке $x_i=x_i^0$, $t=t_0$, $t_0>0$, зависит только от значения начальных данных внутри сферы $(x_i-x_i^0)^2=a^2t_0^2$. Таким образом, в случае волнового уравнения область зависимости решения задачи Коши для каждой точки конечна. Для негиперболических уравнений конечной области зависимости нет.

В случае задачи Коши для уравнения теплопроводности, например, $u_t=\Delta u$; $u\Big|_{t=0}=\varphi(x)$, $x=x_1, \ldots, x_m$, решение

$u(x_0, t_0)$ при любом $t_0>0$ зависит от значений $\varphi(x)$ при всех x (т. е. при $-\infty<x_i<+\infty$, $i=1, 2, \ldots, m$. См. формулу Пуассона в § 2 гл. 23).

Область зависимости для точки $x=x_0$, $t=t_0$ в случае задачи Коши для уравнения (14) с данными при $t=0$ можно найти следующим образом: построим характеристический коноид с вершиной в точке $x=x_0$, $t=t_0$. Та область, которую вырежет из плоскости $t=0$ «самый широкий» конус коноида, и есть область зависимости для точки (x_0, t_0).

8. Система уравнений

$$\frac{\partial^{n_i}u_i}{\partial t^{n_i}}=\sum_{\substack{\Sigma\alpha_j=n_i\\ \alpha_0<n_i\\ s=1,2,\ldots,N}} a^{(s,i)}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_m}\frac{\partial^{n_i}u_s}{\partial t^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}} \qquad (17)$$

$$\left(a^{(s,i)}_{\alpha_0\ldots\alpha_m}=\text{const},\ s=1, 2, \ldots, N\right)$$

называется *гиперболической по И. Г. Петровскому*, если при любых вещественных $\omega_1, \ldots, \omega_m$, одновременно не равных нулю, полином по λ

$$\det\left\|\lambda^{n_i}\delta_{is}-\sum_{\substack{\Sigma\alpha_j=n_i\\ \alpha_0<n_i}} a^{(s,i)}_{\alpha_0\ldots\alpha_m}\lambda^{\alpha_0}\omega_1^{\alpha_1}, \ldots, \omega_m^{\alpha_m}\right\| \qquad (18)$$

($s, i=1, 2, \ldots, N$, δ_{is} — символ Кронекера) имеет только вещественные и различные корни.

Для системы (17) можно повторить с небольшими изменениями все, что в пп. 7 и 8 сказано об уравнении (14).

9. Рассмотрим (вообще говоря, нелинейную) систему N уравнений для N функций $u_1, \ldots, u_N$:

$$\frac{\partial^{n_i}u_i}{\partial t^{n_i}}=F_i\left(t, x, u_s, \ldots, \frac{\partial^r u_s}{\partial t^{\alpha_0}, \partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_m^{\alpha_m}}\right)$$

$$(\alpha_0<n_i;\ r\leqslant n_i;\ i, s=1, 2, \ldots, N). \qquad (19)$$

Пусть для этой системы заданы начальные данные

$$u_i\Big|_{t=0}=u_{i0}(x), \ldots, \frac{\partial^{n_i-1}u_i}{\partial t^{n_i-1}}\Big|_{t=0}=u_{i,n_i-1}(x),$$

$$x=(x_1, \ldots, x_m). \qquad (20)$$

Если $u_{i\alpha}(x)$ и F_i — достаточно гладкие функции, то при $t=0$ можно вычислить все производные от $u_i\ (t, x_1, \ldots, x_m)$ ($i=1, 2, \ldots, N$), входящие в систему (18). Система (19) называется гиперболической при $t=0$ при начальных данных (20), если определитель (18), где

$$a^{(s,\,i)}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_m}=\left.\frac{\partial F_i}{\partial\left[\dfrac{\partial^p u}{\partial t^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}\right]}\right|_{t=0}, \tag{21}$$

имеет только вещественные и различные корни по λ.

Гиперболичность в случае линейной системы (19) не зависит от начальных данных. Если система (19) гиперболична и линейна, то для системы (19) можно ввести понятие фундаментальной матрицы (обобщение понятия фундаментального решения задачи Коши) и понятие характеристического коноида для каждой точки (x_0, t_0) (см. [1]).

В самом общем случае системы (18), гиперболичной при $t=0$ по И. Г. Петровскому, задача Коши (19), (20) корректна вблизи $t=0$, т. е. задача Коши единственным образом разрешима при достаточно гладких $u_{is}(x)$, причем решение непрерывно зависит от начальных данных в следующем смысле: вектор-функции $u^{(\varkappa)}(x_0, t_0)$ ($t_0>0$, t_0 достаточно мало), $u^{\varkappa}=\left(u_1^{(\varkappa)}, \ldots, u_N^{(\varkappa)}\right)$, решающие задачу Коши (19), (20) с начальными данными $u_{is}^{(\varkappa)}$ ($\varkappa=1, 2, 3, \ldots$), стремятся к решению задачи Коши $u(x_0, t_0)$ с начальными данными $u_{is}(x)$, если начальные данные $u_{is}^{(\varkappa)}(x)$ при $\varkappa\to+\infty$ сходятся с достаточным числом производных к u_i на любом компакте на плоскости.

Доказательство корректности в таком общем случае удается провести с помощью оценки искомого решения в так называемых энергетических нормах (см. [8], [6]).

10. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов (см. [5]) называют гиперболической систему

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}=\sum_{k=1}^{m}P_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x_l}\right)u_k(x, t) \tag{22}$$

линейных уравнений с постоянными коэффициентами, если функция $\Lambda(s)=\max\operatorname{Re}\lambda_j(s)$ ($\lambda_j(s)$ — характеристические корни матрицы $\|P_{jk}(s)H\|$) удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Lambda(s) \leqslant a|s| + b, \quad a, b = \text{const};$

2) при вещественных $s = \sigma$

$$\Lambda(s) \leqslant c, \quad c = \text{const}.$$

Для таких систем задача Коши с данными при $t = 0$ корректна в том же смысле, в каком корректна гиперболическая по И. Г. Петровскому система (19) (см. конец п. 9). Здесь не обязательно, чтобы t было мало.

Если ограничиться системами вида (22), то ограничения на систему, описанные в настоящем пункте, не только достаточны для корректности задачи Коши (в смысле, описанном в п. 9), но и необходимы.

ДОБАВЛЕНИЕ 3

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ОБЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Г. МАЗЬЯ

1. Обобщенные функции. Предметом теории дифференциальных уравнений до последнего времени были операторы трех типов — эллиптического, параболического и гиперболического. Типичными и простейшими представителями этих классов являются, соответственно, операторы Лапласа, теплопроводности и волновой, о которых подробно говорилось в настоящем курсе. Изучение этих операторов и их обобщений, начатое еще в начале прошлого века, породило огромную литературу, позволило накопить и проанализировать большое число интереснейших фактов и связей, стимулировало развитие теории функций, функционального анализа и других областей математики.

Вместе с тем еще около двух десятилетий назад почти ничего не было известно об уравнениях и системах, не принадлежащих к трем классическим типам.

За этот короткий срок в указанном направлении был получен ряд глубоких результатов, позволяющих сегодня говорить о теории общих дифференциальных операторов. Краткому и по необходимости неполному изложению некоторых аспектов этой теории и посвящен настоящий очерк.

Исследование общих дифференциальных операторов стало возможным в первую очередь благодаря созданию теории обобщенных функций.

Обобщенные функции в нестрогой форме впервые появились в физике. Например, представление о точечном электрическом заряде приводит к интуитивному определению так называемой дельта-функции, т. е. функции, равной нулю всюду, кроме одной точки, где она равна бесконечности, и обладающей интегралом, равным единице. Понятие диполя заставляет ввести производные δ-функции.

Эти и другие «странные» объекты возникали и в математических вопросах, например в теории гиперболических уравнений. Все это указывало на недостаточность классического понятия функции.

Впервые обобщенные функции были введены в математику и использованы С. Л. Соболевым в 1936 г. [11] при изучении задачи Коши для линейных гиперболических уравнений. Теория обобщенных функций в ее современном виде оформилась в монографии Л. Шварца [24] и получила дальнейшее развитие в серии монографий И. М. Гельфанда и других авторов[1]).

Что же представляют собой обобщенные функции с точки зрения математика? Если говорить о δ-функции как таковой, то математический анализ уже давно был в состоянии дать для нее корректное определение. В самом деле, здесь речь идет всего лишь о конечной мере, сосредоточенной в точке. Однако уже для производных δ-функции теория меры оказывается «прокрустовым ложем».

Возвращаясь к δ-функции, вспомним, что всякую меру можно отождествить с линейным непрерывным функционалом на пространстве непрерывных функций, и заметим, что такой функционал для δ-функции действует по формуле

$$(\delta(x),\ f(x)) = f(0),$$

где $f(x)$ — любая функция, непрерывная, например, на отрезке $[-1,\ 1]$. Итак, δ-функция — это, по определению, функционал на $C[-1,\ 1]$, сопоставляющий функции $f(x)$ ее значение в точке 0.

Используя идею этого определения, можно ввести обобщенные функции как линейные непрерывные функционалы на тех или иных (в том числе более узких, чем C) пространствах. Последние принято называть пространствами основных функций. Выбор того или иного пространства основных функций зависит от рассматриваемой аналитической задачи.

---

[1]) К теме настоящего очерка особенно близки монографии [3] указанной серии.

Эти пространства — топологические, но не обязательно нормируемые или метрические; часто оказываются удобными так называемые счетно-нормированные пространства. Понятие сходимости последовательности основных функций, естественно, порождает сходимость в сопряженном пространстве — пространстве обобщенных функций.

В качестве примеров основных пространств приведем пространства $D(\Omega)$ и $S(E_m)$. Элементами $D(\Omega)$ являются бесконечно дифференцируемые в области Ω функции, каждая из которых обращается в нуль вне некоторой замкнутой подобласти Ω. В пространство $S(E_m)$ входят бесконечно дифференцируемые в E_m функции, которые вместе со всеми производными стремятся к нулю при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Соответствующие сопряженные пространства обозначаются через $D'(\Omega)$ и $S'(E_m)$. В дальнейшем мы будем иметь в виду только эти пространства обобщенных функций.

Оператор дифференцирования определен на $D(\Omega)$ и $S(E_m)$ и оставляет эти пространства инвариантными, что позволяет ввести дифференцирование в пространствах функционалов, как сопряженный оператор. Таким образом, все обобщенные функции классов $D'(\Omega)$ и $S'(E_m)$ оказываются бесконечно дифференцируемыми, а оператор дифференцирования — непрерывным оператором.

Аналогично определяется умножение обобщенной функции на любую функцию, которая является мультипликатором в соответствующем пространстве основных функций [1]). В частности, обобщенную функцию класса $D'(\Omega)$ можно умножать на любую бесконечно дифференцируемую в Ω функцию, а обобщенную функцию класса $S'(E_m)$ — на любую бесконечно дифференцируемую функцию, растущую на бесконечности не быстрее положительной степени $|x|$.

Близкие соображения позволяют ввести для обобщенных функций из $D'(E_m)$ и $S'(E_m)$ преобразование Фурье, свертку (обобщение интегрального оператора с разностным ядром) и другие операции классического анализа. В частности, преобразование Фурье отображает пространство $S(E_m)$ на себя,

---

[1]) Функция $\lambda(x)$ называется мультипликатором в некотором классе A функций, если произведение $\lambda u \in A$ для любой функции $u \in A$.

поэтому оказывается возможным определить преобразование Фурье обобщенных функций в пределах пространства $S'(E_m)$. Таким образом, преобразование Фурье распространяется на широкие классы функций, даже растущих на бесконечности.

Гибкость и широта теории обобщенных функций сделали ее естественным аппаратом для развития теории общих дифференциальных операторов и привели к стремительному развитию этой теории. Ниже мы ограничимся в основном операторами с постоянными коэффициентами, для которых за последние полтора десятилетия получен ряд результатов, в известном смысле законченных.

2. Фундаментальное решение. Рассмотрим дифференциальное выражение порядка l с постоянными коэффициентами

$$P(D)u = \sum_{|\alpha| \leq l} a^{\alpha_1, \ldots, \alpha_m} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m} u. \quad (1)$$

Первым общим результатом относительно такого оператора было доказательство существования фундаментального решения в различных пространствах обобщенных функций [23], [17].

Фундаментальным решением называется обобщенная функция $e(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$P(D)e(x) = \delta(x). \quad (2)$$

В случае оператора Лапласа в $E_m (m > 2)$ фундаментальное решение имеет вид

$$e(x) = (2-m)^{-1} |S_1|^{-1} |x|^{2-m}.$$

Эта функция, как мы знаем, служит ядром интегрального оператора (объемного потенциала), представляющего собой частное решение уравнения $\Delta u = f$. Аналогичную роль играет фундаментальное решение общего дифференциального оператора $P(D)$. Вопрос о существовании такого решения можно ставить только в терминах обобщенных функций: хорошо известно, что в классе обычных функций даже для простейших уравнений фундаментальное решение может не существовать. Преобразование Фурье F приводит уравнение (2) к эквивалентному алгебраическому уравнению

$$P(\xi)(Fe)(\xi) = 1,$$

где

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} a^{\alpha_1, \ldots, \alpha_m} \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_m^{\alpha_m}.$$

Тем самым задача о построении фундаментального решения $e(x)$ сводится к построению обобщенной функции $\frac{1}{P(\xi)}$ в том или ином пространстве. Таким путем не только получается теорема существования для функции $e(x)$, но и изучаются ее дифференциальные свойства.

Как было упомянуто, зная функцию $e(x)$, можно построить решение неоднородного уравнения

$$P(D)u = f. \tag{3}$$

Кроме того, с помощью этой же функции можно получить весьма общий аналог формулы Пуассона, т. е. выразить решение уравнения

$$P(D)u = 0 \tag{4}$$

в любой точке через значения этого решения в некотором сколь угодно тонком слое, окружающем точку. Такие представления, в сочетании с информацией о гладкости фундаментального решения и его особенностях, дают один из способов изучения вопроса о дифференциальных свойствах решений общих уравнений с частными производными.

3. Гипоэллиптические уравнения. Хорошо известно, что любое дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения Лапласа является в действительности аналитической функцией. Аналогичное свойство сохраняется и для любых эллиптических уравнений и систем с аналитическими коэффициентами. Как показал И. Г. Петровский [10], аналитичность всех решений является характеристическим свойством операторов эллиптического типа. Итак, простое «внешнее» свойство уравнения — эллиптичность — оказывается эквивалентным глубокому и значительно менее очевидному свойству — аналитичности его решений.

Л. Шварц [24] поставил вопрос об описании более общих дифференциальных выражений $P(D)$, обладающих тем свойством, что любое решение уравнения (3) $u \in C^{(\infty)}$, если $f \in C^{(\infty)}$. Такие дифференциальные выражения называются *гипоэллиптическими*. Простейшим примером не эллиптического, но гипоэллиптического дифференциального оператора является оператор теплопроводности.

Исчерпывающая характеристика гипоэллиптических операторов была дана в 1955 г. Л. Хермандером [13] (см. также [12], [16]). Оказывается, для гипоэллиптичности оператора P необходимо и достаточно, чтобы для всех нулей многочлена $P(\xi)$ из того, что $|\xi| \to \infty$, следовало $|\operatorname{Im} \xi| \to \infty$.

Если многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет этому условию, то существует положительная постоянная γ такая, что для нулей $P(\xi)$ выполнено неравенство

$$|\operatorname{Im} \xi| \geqslant a |\operatorname{Re} \xi|^{\gamma} - b, \tag{5}$$

где $a > 0$ и b — константы. Минимальное значение γ называется *показателем гипоэллиптичности*. Всегда $\gamma \leqslant 1$, причем равенство $\gamma = 1$ эквивалентно эллиптичности оператора. Показатель гипоэллиптичности можно определить следующим равенством ([7]):

$$\gamma = \varlimsup_{|\xi| \to \infty} \frac{\ln \dfrac{|\operatorname{grad} P(\xi)|}{|P(\xi)|}}{\ln |\xi|}.$$

Гипоэллиптические операторы выделяются также по следующему признаку: фундаментальное решение оператора $P(D)$ бесконечно дифференцируемо всюду вне начала координат тогда и только тогда, когда $P(D)$ — гипоэллиптический [20].

Конструируя фундаментальные решения и изучая их свойства, можно описать более широкие классы так называемых частично гипоэллиптических уравнений, решения которых бесконечно дифференцируемы по части переменных [19] (см. также [12]).

4. **Представление решений уравнений с постоянными коэффициентами.** Для решения уравнения (4) построено общее представление. Оно является далеко идущим обобщением элементарного представления решений однородного обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в виде суммы экспоненциально-степенных решений. Напомним, что показатели экспонент в последнем представлении суть нули характеристического многочлена. Для дифференциального уравнения с частными производными соответствующее выражение имеет

вид

$$u(x) = \int\limits_{P(\xi)=0} e^{i(x,\,\xi)}\,\mu(d\xi), \tag{6}$$

где μ — произвольная обобщенная функция некоторого класса (если нули $P(\xi)$ простые, то μ — мера) [18], [8].

Представление (6) следует из того, что уравнение (4) в E_m эквивалентно в пространствах обобщенных функций равенству $P(\xi)(Fu)(\xi) = 0$. Это равенство означает, что обобщенная функция $Fu \equiv \mu$ отлична от нуля только на множестве $\{\xi\colon P(\xi) = 0\}$, откуда в конечном счете вытекает соотношение (6).

5. Существование корректной задачи. Из равенства (6) следует существование бесконечного множества решений произвольного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Поэтому естественно рассмотреть вопрос о дополнительных условиях, выделяющих из всей совокупности решений единственное. Мы знаем, что для уравнений математической физики с этой целью ставятся различные краевые задачи, т. е. из всех решений выбирается то, которое удовлетворяет на границе области заданным условиям.

Как было сказано в гл. 25, такая задача называется корректной для некоторой пары пространств (A, B), если она однозначно разрешима в A для всех данных из B, причем решение непрерывно зависит от этих данных.

Возникает вопрос, существует ли для данного уравнения в фиксированной области хотя бы одна корректная краевая задача. Как показал Л. Хермандер [13], на этот вопрос можно ответить утвердительно в случае уравнения с постоянными коэффициентами, если $A = B = L_2(\Omega)$ и Ω — ограниченная область. Чтобы дать представление об этом результате, приведем некоторые определения.

Наряду с оператором $P(D)$ рассмотрим формально сопряженный оператор $\bar{P}(D)$, коэффициенты которого получаются из коэффициентов $P(D)$ заменой на комплексно-сопряженные числа. По оператору P построим так называемый *минимальный оператор* P_0, который представляет собой замыкание в $L_2(\Omega)$ заданного на $D(\Omega)$ оператора P. *Максимальным* назовем оператор, сопряженный в $L_2(\Omega)$ к минимальному оператору $\bar{P}_0$.

Таким образом, совокупность функций, удовлетворяющих любым однородным краевым условиям, содержит область определения минимального и содержится в области определения максимального оператора. Точно проблема существования корректных краевых задач для $P(D)$ ставится таким образом: можно ли найти расширение минимального оператора, которое одновременно является сужением максимального и обладает ограниченным обратным, определенным на всем пространстве $L_2(\Omega)$?

Из результатов М. И. Вишика [1] следует, что необходимым и достаточным условием существования такого расширения является выполнение для всех функций $u \in D(\Omega)$ неравенств

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant C\|P(D)u\|_{L_2(\Omega)}, \\ \|u\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant C\|P(D)u\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{7}$$

где C — постоянная, не зависящая от u. (Для оператора Лапласа, например, эти оценки являются простыми следствиями неравенства К. Фридрихса.) Упомянутый выше результат Л. Хермандера состоял в доказательстве того неожиданного факта, что такие неравенства верны для любого оператора с постоянными коэффициентами.

Этот факт является частным случаем общих теорем Л. Хермандера о сравнении дифференциальных операторов. По определению оператор $P(D)$ сильнее оператора $Q(D)$, если $D(P_0) \subset D(Q_0)$, где P_0 и Q_0 — соответствующие минимальные операторы.

Общие соображения (типа теоремы о замкнутом графике) показывают, что P сильнее Q в том и только том случае, когда существует такая постоянная C, что для всех функций $u \in D(\Omega)$ выполнена оценка

$$\|Qu\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\|Pu\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}), \tag{8}$$

эквивалентная в силу (7) оценке

$$\|Qu\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C'\|Pu\|_{L_2(\Omega)}. \tag{9}$$

Развивая технику интегралов энергии, Л. Хермандер дал в алгебраических терминах следующее необходимое и достаточное условие, при котором оценка (9) верна:

$$|Q(\xi)| \leqslant C\sum |P^{(\alpha)}(\xi)|, \qquad \forall \xi \in E_m, \tag{10}$$

где $P^{(\alpha)}(\xi)$ — производные многочлена $P(\xi)$, и суммирование распространяется на все мультииндексы α.

Отсюда следует, в частности, что оператор $P(D)$ является эллиптическим тогда и только тогда, когда он сильнее любого оператора, порядок которого не выше, чем порядок P.

В той же работе [13] показано, что для полной непрерывности оператора $Q_0P_0^{-1}$ необходимым и достаточным является условие

$$\frac{\sum |Q^{(\alpha)}(\xi)|}{\sum |P^{(\alpha)}(\xi)|} \to 0 \text{ при } \xi \to \infty. \tag{11}$$

Л. Хермандер доказал также, что если P и Q — максимальные операторы и если $D(P) \subset D(Q)$, то либо $Q = aP + b$, где a и b — постоянные, либо P и Q — обыкновенные дифференциальные операторы, причем степень Q не превосходит степени P.

Интересно, что для систем уравнений ответ на вопрос о существовании корректных краевых задач оказался более сложным, чем для одного уравнения. Уже в простом случае системы $u_x + v_y = f_1$, $v_x = f_2$ минимальный оператор не имеет разрешимых расширений [4]. В настоящее время известно необходимое и достаточное условие существования корректной задачи из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ для системы с постоянными коэффициентами [9], [21].

Итак, проблема существования корректных задач в случае постоянных коэффициентов решена полностью. Однако задача явного описания всех корректных краевых условий для общих операторов, по-видимому, еще далека от решения, несмотря на то, что для отдельных уравнений и систем в этом направлении известно довольно много.

Рассмотрению корректных задач для общих уравнений и систем в полупространстве было положено начало в работе И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [2]. В этой работе найдены классы единственности решений задачи Коши для системы уравнений

$$\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{k} P_{ij}(D)\, u_j(x, t) \qquad (1 \leqslant i \leqslant k), \tag{12}$$

описываемые неравенствами вида

$$|u| \leqslant Ce^{a|x|^p}.$$

Показатель p в этом неравенстве определяется матрицей $\|P_{ij}(\xi)\|$. Используемый в [2] метод основан на преобразовании Фурье обобщенных функций по пространственным переменным, которое приводит систему (12) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем, развивая этот прием, Г. Е. Шилов (16) дал описание классов разрешимости задачи Коши для системы (12). Более общие корректные задачи в полупространстве выделены и изучены в работах [5], [6] (см. также [16]).

6. Операторы с переменными коэффициентами. Изучение таких операторов встречает значительно бо́льшие трудности по сравнению со случаем постоянных коэффициентов. Это видно уже из того факта, что для уравнений с переменными коэффициентами на вопрос о существовании хотя бы одного решения в заданной области не всегда можно ответить утвердительно. Действительно, для уравнения первого порядка

$$-i\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}-2(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f$$

при некоторой бесконечно дифференцируемой функции f нет ни одного решения в пространстве D' обобщенных функций ни в одной подобласти E_3 ([22], [14]). Близкие между собой необходимые и достаточные условия существования решения в малой области были даны Л. Хермандером (см. [14]).

Этот результат, разумеется, не исчерпывает известную к настоящему времени информацию об общих уравнениях с переменными коэффициентами. Получены, например, достаточные условия гипоэллиптичности таких уравнений, а также условия существования корректной краевой задачи «в малом» [14]. Однако контуры общей теории уравнений с переменными коэффициентами еще не определились.

ДОБАВЛЕНИЕ 4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. Я. БАКЕЛЬМАН

Наряду с линейными уравнениями в частных производных в математической физике и ее приложениях большую роль играют нелинейные уравнения. Ниже будут рассмотрены нелинейные уравнения второго порядка эллиптического типа. К этим уравнениям естественно приводят разнообразные задачи механики, вариационного исчисления, геометрии и других разделов математики.

1. Основные понятия. Пусть Ω — некоторая область в m-мерном евклидовом пространстве E_m. Фиксируем в E_m некоторую декартову систему координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Точку пространства E_m будем записывать как обычно:

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

В Ω рассмотрим совокупность дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^{(2)}(\Omega)$. Введем следующие обозначения:

$$z_i=\frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

$$z_{ik}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \quad (i, k=1, 2, \ldots, m),$$

$$Dz=(z_1, \ldots, z_m),$$

$$D^2z=(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{mm}).$$

Пусть теперь

$$F(x_1, \ldots, x_m, z, p_1, \ldots, p_m, r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{mm})$$

— непрерывная функция независимых переменных x_i, z, p_i, r_{ik} при всех $x \in \Omega$ и всех конечных значениях остальных аргументов. Функцию F будем кратко записывать $F(x, z, p, r)$, где $p=(p_1, \ldots, p_m)$ и $r=(r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{mm})$. Величины p и r удобно интерпретировать как точки некоторых евклидовых пространств P и R, которые имеют соответственно размерности m и $m(m+1)/2$ и в которых введены декартовы координаты $p_1, \ldots, p_m$ и $r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{mm}$.

Каждая функция $F(x, z, p, r)$ на множестве функций $C^{(2)}(\Omega)$ порождает оператор

$$\Phi(z)=F(x, z, Dz, D^2z),$$

который возникает в результате подстановки в функцию F вместо z, p, r соответственно функции $z(x)$, ее первых и вторых производных.

Предположим теперь дополнительно, что функция F имеет непрерывные первые производные по переменным r_{ik} ($i, k = 1, 2, \ldots, m$) при всех $x \in \Omega$ и всех конечных значениях остальных переменных. Говорят, что оператор $\Phi(z)$ эллиптичен на функции $z_0 \in C^2(\Omega)$, если квадратичная форма

$$T(\Phi, z_0)=\sum_{i, k=1}^{m} F^0_{r_{ik}}\xi_i\xi_k$$

является определенной во всех точках области Ω. Функция $F^0_{r_{ik}}$ есть результат подстановки в $F_{r_{ik}}(x, z, p, r)$ функции $z_0(x)$, ее первых и вторых производных. Так как функции $F^0_{r_{ik}}$ непрерывны в Ω, то квадратичная форма $T(\Phi, z_0)$ всюду в Ω сохраняет знак. Поэтому если оператор $\Phi(z)$ эллиптичен на функции $z_0 \in C^{(2)}(\Omega)$, то квадратичная форма $T(\Phi, z_0)$ всюду в Ω либо положительно, либо отрицательно определенная. Отметим, что оператор $\Phi(z)$ на одних функциях из $C^{(2)}(\Omega)$ может быть эллиптичен, а на других — нет. Соответствующие примеры будут приведены ниже.

Дифференциальное уравнение

$$F(x, z, Dz, D^2z)=0$$

называется *эллиптическим*, если на всех решениях этого уравнения оператор $\Phi(z)$ эллиптичен.

Очевидно, что определение эллиптичности, данное для линейного уравнения § 2 гл. 9, есть частный случай только что введенного понятия эллиптичности общего уравнения

$$F(x,\ z,\ Dz,\ D^2z)=0.$$

Наиболее важными классами нелинейных уравнений являются квазилинейные уравнения и уравнения типа Монжа — Ампера.

а) Квазилинейными уравнениями называются уравнения вида

$$A_{ik}(x,\ z,\ Dz)\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}+B(x,\ z,\ Dz)=0. \tag{1}$$

Эти уравнения линейны относительно вторых производных неизвестной функции $z(x)$. Линейные уравнения есть, очевидно, частный случай квазилинейных уравнений.

Квазилинейное уравнение будет эллиптическим, если при всех $x\in\Omega$, $z\in(-\infty,\ +\infty)$, $p\in P$ квадратичная форма $A_{ik}(x,\ z,\ p)\xi_i\xi_k$ будет определенной во всех точках Ω. Как мы уже отмечали, квадратичная форма

$$A_{ik}(x,\ z,\ p)\xi_i\xi_k \tag{2}$$

при любых $x\in\Omega$, z, $p\in P$ будет сохранять знак. Поэтому эллиптичность уравнения (1) будет вытекать из условия, что при любых x, z, p квадратичная форма (2) положительно (отрицательно) определенная. Можно доказать, что это условие будет не только достаточным, но и необходимым для эллиптичности уравнения (1).

б) *Уравнениями Монжа — Ампера* называют уравнения вида

$$z_{x_1x_1}z_{x_2x_2}-z^2_{x_1x_2}+\sum_{i,\,k=1}^{2}A_{ik}(x,\ z,\ Dz)\,z_{x_ix_k}+ \\ +B(x,\ z,\ Dz)=0,\qquad A_{ik}=A_{ki}. \tag{3}$$

Это — уравнение относительно функций с двумя независимыми переменными. Отличительной их чертой является присутствие в качестве главного члена выражения

$$z_{x_1x_1}z_{x_2x_2}-z^2_{x_1x_2}.$$

Оператор

$$H(z)=z_{x_1x_1}z_{x_2x_2}-z^2_{x_1x_2}$$

называется *простейшим оператором Монжа — Ампера.*

Функция

$$F(x, z, p, r) = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} + \sum_{i, k=1}^{2} A_{ik}(x, z, p) r_{ik} + B(x, z, p)$$

будет непрерывной тогда и только тогда, когда функции $A_{ik}(x, z, p)$, $B(x, z, p)$ непрерывны при всех $x \in \Omega$ (здесь Ω — область на плоскости переменных x_1, x_2) и любых $z \in (-\infty, +\infty)$, $p \in P$. При выполнении этого условия функция $F(x, z, p, r)$ имеет также непрерывные производные

$$\frac{\partial F}{\partial r_{11}} = r_{22} + A_{11}, \qquad \frac{\partial F}{\partial r_{12}} = -r_{21} + A_{12},$$
$$\frac{\partial F}{\partial r_{21}} = -r_{12} + A_{21}, \qquad \frac{\partial F}{\partial r_{22}} = r_{11} + A_{22}.$$

Выясним, при каких условиях уравнение (3) будет эллиптическим. Пусть $z(x_1, x_2)$ — произвольная функция из $C^{(2)}(\Omega)$. Тогда

$$T(\Phi, z) = (z_{x_2x_2} + A_{11})\xi_1^2 - 2(z_{x_1x_2} - A_{12})\xi_1\xi_2 + \\ + (z_{x_1x_1} + A_{22})\xi_2^2.$$

Квадратичная форма $T(\Phi, z)$ будет определенной тогда и только тогда, когда в Ω будет выполнено неравенство

$$(z_{x_2x_2} + A_{11})(z_{x_1x_1} + A_{22}) - (z_{x_1x_2} - A_{12})^2 > 0.$$

Пусть $z(x_1, x_2)$ — решение уравнения (3). Тогда

$$z_{x_1x_1} z_{x_2x_2} - z^2_{x_1x_2} + \sum_{i, k=1}^{2} A_{ik} z_{x_ix_k} + B = 0$$

и, следовательно, для того чтобы (3) было эллиптическим уравнением, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$A_{11}A_{22} - A^2_{12} - B > 0$$

при всех $(x_1x_2) \in \Omega$ и любых конечных значениях z, p_1, p_2. Можно доказать, что это условие и необходимо для эллиптичности уравнения (3).

Легко видеть, что квадратичная форма

$$T(\Phi, z_0) = \sum_{i, k=1}^{2} F^0_{r_{ik}} \xi_i \xi_k \qquad (4)$$

всюду сохраняет знак, если оператор $\Phi(z)$ эллиптичен на функции z_0. Это приводит к тому, что есть функции z_0, для которых квадратичная форма (4) положительно определенная в Ω, есть функции, на которых эта форма отрицательно определенная, и, наконец, есть функции, на которых она знакопеременная.

Разберем это на примере простейшего уравнения Монжа — Ампера:

$$z_{x_1x_1}z_{x_2x_2}-z^2_{x_1x_2}=\varphi(x_1,\ x_2), \tag{5}$$

где $\varphi(x_1,\ x_2)$ — непрерывная функция в области Ω. Для оператора

$$\Phi(z)=z_{x_1x_1}z_{x_2x_2}-z^2_{x_1x_2}-\varphi(x_1,\ x_2)$$

форма $T(\Phi,\ z)$ имеет вид

$$T(\Phi,\ z)=z_{x_2x_2}\xi_1^2-2z_{x_1x_2}\xi_1\xi_2+z_{x_1x_1}\xi_2^2.$$

Очевидно, что на функциях $z=\frac{k^2}{2}(x_1^2+x_2^2)$ $T(\Phi,\ z)$ — положительно определенная форма, на функциях $z=\frac{-k^2}{2}(x_1^2+x_2^2)$ — отрицательно определенная и, наконец, на функциях $z=\frac{k^2}{2}(x_1^2-x_2^2)$ — знакопеременная.

Условием эллиптичности уравнения (5) является неравенство

$$\varphi(x_1,\ x_2)>0.$$

Таким образом, решениями эллиптического уравнения (5) будут необходимо выпуклые функции. Действительно, если $u(x_1,\ x_2)$ — решение уравнения (5), то всюду в области Ω $u_{x_1x_1}u_{x_2x_2}-u^2_{x_1x_2}=\varphi(x_1,\ x_2)>0$ и, следовательно, $T(\Phi,\ u)$ всюду в Ω — определенная форма, сохраняющая один и тот же знак.

Наряду с решением $u(x_1,\ x_2)$ уравнения (5), решением этого же уравнения является функция $v(x_1,\ x_2)=-u$, поэтому у уравнения (5) есть два класса решений: у одного из них форма $T(\Phi,\ u)$ положительно определенная на любом решении, у другого та же форма отрицательна на любом решении. Это обстоятельство имеет простой геометрический смысл: решениями из первого класса являются выпуклые функции, обращенные выпуклостью вниз, а решениями второго класса — выпуклые функции, обращенные выпуклостью вверх.

Точно так же любое эллиптическое уравнение Монжа — Ампера (3) имеет два класса решений. На решениях одного класса форма $T(\Phi, z)$ положительно определенная, а на решениях другого класса — отрицательно определенная.

в) Аналогом простейшего уравнения Монжа — Ампера для функций от m переменных является уравнение

$$\begin{vmatrix} z_{x_1x_1} & z_{x_1x_2} & \dots & z_{x_1x_m} \\ z_{x_2x_1} & z_{x_2x_2} & \dots & z_{x_2x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{x_mx_1} & z_{x_mx_2} & \dots & z_{x_mx_m} \end{vmatrix} = \varphi(x, z, Dz). \tag{6}$$

Аналогом общего уравнения Монжа — Ампера в m-мерном случае естественно считать уравнение вида

$$\begin{vmatrix} z_{x_1x_1}+A_{11} & z_{x_1x_2}+A_{12} & \dots & z_{x_1x_m}+A_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{x_mx_1}+A_{m1} & z_{x_mx_2}+A_{m2} & \dots & z_{x_mx_m}+A_{mm} \end{vmatrix} + B(x, z, Dz) = 0,$$

где $A_{ik}=A_{ki}$, B — непрерывные функции от x, z, p.

Эти уравнения имеют также два класса решений, причем все геометрические свойства решений уравнения (6) аналогичны свойствам решений двумерного простейшего уравнения Монжа — Ампера.

Для нелинейных эллиптических уравнений наиболее изученной является задача Дирихле. Так же как и для линейных эллиптических уравнений, она состоит в нахождении функции, удовлетворяющей внутри области данному нелинейному эллиптическому уравнению и обращающейся на границе области в заданную функцию.

2. Принцип максимума. Теорема единственности для задачи Дирихле. В теории эллиптических уравнений важную роль играет так называемый *принцип максимума*, который заключается в том, что при определенных условиях решения эллиптических уравнений не могут иметь внутри области ни положительных максимумов, ни отрицательных минимумов.

Остановимся сначала на случае линейных уравнений.

Принцип максимума. *Пусть в области* Ω *задано уравнение*

$$L(z) \equiv a_{ik}(x) z_{ik} + b_i(x) z_i + c(x) z = 0. \tag{7}$$

Будем предполагать, что коэффициенты этого уравнения непрерывны в Ω *и при всех* $x \in \Omega$ *квадратичная форма*

$$a_{ik}(x)\xi_i\xi_k$$

положительна, а функция $c(x)$ *неположительна. Пусть, далее,* $z(x) \in C^{(2)}(\Omega)$ — *решение уравнения* (7).

Тогда $z(x)$ *внутри* Ω *не может иметь ни отрицательных минимумов, ни положительных максимумов.*

В § 10 гл. 11 принцип максимума для линейных уравнений доказан при дополнительном предположении, что коэффициент $c(x) < 0$ [1]).

Из принципа максимума сразу вытекает теорема единственности решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка.

Принцип максимума и теорема единственности для линейных эллиптических уравнений были предметом многочисленных исследований. Было выяснено, что требования непрерывности коэффициентов уравнения (7) и двукратной непрерывной дифференцируемости решения можно существенно ослабить. Именно, достаточно рассматривать коэффициенты уравнения как элементы пространства L_p, а решения рассматривать в классах функций с обобщенными производными. Читатель может найти соответствующие результаты в монографиях [10], [12]. В работах [1], [2] к исследованию принципа максимума и теорем единственности для эллиптических уравнений были применены геометрические методы.

Обратимся теперь к теореме единственности задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений.

Пусть $F(x, z, p, r)$ — функция, определенная при всех $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$, $r \in R$ и непрерывно дифференцируемая при всех допустимых значениях аргументов. Как мы отмечали в п. 1, на классе функций $C^{(2)}(\Omega)$ функция F порождает оператор

$$\Phi(z) = F(x, z, Dz, D^2z).$$

[1]) Рассмотренное в § 10 гл. 11 уравнение отличается от уравнения (7) знаком левой части, поэтому условие на коэффициент $C(x)$ там имеет вид $C(x) > 0$.

Будем говорить, что оператор $\Phi(z)$ *эллиптически выпуклый*, если из того, что квадратичная форма

$$T(\Phi, z) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial F(x, z, Dz, D^2z)}{\partial r_{ik}} \xi_i \xi_k,$$

положительно (отрицательно) определенная на функциях $z^0(x)$, $z^1(x) \in C^{(2)}(\Omega)$, вытекает, что эта форма будет также положительно (отрицательно) определена на всех функциях $z^\tau(x) = (1-\tau) z^0 + \tau z^1$, когда τ изменяется между нулем и единицей.

Теорема единственности для задачи Дирихле. *Пусть функция $F(x, z, p, r)$, определенная и непрерывно дифференцируемая при всех $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$, $r \in R$, порождает эллиптически выпуклый оператор $\Phi(z)$. Пусть на решениях $z^1(x)$, $z^2(x) \in C^{(2)}(\Omega)$ уравнения*

$$F(x, z, Dz, D^2z) = 0$$

оператор $\Phi(z)$ положительно (отрицательно) эллиптичен. Тогда если на границе Ω функции $z^1(x)$ и $z^2(x)$ совпадают и

$$F_z(x, z, p, r) \leqslant 0 \qquad (F_z(x, z, p, r) \geqslant 0)$$

при всех $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$, $r \in R$, то в Ω функции $z^1(x)$ и $z^2(x)$ совпадают.

Эта теорема также допускает различные обобщения в тех направлениях, о которых речь шла выше.

Из теоремы единственности для общего нелинейного уравнения эллиптического типа могут быть получены в качестве простых следствий следующие теоремы единственности.

1. *Задача Дирихле для квазилинейного уравнения*

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x, Dz) z_{ik} + b(x, z, Dz) = 0,$$

где $a_{ik}(x, p)$ и $b(x, z, p)$ — непрерывно дифференцируемые функции для всех $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$, имеет не более одного решения, если выполнены следующие *условия: при любых* $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$

а) $$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x, p)\xi_i\xi_k > 0,$$

б) $$b_z(x, z, p) \leqslant 0.$$

2. *Задача Дирихле для уравнения Монжа — Ампера*

$$\Phi(z) = z_{11}z_{22} - z_{12}^2 + \sum_{i,k=1}^{2} A_{ik}(x, Dz)z_{ik} + B(x, z, Dz) = 0,$$
$$A_{ik} \equiv A_{ki}, \tag{7}$$

где $A_{ik}(x, p)$ *и* $B(x, z, p)$ *— непрерывно дифференцируемые функции для всех* $x \in \Omega$, $-\infty < z < +\infty$, $p \in P$, *имеет не более одного решения, на котором квадратичная форма* $T(\Phi, z)$ *положительна (отрицательна), если выполнены следующие условия: при любых* $x \in \Omega$, $z \in (-\infty, +\infty)$, $p \in P$

а) $-B + A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$ б) $B_z \leqslant 0$.

(Исследуется единственность в классе решений уравнения (7), на которых форма $T(\Phi, z)$ положительно определенная. Условие б) заменяется условием $B_z \geqslant 0$, если единственность задачи Дирихле рассматривается в классе решений уравнения (7), на которых форма $T(\Phi, z)$ отрицательно определенная).

Для m-мерных аналогов уравнения Монжа — Ампера имеют место сходные теоремы единственности решения задачи Дирихле.

В сформулированных выше теоремах единственности для квазилинейных уравнений и уравнений Монжа — Ампера речь шла о решениях, имеющих непрерывные вторые производные. Однако эти теоремы сохраняются и при более слабых предположениях относительно дифференциальных свойств решения. Достаточно, например, потребовать, чтобы решение принадлежало классу $W_p^{(2)}$ при некотором $p > m$ (m — размерность пространства). С геометрической точки зрения теорема единственности для уравнений Монжа — Ампера представляет особый интерес: к специальным случаям уравнения Монжа — Ампера приводят основные проблемы геометрии «в целом», связанные с вопросами существования и единственности поверхности с заданной внутренней метрикой, заданной функцией главных нормальных кривизн и др. Разработаны методы [13], [14], позволяющие в весьма сложных условиях применить аналог принципа максимума к упомянутым частным классам уравнений Монжа — Ампера и получить таким образом теоремы о единственности решения задачи Дирихле для этих уравнений.

3. Теоремы существования. Центральное место в исследовании разрешимости нелинейных эллиптических уравнений занимает задача Дирихле. Доказательства теорем существования решения для этой задачи весьма сложны, и в рамках этого добавления мы можем дать лишь весьма краткий очерк основных методов и результатов.

Основное направление исследований в указанной области определилось двумя проблемами Д. Гильберта (19-й и 20-й), которые были поставлены им в 1900 г. В первой речь шла о справедливости гипотезы, что все достаточно гладкие решения эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами являются также аналитическими функциями; вторая состояла в следующем: надо было доказать, что вариационная задача о нахождении функции, принимающей на границе заданное значение и сообщающей наименьшее значение данному функционалу

$$J(z)=\int_{\Omega}\varphi(x,\ z,\ Dz)\,dx,$$

где $\varphi(x, z, p)$ — ограниченная снизу выпуклая функция переменных $p_1, \ldots, p_m$, всегда имеет решение, если его искать в достаточно широком классе функций. Так как уравнением Эйлера для функции, сообщающей экстремум функционалу $J(z)$, является квазилинейное эллиптическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

то в последующих исследованиях эта проблема тесно переплелась с исследованием задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений.

Первые фундаментальные результаты по нелинейным эллиптическим уравнениям общего вида с двумя переменными, в которых содержалось решение проблем Гильберта, были получены в классических работах С. Н. Бернштейна 1908—1912 гг. С. Н. Бернштейн доказал, что трижды непрерывно дифференцируемые решения нелинейных аналитических уравнений эллиптического типа являются аналитическими функциями своих аргументов. Далее им были получены следующие результаты по разрешимости задачи Дирихле для уравнения

$$F(x_1, x_2, z, z_1, z_2, z_{11}, z_{12}, z_{22}) = 0. \tag{8}$$

Предполагая функцию F аналитической по всем аргументам и предполагая аналитичность граничных условий, С. Н. Бернштейн доказывает, что если в задачу Дирихле для уравнения (8) аналитическим образом может быть введен параметр $t \in [0, 1]$ так, что при $t=0$ задача Дирихле имеет аналитическое решение, при $t=1$ обращается в исходную задачу и, наконец, при всех $t \in [0, 1]$ можно получить равномерные оценки в метрике пространства $C^{(2)}$ для решений всех вспомогательных задач Дирихле (предполагая лишь существование решения), то исходная задача имеет решение в классе аналитических функций. Для квазилинейных уравнений достаточно иметь оценки решений вспомогательных задач в метрике $C^{(1)}$.

Оценки для решений дифференциальных уравнений, которые получаются лишь в предположении существования решения и при получении которых используются лишь свойства коэффициентов уравнения и граничных условий краевой задачи, принято называть *априорными*. Для аналитических задач Дирихле в случае двух переменных вопрос о разрешимости задачи Дирихле оказался сведенным к вопросу о получении равномерных априорных оценок в метрике $C^{(2)}$ для общих уравнений и в метрике $C^{(1)}$ для квазилинейных уравнений.

Для квазилинейных эллиптических уравнений

$$\sum_{i, k=1}^{2} a_{ik}(x, Dz) z_{ik} + b(x, z, Dz) = 0$$

с аналитическими коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$|b| \leqslant R_M \sum_{j, k=1}^{2} a_{jk}(x, p) p_j p_k$$

при всех $x \in \Omega$ и $|z| \leqslant M$, $p_1^2 + p_2^2 \geqslant 1$, где R_M — постоянная, зависящая только от M, получены априорные оценки модулей первых производных в задаче Дирихле. При этом предполагается, что область Ω ограничена аналитическим контуром со строго положительной кривизной, $\frac{\partial b}{\partial z} \leqslant 0$ и имеется априорная оценка модуля решения; существование априорной оценки модуля решения гарантировано, если $\frac{\partial b}{\partial z} \leqslant \text{const} < 0$.

Для указанного класса уравнений установлена разрешимость задачи Дирихле. Вариационная задача о минимуме функционала

$$\int_{\Omega} \varphi(x, z, Dz)\,dx, \tag{9}$$

где φ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{j,\,k=1}^{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_j \partial p_k} \xi_j \xi_k \geqslant \alpha_0 \sum_{k=0}^{2} \xi_k^2, \qquad \alpha_0 = \text{const} > 0,$$

приводит к решению задачи Дирихле для квазилинейного уравнения упомянутого выше класса; тем самым эта вариационная задача также оказывается разрешимой.

Результаты С. Н. Бернштейна оказалось возможным перенести на пространства гельдеровых функций $C^{k,\alpha}$; в этих пространствах названные результаты формулируются наиболее просто и естественно. Основные теоремы С. Н. Бернштейна об общих эллиптических уравнениях и вариационных задачах доказаны при сравнительно легких требованиях гладкости (достаточно принадлежности решения пространству $C^{2,\alpha}$ для общих уравнений и пространству $C^{1,\alpha}$ для вариационных задач). Указанные доказательства опираются на работы Ю. С. Шаудера по априорным оценкам и разрешимости краевых задач для линейных эллиптических уравнений в пространствах гельдеровых функций.

Ж. Лере и Ю. Шаудер разработали топологические методы решения эллиптических и некоторых других функциональных уравнений. Эти методы представляют собой широкое обобщение метода С. Н. Бернштейна продолжения по параметру.

Параллельно в ряде работ, ведущих свое начало от Д. Гильберта, решение вариационных задач шло другим путем. Были созданы так называемые прямые методы, дающие минимизирующую последовательность, которая сходится к функции, реализующей экстремум данного функционала. При этом без дополнительного исследования удается гарантировать лишь принадлежность такой функции пространству вида $W_p^{(1)}$, $p>1$; естественно такую функцию считать обобщенным решением вариационной задачи. В подобных построениях количество независимых переменных не играет, как правило, никакой роли.

В случае двух независимых переменных можно, накладывая на подынтегральную функцию в функционале (9) различные требования гладкости, установить достаточную гладкость обобщенного решения.

Доказательство гладкости обобщенных решений в случае $m>2$ потребовало разработки новой методики априорных оценок в $C^{1,\alpha}$, которая учитывала бы специфику большого числа независимых переменных. Такая методика разработана для функционалов вида (9), в которых подынтегральная функция $\varphi(x, z, p)$ имеет при $|p|\to\infty$ порядок роста $|p|^\alpha$, $\alpha>1$. Получен ряд теорем о разрешимости и дифференциальных свойствах решения вариационной задачи (9); во многих случаях оказалось, что требования, налагаемые на функцию φ, дальше ослаблять нельзя. Доказаны теоремы о разрешимости в классическом смысле квазилинейных эллиптических уравнений вида

$$a_{jk}(x, z, Dz)\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_k}+a(x, z, Dz)=0$$

(недивергентная форма), а также уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_k}a_k(x, z, Dz)+a(x, z, Dz)=0$$

(дивергентная форма). Условия этих теорем указывают такое согласование порядков роста функций, входящих в уравнение, при котором обеспечена та или иная регулярность решения. Подробное изложение всех относящихся сюда вопросов можно найти в монографии [10] и в статье [8].

В последнее время появился ряд работ, в которых исследуются вырождающиеся вариационные задачи (случай $\alpha=1$). Эти задачи тесно связаны с классической задачей о минимальной поверхности.

Ряд работ посвящен теоремам существования для уравнений типа Монжа — Ампера. В работах А. Д. Александрова были сформулированы в геометрических терминах некоторые проблемы, связанные с построением выпуклых поверхностей по их внутренней метрике, интегральной гауссовой кривизне и другим характеристикам, и разработаны геометрические методы для решения этих задач. С точки зрения аналитической речь идет здесь о построении обобщенных решений для некоторых специальных типов уравнений Монжа — Ампера. В случае, когда геометрические характеристики задачи суть функции достаточно гладкие, обобщенные решения также оказываются гладкими [14].

В последнее время исследованы (см. [3], [14]) обобщенные решения для широких классов уравнений Монжа — Ампера и их многомерных аналогов; для уравнений Монжа — Ампера в случае достаточной гладкости коэффициентов уравнений и краевых условий установлена гладкость обобщенных решений.

Обобщенные решения задачи Дирихле исследованы (см., например, [5] — [7]) для обширного класса квазилинейных сильно эллиптических систем произвольного порядка.

ЛИТЕРАТУРА

Литература к разделу I

1. Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, 1952.
2. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, изд. 2-е, Физматгиз, 1959.
3. Соболев. С. Л., Некоторые приложения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950.

Литература к разделу II

1. Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, Физматгиз, 1955.
2. Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, перев. с англ., ИЛ, 1950.
3. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, перев. с нем., тт. 1, 2, Гостехиздат, 1951.
4. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А., Основы вариационного исчисления, т. I, часть 1, ОНТИ, 1935.
5. Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.
6. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1957.
7. Friedrichs K., Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung der Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Mathematische Annalen, Bd. 109, H. 4—5 (1934), 465—487.

Литература к разделу III

1. Канторович Л. В. и Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
2. Михлин С. Г., О разрешимости линейных уравнений в гильбертовых пространствах, ДАН СССР **57**, 1(1947).
3. Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.
4. Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, Гостехиздат, 1951.
5. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, перев. с франц., ИЛ, 1954.
6. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1957.

7. Соболев С. Л., Некоторые приложения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950.
8. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, перев. с англ., ИЛ, 1959.

Литература к разделу IV

1. Oleinik O. A., A boundary value problem for linear elliptic-parabolic equations, University of Maryland, January, 1965.
2. Смирнов М. М., Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966.
3. Трикоми Ф., О линейных уравнениях смешанного типа, перев. с итал., Гостехиздат, 1947.

Литература к разделу V

1. Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965.
2. Вишик М. И., О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. сб. 29 (71) (1951), 615—676.
3. Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, перев. с англ., ИЛ, 1952.
4. Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, Гостехиздат, 1953.
5. Carleman T., Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse, Bd. LXXXVIII, 1936.
6. Курант Р., Уравнения с частными производными, перев. с англ., «Мир», 1964.
7. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, перев. с нем., тт. 1, 2, Гостехиздат, 1951.
8. Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.
9. Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966.
10. Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, перев. с итал., ИЛ, 1957.
11. Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.
12. Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.
13. Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966.
14. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике, Физматгиз, 1962.
15. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.
16. Слободецкий Л. Н., Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциаль-

ных уравнений в частных производных, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. Герцена 197 (1958) 54—112.
17. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, Физматгиз, 1956; т. IV, Физматгиз, 1958.
18. Соболев С. Л., Об одной теореме функционального анализа, Матем. сб. 4 (46), 3 (1938).
19. Соболев С. Л., Некоторые приложения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950.

Литература к разделу VI

1. Курант Р., Уравнения с частными производными, перев. с англ., «Мир», 1964.
2. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 2, Гостехиздат, 1951.
3. Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.
4. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.
5. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965; т. IV, Физматгиз, 1958.
6. Соболев С. Л., Некоторые приложения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950.
7. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954.
8. Тихонов А. И. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.
9. Шилов Г. Е., Математический анализ. Специальный курс, Физматгиз, 1960.

Литература к разделу VII

1. Слободецкий Л. Н., Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. Герцена 197 (1958), 54—112.
2. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954.
3. Тихонов А. Н., О решении некорректно поставленных задач и метода регуляризации, ДАН СССР 151, 3 (1963), 501—504.
4. Хермандер Л., К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, перев. с англ., ИЛ, 1959.

Литература к добавлению 1

1. Агранович М. С., Дынин А. С., Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области, ДАН СССР 146, 2 (1962), 511—514.
2. Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966.

3. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А., О задаче с косой производной, ДАН СССР **170**, 4 (1966), 770—773.
4. Лопатинский Я. Б., Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Укр. матем. журн. **5**, 2 (1953), 123—151.
5. Петровский И. Г., О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными, УМН **1**, 3—4 (1946), 44—70.
6. Слободецкий Л. Н., Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. Герцена **197** (1958), 54—112.
7. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, 1959.
8. Соболев С. Л., Некоторые приложения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950.
9. Шапиро З. Я., Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа, Изв. АН СССР, сер. матем. **17**, 6 (1953).
10—11. Agmon S., Douglis A., Nierenberg L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I—II. Communications on pure and applied Math.; v. XII (1959), 623—727; v. XVII (1964), 35—92. (Работа [10] имеется в русском переводе: С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИЛ, М., 1962.)
12. Atiyah M. F., Singer I. M., The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Society **69**, 3 (1963), 422—433.
13. Borelli R. L., The singular second order oblique derivative problem, J. of Math. and Mech. **16**, 1 (1966), 51—82.

Литература к добавлению 2

1. Бабич В. М., Фундаментальные решения гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, Матем. сб. **52** (94), 2 (1960).
2. Боровиков В. А., Фундаментальные решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, Труды Моск. матем. о-ва, вып. 8 (1949), 199—257.
3. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, V, ЛГУ, 1961.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1958.
5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, вып. 1: Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.
6. Гординг А., Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, 1961.
7. Курант Р., Уравнения с частными производными, перев. с англ., «Мир», 1964.

8. Петровский И. Г., О задаче Коши для системы уравнений с частными производными, Матем. сб. **2 (44)** (1937).
9. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965.
10. Hadamard J., Le problème de Cauchy ..., Paris, 1932.
11. Mathisson M., Le problème de M. Hadamard, Acta Math. **71** (1939).
12. Riesz M., L'integral de Rieman — Liouville et le problème de Cauchy..., Acta Math. **81** (1949).
13. Stellmacher K., Eine Klasse huyghenschen Differentialgleichungen und ihre Integration, Math. Ann. **130**, 3 (1955), 219—233.

Литература к добавлению 3

1. Вишик М. И., Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Труды ММО **1** (1952), 187—246.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, УМН **8**, 6 (1953), 3—54.
3. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, вып. 1: Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959; вып. 2: Пространства основных и обобщенных функций, Физматгиз, 1958; вып. 3: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1958.
4. Дезин А. А., Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах, УМН **14**, 3 (1959), 21—73.
5. Диконолов Г. В., Шилов Г. Е., О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем. **24** (1960), 369—380.
6. Паламодов В. П., О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем. **24** (1960), 381—386.
7. Паламодов В. П., Об условиях корректной разрешимости в целом некоторого класса уравнений с постоянными коэффициентами, ДАН СССР **132**, 3 (1960), 528—530.
8. Паламодов В. П., Об общем виде решения однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, ДАН СССР **137**, 4 (1961), 774—777.
9. Панеях Б. П., Об общих системах дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, ДАН СССР **138**, 2 (1961), 297—300.
10. Петровский И. Г., Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'equations différentielles, Матем. сб. **5 (47)** (1939), 3—68.
11. Соболев С. Л., Méthode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques, Матем. сб. **1 (43)** (1936), 39—72.
12. Трев Ф., Лекции по теории дифференциальных уравнений в частных производных, перев. с англ., «Мир», 1965.
13. Хермандер Л., К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, перев. с англ., ИЛ, 1959.

14. Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, перев. с англ., «Мир», 1965.
15. Шилов Г. Е., Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, УМН **10**, 4 (1955), 89—100.
16. Шилов Г. Е., Математический анализ, второй специальный курс, «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965.
17. Ehrenpeis L., Solution of some problems of division, I, Amer. J. of Math. **76** (1954), 883.
18. Ehrenpeis L., The fundamental principle and some of its applications, Варшавская конференция по функциональному анализу, 1960.
19. Garding L., Malgrange B., Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptic, C. R. Acad. Sci. Paris **247** (1958), 2083.
20. Hörmander L., Local and global properties of fundamental solutions, Math. Scand. **5** (1957), 27—39.
21. Fuglede B., Apriori inequalities connected with systems of partial differential equations, Acta Math. **105** (1961), 177—195.
22. Levi H., An example of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann. Math. (2), **66** (1957), 155—158.
23. Malgrange B., Équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Solutions élémentaire, C. R. Acad. Sci. Paris **237** (1953), 1620.
24. L. Schwartz, Thèorie des distributions, 1, 2, Paris, Hermann, 1950, 1951.

Литература к добавлению 4

1. Александров А. Д., Исследования о принципе максимума, I—VI. Изв. высш. уч. зав., матем. **5** (1958); **3**, **5** (1959); **3**, **5** (1960; **1** (1961).
2. Александров А. Д., О мажорантах решений и условиях единственности для эллиптических уравнений, Вестн. ЛГУ **7** (1966).
3. Бакельман И. Я., Геометрические методы решения эллиптических уравнений, «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965.
4. Бернштейн С. Н., Собрание сочинений, т. III (Уравнения в частных производных), Изд-во АН СССР, 1960.
5. Браудер Ф. Е., Вариационные краевые задачи для квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка, перев. с англ., Сов.-Амер. симпозиум по уравн. с частн. произв., Новосибирск, 1963.
6. Браудер Ф. Е., Нелинейные эллиптические краевые задачи, перев. с англ., Сов.-Амер. симпозиум по уравн. с частн. произв., Новосибирск, 1963.
7. Вишик М. И., Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму, Труды Моск. матем. о-ва **12** (1963), 125—184.
8. Де Джорджи, О дифференцируемости и аналитичности экстремалей кратных регулярных интегралов, перев. с итал., Математика **4**, 6 (1960).

9. Курант Р., Уравнения с частными производными, перев. с англ., «Мир», 1964.
10. Ладыженская О. А. и Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит., 1964.
11. Лере Ж. и Шаудер Ю., Топология и функциональные уравнения, перев. с франц., УМН 1, 3—4 (1946), 71—95.
12. Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, перев. с итал., ИЛ, 1957.
13. Погорелов А. В., Изгибание выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1951.
14. Погорелов А. В., Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа, Изд. Харьк. ун-та, 1960.

Соломон Григорьевич МИХЛИН

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Издание второе, стереотипное

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*
Главный редактор *Ю. А. Сандулов*
Художественный редактор *С. Л. Шапиро*
Подготовка оригинал-макета *А. А. Крылов*
Выпускающий *Н. К. Белякова*

ЛР № 065466 от 21.10.97 г.

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.001665.03.02 от 18.03.02, выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru www.lanpbl.spb.ru
193012, Санкт-Петербург, пр. Обуховской обороны, 277,
издательство: тел.: (812)262-11-78;
pbl@lpbl.spb.ru (издательский отдел),
производственный отдел: (812)262-24-95;
print@lpbl.spb.ru (производственный отдел),
торговый отдел: 193029, ул. Крупской, 13,
тел: (812)567-85-81, 567-14-45; факс: 567-54-93.
trade@lpbl.spb.ru; root@lpbl.spb.ru (торговый отдел),
Филиал в Москве:
Москва, 7-я ул. Текстильщиков, 5,
тел.: (095) 919-96-00, 787-59-47, 787-59-48.
Филиал в Краснодаре:
350072, Краснодар, ул. Зиповская, 7, тел.: (8612)62-97-73.

Подписано в печать 10.01.02.
Бумага типографская. Формат 84×108 1/32.
Гарнитура Школьная. Печать офсетная.
Усл. п. л. 10,08. Тираж 5000 экз. Заказ № 1567

ФГУП Владимирская книжная типография
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует качеству представленных диапозитивов