К.Б. Сабитов

К теории уравнений смешанного типа

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2014

УДК 517.95
ББК 22.161
С 12

Сабитов К.Б. **К теории уравнений смешанного типа.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 304 с. — ISBN 978-5-9221-1561-2.

Монография посвящена изучению качественных и спектральных свойств решений уравнений и систем уравнений смешанного типа, в частности уравнения Чаплыгина, моделирующего плоскопараллельные околозвуковые течения. Представленные результаты имеют целью дальнейшую разработку метода принципа максимума, альтернирующего метода типа Шварца, метода вспомогательных функций и метода спектральных разложений, которые используются при исследовании краевых задач Трикоми, Франкля, обобщенной задачи Трикоми и других (в важных классах уравнений смешанного типа), а также для решения проблем, оставшихся открытыми с 50–60-х годов XX столетия.

Для научных сотрудников в области дифференциальных уравнений, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов вузов.

Рецензенты:

кафедра функционального анализа и его применений
факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова,
(зав. кафедрой д.ф.-м.н., профессор, академик РАН *Е.И. Моисеев*);

зав. кафедрой математического анализа
НИУ «БелГУ» д.ф.-м.н., профессор *А.П. Солдатов*

Издание печатается по решению Ученых советов Института прикладных исследований Академии наук Республики Башкортостан и Самарского государственного архитектурно-строительного университета при финансовой поддержке ФФИ АН РБ и СГАСУ.

ISBN 978-5-9221-1561-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа в силу ее прикладной и теоретической значимости стала одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в известных работах Ф. Трикоми [210, 211] и С. Геллерстедта [240], где впервые ставились и изучались краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Эти краевые задачи в настоящее время носят названия «Задача Трикоми», «Задача Геллерстедта».

Следующим этапом в развитии теории краевых задач для уравнений смешанного типа явились работы советских математиков М.А. Лаврентьева, Ф.И. Франкля, И.Н. Векуа, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, Л.В. Овсянникова. В этих работах указывалось на актуальность проблем уравнений смешанного типа для трансзвуковой газовой динамики, магнитогидродинамических течений с переходом через скорость звука и скорость Альфена, течений жидкости в открытом русле, для теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, а также безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака. В последние годы на важность уравнений смешанного типа указано в работах А.Д. Пилия и В.И. Фёдорова [159], Г.Г. Чёрного [225], Э.Г. Шифрина [226], Дж. Коула, Л. Кука [95], А.Г. Кузьмина [105] в связи с проблемами теории сопел Лаваля, теории плазмы и другими вопросами механики.

В 50-е годы в работах Ф.И. Франкля, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко было положено начало современной теории уравнений смешанного типа. В этих работах наряду с задачами Трикоми и Геллерстедта были поставлены и изучены новые краевые задачи для уравнений смешанного типа.

В дальнейшем эти краевые задачи изучались многими авторами как в СССР, так и за рубежом. К середине 70-х годов в советской и зарубежной печати было опубликовано несколько сотен статей, посвященных уравнениям смешанного типа. Основные результаты этих работ и соответствующая им библиография приведены в монографиях А.В. Бицадзе [22, 23], Л. Берса [11], К.Г. Гудерлея [44], М.М. Смирнова [201, 202], М.С. Салахитдинова [195], Т.Д. Джураева [51, 52]. Американский математик М. Проттер [259], характеризуя состояние теории уравнений смешанного типа к этому моменту, отметил: «Вероятно, все эти отрывочные результаты в дальнейшем будут собраны в виде единой всесторонней теории уравнений смешанного типа в $\mathbb{R}^2$ подобно классической теории для эллиптических, гиперболических и параболических уравнений. В данное время такая задача представляется весьма трудной; распространение теории на случай трех и более измерений и на уравнения более высокого порядка, чем второй, является делом еще более отдаленного будущего».

Член-корреспондент АН СССР А.В. Бицадзе на руководимых им семинарах при МИАН неоднократно отмечал, что основные проблемы уравнений смешанного типа 50-х и 60-х годов, связанные с вопросами существования и единственности решения задачи Трикоми для общих уравнений смешанного типа, единственности решений задачи Франкля и обобщенной задачи Трикоми без каких-либо ограничений геометрического характера на эллиптическую часть границы области, до сих пор еще не решены. Эти проблемы указаны в монографиях [11, 22].

Однако появившиеся в 80-е годы работы показали, что перспективы развития теории уравнений смешанного типа можно оценивать более оптимистично. Усилиями многих авторов получены важные результаты, которые можно оценить как значительные шаги на пути разработки общей теории уравнений смешанного типа. Часть этих результатов изложена в монографиях А.В. Бицадзе [23], В.Н. Врагова [41], Е.И. Моисеева [139], А.Г. Кузьмина [105], М.С. Салахитдинова и А.К. Уринова [196, 197], А.М. Нахушева [154], в обзорной работе Д.К. Гвазова [43], диссертациях Г.Д. Каратопраклиева [88], Т.В. Чекмарева [224], В.П. Диденко [57], М. Мередова [130], С.М. Пономарева [163], Т.Ш. Кальменова [77], Н.И. Попиванова [164], В.И. Жегалова [65], Б.А. Бубнова [25], А.И. Кожанова [93], О.А. Репина [171], Р.С. Хайруллина [220], Л.С. Пулькиной [169] и в статьях многих других авторов, на которые мы будем ссылаться ниже.

Основной задачей предлагаемой работы является изучение качественных и спектральных свойств решений уравнений и систем уравнений смешанного типа в целях дальнейшей разработки метода принципа максимума, альтернирующего метода типа Шварца, метода вспомогательных функций и метода спектральных разложений для изучения краевых задач Трикоми, Франкля, обобщенной задачи Трикоми и других для важных классов уравнений смешанного типа и решения проблем, указанных в монографиях [11, 22, 156].

Далее перейдем к изложению основного содержания монографии, которая состоит из пяти глав, разбитых на 32 параграфа. При этом принята тройная нумерация формул, определений, теорем, лемм, замечаний и рисунков. Например, формула (4.3.1) означает первую формулу третьего параграфа четвертой главы.

Глава 1. В этой главе установлены принципы максимума для общего уравнения смешанного типа в классе его регулярных и обобщенных решений в областях гиперболичности, эллиптичности и (в целом) в смешанной области при более слабых условиях на коэффициенты изучаемого уравнения и класс решений. На основе этих результатов установлены также принципы максимума и для других классов уравнений смешанного типа. Здесь, по существу, построена некая теория экстремальных свойств решений уравнений смешанного типа на плоскости, из которой следуют ранее известные результаты и ряд нерешенных вопросов по теории задачи Трикоми и других аналогичных краевых задач.

В §1.1 для уравнения смешанного типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = F(x,y), \tag{0.1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D, ограниченной простой кривой Жордана Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами $A = (0,0)$ и $B = (l,0)$, $l > 0$, и характеристиками AC и CB уравнения (0.1) при $y < 0$, ставится задача Трикоми (задача T).

Задача T. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{0.2}$$

$$Lu(x,y) \equiv F(x,y), (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{0.3}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y),\ \ (x,y) \in \Gamma; \tag{0.4}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y),\ \ (x,y) \in AC, \tag{0.5}$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(A) = \psi(A)$, $D_+ = D \cup \{y > 0\}$, $D_- = D \cup \{y < 0\}$.

При исследовании задачи T и других аналогичных краевых задач важную роль играет принцип экстремума, установленный впервые в 1950 году А.В. Бицадзе для уравнения Лаврентьева. Далее в этом параграфе приведен краткий обзор работ, посвященных принципу экстремума для уравнений смешанного типа, и указаны причины интереса к доказательству справедливости принципа экстремума.

В § 1.2 для уравнения гиперболического типа

$$L_0(u) \equiv u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + C(\xi,\eta)u = f(\xi,\eta), \tag{0.6}$$

заданного в характеристическом треугольнике Δ, ограниченном отрезками A_0B_0, A_0C_0 и C_0B_0, где $A_0 = (0,0)$, $B_0 = (l,l)$, $C_0 = (0,l)$, изучены экстремальные свойства его решений.

Пусть $\alpha = a\beta$, $\beta = \exp\int b d\xi$, функции a, a_ξ, b и c непрерывны в $\Delta \cup A_0C_0$ и при $(\xi,\eta) \in \Delta$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h = a_\xi + ab - c \geqslant 0, \\ \alpha(0,\eta) + \displaystyle\int_0^\xi \beta(t,\eta)c(t,\eta)\,dt > 0; \end{cases} \tag{A_1}$$

$$\alpha(\xi,\eta) - \int_0^\xi \beta(t,\eta)|h(t,\eta)|\,dt > 0. \tag{A_2}$$

Предполагается, что правая часть $f(\xi,\eta)$ интегрируема по ξ на каждом отрезке $[0,\xi_0]$ характеристики $\eta = \eta_0$, $0 < \xi_0 < \eta_0 < l$.

Определение 1.2.1. Регулярным в области Δ решением уравнения (0.6) назовем функцию $u(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям: 1) $u \in C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta)$, $u_{\xi\eta} \in C(\Delta)$, $L_0 u \equiv f$ в Δ; 2) производная u_η непрерывна на $\Delta \cup A_0C_0$.

Теорема 1.2.1. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (0.6) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (A_1); 2) $f(\xi,\eta) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ в Δ; 3) $u(\xi,\eta)$ — *регулярное в* Δ *решение уравнения* (0.6), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) > 0$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}} u < 0)$, *то* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}} u)$ *достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Теорема 1.2.2. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (0.6) *в области* Δ *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (A_2); 2) $f(\xi,\eta) \equiv 0$ в Δ; 3) $u(\xi,\eta)$ — *регулярное в* Δ *решение уравнения* (0.6), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi,\eta)| > 0$, *то этот максимум достигается на* $\overline{A_0B_0}$.

Определение 1.2.2. Обобщенным в области Δ решением уравнения (0.6) назовем функцию $u(\xi,\eta)$, если существует последовательность регулярных в Δ решений $\{u_n(\xi,\eta)\}$ уравнения (0.6), равномерно сходящаяся к $u(\xi,\eta)$ в $\overline{\Delta}$.

Теорема 1.2.3. *Пусть выполнены условия* 1) и 2) *теоремы* 1.2.1 *и* $u(\xi,\eta)$ — *обобщенное в* Δ *решение уравнения* (0.6), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u > 0$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}} u < 0)$, *то* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}} u)$ *достигается на* $\overline{A_0B_0}$.

Теорема 1.2.4. *Пусть выполнены условия* 1) и 2) *теоремы* 1.2.2 *и* $u(\xi,\eta)$ — *обобщенное в* Δ *решение уравнения* (0.6), *равное нулю на* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi,\eta)| > 0$, *то этот максимум достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Следствие 1.2.1. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (0.6) *в области* Δ *удовлетворяют условию* (A_1); 2) $f(\xi,\eta) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* Δ; 3) $u(\xi,\eta)$ — *обобщенное в* Δ *решение уравнения* (0.6), *равное нулю на* A_0C_0. *Тогда если* $u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на отрезке* $\overline{A_0B_0}$, *то* $u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* Δ.

В § 1.3 установлены экстремальные свойства решений уравнения (0.1) в области D.

Определение 1.3.1. Регулярным в области D решением уравнения (0.1) назовем функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (0.2) и (0.3), если (кроме того) производная $u_\eta \in C(\Delta \cup A_0C_0)$.

Теорема 1.3.1. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (0.1) *в области* D_+ *ограничены и* $C(x,y) \leqslant 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (0.1) *в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2.1; 3) $F(x,y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на* $D_+ \cup D_-$; 4) $u(x,y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (0.1), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D}} u > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}} u < 0)$, *то* $\max\limits_{\overline{D}} u$ $(\min\limits_{\overline{D}} u)$ *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Теорема 1.3.2. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (0.1) *в области* D_+ *ограничены и* $C(x,y) \leqslant 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (0.1) *в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2.2; 3) $F(x,y) \equiv 0$; 4) $u(x,y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (0.1), *равное нулю на* AC. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| > 0$, *то этот максимум достигается на дуге* $\overline{\Gamma}$.

Определение 1.3.2. Обобщенным в области D решением уравнения (0.1) будем называть функцию $u(x,y)$, если существует последовательность регулярных в области D решений $\{u_n(x,y)\}$ уравнения (0.1), равномерно сходящаяся к $u(x,y)$ в замкнутой области $\overline{D}$.

Теоремы 1.3.1 и 1.3.2 переносятся в класс обобщенных в D решений уравнения (0.1).

Следствие 1.3.4. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (0.1) *удовлетворяют условиям* 1) и 2) *теоремы* 1.3.1; 2) $F(x,y) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ *на множестве* $D_+ \cup D_-$; 3) $u(x,y)$ — *обобщенное в области* D *решение уравнения* (0.1), *равное нулю на* AC. *Тогда если* $u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на* $\overline{\Gamma}$, *то* $u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* $\overline{D}$.

Эти результаты далее переносятся на уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями изменения типа

$$K(y)u_{xx} + N(x)u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = F(x,y),$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $xN(x) > 0$ при $x \neq 0$, и на уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$L_1(u) \equiv \begin{cases} u_{xx} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = \\ \qquad = F(x,y), \ \ y > 0, \\ K(y)u_{xx} + u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = \\ \qquad = F(x,y), \ \ y < 0; \end{cases}$$

здесь $K(y) < 0$ при $y < 0$, $B(x,y) < 0$ при $y \geqslant 0$;

$$L_2(u) \equiv \begin{cases} u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = \\ \qquad = F(x,y), \ \ y > 0, \\ K(y)u_{xx} + u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = \\ \qquad = F(x,y), \ y < 0, \end{cases}$$

где $A(x,y) < 0$ при $y \geqslant 0$.

В § 1.4 приведены примеры уравнений смешанного типа, для которых справедливы принципы максимума, установленные в § 1.3, и показаны применения для получения теорем единственности решения задачи T для уравнений смешанного типа со спектральным действительным параметром. Здесь только перечислим эти уравнения:

$$(\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + u_{yy} + a_0|y|^{\frac{n-1}{2}} u_x = F(x,y), \quad n > 0, \quad a_0 < \frac{n}{2};$$

$$y u_{xx} + u_{yy} + C(x,y)u = F(x,y);$$

$$(\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + (\operatorname{sgn} x)|x|^m u_{yy} = F(x,y), \quad n, m \geqslant 0;$$

$$(\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + x^m u_{yy} = F(x,y), \quad n > 0, \quad m \geqslant -\frac{n}{n+1};$$

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \frac{k}{x}u_x = F(x,y), \quad k > 0;$$

$$(\operatorname{sgn} y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = F(x,y), \quad \lambda > -\lambda_0^2;$$

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} - \lambda u = F(x,y), \quad \lambda > -\lambda_0^2;$$

$$\begin{cases} u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = 0, & y > 0, \\ -u_{xx} + u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = 0, & y < 0. \end{cases}$$

В § 1.5 изучается задача (0.2)–(0.5) для уравнения (0.1) при $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^n$, $n \geqslant 0$, $F(x,y) \equiv 0$. Пусть Γ — кривая из класса Ляпунова, $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения этой кривой, $0 \leqslant s \leqslant S$, S — длина кривой Γ, $\varphi(s) = \varphi(x(s), y(s))$. Доказана теорема.

Теорема 1.5.1. *Пусть в области D при условии, когда кривая Γ оканчивается в точках A и B сколь угодно малыми дугами «нормальной» кривой, существует регулярное решение задачи T для уравнения* (0.1). *Тогда если функция $\varphi(s)$ непрерывна на $[0, S]$ и $\psi(x)$ — достаточно гладкая* (*т. е. функция $\psi(x)$ такова, что при достаточно гладкой функции $\varphi(s)$ выполнено условие теоремы* 1.5.1) *на $[0, l/2]$, $\psi(0) = \varphi(0) = \varphi(S) = 0$, то существует единственное обобщенное решение $u(x,y)$ задачи T с граничными данными $u = \varphi$ на Γ и $u = \psi$ на AC при произвольном подходе кривой Γ к оси $y = 0$, за исключением случаев касания.*

В § 1.6 для многомерного уравнения смешанного типа

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + (\operatorname{sgn} z)u_{zz} + \frac{2p}{|z|}u_z = 0,$$

где $n \geqslant 2$, $0 \leqslant 2p < 1$, в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, полученной вращением вокруг оси z плоской области из плоскости (x_1, z), в классе его осесимметрических решений установлен принцип максимума. Показано применение этого результата при исследовании пространственного аналога задачи Трикоми.

Глава 2. Во второй главе изучены спектральные свойства решений задачи T для уравнений смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов.

В §§ 2.1, 2.2 предварительно получены интегральные представления решений краевых задач Дарбу и формулы взаимосвязи между решениями задач Дарбу и Коши для неоднородного телеграфного уравнения.

В § 2.3 доказана следующая теорема.

Теорема 2.3.2. *Если функция $u_0(x,y)$ в области D (см. § 1.1) является регулярным решением уравнения Лаврентьева–Бицадзе,*

$$u_{0xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{0yy} = 0,\ \ u_0(0,0) = 0,$$

то функция

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0\Big[\sqrt{\lambda(x^2+(\operatorname{sgn} y)y^2(1-t))}\,\Big]\,dt \quad (0.7)$$

является в области D регулярным решением уравнения

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \lambda u = 0; \quad (0.8)$$

при этом область D_+ предполагается звездной относительно начала координат.

Показано применение формулы (0.7) при исследовании задачи Трикоми для уравнения (0.8).

В § 2.4 исследуется задача Трикоми для уравнения

$$L_1 u \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda_1 u = 0, & y > 0, \\ -u_{xx} + u_{yy} - \lambda_2 u = 0, & y < 0, \end{cases} \quad (0.9)$$

где λ_1 и λ_2 — вещественные параметры, в области Ω, ограниченной отрезками AC $(x+y=0)$, CB $(x-y=l)$, BB_1 $(x=l)$, B_1A_1 $(y=d>0)$ и A_1A $(x=0)$.

Задача T. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_+ \cup A_1B_1) \cap C^2(\Omega_-); \quad (0.10)$$

$$L_1 u \equiv 0, (x,y) \in \Omega_- \cup \Omega_+ \cup A_1B_1; \quad (0.11)$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y),\ \ (x,y) \in CA \cup AA_1 \cup BB_1, \quad (0.12)$$

где φ — заданная достаточно гладкая функция.

Теорема 2.4.1. *Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи* (0.10)–(0.12) (*где* $\varphi(x,y)\equiv 0$) *из класса регулярных* [1] *в* Ω *решений уравнения* (0.9), *удовлетворяющее условию*

$$\lim_{x\to 0+0} u(x,0)u_x(x,0) = \lim_{x\to l-0} u(x,0)u_x(x,0) = 0.$$

Тогда $u(x,y)\equiv 0$ *в* Ω *при всех* $\lambda_2 \geqslant 0$ *и* $\lambda_1 > -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$.

Теорема 2.4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4.1. *Тогда* $u(x,y)\equiv 0$ *в* Ω *при всех* $\lambda_2 < 0$ *и* $\lambda_1 > -\lambda_2 - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$. *В случае* $\lambda_2 = 0$ *и* $\lambda_1 = -\frac{1}{4} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n\in\mathbb{N}$, *однородная задача* (0.10)–(0.12) (*где* $\varphi(x,y)\equiv 0$) *имеет собственные функции.*

Теорема 2.4.3. *Однородная задача* (0.10)–(0.12) (*где* $\varphi(x,y)\equiv 0$) *при* $\lambda_2 < 0$ *и* $\lambda_1+\lambda_2 \leqslant -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ *имеет неотрицательную собственную функцию, которой соответствует положительное собственное значение* $\frac{1}{\mu_0}$. *Это собственное значение простое и строго меньше абсолютной величины остальных собственных значений.*

Из этих теорем следует, что если даже $\lambda_1 \geqslant 0$, что в области параболичности гарантирует выполнение принципа экстремума для уравнения (0.9), то найдется такое значение $\lambda_2 < 0$, при котором однородная задача Т для уравнения (0.9) имеет ненулевое неотрицательное решение.

В §§ 2.5–2.8 исследуется спектральная задача Трикоми (задача T_λ) для оператора Лаврентьева–Бицадзе и обобщенного оператора Трикоми или Геллерстедта, в т. ч. вопросы расположения спектра этой задачи на комплексной плоскости (λ). В случае, когда область эллиптичности является сектором с центром в точке $A(0,0)$, найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций задачи T_λ, которая исследована на полноту и базисность, и показано их применение при построении решения задачи Трикоми в виде суммы биортогонального ряда.

Рассмотрим уравнение (0.1) при $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^n$, $A(x,y) = B(x,y) = F(x,y)\equiv 0$, $C(x,y) = \lambda K(y)$, т. е. уравнение вида

$$Lu = (\operatorname{sgn}\, y)|y|^n u_{xx} + u_{yy} - \lambda(\operatorname{sgn}\, y)|y|^n u = 0, \tag{0.13}$$

где $n = \mathrm{const} \geqslant 0$,

$$\lambda = \mu^2 = \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1^2, & y>0,\\ \lambda_2 = \mu_2^2, & y<0,\end{cases}$$

[1] См. определение 2.4.1 § 2.4 главы 2.

λ_1 и λ_2 — заданные числовые, вообще говоря, комплексные параметры в области D (см. § 1.1), ограниченной гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(l,0)$, $l > 0$, а при $y < 0$ характеристиками

$$AC\colon\ x - \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} = 0, \quad CB\colon\ x + \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} = l$$

уравнения (0.13), и поставим задачу T.

Задача T. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{0.14}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \ \ (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{0.15}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \ (x,y) \in \Gamma; \tag{0.16}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y), \ (x,y) \in AC. \tag{0.17}$$

В § 2.5 найдены условия относительно параметров λ_1 и λ_2, при которых однородная задача (0.14)–(0.17) (где $\varphi(x,y) \equiv 0$, $\psi(x,y) \equiv 0$) имеет только нулевое решение.

Пусть в уравнении (0.13) $n = 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.5.1. *Если в классе регулярных в области D решений уравнения* (0.13) *существует решение задачи* T, *т. е. задачи* (0.14)–(0.17), *то оно единственно при всех $\lambda_2 \geqslant 0$ и $\lambda_1 > -p = -4/9 \operatorname{mes} D_+$, где $\operatorname{mes} D_+$ — мера области D_+.*

Теорема 2.5.2. *Если в классе регулярных в области D решений уравнения* (0.13) *существует решение задачи* T, *то оно единственно при всех $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 > -\lambda_2 - p$.*

Пусть теперь λ_1 и λ_2 являются комплексными числами: $\lambda_1 = \lambda_{11} + i\lambda_{12}$, $\lambda_2 = \lambda_{21} + i\lambda_{22}$, $\mu_1 = \mu_{11} + i\mu_{12}$, $\mu_2 = \mu_{21} + i\mu_{22}$, $\lambda_{ij}, \mu_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,2$.

Теорема 2.5.3. *Если в классе регулярных в D решений уравнения* (0.13) *существует решение задачи* T, *то оно единственно при всех λ_1 и λ_2, удовлетворяющих неравенству*

$$2\operatorname{Re}\lambda_1 + \operatorname{Re}\lambda_2 > |\lambda_2| - 2p.$$

Пусть теперь в уравнении (0.13) $n > 0$. В этом случае установлены следующие утверждения.

Теорема 2.5.4. *Если в классе регулярных в области D решений уравнения* (0.13) *существует решение задачи* Т, *то оно единственно при всех $\lambda_2 \geqslant 0$ и $\lambda_1 > -p_1 = -\dfrac{1}{C_{D_+}}$, где C_{D_+} — положительная постоянная, зависящая только от размеров области D_+.*

Теорема 2.5.5. *Если в классе регулярных в области D решений уравнения* (0.13) *существует решение задачи* Т, *то оно единственно при всех $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 > -\lambda_2 - p_1$.*

Теорема 2.5.6. *Если в классе регулярных в D решений уравнения* (0.13) *существует решение задачи* Т, *то оно единственно при всех комплексных λ_1 и λ_2, удовлетворяющих неравенству*

$$2\mathrm{Re}\,\lambda_1 + \mathrm{Re}\,\lambda_2 > |\lambda_2| - 2p_1.$$

В § 2.6 исследуются на базисность системы $\left\{\sin\left(n - \dfrac{\beta}{2}\right)\theta\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\cos\left(n - \dfrac{\beta}{2}\right)\theta\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\sin\left(n - \dfrac{\beta}{2}\right)\theta + \dfrac{\gamma}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, где $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, в пространстве $L_p[0,\pi]$ при всех $p > 1$. Установлены необходимые и достаточные относительно параметра β условия базисности этих систем в $L_p[0,\pi]$. Изучены вопросы разложения функции в биортогональный ряд и сходимости ряда в $L_p[0,\pi]$ и $C[0,\pi]$.

В §§ 2.7, 2.8 в случае, когда область эллиптичности является сектором с центром в точке $A(0,0)$, найдены собственные значения λ_{nm} как нули функции Бесселя и построена соответствующая система собственных функций спектральной задачи T_λ (где $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Показано, что система собственных функций задачи T_λ полна и образует базис в $L_2(D_+)$, $L_2(D_-)$, но не полна в $L_2(D)$.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq \lambda_{nm}$, где λ_{nm} — собственные значения задачи T_λ, на основании системы собственных функций решение задачи Т построено в виде суммы ряда.

Глава 3. В этой главе получены утверждения, которые представляют собой дальнейшее развитие ранее доказанного А.В. Бицадзе принципа максимума модуля решений одной эллиптической системы для других классов систем дифференциальных уравнений в частных производных; установлены новые принципы экстремума для различных типов систем дифференциальных уравнений с частными производными. Показаны применения этих результатов при исследовании задачи Трикоми для некоторых систем уравнений смешанного типа.

В § 3.1 для системы

$$LU \equiv \sum_{p,q=1}^{m} A^{pq} U_{pq} + \sum_{p=1}^{m} B^{p} U_p + CU = 0, \tag{0.18}$$

где A^{pq}, B^p, C — заданные вещественные матрицы порядка $n \times n$, $n \geqslant 2$, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $U_p = \partial U/\partial x_p$, $U_{pq} = \partial^2 U/\partial x_p \partial x_q$, заданной в области D пространства $\mathbb{R}^m$ точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, установлены внутренние и граничные принципы максимума модуля $|U| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2(x)\Big)^{1/2}$ ее регулярных решений. Наряду с системой (0.18) рассмотрим уравнение

$$M(|U|) = (e, L|U|e) = \sum_{p,q} (e, A^{pq} e)|U|_{pq} + \\ + \sum_p |U|_p \Big[(e, B^p e) + 2\sum_p (e, A^{pq} e_q)\Big] + (e, Le)|U| = 0, \quad (0.19)$$

где $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $e_i = u_i/|U|$; (U, V) — означает скалярное произведение.

Пусть коэффициенты уравнения (0.19) локально ограничены и квадратичная форма $\sum\limits_{p,q} (e, A^{pq} e)\xi_p \xi_q$ неотрицательно определена в области $G = D \setminus \{x \in D\colon\ |U(x)| = 0\}$.

Теперь для примера сформулируем одну из четырех теорем из данного параграфа.

Теорема 3.1.2. *Пусть*: 1) *оператор M локально равномерно эллиптичен и* $(e, Le) \leqslant 0$ *в* G; 2) $U(x)$ — *регулярное в D решение системы* (0.18) *и* $U(x) \not\equiv \mathrm{const}$. *Тогда модуль $|U(x)|$ не может достигать положительного локального максимума ни в одной точке области D.*

Здесь приведены примеры, для которых выполнены условия доказанных принципов максимума, а также примеры, выясняющие существенность наложенных условий.

В § 3.2 для эллиптической системы

$$L_i(U) \equiv a_{ipq} u_{ix_p x_q} + b_{ip} u_{ix_p} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik} u_k = f_i, \quad (0.20)$$

где $i = \overline{1, n}$, $n \geqslant 2$, индексы p и q означают суммирование по этим индексам от 1 до m; $a_{ipq}(x)$, $b_{ip}(x)$, $c_{ik}(x)$ — заданные в области $D \subset \mathbb{R}^m$ вещественные локально ограниченные функции, причем для каждого i: $a_{ipq}(x) = a_{iqp}(x)$ и квадратичная форма $a_{ipq}(x)\xi_p \xi_q \geqslant 0$ в области D, установлены новые принципы экстремума ее регулярных решений.

Для примера сформулируем здесь две теоремы.

Теорема 3.2.3. *Пусть в области D оператор L_i при каждом i локально равномерно эллиптичен и $c_{ik} \geqslant 0$ при $k \neq i$, $c_{ii} + \sum\limits_{k\neq i} c_{ik} \leqslant 0$, $f_i \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ и $U(x)$ — регулярное в D решение системы* (0.20); *при этом функции $u_i(x)$ не равны постоянной в любой подобласти области D. Тогда если $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x) = u_j(\overline{x}) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i(x) = u_j(\overline{x}) < 0)$, то $u_j(\overline{x})$ достигается только на границе области D.*

Теорема 3.2.7. *Пусть*: 1) *выполнены условия теоремы* 3.2.3; 2) $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x) = u_j(\overline{x}) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i(x) = u_j(\overline{x}) < 0)$, $\overline{x} \in \partial D$; 3) *граница области D удовлетворяет условию конуса* [1]). *Тогда для любого $\varepsilon \in [0, \alpha]$ в любой окрестности $V \subset \partial D$ точки $\overline{x}$ найдется точка $x' \in V$ такая, что для любого вектора l, исходящего из точки x' и образующего с вектором $k(x')$ угол, не больший $(\alpha - \varepsilon)$, справедливо неравенство*

$$\frac{\partial u_j(x')}{\underline{\partial l}} < 0 \left(\frac{\overline{\partial u_j(x')}}{\partial l} > 0 \right),$$

где $k(x)$ — непрерывное единичное векторное поле, заданное на ∂D.

В § 3.3 для гиперболической системы

$$L_0(U) \equiv U_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)U_\xi + b(\xi,\eta)U_\eta + c(\xi,\eta)U = 0, \tag{0.21}$$

где a, b — числовые функции, c — квадратная матрица из числовых функций $c_{ik}(\xi,\eta)$, $i,k = \overline{1,n}$, $n \geqslant 2$, заданной в области Δ (см. § 1.2 главы 1), установлен принцип максимума модуля $|U(\xi,\eta)|$ в классе ее регулярных и обобщенных решений.

Пусть коэффициенты системы (0.21) a, b, c_{ik} и a_ξ непрерывны на $\Delta \cup A_0C_0$ и при $(\xi,\eta) \in \Delta$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta) \sqrt{\sum_{i=1}^n \Big(h_i^2 + \sum_{k\neq i} c_{ik}^2 \Big)}\, dt > 0, \tag{0.22}$$

$$\begin{cases} h_i = a_\xi + ab - c_{ii} = a_\xi + ab - c_0 = h, \\ \alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta) \left[|h| + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{k\neq i} c_{ik}^2} \right] dt > 0, \end{cases} \tag{0.23}$$

где $\alpha = \beta a$, $\beta = \exp \int b\, d\xi$.

---

[1]) См. определение 3.1.1 главы 3.

Теорема 3.3.1. *Пусть коэффициенты системы* (0.21) *в области* Δ *удовлетворяют отмеченным выше условиям гладкости и условию* (0.22) *или* (0.23), *а* $U(\xi,\eta)$ — *регулярное в* Δ *решение системы* (0.21), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Delta}}|U(\xi,\eta)|>0$, *то он достигается на* $\overline{A_0B_0}$.

Это утверждение переносится и в класс обобщенных в Δ решений системы (0.21).

В § 3.4 (аналогично § 3.2) для гиперболической системы

$$L_i(U)\equiv u_{i\xi\eta}+a_i(\xi,\eta)u_{i\xi}+b_i(\xi,\eta)u_{i\eta}+\sum_{k=1}^{n}c_{ik}(\xi,\eta)u_k=f_i(\xi,\eta), \quad (0.24)$$

где $i=\overline{1,n}$, $n\geqslant 2$; a_i, b_i, c_{ik}, f_i — числовые функции, заданной в области Δ, установлены новые экстремальные свойства ее регулярных и обобщенных решений.

Пусть $\alpha_i=a_i\beta_i$, $\beta_i=\exp\int b_i d\xi$, $h_i=a_{i\xi}+a_ib_i-c_{ii}$; функции a_i, b_i, c_{ik} и $a_{i\xi}$, непрерывны на множестве $\Delta\cup A_0C_0$ и при $(\xi,\eta)\in\Delta$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h_i\geqslant 0,\ c_{ik}\geqslant 0 \quad \text{при} \quad k\neq i,\\ \alpha_i(0,\eta)+\int\limits_0^{\xi}\beta_i(t,\eta)\sum\limits_{k=1}^{n}c_{ik}(t,\eta)\,dt>0; \end{cases} \quad (0.25)$$

$$\alpha_i(\xi,\eta)-\int\limits_0^{\xi}\beta_i(t,\eta)\left(|h_i|+\sum_{k\neq i}^{n}|c_{ik}|\right)dt>0. \quad (0.26)$$

Предполагается, что функции $f_i(\xi,\eta)$ интегрируемы по ξ на каждом отрезке $[0,\xi_0]$ прямой $\eta=\eta_0$, $0<\xi_0<\eta_0<l$.

Теорема 3.4.1. *Пусть*: 1) *коэффициенты системы* (0.24) *и ее правая часть обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (0.25); 2) $f_i\leqslant 0$ $(f_i\geqslant 0)$ *в области* Δ; 3) $U(\xi,\eta)$ — *регулярное в* Δ *решение системы* (0.24), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_i\max\limits_{\overline{\Delta}}u_i>0$ $(\min\limits_i\min\limits_{\overline{\Delta}}u_i<0)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Теорема 3.4.2. *Пусть*: 1) *коэффициенты системы* (0.24) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (0.26); 2) $f_i(\xi,\eta)\equiv 0$ *в* Δ; 3) $U(\xi,\eta)$ — *регулярное в* Δ *решение системы* (0.24), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_i\max\limits_{\overline{\Delta}}|u_i(\xi,\eta)|>0$, *то этот максимум достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Эти утверждения распространяются на класс обобщенных на области Δ решений системы (0.24).

В § 3.5 для системы уравнений смешанного типа

$$LU \equiv K(y)U_{xx} + U_{yy} + AU_x + BU_y + CU = 0, \tag{0.27}$$

где $K(y)$, $A(x,y)$, $B(x,y)$ — числовые функции, $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $C(x,y)$ — квадратная матрица порядка n, $n \geqslant 2$, заданной в области D пространства $\mathbb{R}^2$ переменных (x,y) (см. § 1.1 главы 1), установлен принцип максимума модуля $|U(x,y)|$ ее регулярных и обобщенных решений.

Теорема 3.5.1. *Пусть*: 1) *коэффициенты системы* (0.27) *в области D_+ ограничены и $C(x,y)$ — неположительно определенная матрица*; 2) *коэффициенты системы* (0.27) *в области D_- в характеристических координатах (ξ,η) удовлетворяют условиям теоремы* 3.3.1; 3) *$U(x,y)$ — регулярное в D решение системы* (0.27), *равное нулю на характеристике AC. Тогда если $\max\limits_{\overline{D}}|U| > 0$, то этот максимум достигается на кривой $\overline{\Gamma}$.*

Эта теорема переносится на класс обобщенных в D решений системы (0.27). Далее показаны применения теоремы 3.5.1 для получения теорем единственности решения задачи Трикоми для системы (0.27), уравнения Лаврентьева–Бицадзе с комплексным спектральным параметром и для одной нелинейной системы уравнений смешанного типа.

В § 3.6 для системы уравнений смешанного типа

$$L_iU \equiv K(y)u_{ixx} + u_{iyy} + A_iu_{ix} + B_iu_{iy} + \sum_{k=1}^{n} C_{ik}u_k = F_i, \tag{0.28}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y)$, $A_i(x,y)$, $B_i(x,y)$, $C_{ik}(x,y)$, $F_i(x,y)$ — известные числовые функции, $i = \overline{1,n}$, $n \geqslant 2$, заданной в области D изучаются новые экстремальные свойства ее регулярных и обобщенных решений. Показаны применения этих результатов при изучении следующей задачи Трикоми.

Задача Т. *Найти функции $u_i(x,y)$, удовлетворяющие условиям*:

$$u_i(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{0.29}$$

$$L_iU \equiv F_i(x,y), (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{0.30}$$

$$u_i(x,y) = \varphi_i(x,y), \ \ (x,y) \in \Gamma; \tag{0.31}$$

$$u_i(x,y)|_{AC} = \psi_i(x), \ \ 0 \leqslant x \leqslant l/2, \tag{0.32}$$

где φ_i, ψ_i — заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 3.6.1. *Пусть*: 1) *в области* D_+ *коэффициенты системы* (0.28) *ограничены и*

$$C_{ik} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad k \neq i, \quad C_{ii} + \sum_{k \neq i} C_{ik} \leqslant 0;$$

2) *коэффициенты системы* (0.28) *и функции* $F_i(x, y)$ *в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условиям теоремы* 3.4.1; 3) $F_i(x, y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* $D_+ \cup D_-$; 4) $U(x, y)$ — *регулярное в* D *решение системы* (0.28), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x, y) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i(x, y) < 0)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Теорема 3.6.2. *Пусть*: 1) *в области* D_+ *коэффициенты системы* (0.28) *ограничены и* $C_{ii} + \sum_{k \neq i} |C_{ik}| \leqslant 0$; 2) *коэффициенты системы* (0.28) *в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условиям теоремы* 3.4.2; 3) $F_i(x, y) \equiv 0$ *в* $D_+ \cup D_-$; 4) $U(x, y)$ — *регулярное в* D *решение системы* (0.28), *равное нулю на* AC. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} |u_i(x, y)| > 0$, *то этот максимум достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Теоремы 3.6.1 и 3.6.2 переносятся на класс обобщенных в области D решений системы (0.28).

Следствие 3.6.1. *Если коэффициенты системы* (0.28) *удовлетворяют условиям теоремы* 3.6.1 *или* 3.6.2 *и в классе обобщенных в* D *решений системы* (0.28) *существует решение задачи* T, *то оно единственно.*

Следствие 3.6.2. *Пусть*: 1) *коэффициенты системы* (0.28) *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 3.6.1; 2) $F_i(x, y) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ *в* $D_+ \cup D_-$; 3) $U(x, y)$ — *обобщенное в* D *решение системы* (0.28), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $u_i \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на* $\overline{\sigma}$, *то* $u_i \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* $\overline{D}$.

В § 3.7 изучается вопрос о разрешимости задачи (0.29)–(0.32) для системы (0.28) при $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^m$, $m \geqslant 0$ и $F_i \equiv 0$, т. е.

$$L_i U \equiv (\operatorname{sgn} y)|y|^m u_{ixx} + u_{iyy} + A_i u_{ix} + B_i u_{iy} + \sum_{k=1}^{n} C_{ik} u_k = 0.$$

Пусть коэффициенты этой системы $A_i(x, y)$, $B_i(x, y) \in C^1(\overline{D}_+) \cap C^1(\overline{D}_-)$, $C_{ik}(x, y) \in C(\overline{D}_+) \cap C(\overline{D}_-)$ и удовлетворяют условиям теоремы 3.6.1; Γ — из класса Ляпунова, $\varphi_i(s) = \varphi_i(x(s), y(s))$, $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ, $0 \leqslant s \leqslant S$, S — длина кривой Γ.

Теорема 3.7.1. *Пусть в области D при условии, когда кривая Γ оканчивается в точках A и B сколь угодно малыми дугами «нормальной» кривой, существует регулярное решение задачи* (0.29)–(0.32). *Тогда если функции $\varphi_i(s)$ непрерывны на $[0, S]$ и $\psi_i(x)$ — достаточно гладкие* (*т. е. функции $\psi_i(x)$ таковы, что при достаточной гладкости функции $\varphi_i(s)$ выполнено условие теоремы* 3.7.1) *на* $[0, l/2]$, $\varphi_i(0) = \varphi_i(S) = \psi_i(0) = 0$, *то существует единственное обобщенное решение $u_i(x, y)$ задачи T с граничными данными $u_i = \varphi_i$ на Γ и $u_i = \psi_i$ на AC при любом подходе кривой σ к оси $y = 0$, за исключением случаев касания.*

Глава 4. Эта глава посвящена задаче Франкля (задаче Ф) для уравнения

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u = 0, \tag{0.33}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D, ограниченной отрезком AA' оси $x = 0$, $-a < y < a$, $a > 0$; характеристикой $A'C$ уравнения (0.28), $A' = (0, -a)$, $C = (c, 0)$; отрезком CB оси $y = 0$, $c \leqslant x \leqslant b$, и кривой Γ из класса Ляпунова с концами в точках $B = (b, 0)$ и $A = (0, a)$, лежащей в первой четверти.

Здесь:

1) развитием метода вспомогательных функций получены новые теоремы единственности решения задачи Ф для уравнения (0.33) при более слабых ограничениях на кривую Γ, функцию $K(y)$ и класс решений;

2) путем установления новых качественных свойств обобщенно аналитических функций окончательно решена проблема единственности решения задачи для двух классов уравнений смешанного типа, среди которых уравнение Чаплыгина, для которого в 1956 году и была поставлена задача;

3) найдены собственные значения и соответствующие собственные функции спектральной задачи Франкля для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным комплексным параметром и изучены их свойства;

4) показаны применения этих результатов при разрешимости задачи Ф.

В § 4.1 приводится постановка задачи Франкля для уравнения (0.33) и обзор работ, посвященных этой задаче. Пусть $D_1 = D \cup \{y > 0\}$, OP — часть характеристики уравнения (0.33), выходящей из точки $O = (0, 0)$ до пересечения с $A'C$ в точке P; D_2 — область, ограниченная кривыми OP, PC и OC; D_3 — область, ограниченная кривыми OA', $A'P$ и PO.

Задача Ф. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup OA \cup OA' \setminus OP) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3); \quad (0.34)$$

$$Lu \equiv 0, (x,y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3; \quad (0.35)$$

$$u(x,y) = \varphi_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma; \quad (0.36)$$

$$u(x,0) = \varphi_2(x), \quad c \leqslant x \leqslant b; \quad (0.37)$$

$$u(0,y) - u(0,-y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant a; \quad (0.38)$$

$$u_x(0,y) = 0, \quad 0 < |y| < a, \quad (0.39)$$

где φ_i — заданные достаточно гладкие функции, $i = 1,2,3$, $\varphi_2(b) = \varphi_1(0,b)$.

В § 4.2 получены теоремы единственности решения задачи Ф в классе регулярных в D решений уравнения (0.33).

Определение 4.2.1. Под регулярным в области D решением уравнения (0.33) будем понимать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (0.34) и (0.35), и, кроме того, функция $-u_y dx + K u_x dy$ суммируема вдоль кривых $A'C$, OB, Γ и обеих сторон характеристики OP.

Пусть $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внутренней нормали к кривой $A'C \cup \Gamma$, $n_1(s) = -dy/ds$, $n_2(s) = -dx/ds$, $y_{\min} = \min y$, $y_{\max} = \max y$ в $\overline{D}$.

Теорема 4.2.1. *Пусть*: 1) *на кривой* Γ *отсутствуют точки, при переходе которых* $n_1(s)$ *меняет знак, а* $n_2(s) = 1$; 2) $K(y) \in C[y_{\min},0] \cap C^1[y_{\min},0] \cap C[0,y_{\max}] \cap C^1[0,y_{\max}]$, $K(y) + K(-y) \geqslant 0$ *при* $0 \leqslant y \leqslant a$ *и* $x = 0$; 3) *функция* $\lambda(y)$ *такова, что существует решение уравнения Риккати*

$$\mu'(y) + \mu^2(y) = \lambda(y), \quad y_{\min} < y < y_{\max}, \quad (0.40)$$

из класса $C^1[y_{\min}, y_{\max}]$. *Тогда если в классе регулярных в D решений уравнения* (0.33) *существует решение задачи* (0.34)–(0.39), *то оно единственно.*

В частности, когда $\lambda(y) = \mathrm{const}$, из уравнения (0.40) нетрудно найти $\mu(y)$ и показать справедливость теоремы 4.2.1 при всех λ, удовлетворяющих неравенству

$$\lambda > -\pi^2/(y_{\max} - y_{\min})^2. \quad (0.41)$$

В теореме 4.2.1 присутствует некоторое геометрическое ограничение на кривую Γ, которое слабее, чем ранее известные условия. В последующих утверждениях получена единственность решения задачи Ф без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Γ.

В области D рассмотрим уравнение (0.33) при $\lambda(y) \equiv 0$, т. е. уравнение типа Чаплыгина

$$K(y) u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (0.42)$$

Теорема 4.2.2. *Пусть*: 1) *выполнено условие* 2) *теоремы* 4.2.1; 2) $u(x, y)$ — *решение однородной задачи* Φ *из класса регулярных в области* D *решений уравнения* (0.42). *Тогда* $u(x, y) \equiv 0$ *в* D.

Рассмотрим уравнение (0.33) при $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^m$, $m \geqslant 0$, $\lambda(y) = \lambda = \mathrm{const}$, т. е. уравнение

$$(\operatorname{sgn} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0. \tag{0.43}$$

Теорема 4.2.4. *Если в классе регулярных в* D *решений уравнения* (0.43) *существует решение задачи* Φ, *то оно единственно при всех* λ, *удовлетворяющих неравенству* (0.41).

В § 4.3 найдены собственные значения и соответствующие собственные функции спектральной задачи Франкля для уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \lambda \operatorname{sgn}(x + y)u = 0,$$

где λ — комплексный параметр, в случае, когда область D_1 является частью круга: $x^2 + y^2 < a^2$, $x, y > 0$, $a = \mathrm{const} > 0$.

Задача Φ_λ. *Найти значения параметра* λ *и соответствующие им функции* $u(x, y)$, *удовлетворяющие условиям*:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup AO \cup OA' \setminus OP) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3);$$
$$Lu \equiv 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3;$$
$$u(x, y) = 0, \ (x, y) \in CB \cup \Gamma; \quad u_x(0, y) = 0, \quad 0 < |y| < a;$$
$$u(0, y) - u(0, -y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant a.$$

На основании результатов § 2.1 задача Φ_λ сведена к эллиптической задаче на собственные значения: *найти значения параметра* λ *и соответствующие им собственные функции* $u(x, y)$, *удовлетворяющие условиям*:

$$u(x, y) \in C(\overline{D_1}) \cap C^1(D_1 \cup OA \cup OC) \cap C^2(D_1);$$
$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (x, y) \in D_1;$$
$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in CB \cup \Gamma; \quad u_x(0, y) = 0, \quad 0 < |y| < a;$$
$$u(x, 0) - u(0, x) = \int_0^x u_y(t, 0) J_0[\sqrt{\lambda}\,(x - t)]\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода.

В случае, когда точки C и B совпадают, $a = c = b = 1$ и кривая Γ является частью окружности $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$, методом разделения переменных найдены собственные значения и соответствующие собственные функции этой задачи, затем и задачи Φ_λ. Далее изучены свойства системы собственных функций задачи Φ_λ на полноту и базисность.

В §§ 4.4 и 4.5 на основании предыдущих результатов получены теоремы существования решения задачи Ф для некоторых классов уравнений смешанного типа.

Глава 5. Данная глава посвящена обобщенной задаче Трикоми для уравнения смешанного типа (0.33). Аналогично главе 4 здесь путем развития метода вспомогательных функций и изучения качественных свойств решений уравнения (0.33) в области эллиптичности получены новые теоремы единственности решения обобщенной задачи Трикоми и показаны их применения.

В § 5.1 дается постановка обобщенной задачи Трикоми (задачи M по терминологии А.В. Бицадзе) и обзор работ, посвященных этой задаче.

В § 5.2 рассмотрим уравнение (0.33) в области D с границей ∂D, состоящей при $y > 0$ из спрямляемой жордановой кривой Γ с концами в точках $A = (0, 0)$ и $B = (l, 0)$, $l > 0$, а при $y < 0$ из кусочно-гладкой кривой AC: $K(y)n_1^2 + n_2^2 \geqslant 0$, $n_1(s) \geqslant 0$, и характеристики CB: $K(y)n_1^2 + n_2^2 = 0$, $n_1(s) < 0$, уравнения (0.33), где $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внутренней нормали к границе области.

Задача M. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{0.44}$$

$$Lu \equiv 0, (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{0.45}$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma; \tag{0.46}$$

$$u(x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \gamma, \tag{0.47}$$

где φ, ψ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(A) = \psi(A)$, $\gamma = AC$, $D_+ \cap \{y > 0\}$, $D_- \cap \{y < 0\}$.

Определение 5.2.1. Регулярным в области D решением уравнения (0.33) будем называть функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (0.44), (0.45) и, кроме того, функция $2u_x u_y dx \pm (Ku_x^2 - u_y^2)\, dy$ суммируема вдоль кривых Γ, AC, CB и $u(x, y) \in C^1(D_- \cup AC)$.

Теорема 5.2.1. *Пусть*: 1) *кривая Γ — из класса Ляпунова и на ней отсутствуют точки, при переходе которых $n_1(s)$ меняет знак, а $n_2(s) = 1$;* 2) $K(y) \in C[y_{\min}, 0] \cap C^1[y_{\min}, 0] \cap C[0, y_{\max}] \cap C^1[0, y_{\max}]$; 3) *функция $\lambda(y)$ такова, что существует решение $\mu(y)$ уравнения Риккати*

$$\mu'(y) + \mu^2(y) = \lambda(y), \quad y_{\min} < y < y_{\max}, \tag{0.48}$$

из класса $C^1[y_{\min}, y_{\max}]$. Тогда если в классе регулярных в D решений уравнения (0.33) *существует решение задачи* (0.44)–(0.47), *то оно единственно.*

В частности, когда $\lambda(y) = \mathrm{const}$, то теорема 5.2.1 справедлива при всех λ, удовлетворяющих неравенству (0.41).

В § 5.3 рассматривается вариант задачи M, предложенный Л.В. Овсянниковым, и доказывается единственность решения задачи M без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Γ.

Рассмотрим уравнение типа Чаплыгина,

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad yK(y) > 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0, \tag{0.49}$$

в области D (см. § 5.1), где кривая AC в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой AC_1, а затем параллельна оси $y = 0$ до пересечения в точке C с характеристикой CB.

Определение 5.3.1. Регулярным в области D решением уравнения (0.49) будем называть функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (0.44), (0.45), и дополнительно потребуем, чтобы функция $-u_y dx + Ku_x dy$ была суммируемой вдоль кривых AC, CB, Γ и AB.

Теорема 5.3.1. *Пусть*: 1) *кривая* Γ — *из класса Ляпунова*; 2) $K(y) \in C[y_{\min}, 0] \cap C^1[y_{\min}, 0] \cap C[0, y_{\max}] \cap C^1[0, y_{\max}]$; 3) $u(x, y)$ — *решение однородной задачи M из класса регулярных в D решений уравнения* (0.49); 4) *точка A не является предельной точкой множества* $\{(x, y) \in \Gamma \cup A\colon\ K(y)u_x^2 + u_y^2 = 0\}$. *Тогда* $u(x, y) \equiv 0$ *в* $\overline{D}$.

Отметим, что условие 4) теоремы 5.3.1 выполнено, например, когда при малых $y \leqslant 0$ функция $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^m$, $m \geqslant 0$, или удовлетворяет условиям теорем Франкля–Проттера о единственности решения задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина.

В этом же параграфе в области D рассматривается еще один класс уравнений смешанного типа:

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u = 0, \quad m > 0. \tag{0.50}$$

Теорема 5.3.2. *Пусть*: 1) *кривая* Γ — *из класса Ляпунова*; 2) *функция* $\lambda(y)$ *такова, что существует решение* $\mu(y)$ *уравнения* (0.48) *из класса* $C^1[y_{\min}, y_{\max}]$; 3) $u(x, y)$ — *решение однородной задачи M для уравнения* (0.50) *из класса его регулярных в D решений. Тогда* $u(x, y) \equiv 0$ *в* D.

В случае $\lambda(y) = \text{const}$ теорема 5.3.2 справедлива при всех λ, удовлетворяющих неравенству (0.41).

В § 5.4 результаты § 5.3 перенесены на случай задачи Трикоми для уравнений (0.49) и (0.50).

В §§ 5.5 и 5.6 на основании предыдущих результатов получены теоремы существования решения задачи M для некоторых классов уравнений смешанного типа.

Основные результаты данной монографии опубликованы в статьях автора [83–86, 172–194], которые были получены при прохождении докторантуры на кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова при активной поддержке $\boxed{\text{А.В. Бицадзе}}$, В.А. Ильина и Е.И. Моисеева. Пользуясь возможностью, выражаю им глубокую благодарность.

В данной работе также приведены результаты Е.И. Моисеева и С.М. Пономарева, опубликованные в работах [134–146, 161–163] по спектральным свойствам решений краевых задач для уравнений смешанного типа.

Во второе издание данной монографии (первое издание вышло в издательстве «Palmarium Academic Publishing», Германия, в 2012 г.) внесены небольшие дополнения и изменения с учетом новых публикаций и были исправлены опечатки. При подготовке книги ко второму изданию оказали помощь мои ученики-коллеги, кандидаты физико-математических наук, доценты А.А. Гималтдинова (Карамова) и Ю.К. Сабитова. Им выражаю свою благодарность. Отмечу также, что результаты § 2.5 принадлежат также Ю.К. Сабитовой.

Буду благодарен всем, кто пришлет свои замечания и пожелания на электронный адрес: Sabitov_fmf@mail.ru.

Глава 1

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1.1. Краткий обзор известных результатов

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, \qquad (1.1.1)$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y), A(x,y), B(x,y), C(x,y), F(x,y)$ — заданные достаточно гладкие функции в области D (см. рис. 1.1.1), ограниченной простой кривой Жордана Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A = (0,0)$ и $B = (l, 0)$, $l > 0$, и характеристиками

$$AC\colon\ \xi = x + \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt = 0, \quad CB\colon\ \eta = x - \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt = l,$$

где $K(y) \in C[y_c, 0] \cap C^2[y_c, 0)$, y_c — ордината точки C, уравнения (1.1.1), при $y < 0$, и следующую краевую задачу.

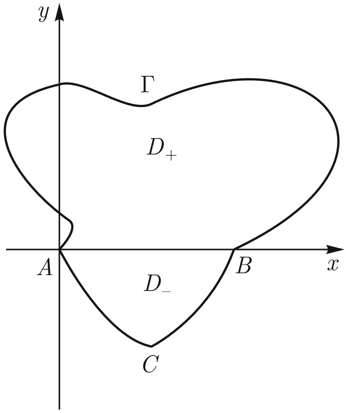

Рис. 1.1.1

Задача Трикоми (Задача Т). *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{1.1.2}$$

$$Lu(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{1.1.3}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma; \tag{1.1.4}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in AC, \tag{1.1.5}$$

где φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(A) = \psi(A)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

При исследовании задачи Т и других аналогичных краевых задач важную роль играет принцип экстремума. Впервые принцип экстремума был сформулирован в 1950 году А.В. Бицадзе [15] для уравнения (1.1.1) при $K(y) = \operatorname{sgn} y$, $A = B = C = F \equiv 0$. На год позже этот принцип был получен в работе Жермена и Бадера [241] для уравнения Трикоми, т. е. для уравнения (1.1.1) при $K(y) = y$, $A = B = C = F \equiv 0$.

В 1952 году в своей диссертации К.И. Бабенко [5] доказал справедливость принципа экстремума для уравнения (1.1.1) в некотором классе его обобщенных решений при $K(y) = y$, $A(x,0) = B(x,0) = 0$, $F(x,y) \equiv 0$ и достаточно малой длине линии изменения типа уравнения.

В 1953 году в работе Агмона, Ниренберга и Проттера [229] был установлен принцип экстремума для гиперболических уравнений и на его основе принцип экстремума для уравнения (1.1.1) при достаточно сильных ограничениях на коэффициенты в области гиперболичности и класс решений.

Дальнейшие исследования в этом направлении велись С.П. Пулькиным [166–168], В.Ф. Волкодавовым [35–37], М.М. Смирновым [201], А.М. Нахушевым [151], М.С. Салахитдиновым [195], И.В. Майоровым [122–125], Т.Д. Джураевым [51, 52], Ю.М. Крикуновым [102, 103], М.Е. Лернером [115, 116], В.И. Жегаловым [63–65] и их учениками. В основном исследования проводились по двум направлениям:

1) установление принципа экстремума для общих уравнений смешанного типа с одной линией изменения типа с целью ослабления тех ограничений, которые возникли в работах К.И. Бабенко и Агмона, Ниренберга и Проттера;

2) установление принципа экстремума для исследования задачи Т и других аналогичных краевых задач для известных модельных уравнений смешанного и смешанно-составного типов с одной или несколькими линиями изменения типа.

Такой интерес к доказательству справедливости принципа экстремума для уравнений смешанного типа объясняется тем, что: во-первых, из него сразу же следует единственность решения задачи Т, а, в свою очередь, теорема единственности играет решающую роль при доказательстве существования решения задачи Т методом интегральных уравнений, во-вторых, он, как показал А.В. Бицадзе [18], позволяет построить альтернирующий процесс типа Шварца для решения задачи Т при довольно общих предположениях относительно кривой Г при подходе к оси $y = 0$; в-третьих, принцип экстремума находит применение при построении спектральной теории задачи Трикоми [75, 76, 42, 139].

В этой главе установлены принципы максимума для уравнения (1.1.1) в классе его регулярных и обобщенных решений в областях гиперболичности, эллиптичности и (в целом) в смешанной области D при более слабых ограничениях на коэффициенты уравнения (1.1.1). На основе экстремальных свойств решений уравнения (1.1.1) установлены также принципы максимума и для других классов уравнений смешанного типа. По существу, здесь построена некая теория экстремальных свойств решений уравнений смешанного типа на плоскости, из которой следуют ранее известные результаты и ряд нерешенных вопросов по теории задачи Трикоми и других аналогичных краевых задач.

§ 1.2. Принцип максимума для уравнений гиперболического типа

1.2.1. Принцип максимума в классе регулярных решений. Рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$L_0 u \equiv u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)u_\xi + b(\xi,\eta)u_\eta + c(\xi,\eta)u = f(\xi,\eta) \tag{1.2.1}$$

в характеристическом треугольнике Δ (см. рис. 1.2.1), ограниченном отрезками прямых $\xi = 0$, $\eta = \xi$ и $\eta = l$.

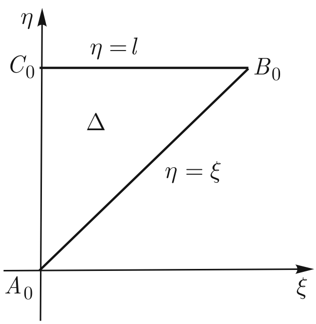

Рис. 1.2.1

Пусть $A_0 = (0,0)$, $B_0 = (l,l)$, $C_0 = (0,l)$ — вершины треугольника Δ; $\alpha(\xi,\eta) = a(\xi,\eta)\beta(\xi,\eta)$, $\beta(\xi,\eta) = \exp\int b(\xi,\eta)\,d\xi$, $h(\xi,\eta) = a_\xi(\xi,\eta) + a(\xi,\eta)b(\xi,\eta) - c(\xi,\eta)$.

Пусть функции $a(\xi,\eta)$, $a_\xi(\xi,\eta)$, $b(\xi,\eta)$ и $c(\xi,\eta)$ непрерывны в $\Delta \cup \cup A_0C_0$ и при $(\xi,\eta) \in \Delta$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h(\xi,\eta) \geqslant 0, \\ \alpha(0,\eta) + \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)c(t,\eta)\,dt > 0; \end{cases} \tag{1.2.2}$$

$$\alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)|h(t,\eta)|\,dt > 0. \tag{1.2.3}$$

Отметим, что в условиях (1.2.2) и (1.2.3) интегральные неравенства могут быть нестрогими (т. е. $\geqslant 0$), но в этом случае на каждом отрезке $[0,\xi]$ характеристики $\eta = \mathrm{const}$ множество точек, в которых $h(t,\eta) = 0$, имеет меру нуль.

Предполагается, что правая часть $f(\xi,\eta)$ интегрируема по ξ на каждом отрезке $[0,\xi_0]$ характеристики $\eta = \eta_0$, $0 < \xi_0 < \eta_0 < l$.

Определение 1.2.1. Регулярным решением уравнения (1.2.1) в области Δ назовем функцию $u(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям:

1) $u \in C(\overline{\Delta}) \wedge C^1(\Delta)$, $u_{\xi\eta} \in C(\Delta)$, $L_0u \equiv f$ в Δ;

2) производная u_η непрерывна на множестве $\Delta \cup A_0C_0$.

Теорема 1.2.1 (Принцип экстремума). *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.2.1) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (1.2.2); 2) $f(\xi,\eta) \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) в Δ; 3) $u(\xi,\eta)$ — *регулярное в* Δ *решение уравнения* (1.2.1), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) > 0$ ($\min\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) < 0$), *то* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u$ ($\min\limits_{\overline{\Delta}} u$) *достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. Рассмотрим в области Δ тождество

$$\beta L_0 u \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}(\beta u_\eta + \alpha u) - \beta h u = f\beta$$

и проинтегрируем его по отрезку NM прямой $\eta = \mathrm{const}$, принадлежащему Δ. Тогда получим

$$(\beta u_\eta + \alpha u)\Big|_N^M = \int\limits_{NM} \beta h u\,d\xi + \int\limits_{NM} \beta f\,d\xi. \tag{1.2.4}$$

В равенстве (1.2.4) отрезок NM может принадлежать не только области Δ, но и $\Delta \cup A_0C_0$. Пусть $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) = u(Q) > 0$ и он не достигается на отрезке $\overline{A_0B_0}$, т. е. $u(Q) > \max\limits_{\overline{A_0B_0}} u(\xi,\eta)$. Тогда точка $Q \in \Delta \cup C_0B_0$. Рассмотрим случай, когда $Q \in \Delta$. Из точки Q проведем отрезок $\eta = \mathrm{const}$ до пересечения с характеристикой $\xi = 0$ в точке P.

В равенстве (1.2.4) в качестве отрезка NM возьмем PQ. Тогда будем иметь

$$\beta(Q)u_\eta(Q) = \int\limits_{PQ} \beta hu\,d\xi + \int\limits_{PQ} \beta f\,d\xi \,-\, \alpha(Q)u(Q) =$$

$$= \int\limits_{PQ} \beta f\,d\xi + \int\limits_{PQ} \beta h[u - u(Q)]\,d\xi \,+\, u(Q)\int\limits_{PQ} \beta h\,d\xi - \alpha(Q)u(Q) =$$

$$= \int\limits_{PQ} \beta f\,d\xi + \int\limits_{PQ} \beta h[u - u(Q)]\,d\xi \,-\, u(Q)\left[\alpha(P) + \int\limits_{PQ} \beta c\,d\xi\right].$$

Отсюда в силу условия (1.2.2), $f \leqslant 0$ в Δ и $u(Q) > 0$ следует, что $u_\eta(Q) < 0$. Но это противоречит тому, что в точке $Q \in \Delta$ максимума функции $u(\xi,\eta)$ производная $u_\eta(Q) = 0$.

Пусть теперь $Q \in C_0B_0$. В силу непрерывности функции $u(\xi,\eta)$ на $\overline{\Delta}$ в некоторой окрестности точки Q существует точка $Q_1 = (\xi_1,\eta_1) \in \Delta$ такая, что

$$u(Q_1) > \max_{\overline{A_0B_0}} u(\xi,\eta). \tag{1.2.5}$$

Из точки Q_1 проведем прямую $\eta = \eta_1$ и точку пересечения с отрезком A_0B_0 обозначим через B_1. Пусть $\Delta_1 = \Delta \cap \{\eta < \eta_1\}$. Тогда по рассмотренному выше случаю $\max\limits_{\overline{\Delta}_1} u$ достигается только на отрезке $\overline{A_0B_1}$. Поэтому

$$u(Q_1) < \max_{\overline{A_0B_1}} u \leqslant \max_{\overline{A_0B_0}} u,$$

что противоречит неравенству (1.2.5). Тем самым теорема 1.2.1 полностью доказана.

Теорема 1.2.2 (Принцип максимума модуля). *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.2.1) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (1.2.3); 2) $f(\xi,\eta) \equiv 0$ *в* Δ; 3) $u(\xi,\eta)$ — *регулярное решение уравнения* (1.2.1), *равное нулю на характеристике* $\overline{A_0C_0}$. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi,\eta)| > 0$, *то он достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi,\eta)| = |u(Q)| > 0$. В силу линейности и однородности уравнения (1.2.1), не теряя общности, можно считать, что $u(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) = u(Q) > 0$ и $|u(\xi,\eta)| \leqslant u(Q)$. Допустим, что $Q \notin \overline{A_0B_0}$. Следовательно, точка $Q \in \Delta \cup C_0B_0$. Пусть $Q \in \Delta$. Из точки Q проведем отрезок $\eta = \mathrm{const}$ до пересечения с характеристикой $\xi = 0$ в точке P. Обозначим через E_1 множество точек отрезка PQ, в которых $h \geqslant 0$, а через E_2 — множество точек отрезка PQ, где $h \leqslant 0$. Тогда, рассуждая аналогично доказательству теоремы 1.2.1, из равенства (1.2.4) получим

$$\beta(Q)u_\eta(Q) = \int\limits_{PQ} \beta h u\,d\xi - \alpha(Q)u(Q) = \int\limits_{E_1} \beta h[u - u(Q)]\,d\xi + \\ + \int\limits_{E_2} \beta h[u + u(Q)]\,d\xi \,-\, u(Q)\left[\alpha(Q) - \int\limits_{PQ} \beta|h|\,d\xi\right].$$

Отсюда, в силу неравенства (1.2.3), $u(Q) > 0$ и $|u| \leqslant u(Q)$ следует, что $u_\eta(Q) < 0$. Это противоречит тому, что в точке Q максимума функции u частная производная $u_\eta(Q) = 0$.

Случай $Q \in C_0B_0$ рассматривается аналогично теореме 1.2.1.

Замечание 1.2.1. Принцип экстремума для уравнения (1.2.1) впервые был установлен в работе [229] при условиях: $u_\eta(0,\eta) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$, $u \in C^1(\overline{\Delta}) \cap C^2(\Delta)$, $L_0 u \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$ в $\overline{\Delta} \setminus \overline{A_0B_0}$; a, a_ξ, b, $c \in C(\overline{\Delta})$; $a \geqslant 0$, $h \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ в $\overline{\Delta}$.

Позднее в работах [115, 116] принцип максимума модуля $|u|$ был доказан при выполнении одного из следующих условий:

$$a(0,\eta) > 0, \quad h(\xi,\eta) \geqslant 0, \quad a(0,\eta) + \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)c(t,\eta)\,dt > 0; \tag{1.2.6}$$

$$a(0,\eta) > 0, \quad a(0,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta(2|h| - c)\,dt > 0; \tag{1.2.7}$$

$$a(0,\eta) > 0, \;\; a(\xi,\eta) > 0, \quad \alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta|h|\,dt > 0 \tag{1.2.8}$$

с краевым условием $u_\eta + au = 0$ в достаточно общих областях.

Из доказанных теорем 1.2.1 и 1.2.2 следует, что во всех условиях (1.2.6)–(1.2.8) неравенство $a(0,\eta) > 0$ излишне для справедливости принципа максимума с краевым условием $u = 0$ на A_0C_0 в области Δ. При этом в интегральных неравенствах условий (1.2.6) и (1.2.7) вместо функции $a(0,\eta)$ должна быть $\alpha(0,\eta) = a(0,\eta)\beta(0,\eta)$. С учетом этого нетрудно показать, что условие (1.2.3) является наиболее общим среди условий (1.2.6)–(1.2.8) с краевым условием $u = 0$ на A_0C_0. В самом деле, если $h \geqslant 0$ в Δ, то условие (1.2.3) эквивалентно условию (1.2.6) или (1.2.2):

$$\alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta h dt = \alpha(0,\eta) + \int\limits_0^\xi \beta c\,dt > 0.$$

Пусть теперь выполнено условие (1.2.7). Тогда имеет место и условие (1.2.3). Действительно,

$$\alpha(\xi,\eta) - \int_0^\xi \beta|h|\,dt \geqslant \alpha(\xi,\eta) - \int_0^\xi \beta|h|\,dt - \int_0^\xi \beta(|h|+h)\,dt =$$

$$= \alpha(\xi,\eta) - 2\int_0^\xi \beta|h|\,dt - \int_0^\xi \beta h\,dt = \alpha(0,\eta) - \int_0^\xi \beta(2|h|-c)\,dt > 0.$$

Отсюда видно, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Очевидно, что из справедливости условия (1.2.8) вытекает (1.2.3).

Заметим, что из доказательства теорем 1.2.1 и 1.2.2 следует, что если условия 1) и 2) этих утверждений выполнены вплоть до характеристики C_0B_0 и производная u_η непрерывна вплоть до C_0B_0, то $\max\limits_{\overline{\Delta}} u$ ($\min\limits_{\overline{\Delta}} u$) и $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u|$ достигается только на отрезке $\overline{A_0B_0}$. В этом случае говорят, что для гиперболического уравнения (1.2.1) имеет место сильный вариант принципа максимума.

1.2.2. Принцип максимума в классе обобщенных решений.

Определение 1.2.2. Обобщенным в области Δ решением уравнения (1.2.1) назовем функцию $u(\xi,\eta)$, если существует последовательность регулярных в Δ решений $\{u_n(\xi,\eta)\}$ уравнения (1.2.1), равномерно сходящаяся к $u(\xi,\eta)$ в $\overline{\Delta}$.

Теорема 1.2.3. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 1.2.1 *и* $u(\xi,\eta)$ — *обобщенное в* Δ *решение уравнения* (1.2.1), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u > 0$ ($\min\limits_{\overline{\Delta}} u < 0$), *то* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u$ ($\min\limits_{\overline{\Delta}} u$) *достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) = u(Q) = M > 0$ и точка $Q \notin \overline{A_0B_0}$. Ясно, что $Q \in \Delta \cup C_0B_0$. Введем множество $F = \{(\xi,\eta) \in \Delta \cup C_0B_0 :\ u(\xi,\eta) = M\}$. Очевидно, что F замкнуто и не имеет общих точек с $\overline{A_0B_0}$. Поскольку множества F и $\overline{A_0B_0}$ замкнуты, ограничены и не имеют общих точек, то расстояние между ними больше нуля. Поэтому существует число $\varepsilon > 0$ такое, что отрезок $\overline{A_0^\varepsilon B_0^\varepsilon}$ прямой $\eta = \xi + \varepsilon$, где $A_0^\varepsilon = (0,\varepsilon)$, $B_0^\varepsilon = (l-\varepsilon, l)$, не будет иметь общих точек с множеством F и $F \subset \Delta_\varepsilon$, где $\Delta_\varepsilon = \overline{\Delta} \cap \{\eta > \xi + \varepsilon\}$. По условию $u(\xi,\eta)$ — обобщенное в Δ решение уравнения (1.2.1), равное нулю на A_0C_0. Тогда существует последовательность регулярных в Δ решений $u_n(\xi,\eta)$ уравнения (1.2.1) таких, что $u_n(0,\eta) = 0$ и $u_n(\xi,\eta)$ равномерно в $\overline{\Delta}$ сходится к $u(\xi,\eta)$. Так как в треугольнике Δ_ε выполнены все условия теоремы 1.2.1, то $\max\limits_{\overline{\Delta}_\varepsilon} u_n(\xi,\eta)$ достигается на отрезке $\overline{A_0^\varepsilon B_0^\varepsilon}$.

Пусть $\max u = M_0$ на $\overline{A_0^\varepsilon B_0^\varepsilon}$. Ясно, что $M_0 < M$. Пусть $\delta = (M - M_0)/2$. В силу равномерной сходимости последовательности $u_n(\xi, \eta)$ в $\overline{\Delta}_\varepsilon$ для взятого $\delta > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\delta) > 0$ такой, что для всех $n > n_0$ и $(\xi, \eta) \in \overline{\Delta}_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$u(\xi, \eta) - \delta < u_n(\xi, \eta) < u(\xi, \eta) + \delta.$$

Отсюда на множестве F

$$u_n(\xi, \eta) > (M + M_0)/2,$$

а на отрезке $\overline{A_0^\varepsilon B_0^\varepsilon}$

$$u_n(\xi, \eta) < (M + M_0)/2 \quad \text{при} \quad n > n_0.$$

Значит, функция $u_n(\xi, \eta)$ при $n > n_0$ не достигает глобального максимума на отрезке $\overline{A_0^\varepsilon B_0^\varepsilon}$, что противоречит теореме 1.2.1. Следовательно, точка $Q \in \overline{A_0 B_0}$.

Замечание 1.2.2. Отметим, что при доказательстве теоремы 1.2.3 использованы идеи работы [166], в которой результаты [229] перенесены в несколько иной класс обобщенных решений.

Теорема 1.2.4. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 1.2.2 *и* $u(\xi, \eta)$ — *обобщенное в* Δ *решение уравнения* (1.2.1), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} |u(\xi, \eta)| > 0$, *то он достигается на отрезке* $\overline{A_0 B_0}$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.2.3.

Замечание 1.2.3. Если в теоремах 1.2.1–1.2.4 краевое условие $u = 0$ на левой характеристике A_0C_0 заменить на $u = 0$ на правой характеристике C_0B_0, то для выполнения заключения этих теорем нужно заменить условия (1.2.2) и (1.2.3) на следующие условия:

$$\begin{cases} h^* = b_\eta(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)b(\xi, \eta) - c(\xi, \eta) \geqslant 0, \\ \alpha^*(\xi, l) - \displaystyle\int_\eta^l \beta^*(\xi, t)c(\xi, t)\,dt < 0; \end{cases} \tag{1.2.9}$$

$$\alpha^*(\xi, \eta) + \int_\eta^l \beta^*(\xi, t)|h^*(\xi, t)|\,dt < 0, \tag{1.2.10}$$

где $\beta^* = \exp\displaystyle\int a\,d\eta$, $\alpha^* = b\beta^*$. Полученные таким образом утверждения обозначим, соответственно, через теоремы $1.2.1^*$–$1.2.4^*$.

Следствие 1.2.1. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.2.1) *в области* Δ *удовлетворяют условию* (1.2.2); 2) $f(\xi,\eta) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) в Δ; 3) $u(\xi,\eta)$ — *обобщенное в* Δ *решение уравнения* (1.2.1), *равное нулю на* A_0C_0. *Тогда если* $u \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *на отрезке* $\overline{A_0B_0}$, *то* $u \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *в области* Δ.

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 1.2.3. Следствие 1.2.1 может быть использовано при доказательстве существования неотрицательных решений уравнения (1.2.1).

1.2.3. Принцип максимума в произвольной области. В этом пункте изложенные выше результаты перенесем на более общую область, чем область Δ.

Рассмотрим уравнение (1.2.1) в области Δ_0, ограниченной отрезком A_0C_0 характеристики $\xi = 0$ и кусочно-гладкой кривой γ, лежащей в полуплоскости $\xi > 0$ с концами в точках A_0 и C_0. При этом кривая γ такова, что любой отрезок характеристики $\eta = \mathrm{const}$, соединяющий точки кривой γ и отрезка A_0C_0, целиком лежит в $\overline{\Delta}_0$.

Следуя [116] точку кривой γ назовем верхней (нижней) граничной точкой области Δ_0, если из нее можно провести вниз (вверх) открытый отрезок характеристики $\xi = \mathrm{const}$, целиком лежащей в $\Delta_0 \cup \gamma(\Delta_0)$. Если точка γ не является верхней и нижней, то ее назовем «исключительной». Множества верхних, нижних и исключительных точек кривой γ обозначим, соответственно, через γ_B, γ_H и γ_N. Ясно, что $\gamma_N \subset \overline{\gamma}_H$.

Пусть коэффициенты уравнения (1.2.1) a, b, c и a_ξ непрерывны в $\Delta_0 \cup A_0C_0$ и удовлетворяют одному из условий $(\widetilde{1.2.2})$ и $(\widetilde{1.2.3})$, которые получены из условий (1.2.2) и (1.2.3) заменой множества Δ на Δ_0.

На основании этих изменений можно сформулировать теоремы $\widetilde{1.2.1}$–$\widetilde{1.2.4}$, которые получаются из теорем 1.2.1–1.2.4 соответствующей поправкой. Для примера сформулируем теорему $\widetilde{1.2.1}$.

Теорема $\widetilde{1.2.1}$. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.2.1) *в* Δ_0 *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* $(\widetilde{1.2.2})$; 2) $f(\xi,\eta) \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) *в* Δ_0; 3) $u(\xi,\eta)$ — *регулярное в* Δ_0 *решение уравнения* (1.2.1), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Delta}_0} u(\xi,\eta) > 0$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}_0} u(\xi,\eta) < 0)$, *то* $\max\limits_{\overline{\Delta}_0} u$ $(\min\limits_{\overline{\Delta}_0} u)$ *достигается на множестве* $\overline{\gamma}_H \setminus \gamma_B$.

На основе теорем $\widetilde{1.2.1}$–$\widetilde{1.2.4}$ можно предложить следующую краевую задачу для уравнения (1.2.1) в области Δ_0.

Задача D. *Найти в области* Δ_0 *решение* $u(\xi,\eta)$ *уравнения* (1.2.1), *удовлетворяющее краевым условиям*:

$$u(0,\eta)=\psi(\eta),\quad 0\leqslant\eta\leqslant l;$$
$$u(\xi,\eta)=\tau(\xi,\eta),\quad (\xi,\eta)\in\overline{\gamma}_H\setminus\gamma_B,$$

где ψ *и* τ *— заданные достаточно гладкие функции.*

Легко видеть, что если Δ_0 есть обычный характеристический треугольник $A_0C_0B_0$, то $\overline{\gamma}_H\setminus\gamma_B=\overline{A_0B_0}$ и задача D переходит в первую задачу Дарбу. Пусть теперь Δ_0 — характеристический прямоугольник $A_0C_0B_1D_1$, $D_1=(l_1,0)$, $B_1=(l_1,l)$, $l_1>0$. Тогда $\overline{\gamma}_H\setminus\gamma_B=\overline{A_0D_1}$ и задача D становится задачей Гурса.

Таким образом, краевые задачи Дарбу и Гурса являются частными случаями задачи D. Следовательно, возникает интерес к исследованию задачи D.

Теорема 1.2.5. *Пусть коэффициенты уравнения* (1.2.1) *в* Δ_0 *удовлетворяют условиям теоремы* $\widetilde{1.2.1}$ *или* $\widetilde{1.2.2}$. *Тогда краевая задача* D *в классе обобщенных в* Δ_0 *решений уравнения* (1.2.1) *может иметь не более одного решения.*

Замечание 1.2.4. Аналогичным образом можно обобщить теоремы 1.2.1*–1.2.4*. Соответствующие утверждения обозначим через теоремы $\widetilde{1.2.1}^*$–$\widetilde{1.2.4}^*$.

1.2.4. Существенность условий. Выясним существенность условий (1.2.2) и (1.2.3) относительно коэффициентов уравнения (1.2.1) для выполнения заключения теорем 1.2.1 и 1.2.2.

В качестве простейшего примера рассмотрим уравнение свободных колебаний струны, т. е. в (1.2.1) $a=b=c=f\equiv 0$. В этом случае оба условия (1.2.2) и (1.2.3) нарушены. Регулярное в Δ решение $u(\xi,\eta)$ уравнения струны, равное нулю на характеристике A_0C_0, определяется формулой

$$u(\xi,\eta)=\tau(\xi),$$

где $\tau(0)=0$, $\tau(\xi)\in C\,[0,l]\cap C^1(0,l)$. Отсюда видно, что $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta) = \max\limits_{0\leqslant\xi\leqslant l}\tau(\xi)=\tau(\xi_0)$ достигается не только на $\overline{A_0B_0}$, но и на отрезке $\overline{\Delta}\cap\{\xi=\xi_0\}$.

Пусть коэффициенты уравнения (1.2.1) указанной в п. 1.2.1 гладкости удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h(\xi,\eta)\leqslant 0,\\ \alpha(0,\eta)+\int\limits_0^{\xi}\beta(t,\eta)c(t,\eta)\,dt<0; \end{cases}\tag{1.2.11}$$

$$\alpha(\xi,\eta)+\int\limits_0^{\xi}\beta(t,\eta)|h(t,\eta)|\,dt<0. \tag{1.2.12}$$

Теорема 1.2.6. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.2.1) *в* Δ *удовлетворяют условию* (1.2.11); 2) $f(\xi,\eta)\geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *в* Δ; 3) $u(\xi,\eta)$ — *регулярное в* Δ *решение уравнения* (1.2.1), *равное нулю на* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta)>0$ ($\min\limits_{\overline{\Delta}} u(\xi,\eta)<0$), *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на отрезке* $\overline{C_0B_0}$.

Теорема 1.2.7. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.2.1) *в* Δ *удовлетворяют условию* (1.2.12); 2) $f(\xi,\eta)\equiv 0$ *в* Δ; 3) $u(\xi,\eta)$ — *регулярное решение уравнения* (1.2.1), *равное нулю на* $\overline{A_0C_0}$. *Тогда* $\max\limits_{\overline{\Delta}}|u(\xi,\eta)|>0$ *достигается на отрезке* $\overline{C_0B_0}$.

Доказательство этих теорем аналогично доказательству теорем 1.2.1 и 1.2.2.

§ 1.3. Принципы максимума для уравнений смешанного типа

1.3.1. Уравнения смешанного типа с гладкой линией изменения типа. В этом пункте установим экстремальные свойства решений уравнения (1.1.1), которое является общим представителем уравнений смешанного типа с гладкой линией изменения типа.

Лемма 1.3.1. *Пусть*: 1) *в области* D_+ *коэффициенты уравнения* (1.1.1) *ограничены и* $C(x,y)\leqslant 0$; 2) $u(x,y)\in C(\overline{D}_+)\cap C^1(D_+\cup \cup AB)\cap C^2(D_+)$ *и* $Lu\equiv F\geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *в* D_+; 3) $\max\limits_{\overline{D}_+} u(x,y)=u(x_0,0)>0$ $\big(\min\limits_{\overline{D}_+} u(x,y)=u(x_0,0)<0\big)$, $0<x_0<l$. Тогда

$$\lim_{y\to 0+0} u_y(x_0,y)=u_y(x_0,0+0)<0\ \ (>0).$$

Доказательство. В силу условий 1) и 2) в области D_+ для эллиптического уравнения (1.1.1) справедлив внутренний принцип экстремума (принцип Хопфа), на его основании $\max\limits_{\overline{D}_+} u(x,y)>0$ ($\min\limits_{\overline{D}_+} u(x,y)<0$) решения $u(x,y)\not\equiv\mathrm{const}$ не может достигаться внутри области D_+.

Пусть $\max\limits_{\overline{D}_+} u(x,y)>0$ достигается в некоторой внутренней точке $(x_0,0)$ отрезка AB. Пусть K — круг радиуса $d>0$ области D_+, граница которого касается отрезка AB в точке $(x_0,0)$; $K_0=\{(x,y)\colon\ 0<y<y_0<d\}\cap K$, ∂K_0 — граница сегмента K_0, состоящая из отрезка S_0 ($y=y_0$) и части окружности $S(r^2=d^2,\ 0\leqslant y\leqslant y_0,$

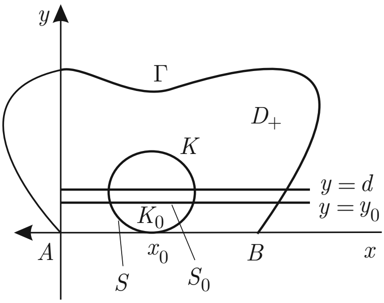

Рис. 1.3.1

$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - d)^2$) (см. рис. 1.3.1). В области K_0 рассмотрим барьерную функцию

$$v(x, y) = \exp(-\alpha r^2) - \exp(-\alpha d^2),$$

которая является решением уравнения

$$Lv = \exp(-\alpha r^2)\{4\alpha^2[K(y)(x - x_0)^2 + (y - d)^2] - \\ - 2\alpha[K(y) + 1 + A(x - x_0) + B(y - d)] + C[1 - \exp(\alpha r^2 - \alpha d^2)]\}.$$

Отсюда в силу ограниченности коэффициентов уравнения (1.1.1) и ввиду того, что коэффициент при α^2 имеет положительную нижнюю грань в замкнутой области $\overline{K}_0$, следует $Lv > 0$ при условии, что α достаточно велико. Далее $v(x, y) > 0$ в $\overline{K}_0 \setminus S$ и $v(x, y) = 0$ на S. На множестве $\overline{K}_0 \setminus \{(x_0, 0)\}$ в силу принципа Хопфа $u(x, y) < u(x_0, 0)$. С учетом этих свойств функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ введем новую функцию

$$\omega(x, y) = u(x, y) + \varepsilon v(x, y), \quad \varepsilon > 0, \tag{1.3.1}$$

которая в области K_0 удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$L\omega = L(u + \varepsilon v) = F(x, y) + \varepsilon Lv > 0,$$

$$\omega\big|_S = (u + \varepsilon v)\big|_S \leqslant u(x_0, 0),$$

$$\omega\big|_{S_0} = (u + \varepsilon v)\big|_{S_0} < u(x_0, 0) = \omega(x_0, 0)$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{y \to 0+0} \omega_y(x_0, y) \leqslant 0$$

или

$$u_y(x_0, 0 + 0) \leqslant -\varepsilon v_y(x_0, 0 + 0) = -2\varepsilon d e^{-\alpha d^2} < 0.$$

Отметим, что в работах [6, 201, с. 44] такого рода утверждение доказано для уравнения (1.1.1) при $K(y) = y$ и $u\big|_{\Gamma} < u(x_0, 0)$ $\big(u\big|_{\overline{\Gamma}} > > u(x_0, 0)\big)$ путем построения другой барьерной функции. По существу, при доказательстве леммы 1.3.1 использованы идеи доказательства граничного принципа экстремума [157, 249].

Определение 1.3.1. Регулярным в области D решением уравнения (1.1.1) назовем функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (1.1.2) и (1.1.3), а кроме того, $u_\eta \in C(\Delta \cup A_0C_0)$.

Теорема 1.3.1. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.1.1) *в области* D_+ *ограничены и* $C(x, y) \leqslant 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (1.1.1) *в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2.1; 3) $F(x, y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ на $D_+ \cup D_-$; 4) $u(x, y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (1.1.1), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D}} u(x, y) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}} u(x, y) < 0)$, *то* $\max\limits_{\overline{D}} u$ $(\min\limits_{\overline{D}} u)$ *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} u(x, y) = u(Q) > 0$. На основании внутреннего принципа для эллиптических уравнений $u(x, y) \not\equiv \mathrm{const}$ не может принимать положительного максимума $u(Q)$ в области D_+. Следовательно, значение $u(Q)$ принимается на $\overline{D}_-$ или на $\overline{\sigma}$. Допустим, что $Q \in \overline{D}_-$. В этом случае в силу теоремы 1.2.1 точка $Q \in \overline{AB}$. Пусть $Q \in AB$, т. е. $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$. В этой точке из гиперболической части области

$$u_y(x_0, 0 - 0) \geqslant 0. \tag{1.3.2}$$

С другой стороны, в силу леммы 1.3.1 в точке $(x_0, 0)$ из эллиптической части области D производная $u_y(x_0, 0 + 0) < 0$, что противоречит неравенству (1.3.2).

Теорема 1.3.2. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.1.1) *в области* D_+ *ограничены и* $C(x, y) \leqslant 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (1.1.1) *в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ, η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2.2; 3) $F(x, y) \equiv 0$; 4) $u(x, y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (1.1.1), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D}} |u(x, y)| > 0$, *то этот максимум достигается на дуге* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} |u(x, y)| = |u(Q)| > 0$. В силу линейности и однородности уравнения (1.1.1) можно считать, что $u(Q) > 0$. В этом случае $\max\limits_{\overline{D}} u(x, y) = u(Q) > 0$ и $|u(x, y)| \leqslant u(Q)$. На основании теоремы 1.2.2 точка $Q \in \overline{D}_+$. В силу принципа Хопфа для эллиптических уравнений точка $Q \notin D_+$. Тогда $Q \in \overline{\Gamma} \cup AB$. Пусть $Q \in AB$, $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$. В этой точке из теоремы 1.2.2 следует, что $u_y(x_0, 0-0) \geqslant 0$. А последнее, согласно лемме 1.3.1, противоречит неравенству $u_y(x_0, 0+0) < 0$. Значит, точка $Q \in \overline{\Gamma}$.

Следствие 1.3.1. а) *Если выполнены условия теоремы* 1.3.1 *и* $F(x,y) \equiv 0$, *то для любой точки* $(x,y) \in \overline{D}$ *справедлива оценка*

$$\min_{\overline{\Gamma}} u(x,y) \leqslant u(x,y) \leqslant \max_{\overline{\Gamma}} u(x,y). \tag{1.3.3}$$

б) *Если выполнены условия теоремы* 1.3.2, *то для любой точки* $(x,y) \in \overline{D}$

$$|u(x,y)| \leqslant \max_{\overline{\Gamma}} |u(x,y)|. \tag{1.3.4}$$

в) *Если коэффициенты уравнения* (1.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.3.1 *или* 1.3.2 *и в классе регулярных в* D *решений уравнения* (1.1.1) *существует решение задачи* (1.1.2)–(1.1.5), *то оно единственно.*

Следствие 1.3.2. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.1.1) *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 1.3.1; 2) $F(x,y) \leqslant 0$ $(F(x,y) \geqslant 0)$ *на* $D_+ \cup D_-$; 3) $u(x,y)$ — *регулярное решение уравнения* (1.1.1), *равное нулю на* AC. *Тогда*:

1) *если* $u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на* $\overline{\Gamma}$, *то* $u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* $\overline{D}$;

2) *если* $u > 0$ (< 0) *на* Γ, *то* $u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* $\overline{D}$ *и* $u > 0$ (< 0) *в* D_+.

Доказательство. 1) Допустим, что существует точка $Q_0 \in \overline{D} \setminus \overline{\Gamma}$ такая, что $u(Q_0) < 0$. Тогда $\min\limits_{\overline{D}} u(x,y) = u(Q) < 0$, и поэтому выполнены все условия принципа минимума. В силу теоремы 1.3.1 точка $Q \in \overline{\Gamma}$. А это противоречит тому, что $u \geqslant 0$ на $\overline{\Gamma}$.

2) В силу случая 1) достаточно показать $u > 0$ в области D_+. Допустим, что $u(Q_0) = 0$ и $Q_0 \in D_+$. Тогда в силу результатов Хопфа [2, 249] следует, что если $u \geqslant 0$ и $Lu \equiv 0$ всюду в D_+ и хотя бы в одной точке области D_+ функция $u = 0$, то $u(x,y) \equiv 0$ в D_+. В силу непрерывности функции $u(x,y)$ на $\overline{D}_+$ $u(x,y) \equiv 0$ на $\overline{D}_+$, что противоречит $u > 0$ на Γ.

Определение 1.3.2. Обобщенным в области D решением уравнения (1.1.1) будем называть функцию $u(x,y)$, если существует последовательность регулярных в области D решений $\{u_n(x,y)\}$ уравнения (1.1.1), равномерно сходящаяся к $u(x,y)$ на замкнутой области $\overline{D}$.

Теорема 1.3.3. *Пусть выполнены условия* 1)–3) *теоремы* 1.3.1 *и* $u(x,y)$ — *обобщенное в области* D *решение уравнения* (1.1.1), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) > 0$ $(\min\limits_{\overline{D}} u(x,y) < 0)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Теорема 1.3.4. *Пусть выполнены условия* 1)–3) *теоремы* 1.3.2 *и* $u(x,y)$ — *обобщенное в области* D *решение уравнения* (1.1.1), *равное нулю на характеристике* $\overline{AC}$. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| > 0$, *то этот максимум достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство теорем 1.3.3 и 1.3.4 проводится одинаково и по этой причине покажем справедливость теоремы 1.3.4. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| = |u(Q)| > 0$ и допустим, что $Q \notin \overline{\Gamma}$. Тогда ясно, что $Q \in \overline{D} \setminus \overline{\Gamma}$. Обозначим через $E = \{(x,y) \in \overline{D} \setminus \overline{\Gamma} \colon \ |u(x,y)| = M = |u(Q)| > 0\}$. Множество E замкнуто и не имеет общих точек с кривой $\overline{\Gamma}$. Поскольку множества $\overline{\sigma}$ и E замкнуты, ограничены и не имеют общих точек, то расстояние между ними больше нуля. Поэтому существует простая кривая γ, лежащая в области D_+, с концами в точках A и B такая, что $\overline{\gamma} \cap E = \varnothing$ и $E \subset D_\gamma$, где D_γ — область, ограниченная кривыми γ, AC и CB. Так как $u(x,y)$ — обобщенное решение уравнения (1.1.1), равное нулю на AC, то существует последовательность регулярных в D решений $u_n(x,y)$ уравнения (1.1.1) таких, что $u_n(x,y) = 0$ на $\overline{AC}$ и $u_n(x,y)$ в $\overline{D}$ равномерно сходится к $u(x,y)$. Поскольку в области D_γ выполнены условия теоремы 1.3.2, то $\max\limits_{\overline{D}_\gamma} |u_n(x,y)|$ достигается на кривой $\overline{\gamma}$. Пусть $\max\limits_{\overline{\gamma}} |u(x,y)| = M_0$. Ясно, что $M_0 < M$. Обозначим $\varepsilon = (M - M_0)/2$. В силу равномерной сходимости последовательности $u_n(x,y)$ в $\overline{D}_\gamma$ для взятого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ такой, что для всех $n > n_0$ и $(x,y) \in \overline{D}_\gamma$ выполняется условие $|u| - \varepsilon < |u_n| < |u| + \varepsilon$. Отсюда на множестве $E \colon \ |u_n(x,y)| > (M + M_0)/2$, на кривой $\overline{\gamma} \colon \ |u_n(x,y)| < (M + M_0)/2$ при $n > n_0$. Следовательно, функция $|u_n(x,y)|$ при $n > n_0$ не достигает положительного максимума в $\overline{D}_\gamma$ на кривой $\overline{\gamma}$, что противоречит теореме 1.3.2. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Следствие 1.3.3. а) *Если выполнены условия теоремы* 1.3.3 *и* $F(x,y) \equiv 0$, *то для любой точки* $(x,y) \in \overline{D}$ *справедлива оценка* (1.3.3).

б) *Если выполнены условия теоремы* 3.4, *то для любой точки* $(x,y) \in \overline{D}$ *имеет место оценка* (1.3.4).

в) *Если коэффициенты уравнения* (1.1.1) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.3.3 *или* 1.3.4 *и в классе обобщенных в* D *решений уравнения* (1.1.1) *существует решение задачи* T, *то оно единственно.*

Следствие 1.3.4. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.1.1) *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 1.3.1; 2) $F(x,y) \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) на множестве $D_+ \cup D_-$; 3) $u(x,y)$ — *обобщенное в области* D *решение уравнения* (1.1.1), *равное нулю на* AC. *Тогда если* $u \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *на* $\overline{\Gamma}$, *то* $u \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *в* $\overline{D}$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству следствия 1.3.2.

1.3.2. Уравнения смешанного типа с негладкой линией изменения типа. Рассмотрим уравнение смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями изменения типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + N(x)u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, \tag{1.3.5}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $xN(x) > 0$ при $x \neq 0$, $K(y)$, $N(x)$, $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$ и $F(x,y)$ — заданные функции, в области G, ограниченной: 1) простой кривой Жордана Γ, лежащей в первой четверти плоскости (x,y) с концами в точках $B_1 = (l_1, 0)$ и $B_2 = (0, l_2)$, l_1, $l_2 > 0$; 2) характеристиками OC_1 и C_1B_1 уравнения (1.3.5), лежащими в четвертой четверти; 3) характеристиками OC_2 и C_2B_2 уравнения (1.3.5), лежащими во второй четверти, где $O = (0,0)$, $C_1 = (l_1/2, y_{c_1})$, $y_{c_1} < 0$, $C_2 = (x_{c_2}, l_2/2)$, $x_{c_2} < 0$ (см. рис. 1.3.2).

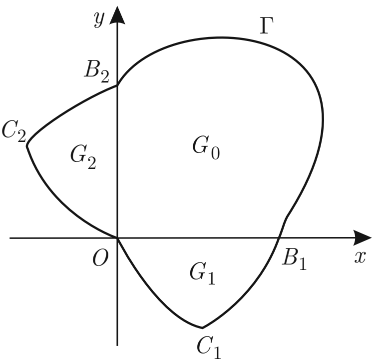

Рис. 1.3.2

Пусть $G_0 = G \cap \{x > 0, y > 0\}$, $G_1 = G \cap \{x > 0, y > 0\}$, $G_2 = G \cap \cap \{x < 0, y > 0\}$, $K(y)$, $N(x) \in C(\overline{G}_i) \cap C^2(\overline{G}_i \setminus \overline{OB}_i)$, $i = 1, 2$.

Лемма 1.3.2. *Пусть*: 1) *в области* G_0 *коэффициенты уравнения* (1.3.5) *ограничены*, $C(x,y) \leqslant 0$, $K(y)$, $N(x) \in C(\overline{G}_0)$; 2) $u(x,y) \in \in C(\overline{G}_0) \cap C^1(G_0 \cup OB_1 \cup OB_2) \cap C^2(G_0)$, $Lu \equiv F \geqslant 0$ $(F \leqslant 0)$ *в* G_0; 3) $\max\limits_{\overline{G}_0} u(x,y) = u(Q) > 0$ $(\min\limits_{\overline{G}_0} u(x,y) = u(Q) < 0)$.

Тогда: 1) *если* $Q = (x_0, 0) \in OB_1$, $0 < x_0 < l_1$, *то*

$$\lim_{y \to 0+0} u_y(x_0, y) = u_y(x_0, 0+0) < 0 \; (> 0);$$

2) *если* $Q = (0, y_0) \in OB_2$, $0 < y_0 < l_2$, *то*

$$\lim_{x \to 0+0} u_x(x, y_0) = u_x(0+0, y_0) < 0 \, (> 0).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.3.1.

Теорема 1.3.5. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.3.5) *в области* G_0 *ограничены*, $C(x,y) \leqslant 0$ *и* $K(y)$, $N(x) \in C(\overline{G}_0)$; 2) *коэффициенты уравнения* (1.3.5) *в областях* G_1 *и* G_2 *в соответствующих характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2.1; 3) $F(x,y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на множестве* $G_0 \cup G_1 \cup G_2$; 4) $u(x,y) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G \cup OC_1 \cup OC_2) \cap C^2(G_0 \cup G_1 \cup G_2)$ *и* $Lu \equiv \equiv F(x,y)$, $(x,y) \in G_0 \cup G_1 \cup G_2$; 5) $u(x,y) = 0$ *на характеристиках* $\overline{OC}_1$ *и* $\overline{OC}_2$.

Тогда если $\max\limits_{\overline{G}} u(x,y) > 0$ $(\min\limits_{\overline{G}} u(x,y) < 0)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Теорема 1.3.6. *Пусть*: 1) *выполнены условия* 1), 4), 5) *теоремы* 1.3.5; 2) *коэффициенты уравнения* (1.3.5) *в областях* G_1 *и* G_2 *в соответствующих характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2.2; 3) $F(x,y) \equiv 0$.

Тогда если $\max\limits_{\overline{G}} |u(x,y)| > 0$, *то этот максимум достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство теорем 1.3.5 и 1.3.6 аналогично доказательству теорем 1.3.1 и 1.3.2 и проводится с применением леммы 1.3.2 и соответствующих теорем 1.2.1 и 1.2.2.

Отметим, что в этом случае справедливы утверждения, соответствующие теоремам 1.3.3 и 1.3.4 и следствиям 1.3.1–1.3.4.

1.3.3. Уравнения смешанного параболо-гиперболического типа. Рассмотрим уравнение

$$L_1 u \equiv \begin{cases} u_{xx} + Au_x + Bu_y + Cu = F, & y > 0, \\ K(y)u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, & y < 0, \end{cases} \tag{1.3.6}$$

где $K(y) < 0$ при $y < 0$, $B(x,y) < 0$ при $y \geqslant 0$; $K(y)$, $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$ и $F(x,y)$ — заданные функции, гладкость которых будет указана ниже,

$$L_2 u \equiv \begin{cases} u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, & y > 0, \\ K(y)u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, & y < 0, \end{cases} \tag{1.3.7}$$

где $A(x,y) < 0$ при $y \geqslant 0$, в области Ω, ограниченной при $y > 0$ отрезками AA_1, A_1B_1 и B_1B, где $A = (0,0)$, $A_1 = (0,d)$, $B = (l,0)$, $B_1 = (l,d)$, $l,d > 0$, а при $y < 0$ характеристиками AC и CB уравнения (1.3.6) или (1.3.7) (см. рис. 1.3.3).

Пусть $\Omega_+ = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{y < 0\}$. Отметим, что уравнение (1.3.6) является уравнением смешанного типа с характеристической линией изменения типа (т. е. время в области Ω_+ направлено вдоль оси $x = 0$), а (1.3.7) — уравнением смешанного типа с нехарактеристической линией изменения типа (время в параболической части направлено вдоль оси $y = 0$). Этот момент существенно

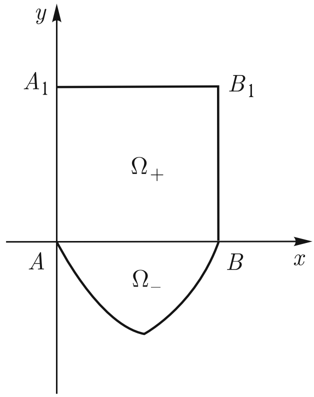

Рис. 1.3.3

влияет на постановку краевых задач для уравнения (1.3.6) и (1.3.7) в области Ω.

Теорема 1.3.7. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.3.6) *в области* Ω_+ *ограничены и* $B(x,y) < 0$, $C(x,y) \leqslant 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (1.3.6) *в области* Ω_- *в характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2.1; 3) $F(x,y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на множестве* $\Omega_- \cup \Omega_+ \cup A_1B_1$; 4) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AC) \cap \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_+ \cup A_1B_1) \cap C^2(\Omega_-)$, $L_1 u \equiv F(x,y)$, $(x,y) \in \Omega_- \cup \Omega_+ \cup A_1B_1$; 5) $u(x,y) = 0$ *на характеристике* $\overline{AC}$.

Тогда если $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x,y) > 0$ $(\min\limits_{\overline{\Omega}} u(x,y) < 0)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на множестве* $\overline{AA_1 \cup BB_1}$.

Теорема 1.3.8. *Пусть*: 1) *выполнены условия* 1), 4) *и* 5) *теоремы* 1.3.7; 2) *коэффициенты уравнения* (1.3.6) *в области* Ω_- *в характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2.2; 3) $F(x,y) \equiv 0$.

Тогда если $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x,y)| > 0$, *то этот максимум достигается на множестве* $\overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}$.

Доказательство теорем 1.3.7 и 1.3.8 по существу одинаково, поэтому убедимся в справедливости теоремы 1.3.7.

Пусть $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x,y) = u(Q) > 0$. Поскольку выполнены условия теоремы 1.2.1, то в силу этой теоремы точка $Q \in \overline{\Omega}_+$. Точка Q не принадлежит множеству $\Omega_+ \cup A_1B_1$, так как для уравнения (1.3.6) в области Ω_+ справедлив принцип максимума [218, 256]. Поэтому точка $Q \in AB \cup AA_1 \cup BB_1$. Если точка $Q \in AB$, $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$, то в силу работы [33]

$$\lim_{y\to 0+0} u_y(x_0,y) = u_y(x_0, 0+0) < 0. \tag{1.3.8}$$

На основании теоремы 1.2.1 в точке $Q = (x_0, 0)$ из гиперболической части области Ω производная $u_y(x_0, 0-0) \geqslant 0$, что в силу непрерывности $u_y(x,y)$ в точке Q противоречит неравенству (1.3.8). Следовательно, $Q \in AA_1 \cup BB_1$.

Теперь сформулируем принцип максимума для уравнения (1.3.7) в области Ω.

Теорема 1.3.9. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (1.3.7) *в области* Ω_+ *ограничены и* $A(x,y) < 0$, $C(x,y) \leqslant 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (1.3.7) *в области* Ω_- *в характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2.1; 3) $F(x,y) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *на множестве* $\Omega_- \cup \Omega_+ \cup BB_1$; 4) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AC) \cap \cap C^{1,2}_{x,y}(\Omega_+ \cup BB_1) \cap C^2(\Omega_-)$, $L_2 u \equiv F(x,y)$, $(x,y) \in \Omega_- \cup \Omega_+ \cup BB_1$; 5) $u(x,y) = 0$ *на характеристике* AC. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x,y) > 0$ ($\min\limits_{\overline{\Omega}} u(x,y) < 0$), *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на множестве* $\overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$.

Теорема 1.3.10. *Пусть*: 1) *выполнены условия* 1), 4) *и* 5) *теоремы* 1.3.9; 2) *коэффициенты уравнения* (1.3.7) *в области* Ω_- *в характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют условиям теоремы* 1.2.2; 3) $F(x,y) \equiv 0$. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x,y)| > 0$, *то этот максимум достигается на множестве* $\overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$.

Доказательство теоремы 1.3.10. Пусть $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u(x,y)| = |u(Q)| > > 0$. В силу линейности и однородности уравнения (1.3.7) можно полагать $u(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_{\overline{\Omega}} u(x,y) = u(Q)$ и $|u| \leqslant u(Q)$. В силу теоремы 1.2.2 точка $Q \in \overline{\Omega}_+$. На основании внутреннего принципа максимума для параболических уравнений $Q \in \Omega_+ \cup BB_1$. Следовательно, $Q \notin AB \cup B \cup \overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$. Пусть $Q = (x_0, 0) \in AB$. Тогда в точке $(x_0, 0)$ из параболической части области Ω, согласно [33], производная u_y удовлетворяет неравенству (1.3.8). С другой стороны, в силу теоремы 1.2.2, $u_y(x_0, 0-0) \geqslant 0$, что противоречит (1.3.8), откуда $Q \notin AB$. Допустим, что $Q \notin \overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$. Следовательно, точка $Q \equiv B$. В силу непрерывности функции $u(x,y)$ в $\overline{\Omega}$ в малой окрестности точки $B \equiv Q$ существует точка $P_\varepsilon = (x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Omega$ такая, что

$$u(P_\varepsilon) > \max u(x,y) \quad \text{на} \quad \overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}. \tag{1.3.9}$$

Пусть $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{x < x_\varepsilon\}$. Тогда $\max\limits_{\overline{\Omega}_\varepsilon} u(x,y) = u(Q_\varepsilon) > 0$. Из теоремы 1.2.2 следует, что $Q_\varepsilon \notin \overline{\Omega}_{-\varepsilon} \setminus \overline{AB}_\varepsilon$, где $B_\varepsilon = (x_\varepsilon, 0)$, $\Omega_{-\varepsilon} = \Omega_\varepsilon \cap \cap \{y < 0\}$. Далее, рассуждая аналогично приведенному выше, получим, что Q_ε принадлежит только множеству $\overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_{1\varepsilon}}$, $B_{1\varepsilon} = (x_\varepsilon, d)$. Отсюда следует, что

$$u(P_\varepsilon) < \max_{\overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_{1\varepsilon}}} u(x,y) \leqslant \max_{\overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}} u(x,y),$$

что противоречит неравенству (1.3.9). Поэтому точка $Q \in \overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$.

Отметим, что аналогично теореме 1.3.1 теоремы 1.3.7–1.3.10 переносятся в класс обобщенных в Ω решений уравнений (1.3.6) и (1.3.7) и справедливы также утверждения, аналогичные следствиям 1.3.1–1.3.4.

Замечание 1.3.1. В статье [13] впервые был установлен принцип максимума для уравнения (1.3.6) при $F(x,y) \equiv 0$ и тех же ограничениях на его коэффициенты в области Ω_-, что и в работе [229], но в несколько иной формулировке.

§ 1.4. К вопросу о единственности решения задачи Трикоми для конкретных уравнений смешанного типа

В этом параграфе приведем примеры уравнений смешанного типа, для которых справедливы принципы максимума, и покажем применение изложенных выше результатов для получения теорем единственности решения задачи T.

Пример 1. Пусть в уравнении (1.1.1) $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n$, $n > 0$, $A(x,y) = a_0|y|^{\frac{n-1}{2}}$, $a_0 = \mathrm{const}$, $B(x,y) = C(x,y) \equiv 0$. В этом случае мы имеем известное уравнение, возникшее в связи с условием Геллерстедта (см., например, [202]),

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n u_{xx} + u_{yy} + a_0|y|^{(n-1)/2} u_x = F(x,y). \tag{1.4.1}$$

Уравнение (1.4.1) рассмотрим в области D (см. рис. 1.1.1). Покажем, что для этого уравнения справедлив принцип экстремума (т. е. теорема 1.3.1). Для этого проверим условия 1) и 2) теоремы 1.3.1. Очевидно, что условие 1) выполнено. С целью проверки условия 2) в области D_- перейдем в характеристические координаты (ξ, η):

$$\xi = x - \frac{2}{n+2}(-y)^{(n+2)/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{n+2}(-y)^{(n+2)/2}.$$

Тогда уравнение (1.4.1) принимает вид

$$L_0 u \equiv u_{\xi\eta} + \frac{p_1}{\eta - \xi} u_\xi - \frac{p_2}{\eta - \xi} u_\eta = f(\xi, \eta), \tag{1.4.2}$$

где

$$p_1 = \frac{n - 2a_0}{2(n+2)}, \quad p_2 = \frac{n + 2a_0}{2(n+2)},$$

$$f(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}\Big(\frac{4}{n+2}\Big)^{2n/(n+2)}(\eta-\xi)^{-2n/(n+2)}F(x,y),$$

а область D_- отобразится в область Δ (см. § 1.2). В случае уравнения (1.4.2)

$$a = \frac{p_1}{\eta-\xi}, \quad b = -\frac{p_2}{\eta-\xi}, \quad c \equiv 0, \quad \beta = (\eta-\xi)^{p_2},$$

$$\alpha = a\beta = p_1(\eta-\xi)^{p_2-1}, \quad h = a_\xi + ab - c = \frac{p_1(1-p_2)}{(\eta-\xi)^2}.$$

Отсюда нетрудно видеть, что функции a, a_ξ и b непрерывны в $\overline{\Delta}\setminus\overline{A_0B_0}$ и при $a_0 < n/2$ удовлетворяют условию (1.2.2).

Следовательно, если $a_0 < n/2$ и $F(x,y) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) на множестве $D_+ \cup D_-$, то для уравнения (1.4.1) справедлива теорема 1.3.1 и все утверждения, вытекающие из этой теоремы.

Замечание 1.4.1. В книге М.М. Смирнова [201] для уравнения (1.4.1) при $a_0 = 0$ и $F(x,y) \equiv 0$ установлен принцип экстремума исходя из формулы решения задачи Коши. В диссертации В.Ф. Волкодавова [37] доказан принцип экстремума для уравнения (1.4.1) при $|a_0| < n/2$, $F(x,y) \equiv 0$ на основании формулы решения задачи Дарбу.

Пример 2. Пусть в уравнении (1.1.1) $K(y) = y$, $A(x,y) = B(x,y) \equiv \equiv 0$. Тогда получим

$$Lu \equiv yu_{xx} + u_{yy} + C(x,y)u = F(x,y). \tag{1.4.3}$$

Покажем, что для уравнения (1.4.3) при некоторых условиях относительно $C(x,y)$ и $F(x,y)$ справедлива теорема 1.3.1. В самом деле, в области D_-, переходя в характеристические координаты (ξ,η), получим

$$L_0u \equiv u_{\xi\eta} + \frac{1}{6(\eta-\xi)}(u_\xi - u_\eta) + c(\xi,\eta)u = f(\xi,\eta), \tag{1.4.4}$$

где

$$c(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}\Big(\frac{4}{3}\Big)^{2/3}(\eta-\xi)^{-2/3}C(x,y),$$

$$f(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}\Big(\frac{4}{3}\Big)^{2/3}(\eta-\xi)^{-2/3}F(x,y).$$

В случае уравнения (1.4.4)

$$a = \frac{1}{6(\eta-\xi)}, \quad b = -\frac{1}{6(\eta-\xi)}, \quad \beta = (\eta-\xi)^{1/6}, \quad \alpha = \frac{1}{6}(\eta-\xi)^{-5/6},$$

$$h = \frac{5}{36(\eta-\xi)^2} + \frac{1}{4}\Big(\frac{4}{3}\Big)^{2/3}\frac{C(x,y)}{(\eta-\xi)^{2/3}}.$$

Отсюда видно, что если в области D_- функция $C(x,y) \geqslant -5/16y^2$, то $h(\xi,\eta) \geqslant 0$ в области Δ и для справедливости условия (1.2.2) остается проверить неравенство

$$\alpha(0,\eta) + \int_0^\xi \beta(t,\eta)c(t,\eta)\,dt > 0$$

или

$$\frac{1}{6}\eta^{-5/6} - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \int_0^\xi (\eta - t)^{-1/2} C(x,y)\,dt > 0. \tag{1.4.5}$$

Если $C(x,y) \leqslant 0$ в области D_-, то неравенство (1.4.5) в области Δ всегда выполнено. Пусть $C(x,y) \geqslant 0$ в D_- и $M = \max C(x,y)$ в $\overline{D}_-$. Тогда неравенство (1.4.5) в Δ будет справедливым, если

$$\frac{1}{6}\eta^{-5/6} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} M\left[(\eta-\xi)^{1/2} - \eta^{1/2}\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\eta^{-5/6} - \frac{M}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{\xi}{\sqrt{\eta} + \sqrt{\eta - \xi}} > \frac{1}{6} l^{-5/6} - \frac{1}{2} M \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} l^{1/2} \geqslant 0.$$

Таким образом, если $C(x,y) \leqslant 0$ в D_+ и в области D_- выполнено условие

$$-\frac{5}{16y^2} \leqslant C(x,y) \leqslant \frac{1}{2l}\left(\frac{1}{6l}\right)^{1/3},$$

$F(x,y) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) на множестве $D_+ \cup D_-$, то для уравнения (1.4.3) справедлива теорема 1.3.1 и все утверждения, вытекающие из этой теоремы.

Замечание 1.4.2. Отметим, что уравнение (1.4.3) при $F(x,y) \equiv 0$ было объектом исследований работ [5, 166, 35]. В [5] при малых l был доказан принцип максимума исходя из явного вида решения задачи Дарбу для уравнения (1.4.4) при $f(\xi,\eta) \equiv 0$ в области Δ. В статье [166] результат [5] был несколько улучшен. В работе [35] доказан принцип максимума исходя из решения задачи Дарбу, когда $l = 1$, но при малом $C(x,y)$.

Пример 3. Пусть в уравнении (1.3.5) $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n$, $N(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^m$, $n, m \geqslant 0$, $A(x,y) = B(x,y) = C(x,y) \equiv 0$. Тогда уравнение (1.3.5) имеет вид

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n u_{xx} + \operatorname{sgn} x \cdot |x|^m u_{yy} = F(x,y). \tag{1.4.6}$$

Уравнение (1.4.6) рассмотрим в области G (см. рис. 1.3.2). В области G_1 перейдем к характеристическим координатам

$$\xi = \frac{2}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}} - \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}}, \quad \eta = \frac{2}{m+2} x^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}}.$$

Тогда уравнение (1.4.6) принимает вид

$$L_0 u \equiv u_{\xi\eta} - \frac{p}{\xi - \eta}(u_\xi - u_\eta) + \frac{q}{\xi + \eta}(u_\xi + u_\eta) = f(\xi, \eta), \tag{1.4.7}$$

где

$$p = \frac{n}{2(n+2)}, \quad q = \frac{m}{2(m+2)},$$

$$f(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{4q}\Big(\frac{4}{n+2}\Big)^{4p}(\eta - \xi)^{-4p}(\xi + \eta)^{-4q} F(x, y),$$

а область G_1 отобразится в область Δ (см. § 1.2). В случае уравнения (1.4.7)

$$a(\xi, \eta) = \frac{q}{\xi + \eta} - \frac{p}{\xi - \eta}, \quad b(\xi, \eta) = \frac{q}{\xi + \eta} + \frac{p}{\xi - \eta}, \quad c(\xi, \eta) \equiv 0,$$

$$h(\xi, \eta) = \frac{p - p^2}{(\eta - \xi)^2} + \frac{q^2 - q}{(\eta + \xi)^2}, \quad \beta(\xi, \eta) = (\xi + \eta)^q (\eta - \xi)^p,$$

$$\alpha = a\beta = p(\eta - \xi)^{p-1}(\eta + \xi)^q + q(\eta + \xi)^{q-1}(\eta - \xi)^p.$$

Легко заметить, что $h_\xi > 0$ при $0 < \xi \leqslant \eta \leqslant l$, поэтому, когда $0 < \eta = \mathrm{const} \leqslant l$,

$$h_{\min} = \eta^{-2}(p - q)(1 - p - q) \leqslant h(\xi, \eta) \leqslant +\infty.$$

Отсюда ясно, что при $p \geqslant q$ функция $h(\xi, \eta) \geqslant 0$ в $\overline{\Delta}$, а при $p < q$ на сегменте $[0, \eta]$ меняет свой знак с минуса на плюс, обращаясь в нуль в единственной точке из интервала $(0, \eta)$.

Пусть $p \geqslant q$. В этом случае $h(\xi, \eta) \geqslant 0$ в $\overline{\Delta}$ и по этой причине для выполнения условия (1.2.2) достаточно, чтобы $\alpha(0, \eta) > 0$ при $0 < \eta < l$. Очевидно, что $\alpha = a\beta > 0$ в $\overline{\Delta}$.

Следовательно, для уравнения (1.4.6) при $m = n > 0$ $(0 < p = q < 1/2)$ и $F(x, y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ на $G_0 \cup G_1 \cup G_2$ справедлива теорема 1.3.5 и, значит, все следствия, вытекающие из этой теоремы.

Пусть $p < q$ и (ξ, η) — произвольная, но фиксированная точка из Δ. Пусть $t_0 \in [0, \xi]$ — точка, в которой функция $h(t_0, \eta) = 0$. Возможно, что при достаточно малых ξ такой точки t_0 из $[0, \xi]$ не существует. Но, как будет видно, этот случай легко вытекает из рассмотренного ниже. При этих предположениях рассмотрим левую часть неравенства (1.2.3):

$$G(\xi, \eta) = \alpha(\xi, \eta) - \int\limits_0^\xi \beta(t, \eta)|h(t, \eta)|\, dt = \alpha(\xi, \eta) +$$

$$+ \int\limits_0^{t_0} \beta h\, dt - \int\limits_{t_0}^{\xi} \beta h\, dt = 2\alpha(t_0, \eta) - \alpha(0, \eta) =$$

$$= \eta^{p+q-1}\Big[2q\Big(1 + \frac{t_0}{\eta}\Big)^{q-1}\Big(1 - \frac{t_0}{\eta}\Big)^p + 2p\Big(1 + \frac{t_0}{\eta}\Big)^q\Big(1 - \frac{t_0}{\eta}\Big)^{p-1} - p - q\Big].$$

Теперь покажем, что $G(\xi, \eta) > 0$. Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x) = 2q(1+x)^{q-1}(1-x)^p + 2p(1+x)^q(1-x)^{p-1} - p - q$$

на сегменте $[0, 1]$. Вычислим производную

$$\varphi'(x) = 2(1+x)^q(1-x)^p h(x, 1).$$

Отсюда видно, что $\varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow h(x_0, 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = t_0/\eta \in [0, 1]$. Очевидно, что $x = x_0$ является точкой наименьшего значения функции $\varphi(x)$ на $[0, 1]$. Значение x_0 найдем из равенства $h(x_0, 1) = 0$:

$$x_0 = \frac{1 - n_0}{1 + n_0}, \quad n_0^2 = \frac{p - p^2}{q - q^2}, \quad 0 < n_0 < 1.$$

Следовательно, при всех $x \in [0, 1]$

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) = \varphi\Big(\frac{1 - n_0}{1 + n_0}\Big) = 2^{p+q}(1 + n_0)^{1-p-q}\frac{qn_0 + p}{n_0^{1-p}} - p - q.$$

Используя неравенство $a^\alpha \leqslant \alpha a + 1 - \alpha$, где $a > 0$, $0 < \alpha < 1$, оценим n_0^{1-p} и $\varphi(x_0)$:

$$\varphi(x_0) > \frac{qn_0 + p}{p + (1-p)n_0} - p - q = \frac{p(1-p-q)(1-n_0)}{p + (1-p)n_0} > 0.$$

Таким образом, $G(\xi, \eta) > 0$ в области Δ и, стало быть, для уравнения (1.4.6) при $m, n \geqslant 0$, $m + n > 0$, $F(x, y) \equiv 0$ справедлива теорема 1.3.6 и все утверждения, следующие из этой теоремы. В частности, отсюда следует единственность решения задачи Трикоми для уравнения (1.4.6) в области G с краевыми данными: $u = 0$ на $\Gamma \cup OC_1 \cup OC_2$ при всех $m, n \geqslant 0$, $m + n > 0$ $(0 \leqslant p,\ q < 1/2)$.

Замечание 1.4.3. Отметим, что уравнение (1.4.6) в G при $F(x, y) \equiv$ $\equiv 0$ изучалось во многих работах (см., например, [37, 68, 128, 222, 223, 74, 127, 32, 126]. В диссертациях [37, 127] при $n = m > 0$ доказан принцип экстремума с данными $u = 0$ на $\overline{OC_1}$ и $\overline{OC_2}$ в иной формулировке исходя из формулы решения задачи Дарбу для уравнения (1.4.7), а в статьях [68, 128] аналогичный принцип доказан, соответственно, при $m = n = 1$ и для случая m и n — натуральные числа и $m = n$. В работах [222, 223, 74] доказана теорема единственности решения задачи T с данными $u = 0$ на $OC_1 \cup OC_2 \cup \Gamma$ при $n = m > 0$ методом интегральных тождеств.

Пример 4. Рассмотрим уравнение (1.4.6) в области $D = G \cap \{x > 0\}$ (см. рис. 1.4.1), где m может принимать и отрицательные значения. Если в этом случае $n > 0$, $n \geqslant m \geqslant -n/(n+1)$ и $F \geqslant 0\,(\leqslant 0)$ на множестве $D_+ \cup D_-$, то для уравнения (1.4.6) справедлива теорема 1.3.1. Если же $n > 0$, $m \geqslant -n/(n+1)$ и $F \equiv 0$, то для уравнения (1.4.6) справедлива теорема 1.3.2.

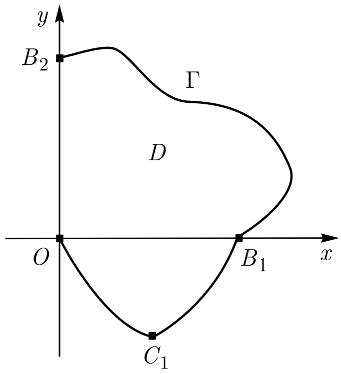

Рис. 1.4.1

В самом деле, если $n > 0$ и $n \geqslant m \geqslant -n/(n+1)$, то функция $h(\xi, \eta) > 0$ в Δ и для справедливости теоремы 1.3.1 достаточно проверить условие (1.2.2), т. е. неравенство $\alpha(0, \eta) \geqslant 0$ при $0 < \eta < l$. Очевидно, что $\alpha(0, \eta) = \eta^{p+q-1}(p+q) \geqslant 0$ на $[0, l]$.

Когда $n > 0$ и $m \geqslant -n/(n+1)$, $F(x, y) \equiv 0$, то из результатов примера 3 и рассмотренного выше случая вытекает справедливость условия (1.2.3). Следовательно, в этом случае справедлива теорема 1.3.2. Отсюда, в частности, следует единственность решения задачи Трикоми с краевыми данными $u = 0$ на $C_1O \cup OB_2 \cup \Gamma$ при всех $n > 0$ и $m \geqslant -n/(n+1)$.

Отметим, что в работе [198] доказана единственность решения задачи Трикоми для уравнения (1.4.6) в области D при $n > m > 0$ методом интегральных тождеств.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$Su \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \frac{k}{x} u_x = F(x, y), \tag{1.4.8}$$

где $k = \mathrm{const} > 0$, в области D из примера 4 (где только характеристики OC_1 и C_1B являются, соответственно, отрезками прямых $x + y = 0$ и $x - y = l_1 > 0$). При этом отрезок OB_2 оси $x = 0$ $(y > 0)$ является линией сингулярности коэффициента уравнения (1.4.8) на эллиптической границе $\sigma = OB_2 \cup B_2 \cup \Gamma$ в области D.

Как было показано в работе [167], постановка задачи Трикоми в этом случае существенным образом зависит от параметра k. А именно: при $k \geqslant 1$ в классе ограниченных в области D решений уравнения (1.4.8) отрезок OB_2 оси $x = 0$ освобождается от краевых условий. Краевые условия задачи Т при этом задаются на характеристике C_1O и на кривой Г, а при $0 < k < 1$ дополнительно задается условие $u|_{OB_2}$.

Теорема 1.4.1. *Если*: 1) $k \geqslant 2$, $F(x,y) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *на* D_+ *и* $F(x,y) \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) *в области* D_-; 2) $u(x,y)$ — *регулярное в области* D *решение уравнения* (1.4.8), *равное нулю на* OC_1; 3) $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) > 0$ ($\min\limits_{\overline{D}} u(x,y) < 0$), *то этот максимум* (*минимум*) *достигается только на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Если: 1) $k > 0$, $F(x,y) \equiv 0$; 2) u — *регулярное в области* D *решение уравнения* (1.4.8), *равное нулю на* $\overline{OC_1}$; 3) $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| > 0$, *то* $\max\limits_{\overline{D}} |u|$ *достигается только на кривой* $\overline{\Gamma}$ *при* $k \geqslant 1$ *и на кривой* $\overline{\sigma}$ *при* $0 < k < 1$.

Доказательство. На основании леммы 1 [167] при $k \geqslant 1$ $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) = u(Q) > 0$ не может достигаться на отрезке OB_2. Поэтому надо показать, что $Q \notin \overline{D}_- \cup D_+ \setminus B_1$. Для этого в силу теорем 1.3.1 и 1.3.2 достаточно проверить условия (1.2.2) и (1.2.3) для уравнения (1.4.7) при $p = 0$, $q = k/2$. При этих значениях из (1.4.7) имеем

$$a(\xi,\eta) = b(\xi,\eta) = \frac{q}{\xi+\eta}, \quad c(\xi,\eta) \equiv 0, \quad h(\xi,\eta) = \frac{q(q-1)}{(\xi+\eta)^2}.$$

Отсюда видно, что при $q \geqslant 1$ ($k \geqslant 2$) функция $h \geqslant 0$ в $\overline{\Delta}$ и, очевидно, условие (1.2.2) выполнено. Тем самым первая часть теоремы доказана, т. е. принцип экстремума установлен.

Пусть $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| = |u(Q)| > 0$, $F \equiv 0$. Не теряя общности, можно считать $u(Q) > 0$. Тогда в силу первой части теоремы остается рассмотреть случай $0 < q < 1$ ($0 < k < 2$).

Пусть $0 < q < 1$. В этом случае $h(\xi,\eta) < 0$ в $\overline{\Delta}$ и условие (1.2.3) равносильно неравенству $2\alpha(\xi,\eta) - \alpha(0,\eta) > 0$ в Δ. Справедливость этого неравенства в Δ можно показать так:

$$2\alpha(\xi,\eta) - \alpha(0,\eta) = q\Big[2(\xi+\eta)^{q-1} - \eta^{q-1}\Big] = \\ = q(\xi+\eta)^{q-1}\left[2 - \left(1+\frac{\xi}{\eta}\right)^{1-q}\right] > q(\xi+\eta)^{q-1}(2-2^{1-q}) > 0.$$

Таким образом, при всех $k > 0$ для уравнения (1.4.8) выполнено условие (1.2.3), которое и обеспечивает справедливость второй части теоремы.

Замечание 1.4.4. В работе [167, 168] доказан принцип экстремума для уравнения (1.4.8) при $F(x,y) \equiv 0$ и $k \geqslant 2$, $k = 1$. Случай $0 < k < 2$ изучен в [36, 131], где исходя из формулы решения задачи Дарбу для уравнения (1.4.8) в области D_- доказан принцип максимума при $F(x,y) \equiv 0$ в иной формулировке.

Пример 6. Пусть в уравнении (1.1.1) $K(y) = \operatorname{sgn} y$, $A(x,y) = B(x,y) \equiv 0$, $C(x,y) = -\lambda = \mathrm{const}$. В этом случае имеем известное уравнение Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром, достаточно хорошо изученное в работах [75, 136, 163]:

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = F(x,y). \tag{1.4.9}$$

На плоскости (x,y) перейдем к характеристическим координатам $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. При этом уравнение (1.4.9) примет вид

$$\big[1 - \operatorname{sgn}(\eta - \xi)\big](u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) - 2\big[1 + \operatorname{sgn}(\eta - \xi)\big]u_{\xi\eta} - \lambda u = F \tag{1.4.10}$$

в области D, D_- и D_+, соответственно, отображаются в области H, H_- и H_+.

Нетрудно заметить, что коэффициенты уравнения (1.4.10) в области $H_- \equiv \Delta$ не удовлетворяют условиям (1.2.2) и (1.2.3) ни при одном значении параметра λ. Поэтому для уравнения (1.4.9) прямо не удается применить теоремы 1.3.1 и 1.3.2. Тем не менее при некоторых ограничениях на λ справедлива следующая

Теорема 1.4.2. *Если*: 1) $0 \geqslant \lambda > -\lambda_1 = -\pi^2(t_2 - t_1)^{-2}$, *где* $t_2 = \max\limits_{\overline{H}}(\xi - \eta) = \max\limits_{\overline{D}} 2y$, $t_1 = \min\limits_{\overline{H}}(\xi - \eta) = \min\limits_{\overline{D}} 2y$; 2) $F(x,y) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *на* $\overline{D}_+ \cup D_-$; 3) $u(x,y)$ — *регулярное в области* D *решение уравнения* (1.4.9), *равное нулю на характеристике* $\overline{AC}$; 4) $\max\limits_{\overline{D}} u(x,y) > 0$ ($\min\limits_{\overline{D}} u(x,y) < 0$), *то* $\max\limits_{\overline{D}}[u \exp(-g)]$ ($\min\limits_{\overline{D}}[u \exp(-g)]$) *достигается на кривой* $\overline{\sigma}$.

Если: 1) $\lambda > -\lambda_1$ *и* $F(x,y) \equiv 0$; 2) $u(x,y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (1.4.9), *равное нулю на характеристике* $\overline{AC}$; 3) $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y)| > 0$, *то* $\max\limits_{\overline{D}} |u(x,y) \exp(-g)|$ *достигается на* $\overline{\sigma}$, *где* g — *достаточно гладкая функция, которая будет определена ниже.*

Доказательство. Пусть $u(\xi,\eta)$ — регулярное в H решение уравнения (1.4.10), равное нулю на характеристике AC. Введем новую функцию

$$v(\xi,\eta) = u(\xi,\eta) \exp(-g(\xi,\eta)), \tag{1.4.11}$$

которая является решением в области H уравнения

$$\widetilde{F}(\xi,\eta) \equiv \begin{cases} v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} + g_\xi v_\xi + g_\eta v_\eta + v\Big(g_{\xi\xi} + g_{\eta\eta} + g_\xi^2 + g_\eta^2 - \dfrac{\lambda}{2}\Big), & \xi > \eta, \\ v_{\xi\eta} + g_\eta v_\xi + g_\xi v_\eta + v\Big(g_{\xi\eta} + g_\xi g_\eta + \dfrac{\lambda}{4}\Big), & \xi < \eta, \end{cases}$$
$$\widetilde{F}(\xi,\eta) = \begin{cases} F(x,y)/2, & \xi > \eta, \\ -F(x,y)/4, & \xi < \eta. \end{cases} \tag{1.4.12}$$

Теперь покажем, что при соответствующем подборе функции g для уравнения (1.4.12) справедливы теоремы 1.3.1 и 1.3.2. Для этого достаточно, чтобы функция g удовлетворяла условиям

$$g_{\xi\xi} + g_{\eta\eta} + g_\xi^2 + g_\eta^2 - \frac{\lambda}{2} \leqslant 0 \quad \text{в} \quad H_+, \tag{1.4.13}$$

$$g_\eta \exp g - \int\limits_0^\xi |h(t,\eta)| \exp\left(g(t,\eta)\right) dt > 0 \quad \text{в} \quad H_-. \tag{1.4.14}$$

Поскольку функция $h(\xi,\eta)$ является инвариантом уравнения (1.4.10) относительно преобразования (1.4.11), то для уравнения (1.4.10) и (1.4.12) $h(\xi,\eta) = -\lambda/4$.

Пусть $\lambda \leqslant 0$. В этом случае $h(\xi,\eta) \geqslant 0$ в $\overline{\Delta}$ и поэтому условие (1.4.14) равносильно неравенству

$$g_\eta(0,\eta)\exp\left(g(0,\eta)\right) + \int\limits_0^\xi \exp\left(g(t,\eta)\right)\Big(g_{t\eta} + g_t g_\eta + \frac{\lambda}{4}\Big)\,dt > 0. \tag{1.4.15}$$

Функцию $g(\xi,\eta)$ будем искать в виде $g(\xi,\eta) = m(\xi+\eta) + \mu(\xi-\eta)$, где $m = \mathrm{const} > 0$, μ — функция от $(\xi-\eta)$. Тогда, соответственно, условия (1.4.13) и (1.4.15) принимают вид

$$\mu'' + \mu'^2 + m^2 \leqslant \lambda/4, \tag{1.4.16}$$

$$(m-\mu')e^{\mu(-\eta)} - \int\limits_0^\xi \Big(\mu'' + \mu'^2 - m^2 - \frac{\lambda}{4}\Big)e^{mt+\mu(t-\eta)}\,dt > 0. \tag{1.4.17}$$

В силу (1.4.16) $\mu'' + \mu'^2 - m^2 - \dfrac{\lambda}{4} < 0$, поэтому при $\mu' \leqslant m$ неравенство (1.4.17) всегда имеет место. Таким образом, для неизвестных m и $\mu(t) = \mu(\xi-\eta)$ получаем уравнение Риккати

$$\begin{cases} \mu''(t) + \mu'^2 = -d^2, & t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\ \mu'(t) \leqslant m, & d = (m^2 + |\lambda|/4)^{1/2}. \end{cases} \tag{1.4.18}$$

Решая систему (1.4.18), получим $\mu'(t) = d\,\mathrm{tg}\,[(k-t)d]$, где k — постоянная из промежутка

$$t_2 - \frac{\pi}{2d} < k < t_1 - \frac{1}{d}\,\mathrm{arctg}\,\frac{m}{d}.$$

Отсюда ясно, что функция $\mu'(t)$, удовлетворяющая системе (1.4.18), существует, если

$$0 < d < \Big(\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{m}{d}\Big)\Big/2(t_2 - t_1).$$

Из последнего неравенства при $m = 0$ находим условие $|\lambda| < \lambda_1$ относительно параметра λ, при котором существует функция $g(\xi, \eta)$, удовлетворяющая условиям (1.4.13) и (1.4.15).

Пусть $\lambda > 0$. Тогда для выполнения условий (1.4.13) и (1.4.14) достаточно положить $g(\xi, \eta) = m(\xi + \eta)$, где $m = \sqrt{\lambda}/2$. Тем самым теорема доказана.

Из этой теоремы, в частности, следует единственность решения задачи T для уравнения (1.4.9) в классе его регулярных (и обобщенных) в D решений при всех λ, удовлетворяющих неравенству $\lambda > -\lambda_1$.

Замечание 1.4.5. В работах [161, 162] была получена теорема единственности решения задачи T для уравнения (1.4.9) при любом $\lambda > 0$ на основании идей метода Трикоми [210] и операционного исчисления.

Пример 7. В области D (см. § 1.1) рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - \lambda u = F(x, y), \tag{1.4.19}$$

где λ — вещественная постоянная.

Теорема 1.4.3. *Если*: 1) $\lambda \geqslant 0$, $F(x, y) \geqslant 0$ *в* D *и* $F(x, y) \leqslant 0$ *в* D_-; 2) $u(x, y)$ — *регулярное решение уравнения* (1.4.19) *в области* D, *равное нулю на характеристике* AC; 3) $\max\limits_{\overline{D}} u(x, y) > 0$, *то* $\max\limits_{\overline{D}} (u \exp(-g))$ *достигается на* $\overline{\sigma}$.

Если: 1) $\lambda > -\pi^2(t_2 - t_1)^{-2}$ *и* $F(x, y) \equiv 0$; 2) $u(x, y)$ — *регулярное решение уравнения* (1.4.19) *в области* D, *равное нулю на характеристике* AC; 3) $\max\limits_{\overline{D}} |u(x, y)| > 0$, *то* $\max\limits_{\overline{D}} |u \exp(-g)|$ *достигается на кривой* $\overline{\sigma}$.

Доказательство. Рассуждая аналогично, как и при доказательстве теоремы 1.4.2, по формуле (1.4.11) введем вспомогательную функцию $v(\xi, \eta)$, которая является регулярным в области H решением уравнения (1.4.12), где коэффициент λ при $\xi < \eta$ следует заменить на $-\lambda$ и $\widetilde{F}(\xi, \eta) = F(x, y)/4$ при $\xi < \eta$. Отметим, что в случае уравнения (1.4.19) $h(\xi, \eta) = \lambda/4$. Для нахождения функции $g(\xi, \eta)$ воспользуемся условиями (1.4.13) и (1.4.14) и ее, как и выше, будем искать в виде $g(\xi, \eta) = m(\xi + \eta) + \mu(\xi - \eta)$.

Пусть $\lambda \geqslant 0$. Тогда $h \geqslant 0$, и для выполнения условий (1.4.13) и (1.4.14) достаточно положить $g(\xi, \eta) = m(\xi + \eta)$, где $m = \sqrt{\lambda}/2$.

Пусть теперь $\lambda < 0$. В этом случае условия (1.4.13) и (1.4.14), соответственно, принимают вид

$$\mu'' + \mu'^2 + m^2 \leqslant \lambda/4 \quad \text{в} \quad H_+, \tag{1.4.20}$$

$$(m-\mu')\,e^{g(\xi,\eta)}-\frac{|\lambda|}{4}\int\limits_0^{\xi}e^{g(t,\eta)}\,dt>0 \quad \text{в} \quad H_-. \tag{1.4.21}$$

Обозначим через $\theta(\xi)$ левую часть (1.4.21) при фиксированном $\eta\in[0,l]$. Когда $\mu''+\mu'^2\leqslant m^2-|\lambda|/4$, то функция $\theta(\xi)$ возрастает. Поэтому для выполнения (1.4.21) достаточно, чтобы

$$\mu''+\mu'^2\leqslant m^2-|\lambda|/4, \quad \mu'<m. \tag{1.4.22}$$

Следовательно, исходя из (1.4.20) и (1.4.22) при $m=0$ получаем условие для нахождения функции $\mu(t)=\mu(\xi-\eta)$:

$$\begin{cases}\mu''(t)+\mu'^2=-d^2, & t_1\leqslant t\leqslant t_2,\\ \mu'(t)<0, & d=\sqrt{|\lambda|}\,/2.\end{cases} \tag{1.4.23}$$

Решая систему (1.4.23), получим

$$\mu'(t)=d\,\mathrm{tg}\,[(k-t)d], \quad t_2-\frac{\pi}{2d}<k<t_1.$$

Из последнего неравенства видно, что функция $\mu'(t)$, удовлетворяющая системе (1.4.23) и условиям (1.4.20) и (1.4.21), существует, если

$$0<d<\frac{\pi}{2(t_2-t_1)} \quad \text{или} \quad |\lambda|<\frac{\pi^2}{(t_2-t_1)^2}.$$

Из этой теоремы следует, в частности, теорема единственности решения задачи T для уравнения (1.4.19) в классе его регулярных (обобщенных) в D решений при всех λ, удовлетворяющих неравенству $\lambda>-\lambda_1$.

Замечание 1.4.6. В работах [161, 162] на основании идей метода Трикоми и операционного исчисления для уравнения (1.4.19) была доказана теорема единственности решения задачи T при $0>\lambda>-\lambda_0$, где $\lambda_0>0$ — первое собственное число задачи Дирихле для оператора Лапласа в области $Q=D_+\cup D_+^*\cup AB$, а D_+^* — область, симметричная к D_+ относительно оси $y=0$.

Пример 8. Пусть в уравнении (1.3.7) $K(y)=\mathrm{sgn}\,y$, $F(x,y)\equiv 0$,

$$A(x,y)=\begin{cases}A_+(x,y)<0, & y\geqslant 0,\\ A_-(x,y), & y\leqslant 0,\end{cases}$$

$$B(x,y)=\begin{cases}B_+(x,y), & y\geqslant 0,\\ B_-(x,y), & y\leqslant 0,\end{cases}$$

$$C(x,y)=\begin{cases}C_+(x,y), & y\geqslant 0,\\ C_-(x,y), & y\leqslant 0;\end{cases}$$

$A_+(x,y)$, $B_+(x,y)$, $C_+(x,y) \in C(\overline{\Omega}_+)$; $C_-(x,y) \in C(\overline{\Omega}_-)$, $A_-(x,y)$, $B_-(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}_-)$.

При этих условиях докажем, что задача Трикоми для уравнения (1.3.7) с краевым условием $u = 0$ на $\overline{AC} \cup \overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1}$ в классе функций $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AC) \cap C^{1,2}_{x,y}(\Omega_+ \cup BB_0) \cap C^2(\Omega_-)$, $(L_2 u \equiv 0)$ на множестве $\Omega_- \cup \Omega_+ \cup BB_1$ может иметь не более одного решения.

Введем новую функцию $v(x,y){=}u(x,y)\exp(-\mu x)$, где $\mu{=}\mathrm{const} > 0$, которая является решением уравнения

$$\begin{cases} v_{yy} + Av_x + Bv_y + (C + \mu A)v = 0, \quad y > 0, \\ v_{xx} - v_{yy} + (2\mu - A)v_x - Bv_y + (\mu^2 - C - A\mu)v = 0, \quad y < 0. \end{cases} \tag{1.4.24}$$

В области Ω_- перейдем к характеристическим координатам $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Тогда уравнение (1.4.24) при $y < 0$ примет вид

$$v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}(2\mu - A - B)v_\xi + \frac{1}{4}(2\mu - A + B)v_\eta + \frac{1}{4}(\mu^2 - A\mu - C)v = 0, \tag{1.4.25}$$

а область Ω_- отобразится в область Δ (см. § 1.2).

Теперь за счет выбора постоянной μ покажем, что коэффициенты уравнения (1.4.24) удовлетворяют условиям теоремы 1.3.10. Для этого достаточно потребовать выполнения двух условий:

$$C - \mu|A| \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega_+, \tag{1.4.26}$$

$$\alpha(\xi,\eta) - \int_0^\xi \beta(t,\eta)|h(t,\eta)|\,dt > 0 \quad \text{в} \quad \Delta. \tag{1.4.27}$$

В случае уравнения (1.4.25):

$$a(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(2\mu - A - B), \quad b(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(2\mu - A - B),$$

$$C(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(\mu^2 - A\mu - C),$$

$$\beta = e^{\mu\xi/2}e^g, \quad g = -\frac{1}{4}\int (A - B)\,d\xi.$$

Тогда левая часть условия (1.4.27) принимает вид

$$\frac{1}{4}(2\mu - A - B)e^{\xi\mu/2}e^g - \int_0^\xi e^{\mu t/2}e^{g(t,\eta)}|h(t,\eta)|\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4}(2\mu - A - B)e^{\mu\xi/2}e^g - e^{\mu\xi/2}\int_0^\xi e^{g(t,\eta)}|h(t,\eta)|\,dt.$$

Отсюда видно, что если $\mu > \max\{0, \mu_1\}$,

$$\mu_1 = \max_{\overline{\Delta}} \left\{ 2e^{-g} \int_0^{\xi} e^{g(t,\eta)} |h(t,\eta)|\, dt + \frac{1}{2}(A+B) \right\},$$

то условие (1.4.27) выполнено. А для справедливости условия (1.4.26) достаточно взять

$$\mu \geqslant \mu_2 = \max_{\overline{\Omega}_+} \frac{C}{|A|}.$$

Таким образом, если $\mu > \max\{0, \mu_1, \mu_2\}$, то для уравнения (1.4.24) имеет место теорема 1.3.10. Отсюда следует, что $v(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$ и, стало быть, $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Следовательно, в классе регулярных в Ω решений уравнения (1.3.7) при $K(y) = \operatorname{sgn} y$ задача Трикоми не имеет вещественного спектра.

§ 1.5. К вопросу о существовании решения задачи Трикоми

Рассмотрим уравнение (1.1.1) при $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n$, $n \geqslant 0$, $F(x,y) \equiv 0$, т. е.

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = 0, \tag{1.5.1}$$

в области D (см. рис. 1.1.1), ограниченной кривой Γ из класса Ляпунова, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A = (0,0)$ и $B = (l,0)$, и характеристиками AC и CB уравнения (1.5.1).

Пусть $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ, s — длина дуги, отсчитываемая от точки B; S — длина кривой Γ; Γ_0 — «нормальная кривая», заданная уравнением

$$\Gamma_0\colon\ \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{4}{(n+2)^2} y^{n+2} = \left(\frac{l}{2}\right)^2;$$

D_0 — область, ограниченная кривыми σ_0, AC, CB; $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_{0+} = D_0 \cap \{y > 0\}$, $D_{0-} = D \cap \{y < 0\}$.

Для уравнения (1.5.1) в области D поставим задачу Трикоми.

Задача Т. *Найти $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{1.5.2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0 \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{1.5.3}$$

$$u(x,y)\Big|_{\Gamma} = u(x(s), y(s)) = \varphi(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant S; \tag{1.5.4}$$

$$u(x,y)\Big|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l/2, \tag{1.5.5}$$

где $\psi(0) = \varphi(S)$, φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции.

Функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (1.5.2)–(1.5.5), назовем регулярным решением задачи Т для уравнения (1.5.1).

Равномерный в $\overline{D}$ предел последовательности регулярных решений задачи Т для уравнения (1.5.1) назовем обобщенным решением задачи Т.

Известно, что в большинстве работ по уравнениям смешанного типа теорема существования регулярного или обобщенного в определенном смысле решения задачи Т получена в предположении, что кривая Γ в точках A и B оканчивается сколь угодно малыми дугами нормальной кривой. Принцип экстремума для уравнения смешанного типа позволяет снять это ограничение относительно кривой Γ. Ранее это впервые было показано А.В. Бицадзе [18, 23] для уравнения (1.5.1) при $n = 0$, $A = B = C \equiv 0$, затем К.И. Бабенко [5, 7], Жерменем и Бадером [242] для уравнения (1.5.1) при $n = 1$, $A = B = C \equiv 0$ (см. также работы [102, 104]).

В этом параграфе при определенных условиях альтернирующим методом типа Шварца доказывается теорема существования обобщенного решения задачи Т для уравнения (1.5.1) без указанных выше ограничений на подход кривой Γ к оси $y = 0$.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты уравнения (1.5.1) $A(x, y)$, $B(x, y) \in C^1(\overline{D}_+) \cap C^1(\overline{D}_-)$, $C(x, y) \in C(\overline{D}_+) \cap C(\overline{D}_-)$ и удовлетворяют условиям теоремы о принципе экстремума (теорема 1.3.1).

Теорема 1.5.1. *Пусть в области D при условии, когда кривая Γ оканчивается в точках A и B сколь угодно малыми дугами «нормальной» кривой, существует регулярное решение задачи Т для уравнения* (1.5.1). *Тогда если функция $\varphi(s)$ непрерывна на $[0, S]$ и $\psi(x)$ — достаточно гладкая (т. е. функция $\psi(x)$ такова, что при достаточно гладкой функции $\varphi(s)$ выполнено условие теоремы* 1.5.1) *на* $[0, l/2]$, $\psi(0) = \varphi(0) = \varphi(S) = 0$, *то существует единственное обобщенное решение $u(x, y)$ задачи Т с граничными данными $u = \varphi$ на Γ и $u = \psi$ на AC при произвольном подходе кривой Γ к оси $y = 0$, за исключением случаев касания.*

Предварительно установим следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1.5.1. *Если $u \in C(\overline{D}_+) \cap C^2(D_+)$, $Lu \equiv 0$ в области D_+, $u = 0$ на кривой Γ, то для любой кусочно-гладкой кривой γ, лежащей на $D_+ \cup \sigma$, с концами в точках A и B существует постоянная $\theta \in (0, 1)$ такая, что справедлива оценка*

$$\max_{\overline{\gamma}} |u(x, y)| \leqslant \theta \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |u(x, 0)|.$$

Справедливость этой леммы следует из принципа максимума для эллиптических уравнений [249].

Лемма 1.5.2. *Если $D_{0+} \cup \Gamma_0 \subset D_+$, $\varphi_0(x) \in C[0, l]$, $\psi(x)$ — достаточно гладкая на $[0, l/2]$, $\varphi_0(0) = \psi(0)$, то существует в области D_0*

обобщенное решение задачи T с граничными данными $u = \varphi_0$ *на* Γ_0 *и* $u = \psi$ *на* AC.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_{0n}(x)\}$ — последовательность гладких функций, удовлетворяющих условиям: $\lim\limits_n \varphi_{0n}(x) = \varphi_0(x)$ равномерно на $[0, l]$ и $\varphi_{0n}(0) = \varphi_0(0)$.

По условию теоремы 1.5.1 существует регулярное решение $u_n(x, y)$ задачи T с краевыми данными $u_n = \varphi_{0n}$ на Γ_0 и $u_n = \psi$ на характеристике AC.

В силу следствия 1.3.1 из принципа экстремума для уравнения (1.5.1) в $\overline{D}_0$ следует оценка

$$|u_n(x, y) - u_m(x, y)| \leqslant \max_{\overline{\Gamma}_0} |\varphi_{0n} - \varphi_{0m}|.$$

Отсюда следует, что в $\overline{D}_0$ последовательность $\{u_n(x, y)\}$ регулярных решений задачи T равномерно сходится. Пусть

$$\lim_n u_n(x, y) = u(x, y).$$

Ясно, что $u(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}_0$, $u = \varphi_0$ на $\overline{\Gamma}_0$ и $u = \psi$ на $\overline{AC}$. Кроме того, при $y > 0$ функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.5.1) [23, 89] и при $\psi = 0$ справедлива оценка

$$|u(x, y)| \leqslant \max_{\overline{\Gamma}_0} |\varphi_0|. \tag{1.5.6}$$

Лемма 1.5.3. *Пусть* $D_{0+} \cup \Gamma_0 \subset D_+$. *Если функция* $\varphi(s)$ *непрерывна на* $[0, S]$ *и* $\psi(x)$ — *достаточно гладкая на* $[0, l/2]$, *то существует обобщенное решение* $u(x, y)$ *задачи T.*

Доказательство. Для построения такого решения применим альтернирующий метод типа Шварца. В областях D_+ и D_0 построим две последовательности решений уравнения (1.5.1). В силу леммы 1.5.2 в D_0 существует обобщенное решение $z_0(x, y)$ задачи T с данными $z_0 = 0$ на кривой Γ_0 и $z_0 = \psi$ на характеристике AC.

В области D_+ в силу результатов [23, 89] существует решение задачи Дирихле с данными

$$u_0 = \varphi \quad \text{на} \quad \overline{\Gamma} \quad \text{и} \quad u_0 = z_0 \quad \text{на отрезке} \quad \overline{AB}.$$

Далее: $z_n(x, y)$ — решение задачи T в области D_0 с граничными условиями

$$z_n(x, y) = u_{n-1}(x, y) \quad \text{на} \quad \overline{\Gamma}_0 \quad \text{и} \quad z_n = \psi \quad \text{на} \quad \overline{AC},$$

где $n = 1, 2, \ldots,$ $u_n(x, y)$ — решение задачи Дирихле для уравнения (1.5.1) в области D_+ с данными

$$u_n(x, y) = \varphi \quad \text{на} \quad \overline{\Gamma} \quad \text{и} \quad u_n = z_n \quad \text{на} \quad \overline{AB}.$$

Покажем, что последовательности $\{u_n(x,y)\}$ и $\{z_n(x,y)\}$ равномерно сходятся в замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_0$. В самом деле, в силу принципа максимума для эллиптических уравнений

$$|u_{n+1}-u_n| \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant l} |z_{n+1}(x,0)-z_n(x,0)| \leqslant \max_{\overline{D}_0} |z_{n+1}-z_n|. \qquad (1.5.7)$$

С другой стороны, в силу оценки (1.5.6) и леммы 1.5.1

$$|z_{n+1}-z_n| \leqslant \max_{\overline{\Gamma}_0} |u_n-u_{n-1}| \leqslant \theta \max_{0\leqslant x\leqslant l} |u_n(x,0)- \\ - u_{n-1}(x,0)| \leqslant \theta \max_{\overline{D}_0} |z_n-z_{n-1}|.$$

Продолжая это рассуждение шаг за шагом, получим

$$|z_{n+1}-z_n| \leqslant \theta^n \max_{\overline{D}_0} |z_1-z_0|. \qquad (1.5.8)$$

А из оценок (1.5.7) и (1.5.8) следует, что

$$|u_{n+1}-u_n| \leqslant \theta^n \max_{\overline{D}_0} |z_1-z_0|. \qquad (1.5.9)$$

Тогда из неравенств (1.5.8) и (1.5.9) вытекает, что $\lim\limits_n z_n(x,y) = z(x,y)$ равномерно в $\overline{D}_0$ и $\lim\limits_n u_n(x,y) = u(x,y)$ равномерно в $\overline{D}_+$.

Очевидно, что в $\overline{D}_{0+}$ функции $z(x,y) \equiv u(x,y)$. Следовательно, функция $u(x,y)$ является «аналитическим» продолжением функции $z(x,y)$ и регулярным решением уравнения (1.5.1) в области D_+. Кроме того, при $\psi = 0$

$$|u(x,y)| \leqslant \max_{\overline{\Gamma}} |\varphi|. \qquad (1.5.10)$$

Лемма 1.5.4. *Пусть выполнены все условия леммы* 1.5.3 *и* $\varphi(s) > 0$ *на* $(0,S)$, *тогда существует обобщенное решение задачи* T *такое, что* $u = 0$ *на* AC, $u(x,y) \geqslant 0$ *в* $\overline{D}$ *и* $u(x,y) > 0$ *в* $D_+ \cup \Gamma$.

Доказательство. По лемме 1.5.3 существует обобщенное решение $u(x,y)$ задачи T для уравнения (1.5.1) с граничными данными $u = \varphi$ на Γ и $u = 0$ на AC. В области D_+ такое решение $u(x,y)$ задачи T является регулярным решением уравнения (1.5.1). Если же $\varphi(s) > 0$ на $(0,S)$, то в силу следствия 1.3.4 $u(x,y) \geqslant 0$ в $\overline{D}$. Пусть $u(Q_0) = 0$, $Q_0 \in D_+$. Поскольку $u(x,y)$ в области D_+ является регулярным решением уравнения (1.5.1), то в силу результатов Хопфа [249, 2] функция $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_+$, что противоречит тому, что $u > 0$ на кривой $\Gamma \to \sigma$.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.5.1, которое проведем по схеме, предложенной в работах [5, 7].

Доказательство теоремы 1.5.1. Пусть кривая Γ подходит к оси $y = 0$ не ортогонально и не касаясь оси $y = 0$, как это, например, указано на рис. 1.5.1.

1°. Пусть $u = \psi \equiv 0$ на характеристике AC; предположим, что $\varphi(s) = 0$ при $y < h$ и $\varphi(s) \geqslant 0$.

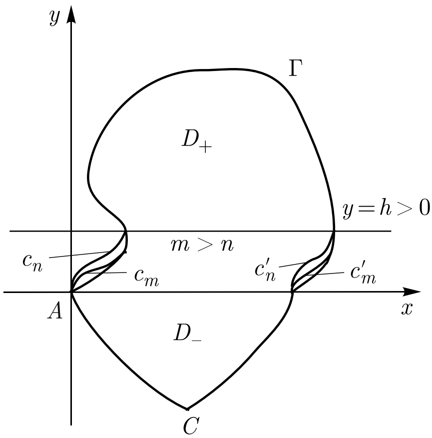

Рис. 1.5.1

Построим последовательность дуг Γ_n, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условиям:

1) Γ и Γ_n совпадают при $y \geqslant h_n$, $h_1 = h$, $h_n \to 0$;

2) Γ_n оканчивается в точках A и B малыми дугами c_n и c'_n «нормальных» кривых;

3) Γ_n — гладкая кривая из класса Ляпунова;

4) дуги c_n и c'_n стягиваются, соответственно, в точки A и B при $n \to \infty$.

Пусть D_n — область, ограниченная дугой Γ_n и характеристиками AC и CB. На кривой Γ_n определим функцию $\varphi_n(s)$ следующим образом:

$$\varphi_n(s) = \begin{cases} \varphi(s), & y \geqslant h, \\ 0, & y < h. \end{cases}$$

По условию в области D_n существует регулярное решение $u_n(x, y)$ задачи T с граничными данными $u_n = \varphi_n$ на Γ_n и $u_n = \psi \equiv 0$ на AC.

Пусть $z(x, y)$ — обобщенное в области D^* с границей $\partial D^* = \Gamma^* \cup \cup AC \cup CB$ решение задачи T, равное нулю на AC и $z(x, y) > 0$ в D^*_+, где $D^*_- \equiv D_-$, $D^*_+ \supset D_+ \cup \Gamma$. Такое решение в силу леммы 1.5.4 существует. Поскольку $z(x, y) > 0$ в D^*_+, можно найти такую постоянную M, не зависящую от n, что на кривой Γ_n справедливо неравенство $Mz - u_n \geqslant 0$. Отсюда на основании следствия 1.3.4

$$Mz - u_n \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \overline{D}_n. \tag{1.5.11}$$

Пусть $D_n \cap D = G_n$; положим

$$v_n(x, y) = \begin{cases} u_n(x, y), & (x, y) \in \overline{D}_n, \\ 0, & (x, y) \in \overline{D} \setminus \overline{D}_n. \end{cases}$$

Теперь оценим $|v_m - v_n|$, $m > n$, в $\overline{D}$. Пусть K_n и K'_n — два круга с центрами в точках A и B, внутри которых содержатся, соответственно, дуги c_n и c'_n, причем радиусы этих кругов стремятся к нулю при $n \to \infty$. Обозначим через $\varepsilon_n = \max z(x, y)$ в $\overline{K}_n$ и $\overline{K'}_n$. Тогда из оценки (1.5.11) следует, что на границе G_n при $y > 0$

$$|v_m - v_n| = |u_m - u_n| \leqslant 2Mz \leqslant 2M\varepsilon_n.$$

Следовательно, всюду в $\overline{G}_n$ справедлива оценка

$$|v_m - v_n| \leqslant 2M\varepsilon_n.$$

Очевидно, что для точек $(x, y) \in \overline{D} \cup \overline{D}_m \setminus \overline{D}_n$

$$0 \leqslant v_m \leqslant M\varepsilon_n.$$

Для точек $(x, y) \in \overline{D} \setminus \overline{D}_m$ справедливо $v_n(x, y) = v_m(x, y) \equiv 0$. Поэтому для $(x, y) \in \overline{D}$

$$|v_m - v_n| \leqslant 2M\varepsilon_n.$$

Поскольку $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, то из последней оценки следует, что последовательность $\{v_n(x, y)\}$ равномерно сходится в $\overline{D}$. Пусть

$$\lim_n v_n(x, y) = \lim_n u_n(x, y) = u(x, y).$$

Ясно, что функция $u(x, y)$ принимает на Γ значения $\varphi(s)$, а на характеристике AC значение $u = 0$. В области D_+ $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.5.1), и она непрерывна в $\overline{D}$. При этом справедлива оценка

$$0 \leqslant u(x, y) \leqslant \max_{\overline{\Gamma}} \varphi. \tag{1.5.12}$$

2°. Пусть $\varphi(s)$ непрерывна и неотрицательна на $[0, S]$ и $\varphi(0) = \varphi(S) = 0$. Построим последовательность $\{\varphi_n(s)\}$ непрерывных и неотрицательных функций, исчезающих в достаточно малых окрестностях точек $s = 0$ и $s = S$ и таких, что

$$\varphi_1(s) \leqslant \varphi_2(s) \leqslant \ldots, \qquad \lim_n \varphi_n(s) = \varphi(s)$$

равномерно на $[0, S]$. По функциям $\varphi_n(s)$ в силу пункта 1° построим последовательность $\{u_n(x, y)\}$ решений задачи T. Тогда на основании оценки (1.5.12) при $m > n$ в $\overline{D}$

$$0 \leqslant u_m - u_n \leqslant \max_{\overline{\Gamma}} (\varphi_m - \varphi_n).$$

Следовательно, в $\overline{D}$ существует равномерный предел

$$\lim_n u_n(x, y) = u(x, y).$$

В области D_+ функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.5.1), $u = \varphi$ на Γ, $u = 0$ на AC и $u(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$. Кроме того, имеет место

$$0 \leqslant u(x, y) \leqslant \max_{\Gamma} \varphi. \tag{1.5.13}$$

3°. Пусть теперь $\varphi(s)$ — произвольная непрерывная функция и $\varphi(0) = \varphi(S) = 0$. В этом случае функцию $\varphi(s)$ можно представить в виде разности двух неотрицательных функций:

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_-, \quad |\varphi| = \varphi_+ + \varphi_-,$$

где $\varphi_+(0) = \varphi_+(S) = \varphi_-(0) = \varphi_-(S) = 0$. В силу пункта 2° решение задачи Т определяется формулой

$$u(x, y) = u_+(x, y) - u_-(x, y),$$

где $u_+(x, y)$ и $u_-(x, y)$ строятся, соответственно, по функциям φ_+ и φ_-. На основании оценки (1.5.13)

$$|u(x, y)| \leqslant u_+(x, y) + u_-(x, y) \leqslant \max_{\overline{\Gamma}} (\varphi_+ + \varphi_-) = \max_{\overline{\sigma}} |\varphi|. \quad (1.5.14)$$

4°. Пусть $u = \psi \neq 0$ на AC. Пусть D^* — область из пункта 1° с границей $\partial D^* = \Gamma^* \cup AC \cup CB$, причем $D_0 \cup \Gamma_0 \subset D^*$. По лемме 1.5.3 существует решение $u^*(x, y)$ задачи Т, непрерывное в $\overline{D}^*$, с граничными данными

$$u^* = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma^* \quad \text{и} \quad u^* = \psi \quad \text{на} \quad AC.$$

Если $\varphi^*(s) = u^*$ на Γ, то решение искомой задачи Т для области D определяется формулой

$$u(x, y) = u^*(x, y) + \overline{u}(x, y),$$

где $\overline{u}(x, y)$ — решение задачи Т в области D с граничными условиями

$$\overline{u} = \varphi(s) - \varphi^*(s) \quad \text{на} \quad \Gamma \quad \text{и} \quad \overline{u} = 0 \quad \text{на} \quad AC.$$

Решение $\overline{u}(x, y)$ задачи Т, непрерывное в $\overline{D}$, существует, что было показано в предыдущих пунктах 1°–3°.

Единственность построенного решения $u(x, y)$ задачи Т следует из оценок (1.5.10) и (1.5.14) или из следствия 1.3.3.

Доказанная теорема 1.5.1 позволяет получить соответствующие теоремы существования обобщенного решения задачи Трикоми при произвольном подходе кривой σ к оси $y = 0$ для каждого примера из § 1.4, где справедлив принцип экстремума. При этом, имея интегральные представления решений краевых задач Хольмгрена и Дарбу (или Коши) в областях эллиптичности и гиперболичности, можно повышать гладкость обобщенного решения задачи Т в области гиперболичности, как это показано в работе [5] в случае уравнения Трикоми.

§ 1.6. Принцип максимума для многомерного уравнения смешанного типа в классе его осесимметрических решений

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=0}^{n} u_{x_i x_i} + \operatorname{sgn} z \cdot u_{zz} + \frac{2p}{|z|} u_z = 0, \tag{1.6.1}$$

где $n \geqslant 2$, $0 \leqslant 2p < 1$, $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = u(x, z)$, в области $G \subset \subset \mathbb{R}^{n+1}$, полученной вращением вокруг оси z области D из плоскости (x_1, z). Плоская область D ограничена отрезком AK оси z, простой кривой Жордана Γ, лежащей в первой четверти с концами в точках K и B, и отрезками AC и CB, где $A = (0,0)$, $B = (l, 0)$, $K = (0, k)$, $C = (l/2, -l/2)$, $k > 0$.

Пусть $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, $r \geqslant 0$; $G_\pm = G \cap \{z \gtrless 0\}$, $G_0 = \{(x,z)\colon\, r^2 = l^2, z = 0\}$; $K_1\colon\, z + r = 0, -l/2 < z < 0$; $K_2\colon\, z - r = -l$, $-l/2 \leqslant z < 0$; $\Sigma = \partial G \setminus \overline{K_1 \cup K_2}$ — эллиптическая часть границы области G; K_1 и K_2 — конические характеристические поверхности уравнения (1.6.1) при $z < 0$ (см. рис. 1.6.1).

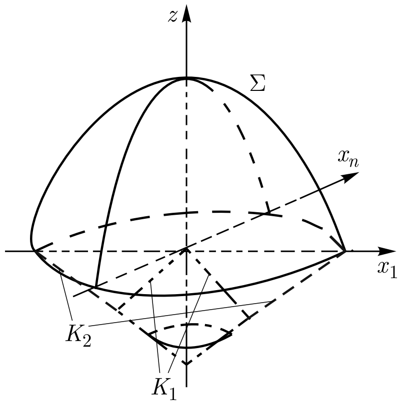

Рис. 1.6.1

Для уравнения (1.6.1) в области G поставим пространственный аналог задачи Трикоми в классе решений $u(x,z)$, зависящих только от r и z.

Задача T. *Найти* $u(x,z) = u(r,z)$, *удовлетворяющую следующим условиям*:

$$u(x,z) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G \cup K_1) \cap C^2(G_+ \cup G_-); \tag{1.6.2}$$

$$Lu \equiv 0 \quad \text{в} \quad G_+ \cup G_-; \tag{1.6.3}$$

$$\lim_{z\to 0+0} z^{2p}u_z = \lim_{z\to 0-0}(-z)^{2p}u_z, \quad (x,z)\in G_0; \tag{1.6.4}$$

$$u(r,z)=\varphi(r,z), \quad (x,z)\in\Sigma; \tag{1.6.5}$$

$$u(r,z)=\psi(r,z), \quad (x,z)\in K_1, \tag{1.6.6}$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работе [21] изучена задача T, в которой условие (1.6.6) задано на конусе K_2, для уравнения (1.6.1) при $n=3$, $p=0$ и когда поверхность Σ — полусфера. В [168] задача T исследована для уравнения (1.6.1) при $n=2$ и $p=0$ в классе решений, представимых в цилиндрических координатах в виде тригонометрического ряда.

Здесь для уравнения (1.6.1) в классе его осесимметрических решений устанавливается принцип максимума и на его основе доказывается однозначная обобщенная разрешимость краевой задачи T.

1.6.1. Единственность решения задачи T. Функцию $u(x,z)$, удовлетворяющую условиям (1.6.2)–(1.6.4), назовем регулярным в области G решением уравнения (1.6.1).

Теорема 1.6.1 (Принцип максимума). *Пусть $u(x,z)$ — регулярное решение уравнения* (1.6.1), *равное нулю на конической поверхности K_1. Тогда если $\max\limits_{\overline{G}}|u(r,z)|>0$, то этот максимум достигается на поверхности Σ.*

Доказательство. Поскольку $u(r,z)$ зависит только от r и z, перейдем от (x,z) к плоскости (r,z). В координатах (r,z) уравнение (1.6.1) имеет вид

$$Sv \equiv v_{rr} + \operatorname{sgn} z\cdot v_{zz} + \frac{2q}{r}v_r + \frac{2p}{|z|}v_z = 0, \tag{1.6.7}$$

где $2q=n-1\geqslant 1$, а области G_+ и G_- преобразуются, соответственно, в области $D_+=D\cap\{z>0\}$ и $D_-=D\cap\{z<0\}$ (см. рис. 1.6.2).

Функция $v(r,z)$ в области D обладает следующими свойствами:

$$v\in C(\overline{D})\cap C^1(D_-\cup AC)\cap C^2(D_-\cup D_+\cup AK); \tag{1.6.8}$$

$$Sv\equiv 0, \quad (r,z)\in D_-\cup D_+\cup AK; \tag{1.6.9}$$

$$\lim_{z\to 0+0} z^{2p}v_z = \lim_{z\to 0-0}(-z)^{2p}v_z, \quad 0<r<l, \tag{1.6.10}$$

$$v(r,z)=\varphi(r,z), \quad (r,z)\in\Gamma; \tag{1.6.11}$$

$$v(r,z)=\psi(r,z), \quad (r,z)\in AC. \tag{1.6.12}$$

В дальнейшем покажем, что если функция $v(r,z)$ удовлетворяет условиям (1.6.8)–(1.6.11) и $\psi(r,z)\equiv 0$, то $\max\limits_{\overline{D}}|v|>0$ достигается на кривой $\overline{\Gamma}$. Отсюда уже будет вытекать справедливость теоремы 1.6.1.

В области D_- перейдем к характеристическим координатам $\xi = r + z$ и $\eta = r - z$. Тогда уравнение (1.6.7) примет вид

$$S_0 v \equiv v_{\xi\eta} + \left(\frac{q}{\xi+\eta} + \frac{p}{\eta-\xi}\right) v_\xi + \left(\frac{q}{\xi+\eta} - \frac{p}{\eta-\xi}\right) v_\eta = 0, \qquad (1.6.13)$$

а при этом область D_- отобразится в область Δ (см. § 1.2).

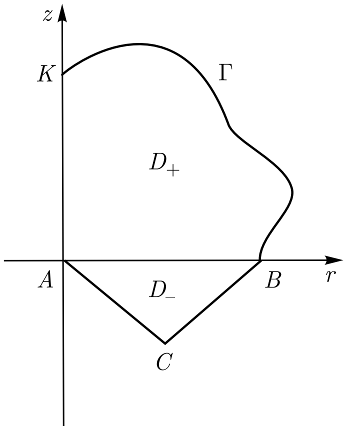

Рис. 1.6.2

Лемма 1.6.1. *Если* $v \in C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta \cup C_0A_0) \cap C^2(\Delta)$, $S_0 v \equiv 0$ *в* Δ, $v = 0$ *на* A_0C_0, *то* $\max\limits_{\overline{\Delta}} |v(\xi,\eta)| > 0$ *достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Для доказательства этой леммы достаточно проверить условие (1.2.3) для коэффициентов уравнения (1.6.13):

$$\alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)|h(t,\eta)|\,dt > 0, \quad 0 < \xi < \eta < l.$$

В случае уравнения (1.6.13) (см. пример 3 из § 1.4)

$$a(\xi,\eta) = \frac{q}{\xi+\eta} + \frac{p}{\eta-\xi}, \quad b(\xi,\eta) = \frac{q}{\xi+\eta} - \frac{p}{\eta-\xi}, \quad c(\xi,\eta) \equiv 0,$$

$$h(\xi,\eta) = \frac{q(q-1)}{(\eta+\xi)^2} + \frac{p(1-p)}{(\eta-\xi)^2}, \quad \beta(\xi,\eta) = (\eta+\xi)^q(\eta-\xi)^p,$$

$$\alpha(\xi,\eta) = p(\eta+\xi)^q(\eta-\xi)^{p-1} + q(\eta+\xi)^{q-1}(\eta-\xi)^p.$$

Если $q \geqslant 1$, то $h \geqslant 0$ в $\overline{\Delta}$ и в этом случае условие (1.2.2) равносильно условию (1.2.3) (см. § 1.2). А для выполнения условия (1.2.2) достаточно, чтобы $\alpha(0,\eta) > 0$ при $0 < \eta < l$. Очевидно, что $\alpha(0,\eta) = (p+q)\eta^{p+q-1} > 0$.

Пусть $1/2 \leqslant q < 1$. Тогда производная $h'_\xi > 0$ при $0 \leqslant \xi \leqslant \eta$, поэтому на $0 < \eta = \text{const} \leqslant l$

$$h_{\min} = \frac{1}{\eta^2}(q-p)(q+p-1) \leqslant h(\xi,\eta) \leqslant +\infty.$$

Отсюда видно, что при $p+q \geqslant 1$ функция $h(\xi,\eta) \geqslant 0$ в $\overline{\Delta}$, а при $p+q<1$ на $[0,\eta]$ она меняет свой знак с минуса на плюс, обращаясь в нуль в единственной точке из $[0,\eta]$.

Если $p+q \geqslant 1$, то $h(\xi,\eta) \geqslant 0$ в $\overline{\Delta}$ и для справедливости условия (1.2.2) достаточно, чтобы $\alpha(0,\eta) > 0$ на $[0,l]$. Последнее неравенство всегда выполнено.

Пусть $p+q<1$. Поскольку $0 \leqslant p < 1/2$ и $1/2 \leqslant q < 1$, то $1/2 \leqslant p+q < 3/2$. Поэтому остается рассмотреть случай, когда $1/2 \leqslant p+q < 1$. Пусть (ξ,η) — произвольная, но фиксированная точка множества Δ. Пусть $t_0 \in [0,\xi]$ — точка, в которой $h(t_0,\eta)=0$. В дальнейшем, рассуждая аналогично примеру 3 из § 1.4, обозначим через $G(\xi,\eta)$ левую часть условия (1.2.3) и покажем, что $G(\xi,\eta)>0$. Действительно,

$$G(\xi,\eta) = \eta^{p+q-1}\Big[2q\Big(1+\frac{t_0}{\eta}\Big)^{q-1}\Big(1-\frac{t_0}{\eta}\Big)^{p} + \\ + 2p\Big(1+\frac{t_0}{\eta}\Big)^{q}\Big(1-\frac{t_0}{\eta}\Big)^{p-1} - p - q\Big].$$

Введем в рассмотрение на сегменте $[0,1]$ функцию

$$\varphi(x) = 2q(1+x)^{q-1}(1-x)^p + 2p(1+x)^q(1-x)^{p-1} - p - q.$$

Точно так же, как в примере 3 из § 1.4, показывается, что функция $\varphi(x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Отсюда уже следует положительность функции $G(\xi,\eta)$ в Δ. Тем самым лемма 1.6.1 доказана.

В дальнейшем, не теряя общности, можно считать, что $\max\limits_{\overline{D}} |v(r,z)| = \max\limits_{\overline{D}} v(r,z) = v(Q) > 0$. Из леммы 1.6.1 следует, что точка $Q \in \overline{D}_+$. В области D_+ для уравнения (1.6.7) имеет место внутренний принцип максимума для эллиптических уравнений, поэтому точка $Q \in \partial D_+ \setminus A$.

Лемма 1.6.2. *Если $v(r,z) \in C(\overline{D}_+) \cap C^2(D_+)$, $Sv \equiv 0$ в области D_+, то*

$$\lim_{r\to 0+0} v_r(r,z) = 0, \quad 0<z<k. \tag{1.6.14}$$

Доказательство. На плоскости (r,z) введем новые переменные $r=\sqrt{2s}$, $z=t>0$. Тогда уравнение (1.6.7) принимает вид

$$sv_{ss} + v_{tt} + \Big(\frac{1}{2}+q\Big)v_s + \frac{2p}{t}v_t = 0, \tag{1.6.15}$$

а область D_+ отобразится в область D'_+, отрезок AK перейдет в отрезок AK'. Пусть $D^\delta_+ = D'_+ \cap \{t > \delta\}$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число. В области D^δ_+ уравнение (1.6.15) является эллиптическим уравнением с характеристическим вырождением. Из работы М.В. Келдыша [89] следует, что для уравнения (1.6.15) в области D^δ_+ корректно поставлена задача E в классе его ограниченных решений. В работе П.И. Лизоркина [117] показано, что решение задачи E аналитично вплоть до линии вырождения $s = 0$. Из этих результатов следует, что производная v_s непрерывна вплоть до отрезка AK'. Поскольку $v_s = v_r/r$, то отсюда вытекает равенство (1.6.14).

Отметим, что в работе [167] показана справедливость леммы 1.6.2 для уравнения (1.6.7) при $p = 0$ исходя из явного решения краевой задачи E, которое при определенных условиях на кривую Γ было построено методом теории потенциала.

Лемма 1.6.3. *Если*: 1) $v(r,z) \in C(\overline{D}_+) \cap C^2(D_+)$, $Sv \equiv 0$ *в* D_+; 2) $v(Q) = \max\limits_{\overline{D}_+} v(r,z) > 0$, $Q = (0, z_0) \in AK$, $0 < z_0 < k$, *то*

$$\lim_{r\to 0+0} v_r(r, z_0) = v_r(Q) < 0. \tag{1.6.16}$$

Доказательство. Пусть $\max\limits_{\overline{D}_+} v(r,z) = v(Q) > 0$ достигается в некоторой внутренней точке $Q = (0, z_0)$ отрезка AK. Обозначим через E круг радиуса $d > 0$ области D_+, граница которого имеет единственную общую точку Q с границей области D_+. Пусть $E_0 = \{(r,z)\colon\ 0 < r < r_0 < d\} \cap E$; ∂E_0 — граница области E_0, состоящая из отрезка S_0 $(r = r_0)$ и части окружности S_ρ $(\rho^2 = (r-d)^2 + (z-z_0)^2 = d^2,\ 0 \leqslant r \leqslant r_0)$. В области E_0 рассмотрим барьерную функцию

$$w(r,z) = \exp(-\alpha\rho^2) - \exp(-\alpha d^2), \quad \alpha = \mathrm{const} > 0,$$

где она при достаточно большом α удовлетворяет неравенству

$$S(\omega) = 4e^{-\alpha\rho^2}\left\{\rho^2\alpha^2 - \alpha\left(1 + p - p\frac{z_0}{z}\right) + \alpha q\frac{d-r}{r}\right\} > 0,$$

так как в $\overline{E}_0$ $\rho^2 \geqslant (r_0 - d)^2 > 0$, $\alpha q(d-r)/r > 0$, а выражение $1 + p - p\frac{z_0}{z}$ ограничено. Далее: $\omega > 0$ в $\overline{E}_0 \setminus S_\rho$ и $\omega = 0$ на дуге S_ρ.

Поскольку для уравнения (1.6.7) в области D_+ справедлив внутренний принцип максимума, то на множестве $\overline{E}_0 \setminus Q$

$$v(r,z) < v(0, z_0).$$

На основании отмеченных выше свойств функций $v(r,z)$ и $\omega(r,z)$ введем новую функцию

$$w(r,z) = v(r,z) + \varepsilon\omega(r,z), \quad \varepsilon > 0,$$

которая в области E_0 является решением эллиптического уравнения

$$S(w) = S(v + \varepsilon\omega) = \varepsilon S(\omega) > 0,$$

а на ее границе удовлетворяет условиям

$$w\Big|_{S_\rho} = v + \varepsilon\omega\Big|_{S_\rho} \leqslant v(0, z_0) = \omega(0, z_0),$$

$$w\Big|_{S_0} = v + \varepsilon\omega\Big|_{S_0} < \omega(0, z_0)$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Отсюда в силу внутреннего принципа максимума для эллиптического уравнения $S(w) = \varepsilon S(\omega)$ следует, что

$$\lim_{r \to 0+0} w_r(r, z_0) \leqslant 0$$

или

$$v_r(0 + 0, z_0) \leqslant -\varepsilon\omega_r(0 + 0, z_0) = -2\alpha\varepsilon d\, e^{-\alpha d^2} < 0.$$

Лемма 1.6.4. *Если*: 1) $v(r, z) \in C(\overline{D}_+) \cap C^2(D_+)$, $Sv \equiv 0$ *в* D_+; 2) $v(Q) = \max\limits_{\overline{D}_+} v(r, z) > 0$, $Q = (r_0, 0) \in AB$, $0 < r_0 < l$, *то*

$$\lim_{z \to 0+0} z^{2p} v_z(r_0, z) < 0. \tag{1.6.17}$$

Доказательство. В области D_+ введем новые переменные $s = r$, $t = z^{1-2p}/(1 - 2p)$. В этих координатах уравнение (1.6.7) при $z > 0$ принимает вид

$$\big[(1 - 2p)t\big]^{\frac{1+2p}{1-2p}} v_{ss} + v_{tt} + \frac{2q}{s}\big[(1 - 2p)t\big]^{\frac{1+2p}{1-2p}} v_s = 0, \tag{1.6.18}$$

а область D_+ отображается в область D'_+, причем $v_t = z^{2p} v_z$. В области D'_+ для уравнения (1.6.18) выполнены условия леммы 1.3.1. Поэтому в точке $Q' \equiv Q = (s_0, 0)$

$$\lim_{t \to 0+0} v_t(s_0, t) = v_t(s_0, 0 + 0) < 0.$$

Отсюда уже следует неравенство (1.6.17).

Если теперь допустить, что $Q \in AK$, то на основании (1.6.14) и (1.6.16) получим противоречие. Если же $Q \in AB$, $Q = (r_0, 0)$, $0 < r_0 < l$, то из леммы 1.6.1 следует

$$\lim_{z \to 0-0} (-z)^{2p} v_z(r_0, z) \geqslant 0,$$

а это противоречит неравенству (1.6.17).

Следовательно, точка Q принадлежит $\overline{\Gamma}$.

Теорема 1.6.1 полностью доказана. Из этой теоремы следует единственность решения плоской задачи (1.6.8)–(1.6.12) и пространственной задачи (1.6.2)–(1.6.6).

Следствие 1.6.1. *Если* $p + q \geqslant 1$ *и* $\max\limits_{\overline{G}} u(r, z) > 0$ $(\min\limits_{\overline{G}} u(r, z) < 0)$, *то этот максимум (минимум) достигается на поверхности* $\overline{\Sigma}$.

Следствие 1.6.2. *Теорема* 1.6.1 *и следствие* 1.6.1 *имеют место и для обобщенных в* G *решений уравнения* (1.6.1).

1.6.2. Существование решения задачи Т. Для этого достаточно доказать теорему существования решения плоской задачи Т для уравнения (1.6.7).

Теорема 1.6.2. *Пусть*: 1) *кривая* Γ *из класса Ляпунова и в точках* B *и* K *подходит перпендикулярно к осям координат*; 2) *функция* $\varphi(s) \in C[0, S]$ *и в окрестности точек* $s = 0$ *и* $s = S$ *представима в виде* $\varphi(s) = s\varphi_0(s)$, $\varphi(s) = (S - s)\varphi_1(s)$, *где* $\varphi_0(s)$ *и* $\varphi_1(s)$ — *непрерывные на* $[0, S]$ *функции*, $\varphi_0(0) \neq 0$, $\varphi_1(S) \neq 0$; 3) $\psi(r) \in C^1[0, l/2] \cap C^3(0, l/2)$, $\psi(0) = 0$. *Тогда существует единственная функция* $v(r, z)$, *удовлетворяющая условиям* (1.6.8)–(1.6.12).

Доказательство этой теоремы при $p = 0$ и $q \geqslant 1$ методом интегральных уравнений проведено в диссертации [168]. А в случае $q \geqslant 1/2$ и $0 \leqslant p < 1/2$ доказательство проводится аналогично работам [37, 127] с использованием результатов [37, 126, 127] и теоремы 1.6.1.

Теорема 1.6.3. *Если кривая* Γ *из класса Ляпунова*, $\varphi(s) \in C[0, S]$, $\varphi(0) = \varphi(S) = 0$, $\psi(r) \in C^1[0, l/2] \cap C^3(0, l/2)$, $\psi(0) = 0$, $p + q \geqslant 1$, *то существует единственное обобщенное решение* $v(r, z)$ *плоской задачи Т для уравнения* (1.6.7).

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 1.5.1. В самом деле, в силу следствия 1.6.1 и теоремы 1.6.2 для уравнения (1.6.7) выполнены условия теоремы 1.5.1.

Глава 2

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ

При исследовании задачи Трикоми для общих уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов кроме естественных условий гладкости возникают ограничения неравенственного характера на их коэффициенты в области гиперболичности [5, 12, 13, 35, 38, 51, 52, 60, 105, 110, 116, 152, 158, 164, 174, 198, 229], которые являются достаточными условиями для единственности и существования решения задачи Трикоми в определенном классе решений.

В первой главе на основании принципов максимума получены также достаточные условия относительно коэффициентов уравнений смешанного типа, которые гарантируют единственность решения задачи Трикоми.

В связи с этим естественно возникают вопросы.

1. Можно ли снять эти ограничения в области гиперболичности, т. е. можно ли доказать хотя бы единственность решения задачи Трикоми без каких либо ограничений неравенственного характера на коэффициенты уравнения в области гиперболичности?

2. Если же не удается избавиться от этих ограничений, то можно ли выяснить, насколько они существенны или близки к необходимым условиям?

Ранее в работах [75, 139, 163] был исследован вопрос о влиянии коэффициента $c(x,y) = \lambda \equiv \mathrm{const}$ при искомой функции $u(x,y)$ на единственность решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0. \qquad (\star)$$

Поскольку коэффициент $c(x,y) = \lambda$ принимает одно и то же значение во всей смешанной области D, то эффект влияния параметра λ, по существу, исходит из эллиптической части уравнения. Поэтому здесь не заметен чистый эффект влияния гиперболической части уравнения на единственность решения задачи Трикоми.

В этой главе на примере уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$L_1 u \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda_1 u = 0, & y > 0, \\ -u_{xx} + u_{yy} - \lambda_2 u = 0, & y < 0, \end{cases}$$

где λ_1 и λ_2 — вещественные параметры, выясняется эффект влияния коэффициентов λ_1 и λ_2 на единственность решения задачи Трикоми. Тем самым дается ответ на вопрос о существенности условий теорем § 1.3 в смысле единственности решения задачи Т.

Кроме того, здесь изучаются спектральная задача Трикоми для оператора Лаврентьева–Бицадзе, затем для оператора смешанного типа с произвольным степенным вырождением на линии изменения типа и вопросы расположения спектра этой задачи. В случае, когда область эллиптичности является сектором, найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций, которая исследована на полноту и базисность, и показаны применения при построении решения задачи Трикоми.

§ 2.1. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} - u_{yy} + \lambda u = f(x, y), \tag{2.1.1}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$, $f(x, y)$ — заданная функция, в области D_-, ограниченной отрезком AB оси $y = 0$ и характеристиками AC $(x + y = 0)$ и CB $(x - y = l)$, $A(0, 0)$, $B(l, 0)$, $l > 0$, и следующие задачи Дарбу.

Первая задача Дарбу (задача $\mathbf{D_1}$). *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям*:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}_-) \cap C^2(D_-), \quad Lu \equiv f(x, y) \ \text{в} \ D_-; \tag{2.1.2}$$

$$u(x, -x) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l/2; \tag{2.1.3}$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.1.4}$$

где τ, ψ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\tau(0) = \psi(0)$.

Вторая задача Дарбу (задача $\mathbf{D_2}$). *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям* (2.1.2), (2.1.3) *и, кроме того, условию*

$$\lim_{y \to 0} u_y(x, y) = u_y(x, 0 - 0) = \nu(x), \quad 0 < x < l, \tag{2.1.5}$$

где ν, ψ — заданные достаточно гладкие функции.

На плоскости (x, y) перейдем к характеристическим координатам $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Тогда уравнение (2.1.1) принимает вид

$$L_0 u \equiv u_{\xi\eta} + \frac{\lambda}{4} u = g, \tag{2.1.6}$$

где $g(\xi, \eta) = \frac{1}{4} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$, а область D_- отображается в область

$$\Delta = \{(\xi, \eta : 0 < \xi < \eta < l)\},$$

и, соответственно, задачи Дарбу ставятся так.

Задача $\mathbf{D_1'}$. *Найти функцию* $u(\xi, \eta)$, *удовлетворяющую условиям*:

$$u(\xi, \eta) \in C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta), \quad u_{\xi\eta} \in C(\Delta), \quad L_0 u \equiv g \text{ в } \Delta; \tag{2.1.7}$$

$$u(0, \eta) = \psi(\eta/2) = \psi_1(\eta), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant l; \tag{2.1.8}$$

$$u(\xi, \xi) = \tau(\xi), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant l. \tag{2.1.9}$$

Задача $\mathbf{D_2'}$. *Найти функцию* $u(\xi, \eta)$, *удовлетворяющую условиям* (2.1.7), (2.1.8) *и, кроме того, условию*

$$\lim_{\eta \to \xi} (u_\xi - u_\eta) = \lim_{y \to 0} u_y(x, y) = \nu(\xi), \quad 0 < \xi < l. \tag{2.1.10}$$

Для решения задач D_1' и D_2' применим метод Римана–Адамара, который основан на так называемой функции Римана–Адамара. Ранее метод применялся для решения задач Дарбу для уравнений типа Эйлера–Пуассона–Дарбу [5, 168, 240, 246].

Функция Римана–Адамара задачи D_1' имеет вид

$$A(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \begin{cases} A_1(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0), & \eta > \xi_0, \\ A_2(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) - R(\eta, \xi; \xi_0, \eta_0), & \eta < \xi_0, \end{cases}$$

где $(\xi_0, \eta_0) \in \Delta$, $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ — функция Римана уравнения (2.1.6), имеющая вид [209, с. 136; 34, с. 261]

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = J_0\left(\sqrt{\lambda(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}\right), \tag{2.1.11}$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Функция $A(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ обладает следующими свойствами.

1°. $A(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ как функция от (ξ, η) является решением сопряженного уравнения $L_0^* u \equiv L_0 u = 0$, а как функция от (ξ_0, η_0) является решением уравнения $L_0 u \equiv 0$.

2°. а) $A_{1\xi}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = 0$ при $\eta = \eta_0$,

б) $A_{1\eta}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = 0$ при $\xi = \xi_0$,

в) $A_1(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = 1$ при $\xi = \xi_0$ и $\eta = \eta_0$.

3°. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}[A_{1\xi}(\xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0)-A_{2\xi}(\xi,\xi-\varepsilon;\xi_0,\eta_0)]=0,\ 0\leqslant\xi\leqslant\xi_0.$

4°. $A_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=0$ при $\eta=\xi$.

Функция Римана–Адамара задачи D_2' имеет вид

$$B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\begin{cases}B_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta>\xi_0,\\ B_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)+R(\eta,\xi;\xi_0,\eta_0), & \eta<\xi_0,\end{cases}$$

и она обладает свойствами 1°–3° функции $A(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$, которые обозначим, соответственно, через 5°–7°, и дополнительно удовлетворяет равенству

8°. $B_{2\eta}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)-B_{2\xi}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=0$ при $\eta=\xi$.

Пусть $F,\ \Phi\in C^1(\Delta)$, $F_{\xi\eta},\ \Phi_{\xi\eta}\in C(\Delta)$. Тогда в области Δ справедливо тождество Грина,

$$2[\Phi L_0(F)-FL_0^*(\Phi)]\equiv(\Phi F_\eta-F\Phi_\eta)_\xi+(\Phi F_\xi-F\Phi_\xi)_\eta. \qquad (2.1.12)$$

Пусть (ξ_0,η_0) — произвольная, но фиксированная точка области Δ. Введем следующие подобласти области Δ:

$$\Delta_1=\{(\xi,\eta)|\delta<\xi<\xi_0-2\varepsilon,\ \ \xi_0+\varepsilon<\eta<\eta_0\},$$

$$\Delta_2=\{(\xi,\eta)|\delta<\xi<\xi_0-2\varepsilon,\ \ \xi+\varepsilon<\eta<\xi_0-\varepsilon\},$$

где $\varepsilon,\ \delta>0$ — достаточно малые числа (см. рис. 2.1.1).

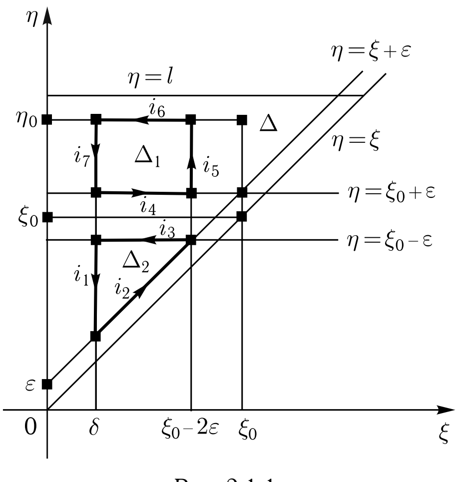

Рис. 2.1.1

Теорема 2.1.1. *Если функции* $\tau(\xi)$, $\psi_1(\eta) \in C[0,l] \cap C^1(0,l)$, $\tau'(\xi)$, $\psi_1'(\eta) \in L_1[0,l]$, $\tau(0) = \psi_1(0)$, $g(\xi,\eta) \in C(\Delta) \cap L_1(\Delta)$, *то существует единственное решение задачи* D_1' *и оно определяется формулой*

$$u(\xi_0,\eta_0) = \tau(\xi_0) - \frac{\lambda(\eta_0-\xi_0)}{2}\int\limits_0^{\xi_0} \tau(\xi)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right] d\xi + \psi_1(\eta_0) -$$
$$- \psi_1(\xi_0) - \frac{\lambda\xi_0}{2}\int\limits_0^{\eta_0} \psi_1(\eta)\overline{J}_1[\sqrt{\lambda(\eta_0-\eta)\xi_0}\,]\, d\eta +$$
$$+ \frac{\lambda\eta_0}{2}\int\limits_0^{\xi_0} \psi_1(\eta)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda(\xi_0-\eta)\eta_0}\right] d\eta +$$
$$+ \int\limits_0^{\xi_0} d\xi \int\limits_{\xi}^{\eta_0} J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right] g(\xi,\eta)\, d\eta -$$
$$- \int\limits_0^{\xi_0} d\xi \int\limits_{\xi}^{\xi_0} J_0\left[\sqrt{\lambda(\eta-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right] g(\xi,\eta)\, d\eta, \quad (2.1.13)$$

где $\overline{J}_1(z) = J_1(z)/z$, $J_1(z)$ — *функция Бесселя первого порядка.*

Доказательство. В тождестве (2.1.12), полагая, что $F(\xi,\eta) = u(\xi,\eta)$ — искомое решение задачи D_1', $\Phi(\xi,\eta) = A(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ — функция Римана задачи (2.1.7)–(2.1.9), и интегрируя полученное тождество по множеству $\Delta_1 \cup \Delta_2$, будем иметь

$$\int\limits_{\partial(\Delta_1\cup\Delta_2)} (uA_\xi - Au_\xi)\, d\xi + (Au_\eta - uA_\eta)\, d\eta = \iint\limits_{\Delta_1\cup\Delta_2} 2Ag\, d\xi\, d\eta, \quad (2.1.14)$$

где $\partial(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ — граница множества $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Поскольку граница последнего множества состоит из семи отрезков, то левую часть равенства (2.1.14) представим в виде суммы семи интегралов i_k, $k = \overline{1,7}$. Вычислим эти интегралы:

$$i_1 = \int\limits_{\varepsilon+\delta}^{\xi_0-\varepsilon} (uA_{2\eta} - A_2u_\eta)|_{\xi=\delta}\, d\eta = u(\delta,\varepsilon+\delta)A_2(\delta,\varepsilon+\delta;\xi_0,\eta_0) -$$
$$- u(\delta,\xi_0-\varepsilon)A_2(\delta,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0) + 2\int\limits_{\varepsilon+\delta}^{\xi_0-\varepsilon} u(\delta,\eta)A_{2\eta}(\delta,\eta;\xi_0,\eta_0)\, d\eta;$$

$$i_2 = \int\limits_{\delta}^{\xi_0+2\varepsilon} [u(A_{2\xi} - A_{2\eta}) - A_2(u_\xi - u_\eta)]|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi;$$

$$i_3 = -\int\limits_{\delta}^{\xi_0-2\varepsilon} (uA_{2\xi} - A_2 u_\xi)|_{\eta=\xi_0-\varepsilon}\, d\xi = -u(\delta, \xi_0 - \varepsilon)A_2(\delta, \xi_0 - \varepsilon; \xi_0, \eta_0) + \\ + u(\xi_0 - 2\varepsilon, \xi_0 - \varepsilon)A_2(\xi_0 - 2\varepsilon, \xi_0 - \varepsilon; \xi_0, \eta_0) - \\ - 2\int\limits_{\delta}^{\xi_0-2\varepsilon} u(\xi, \xi_0 - \varepsilon)A_{2\xi}(\xi, \xi_0 - \varepsilon; \xi_0, \eta_0)\, d\xi;$$

$$i_4 = \int\limits_{\delta}^{\xi_0-2\varepsilon} (uA_{1\xi} - A_1 u_\xi)|_{\eta=\xi_0+\varepsilon}\, d\xi = u(\delta, \xi_0 + \varepsilon)A_1(\delta, \xi_0 + \varepsilon; \xi_0, \eta_0) - \\ - u(\xi_0 - 2\varepsilon, \xi_0 + \varepsilon)A_1(\xi_0 - 2\varepsilon, \xi_0 + \varepsilon; \xi_0, \eta_0) + \\ + 2\int\limits_{\delta}^{\xi_0+2\varepsilon} u(\xi, \xi_0 + \varepsilon)A_{1\xi}(\xi, \xi_0 + \varepsilon; \xi_0, \eta_0)\, d\xi;$$

$$i_5 = \int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0} (A_1 u_\eta - uA_{1\eta})|_{\xi=\xi_0-2\varepsilon}\, d\eta = u(\xi_0 - 2\varepsilon, \eta_0)A_1(\xi_0 - 2\varepsilon, \eta_0; \xi_0, \eta_0) - \\ - u(\xi_0 - 2\varepsilon, \xi_0 + \varepsilon)A_1(\xi_0 - 2\varepsilon, \xi_0 + \varepsilon; \xi_0, \eta_0) - 2\int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0} uA_{1\eta|\xi=\xi_0-2\varepsilon}\, d\eta;$$

$$i_6 = \int\limits_{\delta}^{\xi_0-2\varepsilon} (A_1 u_\xi - A_{1\xi} u)|_{\eta=\eta_0}\, d\xi = u(\xi_0 - 2\varepsilon, \eta_0)A_1(\xi_0 - 2\varepsilon, \eta_0; \xi_0, \eta_0) - \\ - u(\delta, \eta_0)A_1(\delta, \eta_0; \xi_0, \eta_0) - 2\int\limits_{\delta}^{\xi_0-2\varepsilon} u(\xi, \eta_0)A_{1\xi}(\xi, \eta_0; \xi_0, \eta_0)\, d\xi;$$

$$i_7 = \int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0} (A_{1\eta} u - A_1 u_\eta)|_{\xi=\delta}\, d\eta = u(\delta, \xi_0 + \varepsilon)A_1(\delta, \xi_0 + \varepsilon; \xi_0, \eta_0) - \\ - u(\delta, \eta_0)A_1(\delta, \eta_0; \xi_0, \eta_0) + 2\int\limits_{\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0} u(\delta, \eta)A_{1\eta}(\delta, \eta; \xi_0, \eta_0)\, d\eta.$$

Подставляя значения интегралов i_k, $k=\overline{1,7}$, в равенство (2.1.14), при дополнительном условии относительно функции $u(\xi,\eta)$ о том, что для нее существует конечный предел

$$\lim_{\eta\to\xi}[u_\xi(\xi,\eta)-u_\eta(\xi,\eta)], \tag{2.1.15}$$

перейдем в полученном равенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$ и $\delta\to 0$. Тогда с учетом свойств 2°–4° функции $A(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ и условий (2.1.7)–(2.1.9), (2.1.15), получим

$$u(\xi_0,\eta_0)=\tau(\xi_0)+\psi_1(\eta_0)-\psi_1(\xi_0)-\int\limits_0^{\eta_0}\psi_1(\eta)A_\eta(0,\eta;\xi_0,\eta_0)\,d\eta+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\xi_0}\tau(\xi)(A_{2\eta}-A_{2\xi})_{|\eta=\xi}\,d\xi+\int\limits_0^{\xi_0}d\xi\int\limits_\xi^{\eta_0}A(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)g(\xi,\eta)\,d\eta. \tag{2.1.16}$$

Отметим, что в силу условий теоремы, (2.1.15), $A_1\in C^1(\overline{\Delta}\cap\cap\{\eta\geqslant\xi_0\})$ и $A_2\in C^1(\overline{\Delta}\cap\{\eta\leqslant\xi_0\})$ предельный переход в равенстве (2.1.14) при $\varepsilon\to 0$ и $\delta\to 0$ законен и все интегралы формулы (2.1.16) равномерно сходятся в $\overline{\Delta}$. Теперь, подставляя в (2.1.16) вместо функции $A(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ ее аналитическое выражение через функцию (2.1.11), получим формулу (2.1.13).

Итак, если существует решение задачи (2.1.7)–(2.1.9), удовлетворяющее условию (2.1.15), то оно представимо формулой (2.1.13). Далее путем непосредственной проверки можно показать, что функция $u(\xi_0,\eta_0)$, определяемая формулой (2.1.13), действительно удовлетворяет условиям (2.1.7)–(2.1.9) и (2.1.15).

В самом деле, на основании свойства 1° функции Римана–Адамара и гладкости функций $\tau(\xi)$ и $\psi_1(\eta)$ функция $u(\xi_0,\eta_0)$ в области Δ является решением уравнения (2.1.6). Из формулы (2.1.13) очевидным образом вытекает справедливость краевых условий (2.1.8) и (2.1.9):

$$\lim_{\eta_0\to\xi_0}u(\xi_0,\eta_0)=\tau(\xi_0),\qquad \lim_{\xi_0\to 0}u(\xi_0,\eta_0)=\psi_1(\eta_0).$$

Теперь, вычисляя частные производные u_{ξ_0} и u_{η_0} функции $u(\xi_0,\eta_0)$, нетрудно показать существование конечного предела (2.1.15):

$$\lim_{\eta_0,\xi_0\to x}[u_{\xi_0}(\xi_0,\eta_0)-u_{\eta_0}(\xi_0,\eta_0)]=\nu(x)=$$
$$=\tau'(x)+\lambda\int\limits_0^x\tau(\xi)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda}\,(x-\xi)\right]d\xi-\psi'\left(\frac{x}{2}\right)+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^x\eta\psi'\left(\frac{\eta}{2}\right)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right]d\eta-$$
$$-\lambda\int\limits_0^x d\xi\int\limits_\xi^x(\xi-\eta)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}\right]g\,d\eta-2\int\limits_0^x g(\xi,x)\,d\xi. \tag{2.1.17}$$

Единственность решения задачи D_1' следует из однозначного характера вывода формулы (2.1.13). Теорема 2.1.1 доказана.

Теорема 2.1.1$'$. *Если функции* $\tau(x)$, $\psi_1(x) \in C[0,l] \cap C^2(0,l)$, $\tau'(x)$, $\psi_1'(x) \in L_1[0,l]$, $\tau(0) = \psi_1(0)$, $f(x,y) \in C^1(D_-) \cap L_1(D_-)$, *то существует единственное решение задачи* (2.1.2)–(2.1.4) *и оно выражается формулой* (2.1.13), *в которой только следует положить* $\xi_0 = x+y$, $\eta_0 = x-y$, $g(\xi,\eta) = f[(\xi+\eta)/2,\,(\xi-\eta)/2]/4$.

Замечание 2.1.1. Отметим, что формула (2.1.13) была получена в нашей работе [172] при $g(\xi,\eta) = 0$. Задача D_1 при $\psi(x) = 0$ и $f(x,y) = 0$ изучалась в [135, 139], где методом преобразования Лапласа найдено ее решение. Равенство (2.1.17) играет решающую роль при доказательстве теорем единственности и существования решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром. В работе [161] равенство типа (2.1.17) получено исходя из метода типа Римана, а в [139] равенство (2.1.17) при $\psi(x) = 0$ и $f(x,y) = 0$ найдено на основе метода преобразования Лапласа.

Теорема 2.1.2. *Если* $\nu(\xi) \in C(0,l) \cap L_1[0,l]$, $\psi_1(\eta) \in C[0,l] \cap C^1(0,l)$, $\psi_1'(\eta) \in L_1[0,l]$, $g(\xi,\eta) \in C(\Delta) \cap L_1(\Delta)$, *то существует единственное решение задачи* (2.1.7), (2.1.8), (2.1.10) *и оно выражается формулой*

$$u(\xi_0,\eta_0) = \int\limits_0^{\xi_0} \nu(\xi) J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right] d\xi + \psi_1(\xi_0) - \\ - \psi_1(\eta_0) - \psi_1(0) J_0(\sqrt{\lambda\xi_0\eta_0}\,) - \int\limits_0^{\eta_0} \psi_1(\eta) B_\eta(0,\eta;\xi_0,\eta_0)\,d\eta + \\ + \int\limits_0^{\xi_0} d\xi \int\limits_\xi^{\eta_0} B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) g(\xi,\eta)\,d\eta \quad (2.1.18)$$

или

$$u(\xi_0,\eta_0) = \int\limits_0^{\xi_0} \nu(\xi) J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right] d\xi + \\ + \int\limits_0^{\eta_0} \psi_1'(\eta) B(0,\eta;\xi,\eta)\,d\eta + \int\limits_0^{\xi_0} d\xi \int\limits_\xi^{\eta_0} B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) g\,d\eta. \quad (2.1.19)$$

Доказательство этой теоремы во многом аналогично доказательству теоремы 2.1.1. В этом случае в тождестве (2.1.12) следует положить, что $F(\xi,\eta) = u(\xi,\eta)$ — искомое решение задачи D_2', а $\Phi(\xi,\eta)=B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ — функция Римана–Адамара задачи D_2'. Далее с учетом свойств 5°–8° функции $B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ и условий теоремы аналогично выводу равенства (2.1.16) получим формулы (2.1.18) и (2.1.19).

Теорема 2.1.2′. *Если* $\nu(x)\in C^1(0,l)\cap L_1[0,l]$, $\psi_1(x)\in C[0,l]\cap\cap C^2(0,l)$, $\psi'{}_1(x)\in L_1[0,l]$, $f(x,y)\in C^1(D_-)\cap L_1(D_-)$, *то существует единственное решение задачи* (2.1.2, (2.1.3) и (2.1.5) *и оно выражается формулой* (2.1.18) *или* (2.1.19), *где следует положить*

$$\xi_0=x+y,\quad \eta_0=x-y,\quad u(\xi_0,\eta_0)=u(x,y),$$
$$g(\xi,\eta)=\frac{1}{4}f((\xi+\eta)/2,(\xi-\eta)/2).$$

Следствие 2.1.1. *Для любого* $x\in[0,l]$ *справедливо равенство*

$$\tau(x)=\int\limits_0^x \nu(\xi)J_0\left[\sqrt{\lambda}\,(x-\xi)\right]d\xi+2\int\limits_0^x \psi_1'(\eta)J_0[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\,]\,d\eta+ \\ +2\int\limits_0^x d\xi\int\limits_\xi^x J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-x)(\eta-x)}\right]g(\xi,\eta)\,d\eta. \quad (2.1.20)$$

Для доказательства равенства (2.1.20) достаточно в формуле (2.1.19) положить $\xi_0=\eta_0=x$.

Естественно возникают следующие вопросы: 1) не являются ли равенства (2.1.17) и (2.1.20) формулами взаимного обращения относительно функций $\nu(x)$ и $\tau(x)$; 2) нельзя ли равенства (2.1.17) и (2.1.20), связывающие между собой функции $\tau(x),\nu(x),\psi(x)$ и $f(x,y)$, получить непосредственно из известной формулы решения задачи Коши (2.1.6), (2.1.9) и (2.1.10) [209, с.137]

$$u(\xi_0,\eta_0)=\frac{\tau(\xi_0)+\tau(\eta_0)}{2}+ \\ +\frac{\lambda(\eta_0-\xi_0)}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\tau(\xi)\overline{I}_1\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\eta_0-\xi)}\right]d\xi- \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\nu(x)I_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\eta_0-\xi)}\right]d\xi- \\ -\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}d\xi\int\limits_\xi^{\eta_0}I_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-\xi_0)(\eta_0-\eta)}\right]g\,d\eta, \quad (2.1.21)$$

где $I_k(\,\cdot\,)$ — модифицированная функция Бесселя, $k=0,1$, $\overline{I}_1(z)==I_1(z)/z$.

Эти вопросы будут предметом обсуждения в следующем параграфе. Но прежде из формулы (2.1.21) найдем равенство, связывающее функции $\tau(x), \nu(x), \psi(x)$ и $g(\xi, \eta)$. Для этого в (2.1.21) положим $u(0, x) = \psi(x/2)$. Тогда получим

$$\tau(x) + \frac{\lambda x}{2}\int\limits_0^x \tau(\xi) I_1\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\,\right] d\xi = \\ = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \tau(0) + \int\limits_0^x \nu(\xi) I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right] d\xi + \\ + 2\int\limits_0^x d\xi \int\limits_\xi^x I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\eta)}\right] g\, d\eta. \quad (2.1.22)$$

§ 2.2. Формулы взаимосвязи между решениями задач Дарбу и Коши для телеграфного уравнения

2.2.1. Интегралы от произведения бесселевых функций. Справедливы следующие формулы:

$$\int\limits_\eta^x I_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right] J_0\left[\sqrt{\lambda t(t-\eta)}\right] \frac{dt}{t} = \ln\frac{x}{\eta}, \quad (2.2.1)$$

$$\int\limits_\eta^x I_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right] \frac{\eta}{t}\frac{d}{d\eta} J_0\left[\sqrt{\lambda t(t-\eta)}\right] dt = \\ = I_0\left[\sqrt{\lambda\eta(x-\eta)}\right] - 1, \quad 0 < \eta \leqslant x, \quad (2.2.2)$$

$$\int\limits_\eta^x \frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x} I_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right] J_0\left[\sqrt{\lambda t(t-\eta)}\right] dt = 1 - J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right], \quad (2.2.3)$$

$$\int\limits_\eta^x \frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x} I_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right] \frac{\partial}{\partial\eta} J_0\left[\sqrt{\lambda t(t-\eta)}\right] dt = \\ = \frac{x}{\eta}\frac{\partial}{\partial x} I_0\left[\sqrt{\lambda\eta(x-\eta)}\right] - \frac{\partial}{\partial\eta} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right], \quad (2.2.4)$$

$$\int\limits_{\eta}^{x} t\frac{\partial}{\partial t} I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(t-\eta)}\right]\frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt =$$
$$= x\frac{\partial}{\partial x} I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\eta)}\right] - \eta\frac{\partial}{\partial\eta} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right] -$$
$$- \frac{\lambda x(\xi-\eta)}{2}\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}\right], \quad 0\leqslant\xi\leqslant\eta, \quad (2.2.5)$$

$$\int\limits_{\eta}^{x} I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(t-\eta)}\right]\frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt =$$
$$= I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\eta)}\right] - J_0\left[\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}\right], \quad (2.2.6)$$

$$\int\limits_{\eta}^{x} t\frac{\partial^2}{\partial t^2} I_0\left[\sqrt{\lambda\eta(t-\eta)}\right]\frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt =$$
$$= x\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_0\left[\sqrt{\lambda\eta(x-\eta)}\right] - \frac{\lambda x}{2}\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda}\,(x-\eta)\right] -$$
$$- \frac{\lambda\eta^2}{4}\frac{\partial}{\partial\eta} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right] + \frac{\lambda x}{4} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right] +$$
$$+ x\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right], \quad (2.2.7)$$

$$x\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right] + \frac{\lambda x}{4} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right] =$$
$$= \eta\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right], \quad (2.2.8)$$

$$\int\limits_{\eta}^{x} \frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x} I_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right] J_0\left[\sqrt{\lambda(t-\xi)(t-\eta)}\right] dt =$$
$$= I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\eta)}\right] - J_0\left[\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}\right], \quad (2.2.9)$$

$$\int\limits_{\eta}^{x} J_0\left[\sqrt{\lambda(t-\xi)(t-\eta)}\right]\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda}\,(x-t)\right] dt =$$
$$= (x-\eta)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}\right], \quad (2.2.10)$$

$$\int\limits_{\eta}^{x} \frac{\lambda(\xi-\eta)}{2}\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda(t-\xi)(t-\eta)}\right] J_0\left[\sqrt{\lambda}\,(x-t)\right] dt =$$
$$= J_0\left[\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}\right] - J_0\left[\sqrt{\lambda}\,(x-\eta)\right]. \quad (2.2.11)$$

Доказательство формул (2.2.1)–(2.2.11) можно провести, воспользовавшись разложениями функций Бесселя в степенные ряды по степеням аргументов, стоящих в квадратных скобках, и оно приведено в работах [184, 187].

Замечание 2.2.1. Тождество (2.2.5) при $\xi = \eta$ указано в работе [8], и его доказательство при $\xi = \eta$ приведено в [163, 200]. Тождество (2.2.6) при $\xi = \eta$ приведено в [196, с. 13].

2.2.2. Обращение некоторых интегральных уравнений. Теперь рассмотрим следующие интегральные уравнения:

$$u(x) - \int\limits_{0}^{x} u(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt = v(x), \quad (2.2.12)$$

$$v(x) + \int\limits_{0}^{x} v(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}I_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right] dt = u(x), \quad (2.2.13)$$

изученные еще в 1945 году И.Н. Векуа [29, 30]. В этих работах было замечено, что функция $u(x)$, определенная по формуле (2.2.13), является решением интегрального уравнения (2.2.12), хотя доказательство этого факта там не приведено. Для дальнейших исследований необходимо установить справедливость обратного утверждения.

Теорема 2.2.1. *Если* $u(x),\ v(x) \in C(0,a) \cap L_1[0,a]$, *то равенства* (2.2.12) *и* (2.2.13) *являются формулами взаимного обращения.*

Доказательство. Функцию $v(x)$, определенную формулой (2.2.12), подставим в левую часть уравнения (2.2.13):

$$v(x) + \int\limits_{0}^{x} v(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial t}I_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right] dt \equiv$$
$$\equiv u(x) - \int\limits_{0}^{x} u(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt + \int\limits_{0}^{x} u(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}I_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right] dt -$$
$$- \int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{t} u(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\sqrt{\lambda t(t-s)}\right] ds\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}I_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right] dt. \quad (2.2.14)$$

Повторный интеграл из (2.2.14) обозначим через Q. В интеграле Q, меняя порядок интегрирования и пользуясь тождеством (2.2.4), получим

$$Q = \int_0^x u(s)\frac{x}{s}\frac{\partial}{\partial x}I_0\left[\sqrt{\lambda s(x-s)}\right]ds - \int_0^x u(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-s)}\right]ds.$$

Подставляя это значение Q в (2.2.14), получим правую часть уравнения (2.2.13).

Теперь покажем справедливость обратного утверждения. Функцию $u(x)$, определенную по формуле (2.2.13), подставим в левую часть уравнения (2.2.12):

$$u(x) - \int_0^x u(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt \equiv$$

$$\equiv v(x) + \int_0^x v(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}I_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right]dt - \int_0^x v(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt -$$

$$- \int_0^x v(s)\int_t^x \frac{t}{s}\frac{\partial}{\partial t}I_0\left[\sqrt{\lambda s(t-s)}\right]\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt\,ds \equiv v(x),$$

так как в силу тождества (2.2.5) при $\xi = \eta$ внутренний интеграл равен

$$\int_s^x \frac{t}{s}\frac{\partial}{\partial t}I_0\left[\sqrt{\lambda s(t-s)}\right]\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt =$$

$$= \frac{x}{s}\frac{\partial}{\partial x}I_0\left[\sqrt{\lambda s(x-s)}\right] - \frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-s)}\right].$$

Далее на основании теоремы 2.2.1 ответим на второй вопрос из § 2.1. Для этого уравнение (2.1.22) обратим относительно функции $\tau(x)$, затем относительно функции $\nu(x)$. Уравнение (2.1.22) представим в следующих видах:

$$\tau(x) + \int_0^x \tau(\xi)\frac{x}{\xi}\frac{\partial}{\partial x}I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right]d\xi = \varphi_1(x), \tag{2.2.15}$$

$$\varphi_1(x) = 2\psi\Big(\frac{x}{2}\Big) - \tau(0) + \int_0^x \nu(\xi)I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right]d\xi +$$

$$+ 2\int_0^x d\xi\int_\xi^x I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\eta)}\right]g(\xi,\eta)\,d\eta,$$

$$\int\limits_0^x \nu(\xi) I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right] d\xi = \varphi_2(x), \tag{2.2.16}$$

$$\varphi_2(x) = -2\psi\left(\frac{x}{2}\right) - 2\int\limits_0^x d\xi \int\limits_\xi^x I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\eta)}\right] g(\xi,\eta)\, d\eta +$$
$$+ 2\tau(x) - \int\limits_0^x \tau'(\xi) I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right] d\xi + 2\int\limits_0^x \tau(\xi)\frac{\partial}{\partial x} I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right] d\xi.$$

Лемма 2.2.1. *Если функции* $\nu(x)$, $\psi(x/2)$, $g(\xi,\eta)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.2 *и* $\tau(0) = \psi(0) = 0$, *то решение уравнения* (2.2.15) *совпадает с функцией* $\tau(x)$, *определенной из равенства* (2.1.20).

Доказательство. Поскольку функция $\varphi_1(x)$ непрерывна на $[0,l]$, то в силу теоремы 2.2.1 решение уравнения (2.2.15) определяется по формуле (2.2.12):

$$\tau(x) = \varphi_1(x) - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt =$$
$$= \int\limits_0^x \nu(\xi) I_0[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}]\, d\xi + 2\int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^x I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\eta)}\right] g\, d\eta +$$
$$+ 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) - 2\int\limits_0^x \psi\left(\frac{t}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt -$$
$$- \int\limits_0^x\int\limits_0^t \nu(\xi) I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(t-\xi)}\right] d\xi \frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt -$$
$$- 2\int\limits_0^x\int\limits_0^t d\xi \int\limits_\xi^t I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(t-\eta)}\right] g(\xi,\eta)\, d\eta \frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt. \tag{2.2.17}$$

Последние три интеграла из правой части (2.2.17) обозначим, соответственно, через Q_1, Q_2 и Q_3. В интеграле Q_1 интегрируем по частям. После чего имеем

$$Q_1 = \psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \psi'\left(\frac{t}{2}\right) J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt.$$

В интеграле Q_2, меняя порядок интегрирования и пользуясь формулой (2.2.6) при $\xi = \eta$, получим

$$Q_2 = \int_0^x \nu(\xi) I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right] d\xi - \int_0^x \nu(\xi) J_0\left[\sqrt{\lambda}\,(x-\xi)\right] d\xi.$$

В интеграле Q_3 также, меняя порядок интегрирования и пользуясь тождеством (2.2.6), будем иметь

$$Q_3 = \int_0^x d\xi \int_\xi^x g(\xi,\eta)\left\{I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\eta)}\right] - J_0\left[\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}\right]\right\} d\eta.$$

Подставляя значения интегралов Q_k, $k = 1, 2, 3$, в (2.2.17), получим равенство (2.1.20).

Лемма 2.2.2. *Если функции* $\nu(x)$, $\psi(x/2)$, $g(\xi,\eta)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1.1 *и* $\tau(0) = \psi(0) = 0$, *то решение уравнения* (2.2.16) *совпадает с функцией* $\nu(x)$, *определенной из равенства* (2.1.17).

Доказательство. К обеим частям уравнения (2.2.16) применим оператор $x\dfrac{d}{dx}$. После этого получим уравнение вида (2.2.13):

$$\widetilde{\nu}(x) + \int_0^x \widetilde{\nu}(\xi)\frac{x}{\xi}\frac{\partial}{\partial x} I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right] d\xi = \widetilde{\varphi}(x), \tag{2.2.18}$$

$$\widetilde{\nu}(x) = x\nu(x), \tag{2.2.19}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(x) = x\varphi_2'(x) = x\tau'(x) - x\psi'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\lambda x^2}{2}\tau(x) - \\ - x\int_0^x \tau'(\xi)\frac{\partial}{\partial x} I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right] d\xi + 2x\int_0^x \tau(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right] d\xi - \\ - 2x\int_0^x g(\xi,x)\,d\xi - 2x\int_0^x d\xi\int_\xi^x g(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial x} I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\eta)}\right] d\eta.\end{aligned}$$

Тогда решение уравнения (2.2.18) определяется по формуле (2.2.12):

$$\begin{aligned}\widetilde{\nu}(x) = \widetilde{\varphi}(x) - \int_0^x \widetilde{\varphi}(t)\frac{\partial}{\partial t} J_0[\sqrt{\lambda x(x-t)}\,]\, dt = \\ = x\tau'(x) - x\psi'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\lambda x^2}{2}\tau(x) - x\int_0^x \tau'(\xi)\frac{\partial}{\partial x} I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right] d\xi +\end{aligned}$$

$$
+\int_0^x t\psi'\left(\frac{t}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt-\frac{\lambda}{2}\int_0^x t^2\tau(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt+
$$

$$
+2x\int_0^x \tau(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right]d\xi-\int_0^x t\tau'(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt-
$$

$$
-2x\int_0^x g(\xi,x)\,d\xi-2x\int_0^x d\xi\int_\xi^x g(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial x}I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\eta)}\right]d\eta+
$$

$$
+2\int_0^x d\xi\int_\xi^x g(\xi,\eta)t\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt+
$$

$$
+\int_0^x t\int_0^t \tau'(\xi)\frac{\partial}{\partial t}I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(t-\xi)}\right]d\xi\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt-
$$

$$
-2\int_0^x t\int_0^t \tau(\xi)\frac{\partial^2}{\partial t^2}I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(t-\xi)}\right]d\xi\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt+
$$

$$
+2\int_0^x t\int_0^t d\xi\int_\xi^t \frac{\partial}{\partial t}I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(t-\eta)}\right]g\,d\eta\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt.
$$

Последние три повторных интеграла обозначим, соответственно, через Q_4, Q_5 и Q_6. Во всех интегралах Q_k, $k=4,5,6$, меняя порядок интегрирования и пользуясь, соответственно, тождествами (2.2.5) при $\eta=\xi$, (2.2.7) и (2.2.5), получим

$$
Q_4=x\int_0^x \tau'(\xi)\frac{\partial}{\partial x}I_0[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}]d\xi-\int_0^x \xi\tau'(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\xi)}\right]d\xi,
$$

$$
Q_5=\int_0^x \tau(\xi)\int_\xi^x t\frac{\partial^2}{\partial t^2}I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(t-\xi)}\right]\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dtd\xi=
$$

$$
=x\int_0^x \tau(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\xi)}\right]d\xi-\frac{\lambda x}{2}\int_0^x \tau(\xi)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda}\,(x-\xi)\right]d\xi-
$$

$$
-\frac{\lambda}{4}\int_0^x \tau(\xi)\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\xi)}\right]d\xi+\int_0^x \tau(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\xi)}\right]d\xi+
$$

$$
+\int_0^x \tau(\xi)\xi\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\xi)}\right]d\xi,
$$

$$Q_6 = \int\limits_0^x d\xi \int\limits_\xi^x g(\xi,\eta)d\eta \int\limits_\eta^x t\frac{\partial}{\partial t} I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(t-\eta)}\right] \frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt =$$

$$= \int\limits_0^x d\xi \int\limits_\xi^x gx\frac{\partial}{\partial x} I_0\left[\sqrt{\lambda\xi(x-\eta)}\right] d\eta - \int\limits_0^x d\xi \int\limits_\xi^x g\eta\frac{\partial}{\partial \eta} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-\eta)}\right] d\eta -$$

$$- \frac{\lambda x}{2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_\xi^x (\xi-\eta)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda(x-\xi)(x-\eta)}\right] g\, d\eta.$$

Интегрируем по частям в интеграле:

$$\int\limits_0^x t\tau'\frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt = \frac{\lambda}{4}x^2\tau(x) -$$

$$- \int\limits_0^x \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt - \int\limits_0^x t\tau(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt. \quad (2.2.20)$$

Теперь, подставляя значения интегралов Q_4, Q_5, Q_6 и (2.2.21) в (2.2.20), с учетом тождества (2.2.8) и (2.2.19), получим (2.1.17).

Чтобы дать ответ на первый вопрос (см.конец §2.1), изучим следующие интегральные уравнения:

$$u'(x) + \lambda\int\limits_0^x u(t)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda(x-t)}\right] dt = v(x), \quad (2.2.21)$$

$$\int\limits_0^x v(t)J_0\left[\sqrt{\lambda}\,(x-t)\right] dt = u(x), \quad 0 < x < a. \quad (2.2.22)$$

Теорема 2.2.2. *Если* $v(x) \in C(0,a) \cap L_1[0,a]$, $u(x) \in C[0,a] \cap \cap C^1(0,a)$, $u'(x) \in L_1[0,a]$, *то равенства* (2.2.22) *и* (2.2.23) *являются формулами взаимного обращения.*

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству теоремы 2.2.1, только при этом используется формула 2.12.33.6 [165].

Теперь на основании теоремы 2.2.2 и соответствующих тождеств из п. 2.2.1 нетрудно показать, что равенства (2.1.17) и (2.1.20) относительно функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ являются формулами взаимного обращения.

Таким образом, установлены формулы взаимосвязи между первой и второй задачами Дарбу и между задачами Коши и Дарбу для телеграфного уравнения (2.1.1). Видимо, такие связи существуют не только для (2.1.1), но и для других гиперболических уравнений.

Вообще говоря, такие формулы связи не всегда существуют, так как А.М. Нахушевым [151] было замечено, что из корректности постановки задачи Коши для гиперболических уравнений еще не следует корректность задач Дарбу.

§ 2.3. Об одном интегральном представлении решений телеграфного уравнения и уравнения Лаврентьева–Бицадзе с комплексным параметром

В работе И.Н. Векуа [30] в области, звездной относительно начала координат, получена формула, связывающая все регулярные решения уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0$$

с гармоническими функциями $u_0(x, y)$:

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^1 u_0(xt, yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}\right]dt. \quad (2.3.1)$$

Оказывается, имеет место аналог формулы (2.3.1) для телеграфного уравнения (2.1.1) и для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром [63].

Теорема 2.3.1. *Если функция $u_0(x, y)$ является регулярным решением уравнения струны*

$$u_{0xx} - u_{0yy} = 0,$$

то функция вида

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^1 u_0(xt, yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)(1-t)}\right]dt +$$

$$+ \int_0^{x+y} ds \int_0^{x-y} J_0\left[\sqrt{\lambda(s-\xi)(t-\eta)}\right] g(s,t)\,dt \quad (2.3.2)$$

является регулярным решением телеграфного уравнения (2.1.1).

Доказательство. В целях удобства проверки формулы (2.3.2) сделаем замену $u_0(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$ и перейдем к характеристическим координатам $\xi = x + y$ и $\eta = x - y$. Тогда получим

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) - \int_0^1 [\varphi(\xi t) + \psi(t\eta)]\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda\xi\eta(1-t)}\right]dt +$$

$$+\int_0^\xi ds\int_0^\eta J_0\left[\sqrt{\lambda(s-\xi)(t-\eta)}\right]g(s,t)dt=u_1(\xi,\eta)+u_2(\xi,\eta),$$

$$u_1(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)-\int_0^1[\varphi(\xi t)+\psi(\eta t)]\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda\xi\eta(1-t)}\right]dt=$$
$$=\varphi(\xi)-\int_0^\xi\varphi(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\sqrt{\lambda\eta(\xi-s)}\right]ds+$$
$$+\psi(\eta)-\int_0^\eta\psi(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda\xi(\eta-t)}\right]dt,$$

$$u_2(\xi,\eta)=\int_0^\xi ds\int_0^\eta J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-s)(\eta-t)}\right]g(s,t)\,dt.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial^2u_1}{\partial\xi\partial\eta}=-\frac{\lambda}{4}\varphi(\xi)-\int_0^\xi\varphi(s)\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}J_0\left[\sqrt{\lambda\eta(\xi-s)}\right]ds-$$
$$-\frac{\lambda}{4}\psi(\eta)-\int_0^\eta\psi(t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}J_0\left[\sqrt{\lambda\xi(\eta-t)}\right]dt=$$
$$=-\frac{\lambda}{4}\varphi(\xi)+\frac{\lambda}{4}\int_0^\xi\varphi(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\sqrt{\lambda\eta(\xi-s)}\right]ds-$$
$$-\frac{\lambda}{4}\psi(\eta)+\frac{\lambda}{4}\int_0^\eta\psi(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda\xi(\eta-t)}\right]dt=-\frac{\lambda}{4}u_1,$$

$$\frac{\partial^2u_2}{\partial\xi\partial\eta}=g(\xi,\eta)+\int_0^\xi ds\int_0^\eta\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-s)(\eta-t)}\right]g\,dt=$$
$$=g(\xi,\eta)-\frac{\lambda}{4}\int_0^\xi ds\int_0^\eta J_0\left[\sqrt{\lambda(\xi-s)(\eta-t)}\right]g(s,t)\,dt=g(\xi,\eta)-\frac{\lambda}{4}u_2(\xi,\eta).$$

Следовательно, функция $u_1(\xi, \eta)$ является решением однородного телеграфного уравнения, а $u_2(\xi, \eta)$ — неоднородного уравнения (2.1.1). Тогда их сумма $u_1 + u_2 = u$ является регулярным решением уравнения (2.1.1).

Теорема 2.3.2. *Если функция $u_0(x, y)$ в области D* (см. § 1.1) *является регулярным решением уравнения Лаврентьева–Бицадзе*

$$u_{0xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{0yy} = 0, \quad u_0(0,0) = 0, \tag{2.3.3}$$

то функция

$$u(x, y) = u_0(x, y) - \int_0^1 u_0(xt, yt) \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\sqrt{\lambda(x^2 + \operatorname{sgn} y \cdot y^2)(1-t)} \right] dt \tag{2.3.4}$$

является регулярным в области D решением уравнения

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0; \tag{2.3.5}$$

при этом область D_+ предполагается звездной относительно начала координат.

Доказательство. В силу теоремы 2.3.1 функция (2.3.4) в области D_- (при $y < 0$) является регулярным решением уравнения (2.3.5). В области D_+ на основании результатов И.Н. Векуа [30] функция (2.3.4) является регулярным решением уравнения (2.3.5). Тем самым теорема 2.3.2 доказана.

Из формулы (2.3.4) видно, что функция $u(x, y)$ и ее частные производные u_x и u_y непрерывны при переходе через линию изменения типа уравнения (2.3.5).

Заметим, что на характеристике AC $(x + y = 0)$ выполняется $u(x, y) \equiv u_0(x, y)$. Этот момент позволяет решение задачи Трикоми для уравнения (2.3.5) с краевыми данными $u = \varphi$ на Γ и $u = \psi$ на AC свести к решению задачи Трикоми для уравнения (2.3.3) с краевыми условиями $u_0 = \psi$ на AC и $u_0 = \varphi_0$ на Γ.

Для нахождения функции $\varphi_0(s)$ в области D_+ функцию $u_0(x, y)$ определим как решение задачи Хольмгрена для уравнения Лапласа с граничными условиями

$$u_0(x(s), y(s)) = \varphi_0(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant S,$$

$$\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y}\Big|_{y=0} = \nu_0(x), \quad 0 < x < l = 1.$$

Методом Грина решение этой задачи выписывается в явном виде [23, глава IV], [75],

$$u_0(x,y) = \int_0^1 \nu_0(\xi) G(\xi,0;x,y)\,d\xi + \int_\Gamma \varphi_0(s) \frac{\partial G[\xi(s),\eta(s);x,y]}{\partial N}\,ds, \quad (2.3.6)$$

где $G(\xi,\eta;x,y)$ – функция Грина задачи Хольмгрена, а функция $\nu_0(x)$ определяется соотношением

$$\nu_0(x) = F(x) + \int_0^1 F(t) R(t,x)\,dt, \quad (2.3.7)$$

где $R(t,x)$ — резольвента известного ядра интегрального уравнения типа Фредгольма,

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \varphi_0(s) \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial N} G[\xi(s),\eta(s);x,0]\,ds - \frac{1}{2}\psi_0'\left(\frac{x}{2}\right). \quad (2.3.8)$$

Как видим, функция $\nu_0(x)$ определяется через функции $\varphi_0(s)$ и $\psi_0(x)$. Но функция $\psi_0(x)$ равна $\psi(x)$. Подставляя (2.3.8) в (2.3.7), а последнее в (2.3.6), получим

$$u_0(x,y) = \int_\Gamma \varphi_0(s) K(s;x,y)\,ds + f(x,y), \quad (2.3.9)$$

$$K(s;x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \frac{\partial}{\partial N} G[\xi(s),\eta(s);\theta,0] \times G(\theta,0;x,y)\,d\theta + \\ + \int_0^1 G(\theta,0;x,y) \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial N} G[\xi(s),\eta(s);t,0] \times R(t,\theta)\,dt\,d\theta,$$

$$f(x,y) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \psi_0'\left(\frac{\theta}{2}\right) G(\theta,0;x,y)\,d\theta - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 G(\theta,0;x,y) \int_0^1 \psi_0'\left(\frac{t}{2}\right) R(t,\theta)\,dt\,d\theta.$$

Функцию $u_0(x, y)$, заданную формулой (2.3.9), подставим в интегральное слагаемое формулы (2.3.4). Тогда имеем

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \\ - \int\limits_\Gamma \varphi_0(s) \int\limits_0^1 K(s; xt, yt) \frac{\partial}{\partial t} J_0\Big[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}\,\Big]\, dt\, ds - \\ - \int\limits_0^1 f(xt, yt) \frac{\partial}{\partial t} J_0\Big[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}\,\Big]\, dt. \quad (2.3.10)$$

Переходя в (2.3.10) к пределу при $(x, y) \to (x(s), y(s)) \in \Gamma$, получим интегральное уравнение относительно функции

$$\varphi_0(s) - \int\limits_\Gamma \varphi_0(\tau) H(\tau, s)\, d\tau = g(s), \qquad (2.3.11)$$

где

$$H(\tau, s) = \int\limits_0^1 K(\tau; x(s)\,t, y(s)t) \frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda[x^2(s)+y^2(s)](1-t)}\,\right] dt,$$

$$g(s) = \varphi(s) + \int\limits_0^1 f(x(s)\,t, y(s)t) \frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\sqrt{\lambda[x^2(s)+y^2(s)](1-t)}\,\right] dt.$$

Если функция $\varphi(s)$ непрерывна на $[0, S]$ и в достаточно малой окрестности $s = 0$ и $s = S$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha \in [1/2, 1]$, $\psi(x) \in C[0, 1/2] \cap C^1[0, 1/2] \cap C^2(0, 1/2)$, $\psi'(x) \in L_1[0, 1/2]$, $\psi(0) = \varphi(s) = \varphi(0) = 0$, то (2.3.11) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Его разрешимость вытекает из теоремы единственности решения задачи T для уравнения (2.3.5) (см. пример 7 § 1.4, теоремы 2.5.1–2.5.3 из § 2.5). Тем самым получена теорема существования регулярного решения задачи Трикоми для уравнения (2.3.5) при всех λ, удовлетворяющих отмеченным выше теоремам единственности.

Заметим также, что формулу (2.3.4) можно использовать при решении задачи Трикоми (с граничными данными на характеристиках $x \pm y = 0$) и других краевых задач для уравнения (2.3.5).

Следствие 2.3.1. *Если функция* $u_0(x,y)$ *в области* G (см. § 1.3, п. 1.3.2) *является регулярным решением уравнения*

$$\operatorname{sgn} x \cdot u_{0xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{0yy} = 0, \quad u_0(0,0) = 0, \tag{2.3.12}$$

то функция

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \\ - \int_0^1 u_0(xt, yt) \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\sqrt{\lambda(\operatorname{sgn} x \cdot x^2 + \operatorname{sgn} y \cdot y^2)(1-t)} \right] dt \tag{2.3.13}$$

является регулярным в области G *решением уравнения*

$$\operatorname{sgn} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0; \tag{2.3.14}$$

при этом область G_0 *предполагается звездной относительно начала координат.*

Как и выше, формула (2.3.13) позволяет свести решение задачи Трикоми для уравнения (2.3.14) с данными $u = \psi$ на $OC_1 \cup OC_2$ и $u = \varphi$ на Γ к решению задачи Трикоми для уравнения (2.3.12) с краевыми условиями $u_0 = \psi$ на $OC_1 \cup OC_2$ и $u_0 = \varphi_0$ на Γ.

§ 2.4. О спектральном влиянии гиперболической части уравнений смешанного типа на корректность задачи Трикоми

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$L_1 u \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda_1 u = 0, & y > 0, \\ -u_{xx} + u_{yy} - \lambda_2 u = 0, & y < 0 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

в области Ω, где λ_1 и λ_2 — вещественные параметры (см. § 1.3, п. 1.3.3), и поставим аналог задачи Трикоми.

Задача T. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_+ \cup A_1B_1) \cap C^2(\Omega_-); \tag{2.4.2}$$

$$L_1 u \equiv 0, \quad (x,y) \in \Omega_- \cup \Omega_+ \cup A_1B_1; \tag{2.4.3}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{CA} \cup \overline{AA_1} \cup \overline{BB_1}, \tag{2.4.4}$$

где φ *— заданная достаточно гладкая функция.*

Определение 2.4.1. *Под регулярным в* Ω *решением уравнения* (2.4.1) *будем понимать функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям* (2.4.2), (2.4.3) *и, кроме того,* $2u_\eta = u_x - u_y \in C(\Omega_- \cup AC)$, $|\nabla u| = O(r_A^{-1/2+\varepsilon_1})$, $|\nabla u| = O(r_B^{-1/2+\varepsilon_2})$, $r_A^2 = x^2 + y^2$, $r_B^2 = (l-x)^2 + y^2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

1°. **Случай, когда $\lambda_2 \geqslant 0$**. В области Ω_- для уравнения (2.4.1) рассмотрим задачу Дарбу (см. § 2.1): найти регулярное решение в Ω_- уравнения (2.4.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad u(x,-x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l/2, \quad \tau(0) = 0.$$

В § 2.1 решение этой задачи построено в явном виде, и оно определяется формулой (2.1.13). Из формулы (2.1.13) вычислим $\nu(x)$ (см. формулу (2.1.17)):

$$\nu(x) = \tau'(x) + \lambda_2 \int_0^x \tau(t)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda_2}\,(x-t)\right] dt. \tag{2.4.5}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.4.1. *Если* $u = 0$ *на характеристике* AC *и* $\lambda_2 \geqslant 0$, *то для любого регулярного решения уравнения* (2.4.1) *имеет место неравенство*

$$J = \int_0^x \tau(t)\nu(t)dt \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Доказательство. Используя равенство (2.4.5), преобразуем интеграл

$$J = \frac{\tau^2(x)}{2} + \lambda_2 \int_0^x \tau(t) \int_0^t \overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda_2}\,(t-s)\right] \tau(s)\,ds\,dt.$$

Заменим функцию Бесселя $J_1(\,\cdot\,)$ ее интегральным представлением [10, Т. II, с. 92]

$$J_1\left[\sqrt{\lambda_2}\,(t-s)\right] = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\pi}(t-s) \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2}\,\cos\left[\sqrt{\lambda_2}\,(t-s)\xi\right] d\xi.$$

Тогда выражение для интеграла J примет вид

$$J = \frac{\tau^2(x)}{2} + \frac{\lambda_2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2}\,d\xi \int_0^x \tau(t)\,dt \int_0^t \tau(s)\cos\left[\sqrt{\lambda_2}\,(t-s)\xi\right] ds =$$

$$= \frac{\tau^2(x)}{2} + \frac{\lambda_2}{\pi}\int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2}\,d\xi \Bigg[\int_0^x \tau(t)\cos\left(t\,\xi\sqrt{\lambda_2}\right) dt \int_0^t \tau(s)\cos\left(s\,\xi\sqrt{\lambda_2}\right) ds +$$

$$+ \int_0^x \tau(t)\sin\left(t\,\xi\sqrt{\lambda_2}\right) dt \int_0^t \tau(s)\sin\left(s\,\xi\sqrt{\lambda_2}\right) ds\Bigg] =$$

$$= \frac{\tau^2(x)}{2} + \frac{\lambda_2}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2}\,\left[\Phi^2(x,\xi) + F^2(x,\xi)\right] d\xi \geqslant 0,$$

где

$$\Phi(x,\xi) = \int_0^t \tau(s)\cos\left(s\,\xi\sqrt{\lambda_2}\right)ds, \quad F(x,\xi) = \int_0^t \tau(s)\sin\left(s\,\xi\sqrt{\lambda_2}\right)ds.$$

Отметим, что знакоопределенность интеграла J показана также в работах [52, 163, 196] с другими подходами, близких к нашему рассуждениями.

Лемма 2.4.2. *Если* $\lambda_1 \geqslant 0$ *и*

$$\lim_{x\to 0+0} u(x,0)u_x(x,0) = \lim_{x\to l-0} u(x,0)u_x(x,0) = 0, \tag{2.4.6}$$

то для любого регулярного в области Ω_+ *решения уравнения* (2.4.1) *справедливо неравенство*

$$\int_0^l \tau(x)\nu(x)dx \leqslant 0.$$

Доказательство. В области Ω_+ рассмотрим тождество

$$u(u_{xx} - u_y - \lambda_1 u) = (uu_x)_x - uu_y - u_x^2 - \lambda_1 u^2$$

и интегрируем его по x вдоль отрезка $A_h B_h$ прямой $y = h$, $0 < h < d$, где $A_h = (\varepsilon, h)$, $B_h = (l - \varepsilon, h)$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. В полученном равенстве, переходя к пределу при $h \to 0$, затем при $\varepsilon \to 0$, с учетом условия (2.4.6) получим

$$\int_0^l \tau(x)\nu(x)\,dx = -\int_0^l [\tau'^{\,2}(x) + \lambda_1\tau^2(x)]\,dx. \tag{2.4.7}$$

Отсюда и следует утверждение леммы при $\lambda_1 \geqslant 0$.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $u(x,y)$ *— решение однородной задачи* (2.4.2)– (2.4.4) *из класса регулярных решений уравнения* (2.4.1), *удовлетворяющее условию* (2.4.6). *Тогда* $u \equiv 0$ *в* Ω *при всех* $\lambda_2 \geqslant 0$ *и* $\lambda_1 > -(\pi/l)^2$.

Доказательство. Легко видеть, что из равенства (2.4.7) в силу лемм 2.4.1 и 2.4.2 при $\lambda_2 \geqslant 0$ и $\lambda_1 \geqslant 0$ следует $u(x,0) \equiv \tau(x) = 0$ на $[0,l]$. Отсюда вытекает, что $u(x,y) \equiv 0$ в Ω.

Пусть теперь $\lambda_2 \geqslant 0$ и $\lambda_1 < 0$. Тогда в силу леммы 2.4.1 из равенства (2.4.7) имеем

$$\int_0^l \tau'^{\,2}(x)\,dx \leqslant -\lambda_1\int_0^l \tau^2(x)\,dx. \tag{2.4.8}$$

С другой стороны, на основании неравенства Фридрихса [170, с. 190]

$$\int\limits_0^l \tau^2(x)\,dx \leqslant \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \int\limits_0^l \tau'^{\,2}(x)\,dx. \tag{2.4.9}$$

Тогда из (2.4.8) и (2.4.9) при $-(\pi/l)^2 < \lambda_1 < 0$ следует единственность решения задачи T.

2°. Случай, когда $\boldsymbol{\lambda_2 < 0}$. Введем новую функцию

$$w(x,y) = u(x,y)\exp(-\alpha x), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

которая в области Ω является регулярным решением уравнения

$$K_1(w) \equiv \begin{cases} w_{xx} - w_y + 2\alpha w_x + (\alpha^2 - \lambda_1)w = 0, & y > 0, \\ w_{xx} - w_{yy} + 2\alpha w_x + (\alpha^2 + \lambda_2)w = 0, & y < 0. \end{cases} \tag{2.4.10}$$

В области Ω_- перейдем к характеристическим координатам $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. При этом уравнение (2.4.10) принимает вид

$$w_{\xi\eta} + \frac{\alpha}{2}w_\xi + \frac{\alpha}{2}w_\eta + \frac{\alpha^2+\lambda_2}{2}w = 0, \tag{2.4.11}$$

а область Ω_- отобразится в область Δ.

В области Δ рассмотрим более общее, чем (2.4.11), уравнение

$$\widetilde{K}_1(w) \equiv w_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)w_\xi + b(\xi,\eta)w_\eta + c(\xi,\eta)w = 0, \tag{2.4.12}$$

и пусть его коэффициенты являются достаточно гладкими в $\overline{\Delta}$.

Лемма 2.4.3. *Если $w = 0$ на характеристике AC и коэффициенты уравнения* (2.4.12) *удовлетворяют условиям* (I) *или* (II):

$$\begin{cases} 2c - a_\xi - b_\eta - c^2/(a_\xi + 2ab) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Delta, \\ a_\xi + 2ab > 0, \quad a \neq 0 \quad \text{в} \quad \Delta, \\ a > 0 \quad \text{на} \quad \eta = \xi, \quad b \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \eta = l; \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} 2c - a_\xi - b_\eta - (c/a)_\eta \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Delta, \\ a_\xi + 2ab \geqslant 0, \quad \text{в} \quad \Delta, \\ a > 0, \quad c \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \eta = \xi, \\ b + c/a \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \eta = l, \end{cases} \tag{II}$$

то для любого регулярного решения уравнения (2.4.12) *справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^x [w(t,0)w_y(t,0) + (b-a)w^2(t,0)]\,dt \geqslant 0, \quad x \in [0,l]. \tag{2.4.13}$$

Доказательство. В области Δ рассмотрим тождества

$$2w\widetilde{K}_1(w) \equiv \left(ww_\eta + aw^2 + \frac{1}{a}w_\eta^2\right)_\xi + \left(ww_\xi + bw^2\right)_\eta + \\ + a^{-2}(a_\xi + 2ab)^{-1}\left[(a_\xi + 2ab)w_\eta + acw\right]^2 + \\ + (2c - a_\xi - b_\eta - c^2/(a_\xi + 2ab))w^2 \equiv 0, \quad (2.4.14)$$

$$2w\widetilde{K}_1(w) \equiv \left(ww_\eta + aw^2 + \frac{1}{a}w_\eta^2\right)_\xi + \left(ww_\xi + bw^2 + \frac{c}{a}w^2\right)_\eta + \\ + \frac{a_\xi + 2ab}{a^2}w_\eta^2 + \left[2c - a_\xi - b_\eta - \left(\frac{c}{a}\right)'_\eta\right]w^2 \equiv 0. \quad (2.4.15)$$

На прямой $\eta = \xi$ возьмем точку (x, x), $0 < x < l$, и через нее проведем характеристику $\eta = x$ уравнения (2.4.12). Обозначим через Δ_x область, ограниченную отрезками прямых $\eta = x$, $\eta = \xi$ и $\xi = 0$. Пусть коэффициенты уравнения (2.4.12) удовлетворяют условиям (I). Тогда, интегрируя тождество (2.4.14) по области Δ_x, получим требуемое неравенство. Когда выполнены условия (II), то, интегрируя тождество (2.4.15) по области Δ_x, снова получим (2.4.13).

Следствие 2.4.1. *Если $w = 0$ на AC и $\alpha \geqslant \sqrt{|\lambda_2|}$, то для любого регулярного решения уравнения* (2.4.11) *справедливо неравенство* (2.4.13).

Теорема 2.4.2. *Пусть $u(x, y)$ — решение однородной задачи* T *из класса регулярных в Ω решений уравнения* (2.4.1), *удовлетворяющее условию* (2.4.6). *Тогда $u(x, y) \equiv 0$ в Ω при всех $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 > -\lambda_2 - (\pi/l)^2$.*

Доказательство. Пусть функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы. Введем функцию $w(x, y) = u(x, y)\exp(-\alpha x)$, где $\alpha \geqslant \sqrt{|\lambda_2|}$, которая в области Ω является решением однородной задачи T для уравнения (2.4.10).

В области Ω_+ рассмотрим тождество

$$wK_1(w) = \left(ww_x + \alpha w^2\right)_x - ww_y - w_x^2 - (\lambda_1 - \alpha^2)w^2 \equiv 0$$

и проинтегрируем его по отрезку A_hB_h (см. доказательство леммы 2.4.2). В полученном равенстве, переходя к пределу при $h \to 0$, затем при $\varepsilon \to 0$, с учетом (2.4.6) получим

$$\int_0^l w(x, 0)w_y(x, 0)\,dx = -\int_0^l [w_x^2(x, 0) + (\lambda_1 + \lambda_2)w^2(x, 0)]\,dx.$$

На основании последнего равенства и следствия 2.4.1 аналогично доказательству теоремы 2.4.1 нетрудно показать, что $w(x,y) \equiv 0$ в Ω. Но тогда $u(x,y) \equiv 0$ в Ω.

Замечание 2.4.1. Используя интегральные представления решений уравнения (2.4.1) в областях Ω_+ и Ω_- на основании теорем 2.4.1 и 2.4.2, несложно получить соответствующие теоремы существования решения задачи T при некоторых ограничениях на краевую функцию $\varphi(x,y)$ (см., например, [52]).

3°. Случай, когда $\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи T. Тогда, переходя к пределу в уравнении (2.4.1) при $y \to 0+0$, получим

$$\tau''(x) - \nu(x) - \lambda_1 \tau(x) = 0. \tag{2.4.16}$$

Из гиперболической части

$$\nu(x) = \tau'(x). \tag{2.4.17}$$

Исключая из уравнения (2.4.16) и (2.4.17) функцию $\nu(x)$, будем иметь

$$\tau''(x) - \tau'(x) - \lambda_1 \tau(x) = 0, \quad \tau(0) = \tau(l) = 0. \tag{2.4.18}$$

Легко видеть, что если $\lambda_1 = -1/4 - (n\pi/l)^2, \quad n \in \mathbb{N}$, то краевая задача (2.4.18) имеет собственные функции

$$\tau_n(x) = e^{x/2} \sin \sqrt{|\lambda_1 + 1/4|}\, x = e^{x/2} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Следовательно, при $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 \neq -\dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, нетрудно показать, что задача T имеет единственное решение. Поэтому числа $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = -\dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$ образуют спектр задачи T и в этом случае несложно выписать все соответствующие собственные функции задачи T.

4°. Случай, когда $\boldsymbol{\lambda_2 < 0}$ и $\boldsymbol{\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant -(\pi/l)^2}$. В области Ω_- для уравнения (2.4.1) снова рассмотрим первую задачу Дарбу (см. § 2.1). Решение этой задачи определяется формулой (2.1.13). Отсюда при $u(x,-x) = \psi(x) = 0$ и $g(\xi,\eta) \equiv 0$ получим

$$u(x,y) = \tau(x+y) - y\beta^2 \int\limits_0^{x+y} \tau(t) \overline{I}_1 \left[\beta \sqrt{(x+y-t)(x-y-t)}\, \right] dt, \tag{2.4.19}$$

где $\beta = \sqrt{|\,\lambda_2|}$, $\overline{I}_1(z) = I_1(z)/z$, $I_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

Лемма 2.4.4. *Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи* T. *Тогда $u(x,y) \geqslant 0$ в Ω только тогда, когда $\tau(x) \geqslant 0$ на $[0,l]$.*

Доказательство. В самом деле, любое регулярное в Ω_- решение задачи T, равное нулю на характеристике AC $(x+y=0)$, может быть представлено в виде формулы (2.4.19). Из этой формулы легко заметить, что если $\tau(x) \geqslant 0$ на $[0, l]$, то $u(x,y) \geqslant 0$ в $\overline{\Omega}_-$. На основании свойства положительности решения параболического уравнения [218, с. 62] $u(x,y) \geqslant 0$ в области Ω_+, когда $\tau(x) \geqslant 0$ на $[0, l]$. Справедливость обратного утверждения очевидна.

Из формулы (2.4.19) (см. также формулу (2.1.17)) вычислим

$$\nu(x) = \tau'(x) - \beta^2 \int_0^x \tau(t) \overline{I}_1 \left[\beta(x-t)\right] dt. \tag{2.4.20}$$

Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи T для уравнения (2.4.1). Тогда, переходя к пределу при $y \to 0+0$ в уравнении (2.4.1), получим (2.4.16). Исключая из уравнений (2.4.16) и (2.4.20) функцию $\nu(x)$, получим интерально-дифференциальное уравнение относительно функции $\tau(x)$:

$$\tau''(x) - \tau'(x) - \lambda_1 \tau(x) = f(x), \tag{2.4.21}$$

где

$$f(x) = -\beta^2 \int_0^x \tau(t) \overline{I}_1 \left[\beta(x-t)\right] dt. \tag{2.4.22}$$

Решение уравнения (2.4.21), удовлетворяющее краевым условиям $\tau(0) = \tau(l) = 0$, при $\lambda_1 > -1/4$ имеет вид

$$\tau(x) = \int_0^l \exp\left(\frac{x-\xi}{2}\right) G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{2.4.23}$$

где

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{k \operatorname{sh} kl} \begin{cases} \operatorname{sh} kx \cdot \operatorname{sh} k(l-\xi), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \operatorname{sh} k\xi \cdot \operatorname{sh} k(l-x), & \xi \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

есть функция Грина первой краевой задачи для уравнения

$$y''(x) - k^2 y(x) = 0, \quad k^2 = \lambda_1 + \frac{1}{4}.$$

Подставляя (2.4.22) в (2.4.23), получим однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода,

$$\tau(x) = \int_0^l K(x,t) \tau(t)\, dt, \tag{2.4.24}$$

$$K(x,t) = \frac{\beta^2}{k\,\mathrm{sh}\,kl}\int\limits_t^l \exp\left(\frac{x-\xi}{2}\right) G^*(x,\xi)\overline{I}_1[\beta(\xi-t)]\,d\xi,$$

$$G^*(x,\xi) = -k\,\mathrm{sh}\,kl\cdot G(x,\xi).$$

Поскольку ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения (2.4.24) неотрицательно и непрерывно на замкнутом квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant l$, то линейный оператор

$$A\tau(x) \equiv \int\limits_0^l K(x,t)\tau(t)\,dt,$$

действующий в пространстве $C[0,l]$, оставляет инвариантным конус $K_0 = \{\tau(x) \in C[0,l]\colon\ \tau(x) \geqslant 0,\ \tau(0) = \tau(l) = 0\}$ неотрицательных функций и является вполне непрерывным.

Покажем, что оператор A является u_0-положительным [101, гл. 7], т. е. существует $u_0(x) \in K_0$, такая, что для любой функции $\tau(x) \in K_0$ и отличной от нулевой существуют положительные числа p и q, такие, что

$$pu_0(x) \leqslant A\tau(x) \leqslant qu_0(x). \tag{2.4.25}$$

Лемма 2.4.5. *Пусть* $[a,b] \subset (0,l)$. *Тогда существует* $\varepsilon = \varepsilon(a,b) > 0$ *такое, что*

$$\varepsilon\int\limits_0^l K(x,t)\,dt \leqslant \int\limits_a^b K(x,t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $\tau(t)$ — любая неотрицательная кусочно-непрерывная функция, заданная на $[0,l]$ и отличная от нулевой. Поскольку ядро $K(x,t) = 0$ при $x = 0$, $x = l$, $t = l$ и строго положительно и непрерывно на множестве $\{(x,t)\colon\ 0 \leqslant t < l, 0 < x < l\}$, то оно ограничено снизу некоторой положительной постоянной на $[a,b]\times[0,d]$, где $0 < d < l$. Поэтому функция $A\tau(x)$ положительна при $x \in (0,l)$ и равна нулю только при $x = 0$ и $x = l$.

Вычислим производную $A'\tau(x)$ и выясним ее знак в точках $x = 0$ и $x = l$:

$$\frac{dA\tau(x)}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{\beta^2}{\mathrm{sh}\,kl}\int\limits_0^l \tau(t)\int\limits_t^l \mathrm{sh}\,k(l-\xi)\cdot\overline{I}_1\left[\beta(\xi-t)\right]e^{-\xi/2}\,d\xi\,dt > 0, \tag{2.4.26}$$

$$\frac{dA\tau(x)}{dx}\Big|_{x=l} = -\frac{\beta^2 e^{l/2}}{\mathrm{sh}\,kl}\int\limits_0^l \tau(t)\int\limits_t^l \mathrm{sh}\,k\,\xi\cdot\overline{I}_1\left[\beta(\xi-t)\right]e^{-\xi/2}\,d\xi\,dt < 0. \tag{2.4.27}$$

Введем новые функции: $\tau_0(x) \equiv 1$, $x \in [0,l]$ и

$$\tau_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,l]/[a,b], \\ 1, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

Согласно вышеуказанному функции $A\tau_0(x)$ и $A\tau_1(x)$ будут положительны на $(0,l)$ и равны нулю только при $x=0$, $x=l$. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $\psi_\varepsilon(x) = A\tau_1(x) - \varepsilon A\tau_0(x)$. В силу оценок (2.4.26) и (2.4.27) существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для всех ε: $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ имеем $\psi'_\varepsilon(0) > 0$ и $\psi'_\varepsilon(l) < 0$. Тогда в достаточно малой окрестности точек $x=0$, $x=l$ функция $\psi_\varepsilon(x)$ неотрицательна. Поэтому на сегментах $[0,\delta]$ и $[l-\delta,l]$, где $\delta > 0$ – достаточно малое число, $\psi_\varepsilon(x) \geqslant 0$ при всех $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1]$. Существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что на сегменте $[\delta, l-\delta]$ функция $\psi_\varepsilon(x) \geqslant 0$ при всех $\varepsilon \in [0,\varepsilon_2]$, так как на этом сегменте функции $A\tau_0(x)$ и $A\tau_1(x)$ ограничены снизу с положительными постоянными. Поэтому при любом $x \in [0,l]$ и $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, функция $\psi_\varepsilon(x) \geqslant 0$. Отсюда

$$\varepsilon \int_0^l K(x,t)\tau_0(t)\,dt \leqslant \int_0^l K(x,t)\tau_1(t)\,dt$$

или

$$\varepsilon \int_0^l K(x,t)\,dt \leqslant \int_a^b K(x,t)\,dt.$$

На основании этой леммы нетрудно доказать справедливость неравенства (2.4.25). В качестве $u_0(x)$ примем функцию

$$u_0(x) = \int_0^l dt \int_t^l G^*(x,\xi)\cdot \overline{I}_1\left[\beta(\xi-t)\right]\exp\left(\frac{x-\xi}{2}\right)d\xi,$$

которая, очевидно, принадлежит K_0. Тогда для любой функции $\tau(x) \in K_0$ и отличной от нулевой, будем иметь

$$A\tau(x) = \int_0^l K(x,t)\tau(t)\,dt \leqslant \max_t \tau(t) \int_0^l K(x,t)\,dt =$$

$$= \max_t \tau(t) \frac{\beta^2}{k\,\mathrm{sh}\,kl} u_0(x) = qu_0(x).$$

Поскольку $\tau(t) \not\equiv 0$ и $\tau(t) \geqslant 0$, то существует $[a,b]$ на котором $\tau(t) \geqslant \tau_1 > 0$ при всех $t \in [a,b]$. Следовательно, в силу леммы 2.4.5

$$A\tau(x) = \int\limits_0^l K(x,t)\tau(t)\,dt \geqslant \tau_1 \int\limits_a^b K(x,t)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \tau_1 \varepsilon \int\limits_0^l K(x,t)\,dt = \frac{\tau_1 \varepsilon \beta^2}{k \operatorname{sh} kl} u_0(x) = p u_0(x).$$

Таким образом, выполнены все условия известной теоремы о существовании положительного собственного числа у положительного непрерывного оператора [101, с. 68], поэтому существует единственная нормированная собственная функция $\tau_0(x) \in K_0$ такая, что

$$A\tau_0(x) = \mu \tau_0(x), \quad \mu_0 \geqslant p, \quad p u_0 \leqslant \tau_0 \leqslant q u_0.$$

Этой собственной функции соответствует простое собственное значение, которое строго больше абсолютной величины всех остальных собственных значений оператора A. Так как однородная задача T эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению (2.4.24), то из полученных результатов и леммы 2.4.4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.4.3. *Однородная задача* T *для уравнения* (2.4.1) *при* $\lambda_2 < 0$ *и* $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant -(\pi/l)^2$ *имеет неотрицательную собственную функцию, которой соответствует положительное собственное значение* $1/\mu_0$. *Это собственное значение простое и строго меньше абсолютной величины остальных собственных значений.*

Таким образом, если даже $\lambda_1 \geqslant 0$, что в области параболичности гарантирует выполнение принципа экстремума, то найдется такое значение $\lambda_2 < 0$, при котором однородная задача T для уравнения (2.4.1) имеет ненулевое неотрицательное решение.

При этом нетрудно заметить, что в области гиперболичности Ω_- для уравнения (2.4.1) нарушено условие (2.2.3) из § 1.2. Следовательно, условие (2.2.3) существенно для единственности решения задачи T для уравнений смешанного типа.

Результаты этого параграфа примечательны тем, что, хотя краевые задачи для уравнения (2.4.1) в областях Ω_- и Ω_+ корректно поставлены при любых λ_1 и λ_2, тем не менее корректность задачи T в смешанной области Ω существенным образом зависит от параметров λ_1 и λ_2.

§ 2.5. О расположении спектра задачи Трикоми

Данный параграф посвящен изучению задачи Трикоми с однородными граничными условиями для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа со спектральным комплексным параметром λ.

Известно, что если оператор является самосопряженным, то его спектр лежит на вещественной прямой. Задача Трикоми для уравнений смешанного типа относится, вообще говоря, к классу несамосопряженных задач, и поэтому ее спектр не обязан лежать на вещественной оси комплексной плоскости (λ). Еще Т. Карлеман [235] показал, что спектр несамосопряженного эллиптического оператора второго порядка лежит в параболе вдоль вещественной оси. Поэтому естественно возникает вопрос о расположении спектра задачи Трикоми на комплексной плоскости (λ). Вначале этот вопрос исследуем для оператора Лаврентьева–Бицадзе, затем для оператора смешанного типа с произвольным степенным вырождением на линии изменения типа.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = (\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + u_{yy} - \lambda|y|^n u = 0, \tag{2.5.1}$$

где $n = \text{const} \geqslant 0$,

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1^2, & y > 0, \\ \lambda_2 = \mu_2^2, & y < 0, \end{cases}$$

λ_1 и λ_2 — заданные числовые, вообще говоря, комплексные параметры, в области D, ограниченной гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(l,0)$, $l > 0$, и при $y < 0$ — характеристиками

$$AC\colon\ x - \frac{2}{n+2}(-y)^{(n+2)/2} = 0, \quad CB\colon\ x + \frac{2}{n+2}(-y)^{(n+2)/2} = l \tag{2.5.2}$$

уравнения (2.5.1), и задачу Трикоми.

Задача T. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2.5.3}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{2.5.4}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma; \tag{2.5.5}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in AC, \tag{2.5.6}$$

где φ, ψ — заданные достаточно гладкие функции; *при этом* $\varphi(A) = \psi(A)$,

$$D_+ = D \cap \{y > 0\}, \quad D_- = D \cap \{y < 0\}.$$

В этом параграфе найдем условия относительно параметров λ_1 и λ_2, при которых однородная задача T имеет только нулевое решение. Отсюда получим множества на комплексной плоскости λ, где не лежат точки спектра задачи.

2.5.1. Теоремы единственности решения задачи Трикоми для уравнения с оператором Лаврентьева–Бицадзе. Пусть в уравнении (2.5.1) $n = 0$; в этом случае оно примет вид

$$Lu \equiv (\text{sgn } y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0. \tag{2.5.7}$$

Определение 2.5.1. Под регулярным решением уравнения (2.5.1) в области D понимается функция $u(x, y)$, удовлетворяющая условиям (2.5.3), (2.5.4) и, кроме того, $u(x, y)$ имеет непрерывные производные u_x и u_y в $\overline{D}_+$, за исключением точек A и B, где они могут иметь особенности интегрируемого порядка.

В области D_- для уравнения (2.5.7) рассмотрим задачи Дарбу, решения которых в § 2.1 построены в явном виде. Из этих формул при условии $u|_{AC} = 0$ найдем равенства, связывающие функции $\tau(x) = u(x, 0)$ и $\nu(x) = u_y(x, 0)$:

$$\nu(x) = \tau'(x) + \mu_2 \int\limits_0^x \frac{J_1[\mu_2(x-t)]}{x-t} \tau(t)\,dt, \quad 0 < x < l, \tag{2.5.8}$$

$$\tau(x) = \int\limits_0^x J_0[\mu_2(x-t)]\nu(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.5.9}$$

где $J_q(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода порядка q; в равенствах (2.5.8) и (2.5.9) $q = 1$ и $q = 0$ соответственно.

Лемма 2.5.1. *Если* $u|_{AC} = 0$ *и* $\lambda_2 \geqslant 0$, *то для любого регулярного решения уравнения* (2.5.7) *имеет место при любом* $x \in [0, l]$ *неравенство*

$$J = \int\limits_0^x u(t, 0)u_y(t, 0)\,dt = \int\limits_0^x \tau(t)\nu(t)\,dt \geqslant 0. \tag{2.5.10}$$

Отметим, что данное утверждение совпадает с леммой 2.4.1, где знакоопределенность интеграла J была установлена на основании (2.5.8) и одной из формул [10, Т. II, с. 92–93]:

$$J_q(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\Big(q+\frac{1}{2}\Big)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^q \int\limits_0^1 (1-\xi^2)^{q-\frac{1}{2}} \cos(z\xi)\,d\xi = \tag{2.5.11}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big(\frac{z}{2}\Big)^q \int\limits_{-1}^1 e^{iz\xi}(1-\xi^2)^{q-\frac{1}{2}}\,d\xi, \tag{2.5.12}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, $\operatorname{Re} q > -1/2$.

Здесь покажем, что знакоопределенность интеграла J можно доказать также исходя из равенства (2.5.9). Действительно, на основании (2.5.9) и (2.5.11) при $q = 0$ имеем

$$J = \int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t J_0[\mu_2(t-s)]\nu(s)\, ds\, dt =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^1 (1-\xi^2)^{-1/2} \cos\left[\mu_2(t-s)\xi\right] d\xi \right) \nu(s)\, ds\, dt =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 (1-\xi^2)^{-1/2}\, d\xi \int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t \nu(s) \cos\left[\mu_2(t-s)\xi\right] ds\, dt =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 (1-\xi^2)^{-1/2} \left[\Phi_\nu^2(x,\xi) + F_\nu^2(x,\xi)\right] d\xi \geqslant 0, \quad (2.5.13)$$

где

$$\Phi_\nu(t,\xi) = \int\limits_0^t \nu(s) \cos\left(\mu_2 s\xi\right) ds, \quad F_\nu(t,\xi) = \int\limits_0^t \nu(s) \sin\left(\mu_2 s\xi\right) ds.$$

Теорема 2.5.1. *Если в классе регулярных решений уравнения* (2.5.7) *в области* D *существует решение задачи* Т, *то оно единственно при всех* $\lambda_2 \geqslant 0$ *и* $\lambda_1 > -p = -2/9 \operatorname{mes} D_+$, *где* $\operatorname{mes} D_+$ — *мера области* D_+.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи Т из класса регулярных решений уравнения (2.5.7). Отойдем от границы области D_+ вовнутрь на расстояние $\varepsilon > 0$ от кривой Γ и на расстояние $\delta > 0$ от отрезка AB, а образовавшуюся таким образом подобласть обозначим через $D_+^{\varepsilon,\delta}$. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} u(u_{xx} + u_{yy} - \lambda_1 u)\, dx\, dy = 0.$$

Интегрируя его по частям и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$, с учетом того, что $u|_\Gamma = 0$, получим

$$\iint\limits_{D_+} (u_x^2 + u_y^2 + \lambda_1 u^2)\, dx\, dy + \int\limits_0^1 \tau(x)\nu(x)\, du = 0. \quad (2.5.14)$$

Отсюда в силу леммы 2.5.1 при $\lambda_2 \geqslant 0$ и $\lambda_1 \geqslant 0$ следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_+$. Тогда в силу единственности решения задачи Коши или задач Дарбу для уравнения (2.5.7) в области D_- функция $u(x,y) \equiv 0$ и в $\overline{D}_-$.

Пусть теперь $\lambda_2 \geqslant 0$ и $-p < \lambda_1 < 0$. Тогда из равенства (2.5.14) имеем

$$\iint\limits_{D_+} (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy \leqslant (-\lambda_1) \iint\limits_{D_+} u^2\, dx\, dy. \tag{2.5.15}$$

Предварительно установим следующее утверждение.

Лемма 2.5.2. *Если* $u|_\Gamma = 0$, *то справедлива оценка*

$$\iint\limits_{D_+} u^2\, dx\, dy \leqslant \frac{9 \operatorname{mes} D_+}{2} \iint\limits_{D_+} |\nabla u|^2\, dx\, dy. \tag{2.5.16}$$

Действительно, область D_+ отобразим симметрично относительно оси $y = 0$ и полученную область обозначим через $D_+{}^*$. На эту область функцию $u(x, y)$ продолжим четным образом. Тогда получим функцию $\widetilde{u}(x, y) \in W_2^1(Q)$, где $Q = D_+ \cup D_+{}^* \cup AB$, т.е. функцию $\widetilde{u}(x, y)$, равную нулю на всей границе области Q. Теперь, используя неравенство [111, с. 83]

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqslant \beta^{(n+2)/n} (\operatorname{mes} \Omega)^{1/n} \|\nabla u\|_{2,\Omega},$$

где $\beta = \left(\dfrac{3}{2}\right)^\alpha$, $\alpha = \dfrac{n}{n+2}$, n — размерность области Ω, получим

$$\iint\limits_{Q} \widetilde{u}^2\, dx\, dy \leqslant \frac{9 \operatorname{mes} Q}{4} \iint\limits_{Q} |\nabla \widetilde{u}|^2\, dx\, dy.$$

Отсюда уже следует справедливость оценки (2.5.16).

Тогда из (2.5.15) и (2.5.16) получим

$$\iint\limits_{D_+} (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy \leqslant -\frac{\lambda_1}{p} \iint\limits_{D_+} (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy.$$

Отсюда при $-p < \lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 \geqslant 0$ следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в D.

Далее рассмотрим единственность решения задачи T для уравнения (2.5.7) при $\lambda_2 < 0$. В этом случае в формулах (2.5.8) и (2.5.9) надо учесть, что $\mu_2 = \sqrt{\lambda_2} = i\sqrt{|\lambda_2|} = i\alpha$, $\alpha = \sqrt{|\lambda_2|} > 0$ и $J_1[\mu_2(x - t)] = iI_1[\alpha(x - t)]$, $J_0[\mu_2(x - t)] = I_0[\alpha(x - t)]$, где $I_q(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода; на основании их докажем следующие утверждения.

Лемма 2.5.3. *Если* $u|_{AC} = 0$ *и* $\lambda_2 < 0$, *то для любого регулярного решения* $u(x, y)$ *уравнения* (2.5.7) *имеет место при любом* $x \in [0, l]$ *неравенство*

$$J_a = \int\limits_0^x e^{-2at} u(t, 0) u_y(t, 0)\, dt \geqslant 0,$$

где $a = \mathrm{const} \geqslant \alpha$.

Доказательство. На основании (2.5.9) преобразуем аналогично (2.5.13) интеграл

$$J_a = \int_0^x e^{-2at}\nu(t)\int_0^t I_0[\alpha(t-s)]\nu(s)\,ds\,dt. \qquad (2.5.17)$$

В (2.5.17) заменим функцию $I_0(z)$ в силу формулы [10, Т. II, с. 93].

$$I_q(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\Big(q+\dfrac{1}{2}\Big)}\left(\frac{z}{2}\right)^q \int_{-1}^{1} e^{-zt}(1-t^2)^{q-1/2}\,dt, \qquad (2.5.18)$$

где $\operatorname{Re} q > -1/2$, ее интегральным представлением. Тогда соотношение (2.5.17) на основании (2.5.18) при $q=0$ примет вид

$$\begin{aligned}
J_a &= \frac{1}{\pi}\int_0^x e^{-2at}\nu(t)\int_0^t \nu(s)\,ds \int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-1/2}e^{-\alpha(t-s)\xi}\,d\xi\,dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-1/2}\,d\xi\int_0^x e^{-2at}\nu(t)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)\xi}\nu(s)\,ds\,dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-1/2}\,d\xi\int_0^x e^{-2t(a+\alpha\xi)}\nu(t)e^{\alpha t\xi}\int_0^t e^{\alpha s\xi}\nu(s)\,ds\,dt = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-1/2}\,d\xi\int_0^x e^{-2t(a+\alpha\xi)}\frac{d}{dt}F^2(t,\xi)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-1/2}\times \\
&\times\left[F^2(x,\xi)e^{-2x(a+\alpha\xi)} + 2(a+\alpha\xi)\int_0^x F^2(t,\xi)e^{-2t(a+\alpha\xi)}\,dt\right]d\xi \geqslant 0.
\end{aligned}$$

А так как $a+\alpha\xi \geqslant a-\alpha \geqslant 0$, то здесь

$$F(t,\xi) = \int_0^t e^{\alpha s\xi}\nu(s)\,ds.$$

Теорема 2.5.2. *Если в классе регулярных решений уравнения* (2.5.7) *существует решение задачи* Т, *то оно единственно при всех* $\lambda_2 < 0$ *и* $\lambda_1 > -\lambda_2 - p$.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию $\omega(x,y) = e^{-ax}u(x,y)$, где $u(x,y)$ — решение однородной задачи Т для уравнения (2.5.7), $a = \alpha = \sqrt{|\lambda_2|}$. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} \omega[\omega_{xx} + \omega_{yy} + 2a\omega_x + (a^2 - \lambda_1)\omega]\,dx\,dy = 0.$$

Интегрируя его по частям и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, получим

$$\iint\limits_{D_+} [\omega_x^2 + \omega_y^2 - (a^2 - \lambda_1)\omega^2]\,dx\,dy + \int\limits_0^l e^{-2at} u(t,0)u_y(t,0)\,dt = 0. \quad (2.5.19)$$

Отсюда в силу леммы 2.5.3 при $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 \geqslant -\lambda_2$ сразу же вытекает единственность решения задачи T для уравнения (2.5.7). Пусть теперь $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_2 - p$. Тогда из равенства (2.5.19) и леммы 2.5.2 будем иметь

$$\iint\limits_{D_+} (\omega_x^2 + \omega_y^2)\,dx\,dy \leqslant -(\lambda_1 + \lambda_2) \iint\limits_{D_+} \omega^2\,dx\,dy \leqslant -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{p} \iint\limits_{D_+} (\omega_x^2 + \omega_y^2)\,dx\,dy. \quad (2.5.20)$$

Из неравенства (2.5.20) также следует единственность решения задачи T для уравнения (2.5.7), так как $\lambda_1 + \lambda_2 + p > 0$.

Отметим, что остается невыясненным вопрос о единственности решения задачи T для уравнения (2.5.7) при $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant -\lambda_2 - p$.

Пусть теперь λ_1 и λ_2 являются комплексными числами: $\lambda_1 = \lambda_{11} + i\lambda_{12}$, $\lambda_2 = \lambda_{21} + i\lambda_{22}$, $\mu_1 = \mu_{11} + i\mu_{12}$, $\mu_2 = \mu_{21} + i\mu_{22}$, λ_{ij}, $\mu_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,2$. Тогда $u(x,y) = u_1(x,y) + iu_2(x,y)$, $\overline{u}(x,y) = u_1(x,y) - iu_2(x,y)$.

Лемма 2.5.4. *Если* $u|_{AC} = 0$, *то для любого регулярного решения* $u(x,y)$ *уравнения* (2.5.7) *имеет место при любом* $x \in [0,l]$ *неравенство*

$$\operatorname{Re} J_a = \operatorname{Re} \int\limits_0^x e^{-2at}\,\overline{u}(t,0)u_y(t,0)\,dt \geqslant 0,$$

где $a = \mathrm{const} \geqslant |\mu_{22}|$.

Доказательство. На основании (2.5.9) и (2.5.12) вычислим интеграл

$$J_a = \int\limits_0^x e^{-2at}\nu(t)\overline{\tau}(t)dt = \int\limits_0^x e^{-2at}\nu(t) \int\limits_0^t J_0[\overline{\mu}_2(t-s)]\overline{\nu}(s)\,ds\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^x e^{-2at}\nu(t) \int\limits_0^t \overline{\nu}(s)ds \int\limits_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} e^{i\overline{\mu}_2(t-s)\xi}\,d\xi\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-1/2}\, d\xi \int\limits_0^x e^{-2at} \int\limits_0^t \nu(t)\overline{\nu}(s) e^{(\mu_{22}+i\mu_{21})(t-s)\xi}\, ds\, dt. \quad (2.5.21)$$

Предварительно найдем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\, [\nu(t)\overline{\nu}(s)e^{i\mu_{21}(t-s)\xi}] = \\
&\quad = \mathrm{Re}\, [(\nu_1(t)\nu_1(s)+\nu_2(t)\nu_2(s)) + i(\nu_2(t)\nu_1(s)-\nu_1(t)\nu_2(s))] \times \\
&\quad \times [\cos\mu_{21}(t-s)\xi + i\sin\mu_{21}(t-s)\xi] = \\
&\quad = [\nu_1(t)\nu_1(s)+\nu_2(t)\nu_2(s)]\cos\mu_{21}(t-s)\xi - \\
&\quad - [\nu_2(t)\nu_1(s)-\nu_1(t)\nu_2(s)]\sin\mu_{21}(t-s)\xi = \\
&= [\nu_1(t)\nu_1(s)+\nu_2(t)\nu_2(s)][\cos\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi + \sin\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi] - \\
&- [\nu_2(t)\nu_1(s)-\nu_1(t)\nu_2(s)][\sin\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi - \cos\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi] = \\
&= \nu_1(t)\nu_1(s)\cos\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi + \nu_2(t)\nu_2(s)\cos\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi + \\
&+ \nu_1(t)\nu_1(s)\sin\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi + \nu_2(t)\nu_2(s)\sin\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi - \\
&- \nu_2(t)\nu_1(s)\sin\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi + \nu_1(t)\nu_2(s)\sin\mu_{21}t\xi\cos\mu_{21}s\xi + \\
&+ \nu_2(t)\nu_1(s)\cos\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi - \nu_1(t)\nu_2(s)\cos\mu_{21}t\xi\sin\mu_{21}s\xi = \\
&= [\nu_1(t)\cos\mu_{21}t\xi - \nu_2(t)\sin\mu_{21}t\xi][\nu_1(s)\cos\mu_{21}s\xi - \nu_2(s)\sin\mu_{21}s\xi] + \\
&+ [\nu_1(t)\sin\mu_{21}t\xi + \nu_2(t)\cos\mu_{21}t\xi][\nu_1(s)\sin\mu_{21}s\xi + \nu_2(s)\cos\mu_{21}s\xi].
\end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$P_1(t,\xi) = [\nu_1(t)\cos\mu_{21}t\xi - \nu_2(t)\sin\mu_{21}t\xi]\, e^{-\mu_{22}t\xi},$$

$$P_2(t,\xi) = [\nu_1(t)\sin\mu_{21}t\xi + \nu_2(t)\cos\mu_{21}t\xi]\, e^{-\mu_{22}t\xi},$$

$$F_i(t,\xi) = \int\limits_0^t P_i(s,\xi)\, ds, \quad i=1,2.$$

Тогда на основании (2.5.21) и (2.5.22) имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\, J_a = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-1/2} \int\limits_0^x e^{-2t(a-\mu_{22}\xi)} \times \\
\times \left[P_1(t,\xi) \int\limits_0^t P_1(s,\xi)\, ds + P_2(t,\xi)\int\limits_0^t P_2(s,\xi)\, ds \right] dt\, d\xi = \\
= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-1/2} \int\limits_0^x e^{-2t(a-\mu_{22}\xi)} \frac{d}{dt}\Big[F_1^2(t,\xi) + F_2^2(t,\xi)\Big] dt\, d\xi =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-1/2} \Bigg\{ \Big[F_1^2(x,\xi) + F_2^2(x,\xi) \Big] e^{-2x(a-\mu_{22}\xi)} +$$

$$+ 2(a-\mu_{22}\xi) \int\limits_{0}^{x} [F_1^2(t,\xi) + F_2^2(t,\xi)] e^{-2t(a-\mu_{22}\xi)} dt \Bigg\} d\xi \geqslant 0.$$

Теорема 2.5.3. *Если в классе регулярных решений уравнения* (2.5.7) *существует решение задачи* T, *то оно единственно при всех* λ_1 *и* λ_2, *удовлетворяющих неравенству*

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1 > |\mathrm{Im}\,\mu_2|^2 - p.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.5.2 введем функцию $\omega(x,y) = e^{-ax}u(x,y)$, где $a = |\mu_{22}| = |\mathrm{Im}\,\mu_2|$, которая в области D_+ является решением уравнения

$$M\omega = \omega_{xx} + \omega_{yy} + 2a\omega_x + (a^2 - \lambda_1)\omega = 0.$$

Рассмотрим тождество

$$\overline{\omega} M\omega = (\overline{\omega}\omega_x)_x + (\overline{\omega}\omega_y)_y - \overline{\omega}_x\omega_x - \overline{\omega}_y\omega_y + 2a\overline{\omega}\omega_x + (a^2 - \lambda_1)|\omega|^2 = 0$$

и проинтегрируем его по области $D_+^{\varepsilon,\delta}$. У полученного равенства выделим реальную часть

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} \left[\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}|\,\omega|^2 + a|\,\omega|^2 \right)_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}|\,\omega|^2 \right)_y \right] dx\,dy -$$

$$- \iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} \left[|\nabla\omega|^2 - \mathrm{Re}\,(a^2 - \lambda_1)|\,\omega|^2 \right] dx\,dy = 0.$$

Применяя здесь формулу Грина и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$, с учетом граничного условия $\omega|_\Gamma = 0$ получим

$$\iint\limits_{D_+} |\nabla\omega|^2\,dx\,dy + (\mathrm{Re}\,\lambda_1 - a^2) \iint\limits_{D_+} |\,\omega|^2\,dx\,dy +$$

$$+ \mathrm{Re} \int\limits_0^l e^{-2at}\,\overline{u}(t,0)u_y(t,0)\,dt = 0. \quad (2.5.23)$$

В силу леммы 2.5.4 при $\mathrm{Re}\,\lambda_1 \geqslant |\mathrm{Im}\,\mu_2|^2$ из равенства (2.5.23) следует единственность решения задачи T для уравнения (2.5.7) в области D.

Если теперь $-p < \operatorname{Re}\lambda_1 - |\operatorname{Im}\mu_2|^2 < 0$, то из равенства (2.5.23) на основании леммы 2.5.2 имеем

$$\iint\limits_{D_+} |\nabla\omega|^2\,dx\,dy \leqslant -(\operatorname{Re}\lambda_1 - a^2)\iint\limits_{D_+} |\,\omega|^2\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{\operatorname{Re}\lambda_1 - a^2}{p}\iint\limits_{D_+} |\nabla\omega|^2\,dx\,dy.$$

Отсюда также вытекает, что $u(x,y) \equiv 0$ в D.

Таким образом, если в уравнении (2.5.7) λ_1 и λ_2 — вещественные, то из теорем 2.5.1 и 2.5.2 следует, что при $\lambda_1 > -p$ и $\lambda_1 + \lambda_2 > -p$ (см. рис. 2.5.1, заштрихованная область) однородная задача Т может иметь не более одного решения.

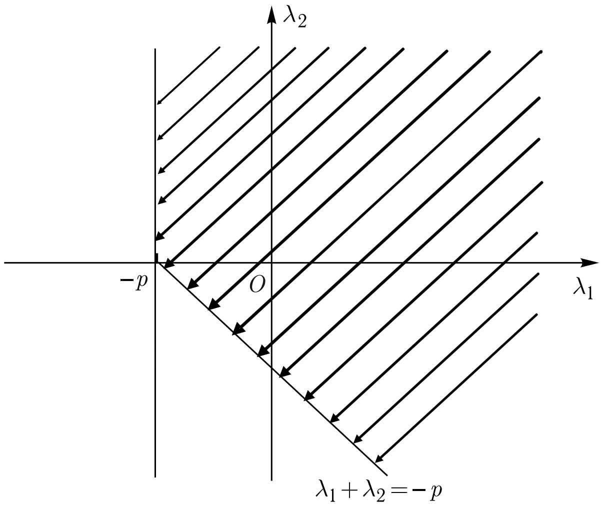

Рис. 2.5.1

Отметим, что случаи, когда $\lambda_2 = \lambda_1$ и $\lambda_2 = -\lambda_1$ изучались многими авторами (см. примеры 6 и 7 из § 1.4 и замечания 1.4.5 и 1.4.6). Если $\lambda_2 = \lambda_1$, то при всех $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 > -p/2$ имеет место единственность решения задачи Т. Если $\lambda_2 = -\lambda_1$, то при всех $\lambda_1 > -p$ справедлива теорема о единственности решения задачи Т для уравнения (2.5.7).

Когда λ_1 и λ_2 — комплексные параметры, тогда в силу теоремы 2.5.3 получим условие

$$\operatorname{Re}\lambda_1 > |\operatorname{Im}\mu_2|^2 - p, \tag{2.5.24}$$

обеспечивающее единственность решения задачи Т для уравнения (2.5.7). Поскольку $\lambda_2 = \lambda_{21} + i\lambda_{22} = \mu_2^2 = (\mu_{21} + i\mu_{22})^2$, то отсюда найдем

$$\mu_{21}^2 = \frac{\sqrt{\lambda_{21}^2+\lambda_{22}^2}+\lambda_{21}}{2} = \frac{|\lambda_2|+\operatorname{Re}\lambda_2}{2},$$

$$\mu_{22}^2 = \frac{\sqrt{\lambda_{21}^2+\lambda_{22}^2}-\lambda_{21}}{2} = \frac{|\lambda_2|-\operatorname{Re}\lambda_2}{2}.$$

Тогда неравенство (2.5.24) равносильно следующему:

$$2\mathrm{Re}\,\lambda_1+\operatorname{Re}\lambda_2 > |\lambda_2|-2p. \tag{2.5.25}$$

Если теперь $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, то из (2.5.25) получим

$$|\lambda| < 3\operatorname{Re}\lambda + 2p. \tag{2.5.26}$$

Соотношение (2.5.26) равносильно неравенствам

$$\operatorname{Re}\lambda > -\frac{2}{3}\,p,$$

$$\frac{\left(\operatorname{Re}\lambda+\frac{3}{4}p\right)^2}{(p/4)^2} - \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{\left(p/\sqrt{2}\,\right)^2} > 1. \tag{2.5.27}$$

Геометрическое место точек λ, удовлетворяющих условиям (2.5.27), представляет собой внутренность правой ветви гиперболы с полуосями $a=p/4$, $b=p/\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi=2\sqrt{2}$ (см. рис. 2.5.2).

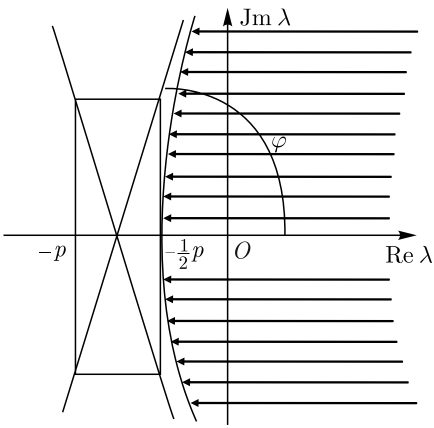

Рис. 2.5.2

Отметим, что этот случай обстоятельно был впервые изучен в работах Е.И. Моисеева [134, 136, 139, 140], в которых показано, что точки спектра задачи Трикоми не могут лежать в угле

$$|\arg\lambda| \leqslant \varphi_0$$

($\varphi_0 \approx 80^\circ$) комплексной плоскости (λ).

Когда $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$, то из неравенства (2.5.25) следует
$$|\lambda| < \operatorname{Re}\lambda + 2p,$$
что в свою очередь равносильно неравенству
$$(\operatorname{Im}\lambda)^2 < 4p(\operatorname{Re}\lambda + p). \tag{2.5.28}$$
Множество точек λ, удовлетворяющих условию (2.5.28), есть внутренность параболы вдоль вещественной оси с центром в точке $\lambda = -p$.

2.5.2. Теоремы единственности решения задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с произвольным степенным вырождением. В этом пункте рассмотрим задачу (2.5.3)–(2.5.6) для уравнения (2.5.1) при всех $n > 0$.

Предварительно для уравнения (2.5.1) в области D_- рассмотрим задачу Дарбу с данными: $u_y(x,0) = \nu(x)$, $0 < x < l$, $u|_{AC} \equiv 0$, решение которой построено в работах [8, 80, 81]. Отсюда найдем соотношение, связывающее функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$:
$$\tau(x) = k_1 \int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta}\ \overline{J}_{-\beta}\big[\sqrt{\lambda_2}\,(x-t)\big]\nu(t)\,dt, \tag{2.5.29}$$
где
$$k_1 = \frac{\Gamma(\beta)(2-4\beta)^{2\beta}}{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}, \quad \beta = \frac{n}{2(n+2)} \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big),$$
$$\overline{J}_{-\beta}(z) = \Gamma(1-\beta)\Big(\frac{z}{2}\Big)^{\beta} J_{-\beta}(z),$$
$J_{-\beta}(z)$ — функция Бесселя первого рода, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Лемма 2.5.5. *Если $u|_{AC} = 0$ и $\lambda_2 \geqslant 0$, то для любого регулярного решения $u(x,y)$ уравнения* (2.5.1) *при любом $x \in [0,l]$ имеет место неравенство*
$$J = \int\limits_0^x u(t,0)u_y(t,0)\,dt = \int\limits_0^x \tau(t)\nu(t)\,dt \geqslant 0. \tag{2.5.30}$$

Доказательство. На основании (2.5.29) и (2.5.11) преобразуем интеграл:
$$J = k_1 \int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t (t-s)^{-2\beta}\ \overline{J}_{-\beta}\big[\sqrt{\lambda_2}\,(t-s)\big]\nu(s)\,ds\,dt =$$
$$= k_1k_2 \int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t (t-s)^{-2\beta} \int\limits_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2-\beta} \cos\big[\sqrt{\lambda_2}\,(t-s)\xi\big]\,d\xi\,ds\,dt =$$
$$= k_1k_2 \int\limits_0^1 (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\,d\xi \int\limits_0^x \nu(t) \int\limits_0^t (t-s)^{-2\beta} \cos\big[\sqrt{\lambda_2}\,(t-s)\xi\big]ds\,dt, \tag{2.5.31}$$

где
$$k_2 = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\Big(\dfrac{1}{2}-\beta\Big)}.$$

На основании формулы [211, с. 385]
$$\int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\cos kt\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{k^\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2},\quad k>0,\quad 0<\alpha<1,$$
функцию $(t-s)^{-2\beta}$ по аналогии с тем, как сделал сам Ф. Трикоми, представим в следующем виде:
$$(t-s)^{-2\beta} = \frac{1}{\Gamma(2\beta)\cos\pi\beta}\int\limits_0^{+\infty}\eta^{2\beta-1}\cos\eta(t-s)\,d\eta. \tag{2.5.32}$$

Тогда, подставляя (2.5.32) в (2.5.31), имеем
$$J = \frac{k_1k_2}{\Gamma(2\beta)\cos\pi\beta}\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\,d\xi\int\limits_0^{+\infty}\eta^{2\beta-1}\,d\eta\times$$
$$\times\int\limits_0^x\nu(t)\int\limits_0^t\nu(s)\cos\eta(t-s)\cos\left[\sqrt{\lambda_2}\,(t-s)\xi\right]ds\,dt =$$
$$= k_3\int\limits_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\,d\xi\int\limits_0^{+\infty}\eta^{2\beta-1}\,d\eta\times$$
$$\times\int\limits_0^x\sum_{i=1}^4 Q_i(t,\xi,\eta)\int\limits_0^t Q_i(s,\xi,\eta)\,ds\,dt, \tag{2.5.33}$$
где
$$Q_1(t,\xi,\eta) = \nu(t)\cos\lambda_2t\xi\cos\eta t,\quad Q_2(t,\xi,\eta) = \nu(t)\sin\lambda_2t\xi\cos\eta t,$$
$$Q_3(t,\xi,\eta) = \nu(t)\cos\lambda_2t\xi\sin\eta t,\quad Q_4(t,\xi,\eta) = \nu(t)\sin\lambda_2t\xi\sin\eta t,$$
$$k_3 = \frac{k_1k_2}{\Gamma(2\beta)\cos\pi\beta}.$$

Тогда, вводя новые функции
$$\Phi_i(t,\xi,\eta) = \int\limits_0^t Q_i(s,\xi,\eta)\,ds, \tag{2.5.34}$$

равенство (2.5.33) запишем в виде

$$J = k_3 \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, d\xi \int\limits_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1} d\eta \int\limits_0^x \sum_{i=1}^4 \Phi_i(t,\xi,\eta)\Phi'_{it}(t,\xi,\eta)\, dt =$$

$$= \frac{k_3}{2} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, d\xi \int\limits_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1}\, d\eta \int\limits_0^x \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^4 \Phi_i^2(t,\xi,\eta)\Big)\, dt =$$

$$= \frac{k_3}{2} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, d\xi \int\limits_0^{\eta} \eta^{2\beta-1} \sum_{i=1}^4 \Phi_i^2(x,\xi,\eta)\, d\eta \geqslant 0.$$

Теорема 2.5.4. *Если в классе регулярных решений уравнения* (2.5.1) *в области* D *существует решение задачи* Т, *то оно единственно при всех* $\lambda_2 \geqslant 0$ *и* $\lambda_1 > -p_1 = -\dfrac{1}{C_{D_+}}$, *где* C_{D_+} — *положительная постоянная, зависящая только от размеров области* D_+.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи Т из класса регулярных решений уравнения (2.5.1). Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} u(y^n u_{xx} + u_{yy} - \lambda_1 y^n u)\, dx\, dy = 0.$$

Интегрируя его по частям, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, с учетом граничного условия $u|_\Gamma = 0$ получим

$$\iint\limits_{D_+} (y^n u_x^2 + u_y^2 + \lambda_1 y^n u^2)\, dx\, dy + \int\limits_0^l u(x,0)u_y(x,0)\, dx = 0. \qquad (2.5.35)$$

В силу полученного равенства (2.5.35) и леммы 2.5.4 при $\lambda_2 \geqslant 0$ и $\lambda_1 \geqslant 0$ получим, что $u(x,y) \equiv 0$ в D. Если $\lambda_2 \geqslant 0$ и $\lambda_1 < 0$, то из (2.5.35) имеем

$$\iint\limits_{D_+} (y^n u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy \leqslant (-\lambda_1) \iint\limits_{D_+} y^n u^2\, dx\, dy. \qquad (2.5.36)$$

Лемма 2.5.6. *Если* $u|_\Gamma = 0$, *то справедлива оценка*

$$\iint\limits_{D_+} y^n u^2(x,y)\, dx\, dy \leqslant C_{D_+} \iint\limits_{D_+} (y^n u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy, \qquad (2.5.37)$$

где положительная постоянная C_{D_+} *зависит только от области* D_+.

Доказательство. Введем в рассмотрение прямоугольник $\Omega = \{(x,y)|\, a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant c\}$, где $a = \min\limits_{\overline{D}_+} x$, $b = \max\limits_{\overline{D}_+} x$, $c = \max\limits_{\overline{D}_+} y$, который содержит в себе область D_+. Функцию $u(x,y)$ продолжим нулем за кривой Г. Справедливо равенство

$$y^{n/2}u = \int\limits_a^x y^{n/2}u_t(t,y)\,dt.$$

Отсюда на основании неравенства Коши–Буняковского имеем

$$y^n u^2 \leqslant (x-a)\int\limits_a^x y^n u_t^2(t,y)\,dt \leqslant (x-a)\int\limits_a^b y^n u_x^2(x,y)\,dx.$$

Интегрируя данное неравенство по x от a до b, получим

$$\int\limits_a^b y^n u^2(x,y)\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int\limits_a^b y^n u_x^2(x,y)\,dx. \tag{2.5.38}$$

Теперь, снова интегрируя по y от 0 до c неравенство (2.5.38), будем иметь

$$\iint\limits_\Omega y^n u^2\,dx\,dy \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\iint\limits_\Omega y^n u_x^2\,dx\,dy \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\iint\limits_\Omega (y^n u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy.$$

Отсюда следует оценка (2.5.37).

Тогда из оценок (2.5.36) и (2.5.37) следует, что

$$\iint\limits_{D_+}(y^n u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy \leqslant -\lambda_1 C_{D_+}\iint\limits_{D_+}(y^n u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy.$$

Из последнего неравенства при $\lambda_1 > -p_1$ вытекает, что $u(x,y) \equiv 0$ в D.

Пусть в уравнении (2.5.1) $\lambda_2 < 0$. В этом случае в формуле (2.5.29) надо учесть, что $\mu_2 = \sqrt{\lambda_2} = i\sqrt{|\lambda_2|} = i\alpha$, $\alpha = \sqrt{|\lambda_2|} > 0$. Тогда в силу формулы (2.5.18) имеем

$$\begin{aligned}
\overline{J}_{-\beta}\big[\sqrt{\lambda_2}\,(x-t)\big] = \overline{J}_{-\beta}\big[i\alpha(x-t)\big] &= \\
&= \Gamma(1-\beta)\Big(\frac{i\alpha(x-t)}{2}\Big)^\beta J_{-\beta}\big[i\alpha(x-t)\big] = \\
&= \Gamma(1-\beta)\Big(\frac{i\alpha(x-t)}{2}\Big)^\beta i^{-\beta} I_{-\beta}\big[\alpha(x-t)\big] = \\
&= \Gamma(1-\beta)\Big(\frac{\alpha(x-t)}{2}\Big)^\beta \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}-\beta\Big)}\Big(\frac{\alpha(x-t)}{2}\Big)^{-\beta} \times
\end{aligned}$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, e^{-\alpha(x-t)\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\beta)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}-\beta)} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, e^{-\alpha(x-t)\xi}\, d\xi. \quad (2.5.39)$$

Лемма 2.5.7. *Если* $u|_{AC} = 0$ *и* $\lambda_2 < 0$, *то для любого регулярного решения уравнения* (2.5.1) *при любом* $x \in [0, l]$ *имеет место неравенство*

$$J_a = \int\limits_0^x e^{-2at} u(t,0) u_y(t,0)\, dt \geqslant 0 \quad (2.5.40)$$

при $a = \mathrm{const} \geqslant \alpha$.

Доказательство. На основании формул (2.5.29) и (2.5.39) преобразуем интеграл в правой части доказываемого неравенства (2.5.40):

$$J_a = k_1 \int\limits_0^x e^{-2at}\nu(t) \int\limits_0^t (t-s)^{-2\beta}\overline{J}_{-\beta}\big[\sqrt{\lambda_2}\,(t-s)\big]\nu(s)\, ds\, dt =$$

$$= k_1 k_2 \int\limits_0^x e^{-2at}\nu(t) \int\limits_0^t (t-s)^{-2\beta}\nu(s) \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, e^{-\alpha(t-s)\xi}\, d\xi\, dt =$$

$$= k_1 k_2 \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, d\xi \int\limits_0^x e^{-2at}\nu(t) \int\limits_0^t \nu(s)(t-s)^{-2\beta} e^{-\alpha(t-s)\xi}\, ds\, dt. \quad (2.5.41)$$

В (2.5.41) функцию $(t-s)^{-2\beta}$ по формуле (2.5.32) заменим ее интегральным представлением. Тогда получим

$$J_a = k_3 \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, d\xi \int\limits_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1}\, d\eta \int\limits_0^x e^{-2t(a+\alpha\xi)}\nu(t)\, e^{\alpha t\xi} \times$$

$$\times \int\limits_0^t \nu(s)\, e^{\alpha s\xi} \cos\eta(t-s)\, ds\, dt = \frac{k_3}{2} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, d\xi \times$$

$$\times \int\limits_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1}\, d\eta \int\limits_0^x e^{-2t(a+\alpha\xi)} \frac{d}{dt}\Big[M_1^2(t,\xi,\eta) + M_2^2(t,\xi,\eta)\Big]\, dt =$$

$$= \frac{k_3}{2} \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, d\xi \int_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1} \Big\{ \big[M_1^2(x,\xi,\eta) + M_2^2(x,\xi,\eta)\big]\, e^{-2x(a+\alpha\xi)} +$$

$$+ 2(a+\alpha\xi) \int_0^x \Big[M_1^2(t,\xi,\eta) + M_2^2(t,\xi,\eta)\Big]\, e^{-2t(a+\alpha\xi)}\, dt \Big\}\, d\eta \geqslant 0,$$

где

$$M_1(t,\xi,\eta) = \int_0^t \nu(s)\, e^{\alpha s\xi} \cos \eta s\, ds,$$

$$M_2(t,\xi,\eta) = \int_0^t \nu(s)\, e^{\alpha s\xi} \sin \eta s\, ds.$$

Теорема 2.5.5. *Если в классе регулярных решений уравнения* (2.5.1) *существует решение задачи* Т, *то оно единственно при всех* $\lambda_2 < 0$ *и* $\lambda_1 > -\lambda_2 - p_1$.

Доказательство. Аналогично теореме 2.5.2 рассмотрим функцию $\omega(x,y) = \exp(-ax)\, u(x,y)$, где $u(x,y)$ — решение однородной задачи Т для уравнения (2.5.1), $a = \alpha = \sqrt{|\lambda_2|}$, а интеграл

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} \omega[y^n \omega_{xx} + \omega_{yy} + 2ay^n\omega_x + (a^2-\lambda_1)y^n\omega]\, dx\, dy = 0.$$

Здесь, интегрируря по частям и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, получим

$$\iint\limits_{D_+} [y^n\omega_x^2 + \omega_y^2 - (a^2-\lambda_1)y^n\omega^2]\, dx\, dy + \int_0^l e^{-2ax} u(x,0) u_y(x,0)\, dx = 0. \tag{2.5.42}$$

Из равенства (2.5.42) в силу леммы 2.5.5 при $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 \geqslant -\lambda_2$ следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в D. Если теперь $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_2 - p_1$, то из (2.5.42) имеем

$$\iint\limits_{D_+} (y^n\omega_x^2 + \omega_y^2)\, dx\, dy \leqslant -(\lambda_1+\lambda_2) \iint\limits_{D_+} y^n\omega^2\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\lambda_1+\lambda_2}{p_1} \iint\limits_{D_+} (y^n\omega_x^2 + \omega_y^2)\, dx\, dy.$$

Отсюда при $\lambda_1 + \lambda_2 + p_1 > 0$ следует также единственность решения задачи Т для уравнения (2.5.1).

Пусть теперь в уравнении (2.5.1) параметры λ_1 и λ_2 являются комплексными.

Лемма 2.5.8. *Если* $u|_{AC} = 0$, *то для любого регулярного решения* $u(x, y)$ *уравнения* (2.5.1) *при любом* $x \in [0, l]$ *имеет место неравенство*

$$\operatorname{Re} J_a = \operatorname{Re} \int_0^x e^{-2at}\, \overline{u}(t, 0) u_y(t, 0)\, dt \geqslant 0,$$

когда $a = \mathrm{const} \geqslant |\mu_{22}|$.

Доказательство. Используя формулы (2.5.29), (2.5.12) и (2.5.32), преобразуем интеграл J_a:

$$J_a = k_1 \int_0^x e^{-2at} \nu(t) \int_0^t (t-s)^{-2\beta}\ \overline{J}_{-\beta}[\overline{\mu}_2(t-s)]\ \overline{\nu}(s)\, ds\, dt =$$

$$= k_1 k_2 \int_0^x e^{-2at} \nu(t) \int_0^t (t-s)^{-2\beta}\ \overline{\nu}(s)\, ds \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\beta-1/2} e^{i\overline{\mu}_2(t-s)\xi}\, d\xi\, dt =$$

$$= k_1 k_2 \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, d\xi \int_0^x e^{-2at} \nu(t) \int_0^t (t-s)^{-2\beta} \nu(s)\, e^{(\mu_{22}+i\mu_{21})(t-s)\xi}\, ds\, dt =$$

$$= k_3 \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, d\xi \int_0^{+\infty} \eta^{2\beta-1}\, d\eta \int_0^x e^{-2t(a-\mu_{22}\xi)} \nu(t)\, e^{-\mu_{22} t\xi} \times$$

$$\times \int_0^t \overline{\nu}(s)\, e^{-\mu_{22} s\xi} \cos\eta(t-s) e^{i\mu_{21}(t-s)\xi}\, ds\, dt. \quad (2.5.43)$$

Аналогично доказательству леммы 2.5.4 выделим реальную часть равенства (2.5.43). На основании (2.5.22) введем вспомогательные функции

$$N_1(t, \xi, \eta) = \int_0^t P_1(s, \xi) \cos\eta s\, ds, \quad N_2(t, \xi, \eta) = \int_0^t P_1(s, \xi) \sin\eta s\, ds,$$

$$N_3(t, \xi, \eta) = \int_0^t P_2(s, \xi) \cos\eta s\, ds, \quad N_4(t, \xi, \eta) = \int_0^t P_2(s, \xi) \sin\eta s\, ds,$$

где $P_i(t, \xi)$ определены выше. Тогда имеем

$$\operatorname{Re} J_a =$$
$$= \frac{k_3}{2} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, d\xi \int\limits_{0}^{+\infty} \eta^{2\beta-1}\, d\eta \int\limits_{0}^{x} e^{-2t(a-\mu_{22}\xi)} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{4} N_i^2(t,\xi,\eta)\, dt =$$
$$= \frac{k_3}{2} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}\, d\xi \int\limits_{0}^{\infty} \eta^{2\beta-1} \Big[e^{-2x(a-\mu_{22}\xi)} \sum_{i=1}^{4} N_i^2(x,\xi,\eta) +$$
$$+ 2(a-\mu_{22}\xi) \int\limits_{0}^{x} e^{-2t(a-\mu_{22}\xi)} \sum_{i=1}^{4} N_i^2(t,\xi,\eta)\, dt \Big]\, d\eta \geqslant 0.$$

Теорема 2.5.6. *Если в классе регулярных решений уравнения* (2.5.1) *существует решение задачи* Т, *то оно единственно при всех* λ_1 *и* λ_2, *удовлетворяющих неравенству*

$$\operatorname{Re} \lambda_1 > |\operatorname{Im} \mu_2|^2 - p_1. \tag{2.5.44}$$

Доказательство. Аналогично теореме 2.5.3 рассмотрим новую функцию $\omega(x,y) = \exp(-ax) u(x,y)$, где $a = |\mu_{22}| = |\operatorname{Im} \mu_2|$, которая в D_+ является решением эллиптического уравнения

$$N\omega = y^n \omega_{xx} + \omega_{yy} + 2ay^n \omega_x + (a^2 - \lambda_1) y^n \omega = 0.$$

Рассмотрим тождество

$$\overline{\omega} N\omega = (\overline{\omega} y^n \omega_x)_x + (\overline{\omega}\omega_y)_y - y^n \overline{\omega}_x \omega_x -$$
$$- \overline{\omega}_y \omega_y + 2ay^n \overline{\omega}\omega_x + (a^2 - \lambda_1) y^n |\omega|^2 = 0$$

и интегрируем его по области $D_+^{\varepsilon,\delta}$. Из данного интеграла найдем реальную часть:

$$\iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} \Big[y^n \Big(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} |\omega|^2 + a|\omega|^2 \Big)_x + \Big(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} |\omega|^2 \Big)_y \Big] dx\, dy -$$
$$- \iint\limits_{D_+^{\varepsilon,\delta}} \Big[y^n \omega_x^2 + \omega_y^2 - \operatorname{Re}(a^2 - \lambda_1) y^n |\omega|^2 \Big] dx\, dy = 0. \tag{2.5.45}$$

Применяя формулу Грина к первому интегралу равенства (2.5.45) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$, получим

$$\iint\limits_{D_+} (y^n \omega_x^2 + \omega_y^2)\, dx\, dy + \operatorname{Re}(a^2 - \lambda_1) \iint\limits_{D_+} y^n |\omega|^2\, dx\, dy +$$
$$+ \operatorname{Re} \int\limits_{0}^{l} e^{-2ax}\, \overline{u}(x,0) u_y(x,0)\, dx = 0. \tag{2.5.46}$$

В силу равенства (2.5.46) и леммы 2.5.8 при $\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant |\operatorname{Im}\mu_2|^2$ следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в D. Если $-p_1 < \operatorname{Re}\lambda_1 - |\mu_2|^2 < 0$, то из равенства (2.5.46) и леммы 2.5.6 имеем

$$\iint\limits_{D_+}(y^n\omega_x^2+\omega_y^2)\,dx\,dy \leqslant -(\operatorname{Re}\lambda_1 - a^2)\iint\limits_{D_+} y^n|\omega|^2\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{\operatorname{Re}\lambda_1^2 - a^2}{p_1}\iint\limits_{D_+}(y^n\omega_x^2+\omega_y^2)\,dx\,dy.$$

Отсюда следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в D.

Итак, если в уравнении (2.5.1) постоянные λ_1 и λ_2 — вещественные, то из теорем 2.5.4 и 2.5.5 следует, что при $\lambda_1 > -p_1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 > -p_1$, где p_1 — положительная постоянная, зависящая только от размеров области D_+, однородная задача T может иметь лишь тривиальные решения. Отметим, что задача T для уравнения (2.5.1) при всех $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 = -\lambda_1$ изучена в работе [59], из которой следует единственность решения задачи T.

Когда λ_1 и λ_2 — комплексные параметры, то на основании теоремы 2.5.6 условие (2.5.44) является достаточным условием единственности решения задачи T для уравнения (2.5.1). Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то условие (2.5.44) равносильно неравенству

$$|\lambda| < 3\operatorname{Re}\lambda + 2p_1,$$

которое, в свою очередь, равносильно системе неравенств

$$\operatorname{Re}\lambda > -\frac{2}{3}p_1,$$
$$\frac{\left(\operatorname{Re}\lambda + \frac{3}{4}p_1\right)^2}{\left(p_1/4\right)^2} - \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{\left(p_1/\sqrt{2}\,\right)^2} > 1. \tag{2.5.47}$$

Если $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda_1 = -\lambda$, то условие (2.5.44) равносильно неравенству

$$|\lambda| < \operatorname{Re}\lambda + 2p_1$$

или системе неравенств

$$\operatorname{Re}\lambda > -2p_1, \quad (\operatorname{Im}\lambda)^2 < 4p_1(\operatorname{Re}\lambda + p_1), \tag{2.5.48}$$

что составляет внутренность параболы с вершиной в точке $(-p_1, 0)$ вдоль положительной оси комплексной плоскости (λ).

Отметим, что в работе [143] доказана единственность решения задачи T для уравнения (2.5.1) при $\lambda_1 = \mu^2$, $\lambda_2 = -\lambda_1 = -\mu^2$, μ — комплексное число, удовлетворяющее условиям

$$\operatorname{Re}\mu > 0, \quad |\operatorname{Im}\mu| \leqslant C,$$

где постоянная C зависит от размеров области D_+.

§ 2.6. О базисности системы синусов и косинусов

Рассмотрим системы $\left\{\sin\left(n-\frac{\beta}{2}\right)\theta\right\}$, $n=1,2,\ldots$, и $\left\{\cos\left(n-\frac{\beta}{2}\right)\theta\right\}$, $n=0,1,2,\ldots$, на сегменте $[0,\pi]$ и исследуем их на базисность в пространстве $L_p[0,\pi]$, где $p>1$.

Теорема 2.6.1. *Система синусов* $\left\{\sin\left(n-\frac{\beta}{2}\right)\theta\right\}_{n=1}^{\infty}$ *образует базис в* $L_p[0,\pi]$ *тогда и только тогда, когда* $\beta\in(-1/p,\,2-1/p)$. *При этом разложение функции* $f(\theta)\in L_p[0,\pi]$ *в ряд по данной системе имеет вид*

$$f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\left(n-\frac{\beta}{2}\right)\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \tag{2.6.1}$$

а коэффициенты ряда определяются по формуле

$$f_n=\int\limits_0^{\pi}f(\theta)h_n^s(\theta)\,d\theta, \tag{2.6.2}$$

$$h_n^s(\theta)=\frac{2}{\pi}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta}\sum_{k=0}^{n}C_\beta^k\sin(n-k)\theta, \tag{2.6.3}$$

$$C_\beta^k=\frac{\beta(\beta-1)\cdot\ldots\cdot(\beta-k+1)}{s!}=\begin{pmatrix}\beta\\ k\end{pmatrix}.$$

При $\beta\geqslant 2-1/p$ *данная система синусов не минимальна*; *при* $\beta<-1/p$ — *не полна*; *при* $\beta=-1/p$ — *минимальна и полна.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующие утверждения.

Лемма 2.6.1. *Если* $f(\theta)\in C^\alpha[0,\pi]$, $0<\alpha\leqslant 1$, $f(0)=0$, $\beta\in(0,2)$, *то ряд* (2.6.1) *сходится равномерно к* $f(\theta)$ *на* $[0,\pi]$; *если же* $\beta\in(-1,0)$, *то ряд* (2.6.1) *сходится равномерно на сегменте* $[0,b]$, *где* $0<b<\pi$.

Доказательство. Применим предложенный в работе [14] подход, основанный на решении граничной задачи Римана–Гильберта в теории аналитических функций. Предварительно рассмотрим задачу: *найти аналитическую в полукруге* $D_+=\{|z|<1,\ \operatorname{Im}z>0\}$ *функцию* $\Phi(z)=u+iv$ *из класса* $C^\alpha(\overline{D}_+)$ *по граничным условиям*:

а) $v|_\Gamma=f(\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $f(0)=0$, $\Gamma\colon |z|=1$, $\operatorname{Im}z\geqslant 0$;

б) $v=0$ при $y=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

в) $\sin\frac{\beta\pi}{2}u+\cos\frac{\beta\pi}{2}v=0$ при $y=0$, $-1<x<0$.

Нетрудно заметить, что функции

$$\Phi(z)=z^{n-\beta/2},\quad n=1,2,\ldots,$$

являются решениями этой задачи с граничными функциями $f_n(\theta) = \sin\left(n-\dfrac{\beta}{2}\right)\theta$, что объясняет рассмотрение следующей задачи.

Теперь найдем интегральное представление решения задачи Римана–Гильберта: *найти в круге* $|z| < 1$ *аналитическую функцию* $\Phi(z)$, *удовлетворяющую условиям*

$$\Phi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}(\Phi(z)z^{-\beta/2}) = f(\theta), \quad |z| = 1, \quad \theta \in [-\pi, \pi]; \qquad (2.6.4)$$

при этом функция $f(\theta)$ *продолжена на* $[-\pi, 0]$ *нечетным образом, т. е.* $f(\theta) = -f(\theta)$, $\theta \in [-\pi, 0]$.

Поскольку в точке $z = 1$ граничная функция $f(\theta)$, вообще говоря, терпит разрыв первого рода, эта точка является узлом функции $\Phi(z)$. Решение задачи (2.6.4) будем искать в классе $h(c_1)$ [148, с. 256]. В качестве канонического решения возьмем функцию $X(z) = (1+z)^\beta$, где $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Тогда задача (2.6.4) однозначно разрешима (так как индекс этой задачи равен нулю), и ее решение имеет вид [148, с. 151]

$$\Phi(z) = \frac{(1+z)^\beta}{\pi}\int\limits_L \frac{f(\varphi)t^{\beta/2}\,dt}{(1+t)^\beta(t-z)} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \left(\frac{1+z}{1+t}\right)^\beta f(\varphi)t^{\beta/2-1}\,dt, \qquad (2.6.5)$$

где $L\colon |t| = 1$, $t = e^{i\varphi}$. В силу нечетности функции $f(\varphi)$ последний интеграл в формуле (2.6.5) равен нулю, а первый интеграл равен нулю в точке $z = 0$. Тогда окончательное решение задачи (2.6.4) определяется по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \left(\frac{1+z}{1+t}\right)^\beta \frac{f(\varphi)t^{\beta/2}}{t-z}\,dt. \qquad (2.6.6)$$

Функция (2.6.6) аналитична в единичном круге и удовлетворяет условию $\overline{\Phi(z)} = \Phi(\overline{z})$, следовательно, $\Phi(z)$ разлагается в ряд Тейлора с действительными коэффициентами:

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \qquad (2.6.7)$$

Теперь, исходя из формулы (2.6.6) с учетом нечетности функции $f(\theta)$, вычислим

$$c_n = \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}\frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{f(\varphi)t^{\beta/2}}{(1+t)^\beta}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[(z+1)^\beta(t-z)^{-1}\right]\Big|_{z=0}\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{f(\varphi)}{\left(2\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)^\beta}\left[\sum_{s=0}^{n} C_\beta^s \sin(n-s)\varphi\right]d\varphi,$$

так как
$$\frac{t^{\beta/2}}{(1+t)^\beta} = \frac{e^{i\beta\varphi/2}}{(1+e^{i\varphi})^\beta} = \left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{-\beta}.$$

Для выяснения равномерной сходимости ряда (2.6.7) на замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ найдем предельные значения $\Phi^+(e^{i\theta})$ функции $\Phi(z)$ при $|z| \to 1-0$. Из формулы (2.6.6) на основании теоремы Сохоцкого–Племеля имеем
$$\Phi^+(e^{i\theta}) = i\,e^{i\beta\theta/2} f(\theta) + \Phi(e^{i\theta}),$$

где
$$\Phi(e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \left(\frac{1+e^{i\theta}}{1+t}\right)^\beta \frac{f(\varphi)t^{\beta/2}\,dt}{t-e^{i\theta}} =$$
$$= ie^{i\beta\theta/2}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}}\right)^\beta \frac{f(\varphi)\,d\varphi}{1-e^{i(\theta-\varphi)}} = i\,e^{i\beta\theta/2}Bf(\theta). \quad (2.6.8)$$

Используя нечетность функции $f(\varphi)$, оператор Bf из (2.6.8) можем записать в виде
$$Bf(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos\theta/2}{\cos\varphi/2}\right)^\beta f(\varphi)\,d\varphi + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos\theta/2}{\cos\varphi/2}\right)^\beta \frac{\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}} f(\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\cos\theta/2}{\cos\varphi/2}\right)^\beta \left(\frac{\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}} - \frac{\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}}\right) f(\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\cos\theta/2}{\cos\varphi/2}\right)^\beta \frac{\sin\varphi}{\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}} f(\varphi)\,d\varphi =$$
$$= -\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\cos\theta/2}{\cos\varphi/2}\right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\sin\dfrac{\varphi-\theta}{2}} + \frac{1}{\sin\dfrac{\varphi+\theta}{2}}\right) f(\varphi)\,d\varphi. \quad (2.6.9)$$

Из формулы (2.6.9) видно, что $Bf(\theta)$ является чисто мнимой и четной функцией на сегменте $[-\pi,\pi]$. При этом она удовлетворяет условию Гёльдера на этом сегменте. Действительно, при $0<\beta<1$ это следует из формулы (2.6.8) и результатов работы [148, §§ 22–26]. Если $1 \leqslant \beta < 2$, то из представления (2.6.9) также следует гёльдеровость функции $Bf(\theta)$ на $[-\pi,\pi]$. Отсюда с учетом нечетности функции $f(\theta)$ и четности функции $Bf(\theta)$ на $[-\pi,\pi]$ следует, что функция
$$\operatorname{Re}\Phi^+(e^{i\theta}) = -f(\theta)\sin\frac{\beta\theta}{2} - \operatorname{Im}Bf(\theta)\cos\frac{\beta\theta}{2} \quad (2.6.10)$$

удовлетворяет условию Гёльдера на единичной окружности. Следовательно, по теореме Привалова функция (2.6.6) удовлетворяет условию Гёльдера на единичном круге $|z| \leqslant 1$. Поэтому ряд (2.6.7) сходится равномерно на $|z| \leqslant 1$. Тогда равномерно сходится и ряд (2.6.1). Если $\beta \in (-1, 0)$, то ряд (2.6.7) сходится равномерно на замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ без выколотой окрестности граничной точки $z = -1$ и поэтому ряд (2.6.1) сходится равномерно на сегменте $[0, b]$, где b — любое положительное число меньшее π.

Лемма 2.6.1 полностью доказана.

Лемма 2.6.2. *Система синусов* $\left\{\sin(n - \beta/2)\theta\right\}_{n=1}^{\infty}$ *и система функций* $\left\{h_k^s(\theta)\right\}_{k=1}^{\infty}$, *заданных формулой* (2.6.3), *биортогональны при* $-1 < \beta < 1$, *т. е.*

$$\int_0^\pi h_k^s(\theta)\sin\left[(n - \beta/2)\theta\right] d\theta = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Доказательство. На основании (2.6.3) вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} J_{nk} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\,\left[(n - \beta/2)\theta\right](2\cos\theta/2)^{-\beta}\sum_{s=0}^{k} C_\beta^s \sin\,\left[(k-s)\theta\right] d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{k} C_\beta^s \int_0^\pi (2\cos\theta/2)^{-\beta}\sin\,\left[(n-\beta/2)\theta\right]\sin\,\left[(k-s)\theta\right] d\theta = \\ &= \frac{2^{-\beta}}{\pi}\sum_{s=0}^{k} C_\beta^s \int_0^\pi (\cos\theta/2)^{-\beta}\Big[\cos\left(\frac{n-\beta}{2} - k + s\right)\theta - \\ &- \cos\left(\frac{n-\beta}{2} + k - s\right)\theta\Big] d\theta = \frac{2^{-\beta}}{\pi}\sum_{s=0}^{k} C_\beta^s\left(M_s^{(1)} - M_s^{(2)}\right), \end{aligned} \tag{2.6.11}$$

где

$$M_s^{(1)} = \int_0^\pi (\cos\theta/2)^{-\beta}\cos\,(n - \beta/2 - k + s)\theta\, d\theta, \tag{2.6.12}$$

$$M_s^{(2)} = \int_0^\pi (\cos\theta/2)^{-\beta}\cos\,(n - \beta/2 + k - s)\theta\, d\theta. \tag{2.6.13}$$

Для вычисления интегралов $M_s^{(1)}$ и $M_s^{(2)}$ воспользуемся формулой [10, Т. I, с. 26]

$$\int_0^{\pi/2} (\cos t)^\alpha \cos\gamma t\,dt = \frac{\pi}{2^{\alpha+1}}\,\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\Big(1+\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\Big)\Gamma\Big(1+\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\Big)}; \qquad (2.6.14)$$

здесь $\operatorname{Re}\alpha > -1$. Тогда в силу формулы (2.6.14) при $\beta < 1$ имеем

$$M_s^{(1)} = \frac{\pi}{2^{1-\beta}}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+n-k+s-\beta)\Gamma(1-n+k-s)},$$

$$M_s^{(2)} = \frac{\pi}{2^{1-\beta}}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+n+k-s-\beta)\Gamma(1-n-k+s)}.$$

Поскольку $\Gamma(-m) = \infty$ при $m = 0, 1, 2, \ldots$, то $M_s^{(2)} = 0$ при любых k, $n \in \mathbb{N}$. Заметим также, что при $n > k$ и $0 \leqslant s \leqslant k$, $n = k$ и $1 \leqslant s \leqslant k$, $n < k$ и $1 + k - n \leqslant s \leqslant k$ функция $\Gamma(1-n+k-s) = \infty$. Тогда значение интеграла $M_s^{(1)}$ будет

$$M_s^{(1)} = \frac{\pi}{2^{1-\beta}}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+n-k+s-\beta)(k-n-s)!}, \quad 0 \leqslant s \leqslant k-n. \qquad (2.6.15)$$

Тогда из (2.6.11) и (2.6.15) получим, что $J_{nk} = 1$ при $n = k$, а при $n < k$ и $0 \leqslant s \leqslant k-n$ интеграл (2.6.11) примет вид

$$J_{nk} = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-n} C_\beta^s \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+n-k+s-\beta)(k-n-s)!}.$$

Отсюда с учетом равенства

$$\Gamma(1-\beta-(k-n-s)) = (-1)^{k-n-s}\,\frac{\Gamma(1-\beta)}{(\beta)_{k-n-s}}$$

получим

$$J_{nk} = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-n}\begin{pmatrix}\beta\\ s\end{pmatrix}\frac{(-1)^{k-n-s}(\beta)_{k-n-s}}{(k-n-s)!} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{m}\begin{pmatrix}\beta\\ s\end{pmatrix}\frac{(-1)^{m-s}(\beta)_{m-s}}{(m-s)!} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{m}\begin{pmatrix}\beta\\ s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta\\ m-s\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ m\end{pmatrix} = 0,$$

так как справедлива формула [165, Т. I, п. 4.2.5]

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}a\\ k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ n-k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\ n\end{pmatrix}.$$

Лемма 2.6.3. *Биортогональная система $h_k^s(\theta)$, $k = 1, 2, \ldots$, допускает следующие представления*:

$$h_n^s(\theta) = \frac{2}{\pi}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta} C_\beta^n \operatorname{Im} F(-n, 1, \beta - n + 1; -e^{i\theta}), \tag{2.6.16}$$

$$h_n^s(\theta) = \frac{2}{\pi}\sin\left(n - \frac{\beta}{2}\right)\theta + (-1)^n \frac{2\sin\pi\beta\sin\theta}{\pi^2\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta}} \int\limits_0^1 \frac{t^{n-\beta}(1-t)^{\beta}dt}{1 + 2t\cos\theta + t^2}. \tag{2.6.17}$$

Доказательство. На основании формулы (2.6.3) имеем

$$h_n^s(\theta) = \frac{2}{\pi}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(-\beta)_k}{k!}\sin(n-k)\theta = \big|n - k = m\big| =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}(-\beta)_{n-m}}{(n-m)!}\sin m\theta. \tag{2.6.18}$$

В силу известных равенств

$$(n-m)! = \frac{n!}{(-1)^m(-n)_m}, \quad (-\beta)_{n-m} = \frac{(-1)^m(-\beta)_n}{(1+\beta-n)_m}$$

из (2.6.18) вытекает представление (2.6.16):

$$h_n^s(\theta) = \frac{2}{\pi}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta} \frac{(-1)^n(-\beta)_n}{n!} \operatorname{Im} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-n)_m(1)_m}{(1+\beta-n)_m m!}(-e^{i\theta})^m =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta} C_\beta^n \operatorname{Im} F(-n, 1, \beta - n + 1; -e^{i\theta}).$$

Справедливость равенства (2.6.17) следует из интегрального представления гипергеометрической функции $F(-n, 1, \beta - n + 1; -e^{i\theta})$.

Следствие 2.6.1. *Для системы функций $h_n^s(\theta)$, $n = 1, 2, \ldots$, при любых $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in [0, \pi]$ справедлива оценка*

$$|h_n^s(\theta)| \leqslant \begin{cases} C = \mathrm{const} > 0, & \beta \in (-1, 1], \\ C(\cos\theta/2)^{1-\beta}, & \beta \in (1, 2). \end{cases}$$

Справедливость данной оценки непосредственно следует из интегрального представления (2.6.17).

Прежде чем начать доказательство теоремы 2.6.1, напомним известные определения и утверждения [45], которые потребуются нам в дальнейшем.

Определение 2.6.1. Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве E называется минимальной, если ни один элемент этой системы не принадлежит замкнутой линейной оболочке остальных элементов.

Определение 2.6.2. Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется равномерно минимальной, если

$$\rho(\varphi_n, E^{(n)}) > \gamma\|\varphi_n\|,$$

где $0 < \gamma \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, $\rho(\varphi_n, E^{(n)})$ — расстояние от φ_n до замкнутой линейной оболочки $E^{(n)}$ всех элементов φ_k с $k \neq n$.

Утверждение 2.6.1. *Для того чтобы система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы существовала система линейных функционалов из сопряженного пространства E', образующая с данной биортогональную систему, т. е. такая система $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ из E', что $\psi_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$.*

Если система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является полной и минимальной, то система функционалов $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ определяется единственным образом.

Утверждение 2.6.2. *Полная минимальная система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является равномерно минимальной тогда и только тогда, когда*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \|\varphi_k\| \cdot \|\psi_k\| < \infty,$$

где $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — сопряженная (биортогональная) система.

Определение 2.6.3. Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис пространства E, если каждый элемент $x \in E$ единственным образом разлагается в ряд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

сходящийся к x по норме пространства E.

В данном разложении коэффициенты c_k являются линейными функционалами элемента x:

$$c_k = \psi_k(x).$$

Всякий базис представляет собой полную равномерно минимальную систему. Обратное утверждение неверно, так как тригонометрическая система $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ является полной равномерно минимальной в пространстве $C[-\pi, \pi]$, но базис в нем не образует.

Утверждение 2.6.3. *Если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в E, то система $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом в своей линейной замкнутой оболочке, которая может не совпадать с E'. Если E рефлексивно, то эта оболочка совпадает с E' и $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом в E'.*

Если $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — базис в сопряженном пространстве E', то $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом в E.

Отметим, что пространство $L_p(0,\pi)$ при $p>1$ рефлексивно, т.е. $(E')'=E$.

Доказательство теоремы 2.6.1. Пусть $f(\theta)\in L_p[0,\pi]$, $p>1$. Докажем, что ряд (2.6.1) сходится в $L_p[0,\pi]$ к функции $f(\theta)$. В этом случае, рассуждая аналогично доказательству леммы 2.6.1, и в силу результатов работы [221] аналитическая в круге $|z|<1$ функция $\Phi(z)$ определяется той же формулой (2.6.6). Теперь докажем, что ряд (2.6.7) сходится в L_p на единичной окружности. Для этого в силу равенства (2.6.10) достаточно показать, что оператор B ограничен в подпространстве $L_p[-\pi,\pi]$ из нечетных функций. Из представления (2.6.8) и теоремы 1 работы К.И. Бабенко [4] следует ограниченность оператора в $L_p[-\pi,\pi]$, если $\beta\in(-1/p,1-1/p)$. Далее из представления оператора B в виде (2.6.9) и снова из отмеченной выше теоремы К.И. Бабенко получим ограниченность оператора B в $L_p[-\pi,\pi]$ при $\beta\in(1-1/p,2-1/p)$. Остается рассмотреть случай, когда $\beta=1-1/p$. Поскольку оператор B ограничен в $L_p[-\pi,\pi]$ при $\beta\in(-1/p,1-1/p)\cup(1-1/p,2-1/p)$, то он ограничен при $\beta=1-1/p$ в $L_\alpha[-\pi,\pi]$, если $\alpha\in(p-\varepsilon,p)$ и $\alpha\in(p,p+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число. Тогда в силу интерполяционной теоремы Рисса–Торина [70, Т. 2, с. 144] оператор B ограничен в $L_p[-\pi,\pi]$ при $\beta=1-1/p$.

Итак, доказано, что ряд (2.6.1) сходится в $L_p[0,\pi]$. Тогда в силу лемм 2.6.1–2.6.3 и приведенных выше определений 2.6.1–2.6.3 и утверждений 2.6.1–2.6.3 следует, что система синусов $\{\sin(n-\beta/z)\theta\}$ полна, минимальна и, более того, образует базис в $L_p[0,\pi]$.

Покажем теперь, что при $\beta\notin(-1/p,\,2-1/p)$ система синусов не образует базиса в $L_p[0,\pi]$. Пусть $\beta<-1/p$. Тогда, осуществив в системе синусов замену $n=m+[\beta/2+1/(2p)]$ и $\beta=\widetilde{\beta}+2[\beta/2+1/(2p)]$, где квадратные скобки означают целую часть вещественного числа, получим систему синусов $\sin(m-\widetilde{\beta}/2)\theta$; здесь $\widetilde{\beta}\in(-1/p,2-1/p)$, а $m\geqslant 1-[\beta/2+1/(2p)]\geqslant 2$. Следовательно, эта система не полна в $L_p[0,\pi]$.

Пусть теперь $\beta\geqslant 2-1/p$. Если $\beta=2-1/p$, то биортогональная система $h_n^s(\theta)$ не принадлежит $L_q[0,\pi]$, поэтому в этом случае система синусов не минимальна. При $\beta>2-1/p$ в указанной системе синусов произведем замену

$$n=m+1+[\beta/2-1+1/(2p)],\quad \beta=\widetilde{\beta}+2+2[\beta/2-1+1/(2p)].$$

В результате получим систему $\sin(m - \widetilde{\beta}/2)\theta$, где $\widetilde{\beta} \in (-1/p, 2 - 1/p)$, $m \geqslant 0$, которая также не минимальна, так как при $m \geqslant 1$ эта система образует базис в $L_p[0, \pi]$.

Остается рассмотреть случай $\beta = -1/p$. Отметим, что в этом случае система синусов минимальна, так как в силу леммы 2.6.2 к ней существует биортогональная система. Перепишем систему синусов в виде

$$\sin\left(n + \frac{1}{2p}\right)\theta = \sin\left(m - \overline{\beta}/2\right)\theta, \quad \widetilde{\beta} = 2 - 1/p,$$

где $n \geqslant 1$, $m \geqslant 2$. В силу только что доказанного выше, система $\sin(m - \beta/2)\,\theta$ не минимальна в $L_p[0, \pi]$, но полна, а при $m \geqslant 2$ минимальна, а следовательно, полна в $L_p[0, \pi]$. Таким образом, при $\beta = -1/p$ система синусов полна и минимальна. Тем не менее, в этом случае система синусов базиса в $L_p[0, \pi]$ не образует. Действительно, взяв в качестве $f(\theta)$ функцию, равную единице, из формулы (2.6.17) получим следующее асимптотическое представление для коэффициента:

$$f_n = \int_0^\pi 1 \cdot h_n^s(\theta)\,d\theta = \frac{2}{n}\,\frac{1 - (-1)^n\cos(\pi\beta/2)}{n - \beta/2} + \frac{\sin(\pi\beta/2)}{n^{1-\beta}} + O\left(\frac{1}{n^{2-\beta}}\right).$$

Отсюда следует, что ряд (2.6.1) сходится к функции, не принадлежащей $L_p[0, \pi]$.

Теорема 2.6.1 полностью доказана.

Теперь рассмотрим систему косинусов $\left\{\cos(n - \beta/2)\theta\right\}_{n=0}^{\infty}$, $\theta \in [0, \pi]$.

Теорема 2.6.2. *Система косинусов* $\left\{\cos(n - \beta/2)\theta\right\}_{n=0}^{\infty}$ *образует базис в* $L_p[0, \pi]$, $p > 1$, *тогда и только тогда, когда* $\beta \in (-1 - 1/p, 1 - 1/p)$. *При этом разложение функции* $g(\theta) \in L_p[0, \pi]$ *в ряд по данной системе имеет вид*

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \cos\left[(n - \beta/2)\theta\right], \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{2.6.19}$$

где

$$g_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(\theta)h_n^c(\theta)\,d\theta,$$

$$h_n^c(\theta) = \frac{2}{\pi}\left(2\cos\frac{\beta}{2}\right)^{-\beta}\left[\sum_{k=0}^{n} C_\beta^k \cos(n - k)\theta - \frac{1}{2}C_\beta^n\right]. \tag{2.6.20}$$

При $\beta \geqslant 1 - 1/p$ *система косинусов не минимальна, но полна; при* $\beta < -1 - 1/p$ *— не полна; при* $\beta = -1 - 1/p$ *— полна и минимальна.*

5*

Доказательство данной теоремы основывается на следующих утверждениях.

Лемма 2.6.4. *Если функция* $g(\theta) \in C^{\alpha}[0,\pi]$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $-1 < \beta < 1$, *то ряд* (2.6.19) *сходится равномерно к* $g(\theta)$ *на сегменте* $[0,\pi]$; *если же* $\beta \in (-2,-1]$, *то ряд* (2.6.19) *сходится равномерно на* $[0,b]$, *где* $0 < b < \pi$.

Доказательство. Как в случае доказательства леммы 2.6.1 предварительно рассмотрим задачу: *найти аналитическую в полукруге* $D_+ = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ *функцию* $\Phi(z) = u + iv$ *из класса* $C^{\alpha}(\overline{D_+})$, *удовлетворяющую граничным условиям*:

а) $u(x,y)|_{\Gamma} = g(\theta),\ \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ \ \Gamma\colon\ |z| = 1,\ \ \operatorname{Im} z \geqslant 0$;

б) $v(x,y) = 0$ при $y = 0,\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1$;

в) $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}u + \cos\dfrac{\beta\pi}{2}v = 0,\ \ y = 0,\ \ -1 < x < 0$.

Отметим, что функции $\Phi_n(z) = z^{n-\beta/2}$, $n = 0,1,2,\ldots$, являются решениями этой задачи Римана–Гильберта с граничными функциями $g_n(\theta) = \cos(n - \beta/2)\theta$.

Далее найдем интегральное представление решения задачи Римана–Гильберта: *найти в круге* $|z| < 1$ *аналитическую функцию* $\Phi(z)$, *удолетворяющую условиям*:

$$\Phi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}(\Phi(z)z^{-\beta/2}) = g(\theta), \quad |z| = 1, \quad \theta \in [-\pi,\pi];$$

при этом функция $g(\theta)$ *продолжена на* $[-\pi,0]$ *четным образом.*

Решение этой задачи определяется по формуле

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \left(\frac{1+z}{1+t}\right)^{\beta}\frac{g(\varphi)t^{\beta/2}}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \left(\frac{1+z}{1+t}\right)^{\beta} g(\varphi)t^{\beta/2-1}\,dt, \tag{2.6.21}$$

где $L\,:\,|t| = 1$, $t = e^{i\varphi}$. Функция (2.6.21) аналитична в единичном круге $|z| < 1$, поэтому разлагается в степенной ряд

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n, \tag{2.6.22}$$

коэффициенты которого в силу формулы (2.6.21) определяются по формуле

$$C_n = \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{g(\varphi)t^{\beta/2}}{(1+t)^{\beta}}\frac{\partial^n}{\partial z^n}[(1+z)^{\beta}(t-z)^{-1}]\Big|_{z=0}\,dt -$$

$$- \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}[(1+z)^{\beta}]\Big|_{z=0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\varphi)t^{\beta/2-1}}{(1+t)^{\beta}}\,dt =$$

$$
= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{g(\varphi)}{\left(2\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)^{\beta}} \left[\sum_{k=0}^{n} C_{\beta}^{k}\cos{(n-k)\varphi} - \frac{1}{2}C_{\beta}^{n}\right] d\varphi.
$$

Отсюда следует существование системы функций (2.6.20).

Для выяснения равномерной сходимости ряда (2.6.22) на замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ вычислим предельные значения $\Phi^{+}(e^{i\theta})$ функции $\Phi(z)$ при $|z| \to 1-0$. Из формулы (2.6.21) имеем

$$
\Phi^{+}(e^{i\theta}) = e^{i\beta\theta/2}g(\theta) + \Phi(e^{i\theta}),
$$

где

$$
\Phi(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\frac{\beta\theta}{2}}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos\theta/2}{\cos\varphi/2}\right)^{\beta}\frac{g(\varphi)\,d\varphi}{1-e^{i(\theta-\varphi)}} - \frac{e^{i\frac{\beta\theta}{2}}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos\theta/2}{\cos\varphi/2}\right)^{\beta} g(\varphi)\,d\varphi =
$$

$$
= \frac{ie^{i\frac{\beta\theta}{2}}}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos\theta/2}{\cos\varphi/2}\right)^{\beta}\frac{\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}} g(\varphi)\,d\varphi = ie^{i\frac{\beta\theta}{2}}Ag(\theta). \quad (2.6.23)
$$

На основании свойства четности функии $g(\theta)$ на $[-\pi,\pi]$ оператор A из (2.6.23) можно представить в виде

$$
A\,g(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\cos\theta/2}{\cos\varphi/2}\right)^{\beta}\left(\frac{\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}} + \frac{\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}}\right) g(\varphi)\,d\varphi =
$$

$$
= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\cos\theta/2}{\cos\varphi/2}\right)^{\beta+1}\left(\frac{1}{\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}} + \frac{1}{\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}}\right) g(\varphi)\,d\varphi. \quad (2.6.24)
$$

Из представления (2.6.24) следует, что функция $A\,g(\theta)$ является вещественной и нечетной на сегменте $[-\pi,\pi]$. Она удовлетворяет условию Гёльдера на этом сегменте при $\beta \in (-1,1)$. Когда $\beta \in [0,1)$ это следует из формулы (2.6.23), а при $-1 < \beta < 0$ это следует уже из представления (2.6.24). Отсюда с учетом четности функции $g(\theta)$ и нечетности функции $A\,g(\theta)$ на $[-\pi,\pi]$ следует, что функция

$$
\operatorname{Re}\Phi^{+}(e^{i\theta}) = g(\theta)\cos\frac{\beta\theta}{2} - A\,g(\theta)\sin\frac{\beta\theta}{2}
$$

удовлетворяет условию Гёльдера на единичной окружности. Тогда функция (2.6.21) удовлетворяет условию Гёльдера на замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Поэтому ряд (2.6.22) сходится равномерно на $|z| \leqslant 1$; следовательно, и ряд (2.6.19) сходится равномерно на $[0,\pi]$.

Лемма 2.6.5. *Система косинусов* $\left\{\cos(n-\beta/2)\theta\right\}_{n=0}^{\infty}$ *и система* (2.6.20) *биортогональны на* $[0,\pi]$ *при* $-2<\beta<1$, *т. е.*

$$\int\limits_0^\pi \cos\left[(n-\beta/2)\theta\right] h_k^c(\theta)\,d\theta=\delta_{nk}.$$

Доказательство. С учетом формулы (2.6.20) вычислим интеграл

$$M_{nk}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos\left[(n-\beta/2)\theta\right]\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta}\left[\sum_{s=0}^{k}C_\beta^s\cos\left[(k-s)\theta\right]-\frac{1}{2}C_\beta^k\right]d\theta=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{k}C_\beta^s\int\limits_0^\pi\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta}\cos\left[n-\beta/2)\theta\right]\cos\left[(k-s)\theta\right]d\theta-$$

$$-\frac{1}{\pi}C_\beta^k\int\limits_0^\pi\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta}\cos\left[(n-\beta/2)\theta\right]=\frac{2^{-\beta}}{\pi}\sum_{s=0}^{k}C_\beta^s\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta}\left[\cos\left(n-\frac{\beta}{2}+k-s\right)\theta+\cos\left(n-\frac{\beta}{2}-k+s\right)\theta\right]d\theta-$$

$$-\frac{2^{-\beta}}{\pi}C_\beta^k\int\limits_0^\pi\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta}\cos\left[(n-\beta/2)\,\theta\right]d\theta=$$

$$=\frac{2^{-\beta}}{\pi}\sum_{s=0}^{k-1}C_\beta^s\int\limits_0^\pi\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta}\cos\left(n-\frac{\beta}{2}+k-s\right)\theta\,d\theta+$$

$$+\frac{2^{-\beta}}{\pi}\sum_{s=0}^{k}C_\beta^s\int\limits_0^\pi\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta}\cos\left(n-\frac{\beta}{2}-k+s\right)\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{2^{-\beta}}{\pi}\sum_{s=0}^{k-1}C_\beta^s M_s^{(2)}+\frac{2^{-\beta}}{\pi}\sum_{s=0}^{k}C_\beta^s M_s^{(1)},$$

где выражения $M_s^{(1)}$ и $M_s^{(2)}$ определены, соответственно, формулами (2.6.12) и (2.6.13). Далее доказательство проводится аналогично лемме 2.6.2, так как на основании формулы (2.6.14) вычислены интегралы $M_s^{(1)}$ и $M_s^{(2)}$.

Лемма 2.6.6. *Биортогональная система* $h_k^c(\theta)$, *заданная формулой* (2.6.20), *допускает следующие представления*:

$$h_n^c(\theta)=\frac{2}{\pi}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta}C_\beta^n\,\mathrm{Re}\left[F(-n,1,\beta-n+1;-e^{i\theta})-\frac{1}{2}\right],\quad(2.6.25)$$

$$h_n^c(\theta) = \frac{2}{\pi}\cos\Bigl(n - \frac{\beta}{2}\Bigr)\theta + \frac{(-1)^n 2\sin\pi\beta}{\pi^2(2\cos\theta/2)^\beta}\int\limits_0^1 \frac{t^{k-\beta-1}(1-t)^{1+\beta}}{1+2t\cos\theta+t^2}(1+t)\,dt. \tag{2.6.26}$$

Доказательство проводится аналогично обоснованию леммы 2.6.3.

Следствие 2.6.2. *Для системы функций $h_n^c(\theta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, при любых n и $\theta \in [0, \pi]$ справедлива оценка*

$$|h_n^c(\theta)| \leqslant \begin{cases} C = \mathrm{const} > 0, & \beta \in (-2, 0], \\ C(\cos\theta/2)^{-\beta}, & \beta \in (0, 1). \end{cases}$$

Справедливость данной оценки следует из представления (2.6.26).

Доказательство теоремы 2.6.2 аналогично обоснованию теоремы 2.6.1 и проводится с использованием установленных лемм 2.6.4–2.6.6.

Обобщением теорем 2.6.1 и 2.6.2 является следующее ниже утверждение, которое посвящено базисности в $L_p[0,\pi]$ системы синусов

$$\Bigl\{\sin\Bigl[\Bigl(n - \frac{\beta}{2}\Bigr)\theta + \frac{\gamma}{2}\Bigr]\Bigr\}_{n=1}^{\infty}, \tag{2.6.27}$$

где β и γ — произвольные вещественные постоянные.

Отметим, что при $\beta = \gamma = 0$ и $\beta = 2$, $\gamma = \pi$ система (2.6.27) представляет, соответственно, хорошо известные системы $\bigl\{\sin n\theta\bigr\}_{n=1}^{\infty}$ и $\bigl\{\cos(n-1)\theta\bigr\}_{n=1}^{\infty}$, базисность которых в $L_p[0,\pi]$ и условия равномерной сходимости известны [70, Т. 1].

Теорема 2.6.3. 1) *Пусть γ удовлетворяет условиям* [1]

$$-1/p < \gamma/\pi < 2 - 1/p, \quad p > 1.$$

Тогда система синусов (2.6.27) *образует базис в $L_p[0,\pi]$ тогда и только тогда, когда*

$$\gamma/\pi - 1/p < \beta < \gamma/\pi + 2 - 1/p.$$

При этом разложение функции $f(\theta) \in L_p[0,\pi]$ в ряд по системе (2.6.27) *имеет вид*

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \sin\Bigl[\Bigl(n - \frac{\beta}{2}\Bigr)\theta + \frac{\gamma}{2}\Bigr], \tag{2.6.28}$$

[1] Ограничение сверху на γ не ограничивает общности рассмотрения, так как остальные значения γ сводятся к этим значениям путем добавления к числу $\gamma/2$ в системе (2.6.27) числа π.

где

$$f_n = \int\limits_0^\pi f(\theta) h_n^s(\theta)\, d\theta,$$

$$h_n^s(\theta) = \frac{2}{\pi}\Big(2\cos\frac{\theta}{2}\Big)^{-\beta}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{-\gamma/\pi}\sum_{k=1}^{n} B_{n-k}\sin k\theta, \tag{2.6.29}$$

$$B_l = \sum_{m=0}^{l}(-1)^{l-m} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}.$$

Если $\beta \geqslant \gamma/\pi + 2$, *то система синусов* (2.6.27) *полна в* $L_p[0,\pi]$, *но не минимальна*; *при* $\beta < \gamma/\pi - 1/p$ *эта система минимальна*, *но не полна*, *а в случае* $\beta = \gamma/\pi - 1/p$ *данная система полна и минимальна.*

2) *Пусть* $\gamma/\pi = -1/p$, $p > 1$, *тогда система* (2.6.27) *базиса в* $L_p[0,\pi]$ *не образует*, *но при* $-2/p \leqslant \beta < 2 - 1/p$ *данная система синусов полна и минимальна*; *если* $\beta < -2/p$, *то система минимальна*, *но не полна в* $L_p[0,\pi]$; *при* $\beta \geqslant 2 - 2/p$ *эта система полна*, *но не минимальна в* $L_p[0,\pi]$.

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и обоснование справедливости теоремы 2.6.1.

Замечание 2.6.2. Отметим, что теоремы 2.6.1–2.6.3 в таком окончательном виде установлены Е.И. Моисеевым, а общая схема доказательства их справедливости приведены в кратких сообщениях [137, 138]. Идея привлечения теории задачи Римана–Гильберта для аналитических функций принадлежит А.В. Бицадзе [14], где он таким методом доказал, что при $\beta = 2$ и $\gamma = \pi/2$ ряд (2.6.28) любой функции $f(\theta) \in C^\alpha[0,\pi]$ сходится к ней равномерно. С.М. Пономарев [163] при $\gamma = 0$ и $\beta = 1/2$ доказал базисность системы (2.6.27) в $L_p[0,\pi]$ при $p > 2$ и равномерную сходимость ряда (2.6.28), если $f(\theta) \in C^\alpha[0,\pi]$, $f(0) = 0$. Аналогичный вопрос им был исследован для системы (2.6.27) при $\beta = 2 + 1/2$, $\gamma = \pi$. Необходимые и достаточные условия полноты системы (2.6.27) в $L_p[0,\pi]$ были найдены А.Н. Барменковым [9].

§ 2.7. Построение собственных значений и функций спектральной задачи Трикоми. Исследование на полноту и базисность системы собственных функций

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = K(y)u_{xx} + u_{yy} + \lambda K(y)u = 0, \tag{2.7.1}$$

где $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n$, $n = \text{const} \geqslant 0$, λ — комплексный параметр в области D, ограниченной гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости

$y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(l,0)$, $l > 0$, а при $y < 0$ — характеристиками AC и CB уравнения (2.7.1), и поставим следующую спектральную задачу (задача T_λ).

Задача $\mathbf{T}_\lambda$. *Найти значения комплексного параметра* λ *и соответствующие им функции* $u(x,y)$, *удовлетворяющие условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2.7.2}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{2.7.3}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma; \tag{2.7.4}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in AC, \tag{2.7.5}$$

где $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

В начале эту задачу исследуем для оператора Лаврентьева–Бицадзе, т. е. для уравнения (2.7.1) при $n = 0$, затем для обобщенного оператора Трикоми или оператора Геллерстедта, т. е. для уравнения (2.7.1) при всех $n > 0$, который при $n = 1$ становится известным оператором Трикоми, а при $n = 2k - 1$ — оператором Геллерстедта.

2.7.1. Задача на собственные значения для оператора Лаврентьева–Бицадзе. Пусть в уравнении (2.7.1) $n = 0$. В этом случае его можно переписать в следующем виде:

$$Lu = u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0. \tag{2.7.6}$$

Предварительно для уравнения (2.7.6) в области D_- рассмотрим задачи Дарбу, изученные в § 2.1 настоящей главы. Из формул (2.1.17) и (2.1.20) при условии $u\big|_{AC} = 0$ и $g(\xi,\eta) = 0$ найдем равенства, связывающие функции $\tau(x) = u(x,0)$, $\nu(x) = u_y(x,0)$:

$$\nu(x) = \tau'(x) + \sqrt{\lambda} \int\limits_0^x \frac{J_1[\sqrt{\lambda}\,(x-t)]}{x-t} \tau(t)\,dt, \quad 0 < x < l, \tag{2.7.7}$$

$$\tau(x) = \int\limits_0^x J_0[\sqrt{\lambda}\,(x-t)]\nu(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{2.7.8}$$

В формулах (2.7.7) и (2.7.8) $J_0(\sqrt{\lambda}\,(x-t))$ и $J_1(\sqrt{\lambda}\,(x-t))$ — функции Бесселя первого рода, $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$.

Тогда задача T_λ сводится к новой нелокальной эллиптической задаче на собственные значения для оператора Лапласа в области D_+: *найти значения* λ *и соответствующие им функции* $u(x,y)$, *удовлетворяющие условиям* (2.7.2)–(2.7.4) *и* (2.7.7) *или* (2.7.8).

В общем случае, т. е. когда кривая Γ является произвольной, не удается пока найти решение указанной нелокальной задачи. Здесь рассмотрим случай, когда область D_+ есть сектор с центром в точке $A(0,0)$: $0 < r < l$, $0 < \varphi < \varphi_0 = \mathrm{const} \leqslant \pi$. В этой области, переходя к полярным координатам (r,φ) и разделяя переменные $u(x,y)=v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$ в задаче (2.7.2)–(2.7.4), (2.7.7), получим

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\Big(\lambda-\frac{\mu^2}{r^2}\Big)R(r)=0,\quad 0<r<l, \tag{2.7.9}$$

$$R(0)=0,\quad R(l)=0, \tag{2.7.10}$$

$$\Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\quad 0<\varphi<\varphi_0, \tag{2.7.11}$$

$$\Phi(\varphi_0)=0, \tag{2.7.12}$$

$$\Phi'(0)\frac{R(x)}{x}=R'(x)\Phi(0)+\Phi(0)\sqrt{\lambda}\int\limits_0^x R(t)\frac{J_1[\sqrt{\lambda}\,(x-t)]}{x-t}\,dt,\quad 0<x<l, \tag{2.7.13}$$

где μ — постоянная разделения.

Известно, что решением уравнения (2.7.9), удовлетворяющим первому условию из (2.7.10), является функция Бесселя

$$R(r)=J_\mu(\sqrt{\lambda}\,r),\quad \operatorname{Re}\mu>0. \tag{2.7.14}$$

С учетом (2.7.14) по формуле [165, Т. 2, с. 214]

$$\int\limits_0^a \frac{1}{x}J_p(ca-cx)J_q(cx)\,dx=\frac{1}{q}J_{p+q}(ac),$$

где $a>0$, $\operatorname{Re}q>0$, $\operatorname{Re}p>-1$, вычислим интеграл в равенстве (2.7.13):

$$\int\limits_0^x J_\mu(\sqrt{\lambda}\,t)J_1[\sqrt{\lambda}\,(x-t)]\frac{dt}{(x-t)}=J_{\mu+1}(\sqrt{\lambda}\,x). \tag{2.7.15}$$

Тогда из равенства (2.7.13) с учетом (2.7.14), (2.7.15) и известной формулы

$$zJ'_\nu(z)=\nu J_\nu(z)-zJ_{\nu+1}(z)$$

получим второе граничное условие для функции $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi'(0)-\mu\Phi(0)=0. \tag{2.7.16}$$

Таким образом, относительно функции $\Phi(\varphi)$ получена спектральная задача (2.7.11), (2.7.12) и (2.7.16), в которой спектральный параметр μ содержится в одном из граничных условий. Решая эту задачу, найдем

$$\Phi_n(\varphi)=c_n(\cos\mu_n\varphi+\sin\mu_n\varphi)=$$
$$=\sqrt{2}\,c_n\sin\Big(\mu_n\varphi+\frac{\pi}{4}\Big)=a_n\sin\mu_n(\varphi_0-\varphi), \tag{2.7.17}$$

где c_n, a_n — произвольные постоянные, не равные нулю,

$$\mu_n=\frac{\pi}{\varphi_0}\Big(n-\frac{1}{4}\Big),\quad n=1,2,\ldots. \tag{2.7.18}$$

Теперь, учитывая найденные значения μ_n по формуле (2.7.18) и удовлетворяя функцию (2.7.14) второму из условий (2.7.10), имеем

$$J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}\, l) = 0. \tag{2.7.19}$$

Из теории бесселевых функций [28, с. 530] известно, что функция $J_p(z)$ при $p > -1$ имеет только вещественные нули. Тогда, обозначая m-й корень уравнения (2.7.19) через α_{nm}, находим собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\alpha_{nm}}{l}\right)^2 = \overline{\alpha}_{nm}^{\,2}, \quad n, m = 1, 2, \ldots, \tag{2.7.20}$$

и на основании (2.7.14), (2.7.17), (2.7.18) и (2.7.20) получим систему собственных функций задачи T_λ в области D_+:

$$u_{nm}(x, y) = v_{nm}(r, \varphi) = a_{nm} J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm} r) \sin \mu_n(\varphi_0 - \varphi). \tag{2.7.21}$$

Для построения системы собственных функций задачи T_λ в области D_- можно воспользоваться формулой (2.1.13) или (2.1.18) решения задач Дарбу из § 2.1, но из-за громоздкости такого подхода здесь применим метод разделения переменных. В области D_- введем следующие координаты:

$$x = \sigma \operatorname{ch} \theta, \quad y = \sigma \operatorname{sh} \theta, \tag{2.7.22}$$

где $\operatorname{ch} \theta$, $\operatorname{sh} \theta$ — гиперболические функции,

$$\sigma = \sqrt{x^2 - y^2}\,, \quad \theta = \operatorname{arsh} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} < 0.$$

В координатах (2.7.22) уравнение (2.7.1) при $y < 0$ принимает вид

$$u_{\sigma\sigma} + \frac{1}{\sigma} u_\sigma - \frac{1}{\sigma} u_{\theta\theta} + \lambda u = 0. \tag{2.7.23}$$

В уравнении (2.7.23) разделим переменные, $u(x, y) = \widetilde{u}(\sigma, \theta) = R(\sigma) Q(\theta)$. Тогда получим

$$R''(\sigma) + \frac{1}{\sigma} R'(\sigma) + \left(\lambda - \frac{\rho^2}{\sigma^2}\right) R(\sigma) = 0, \quad 0 < \sigma < l, \tag{2.7.24}$$

$$|R(0)| < +\infty, \tag{2.7.25}$$

$$Q''(\theta) - \rho^2 Q(\theta) = 0, \quad \theta < 0, \tag{2.7.26}$$

где ρ — постоянная разделения переменных.

Решением дифференциального уравнения (2.7.24), удовлетворяющим условию (2.7.25), является функция Бесселя

$$R(\sigma) = J_\rho(\sqrt{\lambda}\, \sigma) = J_\rho\left(\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)}\,\right), \quad \operatorname{Re} \rho > 0. \tag{2.7.27}$$

Общее решение уравнения (2.7.26) определяется по формуле

$$Q(\theta) = C_1\, e^{\rho\theta} + C_2\, e^{-\rho\theta}, \tag{2.7.28}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Поскольку

$$\theta = \operatorname{arsh}\frac{y}{\sigma} = \ln\left(\frac{y}{\sigma} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{\sigma^2}}\right) = \ln\frac{x+y}{\sigma} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+y}{x-y},$$

то соотношение (2.7.28) принимает вид

$$Q(\theta) = C_1\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{p/2} + C_2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{p/2}. \tag{2.7.29}$$

Следовательно, на основании (2.7.27) и (2.7.29) находим множество частных решений уравнения (2.7.1), ограниченных в области D_-:

$$u(x,y) = \left[C_1\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2} + C_2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2}\right] J_\rho\left[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right]. \tag{2.7.30}$$

Из формулы (2.7.21) вычислим:

$$\tau_{nm}(x) = u_{nm}(x,0) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}} a_{nm} J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm}x), \tag{2.7.31}$$

$$\nu_{nm}(x) = \frac{\partial}{\partial y} u_{nm}(x,0) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}} a_{nm}\mu_n x^{-1} J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm}x). \tag{2.7.32}$$

Если теперь в формуле (2.7.30) положить $\rho = \mu_n$, $\lambda = \overline{\alpha}_{nm}^{\,2}$, $C_1 = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}} a_{nm}$, $C_2 = 0$, то получим решение задачи Коши для уравнения (2.7.1) с начальными условиями (2.7.31) и (2.7.32). Тогда в силу единственности решения задачи Коши для телеграфного уравнения из формулы (2.7.30) получаем систему собственных функций задачи T_λ в области D_-

$$u_{nm}(x,y) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}} a_{nm}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}\left[\overline{\alpha}_{nm}\sqrt{(x^2-y^2)}\right]. \tag{2.7.33}$$

Таким образом, объединяя формулы (2.7.21) и (2.7.33), находим систему собственных функций задачи T_λ в области D

$$u_{nm}(x,y) = \begin{cases} a_{nm} J_{\mu_n}\left(\overline{\alpha}_{nm}\sqrt{(x^2+y^2)}\right)\sin\mu_n(\varphi_0-\varphi), & (x,y)\in D_+, \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}} a_{nm} J_{\mu_n}\left(\overline{\alpha}_{nm}\sqrt{(x^2-y^2)}\right)\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}, & (x,y)\in D_-. \end{cases} \tag{2.7.34}$$

Далее исследуем свойства системы (2.7.34) на полноту.

Теорема 2.7.1. *Система собственных функций* (2.7.34) *задачи* T_λ *полна и образует базис в пространстве* $L_2(D_+)$; *полна в* $L_2(D_-)$, *но не полна в* $L_2(D)$; *при этом размерность дефекта равна бесконечности.*

Доказательство. Вначале покажем, что система (2.7.34) полна в $L_2(D_+)$. Допустим, что в $L_2(D_+)$ существует функция $F(x,y)$ такая, что для всех $n,m \in \mathbb{N}$

$$\iint\limits_{D_+} F(x,y)u_{nm}(x,y)\,dx\,dy = 0. \tag{2.7.35}$$

Докажем, что функция $F(x,y) = 0$ почти всюду в D_+. В двойном интеграле равенства (2.7.35) перейдем к полярной системе координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда с учетом (2.7.34) имеем

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^{\varphi_0} f(r,\varphi)J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm}r)\sin\mu_n(\varphi_0-\varphi)r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^l F_n(r)J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm}r)r\,dr = 0, \tag{2.7.36}$$

где

$$f(r,\varphi) = F(x,y), \quad F_n(r) = \int\limits_0^{\varphi_0} f(r,\varphi)\sin\mu_n(\varphi_0-\varphi)\,d\varphi.$$

Из равенства (2.7.36) видно, что для функции $F_n(r)$ все коэффициенты ряда Фурье–Бесселя равны нулю. Тогда из теоремы Юнга [28, гл. XVIII] следует, что при любом $n \in \mathbb{N}$ и $r \in [0,l]$

$$F_n(r) = \int\limits_0^{\varphi_0} f(r,\varphi)\sin\mu_n(\varphi_0-\varphi)\,d\varphi = 0 \tag{2.7.37}$$

при условии, что интеграл $\int\limits_0^l \sqrt{r}\,|F_n(r)|\,dr$ сходится. Действительно, на основании неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\int\limits_0^l \sqrt{r}\,|F_n(r)|\,dr \leqslant \left[\int\limits_0^l 1^2 dr \int\limits_0^l F_n^2(r)r\,dr\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{l}\left[\int\limits_0^l\int\limits_0^{\varphi_0} f^2(r,\varphi)\,d\varphi \cdot \int\limits_0^{\varphi_0}\sin^2\mu_n(\varphi_0-\varphi)d\varphi r\,dr\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{l\pi}\left[\int\limits_0^l\int\limits_0^{\varphi_0} f^2(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi\right]^{1/2} \leqslant \sqrt{l\pi}\,||F||_{L_2(D_+)}.$$

В интеграле равенства (2.7.37) произведем замену $\theta = \pi(\varphi_0 - \varphi)/\varphi_0$. Тогда получим

$$\int\limits_0^{\pi} f\Big(r, \frac{\varphi_0}{\pi}(\pi - \theta)\Big) \sin\Big[\Big(n - \frac{1}{4}\Big)\theta\Big]\, d\theta = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы синусов $\Big\{\sin\Big[\Big(n - \frac{1}{4}\Big)\theta\Big]\Big\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0, \pi]$, что вытекает из теоремы 2.6.1, следует, что $f\Big(r, \frac{\varphi_0}{\pi}(\pi - \theta)\Big) = 0$ почти всюду на $[0, \pi]$ при любом $r \in [0, l]$.

Базисность системы (2.7.34) в $L_2(D_+)$ следует из того, что система $\{J_{\mu_n}(\alpha_{nm} r)\}$ при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ ортогональна с весом r в $L_2[0, l]$ и образует базис как система собственных функций первой краевой задачи для уравнения Бесселя [34, с. 384], а система синусов $\big\{\sin \mu_n(\varphi_0 - \varphi)\big\}$ образует базис в пространстве $L_2[0, \varphi_0]$ в силу теоремы 2.6.1.

Теперь докажем полноту системы (2.7.34) в $L_2(D_-)$. Допустим, что существует функция $\Phi(x, y) \in L_2(D_-)$ такая, что

$$\iint\limits_{D_-} \Phi(x, y) u_{nm}(x, y)\, dx\, dy = 0 \tag{2.7.38}$$

при всех $n, m = 1, 2, \ldots$. В интеграле равенства (2.7.38) произведем замену $2x = \xi + \eta$, $2y = \xi - \eta$. Тогда область D_- отобразится в область $H = \big\{(\xi, \eta) |\, 0 < \xi < \eta < l\big\}$, а соотношение (2.7.38) перейдет в равенство

$$\iint\limits_{H} \varphi(\xi, \eta) w_{nm}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0, \tag{2.7.39}$$

где $\varphi(\xi, \eta) = \Phi(x, y)$, $w_{nm}(\xi, \eta) = u_{nm}(x, y)$. С учетом (2.7.34) равенство (2.7.39) примет вид

$$\int\limits_0^l d\eta \int\limits_0^{\eta} \varphi(\xi, \eta) \Big(\frac{\xi}{\eta}\Big)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm} \sqrt{\xi\eta}\,)\, d\xi = 0.$$

Полагая во внутреннем интеграле $\xi = \eta t$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_0^1 t^{\mu_n/2}\, dt \int\limits_0^l \varphi(\eta t, \eta) J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm} \eta \sqrt{t}\,) \eta\, d\eta = 0.$$

Затем снова произведем замену $t = s^2$, $\eta\sqrt{t} = r$ и переставим порядки интегрирования. Тогда будем иметь

$$\int\limits_0^l \Phi_n(r) J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm} r) r\, dr = 0, \tag{2.7.40}$$

где

$$\Phi_n(r) = \int\limits_{r/l}^1 \varphi\Big(rs, \frac{r}{s}\Big) s^{\mu_n - 1}\, ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из равенства (2.7.40) следует, что для функции $\Phi_n(r)$ все коэффициенты ряда Фурье–Бесселя равны нулю, поэтому из теоремы Юнга следует, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и $r \in [0, l]$

$$\int\limits_{r/l}^1 \varphi(rs, r/s) s^{\mu_n - 1}\, ds = 0, \tag{2.7.41}$$

так как следующий интеграл сходится:

$$\int\limits_0^l \sqrt{r}\, |\Phi_n(r)|\, dr \leqslant \sqrt{l} \left[\int\limits_0^l \int\limits_{r/l}^1 s^{2\mu_n - 2}\, ds \int\limits_{r/l}^1 \varphi^2\Big(rs, \frac{r}{s}\Big)\, ds\, r\, dr\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2l} \left[\int\limits_0^l \int\limits_{r/l}^1 \varphi^2\Big(rs, \frac{r}{s}\Big)\, ds\, r\, dr\right]^{1/2} = \sqrt{2l}\, ||\Phi|\Big|_{L_2(D_-)}.$$

Рассмотрим систему степеней $\{s^{\mu_n - 1}\}$, где $\mu_n = \frac{\pi}{\varphi_0}\Big(n - \frac{1}{4}\Big) \geqslant n - \frac{1}{4} \geqslant \geqslant \frac{3}{4}$, так как $0 < \varphi_0 \leqslant \pi$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу теоремы Мюнца [3, с. 53] условие $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{m_k} = +\infty$, где $-\frac{1}{2} < m_1 < m_2 < \ldots$, необходимо и достаточно для полноты системы $\{x^{m_k}\}$ в пространстве $L_2[a, b]$, $a \geqslant 0$. Тогда в силу полноты системы $\{s^{\mu_n - 1}\}$ в пространстве $L_2[r/l, 1]$ при каждом $r \in [0, l]$ из равенства (2.7.41) следует, что $\varphi(rs, r/s) = 0$ почти всюду на $[r/l, 1]$ при любом $r \in [0, l]$. Следовательно, функция $\Phi(x, y) = 0$ почти всюду в D_-.

Для обоснования неполноты системы (2.7.34) задачи T_λ в $L_2(D)$, где $D = D_+ \cup D_- \cup AB$, построим контрпримеры. В области D рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} F_+(x, y), & (x, y) \in D_+, \\ F_-(x, y), & (x, y) \in D_-, \end{cases}$$

из $L_2(D)$ и интеграл

$$J = \iint_D F(x,y)u_{nm}(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= \iint_{D_+} F_+(x,y)u_{nm}(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_-} F_-(x,y)u_{nm}(x,y)\,dx\,dy = J_1 + J_2. \tag{2.7.42}$$

В интеграле J_1, переходя к полярным координатам (r,φ), получим

$$J_1 = \sqrt{2}\int_0^l\int_0^{\varphi_0} f_+(r,\varphi)J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm}r)\sin\mu_n(\varphi_0-\varphi)r\,dr\,d\varphi =$$
$$= \frac{\varphi_0\sqrt{2}}{\pi}\int_0^l J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm}r)r\,dr\int_0^\pi f_+\Big(r,\frac{\varphi_0(\pi-\theta)}{\pi}\Big)\sin\Big[\Big(n-\frac{1}{4}\Big)\theta\Big]\,d\theta,$$

где $f_+(r,\varphi) = F_+(x,y)$. Интеграл J_2 преобразуем к виду

$$J_2 = \int_0^l J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm}r)r\,dr\int_{r/l}^1 s^{\mu_n-1}f_-\Big(rs,\frac{r}{s}\Big)\,ds;$$

здесь $f_-(\xi,\eta) = F_-(x,y)$. Подставляя J_1 и J_2 в (2.7.42), получим

$$J = \int_0^l J_{\mu_n}(\overline{\alpha}_{nm}r)r\Big[\frac{\varphi_0\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi f_+\Big(r,\frac{\varphi_0}{\pi}(\pi-\theta)\Big)\sin\Big[\Big(n-\frac{1}{4}\Big)\theta\Big]\,d\theta +$$
$$+\int_{r/l}^1 s^{\mu_n-1}f_-\Big(rs,\frac{r}{s}\Big)\,ds\Big]\,dr. \tag{2.7.43}$$

Рассмотрим функции

$$f_{+p}\Big(r,\frac{\varphi_0}{\pi}(\pi-\theta)\Big) = \frac{\pi}{\varphi_0\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{+\infty}\Big[\frac{1}{(2\mu_k+2p)(2\mu_k+2p+1)} -$$
$$-\frac{(r/l)^{2\mu_k+2p}}{2\mu_k+2p} + \frac{(r/l)^{2\mu_k+2p+1}}{2\mu_k+2p+1}\Big]h_k(\theta), \tag{2.7.44}$$

$$f_{-p}(\xi,\eta) = -\Big(\frac{\xi}{\eta}\Big)^p\Big[1-\Big(\frac{\xi}{\eta}\Big)^{1/2}\Big] \text{ или } f_{-p}\Big(rs,\frac{r}{s}\Big) = -s^{2p}(1-s),\quad p\in\mathbb{N}, \tag{2.7.45}$$

где $\{h_k(\theta)\}$ — система, биортогональная к системе синусов $\Big\{\sin\Big[\Big(n-$ $-\dfrac{1}{4}\Big)\varphi\Big]\Big\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0,\pi]$, которая определена выше формулой (2.6.37) при $\beta = 1/2$.

В силу следствия 2.6.1 функции $|h_k(\theta)|$ равномерно ограничены по k, поэтому ряд (2.7.44) при $0 \leqslant r \leqslant l$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ сходится равномерно. Следовательно, функция $f_+(r,\varphi)$, определенная рядом (2.7.44), непрерывна в $\overline{D}_-$. Теперь, подставляя (2.7.44) и (2.7.45) в соотношение (2.7.43) и интегрируя над знаком суммы с учетом определения биортогональных систем, получим $J = 0$. Поскольку бесконечная система функций

$$F_p(x,y) = \begin{cases} F_{+p}(x,y) = f_{+p}(r,\varphi), & (x,y) \in D_+, \\ F_{-p}(x,y) = f_{-p}(\xi,\eta), & (x,y) \in D_-, \end{cases}$$

из $L_2(D)$, где функции f_{+p} и f_{-p} определены, соответственно, формулами (2.7.44) и (2.7.45), является линейно независимой, то размерность дефекта равна бесконечности.

2.7.2. Задача на собственные значения для обобщенного оператора Трикоми. В этом пункте исследуем задачу T_λ для уравнения (2.7.1) при $n > 0$. Для этого уравнения в области D_- рассмотрим задачу Дарбу с краевыми условиями: $u_y(x,0) = \nu(x)$, $0 < x < l$, $u(x,y) = 0$, $(x,y) \in AC$, решение которой методом Римана–Адамара построено в [80, 81]. Отсюда найдем

$$u(x,0) = k_1 \int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta}\, \overline{J}_{-\beta}[\sqrt{\lambda}\,(x-t)] u_y(t,0)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.7.46}$$

где

$$k_1 = \frac{\Gamma(\beta)(2-4\beta)^{2\beta}}{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}, \quad \beta = \frac{n}{2(n+2)} \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big),$$

$$\overline{J}_{-\beta}(z) = \Gamma(1-\beta)\Big(\frac{z}{2}\Big)^{\beta} J_{-\beta}(z),$$

$J_{-\beta}(z)$ — функция Бесселя первого рода, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

В силу равенства (2.7.46), привнесенного из гиперболической части D_- области D, задача T_λ сводится к новой нелокальной задаче для оператора эллиптического типа с вырождением на части $y = 0$ границы области D_+: *найти все собственные значения λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям* (2.7.2)–(2.7.4) *и* (2.7.46).

Для произвольной кривой Γ эта нелокальная эллиптическая задача на собственные значения до сих пор не решена. Рассмотрим здесь случай, когда граница Γ области D_+ состоит из дуги так называемой «нормальной» кривой Γ_0: $x^2 + \left(\dfrac{2}{n+2}y^{(n+2)/2}\right)^2 = l^2$, $y > 0$, и отрезка AK луча $\varphi = \varphi_0$, $0 < \varphi_0 = \text{const} \leqslant \pi$ (см. рис. 2.7.1).

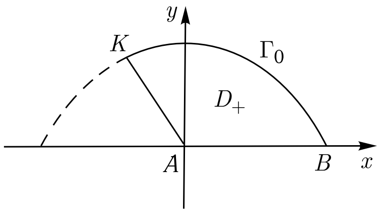

Рис. 2.7.1

В этой области перейдем к следующей системе координат:

$$x = r\cos\varphi, \quad \frac{2}{n+2}y^{(n+2)/2} = \frac{1}{\alpha}y^{\alpha} = r\sin\varphi, \tag{2.7.47}$$

где

$$\alpha = \frac{n+2}{2}, \quad r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{\alpha}y^{\alpha}\right)^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y^{\alpha}}{\alpha x}.$$

Тогда на основании теоремы дифференцирования сложной функции имеем

$$u_x = u_r r_x + u_{\varphi}\varphi_x, \quad u_y = u_r r_y + u_{\varphi}\varphi_y,$$
$$u_{xx} = u_{rr}r_x^2 + 2u_{r\varphi}r_x\varphi_x + u_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + u_r r_{xx} + u_{\varphi}\varphi_{xx},$$
$$u_{yy} = u_{rr}r_y^2 + 2u_{r\varphi}r_y\varphi_y + u_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 + u_r r_{yy} + u_{\varphi}\varphi_{yy}.$$

Подставляя это в уравнение (2.7.1), получим

$$(y^n r_x^2 + r_y^2)u_{rr} + 2(y^n r_x\varphi_x + r_y\varphi_y)u_{r\varphi} + (y^n\varphi_x^2 + \varphi_y^2)u_{\varphi\varphi} + \\ + (y^n r_{xx} + r_{yy})u_r + (y^n\varphi_{xx} + \varphi_{yy})u_{\varphi} + \lambda y^n u = 0. \tag{2.7.48}$$

Исходя из формул (2.7.47) найдем

$$r_x = \cos\varphi, \quad r_y = y^{\alpha-1}\sin\varphi, \quad \varphi_x = -\frac{\sin\varphi}{r},$$
$$\varphi_y = y^{\alpha-1}\frac{\cos\varphi}{r}, \quad r_{xx} = \frac{\sin^2\varphi}{r}, \quad \varphi_{xx} = \frac{\sin 2\varphi}{r^2},$$
$$r_{yy} = (\alpha-1)y^{\alpha-2}\sin\varphi + y^{2\alpha-2}\frac{\cos^2\varphi}{r},$$
$$\varphi_{yy} = (\alpha-1)\frac{y^{\alpha-2}\cos\varphi}{r} - \frac{y^{2\alpha-2}\sin 2\varphi}{r^2}.$$

Тогда с учетом вычисленных выше производных уравнение (2.7.48) примет вид

$$u_{rr} + \frac{2\alpha-1}{\alpha r}u_r + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} + \frac{\alpha-1}{\alpha r^2}\operatorname{ctg}\varphi\, u_{\varphi} + \lambda u = 0$$

или

$$u_{rr} + (1+2\beta)\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + 2\beta\operatorname{ctg}\varphi\frac{u_\varphi}{r^2} + \lambda u = 0. \tag{2.7.49}$$

В уравнении (2.7.49) разделим переменные, $u = R(r)\Phi(\varphi)$. Тогда получим

$$R''(r) + \frac{1+2\beta}{r}R'(r) + \Big(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2}\Big)R(r) = 0, \quad 0 < r < l, \tag{2.7.50}$$

$$\Phi''(\varphi) + 2\beta\operatorname{ctg}\varphi\Phi'(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{2.7.51}$$

где μ — постоянная разделения переменных.

Из условия (2.7.4) вытекают следующие граничные условия:

$$R(0) = 0, \quad R(l) = 0, \tag{2.7.52}$$

$$\Phi(\varphi_0) = 0. \tag{2.7.53}$$

Решением дифференциального уравнения (2.7.50), удовлетворяющим первому условию из (2.7.52), является функция

$$R(r) = r^{-\beta}J_\rho(\sqrt{\lambda}\,r), \tag{2.7.54}$$

где $\rho = \sqrt{\mu^2+\beta^2}$ и $\operatorname{Re}(\rho-\beta) > 0$.

Теперь построим общее решение дифференциального уравнения (2.7.51). Для этого здесь произведем замену $x = \sin^2\varphi/2$, $0 \leqslant \varphi/2 \leqslant \varphi_0/2 \leqslant \pi/2$. На этом промежутке функция $\sin\varphi/2$ строго возрастает, поэтому каждому φ соответствует единственный x. Тогда уравнение (2.7.51) принимает вид

$$x(1-x)F''(x) + \Big[\frac{1}{2} + \beta - (1+2\beta)x\Big]F'(x) + \mu^2F(x), \quad 0 < x < x_0 \leqslant 1; \tag{2.7.55}$$

здесь $F(x) = \Phi(\varphi)$, $x_0 = \sin^2\varphi_0/2$.

Уравнение (2.7.55) представляет собой известное гипергеометрическое уравнение [10, Т. I, с. 69] с коэффициентами $a = \beta+\rho$, $b = \beta-\rho$, $c = 1/2+\beta \notin \mathbb{Z}$. Тогда общее решение уравнения (2.7.55) определяется по формуле

$$F(x) = C_1F(a,b,c;x) + C_2x^{1-c}F(a+1-c, b+1-c, 2-c; x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, $F(\,\cdot\,)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Следовательно, общее решение исходного уравнения (2.7.55) задается формулой

$$\Phi(\varphi) = C_1F\Big(\beta+\rho, \beta-\rho, \frac{1}{2}+\beta, \sin^2\frac{\varphi}{2}\Big) + \\ + C_2\Big(\sin\frac{\varphi}{2}\Big)^{1-2\beta}F\Big(\frac{1}{2}+\rho, \frac{1}{2}-\rho, \frac{3}{2}-\beta; \sin^2\frac{\varphi}{2}\Big). \tag{2.7.56}$$

Далее найденные функции (2.7.54) и (2.7.56) удовлетворим условиям (2.7.46) и (2.7.53). Для этого предварительно вычислим

$$\tau(x) = u(x,0) = R(x)\Phi(0) = C_1 x^{-\beta} J_\rho(\sqrt{\lambda}\, x), \tag{2.7.57}$$

$$\begin{aligned} \nu(x) = u_y(x, 0+0) = \lim_{y\to 0+0} u_y(x,y) = \lim_{y\to 0}(u_r r_y + u_\varphi \varphi_y) = \\ = (\alpha x)^{2\beta} \lim_{\varphi\to 0}\Big[R'(r)\Phi(\varphi)\,(\sin\varphi)^{1+2\beta} + r^{-1}R(r)\Phi'(\varphi)\sin^{2\beta}\varphi\cos\varphi\Big] = \\ = (\alpha x)^{2\beta}\frac{R(x)}{x}\lim_{\varphi\to 0}\Phi'(\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\beta} = (2\alpha)^{2\beta}\frac{1-2\beta}{2}C_2 x^{\beta-1}J_\rho(\sqrt{\lambda}\,x) \end{aligned} \tag{2.7.58}$$

и подставим в равенство (2.7.35). Тогда получим

$$C_1 x^{-\beta} J_\rho(\sqrt{\lambda}\,x) = C_2 k_2 \int_0^x (x-t)^{-\beta} J_{-\beta}(\sqrt{\lambda}\,(x-t))t^{-\beta}J_\rho(\sqrt{\lambda}\,t)\,dt, \tag{2.7.59}$$

где

$$k_2 = k_1\Gamma(1-\beta)\Big(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\Big)^\beta (2\alpha)^\beta\frac{1-2\beta}{2},$$

$$\begin{aligned} C_1 F\Big(\beta+\rho, \beta-\rho, \frac{1}{2}+\beta; \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\Big) + \\ + C_2\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)^{1-2\beta} F\Big(\frac{1}{2}+\rho, \frac{1}{2}-\rho, \frac{3}{2}-\beta; \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\Big) = 0. \end{aligned} \tag{2.7.60}$$

Поскольку вычисление интеграла из правой части (2.7.59) достаточно громоздко, поступим иначе, т. е. методом разделения переменных построим множество частных решений уравнения (2.7.1) при $n > 0$, ограниченных в области D_-. Для этого в области D_- введем следующие координаты:

$$\begin{gathered} x = \sigma\,\mathrm{ch}\,\theta, \quad \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha = \sigma\,\mathrm{sh}\,\theta, \\ \sigma = \sqrt{x^2 - \frac{1}{\alpha^2}(-y)^{2\alpha}}, \quad \theta = \mathrm{arth}\frac{\frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha}{x}. \end{gathered} \tag{2.7.61}$$

В координатах (σ, θ) уравнение (2.7.1) при $y < 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} ((-y)^n\sigma_x^2 - \sigma_y^2)u_{\sigma\sigma} + 2((-y)^n\sigma_x\theta_x - \sigma_y\theta_y)u_{\sigma\theta} + ((-y)^n\theta_x^2 - \theta_y^2)u_{\theta\theta} + \\ + ((-y)^n\sigma_{xx} - \sigma_{yy})u_\sigma + ((-y)^n\theta_{xx} - \theta_{yy})u_\theta + \lambda(-y)^n u = 0. \end{aligned} \tag{2.7.62}$$

На основании формул (2.7.61) вычислим

$$\sigma_x = \mathrm{ch}\,\theta, \quad \sigma_y = (-y)^{\alpha-1}\,\mathrm{sh}\,\theta, \quad \theta_x = -\frac{\mathrm{sh}\,\theta}{\sigma},$$

$$\theta_y = -(-y)^{\alpha-1}\frac{\operatorname{ch}\theta}{\sigma}, \quad \sigma_{xx} = -\frac{\operatorname{sh}^2\theta}{\sigma}, \quad \theta_{xx} = \frac{\operatorname{sh}2\theta}{\sigma^2},$$

$$\sigma_{yy} = -(2\alpha-1)(-y)^{\alpha-2}\operatorname{sh}\theta - (-y)^{2\alpha-2}\frac{\operatorname{sh}^2\theta}{\sigma},$$

$$\theta_{yy} = (\alpha-1)(-y)^{\alpha-2}\frac{\operatorname{ch}\theta}{\sigma} + (-y)^{2\alpha-2}\frac{\operatorname{sh}2\theta}{\sigma^2}$$

и, подставив в уравнение (2.7.62), получим

$$u_{\sigma\sigma} + (1+2\beta)\frac{u_\sigma}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^2}u_{\theta\theta} - 2\beta\operatorname{cth}\theta\frac{u_\theta}{\sigma^2} + \lambda u = 0. \tag{2.7.63}$$

В уравнении (2.7.63) разделим переменные $u = R(\sigma)Q(\theta)$. В результате будем иметь

$$R''(\sigma) + \frac{1+2\beta}{\sigma}R'(\sigma) + \Big(\lambda - \frac{\mu^2}{\sigma^2}\Big)R(\sigma) = 0, \quad 0 < \sigma < l, \tag{2.7.64}$$

$$R(0) = 0, \quad |R(l)| < +\infty, \tag{2.7.65}$$

$$Q''(\theta) + 2\beta\operatorname{cth}\theta\, Q'(\theta) - \mu^2 Q(\theta) = 0, \quad \theta > 0, \tag{2.7.66}$$

где μ — постоянная разделения переменных.

Решением задачи (2.7.64), (2.7.65) является функция

$$R(\sigma) = \sigma^{-\beta}J_\rho(\sqrt{\lambda}\,\sigma); \tag{2.7.67}$$

здесь $\rho = \sqrt{\mu^2+\beta^2}$, $\operatorname{Re}(\rho-\beta) > 0$.

Далее построим общее решение дифференциального уравнения (2.7.66). В этом уравнении произведем замену переменной $z = -\operatorname{sh}^2\theta/2$. После чего уравнение (2.7.66) имеет вид

$$z(1-z)F''(z) + \Big(\frac{1}{2} + \beta - (1+2\beta)z\Big)F'(z) + \mu^2 F(z) = 0, \quad z < 0, \tag{2.7.68}$$

где $F(z) = Q(\theta)$, которое формально совпадает с соответствующим уравнением (2.7.55) из эллиптической части, т. е. уравнение (2.7.68) есть гипергеометрическое уравнение с параметрами $a = \beta + \rho$, $b = \beta - \rho$, $c = \dfrac{1}{2} + \beta$. Поскольку мы ищем решения исходного уравнения (2.7.1), равные нулю на характеристике AC ($\sigma = 0$ и $\theta = +\infty$), то в качестве линейно независимых решений уравнения (2.7.68) примем следующие функции:

$$F_1(z) = F(a,b,c;z) = F\Big(\beta+\rho,\, \beta-\rho,\, \frac{1}{2}+\beta;\, z\Big) =$$
$$= (1-z)^{\rho-\beta}F\Big(\frac{1}{2}-\rho,\, \beta-\rho,\, \frac{1}{2}+\beta;\, \frac{z}{z-1}\Big),$$

$$F_2(z) = (1-z)^{-a} F\Big(a, c-b, a+1-b; \frac{1}{1-z}\Big) = \\ = (1-z)^{-\beta-\rho} F\Big(\beta+\rho,\ \frac{1}{2}+\rho,\ 1+2\rho;\ \frac{1}{1-z}\Big).$$

Тогда общее решение уравнения (2.7.66) определяется по формуле

$$Q(\theta) = A_1\Big(\operatorname{ch}^2\frac{\theta}{2}\Big)^{\rho-\beta} F\Big(\frac{1}{2}-\rho, \beta-\rho, \frac{1}{2}+\beta;\ \operatorname{th}^2\frac{\theta}{2}\Big) + \\ + A_2\Big(\operatorname{ch}^2\frac{\theta}{2}\Big)^{-\rho-\beta} F\left(\beta+\rho, \frac{1}{2}+\rho, 1+2\rho;\ \frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\theta}{2}}\right),$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные, или в переменных x и y эта формула принимает вид

$$Q(\theta) = A_1\Big(\frac{x+\sigma}{2\sigma}\Big)^{\rho-\beta} F\Big(\frac{1}{2}-\rho, \beta-\rho, \frac{1}{2}+\beta;\ \frac{x-\sigma}{x+\sigma}\Big) + \\ + A_2\Big(\frac{2\sigma}{x+\sigma}\Big)^{\rho+\beta} F\Big(\beta+\rho, \frac{1}{2}+\rho, 1+2\rho;\ \frac{2\sigma}{x+\sigma}\Big). \quad (2.7.69)$$

Таким образом, на основании (2.7.67) и (2.7.69) имеем множество частных решений уравнения (2.7.1), ограниченных в области D_-:

$$u(x,y) = \Big[A_1\Big(\frac{x+\sigma}{2\sigma}\Big)^{\rho-\beta} F\Big(\frac{1}{2}-\rho, \beta-\rho, \frac{1}{2}+\beta;\ \frac{x-\sigma}{x+\sigma}\Big) + \\ + A_2\Big(\frac{2\sigma}{x+\sigma}\Big)^{\rho+\beta} F\Big(\beta+\rho, \frac{1}{2}+\rho, 1+2\rho;\ \frac{2\sigma}{x+\sigma}\Big)\Big]\sigma^{-\beta} J_\rho(\sqrt{\lambda}\,\sigma). \quad (2.7.70)$$

Из множества (2.7.70) выделим решения уравнения (2.7.1), равные нулю на характеристике AC. Для этого достаточно положить $A_1 = 0$ в (2.7.70). С учетом этого из формулы (2.7.70) вычислим

$$\tau(x) = u(x, 0-0) = A_2 F\Big(\beta+\rho, \frac{1}{2}+\rho, 1+2\rho; 1\Big) x^{-\beta} J_\rho(\sqrt{\lambda}\,x), \quad (2.7.71)$$

$$\nu(x) = u_y(x, 0-0) = \\ = A_2(\rho+\beta)(2\alpha)^{2\beta} F\Big(\rho-\beta, \frac{1}{2}+\rho, 1+2\rho; 1\Big) x^{-\beta-1} J_\rho(\sqrt{\lambda}\,x). \quad (2.7.72)$$

Теперь, приравнивая равенства (2.7.57) и (2.7.58), соответственно, с равенствами (2.7.71) и (2.7.72) между собой, найдем неизвестные постоянные

$$C_1 = A_2 F\Big(\beta+\rho, \frac{1}{2}+\rho, 1+2\rho; 1\Big), \quad (2.7.73)$$

$$C_2 = A_2 \frac{2(\rho+\beta)}{1-2\beta} F\Big(\rho-\beta, \frac{1}{2}+\rho, 1+2\rho; 1\Big). \quad (2.7.74)$$

Подставив значения C_1 и C_2 в равенства (2.7.59) и (2.7.60), найдем формулу для вычисления интеграла из правой части (2.7.59) и получим уравнение относительно ρ:

$$\int_0^x (x-t)^{-\beta} J_{-\beta}(\sqrt{\lambda}\,(x-t))t^{-\beta} J_\rho(\sqrt{\lambda}\,t)\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1/2-\beta)\Gamma(\rho+\beta)(\sqrt{\lambda}\,x)^{-\beta} J_\rho(\sqrt{\lambda}\,x)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\rho-\beta)(1-2\beta)^\beta}, \quad (*)$$

$$F\Bigl(\beta+\rho, \frac{1}{2}+\rho, 1+2\rho; 1\Bigr) F\Bigl(\beta+\rho, \beta-\rho, \frac{1}{2}+\beta; \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\Bigr) + \frac{2(\rho+\beta)}{1-2\beta}\times$$
$$\times \sin^{1-2\beta}\frac{\varphi_0}{2} F\Bigl(\rho-\beta, \frac{1}{2}+\rho, 1+2\rho; 1\Bigr) F\Bigl(\frac{1}{2}+\rho, \frac{1}{2}-\rho, \frac{3}{2}-\beta; \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\Bigr) = 0. \quad (2.7.75)$$

При произвольном φ_0 это уравнение не удается решить. Рассмотрим здесь наиболее распространенные случаи: $\varphi_0=\pi$, $\varphi_0=\pi/2$. Полагая в равенстве (2.7.75) $\varphi_0=\pi$ и с учетом известных формул

$$F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \Gamma\Bigl(\frac{1}{2}+z\Bigr)\Gamma\Bigl(\frac{1}{2}-z\Bigr) = \frac{\pi}{\cos\pi z},$$
$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}, \quad (2.7.76)$$
$$\Gamma(z)\Gamma\Bigl(z+\frac{1}{2}\Bigr) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z), \quad \Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z\sin\pi z},$$

преобразуем его к виду

$$\cos\pi\rho + \sin\pi(\rho+\beta) = 0,$$

которое равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}\pi\rho = -\frac{1+\sin\pi\beta}{\cos\pi\beta} = -\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi\beta}{2}} = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi\beta}{2}} = -\operatorname{tg}\Bigl(\frac{\pi\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\Bigr).$$

Отсюда находим

$$\rho = \rho_k = k - \frac{1}{4} - \frac{\beta}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots. \quad (2.7.77)$$

Пусть теперь $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда из равенства (2.7.75) на основании (2.7.76) и следующих формул [10, Т. I, с. 112]:

$$F\Bigl(2a, 2b, a+b+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\Bigr) = \frac{\Gamma\bigl(a+b+\frac{1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(\frac{1}{2}\bigr)}{\Gamma\bigl(a+\frac{1}{2}\bigr)\Gamma\bigl(b+\frac{1}{2}\bigr)},$$

$$F\Big(a, 1-a, b;\ \frac{1}{2}\Big) = 2^{1-b}\frac{\Gamma(b)\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\Big)},$$

получим

$$\sin\pi(\rho-\beta) + 2\sin\frac{\pi(\rho+\beta)}{2}\sin\frac{\pi(\rho-\beta)}{2} = 0,$$

которое равносильно совокупности двух уравнений:

$$\sin\frac{\pi(\rho-\beta)}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{2} = -1.$$

Отсюда находим

$$\rho_{1k} = 2k+\beta, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.7.78}$$

$$\rho_{2k} = 2k-\frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.7.79}$$

С учетом найденных значений C_1 и C_2 по формулам (2.7.73) и (2.7.74) преобразуем функцию (2.7.56). На основании следующих формул [10, Т. I, с. 148]:

$$\Gamma(1-\mu)\mathrm{P}_\nu^\mu(\cos\theta) = \Big(\frac{1}{2}\sin\theta\Big)^{-\mu}F\Big(1+\nu-\mu, -\nu-\mu, 1-\mu;\ \sin^2\frac{\theta}{2}\Big),$$

$$\Gamma(1-\mu)\mathrm{P}_\nu^\mu(\cos\theta) = \Big(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\Big)^{\mu}F\Big(-\nu, \nu+1, 1-\mu;\ \sin^2\frac{\theta}{2}\Big),$$

$$\mathrm{P}_{-\nu-1}^\mu(x) = \mathrm{P}_\nu^\mu(x),$$

где $\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$ — модифицированная или присоединенная функция Лежандра, получим следующее представление для гипергеометрических функций из (2.7.56):

$$F\Big(\beta+\rho, \beta-\rho, \frac{1}{2}+\beta;\ \sin^2\frac{\varphi}{2}\Big) = \Gamma\Big(\frac{1}{2}+\beta\Big)\Big(\frac{1}{2}\sin\varphi\Big)^{1/2-\beta}\mathrm{P}_{\rho-1/2}^{1/2-\beta}(\cos\varphi), \tag{2.7.80}$$

$$\begin{aligned} F\Big(\frac{1}{2}+\rho, \frac{1}{2}-\rho, \frac{3}{2}-\rho;\ \sin^2\frac{\varphi}{2}\Big) &= \\ = \Gamma\Big(\frac{3}{2}-\beta\Big)\Big(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\Big)^{\beta-1/2}\mathrm{P}_{-\rho-1/2}^{\beta-1/2}(\cos\varphi) &= \\ = \Gamma\Big(\frac{3}{2}-\beta\Big)\Big(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\Big)^{\beta-1/2}\mathrm{P}_{\rho-1/2}^{\beta-1/2}(\cos\varphi). \end{aligned} \tag{2.7.81}$$

После подстановки (2.7.80) и (2.7.81) в (2.7.56) получаем

$$\Phi(\varphi) = A_3\Big(\frac{\sin\varphi}{2}\Big)^{1/2-\beta}\Big[\frac{\Gamma(\rho+\beta)}{\Gamma(1+\rho-\beta)}\mathrm{P}_{\rho-1/2}^{1/2-\beta}(\cos\varphi) + \mathrm{P}_{\rho-1/2}^{\beta-1/2}(\cos\varphi)\Big], \tag{2.7.82}$$

где
$$A_3 = A_2 \frac{\Gamma(1+2\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\rho\right)\Gamma(\rho+\beta)}.$$

Представлению (2.7.82) придадим другой вид. Предварительно на основании формул [10, Т. I, с. 145]
$$\Gamma(\nu+\mu+1)\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(x) = \Gamma(\nu-\mu+1)\Big[\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\cos(\mu\pi) - \frac{2}{\pi}\sin(\mu\pi)\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\Big],$$
$$\mathrm{P}_\nu^\mu(-x) = \mathrm{P}_\nu^\mu(x)\cos[\pi(\nu+\mu)] - \frac{2}{\pi}\sin[\pi(\nu+\mu)]\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$$
выразим фунцию $\mathrm{P}_\nu^\mu(x)$ через $\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(x)$:
$$\mathrm{P}_\nu^\mu(x) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\Big[\frac{\sin\pi\nu}{\sin\pi(\nu-\mu)}\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(x) - \frac{\sin\pi\mu}{\sin\pi(\nu-\mu)}\mathrm{P}_\nu^{-\mu}(-x)\Big]. \tag{2.7.83}$$
В силу полученной формулы (2.7.83) вычислим
$$\mathrm{P}_{\rho-1/2}^{1/2-\beta}(\cos\varphi) = \frac{\Gamma(\rho-\beta+1)}{\Gamma(\rho+\beta)}\Big[\frac{\cos\pi\rho}{\sin\pi(\rho+\beta)}\mathrm{P}_{\rho-1/2}^{\beta-1/2}(\cos\varphi) + \\ + \frac{\cos\pi\beta}{\sin\pi(\rho+\beta)}\mathrm{P}_{\rho-1/2}^{\beta-1/2}(-\cos\varphi)\Big]$$
и подставим в соотношение (2.7.82). Тогда будем иметь
$$\Phi(\varphi) = A_3\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{1/2-\beta}\Big[\frac{\cos\pi\rho+\sin\pi(\rho+\beta)}{\sin\pi(\rho+\beta)}\mathrm{P}_{\rho-1/2}^{\beta-1/2}(\cos\varphi) + \\ + \frac{\cos\pi\rho}{\sin\pi(\rho+\beta)}\mathrm{P}_{\rho-1/2}^{\beta-1/2}(-\cos\varphi)\Big], \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0. \tag{2.7.84}$$
Отсюда с учетом (2.7.77) найдем
$$\Phi_k(\varphi) = -A_3\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{1/2-\beta}\mathrm{P}_{\rho_k-1/2}^{\beta-1/2}(-\cos\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \tag{2.7.85}$$
Выбирая из (2.7.78) и (2.7.79) значения $\rho_{2k} = 2k - \frac{1}{2}$ из формулы (2.7.84), получим
$$\Phi_k(\varphi) = A_3\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)^{1/2-\beta}\mathrm{P}_{2k-1}^{\beta-1/2}(\cos\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{2.7.86}$$

Далее более подробно остановимся на случае $\varphi_0 = \pi$. Тогда, учитывая найденные значения ρ_k по формуле (2.7.77) и удовлетворяя функцию (2.7.54) второму граничному условию из (2.7.52), будем иметь
$$J_{\rho_k}(\sqrt{\lambda}\, l) = 0. \tag{2.7.87}$$

По аналогии предыдущим пунктом обозначим через d_{nm} корень уравнения (2.7.87) и найдем собственные значения задачи T_λ,

$$\lambda_{km} = \left(\frac{d_{km}}{l}\right)^2. \qquad (2.7.88)$$

Таким образом, на основании формул (2.7.54), (2.7.85), (2.7.88), (2.7.67) и (2.7.70) получим систему собственных функций задачи T_λ,

$$u_{km}(x,y) = \\ = \begin{cases} -A_3 r^{-\beta} J_{\rho_k}\Big(\sqrt{\dfrac{d_{km}}{l}}\,r\Big)\Big(\dfrac{\sin\varphi}{2}\Big)^{1/2-\beta}\mathrm{P}^{\beta-1/2}_{\rho_k-1/2}(-\cos\varphi), \quad (x,y)\in D_+, \\ A_2\Big(\dfrac{2\sigma}{x+\sigma}\Big)^{\rho_k+\beta} F\Big(\beta+\rho_k, \dfrac{1}{2}+\rho_k, 1+2\rho_k; \dfrac{2\sigma}{x+\sigma}\Big)\sigma^{-\beta} J_{\rho_k}\Big(\sqrt{\dfrac{d_{km}}{l}}\,\sigma\Big), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,y)\in D_-, \end{cases} \qquad (2.7.89)$$

где $\sigma = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{1}{\alpha}y^\alpha\right)^2}$.

Построенную систему (2.7.89) исследуем на полноту в пространстве L_2.

Теорема 2.7.2. *Система собственных функций* (2.7.89) *задачи* T_λ *с весом* $|y|^{n/2}$ *полна в пространстве* $L_2(D_+)$ *и* $L_2(D_-)$, *но не полна в* $L_2(D)$; *при этом размерность дефекта равна бесконечности.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.7.1.

§ 2.8. Построение решения задачи Трикоми методом спектральных разложений

В этом параграфе полученные выше результаты применим для построения решения задачи Трикоми для уравнения (2.7.1) в области D, где эллиптическая часть представляет собой сектор с центром в точке $A(0,0)$. Прежде решение задачи Т построим для уравнения (2.7.1) при $n=0$, т. е. для уравнения с оператором Лаврентьева–Бицадзе, а потом для уравнения (2.7.1) для всех $n>0$.

2.8.1. Построение решения задачи Трикоми для уравнения с оператором Лаврентьева–Бицадзе. Рассмотрим уравнение (2.7.1) при $n=0$, т. е. уравнение вида

$$Lu = u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - \lambda u = 0 \qquad (2.8.1)$$

в области D (см. начало § 2.7), где эллиптическая часть D_+ является сектором с центром в точке $A(0,0)$: $0<r<l$, $0<\varphi<\varphi_0 \leqslant \pi$, а гиперболическая часть D_- такая же, т. е. она ограничена характеристиками

$AC\,(x+y=0)$ и $CB\,(x-y=l)$ уравнения (2.8.1) и отрезком AB прямой $y=0$.

Задача Т. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C(D)\cap C^2(D_+\cup D_-); \tag{2.8.2}$$

$$Lu(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in D_+\cup D_-; \tag{2.8.3}$$

$$u(x,y)|_{\Gamma_0}=v(r,\varphi)|_{r=l}=f(\varphi),\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0; \tag{2.8.4}$$

$$u(x,y)|_{AK}=v(r,\varphi)|_{\varphi=\varphi_0}=0,\quad 0\leqslant r\leqslant l; \tag{2.8.5}$$

$$u(x,y)|_{AC}=u(x,-x)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}, \tag{2.8.6}$$

где $f(\varphi)$ — заданная достаточно гладкая функция, $f(\varphi_0)=0$, K — точка пересечения кривой $\Gamma_0\,(r=l)$ и луча $\varphi=\varphi_0$.

Для простоты вначале рассмотрим случай, когда в уравнении (2.8.1) $\lambda=0$. На основании формулы

$$u(x,y)=\tau(x+y), \tag{2.8.7}$$

где $\tau(x)\in C[0,l]\cap C^2(0,l)$, $\tau(0)=0$, решения задачи Дарбу для уравнения струны с граничными данными: $u(x,0)=\tau(x)$, $0\leqslant x\leqslant l$, $u(x,-x)=0$, $0\leqslant x\leqslant l/2$, получаем равенство

$$u_x(x,0)-u_y(x,0)=0,\quad 0<x<l. \tag{2.8.8}$$

Теперь в области D_+ построим решение следующей смешанной задачи для уравнения Лапласа: *найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям* (2.8.2)–(2.8.5) *и* (2.8.8).

Переходя здесь к полярным координатам (r,φ) и разделяя переменные $u(x,y)=v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)-\frac{\mu^2}{r^2}R(r)=0,\quad 0<r<l, \tag{2.8.9}$$

$$R(0)=0,\ |R(l)|<+\infty, \tag{2.8.10}$$

$$\Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\quad 0<\varphi<\varphi_0, \tag{2.8.11}$$

$$\Phi(\varphi_0)=0, \tag{2.8.12}$$

$$\frac{R(x)}{x}\Phi'(0)-R'(x)\Phi(0)=0,\quad 0<x<l, \tag{2.8.13}$$

где μ — постоянная разделения переменных.

Решением задачи (2.8.9) и (2.8.10) является функция

$$R(r)=r^{\mu},\quad \mu>0. \tag{2.8.14}$$

Подставляя функцию (2.8.14) в равенство (2.8.13), находим второе граничное условие для функции $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi'(0)-\mu\Phi(0)=0. \tag{2.8.15}$$

Решением задачи (2.8.11), (2.8.12) и (2.8.15) являются функции (2.6.18) из § 2.6:

$$\Phi_k(\varphi) = a_k \sin \mu_k(\varphi_0 - \varphi), \tag{2.8.16}$$

$$\mu_k = \frac{\pi}{\varphi_0}\left(k - \frac{1}{4}\right), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.8.17}$$

Тогда функции вида

$$v_k(r, \varphi) = a_k r^{\mu_k} \sin \mu_k(\varphi_0 - \varphi)$$

удовлетворяют в области D_+ всем условиям (2.8.2)–(2.8.5), (2.8.8), кроме (2.8.4). Решение этой задачи будем искать в виде суммы ряда

$$v(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \left(\frac{r}{l}\right)^{\mu_k} \sin \mu_k(\varphi_0 - \varphi) \tag{2.8.18}$$

с неизвестными коэффициентами f_k. Пусть ряд (2.8.18) сходится равномерно в $\overline{D}_+$. Тогда, удовлетворяя ряд (2.8.18) граничному условию (2.8.4), получим

$$f(\varphi) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \sin \mu_k(\varphi_0 - \varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0. \tag{2.8.19}$$

В ряде (2.8.19) произведем замену $\varphi = \dfrac{\varphi_0}{\pi}(\pi - \theta)$. Тогда, полагая $f(\varphi) = g(\theta)$, будем иметь

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{4}\right)\theta\right), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{2.8.20}$$

Отметим, что система синусов $\left\{\sin\left(k - \frac{1}{4}\right)\theta\right\}$ не является ортогональной на промежутке $[0, \pi]$, поэтому наряду с этой системой рассмотрим систему $\{h_k(\theta)\}$, которая определена формулой (2.6.3) при $\beta = 1/2$. Тогда, умножая обе части ряда (2.8.20) на $h_m(\theta)$ и интегрируя по сегменту $[0, \pi]$, найдем

$$f_m = \int_0^{\pi} g(\theta) h_m(\theta) d\theta = \frac{\pi}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) h_m\left(\pi \frac{\varphi_0 - \varphi}{\varphi_0}\right) d\varphi. \tag{2.8.21}$$

Если $g(\theta) \in C^{\alpha}[0, \pi]$, $g(0) = 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то в силу леммы 2.6.1 ряд (2.8.20) сходится равномерно на $[0, \pi]$. Следовательно, ряд (2.8.19) сходится равномерно на $[0, \varphi_0]$ к функции $f(\varphi)$, если $f(\varphi) \in C^{\alpha}[0, \varphi_0]$, $f(\varphi_0) = 0$.

При любом $0 < l_0 \leqslant r \leqslant l_1 < l$ ряд (2.8.18) сходится равномерно и допускает почленно дифференцирование по переменным r и φ любое число раз. А при $r = l$ из (2.8.18) получаем ряд (2.8.18), который сходится равномерно к функции $f(\varphi)$. Поэтому сумма ряда (2.8.18) непрерывна на $\overline{D}_+$ и на $D_+ \cup AB \cup AK$ допускает почленно дифференцирование по r и φ любое число раз.

Из формулы (2.8.18) при $\varphi = 0$ найдем

$$u(x,0) = \tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_k \left(\frac{x}{l}\right)^{\mu_k}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.8.22}$$

которая принадлежит классу $C[0,l] \cap C^{\infty}(0,l)$. В области D_- решение задачи Трикоми, т. е. задачи (2.8.3)–(2.8.6) при $\lambda = 0$, определяется по формуле (2.8.7):

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_k \left(\frac{x+y}{l}\right)^{\mu_k}, \quad (x,y) \in D_-. \tag{2.8.23}$$

Поскольку $0 \leqslant \dfrac{x+y}{l} \leqslant 1$ на $\overline{D}_-$, ряд (2.8.22) на $\overline{D}_-$ сходится равномерно и на множестве $D_- \cup AB$ допускает почленно дифференцирование по x и y любое число раз.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2.8.1. *Если* $f(\varphi) \in C^{\alpha}[0,\varphi_0]$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $f(\varphi_0) = 0$, *то существует единственное решение задачи* T *для уравнения* (2.7.1) *при* $\lambda = 0$ *и оно имеет вид*

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \Big(\dfrac{r}{l}\Big)^{\mu_k} \sin \mu_k(\varphi_0 - \varphi), & (r,\varphi) \in D_+, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_k \Big(\dfrac{x+y}{l}\Big)^{\mu_k}, & (x,y) \in D_-, \end{cases}$$

где f_k *определяются по формуле* (2.8.20); *при этом* $u(x,y) \in C^{\infty}(D_+ \cup AK \cup AB) \cap C^{\infty}(D_+ \cup AB)$.

Пусть в уравнении (2.8.1) $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq \lambda_{nm}$, где λ_{nm} — собственные значения спектральной задачи T_{λ}. Используя построенную систему собственных функций задачи T_{λ}, решение задачи (2.8.2)–(2.8.6) в области D_+ при $\lambda \neq \lambda_{nm}$ будем искать в виде суммы ряда

$$v(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{J_{\mu_k}(r\sqrt{\lambda}\,)}{J_{\mu_k}(l\sqrt{\lambda}\,)} \sin \mu_k\left(\varphi_0 - \varphi\right), \tag{2.8.24}$$

где f_k определяются по формуле (2.8.21), а $J_{\mu_k}(r\sqrt{\lambda}\,)/J_{\mu_k} l\sqrt{\lambda}$ — система собственных функций задачи (2.6.9) и (2.6.10), только здесь условие $R(l) = 0$ следует заменить на $R(l) = 1$.

На основании асимптотической формулы [10, Т. II, с. 31]

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \tag{2.8.25}$$

при $\nu \to +\infty$ и фиксированном z ряд (2.8.24) при любом $0 < l_0 \leqslant r \leqslant \leqslant l_1 < l$ сходится равномерно, так как при больших k

$$\left| f_k \frac{J_{\mu_k}(r\sqrt{\lambda}\,)}{J_{\mu_k}(l\sqrt{\lambda}\,)} \sin \mu_k(\varphi_0 - \varphi) \right| \leqslant M r^{\mu_k},$$

где $M = \mathrm{const} > 0$, и допускает почленно дифференцирование по переменным r и φ любое число раз.

При $r = l$ из (2.8.24) имеем ряд (2.8.19), равномерная сходимость которого обоснована выше при условии, что $f(\varphi) \in C^\alpha[0, \varphi_0]$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $f(\varphi_0)$. Из ряда (2.8.24) при условии $\varphi = 0$ находим

$$u(x, 0) = \tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_k \frac{J_{\mu_k}(x\sqrt{\lambda}\,)}{J_{\mu_k}(l\sqrt{\lambda}\,)}. \tag{2.8.26}$$

Для построения решения задачи Т в области D_- воспользуемся формулой (2.6.30). Если в этой формуле положить $\rho = \mu_k$, $C_2 = 0$, $C_1 = \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} \dfrac{f_k}{J_{\mu_k}(l\sqrt{\lambda}\,)}$, то получим функцию

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_k \left(\frac{x + y}{x - y} \right)^{\mu_k/2} \frac{J_{\mu_k}(\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)}\,)}{J_{\mu_k}(l\sqrt{\lambda}\,)}, \tag{2.8.27}$$

которая является решением задачи Дарбу для уравнения (2.8.1) в области D_- с граничными условиями (2.8.26) и (2.8.6).

Итак, справедлива

Теорема 2.8.2. *Если* $f(\varphi) \in C^\alpha[0, \varphi_0]$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $f(\varphi_0) = 0$, $\lambda \neq \lambda_{nm}$, *то существует решение задачи* T *и оно определяется рядами* (2.8.24) *и* (2.8.27), *т. е.*

$$u(x, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{J_{\mu_k}(r\sqrt{\lambda}\,)}{J_{\mu_k}(l\sqrt{\lambda}\,)} \sin \mu_k(\varphi_0 - \varphi), & (r, \varphi) \in D_+, \\ \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f_k \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{\mu_k/2} \frac{J_{\mu_k}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)})}{J_{\mu_k}(l\sqrt{\lambda}\,)}, & (x, y) \in D_-; \end{cases}$$

при этом $u(x, y) \in C^\infty(D_+ \cup AK \cup AB) \cap C^\infty(D_+ \cup AB)$.

2.8.2. Построение решения пространственной задачи Трикоми. Рассмотрим пространственный аналог уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$LW = W_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot W_{yy} + W_{zz} = 0 \tag{2.8.28}$$

в цилиндре $G = D \times (0, d)$, где D — область плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$, описанная в п. 2.8.1. Обозначим через S часть боковой поверхности $x^2 + y^2 = l^2$, $y > 0$, $z \in [0, d]$; S_0 — оставшаяся часть боковой поверхности, т. е. часть плоскости $\varphi = \varphi_0$, $G_+ = G \cap \{y > 0\}$, $G_- = G \cap \{y < 0\}$.

Задача T. *Найти функцию $W(x,y,z)$, удовлетворяющую условиям*:

$$W(x,y,z)\in C(\overline{G}\cap C^1(G)\cap C^2(G_+\cup G_-); \tag{2.8.29}$$

$$LW(x,y,z)\equiv 0,\ (x,y,z)\in G_+\cup G_-; \tag{2.8.30}$$

$$W(x,y,z)|_S = V(r,\varphi,z)|_{r=l} = F(\varphi,z); \tag{2.8.31}$$

$$W(x,y,z)|_{S_0} = V(r,\varphi,z)|_{\varphi=\varphi_0} = 0; \tag{2.8.32}$$

$$W(x,y,z)|_{y=-x} = 0; \tag{2.8.33}$$

$$W(x,y,z)|_{z=0} = W(x,y,z)|_{z=d} = 0, \tag{2.8.34}$$

где $F(\varphi,z)$ — заданная достаточно гладкая функция.

Разделив в задаче (2.8.29)–(2.8.34) переменные $W(x,y,z) = u(x,y)Z(z)$, получим

$$u_{xx}+\operatorname{sgn} y\cdot u_{yy}-p^2u=0,\quad (x,y)\in D_+\cup D_-, \tag{2.8.35}$$

$$u(x,y)|_{\Gamma_0} = v(r,\varphi)|_{r=l} = f(\varphi),\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0, \tag{2.8.36}$$

$$u(x,y)|_{AK} = v(r,\varphi)|_{\varphi=\varphi_0} = 0,\quad 0\leqslant r\leqslant l, \tag{2.8.37}$$

$$u(x,y)|_{AC} = u(x,-x) = 0,\quad 0\leqslant x\leqslant l/2, \tag{2.8.38}$$

$$Z''(z)+p^2Z(z)=0,\quad 0<z<d, \tag{2.8.39}$$

$$Z(0)=Z(d)=0, \tag{2.8.40}$$

где $p=\mathrm{const}>0$, $f(\varphi)=F(\varphi,0)$.

Полученная задача (2.8.35)–(2.8.38) есть задача (2.8.2)–(2.8.6), где $\lambda=-p^2$. Полагая в формулах (2.8.24) и (2.8.27) $\lambda=-p^2$ и учитывая равенство $J_\nu(iz)=i^\nu I_\nu(z)$, где $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, получим решение задачи (2.8.35)–(2.8.38):

$$u(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\frac{I_{\mu_k}(rp)}{I_{\mu_k}(lp)}\sin\mu_k(\varphi_0-\varphi),\quad (r,\varphi)\in D_+,\\ \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}f_k\Big(\frac{x+y}{x-y}\Big)^{\mu/2}\frac{I_{\mu_k}(p\sqrt{x^2-y^2}\,)}{I_{\mu_k}(pl)},\quad (x,y)\in D_-.\end{cases} \tag{2.8.41}$$

Решением задачи (2.8.39) и (2.8.40) являются функции

$$Z_n(z)=\sin p_nz,\quad p_n=\frac{\pi n}{\alpha},\quad n=1,2,\ldots. \tag{2.8.42}$$

Тогда решение задачи (2.8.29)–(2.8.34) в области G_+ на основании формул (2.8.41) и (2.8.42) будем искать в виде суммы двойного ряда

$$W(x,y,z)=V(r,\varphi,z)=\sum_{n,k=1}^{+\infty} f_{nk}\sin p_nz\sin\mu_k(\varphi_0-\varphi)\frac{I_{\mu_k}(p_nr)}{I_{\mu_k}(p_nl)}. \tag{2.8.43}$$

Полагая в (2.8.43) $r = l$, получим

$$F(\varphi, z) = \sum_{n,k=1}^{+\infty} f_{nk} \sin \mu_k(\varphi_0 - \varphi) \sin d_n z;$$

здесь коэффициенты f_{nk} находятся из разложения функции

$$P_n(\varphi) = \sum_{n,k=1}^{+\infty} f_{nk} \sin\Big(\mu_k\varphi + \frac{\pi}{4}\Big), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0,$$

т. е. по формуле (2.8.21) при фиксированном n, а функция $P_n(\varphi)$ определяется по формуле

$$P_n(\varphi) = \frac{2}{d} \int_0^d F(\varphi, z) \sin d_n z \, dz.$$

Далее решение задачи Т в области G_- находится как сумма ряда

$$W(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} f_{nk} \sin d_n z \Big(\frac{x+y}{x-y}\Big)^{\mu_k/2} \frac{I_{\mu_k}\big(d_n\sqrt{x^2-y^2}\,\big)}{I_{\mu_k}(d_n l)}. \tag{2.8.44}$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.8.3. *Если функция $F(\varphi, z)$ по переменной φ удовлетворяет на сегменте $[0, \varphi_0]$ условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$, а по переменной z на отрезке $[0, d]$ условию Гёльдера с показателем $\beta \in (0, 1]$, $F(\varphi_0, z) = 0$, то существует решение задачи T в цилиндре G и оно определяется рядами* (2.8.43) *и* (2.8.44).

2.8.3. Построение решения задачи Трикоми для уравнения с оператором Геллерстетда. Рассмотрим уравнение (2.6.1) при $n > 0$, т. е. уравнение вида

$$Lu = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n u_{xx} + u_{yy} + \lambda \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n u = 0, \tag{2.8.45}$$

в области D (см. § 2.6), где граница Γ области D_+ состоит из дуги «нормальной» кривой Γ_0 и отрезка AK (см. рис. 2.7.1).

Задача Т. *Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям*:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2.8.46}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{2.8.47}$$

$$u(x, y)|_{\Gamma_0} = v(r, \varphi)|_{r=l} = f(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0; \tag{2.8.48}$$

$$u(x, y)|_{AK} = v(r, \varphi)|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l; \tag{2.8.49}$$

$$u(x, y)|_{AC} = u\big(x, -(\alpha x)^{1/\alpha}\big) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l/2, \tag{2.8.50}$$

где $f(\varphi)$ — заданная достаточно гладкая функция, $f(\varphi_0) = 0$, $\alpha = (n+2)/2$.

Пусть в уравнении (2.8.45) $\lambda = 0$. На основании формулы [202, с. 121]

$$u(x, y) = v(\xi, \eta) = k_1 \int\limits_0^{\xi} \frac{\nu(t)\, dt}{(\xi - t)^{\beta}(\eta - t)^{\beta}}, \tag{2.8.51}$$

где

$$k_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}, \quad \beta = \frac{n}{2(n+2)},$$

$$\xi = x - \frac{1}{\alpha}(-y)^{\alpha}, \quad \eta = x + \frac{1}{\alpha}(-y)^{\alpha},$$

и решения задачи Дарбу для уравнения (2.8.45) при $\lambda = 0$ с граничными условиями: $u_y(x, 0) = \nu(x)$, $0 < x < l$, $u|_{AC} = 0$, найдем равенство, связывающее функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ (т. е. полагая в формуле (2.8.51) $y = 0$ или $\eta = \xi = x$),

$$u(x, 0) = \tau(x) = k_1 \int\limits_0^{x} \frac{\nu(t) dt}{(x - t)^{2\beta}}. \tag{2.8.52}$$

Тогда задача (2.8.46)–(2.8.50) сводится к следующей нелокальной эллиптической задаче: *найти в области* D_+ *функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющую условиям* (2.8.46)–(2.8.49) *и* (2.8.52).

В этой задаче, разделяя переменные $u(x, y) = v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, где r и φ определяются по формуле (2.6.13) из § 2.6, получим

$$R''(r) + \frac{1 + 2\beta}{r} R'(r) - \frac{\mu^2}{r^2} R(r) = 0, \quad 0 < r < l, \tag{2.8.53}$$

$$R(0) = 0, \quad |R(l)| < +\infty, \tag{2.8.54}$$

$$\Phi''(\varphi) + 2\beta \operatorname{ctg} \varphi, \quad \Phi'(\varphi) + \mu^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{2.8.55}$$

$$\Phi(\varphi_0) = 0, \tag{2.8.56}$$

где $\mu = \mathrm{const} > 0$. Решением задачи (2.8.53) и (2.8.54) является функция

$$R(r) = r^{\rho - \beta}, \quad \rho = \sqrt{\mu^2 + \beta^2}\,.$$

В п. 2.6.2 общее решение уравнения (2.8.55) построено, и оно определяется формулой (2.6.22). Используя (2.8.56) и (2.6.22), вычислим

$$u_y(x, 0 - 0) = \nu(x) = \lim_{y \to 0}(u_r r_y + u_{\varphi}\varphi_y) =$$

$$= (\alpha x)^{2\beta} \frac{R(x)}{x} \lim_{\varphi \to 0} \Phi'(\varphi) \sin^{2\beta} \varphi = (2\alpha)^{2\beta} x^{\rho + \beta - 1} \frac{1 - 2\beta}{2} C_2$$

и подставим в равенство (2.8.52). Тогда

$$x^{\rho-\beta}C_1 = k_1(2\alpha)^{2\beta}\frac{1-2\beta}{2}C_2\int\limits_0^x \frac{t^{\rho+\beta-1}\,dt}{(x-t)^{2\beta}} = \\ = k_1(2\alpha)^{2\beta}\frac{1-2\beta}{2}C_2x^{\rho-\beta}\frac{\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1+\rho-\beta)}$$

или

$$C_1 = C_2 2^{4\beta-1}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}\frac{1-2\beta}{2}\frac{\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1+\rho-\beta)}. \qquad (2.8.57)$$

Теперь, подчиняя функцию (2.6.22) условию (2.8.56), получим равенство (2.6.25). Подставляя сюда значение C_1 по формуле (2.8.57), находим уравнение относительно ρ:

$$2^{4\beta-1}\frac{1-2\beta}{2}\times \\ \times\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}\frac{\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1+\rho-\beta)}F\Big(\beta+\rho,\beta-\rho,\frac{1}{2}+\beta;\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\Big)+ \\ +\Big(\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\Big)^{1/2-\beta}F\Big(\frac{1}{2}+\rho,\frac{1}{2}-\rho,\frac{3}{2}-\beta;\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\Big)=0. \qquad (2.8.58)$$

Полагая в равенстве (2.8.58) $\varphi_0=\pi$, с учетом формул (2.7.76) будем иметь

$$\cos\pi\rho+\sin\pi(\rho+\beta)=0.$$

Отсюда находим (2.7.77):

$$\rho=\rho_k=k-\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2},\quad k=1,2,\ldots.$$

С учетом (2.8.57), (2.7.80), (2.7.81) функцию (2.7.56) преобразуем к виду (2.7.84), затем в силу (2.7.77) к виду (2.7.85) с другой постоянной A_3.

Решение эллиптической задачи (2.8.46)–(2.8.49), (2.8.52) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}f_k\Big(\frac{r}{l}\Big)^{\rho_k-\beta}(\sin\varphi)^{1/2-\beta}\mathrm{P}_{\rho_k-1/2}^{\beta-1/2}(-\cos\varphi), \qquad (2.8.59)$$

где f_k — неизвестные пока постоянные.

Допустим, что ряд (2.8.59) сходится равномерно в $\overline{D}_+$. Тогда, подчиняя этот ряд граничному условию (2.8.49), получим

$$f(\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\sin(\varphi)^{1/2-\beta}\mathrm{P}_{\rho_k-1/2}^{\beta-1/2}(-\cos\varphi),\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi. \qquad (2.8.60)$$

Производя замену $\pi - \varphi = \theta$ в равенстве (2.8.60) и учитывая формулу Мелера–Дирихле [10, Т. I, с. 160]

$$\mathrm{P}_v^\mu(\cos t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(\sin t)^\mu}{\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}-\mu\Big)}\int\limits_0^\theta (\cos v - \cos\theta)^{-\mu-1/2}\cos\Big[\Big(v+\frac{1}{2}\Big)v\Big]\,dv, \tag{2.8.61}$$

где $0 < t < \pi$, $\operatorname{Re}\mu < 1/2$, будем иметь

$$f(\pi-\theta) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\Gamma(1-\beta)}\sum_{k=1}^{\infty} f_k \int\limits_0^\theta (\cos v - \cos\theta)^{-\beta}\cos\Big[\Big(k-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}\Big)v\Big]\,dv.$$

Отсюда после перестановки порядков суммирования и интегрирования найдем

$$f_1(\theta) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^\theta (\cos v - \cos\theta)^{-\beta}\sum_{k=1}^{\infty} f_k\cos\Big[\Big(k-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}\Big)v\Big]\,dv =$$
$$= \frac{\sqrt{2/\pi}}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^\theta (\cos v - \cos\theta)^{-\beta}F_1(v)\,dv, \tag{2.8.62}$$

где

$$F_1(v) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\cos\Big[\Big(k-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}\Big)v\Big], \quad f_1(\theta) = f(\pi-\theta).$$

Производя в равенстве (2.8.62) замену $z = \cos\theta$, $t = \cos v$, получим интегральное уравнение Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_z^1 \frac{F_2(t)\,dt}{(t-z)^\beta(1-t^2)^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,f_2(z), \quad -1 \leqslant z \leqslant 1, \tag{2.8.63}$$

где $f_2(z) = f_1(\arccos z)$, $F_2(t) = F_1(\arccos t)$. Решение уравнения (2.8.63) определяется по формуле [200, с. 39]

$$\frac{F_2(z)}{(1-z^2)^1/2} = -\frac{\sqrt{\pi/2}}{\Gamma(\beta)}\,\frac{d}{dz}\int\limits_z^1 \frac{f_2(t)\,dt}{(t-z)^{1-\beta}}$$

или

$$F_1(\theta) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\Gamma(\beta)}\,\frac{d}{d\theta}\int\limits_0^\theta \frac{f_1(v)\sin v\,dv}{(\cos v - \cos\theta)^{1-\beta}}.$$

Если $f_1(0) = 0$, $f_1(\theta) \in C[0,\pi] \cap C^1(0,\pi)$, $(\cos\theta + 1)^{\beta-1} f_1'(\theta)$ интегрируема на $[0,\pi]$, то

$$F_1(\theta) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\Gamma(\beta)} \sin\theta \int\limits_0^\theta \frac{f_1'(v)\,dv}{(\cos v - \cos\theta)^{1-\beta}} \qquad (2.8.64)$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos\left[\left(k - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{4}\right)\theta\right] = \sum_{m=0}^{\infty} f_{m+1} \cos\left[\left(m - \frac{\beta}{2} + \frac{3}{4}\right)\theta\right] =$$
$$= -\frac{\sqrt{\pi/2}}{\Gamma(\beta)} \sin\theta \int\limits_0^\theta \frac{f'(\pi - v)\,dv}{(\cos v - \cos\theta)^{1-\beta}}. \qquad (2.8.65)$$

В силу теоремы 2.6.2 ряд (2.8.65) сходится в пространстве $L_p[0,\pi]$ при $p < 2/(1-2\beta)$, так как для таких p система косинусов $\left\{\cos\left(m - \frac{\beta}{2} + \frac{3}{4}\right)\theta\right\}_{m=0}^{\infty} = \{\cos(m - \widetilde{\beta}/2)\theta\}_{m=0}^{\infty}$, где $\widetilde{\beta} = \beta - 3/2$, образует базис в $L_p[0,\pi]$. При этом коэффициенты ряда (2.8.65) определяются по формуле

$$f_{m+1} = -\int\limits_0^\pi F_1(\theta) h_m^c(\theta)\,d\theta, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2.8.66)$$

где $F_1(\theta)$ задается соотношением (2.8.64), а биортогональная система $h_m^c(\theta)$ имеет вид

$$h_m^c(\theta) = \frac{2}{\pi}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{3/2-\beta} \left[\sum_{k=0}^{m} C_{\beta-3/2}^{k} \cos(n-k)\theta - \frac{1}{2} C_{\beta-3/2}^{m}\right]. \qquad (2.8.67)$$

Изучим теперь сходимость ряда (2.8.62). Поскольку ядро интегрального оператора из (2.8.62) принадлежит $L_\gamma[0,\pi]$ с $\gamma < 1/2\beta$, а сопряженный с p показатель $q > 2/(1+2\beta)$, то отсюда следует, что ряд из (2.8.62) сходится равномерно на сегменте $[0,\pi]$. Из следствия 2.6.2 следует равномерная по m ограниченность модуля функции $h_m^c(\theta)$. Отсюда вытекает равномерная по m ограниченность коэффициентов f_{m+1}. В силу этих оценок ряд (2.8.59) сходится равномерно при $0 \leqslant r \leqslant l_1 < l$, при этом равномерная сходимость сохраняется для рядов, полученных многократным почленным дифференцированием по переменным r, φ в части кольца $0 < l_0 \leqslant r \leqslant l_1 < l$.

Для построения решения задачи Трикоми в области D_- найдем след производной $\partial u/\partial y$ от решения (2.8.59) на отрезке $0 < x < l$,

$y = 0$. Для этого, используя формулу [10, Т. I, с. 163]

$$\frac{d}{dx}\mathrm{P}_\nu^\mu(x) = -\frac{x\mu}{1-x^2}\mathrm{P}_\nu^\mu(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{P}_\nu^{\mu+1}(x), \tag{2.8.68}$$

вычислим

$$\nu(x) = \lim_{y\to 0+0}\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha^{2\beta}x^{2\beta-1}\lim_{\varphi\to 0}(\sin\varphi)^{2\beta}u_\varphi =$$
$$= \frac{(\alpha l)^{2\beta}}{l}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\left(\frac{x}{l}\right)^{\rho_k+\beta-1}\lim_{\varphi\to 0}(\sin\varphi)^{2\beta}\frac{d}{d\varphi}\left[(\sin\varphi)^{1/2-\beta}\mathrm{P}_{\rho_k-1/2}^{\beta-1/2}(-\cos\varphi)\right] =$$
$$= -\frac{(\alpha l)^{2\beta}}{l}\sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(\frac{x}{l}\right)^{\rho_k+\beta-1}\lim_{\varphi\to 0}(\sin\varphi)^{\beta+1/2}\mathrm{P}_{\rho_k-1/2}^{\beta+1/2}(-\cos\varphi) =$$
$$= \frac{k_2}{l}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1} f_k\left(\frac{x}{l}\right)^{\rho_k+\beta-1}, \quad 0 < x < l, \tag{2.8.69}$$

где

$$k_2 = \frac{(\alpha l)^{2\beta}}{\pi}2^{\frac{1+2\beta}{2}}\Gamma\left(\frac{1+2\beta}{2}\right)\cos\frac{(1+2\beta)\pi}{4}.$$

Подставляя (2.8.68) в формулу (2.8.51), найдем решение задачи T в области D_-:

$$u(x,y) = k_1k_2\Gamma(1-\beta)\left[(x+\frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha)l\right]^{-\beta}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\Gamma(\rho_k+\beta)}{\Gamma(\rho_k+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{x-\frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha}{l}\right)^{\rho_k} F\left(\beta, \rho_k+\beta, 1+\rho_k; \frac{x-\frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha}{x+\frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha}\right). \tag{2.8.70}$$

Таким образом, нами при $\varphi_0 = \pi$ и $\lambda = 0$ доказана теорема.

Теорема 2.8.4. *Если* $f(\varphi) \in C^1[0,\pi]$, $f(\pi) = 0$, *то существует единственное решение задачи* (2.8.46)–(2.8.50) *при* $\lambda = 0$ *и оно определяется рядами* (2.8.59) *и* (2.8.70), *где коэффициенты* f_k *находятся по формуле* (2.8.66).

Далее изучим случай, когда $\varphi_0 = \pi/2$. Полагая в равенстве (2.8.58) $\varphi_0 = \pi/2$ аналогично п. 2.7.2 находим $p_k = 2k - 1/2$, $k = 1, 2, \ldots$. Решение эллиптической задачи (2.8.46)–(2.8.49), (2.8.52) на основании частных решений (2.7.54) и (2.7.86) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k\left(\frac{r}{l}\right)^{2k-1/2-\beta}(\sin\varphi)^{1/2-\beta}\mathrm{P}_{2k-1}^{\beta-1/2}(\cos\varphi), \tag{2.8.71}$$

здесь f_k — неизвестные коэффициенты. Подчиняя ряд (2.8.71) граничному условию (2.8.48), будем иметь

$$f(\varphi)=\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(\sin\varphi)^{1/2-\beta}\mathrm{P}_{2k-1}^{\beta-1/2}(\cos\varphi), \quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2. \tag{2.8.72}$$

Совершая здесь замену $\varphi=\theta/2$ и используя формулу (2.8.61), получим

$$f\Big(\frac{\theta}{2}\Big)=\frac{\sqrt{2/\pi}}{\Gamma(1-\beta)}\sum_{k=1}^{\infty} f_k\int\limits_0^{\theta/2}(\cos v-\cos\theta/2)^{-\beta}\cos\left[(2k-1/2)v\right]dv=$$
$$=\frac{\sqrt{2/\pi}}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^{\theta/2}(\cos v-\cos\theta/2)^{-\beta}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\cos\left[(2k-1/2)v\right]\bigg)dv. \tag{2.8.73}$$

Обращая уравнение (2.8.73) аналогично решению интегрального уравнения (2.8.62), получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\cos\left[(2k-1/2)\frac{\theta}{2}\right]=\sum_{m=0}^{+\infty} f_{m+1}\cos{(m+3/4)\theta}=$$
$$=\frac{\sqrt{\pi/2}}{2\Gamma(\beta)}\sin\frac{\theta}{2}\int\limits_0^{\theta/2}\frac{f'\Big(\frac{v}{2}\Big)\,dv}{\Big(\cos v-\cos\dfrac{\theta}{2}\Big)^{1-\beta}}=\Phi_1(\theta). \tag{2.8.74}$$

На основании теоремы 2.6.2 ряд (2.8.74) сходится в $L_p(0,\pi)$ при $1<p<2$, так как для таких p система косинусов $\{\cos{(m+3/4)}\}_{m=0}^{\infty}$, где $\beta=-3/2$, образует базис в $L_p[0,\pi]$. Коэффициенты ряда (2.8.74) определяются по формуле

$$f_{m+1}=\int\limits_0^{\pi}\Phi_1(\theta)h_m^c(\theta)\,d\theta, \quad m=0,1,2,\ldots; \tag{2.8.75}$$

здесь $\Phi_1(\theta)$ есть правая часть (2.8.74), биортогональная система $h_m^c(\theta)$ находится по формуле (2.6.20) при $\beta=-3/2$. Аналогично вышеизложенному ряд (2.8.73) сходится равномерно на $[0,\pi]$. Тогда функция $u(x,y)$, определенная рядом (2.8.72), удовлетворяет всем условиям задачи (2.8.46)– (2.8.49) и (2.8.52). Для построения решения задачи Трикоми в области D_- найдем $\nu(x)=u_y(x,0+0)$ от решения (2.8.72) и подставим в формулу (2.8.51). В результате получим

$$u(x,y) = k_1 k_3 \Gamma(1-\beta)\Big[\Big(x + \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha\Big) l\Big]^{-\beta} \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2k+\beta-1/2)}{\Gamma(2k+1/2)} \left(\frac{x - \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha}{l}\right)^{2k-1/2} \times$$
$$\times F\left(\beta, 2k+\beta-1/2, 2k+1/2; \frac{x - \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha}{x + \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha}\right), \quad (2.8.76)$$

где
$$k_3 = \frac{(\alpha l)^{2\beta} 2^{(1+2\beta)/2}}{\Gamma(1/2-\beta)}.$$

Следовательно, при $\varphi_0 = \pi/2$ и $\lambda = 0$ справедлива теорема.

Теорема 2.8.5. *Если* $f(\varphi) \in C^1[0, \pi/2]$, $f(\pi/2) = 0$, *то существует единственное решение задачи* (2.8.46)–(2.8.50) *при* $\lambda = 0$ *и оно определяется рядами* (2.8.71) *и* (2.8.76), *где коэффициенты* f_k *находятся по формуле* (2.8.75).

Пусть далее в уравнении (2.8.45) $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq \lambda_{km}$, где λ_{km} — собственные значения спектральной задачи T_λ, $\varphi_0 = \pi$. На основании формулы [80, 81]
$$u(x,y) = v(\xi,\eta) = k_1 \int_0^\xi \frac{\overline{J}_{-\beta}[\sqrt{\lambda(\xi-t)(\eta-t)}\,]}{[(\xi-t)(\eta-t)]^{-\beta}} \nu(t)\,dt \quad (2.8.77)$$
решения задачи Дарбу для уравнения (2.8.45) при $\lambda \neq 0$ с граничными условиями: $u_y(x,0) = \nu(x)$, $0 < x < l$, $u|_{AC} = 0$, найдем соотношение, связывающее функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$:
$$u(x,0) = \tau(x) = k_1 \int_0^x (x-t)^{-2\beta}\, \overline{J}_{-\beta}[\sqrt{\lambda}\,(x-t)]\nu(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (2.8.78)$$

Тогда задача (2.8.46)–(2.8.50) сводится к нелокальной эллиптической задаче: *найти в области* D_+ *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям* (2.8.46)–(2.8.49) *и* (2.8.78).

В силу результатов п. 2.6.2 решение этой задачи будем искать в виде суммы ряда
$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k}{J_{p_k}(d)} \Big(\frac{r}{l}\Big)^{-\beta} J_{p_k}\Big(\frac{d}{l} r\Big) (\sin\varphi)^{1/2-\beta} \mathrm{P}^{\beta-1/2}_{p_k-1/2}(-\cos\varphi), \quad (2.8.79)$$
где f_k — неизвестные коэффициенты, $p_k = k - 1/4 - \beta/2$, $d = l\sqrt{\lambda}$, $d \neq d_{km}$.

Ряд (2.8.79) сходится равномерно на замкнутой области $\overline{D}_+$. Подчиняя этот ряд граничному условию (2.8.48), получим ряд, который совпадает с равномерно сходящимся на $[0,\pi]$ рядом (2.8.60). Поэтому коэффициенты f_k находятся по формуле (2.8.66). В силу асимптотической формулы (2.8.25) и оценки системы (2.8.67) ряд (2.8.79) сходится равномерно при $0 \leqslant r \leqslant l_1 < l$. На множестве $0 < l_0 \leqslant r \leqslant l_1 < l$ ряд (2.8.79) допускает почленное дифференцирование по переменным r и φ любое число раз.

Для построения решения задачи T в области D_- можно воспользоваться формулой (2.8.77). Для этого из формулы (2.8.79) следует найти $\nu(x) = u_y(x, 0+0)$ и подставить в формулу (2.8.77). Из-за возникающих громоздких вычислений поступим иначе. На основании построенной системы собственных функций (2.7.89) решение задачи (2.8.46)–(2.8.50) в области D_- будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C_k\Gamma(1/2+\rho_k)\Gamma(\rho_k+\beta)\cos\pi\beta}{J_{\rho_k}(d)\pi\Gamma(1+2\rho_k)}\left(\frac{\sigma}{l}\right)^{-\beta} J_{p_k}\left(\frac{d\sigma}{l}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{2\sigma}{x+\sigma}\right)^{\rho_k+\beta} F\left(\beta+\rho_k, \frac{1}{2}+\rho_k, 1+2\rho_k; \frac{2\sigma}{x+\sigma}\right) \quad (2.8.80)$$

с неизвестными пока коэффициентами C_k.

Из ряда (2.8.80) вычислим

$$u(x,0-0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\cos\beta\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{C_k\Gamma(\rho_k+\beta)}{J_{\rho_k}(d)\Gamma(\rho_k+1-\beta)}J_{\rho_k}\left(\frac{dx}{l}\right), \quad (2.8.81)$$

$$u_y(x,0-0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)(2\alpha l)^{2\beta}\cos\beta\pi}{\pi l}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{C_k}{J_{\rho_k}(d)}\left(\frac{x}{l}\right)^{\beta-1}J_{\rho_k}\left(\frac{dx}{l}\right). \quad (2.8.82)$$

Аналогичным образом найдем, исходя из формулы (2.8.79),

$$u(x,0+0) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{J_{\rho_k}(d)}J_{\rho_k}\left(\frac{dx}{l}\right)\lim_{\varphi\to 0}(\sin\varphi)^{1/2-\beta}\mathrm{P}^{\beta-1/2}_{\rho_k-1/2}(-\cos\varphi) =$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)2^{1/2-\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{J_{\rho_k}(d)\Gamma(1+\rho_k-\beta)\Gamma(1-\rho_k-\beta)}J_{\rho_k}\left(\frac{dx}{l}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)2^{1/2-\beta}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{J_{\rho_k}(d)}\frac{\sin(\rho_k+\beta)\pi\Gamma(\rho_k+\beta)}{\Gamma(1+\rho_k-\beta)}J_{\rho_k}\left(\frac{dx}{l}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)2^{1/2-\beta}\cos\frac{1+2\beta}{4}\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{f_k}{J_{\rho_k}(d)}\frac{\Gamma(\rho_k+\beta)}{\Gamma(\rho_k+1-\beta)}J_{\rho_k}\left(\frac{dx}{l}\right), \quad (2.8.83)$$

$$u_y(x,0+0) = \\ = \frac{(\alpha l)^{2\beta}}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{J_{\rho_k(d)}}\left(\frac{x}{l}\right)^{\beta-1}J_{\rho_k}\left(\frac{d}{l}x\right)\lim_{\varphi\to 0}\frac{d}{d\varphi}\left[\sin^{2\beta}\varphi\mathrm{P}^{\beta-1/2}_{\rho_k-1/2}(-\cos\varphi)\right] = \\ = \frac{(\alpha l)^{2\beta}2^{1/2+\beta}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta\right)\cos\frac{(1+2\beta)\pi}{4}}{\pi l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{f_k}{J_{\rho_k}(d)}\left(\frac{x}{l}\right)^{\beta-1}J_{\rho_k}\left(\frac{dx}{l}\right). \tag{2.8.84}$$

В силу (2.8.46), приравнивая соответствующие равенства (2.8.81) и (2.8.83) и (2.8.82) и (2.8.84) между собой, найдем

$$C_k = \frac{2^{1/2-\beta}\cos\frac{1+2\beta}{4}\pi}{\cos\beta\pi}(-1)^{k+1}f_k. \tag{2.8.85}$$

Теперь, подставляя (2.8.85) в ряд (2.8.80), получим решение задачи Т в области D_-:

$$u(x,y) = \frac{2^{1/2-\beta}\cos\frac{1+2\beta}{4}\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{f_k}{J_{p_k}(d)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\rho_k\right)\Gamma(\rho_k+\beta)}{\Gamma(1+2\rho_k)}\times \\ \times\left(\frac{\sigma}{l}\right)^{-\beta}J_{\rho_k}\left(\frac{d}{l}\sigma\right)\left(\frac{2\sigma}{x+\sigma}\right)^{\rho_k+\beta}F\left(\beta+\rho_k,\frac{1}{2}+\rho_k;1+2\rho_k;\frac{2\sigma}{x+\sigma}\right) = \\ = \frac{2\cos\frac{(1+2\beta)\pi}{4}}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{f_k}{J_{\rho_k}(d)}\frac{\Gamma(\rho_k+\beta)}{2^{2k}\Gamma(\rho_k+1)}\left(\frac{\sigma}{l}\right)^{-\beta}J_{\rho_k}\left(\frac{d\sigma}{l}\right)\times \\ \times\left(\frac{2\sigma}{x+\sigma}\right)^{\rho_k+\beta}F\left(\beta+\rho_k,\frac{1}{2}+\rho_k,1+2\rho_k;\frac{2\sigma}{x+\sigma}\right). \tag{2.8.86}$$

Ряд в правой части (2.8.86) сходится равномерно на замкнутой области $\overline{D}_-$ и на множестве $D_-\cup AB$ допускает почленное дифференцирование по переменным x и y любое число раз.

Таким образом, при $\varphi_0=\pi$ и $\lambda\neq\lambda_{nm}$ доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.8.6. *Если* $f(\varphi)\in C^1[0,\pi]$, $f(\pi)=0$, *то существует решение задачи* (2.8.46)–(2.8.50) *при* $\lambda\neq\lambda_{nm}$ *и оно определяется рядами* (2.8.79) *и* (2.8.86), *где коэффициенты* f_k *находятся по формуле* (2.8.65).

Отметим, что при написании данного параграфа использованы результаты работ [141, 143].

Глава 3

ПРИНЦИПЫ МАКСИМУМА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

В работах Л.И. Камынина и Б.Н. Химченко (см., например, [78, 79]) для эллиптических и параболических уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой получены наиболее точные условия на рассматриваемый оператор и геометрию границы, при которых справедливы классические принципы экстремума.

Для равномерно эллиптических уравнений второго порядка Н.С. Надирашвили [149, 150] показал, что в любой окрестности граничной экстремальной точки имеется граничная точка, в которой косая производная отлична от нуля. Этот результат существенно расширил, например, класс допустимых граничных поверхностей в теории единственности решения второй краевой задачи для равномерно эллиптических уравнений второго порядка.

Вместе с тем следует подчеркнуть, что для систем уравнений в частных производных экстремальные свойства решений изучены сравнительно мало [23, 53, 108, 120, 121, 125, 228, 238, 247, 255, 260, 263, 264, 266].

В третьей главе получены утверждения, которые представляют собой дальнейшее развитие ранее доказанного А.В. Бицадзе [23, с. 27] принципа максимума модуля решений одной эллиптической системы на другие классы систем дифференциальных уравнений и установлены новые принципы экстремума для различных типов систем уравнений в частных производных. Показаны также применения этих результатов при исследовании задачи Трикоми для систем уравнений смешанного типа.

§ 3.1. Принципы максимума модуля решений эллиптических систем второго порядка

В области D пространства $\mathbb{R}^m$ точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $m \geqslant 2$, рассмотрим систему

$$Lu \equiv \sum_{p,q=1}^{m} A^{pq} U_{pq} + \sum_{p=1}^{m} B^{q} U_{p} + CU = 0, \qquad (3.1.1)$$

где $A^{pq}(x)$, $B^q(x)$, $C(x)$ — заданные вещественные матрицы порядка $n \times n$, $n \geqslant 2$, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $U_p = \partial U/\partial x_p$, $U_{pq} = \partial^2 U/\partial x_p \partial x_q$, $A^{pq}(x) = A^{qp}(x)$, $x \in D$.

Введем вектор $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $e_i = u_i/|U|$, $|U|^2 = |U(x)|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2(x)$. Тогда $U = |U|e$ и система (3.1.1) принимает вид

$$L(|U|e) = \sum_{p,q} |U|_{pq} A^{pq} e + \sum_{p} |U|_p \Big(B^p e + 2 \sum_{q} A^{pq} e_q \Big) + |U| L e = 0.$$

Полученное векторное уравнение умножим на вектор e скалярно:

$$M(|U|) = (e, L|U|e) = \sum_{p,q} (e, A^{pq} e) |U|_{pq} + \\ + \sum_{p} |U|_p \Big[(e, B^p e) + 2 \sum_{q} (e, A^{pq} e_q) \Big] + (e, Le)|U| = 0. \quad (3.1.2)$$

Пусть коэффициенты уравнения (3.1.2) ограничены и квадратичная форма

$$\sum_{p,q} (e, A^{p,q} e) \xi_p \xi_q$$

неотрицательно определена в области $G = D \backslash \{x \in D \colon |U(x)| = 0\}$.

Под регулярным решением системы (3.1.1) в области D будем понимать функцию $U(x)$, удовлетворяющую условиям $U(x) \in C(\overline{D}) \cap \cap C^2(D)$, $LU \equiv 0$ в D.

Теорема 3.1.1. *Если* $(e, Le) < 0$ *в области* G, *то модуль* $|U(x)|$ *регулярного в области* D *решения* $U(x)$ *системы* (3.1.1) *не может достигать положительного локального максимума ни в одной точке области* D.

Теорема 3.1.2. *Пусть*: 1) *оператор* M *локально равномерно эллиптичен и* $(e, Le) \leqslant 0$ *в* G; 2) $U(x)$ — *регулярное в* D *решение системы* (3.1.1) *и* $U(x) \not\equiv \mathrm{const}$. *Тогда модуль* $|U(x)|$ *не может достигать положительного локального максимума ни в одной точке области* D.

Теорема 3.1.3. *Пусть*: 1) *выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 3.1.2; 2) $\max\limits_{\overline{D}} |U(x)| = |U(\overline{x})| > 0$ *и* $\overline{x} \in \partial D$; 3) *граница* ∂D *области* D *удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри. Тогда для любого направления* l, *исходящего из точки* $\overline{x}$ *и удовлетворяющего условию* $\cos(l, N) > 0$, *справедливо неравенство*

$$\left. \underline{\frac{\partial |U|}{\partial l}} \right|_{x = \overline{x}} < 0,$$

где N *означает направление внутренней нормали к* ∂D, $\underline{\dfrac{\partial |U|}{\partial l}}$ — *нижняя производная функции* $|U(x)|$ *в направлении вектора* l.

Справедливость теорем 3.1.1–3.1.3 следует из того, что уравнение (3.1.2) в области G является уравнением эллиптического типа относительно функции $|U(x)|$. Поэтому в силу наложенных в этих теоремах условий для уравнения (3.1.2) в G справедливы соответствующие известные принципы экстремума [243, 157, 249]. Для примера рассмотрим доказательство теоремы 3.1.1. Пусть в некоторой точке $x_0 \in D$ функция $|U(x)|$ достигает положительного максимума. Тогда в некоторой окрестности $V(x_0)$ точки x_0 функция $|U(x)| > 0$, и она является регулярным решением уравнения (3.1.2). Поскольку уравнение (3.1.2) в $V(x_0)$ является уравнением эллиптического типа и его коэффициент при $|U|$ отрицателен, $(e, Le) < 0$, то в силу принципа максимума для эллиптических уравнений модуль $|U|$ не может в $V(x_0)$ достигать своего положительного максимума.

Определение 3.1.1. Будем говорить, что граница ∂D области D удовлетворяет условию конуса, если существуют числа $H > 0$, $\alpha \in \in (0, \pi/2)$ и непрерывное единичное векторное поле $k(x)$ на ∂D такие, что для любой точки $x \in \partial D$ прямой круговой конус с вершиной в точке x, высотой H, углом раствора 2α и осью, направленой по $k(x)$, целиком лежит в $\overline{D}$.

Например, условие конуса выполнено для области с липшицевой границей и, тем более, при $\partial D \in C^1$.

Теорема 3.1.4. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 3.1.3 *и граница области* D *удовлетворяет условию конуса. Тогда для любого* $\varepsilon \in (0, \alpha)$ *в любой окрестности* $V(\overline{x}) \subset \partial D$ *точки* $\overline{x}$ *найдется точка* $x' \in V(\overline{x})$ *такая, что для любого вектора* $l(x')$, *образующего с вектором* $k(x')$ *угол, не больший* $\alpha - \varepsilon$, *справедливо неравенство*

$$\left.\frac{\partial|U|}{\partial l}\right|_{x=x'} < 0.$$

Справедливость этой теоремы следует из результатов Н.С. Надирашвили [149, 150] и теорем 3.1.2–3.1.3.

Теперь покажем, что существуют системы, для которых выполнены условия теорем 3.1.1–3.1.4. Пусть

$$A^{pq} = (a_{ij}^{pq}), \quad B^p = (b_{ij}^p), \quad C = (c_{ij}), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\triangle U + C(x)U = 0, \tag{3.1.3}$$

где $C(x)$ — неположительно определенная квадратная матрица. Система (3.1.3) получается из (3.1.1), когда $a_{ij}^{pq} \equiv 0$ при $i \neq j$ и $p \neq q$, $a_{ii}^{pp} \equiv 1$

при $i = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$; $b^p_{ij} \equiv 0$ при всех i, j и p. В этом случае

$$\sum_{p,q=1}^{m} (e, A^{pq} e)\xi_p \xi_q = \sum_{p=1}^{m} (e, e)\xi_p^2 = \sum_{p=1}^{m} \xi_p^2 = |\xi|^2,$$

$$(e, Le) = \sum_{p=1}^{m} (e, e_{pp}) + (e, Ce) = \\ = (e, Ce) - |U|^{-4} \sum_p \left[|U|^2 |U_p|^2 - (U, U_p)^2 \right] \leqslant 0,$$

так как $(e, Ce) \leqslant 0$ и $|(U, U_p)| \leqslant |U||U_p|$.

Таким образом, для системы (3.1.3) справедливы утверждения теорем 3.1.2–3.1.4.

Пример 2. В области D рассмотрим систему

$$\sum_{p=1}^{m} [\alpha^p(x) U_{pp} + \beta^p(x) U_p] + C(x)U = 0, \tag{3.1.4}$$

где $\alpha^p(x) > 0$, $\beta^p(x)$ — числовые функции, а $C(x)$ — квадратная отрицательно определенная матрица. Для системы (3.1.4) $a^{pq}_{ij} \equiv 0$ при $i \neq j$ и $p \neq q$, $a^{pp}_{ii} = \alpha^p(x)$, $b^p_{ij}(x) \equiv 0$ при $i \neq j$, $b^p_{ii}(x) = \beta^p(x)$. Тогда

$$\sum_{p,q} (e, A^{pq} e)\xi_p \xi_q = \sum_p \alpha^p(x) \xi_p^2 > 0 \quad \text{при} \quad |\xi| > 0,$$

$$(e, Le) = \sum_p \alpha^p (e, e_{pp}) + \sum_p \beta^p (e, e_p) + (e, Ce) = \\ = (e, Ce) - |U|^{-4} \sum_p \alpha^p \left[|U|^2 |U_p|^2 - (U, U_p)^2 \right] < 0.$$

Следовательно, для системы (3.1.4) справедливы теоремы 3.1.1–3.1.4.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\sum_{p,q} \alpha^{pq}(x) U_{pq} + \sum_p \beta^p(x) U_p + C(x)U = 0, \tag{3.1.5}$$

где α^{pq}, β^p — заданные в области D числовые функции, $C(x)$ — квадратная матрица порядка n. Для системы (3.1.5)

$$\sum_{p,q} (e, A^{pq} e)\xi_p \xi_q = \sum_{p,q} \alpha^{pq}(x) \xi_p \xi_q,$$

$$(e, Le) = (e, Ce) - |U|^{-4} \sum_{p,q} \alpha^{pq}(x) \left[|U|^2(U_p, U_q) - (U, U_p)(U, U_q)\right].$$

Отсюда легко заметить, что если $\sum\limits_{p,q} \alpha^{pq}(x)\xi_p\xi_q \geqslant 0$ и $(e, Ce) < 0$ в области G, то для системы (3.1.5) справедлива теорема 3.1.1. Если $\sum\limits_{p,q} \alpha^{pq}(x)\xi_p\xi_q \geqslant \nu|\xi|^2$, $\nu = \mathrm{const} > 0$ и $(e, Ce) \leqslant 0$ в G, то для системы (3.1.5) справедливы теоремы 3.1.2–3.1.4.

Пример 4. В области D рассмотрим нелинейную систему

$$\sum_{p,q} \alpha^{pq}(x, U)U_{pq} + \sum_{p} \beta^p(x, U, U_x)U_p + \beta(x, U, U_x)U = 0, \qquad (3.1.6)$$

где α^{pq}, β^p — числовые функции, β — квадратная матрица порядка n. В этом случае

$$\sum_{p,q}(e, A^{pq}e)\xi_p\xi_q = \sum_{p,q} \alpha^{pq}(x, U)\xi_p\xi_q,$$

$$(e, Le) = (e, \beta e) - |U|^{-4} \sum_{p,q} \alpha^{pq}(x, U) \left[|U|^2(U_p, U_q) - (U, U_p)(U, U_q)\right].$$

Если $\sum\limits_{p,q} \alpha^{pq}(x, U)\xi_p\xi_q \geqslant 0$ и $(e, \beta e) < 0$ в G, то для системы (3.1.6) справедлива теорема 3.1.1, которая получена в работе [111, с. 497]. Если $\sum\limits_{p,q} \alpha^{pq}(x, U)\xi_p\xi_q \geqslant \nu(U)|\xi|^2$, $\nu(U) \geqslant \delta > 0$ и $(e, \beta e) \leqslant 0$ в области G, то для системы (3.1.6) справедливы теоремы 3.1.2–3.1.4.

Замечание 3.1.1. В [23] впервые А.В. Бицадзе установил справедливость теоремы 3.1.1 для системы (3.1.4) несколько иным способом при указанных в примере 2 ограничениях. В работах [263, 264] теорема 3.1.1 доказана для частных случаев системы (3.1.1) при условии, что $(e, Le) < 0$, $\sum\limits_{p,q}(e, A^{pq}e)\xi_p\xi_q > 0$ и $|U(x)| > 0$ в области D. Теорема 3.1.1 для системы (3.1.5) при $m = n = 2$, $\alpha^{pq}(x) \equiv 0$ при $p \neq q$ и $\beta^p(x) \equiv 0$ доказана в [1]. Теорема 3.1.3 сформулирована в [266] для системы (3.1.4) при $\alpha^p(x) = 1$. Отметим также, что в работах [53, 108, 228] установлен некий интегральный признак максимума модуля регулярных решений некоторых параболических систем в цилиндрической области. В [120, 121] получены оценки решения задачи Коши через начальную функцию.

Выясним, насколько существенны условия теорем 3.1.1–3.1.2.

Пример 5. Рассмотрим в квадрате $D = \{(x_1, x_2) \in R^2\colon\ 0 < x_1, x_2 < \pi/k,\ k > 0\}$ систему, записанную по компонентам искомого решения $U = (u_1, u_2)$,

$$\begin{cases} u_{111} + u_{122} + k^2 u_1 + k^2 u_2 = 0, \\ u_{211} + u_{222} + k^2 u_1 + k^2 u_2 = 0. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Для этой системы

$$\sum_{p,q=1}^{2} (e, A^{pq} e)\xi_p \xi_q = \sum_{p=1}^{2} \xi_p^2 = |\xi|^2,$$

$$(e, Le) = (e, Ce) - |U|^{-4} \sum_{p=1}^{2} \big[|U|^2 |U_p|^2 - (U, U_p)^2\big]. \tag{3.1.8}$$

Система (3.1.7) имеет решение $u_1(x_1, x_2) = u_2(x_1, x_2) = \sin kx_1 \times \sin kx_2$. Легко видеть, что модуль $|U(x_1, x_2)| = \sqrt{2}\,\sin kx_1 \cdot \sin kx_2$ достигает своего наибольшего положительного значения в $\overline{D}$ в точке $(\pi/2k, \pi/2k) \in D$.

На найденных решениях u_1 и u_2 соотношение (3.1.8) равно

$$(e, Le) = (e, Ce) = k^2(e_1 + e_2)^2 = 2k^2 > 0.$$

Следовательно, нарушение условия $(e, Le) \leqslant 0$ существенно влияет на справедливость этих теорем.

Пример 6. В круге $D = \{(x_1, x_2) \in R^2\colon\ x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$ рассмотрим известную систему А.В. Бицадзе [23, с. 133]

$$\begin{cases} u_{111} - u_{122} - 2u_{212} = 0, \\ u_{211} - u_{222} + 2u_{112} = 0. \end{cases} \tag{3.1.9}$$

В качестве решения системы (3.1.9) подходят функции $u_1(x_1, x_2) = u_2(x_1, x_2) = r^2 - x_1^2 - x_2^2$. Отсюда видно, что модуль $|U| = \sqrt{2}\,(r^2 - x_1^2 - x_2^2)$ достигает своего глобального положительного максимума в центре круга D, т. е. внутри области D. Это связано с тем, что квадратичная форма $\sum\limits_{p,q} (e, A^{pq} e)\xi_p \xi_q = \xi_1^2 - \xi_2^2$, вообще говоря, не является неотрицательно определенной в D при любых $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $|\xi| > 0$. При этом условие $(e, Le) \leqslant 0$ на найденных решениях не нарушено.

Таким образом, нарушение хотя бы одного из условий теорем 3.1.1–3.1.2 влечет за собой несправедливость заключений этих теорем.

На основании установленных выше принципов максимума нетрудно получить единственность решения основных краевых задач для системы (3.1.1) и установить ряд качественных свойств решений [97, 106, 113].

§ 3.2. Покомпонентный принцип экстремума для одного класса эллиптических систем

Рассмотрим линейную систему второго порядка

$$L_i(U) \equiv a_{ipq}(x)u_{ix_px_q} + b_{ip}(x)u_{ix_p} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(x)u_k = f_i(x) \qquad (3.2.1)$$

в области D пространства $\mathbb{R}^m$ точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $m \geqslant 2$, где индексы p и q означают суммирование по этим индексам от 1 до m, $i = \overline{1, n}$, $n \geqslant 2$; $a_{ipq}(x)$, $b_{ip}(x)$ и $c_{ik}(x)$ — заданные в области D вещественные локально ограниченные функции, причем для каждого i: $a_{ipq}(x) = a_{iqp}(x)$ и квадратичная форма $a_{ipq}\xi_p\xi_q \geqslant 0$ в области D при всех $\xi \in \mathbb{R}^m$ и $|\xi| > 0$; функции f_i определены в D, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Под регулярным в области D решением системы (3.2.1) будем понимать функцию $U(x)$, удовлетворяющую условиям

$$U(x) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D), \quad L_iU(x) \equiv f_i(x) \text{ в } D \text{ при всех } i = \overline{1, n}.$$

Теорема 3.2.1. *Пусть в области D*

$$c_{ik}(x) \geqslant 0 \ \textit{при}\ k \neq i, \quad c_{ii}(x) + \sum_{k \neq i} c_{ik}(x) < 0, \quad f_i(x) \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \quad (3.2.2)$$

или

$$c_{ik}(x) \geqslant 0 \ \textit{при}\ k \neq i, \quad c_{ii}(x) + \sum_{k \neq i} c_{ik}(x) \leqslant 0, \quad f_i(x) > 0 \ (< 0) \quad (3.2.3)$$

и $U(x)$ — регулярное в области D решение системы (3.2.1). *Тогда если $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i(x) < 0)$, то $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i)$ достигается только на границе области D.*

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x) = u_j(\overline{x}) > 0$. Допустим, что $\overline{x} \in D$. Тогда в точке $\overline{x}$ в силу условий (3.2.2) будем иметь

$$L_j[U(\overline{x})] = a_{jpq}(\overline{x})\frac{\partial^2 u_i(\overline{x})}{\partial x_p \partial x_q} + \sum_{k \neq j}^{n} c_{jk}(\overline{x})[u_k - u_j(\overline{x})] + \\ + u_j(\overline{x})\left(c_{jj} + \sum_{k \neq j} c_{jk}\right) < 0.$$

Но, с другой стороны, $L_j[U(\overline{x})] = f_j(\overline{x}) \geqslant 0$. Полученное противоречие и доказывает справедливость принципа максимума с условиями (3.2.2). Аналогично доказывается и принцип максимума при выполнении условий (3.2.3). Для доказательства принципа минимума достаточно в силу линейности системы (3.2.1) ввести в рассмотрение функцию $-U(x)$.

Теорема 3.2.2. *Пусть в области* D

$$c_{ii}(x)+\sum_{k\neq i}|c_{ik}(x)|<0,\;\; f_i(x)\equiv 0 \tag{3.2.4}$$

и $U(x)$ *— регулярное в области* D *решение системы* (3.2.1). *Тогда* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}}|u_i(x)|>0$ *достигается только на границе области* D.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}}|u_i(x)|=|u_j(\overline{x})|>0$. В силу линейности системы (3.2.1) и $f_i\equiv 0$ можно считать, что $u_j(\overline{x})>0$. Тогда $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x)=u_j(\overline{x})$ и $|u_i(x)|\leqslant u_j(\overline{x})$ в $\overline{D}$. Допустим, что $\overline{x}\in$ $\in D$. Тогда в этой точке в силу условий (3.2.4) получим

$$L_j[U(\overline{x})]=a_{jpq}(\overline{x})\frac{\partial^2 u_j(\overline{x})}{\partial x_p\partial x_q}+c_{jj}u_j(\overline{x})+\sum_{k\neq j}c_{jk}u_k(\overline{x})\leqslant$$
$$\leqslant a_{jpq}(\overline{x})\frac{\partial^2 u_j(\overline{x})}{\partial x_p\partial x_q}+c_{jj}u_j(\overline{x})+$$
$$+\sum_{k\neq j}|c_{jk}||u_k(\overline{x})|\leqslant a_{jpq}(\overline{x})\frac{\partial^2 u_j(\overline{x})}{\partial x_p\partial x_q}+u_j(\overline{x})\Bigl(c_{jj}+\sum_{k\neq j}|c_{jk}|\Bigr)<0,$$

что противоречит $L_j[U(\overline{x})]=0$.

В последующих теоремах будем предполагать, что оператор L_i при каждом i локально равномерно эллиптичен в D.

Теорема 3.2.3. *Пусть в области* D

$$c_{ik}(x)\geqslant 0 \text{ при } k\neq i,\quad c_{ii}(x)+\sum_{k\neq i}c_{ik}(x)\leqslant 0,\quad f_i(x)\geqslant 0\ (\leqslant 0) \tag{3.2.5}$$

и $U(x)$ *— регулярное в* D *решение системы* (3.2.1); *при этом функции* $u_i(x)$ *не равны постоянной в любой подобласти области* D. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x)=u_j(\overline{x})>0$ $\bigl(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i(x)=u_j(\overline{x})<0\bigr)$, *то* $u_j(\overline{x})$ *достигается только на границе области* D.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\omega(x)=$ $=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$, где $\omega_i(x)=u_i(x)-u_j(\overline{x})$, которая в области D является регулярным решением системы

$$L_i(\omega)=f_i-u_j(\overline{x})\sum_{k=1}^{n}c_{ik}(x);$$

и $\omega_i(x) \leqslant 0$ в $\overline{D}$, $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} \omega_i(x) = \omega_j(\overline{x}) = 0$. Отсюда легко заметить, что функция $\omega_j(x)$ является регулярным решением эллиптического уравнения

$$M_j(\omega_j) \equiv a_{jpq}\omega_{jx_px_q} + b_{jp}\omega_{jx_p} + c_{jj}\omega_j = g_j, \tag{3.2.6}$$

где

$$g_j = f_j - u_j(\overline{x}) \sum_{k=1}^{n} c_{jk} - \sum_{k \neq j} c_{jk}\omega_k.$$

В силу условий (3.2.5) правая часть уравнения (3.2.6) неотрицательна в области D. Пусть точка $\overline{x} \in D$. Поскольку оператор M_j локально равномерно эллиптичен и его коэффициенты локально ограничены в D, то в силу результатов Хопфа [249] функция $\omega_j(x) \equiv 0$, чего быть не может. Значит, $\overline{x} \in \partial D$.

Теорема 3.2.4. *Пусть в области D*

$$c_{ii}(x) + \sum_{k \neq i} |c_{ik}(x)| \leqslant 0, \quad f_i(x) \equiv 0 \tag{3.2.7}$$

и $U(x)$ — регулярное решение системы (3.2.1); *при этом функции $u_i(x)$ не равны постоянной в любой подобласти области D. Тогда $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} |u_i(x)| > 0$ достигается только на границе области D.*

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} |u_i(x)| = |u_j(\overline{x})| > 0$. Не теряя общности, будем считать, что $u_j(\overline{x}) > 0$. Тогда $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x) = u_j(\overline{x})$ и $|u_i(x)| \leqslant u_j(\overline{x})$ в $\overline{D}$. Теперь, рассуждая аналогично доказательству теоремы 3.2.3, введем новую функцию $\omega(x)$. При этом функция $\omega_j(x) = u_j(x) - u_j(\overline{x})$ является решением эллиптического уравнения (3.2.6), правая часть которого в силу условия (3.2.7) в области D неотрицательна. В самом деле,

$$g_j(x) = -u_j(\overline{x})c_{jj} - \sum_{k \neq j} c_{jk}[u_j(\overline{x}) + \omega_k] \geqslant -u_j(\overline{x})\Bigg(c_{jj} + \sum_{k \neq j} |c_{jk}|\Bigg) \geqslant 0.$$

Если теперь точка $\overline{x} \in D$, то в силу результатов [249] функция $\omega_j(x) \equiv 0$ в D, что невозможно.

Замечание 3.2.1. В теоремах 3.2.1–3.2.4 условия на коэффициенты системы (3.2.1) существенны, ибо их нарушение влечет за собой несправедливость утверждений этих теорем. В качестве первого примера рассмотрим систему (3.1.7) в квадрате D (см. пример 6 § 3.1). Для этой системы

$$c_{ij} = k^2 > 0 \text{ при } i \neq j, \quad c_{ii} + \sum_{i \neq j} c_{ij} = 2k^2 > 0.$$

Решения $u_1 = u_2 = \sin kx_1 \sin kx_2$ системы (3.1.7) достигают своего наибольшего значения внутри квадрата D.

В качестве второго примера рассмотрим в области $D \subset \mathbb{R}^2$, содержащей в себе начало координат, систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + 4\alpha u_1 - 4\alpha^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) u_2 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - 4\alpha^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) u_1 + 4\alpha u_2 = 0, \end{cases} \tag{3.2.8}$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$, для которой

$$c_{ii} + \sum_{k \neq i} |c_{ik}| = 4\alpha + 4\alpha^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) > 0.$$

Система (3.2.8) имеет решение $u_1 = u_2 = \exp\left[-\alpha\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]$. Эти функции u_1 и u_2 достигают своего положительного глобального максимума внутри области D.

Замечание 3.2.2. Если в теореме 3.2.3 $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}(x) \equiv 0$ в области D при любом i, то нет необходимости в условии $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i(x) < 0)$.

Следствие 3.2.1. *Пусть коэффициенты системы* (3.2.1) *в области D удовлетворяют условиям теоремы* 3.2.1 *или* 3.2.3 *и $U(x)$ — регулярное решение системы* (3.2.1). *Тогда если $u_i(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ на ∂D и $f_i(x) \leqslant 0$ $(\geqslant 0)$, то $u_i(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ в области D.*

Доказательство. Допустим, что существуют $i = s$ и точка $x_0 \in$ $\in D$ такие, что $u_s(x_0) < 0$. Тогда $\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i(x) = u_j(\overline{x}) < 0$, и в силу принципа минимума (см. теорему 3.2.1 или 3.2.3) точка $\overline{x} \in \partial D$. Но, с другой стороны, по условию $u_j(\overline{x}) \geqslant 0$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Следствие 3.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2.1 *или* 3.2.3 *и область D является ограниченной. Тогда для любого $x \in \overline{D}$ и любого i, $i = \overline{1, n}$,*

$$|u_i(x)| \leqslant \max_i \max_{\partial D} |u_i(x)| + K \max_{\overline{D}} |f_i(x)|,$$

где $K = \mathrm{const} > 0$, которые зависят от коэффициентов системы (3.2.1) *и диаметра области D.*

Следствие 3.2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2.2 *или* 3.2.4. *Тогда для любого* $x \in D$ *и любого* i

$$|u_i(x)| \leqslant \max_i \max_{\partial D} |u_i(x)|.$$

Замечание 3.2.3. В работе [260] для однородной системы (3.2.1) получено утверждение типа следствия 3.2.1 несколько иными рассуждениями.

Из следствий 3.2.2 и 3.2.3 вытекает единственность и устойчивость решения задачи Дирихле для системы (3.2.1). Следствие 3.2.1 может быть использовано при доказательстве существования неотрицательных решений и спектра этой системы [233, 234, 238].

Теорема 3.2.5. *Пусть*: 1) *выполнены условия теоремы* 3.2.3; 2) $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x) = u_j(\overline{x}) > 0$ $(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i(x) = u_j(\overline{x}) < 0)$, $\overline{x} \in \partial D$; 3) *граница* ∂D *области* D *удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри. Тогда для любого направления* l, *исходящего из точки* $\overline{x}$ *и удовлетворяющего условию* $\cos(l, N) > 0$, *справедливо неравенство*

$$\frac{\partial U_j(\overline{x})}{\underline{\partial l}} < 0 \quad \left(\frac{\partial \overline{U_j}(\overline{x})}{\partial l} > 0\right). \tag{3.2.9}$$

Теорема 3.2.6. *Пусть*: 1) *выполнены условия теоремы* 3.2.4; 2) $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} |u_i(x)| = |u_j(\overline{x})| > 0$ *и* $\overline{x} \in \partial D$; 3) *граница* ∂D *области* D *удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри. Тогда для любого направления* l, *исходящего из точки* $\overline{x}$ *и удовлетворяющего условию* $\cos(l, N) > 0$, *справедливо неравенство*

$$\frac{\partial |U_j(\overline{x})|}{\underline{\partial l}} < 0.$$

Схема доказательства теорем 3.2.5 и 3.2.6 примерно одна и та же, поэтому остановимся на доказательстве теоремы 3.2.5. Как и в случае доказательства теоремы 3.2.3, введем вспомогательную функцию $\omega(x) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, где $\omega_j(x) = u_j(x) - u_j(\overline{x})$ является регулярным решением эллиптического уравнения (3.2.6). Поскольку оператор M_j, определенный левой частью уравнения (3.2.6), локально равномерно эллиптичен и его коэффициенты локально ограничены в D, а правая часть (3.2.16) неотрицательна в области D, то в силу граничного принципа [23, 243] в точке $\overline{x} \in \partial D$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial \omega_j(\overline{x})}{\underline{\partial l}} < 0 \quad \left(\frac{\partial \overline{\omega_j}(\overline{x})}{\partial l} > 0\right).$$

Отсюда уже следует неравенство (3.2.9).

В теоремах 3.2.5 и 3.2.6 условие 3) о гладкости границы ∂D области D является довольно сильным требованием. Поэтому при изучении краевых задач представляет интерес доказательство аналогов теорем 3.2.5 и 3.2.6 при более слабых ограничениях на гладкость границы области D.

Теорема 3.2.7. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 3.2.5 *и граница области* D *удовлетворяет условию конуса* (*см. определение* 3.1.1). *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0, \alpha)$ *в любой окрестности* $V \subset \partial D$ *точки* $\overline{x}$ *найдется точка* $x' \in V$ *такая, что для любого вектора* l, *исходящего из точки* x' *и образующего с вектором* $k(x')$ *угол, не больший, чем* $\alpha - \varepsilon$, *справедливо неравенство*

$$\frac{\partial U_j(x')}{\partial l} < 0 \quad \Big(\frac{\partial \overline{U_j}(x')}{\partial l} > 0\Big).$$

Теорема 3.2.8. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 3.2.6 *и граница области* D *удовлетворяет условию конуса. Тогда для любого* $\varepsilon \in (0, \alpha)$ *в любой окрестности* $V \subset \partial D$ *точки* $\overline{x}$ *найдется точка* $x' \in V$ *такая, что для любого вектора* l, *исходящего из точки* x' *и образующего с вектором* $k(x')$ *угол, не больший, чем* $\alpha - \varepsilon$, *справедливо неравенство*

$$\frac{\partial |U_j(x')|}{\partial l} < 0. \tag{3.2.10}$$

Остановимся на доказательстве теоремы 3.2.8. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} |u_i(x)| = |u_j(\overline{x})| > 0$ и, не теряя общности, будем считать, что $u_j(\overline{x}) > 0$. Тогда $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x) = u_j(\overline{x})$ и $|u_i(x)| < u_j(\overline{x})$ в D и $\overline{x} \in \partial D$. Теперь введем новую функцию $\omega(x) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. При этом функция $\omega_j(x) = u_j(x) - u_j(\overline{x})$ является решением эллиптического уравнения (3.2.6), правая часть которого (см. доказательство теоремы 3.2.4) в области D неотрицательна. По условию оператор M_j локально эллиптичен и его коэффициенты ограничены в области D. Тогда на основании результатов Н.С. Надирашвили [149, 150] в любой окрестности $V(\overline{x}) \subset \partial D$ точки $\overline{x}$ максимума функции $\omega_j(x)$ найдется точка $x' \in V$ такая, что

$$\frac{\partial \omega_j(x')}{\partial l} < 0. \tag{3.2.11}$$

Из оценки (3.2.11) нетрудно получить (3.2.10).

В качестве примера применения теорем 3.2.7 и 3.2.8 рассмотрим вопрос о единственности решения задачи Неймана для системы (3.2.1) в области D, когда граница ∂D удовлетворяет условию конуса. Ранее эти вопросы для одного эллиптического уравнения в зависимости от гладкости границы области D изучались в работах [78, 91, 149, 157, 243, 249].

Теорема 3.2.9. *Пусть*: 1) $U(x)$ — *регулярное в* D *решение однородной системы* (3.2.1); 2) *граница* ∂D *области* D *удовлетворяет условию конуса*; 3) *для некоторого* $\varepsilon \in (0, \alpha)$ *на* ∂D *задано единичное векторное поле* l *такое, что угол между векторами* $k(x)$ *и* $l(x)$, *исходящими из точки* $x \in \partial D$, *не превосходит* $\alpha - \varepsilon$; 4) *в каждой точке* $x \in \partial D$ *существует производная* $\partial U/\partial l$ *и* $\partial U/\partial l = 0$; 5) *коэффициенты системы удовлетворяют условиям теоремы* 3.2.3 *или* 3.2.4. *Тогда*: *если определитель матрицы* $(c_{ik}(x))$ *равен нулю в области* D, *то* $U(x) = \text{const}$; *если же определитель матрицы* $(c_{ik}(x))$ *отличен от нуля, хотя бы в одной точке области* D, *то* $U(x) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $U(x) \not\equiv \text{const}$ в D и для определенности коэффициенты системы (3.2.1) удовлетворяют условиям теоремы 3.2.3. Тогда $\max\limits_{i} \max\limits_{\overline{D}} u_i(x) = u_j(\overline{x}) > 0$, и в силу теоремы 3.2.3 точка $\overline{x} \in \partial D$. На основании теоремы 3.2.7 в любой окрестности $V \subset \partial D$ точки $\overline{x}$ существует точка $x' \in V$ такая, что $\partial u_j(x')/\partial l < 0$. А это противоречит условию $\partial u_j(x')/\partial l = 0$. Следовательно, $U(x) \equiv \text{const}$. Тогда из системы (3.2.1) получим

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(x) u_k(x) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.2.12}$$

Как известно из курса алгебры, если определитель системы (3.2.12) отличен от нуля хотя бы в одной точке области D, то $u_i(x) \equiv 0$ при всех $i = \overline{1, n}$. Если же определитель матрицы $(c_{ik}(x))$ равен нулю в области D, то система (3.2.12) имеет нетривиальное решение.

§ 3.3. Принцип максимума модуля решений одного класса гиперболических систем

Рассмотрим систему

$$L_0 U \equiv U_{\xi\eta} + a(\xi, \eta) U_\xi + b(\xi, \eta) U_\eta + c(\xi, \eta) U = 0, \tag{3.3.1}$$

где a, b — числовые функции, c — квадратная матрица из числовых функций $c_{ik}(\xi, \eta)$, $i, k = \overline{1, n}$, $n \geqslant 2$; $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, в области Δ, ограниченной отрезками A_0B_0, A_0C_0 и C_0B_0, $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (l, l)$, $C_0 = (0, l)$, $l > 0$.

Пусть $\alpha = ab$, $\beta = \exp \int b d\xi$, $h_i = a_\xi + ab - c_{ii}$, $|U| = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2(\xi, \eta)\right]^{1/2}$, $(U, V) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i v_i$ — скалярное произведение.

Предположим, что коэффициенты системы (3.3.1) a, b, c_{ik} и a_ξ непрерывны на $\Delta \cup A_0C_0$ и при $(\xi, \eta) \in \Delta$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\alpha(\xi,\eta) - \int_0^{\xi} \beta(t,\eta) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(h_i^2 + \sum_{k \neq i}^{n} c_{ik}^2 \right)}\; dt > 0; \tag{3.3.2}$$

$$\begin{cases} h_i = a_\xi + ab - c_{ii} = a_\xi + ab - c_0 = h, \\ \alpha(\xi,\eta) - \int_0^{\xi} \beta(t,\eta) \left[|h| + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i}^{n} c_{ik}^2}\; \right] dt > 0. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Под регулярным решением системы (3.3.1) в области Δ будем понимать вектор-функцию $U(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям: 1) $U(\xi,\eta) \in C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta)$, $U_{\xi,\eta} \in C(\Delta)$, $L_0 U \equiv 0$ в Δ; 2) производная U_η непрерывна на множестве $\Delta \cup A_0 C_0$.

Теорема 3.3.1. *Пусть коэффициенты системы* (3.3.1) *в области Δ удовлетворяют отмеченным выше условиям гладкости и условию* (3.3.2) *или* (3.3.3) *и $U(\xi,\eta)$ — регулярное решение системы* (3.3.1), *равное нулю на характеристике A_0C_0. Тогда если $\max\limits_{\overline{\Delta}} |U(\xi,\eta)| > 0$, то он достигается на $\overline{A_0B_0}$.*

Доказательство. В области Δ рассмотрим тождество

$$\beta L_0 U = (\beta U_\eta + \alpha U)_\xi - \beta \widetilde{h} U \equiv 0,$$
$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} h_1 & -c_{12} & \dots & -c_{1n} \\ -c_{21} & h_2 & \dots & -c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \dots & h_n \end{pmatrix}. \tag{3.3.4}$$

Интегрируя тождество (3.3.4) по отрезку NM прямой $\eta = \mathrm{const}$, принадлежащему Δ, получим

$$(\beta U_\eta + \alpha U) \Big|_N^M = \int_{NM} \beta \widetilde{h} U \, d\xi. \tag{3.3.5}$$

Отметим, что в равенстве (3.3.5) отрезок NM может принадлежать не только области Δ, но и $\Delta \cup A_0C_0$. Пусть $\max\limits_{\overline{\Delta}} |U(\xi,\eta)| = |U(Q)| > 0$. Допустим противное: точка $Q \notin \overline{A_0B_0}$. Тогда $Q \in \Delta \cup C_0B_0$. Рассмотрим случай, когда $Q \in \Delta$. Из точки Q проведем отрезок характеристики $\eta = \mathrm{const}$ до пересечения с характеристикой $\xi = 0$ в точке P. В равенстве (3.3.5) в качестве отрезка NM возьмем PQ и умножим его на $U(Q)$ скалярно. Тогда будем иметь

$$\beta(Q)\,(U(Q),U_\eta(Q))+\alpha(Q)|U(Q)|^2=$$
$$=\left(U(Q),\int\limits_{PQ}\beta\widetilde{h}U\,d\xi\right)=\int\limits_{PQ}\beta(U(Q),\widetilde{h}U)\,d\xi.$$

Отсюда

$$\beta(Q)|U(Q)||U(Q)|_\eta\leqslant-\alpha(Q)|U(Q)|^2+\int\limits_{PQ}\beta|U(Q)||\widetilde{h}U|d\xi\leqslant$$
$$\leqslant-|U(Q)|^2\left[\alpha(Q)-\int\limits_{PQ}\beta\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(h_i^2+\sum_{k\neq i}^n c_{ik}^2\right)}\,d\xi\right],\quad(3.3.6)$$

так как

$$|\widetilde{h}U|\leqslant|U||\widetilde{h}|\leqslant|U(Q)\left[\sum_{i=1}^n\left(h_i^2+\sum_{k\neq i}^n c_{ik}^2\right)\right]^{1/2}.$$

Из оценки (3.3.6) в силу условия (3.3.2) следует, что производная $|U(Q)|_\eta<0$. Но это противоречит тому, что в точке $Q\in\Delta$ максимума функции $|U(\xi,\eta)|$ производная $|U(Q)|_\eta=0$. Следовательно, точка $Q\notin\Delta$.

Если $Q\in B_0C_0$, то, рассуждая аналогично концовке доказательства теоремы 1.2.1 гл. 1, снова получим противоречие.

Пусть теперь выполнено условие (3.3.3). В этом случае в области Δ рассмотрим тождество

$$\beta L_0U=(\beta U_\eta+\alpha U)_\xi-\beta hU+\beta\,\widetilde{c}\,U=0,$$

$$\widetilde{c}=\begin{pmatrix}0&c_{12}&\dots&c_{1n}\\c_{21}&0&\dots&c_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots\\c_{n1}&c_{n2}&\dots&0\end{pmatrix}.$$

Рассуждая аналогично рассмотренному выше случаю, получим

$$\beta(Q)\,(U(Q),U_\eta(Q))+\alpha(Q)|U(Q)|^2=$$
$$=\int\limits_{PQ}\beta h\,(U(Q),U)\,d\xi-\int\limits_{PQ}\beta(U(Q),\widetilde{c}\,U)\,d\xi.$$

Отсюда

$$\beta(Q)|(U(Q)||U(Q)|_\eta \leqslant -\alpha(Q)|U(Q)|^2 + \\ + |U(Q)|^2 \int\limits_{PQ} \beta|h|d\xi + \int\limits_{PQ} \beta|U(Q)||\widetilde{c}\, U|d\xi \leqslant \\ \leqslant -|U(Q)|^2 \left[\alpha(Q) - \int\limits_{PQ} \beta\left(|h| + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq i}^{n} c_{ik}^2}\right)d\xi\right] < 0,$$

что противоречит неравенству $|U(Q)|_\eta = 0$.

Замечание 3.3.1. а) Если коэффициенты системы (3.3.1) в области Δ удовлетворяют одному из неравенств:

$$\alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta \sum_{i=1}^{n}\left(|h_i| + \sum_{k\neq i}^{n}|c_{ik}|\right)dt > 0, \tag{3.3.7}$$

$$\alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)\left[|h_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq i}^{n}|c_{ik}|\right]dt > 0, \tag{3.3.8}$$

то для системы (3.3.1) также справедлива теорема 3.3.1. В самом деле, пусть выполнено неравенство (3.3.7). Тогда

$$\alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(h_i^2 + \sum_{k\neq i}^{n} c_{ik}^2\right)\right]^{1/2} dt \geqslant \\ \geqslant \alpha(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)\sum_{i=1}^{n}\left(|h_i| + \sum_{k\neq i}^{n}|c_{ik}|\right)dt > 0,$$

что влечет справедливость теоремы 3.3.1.

б) Если в условиях (3.3.3) и (3.3.8) $h \geqslant 0$ в области Δ, то эти условия равносильны, соответственно, следующим:

$$\begin{cases} h \geqslant 0, \\ \alpha(0,\eta) + \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)\left[c_0 - \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq i}^{n} c_{ik}^2}\,\right]dt > 0, \end{cases} \tag{3.3.9}$$

$$\begin{cases} h \geqslant 0, \\ \alpha(0,\eta) + \int\limits_0^\xi \beta(t,\eta)\left[c_0 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq i}^{n}|c_{ik}|\right]dt > 0. \end{cases} \tag{3.3.10}$$

Замечание 3.3.2. Если коэффициенты $b = b(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$, $c = c(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$, то легко заметить, что при выполнении соответствующих неравенств (3.3.2), (3.3.3), (3.3.7)–(3.3.10) для системы (3.3.1) верен результат теоремы 3.3.1.

Замечание 3.3.3. В работах [66, 124, 125] доказан принцип максимума модуля $|U|$ исходя из явного вида решения задачи Дарбу для системы (3.3.1) при некоторых ее частных случаях. В [255] сформулирован принцип максимума $|U|$ для более общей системы путем сведения ее к одному гиперболическому уравнению относительно $|U|$ и дальнейшим применением [229]. В работе [116] обобщен результат статьи [255] для достаточно общих областей. Полученные в [255] и [116] условия, при которых справедлив принцип максимума $|U|$, выражаются через саму функцию $U(\xi, \eta)$ и коэффициенты системы и поэтому они трудно проверяемы. Авторы этих работ не привели ни одного примера, для которого были бы справедливы ими найденные условия.

Аналогично определению 1.2.2 под обобщенным в области Δ решением системы (3.3.1) будем понимать функцию $U(\xi, \eta)$, если существует последовательность регулярных в Δ решений $U_p(\xi, \eta)$ системы (3.3.1), равномерно сходящаяся в $\overline{\Delta}$ к функции $U(\xi, \eta)$.

Теорема 3.3.2. *Пусть коэффициенты системы* (3.3.1) *в области* Δ *удовлетворяют отмеченным выше условиям гладкости и одному из условий* (3.3.2), (3.3.3), (3.3.7)–(3.3.10), *и* $U(\xi, \eta)$ — *обобщенное решение системы* (3.3.1), *равное нулю на отрезке* A_0C_0. *Тогда, если* $\max\limits_{\overline{\Delta}} |U(\xi, \eta)| > 0$, *то он достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.2.3.

Отметим также, что для системы (3.3.1) справедливы утверждения, полученные в пп. 1.2.3 и 1.2.4 § 1.2.

§ 3.4. Покомпонентный принцип экстремума для одного класса гиперболических систем

В области Δ (см. § 3.3) рассмотрим систему

$$L_i U \equiv u_{i\xi\eta} + a_i(\xi, \eta) u_{i\xi} + b_i(\xi, \eta) u_{i\eta} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(\xi, \eta) u_k = f_i(\xi, \eta), \quad (3.4.1)$$

где $i = \overline{1, n}$, $n \geqslant 2$, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $a_i(\xi, \eta)$, $b_i(\xi, \eta)$, $c_{ik}(\xi, \eta)$, $f_i(\xi, \eta)$ — числовые функции, заданные в области Δ.

Введем обозначения: $\alpha_i = a_i \beta_i$, $\beta_i = \exp \int b_i d\xi$, $h_i = a_{i\xi} + a_i b_i - c_{ii}$.

Пусть функции a_i, b_i, c_{ik} и $a_{i\xi}$ непрерывны на множестве $\Delta \cup A_0C_0$ и удовлетворяют при $(\xi,\eta) \in \Delta$ одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h_i \geqslant 0, \quad c_{ik} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad i \neq k, \\ \alpha_i(0,\eta) + \int\limits_0^\xi \beta_i(t,\eta) \sum\limits_{i=1}^n c_{ik}(t,\eta)\,dt > 0; \end{cases} \tag{3.4.2}$$

$$\alpha_i(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta_i(t,\eta)\Big(|h_i(t,\eta)| + \sum_{k\neq i}^n |c_{ik}|\Big)dt > 0. \tag{3.4.3}$$

Предполагается, что функции $f_i(\xi,\eta)$ интегрируемы по ξ на каждом отрезке $[0,\xi_0]$ прямой $\eta = \eta_0$, $0 < \xi_0 < \eta_0 < l$.

Под регулярным в области Δ решением системы (3.4.1), как и выше, будем понимать функцию $U(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям: $U \in C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta)$, $U_{\xi\eta} \in C(\Delta)$, $L_iU \equiv f_i$ в Δ и, кроме того, $U_\eta \in C(\Delta \cup A_0C_0)$.

Теорема 3.4.1. *Пусть*: 1) *коэффициенты системы* (3.4.1) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (3.4.2); 2) $f_i(\xi,\eta) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *в области* Δ; 3) $U(\xi,\eta)$ — *регулярное решение системы* (3.4.1), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} u_i > 0$ $\big(\min\limits_i \min\limits_{\overline{\Delta}} u_i < 0\big)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. В области Δ рассмотрим тождество

$$\beta_i L_i(U) \equiv (\beta_i u_{i\eta} + \alpha_i u_i)_\xi - \beta_i h_i u_i + \sum_{k\neq i} \beta_i c_{ik} u_k = \beta_i f_i$$

и проинтегрируем его по отрезку NM прямой $\eta = \text{const}$, принадлежащему Δ. Тогда получим

$$(\beta_i u_{i\eta} + \alpha_i u_i)\Big|_N^M = \int\limits_{NM} \beta_i f_i d\xi + \int\limits_{NM} \Big(\beta_i h_i u_i - \sum_{k\neq i} \beta_i c_{ik} u_k\Big)d\xi. \tag{3.4.4}$$

Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} u_i(\xi,\eta) = u_j(Q) > 0$. Допустим противное: $Q \notin \overline{A_0B_0}$. Тогда ясно, что $Q \in \Delta \cup C_0B_0$. Пусть $Q \in \Delta$. Из этой точки проведем отрезок $\eta = \text{const}$ до пересечения с характеристикой $\xi = 0$

в точке P. В равенстве (3.4.4) в качестве отрезка NM возьмем PQ и положим $i=j$. Тогда будем иметь

$$\beta_j(Q)u_{j\eta}(Q) = \int\limits_{PQ} \beta_j f_j d\xi + \int\limits_{PQ} \beta_j h_j\,[u_j - u_j(Q)]\,d\xi + u_j(Q)\int\limits_{PQ} \beta_j h_j\,d\xi -$$
$$- \int\limits_{PQ} \beta_j \sum_{k\neq j} c_{jk}\,[u_k - u_j(Q)]\,d\xi - u_j(Q)\int\limits_{PQ} \beta_i \sum_{k\neq j} c_{jk} d\xi - \alpha_i(Q)u_j(Q) =$$
$$= \int\limits_{PQ} \beta_j f_j d\xi + \int\limits_{PQ} \beta_j h_j\,[u_j - u_j(Q)]\,d\xi - \int\limits_{PQ} \beta_j \sum_{k\neq j} c_{jk}\,[u_k - u_j(Q)]\,d\xi -$$
$$- u_j(Q)\left[\alpha_j(P) + \int\limits_{PQ} \beta_j \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\,d\xi\right].$$

Отсюда в силу условий теоремы следует $u_{j\eta}(Q) < 0$, что противоречит тому, что в точке $Q \in \Delta$ максимума функции u_j производная $u_{j\eta}(Q) = 0$.

Если $Q \in B_0C_0$, то получим противоречие аналогично концовке доказательства теоремы 1.2.1.

Теорема 3.4.2. *Пусть*: 1) *коэффициенты системы* (3.4.1) *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (3.4.3); 2) $f_i(\xi,\eta) \equiv 0$; 3) $U(\xi,\eta)$ — *регулярное решение системы* (3.4.1), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} |u_i(\xi,\eta)| > 0$, *то этот максимум достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} |u_i(\xi,\eta)| = |u_j(Q)| > 0$. Не теряя общности, в силу линейности и однородности системы (3.4.1) можно считать, что $u_j(Q) > 0$. Тогда $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} u_i = u_j(Q) > 0$ и $|u_i| \leqslant u_j(Q)$ в $\overline{\Delta}$. Предположим, что точка $Q \notin \overline{A_0B_0}$. Следовательно, $Q \in \Delta \cup C_0B_0$. Достаточно рассмотреть случай, когда $Q \in \Delta$. Далее, рассуждая аналогично доказательству теоремы 3.4.1, из равенства (3.4.4) получим

$$\beta_j(Q)u_{j\eta}(Q) + \alpha_j(Q)u_j(Q) \leqslant \int\limits_{PQ} \beta_j |h_j||u_j|\,d\xi + \int\limits_{PQ} \beta_j \sum_{k\neq j}^{n} |c_{jk}||u_k|\,d\xi.$$

Из этой оценки в силу условия (3.4.3) следует, что

$$\beta_j(Q)u_{j\eta}(Q) \leqslant -u_j(Q)\left[\alpha_j(Q) - \int\limits_{PQ} \beta_j\left(|h_j| + \sum_{k\neq j}^{n} |c_{jk}|\right)d\xi\right] < 0.$$

Последнее противоречит тому, что в точке $Q \in \Delta$ максимума функции $u_j(\xi,\eta)$ производная $u_{i\eta}(Q) = 0$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Замечание 3.4.1. а) Если $h_i \geqslant 0$ и $c_{ik} \leqslant 0$ при $k \neq i$ в области Δ, то условие (3.4.3) равносильно (3.4.2).

В самом деле, пусть в области Δ функции $h_i \geqslant 0$ и $c_{ik} \leqslant 0$ при $k \neq i$. Тогда $\beta_i h_i = \alpha_{i\xi} - \beta_i c_{ii}$ и

$$\alpha_i(\xi,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta_i\Big(h_i - \sum_{k\neq i} c_{ik}\Big)dt = \alpha_i(0,\eta) + \int\limits_0^\xi \beta_i(t,\eta)\sum_{k=1}^n c_{ik}(t,\eta)\,dt > 0.$$

б) Если $h_i \geqslant 0$ в области Δ, то условие (3.4.3) равносильно неравенству

$$\alpha_i(0,\eta) - \int\limits_0^\xi \beta_i\Big(c_{ii} - \sum_{k\neq i}^n |c_{ik}|\Big)dt > 0.$$

в) Если $h_i(\xi,\eta) \geqslant 0$, $c_{ik}(\xi,\eta) \leqslant 0$ при $k \neq i$, $c_{ii} + \sum\limits_{k\neq i} c_{ik} \geqslant 0$ в области Δ и $a_i(0,\eta) > 0$ на промежутке $(0,l)$, то условие (3.4.2) всегда выполнено.

Рассмотрим случай, когда коэффициенты системы (3.4.1) не удовлетворяют условиям (3.4.2) и (3.4.3).

Лемма 3.4.1. *Функции $h_i(\xi,\eta)$ и $h_i(\xi,\eta) + \sum\limits_{k\neq i}^n c_{ik}(\xi,\eta)$ являются инвариантами системы* (3.4.1) *относительно преобразований вида*

$$u_i(\xi,\eta) = v_i(\xi,\eta)\exp\mu(\xi,\eta), \tag{3.4.5}$$

где μ — числовая функция из пространства C^2.

Действительно, после подстановки (3.4.5) в систему (3.4.1) получим

$$v_{i\xi\eta} + a_i' v_{i\xi} + b_i' v_{i\eta} + \sum_{k=1}^n c_{ik}' v_k = 0,$$

где

$$a_i' = a_i + \mu_\eta, \quad b_i' = b_i + \mu_\eta, \quad c_{ik}' = c_{ik} \quad \text{при} \quad k \neq i,$$
$$c_{ii}' = a_i\mu_\xi + b_i\mu_\eta + \mu_{\xi\eta} + \mu_\xi\mu_\eta + c_{ii}.$$

Тогда легко видеть, что

$$h_i' = a_{i\xi}' + a_i' b_i' - c_{ii}' = a_{i\xi} + a_i b_i - c_{ii} = h_i,$$
$$h_i' + \sum_{k\neq i} c_{ik}' = h_i + \sum_{k\neq i} c_{ik}.$$

Из этой леммы вытекает, что преобразованиями вида (3.4.5) можно добиться только выполнения условия (3.4.3) при определенной гладкости коэффициентов системы (3.4.1) в $\overline{\Delta}$.

Теорема 3.4.3. *Если коэффициенты системы* (3.4.1) *вместе с* $a_{i\xi}$ *непрерывны в* $\overline{\Delta}$, *то задача Дарбу с данными*: $u_i(\xi,\eta) = \tau_i(\xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant l$; $u_i(0,\eta) = \psi_i(\xi)$, $0 \leqslant \eta \leqslant l$, *для этой системы может иметь не более одного решения.*

Доказательство следует из леммы 3.4.1 теоремы 3.4.2.

Обобщенным в области Δ решением системы (3.4.1) будем называть функцию $U(\xi,\eta)$, если существует последовательность регулярных в Δ решений $\{U_p(\xi,\eta)\}$ системы (3.4.1), равномерно сходящаяся к $U(\xi,\eta)$ в $\overline{\Delta}$.

Теорема 3.4.4. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 3.4.1 *и* $U(\xi,\eta)$ — *обобщенное в* Δ *решение системы* (3.4.1), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} u_i(\xi,\eta) > 0$ $\left(\min\limits_i \min\limits_{\overline{\Delta}} u_i(\xi,\eta) < 0\right)$, *то* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} u_i$ $\left(\min\limits_i \min\limits_{\overline{\Delta}} u_i\right)$ *достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Теорема 3.4.5. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 3.4.2 *и* $U(\xi,\eta)$ — *обобщенное решение системы* (3.4.1), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{\Delta}} |u_i(\xi,\eta)| > 0$, *то этот максимум достигается на отрезке* $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство теорем 3.4.4 и 3.4.5 аналогично доказательству теоремы 1.2.3 гл. 1 и проводится на основании соответствующих теорем 3.4.1 и 3.4.2.

Следствие 3.4.1. *Пусть*: 1) *коэффициенты системы* (3.4.1) *в области* Δ *удовлетворяют условию* (3.4.2); 2) $f_i(\xi,\eta) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *в области* Δ; 3) $U(\xi,\eta)$ — *обобщенное в* Δ *решение системы* (3.4.1), *равное нулю на характеристике* A_0C_0. *Тогда если* $u_i \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *на отрезке* $\overline{A_0B_0}$, *то* $u_i(\xi,\eta) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *в* Δ.

Доказательство. Допустим, что существуют $i = s$ и точка $Q_0 \in \Delta$ такие, что $u_s(Q_0) < 0$. Тогда $\min\limits_i \min\limits_{\overline{\Delta}} u_i(\xi,\eta) = u_j(Q) < 0$ и в силу теоремы 3.4.4 точка $Q \in \overline{A_0B_0}$. По условию $u_j(Q) \geqslant 0$. Следовательно, наше допущение неверно и поэтому $u_i(\xi,\eta) \geqslant 0$ в Δ.

Это утверждение может быть использовано при доказательстве существования неотрицательных решений системы (3.4.1).

§ 3.5. Принцип максимума модуля решений одного класса систем уравнений смешанного типа

Пусть D — область пространства $\mathbb{R}^2$ переменных (x,y), ограниченная простой кривой Жордана Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$, с концами в точках $A = (0, 0)$ и $B = (l, 0)$, $l > 0$, и характеристиками AC и CB системы

$$LU \equiv K(y)U_{xx} + U_{yy} + AU_x + BU_y + CU = 0, \tag{3.5.1}$$

где $K(y)$, $A(x, y)$, $B(x, y)$ — числовые функции, $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $C(x, y)$ — квадратная матрица порядка n, $n \geqslant 2$, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, лежащими в полуплоскости $y < 0$. Части области D, в которых $y > 0$ и $y < 0$, обозначим, соответственно, через D_+ и D_- (см. рис. 1.1.1).

В области D для системы (3.5.1) поставим аналог задачи Трикоми и в дальнейшем его будем именовать задачей Т.

Задача Т. *Найти вектор-функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую условиям*:

$$U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{3.5.2}$$

$$LU(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3.5.3}$$

$$U(x, y) = \Phi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma; \tag{3.5.4}$$

$$U(x, y)|_{AC} = \Psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l/2, \tag{3.5.5}$$

где Φ и Ψ — заданные достаточно гладкие вектор-функции, $\Phi(0, 0) = \Psi(0)$.

В данном параграфе устанавливаются экстремальные свойства модуля $|U(x, y)| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{1/2}$ решения системы (3.5.1) в смешанной области D. Ранее экстремальные свойства модуля $|U|$ решения задачи Т были получены в [124] для системы (3.5.1) при $K(y) = y$, $A(x, y) = B(x, y) \equiv 0$, $C(x, y) = \big(C_{ik}(x, y)\big)$, $i, k = \overline{1, n}$, — отрицательно определенная матрица, компоненты которой в области D_+ удовлетворяют условиям

$$(n - 1)\left(C_{ik} + C_{ki}\right) \leqslant 2\left(C_{ii}C_{kk}\right)^{1/2}, \quad i \neq k,$$

а в области D_- достаточно малы, $l = 1$. В [54–57] при некоторых геометрических ограничениях на кривую Γ, при условии, что матрицы A, B и C достаточно малы, доказана однозначная разрешимость задачи Т в пространстве $W_2^1(D)$ [203].

Здесь эти ограничения для системы (3.5.1) сняты.

Лемма 3.5.1. *Пусть*: 1) *в области D_+ коэффициенты системы* (3.5.1) *ограничены и $C(x, y)$ — неположительно определенная матрица*; 2) $U(x, y) \in C(\overline{D_+}) \cap C^1(D_+ \cup AB) \cap C^2(D_+)$, $LU \equiv 0$ *в области D_+*; 3) $\max\limits_{\overline{D}_+} |U(x, y)| = |U(x_0, 0)| > 0$, $0 < x_0 < l$; 4) $|U(0, 0)| < |U(x_0, 0)|$, $|U(0, l)| < |U(x_0, 0)|$. *Тогда*

$$p = \lim_{y \to 0+0} |U(x_0, y)|_y < 0. \tag{3.5.6}$$

Доказательство. В силу условий 1) и 2) в области D_+ для эллиптической системы (3.5.1) имеет место теорема 3.1.2, на основании которой $\max\limits_{\overline{D}_+}|U(x,y)| > 0$ решения $U(x,y)$ не может достигаться внутри области D_+. Из условий 3) и 4) следует, что $p \leqslant 0$. Допустим $p = 0$. На отрезке AB в силу условия 4) существуют точки $M = (x_M, 0)$ и $N = (x_N, 0)$ такие, что $\max\limits_{\overline{MN}}|U(x_0,0)| = |U(x_0,0)|$, $0 < |U(M)| < |U(x_0,0)|$, $0 < |U(N)| < |U(x_0,0)|$, $0 < x_M < x_0 < x_N < l$.

Пусть γ — простая кривая, лежащая в D_+, с концами в точках M и N; D_γ — область, ограниченная кривой γ и отрезком MN, такова, что $|U(x,y)| > 0$ в D_γ. Ясно, что $\max\limits_{\overline{\gamma}}|U(x,y)| < |U(x_0,0)|$. Тогда существует $\varepsilon \in (0,1)$ такое, что $\max\limits_{\overline{\gamma}}|U(x,y)| \leqslant (1-\varepsilon)|U(x_0,0)|$.

В области D_γ введем вектор $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $e_i = u_i/|U|$. Тогда $U = |U|e$ и система (3.5.1) принимает вид

$$LU \equiv L|U|e \equiv K(y)|U|_{xx}e + |U|_{yy}e + |U|_x\,(2Ke_x + Ae) + \\ + |U|_y\,(2Ke_y + Be) + |U|Le = 0.$$

Полученное векторное уравнение умножим на вектор e скалярно,

$$(e, LU) = K(y)|U|_{xx} + |U|_{yy} + A|U|_x + B|U|_y + (e, Le)|U| = 0. \quad (3.5.7)$$

Отсюда вытекает, что в области D_γ функция $|U(x,y)|$ является регулярным решением эллиптического уравнения (3.5.7). При этом коэффициент при $|U|:\ (e, Le) \leqslant 0$ в D_γ. В самом деле,

$$\begin{aligned}(e, Le) = K(y)(e, e_{xx}) + (e, e_{yy}) + A(e, e_x) + B(e, e_y) + (e, Ce) = \\ = K(y)(e, e_{xx}) + (e, e_{yy}) + (e, Ce) = \\ = -K(y)|U|^{-4}\left[|U|^2|U_x|^2 - (U, U_x)^2\right] - \\ - |U|^{-4}\left[|U|^2|U_y|^2 - (U, U_y)^2\right] + (e, Ce) \leqslant 0,\end{aligned}$$

так как $(e, Ce) \leqslant 0$ и $|(U, U_q)| \leqslant |U||U_q|$, $q \in \{x, y\}$.

В области D_γ введем в рассмотрение новую функцию

$$V(x,y) = \frac{\varepsilon|U(x,y)|}{\exp(\alpha d) - \varepsilon\exp(\alpha y)} = \omega(y)|U(x,y)|,$$

где $\alpha = \mathrm{const} \geqslant \sup|B(x,y)|$ в D_γ, d — диаметр области D_γ, которая в силу (3.5.7) является решением эллиптического уравнения

$$K(y)V_{xx} + V_{yy} + \overline{A}V_x + \overline{B}V_y + \overline{C}V = 0,$$

где

$$\overline{A}(x,y) = A(x,y), \quad \overline{B}(x,y) = B(x,y) - 2\alpha\omega(y)\exp(\alpha y),$$

$$\overline{C}(x,y) = (e, Le) - \alpha(\alpha + B)\omega(y)\exp(\alpha y) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\gamma.$$

Отсюда следует, что функция $V(x, y)$ не может достигать наибольшего положительного значения внутри области D_γ. На кривой γ

$$V(x, y) \leqslant \frac{\varepsilon |U(x, y)|}{(1-\varepsilon)\exp(\alpha d)} < \frac{\varepsilon |U(x_0, 0)|}{\exp(\alpha d) - \varepsilon},$$

а на отрезке $\overline{MN}$

$$V(x, 0) \leqslant \frac{\varepsilon |U(x_0, 0)|}{\exp(\alpha d) - \varepsilon}, \quad V(x_0, 0) = \frac{\varepsilon |U(x_0, 0)|}{\exp(\alpha d) - \varepsilon}.$$

Таким образом, функция $V(x, y)$ достигает своего наибольшего положительного в $\overline{D}_\gamma$ значения в точке $(x_0, 0)$. Тогда $\lim\limits_{y\to 0+0} V_y(x_0, y) \leqslant 0$. С другой стороны, в силу нашего допущения $p = 0$ имеем

$$\lim_{y\to 0+0} V_y(x_0, y) = \alpha\omega^2(0)|U(x_0, 0)| > 0,$$

что невозможно. Тем самым лемма 3.5.1 доказана.

В области D_- перейдем к характеристическим координатам

$$\xi = x + \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\, dt, \quad \eta = x - \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\, dt,$$

где $K(y) \in C[y_C, 0] \cap C^2[y_C, 0]$, y_C — ордината точки C. При этом система (3.5.1) принимает вид

$$U_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)U_\xi + b(\xi, \eta)U_\eta + c(\xi, \eta)U = 0, \tag{3.5.8}$$

где

$$a(\xi, \eta) = \left(A + B\sqrt{-K} - K'/2\sqrt{-K}\right)/4K,$$

$$b(\xi, \eta) = \left(A + B\sqrt{-K} + K'/2\sqrt{-K}\right)/4K, \quad c(\xi, \eta) = C/4K,$$

а область D_- отображается в $\Delta = \{(\xi, \eta)\colon\ 0 < \xi < \eta < l\}$.

Определение 3.5.1. Регулярным решением системы (3.5.1) в области D назовем функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую условиям (3.5.2) и (3.5.3); кроме того, производная U_η непрерывна на $\Delta \cup A_0C_0$.

Теорема 3.5.1. *Пусть*: 1) *коэффициенты системы* (3.5.1) *в области* D_+ *ограничены и* $C(x, y)$ — *неположительно определенная матрица*; 2) *коэффициенты системы* (3.5.1) *в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ, η), *т. е. коэффициенты системы* (3.5.8), *удовлетворяют условиям теоремы* 3.3.1; 3) $U(x, y)$ — *регулярное в* D *решение системы* (3.5.1), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D}}|U(x, y)| > 0$, *то этот максимум достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{\overline{D}}|U(x,y)| = |U(Q)| > 0$. В силу теоремы 3.3.1 точка Q принадлежит $\overline{D}_+$. На основании теоремы 3.1.2 точка $Q \notin D_+$. Следовательно, точка $Q \in AB \cup \overline{\Gamma}$. Пусть $Q \notin \overline{\Gamma}$. Тогда $Q \in AB$, т. е. $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$. В этой точке из гиперболической части области D

$$\lim_{y \to o-o} \frac{\partial}{\partial y}|U(x_0, y)| \geqslant 0,$$

что в силу леммы 3.5.1 противоречит неравенству (3.5.6). Таким образом, $Q \in \overline{\Gamma}$. Теорема 3.5.1 доказана.

Определение 3.5.2. Обобщенным в области D решением системы (3.5.1) назовем функцию $U(x,y)$, если существует последовательность регулярных в области D решений $\{U_p(x,y)\}$ системы (3.5.1), равномерно сходящаяся к $U(x,y)$ в замкнутой области $\overline{D}$.

Теорема 3.5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.5.1 *и* $U(x,y)$ — *обобщенное в области* D *решение системы* (3.5.1), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D}} |U(x,y)| > 0$, *то этот максимум достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.3.4 гл. 1.

Следствие 3.5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.5.2. *Тогда для любой точки* $(x,y) \in \overline{D}$ *справедлива оценка*

$$|U(x,y)| \leqslant \max_{\overline{\Gamma}} |U(x,y)|.$$

Следствие 3.5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.5.2. *Тогда если в классе обобщенных в* D *решений системы* (3.5.1) *существует решение задачи* T, *то оно единственно.*

Замечание 3.5.1. Если: 1) $K(y) = \operatorname{sgn} y|y|^m$, $m \geqslant 0$, $A(x,y)$, $B(x,y) \in C^1(\overline{D}_+) \cap C^1(\overline{D}_-)$, $C(x,y) \in C(\overline{D}_+) \cap C(\overline{D}_-)$, $A(x,y) = O\big((-y)^{m/2-1}\big)$ при $y \to 0$ и $m \geqslant 2$ и удовлетворяют условиям теоремы 3.5.1; 2) Γ — из класса Ляпунова и в точках A и B оканчивается сколь угодно малыми дугами «нормальной кривой»; 3) функция $\Phi(x(s), y(s)) \in C^1[0,S]$, где $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ, S — длина кривой Γ, s — длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки B; 4) $\Psi(x) \in C^1[0, l/2] \cap C^3(0, l/2)$, $\Phi(S) = \Phi(0) = \Psi(0) = 0$, то в классе регулярных решений системы (3.5.1) существует решение задачи (3.5.2)–(3.5.5).

Доказательство этого утверждения на основании теоремы 3.5.1 может быть проведено методом интегральных уравнений аналогично работам [5, 124].

В дальнейшем полученные выше результаты применим для получения теорем единственности решения задачи Трикоми для уравнения

Лаврентьева–Бицадзе с комплексным спектральным параметром и для одной нелинейной системы уравнений смешанного типа.

Пример 1. Рассмотрим в области D известную задачу Трикоми для уравнения
$$W_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot W_{yy} - \lambda W = 0, \tag{3.5.9}$$
где λ — комплексный параметр.

Пусть $\operatorname{Re} W = u_1$, $\operatorname{Im} W = u_2$, $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + i \operatorname{Im}\lambda$. Тогда эта задача Трикоми равносильна задаче (3.5.2)–(3.5.5) для системы
$$U_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot U_{yy} + CU = 0, \tag{3.5.10}$$
где
$$C = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}\lambda & \operatorname{Im}\lambda \\ -\operatorname{Im}\lambda & -\operatorname{Re}\lambda \end{pmatrix}, \quad U = (u_1, u_2).$$

На плоскости x, y перейдем к характеристическим координатам $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. При этом система (3.5.10) принимает вид
$$[1 - \operatorname{sgn}(\eta - \xi)]\,(U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta}) + [1 + \operatorname{sgn}(\eta - \xi)]U_{\xi\eta} + CU = 0, \tag{3.5.11}$$
а области D, D_+ и D_-, соответственно, отображаются в области H, H_+ и $H_- \equiv \Delta$.

Теорема 3.5.3. *Если существует решение задачи* (3.5.2)–(3.5.5) *для системы* (3.5.10), *то оно единственно при всех* λ, *удовлетворяющих условиям*
$$|\operatorname{Im}\lambda| < \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{t_2 - t_1}\right)^2 + \sqrt{2}\operatorname{Re}\lambda, \quad \operatorname{Re}\lambda < 0, \tag{3.5.12}$$
$$|\operatorname{Im}\lambda| < \sqrt{2}\ \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{t_2 - t_1}\right)^2 \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0, \tag{3.5.13}$$
где
$$t_2 = \max_{\overline{H}}(\xi - \eta) = \max_{\overline{D}} 2y, \quad t_1 = \min_{\overline{H}}(\xi - \eta) = \min_{\overline{D}} 2y.$$

Доказательство. Пусть $U(x, y)$ — решение однородной задачи (3.5.2)–(3.5.5) для системы (3.5.10). Введем вспомогательную функцию $V(\xi, \eta) = U(\xi, \eta)[-f(\xi, \underline{\eta})]$, где f — пока неизвестная, но является достаточно гладкой в $\overline{H}$. Функция $V(\xi, \eta)$ в H является решением однородной задачи Т для системы
$$o = \begin{cases} V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + f_\xi V_\xi + f_\eta V_\eta + (f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} + f_\xi^2 + f_\eta^2)V + \dfrac{C}{2}V, & \xi > \eta, \\ V_{\xi\eta} + f_\eta V_\xi + f_\xi V_\eta + (f_{\xi\eta} + f_\xi f_\eta)V + \dfrac{C}{4}V, & \xi < \eta. \end{cases} \tag{3.5.14}$$

Теперь покажем, что при соответствующем подборе функции $f(\xi,\eta)$ для системы (3.5.14) при выполнении условия (3.5.12) или (3.5.13) относительно параметра λ справедливы условия теоремы 3.5.1. Для этого достаточно, чтобы f удовлетворяла неравенствам

$$f_{\xi\xi}+f_{\eta\eta}+f_\xi^2+f_\eta^2-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0 \quad \text{в} \quad H_+, \tag{3.5.15}$$

$$f_\eta e^{f(\xi,\eta)}-\int\limits_0^\xi e^{f(t,\eta)}\left[|h|+\sqrt{\sum_{i=1}^2\sum_{k\neq i}^2 c_{ik}^2}\,\right]dt>0 \quad \text{в} \quad H_-, \tag{3.5.16}$$

где

$$h=a_\xi+ab-c_0=\frac{1}{4}\operatorname{Re}\lambda,\quad c_0=f_{\xi\eta}+f_\xi f_\eta-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\lambda,$$

$$c_{12}=-c_{21}=\operatorname{Im}\lambda/4.$$

Функцию f будем искать в виде $f=m(\xi+\eta)+\mu(\xi-\eta)$, где $m=$ $=\mathrm{const}>0$, μ — функция от $\xi-\eta$.

Пусть $h<0$. Тогда условия (3.5.15) и (3.5.16), соответственно, принимают вид

$$\mu''+\mu'^2\leqslant\frac{\operatorname{Re}\lambda}{4}-m^2, \tag{3.5.17}$$

$$(m-\mu')e^f-\left(|\operatorname{Re}\lambda|+\sqrt{2}\,|\operatorname{Im}\lambda|\right)\frac{1}{4}\int\limits_0^\xi e^{f(t,\eta)}\,dt>0. \tag{3.5.18}$$

Обозначим через $\theta(\xi)$ левую часть (3.5.18) при фиксированном $\eta\in(0,l)$. Когда $\mu''+\mu'^2\leqslant m^2-\frac{1}{4}(|\operatorname{Re}\lambda|+\sqrt{2}\,|\operatorname{Im}\lambda|)$, функция $\theta(\xi)$ возрастает. Поэтому для выполнения неравенства (3.5.18) достаточно, чтобы

$$\mu''+\mu'^2\leqslant m^2-\frac{1}{4}\left(|\operatorname{Re}\lambda|+\sqrt{2}\,|\operatorname{Im}\lambda|\right),\quad \mu'<m. \tag{3.5.19}$$

Таким образом, исходя из (3.5.17) и (3.5.19) для определения неизвестных m и $\mu(t)=\mu(\xi-\eta)$, получим систему

$$\begin{cases}\mu''(t)+\mu'^2(t)\leqslant\dfrac{1}{4}\operatorname{Re}\lambda-m^2,\\[2mm] \mu''+\mu'^2\leqslant m^2-\dfrac{1}{4}\big(|\operatorname{Re}\lambda|+\sqrt{2}\,|\operatorname{Im}\lambda|\big),\\[2mm] \mu'(t)<m,\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2.\end{cases} \tag{3.5.20}$$

Пусть параметр m такой, что $\operatorname{Re}\lambda/4-m^2=m^2-\frac{1}{4}\big(|\operatorname{Re}\lambda|+$ $+\sqrt{2}\,|\operatorname{Im}\lambda|\big)$. Отсюда $m^2=\sqrt{2}\,|\mathrm{Im}\lambda|/8$. Тогда, решая систему (3.5.20), получим $\mu'(t) = d\,\mathrm{tg}\,[(k-t)d]$, где постоянные d и k удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} d^2 = \big(\sqrt{2}\,|\mathrm{Re}\,\lambda| + |\mathrm{Im}\,\lambda|\big)/4\sqrt{2}\,, \\ t_2 - \pi/2d < k < t_1 + \frac{1}{d}\,\mathrm{arctg}\,\frac{m}{d}. \end{gathered} \tag{3.5.21}$$

Из последнего двойного неравенства видно, что постоянная k существует, если

$$0 < d < \Big(\pi + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{m}{d}\Big)\Big/2(t_2 - t_1). \tag{3.5.22}$$

Отсюда находим условие (3.5.12), при котором существует функция $f(\xi,\eta)$, удовлетворяющая условиям (3.5.15) и (3.5.16).

Пусть $h = \mathrm{Re}\,\lambda/4 \geqslant 0$. В этом случае условие (3.5.16) в силу замечания 3.3.1 равносильно неравенству

$$f_\eta(0,\eta)e^{f(0,\eta)} + \int\limits_0^\xi e^{f(t,\eta)}\left[f_{t\eta} + f_t f_\eta - \frac{\mathrm{Re}\,\lambda}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}|\mathrm{Im}\,\lambda|\right]dt > 0$$

или

$$(m-\mu')e^{f(0,\eta)} + \int\limits_0^\xi e^{f(t,\eta)}\left[-\mu'' - \mu'^2 + m^2 - \frac{\mathrm{Re}\,\lambda}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}|\mathrm{Im}\,\lambda|\right]dt > 0.$$

Из последнего и (3.5.17) находим систему (3.5.20), где только $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$, для определения неизвестных m и $\mu(t)$. Полагая здесь $m^2 = \mathrm{Re}\,\lambda/4 + |\mathrm{Im}\,\lambda|/4\sqrt{2}$ и решая систему, будем иметь

$$\mu'(t) = d\,\mathrm{tg}\,[(k-t)d], \quad d^2 = |\mathrm{Im}\,\lambda|/4\sqrt{2}\,,$$

где постоянная k определяется из неравенства (3.5.21). При условии (3.5.13) из неравенств (3.5.21) и (3.5.22) (где уже m и d другие) следует существование функции $f(\xi,\eta)$, удовлетворяющей условиям (3.5.15) и (3.5.16).

Пример 2. В области D рассмотрим однородную задачу Трикоми для уравнения

$$\mathrm{sgn}\,y \cdot W_{xx} + W_{yy} - \lambda W = 0, \tag{3.5.23}$$

где λ — комплексный параметр. Как и в случае примера 1 задача Трикоми для уравнения (3.5.23) равносильно сводится к задаче (3.5.2)–(3.5.5) для системы

$$\mathrm{sgn}\,y \cdot U_{xx} + U_{yy} + CU = 0, \tag{3.5.24}$$

где матрица C такая же, что и у системы (3.5.10).

Теорема 3.5.4. *Если существует решение задачи* (3.5.2)–(3.5.5) *для системы* (3.5.24), *то оно единственно при всех* λ, *удовлетворяющих неравенствам* (3.5.12) и (3.5.13).

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 3.5.3. В этом случае в условии (3.5.16) следует положить $h = -\operatorname{Re}\lambda/4$, $c_{12} = -c_{21} = -\operatorname{Im}\lambda/4$.

Пример 3. Рассмотрим задачу Трикоми для нелинейной системы

$$L_iU \equiv K(y)U_{ixx} + U_{iyy} + Au_{ix} + BU_{iy} + F_i(x, y, U) = 0, \qquad (3.5.25)$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y)$, $A(x, y)$, $B(x, y)$, $F_i(x, y, U)$ — заданные в области D числовые функции, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, причем в областях D_+, D_- и $|u_i| \leqslant k_0$ существуют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_k}, \quad i, k = \overline{1, n}, \quad n \geqslant 2.$$

Пусть $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ — любые две различные функции из класса регулярных в D решений системы (3.5.25). Тогда их разность $U = W - Z$ является регулярным в D решением линейной системы. Действительно,

$$L_i(W) - L_i(Z) = K(y)u_{ixx} + u_{iyy} + Au_{ix} + Bu_{iy} + \\ + F_i(x, y, W) - F_i(x, y, Z) = 0. \qquad (3.5.26)$$

Пусть

$$G(t) = F_i[x, y, tw_1 + (1-t)z_1,\ tw_2 + (1-t)z_2, \ldots, tw_n + (1-t)z_n].$$

Тогда

$$F_i(x, y, W) - F_i(x, y, Z) = \int\limits_0^1 G'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} u_k \int\limits_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial u_k}\,dt. \qquad (3.5.27)$$

С учетом равенства (3.5.27) система (3.5.26) принимает вид

$$K(y)u_{ixx} + u_{iyy} + Au_{ix} + Bu_{iy} + \sum_{k=1}^{n} C_{ik}u_k = 0, \qquad (3.5.28)$$

где

$$C_{ik} = \int\limits_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial u_k}\,dt.$$

Отсюда видно, что если коэффициенты системы (3.5.28) удовлетворяют условиям теоремы 3.5.1 и $U = W - Z = 0$ на характеристике AC, то $\max\limits_{\overline{D}} |W - Z|$ достигается $\overline{\Gamma}$.

Следовательно, если в классе регулярных в D решений системы (3.5.25) существует решение задачи T, то оно единственно при выполнении отмеченных выше условий относительно коэффициентов этой системы.

Замечание 3.5.2. В работе [124] для системы (3.5.25) при $K(y) = y$, $A = B \equiv 0$, $\partial F_i/\partial u_k > 0$ при: $k, i = \overline{1, n}$ в $\overline{D}$ и $|u_i| \leqslant k_0$; в D_+ матрица $(\partial F_i/\partial u_k)$ отрицательно определена и

$$(n-1)\Big(\frac{\partial F_i}{\partial u_k} + \frac{\partial F_k}{\partial u_i}\Big) \leqslant \Big(\frac{\partial F_i}{\partial u_i}\,\frac{\partial F_k}{\partial u_k}\Big)^{1/2}, \quad i \neq k;$$

в области D_- функции $\partial F_i/\partial u_k$ достаточно малы. В классе ее регулярных решений доказана единственность решения задачи T. На основе теоремы единственности методом интегральных уравнений здесь получена теорема существования регулярного решения задачи T.

Аналогично [5, 124] для системы (3.5.25) (см. замечание 3.5.1) методом интегральных уравнений может быть проведено существование регулярного решения задачи T.

Отметим также, что задача T для нелинейных уравнений смешанного типа изучалась в работах [23, 43, 114].

§ 3.6. Покомпонентный принцип экстремума для одного класса систем уравнений смешанного типа

Рассмотрим в области D (см. § 3.5) систему

$$L_iU \equiv K(y)u_{ixx} + u_{iyy} + A_iu_{ix} + B_iu_{iy} + \sum_{k=1}^{n} C_{ik}u_k = F_i, \qquad (3.6.1)$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y)$, $A_i(x,y)$, $B_i(x,y)$, $C_{ik}(x,y)$, $F_i(x,y)$ — заданные в области D числовые функции, $i = \overline{1, n}$, $n \geqslant 2$, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, и поставим задачу Трикоми.

Задача T. *Найти функции $u_i(x,y)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u_i(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \qquad (3.6.2)$$

$$L_iU(x,y) \equiv F_i(x,y), \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \qquad (3.6.3)$$

$$u_i(x,y) = \varphi_i(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma; \qquad (3.6.4)$$

$$u_i(x,y)|_{AC} = \psi_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l/2, \qquad (3.6.5)$$

где φ_i и ψ_i — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi_i(0,0) = \psi_i(0)$.

Лемма 3.6.1. *Пусть*: 1) *в области* D_+ *коэффициенты системы* (3.6.1) *ограничены и*

$$C_{ik} \geqslant 0 \text{ при } k \neq i, \quad C_{ii} + \sum_{k \neq i} C_{ik} \leqslant 0, \quad F_i \geqslant 0 \ (\leqslant 0); \tag{3.6.6}$$

2) $U(x, y) \in C(\overline{D}_+) \cap C^1(D_+ \cup AB) \cap C^2(D_+)$, $L_i U \equiv F_i$ *в* D_+;

3) $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} u_i(x, y) = u_j(x_0, 0) > 0$ $\big(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}_+} u_i(x, y) = u_j(x_0, 0) < 0\big)$, $0 < x_0 < l$. *Тогда*

$$\lim_{y \to 0+0} u_{jy}(x_0, y) < 0. \tag{3.6.7}$$

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} u_i(x, y) = u_j(Q) > 0$. Введем вспомогательную функцию $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, где $w_i(x, y) = u_i(x, y) - u_j(Q)$, которая в области D_+ является регулярным решением системы

$$L_i W = F_i - u_j(Q) \sum_{k=1}^{n} C_{ik}$$

и $w_i(x, y) \leqslant 0$ в D_+, $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} w_i(x, y) = w_j(Q) = 0$. При этом функция $w_j(x, y)$ является регулярным решением эллиптического уравнения

$$K(y) w_{jxx} + w_{jyy} + A_j w_{jx} + B_j w_{jy} + C_{jj} w_j = G_j, \tag{3.6.8}$$

где

$$G_j = F_j - u_j(Q) \sum_{k=1}^{n} C_{jk} - \sum_{k \neq j} C_{jk} w_k.$$

В силу условия (3.6.6) функция $G_i \geqslant 0$ в области D_+. Тогда коэффициенты уравнения (3.6.8) и функция $w_i(x, y)$ удовлетворяют условиям леммы 1.3.1 гл. 1. Поэтому

$$\lim_{y \to 0+0} w_{jy}(x_0, y) < 0.$$

Отсюда уже следует неравенство (3.6.7).

Лемма 3.6.2. *Пусть*: 1) *в области* D_+ *коэффициенты системы* (3.6.1) *ограничены и*

$$C_{ii} + \sum_{k \neq i} |C_{ik}| \leqslant 0, \quad F_i \equiv 0; \tag{3.6.9}$$

2) $U(x, y) \in C(\overline{D}_+) \cap C^1(D_+ \cup AB) \cap C^2(D_+)$, $L_i U \equiv 0$ *в* D_+;
3) $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}_+} |u_i(x, y)| = |u_j(x_0, 0)| > 0$, $0 < x_0 < l$. *Тогда*

$$\lim_{y \to 0+0} \frac{\partial}{\partial y} |u_j(x_0, y)| < 0. \tag{3.6.10}$$

Доказательство. Пусть $\max_i \max_{\overline{D}_+} |u_i(x,y)| = |u_j(Q)| > 0$. В силу линейности и однородности системы (3.6.1) можно считать $u_j(Q) > 0$. Тогда $\max_i \max_{\overline{D}_+} u_i(x,y) = u_j(Q)$ и $|u_i(x,y)| \leqslant u_j(Q)$ в области D_+. Как и при доказательстве леммы 3.6.1, введем функцию $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, где $w_j = u_i(x,y) - u_j(Q)$. При этом функция $w_j(x,y)$ является регулярным решением эллиптического уравнения (3.6.8) и $w_j(x,y) \leqslant 0$ в $\overline{D}_+$, $\max_{\overline{D}_+} w_j(x,y) = w_j(Q) = 0$. В силу условия (3.6.9) правая часть уравнения (3.6.8) неотрицательна в $\overline{D}_+$ (см. доказательство теоремы 3.2.4). Тогда коэффициенты уравнения (3.6.8) и функция $w_j(x,y)$ удовлетворяют условиям леммы 1.3.1 гл. 1, в силу которой

$$\lim_{y\to 0+0} w_{jy}(x_0, y) < 0.$$

Из последнего неравенства легко следует (3.6.10).

В области D_- перейдем к характеристическим координатам (ξ, η) (см. § 3.5). В этих координатах система (3.6.1) имеет вид

$$u_{i\xi\eta} + a_i u_{i\xi} + b_i u_{i\eta} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik} u_k = f_i, \tag{3.6.11}$$

где

$$a_i(\xi,\eta) = \bigl(A_i + B_i\sqrt{-K} - K'/2\sqrt{-K}\,\bigr)/4K,$$
$$b_i(\xi,\eta) = \bigl(A_i - B_i\sqrt{-K} + K'/2\sqrt{-K}\,\bigr)/4K,$$
$$c_{ik}(\xi,\eta) = C_{ik}/4K, \quad f_i(\xi,\eta) = F_i/4K,$$

а область D_- отображается в область Δ.

Теорема 3.6.1. *Пусть*: 1) *коэффициенты системы* (3.6.1) *удовлетворяют условиям леммы* 3.6.1; 2) *коэффициенты системы* (3.6.1) *в области D_- в характеристических координатах (ξ,η), т. е. системы* (3.6.11), *удовлетворяют условиям теоремы* 3.4.1; 3) $F_i(x,y) \geqslant 0$ ($F_i(x,y) \leqslant 0$) *в* $D_+ \cup D_-$; 4) $U(x,y)$ — *регулярное в D решение системы* (3.6.1), *равное нулю на характеристике AC. Тогда если* $\max_i \max_{\overline{D}} u_i(x,y) > 0$ $\Bigl(\min_i \min_{\overline{D}} u_i < 0\Bigr)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\max_i \max_{\overline{D}} u_i(x,y) = u_j(Q) > 0$. В силу теоремы 3.4.1 точка $Q \in \overline{D}_+$. На основании теоремы 3.2.3 точка $Q \notin D_+$. Следовательно, $Q \in AB \cup \overline{\Gamma}$. Пусть $Q \in AB$, т. е. $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$. В этой точке из гиперболической части области D

$$\lim_{y\to 0-0} u_{jy}(x_0, y) \geqslant 0,$$

что на основании леммы 3.6.1 противоречит неравенству (3.6.7).

Теорема 3.6.2. *Пусть*: 1) *коэффициенты системы* (3.6.1) *удовлетворяют условиям леммы* 3.6.2; 2) *коэффициенты системы* (3.6.1) *в области* D_- *в характеристических координатах* (ξ, η), *т. е. системы* (3.6.11), *удовлетворяют условиям теоремы* 3.4.2; 3) $F_i(x, y) \equiv 0$ *в* $D_+ \cup D_-$; 4) $U(x, y)$ — *регулярное в* D *решение системы* (3.6.1), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} |u_i(x, y)| > 0$, *то этот максимум достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} |u_i(x, y)| = |u_j(Q)| > 0$. На основании теоремы 3.4.2 точка Q находится на множестве $\overline{D}_+$. В силу теоремы 3.2.4 точка $Q \notin D_+$. Тогда $Q \in AB \cup \overline{\Gamma}$. Допустим, что точка $Q \in AB$, т. е. $Q = (x_0, 0)$, $0 < x_0 < l$. В этой точке из гиперболической части D_- имеем

$$\lim_{y \to 0-0} \frac{\partial}{\partial y} |u_j(x_0, y)| \geqslant 0,$$

что в силу леммы 3.6.2 противоречит неравенству (3.6.10). Следовательно, точка $Q \in \overline{\Gamma}$.

Теорема 3.6.3. *Пусть выполнены условия* 1)–3) *теоремы* 3.6.1 *и* $U(x, y)$ — *обобщенное* (*понятие обобщенного решения системы* (3.6.1) *вводится аналогично определению* 3.5.2) *в* D *решение системы* (3.6.1), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} u_i(x, y) > 0$ $\Big(\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i(x, y) < 0\Big)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Теорема 3.6.4. *Пусть выполнены условия* 1)–3) *теоремы* 3.6.2 *и* $U(x, y)$ — *обобщенное в* D *решение системы* (3.6.1), *равное нулю на* AC. *Тогда если* $\max\limits_i \max\limits_{\overline{D}} |u_i(x, y)| > 0$, *то этот максимум достигается на кривой* $\overline{\Gamma}$.

Доказательство теорем 3.6.3 и 3.6.4 аналогично доказательству теоремы 1.3.4 гл. 1 и оно проводится с применением соответствующих теорем 3.6.1 и 3.6.2.

Следствие 3.6.1. 1) *Если выполнены условия теоремы* 3.6.3 *и* $F_i(x, y) \equiv 0$, *то для любой точки* $(x, y) \in \overline{D}$ *справедлива оценка*

$$\min_i \min_{\overline{\Gamma}} u_i(x, y) \leqslant u_i(x, y) \leqslant \max_i \max_{\overline{\Gamma}} u_i(x, y).$$

2) *Если выполнены условия теоремы* 3.6.4, *то для любой точки* $(x, y) \in \overline{D}$

$$|u_i(x, y)| \leqslant \max_i \max_{\overline{\Gamma}} |u_i(x, y)|.$$

3) *Если коэффициенты системы* (3.6.1) *удовлетворяют условиям теорем* 3.6.3 *или* 3.6.4 *и в классе обобщенных в* D *решений системы* (3.6.1) *существует решение задачи Трикоми, то оно единственно.*

Следствие 3.6.2. *Пусть*: 1) *коэффициенты системы* (3.6.1) *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 3.6.1; 2) $F_i(x,y) \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) *в* $D_+ \cup D_-$; 3) $U(x,y)$ — *обобщенное в* D *решение системы* (3.6.1), *равное нулю на характеристике* AC. *Тогда если* $u_i \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *на* $\overline{\Gamma}$, *то* $u_i \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *в* $\overline{D}$.

Доказательство. Пусть существуют $i = s$ и точка $Q_0 \in \overline{D} \setminus \overline{\Gamma}$ такие, что $u_s(Q_0) < 0$. Тогда $\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}} u_i(x,y) = u_j(Q) < 0$. По теореме 3.6.3 (случай минимума) $Q \in \overline{\Gamma}$. По условию $u_i \geqslant 0$ на $\overline{\Gamma}$ при всех i, следовательно, $u_j(Q) \geqslant 0$. А это противоречит $u_j(Q) < 0$.

Приведем примеры для иллюстрации изложенной выше теории.

В области D рассмотрим задачу Трикоми для уравнения смешанного типа

$$\operatorname{sgn} y \cdot W_{xx} + W_{yy} + MW_x - \lambda W = 0, \tag{3.6.12}$$

где M — вещественная постоянная, а λ — комплексный параметр. Пусть $\lambda = \lambda_1$ при $y \geqslant 0$ и $\lambda = \lambda_2$ при $y \leqslant 0$, $M = M_1$ при $y \geqslant 0$, $M = M_2$ при $y \leqslant 0$, $\operatorname{Re} W = u_1$, $\operatorname{Im} W = u_2$, $\lambda_k = \operatorname{Re}\lambda_k + i\operatorname{Im}\lambda_k$, $k = 1, 2$. Тогда задача Трикоми для уравнения (3.6.12) равносильна задаче (3.6.2)–(3.6.5) для следующей системы:

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} y \cdot u_{1xx} + u_{1yy} + Mu_{1x} - \operatorname{Re}\lambda u_1 + \operatorname{Im}\lambda u_2 = 0, \\ \operatorname{sgn} y \cdot u_{2xx} + u_{2yy} + Mu_{2x} - \operatorname{Im}\lambda u_1 - \operatorname{Re}\lambda u_2 = 0. \end{cases} \tag{3.6.13}$$

Теорема 3.6.5. *Если* $\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant |\operatorname{Im}\lambda_1|$ *и* $M_2 \leqslant -\sqrt{2(|\operatorname{Re}\lambda_2| + |\operatorname{Im}\lambda_2|)}$, *то для системы* (3.6.13) *справедливы теоремы* 3.6.2 *и* 3.6.4 *и следствие* 3.6.1 (2) *и* 3)).

Доказательство. Для системы (3.6.13): $K(y) = \operatorname{sgn} y$, $A_1(x,y) = A_2(x,y) = M$, $B_1(x,y) = B_2(x,y) \equiv 0$, $C_{11}(x,y) = C_{22}(x,y) = -\operatorname{Re}\lambda$, $C_{12}(x,y) = \operatorname{Im}\lambda = -C_{21}(x,y)$. Отсюда видно, что если $\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant |\operatorname{Im}\lambda_1|$, то коэффициенты системы (3.6.13) удовлетворяют условию 1) теоремы 3.6.2.

Система (3.6.13) в характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ имеет вид

$$\begin{cases} u_{1\xi\eta} - \dfrac{M_2}{4}(u_{1\xi} + u_{1\eta}) + \dfrac{\operatorname{Re}\lambda_2}{4}\, u_1 - \dfrac{\operatorname{Im}\lambda_2}{4}\, u_2 = 0, \\[2ex] u_{2\xi\eta} - \dfrac{M_2}{4}(u_{2\xi} + u_{2\eta}) + \dfrac{\operatorname{Im}\lambda_2}{4}\, u_1 + \dfrac{\operatorname{Re}\lambda_2}{4}\, u_2 = 0. \end{cases} \tag{3.6.14}$$

Отсюда

$$a_1 = a_2 = -M_2/4, \quad b_1 = b_2 = -M_2/4, \quad c_{11} = c_{22} = \operatorname{Re}\lambda_2/4,$$

$$c_{12} = -\operatorname{Im}\lambda_2/4, \quad c_{21} = \operatorname{Im}\lambda_2/4, \quad h_1 = h_2 = M_2^2/16 - \operatorname{Re}\lambda_2/4,$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \exp(-M_2\xi/4), \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -M_2\exp(-M_2\xi/4)/4.$$

Тогда условие (3.4.3) для системы (3.6.14) принимает вид

$$-\frac{M_2}{4}\exp\Big(-\frac{M_2}{4}\,\xi\Big)-\int\limits_0^{\xi}\exp\Big(-\frac{M_2}{4}t\Big)\Big(\Big|\frac{M_2}{4}-\frac{\operatorname{Re}\lambda_2}{4}\Big|+\Big|\frac{\operatorname{Im}\lambda_2}{4}\Big|\Big)dt>0,$$

где необходимо $M_2<0$, $0<\xi<l$, или

$$M_2^2-\big(\big|M_2^2-4\operatorname{Re}\lambda_2\big|+4\,|\operatorname{Im}\lambda_2|\big)\,\frac{\exp(-M_2\xi/4)-1}{\exp(-M_2\xi/4)}>0. \qquad (3.6.15)$$

Для выполнения неравенства (3.6.15) достаточно, чтобы $M_2^2 - 4|\operatorname{Im}\lambda_2| - |M_2^2-4\operatorname{Re}\lambda_2| \geqslant 0$, а последнее равносильно неравенству $M_2 \leqslant -\sqrt{2\,(|\operatorname{Re}\lambda_2|+|\operatorname{Im}\lambda_2|)}$.

Таким образом, при указанных выше ограничениях коэффициенты системы (3.6.13) удовлетворяют условиям теоремы 3.6.2. Отсюда следует наше утверждение.

Далее рассмотрим задачу Трикоми для нелинейной системы, более общей, чем (3.5.25),

$$L_iU \equiv K(y)u_{ixx}+u_{iyy}+A_iu_{ix}+B_iu_{iy}+F_i(x,y,U)=0, \qquad (3.6.16)$$

где $K(y)$, $A_i(x,y)$, $B_i(x,y)$, $F_i(x,y,U)$ — заданные в области D числовые функции, причем в областях D_+ и D_- и $|u_i|\leqslant k_0$ существуют непрерывные частные производные $\partial F_i/\partial u_k$, $i,k=\overline{1,n}$, $n\geqslant 2$.

Как и в случае системы (3.5.25), разность $U=W-Z$ является в D регулярным решением линейной системы

$$K(y)u_{ixx}+u_{iyy}+A_iu_{ix}+B_iu_{iy}+\sum_{k=1}^{n}C_{ik}u_k=0. \qquad (3.6.17)$$

Отсюда ясно, что если коэффициенты системы (3.6.17) удовлетворяют условиям теоремы 3.6.1 или 3.6.2 и $U=W-Z=0$ на характеристике AC, то $\max\limits_i\max\limits_{\overline{D}}(w_i-z_i)$ или $\max\limits_i\max\limits_{\overline{D}}|w_i-z_i|$ достигается на $\overline{\Gamma}$.

Таким образом, если в классе регулярных в D решений системы (3.6.16) существует решение задачи Трикоми, то оно единственно при выполнении соответствующих условий относительно коэффициентов этой системы.

§ 3.7. О существовании решения задачи Трикоми для одного класса систем уравнений смешанного типа

Рассмотрим систему (3.6.1) при $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m$, $m \geqslant 0$, $F_i(x, y) \equiv 0$, т. е. систему

$$L_i U \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{ixx} + u_{iyy} + A_i u_{ix} + B_i u_{iy} + \sum_{k=1}^{n} C_{ik} u_k = 0, \quad (3.7.1)$$

в области D, ограниченной кривой Γ из класса Ляпунова, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках A и B, и характеристиками AC и CB.

Пусть $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ, s — длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки B; S — длина кривой Γ; Γ_0 — «нормальная» кривая; D_0 — область, ограниченная кривыми Γ_0, AC и CB; $\Phi(x, y) = \Phi(x(s), y(s)) = \Phi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$.

В области D для системы (3.7.1) поставим задачу Трикоми, т. е. задачу (3.6.2)–(3.6.5).

В большинстве работ по системам уравнений смешанного типа теорема существования регулярного или обобщенного (в определенном смысле) решения задачи Т получена в предположении, что кривая Γ в точках A и B оканчивается сколь угодно малыми дугами «нормальной» кривой.

Построенная выше теория принципа максимума для систем уравнений в частных производных позволяет снять это ограничение относительно кривой Γ.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты системы (3.7.1)

$$A_i(x, y),\ B_i(x, y) \in C^1(\overline{D}_+) \cap C^1(\overline{D}_-), \quad C_{ik}(x, y) \in C(\overline{D}_+) \cap C(\overline{D}_-)$$

и удовлетворяют условиям теоремы 3.6.1 о принципе экстремума для системы (3.7.1).

Функцию $U(x, y) = (u_1, u_2, ..., u_n)$ назовем неотрицательной (положительной) на множестве $E \subset \mathbb{R}^2$, если $u_i(x, y) \geqslant 0$ ($u_i > 0$) на E при всех $i = \overline{1, n}$.

Теорема 3.7.1. *Пусть в области D при условии, что кривая Γ оканчивается в точках A и B сколь угодно малыми дугами «нормальной» кривой, существует регулярное решение задачи T для системы* (3.7.1). *Тогда если функция $\Phi(s)$ непрерывна на* $[0, S]$ *и* $\Psi(x)$ *достаточно гладкая* (*т. е. функция* $\Psi(x)$ *такова, что при достаточно гладкой функции $\Phi(s)$ выполнено условие теоремы* 3.7.1) *на* $[0, l/2]$, $\Psi(0) = \Phi(0) = \Phi(S) = 0$, *то существует единственное обобщенное решение $U(x, y)$ задачи T с граничными данными $U = \Phi$ на Γ и $U = \Psi$ на AC при любом подходе кривой Γ к оси $y = 0$, за исключением случаев касания.*

Вначале докажем справедливость следующих вспомогательных утверждений.

Лемма 3.7.1. *Если* $U(x,y) \in C(\overline{D}_+) \cap C^2(D_+)$, $LU \equiv 0$ *в области* D_+, $U = 0$ *на кривой* Γ, *то для любой кусочно-гладкой кривой* γ, *лежащей на* $D_+ \cup \Gamma$, *с концами в точках* A *и* B *существует постоянная* θ, $0 < \theta < 1$, *такая, что*

$$|u_i(x,y)| \leqslant \theta \max_i \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |u_i(x,0)|.$$

Доказательство этой леммы следует из теоремы 3.2.3.

Лемма 3.7.2. *Если* $D_{0+} \cup \Gamma_0 \subset D_+$, $\Phi_0(x) \in C[0,l]$, $\Psi(x)$ — *достаточно гладкая*, $\Phi_0(0) = \Psi(0)$, *то существует обобщенное решение* $U(x,y)$ *задачи* T *с граничными данными* $U = \Phi_0$ *на* Γ_0 *и* $U = \Psi$ *на* AC.

Доказательство. Пусть $\{\Phi_{0p}(x)\} = \{(\varphi_{01}^p, \varphi_{02}^p, \ldots, \varphi_{0n}^p)\}$ — последовательность гладких вектор-функций, таких что $\varphi_{0i}(x) = \lim\limits_p \varphi_{0i}^p(x)$ равномерно на сегменте $[0,l]$ и $\Phi_{0p}(0) = \Phi_0(0)$.

По условию теоремы 3.7.1 существует регулярное в D_0 решение $U_p(x,y)$ задачи Т с краевыми данными $U_p = \Phi_{0p}$ на Γ_0 и $U_p = \Psi$ на AC.

На основании следствия 3.6.1 из принципа экстремума для системы (3.7.1) в $\overline{D}_0$ справедлива оценка

$$|u_i^p(x,y) - u_i^q(x,y)| \leqslant \max_i \max_{\overline{\Gamma}_0} |\varphi_{0i}^p - \varphi_{0i}^q|.$$

Отсюда вытекает, что в $\overline{D}_0$ последовательность

$$\{U_p(x,y)\} = \{(u_1^p, u_2^p, \ldots, u_n^p)\}$$

регулярных решений задачи Т равномерно сходится.

Пусть $\lim\limits_p U_p(x,y) = U(x,y)$. Ясно, что предельная функция $U(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}_0$, $U = \Phi_0$ на Γ_0 и $U = \Psi$ на AC. Кроме того, из общей теории эллиптических систем известно, что в D_{0+} функция $U(x,y)$ является регулярным решением системы (3.7.1).

При $\Psi = 0$ для этой функции справедлива оценка

$$|u_i(x,y)| \leqslant \max_i \max_{\overline{\Gamma}_0} |\varphi_{0i}(x)|. \tag{3.7.2}$$

Лемма 3.7.3. *Пусть* $D_{0+} \cup \Gamma_0 \subset D_+$. *Если функция* $\Phi(s)$ *непрерывна на* $[0,S]$ *и* $\Psi(x)$ — *достаточно гладкая на* $[0,l/2]$ *функция, то существует обобщенное решение задачи* T.

Доказательство. В областях D_+ и D_0 построим две последовательности решений системы (3.7.1). В силу леммы 3.7.2 в области D_0 существует обобщенное решение $Z_0 = (z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)$ задачи Т с данными $Z_0 = 0$ на кривой Γ_0 и $Z_0 = \Psi$ на AC.

В области D_+ в силу результатов [23] существует решение задачи задачи Дирихле с данными $U_0 = \Phi$ на $\overline{\Gamma}$ и $U_0 = Z_0$ на отрезке $\overline{AB}$.

Пусть $Z_p(x, y)$ — обобщенное решение задачи T в области D_0 для системы (3.7.1) с граничными данными $Z_p(x, y) = U_{p-1}(x, y)$ на Γ и $Z_p = \Psi$ на AC, где $p = 1, 2, \ldots$, $U_p(x, y)$ — решение задачи Дирихле для системы (3.7.1) в области D_+ с данными $U_p = \Phi$ на $\overline{\Gamma}$ и $U_p = Z_p$ на $\overline{AB}$.

Докажем, что последовательности $\{U_p(x, y)\}$ и $\{Z_p(x, y)\}$ равномерно сходятся в $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_0$.

Действительно, в силу теоремы 3.2.3

$$|u_i^{p+1} - u_i^p| \leqslant \max_i \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |z_i^{p+1}(x, 0) - z_i^p(x, 0)| \leqslant \\ \leqslant \max_i \max_{\overline{D}_0} |z_i^{p+1}(x, y) - z_i^p(x, y)|. \quad (3.7.3)$$

С другой стороны, в силу оценки (3.7.2) и леммы 3.7.1 имеем

$$|z_i^{p+1}(x, y) - z_i^p(x, y)| \leqslant \max_i \max_{\overline{\Gamma}_0} |u_i^p - u_i^{p-1}| \leqslant \\ \leqslant \theta \max_i \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |u_i^p(x, 0) - u_i^{p-1}(x, 0)| \leqslant \theta \max_i \max_{\overline{D}_0} |z_i^p - z_i^{p-1}|.$$

Продолжая это рассуждение шаг за шагом, получим

$$|z_i^{p+1} - z_i^p| \leqslant \theta^p \max_i \max_{\overline{D}_0} |z_i^1 - z_i^0|. \quad (3.7.4)$$

Из оценок (3.7.3) и (3.7.4) вытекает

$$|u_i^{p+1} - u_i^p| \leqslant \theta^p \max_i \max_{\overline{D}_0} |z_i^1 - z_i^0|. \quad (3.7.5)$$

Тогда в силу оценок (3.7.4) и (3.7.5) следует, что $\lim\limits_p U_p(x, y) = U(x, y) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ равномерно в $\overline{D}_0$ и $\lim\limits_p Z_p(x, y) = Z(x, y) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ равномерно в $\overline{D}_+$.

Ясно, что в $\overline{D}_{0+}$ $Z(x, y) \equiv U(x, y)$. Следовательно, функция $U(x, y)$ является «аналитическим» продолжением функции $Z(x, y)$ и регулярным решением системы (3.7.1) в области D_+. Кроме того, при $\Psi = 0$

$$|u_i(x, y)| \leqslant \max_i \max_{\overline{\Gamma}} |\varphi_i|. \quad (3.7.6)$$

Лемма 3.7.4. *Пусть выполнены все условия леммы* 3.7.3 *и* $\Phi(s) > 0$ *на* $(0, S)$, *тогда существует обобщенное решение* $U(x, y)$ *задачи T для системы* (3.7.1) *такое, что* $\Psi = 0$ *на* AC, $U(x, y) \geqslant 0$ *в* $\overline{D}$ *и* $U(x, y) > 0$ *в* $D_+ \cup \Gamma$.

Доказательство. По лемме 3.7.3 существует обобщенное в D решение $U(x, y)$ задачи T для системы (3.7.1) с граничными условиями $U = \Phi$ на $\overline{\Gamma}$ и $U = 0$ на $\overline{AC}$. В области D_+ такое решение задачи T является регулярным решением системы (3.7.1). Если $\varphi_i(s) > 0$ на Γ, то в силу следствия 3.6.2 $u_i(x,y) \geqslant 0$ в $\overline{D}$. Допустим, что $\min\limits_i \min\limits_{\overline{D}_+} u_i(x,y) = u_j(Q) = 0$ и $Q \in D_+$. Так как $U(x,y)$ в области D_+ является регулярным решением системы (3.7.1), то в силу теоремы 3.2.3 функции $u_i(x,y) \equiv \mathrm{const} = 0$ в $\overline{D}_+$. Последнее противоречит $u_i > 0$ на кривой Γ.

Доказательство теоремы 3.7.1. Пусть кривая Γ подходит к оси $y = 0$ как это, например, указано на рис. 1.5.1 (см. § 1.5), где надо только заменить n на p, а m на q.

Как и в случае теоремы 1.5.1 гл. 1, рассуждения проведем по следующей схеме.

1°. Пусть $U = \Psi = 0$ на AC и $\Phi(s) = 0$ при $y < h$ и $\Phi(s) \geqslant 0$ при $y \geqslant h$. Построим последовательность дуг Γ_p, $p = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих доказательства теоремы 1.5.1. Пусть D_p — область, ограниченная дугой Γ_p и характеристиками AC и CB. На кривой Γ_p определим функцию $\Phi_p(s)$ следующим образом:

$$\Phi_p(s) = \begin{cases} \Phi(s), & y \geqslant h, \\ 0, & y < h. \end{cases}$$

По условию в области D_p существует регулярное решение $U_p(x,y)$ задачи T с граничными условиями $U_p = \Phi_p$ на Γ_p и $U_p = \Psi = 0$ на AC.

Пусть $Z(x,y) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — обобщенное решение задачи T в области D^* с границей $\partial D^* = \Gamma^* \cup AC \cup CB$, равное нулю на AC и $Z(x,y) > 0$ в $D_+{}^*$, где $D_-{}^* \equiv D_-$, $D_+{}^* \supset D_+ \cup \Gamma$. Такое решение в силу леммы 3.7.4 существует. Так как $z_i(x,y) > 0$ в $D_+{}^*$, то можно найти постоянную M, не зависящую от p и i, что на кривой Γ_p имеет место неравенство $Mz_i - u_i^p \geqslant 0$.

Отсюда на основании следствия 3.6.2

$$Mz_i - u_i^p \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \overline{D}_p. \tag{3.7.7}$$

Пусть $G_p = D_p \cap D$; положим

$$v_i^p(x,y) = \begin{cases} u_i^p(x,y), & (x,y) \in \overline{D}_p, \\ 0, & (x,y) \in \overline{D} \setminus \overline{D}_p. \end{cases}$$

Далее оценим $|v_i^q - v_i^p|$, где $q > p$, в D. Пусть K_p и K_p' — два круга с центрами в точках A и B, внутри которых содержатся, соответственно, дуги c_p и c_p', причем радиусы этих кругов стремятся к нулю при $p \to \infty$. Положим $\varepsilon_p = \max\limits_i \max\limits_{\overline{K}_p \cup \overline{K'}_p} z_i(x,y)$. Тогда из оценки (3.7.7) вытекает, что на границе G_p при $y \geqslant 0$

$$|v_i^q - v_i^p| = |u_i^q - u_i^p| \leqslant 2\,Mz_i \leqslant 2\,M\varepsilon_p.$$

Поэтому всюду в $\overline{G}_p$ справедлива оценка

$$|v_i^q - v_i^p| \leqslant 2\,M\varepsilon_p.$$

Для точек $(x,y) \in \overline{D} \cup \overline{D}_q \backslash \overline{D}_p$: $0 \leqslant v_i^p \leqslant M\varepsilon_p$, а для $(x,y) \in \overline{D} \backslash \overline{D}_q$: $v_i^p(x,y) = v_i^q(x,y) = 0$. Тогда для $(x,y) \in \overline{D}$: $|v_i^q - v_i^p| \leqslant 2\, M\varepsilon_p$. Поскольку $\varepsilon_p \to 0$ при $p \to \infty$, то из последней оценки следует, что последовательность $\{V_p(x,y)\} = \{(v_1^p, v_2^p, \ldots, v_n^p)\}$ равномерно сходится в $\overline{D}$.

Пусть

$$\lim_p V_p(x,y) = \lim_p U_p(x,y) = U(x,y)\ .$$

Ясно, что $U(x,y)$ принимает на Γ значения $\Phi(s)$, а на характеристике AC: $U = 0$. В области D_+ функция $U(x,y)$ является регулярным решением системы (3.7.1), и она непрерывна в $\overline{D}$. При этом справедлива оценка

$$0 \leqslant u_i(x,y) \leqslant \max_i \max_{\overline{\Gamma}} \varphi_i. \tag{3.7.8}$$

2°. Пусть $\Phi(s)$ непрерывна и неотрицательна на $[0,S]$ и $\Phi(0) = \Phi(S) = 0$. Построим последовательность $\{\Phi_p(s)\}$ непрерывных и неотрицательных функций, исчезающих в достаточно малых окрестностях точек $s = 0$ и $s = S$, таких что

$$\varphi_i^1(s) \leqslant \varphi_i^2(s) \leqslant \ldots, \quad \lim_p \varphi_i^p(s) = \varphi_i(s)$$

равномерно на $[0,S]$. По функциям $\Phi_p(s)$ в силу первого пункта построим последовательность $\{U_p(x,y)\}$ решений задачи Т. Тогда из оценки (3.7.8) при $q > p$ в $\overline{D}$ следует

$$0 \leqslant u_i^q - u_i^p \leqslant \max_i \max_{\overline{\Gamma}} (\varphi_i^q - \varphi_i^p)\,.$$

Отсюда следует, что в $\overline{D}$ существует равномерный предел

$$\lim_p U_p(x,y) = U(x,y).$$

В области D_+ функция U удовлетворяет системе (3.7.1), $U = \Phi$ на Γ, $U = 0$ на AC и $U(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$. Кроме того, имеет место оценка

$$0 \leqslant u_i(x,y) \leqslant \max_i \max_{\overline{\Gamma}} \varphi_i. \tag{3.7.9}$$

3°. Пусть $\Phi(s)$ — произвольная непрерывная функция и $\Phi(0) = \Phi(S) = 0$. В этом случае функцию $\Phi(s)$ можно представить в виде разности двух неотрицательных функций:

$$\Phi(s) = \Phi_+(s) - \Phi_-(s) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$
$$\Phi_\pm(s) = (\varphi_1^\pm, \varphi_2^\pm, \ldots, \varphi_n^\pm), \quad \varphi_i(s) = \varphi_i^+(s) - \varphi_i^-(s),$$
$$|\varphi_i| = \varphi_i^+ + \varphi_i^-, \quad \Phi_+(0) = \Phi_-(0) = \Phi_+(S) = \Phi_-(S) = 0.$$

В силу п. 2° решение задачи Т для системы (3.7.1) определяется формулой $U(x,y) = U_+(x,y) - U_-(x,y) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, где $u_i(x,y) = u_i^+(x,y) - u_i^-(x,y)$, $U_+(x,y)$ и $U_-(x,y)$ строятся, соответственно, по функциям $\Phi_+(s)$ и $\Phi_-(s)$.

На основании оценки (3.7.9) получим

$$|u_i(x,y)| \leqslant u_i^+(x,y) + u_i^-(x,y) \leqslant \max_i \max_{\overline{\Gamma}} \varphi_i^+(s) + \max_i \max_{\overline{\Gamma}} \varphi_i^-(s) \leqslant \\ \leqslant \max_i \max_{\overline{\Gamma}} (\varphi_i^+ + \varphi_i^-) = \max_i \max_{\overline{\Gamma}} |\varphi_i|. \quad (3.7.10)$$

4°. Пусть $\Psi(x) \neq 0$. Пусть D^* — область из п. 1° с границей $\partial D^* = \Gamma^* \cup AC \cup CB$, причем $D_0 \cup \Gamma_0 \subset D^*$. По лемме 3.7.3 $U_*(x,y)$ — решение задачи T с граничными данными $U_* = 0$ на Γ^* и данными $U_* = 0$ на Γ^* и $U_* = \Psi$ на AC.

Пусть $\Phi_*(s) = U_*$ на Γ. Тогда решение искомой задачи T для области D определяется по формуле $U(x,y) = U_*(x,y) - \widetilde{U}(x,y)$, где $\widetilde{U}(x,y)$ — решение задачи T в области D с граничными условиями $\widetilde{U}(x,y) = \Phi(s) - \Phi_*(s)$ на Γ, $\widetilde{U} = 0$ на AC.

Решение $\widetilde{U}(x,y)$ задачи T существует, что было показано в предыдущих пунктах 1°–3°.

Единственность построенного решения $U(x,y)$ задачи T следует из оценок (3.7.6) и (3.7.10) или из принципа экстремума.

Замечание 3.7.1. В работах [53–57, 67, 87, 92, 124, 224] изучалась задача Трикоми для некоторых систем уравнений смешанного типа и при условии, когда кривая Γ оканчивается в точках A и B дугами «нормальной» кривой, или в специальных областях была доказана теорема существования решения этой задачи.

Глава 4

К ТЕОРИИ ЗАДАЧИ ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

§ 4.1. Постановка задачи. Краткий обзор известных результатов

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u = 0, \tag{4.1.1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D, ограниченной отрезком AA' оси $x = 0$, $-a < y < a$, $a > 0$; характеристикой $A'C$ уравнения (4.1.1), $A' = (0, -a)$, $C = (c, 0)$; отрезком CB оси $y = 0$, $c \leqslant x \leqslant b$, и кривой Γ из класса Ляпунова с концами в точках $B = (b, 0)$ и $A = (0, a)$, лежащей в первой четверти.

Пусть $D_1 = D \cap \{y > 0\}$; OP — часть характеристики уравнения (4.1.1), исходящей из точки $O = (0, 0)$ до пересечения с $A'C$ в точке P; D_2 — область, ограниченная кривыми OP, PC и OC; D_3 — область, ограниченная кривыми OA', $A'P$ и PO (см. рис. 4.1.1).

В 1956 году Ф.И. Франкль [216], исследуя обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, пришел к математической модели, именуемой в настоящее время задачей Франкля. Эта задача для уравнения (4.1.1) в области D ставится следующим образом.

Задача Ф. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup OA \cup OA' \setminus OP) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3); \tag{4.1.2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3; \tag{4.1.3}$$

$$u(x, y) = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma; \tag{4.1.4}$$

$$u(x, 0) = \varphi_2(x), \; c \leqslant x \leqslant b; \tag{4.1.5}$$

$$u(0, y) - u(0, -y) = \varphi_3(y), \; 0 \leqslant y \leqslant a; \tag{4.1.6}$$

$$u_x(0, y) = 0, \; 0 < |y| < a, \tag{4.1.7}$$

где φ_1, φ_2, φ_3 — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi_2(b) = \varphi_1(b, 0)$.

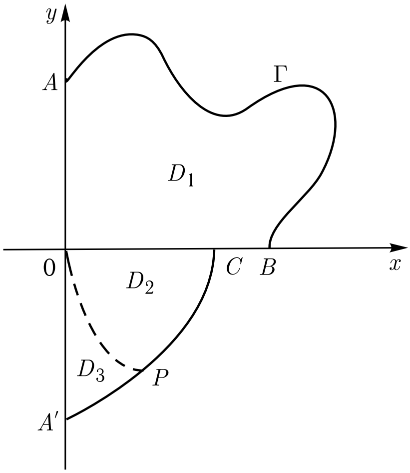

Рис. 4.1.1

Первые результаты по задаче Франкля для уравнений Лаврентьева и Чаплыгина получены А.В. Бицадзе [19, 20] при дополнительном требовании, чтобы кривая Γ помимо обычного условия гладкости (условия Ляпунова) удовлетворяла геометрическому условию

$$\frac{dy(s)}{ds} \geqslant 0, \tag{4.1.8}$$

где $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения границы области D, s — длина дуги границы области D, отсчитываемая от точки A' против часовой стрелки. Здесь при выполнении условия (4.1.8) доказана теорема единственности решения задачи Франкля, а в случае уравнения Лаврентьева на основании теоремы единственности методом интегральных уравнений также доказана теорема существования решения.

В работах Ю.В. Девингталя [46–48] при изучении задачи Ф для уравнения (4.1.1), когда $K(y) \in C^1(\overline{D})$, $K(-y) = -K(y)$, $\lambda(y) \equiv 0$, условие (4.1.8) на кривую Γ было несколько ослаблено: неравенство (4.1.8) должно выполняться в некоторой окрестности точки A и угол θ между положительным направлением оси Ox и направлением касательной к Γ, проведенной в сторону возрастания длины дуги s, должен удовлетворять условию

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{4.1.9}$$

В случае $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m$, $m > 1$, и когда кривая Γ в достаточно малой окрестности точки B удовлетворяет условию ортогональности $|dx/ds| \leqslant C\, y^{m/2}(s)$, $C = \mathrm{const} > 0$, а в точке A подходит перпендикулярно к оси $x = 0$, этим автором на основании теоремы единственности доказано существование решения задачи Ф.

Методом интегральных тождеств (методом «abc» функций) Линь Цзянь-Бин [119] показал единственность решения задачи Ф для уравнения (4.1.1) при $K(y) \in C^1(\overline{D})$, $K(-y)+K(y) \geqslant 0$, $\lambda(y) \equiv 0$ и $(x-d)\,dy + y\,dx \leqslant 0$ на Г, где $d \geqslant \max x$ в $\overline{D}$.

Б.Н. Бурмистров [26] наметил пути перенесения результатов работы Ю.В. Девингталя на случай уравнения (4.1.1) при $K(y)$, $\lambda(y) \in C^1(\overline{D})$, $K(-y)+K(y)=0$.

И.В. Майоров [122] для уравнения (4.1.1) при $K(y)=y$, $\lambda(y) \geqslant 0$ в D_1 методом экстремума доказал единственность решения задачи Ф без условия (4.1.8) на Г, но при достаточно малой длине отрезка OC (линии изменения типа уравнения).

В 1972–1973 гг. А.П. Солдатов [205, 206] методами аналитических функций доказал однозначную разрешимость задачи Ф для уравнения Лаврентьева–Бицадзе без условия (4.1.8) на кривую Г.

В работе Н.Ю. Капустина [82] результаты Ю.В. Девингталя перенесены на случай уравнения (4.1.1) при $\lambda(y) \equiv \mathrm{const} > 0$.

В нашей работе [175] получены теоремы единственности решения задачи Ф для систем уравнений смешанного типа первого порядка и на основе этих результатов доказывается теорема единственности решения задачи Ф для уравнения

$$(Ku_x)_x + u_{yy} + (au)_x - \lambda^2 u = 0,$$

где $K_x - 2a = 0$, $\lambda = \mathrm{const}$, с сохранением при этом ограничения Девингталя на кривую Г.

Отметим также, что задача Франкля была объектом изучения и других работ [27, 64, 94, 123]. В этих работах рассмотрены или некоторые обобщения (в постановке) задачи Ф, или аналоги задачи Ф, или задача Ф изучалась для систем уравнений первого порядка, или в специальных областях. Следует подчеркнуть, что ограничение типа (4.1.8) на кривую Г всюду присутствует.

Е.И. Моисеев [145, 146] для уравнения (4.1.1) при $K(y) = \mathrm{sgn}\, y$, $\lambda(y) = \mu^2 \mathrm{sgn}\, y$, $\mu = \mathrm{const}$, методом разделения переменных построил решение задачи Ф в случае, когда $a=b=c=1$ и кривая Г: $x^2+y^2=1$, $(x, y > 0)$, и систему собственных функций исследовал на полноту.

Таким образом, из данного обзора видно, что задача Ф окончательно решена только для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. Естественно возникает вопрос о существенности ограничения (4.1.8) или (4.1.9) на кривую Г при доказательстве единственности решения задачи Ф для уравнения Чаплыгина или уравнения (4.1.1). Аналогично задаче Трикоми (см. [75, 139, 163]) возникают вопросы о существовании спектра задачи Ф и построении собственных значений и функций спектральной задачи Франкля. Этим вопросам и посвящена данная глава. Здесь:

1) путем установления новых качественных свойств обобщенно аналитических функций окончательно решена проблема единственности решения задачи Ф для двух классов уравнений смешанного типа,

среди которых уравнение Чаплыгина, для которого в 1956 году была поставлена задача Ф;

2) развивая метод вспомогательных функций, получены новые теоремы единственности решения задачи Ф для уравнения (4.1.1) при более слабых ограничениях на кривую Г, функцию $K(y)$ и класс решений;

3) найдены собственные значения и соответствующие собственные функции спектральной задачи Франкля для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным комплексным параметром и изучены их свойства на полноту и базисность;

4) показаны применения этих результатов при разрешимости задачи Ф.

§ 4.2. О единственности решения задачи Франкля

4.2.1. Единственность решения задачи Франкля для уравнения с оператором Чаплыгина. Рассмотрим уравнение (4.1.1) в области D из § 4.1 и поставим задачу Ф, т. е. задачу (4.1.2)–(4.1.7).

Определение 4.2.1. Под регулярным в области D решением уравнения (4.1.1) будем понимать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (4.1.2) и (4.1.3), и, кроме того, функция $-u_y\,dx + Ku_x\,dy$ суммируема вдоль кривых $A'C$, OB, Г и обеих сторон характеристики OP.

Пусть $n = (n_1,\ n_2)$ — единичный вектор внутренней нормали к кривой $A'C \cup \Gamma$, $n_1(s) = -dy/ds$, $n_2(s) = dx/ds$; $y_{\min} = \min y$, $y_{\max} = \max y$ в $\overline{D}$.

Теорема 4.2.1. *Пусть*: 1) *на кривой* Г *отсутствуют точки, при переходе которых* $n_1(s)$ *меняет знак, а* $n_2(s) = 1$; 2) $K(y) \in C[y_{\min},0] \cap C[0,y_{\max}] \cap C^1[y_{\min},0) \cap C^1(0,y_{\max}]$, $K(y)+K(-y) \geqslant 0$ *при* $0 \leqslant y \leqslant a$ *и* $x = 0$; 3) *функция* $\lambda(y)$ *такова, что существует решение уравнения Риккати*

$$\mu'(y) + \mu^2(y) = \lambda(y), \quad y_{\min} < y < y_{\max}, \tag{4.2.1}$$

из класса $C^1[y_{\min}, y_{\max}]$. *Тогда если в классе регулярных в* D *решений уравнения* (4.1.1) *существует решение задачи* Ф, *то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи Ф (т. е. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 \equiv 0$) из класса регулярных в D решений уравнения (4.1.1). Обозначим через $v(x,y)$ функцию, которая вместе с решением $u(x,y)$ задачи Ф удовлетворяет системе уравнений смешанного типа первого порядка

$$\begin{cases} Ku_x - v_y - \mu v = 0, \\ \quad u_y + v_x - \mu u = 0, \quad (x,y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

где $\mu = \mu(y)$ — решение уравнения Риккати (4.2.1). При условии $v(0,0) = 0$ функция $v(x,y)$ однозначно определяется из системы (4.2.2)

$$v(x,y) = \mu_1^{-1} \int\limits_{(0,\,0)}^{(x,\,y)} (\mu u - u_y)\mu_1\,dx + K u_x\,\mu_1\,dy, \tag{4.2.3}$$

где $\mu_1(y) = \exp\int\limits_0^y \mu(t)\,dt$. Поскольку $u(x,y)$ — решение однородной задачи Ф из класса регулярных в D решений уравнения (4.1.1), то функция $v(x,y)$, определенная формулой (4.2.3), непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Из условия (4.1.7) задачи Ф следует, что

$$v(0,y) = 0, \quad -a \leqslant y \leqslant a. \tag{4.2.4}$$

На множестве $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ рассмотрим криволинейный интеграл

$$F(x,y) = \int\limits_{(0,\,0)}^{(x,\,y)} 2uv\,dx + (Ku^2 - v^2)\,dy, \tag{4.2.5}$$

который в силу системы (4.2.2) на указанном множестве не зависит от пути интегрирования. Тогда интеграл (4.2.5) определяет функцию $F(x,y)$, которая непрерывна в $\overline{D}$. Из формулы (4.2.5) с учетом условия (4.2.4) имеем

$$F(0,y) = \int\limits_0^y K(t)u^2(0,t)\,dt \geqslant 0.$$

Поэтому функция $F(x,y)$ достигает в $\overline{D}$ своего наибольшего неотрицательного значения. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} F(x,y) = F(Q) > 0$. Покажем, что точка $Q \in A \cup \Gamma$. Нетрудно проверить, что функция $F(x,y)$ в области D_1 удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$K(y)F_{xx} + F_{yy} - \alpha F_x - \beta F_y = 0, \tag{4.2.6}$$

где

$$\alpha = \frac{(K' + 2K\mu)F_x}{2\sqrt{KF_x^2 + F_y^2}} + \frac{K\mu F_x}{\sqrt{KF_x^2 + F_y^2}},$$

$$\beta = (K' + 2K\mu)\left(\frac{1}{2K} + \frac{F_y}{2K\sqrt{KF_x^2 + F_y^2}}\right) + \mu\left(\frac{F_y}{\sqrt{KF_x^2 + F_y^2}} - 1\right).$$

Коэффициенты α и β уравнения (4.2.6) ограничены в любой замкнутой подобласти области D_1. При $y \geqslant \delta > 0$ δ — любое достаточно малое число, уравнение (4.2.6) является равномерно эллиптическим.

Следовательно, для этого уравнения в области D_1 имеет место внутренний принцип максимума. Отсюда следует, что $Q \notin D_1$.

На отрезке CB границы области D_1 функция $F(x,0) = \mathrm{const}$, так как в силу граничного условия (4.1.5) производная $F_x(x,0) = 0$.

На множестве $D_2 \cup D_3 \cup OP \cup OC \cup OA'$ функция $F(x,y)$ убывает по y, так как
$$F_y(x,y) = Ku^2 - v^2 \leqslant 0, \quad y \leqslant 0. \tag{4.2.7}$$

На характеристике $A'C$: $dx = \sqrt{-K}\,dy$ и $n_1(s) < 0$, поэтому для точек $(x(s),\ y(s)) \in A'C$
$$\frac{dF[x(s),\ y(s)]}{ds} = \left(\sqrt{-K}\,u - v\right)^2 n_1(s) \leqslant 0. \tag{4.2.8}$$

Таким образом, из (4.2.7) и (4.2.8) следует, что $F(x,y)$ может достигать значения $F(Q)$ на $\overline{D}_2 \cup \overline{D}_3$ только в точке A'.

Учитывая условия (4.1.6), 2) теоремы и (4.2.4), легко показать, что $F(A') \leqslant F(A)$. В самом деле,
$$F(A') = \int\limits_0^{-a} K(t)u^2(0,t)\,dt = -\int\limits_0^{a} K(-y)u^2(0,-y)\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^{a} K(y)u^2(0,y)\,dy = F(A).$$

Итак, наибольшее положительное значение функции $F(x,y)$ достигается на кривой $A \cup \Gamma$. Пусть точка $Q \in \Gamma$ и она имеет координаты $(x_0, y_0) = (x(s_0), y(s_0))$. Поскольку $u = 0$ на Γ, то для $(x(s), y(s)) \in \Gamma$ получим
$$\frac{dF[x(s),\ y(s)]}{ds} = v^2 n_1(s).$$
Тогда в точке Q либо $v(Q) = 0$, либо $n_1(s_0) = 0$. Если $n_1(s_0) = 0$, то из условия 1) теоремы следует $n_2(s_0) = -1$ и производная по нормали
$$F_n(Q) = F_x(Q)n_1(s_0) + F_y(Q)n_2(s_0) = v^2(Q) \geqslant 0.$$
Если же $v(Q) = 0$, то $F_n(Q) = 0$. Итак, в точке $Q \in \Gamma$
$$F_n(Q) \geqslant 0. \tag{4.2.9}$$
По условию кривая Γ из класса Ляпунова и уравнение (4.2.6) в D_1 является эллиптическим, поэтому в точке Q из принципа Зарембы–Жиро производная $F_n(Q) < 0$, что противоречит (4.2.9).

Пусть $Q \equiv A$ и точка A является угловой точкой границы области D_1. Тогда в силу результатов [150] в любой достаточно малой окрестности точки A на кривой Γ найдется точка Q_1, в которой $F_n(Q_1) < 0$, что снова противоречит неравенству $F_n(Q_1) = -v^2 n_2(s) \geqslant 0$.

Следовательно, функция $F(x, y) \leqslant 0$ в $\overline{D}$, но тогда $u = 0$ на отрезке AA'. Отсюда в силу единственности решения задачи Коши для эллиптической системы (4.2.2) [31, 235] следует $u = v \equiv 0$ в D_1, но, значит, и в $\overline{D}$.

Теорема 4.2.1 доказана. В частности, когда $\lambda(y) = \mathrm{const}$, то теорема 4.2.1 справедлива при всех λ, удовлетворяющих неравенству

$$\lambda > -\Big(\frac{\pi}{y_{\max} - y_{\min}}\Big)^2. \tag{4.2.10}$$

Действительно, если $\lambda \geqslant 0$, то достаточно принять за $\mu(y) = \sqrt{\lambda}$. Если же $\lambda < 0$, то, решая уравнение (4.2.1), получим

$$\mu(y) = d\ \mathrm{tg}\,[d(k - y)], \quad d = \sqrt{|\lambda|}\,,$$

где k — постоянная и находится из условия

$$y_{\max} - \frac{\pi}{2d} < k < y_{\min} + \frac{\pi}{2d}.$$

Отсюда следует, что функция $\mu(y)$ существует, если

$$y_{\max} - \frac{\pi}{2d} < y_{\min} + \frac{\pi}{2d} \ \text{ или } \ 0 < |\lambda| < [\pi/(y_{\max} - y_{\min})]^2.$$

Отметим, что в теореме 4.2.1 присутствует некоторое ограничение на кривую Г, которое слабее, чем условия (4.1.8) и Девингталя. В последующих пунктах мы докажем единственность решения задачи Ф без каких-либо ограничений геометрического характера типа (4.1.8) или (4.1.9) на кривую Г.

4.2.2. Единственность решения задачи Франкля для уравнения Чаплыгина. В этом пункте в области D рассмотрим уравнение (4.1.1) при $\lambda(y) = 0$, т. е. уравнение типа Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad yK(y) > 0 \ \text{ при } \ y \neq 0. \tag{4.2.11}$$

Теорема 4.2.2. *Пусть*: 1) $K(y) + K(-y) \geqslant 0$ *при* $0 \leqslant y \leqslant a$, $x = 0$; $K(y) \in C[y_{\min}, 0] \cap C^1[y_{\min}, 0) \cap C[0, y_{\max}] \cap C^1(0, y_{\max}]$; 2) $u(x, y)$ — *решение однородной задачи из класса регулярных в области* D *решений уравнения* (4.2.11). *Тогда* $u(x, y) \equiv 0$ *в* D.

Прежде чем начать доказательство, установим некоторые геометрические свойства решения $u(x, y)$ уравнения (4.2.11) в области D_1.

Пусть $u(x, y) \not\equiv 0$ в D_1 — регулярное решение однородной задачи Ф для уравнения (4.2.11). Как и в случае доказательства теоремы 4.2.1, введем функцию $v(x, y)$, которая с функцией $u(x, y)$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} Ku_x - v_y = 0, \\ \quad u_y + v_x = 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3. \end{cases} \tag{4.2.12}$$

При условии $v(0,0)=0$ функция $v(x,y)$ однозначно определяется из системы (4.2.12):

$$v(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,\,y)} -u_y\,dx+Ku_x\,dy. \tag{4.2.13}$$

Функция $v(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Из формулы (4.2.13) на основании граничного условия (4.1.7) задачи Ф следует, что

$$v(0,y)=0, \quad -a\leqslant y\leqslant a. \tag{4.2.14}$$

Поскольку $u(x,y)=0$ на Γ и кривая Γ из класса Ляпунова, то из теории краевых задач для эллиптических уравнений известно, что производные u_x и u_y непрерывны вплоть до границы Γ. Поэтому функция $v(x,y)$ имеет непрерывные частные производные v_x и v_y в замкнутой области $\overline{D}_1$, кроме, быть может точек O, A и отрезка $\overline{CB}$.

Введем комплексную функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ комплексного переменного $z=x+iy\in\overline{D}_1$, которая в области D_1 является обобщенной аналитической функцией [31, гл. 3].

Пусть $\Sigma(z_0)$ — некоторая окрестность точки $z_0=x_0+iy_0$, целиком лежащая в области D_1.

Определение 4.2.2. Множество точек z, удовлетворяющих в некоторой окрестности $\Sigma(z_0)$ точки $z_0\in D_1$ уравнению

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)=0, \tag{4.2.15}$$

назовем линией уровня функции $u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)$.

Лемма 4.2.1. *Если $u(x,y)\not\equiv 0$ в окрестности $\Sigma(z_0)$ точки $z_0\in D_1$, то существует такой гомеоморфизм ψ достаточно малой окрестности $\Sigma(z_0)$ на окрестность $\Sigma(\omega_0)$ точки $\omega_0=\psi(z_0)$ плоскости $\omega=\alpha+i\beta$, при котором множеству точек z, удовлетворяющих уравнению* (4.2.15), *соответствует $2m$ радиусов окрестности $\Sigma(\omega_0)$, ограничивающих секторы с центральными углами π/m. При переходе точки z через прообраз каждого такого радиуса функция $u(x,y)$ меняет знак.*

Доказательство. Для функции $f(z)=u+iv$ в силу системы (4.2.12) якобиан $J(z)=u_xv_y-u_yv_x=K(y)u_x^2+u_y^2\geqslant 0$ в $\overline{D}_1$ и, следовательно, нули якобиана $J(z)$ совпадают с нулями функции $F(z)\equiv U+iV=u_x+iu_y$. С другой стороны, функции U и V удовлетворяют эллиптической системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} K(y)U_x+V_y=0,\\ U_y-V_x=0, \end{cases}$$

поэтому функция $F(z)\equiv U+iV$ в области D_1 является обобщенной аналитической. Следовательно, в силу теоремы Карлемана [235] множество нулей функции $F(z)$, а значит, и якобиана $J(z)$, состоит лишь из изолированных точек.

Если в точке z_0 якобиан $J(z_0) > 0$, то образом достаточно малой окрестности $\Sigma(z_0)$ точки z_0 на плоскости $\omega = u + iv$ будет однолистная окрестность точки $\omega_0 = f(z_0)$. В этом случае очевидно, что $m = 1$.

Если $J(z_0) = 0$, то окрестность $\Sigma(z_0)$ можно выбрать так, чтобы на замкнутой окрестности $\overline{\Sigma(z_0)}$: $J(z) > 0$ и $f(z) \neq \omega_0$ при $z \neq z_0$. В этой окрестности систему (4.2.12) с невырожденной заменой переменных

$$\zeta = \zeta(z) = \xi + i\eta = x + i\int\limits_0^y \sqrt{K(t)}\,dt \tag{4.2.16}$$

приведем к виду

$$\begin{cases} \sqrt{K}\,u_\xi - v_\eta = 0, \\ \sqrt{K}\,u_\eta + v_\xi = 0, \end{cases}$$

которая в результате подстановки

$$u_1(\xi,\eta) = \sqrt{K}\,u, \quad v_1(\xi,\eta) = v$$

сводится к каноническому виду

$$\begin{cases} u_{1\xi} - v_{1\eta} = 0, \\ u_{1\eta} + v_{1\xi} + b(\eta)u_1 = 0, \end{cases} \tag{4.2.17}$$

где $b(\eta) = -K'(y)/2K^{3/2}(y)$.

Пусть $\zeta_0 = \zeta(z_0)$, $f_1(\zeta) = u_1(\xi,\eta) + iv_1(\xi,\eta)$. Легко видеть, что якобиан $J(\zeta)$ отображения $f_1(\zeta)$ в точке ζ_0 равен нулю. В силу системы (4.2.17) функции $f_1(\zeta)$ и $f_1(\zeta) - f_1(\zeta_0)$ являются обобщенными аналитическими. Поэтому на основании теоремы о представлении [31, гл. 3, § 4] получим

$$f_1(\zeta) - f_1(\zeta_0) = (\zeta - \zeta_0)^m \Phi(\zeta), \tag{4.2.18}$$

где $\Phi(\zeta_0) \neq 0$ и $\Phi(\zeta)$ непрерывна в некоторой окрестности $\Sigma(\zeta_0)$, $m \geqslant 2$. Тогда функция

$$\omega = \varphi(\zeta) = \alpha + i\beta = (\zeta - \zeta_0)\Phi_1(\zeta), \tag{4.2.19}$$

где $\Phi_1(\zeta) \neq 0$ — непрерывная однозначная ветвь функции $[\Phi(\zeta)]^{1/m}$, осуществляет гомеоморфизм окрестности $\Sigma(\zeta_0)$ (где $\Phi_1(\zeta) \neq 0$) на окрестность $\Sigma(0)$ плоскости $\omega = \alpha + i\beta$ [208, с. 286–287].

Таким образом, из равенств (4.2.18) и (4.2.19) имеем

$$f_1(\zeta) - f_1(\zeta_0) = \omega^m = (\alpha + i\beta)^m.$$

На плоскости (α,β), введя полярные координаты (r,θ), получим $\omega^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)$. Интересующая нас линия уровня (4.2.15) задается уравнением

$$u_1(\xi,\eta) = r^m \cos m\theta = 0. \tag{4.2.20}$$

Линии уровня (4.2.20) на плоскости (α, β) соответствует совокупности $2m$ лучей, каждый из них в точке $\omega = 0$ образует с соседними угол π/m. Из гомеоморфности отображений (4.2.16) и (4.2.19) следует, что линия уровня (4.2.15) в достаточно малой окрестности точки z_0 состоит из m дуг, проходящих через точку z_0.

Лемма 4.2.1 доказана.

Отметим, что в [147, с. 19] эта лемма установлена в случае, когда $u(x, y)$ является гармонической функцией. Аналогичный результат справедлив и для внутренних точек кривой Г.

Доказанная лемма 4.2.1 по существу устанавливает структуру локального строения линии уровня (4.2.15) в окрестности точки z_0.

Следуя [147] назовем окрестность $\Sigma(z_0)$ из леммы 4.2.1 канонической. Ясно, что каждая точка области D_1, расположенная на линии уровня (4.2.15), обладает канонической окрестностью. Под поперечником такой окрестности будем понимать дугу линии уровня (4.2.15) в окрестности $\Sigma(z_0)$, соответствующую сумме диаметрально противоположных радиусов из леммы 4.2.1. В случае $m = 1$ каноническая окрестность $\Sigma(z_0)$ имеет единственный поперечник.

Лемма 4.2.2. *Линия уровня функции $u(x, y)$ в области D_1 является простой, т. е. не имеет точек самопересечений.*

Действительно, в противном случае она ограничивала бы одну или более областей Ω, принадлежащих D_1. В каждой такой области Ω функция $u(x, y) \not\equiv 0$. Тогда она в некоторой внутренней точке области Ω принимает экстремальное значение, что невозможно в силу внутреннего экстремума для эллиптических уравнений.

Лемма 4.2.3. *Линия уровня функции $u(x, y)$, расположенная в произвольной замкнутой подобласти области D_1, может быть покрыта конечным числом канонических окрестностей. Вся линия уровня функции $u(x, y)$ в D_1 может быть покрыта счетным множеством канонических окрестностей $\Sigma(z_n) = \Sigma_n$ точек $z_n \in D_1$, $n = 1, 2, \ldots$, обладающих свойствами*:

1) *все точки z_n различны*;

2) *окрестности Σ_n содержатся в D_1*;

3) *диаметр окрестности Σ_n стремится к нулю, когда z_n стремится к границе области D_1*.

Определение 4.2.3. Открытую простую дугу S линии уровня функции $u(x, y)$ в области D_1, являющуюся объединением поперечников подмножества Σ_{n_k} окрестностей Σ_n и не имеющую ни первого, ни последнего поперечника, назовем максимальной дугой уровня.

Существование такой максимальной дуги следует из того, что концы каждого поперечника d либо расположены на некотором другом поперечнике, пересекающемся с d по простой дуге, либо совпадают с концами соседних поперечников из данного множества окрестностей Σ_{n_k}.

Процесс продолжения простой дуги, являющейся суммой конечного числа поперечников, может быть продолжен на счетное число шагов и приводит к открытой простой дуге S.

Максимальную дугу S можно представить в виде топологического образа интервала (0,1) оси t:

$$z = z(t), \quad 0 < t < 1. \tag{4.2.21}$$

Лемма 4.2.4. *Максимальная дуга S, заданная уравнением* (4.2.21), *линии уровня функции $u(x, y)$ обладает свойствами*:

1°. *При $t \to 0$ или 1 расстояние между точкой $z(t)$ и границей ∂D_1 стремится к нулю.*

2°. *При $t \to 0$ или 1 существует предел $\lim z(t) \in \partial D_1$.*

3°. *Если точка $z(t) \to z_1 \in \overline{OA \cup \Gamma \cup CB}$ при $t \to 0$, то точка $z(t) \to z_2 \in OC$ при $t \to 1$.*

Доказательство. Справедливость первого свойства вытекает из того, что S является простой дугой и представляет собой объединение счетного множества поперечников. Поэтому дуга S никогда не входит дважды в одну и ту же окрестность Σ_{n_k}, но в каждой бесконечной последовательности окрестностей Σ_{n_k} расстояние между Σ_{n_k} и ∂D_1 стремится к нулю при $k \to \infty$.

Пусть $E \subset \partial D_1$ — множество предельных точек функции (4.2.21) при $t \to 0$. В силу свойства 1° множество E не пусто. Ясно также, что каждая точка E лежит на линии уровня функции $u(x, y)$. Допустим, E содержит две различные точки z_1 и z_2 границы ∂D_1. Тогда все точки границы, лежащие между точками z_1 и z_2, принадлежат E, так как у непрерывной функции $z(t)$ множество предельных точек при $t \to 0$ либо континуум, либо точка [96, с. 16]. По этой причине образуется область Ω, лежащая в D_1, вдоль границы которой $u = 0$, что невозможно. Тем самым доказано свойство 2°.

Справедливость свойства 3° установим, рассуждая методом от противного. Пусть точки $z_1 \in \overline{\Gamma \cup CB}$ и $z_2 \in \overline{\Gamma \cup CB}$. Тогда образуется замкнутая линия уровня функции $u(x, y)$, что в силу леммы 2.2 невозможно. Пусть точка $z_1 \in OA \cup \overline{\Gamma \cup CB}$, а $z_2 \in OA$. В этом случае образуется область Ω (см. рис. 4.2.1, *а*), ограниченная кривыми Az_2, $z_2 z_1$, $z_1 B$ и Γ, на которых

$$u\Big|_{\overline{z_2 z_1 \cup z_1 B \cup \Gamma}} = 0, \quad u_x\Big|_{Az_2} = 0. \tag{4.2.22}$$

Тогда в силу единственности решения смешанной задачи с указанными выше граничными условиями (4.2.22) для уравнения (4.2.11) в области Ω следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. А это противоречит тому, что $u(x, y) \not\equiv 0$ в D_1. Если $z_1 \in OA$, $z_2 \in OA$ (см. рис. 4.2.1, *б*), то снова образуется область Ω, ограниченная дугой S и отрезком $z_1 z_2$, на которых $u\big|_S = 0$, $u_x\big|_{z_1 z_2} = 0$. Отсюда также следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Лемма 4.2.4 полностью доказана.

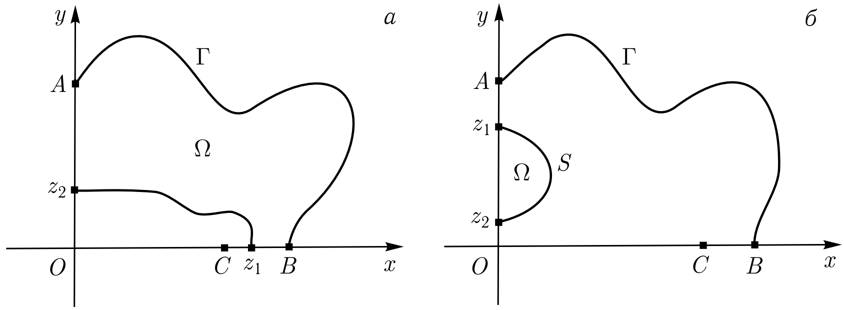

Рис. 4.2.1

В дальнейшем рассмотрим максимальные дуги линии уровня функции $u(x,y)$, выходящие из точек $z_0 \in A \cup \Gamma$. Из леммы 4.2.4 следует, что максимальная дуга S линии уровня функции $u(x,y)$, лежащая в D_1, с одним концом в точке z_0 не может оканчиваться на точках границы $\partial D_1 \backslash OC$. Никакие две максимальные дуги, выходящие из точки z_0, не могут пересекаться ни в одной точке $\overline{D}_1$.

Пусть $Y = \{z \in A \cup \Gamma |\ J(z) = 0\}$. Тогда в силу лемм 4.2.1–4.2.4 максимальные дуги линии уровня функции $u(x,y)$ будут исходить из точек множества Y и оканчиваться на точках отрезка OC. Обозначим через X множество точек промежутка $(0,c]$ оси $y=0$, в которых оканчиваются дуги линии уровня функции $u(x,y)$, исходящих из точек Y. Множество X замкнуто. Пусть $c_0 = \min X$. Ясно, что $c_0 \in X$ и $c_0 > 0$.

По условию точка A, вообще говоря, является угловой точкой границы области D_1. Поэтому в силу результатов [97, 98] градиент ∇u при $r = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} \to 0$ имеет либо конечное значение, либо обращается в бесконечность порядка $O(r^{-\delta})$, $\delta > 0$. При этом в силу леммы 4.2.1 точка A не является предельной точкой множества Y.

Если $J(A) > 0$, то существует точка $A_1 \in Y$, самая близкая по кривой Γ до точки A. Обозначим через S_0 максимальную дугу линии уровня функции $u(x,y)$ с концами в точках A_1 и $C_0 = (c_0, 0)$. Пусть $\Gamma_0 = \overset{\smile}{AA_1} \cup A_1 \cup S_0$. Если же $J(A) = 0$, то точка $A_1 \equiv A$. Из построения дуги Γ_0 следует, что не найдется пары точек $z \in \overline{\Gamma}_0 \backslash C_0$ и $x \in (0, c_0)$, которые можно было соединить линией уровня функции $u(x,y)$. Отсюда следует, что функция $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ монотонна вдоль кривой Γ_0.

Отметим, что в случае гармонической функции $u(x,y)$ существование такой кривой Γ_0 указано в работе [206].

Из того, что якобиан $J(z) = K(y)u_x^2 + u_y^2$ на любом замкнутом подмножестве множества $D_1 \cup \Gamma$ может иметь конечное число нулей, следует, что кривая Γ_0 является кусочно-гладкой на этом подмножестве. Но в целом, кривая Γ_0 может оказаться неспрямляемой.

Теперь непосредственно перейдем к доказательству теоремы 4.2.2, считая, что кривая Γ_0 является спрямляемой.

Из точки $C_0 = (c_0, 0)$ проведем характеристику уравнения (4.2.11) до пересечения с отрезком AA' в точке $A_0 = (0, -a_0)$, $0 < a_0 \leqslant a$. Под G будем понимать область с границей $AA_0 \cup A_0C_0 \cup \Gamma_0$. Аналогично D_i, $i = 1, 2, 3$, введем области G_i.

На множестве $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(0,0)}^{(x,\,y)} 2uv\,dx + (Ku^2 - v^2)\,dy, \tag{4.2.23}$$

который в силу системы (4.2.12) на этом множестве не зависит от пути интегрирования. Отсюда следует, что интеграл (4.2.23) по любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ_i, $i = 1, 2, 3$, лежащей в G_i, равен нулю. Пусть $\gamma_i = \partial G_i$ ориентирована против часовой стрелки. Тогда

$$\int\limits_{\partial G_i} 2uv\,dx + (Ku^2 - v^2)\,dy = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.2.24}$$

Поскольку функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в $\overline{G}$, то из равенства (4.2.24) получим

$$\int\limits_{\partial G} 2uv\,dx + (Ku^2 - v^2)\,dy = 0$$

или с учетом однородных граничных условий (4.1.4), (4.1.5) задачи Ф и (4.2.14)

$$\int\limits_{AA_0} K(y)u^2(0, y)\,dy + \int\limits_{A_0C_0} 2uv\,dx + (Ku^2 - v^2)\,dy - \int\limits_{\Gamma_0} v^2\,dy = 0. \tag{4.2.25}$$

Рассмотрим по отдельности интегралы из равенства (4.2.25). На основании однородного граничного условия (4.1.6) и условия 1) теоремы 4.2.2 имеем

$$\int\limits_{AA_0} K(y)u^2(0, y)\,dy = -\int\limits_0^a K(y)u^2(0, y)\,dy - \int\limits_0^{a_0} K(-y)u^2(0, -y)\,dy =$$

$$= -\int\limits_0^{a_0} [K(y) + K(-y)]u^2(0, y)\,dy - \int\limits_{a_0}^{a} K(y)u^2(0, y)\,dy \leqslant 0. \tag{4.2.26}$$

С учетом того, что вдоль характеристики A_0C_0: $dx = \sqrt{-K(y)}\,dy$, второй интеграл из левой части (4.2.25) примет вид

$$\int\limits_{A_0C_0} 2uv\,dx + (Ku^2 - v^2)\,dy = -\int\limits_{A_0C_0} (\sqrt{-K}\,u - v)^2\,dy \leqslant 0. \tag{4.2.27}$$

Интегрируя по частям в третьем интеграле из (4.2.25), получим

$$\int\limits_{\Gamma_0} v^2\,dy = -2\int\limits_{\Gamma_0} yv\,dv \leqslant 0, \tag{4.2.28}$$

так как вдоль кривой Γ_0: $v\ dv \leqslant 0$. Поэтому из соотношений (4.2.26)–(4.2.28) следует, что каждое слагаемое в левой части равенства (4.2.25) равно нулю. Отсюда вытекает, что $2vdv = dv^2 = 0$ всюду на Γ_0, т. е. $v = 0$ на кривой Γ_0. Тогда в силу единственности решения задачи Коши для эллиптической системы (4.2.12) [235, 31] заключаем, что $u = v \equiv 0$ в замкнутой области G_1, но, значит, и в области D. Если Γ_0 является неспрямляемой, то в качестве области G_1 следует взять область $G_{1\varepsilon}$, получаемую из G_1 выбрасыванием круга $K_1 = \{|z - c_0| \leqslant \varepsilon\}$ и $K_2 = \{|z - ia| \leqslant \varepsilon\}$ (если $A_1 \equiv A$), и проделать то, что сделано в случае спрямляемой кривой, а затем перейти к $\varepsilon \to 0$. Тогда придем к тому же заключению. Тем самым теорема 4.2.2 полностью доказана.

4.2.3. Единственность решения задачи Франкля для уравнения с оператором Геллерстедта. Здесь рассмотрим задачу Франкля для уравнения (4.1.1) при $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m$, $m \geqslant 0$, $\lambda(y) = \lambda = \mathrm{const} \neq 0$, т. е. для уравнения

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0. \tag{4.2.29}$$

В дальнейшем задачу Ф для уравнения (4.2.29) эквивалентным образом сведем к задаче Ф для уравнения типа (4.2.11) на плоскости новых переменных.

В зависимости от знака λ рассмотрим случаи, когда $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

Пусть $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$. Введем новую функцию $z(x, y)$ по формуле

$$z(x, y) = u(x, y) \exp\left[-\int\limits_0^y b(t)\,dt\right], \tag{4.2.30}$$

которая является решением уравнения

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^m z_{xx} + z_{yy} + 2b(y) z_y = 0, \tag{4.2.31}$$

где функция $b(y)$ определяется как решение уравнения Риккати,

$$b'(y) + b^2(y) - \alpha^2 = 0,$$

и имеет вид

$$b(y) = \alpha \frac{1 + k\exp(-2\alpha y)}{1 - k\exp(-2\alpha y)}, \tag{4.2.32}$$

где k — произвольная постоянная, которая определяется так, чтобы $1 - k\exp(-2\alpha y) \neq 0$ в $\overline{D}$.

На плоскости (x, y) введем новые переменные (θ, σ) так, чтобы уравнение (4.2.31) в этих координатах преобразовалось к уравнению типа (4.2.11)

$$K(\sigma) z_{\theta\theta} + z_{\sigma\sigma} = 0; \tag{4.2.33}$$

при этом функция $K(\sigma)$ должна быть такой, что $\sigma K(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$ и удовлетворять условиям теоремы 4.2.2. Пусть такая $K(\sigma)$ существует. Тогда заменой переменных

$$x = \theta, \quad y = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \left(\operatorname{sgn}\sigma \cdot \frac{1}{\beta} \int\limits_0^\sigma \sqrt{|K(t)|}\, dt \right)^\beta, \tag{4.2.34}$$

где $\beta = 2/(m+2)$, уравнение (4.2.33) преобразуется к уравнению вида

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^m z_{xx} + z_{yy} + \frac{y_{\sigma\sigma}}{y_\sigma^2} z_y = 0. \tag{4.2.35}$$

Сопоставляя уравнения (4.2.31) и (4.2.35), получим условие для нахождения функции $K(\sigma)$:

$$\frac{y_{\sigma\sigma}}{y_\sigma^2} = 2b(y) = 2\alpha \, \frac{1 + k \exp(-2\alpha y)}{1 - k \exp(-2\alpha y)}. \tag{4.2.36}$$

Из уравнения (4.2.36) и формул замены (4.2.34) при $\sigma > 0$ получим

$$\frac{dK(\sigma)}{K(\sigma)} + \frac{2(\beta - 1)}{\beta} \frac{dy}{y} = 4\alpha \, \frac{1 + k \exp(-2\alpha y)}{1 - k \exp(-2\alpha y)} \, dy. \tag{4.2.37}$$

Решение уравнения (4.2.37) определяется формулой

$$K(\sigma) = y^m [\exp(\alpha y) - k \exp(-\alpha y)]^4 k_0^2, \quad k_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Аналогично, из (4.2.36) и (4.2.34) при $\sigma < 0$ находим

$$K(\sigma) = -(-y)^m [\exp(\alpha y) - k \exp(-\alpha y)]^4 k_0^2.$$

Итак, функция $K(\sigma)$ имеет вид

$$K(\sigma) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m [\exp(\alpha y) - k \exp(-\alpha y)]^4 k_0^2. \tag{4.2.38}$$

Теперь найдем связь между переменными y и σ. На основании равенств (4.2.38) и (4.2.34) получим

$$\frac{dy}{d\sigma} = \sqrt{|K(\sigma)|}\ |y|^{(\beta-1)/\beta} = \sqrt{|K(\sigma)|}\, |y|^{-m/2} = \\ = k_0 [\exp(\alpha y) - k \exp(-\alpha y)]^2 \geqslant \delta_1 > 0 \tag{4.2.39}$$

при всех $(x, y) \in \overline{D}$. Отсюда будем иметь

$$y = \frac{1}{2\alpha} \ln \left[k - \frac{k-1}{1 + 2\alpha(k-1)\sigma k_0} \right]. \tag{4.2.40}$$

Из соотношений (4.2.39) и (4.2.40) следует, что $y = 0 \Leftrightarrow \sigma = 0$. Если, например, при $0 \leqslant k < 1$ постоянная k_0 удовлетворяет неравенству $0 < k_0 < [2\alpha(1-k)\sigma_{\max}]^{-1}$, а при $k > 1$ — неравенству $k_0 > [2\alpha(k-1)|\sigma_{\min}|\,]^{-1}$, то из формулы (4.2.40) вытекает, что $y\sigma > 0$, т. е. y и σ одного знака.

Для функции (4.2.38) проверим условие 1) теоремы 4.2.2. На основании формул (4.2.38) и (4.2.39) нетрудно показать, что

$$K(\sigma) \in C[\sigma_{\min}, 0] \cap C^{\infty}[\sigma_{\min}, 0) \cap C[0, \sigma_{\max}] \cap C^{\infty}(0, \sigma_{\max}]$$

и при $\sigma \geqslant 0$

$$\begin{aligned} K(\sigma) + K(-\sigma) = y^m k_0^2\,[\exp(\alpha y) - k\exp(-\alpha y)]^4 - \\ - y^m k_0^2\,[\exp(-\alpha y) - k\exp(\alpha y)]^4 = y^m k_0^2\,\{[\exp(\alpha y) - \\ - k\exp(-\alpha y)]^2 + [\exp(-\alpha y) - k\exp(\alpha y)]^2\} \times \\ \times [\exp(\alpha y) + \exp(-\alpha y)]\,[\exp(\alpha y) - \exp(-\alpha y)](1-k^2) \geqslant 0 \end{aligned}$$

только тогда, когда $0 \leqslant |k| < 1$.

Пусть теперь $\lambda = -\alpha^2$. Рассуждая аналогично рассмотренному выше, введем новую функцию $z(x,y)$ по формуле (4.2.30). При этом функция $b(y)$ определяется как решение уравнения Риккати,

$$b'(y) + b^2(y) + \alpha^2 = 0$$

и она имеет вид $b(y) = \alpha\,\mathrm{tg}[\alpha(d-y)]$, где постоянная d находится из условия

$$y_{\max} - \frac{\pi}{2d} < d < y_{\min} + \frac{\pi}{2d}\,. \tag{4.2.41}$$

Из (4.2.41) следует, что функция $b(y)$ существует, если

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{y_{\max} - y_{\min}}. \tag{4.2.42}$$

На основании отображения $(x,y) \to (\theta,\sigma)$, где x и y заданы формулами (4.2.34), снова получим уравнение типа (4.2.33)

$$K(\sigma) z_{\theta\theta} + z_{\sigma\sigma} = 0, \tag{4.2.43}$$

где

$$K(\sigma) = \mathrm{sgn}\, y \cdot |y|^m \cos^4[\alpha(d-y)] d_0^2, \tag{4.2.44}$$

$$\frac{dy}{d\sigma} = d_0 \cos^2[\alpha(d-y)], \quad d_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{4.2.45}$$

Решая уравнение (4.2.45), получим зависимость между переменными y и σ:

$$y = d + \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arctg}\,[\alpha d_0\,\sigma - \mathrm{tg}\,(\alpha d)]. \tag{4.2.46}$$

Из формулы (4.2.46) следует, что $y = 0 \Leftrightarrow \sigma = 0$ и переменные y и σ одного знака. Справедливость последнего утверждения обосновывается на основании (4.2.41) и (4.2.42).

Остается для уравнения (4.2.43), где коэффициент $K(\sigma)$ задан формулой (4.2.44), проверить условие 1) теоремы 4.2.2.

Достаточно проверить следующее неравенство при $\sigma \geqslant 0$:

$$K(\sigma) + K(-\sigma) = y^m d_0^2 \cos^4[\alpha(d-y)] - y^m d_0^2 \cos^4[\alpha(d+y)] = \\ = y^m d_0^2 \left\{\cos^2[\alpha(d-y)] + \cos^2[\alpha(d+y)]\right\} \sin(2\alpha d) \sin(2\alpha y) \geqslant 0,$$

если $\sin(2\alpha d)\sin(2\alpha y) \geqslant 0$. А последнее неравенство справедливо в силу условий (4.2.41) и (4.2.42).

Таким образом, введением новой функции $z(x,y)$ и новых переменных (θ,σ) задача Ф для уравнения (4.2.31) в области D эквивалентно сведена к задаче Ф для уравнений (4.2.33) и (4.2.43). При этом коэффициент $K(\sigma)$ этих уравнений удовлетворяет условиям теоремы 4.2.2.

Следовательно, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4.2.3. *Если в классе регулярных в D решений уравнения* (4.2.31) *существует решение задачи* Ф, *то оно единственно при всех λ, удовлетворяющих неравенству* (4.2.10), *т. е. неравенству*

$$\lambda > -\left(\frac{\pi}{y_{\max} - y_{\min}}\right)^2,$$

где $y_{\min} = -a$, $y_{\max} \geqslant a$, a — ордината точки A.

Замечание 4.2.2. Видно, что при доказательстве теорем 4.2.1 и 4.2.3 нашло свое применение известное уравнение Риккати. По-видимому, это не случайно, так как о значении этого нелинейного уравнения в теории линейных краевых задач математической физики со спектральным параметром отмечено в книгах [58, 156, 225]. В теории уравнений смешанного типа преобразование, связанное с уравнением Риккати, использовалось в работах [5, 59, 151, 201]. Отметим, что в пунктах 4.2.1 и 4.2.2 изложены наши совместные с Н.Ю. Капустиным результаты, опубликованные в работах [83–86].

4.2.4. Принцип максимума для аналога задачи Франкля. В этом пункте рассмотрим несколько иной аналог задачи Франкля для общего уравнения смешанного типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = F(x,y), \tag{4.2.47}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D (см. § 4.1).

Задача $\widetilde{\Phi}$. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_-); \tag{4.2.48}$$

$$Lu(x,y) \equiv F(x,y), \quad (x,y) \in D_1 \cup D_-; \tag{4.2.49}$$

$$u(0,y) - u(0,-y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant a; \tag{4.2.50}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in CB \cup \Gamma; \tag{4.2.51}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in A'C, \tag{4.2.52}$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(C) = \psi(C)$, $D_- = D_2 \cup D_3 \cup OP$.

Задача $\widetilde{\Phi}$ отличается от задачи Франкля тем, что граничное условие (4.1.7) на отрезке AA' заменено на условие (4.2.52) вдоль характеристики $A'C$.

Оказывается, что для задачи (4.2.48)–(4.2.52) справедлив принцип экстремума, установленный в § 1.3.

Определение. Регулярным в области D решением уравнения (4.2.47) назовем функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (4.2.48), (4.2.49) и, кроме того, дополнительно потребуем, чтобы производная u_ξ принадлежала классу:

$$u_\xi \in C(\overline{D}_- \backslash \overline{OC}),$$

где

$$\xi = x + \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt, \quad \eta = x - \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt, \qquad (4.2.53)$$

$$K(y) \in C[-a,0] \cap C^2[-a,0).$$

В области D_- перейдем к характеристическим координатам (4.2.53). Тогда уравнение (4.2.47) примет вид

$$L_0 u \equiv u_{\xi\eta} + a u_\xi + b u_\eta + c u = f(\xi,\eta), \qquad (4.2.54)$$

где

$$a(\xi,\eta) = (A + B\sqrt{-K} - K'/2\sqrt{-K}\,)/4K, \quad c = C/4K,$$

$$b(\xi,\eta) = (A - B\sqrt{-K} + K'/2\sqrt{-K}\,)/4K, \quad f = F/4K,$$

а область D_- отображается в область Δ, ограниченную отрезками O_0C_0 ($\eta = \xi$), $C_0A'_0$ ($\eta = c = l > 0$) и A'_0O_0 ($\eta = -\xi$) (см. рис. 4.3).

Пусть $\alpha^*(\xi,\eta) = b(\xi,\eta)\beta^*(\xi,\eta)$, $\beta^*(\xi,\eta) = \int a(\xi,\eta)d\eta$; функции $b(\xi,\eta)$, $b_\eta(\xi,\eta)$, $a(\xi,\eta)$ и $c(\xi,\eta)$ непрерывны на множестве $\Delta \cup A'_0O_0$ и удовлетворяют там одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h^*(\xi,\eta) = b_\eta + ba - c \geqslant 0, \\ \alpha^*(\xi,l) - \int\limits_\eta^l \beta^*(\xi,t)c(\xi,t)\,dt < 0; \end{cases} \qquad (A_1^*)$$

$$\alpha^*(\xi,\eta) + \int\limits_\eta^l \beta^*(\xi,t)|h^*(\xi,t)|\,dt < 0. \qquad (A_2^*)$$

Предполагается, что правая часть $f(\xi, \eta)$ уравнения (4.2.54) интегрируема по η на каждом отрезке $[\eta_0, l]$ характеристики $\xi = \xi_0$, где $-\eta_0 \leqslant \xi_0 < \eta_0$.

Теорема 4.2.4. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (4.2.47) *в области* D_1 *ограничены и* $C(x, y) \leqslant 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (4.2.47) *и его правая часть* $F(x, y)$ *в характеристических координатах* (ξ, η), *т. е. коэффициенты уравнения* (4.2.54) *и функция* $f(\xi, \eta)$, *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (A_1^*); 3) $F(x, y) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *на множестве* $D_1 \cup D_-$; 4) $u(x, y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (4.2.47), *равное нулю на характеристике* $A'C$. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D}} u(x, y) > 0$ $\big(\min\limits_{\overline{D}} u(x, y) < 0\big)$, *то этот максимум* (*минимум*) *достигается на кривой* $\overline{CB \cup \Gamma}$.

Теорема 4.2.5. *Пусть*: 1) *коэффициенты уравнения* (4.2.47) *в области* D_1 *ограничены и* $C(x, y) \leqslant 0$; 2) *коэффициенты уравнения* (4.2.47) *в характеристических координатах* (ξ, η), *т. е. коэффициенты уравнения* (4.2.54), *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (A_2^*); 3) $F(x, y) \equiv 0$; 4) $u(x, y)$ — *регулярное в* D *решение уравнения* (4.2.46), *равное нулю на характеристике* $A'C$. *Тогда если* $\max\limits_{\overline{D}} u(x, y) > 0$, *то он достигается только на кривой* $\overline{CB \cup \Gamma}$.

Доказательство теорем 4.2.4 и 4.2.5 проводятся аналогично соответствующим утверждениям § 1.3 гл. 1.

Из этих теорем очевидным образом следует единственность решения задачи Ф для уравнения (4.2.46) в классе его регулярных в D решений без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Г.

В качестве примера рассмотрим обобщенное уравнение Трикоми,

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > 0.$$

В этом случае легко заметить, что выполнены все условия 1)–3) теоремы 4.2.4. Следовательно, для последнего уравнения справедлива теорема 4.2.4.

Отметим, что теоремы 4.2.4 и 4.2.5 переносятся в класс обобщенных в D решений уравнения (4.2.47). Тогда аналогично § 1.5 альтернирующим методом типа Шварца можно доказать однозначную разрешимость обобщенного решения задачи $\widetilde{\Phi}$ при произвольном подходе кривой Г к осям координат.

§ 4.3. К вопросу о существовании решения задачи Франкля методом интегральных уравнений

В обзоре, приведенном в § 4.1, было указано, что в работах [46, 47] доказаны единственность и существование решения задачи Ф для уравнения

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0, \tag{4.3.1}$$

где $m \geqslant 0$, $\lambda = \mathrm{const}$, в области D при $m > 1$, $a = 1$, $c = 2/(m+2)$, $\lambda = 0$ и указанных в § 4.1 ограничениях на кривую Γ. В [201, гл. 4] при условии, когда кривая Γ в точках A и B оканчивается сколь угодно малыми дугами нормальной кривой, показано существование решения задачи Ф при $m > 0$ и $\lambda = 0$. В этих работах из единственности решения задачи Ф вытекает ее существование, так как последнее проводится методом интегральных уравнений. На основании этих результатов и теоремы 4.2.3 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.3.1. *Если*: 1) *кривая* Γ *в точках* A *и* B *оканчивается сколь угодно малыми дугами нормальной кривой*; 2) *граничные функции* $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(x)$ *и* $\varphi_3(y)$ *удовлетворяют условиям работы* [201, с. 235], *то в классе регулярных в* D *решений уравнения* (4.3.1) *существует решение задачи* Ф *при всех* $m > 0$ *и* $\lambda = 0$.

Теорема 4.3.2. *Если кривая* Γ *и функции* $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(x)$ *и* $\varphi_3(y)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 4.3.1, *то в классе регулярных в* D *решений уравнения* (4.3.1) *существует решение задачи* Ф *при всех* m *и* λ, *удовлетворяющих неравенствам*

$$m > 0 \quad \text{и} \quad \lambda > -\left(\frac{\pi}{y_{\max} - y_{\min}}\right)^2.$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично [26] методом интегральных уравнений и с применением теоремы 4.2.3.

В дальнейшем рассмотрим в области D уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{4.3.2}$$

где λ — комплексное число.

Теорема 4.3.3. *Если функция* $u_0(x, y)$ *является в области* D *регулярным решением уравнения*

$$u_{0xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{0yy} = 0, \quad u_0(0,0) = 0, \tag{4.3.3}$$

то функция

$$u(x,y) =$$

$$= \begin{cases} u_0(x,y) - \int\limits_0^1 u_0(xt,yt)\dfrac{\partial}{\partial t}J_0\Big[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}\Big]dt, & (x,y)\in D_1,\\ u_0(x,y) - \int\limits_0^1 u_0(xt,yt)\dfrac{\partial}{\partial t}J_0\Big[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)(1-t)}\Big]dt, & (x,y)\in D_2,\\ u_0(x,y) - \int\limits_0^1 u_0(xt,yt)\dfrac{\partial}{\partial t}J_0\Big[\sqrt{\lambda(y^2-x^2)(1-t)}\Big]dt, & (x,y)\in D_3,\end{cases} \tag{4.3.4}$$

является регулярным в D решением уравнения (4.3.2), *при этом область D_1 предполагается звездной относительно начала координат.*

Справедливость этого утверждения следует из результатов § 2.3.

Формула (4.3.4) позволяет решение задачи Ф для уравнения (4.3.2) в случае $C \equiv B$ с краевыми условиями $u = \varphi$ на Γ и $u(0,y) - u(0,-y) = f(y)$, $0 \leqslant y \leqslant a$, свести к решению задачи Ф для уравнения (4.3.3) с условиями $u_0 = \varphi_0$ на Γ и $u_0(0,y) - u_0(0,-y) = f_0(y)$, $0 \leqslant y \leqslant a$.

Действительно, пусть $u_0(x,y)$ — решение задачи Ф для уравнения (4.3.3) с отмеченными выше условиями. Тогда из формулы (4.3.4) имеем

$$u(0,y) = u_0(0,y) - \int\limits_0^1 u_0(0,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[y\sqrt{\lambda(1-t)}\right]dt,\ y \geqslant 0,$$

$$u(0,y) = u_0(0,y) - \int\limits_0^1 u_0(0,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[-y\sqrt{\lambda(1-t)}\right]dt,\ y \leqslant 0,$$

или

$$u(0,-y) = u_0(0,-y) - \int\limits_0^1 u_0(0,-yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[y\sqrt{\lambda(1-t)}\right]dt,\ y \geqslant 0.$$

Отсюда

$$f(y) = u(0,y) - u(0,-y) = u_0(0,y) - u_0(0,-y) -$$
$$- \int\limits_0^1 [u_0(0,yt) - u_0(0,-yt)]\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[y\sqrt{\lambda(1-t)}\right]dt =$$

$$= f_0(y) - \int_0^1 f_0(yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[y\sqrt{\lambda(1-t)}\right]dt =$$

$$= f_0(y) - \int_0^y f_0(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\sqrt{\lambda y(y-s)}\right]ds.$$

Обращая последнее интегральное уравнение по теореме 2.2.1, находим функцию

$$f_0(y) = f(y) + \int_0^y f(s)\frac{y}{s}\,\frac{\partial}{\partial y}I_0\left[\sqrt{\lambda s(y-s)}\right]ds,$$

которая имеет ту же гладкость, что и функция $f(y)$ и $f_0(0)=0$ при $f(0)=0$.

Для нахождения функции $\varphi_0(s)$ поступим так. В области D_1 выпишем методом Грина решение $u_0(x,y)$ задачи Ф для уравнения (4.3.3) и подставим его в интегральный член формулы (4.3.4) при $y>0$. В двойном интеграле, меняя порядок интегрирования и устремляя точку $(x,y)\to(x_0(s),y_0(s))\in\Gamma$, получим интегральное уравнение относительно $\varphi_0(s)$, к которому при известных условиях на функции $\varphi(s)$ и $f(y)$ [23, с. 340] применима теория Фредгольма.

§ 4.4. Спектральная задача Франкля

Рассмотрим уравнение с оператором Лаврентьева–Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y\cdot u_{yy} + \lambda\operatorname{sgn}(x+y)\cdot u = 0, \tag{4.4.1}$$

где λ — комплексный параметр, в области D (см. рис. 4.1.1, $c=a$) и поставим следующую спектральную задачу Франкля.

Задача Φ_λ. *Найти значения параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям*:

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D\cup AO\cup OA'\setminus OP)\cap C^2(D_1\cup D_2\cup D_3); \tag{4.4.2}$$

$$Lu(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in D_1\cup D_2\cup D_3; \tag{4.4.3}$$

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in CB\cup\Gamma; \tag{4.4.4}$$

$$u(0,-y)-u(0,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant a; \tag{4.4.5}$$

$$u_x(0,y)=0,\quad 0<|y|<a. \tag{4.4.6}$$

4.4.1. Сведение задачи Φ_λ к эллиптической нелокальной задаче. Предварительно для уравнения (4.4.1) в областях D_2 и D_3 построим в явном виде решение задачи Дарбу (см. гл. 2).

Задача Дарбу. *Найти в области* D_2 *решение* $u(x,y)$ *уравнения* (4.4.1), *удовлетворяющее краевым условиям*:

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < a; \tag{4.4.7}$$

$$u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a/2, \tag{4.4.8}$$

где $\nu(x)$ *и* $\psi(x)$ *будем считать известными функциями.*

Согласно теореме 2.1.2, если $\nu(x) \in C^1(0,a) \cap L_1[0,a]$, $\psi_1(x) = \psi(x/2) \in C[0,a] \cap C^2(0,a)$, $\psi_1'(x) \in L_1[0,a]$, то существует единственное решение задачи (4.4.1), (4.4.7) и (4.4.8) и оно определяется формулой

$$u(x,y) = \int\limits_0^{x+y} \nu(t) J_0 \left[\sqrt{\lambda(t-x-y)(t-x+y)}\right] dt + \\ + \int\limits_0^{x-y} \psi_1'(t) B(0,t;x+y,x-y)\, dt, \tag{4.4.9}$$

где $J_0(\,\cdot\,)$ — функция Бесселя, $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$, $B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ — функция Римана–Адамара (см. § 2.1 гл. 2).

Задача Дарбу. *Найти в области* D_3 *решение* $u(x,y)$ *уравнения* (4.4.1), *удовлетворяющее краевым условиям* (4.4.8) *и*

$$u_x(0,y) = 0, \quad -a < y < 0. \tag{4.4.10}$$

Отметим, что уравнение (4.4.1) в области D_3 имеет вид

$$u_{xx} - u_{yy} - \lambda u = 0,$$

которое заменой x на $-y$, y на $-x$ сводится к уравнению (4.4.1) в области D_2. Поэтому если функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям, отмеченным выше, то исходя из формулы (4.4.9) нетрудно получить решение задачи (4.4.1), (4.4.8) и (4.4.10) в явном виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^{x-y} \psi_1'(t) B(0,t;-x-y,x-y)\, dt. \tag{4.4.11}$$

На основании формул (4.4.9) и (4.4.11) сведем задачу (4.4.2)–(4.4.6) к нелокальной эллиптической задаче. Полагая в формуле (4.4.9) $y = 0$, получим

$$u(x,0) = \tau(x) = \int\limits_0^{x} \nu(t) J_0 \left[\sqrt{\lambda}\,(x-t)\right] dt + \\ + 2\int\limits_0^{x} \psi_1'(t) J_0 \left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{4.4.12}$$

Из формулы (4.4.11) при $x = 0$ имеем

$$u(0,y) = 2\int\limits_0^{-y} \psi_1'(t) J_0\left[\sqrt{\lambda y(y+t)}\right] dt, \quad -a \leqslant y \leqslant 0,$$

или

$$u(0,-x) = 2\int\limits_0^{x} \psi_1'(t) J_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right] dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{4.4.13}$$

Тогда на основании (4.4.12) и (4.4.13) и условия (4.4.5) задачи Φ_λ получим

$$\tau(x) = \int\limits_0^{x} \nu(t) J_0\left[\sqrt{\lambda}\,(x-t)\right] dt + u(0,x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a.$$

Таким образом, на основании последнего равенства задача Φ_λ сведена к нелокальной эллиптической задаче на собственные значения: *найти значения параметра λ и соответствующие им собственные функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D_1}) \cap C^1(D_1 \cup OA \cup OC) \cap C^2(D_1); \tag{4.4.14}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_1; \tag{4.4.15}$$

$$u_x(0,y) = 0, \quad 0 < y < a; \tag{4.4.16}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in CB \cup \Gamma; \tag{4.4.17}$$

$$u(x,0) - u(0,x) = \int\limits_0^{x} u_y(t,0) J_0\left[\sqrt{\lambda}\,(x-t)\right] dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \tag{4.4.18}$$

Исследование задачи (4.4.14)–(4.4.18) в общем случае, т. е. когда Γ — произвольная кривая из класса Ляпунова, представляет значительные трудности, и она до сих пор не решена. Здесь рассмотрим случай, когда точки C и B совпадают, $a = c = b = 1$ и кривая Γ совпадает с частью окружности $x^2 + y^2 = 1$, $x, y > 0$.

4.4.2. Построение собственных значений и функций задачи $\boldsymbol{\Phi_\lambda}$. Пусть D_1 — четверть круга $(x^2 + y^2 < 1,\ x, y > 0)$. В этой области введем полярные координаты: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r^2 = x^2 + y^2$, $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \pi/2$. В полярных координатах (r,φ), разделяя переменные $u(x,y) = v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ в задаче (4.4.15)–(4.4.18), получим

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2}\right)R(r) = 0, \tag{4.4.19}$$

$$|R(0)| < +\infty, \quad R(1) = 0, \tag{4.4.20}$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi/2, \tag{4.4.21}$$

$$\Phi'(\pi/2) = 0, \tag{4.4.22}$$

$$R(x)\left[\Phi(0) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \Phi'(0)\int_0^x t^{-1}R(t)J_0\left[\sqrt{\lambda}\,(x-t)\right]dt, \tag{4.4.23}$$

где μ — постоянная разделения.

Известно, что решением уравнения (4.4.19), удовлетворяющим условиям (4.4.20), является функция Бесселя

$$R(r) = J_\mu(\sqrt{\lambda}\,r), \quad \operatorname{Re}\mu \geqslant 0. \tag{4.4.24}$$

Подставляя функцию (4.4.24) в равенство (4.4.23) и вычисляя интеграл по формуле 2.12.33.6 [165, Т. 2], находим второе нелокальное граничное условие

$$\Phi'(0) + \mu[\Phi(\pi/2) - \Phi(0)] = 0 \tag{4.4.25}$$

для построения функции $\Phi(\varphi)$. Решая краевую задачу (4.4.21), (4.4.22) и (4.4.25), находим две серии собственных функций:

$$\Phi_n^{(1)}(\varphi) = \cos\mu_n^{(1)}\varphi = \cos 4n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.4.26}$$

$$\Phi_n^{(2)}(\varphi) = \sin\mu_n^{(2)}\varphi = \sin(4n-1)\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.4.27}$$

Теперь, учитывая найденные значения μ и удовлетворяя функцию (4.4.24) второму условию из (4.4.20), получим

$$J_{4n}(\sqrt{\lambda}\,) = 0, \quad J_{4n-1}(\sqrt{\lambda}\,) = 0. \tag{4.4.28}$$

Из теории бесселевых функций [28] известно, что функция Бесселя $J_\nu(z)$ при $\nu > -1$ имеет только вещественные нули. Тогда, обозначая через $\alpha_{n,m}$ m-й корень первого уравнения, а через $\beta_{n,m}$ — m-й корень второго уравнения из (4.4.28), находим две системы положительных собственных значений задачи Φ_λ:

$$\lambda_{n,m}^{(1)} = \alpha_{n,m}^2, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.4.29}$$

$$\lambda_{n,m}^{(2)} = \beta_{n,m}^2, \quad n, m = 1, 2, \ldots. \tag{4.4.30}$$

На основании (4.4.24), (4.4.26) и (4.4.27) получим соответствующие значениям (4.4.29) и (4.4.30) собственные функции задачи Φ_λ в области D_1:

$$u_{n,m}^{(1)}(x,y) = v_{n,m}^{(1)}(r,\varphi) = J_{4n}(\alpha_{n,m}r)\cos(4n\varphi), \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.4.31}$$

$$u_{n,m}^{(2)}(x,y) = v_{n,m}^{(2)}(r,\varphi) = J_{4n-1}(\beta_{n,m}r)\sin(4n-1)\varphi, \quad n, m = 1, 2, \ldots. \tag{4.4.32}$$

Для построения собственных функций задачи Φ_λ в областях D_2 и D_3 можно воспользоваться формулами (4.4.9) и (4.4.11) или формулой решения задачи Коши для уравнения (4.4.1) при $y < 0$ (см. § 2.1). Из-за громоздкости этих подходов предложим здесь несколько иной метод построения собственных функций задачи Φ_λ в областях D_2 и D_3. В области D_2 введем новые переменные

$$\sigma = \sqrt{x^2 - y^2}\,, \quad \theta = -\frac{y^2}{x^2 - y^2}.$$

Тогда уравнение (4.4.1) при $y < 0$ принимает вид

$$4\theta(1-\theta)u_{\theta\theta} + 4\Big(\frac{1}{2} - \theta\Big)u_\theta + \sigma^2 u_{\sigma\sigma} + \sigma u_\sigma + \lambda\sigma^2 u = 0. \qquad (4.4.33)$$

В уравнении (4.4.33), резделяя переменные $u(x,y) = P(\sigma)Q(\theta)$, получим

$$P''(\sigma) + \frac{1}{\sigma}P'(\sigma) + \Big(\lambda - \frac{\rho^2}{\sigma^2}\Big)P(\sigma) = 0, \quad 0 < \sigma < 1, \qquad (4.4.34)$$

$$\theta(1-\theta)Q''(\theta) + \Big(\frac{1}{2} - \theta\Big)Q'(\theta) + \frac{\rho^2}{4}Q(\theta) = 0, \quad -\infty < \theta < 0, \quad (4.4.35)$$

где ρ — постоянная разделения. Поскольку решение $u(x,y)$ ограничено в D, то в качестве решений уравнения (4.4.34) возьмем функцию Бесселя

$$P(\sigma) = J_\rho(\sqrt{\lambda}\,\sigma), \ \operatorname{Re}\rho \geqslant 0. \qquad (4.4.36)$$

Уравнение (4.4.35) представляет собой известное гипергеометрическое уравнение [10, Т. 1], поэтому его общее решение определяется формулой

$$Q(\theta) = k_1'(1-\theta)^{\rho/2}\,{}_2F_1\Big(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\theta}{\theta - 1}\Big) + \\ + k_2'(1-\theta)^{-\rho/2}\,{}_2F_1\Big(\frac{\rho}{2}, \frac{1+\rho}{2}, 1+\rho; \frac{1}{1-\theta}\Big), \quad (4.4.37)$$

где k_1' и k_2' — произвольные постоянные. Далее на основании следующих формул [10, Т. 1, с. 110]:

$${}_2F_1\Big(a, a+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\Big) = \frac{1}{2}\,(1+\sqrt{z}\,)^{-2a} + \frac{1}{2}\,(1-\sqrt{z}\,)^{-2a},$$

$${}_2F_1\Big(a - \frac{1}{2}, a, 2a; z\Big) = \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-z}\,\Big)^{1-2a},$$

соотношение (4.4.37) представляется в виде

$$Q(\theta) = k_1\Big(\frac{x-y}{x+y}\Big)^{\rho/2} + k_2\Big(\frac{x+y}{x-y}\Big)^{\rho/2}, \qquad (4.4.38)$$

где k_1 и k_2 — постоянные. Тогда в силу (4.4.36) и (4.4.38) решение уравнения (4.4.1) в области D_2 определяется формулой

$$u(x,y) = \Big[k_1\Big(\frac{x-y}{x+y}\Big)^{\rho/2} + k_2\Big(\frac{x+y}{x-y}\Big)^{\rho/2}\Big] J_\rho\left[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right]. \quad (4.4.39)$$

Из формул (4.4.31) и (4.4.32) вычислим

$$\tau^{(1)}_{n,m}(x) = u^{(1)}_{n,m}(x,0) = J_{4n}(\alpha_{n,m}x), \tag{4.4.40}$$

$$\nu^{(1)}_{n,m}(x) = \frac{\partial}{\partial y}\, u^{(1)}_{n,m}(x,y)|_{y=0} = 0, \tag{4.4.41}$$

$$\tau^{(2)}_{n,m}(x) = u^{(2)}_{n,m}(x,0) = 0, \tag{4.4.42}$$

$$\nu^{(2)}_{n,m}(x) = \frac{\partial}{\partial y}\, u^{(2)}_{n,m}(x,y)|_{y=0} = (4n-1)x^{-1}J_{4n-1}(\beta_{n,m}x). \tag{4.4.43}$$

Если теперь в формуле (4.4.39) положить, что $\rho = 4n$, $\lambda = \lambda^{(1)}_{n,m}$, $k_1 = k_2 = 1/2$, то она определяет решение задачи Коши для уравнения (4.4.1) в области D_2 с краевыми условиями (4.4.40) и (4.4.41). Тогда первая система собственных функций задачи Φ_λ в области D_2 имеет вид

$$u^{(1)}_{n,m}(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{x-y}{x+y}\Big)^{2n} + \Big(\frac{x+y}{x-y}\Big)^{2n}\Big] J_{4n}\big[\alpha_{n,m}\sqrt{x^2-y^2}\,\big]. \tag{4.4.44}$$

Для получения второй системы собственных функций задачи Φ_λ в области D_2 достаточно в (4.4.39) положить $\rho = 4n-1$, $k_2 = -k_1 = 1/2$, $\lambda = \lambda^{(2)}_{n,m}$. Тогда она будет определять решение задачи Коши для уравнения (4.4.1) в области D_2 с краевыми условиями (4.4.42) и (4.4.43). Тем самым получаем вторую систему собственных функций задачи Φ_λ в D_2:

$$u^{(2)}_{n,m}(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{x+y}{x-y}\Big)^{2n-1/2} - \Big(\frac{x-y}{x+y}\Big)^{2n-1/2}\Big] J_{4n-1}\big[\beta_{n,m}\sqrt{x^2-y^2}\,\big], \tag{4.4.45}$$

где $n,\ m = 1, 2, \ldots$.

Далее построим собственные функции задачи Φ_λ в области D_3. Пусть $(x,y)\in D_3$. Тогда, заменяя в формулах (4.4.44) и (4.4.45) x на $-y$, а y на $-x$, получим собственные функции задачи Φ_λ в области D_3:

$$u^{(1)}_{n,m}(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{y-x}{y+x}\Big)^{2n} + \Big(\frac{y+x}{y-x}\Big)^{2n}\Big] J_{4n}\big[\alpha_{n,m}\sqrt{y^2-x^2}\,\big], \tag{4.4.46}$$

где $n,\ m = 0, 1, 2, \ldots$,

$$u^{(2)}_{n,m}(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{y+x}{y-x}\Big)^{2n-1/2} - \Big(\frac{y-x}{y+x}\Big)^{2n-1/2}\Big] J_{4n-1}\big[\beta_{n,m}\sqrt{y^2-x^2}\,\big], \tag{4.4.47}$$

где $n,\ m = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, объединяя формулы (4.4.31), (4.4.44) и (4.4.46), получим первую систему собственных функций задачи Φ_λ в D

$$u^{(1)}_{n,m}(x,y) = \begin{cases} \cos(4n\varphi) J_{4n}(\alpha_{n,m} r), & (x,y)\in D_1,\\ \dfrac{1}{2}\Big[\Big(\dfrac{x-y}{x+y}\Big)^{2n} + \Big(\dfrac{x+y}{x-y}\Big)^{2n}\Big] J_{4n}\big[\alpha_{n,m}\sqrt{x^2-y^2}\,\big], & (x,y)\in D_2,\\ \dfrac{1}{2}\Big[\Big(\dfrac{y-x}{y+x}\Big)^{2n} + \Big(\dfrac{y+x}{y-x}\Big)^{2n}\Big] J_{4n}\big[\alpha_{n,m}\sqrt{y^2-x^2}\,\big], & (x,y)\in D_3, \end{cases} \tag{4.4.48}$$

а на основании формул (4.4.32), (4.4.45) и (4.4.47) находим вторую систему собственных функций задачи Φ_λ в области D

$$u^{(2)}_{n,m}(x,y) = \begin{cases} \sin(4n-1)\varphi\, J_{4n-1}(\beta_{n,m} r), \quad (x,y)\in D_1,\\ \dfrac{1}{2}\Big[\Big(\dfrac{x+y}{x-y}\Big)^{2n-1/2} - \Big(\dfrac{x-y}{x+y}\Big)^{2n-1/2}\Big]\times\\ \qquad \times J_{4n-1}\big[\beta_{n,m}\sqrt{x^2-y^2}\,\big], \quad (x,y)\in D_2,\\ \dfrac{1}{2}\Big[\Big(\dfrac{y+x}{y-x}\Big)^{2n-1/2} - \Big(\dfrac{y-x}{y+x}\Big)^{2n-1/2}\Big]\times\\ \qquad \times J_{4n-1}\big[\beta_{n,m}\sqrt{y^2-x^2}\,\big], \quad (x,y)\in D_3. \end{cases} \tag{4.4.49}$$

4.4.3. Изучение собственных функций задачи Φ_λ на полноту и базисность.

Теорема 4.4.1. *Система собственных функций* $\{u^{(1)}_{n,m}(x,y)\}$ *задачи* Φ_λ, *заданная формулой* (4.4.48), *не полна в пространстве* $L_2(D)$.

Теорема 4.4.2. *Система собственных функций* $\{u^{(2)}_{n,m}(x,y)\}$ *задачи* Φ_λ, *заданная формулой* (4.4.49), *не полна в пространстве* $L_2(D)$.

Доказательства теорем 4.3.1 и 4.3.2 проводится аналогично [163], и они приведены в нашей работе [188].

Отметим, что задача Φ_λ и соответствующая ей эллиптическая задача (4.4.14)–(4.4.18) являются несамосопряженными. Тогда может оказаться полной система собственных и присоединенных функций. Поэтому естественно возникает вопрос о наличии присоединенных функций у данных систем собственных функций (4.4.48) и (4.4.49) задачи Φ_λ или (4.4.14)–(4.4.18). Для этого вернемся к задачам (4.4.19), (4.4.20) и (4.4.21), (4.4.22), (4.4.25).

Известно, что система собственных функций задачи (4.4.19) и (4.4.20): $\Big\{J_{\mu_n^{(i)}}\Big(\sqrt{\lambda^{(i)}_{n,m}}\, r\Big)\Big\}$, $i=1,2$, при фиксированном n ортогональна и образует базис как система собственных функций первой краевой задачи для дифференциального уравнения Бесселя [209, с. 645]. По этой причине у нее не может быть присоединенных функций.

Краевая задача (4.4.21), (4.4.22) и (4.4.25) является несамосопряженной. Из определения присоединенной функции [90] следует, что присоединенная функция $F_n(\varphi)$ к собственной функции $\Phi_n(\varphi)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$F_n''(\varphi) + \mu_n^2 F_n(\varphi) = -2\mu_n \Phi_n(\varphi), \tag{4.4.50}$$

$$F_n'(\pi/2) = 0, \tag{4.4.51}$$

$$F_n'(0) + \mu_n \left[F_n\left(\frac{\pi}{2}\right) - F_n(0)\right] + \Phi_n\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Phi_n(0) = 0. \tag{4.4.52}$$

Полагая в (4.4.50)–(4.4.52) $\mu_n = \mu_n^{(1)} = 4n$, $\Phi_n(\varphi) = \Phi_n^{(1)}(\varphi) = \cos 4n\varphi$, затем $\mu_n = \mu_n^{(2)} = 4n-1$, $\Phi_n(\varphi) = \Phi_n^{(2)}(\varphi) = \sin(4n-1)\varphi$, убеждаемся, что краевая задача (4.4.50)–(4.4.52) не имеет решения. Следовательно, и у задачи (4.4.21), (4.4.22) и (4.4.25) нет присоединенных функций. Отсюда следует, что задача (4.4.14)–(4.4.18), или задача Φ_λ, не имеет присоединенных функций.

Теперь из двух систем собственных функций $\{\Phi_n^{(1)}(\varphi)\}$ и $\{\Phi_n^{(2)}(\varphi)\}$ задачи (4.4.21), (4.4.22) и (4.4.25) образуем новую систему

$$1,\ \sin 3\varphi,\ \cos 4\varphi,\ \ldots,\ \sin(4n-1)\varphi,\ \cos 4n\varphi, \ldots, \tag{4.4.53}$$

которую обозначим через $\{\Phi_k(\varphi)\}$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу результатов работы [227] система $\{\Phi_k(\varphi)\}$ является полной в пространстве $L_2[0, \pi/2]$.

Теорема 4.4.3. *Система функций* (4.4.53), *т. е. система*

$$\{\cos 4n\varphi\}_{n=0}^{+\infty} \cup \{\sin(4n-1)\varphi\}_{n=1}^{+\infty}, \tag{4.4.54}$$

полна и образует базис в пространстве $L_p[0, \pi/2]$ при всех $p > 1$.

Доказательство. Пусть существует функция $f(\varphi)$ из $L_p[0, \pi/2]$ такая, что

$$\int_0^{\pi/2} f(\varphi) \cos 4n\varphi\, d\varphi = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.4.55}$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\varphi) \sin(4n-1)\varphi\, d\varphi = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.4.56}$$

Прежде заметим, что из условия (4.4.55) вытекает справедливость равенства

$$f(\varphi) = -f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{4.4.57}$$

Действительно, из равенства (4.4.55) имеем

$$0 = \int_0^{\pi/4} f(\varphi)\cos 4n\varphi\, d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(\varphi)\cos\left[4n\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] d\varphi.$$

Во втором интеграле произведем замену $\pi/2 - \varphi = \theta$. Тогда получим

$$0 = \int_0^{\pi/4} \left[f(\varphi) + f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]\cos 4n\varphi\, d\varphi \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \left[f\left(\frac{t}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{4}\right)\right]\cos nt\, dt.$$

Отсюда в силу полноты системы $\{\cos nt\}_{n=0}^{+\infty}$ в пространстве $L_p[0,\pi]$ следует справедливость равенства (4.4.57).

Теперь докажем, что функция $f(\varphi) = 0$ почти всюду в $L_p[0,\pi/2]$. На основании равенств (4.4.56) и (4.4.57) будем иметь

$$0 = \int_0^{\pi/4} f(\varphi)\sin(4n-1)\varphi\, d\varphi - \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(\varphi)\cos\left[(4n-1)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/4} f(\varphi)\sin(4n-1)\varphi\, d\varphi - \int_0^{\pi/4} f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos(4n-1)\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4} [\sin(4n-1)\varphi + \cos(4n-1)\varphi]\, f(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \left[\sin(4n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}\right] f(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\pi} \sin\left[\left(n - \frac{1}{4}\right)t + \frac{\pi}{4}\right] f\left(\frac{t}{4}\right) dt.$$

Из последнего равенства на основании полноты системы $\left\{\sin\left(n - \frac{1}{4}\right)t + \frac{\pi}{4}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ в пространстве $L_p[0,\pi/2]$ (см. теорему 2.6.3) следует, что $f(\varphi) = 0$ почти всюду в $L_p[0,\pi/2]$.

Теперь покажем, что система (4.4.54) образует базис в $L_p[0,\pi/2]$ при $p > 1$, т.е. если $f(\varphi) \in L_p[0,\pi/2]$, то имеет место единственное разложение в ряд:

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos 4n\varphi + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(4n-1)\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{4.4.58}$$

где a_n и b_n — коэффициенты разложения, которые будут определены однозначно. Пусть справедливо требуемое разложение (4.4.58) на $[0, \pi/2]$. Заменяя в (4.4.58) φ на $\pi/2 - \varphi$, получим

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos 4n\varphi - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos(4n-1)\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (4.4.59)$$

Из равенств (4.4.58) и (4.4.59) имеем

$$f(\varphi) - f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = F(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left[\sin(4n-1)\varphi + \cos(4n-1)\varphi\right] =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left[\sin(4n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}\right], \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (4.4.60)$$

Поскольку система $\left\{\sin(4n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ образует базис в $L_p[0, \pi/4]$, $p > 1$, то ряд (4.4.60) сходится к функции $F(\varphi)$ в $L_p[0, \pi/4]$. Но с учетом нечетности функции $F(\varphi)$ на $[0, \pi/2]$ относительно точки $\varphi = \frac{\pi}{4}$ получаем сходимость ряда (4.4.60) к данной функции в $L_p[0, \pi/2]$. При этом коэффициенты b_n определяются однозначно, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n^2 < +\infty$. Тогда в силу ортогональности системы синусов $\left\{\sin(4n-1)\varphi\right\}_{n=1}^{+\infty}$ в полном евклидовом пространстве $L_p[0, \pi/2]$ существует функция $g(\varphi) \in L_p[0, \pi/2]$ такая, что

$$g(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(4n-1)\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (4.4.61)$$

Система косинусов $\left\{\cos 4n\varphi\right\}_{n=0}^{+\infty}$ образует ортогональный базис в $L_p[0, \pi/4]$, поэтому имеет место единственное разложение

$$f(\varphi) - g(\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos 4n\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}. \quad (4.4.62)$$

В силу симметрии относительно точки $\pi/4$ системы $\left\{\cos 4n\varphi\right\}_{n=0}^{+\infty}$ ряд (4.4.62) будет сходиться и $L_p[\pi/4, \pi/2]$. Тогда из равенств (4.4.61) и (4.4.62) получим требуемое разложение (4.4.58). Теорема 4.4.3 полностью доказана.

Аналогично (4.4.53) составим из двух систем $\left\{u_{n,m}^{(1)}(x,y)\right\}$ и $\left\{u_{n,m}^{(2)}(x,y)\right\}$, заданных формулами (4.4.48) и (4.4.49), систему

$\{u_{k,m}(x,y)\}$, которая задается соотношениями

$$u_{k,m}(x,y)=\begin{cases} J_{\mu_k}(r\sqrt{\lambda_{k,m}}\,)\Phi_k(\varphi), \quad y>0,\\ \dfrac{1}{2}\Big[\Big(\dfrac{x-y}{|x+y|}\Big)^{\mu_k/2}+\operatorname{sgn}(x+y)\Big(\dfrac{|x+y|}{x-y}\Big)^{\mu_k/2}\Big]\times\\ \qquad\qquad\times J_{\mu_k}(\sqrt{\lambda_{k,m}|x^2-y^2|}\,), \quad y<0, \end{cases} \tag{4.4.63}$$

где

$$\mu_k=\begin{cases}\mu_{2k-1}=\mu_n^{(1)},\\ \mu_{2k}=\mu_n^{(2)},\end{cases} \qquad \lambda_{k,m}=\begin{cases}\lambda_{2k-1,m}=\alpha_{n,m}^2,\\ \lambda_{2k,m}=\beta_{n,m}^2.\end{cases}$$

Теорема 4.4.4. *Система собственных функций задачи Φ_λ, заданная формулой* (4.4.63), *полна и образует базис в пространстве $L_2(D_1)$, но не полна в $L_2(D)$.*

Доказательство. Допустим, что в пространстве $L_2(D_1)$ существует функция $F_1(x,y)\not\equiv 0$ такая, что

$$\iint\limits_{D_1} F_1(x,y)u_{k,m}(x,y)\,dx\,dy=0 \tag{4.4.64}$$

для всех $k=1,2,\ldots$, $m=0,1,2,\ldots$. Переходя в (4.4.64) к полярным координатам, получим

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi/2} f_1(r,\varphi)J_{\mu_k}(\sqrt{\lambda_{k,m}}\;r)\Phi_k(\varphi)r\,dr\,d\varphi= \\ =\int\limits_0^1 g_k(r)J_{\mu_k}(\sqrt{\lambda_{k,m}}\;r)r\,dr=0, \tag{4.4.65}$$

где

$$g_k(r)=\int\limits_0^{\pi/2} f_1(r,\varphi)\Phi_k(\varphi)\,d\varphi, \quad k=1,2,\ldots.$$

Поскольку $F_1(x,y)\in L_2(D_1)$, то нетрудно показать

$$\int\limits_0^1\sqrt{r}\;|g_k(r)|\,dr<+\infty, \quad k=1,2,\ldots.$$

Тогда на основании теории рядов Фурье–Бесселя [28, гл. XVIII] из равенства (4.4.65) следует, что все коэффициенты ряда Фурье–Бесселя функции $g_k(r)$ равны нулю и поэтому

$$g_k(r) = \int\limits_0^{\pi/2} f_1(r,\varphi)\Phi_k(\varphi)d\varphi = 0 \qquad (4.4.66)$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$ при каждом $r \in [0, 1]$. В силу полноты системы $\{\Phi_k(\varphi)\}$ в $L_2[0, \pi/2]$ из равенства (4.4.66) следует, что при каждом r множество точек φ, в которых $f_1(r,\varphi) \neq 0$ имеет меру нуль. Следовательно, на основании теоремы Фубини функция $F_1(x, y) = 0$ почти всюду в области D_1.

Базисность системы (4.4.63) в $L_2(D_1)$ следует из того, что система $\{J_{\mu_k}(r\sqrt{\lambda_{k,m}}\,)\}$ при каждом $m \in \mathbb{N}$ ортогональна с весом r в $L_2[0, 1]$ и образует базис как система собственных функций первой краевой задачи для дифференциального уравнения Бесселя, а система $\Phi_k(\varphi)$ образует базис в $L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ в силу теоремы 4.4.3.

Неполнота системы (4.4.63) в $L_2(D)$ доказывается аналогично [188].

§ 4.5. Построение решения задачи Франкля методом спектрального анализа

Далее применим метод разделения переменных для построения решения задачи Франкля для уравнения (4.4.1) в области D, когда $C \equiv B$, $a = c = b = 1$, $\Gamma \equiv \Gamma_0$: $x^2 + y^2 = 1$ $(x > 0,\ y > 0)$. На основании результатов § 4.4 задача Франкля сводится к следующей нелокальной эллиптической задаче: найти в области D_1 функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (4.4.14)–(4.4.16), (4.4.18) и

$$u(x,y)\big|_{\Gamma_0} = v(r,\varphi)\big|_{r=1} = f(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad (4.5.1)$$

где $f(\varphi)$ — заданная достаточно гладкая функция.

Для простоты вначале рассмотрим уравнение (4.4.1) при $\lambda = 0$, т. е. уравнение Лаврентьева–Бицадзе. Аналогично п. 4.4.2, разделяя переменные, найдем

$$R_n^{(1)}(r) = r^{4n}, \quad \Phi_n^{(1)}(\varphi) = \cos 4n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$R_n^{(2)}(r) = r^{4n-1}, \quad \Phi_n^{(2)}(\varphi) = \sin{(4n-1)\varphi}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тогда решение задачи (4.4.14)–(4.4.16), (4.4.18), (4.5.1), будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,y) = v(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{4n} \cos 4n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{4n-1} \sin{(4n-1)\varphi}. \quad (4.5.2)$$

Удовлетворяя ряд (4.5.2) граничному условию (4.5.1), получим

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 4n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(4n-1)\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{4.5.3}$$

Заменяя в (4.5.3) φ на $\pi/2 - \varphi$, имеем

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 4n\varphi - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(4n-1)\varphi. \tag{4.5.4}$$

Из равенств (4.5.3) и (4.5.4) будем иметь

$$f(\varphi) - f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = g(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n [\sin(4n-1)\varphi + \cos(4n-1)\varphi] =$$
$$= \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left[(4n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}\right], \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{4.5.5}$$

Поскольку функция $g(\varphi)$ нечетная на сегменте $[0, \pi/2]$ относительно точки $\varphi = \pi/4$, то достаточно рассмотреть ряд (4.5.5) на промежутке $[0, \pi/4]$, т.е.

$$g(\varphi) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left[(4n-1)\varphi + \frac{\pi}{4}\right], \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}. \tag{4.5.6}$$

Из ряда (4.5.6) заменой $4\varphi = \theta$ получим

$$g\left(\frac{\theta}{4}\right) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left[\left(n - \frac{1}{4}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right], \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{4.5.7}$$

Как известно из § 2.6, система синусов $\{\sin[(4n-1)\varphi + \pi/4]\}_{n=1}^{\infty}$ не ортогональна на сегменте $[0, \pi]$, но образует базис в $L_p(0, \pi)$ при всех $p > 1$. Тогда в силу теоремы 2.6.3 найдем

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} g\left(\frac{\theta}{4}\right) h_n(\theta)\, d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} g(\varphi) h_n(4\varphi)\, d\varphi, \tag{4.5.8}$$

где

$$h_n(4\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{(\sin 2\varphi)^{1/2}} \sum_{k=1}^{n} C_{1/2}^{n-k} (-1)^{n-k} \sin 4k\varphi.$$

Из леммы 2.6.1 следует, что если функция $g(\theta) \in C^{\lambda}[0, \pi/2]$, $0 < \lambda < 1$, то ряд (4.5.5) сходится равномерно к функции $g(\varphi)$ на сегменте $[0, \pi/2]$. Более того, из интегрального представления функции $h_n(\theta)$ при условии $g(\theta) \in C^{1+\lambda}[0, \pi/2]$ и $g(0) = 0$ можно получить оценку

$$|b_n| \leqslant \frac{C}{n^{1+\lambda}}, \quad C = \mathrm{const} > 0. \tag{4.5.9}$$

Тогда в силу оценки (4.5.9) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(4n-1)\varphi$$

сходится равномерно на $[0, \pi/2]$. В силу этого коэффициенты a_n ряда (4.5.3) находятся из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 4n\varphi = f(\varphi) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(4n-1)\varphi. \tag{4.5.10}$$

Поскольку система $\{\cos 4n\varphi\}$ ортогональна на $[0, \pi/2]$, то из равенства (4.5.10) находим

$$a_n = \frac{8}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left[f(\varphi) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(4n-1)\varphi\right]\cos 4n\varphi\, d\varphi =$$
$$= \frac{8}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} f(\varphi)\cos 4n\varphi\, d\varphi + \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(4k-1)}{(4n+4k-1)(4n-4k+1)}. \tag{4.5.11}$$

Теперь построим решение задачи Франкля в областях D_2 и D_3. Из формулы (4.5.2) вычислим

$$u(x,0) = \tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{4n}, \tag{4.5.12}$$

$$u_y(x,0) = \nu(x) = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\Big|_{\varphi=0} =$$
$$= \left(\frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\Big|_{\varphi=0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(4n-1)x^{4n-2}. \tag{4.5.13}$$

Тогда решение задачи Ф в области D_2 определяется как решение задачи Коши для уравнения (4.4.1) при $\lambda = 0$ с граничными данными (4.5.12) и (4.5.13):

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(x-y)^{4n} + (x+y)^{4n}\right] -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left[(x-y)^{4n-1} + (x+y)^{4n-1}\right]. \tag{4.5.14}$$

Из формулы (4.5.14) найдем

$$u(x,y)\big|_{y=-x} = \psi(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (2x)^4 n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n (2x)^{4n-1}. \qquad (4.5.15)$$

В силу условия (4.5.15) решение задачи Ф в области D_3 определим как решение задачи Дарбу для уравнения (4.4.1) (где $\lambda = 0$) с граничными данными (4.4.6) и (4.5.15):

$$u(x,y) = \psi\Big(\frac{x-y}{2}\Big) + \psi\Big(-\frac{x+y}{2}\Big) - \psi\,(0) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \big[(x-y)^{4n} + (-x-y)^{4n}\big] - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \big[(x-y)^{4n-1} + (-x-y)^{4n-1}\big]. \qquad (4.5.16)$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 4.5.1. *Если в области* D_1 $a = c = b = 1$, $\Gamma \equiv \Gamma_0 :$ $x^2 + y^2 = 1$ $(x, y > 0)$, $f(\varphi) \in C^{1+\lambda}[0, \pi/2]$, $0 < \lambda < 1$, $f(0) = f(\pi/2)$, *то существует единственное решение задачи Франкля для уравнения* (4.4.1) *при* $\lambda = 0$ *и это решение в областях* D_1, D_2 *и* D_3 *определяется, соответственно, рядами* (4.5.2), (4.5.14) *и* (4.5.16). *При этом коэффициенты* b_n *и* a_n *находятся по формулам* (4.5.8) *и* (4.5.11), *и*

$$u(x,y) \in C^{\infty}(D_1 \cup OA \cup OB) \cap C^{\infty}(\overline{D_2 \cup D_3} \setminus B \cup OP).$$

Пусть теперь $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq \lambda^{(1)}_{n,m}$, $\lambda \neq \lambda^{(2)}_{n,m}$. В этом случае, используя результаты п. 4.4.2, решение задачи Франкля в области D_1 построим в виде суммы следующего ряда:

$$u(x,y) = v(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{J_{4n}(r\sqrt{\lambda}\,)}{J_{4n}(\sqrt{\lambda}\,)} \cos 4n\varphi +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{J_{4n-1}(r\sqrt{\lambda}\,)}{J_{4n-1}(\sqrt{\lambda}\,)} \sin\,(4n-1)\varphi =$$
$$= u_1(x,y) + u_2(x,y) = v_1(r,\varphi) + v_2(r,\varphi). \qquad (4.5.17)$$

На основании асимптотической формулы (2.7.24):

$$J_n(z) = \frac{1}{n!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n, \quad n \to \infty,$$

ряды из (4.5.17) при любом $r \leqslant r_0 < 1$ сходятся равномерно и допускают почленное дифференцирование по переменным r и φ любое число раз, так как при больших n справедливы оценки

$$\left| a_n \frac{J_{4n}(r\sqrt{x}\,)}{J_{4n}(\sqrt{x}\,)} \cos 4n\varphi \right| \leqslant M_1 r^{4n},$$

$$\left| b_n \frac{J_{4n-1}(r\sqrt{x}\,)}{J_{4n-1}(\sqrt{x}\,)} \sin (4n-1)\varphi \right| \leqslant M_2 r^{4n-1},$$

где M_i — здесь и далее положительные постоянные.

При $r = 1$ получим ряд (4.5.3), равномерная сходимость которого показана выше.

Из формулы (4.5.17) вычислим

$$u_1(x,0) = v_1(r,0) = \tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{J_{4n}(x\sqrt{\lambda}\,)}{J_{4n}(\sqrt{\lambda}\,)}, \tag{4.5.18}$$

$$u_{1y}(x,0) = 0, \tag{4.5.19}$$

$$u_2(x,0) = v_2(r,0) = 0, \tag{4.5.20}$$

$$u_{2y}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (4n-1) \frac{J_{4n-1}(x\sqrt{\lambda}\,)}{x J_{4n-1}(\sqrt{\lambda}\,)}. \tag{4.5.21}$$

Теперь для построения решения задачи Франкля в области D_2 воспользуемся формулами (4.4.39). Полагая в ней $k_1 = k_2 = \dfrac{a_n}{2J_{4n}(\sqrt{\lambda}\,)}$, $\rho = 4n$, найдем функцию

$$u_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left[\left(\frac{x-y}{x+y} \right)^{2n} + \left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{2n} \right] \frac{J_{4n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\,)}{J_{4n}(\sqrt{\lambda}\,)}, \tag{4.5.22}$$

которая определяет решение задачи Коши для уравнения (4.3.2) с граничными условиями (4.5.18) и (4.5.19).

Аналогично полагая в формуле (4.4.39) $k_1 = k_2 = \dfrac{b_n}{2J_{4n-1}(\sqrt{\lambda}\,)}$, $\rho = 4n-1$, получим функцию

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} \left[\left(\frac{x+y}{x-y} \right)^{2n-1/2} - \left(\frac{x-y}{x+y} \right)^{2n-1/2} \right] \frac{J_{4n-1}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\,)}{J_{4n-1}(\sqrt{\lambda}\,)}, \tag{4.5.23}$$

которая является решением задачи Коши для уравнения (4.3.2) с начальными условиями (4.5.20) и (4.5.21).

Тогда решение задачи Ф в области D_2 находим как сумму двух решений (4.5.22) и (4.5.23):

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2}\left[\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{2n} + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2n}\right]\frac{J_{4n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\,)}{J_{4n}(\sqrt{\lambda}\,)} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2}\left[\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{2n-1/2} - \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{2n-1/2}\right]\frac{J_{4n-1}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)})}{J_{4n-1}(\sqrt{\lambda}\,)}. \quad (4.5.24)$$

Для построения решения задачи Ф в области D_3 воспользуемся симметрией относительно прямой $y = -x$. Заменяя в формуле (4.5.24) x на $-y$, y на $-x$, найдем функцию

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2}\left[\left(\frac{y-x}{y+x}\right)^{2n} + \left(\frac{y+x}{y-x}\right)^{2n}\right]\frac{J_{4n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\,)}{J_{4n}(\sqrt{\lambda}\,)} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2}\left[\left(\frac{y-x}{y+x}\right)^{2n-1/2} - \left(\frac{y+x}{y-x}\right)^{2n-1/2}\right]\frac{J_{4n-1}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\,)}{J_{4n-1}(\sqrt{\lambda}\,)}, \quad (4.5.25)$$

которая в области D_3 является решением уравнения (4.3.2), удовлетворяет граничному условию (4.4.6) при $y < 0$ и вместе с функцией (4.5.22) на характеристике $y = -x$ принимает равные значения.

Следовательно, доказана

Теорема 4.5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.5.1 *и* $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_{n,m}^{(1)}$, $\lambda \neq \lambda_{n,m}^{(2)}$. *Тогда существует решение задачи Франкля для уравнения* (4.4.1), *которое определяется рядами* (4.5.17), (4.5.24) *и* (4.5.25).

Глава 5

К ПРОБЛЕМЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

§ 5.1. Постановка задачи. Краткий обзор известных результатов

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(x,y)u_{xx} + u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \tag{5.1.1}$$

где $yK(x,y) > 0$ при $y \neq 0$, в ограниченной области D с границей ∂D, состоящей при $y > 0$ из спрямляемой жордановой кривой Γ с концами в точках $A = (0,0)$ и $B = (l,0)$, $l = \text{const} > 0$, и при $y < 0$ из кусочно-гладкой кривой $AC = \gamma$: $Kn_1^2 + n_2^2 \geqslant 0$, $n_1(s) \geqslant 0$, и характеристики CB: $Kn_1^2(s) + n_2^2(s) = 0$, $n_1(s) < 0$, уравнения (5.1.1), где AC_0: $Kn_1^2 + n_2^2 = 0$, $n_1(s) > 0$ — характеристика уравнения (5.1.1); $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внутренней нормали к границе области; $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривых AC, CB и Γ; s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки границы против часовой стрелки; $n_1(s) = -dy/ds$, $n_2(s) = dx/ds$ (см. рис. 5.1.1).

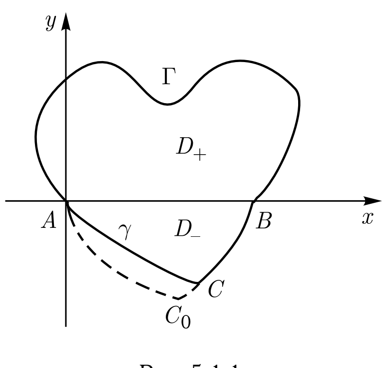

Рис. 5.1.1

Всюду ниже предполагается, что коэффициенты $K(x,y)$, $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ определены в $\overline{D}$ и обладают там достаточной гладкостью, которая по мере необходимости будет уточнена. При этом функция $K(x,y)$ при $y<0$ такова, что кривые AC и CB с указанными выше свойствами существуют.

Обобщенная задача Трикоми (задача M). *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^2(D_+\cup D_-); \tag{5.1.2}$$

$$Lu(x,y)\equiv 0, \quad (x,y)\in D_+\cup D_-; \tag{5.1.3}$$

$$u(x,y)=\varphi(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma; \tag{5.1.4}$$

$$u(x,y)=\psi(x,y), \quad (x,y)\in\gamma, \tag{5.1.5}$$

где φ, ψ *— заданные достаточно гладкие функции*, $\varphi(A)=\psi(A)$, $D_+=D\cap\{y>0\}$, $D_-=D\cap\{y<0\}$.

Впервые задача M на плоскости годографа для уравнения Чаплыгина

$$K(y)u_{xx}+u_{yy}=0, \tag{5.1.6}$$

где $yK(y)>0$, $K(0)=0$, $K'(y)>0$ при $(x,y)\in\overline{D}$, была поставлена Ф.И. Франклем [214] в 1945 году при изучении основной задачи теории сопла Лаваля. Существование решения задачи M для уравнения (5.1.6) при $K(y)=y$ было получено им в 1951 году [215] в случае, когда кривая Γ является «нормальной» кривой в смысле Трикоми и кривая γ в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой AC_0 и близка к ней.

А.В. Бицадзе [16–18] впервые исследовал задачу M для уравнения Лаврентьева,

$$u_{xx}+\operatorname{sgn} y\cdot u_{yy}=0 \tag{5.1.7}$$

и при следующих ограничениях на кривые Γ и γ:

$$\Gamma\colon\ (x-x^2-y^2)\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\geqslant 0, \tag{5.1.8}$$

$$\gamma\colon\ y=-\alpha(x), \quad \alpha(0)=0, \quad \alpha(x)>0 \quad \text{при} \quad x>0,$$

$$0<\alpha'(x)\leqslant 1, \quad \alpha'(x)\leqslant \alpha(x)/(x-x^2+\alpha^2), \tag{5.1.9}$$

доказал единственность решения. На основании теоремы единственности им доказано существование решения задачи M, когда кривая γ в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой, а Γ принадлежит классу Ляпунова и в малой окрестности точек A и B оканчивается как дуги полуокружности с центром в точке $(l/2,0)$, $l=1$.

К.И. Бабенко [5] для уравнения (5.1.6) при следующих условиях на кривые Γ и γ:

$$\Gamma\colon\ (1-x)\,dy + y\,dx \leqslant 0, \quad \gamma\colon\ 0 \geqslant \frac{dy}{dx} \geqslant -\frac{1}{\sqrt{-K(y)}},$$

доказал единственность решения задачи M. Используя теорему единственности, он методом интегральных уравнений показал разрешимость задачи M при условии, когда γ — гладкая кривая, Γ принадлежит классу Ляпунова и в малой окрестности точек A и B удовлетворяет условию ортогональности $|dx/ds| \leqslant C_0 y^2(s)$, $C_0 = \mathrm{const} > 0$.

Задачу M также рассматривают в более сложной, чем область D, области Ω. В этом случае задачу называют общей смешанной задачей для уравнений смешанного типа. Из точки E, лежащей между точками A и B, проведем характеристики EC_1 и EC_2 уравнения (5.1.1) до пересечения с кусочно-гладкими кривыми $\gamma_1 = AC_1$ и $\gamma_2 = BC_2$, заданными условиями

$$\gamma_1\colon\ Kn_1^2(s) + n_2^2(s) \geqslant 0, \quad n_1(s) \geqslant 0;$$

$$\gamma_2\colon\ Kn_1^2(s) + n_2^2(s) \geqslant 0, \quad n_1(s) \leqslant 0.$$

Обозначим через Ω область, ограниченную кривыми γ_1, C_1E, EC_2, C_2B и Γ; $\Omega_+ = \Omega \cap \{y > 0\}$; $\Omega_- = \Omega \cap \{y < 0\} = \Omega_-^1 \cup \Omega_-^2$ (см. рис. 5.1.2).

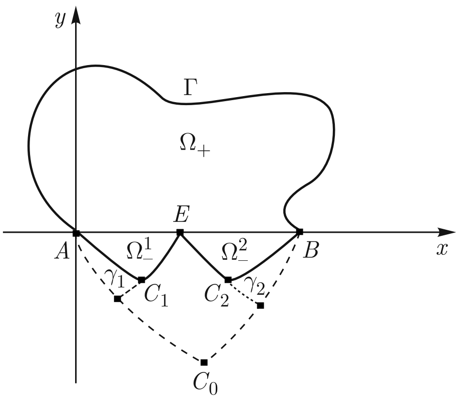

Рис. 5.1.2

Общая смешанная задача (задача $\mathbf{M_0}$). *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_+ \cup \Omega_-);$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in \Omega_+ \cup \Omega_-;$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma;$$

$$u(x,y) = \psi_i(x,y), \quad (x,y) \in \gamma_i, \quad i = 1,2,$$

где φ, ψ_i — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(A) = \psi_1(A)$, $\varphi(B) = \psi_2(B)$.

Задача M_0 впервые была поставлена и изучена А.В. Бицадзе [17, 18] для уравнения (5.1.7) при условиях относительно Γ, γ_1 и γ_2, аналогичных условиям на кривые Γ и γ в задаче M.

Несколько позже задачами M и M_0 начали заниматься за рубежом.

М.Н. Проттер [257] в 1954 году рассмотрел задачу M для уравнения (5.1.6) и наметил способ доказательства существования ее решения, сохраняя известные ограничения Трикоми [210] на кривую Γ и предполагая, что кривая γ в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой.

В 1954 году C.S. Morawetz [251] методом интегральных тождеств доказала единственность решения задачи M_0 для уравнения Чаплыгина, когда на гладкой кривой Γ выполнено условие звездности

$$x\,dy - y\,dx \geqslant 0. \tag{5.1.10}$$

В другой работе [252] она предложила новый метод доказательства единственности решения задачи M_0, впоследствии названный методом вспомогательных функций. Используя этот метод, Моравец получила теорему единственности решения задачи M_0 для уравнения Чаплыгина, если достаточно гладкая кривая Γ удовлетворяет условию

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \tag{5.1.11}$$

где α — угол между положительным направлением оси Ox и направлением касательной к кривой Γ, проведенной в сторону возрастания s.

Применяя методы функционального анализа, C.S. Morawetz [253] впервые доказала существование слабого решения задачи M_0 для уравнения (5.1.6), когда кривые Γ, γ_1 и γ_2 удовлетворяют условиям

$$\Gamma\colon\ y^{-1/2}(x\,d\mu - \mu\,dx) \geqslant k_0\,ds > 0, \quad \gamma_1 \text{ и } \gamma_2\colon\ x\frac{dy}{ds} > k_0,$$

где $k_0 = \mathrm{const} > 0$, $\mu = \int\limits_0^y \sqrt{K(t)}\,dt$, путем сведения уравнения Чаплыгина к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Лакс и Филипс [250] в предположении, что кривая Γ достаточно гладкая и «нехарактеристичная», доказали, что слабое решение задачи M_0, полученное Моравец, является также и сильным в смысле Фридрихса [239].

Ю.М. Березанский [12, с. 316–319] для уравнения типа (5.1.6), используя метод интегральных тождеств, в случае, когда гладкая кривая Γ удовлетворяет условию (5.1.10), доказал единственность гладких и существование слабых решений задачи M_0 без сведения изучаемого уравнения к системе уравнений первого порядка, как это делали Моравец и Фридрихс.

В.П. Михайлов [132, 133] для уравнения Чаплыгина со спектральным параметром,

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0, \tag{5.1.12}$$

при достаточно больших $\lambda > 0$ доказал единственность сильных и существование слабых решений задачи М, когда кривые Γ и γ — достаточно гладкие и $n_2(B) < 0$ и $n_1(A) \neq 0$ или $n_1(A) = 0$, но $n_2(A) > 0$.

В плане применения функциональных методов при исследовании задачи М для уравнений смешанного типа поучительной является работа А.М. Нахушева [153].

В.В. Коврижкин [99, 100] для уравнения (5.1.12) доказал единственность сильных решений задачи М при достаточно больших $\lambda > 0$ в случае, когда кривая Γ кусочно-гладкая, удовлетворяющая условиям: $n_2(A) < 1$, $0 < n_2(B) < 1$ или $n_2(B) = 0$, и в точке B кривая дважды непрерывно дифференцируема.

А.П. Солдатов [204, 205] методами теории аналитических функций доказал единственность и существование регулярного решения задачи М для уравнения Лаврентьева–Бицадзе, сняв ограничение (5.1.8) на кривую Γ и заменив условие (5.1.9) на γ на следующее:

$$0 < \alpha'(0) < 1, \quad \alpha'(x) \geqslant \alpha(x)/x.$$

Н.Г. Сорокина [207] для уравнения (5.1.6) доказала существование и единственность решения задачи М в пространстве $W_2^1(D)$ при условии, что кривая Γ дважды непрерывно дифференцируема и всюду «нехарактеристична».

В.Н. Врагов [38, 40] для уравнения (5.1.1), когда:

а) коэффициенты уравнения непрерывны в $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемы в замкнутых областях $\overline{D_+}$ и $\overline{D_-}$ и удовлетворяют условиям: $b(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$; $2a - K_x \leqslant 0$, $c \leqslant 0$, $c_x \geqslant 0$ в D_-; $K_y(x, y) \geqslant 0$, $2a - K_x \equiv 0$, $c \equiv 0$ в D_+;

б) кривая Γ из класса Ляпунова и удовлетворяет условию (5.1.11), комбинируя методы интегральных тождеств и вспомогательных функций, доказал единственность решения задачи М.

В другой работе [39] для уравнения

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} + c(x, y)u = f(x, y) \tag{5.1.13}$$

он достаточно простым способом доказал существование слабого решения из пространства H_1 (типа Соболева с весом) задачи М при следующих условиях: а) коэффициенты уравнения (5.1.13) непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ и удовлетворяют неравенствам:

$$yK_y' \geqslant K, \quad xc_x + \alpha y c_y + (1 + \alpha)c \leqslant 0 \ \text{ в } \ D_+,$$
$$xc_x + c \leqslant 0 \ \text{ в } \ D_-, \quad 1/2 \leqslant \alpha < 1;$$

б) кривая Γ кусочно-гладкая и на ней должно выполняться условие

$$xn_1(s) + \alpha y n_2(s) \leqslant 0.$$

Шнайдер, Азиз [230] для уравнения (5.1.13) методом интегральных тождеств получили теорему единственности решения задачи М, когда

$$K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^m, \quad m > 0, \quad c(x, y) \in C^1(\overline{D}),$$

$$4c/(m+2) + xc_x + 2yc_y/(m+2) \leqslant 0 \ \text{ в } \ D,$$
$$x\,dy - 2y\,dx/(m+2) > 0 \ \text{ на } \ \Gamma \cup \gamma.$$

В работе [231] они аналогичные результаты получили для пространственного уравнения

$$\operatorname{sgn} x_3 \cdot |x_3|^m (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + u_{x_3x_3} + cu = f.$$

В [163] Пономаревым для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром λ, когда область D_+ есть сектор с центром в точке A и кривая γ: $y = -kx$, $0 < k < 1$, $l = 1$, найдены положительные собственные значения $\{\lambda_{n,m}\}$, $n, m = 1, 2, \ldots$, и соответствующие им собственные функции $\{u_{nm}(x,y)\}$ задачи М и показано, что эта система собственных функций полна в $L_2(D_+)$.

В работе [82] Н.Ю. Капустина для уравнения (5.1.12) при $\lambda > 0$ получена теорема единственности решения задачи М путем построения соответствующей вспомогательной функции. Здесь кривая Γ удовлетворяет условию (5.1.11).

Б.А. Бубнов [24] для общего уравнения (5.1.1) при некоторых ограничениях на его коэффициенты в специальной неограниченной области D показал разрешимость задачи М в пространстве типа H_1 и изучил поведение решения на бесконечности.

J. Rassias [262] для уравнения (1.13) доказал единственность решения задачи М, когда: а) коэффициенты $K(y)$ и $c(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ и $c(x,y) \leqslant 0$ на кривой $CB, 2c + xc_x \leqslant 0$ в D; б) кривая Γ достаточно гладкая и на ней $x\,dy \geqslant 0$.

В нашей работе [174] для общего уравнения (5.1.1) получена теорема единственности решения задачи М, если:

а) Γ — кусочно-гладкая, γ — монотонно убывающая кусочно-гладкая кривая;

б) коэффициенты уравнения (5.1.1) непрерывны в $\overline{D}$ и в области D_+ удовлетворяют условиям

$$K_{xx}, a_x, b_y \in C(\overline{D_+}), \quad K_{xx} - a_x - b_y + 2c \leqslant 0,$$

а в области D_-:

$$a, b, c \in C^1(\overline{D_-}), \quad K(x,y) = -(-y)^m h^2(y),$$
$$m > 0, \quad h(y) \geqslant \delta > 0 \ \text{ при } \ y \leqslant 0, \quad h(y) \in C^2(\overline{D_-});$$
$$a_x + b_y - 2c - 4(\alpha^{-1} c\sqrt{-K}\,)'_\eta \sqrt{-K} \ \geqslant 0,$$
$$3\alpha K'_y + 4K\alpha'_\xi + 2\alpha\beta \geqslant 0, \quad \alpha^{-1} \geqslant 0,$$
$$\beta - K'_y(-K)^{-1/2} - 4cK\alpha^{-1} \leqslant 0 \ \text{ на } \ CB,$$

где $\alpha(\xi,\eta) = a + b\sqrt{-K} - K'_y/2\sqrt{-K}$; $\beta(\xi,\eta) = a - b\sqrt{-K} + K'_y/2\sqrt{-K}$; $\xi = x + \int\limits_0^y \sqrt{-K}\,dt$, $\eta = x - \int\limits_0^y \sqrt{-K}\,dt$.

Отсюда видно, что единственность решения задачи М для общего уравнения (5.1.1) получена без ограничений геометрического характера на кривую Γ при довольно слабых предположениях относительно коэффициентов уравнения (5.1.1) в области эллиптичности, но при сильных ограничениях в области гиперболичности.

В работе [261] Reng Fulian, Chen Chaoti для уравнения (5.1.13) доказали теорему единственности решения задачи M_0, когда а) $K'(y) \geqslant 0$, $c(x,y) \leqslant 0$, $xc_x \leqslant 0$ в Ω, $c_y \leqslant 0$ при $y \geqslant 0$; б) кривая Γ достаточно гладкая и на ней выполнено условие (5.1.10). Здесь точка A находится в отрицательной части оси $y = 0$ и точка E совпадает с началом координат.

В работах [236, 237, 244, 248] Gu Chaohao, Hong Jiaxing, Г. Дачева для уравнения $(L - \lambda)u = f$, где оператор L определен уравнением типа (5.1.1), при достаточно больших $\lambda > 0$ и некоторых ограничениях на коэффициенты оператора L и при определенных углах подхода в точках A и B достаточно гладкой кривой Γ доказали однозначную разрешимость задачи М в пространстве $W_2^1(D)$.

Задача М для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучена в работах В.А. Елеева [61, 62].

В работе Е.И. Моисеева [142] методом спектральных разложений построено решение задачи М для уравнения (5.1.7) в случае, когда эллиптическая часть области D есть полукруг с центром в точке A, а кривая AC задана уравнением $y = -kx$, $0 < k \leqslant 1$.

Из данного анализа работ, посвященных задаче М или задаче M_0, видно, что задача М (M_0) остается наиболее трудной среди задач теории уравнений смешанного типа и до сих пор, даже для известных модельных уравнений смешанного типа, не получены соответствующие теоремы единственности регулярных или обобщенных решений задачи М (M_0) без ограничений геометрического характера на кривую Γ. По существу, только для уравнения (5.1.7) получены окончательные результаты.

В этой главе для уравнения

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u = 0, \tag{5.1.14}$$

где $yK(y) > 0$, в области D изучается задача М.

В § 5.2 при произвольном подходе кривой Γ в точках A и B и более слабых ограничениях на кривую Γ, функцию $K(y)$ и некоторых условиях на функцию $\lambda(y)$ получены теоремы единственности регулярных решений задачи М.

В § 5.3 рассматривается вариант задачи М, предложенный Л.В. Овсянниковым [156, § 26], и доказывается единственность решения без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Γ. Тем самым окончательно решена проблема единственности решения задачи М для двух классов уравнений смешанного типа, среди которых уравнение Чаплыгина, обобщенное уравнение Трикоми со спектральным параметром.

В последующих параграфах показаны применения этих результатов при исследовании задачи Трикоми для уравнения (5.1.14) и получении теорем разрешимости задачи M методами интегральных уравнений и разделения переменных.

§ 5.2. О единственности решений обобщенной задачи Трикоми и задачи со смешанными граничными условиями

5.2.1. Единственность решения обобщенной задачи Трикоми. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u = 0, \tag{5.2.1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D (см. рис. 5.1.1) и поставим задачу (5.1.2)–(5.1.5) для уравнения (5.2.1).

Определение 5.2.1. Регулярным в области D решением уравнения (5.2.1) будем называть функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (5.1.2), (5.1.3) и, кроме того, функция $2u_x u_y\,dx \pm (Ku_x^2 - u_y^2)\,dy$ суммируема вдоль кривых Γ, AC, CB, AB и $u(x,y) \in C^1(D_- \cup AC)$.

Теорема 5.2.1. *Пусть*: 1) *кривая* Γ — *из класса Ляпунова и на ней отсутствуют точки, при переходе которых* $n_1(s)$ *меняет знак, а* $n_2(s) = 1$; 2) $K(y) \in C[y_{\min}, 0] \cap C^1[y_{\min}, 0) \cap C(0, y_{\max}] \cap C^1]0, y_{\max}]$; 3) *функция* $\lambda(y) \in C[y_{\min}, y_{\max}]$ *такова, что существует решение* $\mu(y)$ *уравнения Риккати*

$$\mu'(y) + \mu^2(y) = \lambda(y), \quad y_{\min} < y < y_{\max}, \tag{5.2.2}$$

из класса $C^1[y_{\min}, y_{\max}]$. *Тогда если в классе регулярных в* D *решений уравнения* (5.2.1) *существует решение задачи* M, *то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи M из класса регулярных в D решений уравнения (5.2.1). На множестве $D_+ \cup D_-$ рассмотрим криволинейный интеграл

$$\Psi(x,y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} -2u_x(u_y - \mu u)\,dx + [Ku_x^2 - (u_y - \mu u)^2]\,dy, \tag{5.2.3}$$

который в силу уравнений (5.2.1) и (5.2.2) не зависит от пути интегрирования на этом множестве. Поэтому интеграл (5.2.3) определяет функцию $\Psi(x,y)$. Поскольку $u(x,y) = 0$ на Γ и кривая Γ из класса Ляпунова, то из теории краевых задач для эллиптических уравнений известно, что производные u_x и u_y непрерывны вплоть до границы Γ. Тогда функция $\Psi(x,y)$, определенная формулой (5.2.3), непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и имеет непрерывные производные Ψ_x и Ψ_y вплоть до границы Г.

Нетрудно заметить, что в некоторой окрестности точки A на кривой Г функция

$$\Psi(x,y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (Ku_x^2 + u_y^2)\,dy \geqslant 0. \tag{5.2.4}$$

Тогда функция $\Psi(x,y)$ достигает в $\overline{D}$ своего наибольшего неотрицательного значения. Пусть $\max\limits_{\overline{D}} \Psi(x,y) = \Psi(Q) > 0$. Докажем, что точка $Q \in \Gamma$. Легко проверить, что функция $\Psi(x,y)$ в области D_+ является решением эллиптического уравнения (4.2.6). По этой причине точка $Q \notin D_+$. На множестве $D_- \cup AB$ функция $\Psi(x,y)$ убывает по y, так как производная

$$\Psi_y(x,y) = Ku_x^2 - (u_y - \mu u)^2 \leqslant 0, \quad y \leqslant 0. \tag{5.2.5}$$

На кривой AC: $u = 0$ и $u_x dx + u_y\,dy = 0$; $K(y)n_1^2 + n_2^2 \geqslant 0$, $n_1(s) \geqslant 0$, $u_x = u_n n_1$, $u_y = u_n n_2$. Тогда для $(x,y) \in AC$

$$\Psi(x,y) = -\int\limits_{A}^{(x,y)} (Kn_1^2(s) + n_2^2(s))u_n^2 n_1(s)\,ds \leqslant 0. \tag{5.2.6}$$

На характеристике CB: $dx = \sqrt{-K}\,\,dy$, $n_1(s) < 0$, поэтому для точек $(x,y) \in CB$

$$\Psi(x,y) = \Psi(C) + \int\limits_{C}^{(x,y)} \left(\sqrt{-K}\,u_x + u_y - \mu u\right)^2 n_1(s)\,ds \leqslant 0. \tag{5.2.7}$$

Таким образом, из соотношений (5.2.5)–(5.2.7) следует, что функция $\Psi(x,y)$ не может достигать значения $\Psi(Q)$ в замкнутой области $\overline{D}_-$. Следовательно, $Q \in \Gamma$.

Пусть $Q = (x_0, y_0) = (x(s_0), y(s_0)) \in \Gamma$. Поскольку $u = 0$ на Г, то для $(x,y) \in \Gamma$

$$\frac{d\Psi[x(s), y(s)]}{ds} = -u_n^2(Kn_1^2 + n_2^2)n_1(s).$$

Тогда в точке Q либо $n_1(s_0) = 0$, либо $u_n(Q) = 0$. Если $n_1(s_0) = 0$, то из условия 1) теоремы вытекает $n_2(s_0) = -1$. В этом случае производная по нормали

$$\Psi_n(Q) = \Psi_x(Q)n_1(s_0) + \Psi_y(Q)n_2(s_0) = u_y^2(Q) \geqslant 0.$$

Если же $u_n(Q) = 0$, то $\Psi_n(Q) = 0$. Таким образом, в точке $Q \in \Gamma$: $\Psi_n(Q) \geqslant 0$, что в силу граничного принципа экстремума

Зарембы–Жиро противоречит неравенству $\Psi_n(Q) < 0$. Следовательно, функция $\Psi(x, y) \leqslant 0$ в $\overline{D}$, но тогда в некоторой окрестности точки A на кривой Γ производная по нормали $u_n = 0$. Тогда в силу единственности решения задачи Коши для эллиптических уравнений [112, 113, 97] следует $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_+}$, но, стало быть, и в области D.

Теорема 5.2.1 доказана. В частности, когда $\lambda(y) = \text{const}$, теорема 5.2.1 справедлива при всех λ, удовлетворяющих неравенству (4.2.10), т. е.

$$\lambda > -\left(\frac{\pi}{y_{\max} - y_{\min}}\right)^2. \tag{5.2.8}$$

Теорема 5.2.2. *Пусть*: *выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 5.2.1; 2) *функция* $\lambda(y) \in C[0, y_{\max}]$ *такова, что существует решение* $\mu(y)$ *уравнения Риккати* (5.2.2) *на интервале* $(0, y_{\max})$ *из класса* $C^1[0, y_{\max}]$, *удовлетворяющее условию* $\mu(0) \leqslant 0$; $\lambda(y) \in C[y_{\min}, 0]$ *и* $\lambda(y) \geqslant 0$ *при* $y < 0$. *Тогда если в классе регулярных в* D *решений уравнения* (5.2.1) *существует решение задачи* M, *то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение однородной задачи M из класса регулярных в D решений уравнения (5.2.1). В области D_+ введем функцию $\Psi(x, y)$, заданную формулой (5.2.3). Эта функция непрерывна в $\overline{D_+}$ и в некоторой окрестности точки A на кривой Γ в силу неравенства (5.2.4) неотрицательна. Тогда функция $\Psi(x, y)$ достигает в $\overline{D_+}$ своего наибольшего неотрицательного значения $\Psi(Q)$. Пусть $\Psi(Q) > 0$. Покажем, что точка $Q \in \Gamma$. Поскольку функция $\Psi(x, y)$ в области D_+ является решением эллиптического уравнения (4.2.6), то отсюда вытекает, что $Q \notin D_+$.

Теперь докажем, что для любой точки $(t, 0) \in \overline{AB}$

$$\Psi(t, 0) = -\int_0^t 2u_x(u_y - \mu u)\, dx \leqslant 0. \tag{5.2.9}$$

Для этого предварительно установим, что если $u = 0$ на кривой AC и $\lambda(y) \geqslant 0$ при $y < 0$, то для любого регулярного решения задачи M справедливо неравенство

$$\int_0^t u_x(x, 0) u_y(x, 0) dx \geqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant l. \tag{5.2.10}$$

Действительно, возьмем произвольное $t \in (\varepsilon, l)$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, и из точки $E = (t, 0)$ проведем характеристику уравнения (5.2.1) из семейства CB. Из точки $A_\varepsilon = (\varepsilon, 0)$ проведем кривую, «параллельную» кривой AC, до пересечения с характеристикой, проведенной из точки E, в точке E_1. Пусть G — область, ограниченная кривыми $A_\varepsilon E_1$, $E_1 E$ и EA_ε. В области $G_\varepsilon = G \cap \{y < -\varepsilon/2\}$ рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{G_\varepsilon} 2u_x[K(y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u]\,dx\,dy = 0.$$

После интегрирования его по частям и перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\int\limits_0^t 2u_x(x,0)u_y(x,0)\,dx - \int\limits_{AC_1} (Kn_1^2(s) + n_2^2(s))u_n^2 n_1(s)\,ds + \\ + \int\limits_{C_1E} [(\sqrt{-K}\,u_x + u_y)^2 + \lambda(y)u^2]n_1(s)\,ds = 0,$$

где C_1 — точка пересечения кривых AC и EE_1. Отсюда следует требуемое неравенство (5.2.10). Тогда в силу неравенства (5.2.10) нетрудно показать (5.2.9):

$$\Psi(t,0) = -2\int\limits_0^t u_x(x,0)u_y(x,0)\,dx + 2\mu(0)\int\limits_0^t u_x(x,0)u(x,0)\,dx = \\ = \mu(0)u^2(t,0) - 2\int\limits_0^t u_x(x,0)u_y(x,0)\,dx \leqslant 0.$$

Отсюда в силу оценки (5.2.9) следует, что точка $Q \in \Gamma$. Далее, повторяя аналогичные рассуждения, как и при доказательстве теоремы 5.2.1, получим $u \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Замечание 5.2.1. Отметим, что теоремы 5.2.1 и 5.2.2 получены нами совместно с Н.Ю. Капустиным и изложены в работах [83, 84].

Замечание 5.2.2. Рассмотрим однородную задачу М для уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \quad \lambda = \text{const}. \tag{5.2.11}$$

Если $-9\pi^2/16y_{\min}^2 < \lambda < \pi^2/4y_{\max}^2$, то для уравнения (5.2.11) справедлива теорема 5.2.2.

В самом деле, при $\lambda \geqslant 0$ решением уравнения Риккати (5.2.2) на интервале $(0, y_{\max})$ является функция $\mu(y) = \sqrt{\lambda}\,\operatorname{tg}[\sqrt{\lambda}\,(k-y)]$, где постоянная k определяется из условий $-\pi/2 < \sqrt{\lambda}\,(k-y) \leqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant y_{\max}$. Отсюда вытекает, что функция $\mu(y)$, удовлетворяющая условиям теоремы 5.2.2, существует, если $\sqrt{\lambda} < \pi/2y_{\max}$.

При $\lambda < 0$ теорему 5.2.2 прямо не удается использовать для получения единственности решения задачи M для уравнения (5.2.11). В этом случае аналогично п. 4.2.3 введем функцию

$$z(x,y) = u(x,y)\exp\left[-\int\limits_0^y \mu(t)\,dt\right],$$

которая является решением уравнения

$$\operatorname{sgn} y \cdot z_{xx} + z_{yy} + 2\mu(y)z_y = 0, \tag{5.2.12}$$

где функция $\mu(t)$ определяется как решение уравнения Риккати,

$$\mu'(y) + \mu^2(y) + \lambda \operatorname{sgn} y = 0. \tag{5.2.13}$$

Пусть

$$\mu(y) = \begin{cases} \mu_+(y), & 0 \leqslant y \leqslant y_{\max}, \\ \mu_-(y), & y_{\min} \leqslant y \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда из уравнения (5.2.13) получим

$$\begin{aligned} &\mu_+(y) = -\sqrt{|\lambda|}, && 0 \leqslant y \leqslant y_{\max}, \\ &\mu_-(y) = \sqrt{|\lambda|}\ \operatorname{tg}\left[\sqrt{\lambda}\,(k-y)\right], && y_{\min} \leqslant y \leqslant 0, \end{aligned}$$

где постоянная k находится из условий

$$-\frac{\pi}{2} < \sqrt{|\lambda|}\,(k-y) < \frac{\pi}{2}, \quad y_{\min} \leqslant y \leqslant 0.$$

На плоскости (x,y) введем новые переменные (θ,σ):

$$x = \theta, \quad y = \int\limits_0^\sigma \sqrt{|K(t)|}\,dt, \tag{5.2.14}$$

где

$$K(\sigma) = \begin{cases} K_+(\sigma) = \exp\left(-4\sqrt{|\lambda|}\,y\right)k_0^2, & k_0 = \text{const} > 0, \quad \sigma \geqslant 0, \\ K_-(\sigma) = -d_0^2\cos^4\left[\sqrt{|\lambda|}\,(k-y)\right], & d_0 = \text{const} > 0, \quad \sigma \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение (5.2.12) принимает вид

$$K(\sigma)z_{\theta\theta} + z_{\sigma\sigma} = 0. \tag{5.2.15}$$

Следовательно, однородная задача M для уравнения (5.2.11) при $\lambda < 0$ сведена к однородной задаче M для уравнения (5.2.15) на плоскости (θ,σ), но с разрывным условием склеивания на линии $\sigma = 0$ изменения типа уравнения (5.2.15): $z_\sigma(\theta, 0-0) \neq z_\sigma(\theta, 0+0)$. В ходе доказательства теоремы 5.2.2 показано, что решение однородной задачи М для уравнения (5.2.15) удовлетворяет неравенству

$$\int_0^t z_\theta(\theta,0-0)z_\sigma(\theta,0-0)\,d\theta = d_0\cos^2\left(\sqrt{|\lambda|}\,k\right)\int_0^t z_x(x,0)z_y(x,0-0)\,dx \geqslant 0 \tag{5.2.16}$$

при $0 \leqslant t \leqslant l$. Теперь для справедливости теоремы 5.2.2 для уравнения (5.2.15) достаточно показать, что

$$\int_0^t z_\theta(\theta,0+0)z_\sigma(\theta,0+0)\,d\theta \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant l.$$

Действительно, из (5.2.14) и (5.2.16) имеем

$$\int_0^t z_\theta(\theta,0+0)z_\sigma(\theta,0+0)\,d\theta = k_0\int_0^t z_x(x,0)z_y(x,0+0)\,dx =$$

$$= k_0\int_0^t z_x(x,0)\big[z_y(x,0-0) + z(x,0)(\mu_-(0)-\mu_+(0))\big]\,dx =$$

$$= k_0\int_0^t z_x(x,0-0)z_y(x,0-0)\,dx + \big[\mu_-(0)-\mu_+(0)\big]z^2(t,0)\frac{k_0}{2} \geqslant 0,$$

если $\mu_-(0)-\mu_+(0) = \sqrt{|\lambda|}\,\big[\mathrm{tg}\,(\sqrt{|\lambda|}\,k)+1\big] \geqslant 0$. Последнее неравенство справедливо, когда $-\pi/4 \leqslant \sqrt{|\lambda|}\,(k-y) < \pi/2, y_{\min} \leqslant y \leqslant 0$. Отсюда получим условие относительно параметра: $\lambda > -9\pi^2/16y_{\min}^2$.

5.2.2. Единственность решения смешанной обобщенной задачи. В этом пункте для уравнения (5.2.1) в области D (см. рис. 5.1.1) рассмотрим обобщенную задачу со смешанными граничными данными (задача MH_1.) Пусть A_1 — произвольная, но фиксированная точка кривой Γ. Тогда кривая Γ разбивается на две части: $\Gamma_1 = AA_1$ и $\Gamma_2 = A_1B$.

Задача $\boldsymbol{MH_1}$. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D\cup\Gamma_2) \cap C^2(D_+\cup D_-); \tag{5.2.17}$$

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u = 0, \quad (x,y)\in D_+\cup D_-; \tag{5.2.18}$$

$$u(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y)\in\gamma; \tag{5.2.19}$$

$$u(x,y) = \varphi_1(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma_1, \tag{5.2.20}$$

$$Ku_x dy - (u_y - \mu u)dx = \varphi_2(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma_2, \tag{5.2.21}$$

где ψ, φ_1, φ_2 — заданные достаточно гладкие функции, $\psi(A) = \varphi(A)$, $\mu(y)$ — решение уравнения Риккати (5.2.2).

Теорема 5.2.3. *Пусть*: 1) *выполнены условия* 2) *и* 3) *теоремы* 5.2.1; 2) *кривые* Γ_1 *и* Γ_2 *из класса Ляпунова, на* Γ_1 *отсутствуют точки, при переходе которых* $n_1(s)$ *меняет знак, а* $n_2(s) = 1$, *на* Γ_2 *отсутствуют точки, при переходе которых* $n_1(s)$ *меняет знак, а* $n_2(s) = -1$; *в малой окрестности точки* A_1 *на* Γ_2 *или на* Γ_1: $n_1(s) \leqslant 0$. *Тогда если в классе регулярных в* D *решений уравнения* (5.2.1) *существует решение задачи* (5.2.16)–(5.2.20), *то оно единственно.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 5.2.1 введем вспомогательную функцию $\Psi(x, y)$ по формуле (5.2.3). Из доказательства теоремы 5.2.1 следует, что $\max\limits_{\overline{D}} \Psi(x, y) = \Psi(Q) > 0$ может достигаться лишь в точках кривой Γ_2 или в точке A_1. Пусть $Q = (x_0, y_0) = (x(s_0), y(s_0)) \in \Gamma_2$. В силу условия (5.2.20) при $\varphi_2(x, y) = 0$ для $(x(s), y(s)) \in \Gamma_2$ имеем

$$\frac{d\Psi[x(s), y(s)]}{ds} = Ku_x^2\Big[1 + K\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2\Big]n_1(s).$$

Тогда в точке Q либо $n_1(s_0) = 0$, либо $u_x(Q) = 0$. Если $n_1(s_0) = 0$, то из условия 2) теоремы вытекает, что $n_2(s_0) = 1$. В этом случае производная но нормали

$$\Psi_n(Q) = Ku_x^2 - (u_y - \mu u)^2 = Ku_x^2 \geqslant 0.$$

Если же $u_x(Q) = 0$, то $\Psi_n(Q) = 0$. Таким образом, в точке $Q \in \in \Gamma_2$: $\Psi_n(Q) \geqslant 0$, что на основании граничного принципа экстремума Зарембы–Жиро противоречит неравенству $\Psi_n(Q) < 0$. Следовательно, точка $Q \notin \Gamma_2$. Точка Q не может совпасть также с точкой A_1, так как в окрестности точки A_1 на Γ_2: $n_1(s) \leqslant 0$. Из этих рассуждений следует, что $\Psi(x, y) \leqslant 0$ в $\overline{D}$. Тогда в малой окрестности точки A на кривой Γ_1 производная по нормали $u_n = 0$ и в силу единственности решения задачи Коши для эллиптических уравнений $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_+}$. Отсюда вытекает, что $u \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Отметим, что в случае $\lambda(y) = \mathrm{const}$ теорема 5.2.3 справедлива при всех λ, удовлетворяющих неравенству (5.2.8).

Задача типа MH_1 ранее была рассмотрена в [40], где для уравнения (5.1.1) при указанных в § 5.1 ограничениях на коэффициенты и при некоторых условиях на кривую Γ доказана единственность решения этой задачи.

В дальнейшем рассмотрим вариант обобщенной задачи Трикоми, предложенный Л.В. Овсянниковым [156, с. 345] для уравнения Чаплыгина, и покажем единственность решения без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Γ.

§ 5.3. О единственности решения обобщенной задачи Трикоми в варианте Л.В. Овсянникова

Рассмотрим уравнение типа Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{5.3.1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D (см. рис. 5.3.1), где кривая AC в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой AC_1, затем параллельна оси $y = 0$ до пересечения в точке C с характеристикой CB, т. е. $AC = AC_1 \cup C_1C$, AC_1 — часть характеристики: $K(y)n_1^2(s) + n_2^2(s) = 0$, $n_1(s) > 0$; C_1C: $n_1(s) = 0$, и задачу (5.1.2)–(5.1.5).

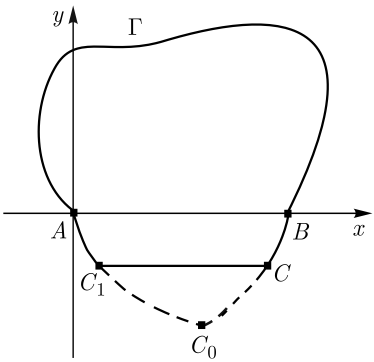

Рис. 5.3.1

Определение 5.3.1. Под регулярным в области D решением уравнения (5.3.1) будем понимать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (5.1.2), (5.1.3), и дополнительно потребуем, чтобы функция $-u_y\,dx + Ku_x\,dy$ была суммируемой вдоль кривых AC, CB, Γ и AB.

Теорема 5.3.1. *Пусть*: 1) *кривая* Γ *из класса Ляпунова*; 2) $K(y) \in C[y_{\min}, 0] \cap C^1[y_{\min}, 0) \cap C(0, y_{\max}] \cap C^1]0, y_{\max}]$; 3) $u(x,y)$ — *решение однородной задачи M из класса регулярных в D решений уравнения* (5.3.1); 4) *точка A не является предельной точкой множества* $\{(x,y) \in \Gamma \cup A\colon\ K(y)u_x^2 + u_y^2 = 0\}$. *Тогда* $u(x,y) \equiv 0$ *в* $\overline{D}$.

Доказательство. Пусть $u(x,y) \not\equiv 0$ в области D_+ — решение однородной задачи M для уравнения (5.3.1) из класса его регулярных решений. Введем функцию $v(x,y)$, которая с функцией $u(x,y)$ удовлетворяет на множестве $D_+ \cup D_-$ системе уравнений смешанного типа первого порядка

$$\begin{cases} Ku_x - v_y = 0, \\ u_y + v_x = 0. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

При условии $v(0,0)=0$ функция $v(x,y)$ однозначно определяется из системы (5.3.2):

$$v(x,y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} -u_y\,dx + Ku_x\,dy. \tag{5.3.3}$$

Поскольку $u(x,y)$ — регулярное в D решение уравнения (5.3.1), то функция $v(x,y)$, определенная формулой (5.3.3), непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Из формулы (5.3.3) на основании граничного условия $u=0$ на характеристике AC_1 следует, что

$$v(x,y)=0, \quad (x,y)\in AC_1. \tag{5.3.4}$$

По условию $u(x,y)=0$ на ляпуновской кривой Γ. Тогда из теории краевых задач для эллиптических уравнений известно, что в этом случае частные производные u_x и u_y непрерывны вплоть до границы Γ. По этой причине функция $v(x,y)$ имеет непрерывные частные производные v_x и v_y в D_+, кроме, быть может, точек A и B.

Отметим, что в § 4.2 были изучены некоторые геометрические свойства решений системы (5.3.2) в области D_+ (см. леммы 4.2.1–4.2.4), которые устанавливают структуру строения линии уровня $u(x,y)=0$.

Пусть $Y=\{z=x+iy\in A\cup\Gamma\colon\ J(z)=0\}$, где $J(z)$ — якобиан отображения $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Тогда в силу лемм 4.2.1–4.2.4 максимальные дуги линии уровня $u(x,y)=0$ функции $u(x,y)$ будут исходить из точек множества Y и оканчиваться на точках отрезка $AB\cup B$. Обозначим через X множество точек промежутка $(0,l)$ оси $y=0$, в которых оканчиваются дуги линии уровня функции $u(x,y)$, исходящие из точек Y. Множество X замкнуто. Пусть $l_0=\min X$, тогда ясно, что $l_0>0$ и $l_0\in X$. Если $J(A)>0$, то существует точка $A_1\in Y$, самая близкая по кривой Γ до точки A. Обозначим через S_0 максимальную дугу линии уровня функции $u(x,y)$ с концами в точках A_1 и $B_0=(l_0,0)$. Пусть $\Gamma_0=AA_1\cup A_1\cup S_0$. Если $J(A)=0$, то точка $A_1\equiv A$. Из построения дуги Γ_0 следует, что не найдется пары точек $z\in\overline{\Gamma}_0\setminus B_0$ и $x\in(0,l_0)$, которые можно соединить линией уровня функции $u(x,y)$. Отсюда вытекает, что функция $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ монотонна вдоль кривой Γ_0.

Отметим, что если $l_0\equiv l$, то $\Gamma_0\equiv\Gamma$. Из того факта, что якобиан $J(z)=K(y)u_x^2+u_y^2$ на любом замкнутом подмножестве множества $D_+\cup\Gamma$ может иметь конечное число нулей, следует, что кривая Γ_0 является кусочно-гладкой на этом подмножестве. В силу этого, не теряя общности, будем считать кривую Γ_0 спрямляемой, так как в противном случае, рассуждая аналогично доказательству теоремы 4.2.3, придем к тому же заключению.

Из точки $B_0=(l_0,0)$ проведем характеристику уравнения (5.3.1) до пересечения с кривой AC в точке A_0. Пусть G — область, ограниченная кривыми AA_0, A_0B_0 и Γ_0; $G_+ = G \cap \{y > 0\}$, $G_- = G \cap \{y < 0\}$. На множестве $G_+ \cup G_-$ рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} 2uv\,dx + (Ku^2 - v^2)\,dy, \tag{5.3.5}$$

который в силу системы (5.3.2) не зависит на этом множестве от пути интегрирования. Следовательно, интеграл (5.3.5) по любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой, лежащей в $G_+ \cup G_-$, равен нулю. Поскольку функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в $\overline{G}$, то

$$\int\limits_{\partial G} 2uv\,dx + (Ku^2 - v^2)\,dy = 0. \tag{5.3.6}$$

Равенство (5.3.6) с учетом однородных граничных условий (5.1.4), (5.1.5) и (5.3.4) принимает вид

$$\int\limits_{AA_0} -v^2\,dy + \int\limits_{A_0B_0} 2uv\,dx + (Ku^2 - v^2)\,dy - \int\limits_{\Gamma_0} v^2\,dy = 0. \tag{5.3.7}$$

Нетрудно заметить, что

$$\int\limits_{AA_0} -v^2\,dy = \int\limits_{AA_1} -v^2\,dy + \int\limits_{A_1A_0} -v^2\,dy = 0, \tag{5.3.8}$$

$$\int\limits_{A_0B_0} 2uv\,dx + (Ku^2 - v^2)\,dy = -\int\limits_{A_0B_0} (\sqrt{-K}\,u - v)^2\,dy \leqslant 0, \tag{5.3.9}$$

$$-\int\limits_{\Gamma_0} v^2\,dy = 2\int\limits_{\Gamma_0} yv\,dv \leqslant 0, \tag{5.3.10}$$

так как вдоль кривой Γ_0: $v\,dv \leqslant 0$. Таким образом, из соотношений (5.3.8)–(5.3.10) следует, что каждое слагаемое в левой части равенства (5.3.7) равно нулю. Отсюда уже вытекает, что $v(x, y) = 0$ на кривой Γ_0. Итак, имеем $u = v = 0$ на Γ_0. Тогда в силу единственности решения задачи Коши для эллиптической системы (5.3.2) [235, 31] заключаем, что $u = v \equiv 0$ в замкнутой области $\overline{G_+}$, следовательно, и в области D.

Замечание 5.3.1. Отметим, что условие 4) теоремы 5.3.1 выполнено, например, когда в достаточно малой окрестности точки A (для точек области D) задача Трикоми для уравнения (5.3.1) с данными $u = 0$ на AC_2 и $u = 0$ на Γ_2 имеет только нулевое решение. Здесь Γ_2 — простая кривая с концами в точках A и $B_2 \in AB$, лежащая в $D_+ \cup \Gamma$; AC_2 и C_2B_2 — характеристики уравнения (5.3.1), $C_2 \in AC_1$. Последнее справедливо, если при малых $y \leqslant 0$: $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m$, $m \geqslant 0$, или функция $K(y)$ удовлетворяет условиям теорем Франкля и Проттера [258, 201, гл. 2, § 3] (в случае уравнения Чаплыгина эти условия выполнены).

В области D рассмотрим еще один класс уравнений смешанного типа,

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u = 0, \tag{5.3.11}$$

где $m = \mathrm{const} > 0$, и покажем, что введением новой функции $z(x,y)$ и новых переменных (θ, σ) уравнение (5.3.11) сводится к уравнению типа (5.3.1).

Действительно, введем функцию $z(x,y)$ по формуле

$$u(x,y) = z(x,y) \exp \int\limits_0^y \mu(t)\,dt = z(x,y)\mu_1(y),$$

которая является решением уравнения

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^m z_{xx} + z_{yy} + 2\mu(y) z_y = 0, \tag{5.3.12}$$

где функция $\mu(y)$ определяется как решение уравнения Риккати,

$$\mu'(y) + \mu^2(y) = \lambda(y), \quad y_{\min} < y < y_{\max}. \tag{5.3.13}$$

На плоскости (x,y) введем новые переменные (θ, σ) так, чтобы уравнение (5.3.12) в этих координатах преобразовалось к уравнению типа (5.3.1)

$$K(\sigma) z_{\theta\theta} + z_{\sigma\sigma} = 0; \tag{5.3.14}$$

при этом функция $K(\sigma)$ должна быть такой, что $\sigma K(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq \neq 0$, и удовлетворять условию 2) теоремы 5.3.1. Пусть такая $K(\sigma)$ существует. Тогда заменой переменных

$$x = \theta, \quad y = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \left(\operatorname{sgn}\sigma \cdot \frac{1}{\beta} \int\limits_0^\sigma \sqrt{|K(t)|}\,dt \right)^\beta, \tag{5.3.15}$$

где $\beta = 2/(m+2)$, уравнение (5.3.14) преобразуется к уравнению вида

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^m z_{xx} + z_{yy} + \frac{y_{\sigma\sigma}}{y_\sigma^2} z_y = 0. \tag{5.3.16}$$

Сопоставляя уравнения (5.3.12) и (5.3.16), получим условие для нахождения неизвестной функции $K(\sigma)$:

$$\frac{y_{\sigma\sigma}}{y_\sigma^2} = 2\mu(y). \tag{5.3.17}$$

Подставляя (5.3.15) в (5.3.17) при $\sigma > 0$, получим

$$\frac{K'(\sigma)}{2K^{3/2}(\sigma) y^{(\beta-1)/\beta}} + \frac{\beta - 1}{\beta y} = 2\mu(y). \tag{5.3.18}$$

Поскольку $dy/d\sigma = [K(\sigma)]^{1/2} y^{(\beta-1)/\beta}$, то уравнение (5.3.18) принимает вид

$$\frac{dK(\sigma)}{K(\sigma)} - \frac{2(1-\beta)dy}{\beta y} = 4\mu(y)\,dy. \tag{5.3.19}$$

Решение уравнения (5.3.19) определяется формулой

$$K(\sigma) = y^m \exp\left[4\int\limits_0^y \mu(t)\,dt\right] C_0^2 = C_0^2 y^m \mu_1^4(y), \tag{5.3.20}$$

где $C_0 = \text{const} > 0$. Аналогично, из (5.3.17) и (5.3.15) при $\sigma < 0$ находим

$$K(\sigma) = -C_0^2(-y)^m \mu_1^4(y). \tag{5.3.21}$$

Итак, объединяя равенства (5.3.20) и (5.3.21), получим

$$K(\sigma) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m \mu_1^4(y). \tag{5.3.22}$$

Теперь установим однозначную зависимость между переменными y и σ. На основании (5.3.15) и (5.3.22) имеем

$$\frac{dy}{d\sigma} = |K(\sigma)|^{1/2}|y|^{-m/2} = c_0\mu_1^2(y) \geqslant \delta > 0 \tag{5.3.23}$$

при всех $(x, y) \in \overline{D}$. Из неравенства (5.3.23) следует, что функция $y = \psi(\sigma)$ существует на сегменте $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ и она строго возрастает. Подставляя $y = \psi(\sigma)$ в (5.3.22), можем найти K как функцию относительно σ (хотя это нам в дальнейшем не нужно).

Таким образом, если $\mu(y)$ является решением уравнения (5.3.13), то уравнение (5.3.11) эквивалентно преобразуется к уравнению (5.3.14), где функция $K(\sigma)$ задается формулой (5.3.22). Тем самым задача M для уравнения (5.3.11) в области D эквивалентно сведена к задаче M для уравнения (5.3.14) в области D' плоскости переменных (θ, σ). При этом коэффициент $K(\sigma)$, определенный формулой (5.3.22), удовлетворяет условию 2) теоремы 5.3.1. Далее покажем, что в этом случае уравнения (5.3.14) выполнено также условие 4) теоремы 5.3.1. В силу замечания 5.3.1 достаточно проверить условия теоремы Франкля–Проттера [201, с. 56] для малых σ:

$$\begin{cases} K(\sigma) \in C[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}], \quad K(\sigma) \in C^2[\sigma_{\min}, 0), \quad K(0) = 0; \\ K'(\sigma) > 0 \quad \text{и} \quad F(\sigma) = 2\left(\dfrac{K}{K'}\right)' + 1 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \sigma \leqslant 0. \end{cases} \tag{5.3.24}$$

Для проверки условий (5.3.24) вычислим производные $K'(\sigma)$ и $K''(\sigma)$:

$$K'(\sigma) = \frac{dK}{dy}\frac{dy}{d\sigma} = (-y)^{m-1}C_0^3\mu_1^4(y)[m + 4y\mu(y)],$$

$$K''(\sigma) = \frac{dK'(\sigma)}{dy}\frac{dy}{d\sigma} = \\ = (-y)^{m-2}C_0^4\mu_1^8(y)[m - m^2 - 10my\mu(y) - 24y^2\mu^2(y) - 4y^2\mu'(y)].$$

Тогда

$$F(\sigma) = (K')^{-2}[3(K')^2 - 2KK''] = \\ = (K')^2(-y)^{2m-2}C_0^6\mu_1^{12}[m(m+4y\mu(y)) + 2(m-4y^2\mu')].$$

Отсюда видно, что условия (5.3.24) при малых $\sigma \leqslant 0$ выполнены, если при малых $y \leqslant 0$ функция $\mu(y)$ удовлетворяет неравенству

$$m + 4y\mu(y) > 0, m^2 - 4y^2\mu'(y) \geqslant 0. \tag{5.3.25}$$

Поскольку $\mu(y) \in C^1[y_{\min}, y_{\max}]$ и $m = \text{const} > 0$, то ясно, что при малых $y \leqslant 0$ условия (5.3.25) всегда выполнены.

Следовательно, нами доказана следующая

Теорема 5.3.2. *Пусть*: 1) *кривая* Γ — *из класса Ляпунова*; 2) *функция* $\lambda(y)$ *такова, что существует решение* $\mu(y)$ *уравнения* (5.3.13) *из класса* $C^1[y_{\min}, y_{\max}]$; 3) $u(x,y)$ — *решение однородной задачи* M *для уравнения* (5.3.11) *из класса его регулярных в* D *решений. Тогда* $u(x,y) \equiv 0$ *в* $\overline{D}$.

В частности, когда $\lambda(y) = \text{const}$, теорема 5.3.2 справедлива при всех λ, удовлетворяющих неравенству (5.2.8). Этот случай подробно рассмотрен в п. 4.2.3.

Далее для уравнения (5.3.1) в области D (см. начало § 5.3) рассмотрим задачу типа MH_1 из п. 5.2.2.

Задача $\boldsymbol{MH_2}$. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям*:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma_1) \cap C^2(D_+ \cup D_-);$$
$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-;$$
$$u(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \gamma;$$
$$Ku_x dy - u_y dx = \varphi_1(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_1;$$
$$u(x,y) = \varphi_2(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_2,$$

где ψ, φ_1, φ_2 — *заданные достаточно гладкие функции.*

Заметим, что поскольку в малой окрестности точки A на кривой Γ: $n_1(s) \geqslant 0$, то точка A_1 на Γ выбрана так, чтобы всюду на кривой $\Gamma_1 = AA_1$ было $n_1(s) \geqslant 0$.

Теорема 5.3.3. *Пусть*: 1) *кривые* Γ_1 *и* Γ_2 *из класса Ляпунова*; 2) $K(y) \in C[y_{\min}, 0] \cap C^1[y_{\min}, 0) \cap C(0, y_{\max}] \cap C^1]0, y_{\max}]$; 3) $u(x,y)$ — *решение однородной задачи* MH_2 *из класса регулярных в* D *решений уравнения* (5.3.1). *Тогда* $u(x,y) \equiv 0$ *в* D.

Доказательство. Пусть $u(x,y) \not\equiv 0$ в области D_+ — решение однородной задачи MH_2 для уравнения (5.3.1) из класса его регулярных решений. Аналогично доказательству теоремы 5.3.1 введем функцию $v(x,y)$, которая однозначно определяется из системы (5.3.2) и имеет вид (5.3.3). Из формулы (5.3.3) на основании граничного условия $Ku_x dy - u_y dx = 0$ на Γ_1 следует, что

$$v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1. \tag{5.3.26}$$

По условию $u = 0$ на Γ_2. Тогда функция $v(x, y)$ имеет непрерывные частные производные v_x и v_y в $\overline{D_+}$, за исключением, быть может, точек A, A_1 и B. Далее воспользуемся геометрическими свойствами решений системы (5.3.2) в области D_+, установленными в § 4.2 (леммы 4.2.1– 4.2.4).

Пусть $Y = \{z = x + iy \in A_1 \cup \Gamma_2 \colon J(z) = 0\}$, где $J(z) = K(y)u_x^2 + u_y^2$. Тогда в силу лемм 4.2.1–4.2.4 максимальные дуги линии уровня $u(x, y) = 0$ функции $u(x, y)$ будут исходить из точек множества Y и оканчиваться на точках отрезка $AB \cup B$. Пусть X — множество точек отрезка $AB \cup B$, в которых оканчиваются дуги линии уровня функции $u(x, y)$, выходящие из точек Y.

Если $J(A_1) > 0$, то найдется точка $B_1 \in Y$ — самая близкая по кривой Γ_2 до точки A_1. Обозначим через S_0 максимальную дугу линии уровня функции $u(x, y)$ с концами в точках B_1 и $B_0 = (l_0, 0)$, где $l_0 = \min X, l_0 \in X$. Пусть $\Gamma_0 = A_1B_1 \cup B_1 \cup S_0$. Если $J(A_1) = 0$, то $B_1 \equiv A_1$. В дальнейшем, рассуждая аналогично доказательству теоремы 5.3.1, получим

$$\int\limits_{\partial G} 2uv\, dx + (Ku^2 - v^2)\, dy = 0. \tag{5.3.27}$$

Равенство (5.3.27) с учетом однородных граничных условий задачи MH_2 и равенства (5.3.26) имеет вид

$$\int\limits_{A_0B_0} (\sqrt{-K}\, u - v)^2\, dy - 2 \cdot \int\limits_{B_0A_1} yv\, dv - \int\limits_{A_1A} Ku^2\, dy = 0. \tag{5.3.28}$$

Поскольку вдоль кривой $\Gamma_0 = B_0A_1$: $vdv \leqslant 0$, а на кривой A_1A: $n_1 \geqslant 0$, то из (5.3.28) следует, что $u = v = 0$ на Γ_0. Тогда в силу единственности решения задачи Коши для эллиптической системы (5.3.2) заключаем, что $u = v \equiv 0$ не только в $\overline{G_+}$, но и в области D.

Заметим, что аналогично доказывается единственность решения задачи MH_2, где условие $Ku_x dy - u_y dx = \varphi(x, y)$ задано на $\gamma \cup \Gamma_1$.

§ 5.4. Задача Трикоми для уравнения Чаплыгина

Этот параграф начнем с замечания о том, что когда кривая AC из описания области D (см. рис. 5.1.1) совпадает с характеристикой AC_0 уравнения (5.2.1): $K(y)n_1^2(s) + n_2^2(s) = 0$, $n_1(s) > 0$, то задача M переходит в задачу T для уравнения (5.2.1). Поэтому теоремы 5.2.1 и 5.2.2 являются теоремами единственности решения задачи T для уравнения (5.2.1), в частности, и для уравнения Чаплыгина. Но эти утверждения справедливы при некоторых геометрических ограничениях на кривую Г. Оказывается, в случае задачи Т можно избавиться от этих условий на кривую Г.

Исследование задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина по сей день представляет интерес. Это связано с тем, что Ф.И. Франкль [214] впервые показал, что проблема истечения сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками (внутри сосуда скорость — дозвуковая) на плоскости годографа сводится к задаче Трикоми для уравнения Чаплыгина
$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{5.4.1}$$
где $K(0) = 0, K'(y) > 0$ при всех $(x, y) \in \overline{D}$, и доказал единственность решения этой задачи при условии
$$F(y) = 2\Big(\frac{K(y)}{K'(y)}\Big)' + 1 \geqslant 0 \ \text{ при } \ y < 0.$$

К.И. Бабенко в своей диссертации [5] подробно изучал задачу Т для уравнения Чаплыгина. Он доказал единственность решения задачи Т, когда ляпуновская кривая Г удовлетворяет условию
$$(l - x)\,\frac{dy}{ds} + y\frac{dx}{ds} \leqslant 0. \tag{5.4.2}$$

С помощью замены переменных и ведением новой функции К.И. Бабенко свел уравнение (5.4.1) к уравнению с оператором Трикоми
$$yu_{xx} + u_{yy} + C(y)u = 0. \tag{5.4.3}$$
На основании теоремы единственности методом интегральных уравнений он доказал существование решения задачи Т для уравнения (5.4.3), предполагая, что в окрестности точек A и B на кривой Г выполнено условие ортогональности
$$|dx/ds| \leqslant C\,y^2(s), \quad C = \text{const} > 0. \tag{5.4.4}$$

Проттер [258] обобщил отмеченный выше результат Ф.И. Франкля. Единственность решения задачи Т для уравнения (5.4.1) им доказана в следующих случаях:

1) гладкая кривая Г, лежащая в эллиптической части области D, произвольна, но гиперболическая часть области D ограничивается тем, что $F(y) > y_0$, где $y_0 < 0$;

2) на гиперболическую часть области D нет ограничений и функция $F(y)$ может принимать любые конечные значения при $y < 0$, но зато кривая Г не должна простираться слишком далеко в направлении оси $x = 0$;

3) функция $K(y)$ имеет непрерывную производную 3-го порядка, удовлетворяющую неравенству $K'''(y) \leqslant 0$ всякий раз, когда $F(y) < 0$ при $y < 0$.

Эти результаты Проттера изложены также в монографии М.М. Смирнова [201, гл. 2, § 3].

Здесь установим единственность решения задачи Т для уравнения (5.3.1) без указанных выше ограничений на кривую Г и функцию $K(y)$ и укажем ее применения.

Рассмотрим уравнение (5.3.1) в области D (см. § 5.1), где кривая AC является характеристикой этого уравнения, и поставим задачу Трикоми.

Теорема 5.4.1. *Пусть*: 1) *кривая* Г *из класса Ляпунова*; 2) $K(y) \in C[y_{\min}, 0] \cap C^1[y_{\min}, 0) \cap C[0, y_{\max}] \cap C^1(0, y_{\max}]$; 3) $u(x, y)$ — *решение однородной задачи T из класса регулярных в D решений уравнения* (5.3.1); 4) *точка A не является предельной точкой множества* $\{(x, y) \in A \cup \Gamma\colon\ K(y)u_x^2 + u_y^2 = 0\}$. *Тогда* $u(x, y) \equiv 0$ *в* $\overline{D}$.

Доказательство буквально повторяет рассуждения, проведенные в процессе доказательства теоремы 5.3.1. Здесь только надо учесть, что условие (5.3.4) относительно функции $v(x, y)$ выполнено всюду на кривой AC.

Отметим, что в случае уравнения Чаплыгина в силу замечания 5.3.1 условие 4) теоремы 5.4.1 всегда выполнено, так как в малой окрестности точки A выполнены условия теорем Проттера [201, гл. 2, § 3].

На основании теоремы 5.4.1 аналогично теореме 5.3.2 доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.4.2. *Пусть*: 1) *кривая* Г *из класса Ляпунова*; 2) *функция $\lambda(y)$ такова, что существует решение задачи $\mu(y)$ уравнения* (5.3.13) *из класса* $C^1[y_{\min}, y_{\max}]$. *Тогда если в классе регулярных в D решений уравнения* (5.3.11) *существует решение задачи T, то оно единственно.*

В частности, когда $\lambda(y) = \mathrm{const}$, то теорема 5.4.2 справедлива при всех λ, удовлетворяющих условию (5.2.8).

В качестве второго примера применения теоремы 5.4.1 отметим, что из результатов К.И. Бабенко, упомянутых выше, и теоремы 5.4.1 вытекает существование решения задачи Т для уравнения Чаплыгина без ограничения (5.4.2) на кривую Г.

§ 5.5. К вопросу о существовании решения обобщенной задачи Трикоми методом интегральных уравнений

В § 5.1 было отмечено, что в диссертации [5] К.И. Бабенко (см. также [201, гл. 111]) для уравнения Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{5.5.1}$$

где $K(0) = 0, K'(y) > 0$ при всех $(x, y) \in \overline{D}$, в случае, когда ляпуновская кривая Γ и кусочно-гладкая кривая γ удовлетворяют условиям:

$$\Gamma\colon\ (x - l)n_1(s) + yn_2(s) \leqslant 0, \tag{5.5.2}$$

$$\gamma\colon\ K(y)n_1^2(s) + n_2^2(s) \geqslant 0, \quad n_1(s) \geqslant 0, \tag{5.5.3}$$

доказана единственность решения задачи М. На основании теоремы единственности при дополнительном требовании, что в окрестности точек A и B на кривой Γ выполнено условие ортогональности

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leqslant C\, y^2(s), \quad C = \mathrm{const} > 0, \tag{5.5.4}$$

методом интегральных уравнений им показана также разрешимость задачи М для уравнения (5.4.3) при некоторых условиях на граничные функции $\varphi(x(s), y(s)) = \varphi(s)$ и $\psi(x)$.

Из этих результатов К.И. Бабенко и теоремы 5.2.1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.5.1. *Пусть*: 1) *кривая* Γ *удовлетворяет условиям* 1) *теоремы* 5.2.1 *и* (5.5.4); 2) *вдоль кривой* γ *выполнены неравенства* (5.5.3); 3) *функция* $\varphi(s)$ *удовлетворяет условию Гёльдера на* $[0, S]$ (S *— длина кривой* Γ) *с некоторым показателем*, $\varphi(s) = O[(S - s)^{4/3}]$ *при* $s \to S$ *и* $\varphi(s) = O(s)$ *при* $s \to 0$; $\psi(x) \in C^2[0, x_c] \cap C^3(0, x_c)$, x_c *— абсцисса точки* C. *Тогда в классе регулярных в* D *решений уравнения* (5.5.1) *существует единственное решение задачи* M.

Это утверждение отличается от результата К.И. Бабенко тем, что геометрическое ограничение (5.5.2) на кривую Γ здесь существенно ослаблено, т. е. оно заменено условием 1) теоремы 5.2.1. А в случае задачи М в варианте Л.В. Овсянникова ограничение (5.5.2) вовсе снято.

В дальнейшем изучим вопрос о разрешимости задачи М для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с комплексным параметром

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{5.5.5}$$

где $\lambda \neq 0$ — комплексное число, в области D (см. рис. 5.1.1), где кривая $\gamma = AC$ задана уравнением $y = -kx$, $0 < k < 1$, а CB: $x - y = l$.

Предварительно рассмотрим задачу Дарбу для уравнения (5.5.5) в области D_-.

Задача $\boldsymbol{D_1}$. *Найти функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющую условиям*:

$$u(x, y) \in C(\overline{D_-}) \cap C^2(D_-), \quad Lu \equiv 0, (x, y) \in D; \tag{5.5.6}$$

$$u(x, y)\big|_{y=-kx} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{1+k}; \tag{5.5.7}$$

$$u(x, y)\big|_{y=0} = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Задача D_2. *Найти функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющую условиям* (5.5.6) *и* (5.5.7) *и, кроме того,*

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

где ψ, τ *и* ν — *заданные достаточно гладкие функции.*

Обозначим через $u_0(x, y)$ решения задач D_1 и D_2 для уравнения (5.5.5) при $\lambda = 0$, а через $\tau_0(x), \nu_0(x)$ и $\psi_0(x)$ — соответствующие граничные функции. Тогда справедливо утверждение.

Лемма 5.5.1. *Если* $\tau_0(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $\psi_0(x) \in C\Big[0, \dfrac{1}{1+k}\Big] \cap C^2\Big(0, \dfrac{1}{1+k}\Big)$, $\tau_0(0) = \psi_0(0) = 0$, $\tau_0(x)$ *и* $\psi_0(x)$ *удовлетворяют условию Гёльдера в малой окрестности* $x = 0$, *то функция*

$$u_0(x, y) = \tau_0(x + y) - \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ \psi_0\Big[(1+\alpha)\alpha^n \frac{x+y}{2}\Big] - \psi_0\Big[(1+\alpha)\alpha^n \frac{x-y}{2}\Big] - \\ - \tau_0\big[\alpha^{n+1}(x+y)\big] + \tau_0\big[\alpha^{n+1}(x-y)\big] \Big\}, \qquad (5.5.8)$$

где $\alpha = (1 - k)/(1 + k)$, *является решением задачи* D_1 *для уравнения струны.*

Если $\nu_0(x) \in C^1(0, 1) \cap L_1[0, 1]$ *и* $\psi_0(x)$ *удовлетворяет отмеченным выше условиям, то функция*

$$u_0(x, y) = \int_0^{x+y} \nu_0(t)\,dt + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Big\{ \psi_0\Big[(1+\alpha)\alpha^n \frac{x+y}{2}\Big] + \\ + \psi_0\Big[(1+\alpha)\alpha^n \frac{x-y}{2}\Big] - \int_0^{\alpha^{n+1}(x+y)} \nu_0(t)\,dt - \int_0^{\alpha^{n+1}(x-y)} \nu_0(t)\,dt \Big\} \qquad (5.5.9)$$

является решением задачи D_2 *для уравнения струны.*

Отметим, что формула (5.5.8) при $\psi_0(x) \equiv 0$ приведена в книге [139, с. 53].

В силу леммы 5.5.1 теорема 2.3.1 позволяет решение задач D_1 и D_2 для уравнения (5.5.5) свести к решению задач D_1 и D_2 для уравнения струны.

В самом деле, пусть $u_0(x, y)$ — решение задачи D_1 в области D_- для уравнения струны. Тогда функция $u_0(x, y)$ выражается формулой (5.5.8). Подставляя $u_0(x, y)$ в интегральный член формулы (2.3.2), получим

$$u(x,y)=u_0(x,y)-\int_0^1\left\{\tau_0(xt+yt)-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\psi_0\left[(1+\alpha)\alpha^n t\frac{x+y}{2}\right]-\right.\right.$$
$$-\psi_0\left[(1+\alpha)\alpha^n t\frac{x-y}{2}\right]-\tau_0\left[\alpha^{n+1}t(x+y)\right]+$$
$$\left.\left.+\tau_0\left[\alpha^{n+1}t(x-y)\right]\right\}\right\}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)(1-t)}\right]dt. \quad (5.5.10)$$

Полагая в (5.5.10) $y=-kx$, будем иметь

$$\psi(x)=\psi_0(x)-\int_0^1\psi_0(xt)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda(1-k^2)x^2(1-t)}\right]dt$$

или

$$\psi(x)=\psi_0(x)-\int_0^x\psi_0(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0\left[\sqrt{\lambda(1-k^2)x(x-s)}\right]ds. \quad (5.5.11)$$

Обращая интегральное уравнение (5.5.11) по теореме 2.2.1, находим неизвестную функцию

$$\psi_0(x)=\psi(x)+\int_0^x\psi(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}I_0\left[\sqrt{\lambda(1-k^2)t(x-t)}\right]dt, \quad (5.5.12)$$

которая обладает той же гладкостью, что и функция $\psi(x)$.

Из формулы (5.5.10) при $y=0$ получим интегральное уравнение относительно функции $\tau_0(x)$:

$$\tau(x)=\tau_0(x)-\int_0^1\tau_0(xy)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\lambda x^2(1-t)}\right]dt,$$

решением которого является функция

$$\tau_0(x)=\tau(x)+\int_0^x\tau(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}I_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right]dt. \quad (5.5.13)$$

Итак, если функции $\psi(x)$ и $\tau(x)$ обладают отмеченными в лемме 5.5.1 свойствами функций $\psi_0(x)$ и $\tau_0(x)$, то функции $\psi_0(x)$ и $\tau_0(x)$, определенные, соответственно, формулами (5.5.12) и (5.5.13), удовлетворяют условиям леммы 5.5.1. Тогда формула (2.3.2), где $u_0(x,y)$ задана формулой (5.5.8), а функции $\psi_0(x)$ и $\tau_0(x)$ определены, соответственно, формулами (5.5.12) и (5.5.13), дает решение задачи D_1 для уравнения (5.5.5) в области D_-.

В случае задачи D_2 аналогично находится функция $\psi_0(x)$ по формуле (5.5.12), а $\nu_0(x)\equiv\nu(x)$. Поэтому формула (2.3.2), в которой $u_0(x,y)$ определена формулой (5.5.9), $\nu_0(x)=\nu(x)$ и $\psi_0(x)$ задана равенством (5.5.12), дает решение задачи D_2 для уравнения (5.5.5) в области D_-.

На основании этих результатов нетрудно свести задачу M для уравнения (5.5.5) к задаче M для уравнения Лаврентьева–Бицадзе

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0, \tag{5.5.14}$$

которая достаточно подробно изучена в работах [23, 205].

Пусть $u_0(x,y)$ — решение задачи M для уравнения (5.5.14) в области D (где γ: $y = -kx$) с граничными условиями $u_0 = \varphi_0$ на Γ и $u_0 = \psi_0$ на γ. Тогда функция $u_0(x,y)$ в области D_- может быть представлена в виде формулы (5.5.8) или (5.5.9). Подставляя одну из этих формул в интегральный член формулы (2.3.4) и полагая $y = -kx$, получим интегральное уравнение (5.5.11) относительно функции $\psi_0(x)$, решение которого определяется формулой (5.5.12).

Для нахождения функции $\varphi_0(s)$ аналогично задаче Трикоми из § 2.3 при тех же условиях на функции $\varphi(s)$ и $\psi(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из теоремы единственности решения задачи M для уравнения (5.5.5) (см. замечание 5.2.2 и [163]).

Общий случай, когда кривая γ: $y = -\alpha(x)$, $\alpha(0) = 0$, $\alpha(x) > 0$, $0 < \alpha'(x) \leqslant 1$ при $x > 0$, изучается аналогично. В этом случае интегральное уравнение, которое получается для нахождения $\psi_0(x)$, является более сложным, чем (5.5.11), но разрешимым.

§ 5.6. Построение решения обобщенной задачи Трикоми методом разделения переменных

Рассмотрим уравнение смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе

$$Lu = u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0 \tag{5.6.1}$$

в области D, где эллиптическая часть D_+ является сектором с центром в точке $A(0,0)$: $0 < r < l$, $0 < \varphi < \varphi_0 \leqslant \pi$, а гиперболическая часть D_- при $y < 0$ ограничена отрезком AC_k ($kx + y = 0, 0 < k < 1$), характеристикой C_kB ($x - y = l$) и отрезком AB оси $y = 0$, и следующую задачу с отходом от характеристики.

Задача M. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{5.6.2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{5.6.3}$$

$$u(x,y)\big|_{AP} = v(r,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l; \tag{5.6.4}$$

$$u(x,y)\big|_{AC_k} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{k+1}; \tag{5.6.5}$$

$$u(x,y)\big|_{\Gamma_0} = v(r,\varphi)\big|_{r=l} = f(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0, \tag{5.6.6}$$

где $f(\varphi)$ — заданная достаточно гладкая функция, $f(\varphi_0) = 0$, P — точка пересечения кривой Γ_0 ($r = l$) и луча $\varphi = \varphi_0$.

Отметим, что задача (5.6.2)–(5.6.6) при $\lambda = 0$ решена в работе [142]. Здесь, следуя этой работе, построим решение задачи M для уравнения (5.6.1) при $\lambda \neq 0$.

Предварительно рассмотрим спектральную задачу M_λ, соответствующую поставленной задаче.

Задача $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}$. Найти значения спектрального параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям (5.6.2)–(5.6.5) и
$$u(x,y)\Big|_{\Gamma_0} = v(r,\varphi)\Big|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0. \tag{5.6.7}$$

В § 2.7 для уравнения (5.6.1) методом разделения переменных построено множество частных решений
$$u(x,y) = \begin{cases} J_\mu\big(\sqrt{\lambda}\,r\big)\Big(C_1^+ \sin\mu\varphi + C_2^+ \cos\mu\varphi\Big), & y>0,\\ J_\nu\big(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\,\big)\Big(C_1^-\Big(\dfrac{x+y}{x-y}\Big)^{\nu/2} - C_2^-\Big(\dfrac{x-y}{x+y}\Big)^{\nu/2}\Big), & y<0, \end{cases} \tag{5.6.8}$$
где ν и μ — неотрицательные константы разделения переменных в уравнении (5.6.1) в областях D_- и D_+ соответственно; r, φ — полярные координаты, C_i^+, C_i^-, $i=1,2$, — произвольные постоянные.

Удовлетворяя решение (5.6.8) в области D_- граничному условию (5.6.5), получим
$$u(x,y) = C^- J_\nu\big(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\,\big)\Big(\Big(\frac{x+y}{x-y}\Big)^{\nu/2} - K^\nu\Big(\frac{x-y}{x+y}\Big)^{\nu/2}\Big), \tag{5.6.9}$$
где $K = (1-k)/(1+k)$, C^- — произвольная постоянная.

Из формулы (5.6.9) найдем значения функции $u(x,y)$ и ее производной по нормали на отрезке AB оси $y=0$:
$$u(x,0) = C^- J_\nu(\sqrt{\lambda}\,x)\,(1-K^\nu)\,, \tag{5.6.10}$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \frac{1}{x} C^- \nu J_\nu(\sqrt{\lambda}\,x)\,(1+K^\nu)\,. \tag{5.6.11}$$

Решения уравнения (5.6.1) в области D_+, определяемые формулой (5.6.8) при $y>0$, удовлетворим граничному условию (5.6.4). Тогда получим
$$u(x,y) = C^+ J_\mu\big(\sqrt{\lambda}\,r\big)\sin\mu(\varphi_0-\varphi),$$
где C^+ — произвольная постоянная. Отсюда найдем значения функции и ее производной по нормали на отрезке AB оси $y=0$:
$$u(x,0) = C^+ J_\mu(\sqrt{\lambda}\,x)\sin\mu\varphi_0, \tag{5.6.12}$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = -C^+ J_\mu(\sqrt{\lambda}\,x)\frac{\mu}{x}\cos\mu\varphi_0. \tag{5.6.13}$$

Приравняв соотношения (5.6.10) и (5.6.11) с (5.6.12) и (5.6.13), соответственно, между собой, получим $\nu = \mu$,

$$\operatorname{tg} \mu\varphi_0 = \frac{K^\mu - 1}{1 + K^\mu}. \tag{5.6.14}$$

Положительные решения уравнения (5.6.14) удовлетворяют уравнению

$$\mu_n = \left(n - \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} K^{\mu_n}\right) \frac{\pi}{\varphi_0}, \quad n \in N; \tag{5.6.15}$$

они расположены в интервалах

$$\frac{\pi}{\varphi_0}(n - 1/4) < \mu_n < \frac{\pi}{\varphi_0}(n - 1/4) + \frac{1}{\varphi_0} K^{\mu_n}.$$

На основании (5.6.15) найдем

$$C^- = \frac{C^+ \sin \mu_n \varphi_0}{1 - K^{\mu_n}} = \frac{C^+ (-1)^{n+1}}{\sqrt{2(1 + K^{2\mu_n})}}. \tag{5.6.16}$$

Тогда с учетом (5.6.15) и (5.6.16) решения уравнения (5.6.1), удовлетворяющие условиям (5.6.2)–(5.6.5), определяются формулой

$$u_n(x, y) = \begin{cases} C_n J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2 + y^2)}\,) \sin \mu_n(\varphi_0 - \varphi), & y > 0, \\ \dfrac{C_n (-1)^{n+1}}{\sqrt{2(1 + K^{2\mu_n})}} J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)}\,) \times \\ \quad \times \left(\left(\dfrac{x + y}{x - y}\right)^{\mu_n/2} - K^{\mu_n} \left(\dfrac{x - y}{x + y}\right)^{\mu_n/2} \right), & y < 0. \end{cases} \tag{5.6.17}$$

Теперь, удовлетворив построенное решение (5.6.17) условию (5.6.7), найдем относительно спектрального параметра λ уравнение

$$J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}\, l) = 0. \tag{5.6.18}$$

Из теории бесселевых функций известно, что функция $J_\nu(z)$ при $\nu > -1$ имеет только вещественные нули. Тогда, обозначая через α_{nm} m-й корень уравнения (5.6.18), получим собственные значения

$$\lambda_{nm} = (\alpha_{nm}/l)^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{5.6.19}$$

а из формулы (5.6.17) — соответствующие собственные функции задачи M_λ:

$$u_{nm}(x, y) = C_{nm} J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2 + y^2)}\right) \sin(\mu_n(\varphi_0 - \varphi)), \quad y > 0, \tag{5.6.20}$$

$$u_{nm}(x,y) = \frac{C_{nm}(-1)^{n+1}}{\sqrt{2(1+K^{2\mu_n})}} J_{\mu_n}\Big(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2-y^2)}\Big) \times \\ \times \left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} - K^{\mu_n}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2}\right), \quad y<0. \quad (5.6.21)$$

Предварительно докажем утверждения, на которые будем опираться при построении решения задачи (5.6.2)–(5.6.6).

Лемма 5.6.1. *Система функций* $\{\Phi_n(\varphi)\} = \{\sin\mu_n(\varphi_0-\varphi)\}_{n=1}^{\infty}$ *образует базис в* $L_2(0,\varphi_0)$.

Доказательство. Следуя работе [142], рассмотрим систему функций: $\Phi_n(\alpha) = \sin\chi_n\alpha$, $n = 1,2,\ldots$, $\chi_n = \mu_n\dfrac{\varphi_0}{\pi}$, $\alpha = \dfrac{\pi(\varphi_0-\varphi)}{\varphi_0} \in$ $\in [0,\pi]$. Пусть мы имеем разложение некоторой функции $f(\alpha) \in L_2[0,\pi]$ по заданной системе функций,

$$f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\chi_n\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\Phi_n(\alpha), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \quad (5.6.22)$$

Обозначим через $h_n(\alpha)$ биортогональную систему к системе синусов $\{\sin(n-1/4)\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$. Умножим равенство (5.6.22) на $h_k(\alpha)$ и проинтегрируем от 0 до π. Тогда имеем

$$\int_0^{\pi} f(\alpha)h_k(\alpha)\,d\alpha = f_k = \int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} C_n\Phi_n(\alpha)h_k(\alpha)\,d\alpha. \quad (5.6.23)$$

Равенство (5.6.23) перепишем в следующем виде:

$$f_k = C_k + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\int_0^{\pi}\Phi_n(\alpha)h_k(\alpha)\,d\alpha - C_k = \\ = C_k + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\int_0^{\pi}\Phi_n(\alpha)h_k(\alpha)\,d\alpha - \sum_{n=1}^{\infty} C_n\int_0^{\pi}\sin((n-1/4)\alpha)h_k(\alpha)\,d\alpha$$

или

$$f_k = C_k + \sum_{n=1}^{\infty} C_n a_{kn}, \quad (5.6.24)$$

где

$$a_{kn} = \int_0^{\pi}(\Phi_n(\alpha) - \sin((n-1/4)\alpha))\,h_k(\alpha)\,d\alpha,$$

$$a_{kn} = \int_0^{\pi} I_n(\alpha)h_k(\alpha)\,d\alpha,$$

$$I_n(\alpha) = \Phi_n(\alpha) - \sin((n-1/4)\alpha). \quad (5.6.25)$$

На основании неравенства Коши–Буняковского оценим двойной ряд

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{kn}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} I_n(\alpha)h_k(\alpha)\,d\alpha\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} I_n^2(\alpha)\,d\alpha \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\pi} h_k^2(\alpha)\,d\alpha. \tag{5.6.26}$$

В силу теоремы 2.6.1 система синусов $\left\{\sin\left((n-1/4)\alpha\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в $L_2[0,\pi]$, поэтому для любой функции $g(\alpha)$ из $L_2[0,\pi]$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty}(g,h_k)^2 \leqslant M\|g\|_{L_2}^2, \quad M = \mathrm{const} > 0. \tag{5.6.27}$$

Тогда из оценок (5.6.26) и (5.6.27) следует, что

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{kn}^2 \leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} I_n^2(\alpha)\,d\alpha. \tag{5.6.28}$$

Теперь оценим коэффициенты ряда из правой части (5.6.28):

$$\begin{aligned} I_n^2 = [\sin\chi_n\alpha - \sin\left((n-1/4)\alpha\right)]^2 \leqslant [2\sin\left(\chi_n\alpha - (n-1/4)\alpha\right)/2]^2 \leqslant \\ \leqslant |\chi_n\alpha - (n-1/4)\alpha|^2 \leqslant |\mathrm{tg}\left(\chi_n\alpha - (n-1/4)\alpha\right)|^2 \leqslant \\ \leqslant K^{2\chi_n\pi/\varphi_0} \leqslant K^{2(n-1/4)\pi/\varphi_0}. \end{aligned} \tag{5.6.29}$$

Подставляя оценку (5.6.29) в (5.6.28), имеем

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}^2 \leqslant M\pi\sum_{n=0}^{\infty} K^{2(n+3/4)\pi/\varphi_0} = M\pi K^{3\pi/2\varphi_0}(1-K^{2\pi/\varphi_0})^{-1}. \tag{5.6.30}$$

Из (5.6.30) следует, что если число k достаточно близко к единице, то $\sum\limits_{k,n=1}^{\infty} a_{kn}^2 < 1$, и поэтому бесконечная система уравнений (5.6.24) однозначно разрешима относительно C_k, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < \infty. \tag{5.6.31}$$

Докажем теперь сходимость ряда (5.6.22) в $L_2(0,\pi)$. Для этого, используя равенство (5.6.25), представим данный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\Phi_n(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\left((n-1/4)\alpha\right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n I_n(\alpha). \tag{5.6.32}$$

Первый ряд в правой части (5.6.32) сходится в $L_2(0,\pi)$ в силу теоремы 2.6.1 о базисности системы синусов. Второй ряд исследуем по критерию Коши, используя оценку (5.6.29):

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=m}^{m+N} C_n I_n(\alpha)\right)^2 d\alpha \leqslant \sum_{n=m}^{m+N} C_n^2 \sum_{n=m}^{m+N} \int_0^\pi I_n^2(\alpha)\, d\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=m}^{m+N} C_n^2 \sum_{n=m}^{m+N} \pi K^{2(n-1/4)\pi/\varphi_0}.$$

Из полученного неравенства следует, что при k, достаточно близком к единице, ряд (5.6.32), а следовательно и ряд (5.6.22), сходятся в $L_2(0,\pi)$.

Ряд (5.6.22) сходится к функции $f(\alpha)$, так как если равенство (5.6.22) умножить на $h_k(\alpha)$ и проинтегрировать по сегменту $[0,\pi]$, то получим с учетом (5.6.24) значение f_k. В силу полноты системы $h_k(\alpha)$ в $L_2(0,\pi)$ получаем, что ряд (5.6.24) сходится к функции $f(\alpha)$.

Лемма 5.6.2. *Пусть функция* $f(\alpha) \in C^\beta[0,\pi]$, $0 < \beta \leqslant 1$; *тогда ряд* (5.6.22) *равномерно сходится к функции* $f(\alpha)$ *на* $[0,\pi]$.

Доказательство. Используя равенство (5.6.24), запишем ряд (5.6.22) в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^\infty C_k \Phi_k(\alpha) = \sum_{k=1}^\infty f_k \Phi_k(\alpha) - \sum_{k=1}^\infty \Phi_k(\alpha) \sum_{n=1}^\infty C_n a_{kn}.$$

Оценим теперь ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \Phi_k^2(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty \left[\sin\left(\left(n - \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} K^{\mu_n}\right)\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi_0 - \varphi)\right)\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty \left(\left(n - \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} K^{\mu_n}\right)\frac{\pi}{\varphi_0}(\varphi_0 - \varphi)\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty \left(\left(n - \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} K^{\mu_n}\right)\pi\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^\infty \left(n\pi - \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} K^{\mu_n}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty (n\pi + \operatorname{arctg} K^{\mu_n})^2 \leqslant \sum_{n=1}^\infty \left[\operatorname{tg}\,(n\pi + \operatorname{arctg} K^{\mu_n})\right]^2 \leqslant \sum_{n=1}^\infty K^{2\mu_n}.$$

Из этой оценки и следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^\infty \Phi_k^2(\alpha)$. Учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k^2 \leqslant M||f||_{L_2}^2$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty a_{kn}C_n$ сходится, получим, что ряд (5.6.22) равномерно сходится на $[0,\pi]$.

Замечание 5.6.1. Отметим, что леммы 5.6.1 и 5.6.2 доказаны при условии, когда число k достаточно близко к единице. Это ограничение вызвано однозначной разрешимостью системы (5.6.21) в пространстве l_2. Но в силу полной непрерывности оператора, порождаемого матрицей a_{kn}, в l_2 однозначная разрешимость системы (5.6.24) при любом $k \in (0,1)$ следует единственность решения задачи M для уравнения (5.6.1) при $\lambda = 0$ для таких k.

Теперь рассмотрим задачу (5.6.2)–(5.6.6). Решение этой задачи при $\lambda \neq \lambda_{nm}$ в области D_+ будем искать в виде ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}\, r)}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}\, l)} \sin \mu_n(\varphi_0 - \varphi). \tag{5.6.33}$$

Удовлетворяя ряд (5.6.33) с неизвестными коэффициентами C_n условию (5.6.6), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \mu_n(\varphi_0 - \varphi) = f(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0. \tag{5.6.34}$$

Здесь мы имеем разложение функции $f(\varphi)$ по системе $\{\sin \mu_n(\varphi - \varphi_0)\}$ и согласно лемме 5.6.1 коэффициенты C_n этого разложения определяются из системы уравнений (5.6.24). Подставляя их в формулу (5.6.17), получим решение задачи M

$$u(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}\,)}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}\, l)} \sin\left(\mu_n(\varphi_0 - \varphi)\right), \quad y > 0, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\,)}{\sqrt{2(1+K^{2\mu})}\, J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}\, l)} \times \\ \qquad \times\left(\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} - K^{\mu_n}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2}\right), \quad y < 0. \end{cases} \tag{5.6.35}$$

На основании асимптотической формулы (2.8.24) аналогично § 2.8 можно показать, что ряд (5.6.35) удовлетворяет условиям (5.6.2) и (5.6.3).

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.6.1. *Если функция* $f(\varphi) \in C^{\beta}[0, \varphi_0]$, $0 < \beta \leqslant 1$, $f(\varphi_0) = 0$, $\lambda \neq \lambda_{nm}$, *то решение обобщенной задачи* (5.6.2)–(5.6.6) *существует и оно определяется рядом* (5.6.35).

Теперь рассмотрим обобщенную задачу Трикоми для уравнения (5.6.1) в более сложной области Ω, чем D. Эллиптическая часть Ω^+ этой области при $y > 0$ ограничена полуокружностью Γ_0 с центром в точке $A(0,0)$: $r = l$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Гиперболическая часть Ω_1^- при $y < 0$, $x > 0$ ограничена характеристикой BC_k $(x - y = l)$ и отрезком AC_k $(y + kx = 0)$, гиперболическая часть Ω_2^- при $y < 0$, $x < 0$ ограничена характеристикой PE_k $(x+y=-l)$, и отрезком AE_k $(y-kx=0)$, где $0<k<1$, $B(l,0)$, $P(-l,0)$.

Задача $\mathbf{M_0}$. *Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega^+\cup\Omega_1^-\cup\Omega_2^-); \tag{5.6.36}$$

$$Lu(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Omega^+\cup\Omega_1^-\cup\Omega_2^-; \tag{5.6.37}$$

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in AE_k; \tag{5.6.38}$$

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in AC_k; \tag{5.6.39}$$

$$u(x,y)|_{\Gamma_0}=f(\varphi),\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \tag{5.6.40}$$

$f(\varphi)$ — заданная достаточно гладкая функция.

Предварительно изучим спектральную задачу, соответствующую задаче M_0, у которой в условии (5.6.40) функция $f(\varphi)\equiv 0$.

Аналогично изложенному выше строятся решения уравнения (5.6.1), удовлетворяющие условиям (5.6.36)–(5.6.39), которые имеют вид

$$u_n(x,y)=$$
$$=\begin{cases} C_n\sqrt{2(1+K^{2\mu_n})}\,J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}\,)\sin(\mu_n\varphi+\pi/4-\operatorname{arctg}K^{\mu_n}), \\ (x,y)\in\Omega^+, \\ C_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\,)\Big(\Big(\dfrac{x+y}{x-y}\Big)^{\mu_n/2}-K^{\mu_n}\Big(\dfrac{x-y}{x+y}\Big)^{\mu_n/2}\Big), \\ (x,y)\in\Omega_1^-, \\ (-1)^{n+1}C_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\,)\Big(\Big(\dfrac{x-y}{x+y}\Big)^{\mu_n/2}-K^{\mu_n}\Big(\dfrac{x+y}{x-y}\Big)^{\mu_n/2}\Big), \\ (x,y)\in\Omega_2^-, \end{cases} \tag{5.6.41}$$

где μ_n определяются как положительные решения уравнения

$$\operatorname{tg}(\mu\pi+\pi/4-\operatorname{arctg}K^{\mu})=\frac{1-K^{\mu}}{1+K^{\mu}},$$

которые удовлетворяют равенству

$$\mu_n=n-\frac12+\frac2\pi\operatorname{arctg}K^{\mu_n},\quad n\in N, \tag{5.6.42}$$

и расположены в интервалах

$$n-\frac12<\mu_n<n-\frac12+\frac2\pi K^{\mu_n}.$$

Удовлетворяя решения (5.6.41) граничному условию (5.6.40) при $f(\varphi)=0$, получим относительно параметра λ уравнение (5.6.18), где μ_n находятся по формуле (5.6.42). Тогда, обозначая снова m-й корень уравнения (5.6.18) через α_{nm}, находим собственные значения по равенству (5.6.19), а соответствующие собственные функции — по формуле (5.6.41):

$$u_{nm}(x,y)=$$
$$=\begin{cases} C_n\sqrt{2(1+K^{2\mu_n})}\,J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2+y^2)}\,)\times \\ \qquad\qquad \times\sin(\mu_n\varphi+\pi/4-\operatorname{arctg}K^{\mu_n}), \\ (x,y)\in\Omega^+, \\ \\ C_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2-y^2)}\,)\Big(\Big(\dfrac{x+y}{x-y}\Big)^{\mu_n/2}-K^{\mu_n}\Big(\dfrac{x-y}{x+y}\Big)^{\mu_n/2}\Big), \\ (x,y)\in\Omega_1^-, \\ \\ (-1)^{n+1}C_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2-y^2)}\,)\times \\ \qquad\qquad \times\Big(\Big(\dfrac{x-y}{x+y}\Big)^{\mu_n/2}-K^{\mu_n}\Big(\dfrac{x+y}{x-y}\Big)^{\mu_n/2}\Big), \\ (x,y)\in\Omega_2^-, \end{cases} \tag{5.6.43}$$

Теперь вернемся к задаче (5.6.36)–(5.6.40). Рассуждая аналогично изложенному выше, построим решение $u(x,y)$ задачи M_0 при $\lambda\neq\lambda_{nm}$:

$$u(x,y)=$$
$$=\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{C_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2+y^2)}\,)}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}\,l)}\sin(\mu_n\varphi+\pi/4-\operatorname{arctg}K^{\mu_n}), \\ (x,y)\in\Omega^+, \\ \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{C_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2-y^2)}\,)}{\sqrt{2(1+K^{2\mu_n})}\,J_{\mu n}(\sqrt{\lambda}\,l)}\Big(\Big(\dfrac{x+y}{x-y}\Big)^{\mu_n/2}-K^{\mu_n}\Big(\dfrac{x-y}{x+y}\Big)^{\mu_n/2}\Big), \\ (x,y)\in\Omega_1^-, \\ \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}C_nJ_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{nm}(x^2-y^2)}\,)}{\sqrt{2(1+K^{2\mu_n})}\,J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}\,l)}\times \\ \qquad\qquad \times\Big(\Big(\dfrac{x-y}{x+y}\Big)^{\mu_n/2}-K^{\mu_n}\Big(\dfrac{x+y}{x-y}\Big)^{\mu_n/2}\Big), \\ (x,y)\in\Omega_2^-, \end{cases} \tag{5.6.44}$$

где C_n есть коэффициенты разложения функции $f(\varphi)$ по системе функций $\big\{\Phi_n(\varphi)=\sin(\mu_n\varphi+\pi/4-\operatorname{arctg}K^{\mu_n})\big\}_{n=1}^{\infty}$ и определяются из

системы уравнений
$$f_k = C_k + \sum_{n=1}^{\infty} C_n a_{kn},$$
где
$$f_k = \int_0^{\pi} f(\varphi) h_k(\varphi)\, d\varphi,$$
$$a_{kn} = \int_0^{\pi} \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_n(\varphi) - \sin((n-1/2)\varphi + \pi/4)\Big) h_k(\varphi)\, d\varphi,$$
$\{h_k(\varphi)\}$ — биортогональная система к системе синусов $\big\{\sin((n - 1/2)\varphi + \pi/4)\big\}_{n=1}^{\infty}$, которая определяется по формуле (2.6.63) при $\beta = 1$, $\gamma = \pi/2$.

Теорема 5.6.2. *Если* $f(\varphi) \in C^{\beta}[0, \pi]$, $0 < \beta \leqslant 1$, $\lambda \neq \lambda_{nm}$, *то существует решение задачи* (5.6.36)–(5.6.40) *и оно определяется рядами* (5.6.44).

Заключение

Таким образом, в данной монографии на основе изучения качественных и спектральных свойств решений уравнений смешанного типа получены новые теоремы единственности и существования для задач Трикоми, Франкля и обобщенной задачи Трикоми и начата разработка спектральной теории уравнений смешанного типа.

Здесь автору хотелось бы обратить внимание на нерешенные задачи.

1. Прежде всего остается не до конца решенной задача о расположении спектра задачи Трикоми для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. В § 2.5 рассматривается бипараметрическое уравнение (2.5.1), т. е. уравнение вида

$$(\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + u_{yy} - \lambda |y|^n u = 0, \tag{$*$}$$

где $n = \text{const} \geqslant 0$,

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1, & y > 0 \\ \lambda_2, & y < 0, \end{cases}$$

λ_1 и λ_2 — заданные числовые, вообще говоря, комплексные параметры, в области D, ограниченной гладкой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(l,0), l > 0$, а при $y < 0$ — характеристиками AC и CB (см. (2.5.2)) уравнения $(*)$, и установлены теоремы единственности решения задачи T. При этом, когда $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant -p(p_1)$, остался открытым вопрос о единственности решения задачи T. Может быть, здесь по аналогии с результатами § 2.4 имеет место эффект влияния гиперболической части на единственность решения задачи T, а именно: при $\lambda_1 \geqslant 0$, что в области эллиптичности обеспечивает справедливость принципа экстремума, найдется такое значение $\lambda_2 < 0$, при котором однородная задача T имеет ненулевое решение.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$ найдены множества (2.5.27) и (2.5.28) при $n = 0$, а (2.5.47) и (2.5.48) при $n > 0$, которые не содержат спектра задачи T. При этом не выяснен вопрос о том, будут ли точки спектра находиться в параболе Карлемана по аналогии с эллиптическими операторами второго порядка, т.е. существует ли такая кривая на комплексной плоскости (λ), разделяющая эту плоскость на части, в каждой из которых либо содержатся точки спектра задачи T_λ, либо их там нет.

2. Следующая проблема, требующая внимания, это задача T_λ (см. § 2.7), которая сведена к новой нелокальной эллиптической задаче (2.7.2)–(2.7.4) и (2.7.7) при $n = 0$ и задаче (2.7.2)–(2.7.4) и (2.7.46) при $n > 0$. Каждая из этих задач решена только в случае, когда эллиптическая часть D_+ области D представляет собой сектор с центром в точке $A(0,0)$. В общем виде, т.е. когда кривая Γ является произвольной из класса Ляпунова, они не исследованы. В этом случае следует отметить, что на основании результатов [5, 37, 104, 201, 210] задача T для уравнения (2.7.1), т. е.: для уравнения

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} + \lambda K(y)u = 0, \tag{$**$}$$

где $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^n$, $n = \text{const} > 0$, λ — комплексный параметр, при некоторых ограничениях на подход кривой Γ к оси $y = 0$ и длину l линии изменения типа, — задача эквивалентно редуцируется к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Теперь, пользуясь теорией Фредгольма, можно утверждать, что множество собственных значений задачи T_λ не более чем счетно; точкой их сгущения может быть только бесконечно удаленная точка комплексной плоскости (λ). Но из этой теории не следует решение задачи о расположении спектра задачи T_λ. Поэтому желательно исследовать указанные выше нелокальные эллиптические спектральные задачи другими методами.

3. Задача Франкля из главы 4 в силу граничного условия (4.1.6) является нелокальной, в отличие от задач T и M. По видимому, из-за этого до сих пор не выяснен вопрос: имеет ли место принцип экстремума задачи Франкля для уравнения (4.1.1) аналогично задаче T. Здесь можно отметить только работу [122], где при достаточно малой длине отрезка OC (линии изменения типа уравнения) установлен принцип экстремума. Можно ли снять данное ограничение на длину отрезка OC?

По аналогии с задачей Трикоми по данной задаче предстоит исследовать те же вопросы, которые мы отметили выше в пп. 1 и 2, т. е. для уравнения $(*)$ рассмотреть задачу Франкля и:

1) получить теоремы единственности при разных λ_1 и λ_2; затем, в частности, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$;

2) исследовать задачу Φ_λ при $n > 0$: найти собственные значения, построить соответствующую систему собственных функций, исследовать их на полноту и базисность, построить решение задачи Франкля для уравнения $(**)$ при $n > 0$ методом спектральных разложений;

3) выяснить структуру расположения точек спектра задачи Φ_λ.

4. Как было отмечено выше, обобщенная задача Трикоми (задача M) является наиболее трудной среди краевых задач для уравнений смешанного типа и до сих пор; даже для известных уравнений смешанного типа (кроме уравнения Лаврентьева–Бицадзе) не получены теоремы единственности регулярных или обобщенных решений этой задачи без ограничений (кроме гладкости) на эллиптическую часть границы области. Поэтому предлагается установить результат теоремы 5.2.1 при условии, что Γ — произвольная кривая из класса Ляпунова, т. е. без условия, что на ней отсутствуют точки, при переходе которых $n_1(s)$ меняет знак, а $n_2(s) = 1$.

Не исследована задача M_λ для уравнения $(**)$ при $n > 0$. Здесь так же, как в случае задачи T_λ, предстоит ответить на вопросы, поставленные выше в пп. 1 и 2.

Список литературы

1. *Абдрахманов А. М.* Принцип максимума для одного класса вырождающихся эллиптических систем // В сб.: Уравнения неклассического типа. — Новосибирск. ИМ СО АН СССР, 1986. С. 3–5.
2. *Александров А. Д.* Исследование о принципе максимума // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157.
3. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М., 1965. 407 с.
4. *Бабенко К. И.* О сопряженных функциях // ДАН. 1948. Т. 62. № 2. С. 157–160.
5. *Бабенко К. И.* К теории уравнений смешанного типа. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — М., 1952.
6. *Бабенко К. И.* О принципе максимума для уравнения Эйлера–Трикоми // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 4. С. 777–782.
7. *Бабенко К. И.* О задаче Трикоми // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 1. С.14–19.
8. *Бакиевич Н. И.* Сингулярные задачи Трикоми для уравнения $\eta^\alpha u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \mu^2\eta^\alpha u = 0$ // Волжск. матем. сб. — Куйбышев, 1963. Вып. 1. С. 42–52; Изв. вузов. Математика. 1964. № 2(39). С. 7–13.
9. *Барменков А. Н.* Об аппроксимированных свойствах некоторых систем функций. Диссертация канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1983.
10. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. I, II. — М.: Наука, 1965. 294 с.; 1966. 296 с.
11. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. — М.: ИЛ, 1961. 208 с.
12. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965. 800 с.
13. *Бжихатлов Х. Г.*, *Нахушев А. М.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183, № 2. С. 261–264.
14. *Бицадзе А. В.* Об одной системе функций // УМН. 1950. Т. 5, вып. 4(38). С. 154–155.
15. *Бицадзе А. В.* О некоторых задачах смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 4. С. 561–564.
16. *Бицадзе А. В.* О единственности решения общей граничной задачи для уравнения смешанного типа // Сообщ. АН Груз. ССР. 1950. Т. 11, № 4. С. 205–210.
17. *Бицадзе А. В.* К общей задаче смешанного типа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 78, № 4. С. 621–624.
18. *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа: Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — М., 1951.
19. *Бицадзе А. В.* Об одной задаче Франкля // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109, № 6. С. 1091–1094.
20. *Бицадзе А. В.* О единственности решения задачи Франкля для уравнения Чаплыгина // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112, № 3. С. 375–376.
21. *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110, № 6. С. 901–902.

22. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.
23. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. 448 с.
24. *Бубнов Б. А.* Обобщенная задача Трикоми для одного класса уравнения второго порядка // Динамика сплошной среды. ИГ СО АН СССР. — Новосибирск. 1982. Вып. 54. С. 61–73.
25. *Бубнов Б. А.* О корректных краевых и обратных задачах для некоторых классов эволюционных уравнений. Автореферат диссертации д-ра физ.-мат. наук. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.
26. *Бурмистров Б. Н.* О задаче Ф.И. Франкля для одной системы уравнений // Тр. 2-й научн. конф. матем. кафедр пединститутов Поволжья. — Куйбышев. 1961. Вып. 1. С. 14–19.
27. *Бурмистров Б. Н.* О некоторых краевых задачах типа задачи Франкля для систем уравнений 1-го порядка смешанного типа: Диссертация канд. физ.-мат. наук. — Казань, 1970.
28. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. — М.: ИЛ, 1949. 799 с.
29. *Векуа И. Н.* Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения // Сооб. АН Груз. ССР. 1945. Т. VI, № 3. С. 177–183.
30. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.
31. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959. 628 с.
32. *Вирченко Н. А.* Некоторые краевые задачи для простейших эллиптических уравнений с двумя линиями вырождения // Докл. АН УССР. 1974. Сер. А. № 7. С. 582–585.
33. *Выборны Р. О.* О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений параболического типа // Докл. АН СССР. 1957. Т. 117, № 4. С. 563–565.
34. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1958. 512 с.
35. *Волкодавов В. Ф., Невоструев Л. М.* Принцип локального экстремума для уравнения $yz_{xx} + z_{yy} + c(x, y)z = 0$ и его применения // Волжск. матем. сб. — Куйбышев. 1966. Вып. 4. С. 14–23.
36. *Волкодавов В. Ф., Невоструев Л. М.* О принципе локального экстремума для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Волжск. матем. сб. — Куйбышев, 1966. Вып. 5. С. 70–78.
37. *Волкодавов В. Ф.* Принцип локального экстремума и его применение к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — Казань: КГУ, 1969.
38. *Врагов В. Н.* К вопросу о единственности решений обобщенной задачи Трикоми // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 4. С. 761–764.
39. *Врагов В. Н.* К вопросу о разрешимости обобщенной задчи Трикоми // Динамика сплошной среды. ИГ СО АН СССР. 1975. Вып. 23. С. 42–48.
40. *Врагов В. Н.* К теории краевых задач для уравнений смешанного типа на плоскости и в пространстве. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1978.
41. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983. 84 с.

42. *Гайдай Н. Н.* О существовании спектра для оператора Трикоми // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 31–38.

43. *Гвазава Д. К.* О некоторых классах квазилинейных уравнений смешанного типа // Труды Матем. ин-та АН Груз. ССР. 1981. Т. 67. С. 5–93.

44. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений. — М.: ИЛ, 1960. 421 с.

45. *Гохберг И. Ц.*, *Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука. 1965. 448 с.

46. *Девингталь Ю. В.* О существовании решения одной задачи Ф.И. Франкля // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 1. С. 15–18.

47. *Девингталь Ю. В.* О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И. Франкля // Известия вузов. Математика. 1958. № 2(3). С. 39–51.

48. *Девингталь Ю. В.* К вопросу о существовании и единственности решения задачи Франкля // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14, № 1(85). С. 177–182.

49. *Дезин А. А.* Естественные дифференциальные операторы и разделение переменных // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 25–31.

50. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. — М.: Наука, 1980. 208 с.

51. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. — Ташкент: Фан, 1979. 238 с.

52. *Джураев Т. Д.*, *Сопуев А.*, *Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. — Ташкент: Фан, 1986. 220 с.

53. *Диденко В. П.* О принципе максимума решений параболических систем второго порядка // Научные доклады Высшей школы. Физ.-матем. науки. 1959. № 1. С. 99–101.

54. *Диденко В. П.* О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, № 4. С. 709–712.

55. *Диденко В. П.* О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного и смешанно-составного типов // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 1. С. 33–39.

56. *Диденко В. П.* Об обобщенной разрешимости граничных задач для систем дифференциальных уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 24–29.

57. *Диденко В. П.* Краевые задачи для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — Киев: КГУ, 1974.

58. *Дубровин Б. А.*, *Новиков С. П.*, *Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1986. 760 с.

59. *Ежов А. М.*, *Пулькин С. П.* Оценка решения задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 5. С. 978–980.

60. *Елеев В. А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. С. 66–73.

61. *Елеев В. А.* Обобщенная задача Трикоми для смешанных гиперболо-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 41–53.

62. *Елеев В. А.* Обобщенная задача Трикоми для смешанных гиперболо-параболических уравнений с характеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 1. С. 59–73.
63. *Жегалов В. И.* Об одном случае задачи Трикоми // Труды семинара по краевым задачам. — Изд-во Казанс. гос. ун-та, 1966. Вып. 3. С. 28–36.
64. *Жегалов В. И.* Задача Франкля со смещением // Изв. вузов. Математика. 1979. № 9. С. 11–20.
65. *Жегалов В. И.* Исследование краевых задач со смещениями для уравнений смешанного типа. Автореферат диссертации д-ра физ.-мат. наук. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989.
66. *Зайкина (Цымбал) Т. Б.* О принципах экстремума для некоторых гиперболических систем гиперболического типа // Дифференц. уравнения. Труды пединститутов РСФСР. — Рязань, 1978. Вып. 12. С. 163–170.
67. *Зайкина (Цымбал) Т. Б.* Краевые задачи для системы уравнений смешанного типа с негладкой линией вырождения. Автореферат диссертации канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1984.
68. *Зайнулабидов М. М.* О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С. 91–99.
69. *Зарубин А. Н.* Исследование начально-краевых задач для уравнений смешанного типа с запаздывающим аргументом. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1996. 234 с.
70. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1956. 616 с.; 538 с.
71. *Ильин В. А.* Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения // Матем. заметки. 1975. Т. 17, № 1. С. 93–103.
72. *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 771–794; № 6. С. 980–1009.
73. *Ильин В. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1991. 368 с.
74. *Исамухамедов С. С.*, *Орамов Ж.* О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 2. С. 324–334.
75. *Кальменов Т. Ш.* О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 1718–1725.
76. *Кальменов Т. Ш.* О спектре задачи Геллерстедта // Теоретические и прикладные задачи матем. и механики. Институт матем. и мех. — АН Казах. ССР, 1977. С. 167–169.
77. *Кальменов Т. Ш.* О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов. Автореферат диссертации д-ра физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1982.
78. *Камынин Л. И.*, *Химченко Б. Н.* К исследованию о принципе максимума // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240, № 4. С. 774–777.
79. *Камынин Л. И.* Теорема о внутренней производной для слабо вырождающегося эллиптического уравнения 2-го порядка // Матем. сб. 1985. Т. 126, № 3. С. 307–326.

80. *Капилевич М. Б.* О конфлюэнтных гипергеометрических функциях Горна // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 9. С. 1239–1254.
81. *Капилевич М. Б.* О функциях Грина–Адамара для сингулярных задач Трикоми // Rev. Roumaine math. pures et appl. 1966. № 3. С. 317–324.
82. *Капустин Н. Ю.* О методе Моравец для доказательства теорем единственности решений некоторых краевых задач // Прикладная математика и математическое обеспечение ЭВМ. — М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 45–46.
83. *Капустин Н. Ю.*, *Сабитов К. Б.* Уравнение Риккати в теории уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314, № 6. С. 1307–1311.
84. *Капустин Н. Ю.*, *Сабитов К. Б.* О роли уравнения Риккати в теории околозвуковых газодинамических течений // Матем. моделирование. 1990. Т. 2, № 2. С. 105–113.
85. *Капустин Н. Ю.*, *Сабитов К. Б.* О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 60–68.
86. *Капустин Н. Ю.*, *Сабитов К. Б.* О решении одной проблемы в теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 5. С. 1048–1052.
87. *Карамышев Ф. И.* Краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа // Сиб. матем. журн. 1961. Т. 2, № 4. С. 537–546.
88. *Каратопраклиев Г. Д.* К теории уравнений смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнений. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — М.: МИАН СССР, 1972.
89. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
90. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26, вып. 4. С. 15–41.
91. *Келдыш М. В.*, *Лаврентьев М. А.* О единственности задачи Неймана // Докл. АН СССР. 1937. Т. 16, № 3. С. 151–152.
92. *Киквидзе З. А.* Об одной системе уравнений в частных производных смешанного типа // Сооб. АН Груз. ССР. 1954. Т. 15, № 6. С. 321–325.
93. *Кожанов А. И.* К теории уравнений составного типа. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — Новосибирск: НГУ, 1993. 329 с.
94. *Клоков В. В.* О единственности решения обобщенной задачи Франкля // Труды семинара по краевым задачам. — Изд-во Казанск. ГУ, 1966. Вып. 3. С. 66–67.
95. *Коул Дж.*, *Кук Л.* Трансзвуковая аэродинамика. — М.: Мир, 1989. 360 с.
96. *Коллингвуд Э.*, *Ловатер А.* Теория предельных множеств. — М.: ИЛ, 1971. 312 с.
97. *Кондратьев В. А.*, *Ландис Е. М.* Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). — М., 1988. Т. 32. С. 99–215.
98. *Кондратьев В. А.*, *Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи матем. наук. 1984. Т. 38, вып. 2. С. 3–76.

99. *Коврижкин В. В.* О единственности сильного решения обобщенной задачи Трикоми // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 182–186.

100. *Коврижкин В. В.* Гладкость решений обобщенной задачи Трикоми // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 97–105.

101. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962. 396 с.

102. *Крикунов Ю. М.* К задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Изв. вузов. Математика. 1974. № 2(141). С. 76–81.

103. *Крикунов Ю. М.* Видоизмененная задача Трикоми для уравнения $u_{xx} + yu_{yy} + (1/2 - n)u_y = 0$ // Изв. вузов. Математика. 1979. № 9(208). С. 21–28.

104. *Косовец А. А.* Разрешимость задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 9. С. 1627–1628.

105. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. 208 с.

106. *Кукс Л. М.* Теоремы качественной теории сильно эллиптических систем 2-го порядка // Успехи матем. наук. 1962. Т. 18, вып. 3(105). С. 181–184.

107. *Лаврентьев М. А.*, *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 3. С. 373–376.

108. *Лаврентьев М. М.* О принципе максимума для решений сильно эллиптических систем второго порядка // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116, № 2. С. 175–176.

109. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго пордяка // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112, № 2. С. 195–197.

110. *Ладыженская О. А.*, *Ступялис Л.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Труды МИАН СССР. 1971. Т. 116. С. 101–136.

111. *Ладыженская О. А.*, *Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1964. 576 с.

112. *Ландис Е. М.* О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107, № 5. С. 640–643.

113. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М.: Наука, 1971. 288 с.

114. *Ларькин Н. А.* Об одном классе нелинейных уравнений смешанного типа // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19, № 6. С. 1308–1314.

115. *Лернер М. Е.* Принципы максимума для уравнений гиперболического и смешанного типов в неклассических областях // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 3. С. 550–554.

116. *Лернер М. Е.* Принципы максимума модуля для гиперболических уравнений и систем уравнений в неклассических областях // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 848–858.

117. *Лизоркин П. И.* E-функция Грина оператора Бельтрами и некоторые вариационные задачи // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 5. С. 1052–1055.

118. *Лифшиц Ю. Б.*, *Рыжов О. С.* О вариации расхода газа в расчетном режиме работы сопла Лаваля // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1966. Т. 6, № 2. С. 276–287.

119. *Линь Цзянь-бин.* О некоторых задачах Франкля // Вест. ЛГУ. Серия матем., мех. и астрон. 1961. Т. 3, № 13. С. 28–39.

120. *Мазья В. Г., Кресин Г. И.* О принципе максимума для эллиптических и параболических систем второго порядка // Докл. АН СССР. 1983. № 1. С. 34–41.

121. *Мазья В. Г., Кресин Г. И.* О принципе максимума для сильно эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1984. Т. 125, № 4. С. 458–480.

122. *Майоров И. В.* О принципе экстремума для одной задачи Франкля // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7, № 5. С. 1068–1075.

123. *Майоров И. В.* Об одной задаче Франкля для нелинейного уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1. С. 46–51.

124. *Майоров И. В.* Об одной нелинейной системе уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183, № 2. С. 280–283.

125. *Майоров И. В.* Принцип экстремума для вырождающейся гиперболической системы // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 3. С. 532–535.

126. *Макаров И. А.* Теория потенциала для уравнения с двумя линиями вырождения // Дифференц. уравнения. Труды techинститутов РСФСР. — Рязань, 1972. Вып. 2. С. 124–155.

127. *Макаров С. И.* Применение обобщенных интегродифференциальных операторов произвольного порядка к исследованию краевых задач для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Диссертация канд. физ.-мат. наук. — Л.: ЛГУ, 1987.

128. *Маричев О. И.* Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1970. № 5. С. 21–29.

129. *Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. — Самара: Изд-во СГЭУ, 2008. 276 с.

130. *Мередов М.* Краевые задачи для некоторых классов гиперболических и смешанных уравнений. Автореферат … д-ра физ.-мат. наук. — Ташкент: Институт математики АН Узб. ССР, 1974.

131. *Миляков В. П., Сабитов К. Б.* О принципе экстремума для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Краевые задачи. — Изд-во Оренбург. политех. ин-та, 1977. С. 46–53.

132. *Михайлов В. П.* Об обобщенной задаче Трикоми // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 5. С. 1012–1014.

133. *Михайлов В. П.* Об обобщенной задаче Трикоми // Труды МИАН СССР. 1968. Т. 103. С. 142–161.

134. *Моисеев Е. И.* Некоторые теоремы единственности для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 3. С. 531–533.

135. *Моисеев Е. И.* Некоторые свойства решения уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Матем. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 535–546.

136. *Моисеев Е. И.* Некоторые вопросы спектральной теории уравнений смешанного типа. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1979.

137. *Моисеев Е. И.* О базисности системы синусов и косинусов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 794–798.

138. *Моисеев Е. И.* О базисности системы синусов // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 177–179.

139. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. — М.: МГУ, 1988. 150 с.

140. *Моисеев Е. И.* О расположении спектра задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 97–106.

141. *Моисеев Е. И.* Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 93–103.

142. *Моисеев Е. И.* Применение метода разделения переменных для решения уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 7. С. 1160–1172.

143. *Моисеев Е. И.* О представлении решения задачи Трикоми в виде биортоганального ряда // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 7. С. 1229–1237.

144. *Моисеев Е. И.* О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 110–121.

145. *Моисеев Е. И.* О решении задачи Франкля в специальной области // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 4. С. 721–723.

146. *Моисеев Е. И.*, *Абаси Н.* О полноте собственных функций задачи Франкля с условием нечетности // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 3. С. 390–393.

147. *Морс М.* Топологические методы теории функций комплексного переменного. — М.: ИЛ, 1951. 248 с.

148. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1966. 512 с.

149. *Надирашвили Н. С.* Лемма о внутренней производной и единственность решения 2-й краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 4. С. 804–808.

150. *Надирашвили Н. С.* К вопросу о единственности решения второй краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. 1983. Т. 122. С. 341–359.

151. *Нахушев А. М.* К теории линейных краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка. Диссертация физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1970.

152. *Нахушев А. М.* К априорным оценкам для задачи Трикоми и Дарбу // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 107–117.

153. *Нахушев А. М.* О справедливости одной априорной оценки // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 1. С. 45–47.

154. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006. 287 с.

155. *Овсянников Л. В.* Об одном газовом течении с прямой линией перехода // Прикл. матем. и мех. 1949. Т. 13. С. 537–542.

156. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981. 368 с.

157. *Олейник О. А.* О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа // Матем. сб. 1952. Т. 30(72), № 3. С. 695–702.

158. *Петрушко И. М.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Труды МИАН СССР. 1968. Т. 103. С. 181–200.

159. *Пилия А. Д., Фёдоров В. И.* Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью // Журн. экспер. и теор. физики. 1971. Т. 60, вып. 1. С. 389–399.

160. *Подгаев А. Г.* О разрешимости обобщенной задачи Трикоми для одного нелинейного уравнения // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236, № 6. С. 1307–1310.

161. *Пономарев С. М.* К задаче на собственные значения для уравнений Лаврентьева–Бицадзе // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233, № 1. С. 39–40.

162. *Пономарев С. М.* О задаче Трикоми для системы уравнений смешанного типа на плоскости // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 6. С. 1256–1257.

163. *Пономарев С. М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1981.

164. *Попиванов Н. И.* Локальные и нелокальные задачи для уравнений смешанного типа. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — София: Софийский университет, 1986. 297 с.

165. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. Т. 1 (Элементарные функции). 800 с.; 1981. Т. 2 (Специальные функции). 752 с.

166. *Пулькин С. П.* К вопросу о решении задачи Трикоми для уравнения типа Чаплыгина // Изв. вузов. Математика. 1958. № 2(3). С. 219–226.

167. *Пулькин С. П.* О единственности решения сингулярной задачи Геллерстедта // Изв. вузов. Математика. 1960. № 6(19). С. 214–225.

168. *Пулькин С. П.* Исследование по уравнениям смешанного типа. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — Казань: КГУ, 1958.

169. *Пулькина Л. С.* Нелокальные задачи для гиперболических уравнений. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2003. 195 с.

170. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: МИР, 1985. 590 с.

171. *Репин О. А.* Краевые задачи для уравнений гиперболического смешанного типа и дробное интегро-дифференцирование. Автореферат диссертации д-ра физ.-мат. наук. — Минск: БГУ, 1998. 30 с.

172. *Сабитов К. Б.* Принцип экстремума для одного уравнения второго рода в бесконечной области // Дифференциальные уравнения. Труды пединститутов РСФСР. 1977. Вып. 10. С. 146–148.

173. *Сабитов К. Б.* О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1977–1984.

174. *Сабитов К. Б.* Об обобщенной задаче Трикоми для уравнений смешанного типа // Уравнения неклассического типа. ИМ СО АН СССР. — Новосибирск. 1986. С. 145–150.

175. *Сабитов К. Б.* О единственности решения задачи Франкля для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 904–906.

176. *Сабитов К. Б.* О принципе максимума для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 11. С. 1967–1976.

177. *Сабитов К. Б.* Принцип максимума для систем уравнений смешанного типа второго порядка // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305, № 4. С. 783–786.

178. *Сабитов К. Б.* Внутренние и граничные принципы экстремума для одного класса эллиптических систем // Успехи матем. наук. 1989. Т. 44, вып. 5. С. 179–180.
179. *Сабитов К. Б.* К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 117–126.
180. *Сабитов К. Б.* Принципы максимума модуля для некоторых классов эллиптических и гиперболических систем второго порядка // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309, № 6. С. 1321–1324.
181. *Сабитов К. Б.* Экстремальные свойства модуля решений одного класса систем уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310, № 1. С. 33–36.
182. *Сабитов К. Б.* Принцип максимума для систем уравнений смешанного типа второго порядка // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 3. С. 488–494.
183. *Сабитов К. Б.* К проблеме обобщенной задачи Трикоми, возникшей в теории сопла Лаваля // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 5. С. 841–851.
184. *Сабитов К. Б.* Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 1023–1032; 1992. Т. 28, № 7. С. 1138–1145.
185. *Сабитов К. Б.* Обращение некоторых интегральных уравнений типа Вольтерра // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314, № 2. С. 300–303.
186. *Сабитов К. Б.* О спектре одной газодинамической задачи Франкля для уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316, № 1. С. 40–44.
187. *Сабитов К. Б.* Вычисление определенных интегралов от произведения бесселевых функций // Вестн. МГУ, Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1991. № 2. С. 26–31.
188. *Сабитов К. Б., Тихомиров В. В.* О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля // Матем. моделирование. 1990. Т. 2, № 10. С. 100–109.
189. *Сабитов К. Б.* Альтернирующий метод типа Шварца в теории уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322, № 3. С. 476–480.
190. *Сабитов К. Б.* О существовании решения задачи Трикоми // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 12. С. 2092–2101.
191. *Сабитов К. Б.* О задаче Трикоми для уравнения Чаплыгина // Докл. РАН. 1994. Т. 335, № 4. С. 430–432.
192. *Сабитов К. Б.* О задаче Трикоми для уравнения Чаплыгина // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 1. С. 123–128.
193. *Сабитов К. Б.* Теорема о косой производной решения вырождающегося эллиптического уравнения и ее применение к уравнениям смешанного типа // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, вып. 4. С. 181.
194. *Сабитов К. Б., Мукминов Ф. Х.* О знаке производной по конормали в точке максимума решения вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 6. С. 938–942.
195. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа. — Ташкент: Фан, 1974. 156 с.

196. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. — Ташкент: ФАН, 1997. 165 с.

197. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* К спектральной теории уравнений смешанного типа. — Ташкент: ФАН, 2010. 356 с.

198. *Салахитдинов М. С., Хасанов А.* Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 110–119.

199. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. 476 с.

200. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и Техника, 1987. 688 с.

201. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. — М.: Наука, 1970. 296 с.

202. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. — М.: Высшая школа, 1985. 304 с.

203. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988. 336 с.

204. *Солдатов А. П.* О единственности решения одной задачи А.В. Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 1. С. 143–146.

205. *Солдатов А. П.* Об одной задаче теории функций // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 2. С. 325–332.

206. *Солдатов А. П.* Решение одной краевой задачи теории функций со смещением // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 143–152.

207. *Сорокина Н. Г.* К обобщенной разрешимости граничных задач для уравнений смешанного типа // В кн.: Применение функционального анализа к задачам метематической физики. — Киев: ИМ АН УССР, 1973. С. 125–184.

208. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. Т. 1. — М.: ИЛ, 1962. 364 с.

209. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. 736 с.

210. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа / Пер. с итал. Ф.И. Франкля. — М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 192 с.

211. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: ИЛ, 1957. 443 с.

212. *Фалькович С. В.* К теории сопла Лаваля // Прикл. мат. и мех. 1946. Т. 10, № 4. С. 503–512.

213. *Фалькович С. В., Сапункова О. М.* Уравнения типа Чаплыгина в магнитной газодинамике // Изв. вузов. Математика. 1969. № 6. С. 88–97.

214. *Франкль Ф. И.* О задачах Чаплыгина С.А. для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1945. Т. 9, № 2. С. 121–142.

215. *Франкль Ф. И.* К теории сопел Лаваля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1945. Т. 9, № 5. С. 387–422.

216. *Франкль Ф. И.* Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикл. мат. и мех. 1956. Т. 20, № 2. С. 196–202.

217. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука, 1973. 712 с.

218. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1966. 427 с.

219. *Чаплыгин С. А.* О газовых струях. Собрание сочинений. Т. 2. — М.–Л.: АН СССР, 1933. 290 с.

220. *Хайруллин Р. С.* Задача Трикоми для дифференциальных уравнений с сильным вырождением на линии изменения типа. Диссертация д-ра физ.-мат. наук. — Новосибирск: НГУ. 1995. 288 с.

221. *Хведелидзе А. В.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Труды матем. ин-та АН Грузии. 1956. Т. 23. С. 3–158.

222. *Хе Кан Чер.* О единственности решения задачи Трикоми для уравнения с двумя линиями вырождения // В кн.: Дифференц. уравнения с частными производными. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. С. 64–67.

223. *Хе Кан Чер.* О сингулярной задаче Трикоми для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Препринт ИМ СО АН СССР. 1976. 16 с.

224. *Чекмарев Т. В.* Задачи с граничными условиями для некоторых систем уравнений различных типов. Автореферат ... д-ра физ.-мат. наук. — Казань: КГУ, 1974.

225. *Чёрный Г. Г.* Газовая динамика. — М.: Наука, 1988. 424 с.

226. *Шифрин Э. Г.* О единственности «в целом» решения прямой задачи Лаваля // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. 1978. Т. 18, № 2. С. 509–512.

227. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара им. И.Г. Петровского. — М.: Изд-во МГУ, 1983. Вып. 8. С. 191–229.

228. *Эйдельман С. Д.* Интегральный принцип максимума для сильно параболических систем и некоторые его применения // Изв. вузов. Математика. 1959. № 2. С. 252–258.

229. *Agmon S.*, *Nirenberg L.*, *Protter M. H.* A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Comm. Appl. Math. 1953. V. 6, № 4. P. 455–470.

230. *Aziz A. K.*, *Schneider M.* On uniqueness of Frankl-Morawetz problem in $\mathbb{R}^2$ // Monatshefte fur Math. 1978. V. 85, № 4. P. 265–276.

231. *Aziz A. K.*, *Schneider M.* Frankl-Morawetz problem in $\mathbb{R}^3$ // SIAM J. Math. Anal. 1979. V. 10, № 5. P. 913–921.

232. *Bergman S.* On solutions of linear partial differential equations of mixed type // Amer. J. Math. 1952. V. 74. P. 444–474.

233. *Cantrell R. S.*, *Schmitt K.* On the eigenvalue problem for coupled elliptic systems // SIAM J. Math. Anal. 1986. V. 17, № 4. P. 850–862.

234. *Cantrell R. S.*, *Cosner C.* On the generalized spectrum for second-order elliptic systems // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 303, № 1. P. 345–363.

235. *Carleman T.* Sur un probleme d'unicite pour les systemes d'equations aux derivees partielles a deux variables independants // Arkiv f. M. A. O. F. 1939. V. 26B, № 17. P. 1–9.

236. *Dachev G. D.* Boundary value problems for equations of mixed type with Neumann boundary conditions // Mathematics and education in mathematics. — София: БАН, 1987. C. 201–204.

237. *Dachev G.D.* A multidimensional analog of the generalized Tricomi problem // София БАН. 1989. T. 42, № 2. C. 25–27.

238. *Figueiredo D. G.*, *Mitidieri E. A.* A maximum principle for an elliptic system and applications to semilinear problems // SIAM J. Math. Anal. 1986. V. 17, № 4. P. 836–849.

239. *Fridriche K. O.* Symmetric positive linear differential equations // Comm.Pure and Appl. Math. 1958. V. 11, № 3. P. 333–418.

240. *Gellerstedt S.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second order de type mixte: These pour le doctorat. — Uppsala, 1935. 92 p.

241. *Germain P.*, *Bader R.* Sur le probleme de Tricomi // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1951. V. 232. P. 463–465.

242. *Germain P.*, *Bader R.* Sur le probleme de Tricomi // Rend. Circolo matem. Palermo. 1953. V. 2. P. 53–69.

243. *Giraud G.* Generalisation des problemes sur le operations du type elliptique // Bull. Math. Soc. France. 1932. V. 56. P. 316–352.

244. *Gu Chaohao*, *Hong Jiaxing.* Some developments of the theory of partial differential equations of mixed type // Teudner-tex. sur Matematik. 1986. № 90. P. 120–135.

245. *Haar A.* Sur l'unicite des solutions des equations aux derivees partielles // Comp. Rend. des Seances de l'Academie des Sciences. 1928.

246. *Hadamard J.* Sur un probleme mixte aux derivees partielles // Bull. Soc. Math. de rance. 1903. V. 31, № 3. P. 208–224.

247. *Hile G. N.*, *Protter M. H.* Maximum principles for a class of first order elliptical systems // J. of Differential Equations. 1977. № 24. P. 136–151.

248. *Hong Jiaxing*, *Sun Longxiang.* On the generalized Tricomi problem // Journal of Fudan University. 1986. V. 25, № 2. P. 207–218.

249. *Hopf E. A.* A remark on linear elliptic differential equations of second order // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3. P. 791–793.

250. *Lax P. O.*, *Phillips R. S.* Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators // Comm. Pure and Appl. Math. 1960. V. 13, № 3. P. 427–455.

251. *Morawetz C. S.* A uniqueness theorem for the Francl problem // Comm. Pure and Appl. Math. 1954. V. 7, № 4. P. 697–703.

252. *Morawetz C. S.* Note on a maximun principle and a uniqueness theorem for on elliptic-hyperbolic equation // Proc. Roy. Soc. 1956. V. 236, № 1204. P. 141–144.

253. *Morawetz C. S.* A weak solution for a system of equations of elliptic-hyperbolic type // Comm. Pure and Appl. Math. 1958. V. 9, № 3. P. 315–331.

254. *Morawetz C. S.* Mathematical problems in transonic flow // Canadian Math. Bull. 1986. V. 29(2). P. 129–139.

255. *Muresan A. S.* Prinsipial maximului modulalui pentru sisteme hiperbolica de ecati cu derivate partiale // Analele stiintifice de Univer: «Al. I Cuza» Iasi. 1978. V. XXIV, № 1. P. 87–91.
256. *Nirenberg L.* Astrong maximun principle for parabolic equations // Comm. Pure and Appl. Math. 1953. V. 6, № 2. P. 167–177.
257. *Protter M. H.* An existence theorem for the generalized Tricomi problem // Duke Math. J. 1954. V. 21, № 1. P. 1–8.
258. *Protter M. H.* Unigueness theorems for the Tricomi problem. I, II // Jour. Rat. Mech. and Anal. 1953. V. 2, № 1. P. 107–114; 1955. V.4, № 5. P. 721–733.
259. *Protter M. H.* Equations of mixed type by M. M. Smyrnov // Bull. of the Amer. Math. Society. 1979. V. 1, № 3. P. 534–538.
260. *Protter M. H.*, *Wienberger H. F.* Maximun principle in differential equations. Prentice-Hall. INC. Englewood Cliffs. — New-Jersey, 1967. 261 p.
261. *Reng Fulian*, *Chen Chaotai*. A note on the probleme of Frankl and Tricomi // Natural Science Jour.of Hunan Normal University. 1987. V. 10, № 1. P. 18–21.
262. *Rassias J.M.* A uniquences theorem for the Chaplygin Frankl problem // Bull. de la Societe Royale Sciences de Liege. 1982. V. 51. P. 159–160.
263. *Rus I.A.* Un principe du maximun pour les solutions d'un systeme fortement elliptique // Glasnik Math. 1969. V. 4, № 1. P. 75–80.
264. *Stys T.* Aprioristic estimations of solutions of a certain elliptic system of partial differential second order equations // Bull. Acad. Polon. Sci. 1965. V. 13. P. 638–640.
265. *Schneider M.* Uber schwache und halbstarke Losungen des Tricomiproblems // Mathematische Nachrichten. 1974. V. 60. P. 167–180.
266. *Wasowski J.* Maximun principles for a certain strongly elliptic system of linear equations of second order // Bull. Acad. Polon. Sci. 1970. V. 18. P. 741–745.

Научное издание

САБИТОВ Камиль Басирович

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Редактор *Е.И. Ворошилова*
Оригинал-макет: *Е.В. Сабаева*
Оформление переплета: *А.В. Андросов*

Подписано в печать 18.04.2014. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 19. Уч.-изд. л. 20,9. Тираж 400 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с электронных носителей
на оборудовании издательства «Гилем» АН РБ, г. Уфа

ISBN 978-5-9221-1561-2