Т. Д. ДЖУРАЕВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО И СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПОВ

АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ И СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ
им. М. Т. УРАЗБАЕВА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. В. И. РОМАНОВСКОГО

Т. Д. ДЖУРАЕВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО И СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ФАН“ УЗБЕКСКОЙ ССР
Ташкент · 1979

УДК 517.946

Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Джураев Т. Д. Ташкент, «Фан», 1979, с.—120.

В монографии ставятся и исследуются корректные краевые задачи для различных типов уравнений с частными производными второго, третьего и четвертого порядков. Приложения рассматриваемых уравнений встречаются в различных задачах механики.

Издание предназначено для специалистов по дифференциальным уравнениям и их приложениям, аспирантов и студентов старших курсов университетов.

Ил.— 5, библиогр.— 112 назв.

Ответственный редактор
академик АН УзССР
М. С. Салахитдинов

Д $\frac{20203-924}{М355(06)-79}$ 23—79

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге обсуждаются вопросы корректной постановки и исследования краевых задач для уравнений смешанного, составного и смешанно-составного типов. Для уравнений смешанного эллиптико-параболического и гиперболо-параболического типов ставятся и изучаются аналоги известной задачи Трикоми и ее обобщений.

Основное внимание уделено уравнениям третьего порядка как составного типа, так и с действительными характеристиками. Доказаны теоремы единственности и существования решения рассматриваемых краевых задач. Часто метод доказательства дает одновременно способ построения решения. Уравнения смешанно-составного типа с эллиптико-параболическими и гиперболо-параболическими операторами рассмотрены впервые. Приведены результаты исследований общих линейных и нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков составного типа. Краевые задачи для уравнений смешанно-составного типа с оператором Лаврентьева—Бицадзе исследованы с помощью аппарата теории функции комплексного переменного. В книге изложены результаты, полученные автором и его учениками в последние годы.

Автор выражает благодарность члену-корреспонденту АН СССР А. В. Бицадзе за постоянное внимание к его исследованиям и за совет написать эту книгу, а также академику АН УзССР М. С. Салахитдинову за ряд ценных советов.

Глава I (вводная)

Настоящая работа посвящена постановке и изучению корректных краевых задач для различных типов дифференциальных уравнений с частными производными второго, третьего и четвертого порядков с двумя независимыми переменными. Изложение наших результатов начнем с общих замечаний об уравнениях смешанного, составного и смешанно-составного типов и с указания возможных приложений рассматриваемых уравнений.

1. В силу своей прикладной важности теория уравнений смешанного типа в настоящее время развивается быстрыми темпами и стала одной из центральных проблем теории уравнений с частными производными. Имеется целый ряд работ отечественных и зарубежных ученых, в которых исследуются основные смешанные краевые задачи и ставятся новые корректные задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. Основная библиография по этим вопросам содержится в работах А. В. Бицадзе [5], Л. Берса [2], М. М. Смирнова [74] и А. М. Нахушева [60]. Эти исследования в первую очередь относятся к уравнениям Трикоми

$$Tu \equiv y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

Лаврентьева—Бицадзе

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

и некоторым их обобщениям.

Работ, посвященных другим уравнениям смешанного типа, т. е. уравнениям эллиптико-параболического и гиперболо-параболического типов, сравнительно мало. Между тем эти уравнения, так же, как эллиптико-гиперболические, могут быть использованы в различных задачах прикладного характера.

Простейшие модельные уравнения смешанного эллиптико-параболического и гиперболо-параболического типов могут быть записаны в виде

$$L_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 - \operatorname{sgn} y}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1 + \operatorname{sgn} y}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

$$L_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 - \operatorname{sgn} y}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1 + \operatorname{sgn} y}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

При $y>0$ оба уравнения совпадают с уравнением

$$Qu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

а при $y<0$ они имеют вид

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{6}$$

и

$$Su \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{7}$$

Краевые задачи для уравнений гиперболо-параболического и эллиптико-параболического типов рассматриваются в работах [3, 4, 11—13, 31, 42—47, 56, 61—63, 66, 67, 76], а также в главах II и III настоящей книги.

Отметим, что в нашей работе даются естественные постановки краевых задач, являющихся аналогами известной задачи Трикоми и ее обобщений для уравнений (1) и (2).

Теперь остановимся на некотором физическом смысле сопряжения уравнений эллиптико-параболического и гиперболо-параболического типов [46].

2. Рассмотрим уравнение распространения тепла в вещественной среде при отсутствии внутренних источников тепла (уравнение Фурье—Остроградского [54])

$$a\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{v}, \operatorname{grad} T\right);$$

здесь Δ — оператор Лапласа; T — температура; t — время; $\vec{v}$ — скорость движения среды; a — коэффициент температуропроводности.

Запишем это уравнение для плоского стационарного случая:

$$a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y}. \tag{8}$$

Если рассматриваемая среда G неподвижна (твердое тело), то уравнение (8) является уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \tag{9}$$

Если же среда представляет собой поток жидкости или газа, движущегося равномерно вдоль прямолинейной границы AB твердого тела G_1 и заполняющего при этом область G_2 (рис. 1; здесь для простоты взяты прямоугольные области), то $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ ([54], с. 177, 178, 216, 217), $v_y = 0$ и уравнение (8) примет вид

$$a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - v_x\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \ (v_x = \mathrm{const} > 0). \tag{10}$$

Допустим, что на границе области $G = G_1 + G_2$ (исключая отрезок BD) температура T известна. По этим граничным данным требуется найти температуру среды твердое тело — жидкость внутри G. Очевидно, эта задача сводится *к нахождению функции* $T(x, y)$, удовлетворяющей в G_1 уравнению (9), в G_2 — уравнению (10) и принимающей заданные значения на указанной выше части

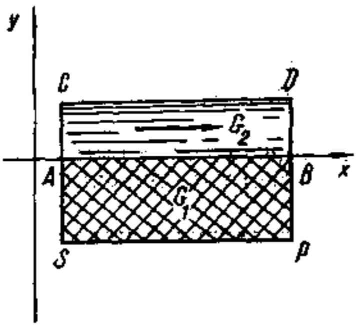

Рис. 1.

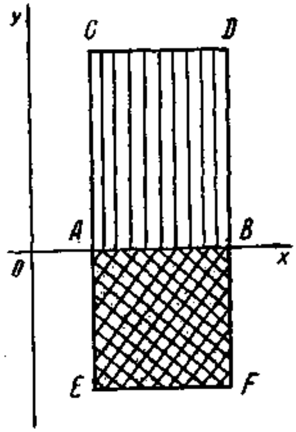

Рис. 2.

границы области G.

Возможен и другой случай сопряжения уравнения Лапласа и теплопроводности.

Прежде всего отметим, что при равномерном движении жидкости ее скорость может быть направлена под углом к границе раздела двух сред в том случае, если на границе существуют источники или стоки. Предполагая, например, что на границе AB *распределен источник жидкости (или газа), будем считать*, что поток жидкости движется с постоянной скоростью от твердого тела G_1 в направлении оси y между двумя стенками, отличающимися друг от друга значительной разностью температур (рис. 2). Если же при этом расстояние между стенками мало́ по сравнению с длиной потока, то $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ [54] и уравнение (8) примет вид

$$a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - v_y\frac{\partial T}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

В этом случае определение температуры среды твердое тело — жидкость, заполняющей область $G=G_1+G_2$, по известным ее значениям на границе области G (исключая отрезок CD) сводится к решению краевой задачи, сформулированной одновременно для уравнений (9) и (11). Поскольку переменные x и y в уравнениях (10) и (11) неравноправны, то эта задача по существу отличается от предыдущей.

3. Известно, что вид уравнений электромагнитного поля зависит от свойств среды. Если среда однородна, то в случае ее малой проводимости напряженность как электрического, так и магнитного полей удовлетворяет волновому уравнению. В случае же сравнительно большой проводимости, когда можно пренебречь токами смещения, указанные величины удовлетворяют уравнению теплопроводности ([77], с. 443).

Рассмотрим электрическое поле в области, заполненной вещественной средой с малой проводимостью. Так как газы в естественном состоянии не проводят электричества, то такой средой может служить какой-нибудь газ.

Допустим, что начиная с некоторого момента времени на газ начал действовать какой-нибудь ионизатор (рентгеновские, ультрафиолетовые или радиоактивные излучения, высокая температура [49]). В результате достаточно большой ионизации газ с этого момента приобретает большую проводимость. Следовательно, определение напряженности электрического поля за промежуток времени, содержащий в себе упомянутый момент, будет связано с решением краевой задачи для двух уравнений гиперболического и параболического типов. В связи с этим интересно выяснить, какие задачи являются корректно поставленными одновременно для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. В настоящей работе в какой-то мере дается ответ на этот вопрос для одномерного случая.

4. Дифференциальные уравнения с частными производными, имеющие в каждой точке области своего задания и действительные, и комплексные характеристики, называются уравнениями составного типа. Впервые краевые задачи для таких уравнений были рассмотрены Ж. Адамаром [94, 95], который в качестве модельного уравнения составного типа предложил уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} = \Delta u = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Delta u = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим в области G плоскости переменных (x, y) уравнение третьего порядка, линейное относительно старших производных,

$$Au_{xxx}+Bu_{xxy}+Cu_{xyy}+Du_{yyy}=F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \tag{13}$$

с коэффициентами A, B, C, D, зависящими от x и y.

Если в каждой точке рассматриваемой области характеристическое уравнение

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0, \tag{14}$$

$$\lambda = \frac{dy}{dx},$$

соответствующее уравнению (13), имеет одно действительное и два комплексных решения (т. е. уравнение (13) составного типа), то, как следует из [90], при определенных условиях на гладкость коэффициентов A, B, C, D уравнение (13) с помощью неособого действительного преобразования независимых переменных может быть приведено к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta u = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}). \tag{15}$$

В этой же работе рассмотрена одна краевая задача для уравнения (15) в случае линейной функции f.

В настоящее время имеется большое количество работ, в которых наряду с модельными уравнениями рассматриваются и более общие линейные уравнения составного типа. Обзор этих работ можно найти в книге М. С. Салахитдинова [71]. Следует также отметить работы Л. Вольферсдорфа [107—112], выполненные в последние годы, статьи Р. Дэвиса и С. Лин [91, 98], в которых речь идет о прикладной важности уравнений составного типа, и работу А. Джураева [26], в которой исследованы системы уравнений составного типа. Некоторые краевые задачи для линейных и нелинейных уравнений составного типа третьего и четвертого порядков вида (15) и

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta u = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{xxy}, u_{xxx}) \tag{16}$$

рассматриваются в гл. VIII настоящей книги.

5. Уравнения третьего порядка, для которых все корни характеристического уравнения (14) действительны, пока изучены недостаточно. Укажем лишь на работу Б. Пини [101], в которой исследована одна краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}). \tag{17}$$

Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}), \tag{18}$$

резко отличающееся от уравнения (17) постановкой корректных краевых задач.

Модельные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{20}$$

и уравнения (17), (18) подробно рассматриваются в гл. IV настоящей работы.

Частные случаи уравнений (17) и (18) встречаются в различных задачах механики. Например, распространение плоской волны в вязко-упругом твердом теле или в сжимаемой вязкой жидкости с незначительной удельной теплопроводностью описывается уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами [96, 99, 100]

$$\nu\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.$$

К малоизученным уравнениям третьего порядка относится и уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial u}{\partial y}=f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{21}$$

которое будем называть уравнением с кратными характеристиками.

Основное отличие уравнения (21) от уравнений (15), (17), (18) состоит в том, что его главную часть нельзя представить в виде произведения оператора $\frac{\partial}{\partial x}$ или $\frac{\partial}{\partial y}$ на операторы Лапласа или теплопроводности, что дает возможность использовать разработанный аппарат исследования краевых задач для классических типов уравнений.

Ряд краевых задач для уравнения (21) изучается в гл. VII настоящей работы. Одну краевую задачу для уравнения (21) в случае линейной функции f с помощью преобразования Лапласа исследовал Л. Каттабрига [87].

6. Частные случаи уравнения (21) встречаются в различных задачах физики и механики, имеющих важное теоретическое и прикладное значение. Это уравнение содержит известное уравнение Кортвега—де Фриса

$$\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, \tag{22}$$

являющееся объектом исследования многих авторов и занимающее важное место в вопросах распространения нелинейных волн в слабодиспергирующих средах [1, 50].

Некоторые характерные особенности распространения волн в диспергирующих средах можно проследить уже в линейном приближении. В качестве примера рассмотрим волны с законом дисперсии

$$\omega(k)=c_0k-\beta k^3. \tag{23}$$

С общей точки зрения, выражение (23) можно рассматривать как первые два члена разложения частоты $\omega(k)$ по степеням волнового числа k для достаточно длинных волн в прозрачной среде (см. [50]). Дисперсионному уравнению (23) отвечает дифференциальное уравнение для волновой функции

$$\Phi_y+c_0\Phi_x+\beta\Phi_{xxx}=0. \tag{24}$$

Если перейти к новой переменной x, отвечающей системе отсчета, которая движется со скоростью c_0, то вместо уравнения (24) получим

$$\Phi_y+\beta\Phi_{xxx}=0. \tag{25}$$

Таким образом, уравнение (25) имеет довольно универсальное значение: оно описывает достаточно длинные волны в средах, где предел $\frac{\omega}{k}$ (фазовая скорость) при $k\to 0$ имеет конечное значение (слабо диспергирующие волны). Уравнение (25) называется линеаризованным уравнением Кортвега—де Фриса. В § 3 гл. VII рассматривается одна задача для уравнения (25) в смешанной области, где коэффициент β меняет знак при переходе из одной части области в другую.

7. Уравнения, которые в рассматриваемой области могут быть как смешанными, так и составными [88, 89], принято называть смешанно-составными. Типичными представителями таких уравнений являются

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\operatorname{sgn} y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0. \tag{27}$$

Корректные краевые задачи для уравнений смешанно-составного типа впервые сформулировал А. В. Бицадзе [6, 8]. Краевые задачи для уравнения (26) впервые исследовали А. В. Бицадзе и М. С. Салахитдинов [8].

В гл. V и VI настоящей работы ставятся и изучаются корректные краевые задачи для новых уравнений смешанно-составного типа с гиперболо-параболическими и эллиптико-параболическими операторами, т. е. для уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}(L_1u)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}(L_1u)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(L_2u)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}(L_2u)=0,$$

где L_1 и L_2 — дифференциальные операторы, определенные равенствами (3), (4).

Глава IX посвящена исследованию краевых задач для уравнения (27) с помощью аппарата теории функций комплексного переменного. Задача типа задачи Франкля для уравнения (27) исследована в работе [58].

Глава II

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей главе изучаются некоторые краевые задачи для линейных уравнений второго порядка смешанного эллиптико-параболического типа

$$u_{xx}+\frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}u_{yy}+a(x,\ y)u_x+b(x,\ y)u_y+c(x,\ y)u=f(x,y).$$

Коэффициенты уравнения $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ и свободный член $f(x,y)$ являются заданными действительными функциями.

§ 1. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть D_1 — область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0 и AA_0 прямых $y=0$, $x=1$, $y=h$ и $x=-1$, а D_2 — односвязная область, ограниченная отрезком $I(-1,1)$ оси x и гладкой дугой Жордана σ, лежащей в полуплоскости $y<0$ и опирающейся на ось x в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$. Через D обозначим совокупность областей D_1 и D_2 вместе с открытым отрезком I.

В области D рассмотрим уравнение

$$L_1(u)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1.1}$$

Оператор L_1 в области D_1 совпадает с оператором теплопроводности, а в D_2 — с оператором Лапласа.

Задача A. Найти непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$ функцию $u(x,y)$ с непрерывными внутри D производными u_x, u_y, удовлетворяющую уравнению (1.1) в области D при $y\neq0$ и граничным условиям

$$u\big|_\sigma=\varphi(s),\ u\big|_{x=-1}=\varphi_1(y),\ u\big|_{x=1}=\varphi_2(y), \tag{1.2}$$

где φ_1, φ_2 — заданные непрерывные функции; φ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\varphi(A)=\varphi_1(A),\ \varphi(B)=\varphi_2(B).$$

Задача A является непосредственным аналогом задачи Трикоми для уравнений смешанного эллиптико-параболического типа.

Докажем единственность решения задачи A. Имеет место следующий принцип экстремума.

Принцип экстремума. Пусть функция $u(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, обладает непрерывными производными u_x, u_y внутри D и удовлетворяет в области D при $y \neq 0$ уравнению (1.1). Тогда положительный максимум и отрицательный минимум в $\overline{D}$ эта функция принимает на дуге σ или на отрезках AA_0 и BB_0.

В силу известных принципов максимума для эллиптических и параболических уравнений для доказательства принципа экстремума достаточно показать, что функция $u(x, y)$ не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума на отрезке I. Предположим, что положительный максимум (отрицательный минимум) в замкнутой области $\overline{D}$ достигается во внутренней точке $(x_0, 0)$ интервала $-1<x<1$. Тогда в силу непрерывности производной u_y при переходе через отрезок I из уравнения (1.1) имеем $u_y(x_0, 0) \leqslant 0$ $(u_y \geqslant 0)$. С другой стороны, так как в области D_2 функция $u(x, y)$ является гармонической, то на основании известного ее свойства получаем, что в точке максимума (минимума) $u_y(x_0, 0)>0$ $(u_y<0)$, а это противоречит предыдущему неравенству.

Согласно принципу экстремума, однородная задача A, т. е. задача с нулевыми граничными условиями, не имеет отличного от нуля решения. Отсюда следует единственность решения задачи A.

Докажем существование решения задачи A, ограничившись случаем, когда σ совпадает с полуокружностью $x^2+y^2=1$, $y \leqslant 0$. Общий случай рассматривается аналогично (см. § 2 гл. II и § 2 гл. VI).

Не ограничивая общности, можем предполагать, что функции φ, φ_1 и φ_2 удовлетворяют условиям

$$\varphi_1(A)=\varphi_2(B)=\varphi(A)=\varphi(B)=0.$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$u|_\sigma = \varphi(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x), \quad x \in I \tag{1.3}$$

в области D_2, выражается формулой

$$u(x, y) = \int_{-1}^{1} G(\xi, 0; x, y)\, \nu(\xi)\, d\xi + \int_{\sigma} \frac{\partial G(\xi, \eta; x, y)}{\partial n} \varphi(s)\, ds, \tag{1.4}$$

где

$$G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln \frac{1}{rr'} - \ln \frac{1}{\rho^2 r_1 r_1'}\right]$$

— функция Грина задачи (1.1), (1.3);

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2;\ r'^2=(x-\xi)^2+(y+\eta)^2;$$
$$r_1^2=(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2;\ r'^2_1=(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}+\eta)^2;$$
$$\rho^2=x^2+y^2;\ \bar{x}=\frac{x}{\rho^2};\quad \bar{y}=\frac{y}{\rho^2}.$$

Полагая в (1.4) $y=0$ и обозначая $\tau(x)=u(x,0)$, получаем

$$\tau(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\ln(x-\xi)-\ln(1-x\xi)\right]\nu(\xi)\,d\xi+F(x), \tag{1.5}$$

где

$$F(x)=\int_{\sigma}\frac{\partial G(\xi,\eta;\ x,\ 0)}{\partial n}\varphi(s)\,ds. \tag{1.6}$$

Дифференцируя равенство (1.5) (см. [5]), имеем

$$\tau'(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\xi-x}-\frac{\xi}{1-x\xi}\right)\nu(\xi)\,d\xi+\frac{d}{dx}F(x). \tag{1.7}$$

В силу непрерывности первых производных от $u(x,y)$ из параболической части D_1 области D получаем соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau''(x)-\nu(x)=0. \tag{1.8}$$

Используя $\tau(-1)=\tau(1)=0$, из (1.8) находим

$$\tau'(x)=\int_{-1}^{x}\nu(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\nu(t)\,dt. \tag{1.9}$$

Исключая $\tau'(x)$ из (1.7) и (1.9), получаем сингулярное интегральное уравнение первого рода для определения функции $\nu(x)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right]\nu(t)\,dt-\int_{-1}^{x}\nu(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\nu(t)dt=F_1(x), \tag{1.10}$$

где

$$F_1(x)=-\frac{d}{dx}F(x).$$

Выясним поведение функции $F_1(x)$ при $x\to-1$ и $x\to1$. Заметим, что функция

$$a+bx+cx^2+dx^3+2(c+3dx)y-\frac{1-\operatorname{sgn}y}{2}(c+3dx)\,y^2$$

удовлетворяет уравнению (1.1) при $y \neq 0$ и непрерывна вместе со своими производными первого порядка при переходе через прямую $y = 0$.

Учитывая это обстоятельство, без ограничения общности можем полагать

$$u(A) = u(B) = u'(A) = u'(B) = 0,$$

где производные берутся по направлению касательной к σ. В силу этих условий функцию $\varphi(s)$ можно представить в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = \eta^2 \varphi^*(\xi, \eta). \tag{1.11}$$

Согласно (1.11), из (1.6) находим

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \varphi^*(t) \frac{1 - x^2}{x^2 - 2xt + 1} \sqrt{1 - t^2}\, dt. \tag{1.12}$$

Для производных $F'(x)$ и $F''(x)$ имеем

$$F'(x) = -\frac{x^2 + 1}{\pi x} \int_{-1}^{1} \varphi^*(t) \frac{\sqrt{1 - t^2}\, dt}{x^2 - 2xt + 1} + \frac{(x^2 - 1)^2}{\pi x} \int_{-1}^{1} \varphi^*(t) \frac{\sqrt{1 - t^2}}{(x^2 - 2xt + 1)^2} dt,$$

$$F''(x) = \frac{2}{\pi x^2} \int_{-1}^{1} \varphi^*(t) \frac{\sqrt{1 - t^2}\, dt}{x^2 - 2xt + 1} + \frac{2(x^2 - 1)(x^2 + 2)}{\pi x^2} \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \varphi^*(t) \frac{\sqrt{1 - t^2}}{(x^2 - 2xt + 1)^2} dt + \frac{2(x^2 - 1)^3}{\pi x^2} \int_{-1}^{1} \varphi^*(t) \frac{\sqrt{1 - t^2}}{(x^2 - 2xt + 1)^3} dt.$$

Отсюда, применяя теорему о среднем, получаем

$$\begin{gathered} F'(x) = -\frac{x^2 + 1}{\pi x} \varphi^*(t_1) \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{1/2} (1 - x^2 - 2xt)^{-1} dt + \\ + \frac{(x^2 - 1)^2}{\pi x} \varphi^*(t_1) \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{1/2} (1 + x^2 - 2xt)^{-2} dt, \end{gathered} \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered} F''(x) = \frac{2}{\pi x^2} \varphi^*(t_1) \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{1/2} (1 + x^2 - 2xt)^{-1} dt + \\ + \frac{2(x^2 - 1)(x^2 + 2)}{\pi x^2} \varphi^*(t_1) \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{1/2} (1 + x^2 - 2xt)^{-2} dt + \\ + \frac{2(x^2 - 1)^3}{\pi x^2} \varphi^*(t_1) \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{1/2} (1 + x^2 - 2xt)^{-3} dt. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Известно, что входящие в (1.13) и (1.14) интегралы выражаются через гипергеометрическую функцию

$$F\left(a,\ b;\ 2a;\ \frac{4x}{(1+x)^2}\right)=\frac{(1+x)^{2b}}{c\cdot 2^{2a-1}}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{a-1}(1+x^2-2xt)^{-b}\,dt. \tag{$*$}$$

Принимая во внимание известное тождество

$$F\left(a,\ b;\ 2a;\ \frac{4x}{(1+x)^2}\right)=(1+x)^{2b}F\left(b,\ b-a+\frac{1}{2};\ a+\frac{1}{2};\ x^2\right) \tag{$**$}$$

и формулы (1.13) и (1.14), заключаем, что функции $F'(x)$ и $F''(x)$ стремятся к конечному пределу при $x\to-1$ и $x\to 1$.

Таким образом, функция $F_1(x)$ непрерывна на $\overline{I}$, дважды непрерывно дифференцируема на I, а ее производная первого порядка имеет конечный предел в точках $x=-1$ и $x=1$.

Уравнение (1.10) запишем в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right)\nu(t)\,dt=E(x), \tag{1.15}$$

где

$$E(x)=\int_{-1}^{x}\nu(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\,\nu(t)\,dt-\frac{d}{dx}F(x). \tag{1.16}$$

Предположим, что функция $E(x)$ известна. Будем искать решение $\nu(x)$ уравнения (1.15) в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на отрезке I. Тогда $E(x)$ также удовлетворяет условию Гёльдера.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{t}{1-tz}\right)\nu(t)\,dt.$$

Она голоморфна вне действительной оси и обладает свойством

$$\Phi\left(\frac{1}{z}\right)=z^2\Phi(z); \tag{1.17}$$

следовательно,

$$\Phi^+\left(\frac{1}{x}\right)=x^2\Phi^-(x),\quad \Phi^-\left(\frac{1}{x}\right)=x^2\Phi^+(x). \tag{1.18}$$

Применяя формулу Сохоцкого—Племеля, получаем

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt}\right)\nu(t)\,dt, \tag{1.19}$$

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \nu(x). \tag{1.20}$$

Теперь уравнение (1.15) можно переписать в виде

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = iE(x), \quad -1 < x < 1.$$

Если $|x| > 1$, то, заменяя x на $\frac{1}{x}$ и учитывая (1.18), имеем

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = -\frac{i}{x^2}E\left(\frac{1}{x}\right), \quad -\infty < x < -1, \quad 1 < x < \infty.$$

Таким образом, необходимо найти функцию $\Phi(z)$, голоморфную вне действительной оси, удовлетворяющую тождеству (1.17) и допускающую особенность порядка ниже единицы при $z=-1$ или $z=1$ по граничному условию

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = h(x),$$

где

$$h(x) = \begin{cases} -iE(x) & \text{при} \quad -1 < x < 1, \\ -\frac{i}{x^2}E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{при} \quad -\infty < x < -1, \quad 1 < x < \infty. \end{cases}$$

Такая функция $\Phi(z)$ может быть построена в явном виде (см. [5]).

В самом деле, рассмотрим частное решение однородной задачи

$$X^+(x) + X^-(x) = 0$$

вида

$$X(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-z} + \frac{z}{1-tz}\right)dt\right\}, \tag{1.21}$$

удовлетворяющее условию

$$X\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{X(z)}.$$

Из (1.21) находим

$$X^+(x) = i, \quad X^-(x) = -i. \tag{1.22}$$

Далее, следуя известным приемам, получаем

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(t)}{X^+(t)}\frac{dt}{t-z} = -\frac{X(z)}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz}\right]\frac{E(t)\,dt}{X^+(t)}.$$

Тогда на основании формул (1.20) и (1.22) имеем

$$\nu(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} E(t)\left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{1-xt}\right)dt.$$

Отсюда, подставляя вместо функции $E(x)$ ее выражение (1.16), получаем интегральное уравнение Фредгольма для определения функции

$$\nu(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K(x, t)\nu(t)\,dt = g(x), \tag{1.23}$$

где

$$K(x, t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{1-xt}\right)(1-t)\,dt -$$

$$-\int_{t}^{1}\left(\frac{1}{t_1-x} + \frac{t_1}{1-t_1x}\right)dt_1;$$

$$g(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{1-xt}\right)F_1(t)\,dt.$$

Докажем, что однородное уравнение

$$\nu(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K(x, t)\nu(t)\,dt = 0, \tag{1.24}$$

соответствующее уравнению (1.23), не имеет решений, отличных от нулевого.

Предположим противное. Пусть уравнение (1.24) имеет хотя бы одно решение $\nu_1(x) \neq 0$. Тогда эквивалентному ему однородному уравнению

$$\int_{-1}^{x}(x-t)\nu(t)\,dt - \frac{1}{2}(x+1)\int_{-1}^{1}(1-t)\nu(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\ln(x-t) - \ln(1-xt)\right]\nu(t)\,dt$$

также удовлетворяет функция $\nu_1(x)$.

Рассмотрим функции

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u_1^{(1)}(x, y), & (x, y)\in D_1, \\ u_1^{(2)}(x, y), & (x, y)\in D_2, \end{cases}$$

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_0^{(1)}(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ 0, & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

где $u_k^{(1)}(x, y)$, $k=0,1$ — решения уравнения (1.1) при $y>0$, удовлетворяющие краевым условиям

$$u_k^{(1)}\Big|_{y=0} = \varphi_1(y), \quad u_k^{(1)}\Big|_{x=1} = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h,$$

$$u_1^{(1)}\Big|_{y=0} = \int_{-1}^{x} (x-t)\,\nu_1(t)\,dt - \frac{x+1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\,\nu_1(t)\,dt, \quad x \in \overline{I},$$

$$u_0^{(1)}\Big|_{y=0} \equiv 0, \quad x \in \overline{I},$$

$$u_1^{(2)}\Big|_{y=0} = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\ln(x-t) - \ln(1-xt)\right]\nu_1(t)\,dt, \quad x \in I.$$

Отсюда в силу единственности решения задачи A заключаем, что

$$u_1^{(1)}(x, y) \equiv u_0^{(1)}(x, y), \quad u_1^{(2)}(x, y) \equiv 0.$$

Следовательно, $\nu_1(x) \equiv 0$. Итак, однородное уравнение (1.24) не имеет отличных от нуля решений, поэтому неоднородное уравнение (1.23) в силу альтернативы Фредгольма имеет решение, причем единственное.

После нахождения функции $\nu_1(x)$ из уравнения (1.23) решение задачи A представляется в области D_2 формулой (1.4).

Теперь в области D_1 решим следующую задачу:

$$u_{xx} - u_y = 0,$$

$$u|_{x=-1} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=1} = \varphi_2(y), \quad u|_{y=0} = \tau(x), \tag{1.25}$$

где функция $\tau(x)$ определена формулой (1.5).

Решение задачи (1.25) имеет вид

$$u(x, y) = \int_0^y \varphi_1(\eta)\,G^*(x, y; -1, \eta)\,d\eta -$$

$$- \int_0^y \varphi_2(\eta)\,G_\xi^*(x, y; 1, \eta)\,d\eta + \int_{-1}^{1} G^*(x, y; \xi, 0)\,\tau(\xi)\,d\xi; \tag{1.26}$$

здесь $G^*(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина для уравнения теплопроводности, которая в рассматриваемом случае может быть выписана в виде [81]

$$G^*(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} U(x+4m, y; \xi, \eta) -$$

$$-\sum_{m=-\infty}^{+\infty} U(2-x+4m;\ y;\ \xi,\ \eta), \tag{1.27}$$

где

$$U(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}},\quad y>\eta$$

— фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

§ 2. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}+\frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}u_{yy}+a(x,\ y)u_x+b(x,\ y)u_y+c(x,\ y)u=f(x,\ y) \tag{2.1}$$

в односвязной смешанной области $D=D_1\cup D_2\cup I$, определенной в предыдущем параграфе.

Задача A. Найти непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$ функцию $u(x,y)$ с непрерывными внутри D производными u_x и u_y, удовлетворяющую уравнению (2.1) в области D при $y\neq 0$ и граничным условиям

$$u|_\sigma=\varphi(s),\quad u|_{x=-1}=\varphi_1(y),\quad u|_{x=1}=\varphi_2(y), \tag{2.2}$$

где φ_1, φ_2 — заданные непрерывные функции; φ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\varphi(A)=\varphi_1(A),\ \varphi(B)=\varphi_2(B).$$

Следовательно, искомая функция $u(x,y)$ в области D_1 должна удовлетворять уравнению

$$u_{xx}+a_1(x,y)u_x+b_1(x,y)u_y+c_1(x,y)u=f_1(x,y), \tag{2.3}$$

а в области D_2 — уравнению

$$u_{xx}+u_{yy}+a_2(x,y)u_x+b_2(x,y)u_y+c_2(x,y)u=f_2(x,y). \tag{2.4}$$

Относительно коэффициентов уравнений (2.3), (2.4) сделаем следующие предположения:

1) функции $a_1(x,y)$, $b_1(x,y)$, $c_1(x,y)$, $f_1(x,y)$, a_{1x}, a_{1y}, b_{1x}, b_{1y} удовлетворяют условию Гёльдера, причем

$$b_1(x,\ y)<0,\quad c_1(x,\ y)\leqslant 0,\quad \forall(x,\ y)\in\overline{D}_1;$$

2) функции $a_2(x,y)$, $b_2(x,y)$, $c_2(x,y)$ и $f_2(x,y)$ принадлежат классу $C^1(D_2)$ и, кроме того,

$$c_2(x,\ y)\leqslant 0,\quad \forall(x,\ y)\in\overline{D}_2.$$

Для доказательства единственности решения этой задачи докажем, что однородная задача A, т. е. (2.1)—2(2.), при

$$u|_{\sigma}=0, \quad u|_{x=-1}, \quad u|_{x=1}=0$$

имеет только тривиальное решение.

Так как $c\leqslant 0$, $f\equiv 0$, то функция $u(x, y)$ в силу принципа экстремума для эллиптических и параболических уравнений не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума в области D_2 и $D_1+A_0B_0$. Но функция $u(x, y)$ не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума на отрезке I. Действительно, предположим, что положительный максимум (отрицательный минимум) достигается в некоторой точке $N(x_0, 0)$, лежащей внутри отрезка I. Так как по условию задачи производные u_x, u_y непрерывны в точке $N(x_0, 0)$, то из однородного уравнения (2.3) получим $u_y(x_0, 0)\leqslant 0$ $(u_y\geqslant 0)$. С другой стороны, из эллиптической части области D в силу известной леммы Зарембы—Жиро имеем $u_y(x_0, 0)>0$ $(u_y<0)$, а это противоречит предыдущему неравенству. Следовательно, $u\equiv 0$ в $\overline{D}$. Отсюда следует единственность решения рассматриваемой задачи.

Докажем существование решения этой задачи.

Предположим, что кривая σ оканчивается сколь угодно малыми дугами окружности $x^2+y^2=1$, $y\leqslant 0$. Не ограничивая общности, можем предполагать, что

$$u(A)=u(B)=u'(A)=u'(B)=0. \tag{2.5}$$

В области D_2 решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{\sigma}=\varphi(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\nu(x), \tag{2.6}$$

ищем в виде

$$u(x, y)=w(x, y)+v(x, y); \tag{2.7}$$

здесь функция $w(x, y)$ — решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условиям (2.6); оно выражается формулой

$$w(x, y)=\int_{-1}^{1} G(t, 0; x, y)\nu(t)\,dt+\int_{\sigma}\frac{\partial G(\xi, \eta; x, y)}{\partial n}\varphi(s)\,ds, \tag{2.8}$$

где

$$G(\xi, \eta; x, y)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{rr'}+P(\xi, \eta; x, y)$$

— функция Грина для уравнения Лапласа, удовлетворяющая однородным условиям (2.6); r и r' — те же расстояния, что и в формуле (1.4).

Функция $v(x, y)$ в области D_2 удовлетворяет уравнению

$$v_{xx}+v_{yy}+a_2(x, y)v_x+b_2(x, y)v_y+c_2(x, y)v=F(x, y)$$

и граничным условиям

$$v|_\sigma = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,$$

где

$$F(x) = f_2(x, y) - a_2(x, y) W_x - b_2(x, y) W_y - c_2(x, y) W.$$

Положим

$$v_{xx} + v_{yy} = V(x, y), \tag{2.9}$$

где $V(x, y)$ подлежит определению.

Решение уравнения (2.9) с однородными краевыми условиями имеет вид

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, y)\, V(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \tag{2.10}$$

Здесь функция $V(x, y)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$V(x, y) - \frac{1}{2\pi} \iint_{D_2} \left[a_2(x, y) \frac{\partial G}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial G}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + c_2(x, y) G \right] V(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = F(x, y). \tag{2.11}$$

К этому уравнению нельзя непосредственно применить теорию Фредгольма, так как в точке $x = \xi$, $y = \eta$ ядро

$$K(\xi, \eta; x, y) = 2\pi \left[a_2(x, y) \frac{\partial G(\xi, \eta; x, y)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + b_2(x, y) \frac{\partial G(\xi, \eta; x, y)}{\partial y} + c_2(x, y) G(\xi, \eta; x, y) \right]$$

обращается в бесконечность, как $\frac{1}{r}$, и, следовательно, не интегрируется с квадратом, но легко видеть, что итерированное ядро

$$K_2(\xi, \eta; x, y) = \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; x, y) K(\xi, \eta; \xi', \eta')\, d\xi' d\eta'$$

интегрируемо с квадратом. Поэтому вместо уравнения (2.11) рассмотрим итерированное интегральное уравнение

$$V(x, y) - \iint_{D_2} K_2(\xi, \eta; x, y)\, V(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = h(x, y), \tag{2.12}$$

где

$$h(x, y) = F(x, y) - \iint_{D_2} K(\xi, \eta; x, y)\, F(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \tag{2.13}$$

Разрешая уравнение (2.12), имеем

$$V(x,\ y) = h(x,\ y) + \iint\limits_{D_2} \Gamma_2(\xi,\ \eta;\ x,\ y)\, h(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta; \qquad (2.14)$$

здесь $\Gamma_2(\xi, \eta;\ x, y)$ — резольвента ядра. Подставляя выражение (2.14) в (2.10), получаем

$$v(x,\ y) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D_2} G(\xi,\ \eta;\ x,\ y)\, h(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta -$$

$$- \iint\limits_{D_2} \iint\limits_{D_2} G(\xi,\ \eta;\ x,\ y)\, \Gamma_2(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta)\, h(\xi',\ \eta')\, d\xi' d\eta' d\xi d\eta. \qquad (2.15)$$

Используя выражение $w(x, y)$ из (2.8), находим

$$F(x,\ y) = f_2(x,\ y) - a_2(x,\ y)\, W_x - b_2(x,\ y)\, W_y - c_2(x,\ y)\, W =$$

$$= f_2(x,\ y) - \int\limits_{-1}^{1} \left[a_2(x,\ y) \frac{\partial G(t,\ 0;\ x,\ y)}{\partial x} + b_2(x,\ y) \frac{\partial G(t,\ 0;\ x,\ y)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + c_2(x,\ y)\, G(t,\ 0;\ x,\ y) \right] \nu(t)\, dt - \int\limits_{\sigma} \left[a_2(x,\ y) \frac{\partial G^*(s,\ x,\ y)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + b_2(x,\ y) \frac{\partial G^*(s,\ x,\ y)}{\partial y} + c_2(x,\ y)\, G^*(s,\ x,\ y) \right] \varphi(s)\, ds,$$

где

$$G^*(s,\ x,\ y) = \frac{\partial G^*(\xi(s),\ \eta(s);\ x,\ y)}{\partial n}.$$

Вводя обозначения

$$\overline{K}(s,\ x,\ y) = \frac{1}{2\pi} \left[a_2(x,\ y) \frac{\partial G^*(s,\ x,\ y)}{\partial x} + b_2(x,\ y) \frac{\partial G^*(s,\ x,\ y)}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + c_2(x,\ y)\, G^*(s,\ x,\ y) \right],$$

получаем

$$F(x,\ y) = f_2(x,\ y) - 2\pi \int\limits_{-1}^{1} K(t,\ 0;\ x,\ y)\, \nu(t)\, dt -$$

$$- 2\pi \int\limits_{\sigma} \overline{K}(s,\ x,\ y)\, \varphi(s)\, ds. \qquad (2.16)$$

Подставляя выражение (2.16) в (2.13), находим

$$h(x,\ y) = f_2(x,\ y) + \iint\limits_{D_2} K(\xi,\ \eta;\ x,\ y)\, f_2(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta +$$

$$+2\pi\int_{-1}^{1}\left[K(t,0;x,y)+\iint_{D_2}K(\xi,\eta;x,y)K(t,0;\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right]\nu(t)dt-$$

$$-2\pi\int_{\sigma}\left[\overline{K}(s,x,y)+\iint_{D_2}K(\xi,\eta;x,y)\overline{K}(s,\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right]\varphi(s)\,ds.$$

Учитывая функцию $h(x,y)$ и подставляя выражения (2.8) и (2.15) в (2.7), получаем искомую функцию

$$u(x,y)=\int_{-1}^{1}G(t,0;x,y)\,\nu(t)\,dt+\int_{\sigma}G^{*}(s,x,y)\,\varphi(s)\,ds-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{D_2}G(\xi,\eta;x,y)\left[f_2(\xi,\eta)+\iint_{D_2}K(\xi',\eta';\xi,\eta)f_2(\xi',\eta')\times\right.$$

$$\left.\times\,d\xi'd\eta'\right]d\xi d\eta-\iint_{D_2}\iint_{D_2}G(\xi,\eta;x,y)\,\Gamma_2(\xi',\eta',\xi,\eta)\left[f_2(\xi',\eta')+\right.$$

$$\left.+\iint_{D_2}K(x',y';\xi',\eta')f_2(x',y')\,dx'dy'\right]d\xi'd\eta'd\xi d\eta+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left\{\iint_{D_2}G(\xi,\eta;x,y)\left[\overline{K}(t,\xi,\eta)+\iint_{D_2}K(\xi',\eta';\xi,\eta)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times K(t,0,\xi',\eta')\,d\xi'd\eta'\right]d\xi d\eta\right\}\nu(t)\,dt+$$

$$+\int_{\sigma}\left\{\iint_{D_2}G(\xi,\eta;x,y)\left[\overline{K}(s,\xi,\eta)+\iint_{D_2}K(\xi',\eta';\xi,\eta)\overline{K}(s,\xi',\eta')\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,d\xi'd\eta'\right]d\xi d\eta\right\}\varphi(s)\,ds+\int_{-1}^{1}\left\{2\pi\iint_{D_2}\iint_{D_2}G(\xi,\eta;x,y)\,\Gamma_2(\xi',\eta';\xi,\eta)\times\right.$$

$$\times\left[K(t,\xi',\eta')+\iint_{D_2}K(x',y';\xi',\eta')K(t,x',y')\,dx'dy'\right]\times$$

$$\left.\times\,d\xi'd\eta'd\xi d\eta\right\}\nu(t)\,dt+\int_{\sigma}\left\{2\pi\iint_{D_2}\iint_{D_2}G(\xi,\eta;x,y)\,\Gamma_2(\xi',\eta';\xi,\eta)\times\right.$$

$$\times\left[\overline{K}(s,\xi',\eta')+\iint_{D_2}K(x',y';\xi',\eta')\overline{K}(s,x',y')\,dx'dy\right]\times$$

$$\left.\times\,d\xi'd\eta'd\xi d\eta\right\}\varphi(s)\,ds. \qquad (2.17)$$

Введем обозначения

$$G(t, x) = G(t, 0; x, 0),$$
$$G^*(s, x) = G^*(s, x, 0),$$
$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\left[f_2(\xi, \eta) + \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta)\times\right.$$
$$\left.\times f_2(\xi', \eta')\,d\xi' d\eta'\right] d\xi d\eta + \iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\,\Gamma_2(\xi', \eta'; \xi, \eta)\times$$
$$\times\left[f_2(\xi, \eta) + \iint_{D_2} K(x', y'; \xi', \eta') f_2(x', y')\,dx' dy'\right] d\xi' d\eta' d\xi d\eta,$$
$$K_0(t, x) = \iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\left[K(t, 0; \xi, \eta) + \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta)\times\right.$$
$$\left.\times K(t, 0; \xi', \eta')\,d\xi' d\eta'\right] d\xi d\eta,$$
$$\overline{K}_0(s, x) = \iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\left[\overline{K}(s, \xi, \eta) + \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta)\times\right.$$
$$\left.\times \overline{K}(s, \xi', \eta')\,d\xi' d\eta'\right] d\xi d\eta,$$
$$K_{00}(t, x) = 2\pi \iint_{D_2}\iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\,\Gamma_2(\xi', \eta'; \xi, \eta)\times$$
$$\times\left[K(t, 0; \xi', \eta') + \iint_{D_2} K(x', y'; \xi', \eta')\,K(t, 0; x', y')\times\right.$$
$$\left.\times\, dx' dy'\right] d\xi' d\eta' d\xi d\eta,$$
$$\overline{K}_{00}(s, x) = 2\pi \iint_{D_2}\iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\,\Gamma_2(\xi', \eta', \xi, \eta)\times$$
$$\times\left[\overline{K}(s, \xi' \eta') + \iint_{D_2} K(x', y'; \xi', \eta')\,\overline{K}(s, x', y')\times\right.$$
$$\left.\times\, dx' dy'\right] d\xi' d\eta' d\xi d\eta,$$
$$u(x, 0) = \tau(x).$$

Тогда уравнение (2.17) будет иметь вид [65]

$$\tau(x) = \int_{-1}^{1} \left[G(t, x) + K_0(t, x) + K_{00}(t, x)\right] \nu(t)\,dt +$$
$$+ \int_{\sigma} \left[G^*(s, x) + \overline{K}_0(s, x) + \overline{K}_{00}(s, x)\right] \varphi(s)\,ds - \psi(x). \qquad (2.18)$$

Формула (2.18) дает основное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D_2.

В силу свойства задачи A из уравнения (2.3), устремляя y к нулю, получаем

$$\tau''(x)+a_1(x,0)\tau(x)+c_1(x,0)\tau(x)=f_1(x,0)-b_1(x,0)\nu(x). \quad (2.19)$$

Решение уравнения (2.19) в промежутке $-1\leqslant x\leqslant 1$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\tau(x)\big|_{x=-1}=\tau(x)\big|_{x=1}=0, \quad (2.20)$$

представляется в виде

$$\tau(x)=\int\limits_{-1}^{1} T(t,\ x)\left[f_1(t)-b_1(t)\nu(t)\right]dt; \quad (2.21)$$

здесь $T(t,x)$ — функция Грина уравнения (2.19).

Функция $T(t,x)$ обладает следующими свойствами (см. [75]):

а) в промежутках $-1\leqslant x<t$, $t<x\leqslant 1$ непрерывна вместе с производными до второго порядка и удовлетворяет уравнению (2.19) и, кроме того, при каждом фиксированном t, $-1<t<1$, удовлетворяет как функция от x краевым условиям (2.20);

б) в точке $x=t$ как функция x сама непрерывна, а ее первая производная имеет скачок, причем в нашем случае

$$T_x'(t+0,\ t)-T_x'(t-0,\ t)=1.$$

Исключая $\tau(x)$ из (2.18) и (2.21) и дифференцируя по x, получаем следующее сингулярное интегральное уравнение первого рода для определения функции $\nu(x)$:

$$\int\limits_{-1}^{+1}\left[\frac{\partial G(t,\ x)}{\partial x}+\frac{\partial K_0(t,\ x)}{\partial x}+\frac{\partial K_{00}(t,\ x)}{\partial x}\right]\nu(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\frac{\partial T(t,\ x)}{\partial x}b_1(t)\nu(t)\,dt=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\partial T(t,\ x)}{\partial x}f_1(t)\,dt-$$

$$-\int\limits_{0}\left[\frac{\partial G^*(s,\ x)}{\partial x}+\frac{\partial \overline{K}_0(s,\ x)}{\partial x}+\frac{\partial \overline{K}_{00}(s,\ x)}{\partial x}\right]\varphi(s)\,ds+\psi'(x). \quad (2.22)$$

Легко показать [5], что

$$\frac{\partial G(t,\ x)}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right]+H(t,\ x),$$

где

$$H(t,\ x)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[P(t,\ 0;\ x,\ 0)-\ln(1-tx)\right].$$

Примем обозначения

$$H_1(t, x) = -\frac{\partial T(t, x)}{\partial x} b_1(t) - \frac{\partial K_0(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial K_{00}(t, x)}{\partial x} - H(t, x),$$

$$g(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} f_1(t)\,dt - \int_{\sigma} \left[\frac{\partial G^*(s, x)}{\partial x} + \frac{\partial \overline{K}_0(s, x)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial K_{00}(s, x)}{\partial x} \right] \varphi(s)\,ds + \psi'(s).$$

Тогда уравнение (2.22) будет иметь вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt} \right) \nu(t)\,dt = \int_{-1}^{1} H_1(t, x)\,\nu(t)\,dt + g(x). \qquad (2.23)$$

Исследуем ядро $H_1(t, x)$. Функция $H(t, x)$ при $-1 < {t \atop x} < 1$ непрерывно дифференцируема, на концах этих интервалов не имеет особенностей (см. [5]).

Функция

$$\frac{\partial K_0(t, x)}{\partial x} = \iint_{D_2} \frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial x} \left[K(t, 0; \xi, \eta) + \right.$$

$$\left. + \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta)\, K(t, 0; \xi', \eta')\, d\xi' d\eta' \right] d\xi d\eta$$

может иметь особенность не более чем логарифмического порядка, так как $\frac{\partial G}{\partial x}$, K имеют особенности не более первого порядка.

Оценим

$$\frac{\partial K_{00}(t, x)}{\partial x} = 2\pi \iint_{D_2} \iint_{D_2} \frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial x} \Gamma_2(\xi', \eta'; \xi, \eta) \left[K(t, 0; \xi', \eta') + \right.$$

$$\left. + \iint_{D_2} K(x', y'; \xi', \eta')\, K(t, 0; x', y')\, dx' dy' \right] d\xi' d\eta' d\xi d\eta$$

(Γ_2 — резольвента ядра K_2). Так как K_2 имеет особенность не более чем логарифмического порядка, то функция $\frac{\partial K_{00}(t, x)}{\partial x}$ ограничена.

В силу свойств функции $T(t, x)$ функция $\frac{\partial T(t, x)}{\partial x}$ ограничена.

Таким образом, функция $H_1(t, x)$ может иметь особенность не выше чем логарифмического порядка.

Теперь исследуем поведение функции $g(x)$ при $x \to -1$ и $x \to 1$.

В силу условий (2.5) функцию $\varphi(\xi, \eta)$ можно представить в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = \eta^2 \varphi^*(\xi, \eta). \tag{2.24}$$

В предыдущем параграфе доказано, что функция

$$g_1(x) = \int_a \frac{\partial G^*(s, x)}{\partial x} \varphi(s)\, ds$$

непрерывна при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, дважды непрерывно дифференцируема при $-1 < x < 1$, а ее производная первого порядка имеет конечный предел при $x \to 1$ и $x \to 1$.

Оценим функцию

$$g_2(x) = \int_a \left[\frac{\partial \overline{K}_0(s, x)}{\partial x} + \frac{\partial \overline{K}_{00}(s, x)}{\partial x} \right] \varphi(s)\, ds.$$

Функция

$$\frac{\partial K_0(s, x)}{\partial x} = \iint_{D_2} \frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial x} \left[\overline{K}(s, \xi, \eta) + \right.$$

$$\left. + \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta) \overline{K}(s, \xi', \eta')\, d\xi' d\eta' \right] d\xi d\eta$$

имеет особенность не более чем первого порядка, так как $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\overline{K}(s, \xi, \eta)$ имеют особенности соответственно не выше чем первого и второго порядков.

Рассмотрим функцию

$$\frac{\partial \overline{K}_{00}(s, x)}{\partial x} = 2\pi \iint_{D_1} \iint_{D_2} \frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial x} \Gamma_2(\xi', \eta'; \xi, \eta) \left[\overline{K}(s, \xi', \eta') + \right.$$

$$\left. + \iint_{D_2} K(x', y'; \xi', \eta') \overline{K}(s, x', y')\, dx' dy' \right] d\xi' d\eta' d\xi d\eta.$$

Она ограничена, так как, согласно свойствам функции $G(\xi, \eta; x, y)$, функции $\frac{\partial G}{\partial x}$, K и Γ_2 имеют особенности соответственно не более чем первого, второго и логарифмического порядков.

В силу представления (2.24) функция $g_2(x)$ непрерывна на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и имеет ограниченную производную.

Наконец, исследуем

$$g_3(x) = -\psi'(x) + \int_{-1}^{1} \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} f_1(x)\, dt.$$

Рассмотрим

$$\psi'(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{D_2} \frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial x} \left[f_2(\xi, \eta) + \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta) \times \right.$$

$$\times f_2(\xi', \eta')\, d\xi' d\eta' \Big] d\xi d\eta + \iint\limits_{D_2} \frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial x} \Gamma_2(\xi', \eta'; \xi, \eta) \times$$

$$\times \left[f_2(\xi', \eta') + \iint\limits_{D_2} K(x', y'; \xi', \eta) f_2(x', y')\, dx' dy' \right] d\xi' d\eta' d\xi d\eta.$$

Функция $\psi'(x)$ непрерывна на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а ее производная первого порядка может иметь особенность не выше чем логарифмического порядка в точках $x = -1$ и $x = 1$, так как $\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| \leqslant \frac{\text{const}}{r}$.

На основании свойств функции $T(t, x)$ выражение $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} \times$ $\times f_1(t)\, dt$ непрерывно на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а его производная при $x \to -1$ и $x \to 1$ стремится к конечному пределу. Следовательно функция $g_3(x)$ на I непрерывна, а ее производная при $x \to -1$ и $x \to 1$ может обращаться в бесконечность не выше чем логарифмического порядка.

Таким образом, функция

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$$

непрерывна на $\bar{I}$, дважды непрерывно дифференцируема на I, а ее производная первого порядка может обращаться в бесконечность не выше чем логарифмического порядка в точках $x=1$ и $x=-1$.

Уравнение (2.23) запишем в виде

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt} \right) \nu(t)\, dt = E(x), \tag{2.25}$$

где

$$E(x) - \int\limits_{-1}^{1} H_1(t, x)\, \nu(t)\, dt + g(x). \tag{2.26}$$

Предположим, что функция $E(x)$ известна. Будем искать решение $\nu(x)$ уравнения (2.25) в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на отрезке $\bar{I}$. Тогда функция $E(x)$ также удовлетворяет условию Гёльдера.

Применяя результаты, полученные в предыдущем параграфе, приходим к уравнению

$$\nu(x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{1+xt} \right) E(t)\, dt.$$

Отсюда, подставляя вместо функции $E(x)$ ее выражение из (2.26), получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\,t)\,\nu(t)\,dt=g_0(x), \tag{2.27}$$

где

$$K(x,\,t)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t_1-x}+\frac{t_1}{1-xt_1}\right)H_1(t,\,t_1)\,dt_1,$$

$$g_0(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t}{1-xt}\right)g(t)\,dt.$$

Докажем, что однородное уравнение

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\,t)\,\nu(t)\,dt=0, \tag{2.28}$$

соответствующее уравнению (2.27), не имеет решений, отличных от нулевого. Так как $\varphi\equiv 0$, то в силу первого из условий (2.2) $u|_{\sigma}=0$. С другой стороны, при доказательстве единственности решений рассматриваемой задачи было установлено, что решение этой задачи не может иметь отличного от нуля экстремума на отрезке I. Отсюда следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{D}_2$; стало быть, $\nu(x)\equiv 0$. Итак, однородное уравнение (2.28) не имеет отличных от нуля решений, поэтому неоднородное уравнение (2.27) в силу альтернативы Фредгольма имеет единственное решение.

После нахождения функций $\nu(x)$ из уравнения (2.27) решение рассматриваемой задачи представляется в области D_2 формулой (2.17).

Решение задачи A в области D_1 находится из решения первой краевой задачи для уравнения (2.3) с условиями (см., например, [48])

$$u\big|_{x=-1}=\varphi_1(y),\ \ u\big|_{y=0}=\tau(x),\ \ u\big|_{x=1}=\varphi_2(y). \tag{2.29}$$

§ 3. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ

Пусть $D=D_1\cup D_2\cup I$ — смешанная область, определенная в § 1.

З а д а ч а A_α. Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C\left(\overline{D}_i\right)\cap C'\left(D_i\cup I\right)$, причем в точках $A(-1,0)$ или $B(1,0)$ производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы ($i=1,2$);

2) на отрезке AB выполняются условия склеивания

$$u(x,-0)=\alpha(x)\,u(x,+0)+\gamma(x), \qquad (3.1)$$
$$u_y(x,-0)=\beta(x)\,u_y(x,+0)+\delta(x),$$

где α, β, γ, δ — заданные функции, причем

$$\alpha\in C^2(\overline{I})\cap C^1(I),\ \alpha(x)\neq 0,\ \forall x\in\overline{I},\ \gamma\in C^2(\overline{I})\cap C^3(I),$$
$$\beta\in C^1(\overline{I})\cap C^2(I),\ \beta(x)\neq 0,\ \forall x\in\overline{I},\ \delta\in C^1(\overline{I})\cap C^2(I);$$

3) $u(x,y)$ является решением уравнения (2.1) в области D при $y\neq 0$;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$u\big|_{x=-1}=\varphi_1(y),\ u\big|_{x=1}=\varphi_2(y),\ u\big|_{s}=\varphi(s), \qquad (3.2)$$

где φ_1, φ_2 — заданные непрерывные функции; φ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\varphi(A)=\varphi_1(A),\ \varphi(B)=\varphi_2(B).$$

Если

$$\left[c_1-\frac{\alpha''}{\alpha}+2\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2-a_1\frac{\alpha'}{\alpha}\right]\leqslant 0,\ \alpha\beta>0, \qquad (3.3)$$

то рассматриваемая задача имеет не более одного решения.

Пусть существуют два решения задачи A_α: $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда в силу линейности уравнения (2.1) и граничных условий (3.2) функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ будет решением задачи A_α для уравнения

$$\overline{u}_{xx}+\frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}\overline{u}_{yy}+a(x,y)\,\overline{u}_x+b(x,y)\,\overline{u}_y+c(x,y)\,\overline{u}=0 \qquad (3.4)$$

с однородными условиями

$$\overline{u}\big|_{x=-1}=0,\ \overline{u}\big|_{x=1}=0,\ \overline{u}\big|_{s}=0 \qquad (3.5)$$

и условиями склеивания

$$\overline{u}(x,-0)=\alpha(x)\,\overline{u}(x,+0), \qquad (3.6)$$
$$\overline{u}_y(x,-0)=\beta(x)\,\overline{u}_y(x,+0).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$v(x,y)=\begin{cases}\alpha(x)\,\overline{u}(x,y)=v^+(x,y),\ (x,y)\in D_1,\\ \qquad\quad \overline{u}(x,y)=v^-(x,y),\ (x,y)\in D_2.\end{cases}$$

Легко убедиться, что эта функция является регулярным в области D решением уравнения

$$0=\begin{cases}v_{xx}+\left(a_1-2\frac{\alpha'}{\alpha}\right)v_x+b_1v_y+\left[c_1-\frac{\alpha''}{\alpha}+2\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2-a_1\frac{\alpha'}{\alpha}\right]v,\\ v_{xx}+v_{yy}+a_2(x,y)\,v_x+b_2(x,y)\,v_y+c_2(x,y)\,v,\end{cases}$$

которое в соответствии с (3.5) и (3.6) удовлетворяет условиям

$$v(-1, y) = v(1, y) = 0, \quad v\big|_{\sigma} = 0,$$

$$v^-(x, -0) = v^+(x, +0), \tag{3.7}$$

$$v_y^-(x, -0) = \frac{3}{2} v_y^+(x, +0).$$

Допустим, что $v(x, y)$ имеет положительный максимум в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \bar{D}$. Для функции $v^-(x, y)$ справедлив принцип экстремума, поэтому $(x_0, y_0) \overline{\in} D_2$. Поскольку функция $v^+(x, y)$ является решением параболического уравнения $Lv = 0$, для которого на основании первого неравенства из (3.3) справедлив принцип экстремума, то $(x_0, y_0) \overline{\in} \bar{D}_1$. Пусть $(x_0, y_0) \in I$, тогда по принципу Зарембы — Жиро из области D_2 получим

$$v_y^-(x_0, 0) > 0. \tag{3.8}$$

С другой стороны, так как в этой точке достигается положительный максимум функции $v^+(x, y)$ в $\bar{D}_1$, то

$$v_y^+(x_0, 0) \leqslant 0. \tag{3.9}$$

Из соотношений (3.7) в силу второго неравенства из (3.3) и (3.9) заключаем, что

$$v_y^-(x_0, 0) \leqslant 0,$$

а это противоречит неравенству (3.8).

Таким образом, (x_0, y_0) не принадлежит интервалу I.

Аналогично устанавливается, что функция $v(x, y)$ не имеет отрицательного минимума в $\bar{D}$. Следовательно, $v(x, y) \equiv 0$ в области D, а это доказывает, что однородная задача имеет только тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0$.

Докажем существование решений задачи A_α.

В области D_1 введем обозначения

$$\tau^+(x) = u(x, +0), \quad x \in \bar{I},$$

$$\nu^+(x) = u_y(x, +0), \quad x \in I,$$

а в области D_2 —

$$\tau^-(x) = u(x, -0), \quad x \in \bar{I},$$

$$\nu^-(x) = u_y(x, -0), \quad x \in I.$$

Решая задачу (2.1), (2.6) в области D_2, получаем формулу (2.17), из которой, полагая $y=0$, имеем соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D_2. Оно выражается формулой (2.18):

$$\tau(x) = \int_{-1}^{1} [G(t, x) + K_0(t, x) + K_{00}(t, x)] \nu(t)\, dt +$$

$$+\int_{\sigma}\left[G^{*}(s,x)+\overline{K}_{0}(s,x)+\overline{K}_{00}(s,x)\right]\varphi(s)\,ds-\psi(x). \quad (3.10)$$

Соотношение между $\tau^{+}(x)$ и $\nu^{+}(x)$, принесенное из области D_1, выражается формулой (2.20):

$$\tau^{+}(x)=\int_{-1}^{1}T(t,x)f_{1}(t)\,dt-\int_{-1}^{1}T(t,x)\,b_{1}(t)\,\nu^{+}(t)\,dt. \quad (3.11)$$

Реализуя условие (3.1) и дифференцируя полученное выражение по x, получаем сингулярное интегральное уравнение первого рода относительно $\nu(x)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right)\nu(t)\,dt=\int_{-1}^{1}H_{1}(t,x)\,\nu(t)\,dt+g(x), \quad (3.12)$$

где

$$H_{1}(t,x)=-\frac{\partial T(t,x)}{\partial x}\frac{\alpha(x)\,b_{1}(t)}{\beta(t)}-\frac{\partial K_{0}(t,x)}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial K_{00}(t,x)}{\partial x}-\frac{\alpha(x)\,T(t,x)\,b_{1}(t)}{\beta(t)}-H(t,x);$$

$$g(x)=\alpha'(x)\int_{-1}^{1}T(t,x)f_{1}(t)\,dt+\alpha(x)\int_{-1}^{1}\frac{\partial T(t,x)}{\partial x}f_{1}(t)\,dt-$$

$$-\alpha'(x)\int_{-1}^{1}\frac{T(t,x)}{\beta(t)}\delta(t)\,dt-\alpha(x)\int_{-1}^{1}\frac{\partial T(t,x)}{\partial x}\frac{b_{1}(x)\,\delta(t)}{\beta(t)}\,dt-$$

$$-\gamma'(x)+\int_{\sigma}\left[\frac{\partial G^{*}(s,x)}{\partial x}+\frac{\partial\overline{K}_{0}(s,x)}{\partial x}+\frac{\partial\overline{K}_{00}(s,x)}{\partial x}\right]\varphi(s)\,ds+\psi'(x).$$

Рассуждая точно так же, как в § 2, убеждаемся в том, что функция $g(x)$ непрерывна на $\overline{I}$, дважды непрерывно дифференцируема на I, а ее производная первого порядка может обращаться в бесконечность не выше чем логарифмического порядка в точках $x=-1$ и $x=1$, а функция $H_1(t,x)$ может иметь особенность не выше чем логарифмического порядка.

Решаем сингулярное интегральное уравнение первого рода (3.12), рассматривая правую часть как известную. Применяя результаты, полученные в § 1, приходим к уравнению

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x,t)\,\nu(t)\,dt=g_{0}(x), \quad (3.13)$$

где

$$K(x,\ t) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t_1 - x} + \frac{t_1}{1 - xt_1} \right) H_1(t,\ t_1)\, dt_1;$$

$$g_0(x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t - x} + \frac{t}{1 - xt} \right) g(t)\, dt.$$

Однозначная разрешимость уравнения (3.13) доказывается точно так же, как для уравнения (2.27) при изучении первой краевой задачи с непрерывными условиями склеивания.

После нахождения функций $\nu(x)$ из уравнения (3.13) решение задачи A_a представляется в области D_2 формулой (2.17).

Функция $u(x, y)$ в области D_2 находится из решения задачи

$$u_{xx} + a_1(x, y) u_x + b_1(x, y) u_y + c_1(x, y) u = f_1(x, y),$$

$$u\big|_{x=-1} = \varphi_1(y), \quad u\big|_{x=1} = \varphi_2(y),$$

$$u\big|_{y=0} = \tau^+(x) = \frac{\tau(x)}{\alpha(x)} - \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}.$$

Здесь функция $\tau(x)$ определена формулой (3.10).

§ 4. ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим уравнение (2.1) в односвязной смешанной области $D = D_1 \cup D_2 \cup I$, определенной в § 1.

1. Задача B. Найти непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$ функцию $u(x, y)$ с непрерывными внутри D производными u_x и u_y, удовлетворяющую уравнению (2.1) в области D при $y \neq 0$ и граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\sigma} = \varphi(s),\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=-1} = \varphi_1(y),\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \varphi_2(y), \qquad (4.1)$$

где φ, φ_1, φ_2 — заданные непрерывные функции, причем

$$\varphi(A) = \varphi_1(A),\ \varphi(B) = \varphi_2(B).$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (2.1) и кривая σ удовлетворяют всем условиям, приведенным в § 2, причем $c_2 < 0$.

Из известных принципов экстремума для эллиптических и параболических уравнений и из принципа экстремума, доказанного в § 1, следует единственность решения задачи B.

Докажем существование решения задачи B.

Решение уравнения (2.1) в области D_2, удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\sigma} = \varphi(s), \; \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \nu(x), \tag{4.2}$$

выражается формулой [10]

$$u(x, y) = \int_{-1}^{1} G(t, 0; x, y)\,\nu(t)\,dt + \int_{\sigma} G(s, x, y)\,\varphi(s)\,ds +$$

$$+ \int_{-1}^{1}\left\{\iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, y)\left[K(t, \xi, \eta) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta)\,K(t, \xi', \eta')\,d\xi' d\eta'\right] d\xi d\eta\right\}\nu(t)\,dt +$$

$$+ \int_{\sigma}\left\{\iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, \eta)\left[\overline{K}(s, \xi, \eta) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta)\,\overline{K}(s, \xi', \eta')\,d\xi' d\eta'\right] d\xi d\eta\right\}\varphi(s)\,ds +$$

$$+ \int_{-1}^{1}\left\{2\pi \iint_{D_2}\iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, y)\,\Gamma_2(\xi', \eta'; \xi, \eta)\left[K(t, \xi', \eta') +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \iint_{D_2} K(x', y'; \xi', \eta')\,K(t, x', y')\,dx' dy'\right] d\xi' d\eta' d\xi d\eta\right\}\nu(t)\,dt +$$

$$+ \int_{\sigma}\left\{2\pi \iint_{D_2}\iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, y)\,\Gamma_2(\xi', \eta'; \xi, \eta)\left[\overline{K}(s, \xi, \eta) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \iint_{D_2} K(x', y'; \xi', \eta')\,\overline{K}(s, x', y')\,dx' dy'\right] d\xi' d\eta' d\xi d\eta\right\}\varphi(s)\,ds -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, y)\left[f_2(\xi, \eta) +\right.$$

$$\left. + \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta)\,f_2(\xi', \eta')\,d\xi' d\eta'\right] d\xi d\eta +$$

$$+ \iint_{D_2}\iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, y)\,\Gamma_2(\xi', \eta'; \xi, \eta)\left[f_2(\xi', \eta') +\right.$$

$$\left. + \iint_{D_2} K(x', y'; \xi', \eta')\,f_2(x'\ y')\,dx' dy'\right] d\xi' d\eta' d\xi d\eta, \tag{4.3}$$

где

$$K(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi}\left[a_2(x, y)\frac{\partial G}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial G}{\partial y} + c_2(x, y)G\right];$$

$$\overline{K}(s, x, y) = K(\xi(s), \eta(s); x, y);$$

$\Gamma_2(\xi, \eta; x, y)$ — резольвента ядра;

$$K_2(\xi, \eta; x, y) = \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; x, y)\, K(\xi, \eta; \xi', \eta')\, d\xi' d\eta';$$

$G(\xi, \eta; x, y)$ — функция Грина следующей задачи (см. [9]) в области D_2:

$$W_{xx} + W_{yy} - W = 0,$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_{\sigma} = \varphi(s), \quad \left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x).$$

Введем обозначения

$$G(t, x) = G(t, 0; x, 0),$$

$$G(s, x) = G(\xi(s), \eta(s); x, 0),$$

$$\chi(x) = \frac{1}{2\pi}\iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\Bigg[f_2(\xi, \eta) +$$

$$+ \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta) f_2(\xi', \eta')\, d\xi' d\eta'\Bigg] d\xi d\eta -$$

$$- \iint_{D_2}\iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\, \Gamma_2(\xi', \eta'; \xi, \eta)\Bigg[f_2(\xi', \eta') +$$

$$+ \iint_{D_2} K(x', y'; \xi', \eta') f_2(x', y')\, dx' dy'\Bigg] d\xi' d\eta' d\xi d\eta,$$

$$K_0(t, x) = \iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\Bigg[K(t, \xi, \eta) +$$

$$+ \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta)\, K(t, \xi', \eta')\, d\xi' d\eta'\Bigg] d\xi d\eta,$$

$$\overline{K}_0(s, x) = \iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\Bigg[\overline{K}(s, \xi, \eta) +$$

$$+ \iint_{D_2} K(\xi', \eta'; \xi, \eta)\overline{K}(s, \xi', \eta')\, d\xi' d\eta'\Bigg] d\xi d\eta,$$

$$K_{00}(t, x)=2\pi \iint_{D_2} \iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\, \Gamma_2(\xi', \eta'; \xi, \eta)\Bigg[K(t, \xi', \eta')+$$

$$+\iint_{D_2} K(x', y'; \xi, \eta)\, K(t, x', y')\, dx'\, dy'\Bigg] d\xi' d\eta' d\xi d\eta,$$

$$\overline{K}_{00}(s, x)=2\pi \iint_{D_2} \iint_{D_2} G(\xi, \eta; x, 0)\, \Gamma_2(\xi', \eta'; \xi, \eta)\Bigg[\overline{K}(s, \xi', \eta')+$$

$$+\iint_{D_2} K(x', y'; \xi, \eta)\, \overline{K}(s, x', y')\, dx' dy'\Bigg] d\xi' d\eta' d\xi d\eta.$$

Полагая в (4.2) $y=0$ и учитывая эти обозначения, а также обозначение $u(x, 0)=\tau(x)$, получаем

$$\tau(x)=\int_{-1}^{1}[G(t, x)+K_0(t, x)+K_{00}(t, x)]\, \nu(t)\, dt +$$

$$+\int_{\sigma}\left[G(s, x)+\overline{K}_0(s, x)+\overline{K}_{00}(s, x)\right] \varphi(s)\, ds-\chi(x). \quad (4.4)$$

Соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D_1, имеет вид (см. формулу (2.20))

$$\tau(x)=\int_{-1}^{1} T(t, x)\,[f_1(t)-b_1(t)\, \nu(t)]\, dt. \quad (4.5)$$

Исключая $\tau(x)$ из (4.4) и (4.5) и дифференцируя полученное равенство по x, получаем сингулярное уравнение первого рода относительно функции $\nu(x)$

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial G(t, x)}{\partial x}+\frac{\partial K_0(t, x)}{\partial x}+\frac{\partial K_{00}(t, x)}{\partial x}\right] \nu(t)\, dt+$$

$$+\int_{-1}^{1} b_1(t) \frac{\partial T(t, x)}{\partial x}\, \nu(t)\, dt=\int_{-1}^{1} \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} f_1(t)\, dt-$$

$$-\int_{\sigma}\left[\frac{\partial G(s, x)}{\partial x}+\frac{\partial \overline{K}_0(s, x)}{\partial x}+\frac{\partial K_{00}(s, x)}{\partial x}\right] \varphi(s)\, ds+\chi(x). \quad (4.6)$$

Согласно [10],

$$\frac{\partial G(t, x)}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-x t}\right]+H^*(t, x), \quad (4.7)$$

где $H^*(t, x)$ может иметь особенность порядка ниже единицы.

Введем обозначения

$$g(x)=\int_{-1}^{1}\frac{\partial T(t,x)}{\partial x}f_1(t)\,dt-\int_{\sigma}\left[\frac{\partial G(s,x)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \overline{K}_0(s,x)}{\partial x}+\frac{\partial \overline{K}_{00}(s,x)}{\partial x}\right]\varphi(s)\,ds+\chi(x),$$

$$H(t,x)=H^*(t,x)+\frac{\partial K_0(t,x)}{\partial x}+\frac{\partial K_{00}(t,x)}{\partial x}+b_1(x)\frac{\partial T(t,x)}{\partial x}.$$

Учитывая эти обозначения, перепишем уравнение (4.6) в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right]\nu(t)\,dt=g(x)-\int_{-1}^{1}H(t,x)\,\nu(t)\,dt. \tag{4.8}$$

Легко убедиться [10], что функция $H(t,x)$ при $x\to-1$ и $x\to1$ имеет особенность ниже единицы, а функция $g(x)$ непрерывна и имеет ограниченную производную первого порядка.

Применяя результаты, полученные в § 1, приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для определения функции

$$\nu(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}R(x,t)\,\nu(t)\,dt=h(x), \tag{4.9}$$

где

$$R(x,t)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t_1-x}+\frac{t_1}{1-xt_1}\right)H(t_1,t)\,dt;$$

$$h(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t}{1-xt}\right)g(t)\,dt.$$

Из единственности решения задачи B (при указанных условиях) следует однозначная разрешимость уравнения (4.9).

После нахождения функции $\nu(x)$ из уравнения (4.9) решение задачи B представляется в области D_2 формулой (4.3). Далее следует с помощью известных методов [48] найти решение уравнения (2.3) в области D_1, удовлетворяющее условиям

$$u_x\big|_{x=-1}=\varphi_1(y),\; u_x\big|_{x=1}=\varphi_2(y),\; u\big|_{y=0}=\tau(x), \tag{4.10}$$

где $\tau(x)$ выражается формулой (4. 4).

Задача B для уравнения (2.1) изучена также с разрывными условиями склеивания (задача B_a) [66].

Задача A, исследованная в § 1 методом конечных разностей, рассмотрена в [46].

Глава III

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ T

Пусть задана конечная открытая область G, разделенная осью x на части G_1 (нижняя) и G_2, причем G_1 снизу ограничена отрезками AS и BS прямых, имеющих соответственно уравнения $y=-x$, $y=x-1$, а G_2 с боков ограничена непрерывными кривыми AC и BD и сверху — отрезком CD прямой, параллельной оси x (рис. 3). В дальнейшем через AB будем обозначать открытый отрезок.

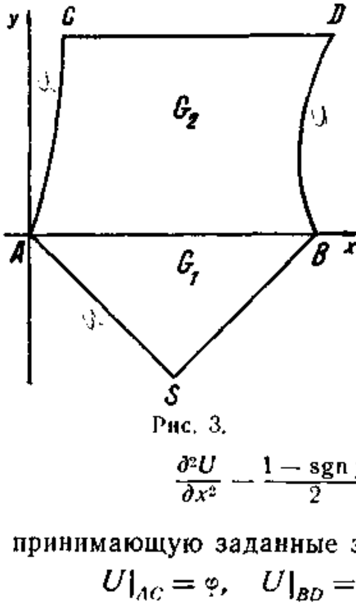

Рис. 3.

З а д а ч а T. Найти непрерывную в замкнутой области G функцию $U(x, y)$, имеющую непрерывные производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ в G, удовлетворяющую в G при $y \neq 0$ уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

и принимающую заданные значения на AC, BD, AS:

$$U|_{AC} = \varphi, \quad U|_{BD} = \chi, \quad U|_{AS} = \psi, \quad \varphi(A) = \psi(A). \tag{1.2}$$

Следовательно, функция U должна удовлетворять в треугольнике G_1 уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \tag{1.3}$$

а в области G_2 — уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \tag{1.4}$$

Дальнейшие рассуждения могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Если в некоторой окрестности любой точки границ AC и BD уравнение границы может быть записано в виде $x=f(y)$, где функция $f(y)$ удовлетворяет условию Липшица, граничные функции $\varphi(y)$ и $\chi(y)$ непрерывны, а функция $\psi(x)$ имеет непрерывную вторую производную, то у задачи T существует единственное решение.

Доказательство теоремы 1 приведено в § 2—4.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ T

Докажем существование решения задачи T путем его построения.

Рассмотрим на отрезке AB функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$, удовлетворяющие при $0<x<1$ системе уравнений

$$\tau'(x)-\nu(x)=\psi'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{2.1}$$

$$\tau''(x)-\nu(x)=0 \tag{2.2}$$

и граничному условию

$$\tau(0)=\varphi(0)=\psi(0),\ \tau(1)=\chi(0). \tag{2.3}$$

Решение системы (2.1)—(2.2) при граничном условии (2.3) сводится к решению уравнения

$$\tau''(x)+\tau'(x)=\psi'\left(\frac{x}{2}\right) \tag{2.4}$$

при тех же условиях. Следовательно, система (2.1)—(2.2) при условии (2.3) имеет единственное решение, причем так как $\psi(x)$ имеет непрерывную производную второго порядка, то $\tau(x)$, как это непосредственно следует из (2.4), имеет непрерывную производную третьего порядка. Нетрудно убедиться в том, что $\nu(x)$ ограничена при $x\to 0$ и $x\to 1$.

Далее, опираясь на найденные $\tau(x)$ и $\nu(x)$, решим задачу Коши для уравнения (1.3) в области $\overline{G}_1$, считая, что искомая функция при $y=0$ должна обращаться в $\tau(x)$, а ее производная по y — в $\nu(x)$. Используя φ, τ и χ, определенные на CA, AB и BD, решим основную краевую задачу для уравнения (1.4) в области $\overline{G}_2$. В результате получим функцию $U(x, y)$, определенную и непрерывную в G, удовлетворяющую в G_1 уравнению (1.3), а в G_2 — уравнению (1.4), обращающуюся на AC и BD соответственно в φ и χ.

Убедимся в том, что функция $U(x, y)$ обращается на AS в функцию $\psi(x)$. Пользуясь формулой Даламбера и уравнением (2.1), запишем в $\overline{G_1}$ (учитывая, что $y<0$)

$$U(x, y) = \frac{\tau(x-y)+\tau(x+y)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\left[\tau'(\alpha) - \psi'\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]d\alpha =$$

$$= r(x+y) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right) - \psi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Следовательно, $U(x, y)|_{AS} = \tau(0) + \psi(x) - \psi(0)$, а так как $\tau(0) = \psi(0)$, то $U|_{AS} = \psi(x)$.

Чтобы функцию $U(x, y)$ можно было считать решением задачи T, необходимо доказать, что производные $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ непрерывны в G. Прежде всего очевидно, что эти производные непрерывны в G_1 и G_2. Поэтому достаточно проверить непрерывность производных $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ как функций от x и y в точках отрезка AB.

Отметим, что такая проверка необходима, несмотря на то, что например, $\frac{\partial U}{\partial x}$ непрерывна (как функция двух переменных) в области G вне AB и в силу свойства $\tau(x)$ непрерывна на AB (как функция одной переменной x). В этом можно убедиться на следующем элементарном примере. Функция $z = y\ln(x^2+y^2)$, доопределенная в начале координат предельными значениями, равными нулю, непрерывна на всей плоскости. Производная этой функции, например, по x, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, как функция x и y, непрерывна в любой точке, не совпадающей с началом координат. Кроме того, доопределенная с помощью предела при $x \to 0$, $y=0$, она является непрерывной на всей оси x как функция x. Однако, как функция x и y, производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ имеет точку разрыва в начале координат, так как ее предельные значения в этой точке различны по разным направлениям.

Указанную процедуру проверки непрерывности производных мы проведем один раз с необходимой строгостью, чтобы при решении аналогичных задач (см. гл. V) на этом вопросе не останавливаться подробно.

§ 3. О НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРОИЗВОДНОЙ $\frac{\partial U}{\partial x}$ В G

Для доказательства непрерывности производной $\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}$ в области G достаточно убедиться в непрерывности этой производной в произвольной точке $N(x_0, 0)$ $(0<x_0<1)$ отрезка AB.

Прежде всего легко убедиться в том, что

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to -0}} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \tau'(x_0). \tag{3.1}$$

Для этого представим $U(x, y)$ в области G_1 с помощью формулы Даламбера

$$U(x, y) = \frac{\tau(x-y)+\tau(x+y)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} \nu(z)\,dz.$$

Можем записать

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\tau'(x-y)+\tau'(x+y)}{2} - \frac{\nu(x-y)-\nu(x+y)}{2}.$$

Отсюда в силу непрерывности $\tau'(x)$ и $\nu(x)$ следует справедливость соотношения (3.1).

Далее докажем, что

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to +0}} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \tau'(x_0). \tag{3.2}$$

Для этого надо рассмотреть такой прямоугольник $PKLQ$ со сторонами, параллельными осям координат, который содержался бы вместе со своей границей в G_2+AB, а его нижнее основание KL принадлежало бы отрезку AB и содержало внутри себя фиксированную точку $N(x_0, 0)$ (рис. 4). Сохраняя направление осей, перенесем начало координат в точку k. Такой перенос начала координат, который, очевидно, не влияет на суть дела, будем считать осуществленным только в дальнейших рассуждениях этого параграфа и для упрощения записей сохраним те же обозначения для абсцисс точек, абсциссу же точки L положим равной l.

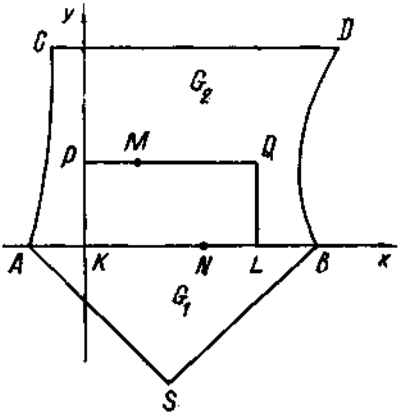

Рис. 4.

Рассмотрим функцию $U_1(x, y) = U(x, y) + ax + b$. Числа a и b подберем так, чтобы выполнялось условие $U_1(k) = U_1(L) = 0$. Очевидно, что функция $U_1(x, y)$ удовлетворяет в G уравнению (1.1) при $y \neq 0$, и если производная $\frac{\partial U_1}{\partial x}$ непрерывна в точке $N(x_0, 0)$ при $y \to 0$, то этим же свойством обладает и $\frac{\partial U}{\partial x}$.

Если положим

$$\varphi_1(y) = U_1(0, y),\ \chi_1(y) = U_1(l, y),\ \tau_1(x) = U_1(x, 0),$$

то будут выполняться равенства

$$\varphi_1(0) = \tau_1(0) = \tau(l) = \chi_1(0) = 0.$$

Отсюда следует, что $U_1(x, y)$ можно представить в виде

$$U_1(x, y) = u(x, y) + v(x, y), \tag{3.3}$$

где функция $u(x, y)$ в прямоугольнике $PKLQ$ является решением уравнения (1.4), принимающим на боковых границах PK и LQ соответственно значения $\varphi_1(y)$ и $\chi_1(y)$ и обращающимся в нуль на KL; функция $v(x, y)$ является решением уравнения (1.4), обращающимся в нуль на PK и LQ и в $\tau_1(x)$ на KL.

Функция $u(x, y)$ в точке $M(x, y)$, лежащей на PQ, может быть представлена в виде [73] (с. 746)

$$u(x, y) = -\int\limits_{PK} \frac{\varphi_2(\eta)}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}}(x-\xi)\, e^{\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta-y)}} d\eta + \tag{3.4}$$

$$+ \int\limits_{LQ} \frac{\chi_2(\eta)}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}}(x-\xi)\, e^{\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta-y)}} d\eta,$$

где ξ, η — переменные интегрирования; φ_2 и χ_2 — непрерывные функции, удовлетворяющие системе интегральных уравнений

$$\varphi_2(y) - l \int\limits_0^y \frac{\chi_2(\eta)}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}}\, e^{\frac{l^2}{4(\eta-y)}} d\eta = \varphi_1(y),$$

$$-\chi_2(y) + l \int\limits_0^y \frac{\varphi_2(\eta)}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}}\, e^{\frac{l^2}{4(\eta-y)}} d\eta = \chi_1(y).$$

Подынтегральные функции в (3.4) и их производные по x имеют особенность, если точка (ξ, η) совпадает с точкой (x, y), и являются непрерывными, если указанные точки не совпадают. Мы рассматриваем последний случай, так как точка (ξ, η) принадлежит PK или LQ, а (x, y) находится внутри PQ. Отсюда вытекает возможность дифференцирования по x под знаками интегралов в (3.4).

Выразим производную $\frac{\partial u}{\partial x}$, положив попутно $\xi = 0$ на PK и $\xi = l$ на LQ:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \int\limits_0^y \frac{\varphi_2(\eta)}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}}\left[1 - \frac{x^2}{2(y-\eta)}\right] e^{\frac{x^2}{4(\eta-y)}} d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^y \frac{\chi_2(\eta)}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}}\left[1 - \frac{(x-l)^2}{2(y-\eta)}\right] e^{\frac{(x-l)^2}{4(\eta-y)}} d\eta. \tag{3.5}$$

Из (3.5) ясно, что

$$\lim_{M(x,\, y)\to N(x_0,\, 0)} \frac{\partial u(x,\, y)}{\partial x} = 0 \quad (0 < x_0 < l). \tag{3.6}$$

Функцию $v(x, y)$ в прямоугольнике $PKLQ$ представим в виде ряда [64]

$$v(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \frac{\pi^2}{l^2} y} \sin n \frac{\pi}{l} y, \tag{3.7}$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \tau_1(x) \sin n \frac{\pi}{l} x dx.$$

Функция $\tau_1(x)$ имеет непрерывную производную третьего порядка при $0 \leqslant x \leqslant l$, так как такими свойствами обладает $\tau(x)$. Учитывая это, а также равенства $\tau_1(0) = \tau_1(l) = 0$, можно считать, что $b_n = 0\left(\frac{1}{n^3}\right)$, так как в этом случае

$$b_n = -\frac{2l^3}{n^3 \pi^3} \left[\tau_1''(0) + (-1)^{n+1} \tau_1''(l) + \int_0^l \tau_1'''(x) \cos n \frac{\pi}{l} x dx \right].$$

Отсюда следует, что порядок коэффициентов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\pi}{l} b_n e^{-n^2 \frac{\pi^2}{l^2} y} \cos n \frac{\pi}{l} x, \tag{3.8}$$

полученного из ряда (3.7) в результате дифференцирования его по x, равен $\frac{1}{n^2}$.

Ряд (3.8) равномерно сходится в замкнутом прямоугольнике $PKLQ$, так как он мажорируется на нем числовым рядом вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^2} \quad (c = \mathrm{const}).$$

Отсюда следует, что у функции $v(x, y)$ существует непрерывная производная $\frac{\partial v(x,\, y)}{\partial x}$ в замкнутом прямоугольнике $PKLQ$, представленная на нем рядом (3.8).

Таким образом,

$$\lim_{M(x,\, y)\to N(x_0,\, 0)} \frac{\partial v(x,\, y)}{\partial x} = \tau_1'(x_0). \tag{3.9}$$

Из (3.6) и (3.9) получаем

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to +0}} \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} = \tau_1'(x_0),$$

но это равносильно тому, что

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to +0}} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \tau'(x_0). \tag{3.10}$$

Из (3.1) и (3.2) следует непрерывность производной $\frac{\partial U}{\partial x}$ в G.

§ 4. О НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРОИЗВОДНОЙ $\frac{\partial U}{\partial y}$ В G

Прежде всего отметим, что непрерывность производной $\frac{\partial U}{\partial y}$ в области G_1+AB и обращение ее в $\nu(x)$ на AB следуют из условия задачи Коши, решением которой в $\bar{G}_1$ является функция $U(x, y)$.

Пользуясь уравнением (1.4), вопрос о непрерывности производной $\frac{\partial U}{\partial y}$ в G_2+AB и обращении ее в $\nu(x)$ на AB можно свести к тому же вопросу для $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$. Заметим, что проводить доказательство непрерывности $\frac{\partial U}{\partial y}$ непосредственно или доказывать непрерывность производной $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ в G_2+AB методом, указанным в предыдущем параграфе, не представляется возможным, так как это потребовало бы в конечном счете наложения более жесткого, чем в теореме 1, ограничения на функцию ψ.

Учитывая доказанную выше непрерывность $\frac{\partial U}{\partial x}$, для доказательства непрерывности $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ в $G_2 + AB$ проведем следующие рассуждения.

Так как на замкнутом прямоугольнике $PKLQ$ производная $\frac{\partial U}{\partial x}$ непрерывна, то значение U в точке $M(x, y)$ может быть представлено в виде [16] (с. 263)

$$U(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{PKLQ} \frac{e^{\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta - y)}}}{\sqrt{y - \eta}} \Big[U(\xi, \eta)\, d\xi +$$

$$+\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \xi}d\eta - U(\xi,\eta)\frac{x-\xi}{2(y-\eta)}d\eta\Bigg]. \qquad (4.1)$$

Подынтегральные функции, а также их производные по x второго порядка непрерывны, так как точка интегрирования (ξ,η) не совпадает с точкой $M(x,y)$, лежащей внутри отрезка LQ. Перепишем (4.1), сделав попутно в интервале по KL замену переменного интегрирования $\alpha=\frac{\xi-x}{2\sqrt{y}}$:

$$U(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{PK+LQ}\frac{e^{\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta-y)}}}{\sqrt{y-\eta}}\Bigg[\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \xi}-$$

$$-U(\xi,\eta)\frac{x-\xi}{2(y-\eta)}\Bigg]d\eta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{y}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{y}}}e^{-\alpha^2}\tau\left(x+2\sqrt{y}\,\alpha\right)d\alpha.$$

Здесь через x_1 и x_2 обозначены абсциссы точек K и L. Учитывая сказанное выше, а также непрерывность τ'', при нахождении $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ можно дифференцировать под знаками интегралов.

Полученные после дифференцирования интегралы по PK и LQ будут стремиться к нулю при $M(x,y)\to N(x_0,0)$, $(x_1<x_0<x_2)$, так как при этом $P\to K$, $Q\to L$.

Обозначим

$$I(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{\pi}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{\pi}}}e^{-\alpha^2}\tau\left(x+2\sqrt{y}\,\alpha\right)d\alpha.$$

Имеем

$$\frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{\pi}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{\pi}}}e^{-\alpha^2}\tau''\left(x+2\sqrt{y}\,\alpha\right)d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}e^{-\frac{(x_1-x)^2}{4y}}\left[\tau'(x_1)+\frac{x_1-x}{2y}\tau(x_1)\right]-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}e^{-\frac{(x_2-x)^2}{4y}}\left[\tau'(x_2)+\frac{x_2-x}{2y}\tau(x_2)\right].$$

Выясним поведение функции $\frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial x^2}$ при $M(x,y)\to N(x_0,0)$. Так как $x_1<x_0<x_2$, то последние два слагаемые, очевидно, стремятся к нулю.

Учитывая равенство $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=1$, можем записать

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{y}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{y}}}e^{-\alpha^2}\tau''(x+2\sqrt{y}\,\alpha)\,d\alpha-\tau''(x_0)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x_1-x}{4\sqrt{y}}}^{\frac{x_2-x}{4\sqrt{y}}}e^{-\alpha^2}\tau''(x+2\sqrt{y}\,\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}\tau''(x_0)d\alpha\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{y}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{y}}}e^{-\alpha^2}\left[\tau''(x+2\sqrt{y}\,\alpha)-\tau''(x_0)\right]d\alpha\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x_1-x}{2\sqrt{y}}}e^{-\alpha^2}\tau''(x_0)\,d\alpha+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x_2-x}{2\sqrt{y}}}^{\infty}e^{-\alpha^2}\tau(x_0)d\alpha\right|.$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Пусть $|\tau''(x+2\sqrt{y}\,\alpha)|<H$ при $x_1\leqslant x+2\sqrt{y}\,\alpha\leqslant x_2$. Выберем $R>0$ настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{2H}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-R}e^{-\alpha^2}d\alpha<\frac{\varepsilon}{5}\quad\text{и}\quad\frac{2H}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{R}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha<\frac{\varepsilon}{5}.$$

Возьмем точку $M(x,y)$ настолько близкой к точке $N(x_0,0)$, чтобы выполнялись неравенства $\frac{x_1-x}{2\sqrt{y}}<-R$ и $\frac{x_2-x}{2\sqrt{y}}>R$. Тогда

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{y}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{y}}} e^{-\alpha^2}\tau''(x+2\sqrt{y}\,\alpha)\,d\alpha-\tau''(x_0)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2H}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{y}}}^{-R} e^{-\alpha^2}d\alpha+\frac{2H}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{R}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{y}}} e^{-\alpha^2}d\alpha+\frac{|\tau''(x_0)|}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x_1-x}{2\sqrt{y}}} e^{-\alpha^2}d\alpha+$$

$$+\frac{|\tau''(x_0)|}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x_2-x}{2\sqrt{y}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-R}^{R} e^{-\alpha^2}|\tau''(x+2\sqrt{y}\,\alpha)-\tau''(x_0)|\,d\alpha. \tag{4.2}$$

Очевидно, первые два слагаемых в (4.2) порознь меньше $\frac{\varepsilon}{5}$. Каждое из следующих двух слагаемых при $M\longrightarrow N$ может быть сделано меньше $\frac{\varepsilon}{5}$. Так как в последнем интеграле изменение α ограничено, а функция τ'' непрерывна, то точку M можно взять настолько близкой к точке N, что последнее слагаемое станет также меньше $\frac{\varepsilon}{5}$.

Таким образом, при достаточной близости точки M к точке N будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{y}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{y}}} e^{-\alpha^2}\tau''(x+2\sqrt{y}\,\alpha)\,d\alpha-\tau''(x_0)\right|<\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{M\to N}\frac{\partial^2 I(x,y)}{\partial x^2}=\tau''(x_0)$, а значит, и

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to+0}}\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}=\tau''(x_0).$$

Так как для $U(x,y)$ в G_2 выполнено уравнение (1.4), то и

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to+0}}\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\tau''(x_0),$$

а в силу (2.2)

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to +0}} \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \nu(x). \tag{4.3}$$

Соотношение (4.3) равносильно непрерывности $\frac{\partial U}{\partial y}$ в G_2+AB. Отсюда следует непрерывность производной $\frac{\partial U}{\partial y}$ в G.

Единственность решения задачи T следует из того, что в случае однородной задачи T система уравнений (2.1), (2.2) при $\tau(0)=\tau(1)=0$ имеет только тривиальное решение $\tau \equiv 0$, $\nu \equiv 0$. Следовательно, $U(x, y) \equiv 0$ в $\overline{G}$.

Таким образом, задача T имеет и притом единственное решение. Теорема 1 доказана полностью.

§ 5. ЗАДАЧА M

Рассмотрим задачу, аналогичную задаче M [5] для уравнения (1.2) гл. I. Рассмотрим область G, которая в отличие от случая задачи T ограничена снизу отрезками AE и KB характеристик уравнения (1.3) и монотонной кривой $\breve{EK}$ (рис. 5).

Обозначим координаты точек следующим образом: $A(0;\ 0)$, $B(1;0)$, $S\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $H(h;0)$, $E\left(\frac{h}{2}; -\frac{h}{2}\right)$, $P\left(\frac{h+1}{2}; \frac{h-1}{2}\right)$, $K(1-l; -l)$.

Будем считать, что $\frac{1-h}{2} \leqslant l$, т. е. дуга $\breve{EK}$ находится внутри прямоугольника $EHPS$.

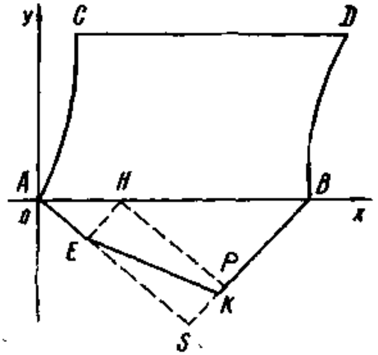

Рис. 5.

Задача M. Найти функцию $U(x, y)$, которая:

1) является решением уравнения (1.1) в области G при $y \neq 0$;

2) непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ и имеет непрерывные производные $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ внутри области G;

3) принимает заданные значения на AC, BD и $AEK=L$:

$$U|_{AC} = \varphi,\ U|_{BD} = \chi,\ U|_{L} = \psi,$$
$$\varphi(A) = \psi(A). \tag{5.1}$$

Введем обозначения, принятые в [5]. Пусть уравнение границы AEK имеет вид $y=-\gamma(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1-l$, причем $\gamma(x)=x$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{h}{2}$. Через $x=\delta(\xi)$ $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$ обозначим однозначную функцию, обратную функции $\xi=x+\gamma(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1-l)$. Введем также функцию $\lambda(x)=\delta(x)-\gamma[\delta(x)]$, для которой выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \lambda(x)=0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant h, \\ 0\leqslant\lambda(x)\leqslant 1-2l \text{ при } h\leqslant x\leqslant 1. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Теорема 2. Задача M имеет единственное решение, если:

1) в некоторой окрестности любой точки границ AC и BD уравнение границы может быть записано в виде $x=f(y)$, где функция $f(y)$ удовлетворяет условию Липшица;

2) $\varphi(y)$ и $\chi(y)$ непрерывны;

3) $\psi(y)$ имеет непрерывную вторую производную;

4) $\gamma(x)$—монотонно возрастающая,дважды непрерывно дифференцируемая функция;

5) $\dfrac{1-h}{2}\leqslant l$.

Не ограничивая общности рассуждения, в дальнейшем будем полагать

$$\tau(0)=0,\ \tau'(0)=0. \tag{5.3}$$

Сначала докажем единственность решения задачи M. Для этого убедимся в том, что любое решение задачи M приводится к одному определенному виду.

Сохраняя за функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ прежний смысл, можем считать, что для них как для элементов какого-либо решения U задачи M будут выполняться соотношение

$$\tau'(x)-\nu(x)=2\frac{d}{dx}\psi\left[\delta(x)\right]-\left\{\tau'\left[\lambda(x)\right]+\nu\left[\lambda(x)\right]\right\}\frac{d}{dx}\lambda(x), \tag{5.4}$$

принесенное из гиперболической части G_1 области G, и соотношение

$$\tau''(x)-\nu(x)=0,\ 0<x<1, \tag{5.5}$$

принесенное из параболической части G_2 области G.

Докажем, что система (5.4), (5.5) при условии (5.3) имеет единственное решение. Для этого убедимся в том, что данная задача может быть сведена к интегральному уравнению, имеющему единственное решение.

Учитывая (5.2), соотношение (5.4) можем записать при $0<x\leqslant h$ в виде

$$\tau'(x)-\nu(x)=2\frac{d}{dx}\psi\left(\frac{x}{2}\right), \tag{5.6}$$

а при $h\leqslant x\leqslant 1$ — в виде

$$\tau'\left[\lambda(x)\right]-\nu\left[\lambda(x)\right]=\psi'\left[\frac{\lambda(x)}{2}\right]. \tag{5.7}$$

Из (5.4) и (5.7) получаем

$$\tau'(x)-\nu(x)=2\frac{d}{dx}\left\{\psi\left[\delta(x)\right]+\psi\left[\frac{\lambda(x)}{2}\right]-\tau\left[\lambda(x)\right]\right\}. \tag{5.8}$$

Уравнение (5.8) можно считать выполненным при $0<x<1$, а при $0<x\leqslant h$ оно принимает более простой вид (5.6). Исключив $\nu(x)$ из (5.5) и (5.8), запишем для $\tau(x)$ соотношение

$$\tau'(x)-\tau''(x)=2\frac{d}{dx}\left\{\psi\left[\delta(x)\right]+\psi\left[\frac{\lambda(x)}{2}\right]-\tau\left[\lambda(x)\right]\right\}. \tag{5.9}$$

В результате интегрирования получим

$$\tau(x)-\tau(0)-\tau'(x)+\tau'(0)=$$

$$=2\left\{\psi\left[\delta(x)\right]+\psi\left[\frac{\lambda(x)}{2}\right]-\tau\left[\lambda(x)\right]-\psi\left[\delta(0)\right]-\psi\left[\frac{\lambda(0)}{2}\right]+\tau\left[\lambda(0)\right]\right\}.$$

Учитывая соотношения (5.2), (5.3) и равенство $\delta(0)=0$, записываем

$$\tau(x)-\tau'(x)=2\left\{\psi\left[\delta(x)\right]+\psi\left[\frac{\lambda(x)}{2}\right]-\tau\left[\lambda(x)\right]\right\}.$$

Интегрируя еще раз, получаем для $\tau(x)$ интегральное уравнение типа уравнения Вольтерра второго рода

$$\tau(x)=\int\limits_0^x\left\{\tau(\xi)+2\tau\left[\lambda(\xi)\right]\right\}d\xi+F(x), \tag{5.10}$$

где

$$F(x)=-2\int\limits_0^x\left\{\psi\left[\delta(\xi)\right]+\psi\left[\frac{\lambda(\xi)}{2}\right]\right\}d\xi.$$

Отметим, что уравнение (5.10) при $0<x\leqslant h$ принимает вид

$$\tau(x)=\int\limits_0^x\tau(\xi)\,d\xi+F(x),$$

где

$$F(x)=-2\int\limits_0^x\psi\left[\delta(\xi)\right]d\xi.$$

Нетрудно показать, что решение уравнения (5.10) можно свести к решению системы (5.4), (5.5) при дополнительных данных (5.3). Таким образом, задачи (5.4), (5.5), (5.3) и (5.10) эквивалентны.

Поскольку под интегралом в (5.10) стоит сумма двух слагаемых, то приведем рассуждения, подтверждающие возможность применения метода последовательных приближений к уравнению

$$\tau(x) = \alpha \int_0^x \left\{\tau(\xi) + 2\tau\left[\lambda(\xi)\right]\right\} d\xi + F(x), \tag{5.11}$$

где α — параметр.

Составим ряд

$$\tau(x) = \tau_0(x) + \alpha\tau_1(x) + \alpha^2\tau_2(x) + \ldots . \tag{5.12}$$

Подставим его в (5.11):

$$\tau_0(x) + \alpha\tau_1(x) + \alpha^2\tau_2(x) + \ldots =$$

$$= \alpha \int_0^x \Big\{ \left[\tau_0(\xi) + \alpha\tau_1(\xi) + \alpha^2\tau_2(\xi) + \cdots\right] +$$

$$+ 2\tau_0[\lambda(\xi)] + 2\alpha\tau_1[\lambda(\xi)] +$$

$$+ 2\alpha^2\tau_2\left[\lambda(\xi)\right] + \cdots \Big\} d\xi + F(x),\ 0 < x < 1.$$

Считая, что $|F(x)| < M$, получаем

$$|\tau_0(x)| \leqslant M,$$

$$\tau_1(x) = \int_0^x \left\{\tau_0(\xi) + 2\tau_0\left[\lambda(\xi)\right]\right\} d\xi,$$

$$|\tau_1(x)| \leqslant 3Mx,$$

$$\tau_2(x) = \int_0^x \left\{\tau_1(\xi) + \tau_1\left[\lambda(\xi)\right]\right\} d\xi,$$

$$|\tau_2(x)| \leqslant 3^2 M \frac{x^2}{2!},$$

. . . .

$$|\tau_n(x)| \leqslant 3^n M \frac{x^n}{n!} < M \frac{3^n}{n!}.$$

Следовательно, ряд (5.12) равномерно сходится и уравнение (5.11) при любом α имеет решение. Легко видеть, что это решение единственное. Пользуясь соотношением (5.5), по найденной функции $\tau(x)$ однозначно определяем $\nu(x)$.

Таким образом, различные решения задачи M, если таковые существуют, имеют одни и те же элементы $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Однако не может быть двух различных в области G решений уравнения (1.1), имеющих одинаковые значения на CA, AB, BD и одинаковые значения производной по y на AB.

Обратимся теперь к существованию решения задачи M. Рассмотрим на отрезке AB функции $\tau(x)$, $\nu(x)$, являющиеся единственным решением системы (5.4), (5.5) при условии (5.3).

По функциям φ, τ, χ, определенным на AC, AB, BD, найдем в G_2 функцию, являющуюся решением основной краевой задачи для уравнения (1.4), а по функциям τ и ν — в G_1 решение задачи Коши для уравнения (1.3). В результате получим функцию U, которая и будет решением задачи M.

Касаясь вопроса об удовлетворении функции U условиям задачи M, остановимся лишь на следующем. Согласно четвертому условию теоремы, $\delta(x)$ и $\lambda(x)$ имеют непрерывные производные второго порядка. Тогда, по третьему условию теоремы, из (5.9) следует, что $\tau(x)$ обладает непрерывной производной третьего порядка. Это обстоятельство позволяет провести все рассуждения § 3, 4 настоящей главы и убедиться в непрерывности производных $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$.

Проверим выполнимость последнего равенства из третьего условия задачи M. Исключим функцию ν из (5.4) и (5.5):

$$\tau'(x) - \tau''(x) = 2\frac{d}{dx}\psi\left[\delta(x)\right] - \left\{\tau'\left[\lambda(x)\right] + \tau''\left[\lambda(x)\right]\right\}\frac{d}{dx}\lambda(x).$$

Интегрируя это уравнение и учитывая (5.3), запишем

$$\tau(x) - \tau'(x) = 2\psi\left[\delta(x)\right] - \tau\left[\lambda(x)\right] - \tau'\left[\lambda(x)\right].$$

Отсюда получим

$$\tau\left[x-\gamma(x)\right] + \tau\left\{\lambda\left[x-\gamma(x)\right]\right\} - \tau'\left[x-\gamma(x)\right] + \\ + \tau'\left\{\lambda\left[x-\gamma(x)\right]\right\} - 2\psi\left\{\delta\left[x-\gamma(x)\right]\right\} = 0. \qquad (5.13)$$

Представим теперь решение задачи M в G_2 по формуле Даламбера:

$$U(x, y) = \frac{\tau(x-y) - \tau(x+y)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\Big(\tau'(\alpha) + \left\{\tau'\left[\lambda(\alpha)\right] + \right. \\ \left. + \tau''\left[\lambda(\alpha)\right]\right\}\frac{d}{d\alpha}\lambda(\alpha) - 2\frac{d}{d\alpha}\psi\left[\delta(\alpha)\right]\Big)d\alpha.$$

Отсюда

$$U(x, y) = \tau(x+y) - \frac{1}{2}\left\{\tau\left[\lambda(x-y)\right] - \tau\left[\lambda(x+y)\right]\right\} - \\ - \frac{1}{2}\left\{\tau'\left[\lambda(x-y)\right] - \tau'\left[\lambda(x+y)\right]\right\} + \psi\left[\delta(x-y)\right] - \psi\left[\delta(x+y)\right].$$

На границе L имеем

$$U(x, y)\big|_h = \tau\left[x-\gamma(x)\right] - \frac{1}{2}\tau\left\{\delta\left[x+\gamma(x)\right] - \gamma\left[\delta(x+\gamma(x))\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\tau\Big\{\lambda\left[x-\gamma(x)\right]\Big\}-\frac{1}{2}\tau'\Big\{\delta\left[x+\gamma(x)\right]-\gamma\Big[\delta\left(x+\gamma(x)\right)\Big]\Big\}+$$

$$+\frac{1}{2}\tau'\Big\{\lambda\left[x-\gamma(x)\right]\Big\}+\psi\Big\{\delta\left[x+\gamma(x)\right]\Big\}-\psi\Big\{\delta\left[x-\gamma(x)\right]\Big\}.$$

Учитывая, что $\delta[x+\gamma(x)]=x$, запишем

$$U(x,\ y)\big|_h=\frac{1}{2}\tau\left[x-\gamma(x)\right]+\frac{1}{2}\tau\Big\{\lambda\left[x-\gamma(x)\right]\Big\}-$$

$$-\frac{1}{2}\tau'\left[x-\gamma(x)\right]+\frac{1}{2}\tau'\Big\{\lambda\left[x-\gamma(x)\right]\Big\}-\psi\Big\{\delta\left[x-\gamma(x)\right]\Big\}+\psi(x).$$

Отсюда благодаря (5.13) получим

$$U(x,\ y)\big|_h=\psi(x).$$

Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что для уравнения (1.1) изучены также задачи с разрывными условиями склеивания (см. формулу (3.1) гл. I) и другие обобщения задачи T (см. [46]). Некоторые краевые задачи для более общих гиперболо-параболических уравнений исследованы в работах [9, 43].

Глава IV

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В области $R\{0 < x < 1,\ 0 < y \leqslant h\}$ рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(Qu) = f(x,\ y;\ u,\ u_x,\ u_{xx}) \tag{1.1}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y}(Qu) = f(x,\ y;\ u,\ u_x,\ u_{xx},\ u_y,\ u_{xy}), \tag{1.2}$$

где

$$Q \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}.$$

Функцию $u(x, y)$ будем называть регулярным решением уравнения (1.1) или (1.2), если она обладает непрерывными производными, входящими в это уравнение, и удовлетворяет ему.

Сформулируем задачи для уравнений (1.1), (1.2).

Задача A. Определить регулярное в области R решение уравнения (1.1), непрерывное в замкнутой области $\overline{R}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{array}{c} u\big|_{x=0} = \varphi_1(y),\ u\big|_{x=1} = \varphi_2(y),\ u_x\big|_{x=0} = \varphi_3(y),\ 0 \leqslant y \leqslant h \\ u\big|_{y=0} = F(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{array}\right\}, \tag{1.3}$$

где φ_1, φ_2, φ_3 и F — заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_1(0) = F(0),\ \varphi_2(0) = F(1),\ \varphi_3(0) = F'(0).$$

Задача A^*. Определить регулярное в области R решение уравнения (1.1), непрерывное в замкнутой области $\overline{R}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{array}{c} u_x\big|_{x=0} = \varphi_1(y),\ u_x\big|_{x=1} = \varphi_2(y),\ u\big|_{x=x_0} = \varphi_3(y) \\ 0 \leqslant x_0 \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant h \\ u\big|_{y=0} = F(x),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{array}\right\}, \tag{1.4}$$

где φ_1, φ_2, φ_3 и F — заданные гладкие функции;

$$\varphi_1(0)=F'(0),\ \varphi_2(0)=F'(1),\ \varphi_3(0)=F(x_0).$$

Задача P. Определить регулярное в области R решение уравнения (1.2), непрерывное в замкнутой области $\overline{R}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u\big|_{y=0}=F(x),\ u_y\big|_{y=0}=\Phi(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ u\big|_{x=0}=\varphi_1(y),\ u\big|_{x=1}=\varphi_2(y),\ 0\leqslant y\leqslant h\end{aligned}\right\}, \tag{1.5}$$

где φ_1, φ_2, F и Φ — заданные гладкие функции;

$$\varphi_1(0)=F(0),\ \varphi_1'(0)=\Phi(0),\ \varphi_2(0)=F(1),\ \varphi_2'(0)=\Phi(1).$$

Отметим, что задача P исследована Б. Пини [101], причем решение задачи получено с помощью специально построенных потенциалов и функции Грина. Ниже будет показано, что результаты работы [101] могут быть получены исходя из известной функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Для решения же задачи A, являющейся для уравнения (1.1) аналогом задачи P, применяется метод, использованный в работе [101]: строятся потенциалы и функция Грина.

§ 2. ЗАДАЧА A

1. Решение задачи A для однородного уравнения (1.1). При исследовании краевых задач для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(Qv)=0 \tag{2.1}$$

важную роль играет тот факт, что любое регулярное решение $v(x,y)$ уравнения (2.1) может быть представлено в виде

$$v(x,y)=v_1(x,y)+\omega(y), \tag{2.2}$$

где $v_1(x,y)$ — регулярное решение уравнения

$$v_{1xx}(x,y)-v_{1y}(x,y)=0, \tag{2.3}$$

а $\omega(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Доказательство этого факта не представляет особой трудности. Действительно, пусть $v(x,y)$ — регулярное решение уравнения (2.1); тогда

$$Qv=\omega_1(y), \tag{2.4}$$

где $\omega_1(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Очевидно, что функция

$$\omega(y)=-\int_a^y\omega_1(t)\,dt,$$

где a — произвольная точка рассматриваемой области, есть регулярное решение уравнения (2.4). Следовательно, имеет место представление (2.2). И, наоборот, функция $v(x, y)$, представленная в виде (2.2), где $v_1(x, y)$ — регулярное решение уравнения (2.3), а $\omega(y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, будет регулярным решением уравнения (2.1), что и требовалось доказать.

Заметим, что любая константа является решением уравнения (2.3). Учитывая это обстоятельство, при рассмотрении задачи A без ограничения общности можно предполагать, что в представлении (2.2) произвольная функция $\omega(y)$ подчинена условию

$$\omega(0) = 0. \qquad (2.5)$$

Единственность решения задачи (2.1), (1.3) следует из представления решения и принципа экстремума для уравнения теплопроводности. Однородная задача (2.1), (1.3) в силу представления (2.2) и на основании (2.5) редуцируется к задаче нахождения регулярного в области R решения $v_1(x, y)$ уравнения (2.3), удовлетворяющего условиям

$$v_1\Big|_{y=0} = 0,\ v_1\Big|_{x=0} = -\omega(y),\ v_1\Big|_{x=1} = -\omega(y),\ v_{1x}\Big|_{x=0} = 0. \qquad (2.6)$$

Функция $v_1(x, y)$ не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума внутри области R и при $y=h$. В силу первого условия (2.6) функция $v_1(x, y)$ не имеет отличного от нуля экстремума при $y=0$. Пусть положительный максимум (отрицательный минимум) достигается в некоторой точке отрезка $0<y\leqslant h$ при $x=0$. Тогда, по известной теореме [48], в этой точке $\frac{\partial v_1}{\partial x}<0\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}>0\right)$, а это противоречит последнему условию из (2.6). Так как функция $v_1(x, y)$ при $x=1$ принимает те же значения функции — $\omega(y)$, что и при $x=0$, то она не достигает отличного от нуля экстремума и при $x=1$. Тогда $v_1(x, y)\equiv 0$ в $\overline{R}$, стало быть, $\omega(y)\equiv 0$ в $0\leqslant y\leqslant h$. Следовательно, $v(x, y)\equiv 0$ в $\overline{R}$.

При доказательстве существования решения задачи A для уравнения (2.1) заданную функцию $F(x)$ и ее производную продолжим из $0\leqslant x\leqslant 1$ на отрезок $[x_0, x_1]$, где $x_0<0$, $x_1>1$ по непрерывности.

Приступая к решению задачи (2.1), (1.3), заметим, что функция

$$v_0(x, y) = \varphi_1(y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{x_0}^{x_1} F(\xi)\left[V_x(x, y; \xi, 0) - V_x(0, y; \xi, 0)\right] d\xi \qquad (2.7)$$

удовлетворяет уравнению (2.1) и условиям

$$v_0\Big|_{y=0} = F(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ v_0\Big|_{x=0} = \varphi_1(y),\ 0\leqslant y\leqslant h,$$

где

$$V(x, y; \xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}} e^{-\frac{t^2}{4}} dt, \ y > \eta. \tag{2.8}$$

Очевидно, что

$$\lim_{y-\eta \to +0} V(x, y; \xi, \eta) = \begin{cases} 2\sqrt{\pi} & \text{при } x > \xi, \\ \sqrt{\pi} & \text{при } x = \xi, \\ 0 & \text{при } x < \xi. \end{cases}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться более тонкими свойствами решения задачи (2.1), (1.3). Поэтому изучим некоторые дифференциальные свойства функции $v_0(x, y)$, определенной формулой (2.7).

Пусть $0<\alpha$, $\beta=\text{const}<1$; через $H^{(\alpha, \beta)}$ обозначим класс функций $\psi(x, y)$, удовлетворяющих условию Гёльдера по переменному x с показателем α, а по переменному y с показателем β:

$$H^{(\alpha, 0)} = H^{(\alpha)}, \ H^{(0, \beta)} = H^{(\beta)}.$$

Лемма 1. Если $F'''(x) \in H^{(\alpha)}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\varphi_1'(y) \in H^{(\alpha/2)}$ при $0 \leqslant y \leqslant h$, то:

1) $v_{0y}(1, y), v_{0xy}(0, y) \in H^{(\alpha/2)}$ при $0 \leqslant y \leqslant h$;

2) $v_0(x, y), v_{0x}(x, y), v_{0xx}(x, y), v_{0y}(x, y) \in H^{(\alpha, \alpha/2)}$ в R.

При доказательстве леммы 1 без ограничения общности можно считать, что

$$F(0) = \varphi_1(0) = F(1) = \varphi_2(0) = 0, \ F'(0) = \varphi_3(0) = 0, \ F'(1) = 0. \tag{2.9}$$

Действительно, если это не так, то с самого начала мы могли бы вместо функции $u(x, y)$ рассмотреть функцию

$$W(x, y) = u(x, y) - u_0(x, y),$$

где

$$u_0(x, y) = [F'(0) + 2F(0) + F'(1) - 2F(1)](x^3 + 6xy) + \\ + [3F(1) - F'(1) - 2F'(0) - 3F(0)]x^2 + F'(0)x + F(0).$$

Тогда соответствующие граничные условия для функции $W(x, y)$ будут удовлетворять условиям (2.9).

Доказательство утверждения 1) леммы 1 проведем для производной $v_{0xy}(0, y)$; принадлежность $v_{0y}(1, y)$ к указанному классу доказывается аналогично.

Так как

$$\frac{\partial V(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} = U(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}, \ y > \eta, \tag{2.10}$$

то, как известно [20],

$$\left|\frac{\partial^{i+j}U}{\partial x^i\partial y^j}\right| = \left|\frac{\partial^{i+j}U}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j}\right| = \left|\frac{\partial^{i+j+1}V}{\partial x^{i+1}\partial y^j}\right| = \left|\frac{\partial^{i+j+1}V}{\partial x\partial\xi^i\,\partial\eta^j}\right| <$$

$$< \frac{C}{(y-\eta)^{\frac{i+2j+1}{2}}}\exp\left[-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right],\ i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \dots, \qquad (2.11)$$

$$C=\text{const}>0,\ 0<c=\text{const}<1.$$

Учитывая (2.9) и (2.10), из (2.7) получаем

$$v_{0xy}(0,\ y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{x_0}^{x_1} F(\xi)\,\frac{\partial^3 V(0,\ y;\ \xi,\ 0)}{\partial y\partial x^2}\,d\xi =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{x_0}^{x_1} F(\xi)\,\frac{\partial^4 V(0,\ y;\ \xi,\ 0)}{\partial x\partial\xi^3}\,d\xi = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\Big[F''(x_1)\,U(0,\ y;\ x_1,\ 0) -$$

$$- F''(x_0)\,U(0,\ y;\ x_0,\ 0)\Big] + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{x_0}^{x_1} F'''(\xi)\,U(0,\ y;\ \xi,\ 0)\,d\xi =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\Big[F''(x_1)\,U(0,\ y;\ x_1,\ 0) - F''(x_0)\,U(0,\ y;\ x_0,\ 0)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{x_0}^{x_1} F'''(0)\,U(0,\ y;\ \xi,\ 0)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F'''(\xi) - F'''(0)\right]U(0,\ y;\ \xi, 0) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\left[I_1(y) - I_2(y) - I_3(y)\right].$$

Пусть $\Delta y > 0$. Тогда

$$\Delta_y I_3(y) \equiv I_3(y+\Delta y) - I_3(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F'''(\xi) - F'''(0)\right]U(0,\ y +$$

$$+ \Delta y;\ \xi,\ 0)\,d\xi - \int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F'''(\xi) - F'''(0)\right]U(0,\ y;\ \xi,\ 0)\,d\xi.$$

Если $y>\Delta y$, то

$$\Delta_y I_3(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left[F'''(\xi) - F'''(0)\right]\left[U(0,\ y+\Delta y;\ \xi,\ 0) - U(0,\ y;\ \xi,\ 0)\right]d\xi =$$

$$= \Delta y\int\limits_{x_1}^{x_1}\left[F'''(\xi) - F'''(0)\right]U_y(0,\ y+\theta\Delta y;\ \xi,\ 0)\,d\xi,$$

где $0<\theta<1$. Через K обозначим различные постоянные числа. По условию леммы 1,

$$\left|F'''(\xi_1)-F'''(\xi_2)\right|<K\left|\xi_1-\xi_2\right|^{\alpha},$$

поэтому

$$\left|\Delta_y I_3\right|<\Delta y K_1\int_{x_0}^{x_1}\left|\xi\right|^{\alpha}\left|U_y(0,\ y+\theta\Delta y;\ \xi,0)\right|d\xi.$$

Теперь, воспользовавшись оценками (2.11) и неравенством

$$X^{\gamma}e^{-X}<Me^{-qX}, \tag{2.12}$$

где

$$X\geqslant 0,\ \gamma=\text{const}\geqslant 0,\ M=\text{const}>0,\ 0<q=\text{const}<1,$$

будем иметь

$$|\Delta_y I_3(y)|\leqslant \Delta y K_2 C\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{c\xi^2}{4(y+\theta\Delta y)}\right)^{\alpha/2}e^{-c\frac{\xi^2}{4(y+\theta\Delta y)}}\frac{d\xi}{(y+\theta\Delta y)^{\frac{3-\alpha}{2}}}<$$

$$<\Delta y K_2 CM\int_{x_0}^{x_1}\frac{e^{-q\frac{\xi^2}{4(y+\theta\Delta y)}}}{(y+\theta\Delta y)^{\frac{3-\alpha}{2}}}d\xi=\Delta y 2K_2CM\int_{\frac{x_0}{4\sqrt{y+\theta\Delta y}}}^{\frac{x_1}{4\sqrt{y+\theta\Delta y}}}\frac{e^{-qt^2}dt}{(y+\theta\Delta y)^{\frac{2-\alpha}{2}}}\leqslant$$

$$\leqslant\Delta y 2K_2CM\int_{-\infty}^{+\infty}(y+\theta\Delta y)^{\frac{\alpha-2}{2}}e^{-qt^2}\,dt$$

или, если обозначим

$$C_1=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-qt^2}dt,$$

то

$$\left|\Delta_y I_3\right|<\Delta y 2K_2CMC_1(y+\theta\Delta y)^{\frac{\alpha-2}{2}}\leqslant K(\Delta y)^{\alpha/2}.$$

Теперь пусть $y\leqslant\Delta y$; тогда

$$\left|I_3'(y)\right|=\left|\int_{x_0}^{x_1}\left[F'''(\xi)-F'''(0)\right]U(0,\ y+\Delta y;\ \xi,\ 0)\,d\xi\right|<$$

$$<K_2CM\int_{x_0}^{x_1}\frac{e^{-q\frac{\xi^2}{4(y+\Delta y)}}}{(y+\Delta y)^{\frac{1-\alpha}{2}}}d\xi\leqslant 2K_2CMC_1(y+\Delta y)^{\alpha/2}\leqslant K(\Delta y)^{\alpha/2}.$$

Аналогично будем иметь

$$|I_3''(y) = |\int_{x_0}^{x_1} [F'''(\xi) - F'''(0)]\, U(0, y; \xi, 0)\, a\xi| <$$

$$< 2K_2CMC_1y^{\alpha/2} \leqslant K(\Delta y)^{\alpha/2}.$$

Таким образом,

$|\Delta_y I_3| < K(\Delta y)^{\alpha/2}$ при $0 \leqslant y \leqslant h$.

Легко видеть, что

$$I_1(y),\ I_2(y) \in H^{(1)} \text{ при } 0 \leqslant y \leqslant h.$$

Следовательно,

$$v_{0xy}(0, y) \in H^{(\alpha/2)}.$$

Доказательство утверждения 2) леммы 1 проведем для производной v_{0xx}. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Из (2.7) имеем

$$v_{0xx}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x_1} F(\xi)\, V_{xxx}(x, y; \xi, 0)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x_1} F(\xi)\, V_{x\xi\xi}(x, y; \xi, 0)\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x_1} F''(x)\, U(x, y; \xi, 0) d\xi -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x_1} [F''(x) - F''(\xi)]\, U(x, y; \xi, 0)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} [I_4(x, y) - I_5(x, y)].$$

Нетрудно заметить, что $I_4(x, y) \in H^{(\alpha, 1)}$ в R.

Покажем, что функция $I_5(x, y)$ также принадлежит классу $H^{(\alpha, \alpha/2)}$:

$$\Delta_x I_5(x, y) \equiv I_5(x + \Delta x, y) - I_5(x, y) = \int_{x_0}^{x_1} [F''(x + \Delta x) - F''(\xi)] \times$$

$$\times U(x + \Delta x, y; \xi, 0)\, d\xi - \int_{x_0}^{x_1} [F''(x) - F''(\xi)]\, U(x, y; \xi, 0)\, d\xi =$$

$$= \Delta x \int_{x_0}^{x_1} [F''(x + \theta\Delta x) - F''(\xi)]\, U_x(x + \theta\Delta x, y; \xi, 0)\, d\xi +$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left[F''(x+\theta\Delta x)-F''(x)\right]U(x, y; \xi, 0)\,d\xi+\int_{x_0}^{x_1}\left[F''(x+\Delta x)-\right.$$

$$\left.-F''(x+\theta\Delta x)\right]\times U(x+\Delta x, y; \xi, 0)\,d\xi\equiv I_5'+I_5''+I_5''',\ \ 0<\theta<1.$$

Оценим каждое слагаемое этого выражения:

$$\left|I_5''\right|\leqslant\left|F''(x+\theta\Delta x)-F''(x)\right|\left|\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}}d\xi\leqslant\right.$$

$$\leqslant K_2C_1\left|\theta\Delta x\right|^\alpha<K\left|\Delta x\right|^\alpha.$$

Аналогично

$$\left|I_5'''\right|<K\left|\Delta x\right|^\alpha.$$

Пусть теперь $y>(\Delta x)^2$; тогда

$$\left|I_5'\right|<\left|\Delta x\right|CK_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{|x+\theta\Delta x-\xi|^\alpha}{y}e^{-c\frac{(x+\theta\Delta x-\xi)^2}{4y}}d\xi<$$

$$<\left|\Delta x\right|2CK_1C_1y^{\frac{\alpha-1}{2}}<K\left|\Delta x\right|^\alpha.$$

Если $y\leqslant(\Delta x)^2$, то

$$\Delta_xI_5=\int_{x_0}^{x_1}\left[F''(x+\Delta x)-F''(\xi)\right]U(x+\Delta x, y; \xi, 0)\,d\xi-$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\left[F''(x)-F''(\xi)\right]U(x, y; \xi, 0)\,d\xi=\overline{I}_5+\overline{\overline{I}}_5,$$

$$\left|\overline{I}_5\right|<K_1M\int_{x_0}^{x_1}y^{\frac{\alpha-1}{2}}e^{-q\frac{(x+\Delta x-\xi)}{4y}}d\xi<2K_1MC_1y^{\alpha/2}<K\left|\Delta x\right|^\alpha.$$

Аналогично получаем

$$\left|\overline{\overline{I}}_5\right|<K\left|\Delta x\right|^\alpha.$$

Итак,

$$\left|\Delta_xv_{0xx}\right|<K\left|\Delta x\right|^\alpha$$

равномерно относительно y.

Теперь покажем, что $\frac{\partial^2v_0}{\partial x^2}\in H^{(\alpha/2)}$ по переменной y:

$$\Delta_yI_5\equiv I_5(x, y+\Delta y)-I_5(x, y)=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left[F''(x)-F''(\xi)\right]\left[U(x, y+\Delta y; \xi, 0)-U(x, y; \xi, 0)\right]d\xi.$$

Пусть $y > \Delta y$; тогда

$$|\Delta_y I_5| = |\Delta y \int_{x_0}^{x_1} [F''(x) - F''(\xi)]\, U_y(x, y + \theta\Delta y; \xi, 0)\, d\xi| <$$

$$< \Delta y C K_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{|x-\xi|^\alpha}{(y+\theta\Delta y)^{3/2}} e^{-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y+\theta\Delta y)}} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \Delta y 2 C K_2 C_1 (y + \theta\Delta y)^{\frac{\alpha-2}{2}} \leqslant K(\Delta y)^{\alpha/2}.$$

Если $y \leqslant \Delta y$, то

$$|\overline{I}_5'| = |\int_{x_0}^{x_1} [F''(x) - F''(\xi)]\, U(x, y + \Delta y; \xi, 0)\, d\xi| <$$

$$< K_2 M \int_{x_0}^{x_1} \frac{e^{-q\frac{(x-\xi)^2}{4(y+\Delta y)}}}{(y+\Delta y)^{\frac{1-\alpha}{2}}} d\xi \leqslant 2K_2 M C_1 (y+\Delta y)^{\alpha/2} \leqslant K(\Delta y)^{\alpha/2}.$$

Аналогично получаем

$$|\overline{I}_5''| = |\int_{x_0}^{x_1} [F''(x) - F''(\xi)] \cdot U(x, y; \xi, 0)\, d\xi| < K(\Delta y)^{\alpha/2}.$$

Таким образом, мы показали, что

$$v_{0xx}(x, y) \in H^{(\alpha,\ \alpha/2)} \text{ в } R.$$

Лемма 1 доказана.

Решение задачи (2.1), (1.3) будем искать в виде

$$v(x, y) = v^*(x, y) + v_0(x, y). \tag{2.13}$$

Тогда для функции $v^*(x, y)$ имеем задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(Qv^*) = 0 \\ &v^*\big|_{y=0} = 0, \quad v^*\big|_{x=0} = 0 \\ &v^*\big|_{x=1} = \varphi_2(y) - v_0\big|_{x=1} = F_1(y),\ v_x^*\big|_{x=0} = \varphi_3(y) - \\ &\qquad - v_{0x}\big|_{x=0} = F_2(y) \end{aligned}\right\}. \tag{2.14}$$

Из леммы 1 следует, что $F_1'(y)$, $F_2'(y) \in H^{(\alpha/2)}$ при $0 \leqslant y \leqslant h$, если $\varphi_2'(y), \varphi_3'(y) \in H^{\alpha/2}$.

Положим

$$v^*(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \Big\{ \left[-U(x, y; 0, \eta) + U(0, y; 0, \eta) \right] \beta_1(\eta) +$$

$$+ \left[U_\xi(0, y; 1, \eta) - U_\xi(x, y; 1, \eta) \right] \beta_2(\eta) \Big\} d\eta. \qquad (2.15)$$

Функция $v^*(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и условиям $v^*(0, y) = v^*(x, 0) = 0$. Удовлетворяя последним двум условиям из (2.14), получаем систему интегральных уравнений Вольтерра

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1(y) + \int_0^y K_1(y, \eta) \beta_2(\eta)\, d\eta = F_2(y) \\ &-\beta_2(y) + \int_0^y K_2(y, \eta) \beta_1(\eta)\, d\eta - \int_0^y K_3(y, \eta) \beta_2(\eta)\, d\eta = \\ &= F_1(y) \end{aligned}\right\}, \qquad (2.16)$$

где

$$K_1(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{(y-\eta)^{3/2}} e^{-\frac{1}{4(y-\eta)}} + \frac{1}{4(y-\eta)^{5/2}} e^{-\frac{1}{4(y-\eta)}} \right];$$

$$K_2(y, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{(y-\eta)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4(y-\eta)}} + \frac{1}{(y-\eta)^{1/2}} \right];$$

$$K_3(y, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}} e^{-\frac{1}{4(y-\eta)}}.$$

При сделанных предположениях относительно граничных данных рассматриваемой задачи система уравнений (2.16) допускает единственное решение, такое, при котором $\beta_1'(y)$ и $\beta_2'(y)$ будут принадлежать классу $H^{(\alpha/2)}$. Очевидно, что

$$\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0, \qquad (2.17)$$

если $F_1(0) = F_2(0) = 0$. Последние равенства всегда выполнены в силу (2.9). В самом деле,

$$F_1(y) = \varphi_2(y) - v_0\big|_{x=1} = \varphi_2(y) - \varphi_1(y) -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x_1} F(\xi) \left[V_x(1, y; \xi, 0) - V_x(0, y; \xi, 0) \right] d\xi,$$

где последний интеграл при $y \to +0$ стремится к $[F(1)-F(0)]$. Тогда из условий согласования вытекает, что $F_1(0)=0$. Аналогично будем иметь $F_2(0)=0$.

Лемма 2. Если $\varphi_2'(y)$, $\varphi_3'(y) \in H^{(\alpha/2)}$ при $0 \leqslant y \leqslant h$, то функция $v^*(x, y)$, определенная формулой (2.15), и ее производные $v_x^*(x, y)$, $v_{xx}^*(x, y)$, $v_y^* \in H^{(\alpha, \alpha/2)}$ в R.

Докажем, что $v_{xx}^*(x, y) \in H^{(\alpha, \alpha/2)}$ (остальные утверждения леммы 2 доказываются аналогично):

$$v_{xx}^*(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^y U_{xx}(x, y; 0, \eta)\,\beta_1(\eta)\,d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_0^y U_{xx\xi}(x, y; 1, \eta)\,\beta_2(\eta)\,d\eta\right] =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[v_1^*(x, y) + v_2^*(x, y)\right].$$

Учитывая равенства (2.17), имеем

$$v_2^*(x, y) = \int_0^y U_{xx\xi}(x, y; 1, \eta)\,\beta_2(\eta) = -\int_0^y U_{x\eta}(x, y; 1, \eta)\,\beta_2(\eta)\,d\eta =$$

$$= \int_0^y \beta_2'(y)\,U_x(x, y; 1, \eta)\,d\eta - \int_0^y \left[\beta_2'(y) - \beta_2'(\eta)\right] U_x(x, y; 1, \eta)\,d\eta =$$

$$= I_6(x, y) - I_7(x, y).$$

Очевидно, что $I_6(x, y) \in H^{(1, \alpha/2)}$, так как

$$I_6(x, y) = \beta_2'(y)\int_0^y U_x(x, y; 1, \eta)\,d\eta =$$

$$= -\beta_2'(y)\int_0^y V_\eta(x, y; 1, \eta)\,d\eta = \beta_2'(y)\,V(x, y; 1, 0).$$

Пусть $y > (\Delta x)^2$; тогда

$$\Delta_x I_7(x, y) = \int_0^y \left[\beta_2'(y) - \beta_2'(\eta)\right] U_x(x + \Delta x, y; 1, \eta)\,d\eta -$$

$$- \int_0^y \left[\beta_2'(y) - \beta_2'(\eta)\right] \times U_x(x, y; 1, \eta)\,d\eta =$$

$$= \int_0^{y-(\Delta x)^2} \left[\beta_2'(y) - \beta_2'(\eta)\right]\left[U_x(x + \Delta x, y; 1, \eta) - \right.$$

$$- U_x(x, y; 1, \eta)\Big| d\eta + \int\limits_{y-(\Delta x)^2}^{y} \Big[\beta_2'(y) - \beta_2'(\eta)\Big] U_x(x+\Delta x, y; 1, \eta) d\eta -$$

$$- \int\limits_{y-(\Delta x)^2}^{y} \Big[\beta_2'(y) - \beta_2'(\eta)\Big] U_x(x, y; 1, \eta)\, d\eta =$$

$$= I_7'(xy) + I_7''(x, y) + I_7'''(x, y).$$

Оценим

$$\left|I_7'\right| \leqslant |\Delta x| \int\limits_0^{y-(\Delta x)^2} \left|\beta_2'(y) - \beta_2'(\eta)\right| U_{xx}(x+\theta\Delta x, y; 1, \eta)\left| d\eta < \right.$$

$$< |\Delta x| K_1 C \int\limits_0^{y-(\Delta x)^2} \frac{|y-\eta|^{\alpha/2}}{(y-\eta)^{3/2}} e^{-c\frac{(x+\theta\Delta x-1)^2}{4(y-\eta)}} d\eta \leqslant$$

$$\leqslant |\Delta x| K_2 \int\limits_0^{y-(\Delta x)^2} (y-\eta)^{\frac{\alpha-3}{2}} d\eta \leqslant K|\Delta x|^\alpha.$$

Нетрудно заметить, что

$$\left|I_7''\right|, \left|I_7'''\right| < K|\Delta x|^\alpha.$$

Если $y \leqslant (\Delta x)^2$, то

$$\left|\overline{I}_7'\right| = \left|\int\limits_0^y \Big[\beta_2'(y) - \beta_2'(\eta)\Big] U_x(x+\Delta x, y; 1, \eta)\, d\eta\right| <$$

$$< K_1 C \int\limits_0^y (y-\eta)^{\frac{\alpha-2}{2}} e^{-c\frac{(x+\Delta x-1)^2}{4(y-\eta)}} d\eta \leqslant K_3 y^{\alpha/2} \leqslant K|\Delta x|^\alpha.$$

Аналогично

$$\left|\overline{I}_7''\right| = \left|\int\limits_0^y \Big[\beta_2'(y) - \beta_2'(\eta)\Big] U_x(x, y; 1, \eta)\, d\eta\right| < K|\Delta x|^\alpha.$$

Следовательно,

$\left|\Delta_x \varphi_2^*\right| < K|\Delta x|^\alpha$ равномерно относительно y.

Покажем, что

$$\left|\Delta_y \varphi_2^*\right| < K(\Delta y)^{\alpha/2}$$

равномерно относительно x:

$$\Delta_y I_7 = \int\limits_0^{y-\Delta y} \Big\{\Big[\beta_2'(y+\Delta y) - \beta_2'(\eta)\Big] U_x(x, y+\Delta y; 1, \eta) -$$

$$- \left[\beta_2'(y) - \beta_2'(\eta) \right] U_x(x, y; 1, \eta) \Big\} d\eta +$$

$$+ \int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} \left[\beta_2'(y+\Delta y) - \beta_2'(\eta) \right] U_x(x, y+\Delta y; 1, \eta)\, d\eta -$$

$$- \int_{y-\Delta y}^{y} \left[\beta_2'(y) - \beta_2'(\eta) \right] U_x(x, y; 1, \eta)\, d\eta = \overset{\circ}{I}{}_7' + \overset{\circ}{I}{}_7'' + \overset{\circ}{I}{}_7''' .$$

Для получения оценки при $y > \Delta y$ к первому слагаемому этого выражения прибавляем и из него вычитаем функции вида

$$\int_0^{y-\Delta y} \beta_2'(y+\theta\Delta y) \left[U_x(x, y+\Delta y; 1, \eta) - U_x(x, y; 1, \eta) \right] d\eta;$$

после элементарного вычисления имеем

$$\overset{\circ}{I}{}_7' = \Delta y \int_0^{y-\Delta y} \left[\beta_2'(y+\theta\Delta y) - \beta_2'(\eta) \right] U_{yx}(x, y+\theta\Delta y; 1, \eta)\, d\eta +$$

$$+ \int_0^{y-\Delta y} \left[\beta_2'(y+\Delta y) - \beta_2'(y+\theta\Delta y) \right] U_x(x, y+\Delta y; 1, \eta)\, d\eta -$$

$$- \int_0^{y-\Delta y} \left[\beta_2'(y) - \beta_2'(y+\theta\Delta y) \right] U_x(x, y; 1, \eta)\, d\eta = I_8' + I_8'' + I_8''' .$$

На основании (2.11) получаем оценки

$$\left| I_8' \right|, \left| I_8'' \right|, \left| I_8''' \right| < K (\Delta y)^{\alpha/2} .$$

Аналогично имеем

$$\left| \overset{\circ}{I}{}_7'' \right|, \left| \overset{\circ}{I}{}_7''' \right| < K (\Delta y)^{\alpha/2} .$$

Из полученных оценок следует

$$\left| \Delta_y I_7 \right| < K (\Delta y)^{\alpha/2} .$$

Рассуждая точно так же, как и в предыдущем случае, убеждаемся, что для функции $\Delta_y I_7(x, y)$ эта оценка справедлива и при $y \leqslant \Delta y$.

Следовательно, мы доказали, что

$$v_2^*(x, y) \in H^{(\alpha, \alpha/2)} \text{ в } R.$$

Таким же путем доказывается, что

$$v_1^*(x, y) \in H^{(\alpha, \alpha/2)} \text{ в } R.$$

2. Решение задачи A для неоднородного уравнения (1.1). Теперь решим неоднородное уравнение

$$L(z) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(Qz) = f(x, y) \tag{2.18}$$

при граничных условиях

$$z\big|_{x=0} = \varphi_1(y),\ z\big|_{x=1} = \varphi_2(y),\ z_x\big|_{x=0} = \varphi_3(y),\ 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{2.19}$$
$$z\big|_{y=0} = F(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Для дальнейшего рассмотрения необходимо специальное представление решения задачи (2.18), (2.19) с помощью функции Грина.

Имеет место тождество (предполагаем, что производные, входящие в него, непрерывны)

$$\varphi \frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_{\xi\xi} + \psi_\eta) + \psi \frac{\partial}{\partial \xi}(\varphi_{\xi\xi} - \varphi_\eta) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \eta}(\varphi\psi_\xi) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\varphi_{\xi\xi}\psi + \varphi\psi_{\xi\xi} - \varphi_\eta\psi - \varphi_\xi\psi_\xi). \tag{2.20}$$

Интегрируя тождество (2.20) по области R, имеем

$$\iint\limits_R \left[\varphi \frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_{\xi\xi} + \psi_\eta) + \psi \frac{\partial}{\partial \xi}(\varphi_{\xi\xi} - \varphi_\eta)\right] d\xi d\eta =$$
$$= \oint\limits_\Gamma [\varphi_{\xi\xi}\psi + \varphi\psi_{\xi\xi} - \varphi_\eta\psi - \varphi_\xi\psi_\xi]\, d\eta - [\varphi\psi_\xi]\, d\xi, \tag{2.21}$$

где Γ — граница области R.

Примем теперь за ψ функцию $V(x, y; \xi, \eta)$, которая как функция (ξ, η) при $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$L^*(v) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}(v_{\xi\xi} + v_\eta) = 0; \tag{2.22}$$

в качестве φ берем любое регулярное решение $z(x, y)$ уравнения (2.18).

Заметим, что функция $\frac{\partial V}{\partial \xi} = -U(x, y; \xi, \eta)$, где $U(x, y; \xi, \eta)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности (2.3), становится сингулярной в точке (x, y) и тождественно обращается в нуль при $y = \eta$. Обычным путем (см. [16]) получим

$$z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^y [Vz_{\xi\xi} + V_{\xi\xi}z - Vz_\eta - V_\xi z_\xi]\Big|_{\xi=1} d\eta -$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^y [Vz_{\xi\xi} + V_{\xi\xi}z - Vz_\eta - V_\xi z_\xi]\Big|_{\xi=0} d\eta -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 \left[V_\xi z\right]\Big|_{\eta=0} d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint_R V(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \quad (2.23)$$

Пусть $W(x, y; \xi, \eta)$ — любое регулярное решение уравнения (2.22), а $z(x, y)$ — любое регулярное решение уравнения (2.18). Тогда в формуле (2.21), полагая $\psi = W$ и $\varphi = z$, имеем

$$0 = \int_0^y \left[W z_{\xi\xi} + W_{\xi\xi} z - W z_\eta - W_\xi z_\xi\right]\Big|_{\xi=1} d\eta -$$

$$-\int_0^y W z_{\xi\xi} + W_{\xi\xi} z - W z_\eta - W_\xi z_\xi\Big|_{\xi=0} d\eta -$$

$$-\int_0^1 \left[W_\xi z\right]_{\eta=0} d\xi + \int_0^1 \left[W_\xi z\right]_{\eta=y} d\xi -$$

$$-\iint_R W(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \quad (2.24)$$

Из (2.23) и (2.24) находим, что

$$z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^y \left[(V - W) z_{\xi\xi} + (V_{\xi\xi} - W_{\xi\xi}) z - (V - W) z_\eta -\right.\right.$$

$$\left. - (V_\xi - W_\xi) z_\xi\right]\Big|_{\xi=1} d\eta - \int_0^y \left[(V - W) z_{\xi\xi} + (V_{\xi\xi} - W_{\xi\xi}) z -\right.$$

$$\left. - (V - W) z_\eta - (V_\xi - W_\xi) z_\xi\right]\Big|_{\xi=0} d\eta - \int_0^1 \left[(V_\xi - W_\xi) z\right]\Big|_{\eta=0} d\xi -$$

$$\left. - \int_0^1 \left[W_\xi z\right]\Big|_{\eta=y} d\xi\right\} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint_R (V - W) f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \quad (2.25)$$

Если регулярное решение $W(x, y; \xi, \eta)$ уравнения (2.22) удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{array}{l} W\big|_{\xi=1} = V\big|_{\xi=1}, \quad W_\xi\big|_{\eta=y} = 0 \\ W\big|_{\xi=0} = V\big|_{\xi=0}, \quad W_\xi\big|_{\xi=1} = V_\xi\big|_{\xi=1} \end{array}\right\}, \quad (2.26)$$

то из формулы (2.25) будем иметь

$$z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^y \left[(V_{\xi\xi} - W_{\xi\xi}) z\right]\Big|_{\xi=1} d\eta - \int_0^y \left[(V_{\xi\xi} - W_{\xi\xi}) z -\right.\right.$$

$$- (V_\xi - W_\xi) z_\xi]\Big|_{\xi=0} d\eta - \int_0^1 [(V_\xi - W_\xi) z]\Big|_{\eta=0} d\xi \Bigg\} -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_R (V - W) f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{2.27}$$

или, полагая

$$G^*(x, y;\ \xi, \eta) = V(x, y;\ \xi, \eta) - W(x, y;\ \xi, \eta),$$

формулу (2.27) запишем в виде

$$z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y G^*_{\xi\xi}(x, y;\ 1, \eta)\, \varphi_2(\eta)\, d\eta -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \left[G^*_{\xi\xi}(x, y;\ 0, \eta)\, \varphi_1(\eta) - G^*_\xi(x, y;\ 0, \eta)\, \varphi_3(\eta) \right] d\eta -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 G^*_\xi(x, y;\ \xi, 0)\, F(\xi)\, d\xi -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_R G^*(x, y;\ \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \tag{2.28}$$

Функцию $G^*(x, y;\ \xi, \eta)$ будем называть функцией Грина задачи (2.1), (1.3).

Теперь докажем, что функция $W(x, y;\ \xi, \eta)$, удовлетворяющая уравнению

$$L^* W \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} (W_{\xi\xi} + W_\eta) = 0 \tag{2.29}$$

и граничным условиям (2.26), существует. Тем самым будет доказано существование функции Грина G^*.

Решение задачи (2.29), (2.26) будем искать в виде

$$W(x, y;\ \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^y \left[(U_x(0, y; \xi, \tau) - U_x(0, y;\ 1, \tau))\, \beta(x, y;\ \tau) + \right.$$

$$\left. + (U(1, y;\ \xi, \tau) - U(1, y;\ 1, \tau))\, \beta_2(x, y;\ \tau) \right] d\tau + V(x, y;\ 1, \eta). \tag{2.30}$$

Легко проверить выполнение первых двух условий из (2.26). Удовлетворяя последним двум условиям из (2.26), для определения

$\beta_1(y)$ и $\beta_2(y)$ получаем систему интегральных уравнений типа уравнений Вольтерра

$$\left.\begin{aligned}\beta_1(x, y;\ \eta) - \int_\eta^y K_4(\eta, \tau)\,\beta_1(x, y;\ \tau)\,d\tau + \\ + \int_\eta^y K_5(\eta, \tau)\,\beta_2(x, y;\ \tau)\,d\tau = \Phi_1(x, y;\ \eta) \\ \beta_2(x, y;\ \eta) + \int_\eta^y K_6(\eta, \tau)\,\beta_1(x, y;\ \tau)\,d\tau = \Phi_2(x, y;\ \eta)\end{aligned}\right\}, \tag{2.31}$$

где

$$\Phi_1(x, y;\ \eta) = \int\limits_{\frac{x-1}{\sqrt{y-\eta}}}^{\frac{x}{\sqrt{y-\eta}}} e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt,\quad \Phi_2(x, y;\ \eta) = -\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\,e^{-\frac{(x-1)^2}{4(y-\eta)}}$$

и

$$\left.\begin{aligned}K_4(\eta, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,(\tau-\eta)^{3/2}}\,e^{-\frac{1}{4(\tau-\eta)}} \\ K_5(\eta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{(\tau-\eta)^{1/2}}\,e^{-\frac{1}{4(\tau-\eta)}} - \frac{1}{(\tau-\eta)^{1/2}}\right] \\ K_6(\eta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2(\tau-\eta)^{3/2}}\,e^{-\frac{1}{4(\tau-\eta)}} - \frac{1}{4(\tau-\eta)^{5/2}}\,e^{-\frac{1}{4(\tau-\eta)}}\right]\end{aligned}\right\}. \tag{2.32}$$

Система уравнений (2.31) допускает единственное решение, непрерывное вместе с первой производной.

Пусть граничные условия (1.3) однородны, т. е.

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = F = 0.$$

Тогда из формулы (2.28) вытекает, что решение уравнения (2.18), удовлетворяющее однородным граничным условиям (2.19), имеет вид

$$z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\int_0^1 G^*(x, y;\ \xi, \eta)\,f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{2.33}$$

Можно непосредственно проверить, что функция $z(x, y)$ удовлетворяет как уравнению (2.18), так и нулевым граничным условиям (2.19), если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера по

$f(x, y)$ в области R. Для этого достаточно доказать, что $LW=0$, так как функция

$$z_1(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_R V(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

удовлетворяет уравнению (2.18). Действительно,

$$\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^3} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_R [f(\xi, \eta) - f(x, y)] \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} d\xi d\eta -$$

$$-\frac{f(x, y)}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^y \int\limits_0^1 \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} d\xi d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = -f(x, y) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_R [f(\xi, \eta) -$$

$$-f(x, y)] \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} d\xi d\eta - \frac{f(x, y)}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^y \int\limits_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} d\xi d\eta.$$

Откуда

$$z_{1xxx} - z_{1xy} = f(x, y).$$

Теперь, применяя к левой и правой частям уравнений (2.31) оператор L, получаем

$$(\beta_{1xxx} - \beta_{1xy}) + \int\limits_\eta^y K_4(\eta, \tau)(\beta_{1xxx} - \beta_{1xy}) d\tau +$$

$$+ \int\limits_\eta^y K_5(\eta, \tau)(\beta_{2xxx} - \beta_{2xy}) d\tau = 0,$$

$$(\beta_{2xxx} - \beta_{2xy}) + \int\limits_\eta^y K_6(\eta, \tau)(\beta_{1xxx} - \beta_{1xy}) d\tau = 0.$$

Легко проверить, что $L[\Phi_1] = L[\Phi_2] = 0$. Отсюда в силу единственности решения системы уравнений (2.31) следует, что

$$\beta_{1xxx} - \beta_{1xy} = 0, \quad \beta_{2xxx} - \beta_{2xy} = 0.$$

Следовательно, функция $W(x, y; \xi, \eta)$, представленная формулой (2.30), удовлетворяет уравнению $L[W]=0$.

Далее, согласно свойствам функции Грина, функция $z(x, y)$ (см. формулу (2.33)) удовлетворяет граничным условиям

$$z|_{y=0} = 0, \quad z|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=1} = 0.$$

Покажем, что функция $z(x, y)$ удовлетворяет и условию $z_x=0$ при $x=0$. Для этого достаточно показать, что $G_x^*=0$ при $\xi=0$, так как

$$G_x^*(x, y; \xi, \eta)=G_x^*(\xi, y; x, \eta).$$

Имеем

$$G_x^*(x, y; \xi, \eta)\big|_{\xi=0}=[V_x-W_x]\big|_{\xi=0}=\left[\frac{1}{(y-\eta)^{1/2}}e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(y-\eta)^{1/2}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4(y-\eta)}}\right]-\beta_{1x}(x, y; \eta)+$$

$$+\int_\eta^y K_4(\eta, \tau)\beta_{1x}(x, y; \tau)\,d\tau-\int_\eta^y K_5(\eta, \tau)\beta_{2x}(x, y; \tau)\,d\tau. \qquad (2.34)$$

Дифференцируя по x первое уравнение системы (2.31), находим

$$\beta_{1x}(x, y; \tau)-\int_\eta^y K_4(\eta, \tau)\beta_{1x}(x, y; \tau)\,d\tau+\int_\eta^y K_5(\eta, \tau)\beta_{2x}(x, y; \tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}-\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4(y-\eta)}}. \qquad (2.35)$$

Сравнение равенств (2.34) и (2.35) дает $G_x^*=0$ при $\xi=0$. Для функции $z(x, y)$, определенной формулой (2.33), справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Если $f(x, y)\in H^{(0,\beta)}$, где $\frac{1}{2}\leqslant\beta<1$, в области R, то z, z_x, z_{xx}, $z_y\in H^{(\alpha, 1/2)}$ в R; если же функция $f(x, y)$ является только ограниченной функцией в R, то z, z_x, $z_{xx}\in H^{(\alpha, \alpha/2)}$.

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 2. При этом необходимо воспользоваться оценками функции Грина

$$\left|\frac{\partial^{i+j}G^*}{\partial x^i\,\partial y^j}\right|<\frac{C}{(y-\eta)^{\frac{i+2j}{2}}}e^{-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}, \qquad (2.36)$$

где $C=\text{const}>0$, $0<c=\text{const}<1$; $i, j=0, 1, 2, \ldots$, и неравенством (2.12).

Доказательство леммы 3 приведем для производной z_{xx}. Из (2.33) имеем

$$z_{xx}=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\int_0^1 G_{xx}^*(x, y; \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Вычислим

$$\Delta_x z_{xx} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\int_0^1 G^*_{xx}(x+\Delta x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\int_0^1 G^*_{xx}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = q_1(x, y) + q_2(x, y).$$

Если $y > (\Delta x)^2$ и $0 < \theta < 1$, то

$$\Delta_x z_{xx} = -\frac{\Delta x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{y-(\Delta x)^2}\int_0^1 \frac{\partial^3 G^*(x+\theta\Delta x, y; \xi, \eta)}{\partial x^3} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{y-(\Delta x)^2}^{y}\int_0^1 G^*_{xx}(x+\Delta x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{y-(\Delta x)^2}^{y}\int_0^1 G^*_{xx}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = q'(x, y) +$$

$$+ q''(x, y) + q'''(x, y).$$

По условию леммы, $|f(x, y)| < N$, поэтому

$$|q'| < \frac{N|\Delta x|}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{y-(\Delta x)^2}\int_0^1 \left|\frac{\partial^3 G^*(x+\theta\Delta x, y; \xi, \eta)}{\partial x^3}\right| d\xi\, d\eta.$$

Отсюда, пользуясь оценками (2.36), будем иметь

$$|q'| < \frac{|\Delta x| N C}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{y-(\Delta x)^2}\int_0^1 \frac{1}{(y-\eta)^{3/2}} e^{-c\frac{(x+\theta\Delta x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= K_1|\Delta x|\int_0^{y-(\Delta x)^2}\int_{\frac{x+\theta\Delta x-1}{2\sqrt{y-\eta}}}^{\frac{x+\theta\Delta x}{2\sqrt{y-\eta}}} \frac{e^{-ct^2}}{y-\eta}\, d\eta\, dt \leqslant K_2\,\delta\,|\Delta x|\int_0^{y-(\Delta x)^2}\frac{d\eta}{y-\eta},$$

где

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ct^2}\, dt, \tag{2.37}$$

или

$$|q'| < K_1\,\delta\,|\Delta x|^\alpha \int_0^{y-(\Delta x)^2}\frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{1+\alpha}{2}}} \leqslant K|\Delta x|^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$$

и аналогично

$$|q''|, |q'''| < K_2 \delta \int\limits_{y-(\Delta x)^2}^{y} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} \leqslant K|\Delta x|.$$

При $y \leqslant (\Delta x)^2$ нетрудно показать, что

$$|q_1|, \ |q_2| < K|\Delta x|^{\alpha}.$$

Предполагая $\Delta y > 0$, имеем

$$\Delta_y \ z_{xx} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{y+\Delta y} \int\limits_0^1 G^*_{xx}(x, y+\Delta y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^y \int\limits_0^1 G^*_{xx}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \overline{q}_1(x, y) + \overline{q}_2(x, y).$$

Если $y \leqslant \Delta y$, то

$$|\overline{q}_1| < NC \int\limits_0^{y+\Delta y} \int\limits_0^1 \frac{1}{(y+\Delta y-\eta)} e^{-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\, d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \delta NC \int\limits_0^{y+\Delta y} \frac{d\eta}{\sqrt{y+\Delta y-\eta}} \leqslant K(\Delta y)^{1/2}.$$

Аналогично

$$|\overline{q}_2| < K(\Delta y)^{1/2}.$$

Теперь пусть $y > \Delta y$; тогда

$$\Delta_y \ z_{xx} = -\frac{\Delta y}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{y-\Delta y} \int\limits_0^1 \frac{\partial^3 G^*(x, y+\theta\Delta y; \xi, \eta)}{\partial y\, \partial x^2} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} \int\limits_0^1 G^*_{xx}(x, y+\Delta y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{y-\Delta y}^{y} \int\limits_0^1 G^*_{xx}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= q_3(x, y) + q_4(x, y) + q_5(x, y).$$

Рассуждая точно так же, как и в предыдущем случае, убеждаемся, что

$$|q_3|, |q_4|, \ |q_5| < K(\Delta y)^{1/2}.$$

Лемма 3 доказана.

3. Решение задачи A для нелинейного уравнения (1.1). Рассмотрим задачу A для уравнения (1.1). Обозначим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r.$$

Всегда будем считать, что функция $f(x, y, u, u_x, u_{xx})$ определена для

$$(x, y) \in \overline{R}, \; -\infty < u, u_x, u_{xx} < +\infty. \tag{2.38}$$

Теорема 1. Пусть: 1) $F'''(x) \in H^{(\alpha)}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, φ_1' φ_2' и $\varphi_3' \in H^{(\alpha/2)}$ при $0 \leqslant y \leqslant h$, причем $\varphi_1(0) = F(0)$, $\varphi_2(0) = F(1)$, $\varphi_3(0) = F'(0)$; 2) функция $f(x, y; u, p, r)$ непрерывна по всем аргументам в области (2.38), $f \in H$ по (x, y) равномерно относительно (u, p, r) в ограниченных множествах из (2.38) и $f \in H^{(1)}$ по переменному (u, p, r) в замкнутых множествах из (2.38) равномерно относительно (x, y). Тогда решение задачи A для уравнения (1.1) существует в области $R_{h_0}\{0 < x < 1, 0 < y \leqslant h_0\}$, где $h_0 > 0$ — некоторое число, зависящее от данных задачи.

Доказательство. Полагая

$$u(x, y) = v(x, y) + z(x, y) \tag{2.39}$$

($v(x, y)$ — решение задачи (2.1), (1.3), найденное в п. 1), для функции $z(x, y)$ получаем задачу

$$z_{xxx} - z_{xy} = f(x, y; v + z, v_x + z_x, v_{xx} + z_{xx}) \equiv$$
$$\equiv g(x, y; z, z_x, z_{xx}), \tag{2.40}$$

$$z|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=1} = 0, \quad z_x|_{x=0} = 0, \quad z|_{y=0} = 0. \tag{2.41}$$

На основании результатов п. 2 заключаем, что задача (2.40), (2.41) эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению

$$z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \int_0^1 G^*(x, y; \xi, \eta)\, g(\xi, \eta; z, p, r)\, d\xi\, d\eta. \tag{2.42}$$

Уравнение (2.42) будем решать методом последовательных приближений. Пусть

$$\left.\begin{array}{c} |g(x, y; z, p, r)| \leqslant M \text{ при } (x, y) \in \overline{R} \\ |z| \leqslant N_1, \; |p| \leqslant N_2, \; |r| \leqslant N_3 \\ \min\{N_1, N_2, N_3\} = N \end{array}\right\}. \tag{2.43}$$

Положим

$$z^{(0)} \equiv 0,$$
$$z^{(n)} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_R G^*(x, y; \xi, \eta) \times$$
$$\times g(\xi, \eta; z^{(n-1)}, p^{(n-1)}, r^{(n-1)})\, d\xi\, d\eta. \tag{2.44}$$

Не ограничивая общности, всегда можем считать, что $h=1$. Отсюда, полагая $n=1$ и пользуясь оценкой функции Грина, имеем

$$\left|\frac{\partial^i z^{(1)}}{\partial x^i}\right| < \frac{CM}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \int_0^1 \frac{e^{-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{i/2}} d\xi d\eta, \quad i=0,\ 1,\ 2$$

или, заменяя переменные интегрирования по ξ,—

$$\left|\frac{\partial^i z^{(1)}}{\partial x^i}\right| < \frac{2CM\delta}{\sqrt{\pi}}\sqrt{y}, \quad i=0,\ 1,\ 2,$$

где δ — то же, что и в (2.37).

Для того чтобы при $(x, y) \in \bar{R}$ значения аргументов z, p, r функции g удовлетворяли неравенствам (2.43), при которых $|g| \leqslant M$, должно быть

$$2\frac{CM\delta}{\sqrt{\pi}}\sqrt{y} < N$$

или

$$y \leqslant \pi\left(\frac{N}{2\delta MC}\right)^2. \tag{2.45}$$

Тогда из (2.44) при $n=2$ имеем

$$\left|\frac{\partial^i z^{(2)}}{\partial x^i}\right| < \frac{2CM^\delta}{\sqrt{\pi}}\sqrt{y}$$

и, согласно (2.45),

$$\left|\frac{\partial^i z^{(2)}}{\partial x^i}\right| < N,$$

т. е. при втором приближении аргументы (z, p, r) функции g не выходят из ограниченной области (2.43). Отсюда, применяя полную математическую индукцию, заключаем, что ни одно из последовательных приближений не выйдет из области (2.43), если выполнено неравенство (2.45).

Теперь покажем, что пределы последовательностей $\left\{\frac{\partial^i z^{(n)}}{\partial x^i}\right\}$ $(i=0,\ 1,\ 2;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$ существуют. Для этого, как известно, достаточно доказать сходимость ряда

$$\frac{\partial^i z^{(0)}}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial^i z^{(1)}}{\partial x^i} - \frac{\partial^i z^{(0)}}{\partial x^i}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial^i z^{(n)}}{\partial z^i} - \frac{\partial^i z^{(n-1)}}{\partial x^i}\right) + \cdots. \tag{2.46}$$

Пользуясь оценкой (2.36), оценим абсолютные величины членов ряда (2.46):

$$\left|\frac{\partial^i\left(z^{(1)}-z^{(0)}\right)}{\partial x^i}\right|<\frac{MC\delta}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}\ .$$

Так как по условию теоремы

$$\left|g\left(\xi,\ \eta;\ z^{(1)},\ p^{(1)},\ r^{(1)}\right)-g\left(\xi,\ \eta;\ z^{(0)},\ p^{(0)},\ r^{(0)}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant K\left[\left|z^{(1)}\right|+\left|p^{(1)}\right|+\left|r^{(1)}\right|\right],$$

то

$$\left|\frac{\partial^i\left(z^{(2)}-z^{(1)}\right)}{\partial x^i}\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint\limits_R\left|\frac{\partial^i G^*}{\partial x^i}\right|\left|g\left(\xi,\ \eta;\ z^{(1)},\ p^{(1)},\ r^{(1)}\right)-\right.$$

$$\left.-g\left(\xi,\eta;z^{(0)},\ p^{(0)}r^{(0)}\right)\right|d\xi d\eta\leqslant\frac{M\,(3K)\,(C\delta)^2}{(\sqrt{\pi})^2}\int_0^y\frac{d\eta_1}{\sqrt{y-\eta_1}}\int_0^{\eta_1}\frac{d\eta_2}{\sqrt{\eta_1-\eta_2}}\ .$$

Далее, пользуясь методом полной математической индукции, легко показать, что

$$\left|\frac{\partial^i\left(z^{(n)}-z^{(n-1)}\right)}{\partial x^i}\right|<\frac{M(3K)^{n-1}\,(C\delta)^n}{(\sqrt{\pi})^n}\int_0^y\frac{d\eta_1}{\sqrt{y-\eta_1}}\times$$

$$\times\int_0^{\eta_1}\frac{d\eta_2}{\sqrt{\eta_1-\eta_2}}\cdots\int_0^{\eta_{n-1}}\frac{d\eta_n}{\sqrt{\eta_{n-1}-\eta_n}}\ .$$

Теперь вычислим интеграл

$$I_n=\int_0^y\frac{d\eta_1}{\sqrt{y-\eta_1}}\int_0^{\eta_1}\frac{d\eta_2}{\sqrt{\eta_1-\eta_2}}\cdots\int_0^{\eta_{n-2}}\frac{d\eta_{n-1}}{\sqrt{\eta_{n-2}-\eta_{n-1}}}\int_0^{\eta_{n-1}}\frac{d\eta_n}{\sqrt{\eta_{n-1}-\eta_n}}\ .$$

При $n=1$

$$I_1=\int_0^y\frac{d\eta_1}{\sqrt{y-\eta_1}}=2\sqrt{y}\ ,$$

при $n=2$

$$I_2=\int_0^y\frac{d\eta_1}{\sqrt{y-\eta_1}}\int_0^{\eta_1}\frac{d\eta_2}{\sqrt{\eta_1-\eta_2}}=2\int_0^y\eta_1^{1/2}\,(y-\eta_1)^{-1/2}d\eta_1=\pi y,$$

при $n=3$

$$I_3=\int_0^y \frac{d\eta_1}{\sqrt{y-\eta_1}} \int_0^{\eta_1} \frac{d\eta_2}{\sqrt{\eta_1-\eta_2}} \int_0^{\eta_2} \frac{d\eta_3}{\sqrt{\eta_2-\eta_3}} = \pi \int_0^y \eta_1 (y-\eta_1)^{-1/2} d\eta_1 =$$

$$=\frac{4\pi}{3} y^{3/2} = \frac{(2\pi y)}{1\cdot 3} 2y^{1/2},$$

при $n=4$

$$I_4=\int_0^y \frac{d\eta_1}{\sqrt{y-\eta_1}} \int_0^{\eta_1} \frac{d\eta_2}{\sqrt{\eta_1-\eta_2}} \int_0^{\eta_2} \frac{d\eta_3}{\sqrt{\eta_2-\eta_3}} \int_0^{\eta_3} \frac{d\eta_4}{\sqrt{\eta_3-\eta_4}} = \frac{(2\pi y)^2}{2\cdot 4}.$$

Таким образом, пользуясь методом полной индукции, легко показать, что [17]

$$I_n=\begin{cases} \dfrac{(2\pi y)^{n/2}}{n!!} & \text{для четных } n, \\ 2\dfrac{(2\pi y)^{\frac{n-1}{2}}}{n!!} y^{1/2} & \text{для нечетных } n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial^i\,(z^{(n)}-z^{(n-1)})}{\partial x^i}\right| < \frac{M(3K)^{n-1}(C\delta)^n}{(\sqrt{\pi})^n} \begin{cases} \dfrac{(2\pi y)^{n/2}}{n!!} & \text{для четных } n, \\ 2\dfrac{(2\pi y)^{\frac{n-1}{2}}}{n!!} y^{1/2} & \text{для нечетных } n. \end{cases} \quad (2.47)$$

Отсюда видно, что каждый член ряда (2.46) не превосходит по модулю соответствующих членов сходящегося ряда

$$\frac{MC\delta}{1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(2y)^{1/2} + \frac{M(3K)(C\delta)^2}{2}(2y) + \frac{M(3K)^2(C\delta)^3}{1\cdot 3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(2y)^{3/2} +$$

$$+\frac{M(3K)^3(C\delta)^4}{2\cdot 4}(2y)^2 + \cdots + \frac{M(3K)^{n-1}(C\delta)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(2y)^{n/2} +$$

$$+\frac{M(3K)^{n-1}(C\delta)^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}(2y)^{n/2} + \cdots. \quad (2.48)$$

Итак, ряды (2.46) сходятся равномерно.

В силу условий теоремы и согласно лемме 3, каждый член ряда принадлежит классу $H^{(\alpha,\,\alpha/2)}$. Поэтому пределы последовательностей

$$z(x,\ y)=\lim_{n\to\infty} z^{(n)},\ p=\lim_{n\to\infty} p^{(n)},\ r=\lim_{n\to\infty} r^{(n)}$$

также принадлежат классу $H^{(\alpha,\,\alpha/2)}$.

Переходя к пределу под знаком интеграла в (2.44), получаем

$$z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_R G^*(x, y; \xi, \eta)\, g(\xi, \eta; z, p, r)\, d\xi d\eta. \qquad (2.49)$$

Так как $z, p, r, \in H^{(\alpha, \alpha/2)}$, то функция $g_1(x, y) \equiv g(x, y; z, p, r)$ также принадлежит классу H. Тогда функция $z(x, y)$, определенная формулой (2.49), как было показано в п. 2, удовлетворяет уравнению (2.40) и условиям (2.41).

Замечание. В теореме 1 мы показали, что решение задачи (1.1), (1.3) существует в области R_{h_0} для некоторого h_0, хотя задача A была сформулирована для области R_h, где h — наперед заданное число. Если окажется, что $h_0 \geqslant h$, то, очевидно, наша задача A будет полностью решена. Если же $h_0 < h$, то найденное в области R_{h_0} решение (которое обозначим через $z_0(x, y)$) может быть продолжено для значений $y > h_0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Это может быть сделано следующим образом.

Рассмотрим уравнение (1.1) в области $\{0 < x < 1,\ h_0 \leqslant y \leqslant h\}$ при граничных условиях

$$z|_{x=0} = 0,\ z|_{x=1} = 0,\ z_x|_{x=0} = 0,\ z|_{y=h_0} = z_0(x, h_0). \qquad (2.50)$$

Для решения задачи (1.1), (2.50) в указанной области можно применить изложенную выше схему, если $z|_{y=h_0} = 0$. Для этого достаточно положить

$$W(x, y) = z(x, y) - z_0(x, y);$$

так как

$$z_0(0, h_0) = z_0(1, h_0) = z_{0x}(0, h_0) = 0,$$

то, согласно (2.50), имеем

$$W|_{x=0} = 0,\ W|_{x=1} = 0,\ W_x|_{x=0} = 0,\ W|_{y=h_0} = 0 \qquad (2.51)$$

и

$$\begin{aligned} W_{xxx} - W_{xy} &= z_{xxx} - z_{xy} - (z_{0xxx} - z_{0xy}) = \\ &= g(x, y;\ W + z_0,\ W_x + z_{0x},\ W_{xx} + z_{0xx}) - \\ &- g(x, y;\ z_0, z_{0x}, z_{0xx}) \equiv \\ &\equiv \psi(x, y;\ W, W_x, W_{xx}). \end{aligned} \qquad (2.52)$$

Согласно теореме 1, решение $z_1(x, y) = W(x, y) + z_0(x, y)$ задачи (2.52), (2.51) существует в области $R_{h_1}\{0 < x < 1,\ h_0 \leqslant y \leqslant h_1\}$, где h_1 — некоторое число, зависящее от данных задачи A, причем при $y = h_0$ функции $z_1(x, y)$ и $z_0(x, y)$ совпадают вместе с производными, входящими в уравнение (2.52). Если окажется, что и после этого $h_1 < h$, то указанную процедуру можно повторить и т. д. Так как h — конечное число и после каждого шага мы продвигаемся на положительные значения $h_1, h_2, \ldots$, то через конечное число шагов мы дойдем до области R_h.

Теорема 2. Если в уравнении (1.1) функция $f(x, y; u, p\, r)$ непрерывна по всем аргументам в области (2.38), $f \in H$ по (x, y) равномерно относительно $(u, p\, r)$ в ограниченных множествах из (2.38) и $f \in H^{(1)}$ по переменному (u, p, r) в замкнутых множествах из (2.38) равномерно относительно $(x\, y)$, то не может существовать более одного решения задачи A, такого, что

$$u,\ u_x,\ u_{xx} \in H^{(\alpha,\ \alpha/2)}.$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ задачи A. Тогда их разность

$$u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

удовлетворяет уравнению

$$u_{xxx} - u_{xy} = g_1(x, y) - g_2(x, y) = \psi(x, y), \tag{2.53}$$

где

$$g_k(x, y) = f(x, y;\ u_k, p_k, r_k),\ \ k = 1, 2,$$

и однородным граничным условиям (1.3). Так как функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то, согласно результатам п. 2, имеем

$$u(x,\ y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_R G^*(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\psi(\xi,\ \eta)d\xi d\eta. \tag{2.54}$$

Пусть $\max\limits_R |\psi| = M_1$. Из (2.54) при обозначениях, принятых в теореме существования, будем иметь

$$\left|\frac{\partial^i u}{\partial \xi^i}\right| < \frac{2M_1C\delta}{\sqrt{\pi}}\sqrt{y},\ i = 0,\ 1,\ 2. \tag{2.55}$$

Пользуясь оценкой (2.55), можно записать

$$\psi(x,\ y)| = |g_1(x,\ y) - g_2(x,\ y)| \leqslant K_1\,[\,|u_1 - u_2| + |p_1 - p_2| +$$

$$+ |r_1 - r_2|\,] < \frac{M_1 3K_1 C\delta}{\sqrt{\pi}}\, 2\sqrt{y}. \tag{2.56}$$

Теперь, пользуясь оценкой (2.56), из (2.54) имеем

$$\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right| < M_1(3K_1)\,(C\delta)^2 2y.$$

Тогда в силу условий Липшица получаем

$$|\psi(x,\ y)| < M_1(3K_1)^2(C\delta)^2 2y.$$

Эту оценку снова подставим в формулу (2.54) и т. д.; после n-го шага итерации будем иметь

$$\left|\frac{\partial^l u}{\partial x^l}\right| < M_1 (C\delta)^n (3K_1)^{n-1} \begin{cases} \dfrac{(2y)^{n/2}}{n!!} \text{ для четных } n, \\ \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{1/2} \dfrac{(2y)^{n/2}}{n!!} \text{ для нечетных } n. \end{cases}$$

Отсюда при $n \to \infty$ получаем $u(x, y) \equiv 0$. Теорема 2 доказана.

Таким образом, задача A решена полностью.

§ 3. ЗАДАЧА A^*

Исследуем задачу A^* для уравнения (1.1) с помощью известной функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Эту задачу можно решить методом, примененным к решению задачи A. Однако предлагаемый ниже метод решения задачи A^* проще.

1. Решение задачи A^* для однородного уравнения (1.1). Рассмотрим задачу A^* для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(Qv) = 0. \tag{3.1}$$

Полагая

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_1(x, y), \tag{3.2}$$

$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$

из уравнения (3.1) получим

$$Qv_1 \equiv v_{1xx} - v_{1y} = 0. \tag{3.3}$$

На основании условий (1.4) для функции $v_1(x, y)$ имеем граничные условия первой краевой задачи

$$v_1|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad v_1|_{x=1} = \varphi_2(y), \quad v_1|_{y=0} = F'(x). \tag{3.4}$$

Решение задачи (3.3), (3.4) в области R имеет вид [78]

$$v_1(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_0^y \varphi_1(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta)\, d\eta - \int_0^y \varphi_2(\eta) G_\xi \times \right.$$
$$\left. \times (x, y; 1, \eta)\, d\eta + \int_0^1 F'(\xi) G(x, y, \xi, 0)\, d\xi \right], \tag{3.5}$$

где

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [U(x, y; \xi + 2n, \eta) - U(x, y; -\xi + 2n, \eta)] \tag{3.6}$$

— функция Грина [78];

$$U(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{y-\eta}}\ e^{\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}, & y>\eta,\\ 0, & y\leqslant\eta.\end{cases}\tag{3.7}$$

Доказательство абсолютной и равномерной сходимости ряда (3.6) (за исключением члена при $n=0$) и рядов, полученных из него почленным дифференцированием любое число раз по x и y, приведено в [78].

Интегрируя равенство (3.2) и пользуясь условием $v|_{x=x_0}=\varphi_3(y)$, получаем решение задачи A^* для уравнения (3.1)

$$v(x,\ y)=\int\limits_{x_0}^{x} v_1(t,\ y)\,dt+\varphi_3(y);\tag{3.8}$$

здесь функция $v_1(x,y)$ определяется формулой (3.5).

Легко видеть, что функция, определенная формулой (3.8), удовлетворяет всем условиям задачи A^* для однородного уравнения (3.1), если функции φ_1, φ_2 и $F'(x)$, φ_3'' непрерывны.

Из формулы (3.8) следует единственность решения задачи для однородного уравнения (3.1), так как при нулевых граничных условиях имеем $v(x,y)\equiv 0$ в замкнутой области $\overline{R}$. Отметим некоторые дифференциальные свойства функции $v(x,y)$, определяемой формулой (3.8).

Лемма 4. Если $F''(x)\in H^{(\alpha)}$ при $0\leqslant x\leqslant 1$, $\varphi_3'(y)\in H^{(\alpha/2)}$ и $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)\in H^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}$ при $0\leqslant y\leqslant h$, то

$$v,\ v_x,\ v_{xx}\in H^{(\alpha,\ \alpha/2)}\ \text{в}\ \overline{R}.$$

Эта лемма с небольшими изменениями доказывается так же, как лемма 2 в § 2. Поэтому коротко изложим доказательство для функции $v_{xx}(x,y)$ (остальные утверждения леммы 4 доказываются аналогично).

При доказательстве леммы 4 можно, не ограничивая общности, считать, что заданные функции удовлетворяют условиям

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0.\tag{3.9}$$

Если это не так, то вместо решения $v(x,y)$ мы могли бы рассмотреть решение

$$W(x,y)=v(x,y)-v_0(x,y);$$

здесь

$$v_0(x,\ y)=\frac{1}{2}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right]x^2+x\varphi_1(0).$$

Учитывая формулу (3.5), из (3.8) имеем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^y \varphi_1(\eta) G_{\xi x}(x, y; 0, \eta)\, d\eta - \int_0^y \varphi_2(\eta) G_{\xi x} \times \right.$$

$$\left. \times (x, y; 1, \eta)\, d\eta + \int_0^1 F'(\xi) G_x(x, y; \xi, 0)\, d\xi \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} [I_8(x, y) - I_9(x, y) + I_{10}(x, y)];$$

здесь

$$I_8(x, y) = \int_0^y \varphi_1(\eta) G_{x\xi}(x, y; 0, \eta)\, d\eta = \int_0^y \varphi_1(\eta) U_{x\xi}(x, y; 0, \eta)\, d\eta -$$

$$- \int_0^y g_{x\xi}(x, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta)\, d\eta = \overline{I}_8(x, y) + \overline{\overline{I}}_8(x, y),$$

где $g(x, y; \xi, \eta)$ — регулярная часть функции Грина. Имеем

$$\overline{I}_8(x, y) = \int_0^y \varphi_1(\eta) U_{x\xi}(x, y; 0, \eta)\, d\eta = - \int_0^y \varphi_1(\eta) U_\eta(x, y; 0, \eta) d\eta =$$

$$= \varphi_1(y) U(x, y; 0, 0) + \int_0^y [\varphi_1(y) - \varphi_1(\eta)] U_\eta(x, y; 0, \eta)\, d\eta =$$

$$= q_3(x, y) + q_4(x, y).$$

Тот факт, что $q_4(x, y) \in H^{(\alpha, \alpha/2)}$, доказывается так же, как в лемме 2 § 2.

Далее

$$\Delta_x q_3(x, y) = \varphi_1(y)[U(x+\Delta x, y; 0, 0) - U(x, y; 0, 0)].$$

Пусть $y \leqslant (\Delta x)^2$; тогда на основании (2.11), (2.12) и в силу условий леммы имеем

$$|\Delta_x q_3(x, y)| \leqslant K_1 C y^{\alpha/2} e^{-c\frac{(x+\Delta x)^2}{4y}} + K_1 C y^{\alpha/2} e^{-c\frac{x^2}{4y}} \leqslant K|\Delta x|^\alpha,$$

где K_1 — постоянная условий Липшица.

Если $y > (\Delta x)^2$, то

$$\Delta_x q_3(x, y) = \Delta x \varphi_1(y) U_x(x + \theta\Delta x, y; 0, 0), \quad 0 < \theta < 1$$

и

$$|\Delta_x q_3| \leqslant |\Delta x|\, y^{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{K_1 C}{y} e^{-c\frac{(x+\theta\Delta x)^2}{4y}} \leqslant K|\Delta x|^\alpha.$$

Теперь, предполагая $\Delta y>0$, имеем

$$\Delta_y q_3=\left[\frac{\varphi_1(y+\Delta y)}{(y+\Delta y)^{1/2}}e^{-\frac{x^2}{4(y+\Delta y)}}-\frac{\varphi_1(y)}{y^{1/2}}e^{-\frac{x^2}{4y}}\right].$$

В случае $y\leqslant\Delta y$ легко получить оценку

$$|\Delta_y q_3|<K(\Delta y)^{\alpha/2}.$$

Пусть $y>\Delta y$; тогда

$$\Delta_y q_3=\varphi_1(y+\Delta y)U(x,y+\Delta y;\ 0,\ 0)-U(x,y;\ 0,\ 0)\varphi_1(y)=$$

$$=\left[\frac{\varphi_1(y+\Delta y)-\varphi_1(y)}{(y+\Delta y)^{1/2}}-\frac{\varphi_1(y)}{y^{1/2}(y+\Delta y)^{1/2}}\left((y+\Delta y)^{1/2}-y^{1/2}\right)\right]e^{-\frac{x^2}{4(y+\Delta y)}}+$$

$$+\frac{\Delta y\varphi_1(y)}{y^{1/2}}\frac{x^2}{(y+\theta\Delta y)^{1/2}}e^{-\frac{x^2}{4(y+\theta\Delta y)}}$$

и

$$|\Delta_y q_3(x,\ y)|<K_2\frac{(\Delta y)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{(y+\Delta y)^{1/2}}+K_3\frac{\Delta y}{y^{\frac{2-\alpha}{2}}}+K_4\frac{\Delta y}{y^{\frac{2-\alpha}{2}}}\leqslant K(\Delta y)^{\frac{\alpha}{2}},$$

т. е. мы доказали, что $\overline{I}_8(x,\ y)\in H^{(\alpha,\ \alpha/2)}$ в R.

Теперь, учитывая, что для функции Грина и ее производных справедливы те же оценки (2.11) и принимая во внимание регулярность функции $g(x,y;\ \xi,\eta)$, заключаем, что выражение $\overline{\overline{I}}_8(x,y)$ также принадлежит к классу $H^{(\alpha,\ \alpha/2)}$. Следовательно,

$$I_8(x,\ y)\in H^{(\alpha,\ \alpha/2)}\quad\text{в}\quad R.$$

Аналогично доказывается, что $I_9(x,\ y)$, $I_{10}(x,\ y)\in H^{(\alpha,\ \alpha/2)}$ в R.

2. Решение однородной задачи A^* для неоднородного уравнения (1.1). Решение однородной задачи A^* для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(Qz)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(z_{xx}-z_y\right)=f(x,\ y)\tag{3.10}$$

можно записать в виде

$$z(x,\ y)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{x}\left[\iint_R G(t,\ y;\ \xi,\ \eta)f(\xi,\ \eta)\,d\xi d\eta\right]dt.\tag{3.11}$$

При этом предполагается, что функция $f(x,y)$ непрерывна в $\overline{R}$ и удовлетворяет условию Гёльдера по обеим переменным в области R. Для функции $z(x,y)$ справедлива следующая лемма.

Лемма 5. Если функция $f(x,y)$ ограничена в замкнутой области $\overline{R}$, то z, z_x, $z_{xx}\in H^{(\alpha,\ \alpha/2)}$ в R.

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 3, при этом надо воспользоваться оценками функции Грина и ее производных

$$\left| \frac{\partial^{i+j} G}{\partial x^i \partial y^j} \right| < \frac{C}{(y-\eta)^{\frac{i+2j+1}{2}}} e^{-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.12}$$

$$C = \text{const} > 0, \ 0 < c = \text{const} < 1,$$

и неравенством (2.12).

3. Решение задачи A^* для нелинейного уравнения (1.1). Теперь рассмотрим задачу A^* для уравнения (1.1). Всегда будем считать, что функция $f(x, y; u, u_x, u_{xx})$ определена для

$$(x, y) \in \overline{R}, \quad -\infty < u, \ u_x, \ u_{xx} < +\infty. \tag{3.13}$$

На основании результатов п. 2 заключаем, что однородная задача A^* для уравнения (1.1) эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению

$$z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x} \left[\iint_R G(t; y; \xi, \eta) f(\xi, \eta; z, z_x, z_{xx}) d\xi d\eta \right] dt. \tag{3.14}$$

Уравнение (3.14) решим методом последовательных приближений.

Для задачи A^* справедливы следующие теоремы существования и единственности.

Теорема 3. Если: 1) $F'''(x) \in H^{(\alpha)}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y) \in H^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}$ и $\varphi_3'(y) \in H^{(\alpha)}$ при $0 \leqslant y \leqslant h$, причем $\varphi_1(0) = F'(0)$, $\varphi_2(0) = F'(1)$, $\psi_3(0) = F(x_0)$; 2) в любой конечной части области (3.13) функция $f(x, y; u, u_x, u_{xx})$ непрерывна по всем аргументам, $f \in H$ по (x, y) равномерно относительно (u, u_x, u_{xx}) и $f \in H^{(1)}$ по аргументам (u, u_x, u_{xx}) равномерно относительно (x, y), то регулярное решение задачи A^* для уравнения (1.1) существует.

Теорема 4. Пусть в уравнении (1.1) функция $f(x, y; u, u_x, u_{xx})$ непрерывна по всем аргументам в любой конечной части области (3.13), $f \in H$ по (x, y) равномерно относительно (u, u_x, u_{xx}) и $f \in H^{(1)}$ по аргументам (u, u_x, u_{xx}) равномерно относительно (x, y). Тогда в области R не может существовать более одного решения задачи A^*, такого, что $u, u_x, u_{xx} \in H^{(\alpha, \alpha/2)}$ в R.

Доказательства этих теорем аналогичны доказательству теорем 1 и 2 в § 2.

Может возникнуть вопрос о возможности применения этого метода в случае задачи A для уравнения (1.1). Но нетрудно заметить, что в этом случае задача нахождения функции $v(x, y)$, входящей в формулу решения задачи A для однородного уравнения (1.1)

$$v(x, y)=\int_0^x v_1(t, y)\,dt+\varphi_1(y),$$

приводит к интегральному уравнению Фредгольма первого рода.

В самом деле, обозначим значение u_x при $x=1$ через $\psi(y)$. Полагая

$$\frac{\partial u}{\partial x}=v(x, y), \tag{3.15}$$

из однородного уравнения (3.1) в силу (1.4) для функции $v(x, y)$ имеем задачу

$$\left.\begin{array}{c} v_{xx}-v_y=0 \\ v|_{y=0}=F'(x), \quad v|_{x=0}=\varphi_3(y), \quad v|_{x=1}=\psi(y) \end{array}\right\}. \tag{3.16}$$

С помощью функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности решение задачи (3.16) можно записать в виде формулы (3.5).

Интегрируя равенство (3.15) и пользуясь условием $u|_{x=0}=\varphi_1(y)$, получаем

$$u(x, y)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^x\left\{\int_0^y\psi(\eta)\,G_\xi(t, y;\ 1, \eta)\,d\eta\right\}dt+\psi_*(x, y),$$

где

$$\psi_*(x, y)=\varphi_1(y)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^x\left\{\int_0^y\varphi_3(y)\,G_\xi(t, y;\ 0, \eta)\,d\eta+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 F'(\xi)\,G(t, y;\ \xi, 0)\,d\xi\right\}dt,$$

а $\psi(y)$ — пока неизвестная функция.

Реализуя условие $u|_{x=1}=\varphi_2(y)$, имеем

$$\int_0^1 K(y, \eta)\,\psi(\eta)\,d\eta=\psi^*(y),$$

где

$$K(y, \eta)=\int_0^y G_\xi(t, y;\ 1, \eta)\,dt;$$

$$\psi^*(y)=2\sqrt{\pi}\left[\varphi_2(y)-\psi_*(1, y)\right],$$

что и требовалось доказать.

Как было отмечено выше, задача P исследована с помощью специально построенных потенциалов и функции Грина, т. е. методом, изложенным в § 2.

Оказывается, эта задача решается гораздо проще с помощью известной функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности (см. задачу A).

Решение задачи P для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y}(Qv) \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(v_{xx} - v_y\right) = 0 \tag{4.1}$$

имеет явный вид

$$v(x,\ y) = \int_0^y v_1(x,\ t)\,dt + F(x), \tag{4.2}$$

где

$$v_1(x,\ y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^y \varphi_1'(\eta)\,G_\xi(x,\ y;\ 0,\ \eta)\,d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_0^y \varphi_2'(\eta)\,G_\xi(x,\ y;\ 1,\ \eta)\,d\eta + \int_0^1 \Phi(\xi)\,G(x,\ y;\ \xi,\ 0)\,d\xi\right];$$

здесь $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, которая определяется по формуле (3.6).

Легко заметить, что функция $v(x, y)$, определенная формулой (4.2), является решением задачи P для уравнения (4.1), если функции φ_1', φ_2', $F''(x)$ и $\Phi(x)$ непрерывны и

$$\varphi_1(0) = F(0), \quad \varphi_2(0) = F(1), \quad \Phi(0) = \varphi_1'(0), \quad \Phi(1) = \varphi_2'(0).$$

Из формулы (4.2) следует единственность решения задачи P для уравнения (4.1).

Заметим, что исходя из формул (4.2) и

$$u(x,\ y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint_R f(\xi,\ \eta;\ u,\ u_x,\ u_{xx},\ u_y,\ u_{xy}) \times$$

$$\times\left[\int_\eta^y G(x,\ t;\ \xi,\ \eta)\,dt\right] d\xi\, d\eta,$$

можно получить все результаты работы [101]. На этом подробно останавливаться не будем. Процесс построения решения такой же, как в задаче A^*.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 5 (теорема существования). Если: 1) $F''(x)$, $\Phi'(x) \in H^{(\alpha)}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\varphi_1'(y)$, $\varphi_2'(y) \in H_2^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}$ при $0 \leqslant y \leqslant h$, причем $\varphi_1(0) = F(0)$, $\varphi_2(0) = F(1)$, $\varphi_1'(0) = \Phi(0)$, $\varphi_2'(0) = \Phi(1)$; 2) в любой конечной части области

$$(x,\ y) \in \overline{R},\ -\infty < u,\ u_x,\ u_{xx},\ u_y,\ u_{xy} < +\infty, \tag{4.3}$$

функция $f(x, y;\ u, u_x, u_{xx}, u_y, u_{xy})$ непрерывна по всем аргументам, $f \in H$ по (x, y) равномерно относительно $(u, u_x, u_{xx}, u_y, u_{xy})$ и $f \in H^{(1)}$ по аргументам $(u, u_x, u_{xx}, u_y, u_{xy})$ равномерно относительно (x, y), то регулярное решение задачи P для уравнения (1.2) существует.

Теорема 6 (теорема единственности). Пусть в уравнении (1.2) функция $f(x, y;\ u, u_x, u_{xx}, u_y, u_{xy})$ непрерывна по всем аргументам в области (4.3), $f \in H$ по (x, y) равномерно относительно $(u, u_x, u_{xx}, u_y, u_{xy})$ и $f \in H^{(1)}$ по аргументам $(u, u_x, u_{xx}, u_y, u_{xy})$ равномерно относительно (x, y), то не может существовать более одного решения задачи P, такого, что $u,\ u_x,\ u_{xx},\ u_y,\ u_{xy} \in H^{(\alpha,\ \alpha/2)}$ в R.

Глава V

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей главе ставятся и исследуются некоторые новые краевые задачи для модельных уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu) = 0 \tag{1.1}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0, \tag{1.2}$$

где

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Уравнение $Lu=0$ при $y>0$ совпадает с уравнением теплопроводности

$$u_{xx}-u_y=0, \tag{1.3}$$

а при $y<0$ — с гиперболическим уравнением

$$u_{xx}-u_{yy}=0. \tag{1.4}$$

Решение $u(x, y)$ уравнения (1.1) или (1.2) будем называть регулярным, если функция $u(x, y)$ обладает непрерывными производными, входящими в оператор L, и функция Lu допускает непрерывную производную, указанную в уравнении.

При исследовании краевых задач для уравнений (1.1) или (1.2) используется тот факт, что любое регулярное решение этих уравнений при $y \neq 0$ может быть представлено в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + \omega(x), \tag{1.5}$$

$$u(x, y) = v(x, y) + \omega(y), \tag{1.6}$$

где $v(x, y)$ — регулярное решение уравнения $Lv=0$ при $y \neq 0$; $\omega(x)$ и $\omega(y)$ — произвольные функции, имеющие непрерывные производные, входящие в оператор L.

Доказательство этого факта проводится так же, как в § 2 гл. IV.

Пусть R — область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0 и A_0A прямых $y=0$, $x=1$, $y=h$ и $x=0$, т. е. прямоугольник $\{0<x<1,\ 0<y\leqslant h\}$, а Δ — характеристический треугольник, ограниченный отрезком $A(0,0)$ $B(1,0)$ оси x и двумя характеристиками $AC{:}y+x=0$, $BC{:}x-y=1$ уравнения (1.4), выходящими из точек A и B и пересекающимися в точке $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Под CC_0 будем понимать отрезок $x=\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant h$. Совокупность областей R и Δ вместе с открытым отрезком AB обозначим через Ω.

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ D И P^*

При решении смешанных задач для уравнения (1.1) необходимо рассмотреть следующие краевые задачи.

Задача D. Найти регулярное в области R решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u_{xx}-u_y\right)=0, \tag{1.7}$$

непрерывное в замкнутой области R и удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u|_{y=0}&=F(x),\ u|_{y=h}=\Phi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1\\ u|_{x=0}&=\varphi_1(y),\ u|_{x=1}=\varphi_2(y), \quad 0\leqslant y\leqslant h \end{aligned}\right\}, \tag{1.8}$$

где F, Φ, φ_1 и φ_2 — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования на вершинах прямоугольника.

Задача P^*. Найти регулярное в области R решение уравнения (1.7), непрерывное в замкнутой области $\bar{R}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u|_{y=0}&=F(x),\ u_y|_{y=0}=\Phi(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ u_x|_{x=0}&=\varphi_1(y),\ u|_x|_{x=1}=\varphi_2(y),\ 0\leqslant y\leqslant h \end{aligned}\right\}, \tag{1.9}$$

где F, Φ, φ_1 и φ_2 — заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_1(0)=F'(0),\ \varphi_2(0)=F'(1).$$

При исследовании этих задач можно без ограничения общности предполагать, что произвольная функция $\omega(x)$, входящая в представление (1.5), удовлетворяет условиям

$$\omega(0)=\omega(1)=0. \tag{1.10}$$

1. Рассмотрим задачу D. На основании представления (1.5) с учетом условий (1.10) из (1.8) получим граничные условия для функции $v(x, y)$

$$v\big|_{y=0} = F(x) - \omega(x), \quad v\big|_{y=h} = \Phi(x) - \omega(x),$$
$$v\big|_{x=0} = \varphi_1(y), \qquad v\big|_{x=1} = \varphi_2(y). \tag{1.11}$$

Легко заметить, что однородная задача $D(\varphi_1=\varphi_2=F=\Phi=0)$ имеет только тривиальное решение $u \equiv 0$.

В самом деле, при $F=\Phi=0$ функция $v(x, y)$ не может принимать наибольшего и наименьшего значений на нижнем основании прямоугольника R, так как они повторяются на его верхнем основании. Отсюда в силу условий $\varphi_1=\varphi_2=0$ и принципа максимума для параболических уравнений [16] заключаем, что $v(x, y) \equiv 0$ в R; стало быть, $\omega(x) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{R}$.

Для доказательства существования решения (1.7), (1.8) предварительно найдем решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условиям (1.11) при $y=0$, $x=0$ и $x=1$. Оно выражается формулой [78]

$$v(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^y \varphi_1(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \right.$$
$$\left. - \int_0^y \varphi_2(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 [F(\xi) - \omega(\xi)] G(x, y; \xi, 0) d\xi \right\}, \tag{1.12}$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина из формулы (3.6) гл. I.

Подставляя функцию (1.12) в условие

$$v\big|_{y=h} = \Phi(x) - \omega(x),$$

получаем интегральное уравнение для определения неизвестной функции $\omega(x)$

$$\omega(x) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 \omega(\xi) G(x, h; \xi, 0) d\xi = g(x); \tag{1.13}$$

здесь

$$g(x) = \Phi(x) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^h \varphi_1(\eta) G_\xi(x, h; 0, \eta) d\eta - \right.$$
$$\left. - \int_0^h \varphi_2(\eta) G_\xi(x, h; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 F(\xi) G(x, h; \xi, 0) d\xi \right].$$

Уравнение (1.13) является интегральным уравнением Фредгольма, разрешимость которого следует из единственности решения задачи (1.7), (1.8).

Уравнение (1.13) при дважды непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(x)$ и непрерывных функциях $F(x)$, $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ допускает решение, принадлежащее классу $C^2(R)$.

2. Переходим к рассмотрению однородной задачи P^*. Для этой задачи имеем $u(x,0)=u_y(x,0)=0$. Из представления (1.5) решения уравнения (1.7) в области R получаем

$$u_{xx}-u_y=\omega''(x).$$

Отсюда в силу непрерывности u_y вплоть до оси $y=0$ находим $u_{xx}(x,0)=\omega''(x)$. Однако согласно условию $u(x,0)=0$ имеем $u_{xx}(x,0)=0$, поэтому $\omega''(x)=0$ или $\omega(x)=a+bx$. Так как $\omega(0)=\omega(1)=0$, то $a=b=0$ и $\omega(x)\equiv 0$. Тогда, в свою очередь, из (1.5) следует, что $u_{xx}-u_y=0$. Функция, удовлетворяющая последнему уравнению, не может внутри R и при $y=h$ достигать положительного максимума и отрицательного минимума. При $y=0$ также нет отличного от нуля экстремума, так как $u(x,0)=0$. Функция $u(x,y)$ не может иметь отличного от нуля экстремума и при $x=0$, $x=1$ в силу известной теоремы [48] о том, что в точке положительного максимума (отрицательного минимума) прямой $x=0$ или $x=1$ $\frac{\partial u}{\partial x}<0$ $\left(\frac{\partial u}{\partial x}>0\right)$, что противоречит условиям однородной задачи P^*.

Существование решения этой задачи докажем методом, примененным в работе [101]. Положим $x_0<0$, $x_1>1$ и заданные функции $F(x)$, $\Phi(x)$ продолжим по непрерывности на отрезке $[x_0, x_1]$.

Заметим, что функция [101]

$$u_0(x,y)=F(x)-\int_{x_0}^{x_1}(x-\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_0}^{x_1}V^*(x,y;\xi,0)\,\Phi(\xi)\,d\xi, \tag{1.14}$$

где

$$V^*(x,y;\xi,\eta)=2\sqrt{y-\eta}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}+(x-\xi)\int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt,\ y>\eta,$$

удовлетворяет уравнению (1.7) и условиям

$$u_0\big|_{y=0}=F(x),\ u_{0y}\big|_{y=0}=\Phi(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Если положим

$$u(x,y)=v(x,y)+u_0(x,y),$$

то для функции $v(x,y)$ получим следующую задачу:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}(Qv)=0\\
&\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=\varphi_1(y)-\left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=0}=F_1(y)\\
&\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=1}=\varphi_2(y)-\left.\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|_{x=1}=F_2(y)\\
&v|_{y=0}=0,\ \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0}=0
\end{aligned}\right\}. \qquad (1.15)$$

Решение задачи (1.15) будем искать в виде

$$v(x,\,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y\left[U(x,\,y;\,0,\,\eta)\,\beta_1(\eta)+U(x,\,y;\,1,\,\eta)\,\beta_2(\eta)\right]d\eta, \qquad (1.16)$$

где $U(x,y;\,\xi,\eta)$ — функция, определенная равенством (3.7) из гл. I; $\beta_1(y)$ и $\beta_2(y)$ — произвольные непрерывные функции. То, что функция (1.16) удовлетворяет уравнению (1.7) в R и последним двум условиям из (1.15), очевидно. Подставляя $v(x,y)$ в условие $v_x=F_1(y)$ при $x=0$ и в $v_x=F_2(y)$ при $x=1$, получаем систему интегральных уравнений типа уравнений Вольтерра для определения функций $\beta_1(y)$, $\beta_2(y)$

$$\left.\begin{aligned}
&-\beta_1(y)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y U_x(0,\ y;1,\ \eta)\,\beta_2(\eta)\,d\eta=F_1(y)\\
&\beta_2(y)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y U_x(1,\ y;0,\ \eta)\,\beta_1(\eta)\,d\eta=F_2(y)
\end{aligned}\right\}. \qquad (1.17)$$

Если $\beta_1(y)$ и $\beta_2(y)$ непрерывны, то функция $v(x,y)$ будет регулярным решением задачи (1.15), непрерывным в замкнутой области $\overline{R}$. Это утверждение справедливо, если φ_1, φ_2, F' и Φ непрерывны.

Функция $u_0(x,y)$ также должна быть регулярным решением уравнения (1.7). Это обстоятельство доказано в [101].

§ 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1.1)

Решим две смешанные краевые задачи для уравнения (1.1).

Задача I. Требуется определить регулярное в области Ω при $y\neq 0$ решение $u(x,y)$ уравнения (1.1), непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}$, обладающее непрерывными производными u_x, u_y в области Ω и удовлетворяющее граничным условиям

$$u\big|_{x=0}=\varphi_1(y),\ u\big|_{x=1}=\varphi_2(y),\ 0\leqslant y\leqslant h, \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &u\big|_{AC}=\psi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{AC}=\psi_2(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1/2\\ &\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{BC}=\psi_3(x),\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{aligned}\right\}, \tag{2.2}$$

где n — внутренняя нормаль; φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2, ψ_3 — заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0)=\psi_1(0)$ и $\varphi_1''(y)$, $\varphi_2''(y)$, $\psi_1''(x)$, ψ_2', ψ_3'' непрерывны; $\psi_2'\left(\frac{1}{2}\right)=-\psi_3'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Задача II. Эта задача отличается от задачи I лишь тем, что вместо условий (2.1) берутся условия

$$u_x\big|_{x=0}=\varphi_1(y),\ u_x\big|_{x=1}=\varphi_2(y),\ 0\leqslant y\leqslant h. \tag{2.3}$$

1. Единственные решения задач I и II могут быть построены следующим образом.

Примем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &u(x,+0)=\tau_1(x),\ u_y(x,+0)=\nu_1(x)\\ &u(x,-0)=\tau_2(x),\ u_y(x,-0)=\nu_2(x)\end{aligned}\right\}. \tag{2.4}$$

Любое регулярное решение уравнения (1.1) в области Δ имеет вид

$$u(x,y)=F_1(x+y)+F_2(x-y)+\omega(x), \tag{2.5}$$

где F_1, F_2 и ω — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Подставляя (2.5) в условия (2.2), находим

$$F_2(x)=\psi_1\left(\frac{x}{2}\right)-\omega\left(\frac{x}{2}\right)-F_1(0),\ 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\omega(x)=\sqrt{2}\int_0^x\psi_2(t)\,dt-C_1x,\ 0\leqslant x\leqslant 1/2,$$

$$\omega(x)=\sqrt{2}\int_x^1\psi_3(t)\,dt+C_2(1-x),\ 1/2\leqslant x\leqslant 1,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Функция $\omega(x)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируемой при $0<x<1$. Это требование приводит к следующим значениям C_1, C_2:

$$C_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_2\left(\frac{1}{2}\right)+\psi_3\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\sqrt{2}\left[\int_0^{1/2}\psi_2(t)\,dt-\int_{1/2}^1\psi_3(t)\,dt\right],$$

$$C_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_2\left(\frac{1}{2}\right)+\psi_3\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\sqrt{2}\left[\int\limits_0^{1/2}\psi_2(t)\,dt-\int\limits_{1/2}^{1}\psi_3(t)dt\right]$$

и полностью определяет функцию $\omega(x)$.

Итак, решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (2.2), имеет вид

$$u(x,y)=F_1(x+y)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)-\omega\left(\frac{x-y}{2}\right)+\omega(x)-F_1(0).$$

Отсюда, согласно обозначениям (2.4), имеем

$$\tau_2'(x)-\nu_2(x)=\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right)-\omega'\left(\frac{x}{2}\right)+\omega'(x). \tag{2.6}$$

В силу непрерывности $u_y(x,0)$ из представления (1.5) получаем

$$\tau_1''(x)-\nu_1(x)=\omega''(x), \tag{2.7}$$

или, исключая $\nu(x)=\nu_1(x)=\nu_2(x)$ из (2.6), приходим к уравнению для определения $\tau(x)=\tau_1(x)=\tau_2(x)$

$$\tau''(x)-\tau'(x)=\omega''(x)+\omega'\left(\frac{x}{2}\right)-\omega'(x)-\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right)=\beta(x),$$

причем

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau(1)=\varphi_2(0).$$

Решение последней задачи имеет вид

$$\tau(x)=-\int\limits_0^x\left(1-e^{x-t}\right)\beta(t)\,dt+\frac{e^x-1}{e-1}\int\limits_0^1\left(1-e^{1-t}\right)\beta(t)\,dt+$$
$$+\frac{e^x-1}{e-1}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right]+\varphi_1(0). \tag{2.8}$$

Имея функцию $\tau(x)$, из (2.7) находим $\nu(x)$. Далее с помощью этих функций и условий (2.1) решаем задачу P для уравнения (1.7).

В области Δ решим уравнения (1.1) с условиями (2.2) и условием

$$u|_{y=0}=\tau(x).$$

Решение этой задачи выписывается явно:

$$u(x,y)=\tau(x+y)-\psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)+\omega\left(\frac{x+y}{2}\right)-$$
$$-\omega\left(\frac{x-y}{2}\right)-\omega(x+y)+\omega(x). \tag{2.9}$$

Единственность построенного решения задачи I следует из формул (2.8), (2.9), выражения для функции $\omega(x)$ и единственности решения задачи P.

Доказательство существования решения задачи II от предыдущего отличается лишь тем, что после нахождения функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ в области R необходимо решить задачу P^*. В области Δ решение задачи II также определяется по формуле (2.9).

§ 3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1.1) С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, ЗАДАННЫМИ ПРИ $y>0$

Задача III. Требуется определить функцию $u(x, y)$, которая: 1) непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega}$; 2) имеет непрерывные производные u_x и u_y в области Ω; 3) является регулярным решением уравнения (1.1) в области Ω при $y \neq 0$; 4) удовлетворяет условиям

$$u\big|_{x=0} = \varphi_1(y), \ u\big|_{x=1} = \varphi_2(y), \ 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{3.1}$$

$$u\big|_{y=h} = \varphi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3.2}$$

$$u\big|_{AC} = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

Предположим, что заданные функции φ_1, φ_2, φ'' и ψ'' непрерывны и

$$\varphi_1(h) = \varphi(0), \ \varphi_2(h) = \varphi(1), \ \varphi_1(0) = \psi(0).$$

Задача IV. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую свойствами 1)—3) задачи III и удовлетворяющую краевым условиям (3.1), (3.3), а также

$$u\big|_{C_0B_0} = \varphi(x), \ \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{AC} = \psi_1(x), \ 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \tag{3.4}$$

где φ и ψ_1 — заданные функции, причем φ'', $\psi_1'(x)$ непрерывны и $\varphi_2(h) = \varphi(1)$.

Докажем, что при указанных предположениях относительно данных каждая из задач III и IV имеет решение и притом единственное.

1. Рассмотрим задачу III. Докажем единственность решения. Однородная задача III ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = \psi = 0$), согласно представлению (1.5) и условию (1.10), сводится к нахождению регулярного в области Ω решения $v(x, y)$ уравнения

$$Lv = 0 \text{ при } y \neq 0, \tag{3.5}$$

удовлетворяющего условиям

$$v\big|_{x=0} = 0, \ v\big|_{x=1} = 0, \ 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{3.6}$$

$$v\big|_{y=h} = -\omega(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3.7}$$

$$v\big|_{AC} = -\omega(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.8}$$

В области Δ уравнение (3.5) примет вид

$$v_{xx}-v_{yy}=0. \tag{3.9}$$

Интегрируя тождество

$$0=v\left(v_{xx}-v_{yy}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(vv_{x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(vv_{y}\right)-v_{x}^{2}+v_{y}^{2}$$

по области Δ, имеем

$$\int\limits_{AC+CB+BA} vv_{x}\,dy+vv_{y}\,dx=\iint\limits_{\Delta}\left(v_{x}^{2}-v_{y}^{2}\right)dxdy.$$

Обозначая

$$v(x,0)=\tau(x),\ v_{y}(x,0)=\nu(x)$$

и вычисляя интегралы, взятые по AC и BC, находим

$$\int\limits_{0}^{1}\tau(x)\,\nu(x)\,dx=-v^{2}(c)-\iint\limits_{\Delta}\left(v_{x}^{2}-v_{y}^{2}\right)dxdy. \tag{3.10}$$

При получении формулы (3.10) мы воспользовались тем, что

$$v(A)=v(B)=0.$$

Для вычисления интеграла в правой части равенства (3.10) перейдем к характеристическим координатам $\xi=x-y$, $\eta=x+y$. При этом треугольник Δ перейдет в треугольник Δ^{*} со сторонами A_1C_1, C_1B_1 и B_1A_1, лежащими на прямых $\eta=0$, $\xi=1$ и $\eta=\xi$.

Имеем

$$\iint\limits_{\Delta}\left(v_{x}^{2}-v_{y}^{2}\right)dxdy=2\iint\limits_{\Delta^{*}}v_{\xi}\,v_{\eta}\,d\xi d\eta=2\iint\limits_{\Delta^{*}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(vv_{\xi}\right)d\xi d\eta-$$

$$-2\iint\limits_{\Delta^{*}}vv_{\xi\eta}d\xi d\eta=-2\int\limits_{A_1C_1+B_1A_1}vv_{\xi}\,d\xi,$$

так как $v_{\xi\eta}=0$ в силу уравнения (3.9) и $d\xi=0$ на C_1B_1. Пользуясь условиями (3.8) и (1.10), будем иметь

$$\int\limits_{A_1C_1}vv_{\xi}\,d\xi=\frac{1}{2}\int\limits_{A_1C_1}\omega\left(\frac{\xi}{2}\right)\omega'\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi=\frac{1}{2}\,\omega^{2}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Далее

$$\int\limits_{A_1B_1}v\,(\xi,\,0)\,v_{\xi}\,(\xi,\,0)\,d\xi=0$$

в силу условий

$$v(A)=v(B)=0.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Delta}\left(v_{x}^{2}-v_{y}^{2}\right)dxdy=-\omega^{2}\left(\frac{1}{2}\right)=-v^{2}\,(C).$$

Тогда из (3.10) получим

$$\int_0^1 \tau(x)\nu(x)\,dx = 0. \tag{3.11}$$

Из условий 1) и 2) задачи III, а также из непрерывности $\omega(x)$ следует, что

$$v(x, -0) = v(x, +0) = \tau(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$v_y(x, -0) = v_y(x, +0) = \nu(x),\ 0 < x < 1.$$

Поэтому из уравнения (1.3) при $y \to +0$ получаем

$$\tau''(x) = \nu(x).$$

Тогда, пользуясь тем, что $\tau(0) = \tau(1) = 0$, находим

$$\int_0^1 \tau(x)\nu(x)\,dx = \int_0^1 \tau(x)\tau''(x)\,dx = -\int_0^1 \tau'^2(x)\,dx \leqslant 0. \tag{3.12}$$

Сравнивая (3.11) и (3.12), имеем

$$\int_0^1 \tau(x)\nu(x)\,dx = 0 \text{ или } \int_0^1 \tau'^2(x)\,dx = 0.$$

Отсюда и из условий $\tau(0) = \tau(1) = 0$ следует, что

$$\tau(x) \equiv 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

В этом случае, согласно принципу максимума, $v(x, y) \equiv 0$ в $\overline{R}$, так как $v(x, 0) = v(0, y) = v(1, y) = 0$. Тогда из условия (3.2) следует, что $\omega(x) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Стало быть, $u(x, y) \equiv 0$ в R. В силу единственности решения задачи Коши для уравнения (3.9) и того, что $\omega(x) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $u(x, y) \equiv 0$ и в $\overline{\Delta}$.

Существование решения задачи III. Подставляя общее решение (2.5) уравнения (1.1) в области Δ в условие (3.3), при $y \to -0$ получаем соотношение

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi'\left(\frac{x}{2}\right) - \omega'\left(\frac{x}{2}\right). \tag{3.13}$$

Как было показано выше, при $y \to +0$ из уравнения (1.3) следует $\tau''(x) = \nu(x)$. Заменяя в (3.13) функцию $\nu(x)$ ее значением $\tau''(x)$, будем иметь

$$\tau''(x) - \tau'(x) = \omega'\left(\frac{x}{2}\right) - \psi'\left(\frac{x}{2}\right).$$

Решая это уравнение относительно $\tau(x)$ при условиях $\tau(0) = \varphi_1(0)$, $\tau(1) = \varphi_2(0)$, находим

$$\tau(x) = 2\int_0^x e^{x-t}\,\omega\left(\frac{t}{2}\right)dt - \frac{2(e^x - 1)}{e - 1}\int_0^1 e^{1-t}\,\omega\left(\frac{t}{2}\right)dt + \Phi(x), \tag{3.14}$$

где

$$\Phi(x)=\int_0^x\left(1-e^{x-t}\right)\psi'\left(\frac{t}{2}\right)dt-\frac{e^x-1}{e-1}\int_0^1\left(1-e^{1-t}\right)\psi'\left(\frac{t}{2}\right)dt+$$

$$+\frac{e^x-1}{e-1}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right]+\varphi_1(0).$$

Теперь решим первую краевую задачу в прямоугольнике R для уравнения (1.3) с краевыми условиями

$$v\big|_{x=0}=\varphi_1(y),\ v\big|_{x=1}=\varphi_2(y),\ v\big|_{y=0}=\tau(x);$$

здесь $\tau(x)$ определена формулой (3.14). Решение этой задачи записывается в виде

$$v(x,\ y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^y\varphi_1(\eta)G_\xi(x,\ y;\ 0,\ \eta)\,d\eta-\right.$$

$$\left.-\int_0^y\varphi_2(\eta)G_\xi(x,\ y;\ 1,\ \eta)\,d\eta+\int_0^1\tau(\xi)G(x,\ y;\ \xi,\ 0)\,d\xi\right],\qquad(3.15)$$

где $G(x, y;\ \xi, \eta)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, которая определена формулой (3.7) из гл. I.

Реализуя условие $v|_{y=h}=\varphi(x)-\omega(x)$ (равносильное условию (3.2)), получаем интегральное уравнение для определения функции $\omega(x)$, эквивалентное задаче III:

$$\omega(x)+\int_0^1K(x,\ t)\,\omega\left(\frac{t}{2}\right)dt=g(x),\qquad(3.16)$$

где

$$K(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_t^1e^{\xi-t}\,G(x,h;\ \xi,\ 0)\,d\xi-\right.$$

$$\left.-\int_0^1\frac{e^\xi-1}{e-1}\,e^{1-t}\,G(x,\ h;\ \xi,\ 0)\,d\xi\right],$$

$$g(x)=\varphi(x)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^h\varphi_1(\eta)\,G_\xi(x,\ h;\ 0,\ \eta)\,d\eta-\right.$$

$$\left.-\int_0^h\varphi_2(\eta)\,G_\xi(x,\ h;\ 1,\ \eta)\,d\eta+\int_0^1\Phi(\xi)\,G(x,\ h;\ \xi,\ 0)\,d\xi\right].$$

Уравнение (3.16) можно переписать в виде

$$\omega(x) + 2\int_0^{1/2} K(x, 2t)\,\omega(t)\,dt = g(x). \tag{3.17}$$

Уравнение (3.17) при $0 \leqslant x \leqslant {}^1/_2$ является обычным интегральным уравнением Фредгольма, разрешимость которого следует из доказанной единственности решения задачи III, так как при условиях однородной задачи III $g(x) \equiv 0$ и $\omega(x) \equiv 0$. Следовательно, из уравнения (3.17) можно найти функцию $\omega(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant {}^1/_2$. Заменяя функцию $\omega\left(\frac{t}{2}\right)$, стоящую под знаком интеграла, ее значением, найденным из (3.17), определяем функцию $\omega(x)$ при $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$. После нахождения функции $\omega(x)$ на $[0, 1]$ искомое решение $u(x, y)$ будет известно сразу, так как в силу (1.5) достаточно знать функцию $v(x, y)$; в области R она дается формулой (3.15), а в области Δ — известной формулой Даламбера, решающей задачу Коши для уравнения (3.9).

2. Рассмотрим задачу IV. Рассматривая однородную задачу IV ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = \psi = \psi_1 = 0$) и поступая точно так же, как при доказательстве единственности решения задачи III, в силу условий (3.6), (3.8) (которые имеют место и в задаче IV) получаем $v(x, y) \equiv 0$ в $\overline{R}$. Согласно первому из условий (3.4), $v(x, y) = -\omega(x)$ при ${}^1/_2 \leqslant x \leqslant 1$. Отсюда и из предыдущего следует, что $\omega(x) \equiv 0$ при ${}^1/_2 \leqslant x \leqslant 1$. Далее, пользуясь общим решением

$$v(x, y) = F_1(x+y) + F_2(x-y) \tag{3.18}$$

уравнения (3.9), согласно второму из условий (3.4) находим

$$\omega(x) = 2x\omega\left(\frac{1}{2}\right) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1/2.$$

Но так как $\omega\left(\frac{1}{2}\right) \equiv 0$, то $\omega(x) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. Отсюда (как и в задаче III) $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Существование решения задачи IV. Решение задачи IV выписывается явно. Для этого сначала реализуем второе из условий (3.4) с помощью общего решения уравнения (1.1) в области Δ. Имеем

$$\omega(x) = \sqrt{2}\int_0^x \varphi_1(t)\,dt - 2\sqrt{2}\,x\int_0^{1/2} \varphi_1(t)\,dt + 2x\omega\left(\frac{1}{2}\right). \tag{3.19}$$

Здесь постоянная $\omega\left(\frac{1}{2}\right)$ подлежит определению.

Далее, поступая точно так же, как в задаче III, получаем формулу (3.14) для функции $\tau(x)$, где на этот раз функция $\omega(x)$ известна и дается формулой (3.19). Решая первую краевую задачу с помощью функции $\tau(x)$, приходим к формуле (3.15), где неизвестной является лишь величина $\omega\left(\frac{1}{2}\right)$. Наконец, согласно первому из условий (3.4), функция $\omega(x)$ при $1/2\leqslant x\leqslant 1$ выражается через функцию $v(x, y)$ по формуле

$$\omega(x)=\varphi(x)-v(x, h).$$

Полагая в этой формуле $x=1/2$, находим

$$\omega\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\Phi_2}{1+K^*},$$

где

$$\Phi_2=\Phi_1\left(\frac{1}{2}\right)+\int\limits_0^1 K\left(\frac{1}{2},\ t\right)\left[\sqrt{2}\int\limits_0^t \psi_1(\tau)\,d\tau-2\sqrt{2}\int\limits_0^{1/2}\psi_1(\tau)\,d\tau\right]dt;$$

$$K^*=\int\limits_0^1 K\left(\frac{1}{2},\ t\right)2t\,dt.$$

Таким образом, $\omega(x)$ определяется при $0\leqslant x\leqslant 1$ полностью. Следовательно, задача IV решена.

§ 4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1.2)

При изучении краевых задач для уравнения (1.2) будем пользоваться представлением (1.6) любого регулярного решения уравнения (1.2), где $v(x, y)$ — регулярное решение уравнения $Lv=0$ при $y\neq 0$, а $\omega(y)$ — произвольная функция, причем, если обозначить

$$\omega(y)=\begin{cases}\omega_1(y), & y\geqslant 0,\\ \omega_2(y), & y\leqslant 0,\end{cases}$$

то $\omega_1(0)=\omega_2(0)$ и функция $\omega_1(y)$ один раз, а $\omega_2(y)$ два раза непрерывно дифференцируемы.

Задача V. Найти регулярное в области Ω (при $y\neq 0$) решение $u(x, y)$ уравнения (1.2), непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}$, обладающее непрерывными производными u_x, u_y в области Ω и удовлетворяющее граничным условиям

$$u\big|_{x=0}=\varphi_1(y),\ u\big|_{x=1}=\varphi_2(y),\ u_x\big|_{x=0}=\varphi_3(y),\ 0\leqslant y\leqslant h, \tag{4.1}$$

$$u\big|_{AC}=\psi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{AC}=\psi_2(x),\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}; \tag{4.2}$$

здесь n — внутренняя нормаль; φ_1, φ_2, φ_3 и ψ_1, ψ_2 — заданные функции, причем φ_1', φ_2', φ_3', ψ_2' и ψ_1'' непрерывны, $\varphi_1(0)=\psi_1(0)$.

Задача VI. Эта задача отличается от задачи V лишь тем, что вместо условий (4.1) берутся условия

$$u_x\Big|_{x=0} = \varphi_1(y),\ u_x\Big|_{x=1} = \varphi_2(y),\ u\Big|_{x=x_0} = \varphi_3(y),\ 0 \leqslant x_0 \leqslant 1. \quad (4.3)$$

1. Рассмотрим задачу V. Пользуясь общим представлением

$$u(x,y) = F_1(x+y) + F_2(x-y) + \omega_2(y)$$

решения уравнения (1.2) в области Δ, легко находим, что решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условиям (4.2), имеет вид

$$u(x,y) = F_1(x+y) + \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x-y}\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{-2y}\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt - (x+y)F_1'(0) - F_1(0).$$

Отсюда

$$\tau_1'(x) - \nu_2(x) = \alpha(x), \quad (4.4)$$

где

$$\alpha(x) = \psi_1'\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{2}\,\psi_2\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{2}\,\psi_2(0). \quad (4.5)$$

В силу непрерывности функции $\nu_1(x)$ и на основании уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_y) = 0, \quad (4.6)$$

к которому при $y>0$ переходит уравнение (1.2), получим

$$\tau_1''(x) - \nu_1(x) = K \quad (4.7)$$

(K — неизвестная константа, подлежащая определению).

По условию задачи, $\tau_2'(x) = \tau_1'(x) = \tau'(x)$, $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$. Исходя из этого, исключим из равенств (4.4) и (4.7) функцию $\nu(x)$. Тогда $\tau''(x) - \tau'(x) = -\alpha(x) + K$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\tau(x) = -e^x\int_0^x e^{-t}\left\{\int_0^t \alpha(z)\,dz\right\}dt + (e^x - 1)K_1 + e^x K_2 +$$

$$+(e^x - x - 1)K.$$

Произвольные постоянные K, K_1, K_2 находим из условий

$$\tau(0) = \varphi_1(0),\ \tau(1) = \varphi_2(0),\ \tau'(0) = \varphi_3(0),$$

т.е.

$$K_2 = \varphi_1(0),\ K_1 = \varphi_3(0) - \varphi_1(0),$$

$$K = \frac{\varphi_2(0)}{e-2} + \frac{e}{e-2}\int_0^1 e^{-t}\left[\int_0^t \alpha(z)\,dz\right]dt - \frac{e-1}{e-2}\varphi_3(0) - \frac{1}{e-2}\varphi_1(0).$$

После несложных вычислений функция $\tau(x)$ выглядит так:

$$\tau(x) = \int_0^x \left(1 - e^{x-t}\right)\alpha(t)\,dt - \frac{e^x - x - 1}{e-2}\left[\int_0^1 \left(1 - e^{1-t}\right)\alpha(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + (e-1)\,\varphi_3(0) + \varphi_1(0) - \varphi_2(0)\right] + \left(e^x - 1\right)\varphi_3(0) + \varphi_1(0). \quad (4.8)$$

Отсюда видно, что при условии непрерывной дифференцируемости $\alpha(x)$ (см. (4.5)) функция $\tau(x)$ имеет непрерывные производные третьего порядка. Следовательно, функция $\nu_1(x)$, определенная равенством (4.7), и функция $\nu_2(x)$, определенная равенством (4.4), имеют непрерывные производные и $\nu_2'(x) = \nu_1'(x)$.

Опираясь на найденную функцию $\tau(x)$, решаем задачу A для уравнения (4.6) в области R (см. гл. IV, § 2). Функция $\tau(x)$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функцию $F(x)$ в задаче A, поэтому решение этой задачи существует.

В области Δ для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_{yy}) = 0$$

решим следующую задачу (задача B работы [21]):

$$u\big|_{AB} = \tau(x), \quad u\big|_{AC} = \psi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{AC} = \psi_2(x).$$

Решение этой задачи выписывается в явном виде:

$$u(x, y) = \tau(x+y) - \psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{x-y}^{x+y} \psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{-2y} \psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt. \quad (4.9)$$

Единственность решения задачи V следует из формул (4.8), (4.9) и из единственности решения задачи A. Действительно, для однородной ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \psi_1 = \psi_2 = 0$) задачи из (4.8) имеем $\tau(x) = 0$, поэтому на основании (4.9) $u(x, y) \equiv 0$ в области Δ, а на основании единственности решения задачи A для уравнения (4.6) $u(x, y) \equiv 0$ в области $\bar{R}$. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

2. Задача VI решается так же, как задача V. После нахождения функции $\tau(x) = u(x, 0)$ (а это делается так же, как в случае задачи V) решение задачи VI в области R определится как решение задачи A^* (гл. I, § 3) для уравнения (4.6), а в области Δ оно дается формулой (4.9).

Глава VI

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА С ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

В настоящей главе ставятся и изучаются некоторые корректные краевые задачи для уравнений третьего порядка смешанно-составного типа

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}(Lu)=0,$$

где

$$L\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}\frac{\partial}{\partial y}$$

— эллиптико-параболический оператор, который при $y>0$ совпадает с оператором теплопроводности, а при $y<0$ — с оператором Лапласа.

Решение рассматриваемых уравнений будем называть регулярным в какой-либо области, если оно в этой области обладает непрерывными производными, входящими в оператор L, и функция Lu допускает непрерывную производную, указанную в уравнении.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial}{\partial x}(Lu)=0$

Пусть D_1 — область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0 и AA_0 прямых $y=0$, $x=1$, $y=h$ и $x=-1$. Точку пересечения отрезка A_0B_0 с осью y обозначим $M(0,h)$. Через D_2 обозначим односвязную область, ограниченную отрезком $A(-1,0)$ $B(1,0)$ оси x и гладкой дугой Жордана σ, лежащей в полуплоскости $y<0$ и опирающейся на ось x в точках A и B. Предположим, что каждая прямая $y=c$, $h_1<c<0$, где h_1 — некоторая константа, пересекается с дугой σ точно в двух точках; прямая $y=h_1$ имеет единственную общую точку $N(0,h_1)$ (точка касания) с дугой σ, а прямые $y=c$, $c<h_1$ с дугой σ общих точек не имеют. Части AN и NB дуги σ обозначим соответственно через σ_1 и σ_2, а совокупность областей D_1 и D_2 вместе с открытым отрезком AB — через D.

В области D для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu)=0 \tag{1.1}$$

рассмотрим следующие краевые задачи.

Задача I. Требуется определить функцию $u(x, y)$, которая: 1) непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$; 2) обладает непрерывными производными u_x, u_y внутри D; 3) является регулярным решением уравнения (1.1) в области D при $y \neq 0$; 4) удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{\sigma}=\varphi(s), \quad u|_{AA_0}=f_1(y), \quad u|_{BB_0}=f_2(y), \quad u|_{MN}=\psi(y), \tag{1.2}$$

где s — длина дуги кривой σ, отсчитываемая от точки A; f_1, f_2, ψ — заданные непрерывные функции, а φ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$f_1(A)=\varphi(A), \; f_2(B)=\varphi(B).$$

Задача II. Требуется найти функцию $u(x, y)$, которая: 1) непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$; 2) обладает непрерывными вплоть до границы $AA_0+\sigma_1$ производными u_x, u_y внутри D; 3) является регулярным решением уравнения (1.1) в области D при $y \neq 0$; 4) удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{AA_0}=f_1(y), \quad u|_{BB_0}=f_2(y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{AA_0}=\psi_1(y),$$
$$u|_{\sigma}=\varphi(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma_1}=\psi_2(s); \tag{1.3}$$

здесь n — внутренняя нормаль; σ, f_1, f_2, ψ_1, φ, ψ_2 — заданные функции, причем $f_1'(y)$, $f_2'(y)$, $\psi_1'(y)$ непрерывны, а φ дважды непрерывно дифференцируема; ψ_2 удовлетворяет условию Гёльдера и

$$\varphi(A)=f_2(A), \; f_2(B)=\varphi(B), \; \psi_1(A)=\psi_2(A).$$

При исследовании поставленных задач воспользуемся представлением любого регулярного решения уравнения (1.1) в виде

$$u(x, y)=v(x, y)+\omega(y), \tag{1.4}$$

где $v(x, y)$ — регулярное решение уравнения

$$Lv=0; \tag{1.5}$$

$\omega(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Неизвестную функцию $\omega(y)$ и заданную функцию $\psi(y)$ представим в виде

$$\omega(y)=\begin{cases}\omega_1(y), \\ \omega_2(y),\end{cases} \quad \psi(y)=\begin{cases}\psi_1(y), & y>0, \\ \psi_2(y), & y \leq 0,\end{cases}$$

причем $\omega_1(0)=\omega_2(0)$, $\omega_1'(0)=\omega_2'(0)$ и $\psi_1(0)=\psi_2(0)$.

Учитывая то, что линейная функция $a+by$ является решением уравнения (1.5) в области D_2, можно без ограничения общности предполагать, что в представлении (1.4) функция $\omega(y)$ удовлетворяет условиям

$$\omega_2(0)=\omega_2(N)=0. \tag{2.1}$$

Единственность решения задачи I. Однородная задача I ($\varphi=0$, $f_1=0$, $f_2=0$, $\psi=0$) в силу представления (1.4) редуцируется к задаче нахождения регулярного в области D решения $v(x, y)$ уравнения (1.5), удовлетворяющего условиям

$$v|_{x=-1}=-\omega_1(y),\quad v|_{x=1}=-\omega_1(y),\quad v|_{OM}=-\omega_1(y),$$
$$v|_{\sigma}=-\omega_2[y(s)],\quad v|_{ON}=-\omega_2(y).$$

В силу принципа экстремума (см. гл. II, § 1) регулярное решение уравнения (1.5) положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\bar{D}$ достигает лишь на кривой σ или на отрезках AA_0 и BB_0. Но так как $v(0, h_1)=0$, то функция $v(x, y)$ положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\bar{D}_2$ может достигать лишь на открытых частях AN и BN кривой σ. С другой стороны, так как $v(0, y)=-\omega_2(y)$ при $h_1<y<0$, а $v(0, y)=-\omega_1(y)$ при $0<y<h$, то эти же экстремальные значения должны повторяться и внутри области D, что невозможно. Следовательно, $v(x, y)\equiv 0$ и, стало быть, $\omega(y)\equiv 0$ в области D. Отсюда сразу следует единственность решения задачи I.

Существование решения задачи I докажем сначала для случая, когда кривая σ совпадает с полуокружностью $x^2+y^2=1$, $y\leqslant 0$.

Не ограничивая общности, всегда можно предполагать, что искомое решение $u(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$u(A)=u(B)=u'(A)=u'(B)=0, \tag{2.2}$$

где производные берутся по направлению касательной к σ. В самом деле, если это не так, то вместо функции $u(x, y)$ можно рассмотреть функцию $W(x, y)=u(x, y)-u_0(x, y)$, которая удовлетворяет условиям (2.2), где функция

$$u_0(x, y)=a+bx+cx^2+dx^3+(c+3dx)\,2y-\frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}(c+3dx)y^2$$

удовлетворяет уравнению (1.1) при $y\neq 0$ и непрерывна вместе со своими производными первого порядка при переходе через прямую $y=0$.

В силу представления (1.4) задача I редуцируется к определению регулярного в области D решения уравнения (1.5), удовлетворяющего условиям

$$v|_{\sigma}=\varphi(s)-\omega_2(y),\quad v|_{ON}=\psi_2(y)-\omega_2(y),$$

$$v|_{AA_0} = f_1(y) - \omega_1(y), \quad v|_{BB_0} = f_2(y) - \omega_1(y), \quad v|_{OM} = \psi_1(y) - \omega_1(y). \tag{2.3}$$

Для уравнения (1.5) в области D_2 решим вспомогательную задачу с граничными условиями

$$v|_\sigma = \varphi(s) - \omega_2(y(s)), \quad \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0} = \nu(x). \tag{2.4}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$v(x, y) = \int_{-1}^{1} G(\xi, 0; x, y)\,\nu(\xi)\,d\xi + \int_\sigma \frac{\partial G(\xi, \eta; x, y)}{\partial n} \times$$
$$\times \left[\varphi(s) - \omega_2(\eta(s))\right] ds, \tag{2.5}$$

где

$$G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{rr_1} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\rho^2 \bar{r}\bar{r}_1}$$

— функция Грина задачи (1.5), (2.4). Здесь

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x-\xi)^2 + (y \mp \eta)^2, \quad \left.\begin{matrix} \bar{r}^2 \\ \bar{r}_1^2 \end{matrix}\right\} = (\bar{x}-\xi)^2 + (\bar{y} \mp \eta)^2;$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \quad \bar{x} = \frac{x}{\rho^2}; \quad \bar{y} = \frac{y}{\rho^2}.$$

Полагая $y=0$ и обозначая $v(x, 0) = \tau(x)$, имеем

$$\tau(x) = \int_{-1}^{1} G(\xi, 0; x, 0)\,\nu(\xi)\,d\xi + \int_\sigma \frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial n}\,[\varphi - \omega_2]\,ds. \tag{2.6}$$

Дифференцируя по x, находим

$$\tau'(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt}\right)\nu(t)\,dt + \int_\sigma \frac{\partial^2 G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial x\,\partial n} \times$$
$$\times \left[\varphi(s) - \omega_2(s)\right] ds. \tag{2.7}$$

В силу непрерывности производных v_x, v_y $\left(\text{что следует из постановки задачи и условий } \omega_1(0) = \omega_2(0);\ \omega_1'(0) = \omega_2'(0)\right)$ из уравнения $v_{xx} - v_y = 0$, устремив y к нулю, получаем соотношение

$$\tau''(x) - \nu(x) = 0. \tag{2.8}$$

Учитывая $\tau(-1) = \tau(1) = 0$ (это следует из (2.1) и (2.2)), из (2.8) находим

$$\tau'(x) = \int_{-1}^{x} \nu(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\,\nu(t)\,dt. \tag{2.9}$$

Исключая $\tau'(x)$ из (2.7) и (2.9), получаем сингулярное интегральное уравнение первого рода относительно функций $\nu(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right)\nu(t)\,dt-\int_{-1}^{x}\nu(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\,\nu(t)\,dt=F(x), \qquad (2.10)$$

где

$$F(x)=-\int_{\sigma}\frac{\partial^2 G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial x\partial n}\left[\varphi(\xi,\ \eta)-\omega_2(\eta)\right]ds. \qquad (2.11)$$

Пользуясь тем, что функция $\mu(\xi,\eta)=\varphi(\xi,\eta)-\omega_2(\eta)$ может быть представлена в виде $\mu(\xi,\eta)=\eta\mu_1(\xi,\eta)$ (это следует из условий $u(A)=u(B)=0$ и $\omega(0)=0$, чего всегда можно достигнуть без ограничения общности), выражение для функции $F(x)$ перепишем в виде

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{2t(1+x^2)-4x}{(x^2-2xt+1)^2}\mu_1(t)\,dt.$$

Отсюда видно, что функция, $F(x)$ при $-1<x<1$ непрерывна и имеет первую производную, удовлетворяющую условию Гёльдера, а при $x\to-1$ и $x\to1$ она имеет логарифмическую особенность.

Если бы функция $\mu(\xi,\eta)$ была представима в виде $\mu(\xi,\eta)=$ $=\eta^2\mu_1(\xi,\eta)$ (а это имело бы место, если бы было $\omega'(0)=0$, так как функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет указанному условию (2.2)), то правая часть уравнения (2.10) и ее производная $F'(x)$ не имели бы никаких особенностей на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$. Но нет основания считать, что $\omega'(0)=0$. Поэтому решение $\nu(x)$ уравнения (2.10) будем искать в классе функций, дифференцируемых при $-1<x<1$ (эти функции могут иметь особенность порядка ниже единицы при $x\to-1$ и $x\to1$).

Уравнение (2.10) перепишем в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right)\nu(t)\,dt=E(x), \qquad (2.12)$$

где

$$E(x)=\int_{-1}^{x}\nu(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\,\nu(t)\,dt+F(x).$$

К уравнению (2.12) с указанной выше правой частью применим методы регуляризации, изложенные в § 1 гл. II. После регуляризации (см. также [59]) получим интегральное уравнение второго рода фредгольмовского типа

$$\nu(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\ t)\,\nu(t)\,dt=E_0(x), \tag{2.13}$$

где

$$K(x,\ t)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t}{1-xt}\right)(1-t)\,dt-\int_{t}^{1}\left(\frac{1}{t_1-x}+\frac{t_1}{1-t_1x}\right)dt_1;$$

$$E_0(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t}{1-xt}\right)F(t)\,dt. \tag{2.14}$$

Докажем однозначную безусловную разрешимость уравнения (2.13). Для этого покажем, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.13), не имеет отличных от нуля решений. Очевидно, что правая часть уравнения (2.13) равна нулю, если $\mu=\varphi-\omega_2\equiv 0$. Следовательно, для получения однородного уравнения наряду с функцией φ необходимо считать равной нулю и неизвестную функцию $\omega_2(y)$. Но если $\varphi\equiv 0$, $\omega_2\equiv 0$, то в силу первого из условий (2.3) $v|_\sigma=0$. С другой стороны, регулярное решение уравнения (1.5), удовлетворяющее непрерывным условиям склеивания рассматриваемой задачи, не может иметь отличного от нуля экстремума на отрезке AB (см. § 1 гл. II). Отсюда следует, что $v(x, y)\equiv 0$ в области $\bar{D}_2$, стало быть, $\nu(x)\equiv 0$.

Разрешая интегральное уравнение (2.13), получаем

$$\nu(x)=E_0(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\Gamma(x,\ t)\,E_0(t)\,dt, \tag{2.15}$$

где $\Gamma(x, t)$ — резольвента ядра $K(x, t)$.

Дальнейшая наша цель — найти неизвестную функцию $\omega_2(y)$. Преобразуем выражение (2.11):

$$F(x)=-\frac{d}{dx}\int_{\sigma}\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial n}\left[\varphi(\xi,\ \eta)-\omega_2(\eta)\right]ds=$$

$$=\frac{d}{dx}\int_{\sigma}\left[\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial\xi}\eta'(s)-\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial\eta}\xi'(s)\right]\varphi(\xi,\ \eta)\,ds+$$

$$+\frac{d}{dx}\int_{-1}^{0}\omega_2(\eta)\left[\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial\xi}-\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial\eta}\frac{d\xi}{d\eta}\right]_{\xi=-\sqrt{1-\eta^2}}d\eta-$$

$$-\frac{d}{dx}\int_{-1}^{0}\omega_2(\eta)\left[\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial\xi}-\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial\eta}\frac{d\xi}{d\eta}\right]_{\xi=\sqrt{1-\eta^2}}d\eta.$$

Отсюда имеем

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{2\xi(1+x^2)-4x}{(x^2-2x\xi+1)^2\sqrt{1-\xi^2}}\varphi\left(\xi,\ \sqrt{1-\xi^2}\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{0}\frac{8x(x^2-1)\left[(x^2-1)-2\eta^2(x^2+1)\right]}{\left[(x^2-1)^2+4x^2\eta^2\right]^2\sqrt{1-\eta^2}}\omega_2(\eta)\,d\eta. \qquad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (2.14), а затем в (2.15), получаем

$$\nu(x)=E_1(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{0}K_1(x,\ \eta)\,\omega_2(\eta)\,d\eta, \qquad (2.17)$$

где

$$E_1(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t}{1-xt}\right)\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{2(t^2t_1+t_1-2t)}{(t^2-2tt_1+1)^2\sqrt{1-t_1^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\varphi(t_1)\,dt_1\right]dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\Gamma(x,\ t)\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t_1-t}+\frac{t_1}{1-tt_1}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{2(t_2t_1^2+t_2-2t_1)}{(t_1^2-2t_1t_2+1)^2\sqrt{1-t_2^2}}\varphi(t_2)\,dt_2\right]dt_1\right\}dt;$$

$$K_1(x,\ \eta)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t}{1-xt}\right)\frac{8t(t^2-1)\left[(t^2-1)-2\eta^2(t^2+1)\right]}{\left[(t^2-1)^2+4t^2\eta^2\right]^2\sqrt{1-\eta^2}}\,dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\Gamma(x,\ t)\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t_1-t}+\frac{t}{1-tt_1}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{8t_1(t_1^2-1)\left[(t_1^2-1)-2\eta^2(t_1^2+1)\right]}{\left[(t_1^2-1)^2+4t_1^2\eta^2\right]^2\sqrt{1-\eta^2}}\,dt_1\right]dt.$$

Подставляя (2.17) в формулу (2.5), получаем

$$v(x,\ y)=\int\limits_{-1}^{1}G(\xi,\ 0;\ x,\ y)\,E_1(\xi)\,d\xi+\int\limits_{-1}^{0}\left[\int\limits_{-1}^{1}G(\xi,\ 0;\ x,\ y)\,K_1\times\right.$$

$$\left.\times(\xi,\ t)\,d\xi\right]\omega_2(t)\,dt+\int\limits_{\sigma}\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ y)}{\partial n}\varphi(s)\,ds+$$

$$+\int_{-1}^{0}\left[\frac{\partial G(\xi,\eta;x,y)}{\partial\xi}-\frac{\partial G(\xi,\eta;x,y)}{\partial\eta}\frac{d\xi}{d\eta}\right]_{\xi=-\sqrt{1-\eta^2}}\omega_2(\eta)\,d\eta-$$

$$-\int_{-1}^{0}\left[\frac{\partial G(\xi,\eta;x,y)}{\partial\xi}-\frac{\partial G(\xi,\eta;x,y)}{\partial\eta}\frac{d\xi}{d\eta}\right]_{\xi=\sqrt{1-\eta^2}}\omega_2(\eta)\,d\eta. \quad (2.18)$$

Удовлетворяя второму из условий (2.3) для определения неизвестной функции $\omega_2(y)$, получаем интегральное уравнение Фредгольма

$$\omega_2(y)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0}S(y,\eta)\,\omega_2(\eta)\,d\eta=\delta(y), \quad (2.19)$$

где

$$S(y,\eta)=\int_{-1}^{1}G(\xi,0;0,y)\,K_1(\xi,\eta)\,d\xi-\frac{2(1-y^4)}{[(y^2+1)^2-4y^2\eta^2]\sqrt{1-\eta^2}};$$

$$\delta(y)=\psi_2(y)-\int_{-1}^{1}G(\xi,0;0,y)\,E_1(\xi)\,d\xi-\int_{\sigma}\frac{\partial G(\xi,\eta;x,y)}{\partial n}\varphi(s)\,ds.$$

Докажем, что однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (2.19), не имеет отличных от нуля решений. Правая часть уравнения (2.19) равна нулю при $\varphi\equiv\psi_2\equiv0$. Как было указано выше, функция, удовлетворяющая уравнению (1.5) и условиям задачи, не достигает отличного от нуля экстремума на AB. Но при $\varphi\equiv\psi_2\equiv0$ функция не достигает положительного максимума и отрицательного минимума на кривой σ, так как

$$v|_{\sigma}=-\omega_2(y),\quad v|_{ON}=-\omega_2(y).$$

Отсюда следует, что $v\equiv0$ в области $\bar{D}_2$ и, следовательно, $\omega_2\equiv0$.

Разрешая интегральное уравнение (2.19), получаем

$$\omega_2(y)=\delta(y)-\frac{1}{\pi}\int_{1}^{0}\Gamma_1(y,\eta)\,\delta(\eta)\,d\eta, \quad (2.20)$$

где $\Gamma_1(y,\eta)$ — резольвента ядра $S(y,\eta)$. Подставляя (2.20) в формулу (2.18), имеем

$$v(x,y)=\int_{-1}^{1}G(\xi,0;x,y)\,E_1(\xi)\,d\xi-\int_{-1}^{0}K(x,y;t)\,\delta(t)\,dt-$$

$$-\int_{1}^{0}K(x,y;t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0}\Gamma_1(t,\eta)\,\delta(\eta)\,d\eta\right]dt+\int_{\sigma}\frac{\partial G(\xi,\eta;x,y)}{\partial n}\varphi(s)\,ds+$$

$$+\int\limits_{\sigma}\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ y)}{\partial n}\delta(\eta)\,d\eta-\int\limits_{\sigma}\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ y)}{\partial n}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{0}\Gamma_1(\eta(s),\ \eta_1)\,\delta(\eta_1)\,d\eta_1\right]ds, \tag{2.21}$$

где

$$K(x,\ y;\ t)=\int\limits_{-1}^{1}G(\xi,\ 0;\ x,\ y)\,K_1(\xi,\ t)\,d\xi.$$

Полагая $y=0$ в (2.21), находим

$$\tau(x)=\int\limits_{-1}^{1}G(\xi,\ 0;\ x,\ 0)\,E_1(\xi)\,d\xi+\int\limits_{-1}^{0}K(x,\ 0;\ t)\,\delta(t)\,dt-$$

$$-\int\limits_{-1}^{0}K(x,\ 0;\ t)\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{0}\Gamma_1(t,\ \eta)\,\delta(\eta)\,d\eta\right]dt+$$

$$+\int\limits_{\sigma}\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial n}\varphi(s)\,ds+\int\limits_{\sigma}\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial n}\delta(\eta(s))\,ds-$$

$$-\int\limits_{\sigma}\frac{\partial G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{0}\Gamma_1(\eta(s),\ \eta_1)\,\delta(\eta_1)\,d\eta_1\right]ds. \tag{2.22}$$

Теперь в области D_1 решим задачу

$$\begin{gathered}v_{xx}-v_y=0,\\ v|_{y=0}=\tau(x),\quad v|_{AA_0}=f_1(y)-\omega_1(y),\\ v|_{BB_0}=f_2(y)-\omega_1(y),\quad v|_{OM}=\psi_1(y)-\omega_1(y),\end{gathered} \tag{2.23}$$

где функция $\tau(x)$ определена формулой (2.22).

Решение уравнения $v_{xx}-v_y=0$, удовлетворяющее граничным условиям

$$v|_{AA_0}=f_1(y)-\omega_1(y),\quad v|_{BB_0}=f_2(y)-\omega_1(y),\quad v|_{y=0}=\tau(x),$$

выражается формулой

$$v(x,\ y)=\int\limits_{0}^{y}\left[f_1(\eta)-\omega_1(\eta)\right]G^*_{\xi}(x,\ y;\ -1,\ \eta)\,d\eta-$$

$$-\int\limits_{0}^{y}\left[f_2(\eta)-\omega_1(\eta)\right]G^*_{\xi}(x,\ y;\ 1,\ \eta)\,d\eta+\int\limits_{-1}^{1}G^*(x,\ y;\ \xi,\ 0)\,\tau(\xi)\,d\xi. \tag{2.24}$$

Здесь $G^*(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина для уравнения теплопроводности, которая в рассматриваемом случае может быть выписана в явном виде (см. [81])

$$G^*(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U(x+4m; y; \xi, \eta) -$$

$$- \sum_{m=-\infty}^{\infty} U(2-x+4m; y; \xi, \eta),$$

где

$$U(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} - y > \eta$$

— фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Удовлетворяя последнему из условий (2.23), для определения функции $\omega_1(y)$ получаем уравнение

$$\omega_1(y) + \int_0^y R(y, \eta)\,\omega_1(\eta)\,d\eta = g(y), \tag{2.25}$$

где

$$R(y; \eta) = G_\xi^*(0, y; 1, \eta) - G_\xi^*(0, y; -1, \eta);$$

$$g(y) = \varphi_1(y) - \int_0^y \Big[f_1(y)\,G_\xi^*(0, y; -1, \eta) -$$

$$- f_2(\eta)\,G_\xi^*(0, y; -1, \eta)\Big] d\eta - \int_{-1}^{1} \tau(\xi)\,G^*(0, y; \xi, 0)\,d\xi.$$

Правая часть интегрального уравнения (2.25) непрерывно дифференцируема при $0 \leqslant y \leqslant h$, а ядро $R(y, \eta)$ является достаточно гладкой функцией в области $0 \leqslant y, \eta \leqslant h$. Уравнение (2.25) полностью эквивалентно задаче I. Поэтому его однозначная разрешимость следует из единственности решения задачи I.

Итак, задача I решена полностью в случае, когда кривая σ является окружностью.

Теперь рассмотрим общий случай. Относительно кривой σ, кроме указанных выше условий, будем предполагать, что: а) функции $x(s)$, $y(s)$, определяющие параметрическое уравнение кривой σ, непрерывны вместе со своими производными до второго порядка, а вторые производные удовлетворяют условию Гёльдера в промежутке $0 \leqslant s \leqslant l$; б) в окрестности точек A и B выполняется условие

$$\left| \frac{dx}{ds} \right| \leqslant C y^2(s), \quad C = \text{const}.$$

В рассматриваемом случае в силу перечисленных требований исследование задачи I проходит без существенных изменений. Отметим только, что в этом случае функция Грина задачи (1.5), (2.4) имеет вид

$$G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{rr_1} + P(\xi, \eta; x, y),$$

где

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x-\xi)^2 + (y \mp \eta)^2;$$

$$P(\xi, \eta; x, y) = \int\limits_{\sigma} \mu(s, x, y) \left[\frac{\cos(n, r)}{r} - \frac{\cos(n, r_1)}{r_1}\right] ds;$$

здесь

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (\xi_0(s) - \xi)^2 + (\eta_0(s) \mp \eta)^2.$$

Как известно, функция $\mu(s, x, y)$ определяется как решение одномерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Функцию Грина представим в виде

$$G(\xi, \eta; x, y) = G_0(\xi, \eta; x, y) + H(\xi, \eta; x, y),$$

где

$$G_0(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{rr_1} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\bar{r}\,\bar{r}_1 \rho^2}$$

— функция Грина, использованная выше при решении задачи I в случае, когда кривая σ совпадает с полуокружностью $x^2+y^2=1$, $y \leqslant 0$;

$$H(\xi, \eta; x, y) = P(\xi, \eta; x, y) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\bar{r}\,\bar{r}_1 \rho^2}$$

— регулярная часть функции Грина.

В соответствии с этим формула (2.10) имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt}\right) \nu(t)\, dt - \int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} \nu(t)\, dt -$$

$$- \int\limits_{-1}^{x} \nu(t)\, dt + \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} (1-t)\nu(t)\, dt = F(t), \qquad (2.26)$$

где

$$F(x) = -\int\limits_{\sigma} \frac{\partial^2 G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial x \partial n} [\varphi - \omega_2]\, ds - \int\limits_{\sigma} \frac{\partial^2 H(\xi, \eta; x, 0)}{\partial x \partial n} [\varphi - \omega_2]\, ds.$$

Очевидно, что присутствие регулярных членов

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} \nu(t)\, dt \quad \text{и} \quad \int\limits_{\sigma} \frac{\partial^2 H(\xi, \eta; x, 0)}{\partial x \partial n} [\varphi - \omega_2]\, ds$$

в левой и правой частях уравнения (2.26) не влияет на его однозначную разрешимость.

Уравнение (2.19) для функции $\omega_2(y)$ в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\omega_2(y) + \int_0^l S^*(\xi(s), \eta(s), y)\,\omega_2(\eta)\,ds = \delta^*(y),$$

где

$$S^*(\xi(s), \eta(s), y) = \int_{-1}^{1} G(t, 0; 0, y)\,K(t, \xi(s), \eta(s))\,dt + \frac{\partial G(\xi, \eta; 0, y)}{\partial n},$$

$$\delta^*(y) = \varphi_2(y) - \int_{-1}^{1} G(\xi, 0; 0, y)\,E_1(\xi)\,d\xi + \int_0^l \frac{\partial G(\xi, \eta; 0, y)}{\partial n}\,\varphi(s)\,ds.$$

Однозначная разрешимость доказывается так же, как и в случае уравнения (2.19).

§ 3. ЗАДАЧА II

При рассмотрении задачи II в общем представлении (1.4) без ограничения общности можно предполагать, что

$$\omega_2(0) = \omega_2(N) = 0. \tag{3.1}$$

Единственность решения задачи II в области D_2 докажем при дополнительном предположении:

$$\frac{dx}{dn} \neq 0 \tag{3.2}$$

всюду вдоль дуги σ_1 (кроме точки N).

Однородная задача II в силу (1.4), (3.1) редуцируется к отысканию регулярного решения уравнения (1.5), удовлетворяющего условиям

$$\begin{gathered} v\,|_{AA_0} = -\omega_1(y), \quad v\,|_{BP_0} = -\omega_1(y), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{AA_0} = 0, \\ v\,|_{\sigma} = -\omega_2(y), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\sigma_1} = -\omega_2'(y)\frac{dy}{dn}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

В силу условия $\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{AA_0} = 0$ и согласно известному свойству решений параболических уравнений функция $v(x, y)$ не может достигать наибольшего и наименьшего значений на отрезке AA_0. Но тогда $v(x, y)$ не достигает наибольшего и наименьшего значений и на отрезке BB_0, так как значения функции $v(x, y)$ на AA_0 и BB_0 равны.

Докажем, что функция $v(x, y)$ не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума на открытых дугах σ_1 и σ_2. Предположим, что функция $v(x, y)$ достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) в некоторой внутренней точке s_0 дуги σ_1. Тогда так как $v(x, y)$ на σ_1 принимает значения функции $\omega_2(y)$, то необходимое условие экстремума дает в этой точке

$$\frac{\partial \omega_2 [y(s)]}{\partial s} = \omega_2' [y(s)] \frac{dy}{ds} = - \omega_2' [y(s)] \frac{dx}{dn} = 0.$$

Отсюда на основании (3.2) получаем $\omega'[y(s_0)] = 0$. Тогда в силу последнего условия (3.3) в рассматриваемой точке имеем $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$. Но последнее равенство противоречит известному свойству гармонических функций о том, что в граничной точке положительного максимума (отрицательного минимума) должно быть $\frac{\partial v}{\partial n} < 0 \left(\frac{\partial v}{\partial n} > 0\right)$. Следовательно, $v(x, y)$ не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума на дуге σ_1. Учитывая предпоследнее условие (3.3), нетрудно заметить, что функция $v(x, y)$ не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума на открытой дуге σ_2. Отсюда на основании принципа экстремума (см. § 1 гл. II) и равенств (3.1) заключаем, что $v \equiv \omega(y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Следовательно, решение задачи II единственно.

В силу замечаний, сделанных в конце § 2, в дальнейшем для доказательства существования решения исследуемых задач ограничимся рассмотрением случая, когда кривая σ совпадает с полуокружностью $x^2 + y^2 = 1$, $y \leqslant 0$. В силу (1.4) последние два условия (1.3) могут быть записаны в виде

$$v|_\sigma = \varphi(s) - \omega_2(y(s)), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\sigma = \psi_2(s) - \omega_2'(y) \frac{dy}{dn}. \tag{3.4}$$

Запишем решение уравнения (1.5) в области D_2, удовлетворяющее условиям (2.4). Оно определяется формулой (2.5). Функция $\nu(x)$, входящая в формулу (2.15), определяется так же, как в задаче I, т. е. выражается формулой (2.25).

Преобразуем выражение функции $F(x)$, определенное формулой (2.11):

$$F(x) = -\frac{d}{dx} \int_\sigma \frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial n} \left[\varphi(s) - \omega_2(\eta(s))\right] ds =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_\sigma \left[\frac{2\eta x (1 - x\xi)}{\left[(x - \xi)^2 + \eta^2\right]^2} \xi'(s) - \frac{\eta^2 x^2 - (1 - x\xi)^2}{\left[(1 - x\xi)^2 + \eta^2 x^2\right]^2} \eta'(s) \right] \times$$

$$\times (\varphi - \omega_2)\, ds - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma} \left[\frac{2\eta (x-\xi)}{[(x-\xi)^2+\eta^2]^2}\xi'(s) + \frac{(x-\xi)^2-\eta^2}{[(x-\xi)^2+\eta^2]^2}\eta'(s) \right] \times$$

$$\times \left[\varphi(s) - \omega_2(\eta)\right] ds.$$

Интегрируя по частям, а затем переходя к полярным координатам, получаем

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{2\sin\Theta}{1-2x\cos\Theta+x^2}\,\varphi'(\Theta)\,d\Theta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{2\sin\Theta\cos\Theta}{1-2x\cos\Theta+x^2}\,\omega_2'(\sin\Theta)\,d\Theta. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (2.14), а затем в (2.15), имеем

$$\nu(x) = E_1(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} K(x,\Theta)\,\omega_2'(\sin\Theta)\cos\Theta\,d\Theta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} K(x,\Theta)\,\omega_2'(\sin\Theta)\cos\Theta\,d\Theta, \tag{3.6}$$

где

$$E_1(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t}{1-xt}\right)\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{2\sin\Theta}{1-2t\cos\Theta+t^2}\,\varphi'(\Theta)\,d\Theta\right]dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\Gamma(x,t)\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t_1-t}+\frac{t_1}{1-tt_1}\right)\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{2\sin\Theta\,\varphi'(\Theta)}{1-2t_1\cos\Theta+t_1^2}\,d\Theta\right]dt_1\right]dt;$$

$$K(x,\Theta) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t}{1-xt}\right)\frac{2\sin\Theta}{1-2t\cos\Theta+t^2}\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\Gamma(x,t)\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t_1-t}+\frac{t}{1-tt_1}\right)\frac{2\sin\Theta\,dt}{1-2t_1\cos\Theta+t_1^2}\right]dt.$$

Заменяя переменную интегрирования во втором интеграле (3.6), имеем

$$\nu(x) = E_1(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} K(x, \Theta)\,\omega_2'(\sin\Theta)\,\cos\Theta\,d\Theta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} K(x, 3\pi-\Theta)\,\omega_2'(\sin\Theta)\cos\Theta\,d\Theta. \tag{3.7}$$

Теперь перепишем формулу (2.5) в виде

$$v(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} G(\xi, 0; x, y)\ \nu(\xi)\,d\xi + \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)\mu(\Theta)\,d\,\Theta,$$

где

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x - \cos\Theta)^2 + (y \mp \sin\Theta)^2\,;$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2,\ \mu(\Theta) = \varphi(\Theta) - \omega_2(\sin\Theta).$$

Вычисляя $\frac{dv}{dn}$ и интегрируя последний интеграл по частям, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \int\limits_{-1}^{1}\frac{\partial G(\xi, 0; x, y)}{\partial n}\ \nu(\xi)\ d\xi + \frac{1}{\pi\rho}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x\mu'(\Theta)\frac{\sin\Theta - y}{r^2}\,d\Theta -$$

$$-\frac{1}{\pi\rho}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} y\mu'(\Theta)\,\frac{\cos\Theta - x}{r^2}\,d\Theta + \frac{1}{\pi\rho}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} M(x, y; \Theta)\,\mu'(\Theta)\,d\Theta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} M_1(x, y; \Theta)\,\mu'(3\pi - \Theta)\,d\Theta, \tag{3.8}$$

где

$$M(x, y; \Theta) = \frac{x\sin\Theta + y\cos\Theta}{(\cos\Theta - x)^2 + (\sin\Theta + y)^2}\,;$$

$$M_1(x, y; \Theta) = \frac{\sin\Theta - y}{(\cos\Theta + x)^2 + (\sin\Theta - y)^2} +$$

$$+ \frac{\cos\Theta + x}{(\cos\Theta + x)^2 + (\sin\Theta + y)^2} + \frac{x\sin\Theta + y\cos\Theta}{(\cos\Theta + x)^2 + (\sin\Theta + y)^2}.$$

В формуле (3.8) переходим к пределу, устремив точку (x, y) к точке $(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, лежащей на σ_1. В этом случае справедливы формулы предельного перехода

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \mu'(\Theta)\frac{\sin\Theta - y}{r^2}\,d\Theta = \mu'(\Theta_0)\sin\Theta_0 + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin\Theta - \sin\Theta_0}{r_0^2}\mu'(\Theta)\,d\Theta,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \mu'(\theta)\frac{\cos\theta - x}{r^2}\,d\theta = \mu(\theta_0)\cos\theta_0 + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{r_0^2}\mu'(\theta)\,d\theta, \quad (3.9)$$

где

$$r_0^2 = (\cos\theta - \cos\theta_0)^2 + (\sin\theta - \sin\theta_0)^2.$$

Удовлетворяя второму условию (3.4), учитывая (3.9) и выражение (3.7) функции $\nu(x)$, для определения $\delta(\theta_0) = \omega_2'(\sin\theta_0)$ получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\delta(\theta_0)\sin\theta_0 - \frac{\sin\theta_0}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{r_0^2}\delta(\theta)\cos\theta\,d\theta +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} R(\theta_0, \theta)\,\delta(\theta)\cos\theta\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} M(\theta_0, \theta)\,\delta(\theta)\cos\theta\,d\theta +$$

$$+ \frac{\cos\theta_0}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{r_0^2}\delta(\theta)\cos\theta\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} M_1(\theta_0, \theta)\,\delta(\theta)\cos\theta\,d\theta = g(\theta_0),$$

(3.10)

где

$$R(\theta_0, \theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos\theta_0 + t^2}\left[K_1(t, \theta) + K_1(t, 3\pi - \theta)\right]dt;$$

$$g(\theta_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1-t^2}{1-2t\cos\theta_0+t^2}E_1(t)\,dt -$$

$$-\frac{\sin\theta_0}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos\theta-\cos\theta_0}{r_0^2}\varphi'(\theta)\,d\theta + \frac{\cos\theta_0}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\sin\theta-\sin\theta_0}{r_0^2}\varphi'(\theta)\,d\theta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}M(\theta_0,\ \theta)\,\varphi'(\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}M_1(\theta_0,\ \theta)\,\varphi'(3\pi-\theta)\,d\theta.$$

Выделяя характеристическую часть уравнения (3.10), имеем

$$\delta(\theta_0)\sin\theta_0 + \frac{\cos\theta_0}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\delta(\theta)}{\theta-\theta_0}d\theta - \frac{\sin\theta}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{K_1(\theta,\ \theta_0)-K_1(\theta_0,\ \theta_0)}{\theta-\theta_0}\delta(\theta)\,d\theta +$$

$$+\frac{\cos\theta}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{K_2(\theta,\ \theta_0)-K_2(\theta_0,\ \theta_0)}{\theta-\theta_0}\delta(\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}R(\theta_0,\ \theta)\,\delta(\theta)\cos\theta d\theta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}M(\theta_0,\ \theta)\,\delta(\theta)\cos\theta d\theta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}M_1(\theta_0,\theta)\,\delta(\theta)\cos\theta d\theta = g(\theta_0); \quad (3.11)$$

здесь

$$K_1(\theta,\ \theta_0) = \frac{\dfrac{\cos\theta-\cos\theta_0}{\theta-\theta_0}\cos\theta}{\left(\dfrac{\cos\theta-\cos\theta_0}{\theta-\theta_0}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\theta-\sin\theta_0}{\theta-\theta_0}\right)^2};$$

$$K_1(\theta_0,\ \theta_0) = \lim_{\theta\to\theta_0}K_1(\theta,\ \theta_0) = -\sin\theta_0\cos\theta_0;$$

$$K_2(\theta,\ \theta_0) = \frac{\dfrac{\sin\theta-\sin\theta_0}{\theta-\theta_0}\cos\theta}{\left(\dfrac{\cos\theta-\cos\theta_0}{\theta-\theta_0}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\theta-\sin\theta_0}{\theta-\theta_0}\right)^2};$$

$$K_2(\theta_0,\ \theta_0) = \lim_{\theta\to\theta_0}K_2(\theta,\ \theta_0) = \cos^2\theta_0.$$

Уравнение (3.11) является сингулярным интегральным уравнением нормального типа и его индекс $\varkappa$ в классе функций, которые могут иметь особенность на одном из концов, равен нулю. С другой стороны, однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.11), не имеет отличных от нуля решений. В самом деле, если $\varphi=\psi_2\equiv 0$ (при этом уравнение (3.11) однородное), как было показано при доказательстве единственности решения, то $v\equiv 0$ в области $\overline{D}_2$. Отсюда следует что $\omega_2(y)\equiv 0$ при $-1<y<0$. Следовательно, число k линейных независимых решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.11), равно нулю. Тогда на основании известного равенства $\varkappa=k-k'$ заключаем, что $k'=0$. Отсюда следует, что уравнение (3.11) всегда разрешимо, притом единственным образом.

Определяя из уравнения (3.11) функцию $\omega_2(y)$, подставляя ее в формулу (2.5), затем полагая $y=0$, находим значения функции $\tau(x)$. С помощью найденной функции $\tau(x)$ в области D_1 решим краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx}-u_y)=0,$$
$$u|_{AB}=\tau(x),\quad u|_{AA_0}=f_1(y),\quad u|_{BB_0}=f_2(y),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{AA_0}=\psi_1(y). \tag{3.12}$$

Однозначная разрешимость задачи (3.12) доказана в § 2 гл IV (задача A).

§ 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\frac{\partial}{\partial y}(Lu)=0$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu)=0 \tag{4.1}$$

в области $D=D_1 \cup D_2 \cup I$, определенной в § 1.

Задача III. Требуется найти функцию $u(x, y)$, которая: 1) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$; 2) обладает непрерывными производными u_x и u_y внутри D; 3) является регулярным решением уравнения (4.1) в области D при $y\neq 0$; 4) удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{gathered} u|_{\sigma}=\varphi(s),\quad u|_{AA_0}=f_1(y),\quad u|_{BB_0}=f_2(y),\\ u|_{A_0B_0}=\psi(x), \end{gathered} \tag{4.2}$$

где s — длина дуги кривой σ, отсчитываемая от точки A; f_1, f_2 ψ— заданные непрерывные функции; φ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\varphi(A)=f_1(A),\quad \varphi(B)=f_2(B),\quad f_1(A_0)=\psi(A_0),\quad f_2(B_0)=\psi(B_0).$$

Задача IV. Требуется определить функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям 1)—3) задачи III и граничным условиям

$$u|_{\sigma} = \varphi(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma} = \psi(s),$$
$$u|_{AA_0} = f_2(y), \quad u|_{BB_0} = f_2(y), \tag{4.3}$$

где n — внутренняя нормаль кривой σ; φ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция; $\psi(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера; f_1, f_2 — заданные непрерывные функции, причем $\varphi(A)=f_1(A)$, $\varphi(B)=f_2(B)$.

Задача V. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям 1)—3) задачи III и граничным условиям

$$u|_{AA_0} = f_1(y), \quad u|_{BB_0} = f_2(y), \quad u|_{MB_0} = \psi(x),$$
$$u|_{\sigma} = \varphi(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma_1} = \varphi_1(s), \tag{4.4}$$

где f_1, f_2, ψ, φ, φ_1 — заданные достаточно гладкие функции.

При рассмотрении сформулированных выше задач воспользуемся представлением

$$u(x, y) = v(x, y) + \omega(x) \tag{4.5}$$

решения уравнения (4.1), где $v(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1.5); $\omega(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, которую без ограничения общности подчиним условиям

$$\omega(-1) = \omega(1) = 0. \tag{4.6}$$

§ 5. ЗАДАЧА III

При изучении задачи III дополнительно предполагаем, что кривая σ целиком лежит в полосе, ограниченной прямыми $x=-1$, и $x=1$.

Однородная задача III в силу (4.5) и (4.6) редуцируется к определению в области D регулярного решения $v(x, y)$ уравнения (1.5), удовлетворяющего условиям

$$v|_{AA_0} = 0, \quad v|_{BB_0} = 0, \quad v|_{\sigma} = -\omega(x),$$
$$v|_{A_0B_0} = -\omega(x). \tag{5.1}$$

Из принципа экстремума (§1 гл. II) и первых двух условий (5.1) следует, что $v \equiv 0$ в области $\overline{D}_1$; следовательно, $\omega(x) \equiv 0$ на основании последнего условия (5.1). Тогда опять в силу принципа экстремума и условия $v|_{\sigma} = 0$ имеем $v \equiv 0$ в области $\overline{D}_2$. Так как $v = \omega \equiv 0$ в $\overline{D}$, то единственность решения задачи III доказана.

Теперь переходим к доказательству существования решения задачи III. Заметим, что без ограничения общности можно полагать

$$u(A)=u(B)=u'(A)=u'(B)=0. \tag{5.2}$$

В силу представления (4.5), условий (4.6) и граничных данных (4.2) решение задачи III редуцируется к задаче отыскания в области D регулярного решения уравнения (1.5), удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} &v|_{\sigma}=\varphi(s)-\omega(x(s)), \quad v|_{AA_0}=f_1(y),\\ &v|_{BB_0}=f_2(y), \quad v|_{A_0B_0}=\psi(x)-\omega(x). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Запишем решение уравнения (1.5) в области D_2, удовлетворяющее условиям

$$v|_{\sigma}=\varphi(s)-\omega(x(s)), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0}=\nu(x). \tag{5.4}$$

Оно выражается формулой

$$v(x, y)=\int_{-1}^{1} G(\xi, 0; x, y)\,\nu(\xi)\,d\xi+\int_{\sigma}\frac{\partial G(\xi, \eta; x, y)}{\partial n}\left[\varphi(s)-\omega(\xi(s))\right]ds, \tag{5.5}$$

где $G(\xi, \eta; x, y)$ — функция Грина, определенная в задаче I.

Полагая $y=0$ в (5.5) и обозначая $v(x, 0)=\tau(x)$, получаем

$$\tau(x)=\int_{-1}^{1} G(\xi, 0; x, 0)\,\nu(\xi)\,d\xi+\int_{\sigma}\frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial n}\left[\varphi(s)-\omega(\xi(s))\right]ds. \tag{5.6}$$

Дифференцируя по x, имеем

$$\begin{aligned} \tau'(x)=&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\nu(t)\,dt+\\ &+\int_{\sigma}\frac{\partial^2 G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial x\,\partial n}\left[\varphi(s)-\omega(\xi(s))\right]ds. \end{aligned} \tag{5.7}$$

В силу непрерывности первых производных от функции $v(x, y)$ из уравнения $v_{xx}-v_y=0$, устремляя y к нулю и учитывая $\tau(-1)=\tau(+1)=0$, получаем соотношение между $\tau'(x)$ и $\nu(x)$

$$\tau'(x)=\int_{-1}^{x}\nu(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\,\nu(t)\,dt, \tag{5.8}$$

принесенное из параболической части D_1 области D.

Исключая $\tau'(x)$ из (5.7) и (5.8), имеем сингулярное интегральное уравнение первого рода для определения функции $\nu(x)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\nu(t)\,dt-\int_{-1}^{x}\nu(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-t)\,\nu(t)\,dt=F(x), \tag{5.9}$$

где

$$F(x)=-\int_{\sigma}\frac{\partial^2 G(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial x\partial n}\Big[\varphi\big(\xi(s),\ \eta(s)\big)-\omega\big(\xi(s)\big)\Big]\,ds. \tag{5.10}$$

В силу условий (4.6) и (5.2) функцию $\mu(\xi,\eta)=\varphi(\xi,\eta)-\omega(\xi)$ можно представить в виде

$$\mu(\xi,\eta)=\eta^2\varphi^*(\xi,\eta)-(1-\xi^2)\,\omega^*(\xi). \tag{5.11}$$

Согласно представлению (5.11), из (5.10) находим

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\left[2t(1+x^2)-4x\right]\sqrt{1-t^2}}{(x^2-2xt+1)^2}\,\varphi^*(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\left[2t(1+x^2)-4x\right]\sqrt{1-t^2}}{(x^2-2xt+1)^2}\,\omega^*(t)\,dt.$$

Пользуясь формулами (*) и (**) § 1 гл. II, заключаем, что функция $F(x)$ непрерывна при $-1\leqslant x\leqslant 1$, дважды непрерывно дифференцируема при $-1<x<1$, а ее производная первого порядка имеет конечный предел при $x\to -1$ и $x\to 1$.

Применяя приемы регуляризации (см. § 1 гл. II), получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции $\nu(x)$

$$\nu(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\ t)\,\nu(t)\,dt=E(x), \tag{5.12}$$

где

$$K(x,\ t)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t}{1-xt}\right)(1-t)\,dt-\int_{t}^{1}\left(\frac{1}{t_1-x}+\frac{1}{1-xt_1}\right)dt_1;$$

$$E(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right)F(t)\,dt. \tag{5.13}$$

Однозначная разрешимость уравнения (5.12) доказывается так же, как в случае уравнения (2.13).

Разрешая интегральное уравнение (5.12), имеем

$$\nu(x) = E(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \Gamma(x, t) E(t)\, dt, \tag{5.14}$$

где $\Gamma(x, t)$ — резольвента ядра $K(x, t)$.

Запишем выражение для функции $F(x)$ в виде

$$F(x) = F_1(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{4x - 2\xi(1+x^2)}{(1-2x\xi+x^2)^2\sqrt{1-\xi^2}}\,\omega(\xi)\, d\xi; \tag{5.15}$$

здесь

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1} \frac{x^2-1}{(1-2x\xi+x^2)\sqrt{1-\xi^2}}\,\varphi(\xi, \sqrt{1-\xi^2})\, d\xi.$$

Подставляя функцию (5.15) в (5.13), а затем в (5.14), получаем

$$\nu(x) = E_1(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K_1(x, \xi)\,\omega(\xi)\, d\xi, \tag{5.16}$$

где

$$E_1(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{1-xt}\right) F_1(t)\, dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \Gamma(x, t)\left[\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t_1-t} + \frac{t_1}{1-tt_1}\right) F_1(t_1)\, dt_1\right] dt;$$

$$K_1(x, \xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{t}{1-xt}\right)\frac{4t-2\xi(1+t^2)}{(1-2t\xi+t^2)\sqrt{1-\xi^2}}\, dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \Gamma(x, t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t_1-t} + \frac{t_1}{1-tt_1}\right)\frac{4t_1-2\xi(1+t_1^2)}{[1-2t_1\xi+t_1^2]^2\sqrt{1-\xi^2}}\, dt_1\right] dt.$$

Подставляя найденное значение функции $\nu(x)$ из (5.16) в формулу (5.6), после элементарных преобразований будем иметь

$$\tau(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H(x, \xi)\,\omega(\xi)\, d\xi + g(x), \tag{5.17}$$

где

$$H(x, \xi) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 - 2x\xi + 1)\sqrt{1 - \xi^2}} + \int_{-1}^{1} G(\xi, 0; x, 0) R(\xi_1, \xi) d\xi_1;$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} G(\xi, 0; x, 0) E_1(\xi) d\xi + \int_{\sigma} \frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial n} \varphi(s) ds;$$

$$R(\xi, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{t - x} + \frac{t}{1 - xt} \right) \frac{4t - 2\xi(1 + t^2)}{(1 - 2t\xi + t^2)^2 \sqrt{1 - \xi^2}} dt.$$

Теперь в области D_1 решим первую краевую задачу для уравнения $v_{xx} - v_y = 0$ с краевыми условиями

$$v|_{AA_0} = f_1(y), \quad v|_{BB_0} = f_2(y), \quad v|_{AB} = \tau(x). \tag{5.18}$$

Решение этой задачи выражается формулой

$$v(x, y) = \int_0^y G_\xi^*(x, y; -1, \eta) f_1(\eta) d\eta -$$

$$- \int_0^y G_\xi^*(x, y; 1, \eta) f_2(\eta) d\eta + \int_{-1}^{1} \tau(\xi) G^*(x, y; \xi, 0), d\xi, \tag{5.19}$$

где $G^*(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Пользуясь последним условием из (5.3), получим интегральное уравнение для определения функции $\omega(x)$

$$\omega(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} K(x, t) \omega(t) dt = \delta(x), \tag{5.20}$$

где

$$K(x, t) = \int_{-1}^{1} G^*(x, h; \xi, 0) H(\xi, t) d\xi;$$

$$\delta(x) = \psi(x) + \int_0^h G_\xi^*(x, h; 1, \eta) f_2(\eta) d\eta -$$

$$- \int_0^h G_\xi^*(x, h; -1, \eta) f_1(\eta) d\eta - \int_{-1}^{1} G^*(x, h; \xi, 0) g(\xi) d\xi.$$

Интегральное уравнение (5.20) представляет собой уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи III. Существование решения задачи III доказано.

Единственность решения задачи IV легко доказывается при дополнительном предположении:

$$\frac{dy}{dn} \neq 0 \tag{6.1}$$

всюду вдоль кривой σ.

Для однородной задачи IV, согласно (4.3), (4.5) и (4.6), получаем граничные условия для функции $v(x, y)$

$$v\Big|_{\sigma} = -\omega(x),\ \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\sigma} = -\omega'(x)\frac{dx}{dn},\ v\Big|_{AA_0} = 0,\ v\Big|_{BB_0} = 0. \tag{6.2}$$

Так же, как в случае задачи II (§ 3), заключаем, что при выполнении условия (6.1) функция $v(x, y)$ не достигает своих отличных от нуля экстремальных значений на кривой σ. Тогда, согласно принципу экстремума (§ 1 гл. II) и двум последним условиям из (6.2), $v \equiv 0$ в $\overline{D}_2$, стало быть, $\omega(x) \equiv 0$. Отсюда сразу следует единственность решения задачи IV.

Переходим к доказательству существования решения этой задачи.

Согласно (4.5), (4.3) и (4.6), решение задачи IV редуцируется к определению регулярного в области D решения уравнения (1.5), удовлетворяющего условиям

$$v\Big|_{\sigma} = \varphi(s) - \omega(x(s)),\ \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\sigma} = \psi(s) - \omega'(x)\frac{dx}{dn}, \tag{6.3}$$

$$v\Big|_{AA_0} = f_1(y),\ v\Big|_{BB_0} = f_2(y).$$

Решение уравнения (1.5) в области D_2, удовлетворяющее условиям (5.4), дается формулой (5.5). Входящая в формулу (5.5) функция $\nu(x)$ выражается формулой (5.14).

Преобразуя выражение (5.10) функции $F(x)$ как в задаче II, имеем

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{2\sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\,\varphi'(\theta)\,d\theta +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{2\sin^2\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\,\omega'(\cos\theta)\,d\theta. \tag{6.4}$$

Подставляя выражение (6.4) в (5.13), а затем в формулу (5.14), получаем

$$\nu(x) = E_1(x) + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} K(x, \theta)\,\omega'(\cos\theta)\,d\theta, \tag{6.5}$$

где

$$E_1(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t}{1-xt}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{2\sin\theta}{1-2t\cos\theta+t_1^2}\varphi'(\theta)\,d\theta\right]dt-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\Gamma(x,t)\left\{\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t_1-t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{t_1}{1-tt_1}\right)\left[\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{2\sin\theta}{1-2t_1\cos\theta+t_1^2}\varphi'(\theta)\,d\theta\right]dt_1\right\}dt;$$

$$K(x,\theta) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t}{1-xt}\right)\frac{2\sin^2\theta}{1-2t\cos\theta+t^2}\,dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\Gamma(x,t)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{t_1}{1-tt_1}\right)\frac{2\sin^2\theta}{1-2t_1\cos\theta+t_1^2}\,dt_1\right]dt.$$

Подставляя (6.4) в формулу (5.5), удовлетворяя второму условию (6.3), после необходимых вычислений (таких, как в задаче II) приходим к сингулярному интегральному уравнению относительно неизвестной функции $\omega'(x)$

$$\omega'(\cos\theta_0)\cos\theta_0-\frac{\sin\theta_0}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\omega'(\cos\theta)}{\theta-\theta_0}\,d\theta-$$

$$-\frac{\cos\theta_0}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{K_1(\theta,\theta_0)-K_1(\theta_0,\theta_0)}{\theta-\theta_0}\,\omega'(\cos\theta)\,d\theta+$$

$$+\frac{\sin\theta_0}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{K_2(\theta,\theta_0)-K_2(\theta_0,\theta_0)}{\theta-\theta_0}\,\omega'(\cos\theta)\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}P(\theta,\theta_0)\,\omega'(\cos\theta)\,d\theta = g(\theta_0), \tag{6.6}$$

где

$$K_1(\theta,\theta_0) = \frac{\dfrac{\sin\theta-\sin\theta_0}{\theta-\theta_0}\sin\theta}{\left(\dfrac{\cos\theta-\cos\theta_0}{\theta-\theta_0}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\theta-\sin\theta_0}{\theta-\theta_0}\right)^2};$$

$$K_1(\theta_0, \theta_0) = \lim_{\theta \to \theta_0} K_1(\theta, \theta_0) = \cos\theta_0 \sin\theta_0;$$

$$K(\theta, \theta_0) = \frac{\frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{\theta - \theta_0} \sin\theta}{\left(\frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{\theta - \theta_0}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{\theta - \theta_0}\right)^2};$$

$$K_2(\theta_0, \theta_0) = \lim_{\theta \to \theta_0} K_2(\theta, \theta_0) = -\sin^2\theta_0;$$

$$P(\theta, \theta_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos\theta_0 + t^2} K(t, \theta_0)\, dt -$$

$$- \frac{\cos\theta_0 \sin\theta + \sin\theta_0 \cos\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_0)^2 + (\sin\theta + \sin\theta_0)^2};$$

$$g(\theta_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos\theta_0 + t^2} E_1(t)\, dt +$$

$$+ \frac{\cos\theta_0}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{(\cos\theta - \cos\theta_0)^2 + (\sin\theta - \sin\theta_0)^2} \varphi'(\theta)\, d\theta +$$

$$+ \frac{\sin\theta_0}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos\theta - \sin\theta_0}{(\cos\theta - \cos\theta_0)^2 + (\sin\theta - \sin\theta_0)^2} \varphi'(\theta)\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos\theta_0 \sin\theta + \sin\theta_0 \cos\theta}{(\cos\theta - \cos\theta_0)^2 + (\sin\theta - \sin\theta_0)^2} \varphi'(\theta)\, d\theta - \psi(\theta_0).$$

Однозначная разрешимость уравнения (6.6) доказывается так же, как в случае уравнения (3.11).

Для определения функции $v(x, y)$ в области D_1 достаточно решить первую краевую задачу с условиями

$$v|_{AB} = \tau(x), \; v|_{AA_0} = f_1(y), \; v|_{BB_0} = f_2(y),$$

где функция $\tau(x) = v(x, 0)$ определена формулой (5.6).

§ 7. ЗАДАЧА V

При изучении задачи V дополнительно предположим, что кривая σ целиком лежит в полосе, ограниченной прямыми $x = -1$ и $x = 1$.

Представим неизвестную функцию $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x)=\begin{cases}\omega_1(x), & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \omega_2(x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases} \tag{7.1}$$

причем $\omega_1(0)=\omega_2(0)$.

Для однородной задачи V в силу (4.5), (4.6), (4.4) и (7.1) получим граничные условия

$$\begin{gathered} v|_{AA_0}=0,\ v|_{BB_0}=0,\ v|_{MB_0}=-\omega_2(x),\\ v|_{\sigma}=-\omega(x),\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\sigma_1}=-\omega_1'(x)\frac{dx}{dn}. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Из принципа экстремума (см. § 1 гл. II) и первых двух условий (7.2) следует, что $v(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{D}_1$; таким образом, в силу третьего условия (7.2) $\omega_2(x)\equiv 0$.

Согласно двум последним условиям (7.2), функция $v(x,y)$ не имеет отличного от нуля экстремума на σ_1, и так как $\omega_2\equiv 0$, то $v\equiv 0$ на кривой σ_2. Тогда, пользуясь принципом экстремума, заключаем, что $v\equiv 0$ в $\overline{D}_2$; стало быть, $\omega_1\equiv 0$. Следовательно, $u\equiv 0$ в области $\overline{D}$.

Задача V на основании (4.4), (4.5), (4.6) и (7.1) редуцируется к определению регулярного в области D решения $v(x,y)$ уравнения (1.5), удовлетворяющего условиям

$$\begin{gathered} v|_{AA_0}=f_1(y),\ v|_{BB_0}=f_2(y),\ v|_{MB_0}=\psi(x)-\omega_2(x),\\ v|_{\sigma}=\varphi(s)-\omega(x(s)),\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\sigma_1}=\varphi_1(s)-\omega_1'(x(s))\frac{dx}{dn}. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Поступая так же, как в задаче III (§ 5), находим в области D_1 функцию $v(x,y)$, которая дается формулой (5.17). Пользуясь третьим условием (7.3), получим интегральное уравнение для определения функции $\omega_2(x)$

$$\omega_2(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1 K(x,t)\,\omega_2(t)\,dt=\partial(x), \tag{7.4}$$

где

$$K(x,t)=\int_{-1}^{1}G^*(x,h;\xi,0)\,H(\xi,t)\,d\xi;$$

$$\partial(x)=\psi(x)+\int_0^h G_\xi^*(x,h;1,\eta)\,f_2(\eta)\,d\eta-$$

$$-\int_0^h G_\xi^*(x,h;-1,\eta)\,f_1(\eta)\,d\eta-\int_{-1}^{1}G^*(x,h;\xi,0)\,g(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} K(x, t)\,\omega_1(t)\,dt;$$

G — та же функция, что и в формуле (5.19).

Представив функцию $\omega(x)$ в формуле (5.5) через $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$, вместо функции $\omega_2(x)$ подставим ее значение, найденное из уравнения (7.4). Далее, реализовав третье условие (7.3) так же, как в задаче IV, получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $\omega_1'(x) = \gamma(\theta_0)$

$$\gamma(\theta_0)\cos\theta_0 - \frac{\sin\theta_0}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\gamma(\theta)}{\theta-\theta_0}d\theta - \frac{\cos\theta_0}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{K_1(\theta, \theta_0) - K_1(\theta_0, \theta_0)}{\theta-\theta_0}\gamma(\theta)\,d\theta +$$

$$+ \frac{\sin\theta_0}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{K_2(\theta, \theta_0) - K_2(\theta_0, \theta_0)}{\theta-\theta_0}\gamma(\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} Q(\theta, \theta_0)\gamma(\theta)\sin\theta d\theta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} Q_1(\theta, \theta_0)\gamma(\theta)\sin\theta d\theta = h(\theta_0). \tag{7.5}$$

Однозначная разрешимость уравнения (7.5), так же, как и в случае задачи II, устанавливается на основе единственности решения задачи.

Глава VII

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В настоящей главе изучаются некоторые краевые задачи как в конечных, так и в бесконечных областях для уравнения третьего порядка вида

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \beta(x)\frac{\partial u}{\partial y} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

которое будем называть уравнением с кратными характеристиками.

§ 1. ЗАДАЧА КАТТАБРИГА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

1. В области $D\{0<x<1,\ 0<y\leqslant 1\}$ для уравнения

$$L(u) \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial y} = F(x, y, u, u_x) \tag{1.1}$$

рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача K. Найти регулярное в области D решение уравнения (1.1), непрерывное вместе с производной u_x в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{array}{l} u(0, y) = \varphi_1(y),\ u_x(0, y) = \varphi_2(y), \\ u(1, y) = \varphi_3(y),\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ u(x, 0) = \varphi_0(x),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{array}\right\}, \tag{1.2}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — заданные непрерывные функции; $\varphi_0(x)$ непрерывна вместе с производной, причем $\varphi_1(0)=\varphi_0(0)$, $\varphi_3(0)=\varphi_0(1)$, $\varphi_2(0)=\varphi_0'(0)$. Задачу (1.1), (1.2) в случае линейного уравнения (1.1) исследовал Каттабрига [87] с помощью потенциалов и аппарата преобразования Лапласа.

2. Функция Грина для задачи K. Рассмотрим уравнение

$$L(u) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.3}$$

Имеет место тождество

$$\varphi L(\psi) - \psi M(\varphi) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\varphi\psi_{\xi\xi} - \varphi_\xi \psi_\xi + \varphi_{\xi\xi}\psi\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}(\varphi\psi),$$

где $M \equiv \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^3}{\partial x^3}$ — оператор, сопряженный с оператором L, а φ и ψ — достаточно гладкие функции. Проинтегрировав тождество по области D, получим

$$\iint_D [\varphi L(\psi) - \psi M(\varphi)]\, d\xi\, d\eta = \int_\Gamma (\psi_{\xi\xi}\varphi - \varphi_\xi \psi_\xi + \\ + \varphi_{\xi\xi}\psi)\, d\eta + (\varphi\psi)\, d\xi, \tag{1.4}$$

где правый интеграл берется по всей границе области D. Как известно [87], фундаментальные решения уравнения (1.3) имеют вид

$$U(x, y;\ \xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(y-\eta)^{1/3}} f\left(\dfrac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right), & y > \eta, \\ 0, & y \leqslant \eta, \end{cases}$$

$$V(x, y;\ \xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(y-\eta)^{1/3}} \varphi\left(\dfrac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right), & y \geqslant \eta, \\ 0, & y \leqslant \eta, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\pi\sqrt{t}}{3\sqrt{3}}\left[I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} t^{3/2}\right) + I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} t^{3/2}\right)\right]; \\ \varphi(t) &= \frac{\pi\sqrt{t}}{3}\left[I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} t^{3/2}\right) - I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} t^{3/2}\right)\right]; \end{aligned} \tag{1.5}$$

$I_\nu(z)$ — функции Бесселя. Функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ называются функциями Эйри [80]; они удовлетворяют уравнению

$$z''(t) + \frac{t}{3} z(t) = 0. \tag{1.6}$$

Для функций $U(x, y;\ \xi, \eta)$ и $V(x, y;\ \xi, \eta)$ справедливы оценки

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial^{i+j} U(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial x^i\, \partial y^j}\right| \\ \left|\dfrac{\partial^{i+j} V(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial x^i\, \partial y^j}\right| \end{array}\right\} < C \dfrac{|x-\xi|^{\frac{2i+6j-1}{4}}}{|y-\eta|^{\frac{2i+6j+1}{4}}} \\ \text{при } \dfrac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}} \to +\infty, \quad i + j \geqslant 1, \quad C - \text{const} > 0 \\ \left|\dfrac{\partial^{i+j} U(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial x^i\, \partial y^j}\right| < \dfrac{C_1}{|y-\eta|^{\frac{i+3j+1}{3}}} \exp\left(-C_2 \dfrac{|x-\xi|^{3/2}}{|y-\eta|^{1/2}}\right) \\ \text{при } \dfrac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}} \to -\infty, \quad i + j \geqslant 1, \quad C_1, C_2 - \text{const} > 0 \end{array}\right\}. \tag{1.7}$$

Теперь в формуле (1.4) за функции φ и ψ возьмем соответственно функции $u(x, y)$ (любое регулярное решение уравнения (1.3)) и $U(x, y;\ \xi, \eta)$. Пусть область D^ε определяется неравенствами $\{0<\xi<1,\ 0<\eta\leqslant y-\varepsilon\}$, где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число. Тогда тождество (1.4) принимает вид

$$0=\int_0^y (U_{\xi\xi}u-U_\xi u_\xi+Uu_{\xi\xi})\big|_{\xi=1}\,d\eta-\int_0^{y-\varepsilon}(U_{\xi\xi}u-U_\xi u_\xi+$$

$$+Uu_{\xi\xi})\big|_{\xi=0}\,d\eta+\int_0^1 Uu\big|_{\eta=y-\varepsilon}d\xi-\int_0^1 Uu\big|_{\eta=0}d\xi.$$

Устремляя ε к нулю и учитывая равенства [87]

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 U(x, y;\ \xi, y-\varepsilon)\,u(\xi, y-\varepsilon)\,d\xi=\pi u(x, y),$$

получаем

$$\pi u(x, y)=\int_0^y (U_{\xi\xi}u-U_\xi u_\xi+Uu_{\xi\xi})\big|_{\xi=0}\,d\eta-\int_0^y (U_{\xi\xi}u-$$

$$-U_\xi u_\xi+Uu_{\xi\xi})\big|_{\xi=1}+\int_0^1 U(x, y;\ \xi, 0)\,u(\xi, 0)\,d\xi. \qquad (1.8)$$

Пусть теперь $W(x, y;\ \xi, \eta)$ — любое регулярное решение уравнения

$$M(v)\equiv\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{\partial^3 v}{\partial\xi^3}=0, \qquad (1.9)$$

а $u(x, y)$ — любое регулярное решение уравнения (1.3). Тогда в формуле (1.4), полагая $\varphi=W$, $\psi=u$, имеем

$$0=\int_0^y (u_{\xi\xi}W-u_\xi W_\xi+uW_{\xi\xi})\big|_{\xi=1}\,d\eta-\int_0^y (u_{\xi\xi}W-$$

$$-u_\xi W_\xi+uW_{\xi\xi})\big|_{\xi=0}\,d\eta+\int_0^1 Wu\big|_{\eta=y}d\xi-\int_0^1 Wu\big|_{\eta=0}d\xi. \qquad (1.10)$$

Из равенств (1.8) и (1.10) находим

$$\pi u(x, y)=\int_0^y [u_{\xi\xi}(W-U)+u_\xi(-W+U)_\xi+u(W-U)_{\xi\xi}]\big|_{\xi=1}d\eta+$$

$$+\int_0^y \left[u_{\xi\xi}(-W+U) + u_\xi (W-U)_\xi + u(-W+U)_{\xi\xi} \right]\Big|_{\xi=0} d\eta +$$

$$+\int_0^1 (-W+U)\, u\Big|_{\eta=0} d\xi + \int_0^1 Wu\Big|_{\eta=y} = d\xi. \qquad (1.11)$$

Если регулярное решение $W(x, y;\ \xi, \eta)$ уравнения (1.9) удовлетворяет условиям

$$W(x, y;\ \xi, \eta)\big|_{\xi=1} = U(x, y;\ \xi, \eta)\big|_{\xi=1},\ W_{\xi=0} = U\big|_{\xi=0},$$

$$W_\xi\big|_{\xi=1} = U_\xi\big|_{\xi=1},\ W\big|_{\eta=y} = 0, \qquad (1.12)$$

то из формулы (1.11) будем иметь

$$\pi u(x, y) = \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y;\ 0, \eta)\, u(0, \eta)\, d\eta -$$

$$-\int_0^y G_\xi(x, y;\ 0, \eta)\, u_\xi(0, \eta)\, d\eta - \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y;\ 1, \eta)\, u(1, \eta)\, d\eta +$$

$$+\int_0^1 G(x, y;\ \xi, 0)\, u(\xi, 0)\, d\xi, \qquad (1.13)$$

где

$$G(x, y;\ \xi, \eta) = U(x, y;\ \xi, \eta) - W(x, y;\ \xi, \eta).$$

Формула (1.13) дает решение задачи K для уравнения (1.3). Однако для этого нам необходимо доказать существование функции $W(x, y;\ \xi, \eta)$, удовлетворяющей уравнению (1.9) и условиям (1.12). Существование такой функции $W(x, y;\ \xi, \eta)$ докажем несколько позже, а пока укажем на некоторые свойства функции $G(x, y;\ \xi, \eta)$. Пусть решение $W(x, y;\ \xi, \eta)$ задачи (1.9), (1.12) существует. Наряду с этой функцией рассмотрим функцию $\overline{W}(x, y;\ \xi, \eta)$, которая определена в области D для $y>\eta$ и как функция переменных (x, y) удовлетворяет уравнению (1.3) и условиям

$$\overline{W}\big|_{y=\eta} = 0,\ \overline{W}\big|_{x=0} = U\big|_{x=0},\ \overline{W}\big|_{x=1} = U\big|_{x=1},\ \overline{W}_x\big|_{x=0} = U_x\big|_{x=0}.$$

Докажем, что $W(x, y;\ \xi, \eta) = \overline{W}(x, y;\ \xi, \eta)$. Очевидно, что для любого регулярного решения $\overline{u}$ уравнения (1.9) справедлива формула

$$\pi\overline{u}(\xi, \eta) = \int_\eta^1 (U_{xx}\overline{u} - U_x\overline{u}_x + U\overline{u}_{xx})\big|_{x=1} dy - \int_\eta^1 (U_{xx}\overline{u} -$$

$$-U_x\overline{u}_x + U\overline{u}_{xx})\big|_{x=0} dy + \int_0^1 U(x, 1;\ \xi, \eta)\, \overline{u}(x, 1)\, dx, \qquad (1.14)$$

аналогичная (1.8), а также формула

$$0=\int_{\eta}^{1}(\bar{u}_{xx}\bar{W}-\bar{u}_x\bar{W}_x+\bar{u}\bar{W}_{xx})\Big|_{x=1}dy-\int_{\eta}^{1}(\bar{u}_{xx}\bar{W}-\bar{u}_x\bar{W}+$$

$$+\bar{u}\bar{W}_{xx})\Big|_{x=0}dy+\int_{0}^{1}\bar{W}\bar{u}\Big|_{y=1}dx-\int_{0}^{1}\bar{W}\bar{u}\Big|_{y=\eta}dx, \qquad (1.15)$$

аналогичная (1.10). Из формул (1.14), (1.15), воспользовавшись свойствами функции $\bar{W}(x, y;\ \xi, \eta)$, получим

$$\pi\bar{u}(\xi,\eta)=\int_{\eta}^{1}\bar{G}_{xx}(1,\ y;\ \xi,\eta)\,\bar{u}(1,y)\,dy-\int_{\eta}^{1}\bar{G}_{xx}(0,\ y;\ \xi,\eta)\,\bar{u}(0,y)dy-$$

$$-\int_{\eta}^{1}\bar{G}_x(1,\ y;\ \xi,\eta)\,\bar{u}_x(1,\ y)\,dy+\int_{0}^{1}\bar{G}(x,1;\ \xi,\eta)\,\bar{u}(1,x)\,dx, \qquad (1.16)$$

где

$$\bar{G}(x,y;\ \xi,\eta)=U(x,y;\ \xi,\eta)-\bar{W}(x,y;\ \xi,\eta).$$

Очевидно, что здесь выполняются условия

$$\bar{G}\Big|_{x=0}=\bar{G}_x\Big|_{x=0}=\bar{G}\Big|_{x=1}=\bar{G}\Big|_{y=\eta}=0. \qquad (1.17)$$

Пусть $\eta<\theta<y$. Применив формулу (1.13) к области $\{0<x<1,\ \theta<y\leqslant 1\}$ и взяв в качестве регулярного решения $u(\xi,\eta)$ функцию $G(x, y;\ \xi, \eta)$, будем иметь

$$\pi\bar{G}(x,y;\ \xi,\ \eta)=\int_{0}^{1}G(x,\ y;\ x',\ \theta)\,\bar{G}(x',\theta;\ \xi,\ \eta)\,dx', \qquad (1.18)$$

так как остальные интегралы обращаются в нуль в силу (1.17). Далее, применив формулу (1.16) к области $\{0<\xi<1,\ 0<\eta<\theta\}$ и взяв в качестве регулярного решения $\bar{u}(\xi,\eta)$ функцию $G(x, y;\ \xi,\eta)$, получим

$$\pi G(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=\int_{0}^{1}\bar{G}(x',\theta;\ \xi,\eta)\,G(x,\ y;\ x',\ \theta)\,dx'. \qquad (1.19)$$

Здесь остальные интегралы также обращаются в нуль в силу

$$G\big|_{\xi=1}=G_\xi\big|_{\xi=1}=G_{\xi=0}=G\big|_{\eta=y}=0. \qquad (1.20)$$

Сравнив (1.18) и (1.19), получим $G(x,y;\ \xi,\eta)=\bar{G}(x,y;\ \xi,\eta)$, что и требовалось доказать. Отсюда заключаем, что функция $G(x,y;\ \xi,\eta)$ по переменным (x,y) удовлетворяет условию (1.17), а по переменным (ξ,η) — условию (1.20). Эту функцию назовем функцией Грина для задачи K.

Если задано неоднородное уравнение

$$L(u)=f(x,y), \qquad (1.21)$$

то к правой части формулы (1.13) следует прибавить слагаемое

$$-\iint_D G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

т. е. решение однородной задачи K для неоднородного уравнения (1.21) будет иметь вид

$$u(x, y) = -\frac{1}{\pi}\iint_D G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Для доказательства существования функции $G(x, y; \xi, \eta)$ достаточно доказать существование функции $W(x, y; \xi, \eta)$, удовлетворяющей условиям (1.12) и уравнению (1.9). Решение задачи (1.9), (1.12) ищем в виде

$$W(x, y; \xi, \eta) = \int_\eta^y U_x(1, \tau; \xi, \eta)\, \alpha_1(x, y; \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_\eta^y U_{xx}(0, \tau; \xi, \eta)\, \alpha_2(x, y; \tau)\, d\tau + \int_\eta^y V_x(1, \tau; \xi, \eta)\, \alpha_3(x, y; \tau)\, d\tau, \quad (1.22)$$

где $U(x, y; \xi, \eta)$ и $V(x, y; \xi, \eta)$ — функции, определенные выше, а $\alpha_i(x, y, \tau)$ $(i=1, 2, 3)$ — пока неизвестные функции. Удовлетворяя граничным условиям (1.12), получаем

$$U(x, y; 0, \eta) = \int_\eta^y U_x(1, \tau; 0, \eta)\, \alpha_1(x, y, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_\eta^y U_{xx}(0, \tau; \xi, \eta)\Big|_{\xi=0} \alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau + \int_\eta^y V_x(1, \tau; 0, \eta)\, \alpha_3(x, y, \tau)\, d\tau, \quad (1.23)$$

$$U(x, y; 1, \eta) = \int_\eta^y U_x(1, \tau; 1, \eta)\, \alpha_1(x, y, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_\eta^y U_{xx}(0, \tau; 1, \eta)\, \alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau + \int_\eta^y V_x(1, \tau; 0, \eta)\, \alpha_3(x, y, \tau)\, d\tau, \quad (1.24)$$

$$U_\xi(x, y; 1, \eta) = \int_\eta^y U_{x\xi}(1, \tau; \xi, \eta)\Big|_{\xi=1} \alpha_1(x, y, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_\eta^y U_{xx\xi}(0, \tau; 1, \eta)\, \alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_\eta^y V_{x\xi}(1, \tau; \xi, \eta)\Big|_{\xi=1} \alpha_3(x, y, \tau)\, d\tau. \quad (1.25)$$

Это система интегральных уравнений типа уравнений Вольтерра относительно неизвестных функций α_i. Покажем, что система уравнений (1.23), (1.24), (1.25) допускает решение, обладающее свойствами

$$\alpha_2 \in L_2(0, y), \ \alpha_1, \ \alpha_3 \in C(0, y).$$

Из (1.23) имеем

$$U(x, y; 0, \eta) = \int_\eta^y \frac{1}{(\tau-\eta)^{2/3}} f'\left(\frac{1}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right) \alpha_1(x, y, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_\eta^y U_{xx}(0, \tau; \xi, \eta)\big|_{\xi=0} \alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau + \int_\eta^y \frac{1}{(\tau-\eta)^{2/3}} \varphi'\left(\frac{1}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right) \times$$

$$\times \alpha_3(x, y, \tau)\, d\tau.$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$I = \int_\eta^y U_{xx}(0, \tau; \xi, \eta)\, \alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau = \frac{1}{3} \int_\eta^y \frac{\xi}{(\tau-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{-\xi}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right) \times$$

$$\times \alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $f(t)$ удовлетворяет уравнению (1.6). Учитывая соотношение (см. [87])

$$\lim_{\xi \to 0} I = \frac{\pi}{3} \alpha_2(x, y, \eta),$$

имеем

$$U(x, y; 0, \eta) = \int_\eta^y \frac{1}{(\tau-\eta)^{2/3}} f'\left(\frac{1}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right) \alpha_1(x, y, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{\pi}{3} \alpha_2(x, y, \eta) + \int_\eta^y \frac{1}{(\tau-\eta)^{2/3}} \varphi'\left(\frac{1}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right) \alpha_3(x, y, \tau)\, d\tau. \quad (1.26)$$

Теперь рассмотрим уравнение (1.24):

$$U(x, y; 1, \eta) = f'(0) \int_\eta^y \frac{\alpha_1(x, y, \tau)}{(\tau-\eta)^{2/3}} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{3} \int_\eta^y \frac{1}{(\tau-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{-1}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right) \alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau + \varphi'(0) \int_\eta^y \frac{\alpha_3(x, y, \tau)}{(\tau-\eta)^{2/3}} d\tau.$$

Умножим обе части этого равенства на $(z-\eta)^{-\frac{1}{3}}$ (z — параметр) и проинтегрируем в пределах от y до z. Далее, продифференцировав по z, получим

$$\int\limits_{y}^{z} \frac{U_{\eta}(x, y; 1, \eta)}{(z-\eta)^{1/3}} d\eta = -f'(0)\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\alpha_1(x, y, z) +$$

$$+\int\limits_{y}^{z}\alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau \int\limits_{\tau}^{z} \frac{1}{(z-\eta)^{1/3}} \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{(\tau-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{-1}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right)\right] d\eta -$$

$$-\varphi'(0)\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\alpha_3(x, y, z). \qquad (1.27)$$

Рассмотрим уравнение (1.25):

$$U_{\xi}(x, y; 1, \eta) = \frac{1}{3}\int\limits_{\eta}^{y} \frac{(1-\xi)}{(\tau-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{1-\xi}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right)\Bigg|_{\xi=1}\alpha_1(x, y, \tau)\, d\tau +$$

$$+\int\limits_{\eta}^{y} \frac{1}{(\tau-\eta)^{4/3}} f'''\left(\frac{-1}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right)\alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{3}\int\limits_{\eta}^{y} \frac{(1-\xi)}{(\tau-\eta)^{4/3}}\varphi\left(\frac{1-\xi}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right)\Bigg|_{\xi=1}\alpha_3(x, y, \tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\alpha_1(x, y, \eta) + \int\limits_{\eta}^{y} \frac{1}{(\tau-\eta)^{4/3}} f'''\left(\frac{-1}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right)\alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau. \quad (1.28)$$

Здесь мы учитывали соотношения

$$\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(t)\, dt = 0, \quad \int\limits_{0}^{\infty} f(t)\, dt = \frac{2\pi}{3}, \quad \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\, dt = \frac{\pi}{3},$$

легко выводимые из (1.5).

Введем следующие обозначения:

$$\omega_1(x, y, \eta) = U(x, y; 0, \eta),\ \omega_2(x, y, \eta) = \int\limits_{y}^{\eta} \frac{U_z(x, y; 1, z)}{(\eta-z)^{1/3}} dz,$$

$$\omega_3(x, y, \eta) = U_{\xi}(x, y; 1, \eta),\ \ K_{11}(\tau, \eta) = \frac{1}{(\tau-\eta)^{2/3}} f'\left(\frac{1}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right),$$

$$K_{31}(\tau, \eta) = \frac{1}{(\tau-\eta)^{2/3}}\varphi'\left(\frac{1}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right),$$

$$K_{22}(\tau, \eta) = \int\limits_{\tau}^{\eta} \frac{1}{(\eta - z)^{1/3}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{(\tau - z)^{1/3}} f\left(\frac{-1}{(\tau - z)^{1/3}} \right) \right] dz,$$

$$K_{32}(\tau, \eta) = \frac{1}{(\tau - \eta)^{1/3}} f''' \left(\frac{1}{(\tau - \eta)^{1/3}} \right).$$

Тогда система (1.26)—(1.28) принимает вид

$$\omega_1(x, y, \eta) = \int\limits_{\eta}^{y} K_{11}(\tau, \eta)\, \alpha_1(x, y, \tau)\, d\tau + \frac{\pi}{3} \alpha_2(x, y, \eta) + \\ + \int\limits_{\eta}^{y} K_{31}(\tau, \eta)\, \alpha_3(x, y, \tau)\, d\tau, \tag{1.29}$$

$$\omega_2(x, y, \eta) = -f'(0) \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \alpha_1(x, y, \eta) + \int\limits_{\eta}^{y} K_{23}(\tau, \eta)\, \alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau - \\ - \varphi'(0) \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \alpha_3(x, y, \eta),$$

$$\omega_3(x, y, \eta) = \frac{2\pi}{3} \alpha_1(x, y, \eta) + \int\limits_{\eta}^{y} K_{32}(\tau, \eta)\, \alpha_2(x, y, \tau)\, d\tau,$$

где $\omega_1 \in L_2(0, y)$, ω_2, $\omega_3 \in C(0, y)$, а $K_{ij}(\tau, y)$ имеет интегрируемые особенности. Исключая из системы (1.29) неизвестные α_1 и α_3, получаем

$$h(x, y, \tau) = \alpha_2(x, y, \eta) + \int\limits_{\eta}^{y} K^*(\xi, \eta)\, \alpha_2(x, y, \xi)\, d\xi, \tag{1.30}$$

где

$$h(x, y, \eta) = \frac{3}{\pi} \omega_1(x, y, \eta) - \frac{9}{4\pi^2} \int\limits_{\eta}^{y} \Big[K_{11}(\tau, \eta)\, \omega_3(x, y, \tau) - \\ - \frac{1}{\varphi'(0)\sqrt{3}} K_{31}(\tau, \eta)\, \omega_2(x, y, \tau) - \frac{f'(0)}{\varphi'(0)} K_{31}(\tau, \eta)\, \omega_3(x, y, \tau) \Big] d\tau; \tag{1.31}$$

$$K^*(\xi, \eta) = \int\limits_{\xi}^{y} \Big[\frac{g f'(0)}{\varphi'(0)\pi^2} K_{31}(\tau, \eta)\, K_{32}(\xi, \eta) - \frac{3\sqrt{3}}{\varphi'(0) 2\pi^2} \times \\ \times K_{31}(\tau, \eta)\, K_{22}(\xi, \eta) - \frac{9}{2\pi^2} K_{11}(\tau, \eta)\, K_{32}(\xi, \eta) \Big] d\tau. \tag{1.32}$$

Из формул (1.31) и (1.32) видно, что $h(x, y, \eta) \in L_2(0, y)$, а функция $K^*(\xi, \eta)$ имеет слабую особенность. Отсюда следует, что уравнение (1.30) имеет решение, принадлежащее классу L_2. Подставляя это решение в два последних уравнения системы (1.29), убеждаемся, что α_1, $\alpha_3 \in C(0, y)$, что и требовалось доказать.

Легко заметить, что для функции Грина справедливы те же оценки, что и для $U(x, y; \xi, \eta)$.

3. Решение задачи K для нелинейного уравнения. Рассмотрим задачу K для уравнения (1.1). Обозначим $u_x = p$ и всегда будем считать, что функция $F(x, y, u, p)$ определена для $(x, y) \in \overline{D}$, $-\infty < u$, $p < +\infty$.

Полагая

$$u(x, y) = v(x, y) + z(x, y),$$

($v(x, y)$ — решение задачи (1.3), (1.2), найденное в п. 2), для функции $z(x, y)$ получаем уравнение

$$L(z) = F(x, y, v+z,\ v_x + z_x) = E(x, y, z, p) \tag{1.33}$$

и однородные граничные условия

$$z(0, y) = 0,\ z_x(0, y) = 0,\ z(1, y) = 0,\ z(x, 0) = 0. \tag{1.34}$$

На основании результатов п. 2 заключаем, что задача (1.33), (1.34) эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению

$$z(x, y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^y G(x, y; \xi, \eta)\, E(\xi, \eta, z, p)\, d\xi d\eta. \tag{1.35}$$

Уравнение (1.35) будем решать методом последовательных приближений. Пусть

$$|E(x, y, z, p)| < M,\ |z| < N_1, |p| < N_2,\ N = \min\{N_1, N_2\}, \tag{1.36}$$

кроме того, E удовлетворяет условию Липшица по переменным z, p.

Положим

$$z^{(0)} \equiv 0,$$

$$z^{(n)}(x, y) = -\frac{1}{\pi}\iint_D G(x, y; \xi, \eta)\, E\left(\xi, \eta, z^{(n-1)}, p^{(n-1)}\right) d\xi d\eta. \tag{1.37}$$

Отсюда, полагая $n = 1$ и пользуясь оценкой функции Грина (1.7), имеем

$$\left|\frac{\partial^l z^{(1)}}{\partial x^l}\right| \leqslant \frac{CM}{\pi}\int_0^1\int_0^y \frac{|x-\xi|^{\frac{2l-1}{4}}}{(y-\eta)^{\frac{2l+1}{4}}}\, d\xi d\eta <$$

$$< \frac{CM}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^y \frac{|x-\xi|^{\frac{1}{4}}}{(y-\eta)^{3/4}}\,d\xi d\eta < \frac{4\cdot 2\cdot CM}{\pi}\,y^{\frac{1}{4}}\quad (i=0,\ 1),$$

где C — некоторая постоянная, входящая в оценку функции Грина. Чтобы при $(x, y)\in\bar{D}$ значения аргументов z, p функции E удовлетворяли неравенствам (1.36), при которых $|E|\leqslant M$, необходимо выполнение условия

$$\frac{8CMy^{\frac{1}{4}}}{\pi}\leqslant N$$

или

$$y\leqslant\left(\frac{\pi N}{8CM}\right)^4. \tag{1.38}$$

Тогда из (1.37) при $n=2$ найдем, что

$$\left|\frac{\partial^i\ z^{(2)}}{\partial x^i}\right|\leqslant\frac{8CM}{\pi}\,y^{\frac{1}{4}}.$$

Согласно (1.38),

$$\left|\frac{\partial^i\ z^{(2)}}{\partial x^i}\right|\leqslant N,$$

т. е. при втором приближении аргументы z, p функции E не выходят из ограниченной области (1.36). Отсюда, применяя полную математическую индукцию, заключаем, что ни одно из последовательных приближений не выйдет из области (1.36), если выполнено неравенство (1.38).

Теперь покажем, что пределы последовательностей $\left\{\frac{\partial^i z}{\partial x^i}\right\}$ $(i=0,1)$ существуют. Для этого достаточно доказать сходимость ряда

$$\frac{\partial^i\ z^{(0)}}{\partial x^i}+\left(\frac{\partial^i\ z^{(1)}}{\partial x^i}-\frac{\partial^i\ z^{(0)}}{\partial x^i}\right)+\cdots+\left(\frac{\partial^i\ z^{(n)}}{\partial x^i}-\frac{\partial^i\ z^{(n-1)}}{\partial x^i}\right)+\cdots. \tag{1.39}$$

Оценим абсолютные величины членов ряда (1.39)

$$\left|\frac{\partial^i\ (z^{(1)}-z^{(0)})}{\partial x^i}\right|\leqslant\frac{2CM}{\pi}\int\limits_0^y (y-\eta)^{-\frac{3}{4}}d\eta=\frac{2CM}{\pi}\,y^{\frac{1}{4}}B\left(1,\frac{1}{4}\right),$$

где

$$B(\nu,\mu)=\int\limits_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx$$

— эйлеров интеграл первого рода. Далее

$$\left|\frac{\partial^i (z^{(2)} - z^{(1)})}{\partial x^i}\right| \leqslant \frac{1}{\pi} 2C \int_0^1 \int_0^y \frac{|x-\xi|^{\frac{1}{4}}}{(y-\eta)^{3/4}} |E(\xi, \eta, z^{(1)}, p^{(1)}) -$$

$$- E(\xi, \eta, z^{(0)}, p^{(0)})| d\xi d\eta \leqslant \frac{2^2 LC^2}{\pi^2} 2M \int_0^y (y-\eta_1)^{-3/4} d\eta_1 \times$$

$$\times \int_0^{\eta_1} (\eta_1 - \eta_2)^{-\frac{3}{4}} d\eta_2 = \frac{2^3 C^2}{\pi^2} LMy^{\frac{2}{4}} B\left(1, \frac{1}{4}\right) B\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

где L — константа условия Липшица.

Пользуясь методом полной индукции, легко показать, что

$$\left|\frac{\partial^i (z^{(n)} - z^{(n-1)})}{\partial x^i}\right| \leqslant \frac{2^{2n-1} C^n L^{n-1}}{\pi^n} M \int_0^y (y-\eta_1)^{-\frac{3}{4}} d\eta_1 \times$$

$$\times \int_0^{\eta_1} (\eta_1 - \eta_2)^{-\frac{3}{4}} d\eta_2 \cdots \int_0^{\eta_{n-1}} (\eta_{n-1} - \eta_n) d\eta_n =$$

$$= \frac{2^{2n-1} C^n L^{n-1}}{\pi^n} y^{\frac{n}{4}} \prod_{j=1}^{n} B\left(\frac{j-1}{4} + 1, \frac{1}{4}\right). \qquad (1.40)$$

Отсюда видно, что каждый член ряда (1.39) не превосходит по модулю соответствующих членов степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} C^n L^{n-1}}{\pi^n} My^{\frac{n}{4}} \prod_{j=1}^{n} B\left(\frac{j-1}{4} + 1, \frac{1}{4}\right). \qquad (1.41)$$

Покажем сходимость ряда (1.41). Применяя признак Даламбера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 CL}{\pi} y^{\frac{1}{4}} B\left(\frac{n}{4} + 1, \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Ряд (1.41) сходится равномерно. Тогда ряд (1.39) сходится абсолютно и равномерно. Переходя к пределу под знаком интеграла в (1.35), получаем

$$z(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int\int_D G(x, y; \xi, \eta) E(\xi, \eta, z, p) d\xi d\eta.$$

Исходя из формулы (1.22), легко показать, что функция $z(x, y)$, определенная формулой (1.35), удовлетворяет уравнению (1.1) и однородным условиям (1.34) (см. § 2 гл. IV).

Замечание. Мы доказали, что решение задачи (1.33), (1.34) существует в области $\{0<x<1,\ 0<y\leqslant h_0\}$ для некоторого h_0 (см. (1.38)), хотя задача была поставлена для области $\{0<x<1,\ 0<y\leqslant 1\}$. Если окажется, что $h_0\geqslant 1$, то, очевидно, наша задача полностью решена. Если же $h_0<1$, то найденное в области $\{0<x<1,\ 0<y\leqslant h_0\}$ решение может быть продолжено (см. § 2 гл. IV).

Теперь докажем единственность решения задачи (1.1), (1.2). Пусть существуют два решения $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$. Тогда их разность $u(x, y)=u_1(x, y)-u_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$L(u)=F_1(x, y)-F_2(x, y)=\varphi(x, y),$$

где

$$F_k(x, y)=F(x, y, u_k, p_k)\quad (k=1,\ 2),$$

и однородным граничным условиям (1.2). Решение этой задачи, согласно результатам п. 2, запишется в виде

$$u(x, y)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D G(x, y;\ \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\,d\xi d\eta. \tag{1.42}$$

Пусть $\Phi=\max\limits_D|\varphi(x, y)|$. Выше была получена оценка

$$\left|\frac{\partial^l u}{\partial x^l}\right|\leqslant\frac{8\Phi C}{\pi}\,y^{\frac{1}{4}},$$

или

$$\left|\frac{\partial^l u}{\partial x^l}\right|\leqslant\frac{2\Phi C}{\pi}\int\limits_0^y (y-\eta_1)^{-\frac{3}{4}}d\eta_1. \tag{1.43}$$

Пользуясь оценкой (1.43), имеем

$$|\varphi(x, y)|=|F_1(x, y)-F_2(x, y)|\leqslant L(|u_1-u_2|+|p_1-p_2|)=$$
$$=L(|u|+|p|)=L\,\frac{2^2\Phi C}{\pi}\int\limits_0^y (y-\eta_1)^{-\frac{3}{4}}d\eta_1, \tag{1.44}$$

где L — константа условий Липшица. Подставляя оценку (1.44) в (1.42), получаем

$$\left|\frac{\partial^l u}{\partial x^l}\right|\leqslant\frac{2^3 C}{\pi^2}L\Phi C\int\limits_0^y (y-\eta_1)^{-\frac{3}{4}}\,d\eta_1\int\limits_0^{h_1}(\eta_1-\eta_2)\,d\eta_2=$$

$$= \frac{2^3C}{\pi^2} L\Phi C y^{\frac{2}{4}} B\left(1, \frac{1}{4}\right) B\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right). \tag{1.45}$$

Учитывая (1.45), для функции $\varphi(x, y)$ получаем новую оценку

$$|\varphi(x, y)| \leqslant L(|u| + |p|) \leqslant \frac{2^4C^2}{\pi^2} L^2 \Phi y^{\frac{2}{4}} B\left(1, \frac{1}{4}\right) B\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Эту оценку снова подставляем в формулу (1.42) и т. д.; после n-го шага итерации будем иметь

$$\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right| \leqslant \frac{2^{2n-1}C^n L^{n-1}}{\pi^2} \Phi y^{\frac{n}{4}} \prod_{j=1}^{n} B\left(\frac{j-1}{4} + 1, \frac{1}{4}\right). \tag{1.46}$$

Ряд (1.41) сходится. Поэтому при $n \to \infty$ правая часть неравенства (1.46) стремится к нулю как n-й член сходящегося ряда. Итак, при $n \to \infty$ имеем $u \equiv 0$, что и требовалось доказать.

§ 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

1. Рассмотрим области

$$D_1 = \{0 < x < \infty, \quad 0 < y \leqslant h_1\},$$
$$D_2 = \{-\infty < x < 0, \quad 0 < y \leqslant h_2\},$$
$$D_3 = \{0 < x < 1, \quad -\infty < y \leqslant -h_3\},$$

где h_1, h_2, h_3 — некоторые положительные числа. В указанных областях для уравнения

$$L(u) = u_{xxx} - u_y = 0 \tag{2.1}$$

рассмотрим следующие краевые задачи.

Задача K_1. Найти регулярное в области D_1 решение уравнения (2.1), непрерывное в $\bar{D}_1$ (причем $u(x, y) \to 0$ при $x \to +\infty$ и производная u_x непрерывна вплоть до границы $x=0$) и удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h_1,$$
$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

Задача K_2. Требуется определить регулярное в области D_2 решение уравнения (2.1), непрерывное в $\bar{D}_2$ (причем $u(x, y)$ и $u_x(x, y)$ стремятся к нулю при $x \to -\infty$) и удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad 0 \leqslant y \leqslant h_2, \quad -\infty < x \leqslant 0.$$

Задача K_3. Определить регулярное в области D_3 решение уравнения (2.1), непрерывное в $\bar{D}_3$ (причем $u(x, y) \to 0$ при $y \to -\infty$, производная $u_x(x, y)$ непрерывна вплоть до прямой $x = 0$) и удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad u(1, y) = \varphi_3(y), \quad -\infty < y \leqslant -h_3.$$

В этих задачах $\varphi_i(i=\overline{0,3})$ — заданные функции, удовлетворяющие естественным условиям согласования.

Заметим, что задача $K_i(i=1, 2, 3)$ используется при изучении краевых задач для вырождающихся уравнений третьего порядка.

2. Прежде чем приступить к доказательству единственности и существования решения поставленных задач, рассмотрим интеграл

$$u_0(x, y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty U(x, y; \xi, 0)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi, \tag{2.2}$$

где

$$U(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}} f\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right), \quad y \neq \eta; \tag{2.3}$$

функция f определена равенством (1.5). То, что функция $u_0(x, y)$ в области D_1 удовлетворяет уравнению (2.1), следует из того, что при $y \neq \eta$

$$U_{xxx} - U_y = 0.$$

Теперь докажем, что

$$\lim_{(x,\, y)\to(x_0,\, +0)} u_0(x, y) = \varphi_0(x_0), \quad x_0 \in (0, \infty). \tag{2.4}$$

Возьмем произвольное число δ. Пусть $x - x_0 < \delta$ или $x_1 < x < x_2$, где $x_1 = x_0 - \delta$, $x_2 = x_0 + \delta$. Интеграл (2.2) представим в виде

$$u_0(x, y) = -\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{+\infty}\right) U(x, y; \xi, 0)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi =$$

$$= u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y).$$

Далее находим

$$u_2(x, y) = \frac{-\varphi_0(x_0)}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} U(x, y; \xi, 0)\,d\xi - \frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} U(x, y; \xi, 0)\,[\varphi_0(\xi) -$$

$$- \varphi_0(x_0)]\,d\xi = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = -\frac{\varphi_0(x_0)}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} U(x, y; \xi, 0)\,d\xi = -\frac{\varphi_0(x_0)}{\pi}\int_{\frac{x-x_1}{y^{1/3}}}^{\frac{x-x_2}{y^{1/3}}} f(t)\,dt.$$

При $y \to +0$ имеем

$$\lim_{(x,\, y)\to(x_0,\, +0)} I_1 = \varphi_0(x_0)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \varphi_0(x_0).$$

Покажем, что интегралы, обозначенные через I_2, u_1, u_3, при $y \to +0$ стремятся к нулю.

Рассмотрим I_2:

$$I_2 = -\frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} U(x, y; \xi, 0)[\varphi_0(\xi) - \varphi_0(x_0)]\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial\xi} v_1(x, y; \xi, 0)[\varphi_0(\xi) - \varphi_0(x_0)]\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\, v_1(x, y; \xi, 0)[\varphi_0(\xi) - \varphi_0(x_0)]\Big|_{x_1}^{x_2} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} v_1(x, y; \xi, 0)\,\varphi_0'(\xi)\,d\xi,$$

где

$$v_1 = \int_{\frac{x-\xi}{y^{1/3}}}^{\frac{x-x_2}{y^{1/3}}} f(t)\,dt.$$

Тогда при любом $y>0$ имеем (в дальнейшем через C_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, будем обозначать различные положительные постоянные)

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{\pi}\,|v_1(x, y; \xi, 0)|\,|\varphi_0(x_1) - \varphi_0(x_0)| +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} |v_1|\,|\varphi_0'(\xi)|\,d\xi = \frac{1}{\pi}C_1L\,|x - x_0| + \frac{1}{\pi}C_1C_2\,|x_2 - x_1| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}C_1L\delta + \frac{1}{\pi}C_1C_2 2\delta,$$

где $|\varphi_0'(\xi)| < C_2$, L — константа условия Липшица. Отсюда при $\delta \to 0$ $(x \to x_0)$ имеем $|I_2| \to 0$.

Оценим $u_1(x, y)$. Обозначая

$$v_2 = \int_{\frac{x-\xi}{y^{1/3}}}^{\frac{x-x_1}{y^{1/3}}} f(t)\,dt,$$

находим

$$u_1(x, y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{x_1} U(x, y; \xi, 0)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{x_1} v_{2\xi}(x, y; \xi, 0)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi = -\frac{1}{\pi} v_2(x, y; \xi, 0)\,\varphi_0(\xi)\Big|_0^{x_1} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{x_1} v_2(x, y; \xi, 0)\,\varphi_0'(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{x_1} v_2(x, y; \xi, 0)\,\varphi_0'(\xi)\,d\xi.$$

Если $(x, y) \to (x_0, +0)$, то

$$\frac{x - x_1}{y^{1/3}} \to +\infty, \quad \frac{x - \xi}{y^{1/3}} \to +\infty\,.$$

Следовательно, $u_1(x, y) \to 0$.

Аналогично можно показать, что $u_3(x, y) \to 0$ при $(x, y) \to (x_0, +0)$. Итак, справедливость равенства (2.4) установлена.

3. Из результатов п. 2 следует, что при доказательстве существования и единственности решения задачи K_1, не ограничивая общности, можно положить, что $\varphi_0(x) \equiv 0$. Тогда условия согласования имеют вид $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$.

Решение задачи K_1 ищем в виде

$$u(x, y) = \int_0^y U(x, y; 0, \eta)\,\alpha_1(\eta)\,d\eta + \int_0^y V(x, y; 0, \eta)\,\alpha_2(\eta)\,d\eta, \quad (2.5)$$

где функция $U(x, y; \xi, \eta)$ определена формулой (2.3), а

$$V = \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\,\varphi\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right), \quad y \neq \eta$$

(функция φ та же, что и в (1.5)).

Функция, представленная формулой (2.5), удовлетворяет условию $u(x, 0) = 0$ и уравнению (2.1). Выберем теперь неизвестные функции α_1 и α_2 так, чтобы они удовлетворяли и остальным условиям задачи K_1. Тогда получим уравнения

$$f(0)\int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\,\alpha_1(\eta)\,d\eta + \varphi(0)\int_0^y \frac{\alpha_2(\eta)}{(y-\eta)^{1/3}}\,d\eta = \varphi_1(y)\,,$$

$$f'(0)\int_0^y \frac{\alpha_1(\eta)}{(y-\eta)^{2/3}}\,d\eta + \varphi'(0)\int_0^y \frac{\alpha_2(\eta)}{(y-\eta)^{2/3}}\,d\eta = \varphi_2(y)\,.$$

Это система интегральных уравнений типа уравнений Вольтерра относительно функции α_1, α_2.

Несколько преобразуем эти уравнения. Умножая обе части первого и второго уравнений соответственно на $(z-y)^{-2/3}$ и $(z-y)^{-1/3}$ и интегрируя по y от 0 до z, получаем

$$f(0)\int_0^z \frac{dy}{(z-y)^{2/3}}\int_0^y \frac{\alpha_1(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{1/3}}+$$

$$+\varphi(0)\int_0^z \frac{dy}{(z-y)^{2/3}}\int_0^y \frac{\alpha_2(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{1/3}}=\int_0^z \frac{\varphi_1(y)}{(z-y)^{2/3}}\,dy,$$

$$f'(0)\int_0^z \frac{dy}{(z-y)^{1/3}}\int_0^y \frac{\alpha_1(\eta)}{(y-\eta)^{2/3}}\,d\eta+$$

$$+\varphi'(0)\int_0^z \frac{dy}{(z-y)^{1/3}}\int_0^y \frac{\alpha_2(\eta)}{(y-\eta)^{2/3}}\,d\eta=\int_0^z \frac{\varphi_2(y)}{(z-y)^{1/3}}\,dy.$$

Применяя к полученным интегралам формулу Дирихле, имеем

$$\left.\begin{aligned}
&f(0)\int_0^z \alpha_1(\eta)\,d\eta\int_\eta^z \frac{dy}{(z-y)^{2/3}(y-\eta)^{1/3}}+\\
&+\varphi(0)\int_0^z \alpha_2(\eta)\,d\eta\int_\eta^z \frac{dy}{(z-y)^{2/3}(y-\eta)^{1/3}}=\int_0^z \frac{\varphi_1(y)}{(z-y)^{2/3}}\,dy,\\
&f'(0)\int_0^z \alpha_1(\eta)\,d\eta\int_\eta^y \frac{dy}{(z-y)^{1/3}(y-\eta)^{2/3}}+\\
&+\varphi'(0)\int_0^z \alpha_2(\eta)\,d\eta\int_\eta^y \frac{dy}{(z-y)^{1/3}(y-\eta)^{2/3}}=\int_0^z \frac{\varphi_2(y)}{(z-y)^{1/3}}\,dy.
\end{aligned}\right. \tag{2.6}$$

Учитывая равенства

$$\int_\eta^y \frac{dy}{(z-y)^{2/3}(y-\eta)^{1/3}}=\int_\eta^y \frac{dy}{(z-y)^{1/3}(y-\eta)^{2/3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}};\quad \varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$$

и дифференцируя по z, из (2.6) находим

$$\left.\begin{aligned}
&f(0)\,\alpha_1(z)+\varphi(0)\,\alpha_2(z)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^z \frac{\varphi_1'(y)}{(z-y)^{2/3}}\,dy\\
&f'(0)\,\alpha_1(z)+\varphi'(0)\,\alpha_2(z)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^z \frac{\varphi_2'(y)}{(z-y)^{1/3}}\,dy
\end{aligned}\right\}. \tag{2.7}$$

Итак, мы получили алгебраическую систему уравнений для определения функции α_1, α_2. Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(0) & \varphi(0) \\ f'(0) & \varphi'(0) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. В самом деле, учитывая, что (см. [87])

$$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt, \quad \varphi(0) = \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt,$$

$$f'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\infty} te^{-t^3} dt, \quad \varphi'(0) = -\frac{3}{2} \int_0^{+\infty} te^{-t^3} dt,$$

имеем

$$\Delta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^3} dt \int_0^{+\infty} te^{-t^3} dt \neq 0.$$

Следовательно, система (2.7) однозначно разрешима.

Подставляя найденные из (2.7) значения α_1, α_2 в формулу (2.5), получаем явное представление решения задачи K_1

$$u(x, y) = \int_0^y K_1(x, y, \eta) \varphi_1'(\eta) d\eta + \int_0^y K_2(x, y, \eta) \varphi_2'(\eta) d\eta,$$

где

$$K_1(x, y, \eta) = \int_\eta^y [\gamma_3 V(x, y; 0, \theta) - \gamma_2 U(x, y; 0, \theta)] \frac{d\theta}{(\theta - \eta)^{2/3}},$$

$$K_2(x, y, \eta) = \int_\eta^y [\gamma_1 U(x, y; 0, \theta) - \gamma_4 V(x, y; 0, \theta)] \frac{d\theta}{(\theta - \eta)^{1/3}},$$

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\Delta} \varphi(0), \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\Delta} \varphi'(0),$$

$$\gamma_3 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\Delta} f'(0), \quad \gamma_4 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi\Delta} f(0).$$

4. Рассмотрим задачу K_2. Если функция $\varphi_0(x)$ непрерывна вместе с первой производной, то, как показано в п. 2, функция

$$u_1(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 U(x, y; \xi, 0) \varphi_0(\xi) d\xi$$

удовлетворяет уравнению (2.1) и условию $u_1(x, 0) = \varphi_0(x)$.

Решение задачи K_2 ищем в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + u_1(x, y).$$

Тогда для функции $v(x, y)$ получаем задачу

$$\left.\begin{aligned} L(v)=0 \quad (-\infty<x<0,\ 0<y\leqslant h_2) \\ v(0, y)=\varphi_1(y)-u_1(0, y)=\tilde{\varphi}_1(y) \\ v(x, 0)=0 \end{aligned}\right\}. \tag{2.8}$$

Легко показать [87], что функция

$$v(x, y) = \frac{3}{\pi}\int_0^y U_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)\,\tilde{\varphi}_1(\eta)\,d\eta$$

дает решение задачи (2.8). Тогда решение задачи K_2 имеет вид

$$u(x, y) = \frac{3}{\pi}\int_0^y U_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)\,[\varphi_1(\eta) - u_1(0, \eta)]\,d\eta + u_1(x, y).$$

Заметим, что задачи K_1 и K_2 легко решаются и для уравнения с младшими членами

$$u_{xxx} - u_y + \sum_{i=0}^{2} a_i \frac{\partial^i u}{\partial x^i} = F(x, y),$$

в котором с помощью замены

$$u(x, y) = v(x, y)\, e^{-\frac{1}{3}\int_0^x a_2(t,\ y)\,dt}$$

можно избавиться от члена $a_2(x, y)u_{xx}$.

Итак, ограничимся рассмотрением только задачи K_2 для уравнения

$$u_{xxx} + a(x, y)u_x + b(x, y)u - u_y = F(x, y). \tag{2.9}$$

Сначала рассмотрим уравнение

$$u_{xxx} - u_y = E(x, y). \tag{2.10}$$

Пусть при $0\leqslant\eta<y$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{|x-\xi|^{1/4}}|E(\xi, \eta)|\,d\xi < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{|x-\xi|^{1/4}}|E_\eta(\xi, \eta)|\,d\xi < \infty,$$

$$E(x, 0) = 0.$$

Тогда интеграл

$$\sigma(x, y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^y \int_{-\infty}^0 U(x, y; \xi, \eta) E(\xi, \eta) \, d\xi d\eta$$

удовлетворяет уравнению (2.10) и условию $\sigma(x, 0) = 0$.

Доказательство этого факта проводится так же, как в работе [87].

Решение задачи K_2 для уравнения (2.10) ищем в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + \sigma(x, y).$$

Тогда для функции $v(x, y)$ получаем задачу

$$\left.\begin{array}{l} v_{xxx} - v_y = 0 \quad \text{в } D_2 \\ v(0, y) = \varphi_1(y) - \sigma(0, y), \; v(x, 0) = \varphi_0(x) \end{array}\right\},$$

решенную выше.

В итоге решение задачи K_2 для уравнения (2.10) определяется по формуле

$$u(x, y) = \frac{3}{\pi}\int_0^y U_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)[\varphi_1(\eta) - u_1(0, \eta)] \, d\eta + u_1(x, y) -$$

$$-\frac{3}{\pi}\int_0^y U_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)\sigma(0, \eta) \, d\eta - \frac{1}{\pi}\int_0^y \int_{-\infty}^0 U(x, y; \xi, \eta) E(\xi, \eta) \, d\xi d\eta. \tag{2.11}$$

Придадим формуле (2.11) несколько иной вид. С этой целью рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^y U_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)\sigma(0, \eta) \, d\eta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^y U_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)\left\{\int_0^\eta \int_{-\infty}^0 U(0, \eta; \zeta, \theta) E(\zeta, \theta) \, d\zeta d\theta\right\} d\eta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 d\zeta \int_0^y d\eta \int_0^\eta U_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) U(0, \eta; \zeta, \theta) E(\zeta, \theta) \, d\theta.$$

Применим к внутренним интегралам формулу Дирихле

$$I = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 d\zeta \int_0^y d\theta \int_\theta^y U_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) U(0, \eta; \zeta, \theta) E(\zeta, \theta) \, d\eta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 d\zeta \int_0^y E(\zeta, \theta) \, d\theta \int_0^y U_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) U(0, \eta; \zeta, \theta) \, d\eta.$$

Заменив ζ на ξ, а θ на η, получим

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^y \int_{-\infty}^0 W(x, y; \xi, \eta) E(\xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

где

$$W(x, y; \xi, \eta) = \frac{3}{\pi}\int_\eta^y U_{\xi\xi}(x, y; 0, \theta)\, U(0, \theta; \xi, \eta)\, d\theta.$$

Теперь формула (2.11) может быть записана в виде

$$u(x, y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^y \int_{-\infty}^0 G(x, y; \xi, \eta) E(\xi, \eta)\, d\xi d\eta + z(x, y), \tag{2.12}$$

где

$$G(x, y; \xi, \eta) = U(x, y; \xi, \eta) - W(x, y; \xi, \eta);$$

$$z(x, y) = \frac{3}{\pi}\int_0^y U_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)\,[\varphi_1(\eta) - u_1(0, \eta)]\, d\eta + u_1(x, y).$$

Ранее было показано, что функция (2.12) удовлетворяет уравнению (2.10) и граничным условиям задачи K_2 при любой функции из указанного выше класса. Теперь подберем $E(x, y)$ так, чтобы функция (2.12) дала решение задачи K_2 (при $\varphi_0 \equiv 0$) для уравнения (2.9). Подставив выражение (2.12) в (2.9), получим

$$(E(x, y) + a(x, y) z_x(x, y) + b(x, y) z(x, y) - F(x, y) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{D_2} \left[a(x,y) G_x(x, y; \xi, \eta) + b(x,y)\, G(x, y; \xi, \eta)\right] E(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = 0$$

или

$$E(x, y) - \frac{1}{\pi}\int_0^y \int_{-\infty}^0 K(x, y; \xi, \eta) E(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \Phi(x, y), \tag{2.13}$$

где

$$\Phi(x, y) = F(x, y) - a(x, y) z_x - b(x, y) z;$$

$$K(x, y; \xi, \eta) = a(x, y) G_x(x, y; \xi, \eta) + b(x, y) G(x, y; \xi, \eta).$$

Итак, для определения функции $E(x, y)$ получено интегральное уравнение (2.13). Применяя преобразование Лапласа, легко показать (см. [87]), что уравнение (2.13) является фредгольмовым, существование решения которого следует из единственности.

5. Перейдем к изучению задачи K_3. Сначала докажем единственность решения. Допустим, что однородная задача имеет нетривиальное решение $u(x, y)$ в D_3. Исходя из тождества

$$\iint\limits_{D_3} B(y)\, uL(u)\, dxdy = 0$$

(где $B(y) \in C^1(-\infty, -h_3)$ — некоторая функция) и пользуясь однородными граничными условиями, получим

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-h_3} B(y)\, u_x^2(1, y)\, dy - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 B(-h_3)\, u^2(x, -h_3)\, dx +$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_3} B'(y)\, u^2(x, y)\, dydx = 0. \qquad (2.14)$$

Если функцию $B(y)$ подберем так, чтобы было $B(y)>0$, $B'(y)<0$ в $(-\infty, -h_3)$, то из (2.14) будем иметь $u(x, y)=0$ в $\overline{D}_3$.

Докажем существование решения задачи K_3. От заданных функций $\varphi_i(i=1, 2, 3)$ потребуем, чтобы при достаточно больших y

$$\varphi_i(y) = 0\,(\exp(G_i y)),\ C_i = \text{const} > 0$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$L(u) = 0 \text{ в } D_3^N = \{0 < x < 1,\ -N < y \leqslant -h_3\},$$

$$u(0, y) = \varphi_1^N(y),\ u_x(0, y) = \varphi_2^N(y),\ u(1, y) = \varphi_3^N(y),$$

$$u(x, -N) = 0,$$

где N — достаточно большое число. Решение этой задачи ищем в виде

$$u(x, y) = \int\limits_{-N}^{y} U_\xi(x, y; 0, \eta)\, \alpha_1(\eta)\, d\eta +$$

$$+\int\limits_{-N}^{y} U_{\xi\xi}(x, y; 1, \eta)\, \alpha_2(\eta)\, d\eta + \int\limits_{-N}^{y} V_\xi(x, y; 0, \eta)\, \alpha_3(\eta)\, d\eta.$$

Эту задачу можно свести к системе интегральных уравнений типа Вольтерра относительно неизвестных функций $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ [87]

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{-N}^{y} \frac{\varphi_1^N(\eta)}{(y-\eta)^{1/3}}\, d\eta = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} f'(0)\, \alpha_1(y) - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\varphi'(0)\, \alpha_3(y) +$$

$$+\frac{1}{3}\int\limits_{-N}^{y} \alpha_2(\eta)\, d\eta \int\limits_{\eta}^{y} \frac{1}{(y-\tau)^{1/3}} \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{(\tau-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{-1}{(\tau-\eta)^{1/3}}\right)\right] d\tau$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_2^N(y) = \frac{2\pi}{3}\,\alpha_1(y) - \int\limits_{-N}^{y} \frac{1}{(y-\eta)^{4/3}}\, f'''\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\alpha_2(\eta)\,d\eta\\
&\varphi_3^N(y) = \frac{\pi}{3}\,\alpha_2(y) - \int\limits_{-N}^{y} \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}\, f'\left(\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\alpha_1(\eta)\,d\eta -\\
&\qquad - \int\limits_{-N}^{y} \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}\,\varphi'\left(\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\alpha_3(\eta)\,d\eta
\end{aligned}\right\}. \qquad (2.15)$$

Вводя обозначения

$$\omega_1^N(y) = \frac{d}{dy}\int\limits_{-N}^{y} \frac{\varphi_1^N(\eta)}{(y-\eta)^{1/3}}\,d\eta,$$

$$K_{12}(y,\eta) = \int\limits_{\eta}^{y} \frac{1}{(y-\tau)^{1/3}}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{(\tau-\eta)^{4/3}}\, f\left(\frac{-1}{(\pi-\eta)^{1/3}}\right)\right]d\tau,$$

$$K_{22}(y,\eta) = \frac{1}{(y-\eta)^{4/3}}\, f'''\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right),$$

$$K_{31} = f'\left(\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\frac{1}{(y-\eta)^{2/3}},$$

$$K_{33}(y,\eta) = \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}\,\varphi'\left(\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)$$

и исключая из системы (2.15) α_3 и α_2, при $N \to \infty$ получаем уравнение (см. § 1)

$$H(y) = \alpha_2(y) - \int\limits_{-\infty}^{y} \overline{K}(y,s)\,\alpha_2(s)\,ds, \quad y < 0, \qquad (2.16)$$

где

$$H(y) = \varphi_3(y) + \frac{3}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{y} K_{31}(y,\eta)\,\varphi_2(\eta)\,d\eta +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2\pi\varphi'(0)}\int\limits_{-\infty}^{y} \omega_1^{\infty}(\eta)\,K_{33}(y,\eta)\,d\eta + \frac{3f'(0)}{2\pi\varphi'(0)}\int\limits_{-\infty}^{y} K_{33}(y,\eta)\,\varphi_2(\eta)\,d\eta;$$

$$\overline{K}(y,s) = \int\limits_{s}^{y}\Bigl[K_{31}(y,\eta)\,K_{22}(\eta,s)\,\frac{3}{2\pi} +$$

$$+\frac{1}{3\varphi'(0)} K_{33}(y, \eta) K_{12}(\eta, s) - \frac{3f'(0)}{2\pi\varphi'(0)} K_{33}(y, \eta) K_{22}(\eta, s) \Bigg] d\eta.$$

Оценим ядро $\overline{K}(y, s)$. Рассмотрим первый интеграл I_1, входящий в состав ядра $\overline{K}(y, s)$:

$$I_1 = \int_s^y K_{31}(y, \eta) K_{22}(\eta, s)\, d\eta.$$

С помощью оценок (1.7) фундаментального решения получим

$$|I_1| \leqslant C_3 \int_s^y (y-\eta)^{-\frac{3}{4}} (\eta - s)^{-\frac{4}{3}} \exp\left(-\frac{C_4}{(\eta - s)^{1/2}}\right) d\eta.$$

Положим $\eta - s = t,\ y - s = a,\ z = \frac{t}{a}$. Тогда

$$|I_1| \leqslant C_3 a^{-\frac{13}{12}} \int_0^1 (1-z)^{-\frac{3}{4}} z^{-\frac{4}{3}} \exp\left(-\frac{C_4}{\sqrt{az}}\right).$$

Далее, применяя теорему о среднем, находим

$$|I_1| \leqslant C_5 a^{-\frac{13}{12}} \exp\left(-\frac{C_6}{\sqrt{a}}\right),$$

где

$$C_5 = 4C_3 z_1^{-\frac{4}{3}},\ C_6 = \frac{C_4}{\sqrt{z_1}},\ 0 < z_1 < 1.$$

Аналогично оценивая интегралы

$$I_2 = \int_s^y K_{33}(y, \eta) K_{12}(\eta, s)\, d\eta,$$

$$I_3 = \int_s^y K_{33}(y, \eta) K_{22}(\eta, s)\, d\eta,$$

получаем

$$|I_2| \leqslant C_7 a^{-\frac{13}{12}} \exp\left(-\frac{C_8}{\sqrt{a}}\right),$$

$$|I_3| \leqslant C_9 a^{-\frac{13}{12}} \exp\left(-\frac{C_{10}}{\sqrt{a}}\right).$$

Окончательно имеем

$$|\overline{K}(y, s)| \leqslant M (y-s)^{-\frac{13}{12}} \exp\left(-\frac{m}{\sqrt{y-s}}\right),$$

где

$$M=\max\{C_5,\ C_7,\ C_9\},\ m=\min\{C_6,\ C_8,\ C_{10}\}.$$

Уравнение (2.16) с указанными свойствами может быть решено с помощью преобразования Лапласа.

§ 3. ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ ЖЕВРЕ

1. Уравнение

$$u_{xx}-\operatorname{sgn} x\, u_y=f(x, y) \tag{3.1}$$

при $x>0$ является прямым, а при $x<0$ обратным уравнением параболического типа. Такие уравнения называются смешанно-параболическими и встречаются в различных приложениях (см. [51]).

В работах [51, 52] для уравнения (3.1) изучена следующая задача (задача Жевре): в области $D\{|x|<1,\ 0<y<1\}$ требуется найти регулярное при $x\neq 0$ решение уравнения (3.1), непрерывное в $\bar{D}$ и удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=1}=u|_{x=-1}=0,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$
$$u|_{y=0}=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ u|_{y=1}=0,\ -1\leqslant x\leqslant 0.$$

В настоящем параграфе задача Жевре ставится и изучается для уравнения третьего порядка вида

$$u_{xxx}-\operatorname{sgn} x\, u_y=F(x, y), \tag{3.2}$$

которое в области D является уравнением смешанного типа.

Задача Жевре для уравнения (3.2): найти в области D функцию $u(x, y)$: 1) непрерывную вместе с производной $u_x(x, y)$ в замкнутой области $\bar{D}$; 2) производная $u_{xx}(x, y)$ которой непрерывна в D; 3) являющуюся регулярным решением уравнения (3.2) в $D\setminus S$, где $S=\{x=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$; 4) удовлетворяющую краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} &u|_{x=-1}=u_x|_{x=-1}=u|_{x=1}=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ &u|_{y=1}=0,\ -1\leqslant x\leqslant 0,\ u|_{y=0}=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1\end{aligned}\right\}. \tag{3.3}$$

Отметим, что краевые условия (3.3) взяты однородными ради простоты; задача с ненулевыми условиями исследуется аналогично (см. § 1).

2. Единственность решения. Части области D, где $x<0$ и $x>0$, обозначим через D^- и D^+. Рассмотрим однородную задачу (3.2), (3.3) $(F\equiv 0)$.

Интегрируя тождество

$$u\left(u_{xxx}-\operatorname{sgn} x\, u_y\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\operatorname{sgn} x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}u^2\right)=0$$

сначала по области D^-, затем по области D^+ и используя соответствующие краевые условия, получаем

$$\int_0^1 \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2\right)\Big|_{x=-0} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 u^2(x, 0)\, dx, \tag{3.4}$$

$$\int_0^1 \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2\right)\Big|_{x=+0} dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, 1)\, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2(1, y) dy. \tag{3.5}$$

Согласно условиям задачи Жевре, интегралы, стоящие в левых частях равенств (3.4) и (3.5), равны между собой. Учитывая это, имеем

$$\int_{-1}^0 u^2(x, 0)\, dx + \int_0^1 u^2(x, 1)\, dx + \int_0^1 u_x^2(1, y)\, dy = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{ll} u(x, 1) = 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(x, 0) = 0 & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ u_x(1, y) = 0 & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{array}\right\}. \tag{3.6}$$

Таким образом, если однородная задача (3.2), (3.3) имеет нетривиальное решение, то оно наряду с условиями (3.3) удовлетворяет и условиям (3.6). С другой стороны, интегрируя по частям интегралы

$$\iint_{D^-} xu\left(u_{xxx} + u_y\right) dxdy = 0,$$

$$\iint_{D^+} xu\left(u_{xxx} - u_y\right) dxdy = 0$$

с учетом условий (3.3) и (3.6), находим

$$\frac{3}{2} \iint_{D^-} u_x^2(x, y) dxdy = \int_0^1 uu_x\big|_{x=-0} dy,$$

$$-\frac{3}{2} \iint_{D^+} u_x^2(x, y)\, dxdy = \int_0^1 uu_x\big|_{x=+0} dy.$$

Эти равенства возможны только при $u_x(x, y) = 0$ как в D^-, так и в D^+. Следовательно, $u(x, y) = \omega(y)$ в D^- и D^+. Так как $u(-1, y) = u(1, y) = 0$, то $\omega(y) \equiv 0$. Отсюда в силу непрерывности $u(x, y)$ в $\overline{D}$ $u \equiv 0$ в $\overline{D}$.

3. Существование решения. Примем обозначения $\tau(y) = u(0, y)$, $\nu(y) = u_x(0, y)$ и отметим, что функции τ и ν по условию задачи

непрерывны при $0 \leqslant y \leqslant 1$. Следовательно, они должны удовлетворять условиям

$$\tau(0)=\tau(1)=\nu(1)=\nu(0)=0. \tag{3.7}$$

В области D^+ решение $u^+(x, y)$ уравнения

$$u_{xxx}-u_y=F(x, y), \tag{3.8}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0, y)=\tau(y),\ \ u_x(0, y)=\nu(y),\ \ u(1, y)=0,\ \ u(x, 0)=0, \tag{3.9}$$

дается формулой

$$\pi u^+(x, y)=\int_0^y G^+_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta)\,\tau(\eta)\,d\eta-\int_0^y G^+_{\xi}(x, y; 0, \eta)\,\nu(\eta)\,d\eta+$$
$$+\gamma_1(x, y), \tag{3.10}$$

где

$$\gamma_1(x, y)=-\frac{1}{\pi}\iint_{D^+} G^+(x, y; \xi, \eta)\,F(\xi, \eta)\,d\xi d\eta;$$

$$G^+(x, y;\ \xi, \eta)=U(x, y;\ \xi, \eta)-W^+(x, y;\ \xi, \eta)$$

— функция Грина задачи Каттабрига (3.8), (3.9), построенная нами в § 1 настоящей главы.

Нетрудно убедиться (см. формулу (1.22)), что функция $W^+(x, y;\ \xi, \eta)$ зависит от разности аргументов $y-\eta$, т. е. может быть записана в виде

$$W^+(x, y;\ \xi, \eta)=W^+(x, \xi;\ y-\eta).$$

В области D^- решение $u^-(x, y)$ уравнения

$$u_{xxx}+u_y=F(x, y), \tag{3.11}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(-1, y)=0,\ \ u_x(-1, y)=0,\ \ u(x, 1)=0,\ \ u(0, y)=\tau(y), \tag{3.12}$$

имеет вид

$$\pi u^-(x, y)=-\int_y^1 G^-_{\xi\xi}(x, \eta; 0, y)\,\tau(\eta)\,d\eta+\gamma_2(x, y), \tag{3.13}$$

где

$$\gamma_2(x, y)=-\frac{1}{\pi}\iint_{D^-} G^-(x, y; \xi, \eta)\,F(\xi, \eta)\,d\xi d\eta.$$

Функция Грина $G^-(x, y;\ \xi, \eta)$ задачи (3.11), (3.12) строится также, как для задачи (3.8), (3.9), и для нее справедливы те же оценки, что и для $G^+(x, y;\ \xi, \eta)$ (см. § 1). Отметим, что и эта функция может быть записана в виде $G^-(x, \xi; \eta-y)$. Из (3.10), учитывая (3.7), имеем

$$\pi u^+(x, y)=\int_0^y\left[\int_{+\infty}^{\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}} f(t)\,dt\right]\tau'(\eta)\,d\eta+\int_0^1 K_1(x, 0; y-\eta)\,\tau'(\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^y G_\xi^+(x, 0; y-\eta)\,\nu(\eta)\,d\eta+\gamma_1(x, y),$$

где

$$K_1(x, 0; y-\eta)=\int_\eta^y W_{\xi\xi}^+(x, 0; y-t)\,dt.$$

Дифференцируя, находим

$$\pi u_x^+(x, y)=\int_0^y U(x, 0; y-\eta)\,\tau'(\eta)\,d\eta+\int_0^y K_{1x}(x, 0; y-\eta)\,\tau'(\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^y G_{\xi x}^+(x, 0; y-\eta)\,\nu(\eta)\,d\eta+\gamma_{1x}(x, y).$$

Интегрируя по частям последний интеграл, получаем

$$\pi u_x^+(x, y)=\int_0^y U(x, 0; y-\eta)\,\tau'(\eta)\,d\eta+\int_0^y K_{1x}(x, 0; y-\eta)\tau'(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^y\left[\int_{+\infty}^{\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}} f(t)\,dt\right]\nu'(\eta)d\eta-\int_0^y K_2(x, 0; y-\eta)\,\nu'(\eta)\,d\eta+\gamma_{1x}(x, y),$$

где

$$K_2(x, 0; y-\eta)=-\int_\eta^y W_{\xi x}^+(x, 0; y-t)\,dt.$$

Дифференцируя еще раз по x, находим

$$\pi u_{xx}^+(x, y)=\int_0^y U_x(x, 0; y-\eta)\,\tau'(\eta)d\eta+\int_0^y K_{1xx}(x, 0; y-\eta)\tau'(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^y U(x, 0; y-\eta)\nu'(\eta)d\eta-\int_0^y K_{2x}(x, 0; y-\eta)\,\nu'(\eta)\,d\eta+\gamma_{1xx}(x, y).$$

Отсюда при $x=0$ имеем

$$\pi u_{xx}^+(0, y)=f'(0)\int_0^y\frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{2/3}}-\int_0^y K_{1xx}(0, 0; y-\eta)\tau'(\eta)\,d\eta+$$

$$+f(0)\int\limits_0^y \frac{\nu'(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{1/3}}-\int\limits_0^y K_{2x}(0,\ 0;\ y-\eta)\,\nu'(\eta)\,d\eta+\gamma_{1xx}(0,\ y). \quad (3.14)$$

Выполняя аналогичные вычисления для функции $u^-(x, y)$, получаем

$$\pi u_x^-(0,\ y)=f(0)\int\limits_y^1 \frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(\eta-y)^{1/3}}-\int\limits_y^1 K_{3x}(0,\ 0;\ \eta-y)\tau'(\eta)d\eta+\gamma_{2x}(0,\ y), \quad (3.15)$$

$$\pi u_{xx}^-(0,\ y)=f'(0)\int\limits_y^1 \frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(\eta-y)^{2/3}}-\int\limits_y^1 K_{3xx}(0,\ 0;\ \eta-y)\,\tau'(\eta)d\eta+\gamma_{2xx}(0,y), \quad (3.16)$$

где

$$K_3(x,\ 0;\ \eta-y)=\int\limits_y^\eta W_{\xi\xi}^-(x,\ 0;\ t-y)\,dt.$$

Пользуясь условиями $u_x^+(0,\ y)=u_x^-(0,\ y)$, $u_{xx}^+(0,\ y)=u_{xx}^-(0,\ y)$ задачи, из (3.14) – (3.16), согласно принятым обозначениям, получаем

$$\pi\nu(y)=f(0)\int\limits_y^1 \frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(\eta-y)^{1/3}}-\int\limits_y^1 K_{3x}(0,\ 0;\ \eta-y)\tau'(\eta)\,d\eta+\gamma_{2x}(0,\ y),$$

$$f'(0)\int\limits_y^1 \frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(\eta-y)^{2/3}}-\int\limits_y^1 K_{3xx}(0,0;\ \eta-y)\tau'(\eta)\,d\eta-f'(0)\int\limits_0^y \frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{2/3}}-$$

$$-\int\limits_0^y K_{1xx}(0,\ 0;\ y-\eta)\,\tau'(\eta)\,d\eta-f(0)\int\limits_0^y \frac{\nu'(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{1/3}}+$$

$$+\int\limits_0^y K_{2x}(0,\ 0;\ y-\eta)\,\nu'(\eta)\,d\eta=\gamma_{1xx}(0,\ y)-\gamma_{2xx}(0,\ y). \quad (3.17)$$

Для функции Грина G^+ справедливы оценки (см. § 1)

$$\left|\frac{\partial^{i+j}G^+(x,\ \xi;\ y-\eta)}{\partial x^i\,\partial y^j}\right|\leqslant C_1\frac{|x-\xi|^{\frac{2i+6j-1}{4}}}{|y-\eta|^{\frac{2i+6j+1}{4}}} \quad (3.18)$$

при $x-\xi>0$, $\eta\to y$,

$$\left|\frac{\partial^{i+j}G^{+}(x,\xi;y-\eta)}{\partial x^{i}\,\partial y^{j}}\right|\leqslant\frac{C_2}{|y-\eta|^{\frac{i+3j+1}{3}}}\exp\left(-C_3\frac{|x-\xi|^{3/2}}{|y-\eta|^{1/2}}\right)$$

при $x-\xi\leqslant 0$, $\eta\to y$, где C_1, C_2, C_3 — некоторые положительные постоянные. В дальнейшем через C_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ будем обозначать различные положительные постоянные.

Из оценок (3.18) следует, что при $\eta\to y$

$$|K_{3x}(0,0;\eta-y)|\leqslant\frac{C_4}{(\eta-y)^{1/3}},\ |K_{3xx}(0,0;\eta-y)|\leqslant\frac{C_5}{(\eta-y)^{2/3}},$$

$$|K_{1xx}(0,0;y-\eta)|\leqslant\frac{C_6}{(y-\eta)^{2/3}},\ |K_{2x}(0,0;y-\eta)|\leqslant\frac{C_7}{(y-\eta)^{1/3}}.$$

Введем обозначения

$$D_{0y}^{l}f\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-l)}\displaystyle\int_0^y\frac{f(t)\,dt}{(y-t)^{1+l}}, & l<0,\\[2ex] \dfrac{d}{dy}D_{0y}^{l-1}f, & 0<l<1,\end{cases}$$

$$D_{y1}^{l}f\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-l)}\displaystyle\int_y^1\frac{f(t)\,dt}{(t-y)^{1+l}}, & l<0,\\[2ex] -\dfrac{d}{dy}D_{y1}^{l-1}f, & 0<l<1,\end{cases}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера. Тогда второе уравнение системы (3.17) может быть записано в виде

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)f'(0)\,D_{y1}^{-1/3}\tau'-\int_y^1 K_{3xx}(0,0;\eta-y)\,\tau'(\eta)\,d\eta-f'(0)\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\times$$

$$\times D_{0y}^{-1/3}\tau'-\int_0^y K_{1xx}(0,0;y-\eta)\,\tau'(\eta)\,d\eta-f(0)\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)D_{0y}^{-2/3}\nu'+$$

$$+\int_0^y K_{2x}(0,0;y-\eta)\,\nu'(\eta)\,d\eta=\beta(y),\qquad(3.19)$$

где

$$\beta(y)=\gamma_{1xx}(0,y)-\gamma_{2xx}(0,y).$$

Рассмотрим интегралы, входящие в формулу (3.19):

$$I_1(y)=\int_0^y K_{1xx}(0,0;y-\eta)\,\tau'(\eta)\,d\eta=\int_0^y \Phi_1(y-\eta)\frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{2/3}};$$

здесь

$$\Phi_1(y-\eta)=(y-\eta)^{2/3}K_{1xx}(0,0;y-\eta)\in C(0\leqslant\eta,\ y\leqslant 1).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I_1(y)=\Phi_1(0)\int_0^y\frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{2/3}}-\int_0^y\Phi_{1\eta}(y-\eta)\,d\eta\int_0^\eta\frac{\tau'(t)\,dt}{(\eta-t)^{2/3}}=$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Phi_1(0)\,D_{0y}^{-1/3}\,\tau'-\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\int_0^y\Phi_{1\eta}(y-\eta)\,D_{0\eta}^{-1/3}\,\tau'\,d\eta.$$

Аналогично находим

$$I_2(y)=\int_0^y K_{2x}(0,0;y-\eta)\,\nu'(\eta)\,d\eta=\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Phi_2(0)\,D_{0y}^{-2/3}\,\nu'-$$

$$-\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\int_0^y\Phi_{2\eta}(y-\eta)\,D_{0\eta}^{-2/3}\,\nu'\,d\eta,$$

где

$$\Phi_2(y-\eta)=(y-\eta)^{1/3}K_{2x}(0,0;y-\eta)\in C(0\leqslant y,\eta\leqslant 1);$$

$$I_3(y)=\int_y^1 K_{3xx}(0,0;\eta-y)\,\tau'(\eta)\,d\eta=\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Phi_3(0)\,D_{y1}^{-1/3}\,\tau'+$$

$$+\int_y^1\Phi_{3\eta}(\eta-y)\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)D_{\eta1}^{-1/3}\,\tau'\,d\eta;$$

$$\Phi_3(\eta-y)=(\eta-y)^{2/3}\,K_{3xx}(0,0;\ \eta-y)\in C(0\leqslant\eta,\,y\leqslant 1).$$

Тогда соотношение (3.19) может быть записано в виде

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)f'(0)\,D_{0y}^{-1/3}\,\tau'-\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Phi_3(0)\,D_{y1}^{-1/3}\tau'-\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\int_y^1\Phi_{3\eta}(\eta-y)\times$$

$$\times D_{\eta1}^{-1/3}\tau'\,d\eta-f'(0)\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)D_{0y}^{-1/3}\tau'-\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Phi_1(0)\,D_{0y}^{-1/3}\tau'+$$

$$+\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\int_0^y \Phi_{1\eta}(y-\eta)\,D_{0\eta}^{-1/3}\,\tau'\,d\eta - f(0)\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)D_{0y}^{-1/3}\,\nu' +$$

$$+\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Phi_2(0)\,D_{0y}^{-2/3}\,\nu' - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\int_0^y \Phi_{2\eta}(y-\eta)\,D_{0\eta}^{-2/3}\,\nu'\,d\eta = \beta(y)$$

или

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)a\,D_{y1}^{-1/3}\,\tau' + \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\int_y^1 \Phi_{3\eta}(\eta-y)\,D_{\eta 1}^{-1/3}\,\tau'\,d\eta - \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\text{ в }D_{0y}^{-1/3}\,\tau' +$$

$$+\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\int_0^y \Phi_{1\eta}(y-\eta)\,D_{0\eta}^{-1/3}\,\tau'\,d\eta - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\,c\,D_{0y}^{-2/3}\,\nu' -$$

$$-\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\int_0^y \Phi_{2\eta}(y-\eta)\,D_{0\eta}^{-2/3}\,\nu'\,d\eta = \beta(y), \qquad (3.20)$$

где

$$a = f'(0) - \Phi_3(0);\quad b = f'(0) + \Phi_1(0);\quad c = f(0) - \Phi_2(0).$$

С помощью тождества [106]

$$D_{0y}^{-l}\,\varphi = \cos\pi l\,D_{y1}^{-l}\,\varphi - \frac{\sin\pi l}{\pi}\int_0^1\left(\frac{y}{\eta}\right)^l \frac{D_{y1}^{-l}\varphi\,d\eta}{\eta-y}$$

из (3.20) получим

$$a\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)D_{y1}^{-1/3}\tau' + \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\int_y^1 \Phi_{3\eta}(\eta-y)\,D_{\eta 1}^{-1/3}\,\tau'\,d\eta - b\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}D_{y1}^{-1/3}\tau' - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{y}{\eta}\right)^{1/3}\frac{D_{\eta 1}^{-1/3}\,\tau'\,d\eta}{\eta-y}\right] + \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\int_0^y \Phi_{1\eta}(y-\eta)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}D_{\eta 1}^{-1/3}\tau' - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{\eta}{t}\right)^{1/3}\frac{D_{t1}^{-1/3}\,\tau'\,dt}{t-\eta}\right]d\eta - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)c\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{2}D_{y1}^{-2/3}\nu' - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\frac{D_{\eta 1}^{-2/3}\,\nu'\,d\eta}{\eta-y}\right] -$$

$$-\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\int_0^y \Phi_{2\eta}(y-\eta)\,d\eta\left[-\frac{1}{2}D_{\eta 1}^{-2/3}\nu\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{\eta}{t}\right)^{2/3}\frac{D_{t1}^{-2/3}\,\nu' dt}{t-\eta}\right]=\beta(y). \qquad (3.21)$$

Введем новые неизвестные функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ по формулам

$$\left.\begin{aligned}\tau'(y)&=-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dy}\int_y^1\frac{\varphi(s)\,ds}{(s-y)^{1/3}}\\ \nu'(y)&=-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dy}\int_y^1\frac{\psi(s)\,ds}{(s-y)^{2/3}}\end{aligned}\right\}, \qquad (3.22)$$

где $\varphi(y)$, $\psi(y)$ — непрерывные при $0<y\leqslant 1$ функции, причем при $y\to 0$ они могут обращаться в бесконечность порядка не выше $^2/_3$ и $^1/_3$ соответственно.

Из (3.22) легко находим

$$\tau'(y)=\varphi(1)\frac{\sqrt{3}}{2\pi}(1-y)^{-1/3}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_y^1\frac{\varphi'(s)\,ds}{(s-y)^{1/3}}.$$

Умножая обе стороны этого равенства на $(y-z)^{-2/3}$, интегрируя по y в пределах от z до 1, получаем

$$\int_z^1\frac{\tau'(y)\,dy}{(y-z)^{2/3}}=\varphi(1)\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_z^1\frac{dy}{(y-z)^{2/3}(1-y)^{1/3}}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_z^1\varphi'(s)\,ds\times$$

$$\times\int_z^s\frac{dy}{(y-z)^{2/3}(s-y)^{1/3}}=\varphi(1)-\varphi(1)+\varphi(z)=\varphi(z).$$

Итак,

$$\int_y^1\frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(\eta-y)^{2/3}}=\varphi(y).$$

Аналогично находим

$$\int_y^1\frac{\nu'(\eta)\,d\eta}{(\eta-y)^{1/3}}=\psi(y)$$

или

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) D_{y1}^{-\frac{1}{3}} \tau' = \varphi(y), \quad \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) D_{y1}^{-2/3} \nu' = \psi(y). \qquad (3.23)$$

С помощью (3.23) уравнение (3.21) можно записать в виде

$$a\varphi(y) - \int_y^1 \Phi_{3\eta}(\eta - y)\varphi(\eta)\,d\eta - \frac{1}{2} b\varphi(y) +$$

$$+ b\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{y}{\eta}\right)^{1/3} \frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{\eta - y} + \frac{1}{2}\int_0^y \Phi_{1\eta}(y-\eta)\varphi(\eta)\,d\eta -$$

$$- \int_0^y \Phi_{1\eta}(y-\eta)\,d\eta \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{\eta}{t}\right)^{1/3} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-\eta} + \frac{c}{2}\psi(y) +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2\pi} c \int_0^1 \left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3} \frac{\psi(\eta)}{\eta - y}\,d\eta + \frac{1}{2}\int_0^y \Phi_{2\eta}(y-\eta)\psi(\eta)\,d\eta +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^y \Phi_{2\eta}(y-\eta)\,d\eta \int_0^1 \left(\frac{\eta}{t}\right)^{2/3} \frac{\psi(t)\,dt}{t-\eta} = \beta(y).$$

Используя формулу

$$\int_a^b dx \int_a^\beta f(x, y)\,dy = \int_a^\beta dy \int_a^b f(x, y)\,dx,$$

получаем

$$\varphi(y)\left[a - \frac{1}{2} b\right] - \int_y^1 \Phi_{3\eta}(\eta - y)\varphi(\eta)\,d\eta + \frac{1}{2}\int_0^y \Phi_{1\eta}(y-\eta)\varphi(\eta)\,d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^y \Phi_{2\eta}(y-\eta)\psi(\eta)\,d\eta - b\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{y}{\eta}\right)^{1/3} \frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{\eta - y} + \frac{c}{2}\psi(y) +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}c}{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3} \frac{\psi(\eta)\,d\eta}{\eta - y} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1 K_1(y, \eta)\varphi(\eta)\,d\eta +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1 K_2(y, \eta)\psi(\eta) = \beta(y), \qquad (3.24)$$

где

$$K_1(y,\ \eta)=\int\limits_0^y \Phi_{1t}(y-t)\left(\frac{t}{\eta}\right)^{1/3}\frac{dt}{\eta-t};$$

$$K_2(y,\ \eta)=\int\limits_0^y \Phi_{2t}(y-t)\left(\frac{t}{\eta}\right)^{2/3}\frac{dt}{\eta-t}.$$

Выше было показано, что функции $\Phi_i(y-\eta)$ $(i=1,\ 2,\ 3$ непрерывны при $0\leqslant y,\ \eta\leqslant 1$, поэтому производная $\frac{\partial}{\partial\eta}\Phi_i(y-\eta)$ имеет слабую особенность при $y\to\eta$.

Теперь оценим $K_1(y,\eta)$ и $K_2(y,\eta)$. Для этого достаточно оценить интегралы

$$I_4=\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{1/3}\frac{dt}{\eta-t},\quad I_5=\int\limits_0^y (y-t)^{-\beta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{2/3}\frac{dt}{\eta-t}.$$

$$0\leqslant\alpha,\quad \beta\leqslant 1.$$

Полагая $t=y\xi$, имеем

$$I_4=\int\limits_0^y\left(\frac{y}{\eta}\right)^{1/3}y^{1-\alpha}(1-\xi)^{-\alpha}\,\xi^{1/3}(\eta-y\xi)^{-1}d\xi=$$

$$=(y/\eta)^{1/3}\frac{y^{1-\alpha}}{\eta}B\left(\frac{4}{3},\ 1-\alpha\right)F\left(1,\ \frac{4}{3};\ \frac{7}{3}-\alpha;\ \frac{y}{\eta}\right),$$

где $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ — гипергеометрическая функция; $B(\nu,\mu)$ — бета-функция. Используя известные тождества для гипергеометрических функций

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ z),\tag{3.25}$$

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}(-1)^{\alpha}z^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma;\ \alpha+1-\beta;\ \frac{1}{z}\right)+\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}(-1)^{\beta}z^{-\beta}F\left(\beta,\ \beta+1-\gamma;\ \beta+1-\alpha;\ \frac{1}{z}\right),$$

получаем

$$I_4=B\left(\frac{4}{3},\ 1-\alpha\right)\left[(-1)^{4/3-\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}-\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}-\alpha\right)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}-\alpha\right)\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(1-\alpha)}F\left(1-\alpha,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \eta/y\right)\right].$$

Отсюда

$$|K_1(y,\ \eta)| \leqslant C_8\left[1+\left(\frac{y}{\eta}\right)^{1/3}\right]\frac{1}{|\eta-y|^{\alpha}}. \tag{3.26}$$

Аналогично получаем оценку

$$|K_2(y,\ \eta)| \leqslant C_9\left[1+\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\right]\frac{1}{|\eta-y|^{\beta}}. \tag{3.27}$$

Полагая

$$\overline{\Phi}_3(y-\eta)=\begin{cases}\Phi_{3\eta}(y-\eta) & \text{при} \quad y\leqslant\eta\leqslant 1,\\ 0 & \text{при} \quad \eta<y,\end{cases}$$

$$\overline{\Phi}_1(y-\eta)=\begin{cases}\Phi_{1\eta}(y-\eta) & \text{при} \quad 0\leqslant\eta\leqslant y,\\ 0 & \text{при} \quad \eta>y,\end{cases}$$

$$\overline{\Phi}_2(y-\eta)=\begin{cases}\Phi_{2\eta}(y-\eta) & \text{при} \quad 0\leqslant\eta\leqslant y,\\ 0 & \text{при} \quad y>\eta,\end{cases}$$

уравнение (3.25) записываем в виде

$$\varphi(y)\left(a-\frac{1}{2}b\right)+\frac{c}{2}\psi(y)+\frac{\sqrt{3}\,b}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{y}{\eta}\right)^{1/3}\frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{\eta-y}+$$

$$+\frac{\sqrt{3}\,c}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\frac{\psi(\eta)\,d\eta}{\eta-y}+\int_0^1 M(y,\ \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta+$$

$$+\int_0^1 N(y,\ \eta)\,\psi(\eta)\,d\eta=\beta(y), \tag{3.28}$$

где

$$M(y,\ \eta)=-\overline{\Phi}_3(y,\ \eta)+\frac{1}{2}\overline{\Phi}_1(y,\ \eta)-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}K_1(y,\ \eta),$$

$$N(y,\ \eta)=\frac{1}{2}\overline{\Phi}_2(y,\ \eta)+\frac{\sqrt{3}}{2\pi}K_2(y,\ \eta).$$

Учитывая оценки (3.26) и (3.27), имеем

$$|M(y,\ \eta)| \leqslant C_{10}\left[1+\left(\frac{y}{\eta}\right)^{1/3}\right]\frac{1}{|y-\eta|^{\alpha}},$$

$$|N(y,\ \eta)| \leqslant C_{11}\left[1+\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\right]\frac{1}{|y-\eta|^{\beta}}. \tag{3.29}$$

Теперь рассмотрим первое уравнение системы (3.17)

$$\pi\nu(y) = f(0)\int_y^1 \frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(\eta-y)^{1/3}} - \int_y^1 K_{3x}(0,\ 0;\ \eta-y)\,\tau'(\eta)\,d\eta + \gamma_{2x}(0,\ y).$$

Умножая обе части этого равенства на $(y-z)^{-\frac{1}{3}}$ и интегрируя по y в пределах от z до 1, получаем

$$\pi\int_z^1 \frac{\nu(y)\,dy}{(y-z)^{1/3}} = f(0)\int_z^1 \frac{dy}{(y-z)^{1/3}}\int_y^1 \frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(\eta-y)^{1/3}} - \int_z^1 \frac{dy}{(y-z)^{1/3}}\times$$

$$\times\int_y^1 K_{3x}(0,\ 0;\ \eta-y)\,\tau'(\eta)\,d\eta + \int_z^1 \frac{\gamma_{2x}(0,\ y)\,dy}{(y-z)^{1/3}},$$

или, применяя формулу Дирихле, имеем

$$\pi\int_z^1 \frac{\nu(y)\,dy}{(y-z)^{1/3}} = f(0)\,B\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\int_z^1 (y-z)^{1/3}\,\tau'(y)\,dy -$$

$$- B\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\int_z^1 (y-z)^{1/3}\Phi_4\left[(y-z)\,t_1\right]\,\tau'(\eta)\,d\eta + \int_z^1 \frac{\gamma_{2x}(0,\ y)\,dy}{(y-z)^{1/3}}, \tag{3.30}$$

где

$$\Phi_4(y-z) = (y-z)^{1/3}K_{3x}(0,\ 0;\ \eta-y)\in C(0\leqslant y,\ \eta\leqslant 1),$$

$$0 < t_1 < 1.$$

Дифференцируя (3.30) по z и учитывая $\nu(1)=0$, $\gamma_{2x}(0,1)=0$, имеем

$$\pi\int_z^1 \frac{\nu'(y)\,dy}{(y-z)^{1/3}} = -\frac{1}{3}f(0)\,B\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\int_z^1 \frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(\eta-z)^{2/3}} -$$

$$- B\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\int_z^1 \frac{\partial}{\partial z}\left[\Phi_4\left[(\eta-z)\,t_1\right](\eta-z)^{1/3}\right]\tau'(\eta)\,d\eta + \sigma(z), \tag{3.31}$$

где

$$\sigma(z) = \int_z^1 \frac{\gamma_{2xy}(0,\ y)\,dy}{(y-z)^{1/3}}.$$

Для ядра

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\Phi_4\left[(\eta-z)\,t_1\right](\eta-z)^{1/3}\right\} = T(\eta-z)$$

справедлива оценка

$$|T(\eta - z)| \leqslant \frac{C_{12}}{|\eta - z|^{2/3}}.$$

Согласно принятым обозначениям, из (3.31) получаем

$$\pi\psi(y) = -f(0)\,B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}\varphi(y) - B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \times$$

$$\times \int_y^1 T(\eta - y)\,\tau'(\eta)\,d\eta + \sigma(y)$$

или

$$\pi\psi(y) = -f(0)\,B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}\varphi(y) - B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\int_y^1 \Phi_5(\eta - y) \times$$

$$\times \frac{\tau'(\eta)\,d\eta}{(\eta - y)^{2/3}} + \sigma(y),$$

где

$$\Phi_5(\eta - y) = (\eta - y)^{2/3} T(\eta - y) \in C(0 \leqslant \eta,\ y \leqslant 1).$$

Интегрируя по частям последний интеграл, находим

$$\psi(y) = m\varphi(y) + \int_y^1 T_2(y, \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta + \frac{1}{\pi}\sigma(y), \tag{3.32}$$

где

$$m = -\frac{1}{\pi}B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\left[f(0)\,\frac{1}{3} + \Phi_5(0)\right];$$

$$T_2(y, \eta) = -\frac{1}{\pi}B\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\Phi_{5\eta}(\eta - y).$$

Для $T_2(y, \eta)$ находим оценку

$$|T_2(y - \eta)| \leqslant \frac{C_{13}}{|y - \eta|^{\alpha}},\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Из уравнений (3.28) и (3.32) исключим функцию $\psi(y)$. Тогда

$$\varphi(y)\left(a - \frac{1}{2}b\right) + \frac{cm}{2}\varphi(y) + \frac{c}{2}\int_y^1 T_2(y, \eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta +$$

$$+ \frac{c}{2\pi}\sigma(y) + \frac{\sqrt{3}\,b}{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{y}{\eta}\right)^{1/3}\frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{\eta - y} + \frac{\sqrt{3}\,c}{2\pi}m\int_y^1 \left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{\eta - y} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}\,c}{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\frac{d\eta}{\eta - y}\int_\eta^1 T_2(\eta, s)\,\varphi(s)\,ds + \frac{\sqrt{3}\,c}{2\pi^2}\int_0^1 \left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\frac{\sigma(\eta)\,d\eta}{\eta - y} +$$

$$+\int_0^1 M(y,\ \eta)\varphi(\eta)\,d\eta+m\int_0^1 N(y,\ \eta)\varphi(\eta)\,d\eta+\int_0^1 N(y,\ \eta)\,d\eta\times$$

$$\times\int_\eta^1 T_2(\eta,\ s)\varphi(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\int_0^1 N(y,\ \eta)\sigma(\eta)\,d\eta=\beta(y).$$

Положив

$$A=a-\frac{1}{2}b+\frac{cm}{2},\quad B_1(y;\ \eta)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left[b\left(\frac{y}{\eta}\right)^{1/3}+Cm\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\right],$$

$$R_1(y,\ \eta)=\frac{c}{2}T_2(y,\ \eta)+\frac{\sqrt{3}c}{2\pi}\int_0^\eta\left(\frac{y}{s}\right)^{2/3}\frac{T_2(s,\ \eta)\,ds}{s-y}+$$

$$+M(y,\ \eta)+mN(y,\ \eta)+\int_0^\eta N(y,\ s)\,T_2(s,\ \eta)\,ds,$$

$$Q(y)=\beta(y)-\frac{c}{2\pi}\sigma(y)-\frac{\sqrt{3}c}{2\pi^2}\int_0^1\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\frac{\sigma(\eta)}{\eta-y}\,d\eta-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1 N(y,\ \eta)\sigma(y)\,d\eta,$$

получим

$$A\varphi(y)+\int_0^1 R_1(y,\ \eta)\varphi(\eta)\,d\eta+\int_0^1\frac{B_1(y,\ \eta)}{\eta-y}\varphi(\eta)\,d\eta=Q(y). \tag{3.33}$$

Оценим ядра и правую часть уравнения (3.33). Для этого оценим интегралы

$$I_6=\int_0^\eta\left(\frac{y}{s}\right)^{2/3}\frac{T_2(s,\ \eta)\,ds}{s-y},\quad I_7=\int_0^\eta N(y,\ s)\,T_2(s,\ \eta)\,ds.$$

Вычислим интеграл

$$I_8=\int_0^\eta\left(\frac{y}{s}\right)^{2/3}(s-\eta)^{-\alpha}\,(s-y)^{-1}\,ds=\int_0^1\left(\frac{y}{t\eta}\right)^{2/3}(t\eta-\eta)^{-\alpha}\,(t\eta-y)^{-1}\times$$

$$\times\eta\,dt=\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\frac{\eta}{y}^{1-\alpha}\int_0^1 t^{-2/3}\,(1-t)^{-\alpha}\left(1-t\frac{\eta}{y}\right)^{-1}dt=$$

$$= B\left(\frac{1}{3}, 1-\alpha\right)\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3} \frac{\eta}{y}^{1-\alpha} F\left(1, 1/3, 4/3-\alpha, \frac{\eta}{y}\right);\ 0 \leqslant \alpha < 1.$$

Пользуясь формулами (3.25), получаем оценку

$$|I_8| \leqslant C_{14}\left[1+\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\right]\frac{1}{|y-\eta|^{\alpha}}.$$

Эта же оценка справедлива и для интегралов I_6 и I_7. Учитывая оценки (3.29), получаем окончательно

$$|R_1(y,\eta)| \leqslant C_{15}\frac{1}{|y-\eta|^{\alpha}}\left[1+\left(\frac{y}{\eta}\right)^{1/3}+\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2/3}\right]. \tag{3.34}$$

Оценка ядра $B_1(y, \eta)$ сразу получается из его выражения.

Теперь рассмотрим правую часть уравнения (3.33). Для этого исследуем функцию

$$\sigma(y) = \int_y^1 \frac{\gamma_{2x\eta}(0,\eta)\,d\eta}{(\eta-y)^{1/3}} \tag{3.35}$$

и прежде всего функцию $\gamma_{2xy}(0, y)$:

$$\gamma_{2x}(x,y) = -\int_{-1}^{0}\int_{y}^{1} G_x^-(x,\xi;\eta-y)\,F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= -\int_{-1}^{0}\int_{y}^{1} U_x(x,\xi;\eta-y)\,F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta +$$

$$+\int_{-1}^{0}\int_{y}^{1} W_x^-(x,\xi;\eta-y)\,F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$\rho(x,y) = \int_{-1}^{0}\int_{y}^{1} U_x(x,\xi;\eta-y)\,F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Положим

$$P(x,\xi;\eta-y) = 3(\eta-y)^{1/3} f\left(\frac{x-\xi}{(\eta-y)^{1/3}}\right) + (x-\xi)\int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{(\eta-y)^{1/3}}} f(t)\,dt. \tag{3.36}$$

Из (3.36) имеем

$$P_x(x, \xi; \eta - y) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{(\eta-y)^{1/3}}} f(t)\,dt, \quad P_{xx}(x, \xi; \eta - y) = U(x, \xi; \eta - y),$$

$$P_{xxx} = P_\eta = U_x(x, \xi; \eta - y),$$

Учитывая это, находим

$$\rho(x, y) = \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{y}^{1} P_\eta(x, \xi; \eta - y) F(\xi, \eta)\, d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} d\xi \left\{ P(x, \xi; \eta - y) F(\xi, \eta)\Big|_y^1 - \int\limits_{y}^{1} P(x, \xi; \eta - y) F_\eta(\xi, \eta) d\eta \right\} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} P(x, \xi; 1 - y) F(\xi, 1)\, d\xi - \lim_{\eta \to y} \int\limits_{-1}^{0} P(x, \xi, \eta - y) F(\xi, \eta)\, d\xi -$$

$$- \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{y}^{1} P(x, \xi; \eta - y) F_\eta(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Из (3.36) вытекает, что

$$\lim_{\eta - y \to +0} P(x, \xi; \eta - y) = \begin{cases} \pi(x - \xi), \text{ если } x > \xi, \\ 0, \text{ если } x \leqslant \xi, \end{cases}$$

следовательно,

$$\rho(x, y) = \int\limits_{0}^{1} P(x, \xi; 1 - y) F(\xi, 1)\, d\xi - \pi \int\limits_{-1}^{x} (x - \xi) F(\xi, y)\, d\xi -$$

$$- \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{y}^{1} P(x, \xi; \eta - y) F_\eta(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Отсюда при $x=0$ имеем

$$\rho(0, y) = \int\limits_{0}^{1} P(0, \xi; 1 - y) F(\xi, 1)\, d\xi + \pi \int\limits_{-1}^{0} \xi F(\xi, y)\, d\xi -$$

$$- \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{y}^{1} P(0, \xi; \eta - y) F_\eta(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Нам необходимо оценить функцию $\rho_y(0, y)$. Поэтому, дифференцируя предыдущее равенство по y, находим

$$\rho_y(0, y) = \int\limits_{0}^{1} U_x(0, \xi; 1 - y) F(\xi, 1)\, d\xi + \pi \int\limits_{-1}^{0} \xi F_y(\xi, y)\, d\xi -$$

$$-\int_{-1}^{0}\int_{y}^{1} U_x(0, \xi;\ \eta-y)\, F_\eta(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Пусть $|F_y(x, y)| \leqslant M$. Пользуясь оценкой фундаментально решения

$$|U_x(x, \xi;\ \eta-y) \leqslant C_{16}\frac{|x-\xi|^{1/4}}{|y-\eta|^{3/4}},$$

имеем

$$|\rho_y(0, y)| \leqslant C_{17}M\frac{1}{(1-y)^{3/4}} + C_{18}M + C_{19}M(1-y)^{1/4}. \quad (3.3$$

Оценка (3.37) справедлива и для функции $\gamma_{2xy}(0, y)$. Согласі оценке (3.37), для того чтобы функция $\sigma(y)$, определенная инте ралом (3.35), оставалась ограниченной при $y=1$ (что соответств ет определению функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$), необходимо потребова выполнения условия $F(x, 1)\equiv 0$. Тогда для функции $\sigma(y)$ имее оценку

$$|\sigma(y)| \leqslant C_{20}M\int_{y}^{1}\frac{d\eta}{(\eta-y)^{1/3}} \leqslant C_{21}(1-y)^{2/3}.$$

Оценивая остальные интегралы, входящие в состав $Q(y)$, убежд емся, что функция $Q(y)$ непрерывна в $0\leqslant y\leqslant 1$. В уравнені (3.33) введем новые независимые переменные z и t по формула

$$y=z^3,\ \eta=t^3.$$

Тогда получим

$$A\varphi(z)+\int_0^1 R_2(z, t)\varphi(t)\,dt+\int_0^1\frac{B_2(z, t)\varphi(t)\,dt}{t-z}=Q(z), \quad (3.3$$

где

$$R_2(z, t)=3t^2R_1(z^3, t^3);\quad \varphi(z)\equiv\varphi(z^3),\quad Q(z)\equiv Q(z^3);$$

$$B_2(z, t)=\frac{3t^2}{t^2+zt+z^2}\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[b\left(\frac{z}{t}\right)+cm\left(\frac{z}{t}\right)^2\right].$$

Теперь для ядер $R_2(z, t)$ и $B_2(z, t)$ справедливы оценки

$$|R_2(z, t)| \leqslant \frac{C_{22}}{|z-t|^\alpha},\quad |B_2(z, t)| \leqslant C_{23},\quad 0\leqslant\alpha<1,$$

и уравнение (3.38) может быть записано в виде

$$A\varphi(z)+\frac{B}{\pi i}\int_0^1\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt+\int_0^1 R(z, t)\varphi(t)\,dt=Q(z), \quad (3.3$$

где

$$R(z,\ t)=R_2(z,\ t)-\frac{B_2(z,\ t)-B_2(z,\ z)}{t-z};$$

$$B=\frac{\sqrt{3}\,i}{2}(b+cm);\quad A=a-\frac{1}{2}b+\frac{cm}{2}.$$

Итак, мы получили сингулярное интегральное уравнение нормального типа для определения функции $\varphi(y)$. В формулах (3.22) функция $\varphi(y)$ должна быть ограниченной при $y=1$, а при $y\to 0$ она может иметь особенность порядка не выше $\frac{2}{3}$, т. е. функция $\varphi(y)$ принадлежит классу $h(1)$ (см. [59]). Вычислим индекс уравнения (3.39) в классе $h(1)$.

Согласно общей теории составим выражение

$$G=\frac{A-B_i}{A+B_i}$$

и положим

$$\zeta_k=\pm\frac{1}{2\pi i}\ln G(c_k),$$

где знак плюс берется при $C_1=1$, а знак минус — при $C_0=0$. Имеем

$$\ln G(y)=\ln|G(y)|+i\arg G(y)+2\pi k i,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \dots,$$

$$\zeta_0=-\frac{1}{2\pi}\arg\frac{A-iB}{A+iB}-K=-\frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{B}{A}\right)-\operatorname{arctg}\frac{B}{A}\right]-k.$$

Для определенности положим $A>0$, $B<0$ (остальные случаи приводят к этим же результатам). Тогда

$$\zeta_0=-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(-\frac{B}{A}\right)-k=-\theta-k,$$

где

$$0<\theta=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(-\frac{B}{A}\right)<\frac{1}{2}.$$

Подберем целое число μ_0 так, чтобы

$$-1<\zeta_0+\mu_0<0;$$

следовательно, $\mu_0=+k$. Аналогично получим

$$\zeta_1=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(-\frac{B}{A}\right)+k.$$

Подберем целое число μ_1 так, чтобы $0<\zeta_1+\mu_1<0$. Отсюда получим $\mu_1=-k$. По определению индекса имеем

$$\varkappa=\mu_0+\mu_1=0.$$

Уравнение (3.39) может быть регуляризовано по методу Карлемана—Векуа [59]. В результате вместо уравнения (3.39) получим уравнение Фредгольма

$$\varphi(z) + \int_0^1 K^*(z, t)\varphi(t)\,dt = Q_1(z), \tag{3.40}$$

где

$$K^*(z, t) = AR(z, t) - \frac{B}{\pi i}\chi(z)\int_0^1 \frac{R(\xi, t)\,d\xi}{\chi(\xi)(\xi - z)};$$

$$Q_1(z) = AQ(z) + \frac{B}{\pi i}\chi(z)\int_0^1 \frac{Q(\xi)\,d\xi}{\chi(\xi)(\xi - z)};$$

$\chi(z)=\omega_0(z)z^{-\theta}(1-z)^{\theta}$ — каноническая функция класса $h(1)$; $\omega_0(z)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера и нигде не обращающаяся в нуль. Уравнение (3.40) эквивалентно задаче Жевре в смысле разрешимости. Поэтому разрешимость интегрального уравнения (3.40) следует из доказанной единственности решения задачи Жевре.

Дальнейшие исследования уравнения (3.40) показывают, что его решение $\varphi(z)$ имеет особенность порядка θ при $z=0$. Возвращаясь к переменной y, видим, что функция $\varphi(y)$ ограничена при $y=1$ и обращается в бесконечность порядка $\frac{\theta}{3}$ при $y=0$. Если $0<\theta\leqslant\frac{1}{2}$, то функция $\varphi(y)$ при $y=0$ имеет бесконечность порядка не выше $\frac{1}{6}$. Такое же утверждение справедливо и для функции $\psi(y)$.

Глава VIII

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

В настоящей главе изучаются некоторые краевые задачи для линейных и нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков составного типа.

Пусть Ω — односвязная область плоскости (x, y), ограниченная гладким жордановым контуром Γ, который обладает следующими свойствами: всякая прямая $y=c$, где $-\infty<y_1<c<y_2<+\infty$, пересекает контур Γ в двух точках; прямые $y=y_1$ и $y=y_2$ имеют с контуром Γ единственные общие точки (касания) — $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ соответственно, а прямые $y=c$ при $c<y_1$ и $c>y_2$ с Γ общих точек не имеют. Соединим точки M и N гладкой кривой, лежащей в области Ω и пересекающейся с прямыми $y=c$ точно в одной точке. Пусть $x=\mu(y)$ — уравнение этой кривой. Через Γ_1 обозначим ту часть Γ, которая получается при движении от точки N к точке M в положительном направлении; остальную часть Γ обозначим через Γ_2.

§ 1. ЗАДАЧА ДЕВИСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}) \tag{1.1}$$

рассмотрим следующую задачу.

Задача D. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1.1), непрерывное вместе с первыми производными в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u_x\big|_\Gamma = \varphi(x, y), \quad u\big|_{x=\mu(y)} = \psi(y). \tag{1.2}$$

Заданные функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(y)$ принадлежат классу C^1 в областях определения. Сформулированная задача в случае линейной функции f рассмотрена в работе [90]. При исследовании этой задачи предположим, что функция f определена для

$$(x, y) \in \overline{\Omega} \quad \text{и} \quad -\infty < u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xy},\ u_{xx} < +\infty.$$

Дальнейшие ограничения на функцию f будем налагать по ходу изложения.

Пусть $v(x, y)$ — решение следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta v = 0 \quad \text{в области } \Omega,$$

$$v_x|_\Gamma = \varphi(x, y), \quad v|_{x=\mu(y)} = \psi(y).$$

Оно выражается формулой

$$v(x, y) = \int\limits_{\mu(y)}^{x} \left[\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(t, y; \xi(s), \eta(s))}{\partial n} \varphi(s)\, ds \right] dt + \psi(y),$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω.

Положим

$$u(x, y) = v(x, y) + z(x, y).$$

Тогда, согласно (1.1) и (1.2), для функции $z(x, y)$ в области Ω получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta z = f(x, y, v+z, v_x+z_x, v_y+z_y, v_{xy}+z_{xy}, v_{xx}+z_{xx}) \equiv$$
$$\equiv g(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}) \tag{1.3}$$

с однородными граничными условиями

$$z_x|_\Gamma = 0, \quad z|_{x=\mu(y)} = 0. \tag{1.4}$$

Задача (1.3)—(1.4) эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению

$$z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} H(x, y; \xi, \eta)\, g(\xi, \eta; z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx})\, d\xi d\eta, \tag{1.5}$$

где

$$H(\xi, y; \xi, \eta) = -\int\limits_{\mu(y)}^{x} G(t, y; \xi, \eta)\, dt.$$

Уравнение (1.5) будем решать методом последовательных приближений. Как известно, функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{gathered} |G(x, y; \xi, \eta)| < K |\ln r|, \\ |G_x(x, y; \xi, \eta)| < \frac{K}{r}, \quad |G_y(x, y; \xi, \eta)| < \frac{K}{r}; \end{gathered} \tag{1.6}$$

здесь $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

Пусть α — произвольная константа $1<\alpha<2$. Введем в рассмотрение функции

$$\psi_0(x, y)=\left[\iint_{\Omega}\left|\left(\int_{\mu(y)}^{x}|\ln r|\,dt\right)\right|^{\alpha} d\xi d\eta\right]^{1/\alpha},$$

$$\psi_1(x, y)=\left[\iint_{\Omega}|\ln r|^{\alpha}\, d\xi d\eta\right]^{1/\alpha},$$

$$\psi_2(x, y)=\left[\iint_{\Omega}\left(\int_{\mu(y)}^{x}\frac{1}{r}\,dt\right)^{\alpha} d\xi d\eta\right]^{1/\alpha},$$

$$\psi_3(x, y)=\left[\iint_{\Omega}\frac{1}{r^{\alpha}}\, d\xi d\eta\right],$$

непрерывные в $\bar{\Omega}$.

Пусть функция $g(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx})$ непрерывна в области $R\{(x, y)\in\bar{\Omega},\ (z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx})\in E\}$, где E — любая конечная область. Через F обозначим совокупность функций $z(x, y)$, удовлетворяющих условиям

$$|z|\leqslant M\psi_0,\ |z_x|\leqslant M\psi_1,\ |z_y|\leqslant M\psi_2,$$
$$|z_{xy}|\leqslant M\psi_3,\ |z_{xx}|\leqslant M\psi_3.$$

Предположим, что для функции класса F выполняется неравенство

$$|g(x, y;\ z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx})|\leqslant L.$$

Составим последовательность функции с помощью рекуррентной формулы:

$$z^{(0)}\equiv 0,$$

$$z^{(n)}(x, y)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}H(x, y;\ \xi, \eta)\,g\Big(\xi, \eta,\ z^{(n-1)}, z_x^{(n-1)}, z_y^{(n-1)},$$
$$z_{xy}^{(n-1)}, z_{xx}^{(n-1)}\Big)\,d\xi d\eta,\ n=1, 2, 3, \ldots . \qquad (1.7)$$

Пользуясь оценками (1.6) и применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|z^{(1)}|\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}|H(x, y;\ \xi, \eta)|\,g(\xi, \eta, 0, 0, 0, 0, 0)|\,d\xi d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{L}{2\pi}\iint_{\Omega}|H(x, y;\ \xi, \eta)|\,d\xi d\eta\leqslant\frac{KL}{2\pi}\iint_{\Omega}\left|\left(\int_{\mu(y)}^{x}|\ln r|\,dt\right)\right|d\xi d\eta\leqslant$$

$$\leqslant \frac{KL}{2\pi}\left[\iint\limits_{\Omega}\left|\left(\int\limits_{\mu(y)}^{x}|\ln r|dt\right)\right|^{\alpha} d\xi d\eta\right]^{1/\alpha}\left[\iint\limits_{\Omega} d\xi d\eta\right]^{1/\beta} = \frac{KLd^{1/\beta}}{2\pi}\psi_0,$$

где

$$d = \iint\limits_{\Omega} d\xi d\eta, \ \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Аналогично получаем

$$\left|\frac{\partial z^{(1)}}{\partial x}\right| \leqslant \frac{KLd^{1/\beta}}{2\pi}\psi_1,$$

$$\left|\frac{\partial z^{(1)}}{\partial y}\right| \leqslant \frac{KLd^{1/\beta}}{2\pi}\psi_2,$$

$$\left|\frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial x^2}\right| \leqslant \frac{KLd^{1/\beta}}{2\pi}\psi_3,$$

$$\left|\frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial x \partial y}\right| \leqslant \frac{KLd^{1/\beta}}{2\pi}\psi_3.$$

Как видим, для того чтобы функция $z^{(1)}(x, y)$ принадлежала классу функций F должно выполняться неравенство

$$\frac{KLd^{1/\beta}}{2\pi} \leqslant M. \qquad (1.8)$$

Следовательно, снова будет выполнено неравенство

$$\left|g\left(x, y, z, z_x^{(1)}, z_y^{(1)}, z_{xy}^{(1)}, z_{xx}^{(1)}\right)\right| \leqslant L.$$

Аналогично при $n=2$ находим

$$|z^{(2)}| \leqslant \frac{KLd^{1/\beta}}{2\pi}\psi_0,$$

$$\left|\frac{\partial z^{(2)}}{\partial x}\right| \leqslant \frac{KLd^{1/\beta}}{2\pi}\psi_1, \ \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqslant \frac{KLd^{1/\beta}}{2\pi}\psi_2,$$

$$\left|\frac{\partial^2 z^{(2)}}{\partial x \partial y}\right| \leqslant \frac{KLd^{1/\beta}}{2\pi}\psi_3, \ \left|\frac{\partial^2 z^{(2)}}{\partial x^2}\right| \leqslant \frac{KLd^{1/\beta}}{2\pi}\psi_3$$

и, согласно (1.8),

$$|z^{(2)}| \leqslant M\psi_0, \left|\frac{\partial z^{(2)}}{\partial x}\right| \leqslant M\psi_1, \ \left|\frac{\partial z^{(2)}}{\partial y}\right| \leqslant M\psi_2,$$

$$\left|\frac{\partial^2 z^{(2)}}{\partial x \partial y}\right| \leqslant M\psi_3, \ \left|\frac{\partial^2 z^{(2)}}{\partial x^2}\right| \leqslant M\psi_3,$$

т. е. и при втором приближении аргументы z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx} функции g принадлежат классу F.

Итак, ни одно из последовательных приближений не выйдет из класса F, если выполнено условие (1.8).

Теперь докажем, что пределы последовательностей

$$\left\{\frac{\partial^{l+j} z^{(n)}}{\partial x^l \partial y^j}\right\} \tag{1.9}$$

существуют. Для этого установим, что элементы последовательностей (1.9) равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Равномерная ограниченность следует из условия

$$\left|\frac{\partial^{l+j} z^{(n)}}{\partial x^l \partial y^j}\right| \leqslant \frac{NKLd^{1/\beta}}{2\pi},$$

где

$$N = \max\left\{\max_{(x,\,y)\in\overline{\Omega}} \psi_0,\ \max_{(x,\,y)\in\overline{\Omega}} \psi_1,\ \max_{(x,\,y)\in\overline{\Omega}} \psi_2,\ \max_{(x,\,y)\in\overline{\Omega}} \psi_3\right\}.$$

Равностепенную непрерывность покажем, например, для элементов последовательности $\left\{z_{xx}^{(n)}\right\}$. Пусть (x_0, y_0) — произвольная внутренняя точка области Ω. Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta^2$ будет справедлива оценка (см. [102])

$$\frac{L}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\left|\frac{\xi-x}{r^2}-\frac{\xi-x_0}{r_0^2}\right| d\xi d\eta < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$r^2 = (\xi-x)^2+(\eta-y)^2,\ r_0^2 = (\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2.$$

Выберем область $\Omega_0 \subset \Omega$ так, чтобы она содержала круг радиуса δ с центром в точке (x_0, y_0) и

$$\frac{L}{2\pi}\iint\limits_{\Omega-\Omega}\left|g_x^*(x, y; \xi, \eta)\right| d\xi d\eta < \frac{\varepsilon}{4};$$

здесь

$$H_x(x, y; \xi, \eta) = \ln\frac{1}{r} - g^*(x, y; \xi, \eta).$$

Так как функция $g_x^*(x, y; \xi, \eta)$ непрерывна при (x, y), $(\xi, \eta)\in\Omega$, то можно найти такое достаточно малое δ_0, чтобы при $(x-x_0)^2+$ $+(y-y_0)^2\leqslant\delta_0^2$, $(\xi, \eta)\in\Omega_0$ выполнялось неравенство

$$\left|g_x^*(x, y; \xi, \eta) - g_x^*(x_0, y_0; \xi, \eta)\right| < \frac{\varepsilon\pi}{2Ld}.$$

Следовательно, при $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2\leqslant\delta_0^2$ имеем

$$\left|\frac{\partial^2 z^{(n)}(x_1, y_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z^{(n)}(x_0, y_0)}{\partial x^2}\right| \leqslant \frac{L}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\left|H_{xx}(x_1, y_1; \xi, \eta) -\right.$$

$$- H_{xx}(x_0, y_0; \xi, \eta)\Big| d\xi d\eta \leqslant \frac{L}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} \left| \frac{\xi - x_1}{r^2} - \frac{\xi - x_0}{r_0^2} \right| d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{L}{2\pi} \iint\limits_{\Omega_0} \left| g_x^*(x_1, y_1; \xi, \eta) - g_x(x_0, y_0; \xi, \eta) \right| d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{L}{2\pi} \iint\limits_{\Omega - \Omega_0} \left\{ \left| g_x^*(x_1, y_1; \xi, \eta) \right| + \left| g_x^*(x_0, y_0; \xi, \eta) \right| \right\} d\xi d\eta <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Отсюда следует, что функции последовательности $\left\{ z_{xx}^{(n)} \right\}$ равностепенно непрерывны в Ω. Равностепенная непрерывность функций последовательности $\left\{ z_{xy}^{(n)} \right\}$ доказывается аналогично.

Согласно теореме Арцела из последовательности $\left\{ \dfrac{\partial^{i+j} z^{(n)}}{\partial x^i \partial y^j} \right\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Переходя к пределу по выбранной последовательности, убеждаемся, что предельная функция $z(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.5). Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Если функция $g(x, y; z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx})$ непрерывна в области R и выполнено условие (1.8), то задача (1.3)—(1.4) допускает по крайней мере одно решение, обладающее следующими свойствами:

$$|z| \leqslant M\psi_0, \ |z_x| \leqslant M\psi_1, \ |z_y| \leqslant M\psi_2,$$

$$|z_{xy}| \leqslant M\psi_3, \ |z_{xx}| \leqslant M\psi_3, \ (x, y) \in \Omega.$$

Заметим, что условие (1.8) более общее, чем условие о малости рассматриваемой области. Если же ограничиться рассмотрением случая достаточно малых областей, то равномерная сходимость последовательностей (9) вытекает из равномерной и абсолютной сходимости ряда

$$\frac{\partial^{i+j} z^{(0)}}{\partial x^i \partial y^j} + \left(\frac{\partial^{i+j} z^{(1)}}{\partial x^i \partial y^j} - \frac{\partial^{i+j} z^{(0)}}{\partial x^i \partial y^j} \right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{\partial^{i+j} z^{(n)}}{\partial x^i \partial y^j} - \frac{\partial^{i+j} z^{(n-1)}}{\partial x^i \partial y^j} \right) + \cdots . \quad (1.10)$$

При этом предполагается, что функция $g(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx})$ удовлетворяет условию Липшица по аргументам $z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}$ равномерно относительно (x, y).

В самом деле, пусть M и L — положительные числа; если $z(x, y)$ удовлетворяет неравенствам

$$|z| < M, \ |z_x| < M, \ |z_y| \leqslant M,$$

то

$$|z_{xy}| < M, \ |z_{xx}| \leqslant M,$$

$$\left| g\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}\right)\right| \leqslant L.$$

В этом случае для того чтобы ни одно из последовательных приближений (1.9) не выходило из области определения аргументов функции g, достаточно выполнить условие

$$N \leqslant \frac{2\pi M}{L},$$

где N теперь обозначает максимум выражений

$$\iint_{\Omega} |H|\, d\xi d\eta,\ \iint_{\Omega} |H_x|\, d\xi d\eta,\ \iint_{\Omega} |H_y|\, d\xi d\eta,$$

$$\iint_{\Omega} |H_{xy}|\, d\xi d\eta,\ \iint_{\Omega} |H_{xx}|\, d\xi d\eta$$

в области Ω.

Оценивая последовательно абсолютные значения членов ряда (1.10), имеем

$$\left| \frac{\partial^{i+j}\left(z^{(1)} - z^{(0)}\right)}{\partial x^i\, \partial y^j} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial^{i+j} H}{\partial x^i\, \partial y^j} \right| \times$$

$$\times \left| g(\xi, \eta, 0, 0, 0, 0, 0) \right| d\xi d\eta \leqslant \frac{L}{2\pi} N,$$

$$\left| \frac{\partial^{i+j}\left(z^{(2)} - z^{(1)}\right)}{\partial x^i\, \partial y^j} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial^{i+j} H}{\partial x^i\, \partial y^j} \right| \times$$

$$\times \left| g\left(\xi, \eta, z^{(1)}, z_x^{(1)}, z_y^{(1)}, z_{xy}^{(1)}, z_{xx}^{(1)}\right) - g(\xi, \eta, 0, 0, 0, 0, 0) \right| d\xi d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{2\pi} \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial^{i+j} H}{\partial x^i\, \partial y^j} \right| \left[\left| z^{(1)} - z^{(0)} \right| + \left| z_x^{(1)} - z_x^{(0)} \right| + \left| z_y^{(1)} - z_y^{(0)} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| z_{xy}^{(1)} - z_{xy}^{(0)} \right| + \left| z_{xx}^{(1)} - z_{xx}^{(0)} \right| \right] d\xi d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{2\pi} \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial^{i+j} H}{\partial x^i\, \partial y^j} \right| \left[5\, \frac{LN}{2\pi} \right] d\xi d\eta \leqslant \frac{5ALN}{(2\pi)^2} N = \frac{5ALN^2}{(2\pi)^2},$$

где A — константа условий Липшица. Далее, пользуясь методом полной индукции, получаем

$$\left| \frac{\partial^{i+j}\left(z^{(n)} - z^{(n-1)}\right)}{\partial x^i\, \partial y^j} \right| \leqslant \frac{L\,(5A)^{n-1} N^n}{(2\pi)^n}.$$

Отсюда видно, что каждый член ряда (1.10) не превосходит по модулю соответствующего члена числового ряда с положительными членами

$$\frac{LN}{2\pi}+\frac{L(5A)N^2}{(2\pi)^2}+\dots+\frac{L(5A)^{n-1}N^n}{(2\pi)^n}+\dots$$

или

$$\frac{LN}{2\pi}\left(1+\frac{5AN}{2\pi}+\dots+\frac{(5A)^{n-1}N^{n-1}}{(2\pi)^{n-1}}+\dots\right). \qquad (1.11)$$

Если область Ω достаточно мала, то $\frac{5AN}{2\pi}<1$ и ряд (1.11) сходится. Тогда ряд (1.10) сходится равномерно и абсолютно. Этим доказана равномерная сходимость последовательностей $\{z^{(n)}\}$, $\{z_x^{(n)}\}$, $\{z_y^{(n)}\}$, $\{z_{xy}^{(n)}\}$, $\{z_{xx}^{(n)}\}$ в области Ω.

Предельная функция $z(x, y)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.5), следовательно, решение задачи (1.3)—(1.4) существует.

Теорема 2 (см. [90]). Если коэффициенты уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta u+a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_x+$$

$$+d(x,y)u_y+e(x,y)u=f(x,y) \qquad (1.12)$$

в области Ω удовлетворяют условиям

$$d=0,\ c<-|e|\,l,\ e<0,$$

где $l=\max\limits_{y}\int dx$, а интеграл взят вдоль характеристики в Ω, то решение задачи (1.2), (1.12) единственно.

Теорема 3. Если частные производные f_u, f_{u_x}, $f_{u_{xy}}$, $f_{u_{xx}}$ непрерывны в области Ω, кроме того, $f_u>0$, $f_{u_x}>0$, $f_{u_y}=0$ и $f_{u_x}>f_u l$, где l — то же, что в теореме 2, то решение задачи единственно в области Ω.

При выполнении указанных условий доказательство теоремы 3 вытекает из доказательства теоремы 2.

§ 2. ЗАДАЧА СЁСТРАНДА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Задача *C*. Требуется определить регулярное в области Ω решение уравнения (1.1), непрерывное в замкнутой области Ω и удовлетворяющее условиям

$$u|_\Gamma=\varphi(x, y),\quad u|_{x=\mu(y)}=\varphi_1(y), \qquad (2.1)$$

где $\varphi(x, y)$ — заданная непрерывная функция, а $\varphi_1(y)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Заметим, что эта задача для модельного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta u=0 \qquad (2.2)$$

впервые рассмотрена в работах [103, 104].

Предположим, что функция $f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx})$ определена для

$$(x, y) \in \overline{\Omega} \text{ и } -\infty < u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xy},\ u_{xx} < +\infty .$$

Рассмотрим задачу сначала для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta z = f(x, y) \tag{2.3}$$

с однородными граничными условиями

$$z|_\Gamma = 0, \quad z|_{x=\mu(y)} = 0. \tag{2.4}$$

Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то нетрудно показать, что функция

$$z_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} H(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi.\, d\eta, \tag{2.5}$$

где

$$H(x, y; \xi, \eta) = \int\limits_{\mu(y)}^{x} \ln\left[(t-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right] dt,$$

удовлетворяет уравнению (2.3) и условию

$$z_0|_{x=\mu(y)} = 0.$$

Пусть $z(x, y)$ — решение задачи (2.3), (2.4). Положим

$$z(x, y) = z_0(x, y) + v_0(x, y). \tag{2.6}$$

Тогда для функции $v_0(x, y)$ будем иметь задачу

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta v_0 = 0, \tag{2.7}$$

$$v_0|_\Gamma = -z_0|_\Gamma, \quad v_0|_{x=\mu(y)} = 0. \tag{2.8}$$

Отметим, что значение функции z_0 на границе Γ удовлетворяет условиям, налагаемым на заданную функцию в работе [19] при исследовании задачи (2.7)—(2.8) (см. также § 3 настоящей главы). В самом деле, из выражения $z_0(x, y)$ видно, что не только сама функция z_0, но и ее производная z_{0x} как логарифмический потенциал представляет собой непрерывную функцию (x, y) на всей плоскости.

Согласно [19], задача (2.7)—(2.8) имеет единственное решение. Решение задачи (2.7)—(2.8) будем искать в виде

$$v_0(x, y) = v(x, y) + \omega(y),$$

где $v(x, y)$ — гармоническая функция, а $\omega(y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, которая без ограничения общности может быть подчинена условиям $\omega(y_1) = \omega(y_2) = 0$. Тогда для определения функции $v(x, y)$ получим условия

$$v|_\Gamma = -z_0 - \omega(y), \quad v|_{x=\mu(y)} = -\omega(y). \tag{2.9}$$

Гармоническая в области Ω функция, удовлетворяющая первому из условий (2.9), имеет вид

$$v(x, y) = \int\limits_\Gamma \frac{\partial G(x, y; \xi_1(s), \eta_1(s))}{\partial n}\left[-z_0(\xi_1(s), \eta_1(s)) - \omega(\eta_1(s))\right] ds, \tag{2.10}$$

где $G(x, y; \xi_1, \eta_1) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r} + g(x, y; \xi_1, \eta_1)\right)$ — указанная выше функция Грина.

Реализуя последнее условие (2.9), из (2.10) получаем интегральное уравнение для определения функции $\omega(y)$

$$\omega(y) - \int\limits_\Gamma K_1(y, s)\,\omega(s)\,ds = g(y); \tag{2.11}$$

здесь

$$K_1(y, s) = \frac{\partial G(\mu(y), y; \xi_1(s), \eta_1(s))}{\partial n};$$

$$g(y) = \int\limits_\Gamma \frac{\partial G(\mu(y), y; \xi_1(s), \eta_1(s))}{\partial n} z_0(s)\,ds. \tag{2.12}$$

Неизвестную функцию $\omega(y)$ будем искать в виде

$$\omega(y) = (y-y_0)(y-y_1)\omega_1(y), \tag{2.13}$$

где функция $\omega_1(y)$ непрерывна при $y_1 \leqslant y \leqslant y_0$. Тогда для определения функции $\omega_1(y)$ из (2.11) получим интегральное уравнение

$$\omega_1(y) - \int\limits_\Gamma K_2(y, s)\,\omega_1(s)\,ds = g_1(y), \tag{2.14}$$

где

$$K_2(y, s) = \frac{(s-y_0)(s-y_1)}{(y-y_0)(y-y_1)} K_1(y, s);$$

$$g_1(y) = \frac{g(y)}{(y-y_0)(y-y_1)}.$$

Ядро $K_2(y, s)$ интегрального уравнения (2.14) является фредгольмовым, а правая часть $g_1(y)$ — непрерывной функцией, так как из формулы (2.12) в силу свойств функции $z_0(x, y)$ следует, что $g(y)$ при $y = y_0$ и $y = y_1$ обращается в нуль не ниже первого порядка, а при $y_1 < y < y_0$ эта функция достаточно гладкая. Обозначив через $R(y, s)$ резольвенту уравнения (2.14), его решение можно представить в виде

$$\omega_1(y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_\Omega K(y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\,d\xi d\eta, \tag{2.15}$$

где

$$K(y;\ \xi,\ \eta)=\frac{1}{(y-y_0)(y-y_1)}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial G(\mu(y),\ y;\ \xi_1(s),\ \eta_1(s))}{\partial n}\times$$

$$\times H\big(\xi_1(s),\ \eta_1(s);\ \xi,\ \eta\big)\,ds+\int\limits_{\Gamma}\frac{R(y,\ s)}{(s-y_0)(s-y_1)}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial G(\mu(y(s)),\ y(s);\ \xi_1(s_1),\ \eta_1(s_1))}{\partial n}H\big(\xi_1(s_1),\ \eta_1(s_1);\ \xi,\ \eta\big)\,ds_1\right]ds.$$

Легко показать, что для ядра $K(y;\ \xi,\eta)$ в $\overline{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left|K(y;\ \xi,\ \eta)\right|\leqslant\frac{\text{const}}{r}. \qquad (2.16)$$

Подставляя (2.15) в (2.13), а полученный результат — в (2.10), решение задачи (2.7)—(2.8) получаем в виде

$$v_0(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}S_1(x,\ y;\ \xi,\ \eta)f(\xi,\ \eta)\,d\xi d\eta; \qquad (2.17)$$

здесь

$$S_1(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial G(x,\ y;\ \xi_1(s),\ \eta_1(s))}{\partial n}\Big[H\big(\xi_1(s),\ \eta_1(s);\ \xi,\ \eta\big)+$$

$$+\big(\eta_1(s)-y_0\big)\big(\eta_1(s)-y_1\big)K\big(\eta_1(s);\ \xi,\ \eta\big)\Big]ds+$$

$$+(y-y_0)(y-y_1)K(y;\ \xi,\ \eta).$$

На основании (2.5), (2.6) решение задачи (2.3)—(2.4) имеет вид

$$z(x\ ,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}S(x,\ y;\ \xi,\ \eta)f(\xi,\ \eta)\,d\xi d\eta, \qquad (2.18)$$

где

$$S(x,y;\ \xi,\eta)=H(x,y;\ \xi,\eta)+S_1(x,y;\ \xi,\eta).$$

Для функции $S(x,y;\ \xi,\eta)$ также справедлива оценка (2.16).

Теперь переходим к изучению задачи C. Пусть функция $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению (2.2) в области Ω и условиям (2.1). Существование и единственность такой функции доказаны в работах [19, 103, 104]. Решение задачи C будем искать в виде

$$u(x,y)=v(x,y)+z(x,y).$$

Тогда для определения функции $z(x,y)$ будем иметь уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta z=f(x, y;\ v+z,\ v_x+z_x,\ v_y+z_y,\ v_{xy}+z_{xy},\ v_{xx}+z_{xx}) \equiv$$

$$\equiv g(x, y;\ z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}) \qquad (2.19)$$

с однородными граничными условиями

$$z|_{\Gamma}=0, \quad z|_{x=u(y)}=0. \qquad (2.20)$$

На основании формулы (2.18) задача (2.19)—(2.20) редуцируется к интегро-дифференциальному уравнению

$$z(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} S(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\, g(\xi,\ \eta, z, z_{\xi}, z_{\eta}, z_{\xi\eta}, z_{\xi\xi})\,d\xi d\eta. \qquad (2.21)$$

Уравнение (2.21) решается методом последовательных приближений, так же, как уравнение (1.5) для достаточно малых областей. В результате получаем следующую теорему.

Теорема 4. Если функция $f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx})$: 1) непрерывна по всем аргументам и ограничена при ограниченных $u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}$; 2) удовлетворяет условию Гёльдера по $(x, y)\in\bar{\Omega}$ равномерно относительно $(u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx})$; 3) удовлетворяет условию Липшица по $(u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx})$ равномерно относительно (x, y), то решение задачи (2.1) для уравнения (1.1) существует и единственно в достаточно малой области Ω.

Нам остается доказать только единственность решения задачи (2.1), (1.1).

Предположим противное. Пусть задача C допускает два решения: $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$.

Тогда их разность

$$u(x, y)=u_1(x, y)-u_2(x, y)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = g_1(x,\ y)-g_2(x,\ y)=\psi(x,\ y),$$

где

$$g_k(x, y)=f(x, y;\ u_k, u_{kx}, u_{ky}, u_{kxy}, u_{kxx}),\ \ k=1,\ 2,$$

и однородным граничным условиям (2.1).

Так как функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то согласно полученным выше результатам

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} s(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\,\psi(\xi,\ \eta)\,d\xi d\eta. \qquad (2.22)$$

Пусть N — максимум выражений

$$\iint\limits_{\Omega} |S(x, y; \xi, \eta)|\, d\xi d\eta, \quad \iint\limits_{\Omega} |S_x(x, y; \xi, \eta)|\, d\xi d\eta,$$

$$\iint\limits_{\Omega} |S_y(x, y; \xi, \eta)|\, d\xi d\eta, \quad \iint\limits_{\Omega} |S_{xy}(x, y; \xi, \eta)|\, d\xi d\eta,$$

$$\iint\limits_{\Omega} |S_{xx}(x, y; \xi, \eta)|\, d\xi d\eta$$

в области Ω.

Оценка интеграла (2.22) дает непосредственно

$$|u(x, y)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} |S(x, y; \xi, \eta)|\, |\psi(\xi, \eta)|\, d\xi d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} |S(x, y; \xi, \eta)| \left(|u_1 - u_2| + |u_{1x} - u_{2x}| + |u_{1y} - u_{2y}| + \right.$$

$$\left. + |u_{1xy} - u_{2xy}| + |u_{1xx} - u_{2xx}| \right) d\xi d\eta \leqslant \frac{ABN}{2\pi},$$

где A — константа условий Липшица, а B — наибольшее значение суммы $|u_1 - u_2| + |u_{1x} - u_{2x}| + |u_{1y} - u_{2y}| + |u_{1xy} - u_{2xy}| +$

$$+ |u_{1xx} - u_{2xx}|.$$

Аналогично получаем

$$|u_x| \leqslant \frac{ABN}{2\pi}, \quad |u_y| \leqslant \frac{ABN}{2\pi},$$

$$|u_{xy}| \leqslant \frac{ABN}{2\pi}, \quad |u_{xx}| \leqslant \frac{ABN}{2\pi}.$$

Так что

$$|u| + |u_x| + |u_y| + |u_{xy}| + |u_{xx}| \leqslant \frac{5}{2\pi} ANB = \alpha B.$$

Следовательно,

$$B \leqslant \alpha B.$$

Если $\alpha < 1$, то последнее неравенство может иметь место только при $B = 0$, т. е. при $u_1 \equiv u_2$. Условие $\alpha < 1$ выполнено, если область достаточно мала.

§ 3. ЗАДАЧА С НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО И ОБЩЕГО УРАВНЕНИЙ

1. Изучим одну краевую задачу, в которой в отличие от задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, все дополнительные условия задаются на границе области.

Впервые такая краевая задача была поставлена А. В. Бицадзе [6]. Сформулируем ее для общего уравнения (1.1): найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1.1), непрерывное вместе с производными первого порядка в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma} &= f_0(t), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} &= f_1(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где n — внутренняя нормаль к Γ_1, $f_0(t)$, а $f_1(t)$ — заданные действительные функции, причем $f_0'(t)$ и $f_1(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера, $t(x, y)$ — точка контура.

2. Поставленную задачу решим сначала для модельного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta W) = 0, \tag{3.2}$$

следуя методу работы [20], основанному на использовании известной формулы Шварца из теории функций комплексного переменного, причем в этом пункте нам удобно вместо $u(x, y)$ писать $W(x, y)$.

При исследовании этой задачи также будем пользоваться представлением любого регулярного решения уравнения (3.2) в виде

$$W(x, y) = u(x, y) + \omega(y). \tag{3.3}$$

Единственность решения задачи легко доказывается при дополнительном предположении:

$$\frac{dx}{dn} \neq 0 \tag{3.4}$$

всюду вдоль дуги Γ_1 (по поводу снятия условия (3.4) и других ограничений на границу области см. [24]).

В самом деле, без ограничения общности можно предполагать, что в представлении (3.3) функция $\omega(y)$ удовлетворяет условиям

$$\omega(M) = \omega(N) = 0. \tag{3.5}$$

На основании (3.3) однородная задача для уравнения (3.2) редуцируется к задаче определения гармонической в области Ω функции $u(x, y)$, удовлетворяющей условиям

$$u|_{\Gamma} = -\omega(y), \tag{3.6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = -\omega'(y)\frac{dy}{dn}. \tag{3.7}$$

Гармоническая функция $u(x, y)$ положительный максимум и отрицательный минимум принимает на границе области Ω. В силу

(3.5) она не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума в точках M и N. При выполнении условия (3.4) функция $u(x, y)$ отличного от нуля экстремума не может иметь и на открытой дуге Γ_1 (см. § 3 гл. VI). Но тогда на основании (3.6) она не может достигать положительного максимума и отрицательного минимума и на дуге Γ_2. Следовательно, однородная задача не имеет отличного от нуля решения, что и доказывает единственность решения поставленной задачи.

3. Существование решения рассматриваемой задачи докажем сначала для случая, когда область Ω — круг радиуса единицы с центром в начале координат. Тогда рассматриваемая задача в силу (3.3) редуцируется к определению гармонической в круге Ω функции $u(x, y)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$u|_\Gamma = f_0(t) - \omega[y(t)], \tag{3.8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = f_1(t) - \frac{\partial\omega[y(t)]}{\partial n}. \tag{3.9}$$

Обозначим через $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитическую функцию в круге $|z| < 1$. На основании известной формулы Шварца в силу (3.8) получим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [f_0(t) - \omega(y(t))]\,\frac{t+z}{t-z}\,\frac{dt}{t} + iC,$$

где C — действительная постоянная. Отсюда имеем

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0(t) - \omega[y(t)]}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma [f_0(\varphi) - \omega(\sin\varphi)]\,d\varphi. \tag{3.10}$$

В последнем интеграле $t = e^{i\varphi}$.

Чтобы удовлетворить и условию (3.9), продифференцируем выражения (3.10) для $u(x, y)$ по внутренней нормали к Γ. Положив $z = \rho e^{i\varphi}$, для $\frac{\partial u}{\partial n}$ будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\operatorname{Re} e^{i\varphi}\,\frac{1}{i\pi}\int_\Gamma \frac{f_0(t) - \omega[y(t)]}{(t-z)^2}\,dt,$$

или, после интегрирования по частям,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\operatorname{Re}\frac{z}{\rho}\,\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f_0'(t) - \omega_t'[y(t)]}{t-z}\,dt. \tag{3.11}$$

Нетрудно проверить, что $\cos(n, y) = -\sin\varphi_0$, где $e^{i\varphi_0} = t_0 \in \Gamma_1$, поэтому

$$\frac{\partial \omega / y(t)]}{\partial n} = -\omega'[y(t_0)] \sin \varphi_0.$$

Из (3.11) при $z - t_0 \in \Gamma_1$ по известной формуле Сохоцкого получим

$$f_1(t_0) + \omega'[y(t_0)] \sin \varphi_0 = \mathrm{Re}\, \frac{t_0}{\pi i} \left\{ \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f_0'(t) - \omega'[y(t)]}{t - t_0} dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{f_0'(t) - \omega_t'[y(t)]}{t - t_0} dt \right\},$$

или, приняв обозначение

$$g(t_0) \equiv - f_1(t_0) - \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{t_0}{t - t_0} f_0'(t)\, dt - \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_2} \frac{t_0}{t - t_0} f_0'(t)\, dt,$$

будем иметь

$$\omega'[y(t_0)] \sin \varphi_0 - \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi i} \left\{ \int\limits_{\Gamma_1} \frac{t_0}{t - t_0} \omega_t'[y(t)]\, dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{t_0}{t_1 - t_0} \omega_{t_1}'[y(t_1)]\, dt_1 \right\} = g(t_0).$$

Делая замену $t_1 = -\bar{t}$ во втором интеграле полученного равенства и учитывая, что функция $\omega(y)$ принимает равные значения в точках t и $-\bar{t}$ (так как она зависит только от y), легко убеждаемся в справедливости формулы

$$\omega'[y(t_0)] \sin \varphi_0 - \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \left(\frac{t_0}{t - t_0} + \frac{t_0}{\bar{t} + t_0} \right) \omega'[y(t)] \cos \varphi\, d\varphi = g(t_0), \tag{3.12}$$

где по-прежнему $t = e^{i\varphi}$, $t_0 = e^{i\varphi_0}$.

Полагая $\omega'[y(t)] = \gamma(t)$ и

$$K(t_0, t) = \cos \varphi \frac{t - t_0}{t} \mathrm{Re} \left(\frac{it_0}{t - t_0} + \frac{it_0}{\bar{t} + t_0} \right),$$

из (3.12) получаем сингулярное интегральное уравнение для определения неизвестной функции $\gamma(t)$

$$\sin \varphi_0 \gamma(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{K(t_0, t)}{t - t_0} \gamma(t)\, dt = g(t_0). \qquad 3.13)$$

Эквивалентность уравнения (3.13) рассматриваемой задаче очевидна.

Заметим, что здесь и в гл. IX для доказательства существования решения уравнений вида (3.13) будем пользоваться общей теорией, разработанной для таких уравнений в случае разомкнутых контуров и непрерывных коэффициентов (см. [59], гл. V).

Теперь докажем, что уравнение (3.13) всегда разрешимо. Учитывая эквивалентность однородной задачи однородному сингулярному уравнению (получающемуся из (3.13) при $g(t_0)\equiv 0$), а также то, что при невыполнении условия (3.5) однородной задаче удовлетворяет линейная функция $a+by$, легко заключаем, что число k линейно независимых решений однородного сингулярного интегрального уравнения равно единице. Это решение постоянное.

Легко также проверить, что функции $g(t_0)$ и $K(t_0, t)$ удовлетворяют всем требованиям гладкости, которые налагаются на них при исследовании уравнений вида (3.13) ([59], с. 387—390).

Если пользоваться обозначениями, принятыми в [59], то в нашем случае

$$A(t_0)=\sin\varphi_0,\quad B(t_0)=K(t_0, t_0)=i\cos\varphi_0,$$

$$G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}=e^{-2i\varphi_0}, \tag{3.14}$$

где

$$\varphi_0=\arg t_0;\quad \frac{\pi}{2}\leqslant\varphi_0\leqslant\frac{3\pi}{2}.$$

Видно, что функция $G(t_0)$ отлична от нуля всюду на Γ_1 (включая концы) и, следовательно, уравнение (3.13) является уравнением нормального типа.

Для уравнения (3.13) концы контура Γ_1 особенные ([59], с. 392).

Вычислим индекс ([59], с. 394) уравнения (3.13). Для этого найдем действительные числа по формуле

$$\alpha_k+i\beta_k=\mp\frac{\ln G(c_k)}{2\pi i}, \tag{3.15}$$

где c_k — концы контура, причем верхний знак берется при конце c_1, которому в нашем случае соответствует $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$, а нижний—при $c_2:\varphi_0=\frac{3\pi}{2}$.

На основании (3.14) и (3.15) легко определить, что $\alpha_1=-1$, а $\alpha_2=2$.

Теперь выберем целые числа λ_k, так, что

$$\alpha_k+\lambda_k=0.$$

Очевидно, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$. После этого индекс $\varkappa$ уравнения (3.13) определяется по формуле

$$\varkappa = -\sum_{k=1}^{2} \lambda_k = 1.$$

Итак, индекс уравнения (3.13) равен единице. Тогда в силу равенства $k-k'=\varkappa$ (вторая теорема Нётера), так как $k=1$, то $k'=0$, где k' — число линейно независимых решений союзного однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.13). Отсюда на основании первой теоремы Нётера заключаем, что сингулярное интегральное уравнение (3.13) всегда разрешимо. Следовательно, существование решения задачи в рассматриваемом случае доказано.

4. В случае произвольной области (конечно, удовлетворяющей условиям единственности решения) задача легко сводится к сингулярному интегральному уравнению относительно функции $\omega'(y)$. Покажем это. Пусть $x=x(s)$, $y=y(s)$ — параметрическое уравнение контура Γ, где s — длина дуги, отсчитываемая от точки N. В дальнейшем в условиях (3.8) и (3.9) вместо t будем писать s.

Гармоническая в области Ω функция, удовлетворяющая условию (3.8), имеет вид

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(x(s), y(s); x_0, y_0)}{\partial n}\{f_0(s) - \omega[y(s)]\}\,ds, \tag{3.16}$$

где $G(x, y; x_0, y_0) = \ln\frac{1}{r} + g(x, y, x_0, y_0)$ — функция Грина оператора Лапласа для области Ω; $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$. Из (3.16) получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(s)\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial G}{\partial n}\,ds;\quad \frac{\partial u}{\partial y_0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(s)\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial G}{\partial n}\,ds,$$

или подробнее

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{(y-y_0)^2-(x-x_0)^2}{r^4}\,y'(s) + \frac{2(x-x_0)(y-y_0)}{r^4}\,x'(s)\right]\times$$

$$\times\,\mu(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial g}{\partial n}\,\mu(s)\,ds;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{2(x-x_0)(y-y_0)}{r^4}\,y'(s) + \frac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{r^4}\,x'(s)\right]\times$$

$$\times\,\mu(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial g}{\partial n}\,\mu(s)\,ds, \tag{3.17}$$

где

$$\mu(s)=f_0(s)-\omega[y(s)];\ \ y'(s)=-\cos(n,x);\ \ x'(s)=\cos(n,y).$$

После интегрирования по частям равенства (3.17) имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{y-y_0}{r^2}+P(x,\ y;\ x_0,\ y_0)\right]\mu'(s)\,ds,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_0}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{x-x_0}{r^2}-Q(x,\ y;\ x_0,\ y_0)\right]\mu'(s)\,ds, \qquad (3.18)$$

где

$$P(x,\ y;\ x_0,\ y_0)=\int\frac{\partial^2 g}{\partial x_0\partial n}ds;\qquad Q(x,\ y;\ x_0,\ y_0)=\int\frac{\partial^2 g}{\partial y_0\partial n}ds.$$

В формулах (3.18) переходим к пределу при $(x_0, y_0)\to\Gamma_1$. В этом случае справедливы формулы предельного перехода

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_0}&=+\frac{1}{2}\mu'(s_0)\cos(n,\ y_0)+\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)_0\\ \frac{\partial u}{\partial y_0}&=-\frac{1}{2}\eta'(s_0)\cos(n,\ x_0)+\left(\frac{\partial u}{\partial y_0}\right)_0\end{aligned}\right\}, \qquad (3.19)$$

в которых индекс «нуль» за скобкой показывает, что значение берется на границе Γ_1.

Вводя обозначения $x_0=x(s_0)$, $y_0=y(s_0)$ и применяя к равенству (3.18) формулы (3.19), полученные значения частных производных подставляем в условие (3.9), которое предварительно записываем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}\cos(n,\ x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,\ y_0)=f_1(s_0)-\omega'[y(s_0)]\cos(n,\ y_0).$$

Приходим к следующему уравнению для определения функции $\omega'[y(s)]$:

$$x'(s_0)\,\omega'[y(s_0)]-\frac{x'(s_0)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{x(s)-x(s_0)}{[x(s)-x(s_0)]^2+[y(s)-y(s_0)]^2}\times$$

$$\times\,\omega'[y(s)]\,y'(s)\,ds-\frac{y'(s_0)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{y(s)-y(s_0)}{[x(s)-x(s_0)]^2+[y(s)-y(s_0)]^2}\times$$

$$\times\,\omega'[y(s)]\,y'(s)\,ds-\frac{y'(s_0)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}P(s,\ s_0)\,\omega'[y(s)]\,y'(s)\,ds+$$

$$+\frac{x'(s_0)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}Q(s,\ s_0)\,\omega'[y(s)]\,y'(s)\,ds=g(s_0), \qquad (3.20)$$

где

$$g(s_0)=f_1(s_0)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{x'(s_0)\left[x(s)-x(s_0)\right]+y'(s_0)\left[y(s)-y(s_0)\right]}{\left[x(s)-x(s_0)\right]^2+\left[y(s)-y(s_0)\right]^2}\times$$

$$\times f_0'(s)\,ds-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[y'(s_0)P(s,s_0)-x'(s_0)Q(s,s_0)\right]f_0'(s)\,ds.$$

Преобразуем первые два интеграла в левой части уравнения (3.20), обозначив $\omega'[y(s)]\equiv\delta(s)$:

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{\left[x(s)-x(s_0)\right]y'(s)}{\left[x(s)-x(s_0)\right]^2+\left[y(s)-y(s_0)\right]^2}\delta(s)\,ds=\int\limits_{\Gamma}\frac{K_1(s,s_0)}{s-s_0}\delta(s)\,ds=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}\frac{K_1(s_0,s_0)}{s-s_0}\delta(s)\,ds+\int\limits_{\Gamma}\frac{K_1(s,s_0)-K_1(s_0,s_0)}{s-s_0}\delta(s)\,ds;$$

здесь

$$K_1(s,s_0)=\frac{(s-s_0)\left[x(s)-x(s_0)\right]y'(s)}{\left[x(s)-x(s_0)\right]^2+\left[y(s)-y(s_0)\right]^2};$$

$$K_1(s,s_0)=\lim_{s\to s_0}K_1(s,s_0)=\lim_{s\to s_0}\frac{\dfrac{x(s)-x(s_0)}{s-s_0}y'(s)}{\left[\dfrac{x(s)-x(s_0)}{s-s_0}\right]^2+\left[\dfrac{y(s)-y(s_0)}{s-s_0}\right]^2}=$$

$$=\frac{x'(s_0)\,y'(s_0)}{\left[x'(s_0)\right]^2+\left[y'(s_0)\right]^2}=x'(s_0)\,y'(s_0).$$

Аналогично преобразуется и второй интеграл. Подставляя эти значения в (3.20), получаем

$$x'(s_0)\delta(s_0)-\frac{y'(s_0)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\delta(s)\,ds}{s-s_0}-\frac{x'(s_0)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{K_1(s,s_0)-K_1(s_0,s_0)}{s-s_0}\delta(s)\,ds-$$

$$-\frac{y'(s_0)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{K_2(s,s_0)-K_2(s_0,s_0)}{s-s_0}\delta(s)\,ds-\frac{y'(s_0)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}P(s,s_0)\,y'(s)\,\delta(s)\,ds+$$

$$+\frac{x'(s_0)}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}Q(s,s_0)\,y'(s)\,\delta(s)\,ds=g(s_0). \qquad (3.21)$$

Разрешимость уравнения (3.21) доказывается так же, как в случае уравнения (3.13).

5. Приведем краткую схему решения задачи (1.1), (3.1). Пусть $W(x,y)$ — решение рассматриваемой задачи для уравнения (3.2), найденное в пп. 2—4.

Полагая

$$u(x,y)=W(x,y)+z(x,y)$$

для функции $z(x,y)$ в Ω, получаем уравнение (см. § 1, 2)

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta z=g(x,y,z,z_x,z_y,z_{xy},z_{xx}) \qquad (3.22)$$

с однородными граничными условиями

$$z|_{\Gamma} = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = 0. \tag{3.23}$$

Если функция $F(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то функция

$$z_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} H(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

где

$$H(x, y; \xi, \eta) = -\int\limits_{x_0}^{x} G(t, y; \xi, \eta)\, dt,$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta z = F(x, y); \tag{3.24}$$

здесь $G(x, y; \xi, \eta)$ — та же функция Грина, что и в § 1; x_0 — некоторая фиксированная точка области Ω.

Далее, полагая

$$z(x, y) = v_0(x, y) + z_0(x, y), \tag{3.25}$$

для функции $v_0(x, y)$ получаем задачу

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta v_0 = 0,$$

$$v_0|_{\Gamma} = -z_0|_{\Gamma}, \quad \left.\frac{\partial v_0}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = -\left.\frac{\partial z_0}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}, \tag{3.26}$$

которая, как показано в пп. 2—4, имеет единственное решение. Оказывается (см. [68]), решение задачи (3.26) может быть представлено в виде

$$v_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} V(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{3.27}$$

где V — вполне определенное ядро, зависящее от функций H, G и их производных под интегралами; оно представляет собой функцию, непрерывную вместе с производными любого порядка, когда точка (x, y) находится внутри области. Тогда решение задачи (3.23), (3.24) записывается в виде

$$z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} K(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{3.28}$$

где

$$K(x, y; \xi, \eta) = V(x, y; \xi, \eta) + H(x, y; \xi, \eta).$$

С помощью представления (3.28) решения неоднородного уравнения (3.24) задача (1.1), (3.1) сводится к интегро-дифференциальному уравнению вида (1.5) с ядром K, которое решается методом последовательных приближений так же, как в § 1, 2.

Отметим, что в случае линейной функции f справедлива следующая теорема (см. [25]).

Теорема 5. Если коэффициенты уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta u+a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+$$
$$+a_1(x,y)u_x+b_1(x,y)u_y+c_1(x,y)u=f(x,y) \tag{3.29}$$

в области Ω удовлетворяют следующим условиям:

1) квадратичная форма $a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2$ положительно определена в области Ω;

2) $a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy}-a_{1x}-b_{1y}+2c_1\leqslant 0$, то решение задачи (3.1), (3.29) единственно.

Аналогичную теорему единственности можно сформулировать и для нелинейного уравнения (1.1) при определенных условиях, налагаемых на функцию f.

Существование и единственность решений рассмотренных в § 1—3 задач в случае нелинейных уравнений были доказаны в предположении, что область исследования уравнения достаточно мала. Заметим, что для некоторых специальных видов функции $f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx})$ условие малости области можно снять, например, в задаче Девиса (см. § 1) для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta u=K(x,y)e^{u(x,y)},$$

исследованной в [70].

§ 4. ЗАДАЧА КАТТАБРИГА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta u=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f\,(x,\ y;\ u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xy},\ u_{xx},\ u_{xxy},\ u_{xxx}). \tag{4.1}$$

Пусть R — круг радиуса ρ с центром в начале координат и с границей Γ.

Задача K. Требуется определить регулярное в круге R решение $u(x,y)$ уравнения (1.1), непрерывное в $\bar{R}$ и удовлетворяющее условиям

$$u|_\Gamma=\varphi_1(x,y),\ u|_{x=0}=\varphi_2(y),\ u_x|_{x=0}=\varphi_3(y), \tag{4.2}$$

где $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ и $\varphi_3(y)$ — заданные функции, причем $\varphi_1(x,y)$ непрерывна, $\varphi_2(y)$ и $\varphi_3(y)$ непрерывны в $-\rho\leqslant y\leqslant\rho$ и дважды непрерывно дифференцируемы внутри этого интервала. Задача K для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta u = 0 \tag{4.3}$$

рассмотрена в [86].

Предположим, что функция $f(x, y, u, u_x, u_{xy}, u_{xx}, u_{xxy}, u_{xxx})$ определена для

$$(x, y) \in \overline{R},\ -\infty < u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xy},\ u_{xx},\ u_{xxy},\ u_{xxx} < +\infty\ .$$

Рассмотрим сначала уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta u = f(x, y) \tag{4.4}$$

с однородными граничными условиями

$$u|_\Gamma = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = 0. \tag{4.5}$$

Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера в R, то нетрудно показать, что функция

$$u_0(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_R V(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{4.6}$$

где

$$V(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t \ln\left[(\sigma-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right] d\sigma\right) dt,$$

удовлетворяет уравнению (4.4) и условиям

$$u_0(0, y) = 0,\ u_{0x}(0, y) = 0.$$

Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (4.4)—(4.5). Полагая

$$u(x, y) = u_0(x, y) + v(x, y), \tag{4.7}$$

для функции $v(x, y)$ получаем задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta v = 0, \tag{4.8}$$

$$v|_\Gamma = -u_0|_\Gamma, \quad v|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=0} = 0. \tag{4.9}$$

Таким образом, для определения функции $v(x, y)$ имеем задачу, исследованную в работе [86], где вместо заданной функции $\varphi_1(x, y)$ дается функция $u_0(x, y)$ на Γ.

Любое регулярное решение уравнения (4.8) может быть представлено в виде

$$v(x, y) = h(x, y) + x\lambda(y) + \omega(y), \tag{4.10}$$

где $h(x, y)$ — произвольная гармоническая функция в R; $\lambda(y)$, $\omega(y)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Отметим, что произвольные функции $\lambda(y)$ и $\omega(y)$ без ограничения общности могут быть подчинены условиям

$$\lambda(\pm\rho) = \omega(\pm\rho) = 0. \tag{4.11}$$

Следуя методу работы [86] для определения функций $\lambda(y)$ и $\omega(y)$, входящих в формулу (4.10), приходим к интегральным уравнениям

$$\omega(y) - \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2 - y^2}{r^2}\,\omega(\sin\theta)\,d\theta = \psi_1(y), \tag{4.12}$$

$$\lambda(y) = -\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\rho^2 - y^2)}{r^4}\cos\theta\,\lambda(\sin\theta)\,d\theta = \psi_2(y), \tag{4.13}$$

где

$$r = \sqrt{\rho^2 + y^2 - 2y\rho\sin\theta}, \quad -\rho < y < \rho,$$

а функция $h(x, y)$ определяется через интеграл Пуассона, в котором плотность зависит от функций $\lambda(y)$ и $\omega(y)$. Правые части уравнений (4.12) и (4.13) имеют вид

$$\psi_1(y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2 - y^2}{r^2}\,u_0(\theta)\,d\theta,$$

$$\psi_2(y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2 - y^2}{r^4}\cos\theta\,u_0(\theta)\,d\theta;$$

здесь $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ при $-\rho<y<\rho$ — гладкие функции и $\psi_1(\pm\rho) = \psi_2(\pm\rho) = 0$.

При $-\rho<y<\rho$ единственные решения фредгольмовских уравнений (4.12), (4.13) можно получить методом последовательных приближений [86]; они даются известными формулами через резольвенты

$$\left.\begin{aligned} \omega(y) &= \psi_1(y) + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R_1(y, \theta)\,\psi_1(\theta)\,d\theta \\ \lambda(y) &= \psi_2(y) + \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R_2(y, \theta)\,\psi_2(\theta)\,d\theta \end{aligned}\right\}. \tag{4.14}$$

Если положить $\omega(\pm\rho) = \lambda(\pm\rho) = 0$, то функции $\omega(y)$ и $\lambda(y)$ при $-\rho\leqslant y\leqslant\rho$ становятся непрерывными. При этом легко убедиться, что функции $\omega(y)$ и $\lambda(y)$, определенные формулами (4.14), действительно удовлетворяют условиям (4.11). Отсюда, учитывая выражения функций $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ и формулу (4.6), находим

$$\omega(y) = \frac{1}{2\pi} \iint_R K_1(y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{4.15}$$

$$\lambda(y) = \frac{1}{2\pi} \iint_R K_2(y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{4.16}$$

где

$$K_1(y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2 - y^2}{r^2} V(\theta; \xi, \eta)\, d\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R_1(y, \theta) \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2 - \theta^2}{r^2} V(\theta_1; \xi, \eta)\, d\theta_1 \right] d\theta \right\};$$

$$K_2(y; \xi, \eta) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2 - y^2}{r_1^4} \cos\theta\, V(\theta; \xi, \eta)\, d\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R_2(y, \theta) \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2 - \theta^2}{r^4} \cos\theta_1\, V(\theta_1, \xi, \eta)\, d\theta_1 \right] d\theta \right\}.$$

Ядра $K_1(y;\ \xi, \eta)$ и $K_2(y;\ \xi, \eta)$ при $y = \pm\rho$ обращаются в нуль, а при $-\rho < y < \rho$, $(\xi, \eta) \in R$ являются гладкими функциями. Подставляя функции (4.15) и (4.16) в (4.10), получаем решение задачи (4.8), (4.9) в виде

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_R H(x, y;\ \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{4.17}$$

где

$$H(x, y; \xi, \eta) = -\int_\Gamma \frac{\partial G(x, y; \xi_1(s), \eta_1(s))}{\partial n} \left[V(\xi_1(s), \eta_1(s); \xi, \eta) + \right.$$

$$\left. + \xi_1(s) K_2(\eta_1(s); \xi, \eta) + K_1(\eta_1(s); \xi, \eta) \right] ds +$$

$$+ x K_2(y; \xi, \eta) + K_1(y; \xi, \eta),$$

а $G(x, y;\ \xi_1, \eta_1)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Исходя из (4.7) и (4.17), получаем решение задачи (4.4)—(4.5) в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R} W(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{4.18}$$

где

$$W(x, y; \xi, \eta) = V(x, y; \xi, \eta) + H(x, y; \xi, \eta).$$

Теперь переходим к изучению задачи (4.1)—(4.2). Пусть $v_0(x, y)$ — решение задачи (1.3), (1.2), найденное в [86]. Положим

$$u(x, y) = v_0(x, y) + z(x, y). \tag{4.19}$$

Тогда для определения функции $z(x, y)$ будем иметь уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta z = f(x, y; v_0 + z, v_{0x} + z, v_{0y} + z_y, v_{0xy} + z_{xy},$$

$$v_{0xx} + z_{xx}, v_{0xxy} + z_{xxy}, v_{0xxx} + z_{xxx}) \equiv$$

$$\equiv g(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, z_{xxy}, z_{xxx}) \tag{4.20}$$

с однородными граничными условиями

$$z|_\Gamma = 0, \quad z|_{x=0} = 0, \quad z_x|_{x=0} = 0. \tag{4.21}$$

На основании формулы (4.18) задача (4.20)—(4.21) редуцируется к интегро-дифференциальному уравнению

$$z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R} W(x, y; \xi, \eta) \times$$

$$\times g(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta, z_{\xi\eta}, z_{\xi\xi}, z_{\xi\xi\eta}, z_{\xi\xi\xi})\, d\xi\, d\eta. \tag{4.22}$$

Уравнение (4.22) будем решать методом последовательных приближений.

Пусть M и L — два положительных числа; если

$$\begin{gathered} |z| \leqslant M, \quad |z_x| \leqslant M, \quad |z_y| \leqslant M, \quad |z_{xy}| \leqslant M, \\ |z_{xx}| \leqslant M, \quad |z_{xxy}| \leqslant M, \quad |z_{xxx}| \leqslant M, \end{gathered} \tag{4.23}$$

то

$$|g(x, y; z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, z_{xxy}, z_{xxx})| \leqslant l.$$

Положим

$$z^{(0)} = 0,$$

$$z^{(n)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R} W(x, y; \xi, \eta)\, g\Big(\xi, \eta, z^{(n-1)}, z_\xi^{(n-1)},$$

$$z_\eta^{(n-1)}, z_{\xi\eta}^{(n-1)}, z_{\xi\xi}^{(n-1)}, z_{\xi\xi\eta}^{(n-1)}, z_{\xi\xi\xi}^{(n-1)}\Big) d\xi\, d\eta. \tag{4.24}$$

Пусть N — максимум по области $\overline{R}$ непрерывных функций

$$\iint\limits_{R} |W|\, d\xi\, d\eta, \iint\limits_{R} |W_x|\, d\xi\, d\eta, \iint\limits_{R} |W_y|\, d\xi\, d\eta,$$

$$\iint_R |W_{xy}|d\xi\, d\eta, \iint_R |W_{xx}|d\xi\, d\eta, \iint_R |W_{xxy}|d\xi\, d\eta \iint_R |W_{xxx}|d\xi\, d\eta.$$

Тогда при $N \leqslant \frac{2\pi M}{L}$ ни одно из последовательных приближений

$$\left\{\frac{\partial^{i+j} z^n}{\partial x^i\, \partial y^j}\right\} (i = 0, 1, 2, 3; \quad j = 0, 1; \; i + j \leqslant 3) \tag{4.25}$$

не выходит из области (4.23) определения аргументов функции g. Это условие будет выполнено, если область R достаточно мала.

Теперь покажем, что пределы последовательностей (4.25) существуют. Для этого, как известно, достаточно доказать сходимость ряда

$$\frac{\partial^{i+j} z^{(0)}}{\partial x^i\, \partial y^j} + \left(\frac{\partial^{i+j} z^{(1)}}{\partial x^i\, \partial y^j} - \frac{\partial^{i+j} z^{(0)}}{\partial x^i\, \partial y^j}\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{\partial^{i+j} z^{(n-1)}}{\partial x^i\, \partial y^j} - \frac{\partial^{i+j} z^{(n-1)}}{\partial x^i\, \partial y^j}\right) + \cdots . \tag{4.26}$$

При этом предполагается, что функция $g(x, y; z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, z_{xxy}, z_{xxx})$ удовлетворяет условию Липшица по аргументам $z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, z_{xxy}, z_{xxx}$ равномерно относительно (x, y).

Оценивая последовательно абсолютные значения членов ряда (4.26), имеем

$$\left|\frac{\partial^{i+j}(z^{(1)} - z^{(0)})}{\partial x^i\, \partial y^j}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\iint_R \left|\frac{\partial^{i+j} W}{\partial x^i\, \partial y^j}\right| |g(\xi, \eta, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)|\, d\xi\, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L}{2\pi}\iint_R \left|\frac{\partial^{i+j} W}{\partial x^i\, \partial y^j}\right| d\xi\, d\eta \leqslant \frac{LN}{2\pi};$$

$$\left|\frac{\partial^{i+j}(z^{(2)} - z^{(1)})}{\partial x^i\, \partial y^j}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\iint_R \left|\frac{\partial^{i+j} W}{\partial x^i\, \partial y^j}\right| \Big| g\big(\xi, \eta; z^{(1)}, z^{(1)}_\xi, z^{(1)}_\eta, z^{(1)}_{\xi\eta},$$
$$z^{(1)}_{\xi\xi}, z^{(1)}_{\xi\xi\eta}, z^{(1)}_{\xi\xi\xi}\big) - g(\xi, \eta; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\Big|\, d\xi\, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A}{2\pi}\iint_R \left|\frac{\partial^{i+j} W}{\partial x^i\, \partial y^j}\right| \Big[|z^{(1)}| + |z^{(1)}_\xi| + |z^{(1)}_\eta| +$$
$$+ |z^{(1)}_{\xi\eta}| + |z^{(1)}_{\xi\xi}| + |z^{(1)}_{\xi\xi\eta}| + |z^{(1)}_{\xi\xi\xi}|\Big]\, d\xi\, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{7ALN}{(2\pi)^2}\iint_R \left|\frac{\partial^{i+j} W}{\partial x^i\, \partial y^j}\right| d\xi\, d\eta \leqslant \frac{7ALN^2}{(2\pi)^2},$$

где A — константа условий Липшица.

Далее, пользуясь методом полной индукции, получаем

$$\left| \frac{\partial^{i+j} (z^{(n)} - z^{(n-1)})}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leqslant \frac{L (7A)^{n-1} N^n}{(2\pi)^n}.$$

Отсюда видно, что каждый член ряда (4.26) не превосходит по модулю соответствующих членов числового ряда с положительными членами

$$\frac{LN}{2\pi} + \frac{L7AN}{(2\pi)^2} + \cdots + \frac{L (7A)^{n-1} N^n}{(2\pi)^n} + \cdots . \tag{4.27}$$

Если $\frac{7AN}{2\pi} < 1$ (а это возможно, если область R достаточно мала), то ряд (4.27) сходится. Тогда ряд (4.26) сходится равномерно и абсолютно. Предельная функция $z(x, y)$ удовлетворяет интегральному уравнению (4.22).

Таким образом, мы получили следующую теорему.

Теорема 6. Если функция $f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{xxy}, u_{xxx})$: 1) непрерывна по всем аргументам и ограничена при ограниченных значениях своих аргументов; 2) удовлетворяет условию Гёльдера по (x, y) равномерно относительно $(u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{xxy}, u_{xxx})$; 3) удовлетворяет условию Липшица по $(u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{xxy}, u_{xxx})$ равномерно относительно (x, y), то решение задачи (4.1)—(4.2) существует и единственно в круге с достаточно малым радиусом.

Единственность решения при условии малости области доказывается с помощью оценок, аналогичных оценкам, указанным в § 2.

§ 5. ЗАДАЧИ ТИПА ЗАДАЧ ДЕВИСА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим краевую задачу типа задачи Девиса (см. § 1) для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta u + a(x, y) u_{xxx} + b(x, y) u_{xxy} + c(x, y) u_{xx} + a_1(x, y) u_{xy} +$$
$$+ d(x, y) u_x + d_1(x, y) u_y + c_1(x, y) u = f(x, y). \tag{5.1}$$

Предположим, что коэффициенты уравнения (5.1) и свободный член непрерывны вместе со своими производными первого порядка. Пусть Ω — односвязная область плоскости (x, y), определенная в начале настоящей главы.

З а д а ч а D_1. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (5.1), непрерывное вместе с производными до второго порядка в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющее условиям

$$u_{xx}\big|_{\Gamma} = \varphi_1 (x, y), \quad u_x\big|_{x=\mu(y)} = \varphi_2 (y),$$
$$u\big|_{x=\mu(y)} = \varphi_3 (y), \tag{5.2}$$

где $\varphi_1 (x, y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ — заданные функции, причем $\varphi_1(x, y)$

непрерывна, а $\varphi_2(y)$ и $\varphi_3(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы.

Заметим, что регулярное в области Ω решение уравнения (4.3), удовлетворяющее условиям (5.2), выражается формулой

$$v(x, y) = \int\limits_{\mu(y)}^{x} \left\{ \int\limits_{\mu(y)}^{t} \left[\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial G(\sigma, y; \xi(s), \eta(s))}{\partial n} \varphi_1(s)\, ds \right] d\sigma \right\} dt + \\ + (x - \mu(y))\, \varphi_2(y) + \varphi_3(y).$$

Учитывая это обстоятельство, уравнение (5.1) рассмотрим при однородных граничных условиях

$$u_{xx}\big|_{\Gamma} = 0, \quad u_x\big|_{x=\mu(y)} = 0, \tag{5.3}$$

$$u\big|_{x=\mu(y)} = 0.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H(x, y; \xi, \eta) = -\int\limits_{\mu(y)}^{x} \left(\int\limits_{\mu(y)}^{t} G(\sigma, y; \xi, \eta)\, d\sigma \right) dt,$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Очевидно, что

$$H_{xx}\big|_{\Gamma} = 0, \; H_x\big|_{x=\mu(y)} = 0, \; H\big|_{x=\mu(y)} = 0.$$

Поэтому решение задачи (5.1), (5.3) будем искать в виде

$$u(x, y) = \iint\limits_{R} H(x, y; \xi, \eta)\, \Phi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \tag{5.4}$$

Если функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера в Ω, то производные u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{xxy}, u_{xxx} и $\Delta(u_{xx})$ существуют и являются непрерывными в Ω, а $\Delta(u_{xx}) = 2\pi\Phi(x, y)$. Подставляя (5.4) в уравнение (5.1), получаем интегральное уравнение типа уравнения Фредгольма

$$\Phi(x, y) - \iint\limits_{\Omega} K(x, y; \xi, \eta)\, \Phi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = F(x, y), \tag{5.5}$$

где

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \Bigg\{ a(x, y)\, G_x(x, y; \xi, \eta) + b(x, y)\, G_y(x, y; \xi, \eta) + \\ + c(x, y)\, G(x, y; \xi, \eta) + a_1(x, y) \left[\int\limits_{\mu(y)}^{x} G_y(t, y; \xi, \eta)\, dt - \right. \\ \left. - G(\mu(y), y; \xi, \eta)\, \mu'(y) \right] + d(x, y) \int\limits_{\mu(y)}^{x} G(t, y; \xi, \eta)\, dt +$$

$$+d_1(x,y)\left[\int\limits_{\mu(y)}^{x}\left(\int\limits_{\mu(y)}^{t}G_y(\sigma,y;\xi,\eta)\,d\sigma\right)dt+G(\mu(y),y;\xi,\eta)\,\mu'(y)\times\right.$$

$$\left.\times(x-\mu(y))\right]+c_1(x,y)\int\limits_{\mu(y)}^{x}\left(\int\limits_{\mu(y)}^{t}G(\sigma,y;\xi,\eta)\,d\sigma\right)dt\Bigg\};$$

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi}f(x,y).$$

Нетрудно убедиться, что для функции $K(x,y;\xi,\eta)$ в области Ω справедлива оценка

$$|K(x,y;\xi,\eta)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

Следовательно, ядро $K(x,y;\xi,\eta)$ не интегрируется с квадратом. Однако итерированное ядро

$$K_2(x,y;\xi,\eta)=\iint\limits_{\Omega}K(x,y;s,t)\,K(s,t;\xi,\eta)\,dsdt$$

интегрируемо с квадратом. Поэтому вместо уравнения (5.5) рассмотрим итерированное уравнение

$$\Phi(x,y)-\iint\limits_{\Omega}K_2(x,y;\xi,\eta)\,\Phi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=f_1(x,y),$$

где (5.6)

$$f_1(x,y)=F(x,y)+\iint\limits_{\Omega}K(x,y;\xi,\eta)\,F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 7. Предположим, что область Ω настолько мала, что

$$\iint\limits_{\Omega}\iint\limits_{\Omega}K_2^2(x,y;\xi,\eta)\,dxdyd\xi d\eta<1.$$

Тогда уравнение (5.6) (и задача (5.1), (5.3)) имеет единственное решение.

Теорема 8. Если коэффициенты уравнения (5.1) в области Ω удовлетворяют условиям

$$a_1\equiv d_1\equiv 0,\ c_1>0,\ d>0,\ c<-(d+c_1l)l,$$

где $l=\max\limits_{y}\int dx$, а интеграл взят вдоль характеристики в Ω, то решение задачи (5.1), (5.3) единственно. В этом случае существование решения задачи (5.1), (5.3) следует из единственности.

Доказательство. Рассмотрим однородную задачу (5.1), (5.3). Покажем, что функция u_{xx} не имеет положительного максимума и отрицательного минимума в Ω.

Пусть M — положительный максимум и рассмотрим точку, где $u_{xx}=M$. Тогда $(u_{xx})_x=(u_{xx})_y=0$, $\Delta(u_{xx})\leqslant 0$ и из уравнения (5.1) имеем

$$cM\geqslant -du_x-c_1u,$$
$$cM\geqslant -dMl-c_1Ml^2,$$
$$c\geqslant -(d+c_1l)l.$$

Это противоречит третьему условию теоремы.

Итак, функция u_{xx} не достигает положительного максимума в Ω.

Аналогично доказываем, что u_{xx} не достигает отрицательного минимума в Ω. Отсюда, учитывая условие $u_{xx}|_\Gamma=0$, заключаем, что $u_{xx}=0$ в $\overline{\Omega}$.

Следовательно, $u(x,y)=\omega(y)+x\lambda(y)$ в Ω. Однако в силу последних двух условий (5.3) $u\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Относительно задачи D_1 для уравнения (4.1) справедлива следующая теорема единственности решения.

Теорема 9. Если f — непрерывно дифференцируемая функция относительно своих аргументов и удовлетворяет условиям

$$f_{u_y}=f_{u_{xy}}=0,\ f_u<0,\ f_{u_x}<0,$$

$$f_{u_{xx}}>-\left(f_{u_x}+f_u l\right)l,$$

где l — то же, что в теореме 8, то решение задачи D_1 для уравнения (4.1) единственно.

Доказательство следует из того, что условия теоремы 9 приводят к соответствующим условиям теоремы 8 для линейного уравнения.

Решение задачи (4.1), (5.3) сводится к решению эквивалентного интегро-дифференциального уравнения

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}H(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta,u,u_x,u_y,u_{xy},\times$$
$$\times\ u_{xx},u_{xxy},u_{xxx})d\xi d\eta,$$

где H — то же, что в (5.4).

Для уравнения (4.1) в области Ω аналогично могут быть изучены задачи со следующими краевыми условиями:

$$u_x\big|_\Gamma=\varphi_1(x,y),\ u_x\big|_{x=\mu(y)}=\varphi_2(y),\ u\big|_{x=\mu(y)}=\varphi_3(y);$$

$$u_{xx}\big|_\Gamma=\varphi_1(x,y),\ u_x\big|_{x=\mu(y)}=\varphi_2(y),\ u\big|_{\Gamma_1}=\varphi_3(y).$$

Глава IX

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА—БИЦАДЗЕ

В настоящей главе излагаются результаты исследования уравнений смешанно-составного типа методами теории функций комплексного переменного (см. [19, 21]).

§ 1. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С УСЛОВИЯМИ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Рассмотрим уравнение

$$L\frac{\partial W}{\partial x}=0, \tag{1.1}$$

где $L\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\operatorname{sgn}y\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лаврентьева — Бицадзе.

Очевидно, что прямые $y=\text{const}$ являются характеристиками уравнения (1.1). В полуплоскости $y<0$ наряду с указанным семейством характеристик уравнение (1.1) имеет еще два семейства действительных характеристик: $x-y=\text{const}$ и $x+y=\text{const}$.

Пусть D_1 — конечная односвязная область, ограниченная простой жордановой дугой σ, лежащей в полуплоскости $y>0$ и опирающейся на ось x в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, и отрезком AB оси x. Предположим, что кривая σ униформна относительно оси y, точка $N(0,h)$ этой кривой является единственной максимально удаленной от оси x точкой, части AN и BN дуги σ униформны относительно отрезка ON оси y, где O — начало координат (относительно снятия этих жестких условий, налагаемых на кривую σ, см. [24]). Через D_2 обозначим область, ограниченную отрезком AB и двумя характеристиками $AC: x+y=-1$ и $BC: x-y=1$ уравнения (1.1), выходящими из точки $C(0,-1)$. Под OC_1 и OC_2 будем понимать характеристики $x+y=0$ и $x-y=0$ уравнения (1.1), соединяющие точку O с точками $C_1\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ и $C_2\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ соответственно. Через D обозначим совокупность областей D_1 и D_2 вместе с открытым отрезком AB.

Задача I. Найти регулярное в области D_1 решение $W(x, y)$ уравнения (1.1), непрерывное вплоть до контура этой области и удовлетворяющее условиям

$$W|_{\sigma} = f(x); \quad W|_{AB} = \tau(x), \quad W|_{ON} = \varphi(y), \tag{1.2}$$

где $f(x)$, $\tau(x)$ и $\varphi''(y)$ — заданные непрерывные функции, причем

$$f(A) = \tau(A), \ f(B) = \tau(B), \ \tau(0) = \varphi(0), \ f(0) = \varphi(h).$$

Задача II. Найти регулярное в области D_1 решение $W(x, y)$ уравнения (1.1), непрерывное вплоть до контура этой области с непрерывной вплоть до отрезка AB производной $\frac{\partial W}{\partial y}$ и удовлетворяющее условиям

$$W|_{\sigma} = f(x), \ \left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{AB} = \nu(x), \quad W|_{ON} = \varphi(y), \tag{1.3}$$

где $f(x)$, $\nu(x)$ и $\varphi''(y)$ — заданные непрерывные функции, причем

$$f(0) = \varphi(h), \ \nu(0) = \varphi'(0).$$

Задача III. Найти регулярное в области D_2 решение $W(x, y)$ уравнения (1.1), непрерывное в замкнутой области $\overline{D}_2$ и удовлетворяющее условиям

$$W|_{AB} = \tau(x), \quad \left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{AB} = \nu(x), \quad W|_{OC} = \varphi_1(y), \tag{1.4}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ и $\varphi_1(y)$ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем $\nu(0) = \varphi'(0)$, $\tau(0) = \varphi_1(0)$.

Задача IV. В области D_3, ограниченной контуром OC_1CC_2O, найти регулярное решение $W(x, y)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$W|_{OC_1} = \psi_1(y), \quad W|_{OC_2} = \psi_2(y), \quad -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 0,$$
$$W|_{OC} = \varphi_1(y), \quad -1 \leqslant y \leqslant 0, \tag{1.5}$$

где $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ и $\varphi_1(y)$ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = \varphi_1(0).$$

Задача V (смешанная). Требуется определить функцию $W(x, y)$, которая: 1) является регулярным решением уравнения (1.1) в области D при $y \neq 0$, $y \neq x$, $y \neq -x$; 2) непрерывна вместе со своими производными первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$; 3) удовлетворяет условиям

$$W|_{\sigma} = f(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad W|_{OC_1} = \psi_1(y), \quad W|_{OC_2} = \psi_2(y),$$
$$-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 0, \quad W|_{CN} = \varphi(y), \ -1 \leqslant y \leqslant h, \tag{1.6}$$

где $f(x)$—заданная непрерывная функция, а $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ и $\varphi(y)$—заданные дважды дифференцируемые функции, причем

$$f(N)=\varphi(N),\ \psi_1(0)=\psi_2(0)=\varphi(0).$$

Необходимо отметить важное для дальнейших рассуждений обстоятельство: любое регулярное решение уравнения (1.1) может быть представлено в виде

$$W(x, y)=u(x, y)+\omega(y), \tag{1.7}$$

где $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\operatorname{sgn} y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1.8}$$

а $\omega(y)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция.

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.1) В ОБЛАСТИ D_1.

1. Рассмотрим задачу I. Докажем, что решение этой задачи единственно. Учитывая, что линейная функция $a+by$ является решением уравнения Лапласа, можно без ограничения общности предполагать, что в представлении (1.7) решений уравнения (1.1) произвольная функция $\omega(y)$ подчинена условиям

$$\omega(0)=\omega(h)=0.$$

Однородная задача I в силу представления (1.7) редуцируется к задаче нахождения регулярного в области D_1 решения $u(x, y)$ уравнения (1.8), удовлетворяющего условиям

$$u(x,\ y)|_\sigma=-\omega(y),\ \ u(x,\ 0)|_{AB}=0,\ \ u(0,\ y)=-\omega(y),\ 0\leqslant y\leqslant h.$$

Гармоническая функция $u(x, y)$ положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области достигает лишь на контуре этой области. Однако $u(x, 0)=0$, $-1\leqslant x\leqslant 1$ и $u(0, h)=0$.

Таким образом, функция $u(x, y)$ положительного максимума и отрицательного минимума в $\bar{D}_1$ может достигать лишь на открытых частях AN и BN дуги σ. Но так как $u(0, y)=-\omega(y)$ при $0<y<h$, то эти же экстремальные значения должны повторяться и внутри области D_1 на открытом отрезке ON, что невозможно. Отсюда $\omega(y)\equiv 0$ и, следовательно, $u(x, y)\equiv 0$ в области D_1, т. е. единственность решения задачи I доказана.

Докажем существование решения задачи I. Пусть дуга σ совпадает с полуокружностью $x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$.

Легко видеть, что без ограничения общности можно предполагать, что функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ имеют нули первого порядка при $x=0$ и $y=1$ соответственно. Предположим также, что $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

В силу (1.2) и (1.7) для функции $u(x, y)$ получим граничные условия

$$u(x, y)|_\sigma = f(x) - \omega(y), \quad u(x, 0) = \tau(x). \tag{2.1}$$

Регулярное в области D_1 решение уравнения (1.8), удовлетворяющее условиям (2.1), запишем в явном виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial G(\xi, 0; x, y)}{\partial \eta} \tau(\xi)\, d\xi - \int_\sigma f\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial G}{\partial \eta} d\xi\right) + \\ + \int_0^1 \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{d\xi}{d\eta}\right)\Bigg|_{\xi=\sqrt{1-\eta^2}} \omega(\eta)\, d\eta - \\ - \int_0^1 \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{d\xi}{d\eta}\right)\Bigg|_{\xi=-\sqrt{1-\eta^2}} \omega(\eta) d\eta, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{r'}{r}\right) - \ln\left(\frac{r_1'}{r_1}\right)\right]$$

— функция Грина;

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2; \quad r_1^2 = (\bar{x}-\xi)^2 + (\bar{y}-\eta)^2;$$

$$r'^2 = (x-\xi)^2 + (y+\eta)^2; \quad r_1'^2 = (\bar{x}-\xi)^2 + (\bar{y}+\eta)^2;$$

$$\bar{x} = \frac{x}{\rho^2}; \quad \bar{y} = \frac{y}{\rho^2}; \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Убедиться в справедливости формулы (2.2) можно, использовав формулу

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

где $\Gamma = \sigma + AB$ — граница области D_1, а s — длина дуги, приняв во внимание, что $G|_\Gamma = 0$ и преобразовав интеграл, под которым находится функция $\omega(y)$.

Последнее условие из (1.2) дает

$$u(0, y) + \omega(y) = \varphi(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Вычислим $u(0, y)$ по формуле (2.2). В силу соотношения (2.3) для определения функции $\omega(y)$ получим интегральное уравнение

$$\omega(y) + \int_0^1 K(y, \eta)\, \omega(\eta)\, d\eta = \gamma(y), \tag{2.4}$$

где

$$K(y, \eta) = \frac{4y\eta(y^2-1)}{\pi\sqrt{1-\eta^2}[(1+y^2)^2-4y^2\eta^2]};$$

$$\gamma(y) = \varphi(y) - \frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t^2+y^2} - \frac{1}{1+t^2y^2}\right)\tau(t)\,dt -$$

$$- \frac{2y(1-y^2)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{(1-y^2)^2+4y^2t^2}.$$

Эквивалентность задачи I уравнению (2.4) очевидна.

Неизвестную функцию $\omega(y)$ будем искать в виде

$$\omega(y) = (1-y)\omega_1(y),$$

где $\omega_1(y)$ — непрерывная функция при $0 \leqslant y \leqslant 1$. Для определения функции $\omega_1(y)$ из (2.4) получим интегральное уравнение вида

$$\omega_1(y) + \int_0^1 K_1(y, \eta)\,\omega_1(\eta)\,d\eta = \gamma_1(y). \tag{2.5}$$

Нетрудно проверить, что в случае принятых предположений относительно функций $f(x)$ и $\varphi(y)$ для интегрального уравнения (2.5) справедливы альтернативы Фредгольма.

Учитывая полную эквивалентность задачи I интегральному уравнению (2.5) и наличие теоремы единственности, заключаем, что решение этой задачи существует.

2. Заметим, что в представлении (1.7) решений уравнения (1.1), не нарушая общности, можно предполагать, что

$$\omega(h) = \omega'(0) = 0. \tag{2.6}$$

Тогда однородная задача II приводится к задаче нахождения регулярного в области D_1 решения $u(x, y)$ уравнения (1.8), удовлетворяющего условиям

$$u|_\sigma = -\omega(y), \quad \left.\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}\right|_{AB} = 0, \quad u\Big|_{ON} = -\omega(y). \tag{2.7}$$

Эта задача при наличии (2.6) не может иметь отличного от нуля решения. Отсюда следует единственность решения задачи II.

Существование решения этой задачи докажем при тех же предположениях относительно дуги σ и функций $f(x)$ и $\varphi(y)$, что и в случае задачи I. Без ограничения общности можно полагать, что $f(-1) = f(1) = 0$.

В силу условий (1.3) и представления (1.7) рассматриваемая задача редуцируется к задаче отыскания регулярного в области D_1 решения $u(x, y)$ уравнения (1.8), удовлетворяющего условиям

$$u(x,\ y)|_\sigma = f(x) - \omega(y),\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{AB} = \nu(x),\quad u\Big|_{ON} = \varphi(y) - \omega(y). \quad (2.8)$$

Решение уравнения (1.8), удовлетворяющее первым двум условиям (2.8), в области D_1 может быть представлено формулой

$$u(x,\ y) = -\int\limits_{-1}^{+1} \nu(\xi)\, G(\xi,\ 0;\ x,\ y)\, d\xi - \int\limits_\sigma f\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial G}{\partial \eta} d\xi\right) +$$

$$+ \int\limits_0^1 \omega(\eta)\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{d\xi}{d\eta}\right)\Bigg|_{\xi=\sqrt{1-\eta^2}} d\eta -$$

$$- \int\limits_0^1 \omega(\eta)\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G}{\partial \eta}\frac{d\xi}{d\eta}\right)\Bigg|_{\xi=-\sqrt{1-\eta^2}} d\eta, \quad (2.9)$$

где $G(\xi,\ \eta;\ x,\ y) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{rr'}{\rho^2 r_1' r_1}\right)$ — функция Грина, а, r, r_1, r', r_1', ρ — те же самые расстояния, что в задаче I. Ясно, что в данном случае функция G сама обращается в нуль, если точка (ξ, η) находится на σ, а ее производная по нормали равна нулю, если та же точка движется вдоль отрезка AB.

В справедливости этого утверждения легко убедиться непосредственной проверкой.

Принимая во внимание третье условие (2.8), на основании (2.9) для определения функции $\omega(y)$ получаем интегральное уравнение

$$\omega(y) + \int\limits_0^1 S(y,\ \eta)\, \omega(\eta)\, d\eta = \delta(y), \quad (2.10)$$

где

$$S(y,\ \eta) = \frac{2(1-y^4)}{\pi\sqrt{1-\eta^2}\,[y^4-(2y\eta+1)^2]};$$

$$\delta(y) = \varphi(y) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} \ln\left(\frac{y^2+t^2}{1+y^2t^2}\right)\nu(t)\, dt -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{(y^4-1)\, f(t)\, dt}{\sqrt{1-t^2}\,[y^4-(2y\sqrt{1-t^2}+1)^2]}.$$

Учитывая (2.6), можно преобразовать искомую функцию $\omega(y)$ в новую функцию $\omega_1(y)$, получив уравнение Фредгольма второго рода

$$\omega_1(y) + \int\limits_0^1 S_1(y,\ \eta)\, \omega_1(\eta)\, d\eta = \delta_1(y),$$

которое, очевидно, эквивалентно задаче II, поэтому его разрешимость следует из доказанной единственности решения этой задачи.

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.1) В ОБЛАСТИ D_2

1. Рассмотрим задачу III. Можно без ограничения общности полагать, что

$$\omega(0)=\omega'(0)=0. \tag{3.1}$$

На основании условий (1.4) и (1.7) задача III приводится к задаче определения регулярного в области D_2 решения $u(x, y)$ уравнения (1.8), удовлетворяющего условиям

$$u(x, 0)=\tau(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}=\nu(x), \ -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3.2}$$

$$u(0, y)=\varphi_1(y)-\omega(y), \ -1 \leqslant y \leqslant 0. \tag{3.2}$$

Регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1.8), удовлетворяющее первым двум условиям (3.2), имеет вид

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\left[\tau(x-y)+\tau(x+y)+y \int_{-1}^{+1} \nu(x+yt)\, dt\right]. \tag{3.3}$$

В силу (1.7), (3.2) и (3.3) единственное решение задачи III записываем явно:

$$W(x, y)=u(x, y)+\omega(y)=\frac{1}{2}\left[\tau(x-y)+\tau(x+y)+\right.$$

$$\left.+y \int_{-1}^{+1} \nu(x+yt)\, dt\right]+\varphi_1(y)-\frac{1}{2}\left[\tau(-y)+\tau(y)+y \int_{-1}^{+1} \nu(yt)\, dt\right].$$

2. Переходим к рассмотрению задачи IV. В представлении (1.7) регулярных решений уравнения (1.1), опять не ограничивая общности, можно предполагать справедливость равенств (3.1).

Задача IV с условиями (1.5) в силу (1.7) редуцируется к задаче определения регулярного в области D_3 решения уравнения (1.8), удовлетворяющего условиям

$$u|_{OC_1}=\psi_1(y)-\omega(y), \ u|_{OC_2}=\psi_2(y)-\omega(y), \ -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 0,$$

$$u|_{OC}=\varphi_1(y)-\omega(y), \ -1 \leqslant y \leqslant 0. \tag{3.4}$$

Регулярное решение уравнения (1.8), удовлетворяющее первым двум условиям (3.4), дается формулой

$$u(\xi, \eta)=\psi_1\left(-\frac{\xi}{2}\right)+\psi_2\left(-\frac{\eta}{2}\right)-\omega\left(-\frac{\xi}{2}\right)-\omega\left(\frac{\eta}{2}\right)-\psi(0),$$

где

$$\xi=x-y;\ \eta=x+y,\ -1\leqslant\eta\leqslant 0,\ 0\leqslant\xi\leqslant 1.$$

Для того чтобы было удовлетворено и третье условие (3.4), функция $\omega(y)$ должна быть решением функционального уравнения

$$\omega(y)-2\omega\left(\frac{y}{2}\right)=\varphi_1(y)-\psi_1\left(\frac{y}{2}\right)-\psi_2\left(\frac{y}{2}\right)+\psi_2(0),\ -1\leqslant y\leqslant 0. \tag{3.5}$$

Легко доказать, что однородное уравнение

$$\omega_0(y)-2\omega_0\left(\frac{y}{2}\right),$$

соответствующее однородной задаче IV, при наличии условий (3.1) не имеет нетривиальных решений. В самом деле, применяя метод итерации к уравнению

$$\omega_0''(y)-\frac{1}{2}\omega_0''\left(\frac{y}{2}\right)=0,$$

получаем $\omega_0''(y)=0$; следовательно, $\omega_0(y)=a+by$. Однако в силу (3.1) $a=b=0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, уравнение (3.5) имеет решение и притом единственное. Это решение можно получить методом итерации.

Следовательно, решение задачи IV существует и единственно.

§ 4. РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

При исследовании задачи V можно без ограничения общности полагать, что $\omega(0)=\omega(h)=0$ и $f\equiv 0$, $\varphi\equiv 0$ (так как задачи I и II однозначно разрешимы). Таким образом, задачу V достаточно исследовать с условиями

$$W|_\sigma=0,\ W|_{OC_1}=\psi_1(y),\ W|_{OC_2}=\psi_2(y),\ W|_{CN}=0.$$

Пусть D_4 — та часть области D, которая ограничена контуром $OC_1B\sigma AC_2O$. Функцию $\omega(y)$, входящую в представление (1.7), представим так:

$$\omega(y)=\begin{cases}\omega_1(y), & 0\leqslant y\leqslant h,\\ \omega_2(y), & -1\leqslant y\leqslant 0.\end{cases}$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$W|_{OC_1}=\psi_1,\ W|_{OC_2}=\psi_2,\ W|_{OC}=0$$

в области D_3, однозначно определяется как решение задачи IV, т. е. функция $\omega_2(y)$ определяется единственным образом. Итак, решение задачи V редуцируется к нахождению регулярного в области D_4 решения $u(x, y)$ уравнения (1.8), удовлетворяющего условиям

$$u|_\sigma=-\omega_1(y),\ u|_{OC_1}=\psi_1(y)-\omega_2(y),\ u|_{OC_2}=\psi_2(y)-\omega_2(y), \tag{4.1}$$

где функцию $\omega_1(y)$ надо выбрать так, чтобы удовлетворялось и условие

$$u|_{ON} = -\omega_1(y). \tag{4.2}$$

Докажем единственность решения задачи V. Этой однородной задаче соответствует задача определения регулярного в области D_1 решения $u(x, y)$ уравнения (1.8), удовлетворяющего условиям

$$u|_\sigma = -\omega_1(y), \ u|_{ON} = -\omega_1(y), \ u|_{OC_1} = 0, \ u|_{OC_2} = 0. \tag{4.3}$$

Так как решение $u(x, y)$ в силу последних двух условий (4.3) обращается в нуль на характеристиках OC_1 и OC_2, то в замкнутой области D_1 положительного максимума и отрицательного минимума оно может достигать лишь на дуге σ (см. [5], с. 111—113). С другой стороны, если учесть, что $u|_{ON} = -\omega_1(y)$, то эти экстремальные значения не могут быть реализованы на открытых частях AN и BN дуги σ. Отсюда, имея в виду равенства $u(A)=u(B)=$ $=u(N)=0$, заключаем, что $\omega_1(y)=0$, $u(x, y)\equiv 0$ всюду в области D_1 и, следовательно, $W(x, y)\equiv 0$ всюду в области D. Это и доказывает единственность решения задачи V.

Существование решения этой задачи докажем для случая, когда σ — полуокружность.

В силу последних двух условий (4.1) справедливы равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{d}{dx}\psi_1^*\left(-\frac{x}{2}\right), \ y=0, \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{d}{dx}\psi_2^*\left(\frac{x}{2}\right), \ y=0, \ -1 \leqslant x \leqslant 0, \tag{4.5}$$

где

$$\psi_1^*(y) = \psi_1(y) - \omega_2(y), \ \psi_2^*(y) = \psi_2(y) - \omega_2(y).$$

Таким образом, решение задачи V сведено к определению гармонической в области D_1 функции $u(x, y)$ по граничным условиям (4.4) и (4.5) и

$$u(x, y) = -\omega_1(y) \text{ на } \sigma. \tag{4.6}$$

Предварительно найдем гармоническую в области D_1 функцию $\mu(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$\mu(x, y)|_\sigma = -\omega_1(y), \ \left.\frac{\partial\mu(x, 0)}{\partial y}\right|_{AB} = 0.$$

Она определяется из формулы (2.9), где в данном случае $\nu=0$ и $f=0$.

Теперь определим гармоническую в области D_1 функцию $u(x, y)$ с граничными условиями

$$U(x, y) = 0 \text{ на } \sigma, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{d}{dx}\alpha(x),\ y=0,\ -1\leqslant x\leqslant 0, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{d}{dx}\beta(x),\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{4.9}$$

где

$$\alpha(x)=2\psi_2^*\left(\frac{x}{2}\right)-\mu(x,0);$$

$$\beta(x)=2\psi_1^*\left(-\frac{x}{2}\right)-\mu(x,0);$$

$$\mu(x,0)=\frac{1-x^2}{\pi}\int\limits_0^1 K_2(x,\eta)\,\omega_1(\eta)\,d\eta;$$

$$R_2(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\left(\frac{1}{x^2-2x\sqrt{1-\eta^2+1}}+\frac{1}{x^2+2x\sqrt{1-\eta^2+1}}\right).$$

Обозначим через $F(z)$ функцию $U(x,y)+iV(x,y)$, голоморфную в области D_1.

На основании условий Коши—Римана, согласно равенствам (4.8) и (4.9), получим

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Im}(1-i)F(x)=-\alpha(x)-C_2, && -1\leqslant x\leqslant 0\\ &\operatorname{Re}(1-i)F(x)=\beta(x)+C_1, && 0\leqslant x\leqslant 1\end{aligned}\right\}, \tag{4.10}$$

где C_1 и C_2 — действительные произвольные постоянные.

Итак, задача с условиями (4.7)—(4.9) приведена к задаче определения голоморфной в области D_1 функции $F(z)$ по граничным условиям (4.7) и (4.10). Но тогда в силу (4.7) заключаем, что $F(z)$ аналитически продолжается на всю верхнюю полуплоскость, причем

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(1-i)F(x)=-\alpha\left(\frac{1}{x}\right)-C_2, && -\infty\leqslant x\leqslant -1,\\ &\operatorname{Im}(1-i)F(x)=\beta\left(\frac{1}{x}\right)+C_1, && 1\leqslant x\leqslant\infty.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Функция $F(x)$, обращающаяся в нуль на бесконечности, ограниченная в точках $z=-1$, $z=1$ и удовлетворяющая условиям (4.10) и (4.11), определяется с помощью формулы Келдыша—Седова [55]. После простых преобразований находим

$$(1-i)F(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\sqrt{\frac{t(z-1)(z+1)}{z(1+t)(1-t)}}\left[\frac{1}{t+z}-\frac{1}{t(1+tz)}\right]\times$$

$$\times\,[\alpha(-t)+C_2]\,dt-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{t(z-1)(z+1)}{z(1+t)(1-t)}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t(1-tz)}\right][\beta(t)+C_1]\,dt,$$

или, что то же самое,

$$F(z)=\frac{1+i}{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{t(z^2-1)}{z(1-t^2)}}\left[\frac{1}{t+z}-\frac{1}{t(1+tz)}\right]\left[2\psi_2^*\left(-\frac{t}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\mu(-t,0)+C_2\right]dt-\frac{2+i}{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{t(z^2-1)}{z(1-t^2)}}\left[\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t(1-tz)}\right]\times$$

$$\times\left[2\psi_1^*\left(-\frac{t}{2}\right)-\mu(t,0)+C_1\right]dt. \tag{4.12}$$

Постоянные C_1 и C_2, входящие в (4.12), могут быть определены из условий $F(-1)=0$ и $\operatorname{Re}F(0)=\psi_1(0)-\omega_2(0)-\mu(0,0)$.

Определив $U(x,y)=\operatorname{Re}F(z)$ из (4.12), положим

$$u(x,y)=U(x,y)+\mu(x,y).$$

При этом функция $u(x,y)$ удовлетворяет всем условиям (4.4)—(4.6). Эта функция должна удовлетворять и условию (4.2):

$$-\omega_1(y)=U(0,y)+\mu(0,y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1. \tag{4.13}$$

В силу (4.12) функцию $U(0,y)$ можно представить так:

$$U(0,y)=g(y)+\int_0^1 K^*(y,\eta)\,\omega_1(\eta)\,d\eta; \tag{4.14}$$

здесь $g(y)$ — известная функция, обладающая свойством $g(1)=0$, а ядро $K^*(y,\eta)$ имеет вид

$$K^*(y,\eta)=-\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\sqrt{y(y^2+1)}\int_0^1\sqrt{t(1-t^2)}\left(\frac{1}{t^2+y^2}-\frac{1}{1+y^2t^2}\right)\times$$

$$\times K_2(t,\eta)\,dt.$$

Функция $\mu(0,y)$ имеет вид

$$\mu(0,y)=\int_0^1 S(y,\eta)\,\omega_1(\eta)\,d\eta, \tag{4.15}$$

где $S(y,\eta)$ — ядро из формулы (2.10).

Учитывая формулы (4.14) и (4.15), на основании (4.13) для определения неизвестной функции $\omega_1(y)$ получаем интегральное уравнение, ядром которого является функция

$$S^*(y, \eta)=S(y, \eta)-K^*(y, \eta),$$

а правой частью — функция $g(y)$.

Существование решения полученного интегрального уравнения вытекает из доказанной единственности решения задачи V.

§ 5. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Обозначим через D_1 односвязную область, ограниченную отрезком $A(0, 0)B(1, 0)$ оси x и гладкой дугой Жордана σ, лежащей в полуплоскости $y>0$ и опирающейся на ось x в точках A и B. Предположим, что каждая прямая $y=c$, $0<c<h$, где h — некоторое положительное число, пересекается с дугой σ точно в двух точках; прямая $y=h$ имеет единственную общую точку $N(k, h)$ (точку касания) с дугой σ, а прямые $y=c$, $c>h$ с дугой σ общих точек не имеют. Части AN и BN дуги σ обозначим соответственно через σ_1 и σ_2.

Пусть D_2 — область, ограниченная отрезком и двумя характеристиками $AC: x+y=0$ и $BC: x-y=1$ уравнения (1.1), выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; D — совокупность областей D_1 и D_2 вместе с открытым отрезком AB.

Задача A. Найти регулярное в области D_1 решение $W(x, y)$ уравнения (1.1), непрерывное вплоть до контура этой области и удовлетворяющее граничным условиям

$$W|_{\sigma}=f,\ W|_{AB}=\tau,\ \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_{\sigma_1}=\varphi, \tag{5.1}$$

где n — внутренняя нормаль дуги σ_1, а f, τ, φ — заданные непрерывные функции, причем $f(0)=\tau(0)$, $f(1)=\tau(1)$.

Задача B. Требуется найти регулярное в области D_2 решение $W(x, y)$ уравнения (1.1), непрерывное в замкнутой области $\overline{D}_2$ и удовлетворяющее условиям

$$W|_{AB}=\tau, \quad W|_{AC}=\psi_1,\ \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2, \tag{5.2}$$

где τ, ψ_1, ψ_2 — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем $\tau(0)=\psi_1(0)$, $\tau'(0)=\psi_1'(0)=\sqrt{2}\psi_2(0)$.

Задача C (смешанная). Требуется определить функцию $W(x, y)$, которая: 1) является регулярным решением уравнения (1.1) в области D при $y\neq 0$; 2) непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$, кроме, быть может, точки A, в которой эти производные могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы; 3) удовлетворяет условиям

$$W\Big|_{\sigma} = f, \ \frac{\partial W}{\partial n}\Big|_{\sigma_1} = \varphi, \ W\Big|_{AC} = \psi_1, \ \frac{\partial W}{\partial n}\Big|_{AC} = \psi_2, \tag{5.3}$$

где f, φ — заданные непрерывные функции, а ψ_1, ψ_2 — заданные дважды дифференцируемые функции, причем $f(0)=\psi_1(0)$.

Эти задачи были поставлены А. В. Бицадзе [6].

§ 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ A

Единственность решения задачи A при дополнительном предположении:

$$\frac{dx}{dn} \neq 0$$

всюду вдоль дуги σ_1 (кроме, конечно, ее конца N) доказывается так же, как это сделано в § 3 гл. VI. При этом без ограничения общности предполагается, что в представлении (1.7) функция удовлетворяет условиям $\omega(0)=\omega(h)=0$.

Замечание 1. Если для функции $\omega(y)$ условия $\omega(0)=\omega(h)=0$ не выполнены, то из $W(x, y) \equiv 0$ не следует, что в представлении (1.7) $u \equiv 0$ и $\omega \equiv 0$, так как при $\omega(y)=a+by$ функция $u=-a-by$ будет гармонической.

Существование решения задачи A докажем для случая, когда дуга σ совпадает с полуокружностью

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \ y \geqslant 0.$$

Не ограничивая общности, предположим, что функции f и τ удовлетворяют условиям

$$f(0)=\tau(0)=\tau(1)=f(1)=0.$$

Кроме того, будем считать, что функции $\varphi(t)$, $f'(t)$ и $\tau'(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера.

В силу (1.7) и (5.1) решение задачи A редуцируется к задаче отыскания гармонической в области D_1 функции $u(x, y)$, удовлетворяющей условиям

$$u\Big|_{AB} = \tau(x), \ u\Big|_{\sigma} = f - \omega(y), \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sigma_1} = \varphi - \omega'(y)\cos(n, y). \tag{6.1}$$

Если нам удастся найти гармонические в области D_1 функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, удовлетворяющие соответственно условиям

$$u_1 = f - \omega(y) \text{ на } \sigma, \ u_1 = 0 \text{ на } AB, \tag{6.2}$$

$$u_2 = 0 \text{ на } \sigma, \ u_2 = \tau(x) \text{ на } AB, \tag{6.3}$$

то гармоническая функция, удовлетворяющая первым двум условиям (6.1), получится в виде суммы $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$.

Обозначим через $F_1(z)$, $z=x+iy$, голоморфную в области D_1 функцию $u_1(x,y)+iv_1(x,y)$, удовлетворяющую условию $F_1(0)=0$.

В силу второго условия (6.2) функция $F_1(z)$ аналитически продолжается через отрезок AB действительной оси в симметричную относительно этой оси область D_1^*, причем

$$\operatorname{Re} F_1(t)=\mu(t),\ t=\xi+i\eta\in\sigma, \tag{6.4}$$
$$\operatorname{Re} F_1(t)=-\mu(t),\ t\in\bar\sigma,$$

где $\bar\sigma$ — нижняя полуокружность, а $\mu(t)=f(t)-\omega[y(t)]$.

Голоморфная в круге $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ и непрерывная в замкнутом круге функция $F_1(z)$, удовлетворяющая условию $F_1(0)=0$, однозначно определяется с помощью граничных значений ее действительной части по формуле Шварца

$$F_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma+\bar\sigma}\frac{z}{t}\,\frac{\operatorname{Re}F_1(t)}{t-z}\,dt, \tag{6.5}$$

которую на основании (6.4) можно переписать в виде

$$F_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma}\frac{z}{t}\,\frac{\mu(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\bar\sigma}\frac{z}{t}\,\frac{\mu(\bar t)}{t-z}\,dt.$$

Отсюда после преобразования переменного интегрирования во втором интеграле правой части получаем

$$F_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int\frac{z}{t}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-2tz+z}\right)\mu(t)\,dt. \tag{6.6}$$

Действительная часть $F_1(z)$ есть искомая функция $u_1(x,y)$. Обозначим через $F_2(z)$ голоморфную в области D_1 функцию $u_2(x,y)+iv_2(x,y)$, удовлетворяющую условию $F_2(0)=0$. В силу первого условия (6.3) функция $F_2(z)$ аналитически продолжается через σ на всю верхнюю полуплоскость, причем

$$F_2(x)=-u_2\left(\frac{x}{2x-1},\ 0\right)+iv_2\left(\frac{x}{2x-1},\ 0\right)$$
$$\text{для } -\infty<x\leqslant 0,\ 1\leqslant x<\infty.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{Re} F_2(x)=\tau(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{6.7}$$

будем иметь

$$\operatorname{Re} F_2(x)=-\tau\left(\frac{x}{2x-1}\right),\ -\infty<x\leqslant 0,\ 1\leqslant x<\infty. \tag{6.8}$$

Известно, что функция $F(z)$, голоморфная в верхней полуплоскости и стремящаяся к конечному пределу при $z \to \infty$, выражается с помощью граничных значений ее действительной части $u(t)$ на действительной оси по формуле Шварца

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t - z}\, dt + ib, \tag{6.9}$$

где $b = \operatorname{Im} F(\infty)$.

В силу формулы (6.9), учитывая условие $F_2(0) = 0$, записываем

$$F_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{t} \frac{\operatorname{Re} F_2(t)}{t - z}\, dt,$$

или, имея в виду условия (6.7) и (6.8),

$$F_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{z}{t} \frac{\tau(t)}{t - z}\, dt - \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_1^{\infty} \right) \frac{z}{t} \frac{\tau\left(\frac{t}{2t - 1}\right)}{t - z}\, dt.$$

Отсюда окончательно получаем

$$F_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{z}{t} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - 2tz + z} \right) \tau(t)\, dt. \tag{6.10}$$

Действительная часть $F_2(z)$ дает искомую функцию $u_2(x, y)$ в области D_1.

Функция $u(x, y) = \operatorname{Re}\{F_1(z) + F_2(z)\}$ должна удовлетворять и третьему условию (6.1). Для $\frac{\partial u}{\partial n}$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \operatorname{Re} \frac{1 - 2z}{2\pi i \rho} \int_{\sigma} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1 - 2t}{t - 2tz + z} \right) \mu'(t)\, dt +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{1 - 2z}{2\pi i \rho} \int_0^1 \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1 - 2t}{t - 2tz + z} \right) \tau'(t)\, dt,\ \rho = \left| z - \frac{1}{2} \right|. \tag{6.11}$$

Имея в виду, что $\cos(n, y) = -\sin \theta_0$, где $\theta_0 = \arg\left(t_0 - \frac{1}{2}\right)$, $t_0 \in \sigma_1$, третье условие (6.1) переписываем в виде

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma_1} = \varphi(t_0) + \omega'\left[y(t_0)\right] \sin \theta_0.$$

Теперь перейдем в формуле (6.11) к пределу при $z \to t_0$, $\in \sigma_1$.

Пользуясь известной формулой, дающей предельные значения интеграла типа Коши, будем иметь

$$\varphi(t_0)+\omega'\left[y(t_0)\right]\sin\theta_0=\operatorname{Re}\left[(1-2t_0)\mu'(t_0)+\frac{1-2t_0}{\pi i}\left(\frac{1}{t-t_0}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1-2t}{t-2tt_0+t_0}\right)\mu'(t)\,dt+\frac{1-2t_0}{\pi i}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{t-t_0}-\frac{1-2t}{t-2tt_0+t_0}\right)\tau'(t)\,dt\right].\quad(6.12)$$

Из равенств

$$\mu'(t_0)=f'(t_0)-\omega'_{t_0}\left[y(t_0)\right],$$

$$f'(t)=f'(\theta_0)\,\frac{2}{(2t_0-1)\,i},\qquad(6.13)$$

$$\omega'_{t_0}\left[y(t_0)\right]=\omega'(y)\,\frac{\cos\theta_0}{(2t_0-1)\,i}$$

заключаем, что действительная часть первого члена в правой части формулы (6.12) равна нулю.

Равенство (6.12) перепишем в виде

$$\omega'\left[y(t_0)\right]\sin\theta_0=-\operatorname{Re}\frac{1-2t_0}{\pi i}\left[\int\limits_{\sigma_1}\left(\frac{1}{t-t_0}\right)-\frac{1-2t}{t-2tt_0+t_0}\right)\omega'_t\left[y(t)\right]dt+$$

$$\left.+\int\limits_{\sigma_2}\left(\frac{1}{t-t_0}-\frac{1-2t}{t-2tt_0+t_0}\right)\omega'_t\left[y(t)\right]dt\right]+g(t_0),\qquad(6.14)$$

где

$$g(t_0)\equiv-\varphi_0(t_0)+\operatorname{Re}\frac{1-2t_0}{\pi i}\left[\int\limits_{\sigma}\left(\frac{1}{t-t_0}-\frac{1-2t}{t-2tt_0+t_0}\right)f'(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^1\left(\frac{1}{t-t_0}-\frac{1-2t}{t-2tt_0+t_0}\right)\tau'(t)\,dt\right].$$

Преобразуя переменное интегрирование во втором интеграле правой части (6.14) и замечая, что функция $\omega[y(t)]$ принимает в точках t и $\frac{1-t}{1-2t}$ равные значения, получаем сингулярное интегральное уравнение для определения неизвестной функции $\omega'[y(t)]$

$$\omega'\left[y(t_0)\right]\sin\theta_0+\operatorname{Re}\frac{1-2t_0}{\pi i}\int\limits_{\sigma_1}\left(\frac{1}{t-t_0}-\frac{1-2t}{t-2tt_0+t_0}-\frac{1}{1-t_0-t}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-2t}{t+t_0-2tt_0-1}\right)\omega'_t\left[y(t)\right]dt=g(t_0).$$

На основании последнего равенства (6.13) предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\sin\theta_0\gamma(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_1}\frac{K(t_0,t)}{t-t_0}\gamma(t)\,dt=g(t_0), \tag{6.15}$$

где

$$\gamma(t)=\omega'\left[y(t)\right];$$

$$K(t_0,t)=\frac{t-t_0}{2t-1}\cos\theta\,\mathrm{Re}\,i(2t_0-1)\left[\frac{1}{t-t_0}-\frac{1-2t}{t-2tt_0+t_0}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1-t-t_0}+\frac{1-2t}{t+t_0-2tt_0-1}\right].$$

Уравнение (6.15), очевидно, эквивалентно рассматриваемой задаче. Его разрешимость доказывается так же, как и разрешимость уравнения (3.13) из гл. VIII.

Для уравнения (6.15) имеем (см. § 3 гл. VIII)

$$A(t_0)=\sin\theta_0,\ B(t_0)=K(t_0,\ t_0)=i\cos\theta_0,$$

$$G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}=e^{-2i\theta_0}, \tag{6.16}$$

где

$$\theta_0=\arg\left(t_0-\frac{1}{2}\right).$$

Отсюда видно, что функция $G(t_0)$ отлична от нуля всюду на σ_1 (включая концы) и, следовательно, уравнение (6.15) является уравнением нормального типа и для него концы контура σ_1, отвечающие значениям $\theta_0=\frac{\pi}{2}$ и $\theta_0=\pi$, являются соответственно особенным и неособенным. Не налагая никаких ограничений на решение уравнения (6.15) на неособенном конце, легко подсчитать, что индекс $\varkappa$ рассматриваемого уравнения равен единице.

На основании замечания 1 заключаем, что однородное уравнение, соответствующее (6.15), имеет одно нетривиальное постоянное решение. Отсюда в силу известного равенства $k-k'=\varkappa$, где $k,\ k'$ — числа линейно независимых решений однородного и союзного однородного уравнений, $k'=0$. Это означает, что уравнение (6.15) всегда разрешимо. Следовательно, решение задачи A существует.

§ 7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ B

При исследовании этой задачи можно без ограничения общности полагать, что в представлении (1.7) функция $\omega(y)$ удовлетворяет условию $\omega(0)=0$.

Общее решение уравнения (1.1) в области D_2 дается формулой

$$W(x,y)=\Phi(x+y)+\Phi_1(x-y)+\omega(y), \tag{7.1}$$

где $\Phi(t)$, $\Phi_1(t)$ и $\omega(y)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

На основании условий (5.2) из равенства (7.1) получаем

$$\tau(x)=\Phi(x)+\Phi_1(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\psi_1(x)=\Phi(0)+\Phi_1(2x)+\omega(-x),\ 0<x<1/2,$$

$$\psi_2(x)=\frac{\partial W}{\partial n}\bigg|_{x+y=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{x+y=0}=$$

$$=\sqrt{2}\,\Phi'(0)+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega'(-x),\ \ 0<x<\frac{1}{2}.$$

Отсюда после очевидной замены имеем

$$\begin{gathered}\tau(x)=\Phi(x)+\Phi_1(x),\\ \psi_1\left(\frac{x}{2}\right)=\Phi(0)+\Phi_1(x)+\omega\left(-\frac{x}{2}\right),\\ \psi_2\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{2}\,\Phi'(0)+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega'\left(-\frac{x}{2}\right),\\ 0\leqslant x\leqslant 1.\end{gathered}\tag{7.2}$$

Из равенств (7.2) находим значения функций Φ, Φ_1 и ω. Подставляя их выражения в формулу (7.1), получаем

$$W(x,y)=\tau(x+y)-\psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{x-y}^{x+y}\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{-2y}\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt.\tag{7.3}$$

Единственность решения задачи B очевидна.

§ 8. РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ C

При исследовании и этой задачи можно, не ограничивая общности, предполагать справедливость равенств $\omega(0)=\omega(h)=0$.

Докажем единственность решения задачи C. С этой целью рассмотрим однородную задачу C, т. е. задачу с условиями

$$W|_\sigma=0,\ \ \frac{\partial W}{\partial n}\bigg|_{\sigma_1}=0,\ \ W\bigg|_{AC}=0,\ \frac{\partial W}{\partial n}\bigg|_{AC}=0.\tag{8.1}$$

Общее решение уравнения (1.1) в области D_2, как мы уже видели, дается формулой (7.1).

Реализуя последние два условия (8.1), из (7.1) имеем

$$\Phi_1(x)=-\Phi(0)-\omega\left(-\frac{x}{2}\right),\ 0<x<1,$$

$$\omega'(-x) = -2\Phi'(0),\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Подставляя эти выражения в (7.1), заключаем, что решение уравнения (1.1), удовлетворяющее последним двум условиям (8.1), в области D_2 имеет вид

$$W(x, y) = \Phi(x+y) - (x+y)\Phi'(0) - \Phi(0).$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} = 0,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{8.2}$$

Заметим, что функция $u(x, y)$ в представлении (1.7) в области D_1 является гармонической. В силу непрерывности $\frac{\partial W}{\partial x}$ и $\frac{\partial W}{\partial y}$ при переходе через отрезок AB из (8.2) заключаем, что для гармонической в области D_1 функции $u(x, y)$ справедливо равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega'(0),\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{8.3}$$

Кроме того, в силу первых двух условий (8.1) функция $u(x, y)$ должна удовлетворять условиям

$$u|_{\sigma} = -\omega(y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma_1} = -\omega'(y)\frac{dy}{dn}. \tag{8.4}$$

Используя принцип экстремума, докажем, что гармоническая функция, удовлетворяющая условиям (8.3) и (8.4), тождественно равна нулю.

В силу $\omega(0) = \omega(h) = 0$ имеем $u(A) = u(N) = u(B) = 0$. Функция $u(x, y)$ не может достигать ни положительного максимума, ни отрицательного минимума на открытых дугах σ_1 и σ_2 при $\frac{dx}{dn} \neq 0$. Это доказывается так же, как единственность решения задачи A (см. § 3 гл. VI). Остается показать, что функция $u(x, y)$ не может достигать экстремума и на отрезке AB.

Если в равенстве (8.3) $\omega'(0) = 0$, то наше последнее утверждение будет очевидным. В самом деле, пусть

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ y = 0,\ 0 < x < 1, \tag{8.5}$$

и функция $u(x, y)$ достигает отличного от нуля экстремума в точке $(\xi, 0)$, $0 < \xi < 1$. Тогда в этой точке обязательно имеет место равенство $\frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \xi} = 0$ и в силу (8.5) $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, что невозможно.

Теперь докажем, что в условии (8.3) выражение $\omega'(0)$ не может быть отличной от нуля величиной. Предположим противное. Пусть $\omega'(0) \neq 0$. Тогда возможны два случая: $\omega'(0) > 0$ и $\omega'(0) < 0$.

В первом случае легко заметить, что функция $u(x, y)$ не может достигать отрицательного минимума на AB. В самом деле, предполагая, что $u(x, y)$ достигает отрицательного минимума в точке $(\xi, 0)$, $0<\xi<1$, в силу (8.3) получаем $\frac{\partial u}{\partial y}=-\omega'(0)<0$, что невозможно, так как в случае минимума $\frac{\partial u}{\partial y}>0$. Следовательно, в замкнутой области $\overline{D}_1$ $\min u(x, y)=0$, т. е. $u(x, y)\geqslant 0$. Так как $u|_\sigma=-\omega(y)\geqslant 0$, то $\omega(y)\leqslant 0$. Отсюда, в свою очередь, учитывая $\omega(0)=0$, будем иметь $\omega'(0)\leqslant 0$, что противоречит допущению $\omega'(0)>0$. Во втором случае, рассуждая так же, как в первом, убеждаемся в том, что функция $u(x, y)$ не может достигать положительного максимума на AB. Следовательно, $\max u(x, y)=0$ в D_1, т. е. $u(x, y)\leqslant 0$ всюду в $\overline{D}_1$. Имея в виду, что $u|_\sigma=-\omega(y)\leqslant 0$, получаем $\omega(y)\geqslant 0$. Отсюда на основании условия $\omega(0)=0$ имеем $\omega'(0)\geqslant 0$, что противоречит допущению $\omega'(0)<0$.

Итак, $\omega'(0)=0$. В таком случае, как уже было доказано, функция $u(x, y)$, удовлетворяющая условиям (8.4) и (8.5), нигде в замкнутой области $\overline{D}_1$ не может иметь отличного от нуля экстремума. Следовательно, $u\equiv 0$ и, стало быть, $\omega\equiv 0$. Отсюда $W\equiv 0$ в области $\overline{D}_1$. Так как $W=0$ на отрезке AB, то в силу последних двух условий (8.1), согласно формуле (7.3), $W\equiv 0$ и в области $\overline{D}_2$. Отсюда следует единственность решения задачи C.

Замечание 2. Если условия $\omega(0)=\omega(h)=0$ не выполнены, то гармоническая функция от одной переменной, удовлетворяющая условиям (8.3) и (8.4), есть $-by$. Отсюда $\omega(y)=by$ (см. замечание 1 в § 6).

Существование решения рассматриваемой задачи докажем для случая, когда кривая σ является полуокружностью. Очевидно, что без ограничения общности можно полагать $f(0)=\psi_1(0)=0$. Будем также считать, что функции $f'(t)$, $\varphi(t)$, $\psi_1'(t)$ и $\psi_2(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера вдоль дуг, где они заданы. Пользуясь представлением (7.1), легко находим, что решение уравнения (1.1), удовлетворяющее последним двум условиям (5.3), в области D_2 имеет вид

$$W(x, y)=\Phi(x, +y)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x-y}\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{-2y}\psi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt-(x+y)\Phi'(0)-\Phi(0). \tag{8.6}$$

Имея в виду представление (1.7), из (8.6) в области D_2 будем иметь

$$u(x, y) = \Phi(x+y) + \psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{x-y} \psi_2\left(\frac{t}{2}\right) dt -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{-2y} \psi_2\left(\frac{t}{2}\right) dt - (x+y)\Phi'(0) - \Phi(0) - \omega(y), \qquad (8.7)$$

в частности, при $y = 0$

$$u(x, 0) = \Phi(x) + \psi_1\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{x} \psi_2\left(\frac{t}{2}\right) dt - \Phi'(0)\,x - \Phi(0). \qquad (8.8)$$

Функция $u(x, y)$ в области D_1 является гармонической. Пусть функция $v(x, y)$ гармонически сопряжена с $u(x, y)$ в области D_1 и удовлетворяет условию $v(0, 0) = 0$.

В силу условий Коши — Римана и непрерывности $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ при переходе через отрезок AB из (8.7) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \Phi'(x) - \frac{1}{2}\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi_2\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{2}\,\psi_2(0) -$$
$$-\Phi'(0) - \omega'(0).$$

Отсюда после интегрирования, учитывая условие $v(0, 0) = 0$, находим

$$v(x, 0) = -\Phi(x) + \Phi(0) + \psi_1\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{x} \psi_2\left(\frac{t}{2}\right) dt -$$

$$- \left[\sqrt{2}\,\psi_2(0) - \Phi'(0) - \omega'(0)\right] x. \qquad (8.9)$$

Из соотношений (8.8) и (8.9) получаем

$$u(x, 0) + v(x, 0) = 2\psi_1\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{2} \int\limits_0^{x} \psi_2\left(\frac{t}{2}\right) dt - 2\Phi'(0)\,x.$$

Обозначая правую часть через $2\psi\left(\frac{x}{2}\right)$, имеем

$$u(x, 0) + v(x, 0) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (8.10)$$

Первые два условия (5.3) перепишем в виде

$$u|_\sigma = f - \omega(y), \qquad (8.11)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma_1} = \varphi - \omega'(y)\frac{dy}{dn}. \qquad (8.12)$$

Таким образом, задача свелась к определению гармонической функции $u(x, y)$ и функции $\omega(y)$ в области D_1 по условиям (8.10) — (8.12).

Если найдем гармонические в области D_1 функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, удовлетворяющие соответственно условиям

$$u_1=f-\omega(y) \text{ на } \sigma, \quad u_1(x, 0)+v_1(x, 0) \text{ на } AB, \tag{8.13}$$

$$u_2=0 \text{ на } \sigma, \ u_2(x, 0)+v_2(x, 0)=2\psi\left(\frac{x}{2}\right) \text{ на } AB, \tag{8.14}$$

где функции $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$ гармонически сопряжены соответственно с $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ в области D_1 и удовлетворяют условиям $v_1(0, 0)=v_2(0, 0)=0$, то функция $u(x, y)$, гармоническая в области D_1 и удовлетворяющая условиям (8.10) и (8.11), будет иметь вид

$$u(x, y)=u_1(x, y)+u_2(x, y). \tag{8.15}$$

Обозначим через $F_1(z)$, $z=x+iy$, функцию $u_1(x, y)+iv_1(x, y)$, аналитическую внутри области D_1 и удовлетворяющую условию $F_1(0)=0$.

В силу второго условия (8.13) функция $F_1(z)$ аналитически продолжается через отрезок AB действительной оси в симметричную относительно этой оси область, причем

$$F(z)=\begin{cases} u_1(x, y)+iv_1(x, y) & \text{при } y\geqslant 0, \\ -v_1(x, y)-iu_1(x, y) & \text{при } y<0. \end{cases} \tag{8.16}$$

На основании первого условия (8.13), согласно (8.16), для функции $F_1(z)$ получим граничные условия

$$\operatorname{Re} F_1(t)|_\sigma=f(t)-\omega[y(t)], \quad \operatorname{Im} F_1(t)|_{\bar\sigma}=f(\bar t)-\omega[y(\bar t)], \tag{8.17}$$

где $\bar\sigma$ — нижняя полуокружность.

Голоморфная в круге $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ функция $F_1(z)$, удовлетворяющая условиям (8.17) и $F_1(0)=0$, имеет вид [5]

$$F_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int_\sigma \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\left\{f(t)-\omega[y(t)]\right\}dt. \tag{8.18}$$

Теперь пусть $F_2(z)$ — голоморфная в области D_1 функция $u_2(x, y)+iv_2(x, y)$, удовлетворяющая условию $F_2(0)=0$.

В силу первого условия (8.14) функция аналитически продолжается через σ на всю верхнюю полуплоскость, причем на основании второго условия (8.14) имеем

$$u_2(x, 0)+v_2(x, 0)=u_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right)+v_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right)=$$

$$= 2\psi\left(\frac{1}{2}\frac{x}{2x-1}\right), \quad -\infty < x \leqslant 0, \quad 1 \leqslant x < \infty. \tag{8.19}$$

Таким образом, для определения функции $F_2(z)$, голоморфной в верхней полуплоскости и ограниченной на бесконечности, в силу условий (8.14) и (8.19) получаем граничные условия

$$\operatorname{Re}(1-i)F_2(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\operatorname{Im}(1-i)F_2(x) = 2\psi\left(\frac{1}{2}\frac{x}{2x-1}\right), \tag{8.20}$$

$$-\infty < x \leqslant 0, \quad 1 \leqslant x < \infty.$$

Функция $F_2(z)$, удовлетворяющая условиям (8.20) и $F(0)=0$, выписывается явно (см. [5]):

$$F_2(z) = \frac{2}{\pi(1+i)}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2tz}\right)\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt. \tag{8.21}$$

Итак, из формул (8.15), (8.18) и (8.21) имеем

$$u(x, y) = \operatorname{Re}[F_1(z) + F_2(z)].$$

Теперь удовлетворим условию (8.12). С этой целью, проделывая выкладки, аналогичные тем, которые мы делали при получении формулы (6.11), находим

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \operatorname{Re}\frac{1-2z}{\pi i 2\rho}\int\limits_\sigma \sqrt{\frac{t(1-t)}{z(1-z)}}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2tz}\right)\left\{f'(t) - \omega_t'\,[y(t)]\right\}dt +$$

$$+ \operatorname{Re}\frac{1-2z}{2\pi(1+i)\rho}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{t(1-t)}{z(1-z)}}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2tz}\right)\psi'\left(\frac{t}{2}\right)dt. \tag{8.22}$$

Далее, переходя к пределу в формуле (8.22) при $z \to t_0 \in \sigma_1$ и повторяя весь ход рассуждений, которые привели нас к сингулярному интегральному уравнению (6.15), получаем сингулярное интегральное уравнение для определения неизвестной функции $\omega(y)$

$$\sin\theta_0\delta(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_1}\frac{K_1(t_0, t)}{t-t_0}\delta(t)\,dt = g_1(t), \tag{8.23}$$

где

$$\delta(t) = \omega'[y(t)];$$

$$K_1(t_0, t) \equiv \frac{t-t_0}{2t-1}\cos\theta\operatorname{Re} i\,\frac{(2t_0-1)\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{t_0(1-t_0)}}\left(\frac{1}{t-t_0} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{t+t_0-2tt_0} + \frac{t}{t+t_0-2tt_0-1} - \frac{t}{t+t_0-1}\right);$$

$$g_1(t_0) \equiv -\varphi(t_0) + \operatorname{Re}\frac{1-2t_0}{\pi i}\int_{\sigma}\sqrt{\frac{t(1-t)}{t_0(1-t_0)}}\left(\frac{1}{t-t_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{t_0+t-2tt_0}\right) f'(t)\,dt + \operatorname{Re}\frac{1-2t_0}{\pi(1+i)}\int_0^1\sqrt{\frac{t(1-t)}{t_0(1-t_0)}}\left(\frac{1}{t-t_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{t+t_0-2tt_0}\right)\psi'\left(\frac{t}{2}\right)dt.$$

Уравнение (8.23) эквивалентно рассматриваемой задаче. Для него справедливы те же самые равенства (6.16), а индекс его равен нулю.

Докажем, что это уравнение всегда разрешимо. Однородной задаче C соответствует уравнение

$$\sin\theta_0\delta(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_{\sigma_1}\frac{K_1(t_0, t)}{t-t_0}\delta(t)\,dt = CH(t_0), \tag{8.24}$$

где C — постоянная, а $H(t_0)$ — гладкая функция.

Учитывая эквивалентность однородной задачи уравнению (8.24), на основании замечания 2 заключаем, что уравнение (8.24) имеет лишь одно постоянное решение. Отсюда следует, что однородное уравнение, соответствующее (8.24), не может иметь отличного от нуля решения.

Так как индекс $\varkappa$ уравнения (8.23) равен нулю, то из равенства $k - k' = \varkappa$ следует $k' = 0$. Это означает, что уравнение (8.23) всегда разрешимо.

После нахождения функции $\omega(y)$ из уравнения (8.23) определим гармоническую в области D_1 функцию $u(x, y)$ из формулы $u(x, y) = \operatorname{Re}[F_1(z) + F_2(z)]$. Тогда решение уравнения (1.1) в области D_1 будет полностью определено, а в области D_2 определится как решение задачи B.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов В. Б., Краснобаев К. В. Гидродинамическая теория космической плазмы. М., «Наука», 1977.
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М., ИЛ, 1961.
3. Бжихатлов Х. Г. Об одной краевой задаче для смешанных параболо-гиперболических уравнений с характеристической линией изменения типа. «Дифференциальные уравнения», 1977, т. 13, № 1.
4. Бжихатлов Х. Г., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. ДАН СССР, 1968, т. 183, № 2.
5. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., Изд-во АН СССР, 1959.
6. Бицадзе А. В. Об уравнениях смешанно-составного типа. В сб. «Некоторые проблемы математики и механики». Новосибирск, СО АН СССР, 1961.
7. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., «Наука», 1966.
8. Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С. К теории уравнений смешанно-составного типа. «Сиб. матем. ж.», 1961, т. II, № 1.
9. Вострова Л. Е. Смешанная краевая задача для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} y\, u_{yy} - u = 0$. Ученые записки Куйбышевского пед. ин-та, вып. 21, 1958.
10. Вострова Л. Е. Смешанная краевая задача для общего уравнения Лаврентьева—Бицадзе. Ученые записки Куйбышевского пед. ин-та, вып. 29, 1959.
11. Врагов В. Н. Смешанная задача для одного класса гиперболо-параболических уравнений второго порядка. «Дифференциальные уравнения», 1976, № 1.
12. Гайдук С. И. Применение метода контурного интеграла к решению одной задачи на сопряжение уравнений параболического и гиперболического типов. «Дифференциальные уравнения», 1965, т. 1, № 10.
13. Гайдук С. И., Иванов А. В. Об одной задаче на сопряжение уравнений параболического и гиперболического типов. ДАН БССР, 1964, т. 8, № 9.
14. Гвазава Д. К. К теории краевых задач для уравнения $y^m u_{xx} + u_{yy} = K(x, y) e^u$ в большом. ДАН СССР, 1966, т. 167, № 2.
15. Градштейн Н. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
16. Гурса Э. Курс математического анализа, т. III, ч. I, II. М., Гос. техн.-теор. изд-во, 1933.
17. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов. М., «Наука», 1964.
18. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., «Наука», 1971.

19. Джураев Т. Д. Об уравнениях смешанно-составного типа. «Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук», 1961, № 6.
20. Джураев Т. Д. Об одной краевой задаче для уравнения составного типа. ДАН УзССР, 1962, № 4.
21. Джураев Т. Д. О некоторых краевых задачах для уравнения смешанно-составного типа. «Сиб. матем. ж.», 1963, № 4.
22. Джураев Т. Д. Об одной краевой задаче для уравнения $\frac{\partial}{\partial x}\Delta U=0$. В сб. «Исследование по дифференциальным уравнениям». Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1963.
23. Джураев Т. Д. К теории уравнения $\frac{\partial}{\partial x}\Delta U=0$. «Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук», 1964, № 3.
24. Джураев Т. Д. Об единственности и существовании решений некоторых краевых задач для уравнений составного типа, «Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук», 1967, № 3.
25. Джураев Т. Д. Об единственности решения некоторых краевых задач для одного класса уравнений составного типа. «Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук», 1967, № 4.
26. Джураев А. Системы уравнений составного типа. М., «Наука», 1972.
27. Джураев Т. Д., Иргашев Ю. О краевой задаче Каттабрига для нелинейных уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. В сб. «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения». Ташкент, «Фан», 1967.
28. Джураев Т. Д., Иргашев Ю. Краевые задачи для уравнений третьего порядка в неограниченных областях. В сб. «Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения». Ташкент, «Фан», 1977.
29. Джураев Т. Д., Иргашев Ю. Задача Жевре для смешанных уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. «Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук», 1977, № 5.
30. Джураев Т. Д., Иргашев Ю. Задача Жевре для смешанных уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. В сб. «Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения». Ташкент, «Фан», 1978.
31. Джураев Т. Д., Рахманов У. Об одной краевой задаче для уравнения эллиптико-параболического типа. «Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук», 1972, № 4.
32. Джураев Т. Д., Рахманов У. О корректных краевых задачах для уравнений смешанно-составного типа. «Дифференциальные уравнения», 1973, т. IX, № 1.
33. Джураев Т. Д., Рахманов У. О корректных краевых задачах для уравнений третьего порядка смешанно-составного типа. В сб. «Краевые задачи для дифференциальных уравнений, 4». Ташкент, «Фан», 1974.
34. Джураев Т. Д., Сабиров А. Об одной краевой задаче для уравнений составного типа. В сб. «Краевые задачи для дифференциальных уравнений, 5», Ташкент, «Фан», 1975.
35. Джураев Т. Д., Сабиров А. О некоторых краевых задачах для уравнений составного типа. «Дифференциальные уравнения», 1977, т. XIII, № 1.
36. Джураев Т. Д., Сабиров А. О краевых задачах для нелинейных уравнений составного типа. В сб. «Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения». Ташкент, «Фан», 1977.
37. Джураев Т. Д., Шарифбаев Я. С. О некоторых краевых задачах для уравнений с частными производными третьего порядка. В сб. «Краевые задачи для дифференциальных уравнений, 2». Ташкент, «Фан», 1972.
38. Джураев Т. Д., Шарифбаев Я. С. О краевых задачах для уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа. «Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук», 1974, № 3.
39. Джураев Т. Д., Шарифбаев Я. С. О краевых задачах для одного

класса уравнений третьего порядка. В сб. «Краевые задачи для дифференциальных уравнений, 4». Ташкент, «Фан», 1974.
40. Дубля З. Д. Краевые задачи для уравнений составного типа в неограниченных областях. «Дифференциальные уравнения», 1974, т. X, № 1.
41. Дубля З. Д. О задаче Дирихле для некоторого класса уравнений третьего порядка. «Дифференциальные уравнения», 1977, т. XIII, № 1.
42. Елеев В. А. Краевая задача для одного уравнения гиперболо-параболического типа. «Матем. сб.», вып. 3. Орджоникидзе, изд. Северо-Осетинск. гос. ун-та, 1976.
43. Елеев В. А. Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа, «Дифференциальные уравнения», 1977, т. XIII, № 1.
44. Золина Л. А. О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа. «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1966, т. 6, № 6.
45. Золина Л. А. О плоской задаче сопряженного теплообмена. «Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук», 1967, № 2.
46. Золина Л. А. О краевых задачах для модельных уравнений эллиптико-параболического и гиперболо-параболического типов. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1967.
47. Золина Л. А. Об одной краевой задаче для уравнения эллиптико-параболического типа. В сб. «Вопросы прикладной математики». Труды Ташкентского ин-та жел.-дор. транспорта, вып. 6, 1968.
48. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. УМН, 1962, т. XVII, вып. 3.
49. Калашников С. Г. Электричество, т. II, М., ГИТТЛ, 1956.
50. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
51. Керефов А. А. Некоторые краевые задачи для смешанно-параболических уравнений. Автореф. канд. дисс., Нальчик, 1975.
52. Керефов А. А. Задача Жевре для одного смешанно-параболического уравнения. «Дифференциальные уравнения», 1977, т. XIII, № 1.
53. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
54. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М., Машгиз, 1957.
55. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Госиздат, 1958.
56. Ладыженская О. А., Ступелис Л. Об уравнениях смешанного типа. «Вестник ЛГУ, серия мат., мех. и астр.», 1965, т. 19, № 4.
57. Лионс Ж. А. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Мир», 1972.
58. Мередов М. М., Базаров Д. Задача типа Франкля для уравнений третьего порядка. «Дифференциальные уравнения», 1977, т. XIII, № 1.
59. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
60. Нахушев А. М. К теории линейных краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка. Автореф. докт. дисс. Новосибирск, 1971.
61. Перельман Т. Л. Об одной краевой задаче для уравнений смешанного типа в теории теплопроводности. «Инж.-физ. ж.», 1961, № 8.
62. Перельман Т. Л. О сопряженных задачах теплообмена. В сб. «Тепло- и массоперенос». т. 5. Минск, Изд-во АН БССР, 1963.
63. Перельман Т. Л., Рывкин В. Б. Единственность решения одной сопряженной задачи переноса тепла. ДАН БССР, 1964, т. 8, № 6.
64. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., ГИТТЛ, 1953.
65. Пулькин С. П. Задачи Трикоми для общего уравнения Лаврентьева — Бицадзе. ДАН СССР, 1958, т. 118, № 1.
66. Рахманов У. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного (эллиптико-параболического) и смешанно-составного типов. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1973.

67. Рахманов У. О некоторых краевых задачах для уравнения эллиптико-параболического типа. В сб. «Краевые задачи для дифференциальных уравнений, 3», Ташкент, «Фан», 1973.

68. Сабиров А. Об одной краевой задаче для уравнения $\frac{\partial}{\partial x}\Delta U = f\,(x, y; u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx})$. В сб. „Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения". Ташкент, „Фан", 1976.

69. Сабиров А. Краевая задача для одного нелинейного уравнения составного типа. В сб. «Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения». Ташкент, «Фан», 1978.

70. Сабиров А. Краевые задачи для линейных и нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков составного типа. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1977.

71. Салахитдинов М. С .Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент, «Фан», 1974.

72. Салахитдинов М. С., Джураев Т. Д. Об одной смешанной задаче для уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа. «Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук», 1971, № 4.

73. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4. М., ГИТТЛ, 1951.

74. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., «Наука», 1970.

75. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., ГИТТЛ, 1954.

76. Стручина Г. М. Задача о сопряжении двух уравнений. «Инж.-физ. ж.», 1961, т. 4, №'11.

77. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.

78. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных М., ИЛ, 1957.

79. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., ИЛ, 1960.

80. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М., ИЛ, 1962.

81. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Наука», 1968.

82. Шарифбаев Я. С. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части. «Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук», 1975, № 1.

83. Шарифбаев Я. С. О корректных краевых задачах для уравнений с частными производными третьего порядка составного и гиперболо-параболического типов. Автореф. канд. дисс. Ташкент, 1975.

84. Шарифбаев Я. С. Об одной задаче для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части. В сб. «Вопросы вычислительной и прикладной математики», вып. 48. Ташкент, ИК с ВЦ АН УзССР, 1977.

85. Шарифбаев Я. С. О краевых задачах для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части. ДАН УзССР, 1978, № 6.

86. Cattabriga L. Su alcuni problemi per equazioni differenziali di tipo composito. Rendiconti Sem. Mat. Universita Podova, vol. XXVII, 1957.

87. Cattabriga L. Annali della seuola normole Supericri di pisa e mat., 1959, vol. 13, No. 2, p. 163.

88. Chu C. K. Magnetohydrodinamic nozzle flow with three Aransitions. The physice of fluids, 1962, vol. 5, No. 5, p. 550.

89. Cumberbatch E., Sarason L., Weitzner H. Magnetohydrodinamic flow past a thin airfiil. ALAA Journal, 1963, vol. 1, No. 3, p. 679.

90. Davis R. B. A boundary value problem for third-order linear partial differential equations of composite type. Proceedings Amer. Math. Soc., 1952, vol. 3, p. 751.

91. Davis R. B. A Special case of the normal derivative problem for a third order composite partial differential equation. Proceedings Amer. Math. Soc., 1954, vol. 5, p. 720.

Тухтамурад Джураевич Джураев

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО И СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПОВ

Утверждено к печати Ученым советом
Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М. Т. Уразбаева,
Отделением механики и процессов управления АН УзССР

Редактор *Н. М. Вайсбрит*
Художник *П. Н. Хапилин*
Технический редактор *В. М. Тарахович*
Корректор *Е. Джаббарова*

ИБ 812

Сдано в набор 30/I—79 г. Подписано к печати 26/III—79 г. Р04548. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,0.
Уч.-изд. л. 11,8. Тираж 1200. Заказ 50. Цена 2 р. 10 к.

Типография издательства «Фан» УзССР, Ташкент, проспект М. Горького, 79.
Адрес издательства: 700047, Ташкент, ул. Гоголя, 70.