

Т. РАШИДОВ,
Ш. ШОЗИЁТОВ,
Қ. Б. МЎМИНОВ

Назарий механика асослари

ЎзССР Халқ таълими министрлигининг республика
ўқув методика маркази олий техника ўқув юртлари-
нинг студентлари учун дарслик сифатида тавсия этган

*ЎзССР ФА нинг академиги, профессор Т. Рашидов
таҳрири остида*

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1990

Дарсликда статика, кинематика, нуқта ва система динамикаси, қаттиқ жисм динамикаси, аналитик механика элементлари ва кичик тебранишлар назарияси баён этилган.

Қитобда механиканинг асосий тушунчалари ва қонунлари билан бирга инженерлик ихтисослигида учрайдиган бошқа масалалар ҳам ёритилган. Ясиш формулаларни ҳисоблаш, ўзгарувчан массали жисмлар механикаси, Эйлернинг динамик тенгламалари, Гамильон—Остроградский принципи, динамиканинг каноник тенгламалари, устувор мувозанат ва устувор ҳаракат назариясининг асосий элементлари, механик системанинг кичик тебранишлари ана шулар жумласидандир.

Дарсликда 130 дан ортиқ типик масалалар батафсил ечиб кўрсатилган.

Мазкур китоб олий техника ўқув юртларининг студентлари учун мўлжалланган, шундан университетларнинг амалий математика ихтисосликлари студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.

«Ўқитувчи» нашриёти, 1990

Р 1603020000 — 142
353 (04) — 90 инф. письмо

ISBN

СЎЗ БОШИ

Ўзбек тилида назарий механикадан тўлиқ дарслик илк бор ЎзССР ФАнинг академиги М. Т. Ўрозбоев томонидан ёзилган ва охириги нашри 1966 йилда чоп этилган. Ўтган давр ичида назарий механиканинг қўлланиш соҳалари янада кенгайди. Шу муносабат билан ўзбек тилида ҳозирги замон талабларига жавоб берадиган ва янги программага мос келадиган дарслик ёзиш эҳтиёжи туғилди.

Ушбу китобга муаллифларнинг олий ўқув юртларида ўқиган лекциялари асос қилиб олинди.

Дарсликни профессор Т. Рашидов ва доцент Ш. Шозиётов ёзишган. Кинематика бўлимидаги 8.1—8.5, 9.2, 9.5, 10.9, 11.1, 11.6, 11.8, 12.1-параграфлар ҳамда 8.3, 8.7, 8.9—8.11, 9.1—9.3, 10.2, 10.3, 10.5, 11.1—11.3-масалаларнинг ечимини Қ. Б. Мўминов ёзган.

Муаллифлар китоб қўлёзмасини синчиклаб ўқиб чиқиб, берган фойдали маслаҳатлари учун физика-математика фанлари доктори, профессор А. Ғ. Азизов, техника фанлари докторлари профессорлар Г. И. Болдинский, Т. Мавлонов, профессор Т. Ш. Ширинқуловларга ҳамда қўлёзamani таҳрир қилиб босмага тайёрлаш жараёнида жонкуярлик кўрсатган махсус редактор Э. В. Эргашев ва нашриёт редактори А. Аҳмедовга чуқур миннатдорчилик билдирадилар.

Дарслик сифатини оширишга қаратилган барча танқидий фикр-мулоҳазаларни миннатдорчилик билан қабул қиламиз.

Муаллифлар

«Ким ҳаракат қонунлари билан таниш бўлмаси, у табиатни ўргана олмайди».

Г. Галилей

Ҳаракат материянинг мавжудлик формаларидан бири бўлиб, унинг энг муҳим характерли хусусиятини ифодалайди. Материя ва ҳаракат тушунчаларининг муфассал таърифи марксизм-ленинизм классиклари томонидан ифодалаб берилган. «Материя, — деб ёзган эди В. И. Ленин, объектив реалликни ифодалайдиган философик категория бўлиб, бу объектив реалликни иссиб ўз сезгилари билан идрок қилади, бу объектив реаллик бизнинг сезгиларимизга боғлиқ бўлмаган ҳолда мавжуддир, бизнинг сезгиларимиз ундан копия олади, сурат олади ва уни акс эттиради»^{*}.

Материя ҳаракати деганда жисмларнинг оддий кўчишдан тортиб, иссиқлик, химиявий, электромагнит, биологик ва бошқа ўзгаришларда содир бўладиган мураккаб процесслар тушунилади. «Сўзининг энг умумий маъносида қараладиган, яъни материянинг яшаш усули сифатида, материяга ичдан хос атрибут сифатида тушуниладиган ҳаракат оддий жой алмашишдан тортиб то тафаккурғача кўп-пояда содир бўладиган ҳамма ўзгаришлар ва процессларни ўз ичига олади»^{**}.

Ҳаракатнинг оддий турларидан бири механик ҳаракатдир. Вақт ўтиши билан моддий жисмларнинг бир-бирларига нисбатан кўчишига *механик ҳаракат* дейилади.

Моддий жисмларнинг ўзаро таъсири ва механик ҳаракати ўрганиладиган бир қатор фанлар механика номи билан боғлиқдир. Машина ва механизмлар ҳаракати ўрганиладиган амалий механика, суяқликлар ва уларга ботирилган жисмларнинг ҳаракати ўрганиладиган гидромеханика, газсимон жисмларнинг ҳаракати ва қаттиқ жисмларнинг газсимон муҳитдаги ҳаракати ўрганиладиган аэромеханика, тирик организмларнинг механик хоссалари ва уларда содир бўладиган механик ҳодисалар ўрганиладиган биомеханика каби фанлар ана шулар жумласидандир. Турли иншоотлар, машина ва механизм қисмларини тадқиқ қилиш ҳамда лойиҳалашнинг умумий усуллари ўрганиладиган техника фанлари материаллар қаршилиги (қурилиш механикаси, машина деталлари) ҳам механикага тааллуқлидир.

Назарий механика моддий жисмларнинг бир-бирига таъсири ва механик ҳаракатнинг умумий қонунлари ҳақидаги фандир.

^{*} Ленин В. И. Материализм ва эмпириокритицизм. — Тўла асарлар тўплами, 18-т., 146-бет.

^{**} Энгельс Ф. Табиат диалектикаси. — Т., «Ўзбекистон», 1983, 50-бет.

Механикада моддий жисмлар ўзaro таъсирнинг миқдорий ўлчовига куч дейилади. Яқин вақтгача назарий механикада асосан планеталарнинг ўзaro тортилиш кучи, муҳит (тупроқ, ҳаво ёки сув)нинг қаршилиш кучи, суяқлик ёки газнинг босими, жисмларнинг бири-бирига тегиб турадиган сиртида ҳосил бўладиган кучлар каби механик табиатга эга бўлган кучлар таъсиридаги ҳаракатлар текширилар эди. Ҳозир ядро энергетикаси, космонавтика ва электрониканинг ривожланиши натижасида механикада турлича физик табиатга хос: электромагнит, висклик, ёруғлик ва химиявий хусусиятларга эга бўлган кучлар таъсиридаги системаларнинг ҳаракатини ўрганишга оид масалалар қўйилмоқда. Масалан, электр двигатели якорининг ҳаракатини ўрганишда унга электр майдонининг таъсир кучини эътиборга олиш керак; товушдан тез учувчи самолётларнинг ҳаракати текшириляётганда, аэродинамик кучлардан ташқари, ҳаво билан самолёт қисмлари орасида иссиқлик алмашиши натижасида ҳосил бўладиган газлар молекулаларининг диссоциация кучларини ҳам ҳисобга олиш керак; Ер сунъий йўлдошларининг ҳаракати ўрганиляётганда Ернинг тортиш кучи ва аэродинамик кучлардан ташқари, Ер магнит майдонининг таъсир кучи ва йўлдош билан космосдаги зарядланган зарраларнинг ўзaro таъсир кучларини ҳисобга олиш керак; реактив двигателнинг тортиш кучини ҳисоблашда ёниш процессида вужудга келадиган химиявий ва термодинамик ҳодисаларни эътиборга олиш керак. Механикада мазкур кучларнинг миқдорий ўзгаришини асосий аҳамиятга эга бўлиб, уларнинг физик табиати ўрганилмайди.

Шундай қилиб, ҳозирги замон механикаси физика, математика, астрономия, химия, биология каби фанлар билан ҳамбарчас босланган ҳолда ривожланмоқда. Шунингдек, техниканинг барча соҳаларида, айниқса, машинасозлик, асбобсозлик, қурилиш, автоматика, кибернетика ва космонавтиканинг ривожланишида назарий маханика алоҳида ўрнини эгалляйди.

Жисмнинг барча хоссаларини ҳисобга олган ҳолда содир бўладиган механик ҳодисаларни назарий ва амалий жиҳатдан текшириш анча мураккабдир. Шу сабабли масаланинг қандай қўйилишига қараб, механикада жисмнинг айрим хусусиятлари эътиборга олинмайди. Масалан, жисмнинг деформацияланишини эътиборга олмай, абсолют қаттиқ жисм тушунчаси киритиляди. Худди шунингдек, моддий нуқта, идеал суюқлик каби тушунчалар ҳам соддалаштирилган моделга тааллуқлидир. Механикада бундай абстракт усулдан кенг фойдаланиляди.

Диалектик материализмнинг билиш назарияси ленинча инъикос назариясига тасолянади. Бу назарияга кўра, « биздан ташқарида нарсалар мавжуддир. Бизнинг идрок ва тасаввурларимиз бу нарсаларнинг образларидир. Бу образларни текшириш, уларнинг чилларини сохталаридан ажратиш практика орқали қилинади»*.

* Ленин В. И. Материализм ва эмпириокрити изм. — Тўла асарлар тўплами, 18-т., 121- бет.

Назарий механиканинг асосий қонунлари ҳам кузатиш ва практика натижаларига асосланади.

Ҳозирги замон техникаси кўнгина проблемаларни майдонга ташлади. Сувда катта (100 м/с ва ундан катта) тезликда ҳаракат қиладиган жисмларга қаршилик кучини камайтириш; катта босим ва температуралар таъсиридаги материаллар хусусиятини аниқлаш; зилзилага бардош берадиган иншоотлар қуриш, Ернинг сунъий йўлдошларини, планеталараро космик кемаларни учуриш каби проблемалар ана шулар жумласидандир. Бу проблемаларни ечишда техника фанлари қаторида назарий механика ҳам муносиб ўрнини эгаллайди.

Биз ўрганадиган назарий механика Галилей — Ньютон қонунларига асосланган бўлиб, одатда, *классик механика* деб аталади. Классик механикада вақт ва фазо жисмларнинг ҳаракатига боғлиқ эмас деб қаралади. Шунингдек, жисмнинг массаси унинг тезлигига боғлиқ бўлмаган ўзгармас миқдор деб қаралади.

XIX асрнинг охири ва XX асрнинг бошида физикада ўтказилган тадқиқотлар классик механика қонунларини ёруғлик тезлиги (300000 км/с) га яқин тезлик билан ҳаракатланувчи микрозарралар ва жисмлар учун қўллаш мумкин эмаслигини кўрсатди. XX аср бошида А. Эйнштейннинг (1879 — 1955) нисбийлик назариясига асосланган релятивистик механика бунёдга келди. Нисбийлик назарияси ёрдамида фазо билан вақт ҳамда масса билан энергия орасидаги қонуний боғланишлар ойдинлаштирилди ва классик механика қонунлари ўринли бўладиган чегара аниқланади. Ҳозирги замон техникасида кўпчилик ҳолларда учрайдиган тезликлар ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлгани учун классик механика қонунларидан ҳаётда учрайдиган реал масалаларни ҳал қилишда самарали фойдаланиш мумкин.

Механика тарихига оид қисқача тарихий маълумотларни келтирамиз. Механикага доир дастлабки илмий асарларни қадимги юнон олимлари ёзганлар. Жумладан, эрамиздан илгари 287 — 212 йилларда яшаган Архимед жисмларнинг мувозанати ва оғирлик марказини аниқлаш, шунингдек, сувда сузадиган жисмларнинг мувозанатига оид назарияларни ишлаб чиққан.

Механиканинг ривожланишида Шарқ олимлари олиб борган илмий ишлар алоҳида ўринни эгаллайди. Абу Райҳон Беруний (973 — 1048), Абу Али ибн Сино (980 — 1037), Улуғбек Муҳаммад Тарақай (1394 — 1449) каби мутафаккирлар ана шулар жумласидандир*. Улар математика ва астрономия бўйича қатор илмий ишларнинг муаллифлари бўлишлари билан бирга механикага ҳам муносиб ҳиссаларини қўшганлар. Беруний ва Ибн Сино асарларида умуман ҳаракат (шу жумладан, механик ҳаракат) ҳамда планеталарнинг ҳаракати ҳақида ажойиб фикрлар баён этилган. Ибн Сино таърифига кўра, жисм ҳолатининг ўзгариб бориши ҳаракатни ифодалайди; жисмларнинг фазодаги ҳаракати (механик ҳаракат) эса бу ҳаракатнинг хусусий ҳолидир. Улуғбек планеталар ҳаракатини,

* Григорян А.Т. Механика от античности до наших дней. 2-изд., — М., Наука, 1974.

жумладан, Қуёш ва Ойнинг ҳаракатини катта аниқликда ҳисоблай олган.

Механика фанининг ривожланишида поляк астроном Н. Коперник (1473 — 1543) томонидан кашф қилинган гелиоцентрик система алоҳида аҳамиятга эга. Коперник ўз системасида Ер ҳам бошқа сайёралардек Қуёш атрофида ва ўз ўқи атрофида айланади, деган фикрини илгари сурган.

Италиялик олим Галилео Галилей (1564 — 1642) инерция қонунини кашф этган. Бундан ташқари, Галилей ўзи ўтказган тажрибалар асосида жисмнинг оғма текисликдаги ҳаракати, горизонтга маълум бурчак остида отилган жисмнинг ҳаракати, эркин тушиш ҳақидаги қонунларни кашф қилган.

Механиканинг асосий қонунларини машҳур инглиз олими Исаак Ньютон (1643 — 1727) 1687 йилда кашф қилган. Ньютоннинг бутун олам тортилиш қонунини механикада алоҳида ўрин эгаллайди. Ньютон қонунлари ҳозирги кунда ҳам ўз актуаллигини йўқотмаган.

Рус академиги Л. Эйлернинг (1707 — 1783) механикага онд кашфиётлари 1736 йили босмадан чиққан икки томлик «Аналитик механика» китобида баён қилинган.

Француз олими Ж. Даламбернинг (1717 — 1783) 1743 йилда нашр қилинган «Динамика бўйича трактат» асарида боғланишдаги механик системалар ҳаракати ҳақидаги масалаларни унинг номи билан аталувчи принцип асосида ечиш методикаси кўрсатилган.

Француз олими Ж.Л. Лагранжнинг (1736 — 1813) «Аналитик механика» асари (1788) назарий механика тараққиётида алоҳида ўрин эгаллайди. Бу асарда механика масалаларига мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаш баён этилган.

М. В. Ломоносов (1711 — 1765) физика-математика фанлари, жумладан, механика фани соҳасида олиб борган ажойиб текширишлари билан машҳурдир. Ломоносов материя бўлмаса, ҳаракат ҳам бўлмаслигини таъкидлаб, материя ва ҳаракатнинг сақланиш қонунини кашф этган.

Механика фанининг ривожланишига катта ҳисса қўшган рус олимларидан М. В. Остроградский (1801 — 1862) аналитик механика соҳасидаги илмий ишлари билан шуҳрат қозонган; П. Л. Чебышев (1821 — 1891) машина ва механизмлар назариясига асос солган; С. В. Ковалевская (1850 — 1891) қўзғалмас нуқта атрофида айланивчи қаттиқ жисм тенгламаларини интеграллаш соҳасидаги илмий ишлари билан ном чиқарган; Н. Е. Жуковский (1847 — 1921) аэродинамиканинг ривожланишида муҳим аҳамиятга эга бўлган қатор асарларнинг муаллифи, «рус авиациясининг отасидир» (В. И. Ленин); К. Э. Циолковский (1857 — 1935) ракета назарияси ва суяқ ёнилғида ишлайдиган ракета двигатели назариясига асос солган; И. В. Мещерский (1859 — 1935) асарлари ўзгарувчан массали жисмларнинг ҳаракати, реактив техника ва осмон механикасининг қатор проблемаларини ҳал қилишда илмий асос бўлди; С. А. Чаплигин (1869 — 1942) аэрогидродинамика ҳамда боғланишдаги механик системаларнинг ҳаракатини текшириш соҳасидаги илмий ишлари билан машҳурдир; А. Н. Крылов (1863 — 1945) кемаларнинг устувор ҳаракати

ва ташқи баллистикага оид муҳим илмий ишлари билан танилган; С. П. Королев (1906 — 1966) раҳбарлигида баллистик ва геофизик ракеталар, Ернинг сунъий йўлдошларини, «Восток», «Восход» космик кемалари яратилган; М. В. Келдишнинг (1911 — 1978) аэрогидродинамика, тебранишлар назарияси ва космонавтика соҳаларидаги тадқиқотлари алоҳида аҳамиятга эга; А. А. Ильюшин (1911 йилда туғилган) эластиклик ва пластиклик назарияси, аэрогидродинамика, полимерлар механикаси ва узоқ муддатли мустаҳкамлик назариясига оид илмий ишлари билан машҳурдир; А. Ю. Ишлинский (1913 йилда туғилган) деформацияланувчи муҳит механикаси ва гироскопик асбоблар тўғрисида бир неча назария яратди.

Механика фанининг ривожланишига улкан ҳисса қўшган ўзбек олимларидан М. Т. Ўрозбев (1906 — 1971) ни механикаси ва иншоотларнинг сейсмик мустаҳкамлиги назариясига оид қатор илмий ишларнинг муаллифидир; Х. А. Раҳматуллин (1909 — 1988) иншоотлар заминини ҳисоблашда ва уларни ло.иҳалашда, кема зирҳи мустаҳкамлигини аниқлашда қўлланиладиган «Раҳматуллин тўлқинлари» номини олган тўлқинлар назариясини кашф қилди; В. Қ. Қобулоевнинг (1921 йилда туғилган) туташ муҳитлар механикаси масалаларини алгоритмлаш, автоматик бошқариш системаларини яратиш соҳасидаги илмий ишлари муҳим амалий аҳамиятга эга.

Ҳозирги даврда механиканинг кўпгина масалалари электрон ҳисоблаш машиналаридан фойдаланиб ҳал этилмоқда. Механика соҳасига оид илмий текширишлар СССР ва иттифоқдош республикалар Фанлар академиялари қошидаги механика институтларида ҳамда олий ўқув юртларида олиб борилмоқда.

Механика фанининг ривожланишида совет олимларининг хизмати ниҳоятда катта. Уларнинг илмий ишларини бир-бири саҳифада баён этиш мушкуллигидан, механика тарихи билан қизқувчиларни бошқа манбаларга мурожаат қилишларини тавсия этамиз*.

Назарий механика курса статика, кинематика ва динамикадан иборат уч қисмга бўлинади.

Статикада жисмларнинг мувозанати, уларга қўйилган кучларнинг содда ҳолга келтириш каби масалалар билан шуғулланилади.

Кинематикада жисмларнинг ҳаракати геометрик нуқтан назардан, яъни ҳаракатини вужудга келтирувчи сабабга боғламай ўрганилади.

Динамикада моддн жисмларнинг ҳаракати унга таъсир этувчи кучларга бўғлиқ равишда текширилади.

СССРда 1980 йил 1 январдан бошлаб Ўзаро Иқтисоднй Ёрдам Кенгаши стандарти бўйича СТ СЭЗ 1952 — 78 га асосан Халқаро бирликлар системаси (СИ)га ўтилган. Ушбу дарсликда барча катталиклар СИ бирликлар системасида берилган. Китоб охирида илова қилинган жадвалда асосий геометрик, статик, кинематик ва динамик катталикларнинг ўлчов бирликлари келтирилган.

* 1. Развитие механики в СССР, — М., «Наука», 1967.

2. Григорьян А. Т., Фрадлин Б. Н. Механика в СССР, — М., «Наука», 1977.

1 ҚИСМ. ҚАТТИҚ ЖИСМ СТАТИКАСИ

«Ҳар қандай мувозанат фақат нисбий ва вақтинчадир».

Ф. Энгельс.

1-БОБ. СТАТИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ ВА АКСИОМАЛАРИ

1.1-§. Статиканинг асосий тушунчалари

Қадимги юнон олими Архимед статиканинг асосчиларидан бири ҳисобланади. У параллел кучлар таъсиридаги ричагининг мувозанати, жисмларнинг оғирлик марказини аниқлаш назариясини яратиш билан бирга гидростатикага ҳам асос солган. Геометрик статиканинг ривожланишига француз олимлари П. Вариньон (1654—1722) ва Л. Пуансо (1777—1859) катта ҳисса қўшдилар.

Аналитик статиканинг асосчиси Ж. Лагранж ҳисобланади. Статиканинг аксиоматик методларини ривожлантиришда рус олимлари Н. Е. Жуковский ва С. А. Чаплигинларнинг роли каттадир.

Статиканинг асосий тушунчаларидан бири қаттиқ жисмдир. Кучлар таъсирида бўлган жисмнинг ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги масофа ўзгармаса, бундай жисмга *абсолют қаттиқ жисм* дейилади. Бошқача айтганда, абсолют қаттиқ жисмнинг геометрик шакли ўзгармайди (деформацияланмайди). Келгусида қаттиқ жисм (ёки жисм) деганда абсолют қаттиқ жисм тушунилади.

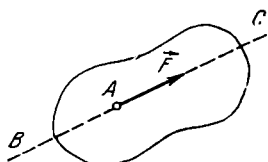
Назарий механикада ўлчамлари эътиборга олинмайдиган даражада кичик бўлган жисмга *моддий нуқта* дейилади. Берилган жисмни тасвирловчи моддий нуқта геометрик нуқтадан фарқли равишда берилган жисмнинг массасига тенг массага ҳамда бошқа жисмларга ўзаро таъсир этиш хусусиятига эга бўлади*.

Ҳар қандай жисмни моддий нуқталар тўпламидан ташкил топган деб қараш мумкин. Мазкур нуқталар орасидаги боғланиш жисмнинг хусусиятларига боғлиқ бўлади.

Кучнинг жисмга таъсири куч қўйилган нуқта, унинг йўналиши ва миқдори билан аниқланади. *Кучнинг йўналиши* деганда тинч ҳолатда турган эркин жисмнинг мазкур куч таъсиридан олган ҳаракат йўналиши тушунилади. *Кучнинг миқдорини* (модулини) аниқлаш учун уни куч бирлиги сифатида қабул қилинган бирор катталиқ билан солиштирилади.

Куч — вектор катталиқ бўлиб, уни чизмада узунлиги маълум масштабда куч миқдорини, стрелканинг йўналиши куч йўналишини ифодаловчи вектор кесма тарзида тасвирланади. Жисмнинг *A* нуқта-

* Чизмада моддий нуқтани геометрик нуқта тарзида тасвирлаймиз.



1.1- расм.

сига $\vec{F}$ куч қўйилган бўлсин (1.1-расм). Куч вектори йўналтирилган BC тўғри чизиққа *кучнинг таъсир чизиғи* дейилади.

Агар жисмга бир нечта $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсир этса, бундай кучлар тўпламига *кучлар системаси* дейилади ва $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ деб белгиланади.

Таъсир этаётган $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системасини бошқа бирор $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m)$ кучлар системаси билан алмаштиришда жисм ҳолати ўзгармаса, бундай кучлар системасига *эквивалент кучлар системаси* дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m).$$

Агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системаси битта $\vec{R}$ кучга эквивалент, яъни

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}$$

бўлса, бундай кучга берилган кучлар системасининг *тенг таъсир этувчиси* дейилади.

Кучлар системаси таъсиридаги жисм тинч ҳолатда қолса ёки инерцион ҳаракатда бўлса (масалан, жисмнинг барча нуқталари ўзгармас ва бир хил тезлик билан ҳаракатланса), жисмнинг бундай ҳолати *мувозанат ҳолати* дейилади. Кучлар системаси таъсиридаги жисм мувозанат ҳолатида бўлса, бундай кучлар системасига *мувозанатлашган кучлар системаси* ёки *нолга эквивалент система* дейилади:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0.$$

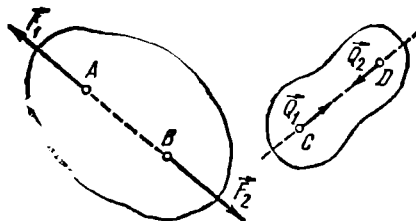
Статика бўлимида жисмнинг мувозанати деганда унинг тинч ҳолати тушунилади.

1.2- §. Статика аксиомалари

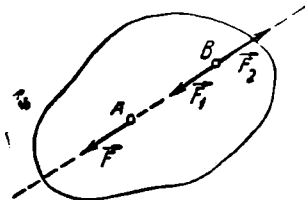
Статикада жисмга (ёки ўзаро таъсир этувчи жисмларга) қўйилган кучлар ҳақидаги умумий қонунлар тажриба ва кузатишлар ёрдамида аниқланган қуйидаги аксиомалар тарзида берилади.

1-аксиома. *Абсолют қаттиқ жисмга қўйилган иккита куч мувозанатлашиши учун бу кучлар миқдор жаҳатдан тенг, йўналиши эса кучлар қўйилган нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ бўйича қарама-қарши томонга йўналган бўлиши зарур ва етарлидир.*

1.2-расмда $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$ ва $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \sim 0$ шартларни қаноатлантирувчи иккита кучлар системаси тасвирланган. Бундай кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлади.



1.2- расм.



1.3- расм.

1- аксиома энг содда мувозанатлашган кучлар системасини ифодалайди, чунки тажрибаларнинг кўрсатишича битта куч таъсиридаги эркин жисм мувозанатда бўла олмайди.

2- аксиома. Берилган кучлар системасининг абсолют қаттиқ жисмга таъсирини ўзгартирмай, бу кучлар системаси қаторига мувозанатлашган кучлар системасини қўйиши ёки ундан айириши мумкин.

Бу аксиомага кўра, агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системасига $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \propto 0$ системани қўшсак, у ҳолда

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \propto (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$$

муносабат ўринли бўлади. Худди шунингдек, $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ кучлар системасида $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \propto 0$ бўлса,

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \propto (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l)$$

ҳам ўринлидир.

Натижа. Кучни унинг таъсир чизиғи бўйлаб жисмнинг ихтиёрий нуқтасига қўчириши билан кучнинг жисмга таъсири ўзгармайди.

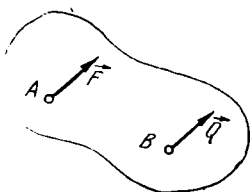
Исбот. Жисмнинг A нуқтасига қўйилган $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғида ихтиёрий B нуқтани олиб, шу нуқтага миқдорлари $F = F_1 = F_2$ бўлган ҳамда шу чизиқда ётувчи $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto 0$ системани қўямиз (1.3- расм). У ҳолда 2-аксиомага асосан

$$\vec{F} \propto (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2).$$

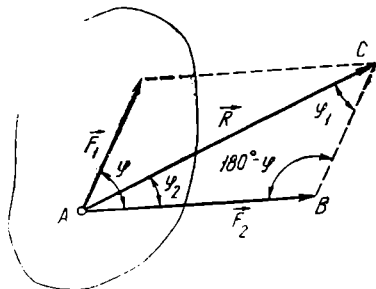
1-аксиомага асосан $(\vec{F}, \vec{F}_2) \propto 0$ бўлганидан уни ташлаб юборсак, A нуқтага қўйилган $\vec{F}$ куч ўрнига шу кучнинг таъсир чизиғидаги B нуқтада ётувчи $\vec{F}_1 = \vec{F}$ кучни оламиз.*

Исботланган натижадан кўрамизки, абсолют қаттиқ жисмга қўйилган куч сирпанувчи векторни ифодалайди.

*■ белгиси «исбот тугади» деган иборани ифодалайди.



1.4- расм.



1.5- расм.

Бу натижага кўра иккита $\vec{F}$ ва $\vec{Q}$ кучлар ўзаро эквивалент бўлиши учун $\vec{F} = \vec{Q}$ шарт етарли бўлмай, бу шартдан ташқари мазкур кучларнинг таъсир чизиқлари ҳам устма-уст тушиши керак. 1.4-расмда ўзаро тенг, лекин эквивалент бўлмаган кучлар кўрсатилган.

3-аксиома (параллелограмм аксиомаси). Жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган, бир тўғри чизиқда ётмаган икки кучнинг тенг таъсир этувчиси миқдор ва йўналиши жиҳатидан шу кучларга қурилган параллелограммнинг кучлар қўйилган нуқтадан ўтувчи диагонали билан ифодаланади.

Жисмнинг бирор A нуқтасига бир-бири билан φ бурчак ташкил этувчи $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар қўйилган бўлсин (1.5-расм). Бу кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{R}$ билан белгиласак, аксиомага кўра,

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

ABC учбурчакдан косинуслар теоремасига асосан тенг таъсир этувчининг модулини анқлаймиз:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \varphi)}$$

ёки

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi}. \quad (1.2)$$

$\vec{R}$ ning $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ билан ташкил қилган бурчаклари φ_1 ва φ_2 ни аниқлаш учун синуслар теоремасидан фойдаланамиз:

$$\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \varphi)},$$

бундан

$$\sin \varphi_1 = \frac{F_2}{R} \sin \varphi, \quad \sin \varphi_2 = \frac{F_1}{R} \sin \varphi. \quad (1.3)$$

4-аксиома (*Ньютоннинг учинчи қонуни.*) *Иккита жисм бир-бирига миқдор жиҳатдан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган кучлар билан ўзаро таъсир этади.*

Масалан, Қуёшнинг Ерни тортувчи кучини $\vec{F}$ билан белгиласак, Ернинг Қуёшнинг тортувчи кучи — $\vec{F}$ га тенг бўлади, яъни улар миқдор жиҳатдан бир-бирига тенг бўлиб, бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган.

5-аксиома (*қотиш принципи*). *Агар деформацияланадиган жисм мувозанат ҳолатида абсолют қаттиқ жисмга айланса, унинг мувозанати ўзгармайди.*

Масалан, эгиловчан сим мувозанат ҳолатида абсолют қаттиқ стерженга айланса, унинг мувозанати ўзгармайди.

5-аксиомадан фойдаланиб, кучлар системаси таъсиридаги абсолют қаттиқ жисмнинг мувозанат шартларини деформацияланадиган жисмлар учун ҳам татбиқ этиш мумкин. Лекин бу шартлар деформацияланувчи жисмлар учун фақат зарурий шартларинигина ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам, 1-аксиомани учларига кучлар қўйилган абсолют қаттиқ стержень ҳамда эгиловчан ва чўзилмайдиган сим мувозанати учун татбиқ қилсак, ҳар иккала ҳолда бу кучлар миқдорларининг тенг бўлиши ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналиши зарурий шартни ифодалайди, лекин бу шартлар симнинг мувозанати учун етарли бўлмайди. Эгиловчан ва чўзилмайдиган сим мувозанатда бўлиши учун юқоридаги шартларни, симга ушш чўзишга интилувчи кучлар таъсир этади, деган қўшимча шарт билан тўлдириш керак.

1.3-§. Боғланиш ва боғланиш реакциялари

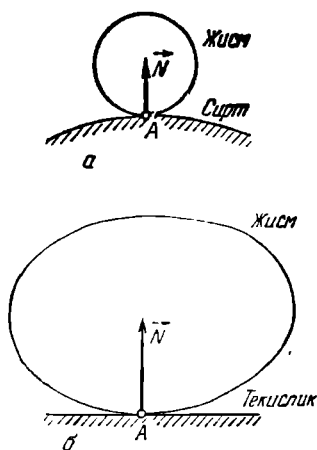
Берилган жисмнинг кўчиши бошқа жисмлар билан чекланган бўлса, у *боғланишдаги жисм* дейилади. Берилган жисмнинг кўчишини чекловчи жисмга *боғланиш* дейилади. Машина ёки механизм қисмларининг ҳаракати олдиндан чекланган бўлади. Масалан, ички ёнув двигатели цилиндри ичида ҳаракатланаётган поршень тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилади. Бунда поршень боғланишдаги жисмдир. Цилиндр ва шатун эса боғланиш вазирасини бажаради.

Боғланишнинг жисмга кўрсатадиган таъсирига *боғланиш реакция кучи* дейилади. Боғланишдаги жисмларнинг ҳаракати қайси йўналишда чекланган бўлса, боғланиш реакция кучи шу йўналишга тескари йўналади.

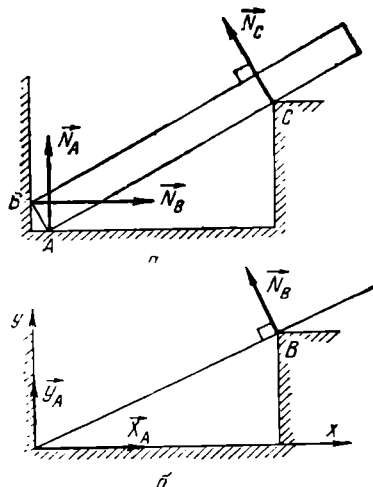
Ҳаракати боғланишлар билан чекланмаган жисм *эркин жисм* дейилади. Масалан, ҳавода учаётган самолётни эркин жисм деб қараш мумкин.

Статикада эркин жисмнинг мувозанат шартлари чиқарилади. Бу шартларни боғланишдаги жисмга татбиқ этиш учун боғланишлар аксиомасидан фойдаланилади.

Боғланишлар аксиомаси (*боғланишдан бўйлатиш принципи*). *Боғланишларнинг берилган жисмга таъсирини реакция кучи билан алмаштириб, ҳар қандай боғланишдаги жисмни эркин жисм деб қараш мумкин.*



1.6- расм.



1.7- расм.

Боғланишдаги жисмларнинг бир-бирига тегиб турган қисмидаги ишқаланиш кучини ҳисобга олмай, боғланишларни қуйидаги учта гурппага ажратиш мумкин.

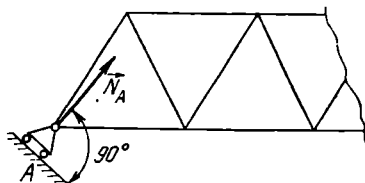
I. Силлиқ сирт восита-сида боғланишлар. а) Жисм силлиқ сиртга A нуқтада таянади (1.6-расм, a). Силлиқ сирт жисмнинг шу сиртга ўтказилган нормал бўйича ҳаракатини чеклайди. Шу сабабли силлиқ сиртнинг реакция кучи $\vec{N}$ сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналади. Бу кучга *нормал реакция кучи* дейилади. Хусусан, *силлиқ текисликнинг реакция кучи* текисликка перпендикуляр йўналади (1.6-расм, б).

б) Балка A нуқтада полга, B нуқтада вертикал деворга ва C нуқтада икки ёқли бурчак қиррасига таянади (1.7-расм, a). Полнинг ва вертикал деворнинг $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ реакция кучлари A ва B нуқталарда мос равишда пол ва деворга ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади. Икки ёқли бурчакдан ташкил топган қирранинг реакция кучи $\vec{N}_C$ эса C нуқтада балкага ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади.

Агар балканинг кўндаланг ўлчамлари ҳисобга олинмаса, уни битта A нуқтага таянган деб қараш мумкин (1.7-расм, б). Бу ҳолда реакция кучи A нуқтадан ўтади, лекин қайси томонга йўналгани маълум эмас. Масала ечишда бундай реакция кучини танлаб олинган координата ўқлари бўйича йўналган $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ ташкил этувчиларга ажратиб, жисмнинг мувозанат шартларидан аниқланади. A

тўсиқнинг реакция кучи ҳам ташкил этувчиларга ажратилиб, шунга ўхшаш аниқланади (1.7-расм, в).

в) Жисм қўзғалмас текисликка ғалтаклар воситасида таяниб турса (1.8-расм), A нуқтадаги реакция кучи $\vec{N}_A$ шу текисликка перпендикуляр йўналади. Шундай қилиб, қўзғалувчи таянчнинг реакция кучи таянч текислигига перпендикуляр йўналади.



1.8- расм.

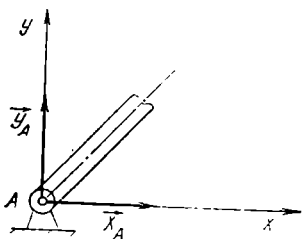
II. Шарнирли боғланишлар. Умумий ўқ ёки нуқта атрофида айлана оладиган иккита жисм орасидаги боғланишга шарнир дейилади.

г) Цилиндрик шарнир. Қўзғалмас асосга ўрнатилган *цилиндрик шарнирнинг реакция кучи* $\vec{R}_A$ айланиш ўқиға перпендикуляр равишда йўналади. Масала ечишда бундай реакция кучини айланиш ўқиға перпендикуляр текисликда ётувчи x ва y ўқларға параллел йўналган ташкил этувчиларға ажратиб, жисмнинг мувозанат шартидан топилади (1.9-расм).

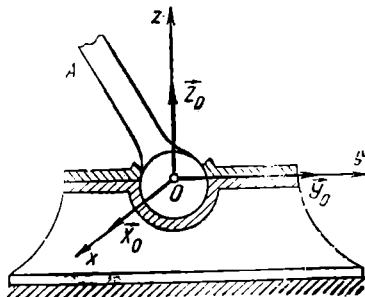
д) Сферик шарнир. AO стержень O нуқтада сферик шарнир воситасида боғланган бўлса, бу стержень O нуқтадан ўтувчи ҳар қандай ўқ атрофида фақат айлана олади (1.10-расм). Сферик шарнирнинг $\vec{R}_O$ реакция кучи O нуқтадан ўтади, лекин қайси томонға йўналишини олдиндан айтиб бўлмайди. Сферик шарнирнинг реакция кучини танлаб олинган координата ўқларига параллел йўналган ташкил этувчиларға ажратиб, уларни жисмнинг мувозанат шартларидан аниқлаш мумкин.

е) Вазнсиз стержень воситасида шарнирли боғланиш. Жисм учлари шарнирли бириктирилган ингичка (вазнсиз деб қараладиган) стерженлар воситасида боғланган бўлсин (1.11-расм). Ўз оғирлиги ҳисобга олинмайдиган, учларидан бошқа нуқталарига ҳеч қандай куч қўйилмаган стерженларға *вазнсиз стерженлар* дейилади.

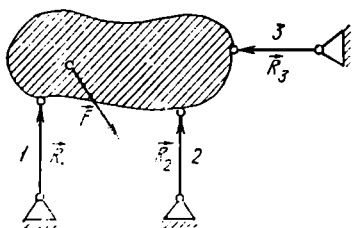
1-аксиомага кўра, стерженларнинг ҳар бири мувозанатда бўлиши учун унга қўйилган кучлар миқдор жиҳатдан тенг, стержень бўй-



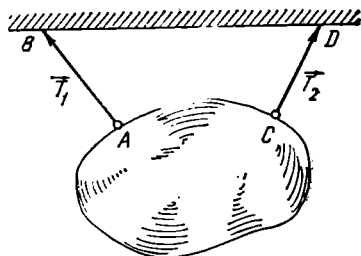
1.9- расм.



1.10- расм.



1.11- расм.



1.12- расм.

лаб қарама-қарши томонга йўналган бўлиши керак. Бинобарин, бундай стерженлар фақат сиқилади ёки чўзилади ҳамда реакция кучларини 1.11-расмдагидек стерженлар бўйлаб йўналади.

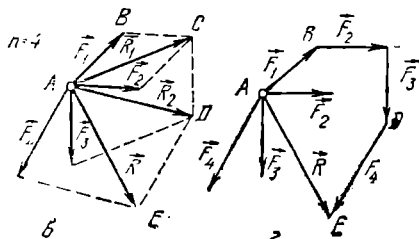
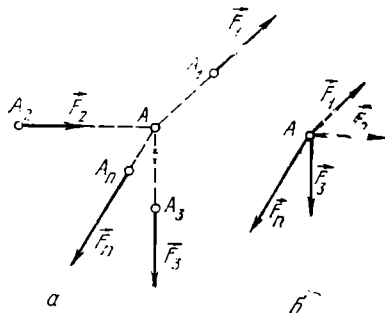
III. Ии, занжир ва қайишлар воситасидаги боғланишлар. ж) Жисм AB , CD иплар воситасида осилган бўлсин (1.12-расм). Ипларда ҳосил бўладиган реакция кучларига *таранглик кучлари* дейилади ва улар ип бўйлаб йўналади.

Боғланишларнинг бошқа турлари кейинчалик конкрет масалаларнинг ёшида кўрилади.

2-БОБ. КЕСИШУВЧИ КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

Таъсир чизиқлари бир нуқтада учрашадиган кучлар системасига *кесишувчи кучлар системаси* дейилади.

Кучларни уларнинг таъсир чизиқлари бўйлаб кўчириш мумкин бўлгани туфайли, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кесишувчи кучлар системаси (2.1-расм, а) кучларнинг таъсир чизиқлари кесишган A нуқтага қўйилган кучлар системасига эквивалент бўлади (2.1-расм, б).



2.1- расм

2.1-§. Кесишувчи кучларни геометрик қўшиш

Бир нуқтага қўйилган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ кучлар берилган. Бу кучларни қўшиш учун параллелограмм қондасидан кетма-кет фойдаланиш мумкин (2.1-расм, в). $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларни қўшиб, $\vec{R}_1$ кучни аниқлаймиз:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

$\vec{R}_1$ ни $\vec{F}_3$ куч билан қўшиб,

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

ни ҳосил қиламиз. Ниҳоят, $\vec{R}_2$ билан $\vec{F}_4$ куч векторлари асосида параллелограмм қуриб, берилган ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$) кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси $\vec{R}$ учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\vec{R} = \vec{R}_2 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

Бунда тенг таъсир этувчи $\vec{R}$ нинг таъсир чизиғи A нуқтадан ўтади.

Кесишувчи кучларни қўшиш учун ҳар гал параллелограмм яшаш ўрнига $\vec{F}_1$ кучнинг учига $\vec{F}_2$ кучни ўзига параллел равишда келтирамиз; сўнгра $\vec{F}_2$ кучнинг C учига $\vec{F}_3$ кучни ўзига параллел равишда келтирамиз ва ҳоказо (2.1-расм, а). A нуқгани $\vec{F}_4$ кучнинг учи билан туташтириб, тенг таъсир этувчи $\vec{R}$ ни аниқлаймиз. Тенг таъсир этувчини бу усулда аниқлашга *кўпбурчак қондаси* дейилади. $ABCDE$ синиқ чизиққа *куч кўпбурчаги* дейилади.

Худди шунингдек, агар берилган кесишувчи кучлар системаси n та кучлардан иборат бўлса, уларнинг тенг таъсир этувчиси

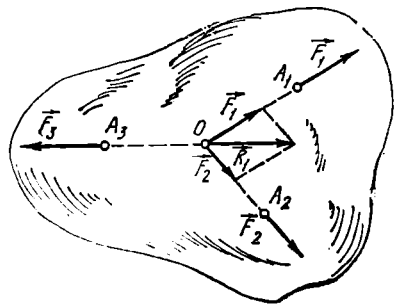
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{v=1}^n \vec{F}_v \quad (2.1)$$

формуладан аниқланади. Шунлай қилиб, *кесишувчи кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси ташкил этувчи кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг ва шу кучлар таъсир чизиқларининг кесилишган нуқтасига қўйилган бўлади.*

2.2-§. Уч кучнинг мувозанати ҳақидаги теорема

Теорема. *Бир текисликда ётувчи ва ўзаро параллел бўлмаган учта куч мувозанатлашса, уларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишади.*

Исбот. Мувозанатдаги жисмнинг A_1, A_2, A_3 нуқталарига бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$) кучлар системаси қўйилган бўлсин (2.2-расм). Кучлардан иккитасини, масалан, $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ ни уларнинг таъсир чизиқлари кесилишадиган O нуқтага келтириб, параллелограмм қондаси асосида қўшамиз:



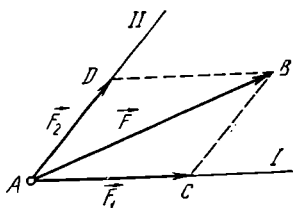
2.2- расм.

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

У ҳолда $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ кучлар системаси ўрнига унга эквивалент иккита кучдан иборат системага эга бўламиз: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \propto (\vec{R}_1, \vec{F}_3) \propto 0$. 1-аксиомага асосан, $\vec{R}_1$ ва $\vec{F}_3$ кучларнинг миқдорлари тенг, йўналиши эса бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналгандагина улар мувозанатлашади. Бинобарин, $\vec{F}_3$ кучнинг таъсир чизиги ҳам O нуқтадан ўтади.

2.3-§. Кучни ташкил этувчиларга ажратиш

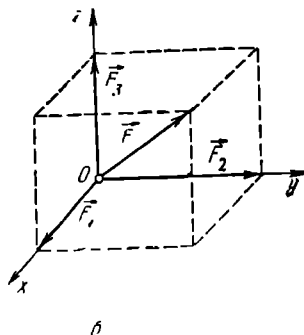
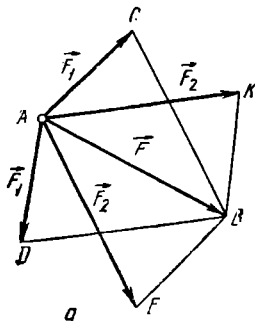
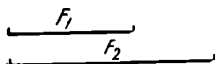
Қуйидаги учта ҳолни кўрамиз: 1) $\vec{F}$ кучни шу куч билан бир текисликда ётувчи берилган иккита йўналиш бўйича ташкил



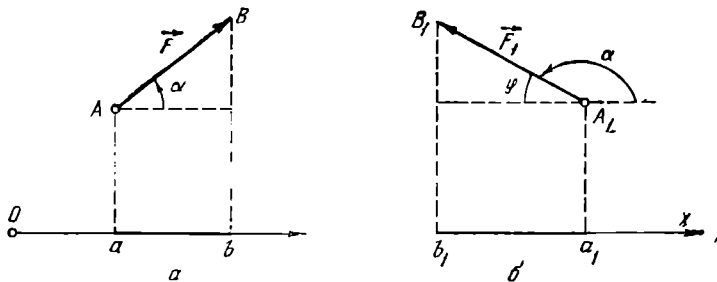
2.3-расм.

этувчиларга ажратиш. Бунинг учун $\vec{F}$ кучининг B учидан берилган I ва II тўғри чизиқларга параллел бўлган ва улар билан C ва D нуқталарда кесилган BC, BD кесмаларни ўтказамиз (2.3-расм). $\vec{AC} = \vec{F}_1$ ва $\vec{AD} = \vec{F}_2$ векторлар $\vec{F}$ кучининг изланаётган ташкил этувчиларини ифодалайди.

2) $\vec{F}$ кучни шу куч билан бир текисликда ётувчи ва сон қийматлари берилган иккита ташкил этувчига ажратиш. $\vec{F}$ кучнинг боши A ва учидagi B нуқталарни марказ қилиб, радиуси берилган масштабда танлаб олинган $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ га тенг ёйларни чизамиз (2.4-расм, а). Бу ёйлар C ва D нуқталарда кесилшади. ACB ва ADB учбурчакларни диагонали AB га тенг параллелограммлар би-



2.4-расм.



2.5- расм.

лан тўлдирамыз. У ҳолда AC ва AE ёки AD ва AK векторлари $\vec{F}$ кучнинг изланаётган ташкил этувчиларини ифодалайди.

3) $\vec{F}$ кучни бир-бирига перпендикуляр учта координата ўқлари бўйича йўналган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ташкил этувчиларга ажратиш. Бунинг учун параллелепипед қоидасидан фойдаланиб, диагонали $\vec{F}$ кучга тенг, қирралари берилган йўналишларга мос келувчи параллелепипед қуриш kifоядир (2.4-расм, б).

2.4-§. Кучнинг текисликдаги ва ўқдаги проекцияси

Куч билан ўқ бир текисликда ётган ҳолда $\vec{F}$ кучнинг Ox ўқдаги проекциясини аниқлаш учун кучнинг боши A ва учидаги B нуқталардан берилган ўққа перпендикуляр (Aa) ва (Bb) чизиқларни ўтказамиз (2.5-расм). У ҳолда мос ишора билан олинган ab кесма $\vec{F}$ кучнинг Ox ўқдаги проекциясини ифодалайди. Агар a нуқтадан b нуқтага кўчиш Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан устма-уст тушса—мусбат ишора, унга тескари йўналса—манфий ишора олинади. $\vec{F}$ кучнинг Ox ўқдаги проекцияси F_x ёки X билан белгиланади:

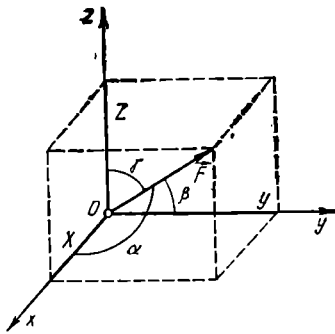
$$F_x = X = F \cos \alpha, \quad (2.2)$$

2.5-расм, б даги $\vec{F}_1$ кучнинг x ўқдаги проекцияси ҳам шу тарзда аниқланади: $X_1 = F_1 \cos \alpha$ ёки $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$ бўлгани учун

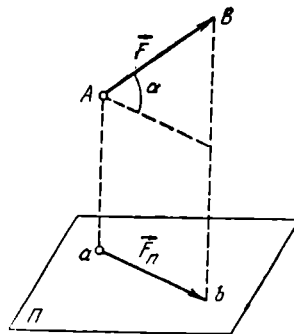
$$X_1 = F_1 \cos \alpha = -F_1 \cos \varphi.$$

Шундай қилиб, кучнинг бирор ўқдаги проекцияси скаляр миқдор бўлиб, куч модули билан кучнинг шу ўқ мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчаги косинусига кўпайтмасига тенг. Бу таърифга кўра $\alpha = \pi/2$ ёки $\alpha = 3\pi/2$ да $X = 0$; $\alpha = \pi$ да $X = -F$ бўлади.

$\vec{F}$ кучнинг $Oxyz$ координата ўқлари системаси билан ташкил қилган бурчакларини α, β, γ билан белгилайлик (2.6-расм). У ҳолда



2.6- расм.



2.7- расм.

диагонали F га тенг бўлган параллелепипед (мос ишора билан олинган) томонларининг узунлиги (2.2) га асосан $\vec{F}$ кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди:

$$X = F \cos \alpha, Y = F \cos \beta, Z = F \cos \gamma. \quad (2.3)$$

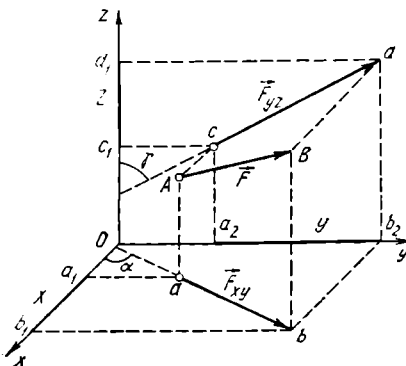
Кучнинг модули параллелепипеднинг диагоналига тенг:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (2.4)$$

$\vec{F}$ кучнинг йўналишини топиш учун йўналтирувчи косинусларни (2.3) дан аниқлаймиз:

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}. \quad (2.5)$$

$\vec{F}$ кучнинг бирор Π текисликдаги проекциясини аниқлаш учун шу текисликка Aa ва Bb перпендикулярларни туширамиз (2.7-расм); у ҳолда $\vec{ab}$ вектор $\vec{F}$ кучнинг Π текисликдаги проекциясини ифо-



2.8- расм.

далайди ва қуйидагича белгиладиларди: $\vec{ab} = \vec{F}_{\Pi}$. $\vec{F}$ кучнинг Π текислик билан ташкил қилган бурчагини α билан белгиласак, кучнинг текисликдаги проекциясининг модули $F_{\Pi} = F \cos \alpha$ формула ёрдамида аниқланади.

2.8-расмда кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини бошқача усулда топиш тасвирланган: дастлаб кучнинг координата текисликларидаги проекциялари (масалан, $\vec{F}_{xy} = \vec{ab}$, $\vec{F}_{yz} = \vec{cd}$) аниқла-

нади, сўнгра бу проекция координата текислигида ётувчи ўқларга проекцияланади:

$$\left. \begin{aligned} X &= F_{xy} \cos \alpha, \\ Y &= F_{xy} \cos (\pi/2 - \alpha) = F_{xy} \sin \alpha, \\ Z &= F_{yz} \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

2.5-§. Тенг таъсир этувчини аналитик усулда аниқлаш

Кучни унинг координата ўқларидаги проекциялари ва қўйилган нуқтасининг координаталари орқали топиш усулига *аналитик усулда аниқлаш* дейилади.

($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси (2.1) га кўра шу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг. (2.1) ни координата ўқларига проекциялаб, тенг таъсир этувчининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$R_x = \sum_{v=1}^n X_v, \quad R_y = \sum_{v=1}^n Y_v, \quad R_z = \sum_{v=1}^n Z_v.$$

бунда X_v, Y_v, Z_v билан $\vec{F}_v$ кучнинг координата ўқларидаги проекциялари белгиланган.

Тенг таъсир этувчининг модули (2.4) га асосан қуйидагича аниқланади:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{v=1}^n X_v\right)^2 + \left(\sum_{v=1}^n Y_v\right)^2 + \left(\sum_{v=1}^n Z_v\right)^2}, \quad (2.7)$$

йўналиши эса (2.5) га асосан топилади:

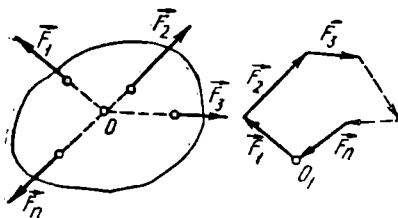
$$\cos(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, z) = \frac{R_z}{R}.$$

2.6-§. Кесишувчи кучлар системасининг мувозанати

Агар кесишувчи ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси $\vec{R}$ нолга тенг бўлса, у ҳолда бундай кучлар системаси мувозанатда бўлади, аксинча, кучлар системаси мувозанатда бўлса, тенг таъсир этувчи нолга тенг бўлади: $\vec{R} = 0$. Бу ҳолда (2.1) қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{v=1}^n \vec{F}_v = 0. \quad (2.8)$$

Бинобарин, бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун мазкур кучларнинг геометрик йиғиндис нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.



2.9- расм.

(2.8) тенгламанинг геометрик маъноси қуйидагичадир: жисмга $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кесишувчи кучлар системаси таъсир этсин (2.9-расм). Бу кучлар учун куч қўпбурчаги ясалса, у ёпиқ бўлади, яъни мазкур қўпбурчақда биринчи кучнинг боши билан охириги кучнинг учи устма-уст тушади. Куч қўпбурчаги ёпиқ бўлса, $\vec{R} = 0$ бўлади.

Демак, бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси мувозанатлашиши учун бу кучларга қурилган куч қўпбурчаги ёпиқ бўлиши зарур ва етарлидир.

Тенг таъсир этувчи куч $\vec{R} = 0$ бўлса, (2.7) ни эътиборга олсак,

$$R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0$$

ёки

$$\sum_{v=1}^n X_v = 0, \sum_{v=1}^n Y_v = 0, \sum_{v=1}^n Z_v = 0. \quad (2.9)$$

Бу тенгликлар кесишувчи кучлар системаси мувозанат шартининг аналитик ифодасидир. Демак, кесишувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг ҳар бир координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Ёзувни қисқартириш мақсадида (2.9) ни келгусида

$$\sum X_v = 0, \sum Y_v = 0, \sum Z_v = 0 \quad (2.10)$$

кўринишда ёзамиз.

Кесишувчи кучлар бир текисликда, масалан, Oxy текислигида ётса, (3.10) нинг учинчи тенгламаси айниятга айланади. Шу сабабли Oxy текислигида ётувчи кесишувчи кучлар системасининг мувозанат шартлари қуйидагича бўлади:

$$\sum X_v = 0, \sum Y_v = 0. \quad (2.11)$$

Статикада жисмнинг мувозанатига оид масалалар қуйидаги тартибда ечилади:

1. Мувозанати текшириладиган жисм аниқланади.
2. Координаталар системаси танлаб олинади.
3. Жисмга таъсир этаётган берилган кучлар кўрсатилади ва боғланишлари реакция кучлари билан алмаштирилади.
4. Таъсир этаётган кучлар қандай кучлар системасини ташкил этишига қараб, уларга мос мувозанат тенгламалари тузилади.
5. Тенгламаларни ечиб номаълум кучлар аниқланади, топилган реакция кучи ишорасининг мусбат бўлиши танлаб олинган йўналишнинг тўғри эканлигини, манфий бўлиши реакциянинг танлаб олинган йўналишга тескари йўналганлигини кўрсатади.

2.1- масала. AC ва BC стерженлар ўзаро ва вертикал девор билан шарнирлар воситасида бириктирилган (2.10-расм, а). C шарнирга сгирлиги $P = 1000$ Н бўлган юк осилган. Агар стерженлар орасидаги бурчак $\alpha = 60^\circ$ ва AC стержень билан девор орасидаги бурчак $\beta = 30^\circ$ бўлса, стерженларнинг оғирлигини ҳисобга олмай уларда ҳосил бўладиган зўриқишлар аниқлансин.

Изоҳ. Стержень бўйлаб йўналган чўзувчи ёки сиқувчи куч *стерженьдаги зўриқиш* деб аталади. Чўзувчи кучдан фарқ қилиш учун сиқувчи кучни маи-фий сон билан ифодалаймиз. Стерженьдаги зўриқиш миқдор жиҳатидан шу стерженнинг реакция кучи N га тенг бўлади.

Ечиш. C шарнирни моддий нуқта деб ҳисоб. унинг мувозанатини текшираимиз.

C нуқтага $P = 1000$ Н бўлган вертикал ластга йўналган оғирлик кучи қўйилган. AC ва BC стерженларнинг реакция кучлари шу стерженлар бўйлаб йўналган бўлиб, уларни мос равишда $\vec{N}_1$ ва $\vec{N}_2$ билан белгилаймиз. Натижада $\vec{P}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ кучлар C нуқтада кесишувчи кучлар системасини ташкил этади.

$\vec{N}_1$ ва $\vec{N}_2$ ни аниқлаш учун кесишувчи кучлар системаси мувозанатининг геометрик шартидан фойдаланамиз.

(2.8) га кўра ($\vec{P}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$) кесишувчи кучлар системаси таъсиридаги C нуқта мувозанатда бўлиши учун уларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак:

$$\vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0,$$

яъни $\vec{P}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ кучларга қурилган куч учбурчаги ёпиқ бўлиши керак. Куч учбурчагини чизиш учун бирор масштабда ихтиёрий D нуқтада $\vec{P}$ кучни ўзига параллел равишда ўтказамиз (2.10-расм, б). $\vec{P}$ кучнинг боши D ва учидagi E нуқталардан AC ва BC стерженларга параллел чизиқлар ўтказамиз. Бу чизиқларнинг кесишган нуқтасини K билан белгиласак, ҳосил бўлган DEK учбурчак изланаётган ёпиқ куч учбурчагини ифодалайди. Бунда KD ва KE векторлар мос равишда $\vec{N}_1$ ва $\vec{N}_2$ реакция кучларини ифодалайди. DEK учбурчакнинг KD ва KE томонларини берилган масштаб бирлигида ўлчаб, $\vec{N}_1$ ва $\vec{N}_2$ кучларнинг модулларини аниқлаймиз.

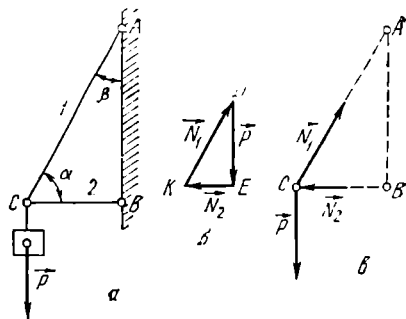
N_1 ва N_2 ларни DEK учбурчакдан тригонометрик йўл билан ҳам аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, яшашга кўра $AB \parallel DE$, $AC \parallel DK$ ва $BC \parallel EK$ бўлгани учун $\widehat{KDE} = \beta = 30^\circ$ ва $\widehat{EKD} = \alpha = 60^\circ$, бинобарин, $\triangle DEK$ тўғри бурчакли учбурчакдан

$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{1000}{\sqrt{3}/2} = 1154 \text{ Н},$$

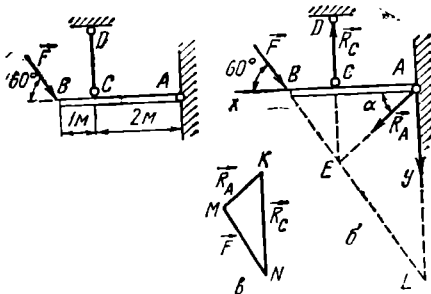
$$N_2 = P \operatorname{ctg} \alpha = 1000 \sqrt{3}/3 = 577 \text{ Н}$$

муносабатларни оламиз.

$\vec{N}_1$ ва $\vec{N}_2$ лар AC ва CB стерженларнинг C шарнирга таъсир кучини, яъни мазкур стерженларнинг реакция кучларини ифодалайди. Стерженлардаги зўриқиш-ни топиш учун стерженларнинг снқилиши ёки чўзрилишини аниқлаймиз. Агар реакция кучи C шарнирдан стержень бўйлаб йўналса, стержень чўзилади; реак-



2.10- расм.



2.11- расм.

ция кучи C шарнирга йўналса, стер-
жень сиқилади. Бунин назарда ту-
тиб, топилган кучларни C шарнирга
қўйсак (2.10-расм, в), AC стержень
чўзилиши ва CB стержень сиқи-
лишини кўраимиз. Шу сабабли $S_1 =$
 $= N_1 = 1154 \text{ Н}$, $S_2 = -N_2 =$
 $= 577 \text{ Н}$.

2.2- масала. 2.11- расмда тас-
вирланган AB балка CD стержень
воситасида горизонтал ҳолатда ту-
тиб турилади. Балка учига горизонт-
та $\alpha = 60^\circ$ бурчак остида $F = 30 \text{ кН}$
куч таъсир этади. Ўлчамларни расм-
дан олиб, CD стержендаги зўриқиш
 S ва балканинг деворга кўрсатади-

ган босими $\vec{Q}$ аниқлансин. A , C

ва D нуқталарга стержень ва балка шарнирлар воситасида бириктирилган. Стер-
жень ва балкаларнинг оғирлиги ҳисобга олинмасин.

Ечиш. AB балканинг мувозанатини текшираимиз. Вазнсиз CD стерженнинг
 AB балкага таъсирини C нуқтадан D нуқтага қараб йўналган $\vec{R}_C$ реакция кучи
билан алмаштираимиз. A шарнирнинг реакция кучини $\vec{R}_A$ билан белгилаб,
 $\vec{R}_A$ нинг йўналишини аниқлаш учун бир текисликда ётувчи ва ўзаро параллел
бўлмаган учта кўчининг мувозанати ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. Бу теоре-
мага асосан $\vec{F}$, $\vec{R}_C$ ва $\vec{R}_A$ кучлар таъсиридаги балка мувозанатда бўлиши
учун бу кучларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишиши керак. Бинобарин,
 $\vec{R}_A$ кучининг таъсир чизиги ҳам $\vec{F}$ ва $\vec{R}_C$ кучларининг таъсир чизиқлари кеси-
шадиган E нуқтадан ўтади (2.11- расм, б). Шундай қилиб, $\vec{R}_A$ нинг таъсир
чизиги AE билан устма-уст тушади.

x ўқни AB бўйлаб йўналтириб, AE билан x ўқ орасидаги бурчакии α би-
лап белгилаймиз. Кесишувчи кучлар системаси мувозанатининг геометрик ва
аналитик шартларидан фойдаланамиз.

1. Геометрик усул. Бу усулга кўра $\vec{F}$, $\vec{R}_C$, $\vec{R}_A$ кучларга қурилган куч
учбурчаги ёпиқ бўлиши керак. Куч учбурчагини чизиш учун бирор масштабда
ихтиёрий M нуқтада $\vec{F}$ кучни ўзига параллел равишда ўтказамиз (2.11-расм, в).
 $\vec{F}$ кучининг боши M ва учигади N нуқталардан мос равишда AE ва $\vec{R}_C$ ларга
параллел чизиқлар ўтказиб, уларнинг кесишган нуқтасини K билан белгилаймиз.
 MNK изланаётган ёпиқ куч учбурчагини ифодалайди. Бунда NK ва KM лар
мос равишда $\vec{R}_C$ ва $\vec{R}_A$ реакция кучларни ифодалайди. MNK куч учбурчаги-
нинг NK ва KM томонларини берилган масштабда ўлчаб, $\vec{R}_C$ ва $\vec{R}_A$ кучлар-
нинг модулларини аниқлаймиз. Ясашга кўра қурилган куч учбурчагининг бурчак-
лари қуйидагича бўлади:

$$\widehat{MNK} = \widehat{ELA} = 30^\circ,$$

$$\widehat{NKM} = \widehat{LAE} = 90^\circ - \alpha,$$

Бинобарин, $\widehat{KMN} = 60^\circ + \alpha$.

$\vec{R}_A$ ва $\vec{R}_C$ ларни аниқлаш учун синуслар теоремасидан фойдаланамиз:

$$\frac{F}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{R_A}{\sin 30^\circ} = \frac{R_C}{\sin(60^\circ + \alpha)},$$

2.11-расм, б дан: $CE = BC \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$; $AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = \sqrt{7}$,

$$\sin \alpha = \frac{CE}{AE} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \quad \cos \alpha = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

бўлгани учун

$$R_A = \frac{F \sin 30^\circ}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{F \sin 30^\circ}{\cos \alpha} = \frac{30 \cdot 1/2}{2\sqrt{7}} = 19,84 \text{ кН}$$

$$R_C = \frac{F \sin(60^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{F(\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha)}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{30 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} \right)}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 38,97 \text{ кН.}$$

2. Аналитик усул. Масалани аналитик усулда ечиш учун (2.11) тенгламаларни тузамиз:

$$\sum X_v = 0; -F \cos 60^\circ + R_A \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; F \cos 30^\circ - R_C + R_A \sin \alpha = 0.$$

(1) ни эътиборга олиб, бу тенгламалардан R_A ва R_C ларни аниқлаймиз:

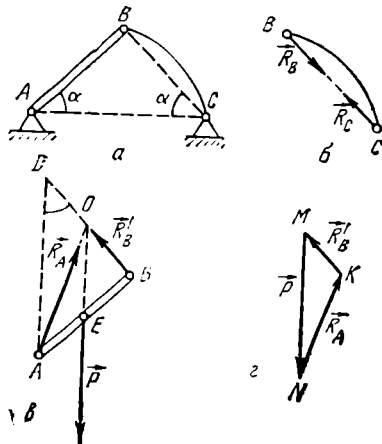
$$R_A = \frac{F \cos 60^\circ}{\cos \alpha} = \frac{30 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 19,84 \text{ кН,}$$

$$R_C = F \cos 30^\circ + R_A \sin \alpha = 30 \frac{\sqrt{3}}{2} + 19,84 \frac{\sqrt{21}}{7} = 38,97 \text{ кН.}$$

Балканинг деворга кўрсатадиган бо-
сим кучи $\vec{Q}$ миқдор жиҳатидан R_A га
тенг, йўналиши эса унга қарама-қарши
бўлади. CD стерженлагини зўриқишни аниқ-
лаш учун $\vec{R}_C$ ни C нуқтага қўйсак, у C
шарнирдан стержень бўйлаб йўналиди,
демак, CD стержень чўзилади.

Шундай қилиб, $Q = R_A = 19,84 \text{ кН}$
 $S = R_C = 38,97 \text{ кН}$.

2.3-масала. B нуқтада шарнир ёнда-
м да ўзаро бигиктирилган тўғри чизиқли
бир жинсли AB брус билан ўқи ихтиёрий
эгри чизиқ шаклида бўлган BC стерженлар
битта горизонталда ётувчи A ва C таянчлар-
га ҳам шарнир воситасида маҳкамланган.
 AB ва BC тўғри чизиқлар AC тўғри чизиқ
билан $\alpha = 45^\circ$ бурчак ҳосил қилади. AB брус-
нинг оғирлиги P . BC стержень оғирлигини
ҳисобга олмай, A ва C таянчларнинг реак-
циялари аниқлапсин (2.12-расм, а).



2.12-расм.

Ечиш, Дастлаб BC стерженнинг мувозанатини текшираимиз. Унга берилган кучлар таъсир этмайди. Боғланишдан бўшатиш ҳақидаги аксиомага асосан B ва C шарнирларни боғланиш реакция кучлари $\vec{R}_B$ ва $\vec{R}_C$ билан алмаштираимиз.

BC стержень $\vec{R}_B$ ва $\vec{R}_C$ кучлар таъсирида мувозанатда бўлади. 1-аксиомага кўра бу кучлар миқдор жиҳатидан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлиши керак. $\vec{R}_B$ куч B нуқтага $\vec{R}_C$ куч C нуқтага қўйилгани туфайли бу кучларнинг таъсир чизиғи BC да ётади (2.12-расм, б).

Энди AB бруснинг мувозанатини текшираимиз. A ва B нуқталардаги шарнирларнинг таъсирини реакция кучлари билан алмаштираимиз. 4-аксиомага кўра AB брус ва BC стерженлар миқдор жиҳатидан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган $\vec{R}_B$ ва $\vec{R}'_B$ кучлар билан бири иккинчисига таъсир этади. Шу сабабли $\vec{R}_B = -\vec{R}'_B$.

$\vec{R}_A$ кучнинг йўналишини уч куч теоремасидан фойдаланиб аниқлаймиз. Теоремага асосан, ўзаро параллел бўлмаган $\vec{P}$, $\vec{R}'_B$ ва $\vec{R}_A$ кучлар таъсиридаги AB брус мувозанатда бўлгани учун $\vec{R}_A$ нинг таъсир чизиғи $\vec{P}$ ва $\vec{R}'_B$ ларнинг таъсир чизиқлари кесишган O нуқтадан ўтиши керак (2.12-расм, в). Бундан ташқари AB брус мувозанатда бўлиши учун унга таъсир этувчиси $\vec{P}$, $\vec{R}'_B$ ва $\vec{R}_A$ кучларга қурилган куч учбурчаги ёпиқ бўлиши керак. Ихтиёрий M нуқтада миқдор ва йўналиши аниқ $\vec{P}$ кучни маълум масштабда ўзига параллел равишда тасвирлаймиз (2.12-расм, г). M нуқтадан $\vec{R}'_B$ нинг таъсир чизиғи BC га, N нуқтадан эса $\vec{R}_A$ нинг таъсир чизиғи AO га параллел чизиқлар ўтказамиз. Уларнинг кесишган нуқтасини K билан белгилаймиз. MNK куч учбурчагининг периметри бўлича $\vec{P}$ куч йўналишида шундай айланиб ўтамызки, натижада куч учбурчаги M нуқтада ёпилсин. NK ва KM векторлари мос равишда $\vec{R}_A$ ва $\vec{R}'_B$ кучларни ифодалайди. NK ва KM ни берилган масштаб бирлигида ўлчаб, $\vec{R}$ ва $\vec{R}'_B$ кучларнинг миқдорини аниқлаймиз.

$\vec{R}_A$ ва $\vec{R}'_B$ ларнинг миқдорини MNK куч учбурчагининг DAO геометрик учбурчакка ўхшашлигидан фойдаланиб ҳам аниқлаш мумкин. Бу учбурчаларнинг мос томонлари пропорционал бўлади:

$$\frac{R_A}{AO} = \frac{R'_B}{DO} = \frac{P}{AD}. \quad (1)$$

2.12-расм, в да AE кесманинг узунлигини a билан белгиласак, $DO = a$, $AB = DB = 2a$, $AD = \sqrt{(AB)^2 + (DB)^2} = 2a\sqrt{2}$, $AO = \sqrt{(AB)^2 + (BO)^2} = a\sqrt{5}$ тенгликлар ўринли бўлади. Натижада (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин,

$$\begin{aligned} \text{бундан} \quad \frac{R_A}{\sqrt{5}} &= \frac{R'_B}{a} = \frac{P}{2a\sqrt{2}}, \\ R_A &= \frac{P\sqrt{10}}{4}; \quad R'_B = \frac{P\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Юқорида кўрганимиздек, $R'_B = R_B = R_C$ бўлгани учун

$$R_C = \frac{P\sqrt{2}}{4}$$

2.4- масала. A, B, C нуқталарда шарнирли бириктирилган AB ва AC вазисиз стерженлар AD ип воситасида ушлаб турилади. A нуқтага горизонтал текисликда ётувчи ва yz текислиги билан $\gamma = 60^\circ$ бурчак ташкил этувчи

$F = 20$ кН куч таъсир этади. Агар $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \beta = 45^\circ$, $\widehat{AOE} = \alpha = 30^\circ$ бўлса, стерженлардаги зўриқиш ва ипнинг тараңглик кучи аниқлансин (2.13-расм, а).

Ечиш. A нуқтанинг мувозанатини текшираемиз. A нуқта AD ип ҳамда AB ва AC вазисиз стерженлар воситасида ушлаб турилади.

Координаталар бошини A нуқтада олиб, z ўқни вертикал юқорига йўналтираемиз. xy текислиги учун $\vec{F}$ куч ётган горизонтал текисликни олаемиз.

A нуқтага таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз (2.13-расм, б). A нуқтага горизонтал текисликда ётувчи берилган $\vec{F}$ куч қўйилган. Боғланишдан бўшатиш ҳақидаги аксиомага кўра AD ипнинг A нуқтага таъсири тараңглик кучи $\vec{T}$ ҳамда AB ва AC стерженларнинг таъсирини $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ реакция кучлари билан алмаштириш мумкин. AB ва AC стерженларни чўзилади деб қараб, $\vec{N}_1$ ва $\vec{N}_2$ ларни A нуқтада мос равишда AB ва AC бўйлаб йўналтираемиз. Агар масалани ечганда N_1 ёки N_2 манфий ишорали бўлса, уларга мос стержень сиқилади.

A нуқтага ($\vec{F}, \vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2$) кесишувчи кучлар системаси таъсир этади. A нуқта учун (2.10) мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum X_v = 0; F \sin \gamma - N_1 \cos \beta + N_2 \cos \beta = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; F \cos \gamma - N_1 \sin \beta \cos \alpha - N_2 \sin \beta \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Z_v = 0; -N_1 \sin \beta \sin \alpha - N_2 \sin \beta \sin \alpha + T = 0.$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, номаълумларни аниқлаймиз:

$$N_1 = \frac{F}{2} \left(\frac{\cos \gamma}{\sin \beta \cos \alpha} + \frac{\sin \gamma}{\cos \beta} \right) = 20,41 \text{ кН},$$

$$N_2 = N_1 - F \frac{\sin \gamma}{\cos \beta} = -4,09 \text{ кН},$$

$$T = F \cos \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha = 5,77 \text{ кН}.$$

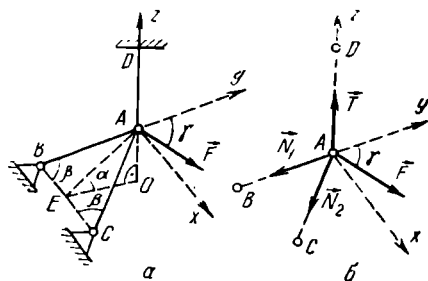
N_2 нинг манфий ишорали бўлиши AC стержень биз фараз қилгандек чўзилмай, балки аслида сиқилишини кўрсатади.

3- б о б. ТЕКИСЛИКДАГИ ПАРАЛЛЕЛ ҚУЧЛАР ВА ЖУФТЛАР НАЗАРИЯСИ

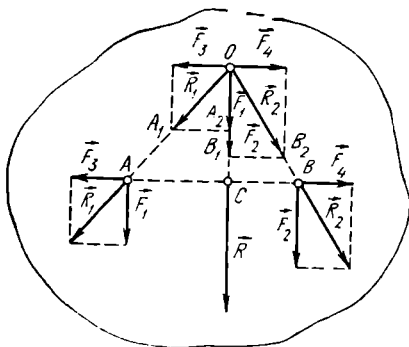
3.1- §. Иккита параллел кучларни қўйиш

Таъсир чизиқлари ўзаро параллел бўлган кучлар системасига *параллел кучлар системаси* дейилади.

Жисмнинг A ва B нуқталарига қўйилган ва бир томонга йўналган параллел $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ кучлар берилган бўлсин (3.1- расм). Бу кучлар-



2. 13- расм.



3.1-рasm.

кучларни қўчириб, $\vec{R}_1$ ни $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$ кучларга, $\vec{R}_2$ ни $\vec{F}_2$, $\vec{F}_4$ кучларга ажратамиз. О нуқтага қўйилган $(\vec{F}_3, \vec{F}_4) \in 0$ бўлгани учун А ва В нуқталарга қўйилган $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар ўринига О нуқтага қўйилган, ОС бўйлаб йўналган $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларни оламиз. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси уларнинг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$R = F_1 + F_2. \quad (3.1)$$

$\vec{R}$ ни таъсир чизиғи бўйлаб С нуқтага қўчираемиз. Расмдан ОАС ва ОА₁А₂ ҳамда ОСВ ва ОВ₁В₂ учбурчаклар ўхшашлигидан қуйидаги пропорцияларни тузамиз: $\frac{AC}{F_3} = \frac{OC}{F_1}$, $\frac{CB}{F_4} = \frac{OC}{F_2}$. Бунда $F_3 = F_4$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{AC} \quad (3.2)$$

ҳосил бўлади. Пропорциянинг хоссасига кўра,

$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}, \quad (3.3)$$

(3.1) ва (3.3) дан қуйидаги натижа келиб чиқади: *бир томонга йўналган икки параллел кучнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларнинг алгебраик йиғиндисига тенг ва шу кучлар билан бир томонга йўналади. Тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи эса кучлар қўйилган нуқталар орасидаги масофани ички равишда шу кучларга тескари пропорционал бўлакларга бўлади.*

Миқдорлари тенг бўлмаган ($F_1 > F_2$) параллел ва бир-бирига тескарн йўналган иккита кучни қўшиш учун (3.1) ва (3.2) формулардан фойдаланиб, $\vec{F}_1$ кучни шу куч билан бир хил йўналган $\vec{F}_2$ ва $\vec{R}$ кучларга ажратамиз. Бунда $\vec{F}_2$ кучни В нуқтага қўйилган ва

$\vec{F}_2' = -\vec{F}_2$ деб қараймиз (3.2- расм). Шундай қилиб, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{R}, \vec{F}_2', \vec{F}_2)$. Бунда $(\vec{F}_2', \vec{F}_2) \propto 0$ бўлгани учун 2- аксиомага кўра уни ташлаб юбориш мумкин. Бинобарин, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto \vec{R}$. (3.1) ва (3.2) га асосан тенг таъсир этувчи куч $\vec{R}$ қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$R + F_2' = F_1, \quad \frac{R}{AB} = \frac{F_2}{AC} \quad (3.4)$$

ёки $F_2' = F_2$ бўлганидан

$$R = F_1 - F_2. \quad (3.5)$$

(3.5) ни (3.4) нинг иккинчи формуласига қўйиб соддалаштирсак,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC} \quad (3.6)$$

муносабатни оламиз.

(3.5) ва (3.6) дан кўраимизки, *миқдорлари тенг бўлмаган ва бир-бирига тескари йўналган иккита параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси миқдор жиҳатидан уларнинг айирмасига тенг. Тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи эса АВ кесманинг катта куч қўйилган давомида ётиб, шу кесмани ташқи равишда мазкур кучларга тескари пропорционал бўлакларга бўлади.*

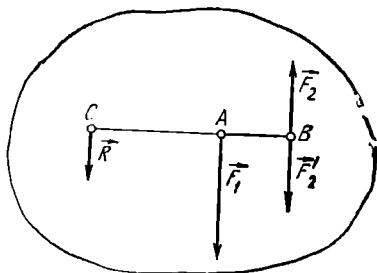
(3.4) ва (3.5) дан фойдаланиб, тенг таъсир этувчи куч қўйилган С нуқтани топамиз:

$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB. \quad (3.7)$$

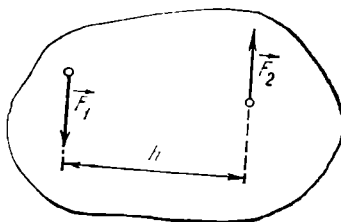
3.2- §. Жуфт куч ҳақида тушунча

Бир-бирига тескари йўналган, миқдор жиҳатидан тенг иккита параллел кучлар системаси *жуфт куч* (қисқача *жуфт*) деб аталади. Жуфт куч $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ билан белгиланади (3.3- расм). Жуфт ташкил этувчи кучларнинг таъсир чизиқлари орасидаги энг қисқа масофага *жуфтнинг елкаси* дейилади ва у h билан белгиланади. Жуфт ётган текисликка *жуфтнинг текислиги* дейилади.

Модуллари тенг бўлмаган ($F_1 > F_2$) иккита бир-бирига тескари йўналган параллел кучларни қўшишда $\vec{F}_2$ кучнинг модули муттасил орта бориб, $\vec{F}_1$



3.2- расм.



3.3- расм.

нинг модулига яқинлаша боради деб қарасак, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ кучлар система-
си лимит ҳолатида жуфт кучни ташкил этади ҳамда (3.5) ва
(3.7) га асосан кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга интилади;
тенг таъсир этувчи қўйилган нуқта эса, кучларнинг таъсир чизиги-
дан чексизликка узоқлаша боради. Бундан кўрамизки, жуфт куч
учун тенг таъсир этувчи куч тушунчаси маънога эга эмас.

Шундай қилиб, жуфт кучни битта куч билан алмаштириб бўл-
майди. Жуфт куч, бамисоли кучдек, статиканинг мустақил элементи
ҳисобланади.

3.3- §. Куч моментининг алгебраик қиймати

Жисмнинг қўзғалмас нуқта (ёки ўқ) атрофидаги айланма ҳара-
катини аниқлаш кучнинг моменти тушунчасига боғлиқ. Шакл текис-
лигига перпендикуляр ўқ атрофида айлана оладиган жисмга шу те-
кисликда ётувчи $\vec{F}$ куч таъсир этсн. Ўқнинг шакл текислиги билан
кесишган нуқтасини O билан белгилайлик (3.4- расм).

O нуқтадан $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизигига перпендикуляр тушира-
миз. Бу перпендикулярнинг узунлиги h берилган $\vec{F}$ кучнинг O нуқ-
тага нисбатан *елкаси* дейилади. Куч моменти ҳисобланадиган нуқ-
тага *момент маркази* дейилади.

$\vec{F}$ кучнинг O нуқтага нисбатан моменти деб, *мос ишора*
билан олинган куч модули F ни куч елкаси h га кўпайтмасига
тенг катталиikka айтилади. Куч моментининг алгебраик қиймати
 $M_O(\vec{F})$ билан белгиланади ва у қуйидаги формула ёрдамида аниқ-
ланади:

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (3.8)$$

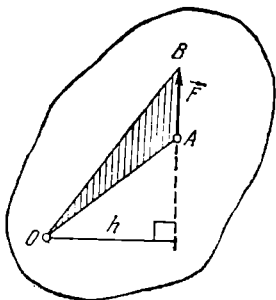
Агар $\vec{F}$ куч жисмни 3.4- расмдагидек O нуқта атрофида соат
стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда айлантиришга интилса,
куч моменти мусбат, акс ҳолда манфий ҳисобланади.

Кучнинг нуқтага нисбатан моменти қуйидаги хоссаларга эга:

1. Кучнинг миқдори ва йўналишини ўзгартирмай таъсир чизиги
бўйлаб исталган нуқтага кўчирилса, куч
моменти ўзгармайди (чунки куч елкаси
ўзгармай қолади).

2. Агар кучнинг таъсир чизиги мо-
мент марказидан ўтса, унинг шу нуқта-
га нисбатан моменти нолга тенг бўлади
(чунки куч елкаси нолга тенг бўлади).

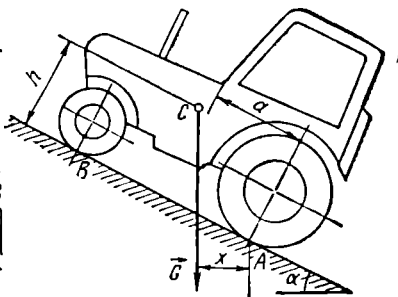
3.4- расмдан кўрамизки, кучнинг нуқ-
тага нисбатан моментининг абсолют қий-
мати (3.8) га асосан кучнинг боши ва
учини момент маркази билан туташти-
ришдан ҳосил бўлган AOB учбурчак юзи-
нинг иккиланганига тенг:



3.4- расм.

$$|M_O(\vec{F})| = 2S_{\Delta AOB}. \quad (3.9)$$

Кучнинг нуқтага нисбатан моменти тушунчасидан фойдаланиб, иккита параллел кучнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқтани қуйидагича талқин қилиш мумкин. (3.2) пропорцияни $F_1 \cdot AC = F_2 \cdot CB$ кўринишда ёки $|M_C(\vec{F}_1)| = |M_C(\vec{F}_2)|$ кўринишда ёза оламиз. Куч моментининг ишорасини ҳисобга олсак, охириги тенглик қуйидагича ёзилади:



3.5- расм.

$$M_C(\vec{F}_1) + M_C(\vec{F}_2) = 0.$$

Шундай қилиб, иккита параллел кучнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта шу нуқтага нисбатан мазкур кучлар моментларининг йиғиндисини нолга тенглик шартидан аниқланади:

3.1- масала. Агар трактор оғирлик марказининг координаталари $h=731$ мм, $a=813$ мм бўлса, трактор А нуқта атрофида ағдарилиб кетмайдиган бўйлама устуворлигини қанотлантурувчи α бурчак аниқлансин (3.5- расм).

Ечиш. Трактор А нуқта атрофида ағдарилиши олдида унинг оғирлик кучи $\vec{G}$ нинг А нуқтага нисбатан моменти ҳамда В нуқтадаги реакция кучи нолга тенг бўлади:

$$M_A(\vec{G}) = G \cdot x = 0 \quad (1); \quad R_A = 0.$$

Бунда x билан G кучининг А нуқтага нисбатан елкаси белгиланган. (3.5) расмдан x учун қуйидаги ифодаини оламиз:

$$x = a \cos \alpha - h \sin \alpha \quad (2)$$

(1) да $G \neq 0$ бўлгани учун $x = 0$ ёкин
 $a \cos \alpha - h \sin \alpha = 0.$

Бундан $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{h} = \frac{813}{731} = 1,102$ ҳамда $\alpha = 48^\circ 45'$ бўлишини аниқлағимиз.

Шундай қилиб, $\alpha < 48^\circ$ бўлса, трактор А нуқта атрофида ағдарилиб кетмайди.

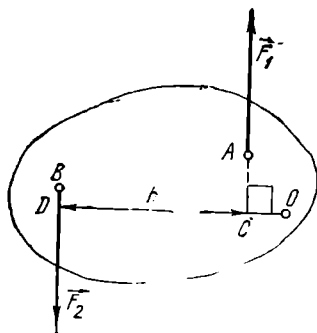
3.4- §. Жуфт кучнинг моменти

Жуфтининг моменти деб, мос ишора билан олинган жуфт ташкил этувчиларидан бирининг миқдорини жуфт елкасига кўпайтмасига тенг катталиikka айтилади. Жуфт моменти М билан белгиланади:

$$M = \pm F_1 \cdot h = \pm F_2 \cdot h.$$

Жуфт жисмни соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда айлантиришга интилса, унинг моменти мусбат, соат стрелкаси ҳаракати бўйича айлантиришга интилса, манфий ишора билан олинади.

Теорема. Жуфт ташкил этувчи кучларнинг жуфт текислигидаги ихтиёрый нуқтага нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисини жуфт моментига тенг.



Исбот. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфт текислигида ихтиёрий O нуқтани олиб, ундан жуфт тузувчи кучларнинг таъсир чизиқларига перпендикуляр OD чизиқни ўтказамиз (3.6-расм). $CD=h$, $F_1=F_2$ эканлигини эътиборга олиб қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = -F_1 \cdot OC + F_2 \cdot OD = -F_1 \cdot OC + F_1(h + OC) = F_1 \cdot h = M.$$

Момент маркази учун A ёки B нуқташи олсак,

$$M = M_A(\vec{F}_s) = M_B(\vec{F}_1), \quad (3.10)$$

яъни жуфт моменти, жуфт танқил этувчи кучлардан бирининг иккинчиси қўйилган нуқтага шибаташ моментига тенглиги келиб чиқади.

3.5- §. Эквивалент жуптлар ҳақидаги теорема

Жуфтнинг асосий хоссаларини ифодалайдиган қуйидаги теорема-
ни исботлаймиз.

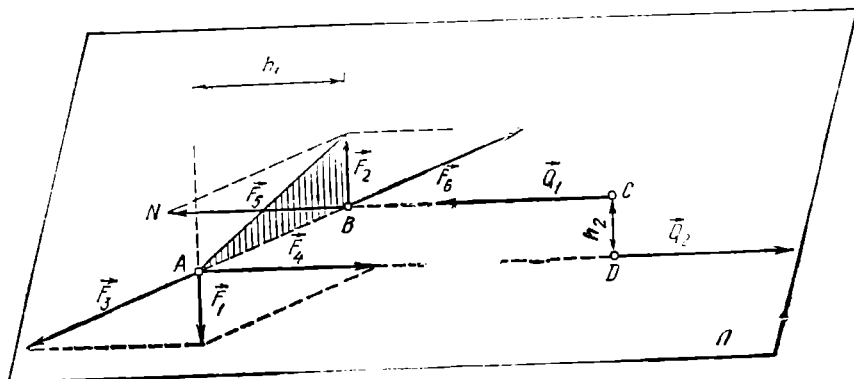
Теорема. Бир текисликда ётувчи, моментлари тенг ва айланishi йўналишлари бир хил бўлган икки жуфт ўзаро эквивалент бўлади.

Исбот. Бир текисликда ётувчи $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ ва $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ жуфт кучларнинг моментлари тенг:

$$F_1 h_1 = Q_1 h_2 \quad (3.11)$$

ва айланмиш йўналишлари бир хил бўлсин. Қуйидаги икки ҳолни алоҳида кўрамиз:

а) П текисликда ётувчи $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ ва $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ жуфтларнинг ташкил этувчилари параллел бўлмасин (3.7-расм). $\vec{F}_1$ кучни таъсир



3.7- расм.

чиқиқлари AB ва AD да ётувчи $\vec{F}_3$ ва $\vec{F}_4$ ташкил этувчиларга, F_2 кучни таъсир чиқиқлари BC ва AB да ётувчи $\vec{F}_5$ ва $\vec{F}_6$ ташкил этувчиларга ажратамиз: $\vec{F}_1 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$, $\vec{F}_2 = \vec{F}_5 + \vec{F}_6$. Натижада $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6)$ ҳосил бўлади. Ясалишига кўра $(\vec{F}_3, \vec{F}_6) \propto 0$ бўлгани учун

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{F}_4, \vec{F}_5). \quad (3.12)$$

Энди $F_5 = Q_1$ эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфтнинг momenti $(\vec{F}_4, \vec{F}_5)$ жуфтнинг моментига тенглигини исботлаймиз. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфтнинг momenti $F_2 \cdot h_1$ га ёки расмда штрихланган ABM учбурчак юзасининг иккиланганига тенг; $(\vec{F}_4, \vec{F}_5)$ жуфтнинг momenti эса $F_5 \cdot h_2$ ёки ABN учбурчак юзасининг иккиланганига тенг. Бу учбурчаклар умумий AB асосга эга ва баландликлари тенг бўлганидан уларнинг юзалари ўзаро тенг. Бинобарин, $F_2 \cdot h_1 = F_5 \cdot h_2$. Бу тенгликни (3.11) билан солиштирсак, $F_5 \cdot h_2 = Q_1 \cdot h_2$ ёки $F_5 = Q_1$ келиб чиқади. Шундай қилиб, $(\vec{F}_4, \vec{F}_5) \propto (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$. (3.12) га асосан $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$, яъни (а) ҳолда теорема исботланди.

б) $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ ва $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ жуфтларнинг ташкил этувчилари параллел ва уларнинг моментлари тенг бўлсин (3.8-расм):

$$F_1 \cdot AB = Q_1 \cdot CD. \quad (3.13)$$

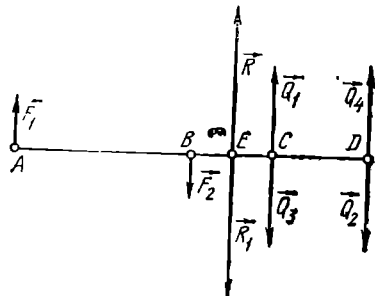
Бу ҳолда мазкур жуфтларнинг эквивалент бўлишини исботлаш учун C ва D нуқталарга фақат $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_3) \propto 0$ ва $(\vec{Q}_2, \vec{Q}_4) \propto 0$ мувозанатлашган кучлар системаси қўйилган деб қарайлик. $\vec{F}_1$ ва $\vec{Q}_4$ параллел кучларни қўшиб, E нуқтага қўйилган $\vec{R}$ кучни оламиз. Бунда

$$R = F_1 + Q_4, \quad F_1 \cdot AE = Q_4 \cdot ED$$

бўлади. $Q_4 = Q_1$ бўлишини назарда тутиб охирги тенгликдан (3.13) ни айирсак,

$$F_1(AE - AB) = Q_1(ED - CD) \quad \text{ёки} \quad F_1 \cdot BE = Q_1 \cdot EC. \quad (3.14)$$

Худди шунингдек, $\vec{F}_2$ ва $\vec{Q}_3$ кучларни қўшиб, $\vec{R}_1$ кучни оламиз. (3.14) да $F_1 = F_2$ ва $Q_1 = Q_3$ бўлишини эътиборга олсак, $F_2 \cdot BE = Q_3 \cdot EC$ тенглик ўринли бўлади ҳамда $R_1 = F_2 + Q_3 = F_1 + Q_4 = R$. Шундай қилиб, $\vec{R}_1$ куч ҳам E нуқтага қўйилади ва $\vec{R}$ га қарама-қарши йўналгани учун $(\vec{R}, \vec{R}_1) \propto 0$ ва $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфт куч ўрнига $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ жуфтни оламиз.



3.8-расм.

Шундай қилиб,

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \vec{Q}_4) \propto (\vec{R}, \vec{R}_1, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \propto (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2),$$

яъни (б) ҳолда ҳам теорема исботланди. ■

Исботланган теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1) жуфтни ўз текислигида ихтиёрий равишда кўчирсак, жуфтнинг жисмга таъсири ўзгармайди; 2) жуфтнинг моменти ва айланиш йўналишини ўзгартирмай унинг ташкил этувчилари ва елкаси ўзгартирилса, жуфтнинг жисмга таъсири ўзгармайди.

3.6- §. Бир текисликда ётувчи жуфтларни қўшиш. Текисликдаги жуфтларнинг мувозанат шартлари

Теорема. Бир текисликда ётувчи жуфтлар системаси битта жуфтга эквивалент бўлиб, унинг моменти берилган жуфтлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

Исбот. Жисмга бир текисликда ётувчи ва моментлари M_1, M_2, M_3 га тенг жуфтлар таъсир этсин. Шартли равишда жуфт кучларни ёйсимон стрелкалар билан тасвирлаш мумкин (3.9- расм). Эквивалент жуфтлар ҳақидаги теоремага асосан, берилган учта жуфтни моментларини ўзгартирмай умумий h елкага эга бўлган, ташкил этувчилари A ва B нуқталарга қўйилган $(\vec{F}_1, \vec{F}_2), (\vec{F}_3, \vec{F}_4), (\vec{F}_5, \vec{F}_6)$ учта жуфтлар системасига келтирамиз. Бунда $F_1 \cdot h = M_1, F_3 \cdot h = M_2, F_5 \cdot h = M_3, A$ ва B нуқталарга қўйилган кучларни алоҳида-алоҳида қўшиб, A нуқтада $\vec{R}_1$ ва B нуқтада $\vec{R}_2$ кучларни оламиз. Бунда $R_1 = F_1 - F_3 + F_5, R_2 = F_2 - F_4 + F_6$. Натижада берилган жуфтлар системаси тенг таъсир этувчи жуфт деб аталадиган $(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ жуфтга келтирилади ва унинг моменти

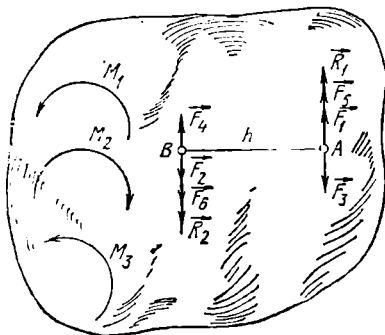
$$M = R_1 \cdot h = F_1 \cdot h - F_3 \cdot h + F_5 \cdot h = M_1 + M_2 + M_3$$

формуладан аниқланади.

Учта жуфт учун теорема исботланди. Худди шунингдек, бир текисликда ётувчи ва моментлари $M_1, M_2, \dots, M_n$ га тенг бўлган n та жуфтлар системасини қўшиш натижасида битта тенг таъсир этувчи жуфтни олиш мумкин ҳамда бу жуфтнинг моменти

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{v=1}^n M_v. \quad (3.15)$$

Исботланган теоремадан кўрамизки, текисликдаги жуфтлар системаси мувозанатда бўлиши учун берилган жуфтлар моментлари-



3.9- расм.

нинг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир:

$$\sum_{v=1}^n M_v = 0. \quad (3.16)$$

3.2- масала. Мувозанатлашган учта жуфт бир текисликда ётади. Бу жуфтларни ташкил этувчи кучларнинг миқдорлари мос равишда 2 Н, 3 Н ва 5 Н; елкалари 3 м, x м ва 6 м; биринчи ва учинчи жуфтларнинг моменти мусбат, иккинчи жуфтнинг моменти манфий қийматга эга. Иккинчи жуфт елкаси x топилинсин.

Ечиш. Жуфтларнинг моментлари қўйидагига тенг:
 $M_1 = 2 \cdot 3 = 6$ Нм; $M_2 = -3x$ Нм; $M_3 = 5 \cdot 6 = 30$ Нм.
 Жуфт кучлар мувозанатда бўлгани учун $M_1 + M_2 + M_3 = 0$ ёки $6 - 3x + 30 = 0$.
 Бундан $x = 12$ м келиб чиқади.

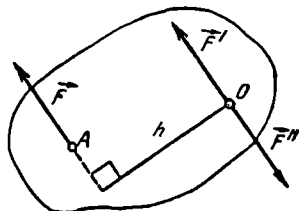
4- бoб. ТЕКИСЛИКДАГИ КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

4.1- §. Кучни ўзига параллел кўчиришга оид лемма

Агар жисмга таъсир этувчи кучлар бир текисликда ётса, унга *текисликдаги кучлар системаси* дейилади.

Кучнинг жисмга таъсирини ўзгартирмай, уни ўзига параллел равишда бир нуқтадан *келтириш маркази* деб аталадиган иккинчи нуқтага кўчириш масаласи 1804 йилда француз олими Л. Пуансо томонидан исботланган қўйидаги лемма билан ифодаланади:

Лемма. Жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган куч, жисмда олинган ихтиёрий келтириш марказига қўйилган худди шундай кучга ва моменти берилган кучнинг келтириш марказига нисбатан моменти-га тенг жуфтга эквивалент бўлади.



4.1- расм.

Исбот. Жисмнинг A нуқтасига $\vec{F}$ куч қўйилган бўлсин (4.1-расм). Жисмнинг ихтиёрий O нуқтасига таъсир чизиғи $\vec{F}$ га параллел $(\vec{F}', \vec{F}'') \in 0$ системани қўямиз. Бу ноллик системанинг ташкил этувчилари $|\vec{F}'| = |\vec{F}''| = |\vec{F}|$ бўлсин. Натижада $\vec{F} \in (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$, лекин $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ кучлар системаси O нуқтага қўйилган $\vec{F}'$ кучга ва $(\vec{F}, \vec{F}'')$ жуфтга эквивалент бўлади. $(\vec{F}', \vec{F}'')$ жуфтнинг моменти $\vec{F}$ кучнинг O нуқтага нисбатан моментига тенглиги жуфтлар назариясидан маълум: $M = M_O(\vec{F})$.

Шундай қилиб, A нуқтага қўйилган $\vec{F}$ куч, келтириш маркази O га қўйилган $\vec{F}' = \vec{F}$ кучга ва моменти $M = M_O(\vec{F})$ бўлган $(\vec{F}', \vec{F}'')$ жуфтга эквивалент бўлиши исботланди. ■

Кучни ўзига параллел равишда кўчиришда ҳосил бўлган жуфтга *қўйилган жуфт* дейилади.

4.2-§. Текисликдаги кучлар системасининг бош вектори ва бош моменти

Жисмнинг $A_1, A_2, \dots, A_n$ нуқталарига бир текисликда ётувчи $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсир этсин (4.2-расм; аниқлик учун расмда $n=3$ ҳолини кўрамиз). Пуансо леммасига кўра, кучларни O марказга келтириш натижасида берилган кучлар системаси O нуқтага қўйилган $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n$ кучлар системаси ва моментлари

$$M_1 = M_O(\vec{F}_1), M_2 = M_O(\vec{F}_2), \dots, M_n = M_O(\vec{F}_n) \quad (4.1)$$

бўлган қўйилган жуфтлар системаси $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$ га эквивалент бўлади.

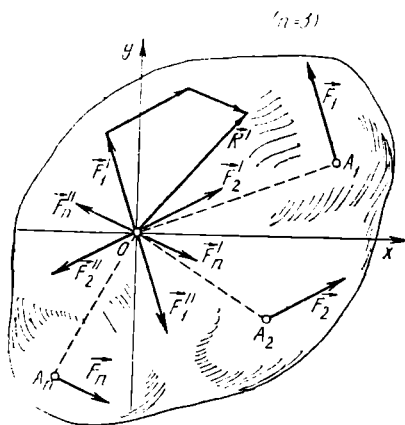
O марказга қўйилган $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ кучларни геометрик қўшиб, кучлар системасининг бош вектори деб аталадиган битта $\vec{R}'$ кучни оламиз: $\vec{R}' = \sum_{v=1}^n \vec{F}'_v$ ёки

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}_v. \quad (4.2)$$

Бинобарин, кучлар системасининг бош вектори берилган (4.2) кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

Бир текисликда ётувчи $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$ жуфтларни қўшиб, моментни M_O га тенг битта жуфтни оламиз. Бу жуфтининг моментни (3.15) га асосан мазкур жуфтлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг: $M_O = \sum M_v$ ёки (4.1) га асосан

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}_v). \quad (4.3)$$



4.2-расм.

M_O га текисликдаги кучлар системасининг бош моменти дейилади. Демак, текисликдаги кучлар системасининг бирор марказга нисбатан бош моменти таъкил этувчи кучларнинг шу марказга нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

Шундай қилиб, қўйидаги теорема исботланди: текисликдаги кучлар системасини бирор O марказга келтириш натижасида бу кучлар системаси келтириш марказига қўйилган бош вектор $\vec{R}'$ га тенг битта куч

ҳамда моменти бош момент M_0 га тенг битта жуфтга эквивалент бўлади.

Бу усулга текисликдаги кучлар системасини Пуансо усули билан берилган марказга келтириш дейилади.

Умумий ҳолда текисликдаги кучлар системаси фақат $\vec{R}'$ га эквивалент бўлмагани туфайли, $\vec{R}'$ тенг таъсир этувчини ифодаламайди. Бош вектор берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлиб, келтириш марказига боғлиқ бўлмайди. Келтириш марказини ўзгартириш натижасида куч елкаси, демак бош момент ўзгаради.

Бош вектор $\vec{R}'$ нинг миқдор ва йўналишини аналитик усулда аниқлаш учун келтириш марказида, кучлар ётган текисликда Ox ва Oy ўқларни ўтказамиз (4.2-расм). $\vec{F}_v$ кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини X_v , Y_v ; $\vec{R}'$ нинг проекцияларини R'_x ва R'_y билан белгилаймиз. У ҳолда (4.2) ни координата ўқларига проекциялаб, R'_x ва R'_y ни аниқлаймиз:

$$R'_x = \sum X_v, \quad R'_y = \sum Y_v.$$

Бош векторнинг модули ва йўналиши қуйидагича аниқ танади:

$$R' = \sqrt{(\sum X_v)^2 + (\sum Y_v)^2}, \quad (4.4)$$

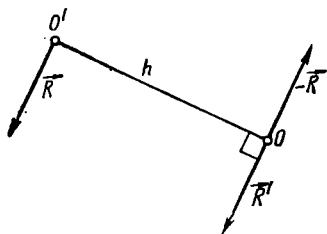
$$\cos(\vec{R}', x) = \frac{R'_x}{R'}, \quad \cos(\vec{R}', y) = \frac{R'_y}{R'}. \quad (4.5)$$

Агар бош вектор $R' = 0$, яъни берилган кучларга қурилган куч кўпбурчаги ёпиқ ҳамда бош момент $M_0 \neq 0$ бўлса, текисликдаги кучлар системасини моменти M_0 га тенг битта жуфт кучга келтирилади. Бу ҳолда келтириш марказини ўзгартирган билан бош момент ўзгармайди.

4.3-§. Текисликдаги кучлар системасини тенг таъсир этувчига келтириш. Вариньон теоремаси

Жисмга бир текисликда ётувчи ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_v$) кучлар системаси таъсир этсин. Бу кучлар системасини ихтиёрий O марказга келтириб, O нуқтага қўйилган $\vec{R}' = \sum \vec{F}_v$ бош векторга тенг битта кучни ва моменти $M_0 = \sum M_0(\vec{F}_v)$ га тенг битта жуфт кучни оламиз. Қуйидаги икки ҳолни кўрамиз:

1. Танлаб олинган келтириш маркази O нуқта учун бош момент $M_0 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда текисликдаги кучлар системаси O нуқтага қўйилган битта $\vec{R}'$ кучга эквивалент бўлади, яъни кўрилат-



4.3- расм.

ган ҳолда бош вектор тенг таъсир этувчи кучни ифодалайди: $\vec{R}' = \vec{R}$ ҳамда $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \propto \vec{R}$.

Шундай қилиб, берилган кучлар системасининг O нуқтага нисбатан бош моменти нолга тенг бўлса, бундай кучлар системаси таъсир чизиги O нуқтадан ўтувчи тенг таъсир этувчи куч $\vec{R}$ га келтирилади:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_v.$$

2. Умумий ҳолда текисликдаги кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини аниқлаш учун моменти M_O га тенг жуфтнинг ташкил этувчилардан бири $(-\vec{R})$ ни шундай танлаймизки, у миқдор жиҳатдан $\vec{R}'$ га тенг ва йўналиши унга қарама-қарши бўлсин. Натижада 4.3-расмда тасвирланган $(\vec{R}, -\vec{R})$ жуфт кучни оламиз. Бу жуфтнинг моменти

$$M_O = R \cdot h$$

формула билан аниқлангани учун унинг елкаси

$$h = \frac{M_O}{R} = \frac{M_O}{R'} \quad (4.6)$$

тенгликдан топилади. Шундай қилиб, текисликдаги берилган кучлар системаси $\vec{R}'$ кучга ва айланиш йўналиши M_O га мос бўлган $(\vec{R}', -\vec{R})$ жуфтга эквивалент бўлади, лекин $(\vec{R}', -\vec{R}) \propto 0$ бўлгани учун берилган кучлар системаси O нуқтадан $OO' = h$ масофада ўтувчи O' нуқтага қўйилган битта $\vec{R} = \vec{R}' = \sum \vec{F}_v$ кучга эквивалент бўлади. Бинобарин, $\vec{R}' \neq 0$, $M_O \neq 0$ бўлган ҳолда текисликдаги кучлар системаси $\vec{R}$ тенг таъсир этувчига келтирилади.

Вариньон теоремаси. Текисликдаги кучлар системаси тенг таъсир этувчисининг шу текисликдаги ихтиёрий нуқтага нисбатан моменти, ташкил этувчи кучлардан мазкур нуқтага нисбатан олинган моментларнинг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни

$$M_O(\vec{R}) = \sum M_O(\vec{F}_v). \quad (4.7)$$

Исбот. 4.3-расмдан кўрамизки, $\vec{R}$ тенг таъсир этувчининг O нуқтага нисбатан моменти $M_O(\vec{R}) = R \cdot h$. (4.6) ни эътиборга олсак,

*)бунда $M_O > 0$ деб фарз қилдик; агар $M_O < 0$ бўлса, $M_O = -R \cdot h$, $h = \frac{|M_O|}{R}$ формула ўринли бўлади.

$M_0(\vec{R}) = M_0$. Ўз навбатида (4.3) га кўра M_0 бош момент қуйидагича аниқланади: $M_0 = \sum M_0(\vec{F}_v)$. Охириги иккита тенгликларни солиштириб, (4.7) ўринли бўлишини кўрамиз. ■

4.4-§. Текисликдаги кучлар системасининг мувозанат шартлари

Юқорида кўрганимиздек, текисликдаги кучлар системасини бир нуқтага келтириш натижасида бундай кучлар системаси $\vec{R}' \neq 0$ бўлса, тенг таъсир этувчи кучга; $\vec{R}' = 0$, $M_0 \neq 0$ бўлса, битта жуфтга эквивалент бўлади. Лекин текисликдаги кучлар системасини шу текисликдаги ихтиёрий O нуқтага келтириш натижасида бир вақтнинг ўзида бош вектор $\vec{R}'$ ҳам, бош момент M_0 ҳам нолга тенг бўлиши мумкин, яъни

$$\vec{R}' = 0, M_0 = 0, \quad (4.8)$$

ёки

$$\sum \vec{F}_v = 0, \sum M_0(\vec{F}_v) = 0. \quad (4.8')$$

(4.8) ёки (4.8') тенгламалар текисликдаги кучлар системаси мувозанатининг зарур ва етарли шартини ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам (4.8) даги шартнинг бирортаси бажарилмаса, масалан, $\vec{R}' \neq 0$ бўлса, текисликдаги кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилади ёки $M_0 \neq 0$ бўлса, кучлар системаси жуфтга келтирилади. Натижада ҳар иккала ҳолда ҳам кучлар системаси мувозанатда бўла олмайди. (4.8) нинг етарлилиги шундан иборатки, $\vec{R}' = 0$ бўлса, текисликдаги кучлар системаси моменти M_0 га тенг жуфтга келтирилади, лекин $M_0 = 0$ бўлгани учун бу кучлар системаси мувозанатда бўлади.

(4.4) ни эътиборга олсак, (4.8) ёки (4.8') ўрнига текисликдаги кучлар системаси мувозанати шартларининг аналитик ифодаси учун қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\sum X_v = 0, \sum Y_v = 0, \sum M_0(\vec{F}_v) = 0. \quad (4.9)$$

Демак, текисликдаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг шу текисликда ётувчи иккита координата ўқларига проекцияларининг йиғиндилари алоҳида-алоҳида нолга тенг ва шу текисликдаги ихтиёрий нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Текисликдаги кучлар системаси мувозанатининг яна қуйидаги шартларини келтирамиз.

1. Текисликдаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун барча кучларнинг шу текисликда ётувчи ихтиёрий икки нуқтанинг ҳар бирига нисбатан моментларининг йиғиндиси алоҳида-

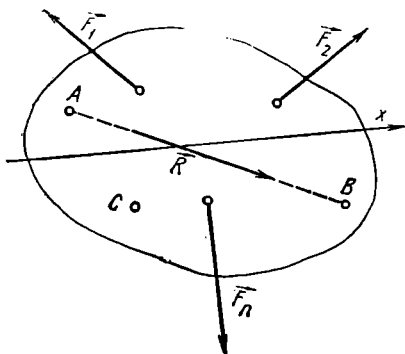
алоҳида нолга тенг ва мазкур нуқталардан ўтувчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлмаган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир:

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0, \sum M_B(\vec{F}_v) = 0, \sum X_v = 0. \quad (4.10)$$

Кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу шартларнинг бажарилиши зарурлиги бевосита (4.8) дан келиб чиқади. Чунки (4.10) дан бирортаси бажарилмаса ёки $M_A \neq 0$ ($M_B \neq 0$), ёки $\vec{R}' \neq 0$ бўлиб, бундай кучлар системаси мувозанатлашмайди. (4.10) даги шартлар система мувозанатда бўлиши учун етарли эканлигини исботлаймиз. (4.10) даги шартлардан биринчи тенгликнинг бажарилиши А нуқтага нисбатан бош моментининг нолга тенглигини ифодалайди: $M_A = 0$. Бу ҳолда текисликдаги кучлар системаси А нуқтадан ўтувчи тенг таъсир этувчига келтирилиши мумкин (4.4-расм). (4.10) нинг иккинчиси ва Вариньон теоремасига асосан $M_B(\vec{R}) = \sum M_B(\vec{F}_v) = 0$ тенглик бажарилади. Бинобарин, $\vec{R} = 0$ ёки $\vec{R} \neq 0$ бўлиб, $\vec{R}$ нинг таъсир чизиғи В нуқтадан ҳам ўтади; яъни унинг таъсир чизиғи АВ да ётади. (4.10) нинг учинчи шартига кўра $R_x = \sum X_v = 0$. x ўқ АВ га перпендикуляр бўлмагани учун охирги тенглик фақат $\vec{R} = 0$ бўлгандагина бажарилади, яъни кучлар системаси мувозанатда бўлади.

2. Текисликда ётувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун барча кучларнинг шу текисликдаги бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтанинг ҳар бирига нисбатан моментларининг йиғиндиси алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир:

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0, \sum M_B(\vec{F}_v) = 0, \sum M_C(\vec{F}_v) = 0. \quad (4.11)$$



4.4- расм.

Бу шартларнинг зарурлиги худди олдинги ҳолдагидек исботланади. (4.11) шартлар система мувозанатда бўлиши учун етарли эканлиги тескарисини фараз қилиш билан исботланади. (4.11) шартлар бажарилишига қарамай, кучлар системаси мувозанатда бўлмаслиги учун берилган система бир вақтнинг ўзида А, В, С нуқталардан ўтувчи тенг таъсир этувчига келтирилиши керак (4.4-расм). Бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки А, В, С нуқталар бир тўғри чи-

зиқда ётмайди. Бинобарин, (4.11) шартлар бажарилса, кучлар системаси мувозанатда бўлади.

4.5-§. Текисликдаги параллел кучларнинг мувозанат шартлари

Бир текисликда ётувчи ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) параллел кучлар системаси берилган бўлсин. *Оу* ўқни кучларнинг таъсир чизигига параллел йўналтирамиз (4.5-расм). Барча кучлар *Ох* ўққа перпендикуляр бўлгани учун ҳар бирининг *Ох* ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлади. Натижада (4.9) нинг биринчи тенгламаси айниятга айланади ва текисликдаги параллел кучларнинг мувозанат шартлари қуйидагича ёзилади:

$$\sum Y_v = 0, \sum M_O(\vec{F}_v) = 0. \quad (4.12)$$

(4.12) дан кўрамикки, текисликдаги параллел кучлар мувозанатда бўлиши учун ташкил этувчи кучларнинг алгебраик йиғиндиси ва шу текисликдаги ихтиёрый нуқтага нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндиси алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

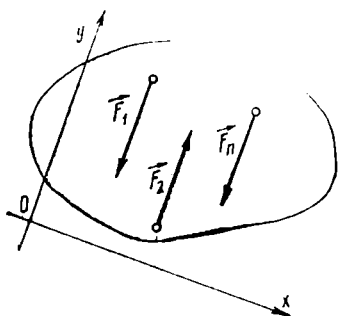
Агар бу кучлар системаси учун (4.10) ёки (4.11) ни татбиқ этсак, (4.12) ўрнига қуйидаги ифодаларни оламик:

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0, \sum M_B(\vec{F}_v) = 0.$$

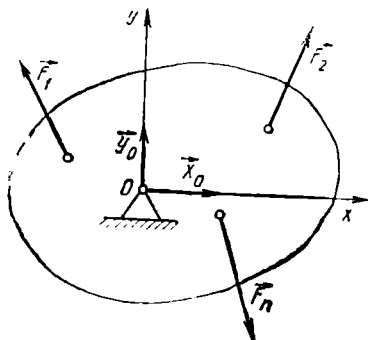
4.6-§. Ричагнинг мувозанати

О нуқтадан *Оху* текисликка перпендикуляр ўтган ўқ атрофида шу текисликда ётувчи $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсирида айлана оладиган қаттиқ жисмга *ричаг* дейилади (4.6-расм).

Берилган кучлар қаторига *О* нуқта боғланиш реакция кучининг ташкил этувчилари $\vec{X}_0$ ва $\vec{Y}_0$ ларни қўшамиз. У ҳолда (4.9) тенгламалар қуйидагича ёзилади:



4.5- расм.



4.6- расм.

$$X_O + \sum X_v = 0; Y_O + \sum Y_v = 0; \sum M_O(\vec{F}_v) = 0. \quad (4.13)$$

(4.13) нинг биринчи иккита тенгламасидан O нуқтанинг реакцияси X_O, Y_O аниқланади:

$$X_O = -\sum X_v, Y_O = -\sum Y_v$$

(4.13) нинг учинчи тенгламаси

$$\sum M_O(\vec{F}_v) = 0$$

да O нуқтанинг реакция кучлари қатнашмайди. Шу сабабли бу тенглама *ричагнинг мувозанат шартини* ифодалайди. Бу тенгламадан кўрамизки, *ричаг мувозанатда бўлиши учун унга қўйилган барча кучларнинг таянч нуқтасига нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

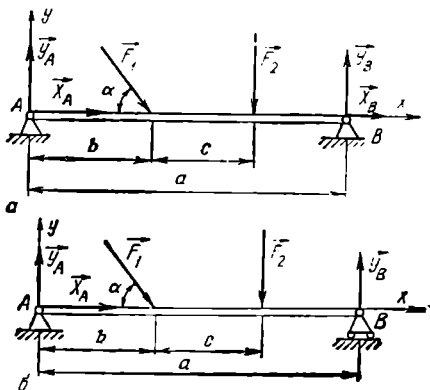
4.7-§. Статик аниқ ва статик ноаниқ масалалар

Берилган масалада номаълумлар сони мувозанат тенгламалари сонига тенг бўлса, бундай масалага *статик аниқ масала*, аксинча номаълумлар сони мувозанат тенгламалари сонидан ортиқ бўлса, *статик ноаниқ масала* дейилади.

Иккала учи қўзғалмас цилиндрик шарнирли таянчга бириктирилган AB балкага $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар таъсир этсин (4.7- расм, а). Ўлчовлар расмда кўрсатилган. Балкага таъсир этувчи берилган $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучлар қаторига A ва B таянчлар реакция кучларининг ташкил этувчилари $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ и қўшиб, уни эркин жисм деб қараймиз. Бу кучлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. Бинобарин, балка учун учта мувозанат тенгламасини тузиш мумкин. Бу мувозанат тенгламаларида X_A, Y_A, X_B, Y_B тўртта номаълум реакция кучлари қатнашади. Шу сабабли бу учта тенгламалар

воситасида номаълумларни аниқлаш мумкин эмас, яъни статик ноаниқ масаладир.

Бу масала статик аниқ бўлиши учун таянчлардан бири (масалан, B таянчни) қўзғалувчан шарнирли таянч билан алмаштириш мумкин (4.7- расм, б). У ҳолда B нуқтада вертикал юқорига йўналган битта $\vec{Y}_B$ кучга эга бўламиз ҳамда номаълумлар ва тенгламалар сони ўзаро тенг бўлади. Энди у статик аниқ масалага айланди; номаълумларни мувозанат тенгламалари асосида топиш мумкин.



4.7- расм.

Назарий механикада статик аниқ масалалар ечилади. Статик ноаниқ масалаларни ечиш усуллари материаллар қаршилиги ва қурилиш механикаси курсида ўрганилади.

4.8- §. Тақсимланган кучлар

Техникада турли иншоотларнинг мувозанатини аниқлашда уларнинг айрим нуқталарига қўйилган кучлар билан бирга ҳажм, сирт ёки чизиқ кесмалари бўйича маълум қонун асосида тақсимланган кучларни ҳисобга олишга тўғри келади. Бундай кучлар ҳажм, сирт ёки чизиқ бирлигига тўғри келадиган катталиқ — тақсимланган кучларнинг интенсивлиги билан характерланади.

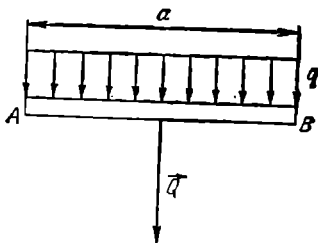
Жисмларга, асосан, параллел ёки бир нуқтада кесишувчи тақсимланган кучлар таъсир этади. Масалан, жисм зарраларининг оғирлик кучи ҳажм бўйича, сувнинг тўғон сиртига босим кучи сирт бўйича тақсимланган параллел кучларни ифодалайди. Бир текисликда жойлашган берилган чизиқ бўйича тақсимланган кучларнинг айрим турлари устида батафсил тўхталамиз. Бундай кучларнинг интенсивлиги N/m да ўлчанади.

1. Тўғри чизиқ кесмаси бўйича текис тақсимланган кучлар (4.8- расм). Бундай кучларнинг интенсивлиги q ўзгармас катталиқ бўлади. AB кесма бўйича текис тақсимланган кучларни AB нинг ўртасига қўйилган.

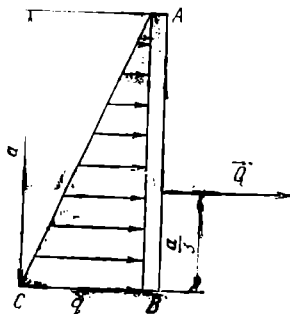
$$Q = a q \quad (4.14)$$

тенг таъсир этувчи куч билан алмаштириш мумкин.

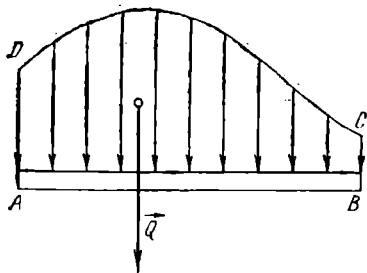
2. Тўғри чизиқ кесмаси бўйича чизиқли қонун бўйича тақсимланган кучлар (4.9- расм). Узунлиги a га тенг AB стерженга чизиқли қонун бўйича тақсимланган кучлар таъсир этсин. Бундай кучларга мисол тариқасида сув босим кучининг тўғон баландлиги бўйича тақсимланишини олиш мумкин. Бундай кучларнинг интенсивлиги q ўзгарувчан бўлиб, нолдан то максимал қиймати q_{max} гача ўзгаради. Қўрилаётган ҳолда тақсимланган кучларнинг тенг таъсир этувчиси ABC учбурчакнинг BC томонидан $a/3$ масофага қўйилган ҳамда



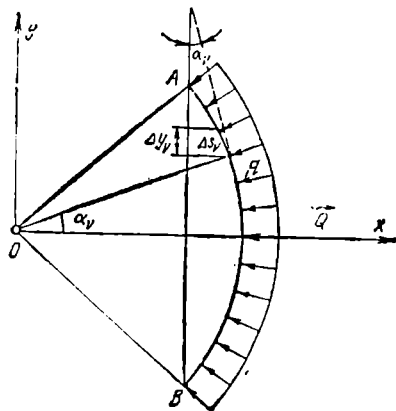
4.8- расм.



4.9- расм.



4.10- расм,



4.11- расм.

$$Q = \frac{1}{2} a q_{max} \quad (4.15)$$

бўлади.

3. Тўғри чизиқ кесмаси бўйича ихтиёрий қонун асосида тақсимланган кучлар. Бундай кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{Q}$ миқдор жиҳатдан мос масштабда ўлчанган ABCD шакл юзасига тенг бўлади ҳамда берилган юзанинг оғирлик марказига қўйилади (юзанинг оғирлик маркази 7.2- § да аниқланади) (4.10-расм). Бу ҳолга метро ва бошқа ерости иншоотларига тупроқнинг таъсир кучи мисол бўла олади.

4. Айлана ёйи бўйича текис тақсимланган радиал кучлар (4.11-расм). Ох ўқни айлана ёйи AB нинг симметрия ўқи бўйлаб йўналтирсак, радиал кучларнинг Oy ўқидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади. Шу сабабли бундай кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{Q}$ Ох ўқ бўйича йўналади ва унинг миқдори мазкур кучларнинг Ох ўқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг бўлади:

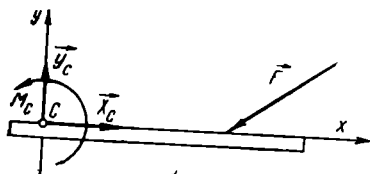
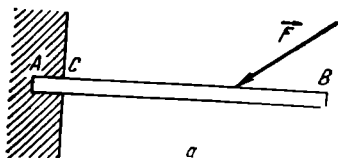
$$Q = |Q_x| = \sum q \Delta s_v \cos \alpha_v,$$

бунда $q \Delta s_v$ — узунлиги Δs_v га тенг ёй бўлакчасига таъсир этувчи куч; α_v — бу куч билан Ох ўқ орасидаги бурчак, 4.11-расмдан кўрамизки, $\Delta s_v \cos \alpha_v = \Delta y_v$ бўлгани учун

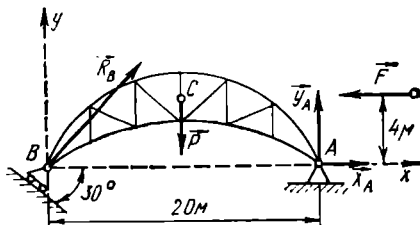
$$Q = \sum q \Delta y_v = q \sum \Delta y_v = q \cdot AB. \quad (4.16)$$

Бунда AB билан AB ёйни тортиб турувчи ватар белгиланган.

Шундай қилиб, айлана ёйи бўйича текис тақсимланган радиал кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{Q}$ — AB ёйни тортиб турувчи AB ватар узунлигининг тақсимланган кучлар интенсивлиги q га кўпайтмасига тенг.



4.12- расм.



4.13- расм.

5. Деворга қисиб маҳкамланган балкага таъсир этувчи тақсимланган кучлар. AB балканинг AC қисми деворга қисиб маҳкамланган бўлсин

(4.12- расм). Бино балконларининг асоси деворга худди шундай бириктирилади.

Агар балканинг AC қисмини боғланишдан бўшатиб, деворнинг унга таъсирини тақсимланган кучлар билан алмаштирсак, бу кучларни C нуқтага келтириш натижасида тақсимланган кучларнинг бош векторига тенг $\vec{R}_C$ кучни ва моменти тақсимланган кучларнинг бош моменти M_C га тенг жуфтни оламиз. M_C реакция жуфтининг моменти дейилади. $\vec{R}_C$ нинг йўналиши аниқ бўлмагани учун уни худди қўзғалмас шарнир реакцияси каби x ва y ўқларнинг мусбат йўналиши бўйича йўналган ташкил этувчилардан иборат деб қараймиз. Шундай қилиб, деворга қисиб маҳкамланган балканинг деворга қисилган қисмидаги реакция кучи, шарнирли боғланишдан фарqli ўлароқ номаълум $\vec{R}_C$ реакция кучидан ташқари моменти номаълум реакция жуфтининг моментига тенг жуфтга эквивалент бўлади. X_C , Y_C ва M_C лар балканинг мувозанат тенгламаларидан аниқланади.

4.1- масала. Арка шаклидаги ферманинг A нуқтаси қўзғалмас шарнирли таянчда ва B нуқтаси горизонт билан 30° бурчак ташкил қилган силлиқ текисликдаги қўзғалувчан шарнирли таянчда туради. Оралиқ $AB = 20$ м. Ферманинг оғирлиги $P = 100$ кН. Шамол босимининг тенг таъсир этувчиси $P = 20$ кН бўлиб, унинг таъсир чизиғи AB га параллел ҳолда ундан 4 м баландликдан ўтади. Таянч реакцияларни топилсин (4.13- расм).

Ечиш. 1. Ферманинг мувозанатини текшираамиз.

2. Координата ўқларини 4.13- расмдагидек танлаб оламиз.

3. Фермага таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз. Фермага C нуқтага қўйилган $P = 100$ кН ва AB га параллел $P = 20$ кН кучлар таъсир этади. B нуқтадаги қўзғалувчан таянч реакция кучи таянч текислигига перпендикуляр йўналади; қўзғалмас шарнирли A таянчнинг реакция кучини $\vec{X}_A$ ва $\vec{Y}_A$ ташкил этувчиларга ажратамиз.

4. Фермага таъсир этувчи $\vec{P}$, $\vec{F}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$ кучлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.13- расмдан фойдаланиб, мувозанат тенгламалари (4.9) ни тузамиз:

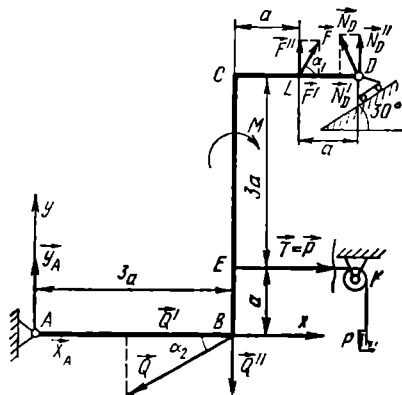
$$\begin{aligned}\sum X_v &= 0; R_B \cos 60^\circ + X_A - F = 0, \\ \sum Y_v &= 0; R_B \cos 30^\circ - P + Y_A = 0, \\ \sum M_B(\vec{F}_v) &= 0; -P \cdot 10 + Y_A \cdot 20 + F \cdot 4 = 0.\end{aligned}$$

Бу тенгламалардан R_B , X_A ва Y_A номаълумларни аниқлаймиз:

$$Y_A = \frac{P \cdot 10 - F \cdot 4}{20} = 46 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{P - Y_A}{\cos 30^\circ} = 62,36 \text{ кН},$$

$$X_A = F - R_B \cos 60^\circ = -11,18 \text{ кН}.$$



4.14- расм.

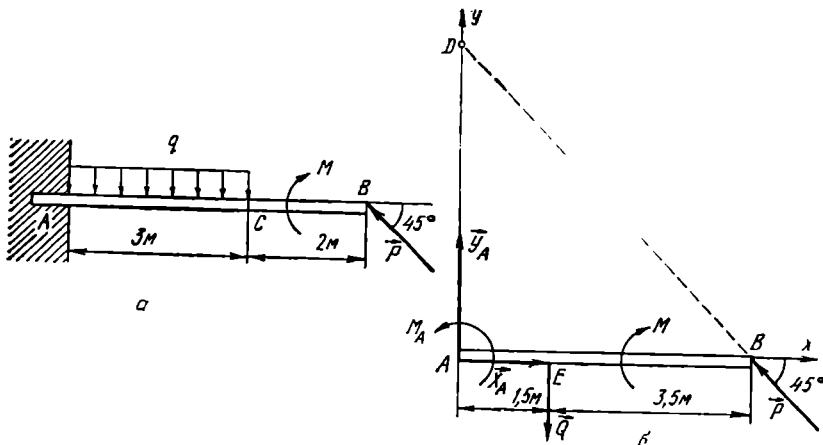
4.2- масала. Бир-бирига бикир маҳкамланган стерженлардан ташкил топган $ABCD$ рама A нуқтада қўзғалмас шарнирли таянчга бириктирилган, B нуқтада эса горизонт билан 30° бурчак ташкил этувчи силлиқ текисликдаги қўзғалувчан таянчда туради. E нуқтага K блокдан ўтган ва $P = 25$ кН юк осилган трос боғланган. Рамага моменти $M = 60$ кНм бўлган жуфт куч, L нуқтада горизонт билан $\alpha_1 = 60^\circ$ бурчак ташкил этувчи $P = 10$ кН ва E нуқтада горизонтга $\alpha_2 = 30^\circ$ бурчак остида $Q = 30$ кН кучлар таъсир этади. K блокдаги ишқаланиш кучини эътиборга олмай, мазкур кучлар таъсирида A ва E таянчларда ҳосил бўладиган реакция кучлари аниқлансин. Ўлчамлар 4.14- расмда кўрсатилган бўлиб, $a = 0,5$ м.

Ечиш. 1. $ABCD$ раманинг мувозанатини текшираемиз.

2. Координата ўқларини 4.14- расмдагидек йўналтираемиз.

3. $ABCD$ рамага моменти $M = 60$ кНм жуфт куч, L нуқтада $\alpha_1 = 60^\circ$ бурчак остида $F = 10$ кН, B нуқтада $\alpha_2 = 30^\circ$ бурчак остида $Q = 30$ кН ва E нуқтада троснинг таранглик кучи $\vec{T}$ (миқдори жиҳатидан $T = P$) таъсир этади. A шарнирнинг реакция кучини $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ ташкил этувчилардан иборат деб қараймиз. Текислик силлиқ бўлгани учун D таянчдаги реакция кучи $\vec{N}_D$ мазкур текисликка перпендикуляр йўналади.

4. $ABCD$ рамага таъсир этувчи моменти M га тенг жуфт ва $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Q}$, $\vec{T}$, $\vec{F}$, $\vec{N}_D$ кучлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.14- расмдан фойдаланиб, (4.8) мувозанат тенгламаларини тузамиз. Бунда $\vec{F}$, $\vec{Q}$, $\vec{N}_D$ кучларнинг A нуқтага нисбатан моментларини ҳисоблаш учун Вариньон теоремасидан фойдаланамиз, яъни $\vec{F}$, $\vec{Q}$ ва $\vec{N}_D$ кучларни $\vec{F}'$, $\vec{F}''$, $\vec{Q}'$, $\vec{Q}''$, $\vec{N}_D'$, $\vec{N}_D''$ ($F' = F \cos 60^\circ$, $F'' = F \sin 60^\circ$, $Q' = Q \cos 30^\circ$, $Q'' = Q \sin 30^\circ$, $N_D' = N_D \cos 60^\circ$, $N_D'' = N_D \sin 60^\circ$ ташкил этувчиларга ажратиб, $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}') + M_A(\vec{F}'')$, $M_A(\vec{Q}) = M_A(\vec{Q}') + M_A(\vec{Q}'')$, $M_A(\vec{N}_D) = M_A(\vec{N}_D') + M_A(\vec{N}_D'')$



4.15- расм.

оқявлигини назарда тутамиз. У ҳолда

$$\sum X_v = 0; X_A - Q \cos 30^\circ + T + F \cos 60^\circ - N_D \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; Y_A - Q \sin 30^\circ + F \sin 60^\circ + N_D \sin 60^\circ = 0,$$

$$\sum M_A (\vec{F}_v) = 0; -3a Q \sin 30^\circ - aT - M - 4a F \cos 60^\circ + 4a F \sin 60^\circ + 5a N_D \sin 60^\circ + 4a N_D \cos 60^\circ = 0.$$

Бу тенгламаларга берилган катталикларни қўйиб, таянчлардаги реакция кучларини аниқлаймиз:

$$N_D = 27,7 \text{ кН}; X_A = 9,83 \text{ кН}; Y_A = -17,648 \text{ кН}.$$

Y_A нинг манфий қийматга эга бўлиши, унинг ҳақиқатда вертикал пастга йўналишини ифодалайди.

4.3- масала. АВ балка А нуқтада деворга қисиб маҳкамланган (4.15- расм, а). Агар $P = 4 \text{ кН}$, $M = 2 \text{ кНм}$, $q = 1,5 \text{ кН/м}$ бўлса, А таянчдаги реакция кучлари аниқлансин.

Ечиш. Б и р и н ч и у с у л. 1. АВ балканинг мувозанатини текшираимиз. Балка А нуқтада деворга қисиб маҳкамланган.

2. Координата ўқларини 4.15- расм, б дагидек танлаб оламиз.

3. АВ балкага таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз. Балкага В нуқтага қўйилган $P = 4 \text{ кН}$ куч, моменти $M = 2 \text{ кНм}$ жуфт куч таъсир этади. АС ораликдаги текис тақсимланган кучларни АС нинг ўртасидаги Е нуқтага қўйилган $Q = q \cdot AC = 4,5 \text{ кН}$ вертикал пастга йўналган куч билан алмаштираимиз. А нуқтадаги боғланиш шу нуқта кўчишини чеклаши билан бирга балканинг вертикал текисликда мазкур нуқта атрофида айланишига ҳам тўсқинлик қилади. Шу сабабли балка қисилган жойдаги боғланишнинг $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ реак ия кучлари ва моменти M_A га тенг реакция жуфт моменти билан алмаштираимиз (4.15- расм, б).

4. АВ балкага таъсир этаётган $\vec{P}$, $\vec{Q}$ кучлар, $\vec{X}_A$ ҳамда $\vec{Y}_A$ реакция кучлари ва M , M_A моменти жуфтлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.15- расм, б дан фойдаланиб, мувозанат тенгламалари (4.9) ни тузамиз:

$$\sum X_v = 0; X_A - P \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_v = 0; Y_A - Q + P \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum M_A (\vec{F}_v) = 0; M_A - AE \cdot Q - M + P \cdot AB \cos 45^\circ = 0.$$

Бу тенгламалардан X_A , Y_A , M_A номаълумларни аниқлаймиз:

$$M_A = -5,39 \text{ кНм}, X_A = 2,828 \text{ кН}, Y_A = 1,672 \text{ кН}.$$

M_A нинг манфий қийматга эга бўлиши, ҳақиқатда реакция моменти соат стрелкаси бўйича йўналганлигини кўрсатади.

Иккинчи усул. Бу усулда ҳам масаланинг боши худди биринчи усулдагидек ечилади. $\vec{P}$ ва $\vec{Y}_A$ кучларнинг таъсир чизиқлари кесишган нуқтани D билан белгилаймиз (4.15-рasm, б) ҳамда $CA = AB = 5 \text{ м}$ эканлигини назарда тутиб, AB балка учун (4.10) мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; M_A - AE \cdot Q - M + P \cdot AB \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum M_B(\vec{F}_v) = 0; -M + EB \cdot Q - AB \cdot Y_A + M_A = 0;$$

$$\sum M_D(\vec{F}_v) = 0; M_A + AD \cdot X_A - AE \cdot Q - M = 0.$$

Бу тенгламалардан M_A , X_A , Y_A номаълумларни аниқлаймиз:

$$M_A = -5,39 \text{ кНм}, X_A = 2,828 \text{ кН}, Y_A = 1,672 \text{ кН}.$$

4.9-§. Бир текисликда ётувчи бир неча жисмдан ташкил топган системанинг мувозанати

Бир текисликда ётувчи, бир-бири билан боғланган бир неча жисмдан ташкил топган системанинг мувозанатини аниқлаш учун системага таъсир этувчи кучларни икки гурпуага: ташқи ва ички кучларга ажратамиз. Система таркибига кирмайдиган жисмларнинг берилган системага таъсир кучлари (масалан, оғирлик кучи, ташқи боғланиш реакция кучлари) *ташқи кучлар* дейилади. Система таркибига кирувчи жисмларнинг бир-бирига ўзаро таъсир кучларига *ички кучлар* дейилади. Ньютоннинг учинчи қонунига кўра ички кучлар жуфт-жуфт равишда миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади.

Бир текисликда ётувчи n та жисмдан ташкил топган система мувозанатда бўлса, бундай система учун текисликдаги кучлар системасининг учта мувозанат тенгламалари ўринли бўлади ва бу тенгламаларда ички кучлар қатнашмайди. Лекин барча номаълумларни аниқлаш учун бу шартлар етарли бўлмайди. Бундай масалани ечиш учун $n - 1$ та жисмни алоҳида ажратиб олиб, уларнинг ҳар бири учун учтадан мувозанат тенгламаларини тузиш мумкин. Натижада $3 + 3(n - 1) = 3n$ та мувозанат тенгламаларини оламиз. Системадан ажратиб олинган бирор жисмнинг мувозанати текшириляётганда бу жисмга системани ташкил этувчи бошқа жисмларнинг таъсири кучлар билан алмаштирилади. Бу кучлар система учун ички кучлар ҳисобланади, аммо ажратиб олинган жисм учун ташқи кучлар қаторига киради.

Бундай масалаларни яна қуйидаги усулда ечиш мумкин. n та жисмдан ташкил топган системанинг мувозанатини аниқлаш мақсадида ҳар бир жисмни худди юқоридагидек ажратиб оламиз ва улар учун учтадан мувозанат тенгламаларини тузамиз. Натижада яна $3n$ та мувозанат тенгламаларини оламиз.

Системани ташкил этувчи жисмлар ўзаро эркин таянч, шарнир ёки эгилувчан ва чўзилмайдиган ип (ваззсиэ стержень) воситасида боғланган бўлиши мумкин.

4.4- масала. Тўғри бурчак шаклида эгилган АЕС балка ва СВ доиравий арка С нуқтада шарнир воситасида бириктирилган (4.16- расм). АЕС балка А нуқтада ерга қоқиб маҳкамланган. В нуқтада горизонтга шарнирли бириктирилган вертикал стерженга СВ арка шарнир воситасида маҳкамланган. СВ аркага таъсир этувчи жуфт стрелка билан кўрсатилган. Қўйилган кучлар ва ўлчовлар 4.16- расмда белгиланган. Берилган кучлар таъсирида А ва В таянчда ҳосил бўладиган реакция кучларни ҳамда жисмларни туташтирувчи С шарнирдаги реакция кучи аниқлашсин.

Ечиш. 1. АЕС балка ва СВ аркадан ташкил топган системанинг мувозанатини текшираимиз.

2. Координата ўқларини 4.17- расмдагидек йўналтираимиз.

3. Системага таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз (4.17- расм). АЕС балканинг ЕС бўлагига горизонт билан $\alpha = 60^\circ$ бурчак ташкил этувчи $F = 150$ кН куч қўйилган. Балканинг АЕ бўлагига таъсир этувчи чизикли қонун бўйича тақсимланган кучларни А нуқтадан $AK = \frac{1}{3} \times$

$\times AE = \frac{4}{3}$ м масофада К нуқтага қўйилган, (4.15) га асосан топиладиган

$$Q_1 = \frac{1}{2} AE \cdot q_{max} = 80 \text{ кН}$$

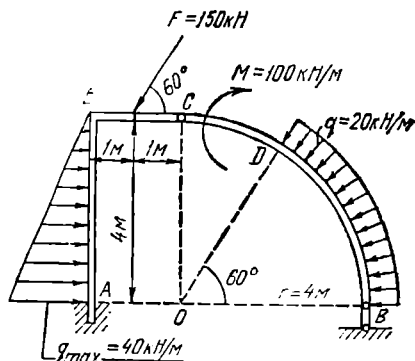
горизонтал ўнгга йўналган куч билан алмаштираимиз. СВ ёй бўйича текис тақсимланган радиал кучларни унинг ўртасига қўйилган ва (4.16) га асосан DB ватарининг узунлиги билан тақсимланган кучларнинг интенсивлиги кўпайтмасига тенг

$$Q_2 = |DB| \cdot q = 80 \text{ кН}$$

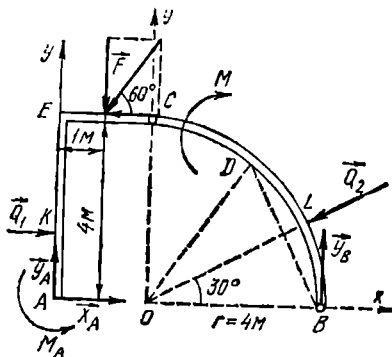
куч билан алмаштираимиз. $\vec{Q}_2$ куч радиус бўйлаб О марказга йўналади.

В нуқтадаги реакция кучи $\vec{Y}_B$ ни стержень бўйлаб вертикал юқорига йўналтираимиз. А нуқтадаги боғланиш шу нуқтанинг кўчишини чеклаши билан бирга стерженнинг вертикал текисликда мазкур нуқта атрофида айланишига ҳам тўсқинлик қилади. Шу сабабли стержень ерга қоқилган жойдаги боғланишни $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ реакция кучлари ва моменти M_A га тенг реакция жуфт моменти билан алмаштираимиз.

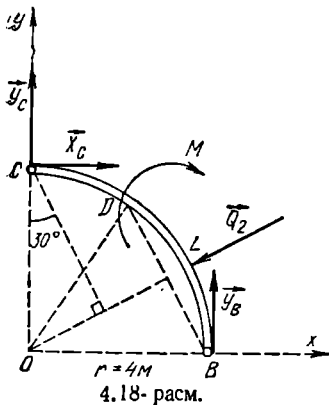
4. Системага таъсир этувчи $\vec{F}$, $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$, $\vec{Y}_B$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ кучлар ва M_A , M моментли жуфтлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.17- расмдан



4.16- расм.



4.17- расм.



фойдаланиб, укта мувозанат тенгламаларини тузамиз. Бунда $\vec{F}$ кучнинг A нуқтага нисбатан моментини аниқлаш учун унинг x ва y ўқларига параллел ташкил этувчиларидан A нуқтага нисбатан момент олиш мумкин. Худди шунингдек, $\vec{Q}_2$ ни таъсир чизиги бўйлаб O нуқтага кўчириб, унинг x ва y ўқларидаги ташкил этувчиларидан A нуқтага нисбатан момент олиш мумкин. Натижада (4.9) ни қуйидагича ёзиш мумкин;

$$\sum X_v = 0; X_A + Q_1 - F \cos 60^\circ - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_v = 0; Y_A - F \cos 30^\circ - Q_2 \cos 60^\circ + Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; M_A - Q_1 \cdot \frac{4}{3} + F(-\cos 30^\circ + 4 \cos 60^\circ) - M - Q_2 \cdot 2 \cos 60^\circ + Y_B \cdot 6 = 0. \quad (3)$$

Бу тенгламаларда тўртта номаълум реакция кучлари: X_A , Y_A , M_A , Y_B лар қатнашади. Шу сабабли системани алоҳида жисмларга ажратиб бирортаси учун мувозанат тенгламаларини тузиш мумкин. Масалан, CB аркани алоҳида ажратиб, унга AEC балканинг таъсирини $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ кучлар билан алмаштирамиз ва 4.18-расмдан фойдаланиб укта мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum X_v = 0; X_C - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_v = 0; Y_C - Q_2 \cos 60^\circ + Y_B = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_v) = 0; -M - Q_2 \cdot r \cdot \cos 30^\circ + Y_B \cdot r = 0. \quad (6)$$

(1), (4) ва (6) тенгламалардан X_A , X_C ва Y_B ларни аниқлаймиз

$$X_A = -Q_1 + F \cos 60^\circ + Q_2 \cos 30^\circ = 64,28 \text{ кН},$$

$$X_C = Q_2 \cos 30^\circ = 69,28 \text{ кН},$$

$$Y_B = \frac{M + Q_2 \cdot r \cos 30^\circ}{r} = 94,28 \text{ кН}.$$

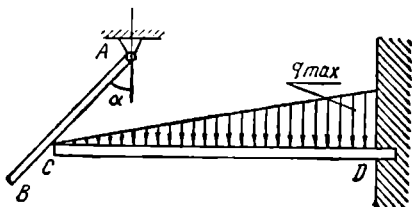
Y_B нинг бу қийматларини (5), (2) ва (3) га қўйиб, Y_C , Y_A ва M_A ларни аниқлаймиз:

$$Y_C = Q_2 \cos 60^\circ - Y_B = -44,28 \text{ кН},$$

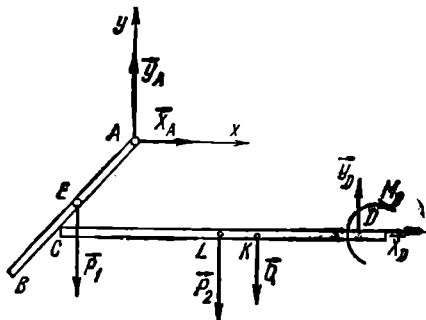
$$Y_A = F \cos 30^\circ + Q_2 \cos 60^\circ - Y_B = 75,62 \text{ кН},$$

$$M_A = Q_1 \cdot \frac{4}{3} + F(-\cos 30^\circ + 4 \cos 60^\circ) + M + Q_2 \cdot 2 \cos 60^\circ - Y_B \cdot 6 = -147,61 \text{ кН}.$$

4.5- масала. Оғирлиги $P_1 = 180 \text{ Н}$ бўлган бир жинсли AB стержень A шарнир билан шипга маҳкамланган бўлиб, у оғирлиги $P_2 = 108 \text{ Н}$ бўлган бир жинсли CD стерженьнинг C учига эркин тиралиб туради (4.19- расм). AB стержень вертикал билан $\alpha = 45^\circ$ бурчак ташкил этади ҳамда $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$. Уzunлиги $1,5 \text{ м}$ га тенг CD стержень D учи билан деворга қисиб маҳкамлаган. CD стерженьга чизиқли учбурчак қонуни бўйича тақсимланган кучлар қўйилган ва бу кучлар-



4.19- расм.



4.20- расм.

нинг максимал интенсивлиги $q_{max} = 120 \text{ Н/м}$. A ва D нуқтанинг реакция кучлари ҳамда стерженларнинг бир-бирига кўрсатадиган босим кучи аниқлансин.

Ечиш. 1. AB ва CD стержендан ташкил топган системанинг мувозанатини текшираимиз.

2. Координата ўқларини 4.20- расмдагидек йўналтираимиз.

3. Системага таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз. AB ва CD стерженларга уларнинг ўртасига қўйилган $P_1 = 180 \text{ Н}$ ва $P_2 = 108 \text{ Н}$ оғирлик кучлари таъсир этади. CD стерженга таъсир этувчи чизиқли қонун бўйича тақсимланган кучларни D нуқтадан $DK = \frac{CD}{3}$ масофада қўйилган, (4.15) га асосан топиладиган

$$Q = \frac{CD \cdot q_{max}}{2} = 90 \text{ Н}$$

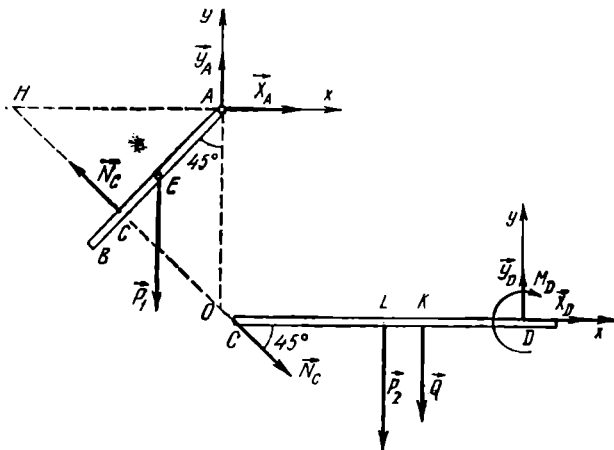
вертикал пастга йўналган куч билан алмаштираимиз.

A шарнирнинг реакция кучини $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ ташкил этувчилардан иборат деб қараймиз. Стержень қисилган D нуқтадаги боғланишни $\vec{X}_D$, $\vec{Y}_D$ реакция кучлари ва momenti M_D га тенг жуфт билан алмаштираимиз.

Шундай қилиб, системага бир текисликда жойлашган $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{Q}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{X}_D$, $\vec{Y}_D$ кучлар ва M_D моментли жуфт таъсир этади. Бундай система учун учта мувозанат тенгламаларини тузсак, унда бешта номаълум реакция кучлари қатнашади. Шу сабабли системани иккита жисмга ажратиб, уларнинг ҳар бири учун алоҳида мувозанат тенгламаларини тузиш қулай бўлади (4.21- расм). AB стержень C нуқтада эркин таянгани учун CD стерженнинг унга таъсирини C нуқтада AB га перпендикуляр юқорига йўналган $\vec{N}_C$ реакция кучи билан алмаштираимиз. Худди шунингдек, AB стерженнинг CD стерженга таъсирини C нуқтада AB га перпендикуляр равишда (ёки CD га 45° бурчак остида) пастга йўналган $\vec{N}_C$ реакция кучи билан алмаштираимиз. $\vec{N}_C$ куч система учун ички кучни, AB ва CD стержень учун ташқи кучни ифодалайди.

4. AB стерженга таъсир этувчи $\vec{P}_1$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{N}_C$ кучлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. $\vec{N}_C$ ва $\vec{X}_A$ нинг кесишган нуқтасини H ; $\vec{N}_C$ ва $\vec{Y}_A$ нинг кесишган нуқтасини O билан белгилаймиз ва 4.21- расмдан фойдаланиб (4.11) мувозанат тенгламаларини тузамиз

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad P_1 \cdot AB \cos 45^\circ - N_C \cdot AO = 0, \quad (1)$$



4.21- расм.

$$\sum M_H (\vec{F}_v) = 0; -P_1 (HC + AC - AE) \cos 45^\circ + Y_A \cdot HA = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_O (\vec{F}_v) = 0; P_1 \cdot AE \cos 45^\circ - X_A \cdot OA = 0. \quad (3)$$

Бу тенгламаларда $AE = \frac{AB}{2}$, $HC = AC = \frac{2}{3} AB$, $HA = OA = \sqrt{2} AC = \frac{2\sqrt{2}}{3} AB$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ эканлигини назарда тутиб, уларни AB га қисқартирамиз ва N_C , Y_A , X_A номаълумларни аниқлаймиз.

$$N_C = 95,46 \text{ Н}, Y_A = 112,5 \text{ Н}, X_A = 67,5 \text{ Н}.$$

(4.11) тенгламаларни AB стержень учун қўллашнинг афзаллиги шундан иборатки, AB стержень учун тузилган (1), (2) ва (3) тенгламаларда фақат бнттадан номаълумлар қатнашади.

CD стерженга таъсир этувчи $\vec{P}_2$, $\vec{Q}$, $\vec{N}_C$, $\vec{X}_D$, $\vec{Y}_D$ кучлар ва M_D моментли жуфт, текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.21- расмдан фойдаланиб, CD стерженнинг мувозанат тенгламаларини (4.9) кўрипишида ёзамиз.

$$\sum X_v = 0; X_D - N_C \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; Y_D - Q - P_2 - N_C \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum M_D (\vec{F}_v) = 0; -M_D + Q \cdot DK + P_2 \cdot DL + N_C \cdot CD \cos 45^\circ = 0.$$

Бу тенгламаларда $DK = \frac{1}{3} CD$, $DL = \frac{1}{2} CD$ эканлигини назарда тутиб, номаълумларни аниқлаймиз:

$$X_D = N_C \cos 45^\circ = 67,5 \text{ Н},$$

$$Y_D = Q + P_2 + N_C \cos 45^\circ = 265,5 \text{ Н},$$

$$M_D = \left(\frac{Q}{3} + \frac{P_2}{2} + N_C \cos 45^\circ \right) \cdot CD = 227,25 \text{ Нм}.$$

AB ва CD стерженларнинг бир-бирига кўрсатадиган босим кучи $\vec{R}_C$ миқдор жиҳатидан шу нуқтада ҳосил бўладиган системанинг ички реакция кучи $\vec{N}_C$ га тенг, яъни

$$R_C = N_C = 95,46 \text{ Н},$$

йўналиши эса унга қарама-қаршидир.

4. 10-§. Ишқаланиш. Сирпанишдаги ишқаланиш

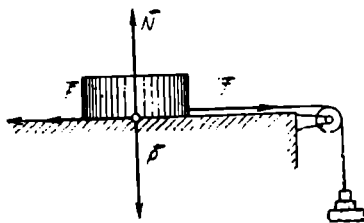
1. 3-§ да боғланишдаги жисмлар абсолют қаттиқ жисмдан иборат ва уларнинг бир-бирига тегиб турган сирти идеал силлиқ ҳамда боғланиш реакция кучлари фақат нормал ташкил этувчидан иборат деб фараз қилинган эди. Лекин ҳар қандай жисм оз бўлса-да, деформацияланади ва уларнинг сирти абсолют силлиқ бўлмайди. Шу сабабли реал боғланишларнинг реакция кучи жисмлар тегиб турган юзада нормал реакция кучига перпендикуляр йўналган яна битта ташкил этувчига эга бўлади. Реакция кучининг бу ташкил этувчисига *ишқаланиш кучи* дейилади.

Техникада ишқаланиш кучини ҳисобга олиш муҳим аҳамиятга эга. Масалан, трамвай ёки автомобилнинг етакчи ғилдираги рельсга ёки йўлга ишқалангани туфайли улар ҳаракатланади. Тасмали ва фрикцион узатмаларда, тормозларда ишқаланишдан кенг фойдаланилади.

Бир жисмнинг иккинчи жисм устида сирпаниши натижасида ҳосил бўладиган ишқаланишга *сирпанишдаги ишқаланиш* дейилади.

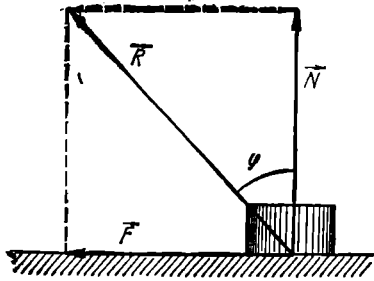
Оғирлиги P га тенг жисм горизонтал сиртга қўйилган бўлсин (4.22-расм). Жисмни блок орқали ўтказилган ипга боғлаймиз. Агар сирт идеал силлиқ бўлса, жисм оғирлик кучи $\vec{P}$ ва сиртнинг нормал реакция кучи $\vec{N}$ таъсирида мувозанатда бўлади. Бу кучлар вертикал кучлардан иборат бўлгани учун ипнинг иккинчи учига жуда кичик тош қўйсак, жисм ҳаракатланиши керак. Лекин ипнинг иккинчи учига маълум миқдорда тош қўймагунча жисм ҳаракатланмайди. Чунки горизонтал сирт билан жисмнинг юзаси абсолют силлиқ бўлмагани туфайли ипнинг тортилиш кучи $\vec{T}$ га миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган $\vec{F}$ ишқаланиш кучи ҳосил бўлади. $\vec{F}$ куч *сирпанишдаги ишқаланиш кучи* дейилади.

Агар ипнинг иккинчи учига тош қўя борсак, унга мос равишда $\vec{T}$ куч, сирпанишдаги ишқаланиш кучи $\vec{F}$ ортади ва жисм ҳаракатланиши олдида ишқаланиш кучи $F = F_{max}$ максимал қийматга эришади. Шундай қилиб, сирпанишдаги ишқаланиш кучи F нисбий мувозанат ҳолатида нолдан то максимал миқдоргача ўзгаради:



4.22- расм.

$$0 \leq F \leq F_{\max}. \quad (4.17)$$



4.23- расм.

Жисмнинг тинч ҳолатида ҳосил бўладиган ишқаланиш кучига *статик ишқаланиш кучи* дейилади. Сирпанишдаги ишқаланиш кучи жисмларнинг бир-бирига тегиб турган юзаси орқали ўтувчи уринма текисликда ётади. Шундай қилиб, гадир-будир сиртнинг тўлиқ реакция кучи миқдор ва йўналиш жиҳатдан нормал реакция кучи ва ишқаланиш кучларига қурилган тўғри тўртбурчакнинг диагонали билан ифодаланади (4.23- расм):

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{N}$$

Тажрибаларнинг кўрсатишича, сирпанишдаги ишқаланиш қуйидаги Амонтон — Кулон қонуни билан ифодаланади.

Тинч ҳолатдаги максимал ишқаланиш кучи жисмнинг таянч текислигига кўрсатадиган нормал босимига пропорционалдир.

$$F_{\max} = f N. \quad (4.18)$$

Бундаги f сирпанишдаги ишқаланиш коэффициентини ифодалайди ҳамда ишқаланувчи жисмларнинг материалига ва ҳолатига (намлик, температура, жисмлар сиртларининг ишланишига) боғлиқ бўлади.

Бир жисм иккинчиси устида ҳаракатланганда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучи ҳам нормал босимга пропорционал бўлади: $F = f' N$. Бунда f' — жисм *ҳаракатлангандаги ишқаланиш коэффициенти* бўлиб, у жисмнинг тинч ҳолатидаги ишқаланиш коэффициенти f дан кичик бўлади: $f' < f$.

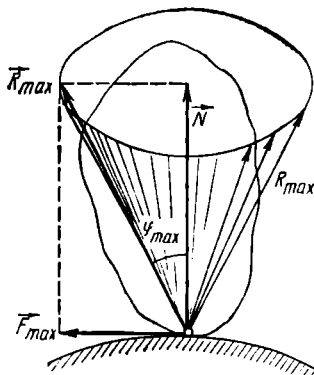
Агар бирор сиртга таяниб турган жисм сирпаниш олдида (мувозанат чегарасида) бўлса, ишқаланиш кучи максимал қийматга эришади (4.24- расм) ҳамда

$$\vec{R}_{\max} = \vec{N} + \vec{F}_{\max}. \quad (4.19)$$

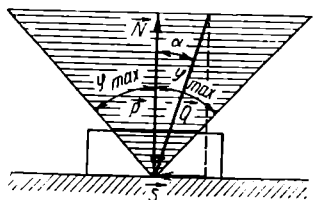
Максимал тўлиқ реакция кучи $\vec{R}_{\max}$ нинг нормал реакция кучи $\vec{N}$ билан ташкил қилган бурчаги $\varphi_{\max}$ *ишқаланиш бурчаги* дейилади. 4.24- расм ва (4.18) га асосан

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = \frac{F_{\max}}{N} = f. \quad (4.20)$$

Жисмни силжитувчи актив кучлар турли йўналишда таъсир этиши мумкин. Турли йўналишдаги силжитувчи кучларга мос бўлган барча $\vec{R}_{\max}$ тўлиқ реакция кучларининг геометрик ўрни конус сиртидан иборат бўлади. Бу конус *ишқаланиш конуси* деб аталади.



4.24- расм.



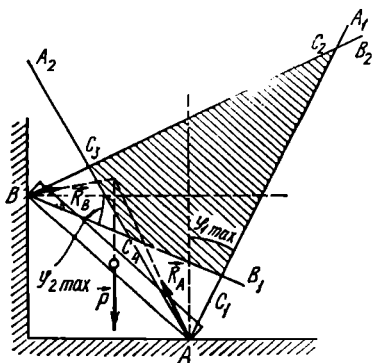
4.25- расм.

Горизонтал текисликда тинч ҳолда ётувчи жисмга текисликка ўтказилган нормал билан α бурчак ташкил этувчи $\vec{Q}$ куч таъсир этсин (4.25- расм). $\vec{Q}$ кучни нормал реакция кучи билан мувозанатлашувчи $N = P = Q \cos \alpha$ ва жисмни силжитишга интилувчи $S = Q \sin \alpha$ иккита ташкил этувчига ажратамиз. Жисмни силжитиш учун $\vec{S}$ кучнинг модули, максимал ишқаланиш кучи $F_{max} = fN = fQ \cos \alpha$ дан катта бўлиши керак: $Q \sin \alpha \geq fQ \cos \alpha$ ёки $f = \tan \varphi \leq \tan \alpha$. Бундан

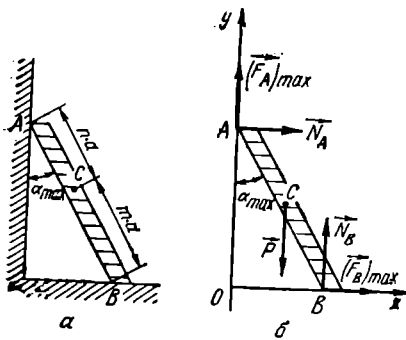
$$\alpha \geq \varphi_{max} \quad (4.21)$$

натижани оламиз. (4.21) тенгсизликдан кўрамизки, агар $\vec{Q}$ куч текисликка ўтказилган нормалга φ_{max} бурчакдан кичик бурчак остида таъсир этса, у ҳолда бу куч ҳар қанча катта бўлишига қарамай, жисм тинч ҳолатда қолади. Вертикалга φ_{max} бурчак остида ўтказилган тўғри чизиқлар билан чегараланган (4.25- расмда штрихланган) соҳага ишқаланиш соҳаси дейилади. Ишқаланиш соҳаси қуйидаги хусусиятга эга: таъсир чизиги ишқаланиш соҳаси ичида ётувчи $\vec{Q}$ куч ҳар қанча катта бўлса ҳам текисликка таяниб турган жисмни ҳаракатга келтири олмайди. Агар жисм турли йўналишда ҳаракатлана олса, ишқаланиш соҳаси учидagi бурчаги $2\varphi_{max}$ га тенг ишқаланиш конуси билан чегараланади. Бу ҳолда ишқаланиш конуси учидан ётувчи ва бу конус ичида ётувчи ҳар қандай куч жисмни ҳаракатга келтири олмайди.

Масалан, иккита текисликка таянган ва оғирлиги $\vec{P}$ га тенг AB



4.26- расм.



4.27- расм.

брусга таъсир этувчи кучларнинг мувозанатини қарайлик (4.26-расм). Брус мувозанат ҳолатида бўлганда A ва B нуқталарнинг реакция кучлари $\vec{R}_A$ ва $\vec{R}_B$ лар мос ишқаланиш конуслари ичида ётади. A ва B нуқталарда текисликларнинг нормалларига Φ_{1max} ва Φ_{2max} бурчаклар остида AA_1 , AA_2 ҳамда BB_1 , BB_2 чизикларни ўтказиб, ишқаланиш конусларининг чегараларини оламиз. Бу чизиклар билан чегараланган $C_1C_2C_3C_4$ тўртбурчак ишқаланиш соҳасини ифодалайди.

4.6- масала. Пастки учи билан горизонтал полга тиралган AB нарвон пер-тикал деворга қўйилган (4.27- расм, a). Нарвоннинг вертикал девор билан ишқаланиш коэффициенти f_1 , пол билан ишқаланиш коэффициенти f_2 . Нарвон билан унинг устидаги кишининг оғирлиги P га тенг бўлиб, нарвон узунлигини $m:n$ нисбатда бўлувчи C нуқтага қўйилган. Мувозанат ҳолатида нарвон билан девор орасидаги энг катта α_{max} бурчак ва шу ҳолат учун девордаги $\vec{N}_A$ ва полдаги $\vec{N}_B$ нормал реакциялар топилсин.

Ечиш. 1. Нарвоннинг мувозанатини текшираамиз.

2. Координаталар системасини 4. 27- расм, b дагидек танлаб оламиз.

3. Нарвон ҳаракатланиши олдида унга нарвон билан унинг устидаги кишининг оғирлик кучи $\vec{P}$ вертикал деворда ҳосил бўладиган $(\vec{F}_A)_{max}$ ишқаланиш кучи ва $\vec{N}_A$ нормал реакция кучи ҳамда горизонтал полнинг $(\vec{F}_B)_{max}$ ишқаланиш кучи билан $\vec{N}_B$ нормал реакция кучи таъсир этади (4.27- расм, b). Кулон қонунига кўра

$$(F_A)_{max} \leq f_1 N_A, (F_B)_{max} \leq f_2 N_B. \quad (1)$$

4. Нарвонга таъсир этувчи кучлар $\vec{P}$, $(\vec{F}_A)_{max}$, $\vec{N}_A$, $(\vec{F}_B)_{max}$, $\vec{N}_B$ текисликдаги ихтиёрий кучлар системасини ташкил этади. 4.27- расмдан фойдаланиб, текисликдаги кучлар системасининг мувозанат шартлари (4.9) ни тузамиз:

$$\begin{aligned} \sum X_v &= 0, \quad N_A - (F_B)_{max} = 0, \\ \sum Y_v &= 0, \quad (F_A)_{max} - P + N_B = 0, \\ \sum M_O(F_v) &= 0, \quad -N_A \cdot AB \cos \alpha_{max} - P \cdot AC \sin \alpha_{max} + N_B \cdot AB \sin \alpha_{max} = 0. \end{aligned}$$

Бунда нарвон ҳаракатланиши олдида (1) да тенглик ишораси олиншини ва $AC = na$, $CB = ma$, $AB = (m+n)a$ эканлигини эътиборга олсам

$$\begin{aligned} N_A - f_2 N_B &= 0, \\ f_1 N_A - P + N_B &= 0, \\ -N_A (m+n)a \cos \alpha_{max} - P \cdot na \sin \alpha_{max} + N_B (m+n)a \sin \alpha_{max} &= 0. \end{aligned}$$

Бундан

$$N_A = f_2 N_B, \quad (2)$$

$$N_B = P - f_1 N_A, \quad (3)$$

$$[N_B(m+n) - Pn] \sin \alpha_{\max} - N_A(m+n) \cos \alpha_{\max} = 0, \quad (4)$$

(2) ни (3) га қўйсак,

$$N_B = P - f_1 f_2 N_B.$$

Бундан

$$N_B = \frac{P}{1 + f_1 f_2}. \quad (5)$$

(5) ни (2) га қўйиб N_A ни аниқлаймиз:

$$N_A = \frac{f_2 P}{1 + f_1 f_2}. \quad (6)$$

(4) ни $\cos \alpha_{\max}$ га бўлсак

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{N_A(m+n)}{N_B(m+n) - Pn}$$

ёки (5) ва (6) ни эътиборга олсак

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{(m+n) f_2}{m - n f_1 f_2}.$$

$0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ бўлганда нарвон мувозанатда бўлади.

4.7- масала. Оғирлиги $Q = 100$ Н бўлган B юк гадир-будир CD горизонтал йўналтирувчи стержень бўйлаб сирпаниши мумкин. Юкка силлиқ A тирқиш орқали ўтган ва учига $P = 50$ Н юк осилган трос боғланган (4.28- расм). Юк билан йўналтирувчи CD стержень орасидаги ишқаланиш коэффициент $f = 0,1$. Агар CD йўналтирувчи билан тирқиш орасидаги масофа $OA = 15$ см бўлса, B юк мувозанат соҳасининг чегараси (мувозанатда қоладиган ҳолатларининг геометрик ўрини) аниқлансин.

Ёчиш. 1. B юк ҳаракатланиши олдидаги мувозанатини текшираимиз.

2. Координаталар системасини 4.28- расмдагидек танлаб оламиз.

3. Юк ҳаракатланиши олдида унга оғирлик кучи $\vec{Q}$, максимал ишқаланиш кучи $\vec{F}_{\max}$, нормал реакция кучи $\vec{N}$ ва троснинг таранглик кучи $\vec{T}$ (миқдор жиҳатидан $T = P$) таъсир этади.

4. Юкка таъсир этувчи $\vec{Q}$, $\vec{F}_{\max}$, $\vec{N}$ ва $\vec{T}$ кучлар бир нуқтада кесишувчи кучлар системасини ташкил этади. 4.28- расмдан фойдаланиб, кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари (2.11) ни тузамиз:

$$\sum X_v = 0; \quad -F_{\max} + T \cos \alpha_{\max} = 0, \quad (1)$$

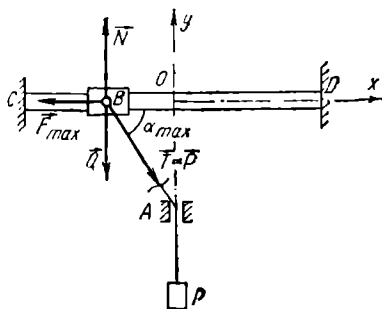
$$\sum Y_v = 0; \quad N - Q - T \sin \alpha_{\max} = 0. \quad (2)$$

Бунда $\alpha_{\max}$ юк ҳаракатланиши олдида X ўқ билан $\vec{T}$ орасидаги бурчакни билдиради.

(2) дан $N = Q + T \sin \alpha_{\max}$ ни аниқлаб, N нинг бу қийматини Кулон қонуни $F_{\max} = f \cdot N$ га қўйсак,

$$F_{\max} = f \cdot Q + f \cdot T \sin \alpha_{\max}. \quad (3)$$

(3) га асосан (1) ни қуйидагича ёзамиз:



4.28- расм.

$$-fQ - fT \sin \alpha_{\max} + T \cos \alpha_{\max} = 0.$$

Берилган катталикларни ўрнига қўйсак ($T = P$),

$$-0,1 \cdot 100 - 0,1 \cdot 50 \sin \alpha_{\max} + 50 \cos \alpha_{\max} = 0$$

ёки

$$-2 - \sin \alpha_{\max} + 10 \cos \alpha_{\max} = 0.$$

Бунда $\cos \alpha_{\max} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{\max}}$ эканлигини назарда тутсам,

$$10 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{\max}} = 2 + \sin \alpha_{\max}.$$

Квадратга ошириб, ихчамласак,

$$101 \sin^2 \alpha_{\max} + 4 \sin \alpha_{\max} - 96 = 0,$$

$$(\sin \alpha_{\max})_{1,2} = \frac{4 \pm 196,977}{202}.$$

Бундан $\sin \alpha_{\max} = 0,9553$ ни аниқлаймиз. Синуснинг иккинчи қиймати манфий бўлгани учун уни эътиборга олмаймиз. Шундай қилиб, В юк мувозанатда бўла-
ши учун $\alpha_{\max} = 84^\circ 12'$ бўлиши керак. 4.28-расмдан изланаётган мувозанат со-
ҳасининг чегарасини аниқлаймиз.

$$|BO| = OA \operatorname{ctg} \alpha_{\max} = 0,15 \cdot 0,3096 = 0,0464 \text{ м.}$$

Бинобарин, В юк мувозанат соҳасининг чегараси $x = \mp 0,0464$ м га тенг бўла-
ди.

4.11-§. Думалашдаги ишқаланиш

Жисмларнинг думалашдаги ишқаланишини абсолют қаттиқ жисм доирасида изоҳлаб бўлмайди. Шу сабабли бу ҳақда қисқа маълумотларнигина келтираемиз.

Оғирлиги P ва радиуси R га тенг цилиндр горизонтал текисликда ётган бўлсин (4.29-расм). Цилиндрга горизонтал $\vec{T}$ куч қўйилган. Цилиндр ва текисликнинг деформацияланиши натижасида ишқаланиш битта нуқтада ҳосил бўлмай, икки жисмнинг бир-бирига тегиб турган эзилган юзасида ҳосил бўлади ва $\vec{N}$ нормал реакция кучи ҳамда $\vec{F}$ ишқаланиш кучи O нуқтадан ўтувчи вертикалдан δ масофада ётувчи C нуқтага қўйилади.

(4.9) дан фойдаланиб, цилиндрнинг мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum X_v = 0; \quad T - F = 0,$$

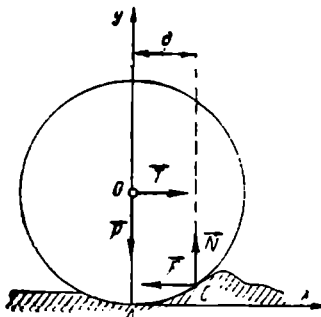
$$\sum Y_v = 0; \quad N - P = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; \quad N \cdot \delta - T \cdot R = 0.$$

Бундан

$$F = T, \quad N = P, \quad N \cdot \delta = T \cdot R \quad (4.22)$$

муносабатларни оламиз. Шундай қилиб, цилиндр думалаш олдида унга



4.29- расм.

моментлари тенг ва айланиш йўналиши қарама-қарши бўлган $(\vec{T}, \vec{F})$ ва $(\vec{P}, \vec{N})$ жуфтлар таъсир этади. Цилиндрнинг думалашига қаршилиқ кўрсатувчи $(\vec{P}, \vec{N})$ жуфтга думалашдаги ишқаланиш жуфти, бу жуфтнинг моментига думалашдаги ишқаланиш momenti дейилади. Тажрибаларнинг кўрсатишича, думалашдаги ишқаланиш моментининг максимал қиймати нормал босимга пропорционал бўлади:

$$M_{\max} = \delta \cdot N,$$

бунда δ — думалашдаги ишқаланиш коэффициентини бўлиб, узунлик бирлигида ўлчанади.

(4.22) нинг учинчисидан

$$T = \frac{\delta}{R} \cdot N. \quad (4.23)$$

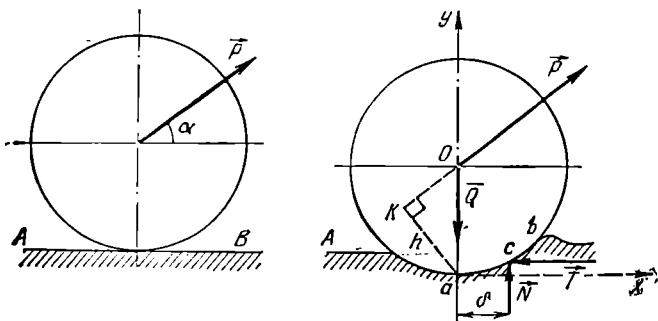
Бу формуладаги $\frac{\delta}{R}$ катталиқ кўпчилик материаллар учун сирпанишдаги ишқаланиш коэффициентини f дан анча кичик бўлади. Шунинг учун бундай жисмларни сирпантиришдан кўра думалатиш учун кам куч сарфланади.

4.8- масала. Оғирлиги $Q = 1085$ кН, диаметри $d = 1$ м бўлган филдиракнинг горизонтал текисликда текис думалаши учун керак бўлган $\vec{P}$ куч, шунингдек текисликнинг реакция кучи аниқлансин; думалашдаги ишқаланиш коэффициентини $\delta = 0,2$ см, $\vec{P}$ кучнинг горизонтал текислик билан ҳосил қилган бурчаги $\alpha = 30^\circ$ (4.30- расм).

Ечиш. 1. Филдиракнинг горизонтал текислик бўйлаб текис думалашида таъсир этувчи кучларнинг мувозанатини текширамыз.

2. Координаталар бошнини a нуқтада олиб, координата ўқларини 4.20- расмдагидек йўналтирамыз.

3. Филдиракка унинг оғирлик марказига қўйилган оғирлик кучи $\vec{Q}$ ва актив куч $\vec{P}$ таъсир этади (шакл аниқроқ ва яққол бўлиши учун филдиракнинг текисликка ботиши, яъни горизонтал текисликнинг деформацияси шаклда каттароқ қилиб кўрсатилган). Бундан ташқари, филдиракка горизонтал ва вертикал реакция кучлари $\vec{N}$ ва $\vec{T}$ таъсир этади, уларнинг таъсир нуқтаси Oa ўқдан δ масофада бўлади.



4.30- расм.

4. Гилдиракка таъсир этувчи $\vec{Q}$, $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{T}$ кучлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.30-расмдан фойдаланиб кучларнинг мувозанат тенгламасини (4.9) кўринишида тузамиз:

$$\sum X_v = 0; \quad P \cos \alpha - T = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_v = 0; \quad -Q + P \sin \alpha + N = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_a(\vec{F}_v) = 0; \quad N \cdot \delta - P \cdot h = 0. \quad (3)$$

(3) тенгламада $\vec{T}$ кучнинг моменти қатнашмайди, чунки a ва b нуқта горивонталлари орасидаги массага жуда кичик бўлгани учун уни эътиборга олмадик.

aOK учбурчакдан $\vec{P}$ кучнинг елкаси аниқланади: $h = r \cos \alpha$, бунда r билан гилдиракнинг радиуси белгиланган. h нинг қийматини (3) га қўйиб, N ни аниқлаймиз:

$$N = \frac{r}{\delta} \cdot P \cos \alpha. \quad (4)$$

N нинг бу қийматини (2) га қўйсак,

$$-Q + P \sin \alpha + \frac{r}{\delta} P \cos \alpha = 0$$

ёки

$$P \left(\sin \alpha + \frac{r}{\delta} \cos \alpha \right) = Q.$$

Бундан

$$P = \frac{Q}{\sin \alpha + \frac{r}{\delta} \cos \alpha} \approx 5 \text{ кН}.$$

(1) дан ишқаланиш кучи T ни аниқлаймиз: $T = P \cos \alpha = 4,33 \text{ кН}$.

(4) ёрдамида нормал реакция кучи топилади: $N = 1082,5 \text{ кН}$.

5-бoб. ФЕРМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ

5.1*-§. Ферма ҳақида тушунча

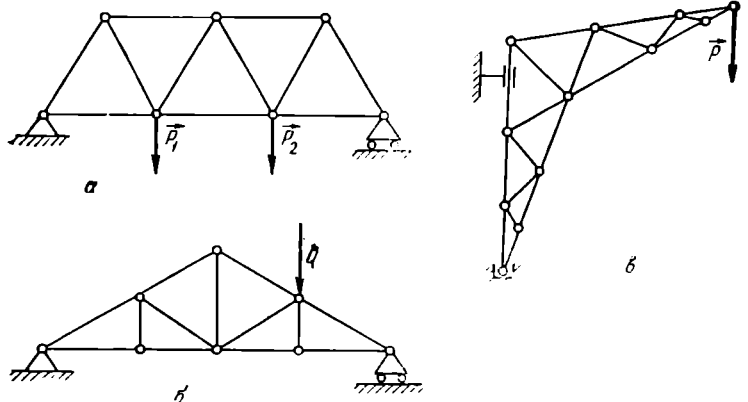
Шарнирлар воситасида геометрик ўзгармас қилиб туташтирилган стерженлардан ҳосил бўлган конструкция *ферма* деб аталади. Стерженларнинг учларини туташтирувчи нуқта *туғун* дейилади.

Фермалар қандай иншоотда қўлланишига қараб турлича ном билан аталади. Масалан, кўприк қурилишида фойдаланиладиган *кўприк фермалари* (5.1-расм, а), иншоотларнинг томини ушлаб турадиган *стропила фермалари* (5.1-расм, б), кўтариш қурилмаларида фойдаланиладиган *кран фермалари* (5.1-расм, в) ва ҳ. к.

Одатда, кўприк ва стропила фермалари бир томондан қўзғалмас, иккинчи томондан қўзғалувчи таянчларга ўрнатилади. Кран фермалари таянч подшипникка (подпятникка) таяниши ва цилиндрик шарнир воситасида ушлаб турилиши мумкин.

Стерженлари бир текисликда ётувчи ферма *ясси ферма* дейилади.* Ясси фермаларни ҳисоблашда уларга қўйилган актив кучлар таъсирида

*) Фазовий фермаларни ҳисоблаш қурилиш механикасида кўрилади.



3.1-расм.

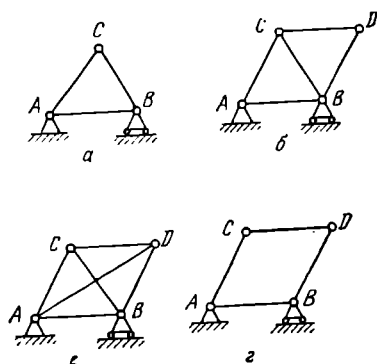
таянч реакциялари ҳамда стерженларда ҳосил бўладиган ички кучларни (зўриқишни) аниқлаш асосий масала ҳисобланади. Бу масалани ечишда:

- 1) ферма стерженлари абсолют қаттиқ, тўғри чизиқли деб қаралиб, уларнинг оғирлиги эътиборга олинмайди;
 - 2) шарнирлардаги ишқаланиш ҳисобга олинмайди;
 - 3) ясси фермага таъсир этувчи кучлар унинг текислигида ётади ва фақат тугунларга қўйилади деб фараз қилинади.
- У ҳолда ферма стерженларига фақат бўйлама (чўзувчи ёки сиқувчи) кучлар таъсир этади (1.3-§).

Реал фермаларнинг стерженлари шарнирлар ёрдамида эмас, балки пайвандлаб ёки парчин мяхлар воситасида бириктирилади. Шу сабабли ферма стерженларига бўйлама кучлардан ташқари эгувчи кучлар ҳам таъсир этади. Академик Е. О. Патон олиб борган тадқиқотларга кўра эгилишда ҳосил бўладиган зўриқиш унча катта бўлмай, биринчи яқинлашишда уни эътиборга олмаслик мумкин.

Шундай қилиб, юқорида қабул қилинган соддалаштиришлар натижасида ферма стерженларидаги зўриқишлар биринчи яқинлашишда аниқланади. Стерженлардаги зўриқишларни аниқлашга ўтишдан олдин ферма структураси билан танишамиз.

n та тугундан ташкил топган ферма геометрик ўзгармас бўлиши (яъни стерженлари бир-бирига нисбатан кўча олмаслиги) учун бундай ферма камида неча стержендан ташкил топишини кўриб чиқамиз. Биринчи учта тугунни геометрик ўзгармас қилиб туташтириш



3.2-расм.

учун учта стержень олиш керак (5.2- расм, а). Бундай учбурчакли ABC фермага яна битта D тугун қўшилиши натижасида ҳосил бўлган ферма геометрик ўзгармас бўлиши учун D тугунни мазкур учбурчакли фермага камида иккита стержень воситасида бириктириш керак (5.2- расм, б). Худди шу тарзда ABC учбурчакли фермага қолган $n-3$ та тугунларнинг ҳар бирини иккитадан стерженлар воситасида бириктириш натижасида n та тугундан ташкил топган ферма геометрик ўзгармас бўлиши учун у камида

$$N = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3 \quad (5.1)$$

та стержендан ташкил топишига ишонч ҳосил қиламиз.

(5.1) шартни қаноатлантирадиган ферма *ортиқча стерженга эга бўлмаган ясси ферма* дейилади (5.1- расм).

Агар $N > 2n - 3$ бўлса, бундай ферма *ортиқча стерженга эга бўлган ясси ферма* дейилади (5.2- расм, в).

Агар $N < 2n - 3$ бўлса, бундай конструкция геометрик ўзгарувчан бўлади ва фермани ифодаламайди (5.2-расм, г). n та тугундан ташкил топган ортиқча стерженга эга бўлмаган ферманинг ҳар бир тугунини боғланишдан бўшатиб, бир текисликда ётувчи кесишувчи кучлар системаси таъсиридаги нуқта деб қарасак, бу нуқталарнинг ҳар бири учун иккитадан мувозанат тенгламалари ўринли бўлади. Натижада ферма учун $2n$ та мувозанат тенгламаларини оламиз. Бу тенгламаларга таянч нуқталаридаги учта номаълум реакция кучлари ҳам киради.

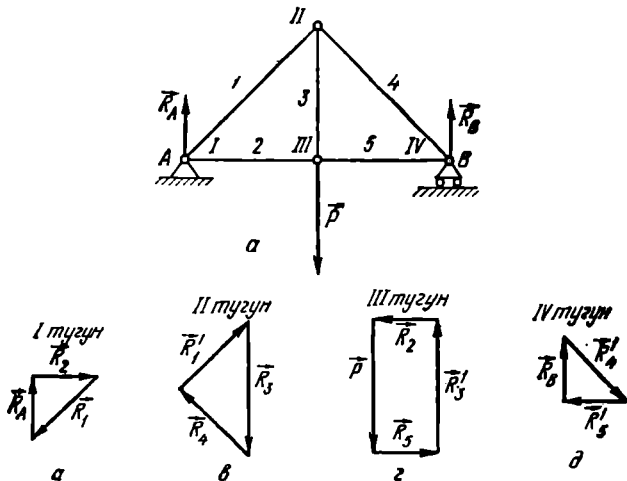
Бинобарин, $2n$ та мувозанат тенгламаларидан $2n - 3$ та стержендаги зўриқишлар ва таянч нуқталаридаги учта номаълум реакция кучлари аниқланади. Шу сабабли ортиқча стерженга эга бўлмаган ферма *статик аниқ ферма*, ортиқча стерженга эга бўлган ферма эса *статик ноаниқ ферма* деб ҳам аталади.

5.2*- §. Ферма стерженларидаги зўриқишларни тугунларни кесиш усули билан аниқлаш

Юқорида кўрганимиздек, тугун кесиш усулининг моҳияти шундан иборатки, ферма тугунларини фикран кетма-кет кеса борамиз ва тугунга қўйилган кучлар мувозанатини текшираемиз; бундай кучлар қаторига стерженларнинг реакция кучлари, тугунларга қўйилган берилган кучлар ва таянч реакция кучлари киради. Кесилган тугун мувозанатда бўлиши учун унга қўйилган кучларга қурилган куч кўпбурчаги ёпиқ бўлиши керак. Ҳар бир тугун учун ёпиқ куч кўпбурчагини ясаб, ферма стерженларидаги реакция кучларини график усулда аниқлаш мумкин.

Тугун кесиш усулида масалани аналитик ечиш учун ҳар бир тугунга қўйилган кучларнинг мувозанат шартларини (2.11) кўринишида тузиб, бу тенгламалардан номаълум кучларни аниқлаш мумкин.

Мисол тариқасида 5.3-расм, а да тасвирланган ферма стерженларидаги зўриқишларни тугунни кесиш усулидан фойдаланиб топамиз. Ферма A нуқтада шарнирли қўзғалмас таянчга, B нуқтада шар-



5.3- расм.

нирли қўзғалувчан таянчга ўрнатилган. Фермага III тугунга қўйилган вертикал пастга йўналган $\vec{P}$ куч таъсир этади.

Масала ечишни таянч реакция кучларини аниқлашдан бошлаймиз. Фермага унинг ўртасига қўйилган битта вертикал пастга йўналган куч таъсир этади. Шу сабабли A ва B нуқталарнинг реакция кучи вертикал юқорига йўналади ва ўзаро тенг бўлади: $R_A = R_B = \frac{P}{2}$.

Стерженлардаги зўриқишни аниқлашдан аввал берилган ферма статик аниқ ферма эканлигини текшириб кўрамиз. Берилган ферманинг тугунлар сони $n = 4$, стерженлар сони $N = 5$. Буларни (5.1) га қўй-сак, $5 = 2 \cdot 4 - 3$, яъни берилган ферма статик аниқ фермадир.

Тугунларни рим рақамлари, стерженларни араб рақамлари билан номерлаймиз.

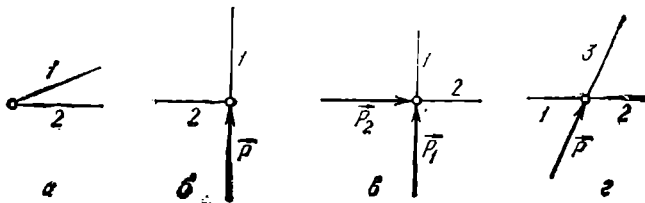
Кесишни шундай тугундан бошлаш керакки, бу тугунда зўриқиши аниқланадиган стерженлар иккитадан ортиқ бўлмасин, чунки бир текисликда ётувчи кесишувчи кучлар системасининг мувозанат шартларидан фойдаланиб фақат иккита номаълум катталикини аниқлаш мумкин. Шу сабабли кўрилатган фермада кесишни I ёки IV тугундан бошлаш керак. I тугунни кесамиз. I тугунга маълум $\vec{R}_A$ куч ҳамда I ва 2 стерженларнинг реакция кучлари $\vec{R}_1$ ва $\vec{R}_2$ қўйилган. Бу кучларнинг таъсир чизиқлари маълум (улар тегишли стержень бўйлаб йўналган) бўлиб, уларнинг миқдорини аниқлаш керак. Бунинг учун $\vec{R}_A$, $\vec{R}_1$ ва $\vec{R}_2$ кучлардан ташкил топган куч учбурчагини тузамиз: ихтиёрий нуқтадан $\vec{R}_A$ куч векторни, бу кучнинг боши ва учидан эса I ва 2 стерженларга параллел чизиқлар ўтказамиз; бу чизиқларнинг кесишган нуқтаси куч учбурчагининг учинчи учини ифо-

далайди, унинг 1 ва 2 стерженларга параллел бўлган томонлари мос равишда $\vec{R}_1$ ва $\vec{R}_2$ нинг миқдорига тенг бўлади (5.3-расм, б). $\vec{R}_1$ ва $\vec{R}_2$ нинг йўналишини аниқлаш учун куч учбурчагини унинг периметри бўйича маълум $\vec{R}_A$ куч йўналишида айланиб ўтиш керак. Куч учбурчагидаги $\vec{R}_1$ ва $\vec{R}_2$ кучлар мос равишда 1 ва 2 стерженларнинг тугунга кўрсатган реакциясидир. $\vec{R}_1$ ни куч учбурчагидан I стерженга кўчирсак, $\vec{R}_1$ I тугунга қараб йўналганлигини кўрамиз. I тугун томонидан 1 стерженга $\vec{R}_1$ га қарама-қарши йўналган ва миқдор жиҳатдан тенг сиқувчи куч таъсир этади, яъни 1 стержень сиқилади. $\vec{R}_2$ ни куч учбурчагидан 2 стерженга кўчирсак, $\vec{R}_2$ I тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналади. I тугун томонидан 2 стерженга $\vec{R}_2$ га қарама-қарши йўналган ва миқдор жиҳатдан унга тенг чўзувчи куч таъсир этади, яъни 2 стержень чўзилади.

Шундай қилиб, *стержень реакцияси тугунга қараб йўналса, стержень сиқилади; акс ҳолда, яъни стержень реакцияси тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналган бўлса, стержень чўзилади.*

II тугунни кесамиз. Бу тугунга 1, 3 ва 4 стерженларнинг реакция кучлари қўйилган. Бунда II тугунга қўйилган 1 стерженнинг реакция кучи $\vec{R}_1'$ миқдор жиҳатдан $\vec{R}_1$ га тенг ва унга қарама-қарши йўналганлигини эътиборга олиш керак. Шу сабабли $\vec{R}_1' = -\vec{R}_1$, яъни *иккита тугунни туташтирувчи ҳар бир стерженнинг учларига қўйилган реакция кучлари миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қаршидир.* II тугун учун куч учбурчагини ясашда ихтиёрий нуқтадан $\vec{R}_1'$ векторини, унинг боши ва учидан эса 3 ва 4 стерженларга параллел чизиқлар ўтказамиз (5.3-расм, в). Ҳосил қилинган ёпиқ куч учбурчагининг 3 ва 4 стерженларга параллел бўлган томонлари мос равишда $\vec{R}_3$ ва $\vec{R}_4$ реакция кучларининг миқдорига тенг бўлади. $\vec{R}_3$ ва $\vec{R}_4$ нинг йўналишини аниқлаш учун куч учбурчагини маълум $\vec{R}_1'$ куч йўналишида айланиб ўтиш керак.

$\vec{R}_3$ вектори II тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналгани учун 3 стержень чўзилади; $\vec{R}_4$ II тугунга йўналгани сабабли 4 стержень сиқилади.



5.4-расм.

Энди III тугунни кесамиз. Бу тугунга берилган $\vec{P}$ куч ҳамда 2, 3 ва 5 стерженларнинг реакция кучлари қўйилган. Куч кўпбурчагини қуришда 2 ва 3 стерженларнинг реакция кучлари $\vec{R}_2'$ ва $\vec{R}_3'$ I ва II тугунларга қўйилган $\vec{R}_2$ ва $\vec{R}_3$ реакция кучларига миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши эканлигини эътиборга олиш керак. III тугун учун куч кўпбурчаги 5.3-расм, *г* да тасвирланган. $\vec{R}_5$ III тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналган учун 5 стержень чўзилади.

III тугунни кесиш ўрнига IV тугунни кесиш ҳам мумкин. IV тугун учун куч кўпбурчаги 5.3-расм, *д* да тасвирланган.

Шундай қилиб берилган ферманинг барча стерженларидаги зўриқишлар аниқланди.

Масалалар ечганда учрайдиган қуйидаги хусусий ҳолларни кўрамиз:

1. Ферманинг икки стерженли тугунига куч таъсир этмаса (5.4-расм, *а*), ҳар қайси стержендаги зўриқишлар нолга тенг бўлади.

2. Ферманинг икки стерженли тугунига стерженлардан бирининг ўқи бўйлаб йўналган $\vec{P}$ куч таъсир этса (5.4-расм, *б*), бу стерженнинг реакция кучи миқдор жиҳатдан таъсир этувчи кучга тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлади: $\vec{R}_1 = -\vec{P}$, $R_2 = 0$.

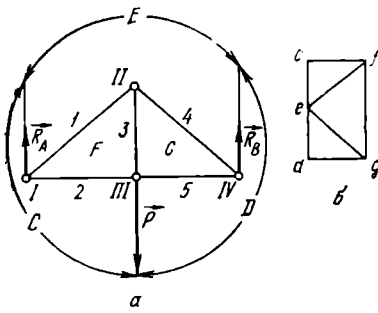
3. Ферманинг икки стерженли тугунига стержень ўқлари бўйлаб йўналган $\vec{P}_1$ ва $\vec{P}_2$ кучлар таъсир этса (5.4-расм, *в*), ҳар бир стерженнинг реакция кучи миқдор жиҳатдан мос равишда шу кучга тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлади: $\vec{R}_1 = -\vec{P}_1$, $\vec{R}_2 = -\vec{P}_2$.

4. Ферманинг уч стерженли тугунида икки стерженнинг ўқи бир тўғри чизик бўйлаб йўналса ва тугунга 3 стержень ўқи бўйлаб куч таъсир этса (5.4-расм, *г*), 3 стерженнинг реакция кучи миқдор жиҳатдан $\vec{P}$ кучга тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлади: $\vec{R}_3 = -\vec{P}$; қолган икки стерженнинг реакция кучи миқдор жиҳатдан тенг (улар нолга тенг бўлиши ҳам мумкин).

5.3* - §. Максвелл — Кремон диаграммаси

Тугун кесиш усулида ҳар бир стерженнинг реакция кучини куч кўпбурчакларида икки мартадан тасвирлашга тўғри келади. Бу камчилик инглиз физик олими Д. К. Максвелл (1831—1879) ва италиялик олим Л. Кремон (1830—1903) томонидан кашф қилинган ва улар номи билан аталадиган *Максвелл — Кремон диаграммаси*да бар-тараф қилинади. Бу диаграммани ясаш учун яна юқоридаги ферма-ни оламиз (5.5-расм, *а*).

Тугунларга таъсир этувчи кучни ферма контурининг ташқариси-да тасвирлаймиз ва бу кучлар билан чегараланган соҳаларни *C, D, E*; ферма стерженлари билан чегараланган ички соҳаларни *F, G* билан белгилаймиз. Куч кўпбурчагини қуришда фермани ёки тугунни



5.5- расм.

соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айланиб ўтиш қондасини қабул қиламиз. Бундай айланиб ўтишда кучнинг боши ва учини куч чегаралаб турган соҳаларга мос кичик ҳарфлар билан белгилаймиз. Масалан, $\vec{P}$ кучни $\vec{cd}$, $\vec{R}_B$ ни $\vec{de}$, $\vec{R}_A$ ни $\vec{ec}$; III тугунга қўйилган кучларни $\vec{cd}$, $\vec{dg}$, $\vec{gf}$ ва $\vec{fc}$ билан белгилаймиз ва ҳоказо.

Дастлаб ташқи кучлар кўпбурчагини тузамиз. Қуриладиган куч кўпбурчакларида кучларнинг учига стрелка қўймасак ҳам бўлади, чунки соҳаларни соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айланиб ўтиш қондаси кучнинг боши ва учини бир қийматли аниқлайди. Ташқи кучларни уларнинг йўналишига мос равишда маълум масштабда фермани соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айланиб ўтишда учрайдиган тартибда қўя борамиз ва $cdec$ ни оламиз; ташқи кучлар параллел бўлгани учун кучлар кўпбурчаги бир чизиқда ётади (5.5-расм, б). Бу кучлар таъсиридаги ферма мувозанатда бўлгани учун мазкур кўпбурчак ҳам ёпиқ бўлади.

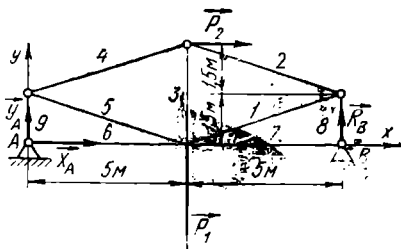
Энди тугун кесиш усулидан фойдаланамиз. I тугунни маълум куч $\vec{ec}$ дан бошлаб соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айланиб ўтамыз. ec куч шаклда тасвирланган, шу сабабли куч кўпбурчагида I тугунга таъсир этувчиси $\vec{cf}$ ва $\vec{fe}$ кучларни қуриш кифоя. Бунинг учун e нуқтадан I стерженга ва c нуқтадан 2 стерженга параллел чизиқлар ўтказамиз; бу чизиқларнинг кесишган нуқтаси f нуқтани ифодалайди. $\vec{cf}$ куч I тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналган, шу сабабли 2 стержень чўзилади; $\vec{fe}$ куч I тугун томон йўналган, шу сабабли 1 стержень сиқилади.

II тугунни $EFGE$ тартибда соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айланиб ўтамыз. Бунда илгари тасвирланган e , f нуқталардан фойдаланамиз. f нуқтада 3 стерженга параллел, e нуқтада 4 стерженга параллел чизиқлар ўтказамиз; уларнинг кесишган нуқтаси g нуқтани ифодалайди; $\vec{fg}$ куч II тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналгани учун 3 стержень чўзилади; $\vec{ge}$ куч II тугунга йўналгани туфайли 4 стержень сиқилади.

III тугунни $CDGFC$ тартибда айланиб ўтиб, 5 стерженга мос $\vec{dg}$ реакция кучини аниқлаймиз. Бунинг учун d ва g нуқталарни бирлаштириш кифоя. $\vec{dg}$ куч III тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналгани учун 5 стержень чўзилади.

Шу тартибда ясалган 5.5-расм, б даги фигурага Максвелл—Кремон диаграммаси дейилади. Ферманинг ҳар бир тугунига диаграмманинг бирор кўпбурчаги мос келади. Аксинча диаграмманинг ҳар

бир учига ферма текислигининг бирор соҳаси мос келади. Шундай қилиб, бир фигуранинг учига бошқа фигуранинг кўпбурчаги мос келади; бундай фигуралар бир-бирига монанд фигуралар дейилади. 5.5-рasm, б ни 5.3-рasm, б, в, г, д билан солиштириб, кўрилайотган ферма учун ясалган Максвелл—Кремон диаграммаси 5.3-рasmда қурилган куч кўпбурчақларидан ташкил топганлигини яққол кўриш мумкин.



5.6- рasm.

Куч учун қабул қилинган масштабдан фойдаланиб, стерженларнинг реакция кучини топиш мумкин.

5.1-масала. 5.6- рasmда тасвирланган фермага $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 2$ кН кучлар таъсир этади. Ўлчовлар рasmда кўрсатилган. А ва В таянчларнинг реакция кучлари ва ферма стерженларидаги зўриқишлар аниқлансин.

Ечиш. Дастлаб А ва В нуқталарнинг реакция кучларини аниқлаймиз. Ферманинг мувозанат тенгламаларини тузиш учун x ва y ўқларини 5.6-рasmдагидек йўналтирамиз.

Фермага таъсир этувчи $P_1 = 4$ кН куч вертикал пастга, $P_2 = 2$ кН куч эса горизонтал йўналган. А шарнирнинг реакция кучини $\vec{X}_A$ ва $\vec{Y}_A$ ташкил этувчилардан иборат деб қараймиз. Қўзғалтувчан шарнир В нинг реакция кучи $\vec{R}_B$ вертикал юқорига йўналади.

Шундай қилиб, фермага $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$ бир текисликда 5тувчи кучлар таъсир этади. Бундай кучларнинг мувозанат тенгламаларини (4.10) кўринишида тузамиз:

$$\sum X_v = 0; X_A + P_1 = 0;$$

$$\sum M_A (\vec{F}_v) = 0; -P_1 \cdot 5 - P_2 \cdot 3 + R_B \cdot 10 = 0,$$

$$\sum M_B (\vec{F}_v) = 0; -P_2 \cdot 3 + P_1 \cdot 5 - Y_A \cdot 10 = 0.$$

Бу тенгламаларни ечиб, номаълумларни аниқлаймиз:

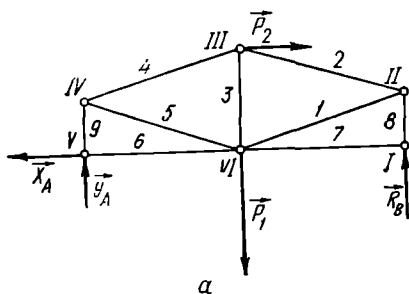
$$X_A = -P_1 = -4 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{P_1 \cdot 5 + P_2 \cdot 3}{10} = 2,6 \text{ кН},$$

$$Y_A = \frac{-P_2 \cdot 3 + P_1 \cdot 5}{10} = 1,4 \text{ кН}.$$

X_A манфий ишорали бўлгани учун $\vec{X}_A$ чапга йўналади (5.7-рasm, а).

Стерженлардаги зўриқишларни аниқлашдан аввал берилган ферма статик аниқ ферма эканлигини текшириб кўрамиз. Берилган ферманинг тугунлар сони $n = 9$, стерженлар сони $N = 9$. Булар (5.1) тенгликни қаноатлантиради, $9 = 2 \cdot 9 - 3$. Демак, берилган ферма статик аниқдир. Куч масштабини маълум узунлик бирлигида танлаб оламиз ва стерженларни номерлаймиз (5.7-рasm, а).



5.7- расм.

Ферма стерженларидаги зўриқишни тугун кесиш усули ва Максвелл—Кремон диаграммаси воситасида аниқлаймиз.

1. Тугун кесиш усули. I тугунни кесамиз. Дастлаб вертикал юқорига йўналган $\vec{R}_B$ кучни тасвирлаймиз (5.7-расм, б). Унинг учидан 8 стерженга параллел вертикал чизиқ ўтказсак, куч қўпбурчаги бир тўғри чизиқда жойлашади ва I тугун мувозанатда бўлиши учун $\vec{R}_8$ нинг учи $\vec{R}_B$ нинг боши билан устма-уст тушиши керак. Бундан $R_8 = R_B = 2,6$ кН. Бинобарин, 7 стержендаги зўриқиш нолга тенг. R_8

I тугунга қараб йўналгани учун 8 стержень сиқилади.

II тугунни кесамиз. Бу тугунга 8, 2 ва I стерженларнинг реакция кучлари қўйилган, 8 стерженнинг реакция кучи маълум. Бунда II тугунга қўйилган стерженнинг реакция кучи $\vec{R}_8'$ миқдор жиҳатдан $\vec{R}_8$ га тенг ва унга қарама-қарши йўналганини эътиборга олиш керак. II тугун куч учбурчагини яшаш учун ихтиёрий нуқтада $\vec{R}_8'$ векторини тасвирлаймиз ҳамда унинг боши ва учидан мос равишда I ва 2 стерженларга параллел чизиқлар ўтказиб, куч қўпбурчагини оламиз (5.7-расм, в). II тугун мувозанатда бўлиши учун бу куч учбурчаги ёпиқ бўлиши керак. $\vec{R}_1$ ва $\vec{R}_2$ нинг йўналишини аниқлаш учун куч учбурчагини унинг периметри бўйича $\vec{R}_8'$ йўналиши бўйича айланиб ўтиш керак. Куч учбурчагининг мос томонларини берилган масштабда ўлчаб, I ва 2 стерженларнинг реакция кучлари аниқланади: $R_1 = 4,5$ кН, $R_2 = 4,5$ кН. $\vec{R}_1$ II тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналгани учун I стержень чўзилади; $\vec{R}_2$ II тугунга йўналгани сабабли 2 стержень сиқилади.

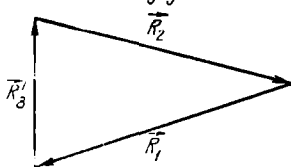
III тугунни кесамиз. III тугунга $\vec{P}_2$ ва $|\vec{R}_2'| = |\vec{R}_2|$ маълум кучлар таъсир эте қ. 2 стержень сиқилгани туфайли $\vec{R}_2'$ III тугунга, яъни $\vec{R}_2$ га қарама-қарши

I тугун



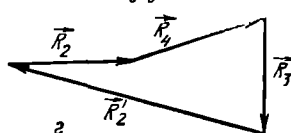
б

II тугун



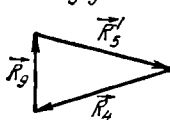
в

III тугун



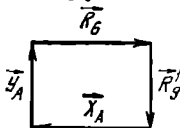
з

IV тугун



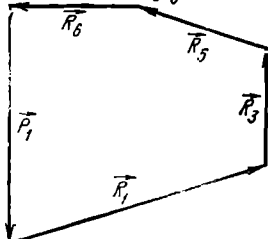
д

V тугун



е

VI тугун



ж

топамнз. Расмдан кўриниб турибдики. q нуқта e билан устма-уст тушади, яъни 7 стержендаги зўриқиш нолга тенг бўлади. 8 стерженнинг реакция кучи $\vec{f}_g$ I тугунга йўналади. Шу сабабли 8 стержень сиқилади. f_q ни танланган масштабда ўлчаб, $R_8 = 2,6$ кН бўлишини аниқлаймиз. Стержень сиқилгани туфайли $S_8 = -2,6$ кН бўлади.

II тугунни QFL тартибда соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айланиб ўтамиз. Бунда илгари тасвирланган q ва f нуқталардан фойдаланамиз. q нуқтада I стерженга параллел, f нуқтада 2 стерженга параллел чизиклар ўтказамиз; улар кесишган жойда l нуқтани оламиз. $\vec{f}_l$ II тугунга йўналгани учун 2 стержень сиқилади. e_g II тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналгани учун I стержень чўзилади. Расмдан f_l ва l_g ни танланган масштабда ўлчаб, $R_2 = R_1 = 4,5$ кН эканлигини аниқлаймиз. Уларга мос зўриқишлар $S_1 = 4,5$ кН, $S_2 = -4,5$ кН бўлади.

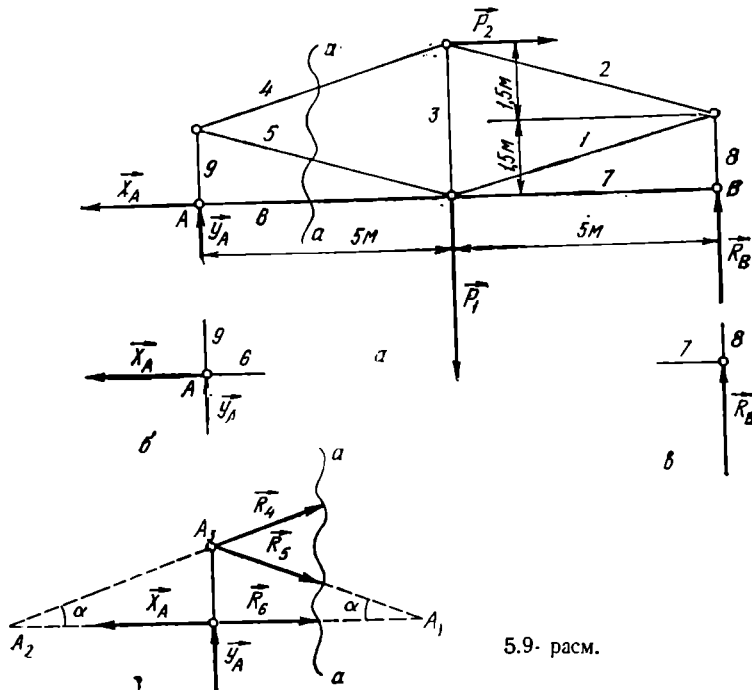
Худди шунингдек, қолган III, IV ва V тугунларни кесиб, 5.8-расм, б да тасвирланган Максвелл—Кремон диаграммасини оламиз ва ундан қолган стерженлардаги зўриқишни аниқлаймиз.

Олинган натижаларни юқоридагидек жадвалда келтирамиз.

5.4*-§. Риттер усули

Агар ясси ферманинг барча стерженларидаги зўриқишларни аниқлаш зарур бўлса, Максвелл-Кремон усулидан фойдаланиш энг қулай ҳисобланади. Лекин ферманинг айрим стерженларидаги зўриқишларни аниқлаш лозим бўлса, у ҳолда Риттер (1826—1906) томонидан кашф қилинган ва унинг номи билан аталадиган аналитик усулдан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу усулда ҳам дастлаб ферманинг таянч реакциялари аниқланади.

Риттер усулининг моҳияти шундан иборатки, фермани бирор a — a контур билан фикран қирқиб икки қисмга ажратилади ва ажратилган бирор қисмининг мувозанати текширилади. Текисликда жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари воситасида учта номаълум катталиқни аниқлаш мумкин. Шу сабабли фермани шундай контур билан кесиш керакки, реакция кучлари номаълум бўлган стерженлар сони учтадан ошмаслиги ҳамда бир нуқтада кесишадиган стерженлар сони иккитадан ошмаслиги шарт. Ферманинг кесилган бир қисмини фикран ташлаб юбориб, унинг фермани иккинчи қисмига кўрсатадиган таъсирини стерженлар бўйлаб ташлаб юборилган томонга йўналган кучлар билан алмаштирамиз, яъни барча кесилган стерженларни чўзилади деб фараз қиламиз. Масала ечилганда бирор та стерженнинг реакция кучи манфий ишорали чиқса, унинг йўналиши қабул қилинган йўналишга қарама-қарши бўлиб, мазкур стержень аслида сиқилади. Ферманинг ажратилган қисми учун текисликдаги кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилиб, стерженларнинг номаълум реакция кучлари аниқланади. Тенгламалар тузишда шунга ҳаракат қилиш керакки, имкони бўлса ҳар бир тенгламада номаълумлар сони биттадан ошмасин. Шу нуқтани назардан қараганда (4.11) ёки (4.10) кўринишдаги мувозанат тенгламаларидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. (4.11) тенгламаларни тузишда момент маркази учун иккита номаълум реакция кучларининг таъсир чизиклари кесишадиган нуқтани олиш тавсия этилади. Бундай нуқталар *Риттер нуқталари* деб аталади. Агар реакция кучлари номаълум



5.9- расм.

бўлган стерженлардан икkitаси ўзаро параллел бўлса, (4.10) тенгламалардан фойдаланиш қулай, бунда кучлар проекцияланган x ўқ учун параллел стерженларга перпендикуляр ўқ, момент марказлари учун Риттер нуқталари олинади.

Риттер усули билан 5.1-масаллада берилган ферманинг 4, 5, 6, 7, 8 ва 9 стерженларидаги зўриқишларни аниқлашмиз. Юқорида кўрганимиздек, $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 2$ кН кучлар таъсир этади ва таянч реакциялари $X_A = 2$ кН, $Y_A = 1,4$ кН, $R_B = 2,6$ кН га тенг (5.9-расм, а).

Ферманинг A ва B таянчларидаги тугунлари 5.2-§ да қаралган 3 ва 2 хусусий ҳолларга мос келади (5.9-расм, б, в). Бинобарин, $\vec{R}_9$ ва $\vec{R}_8$ реакция кучлари $\vec{R}_9$ ва $\vec{R}_8$ равишда A ва B тугунга йўналади, яъни 9 ва 8 стерженлар сиқилади ҳамда бу стерженлардаги зўриқишлар қуйидагича аниқланади: $S_9 = -R_9 = -Y_A = -1,4$ кН, $S_8 = -R_8 = -R_B = -2,6$ кН.

R_6 реакция кучининг йўналиши X_A га қарама-қаршидир, яъни A тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналиб, 6 стержень чўзилади ва $S_6 = R_6 = 2$ кН. 7 стержендаги зўриқиш эса нолга тенг бўлади: $S_7 = 0$.

4 ва 5 стерженлардаги зўриқишни топиш учун ферманинг 4, 5 ва 6 стерженларини $a-a$ контур билан фикран кесамиз ҳамда ферманинг ташлаб юборилган ўнг қисмининг таъсирини мос стерженлар бўйлаб йўналган R_4 , R_5 ва $R_6 = 2$ кН реакция кучлари билан алмаштирамиз (5.9-расм, в).

Риттер нуқталари A_1 ва A_2 га нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз:

$$\sum M_{A_1}(\vec{F}_v) = 0; \quad -Y_A \cdot 5 - R_4 \cdot 10 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$\sum M_{A_i}(\vec{F}_v) = 0; Y_A \cdot 5 - R_5 \cdot 10 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Бу тенгламаларда $\sin \alpha = \frac{1,5}{\sqrt{(1,5)^2 + 5^2}} = 0,2874$ эканлигини эътиборга олсак,

$$R_4 = S_4 = -\frac{Y_A \cdot 5}{10 \cdot \sin \alpha} = -2,4356 \text{ кН},$$

$$R_5 = S_5 = \frac{Y_A \cdot 5}{10 \cdot \sin \alpha} = 2,4356 \text{ кН}.$$

Демак, 4 стержень сиқилади, 5 стержень чўзилади.

Олинган натижани 5.1-масаланинг жавобида келтирилган жадвал билан солиштирсак, Риттер усулида ҳисобланган ферма стерженьларидаги зўрқишлар қийматч аниқроқ бўлишини кўрамиз.

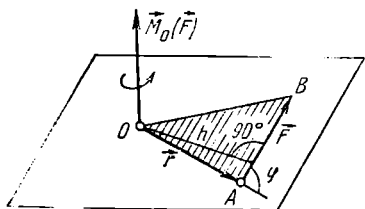
6-БОБ. ФАЗОДАГИ КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

6.1-§. Кучнинг нуқтага нисбатан момент-вектори

Таъсир чизиқлари фазода ихтиёрий жойлашган кучлар система-сига *фазодаги кучлар системаси* дейилади.

Фазодаги кучларнинг нуқтага нисбатан моменти қуйидаги учта фактор: 1) кучнинг модулини унинг елкасига кўпайтмаси $F \cdot h$ га тенг момент модули; 2) кучнинг таъсир чизиги ва момент маркази орқали ўтувчи OAB айланиш текислиги; 3) мазкур текисликдаги айланиш йўналиши билан аниқланади (6.1-расм). Агар барча кучлар бир текисликда ётса, ҳар гал OAB айланиш текислигини аниқлашга эҳтиёж қолмайди ҳамда кучнинг нуқтага нисбатан моментини $\pm F \cdot h$ га тенг скаляр катталиқ билан аниқлаш мумкин. Бунда кўпайтма олдидаги ишора 3.3-§ да кўрганимиздек айланиш йўналишини ифодалайди.

Жисмга фазода ихтиёрий жойлашган кучлар таъсир этса, ҳар бир кучнинг айланиш текислигини алоҳида аниқлашга тўғри келади. Айланиш текислигининг фазодаги ҳолатини ва айланиш йўналишини мазкур текисликка перпендикуляр вектор билан аниқлаш мумкин. Агар текислиكنинг ҳолатини белгиловчи векторнинг модулини кучнинг моменти модулига тенг ва унинг йўналишини кучнинг айланиш йўналишини ифодаладиган тарзда танлаб олсак, бундай вектор ёрдамида кучнинг O нуқтага нисбатан моментини характерловчи учала факторни аниқлаш мумкин.



6.1- расм.

Шу сабабли $\vec{F}$ кучнинг O нуқтага нисбатан момент-векторини O марказга қўйилган ва бу марказ ҳамда кучнинг таъсир чизиги орқали ўтган текисликка перпендикуляр йўналган $\vec{M}_O(\vec{F})$ вектор билан тасвирлаймиз. $\vec{M}_O(\vec{F})$ векторининг йўналишини шундай танлаймизки, унинг учидан қараганимизда куч жисмини O нуқта атрофида соат

стрелкаси айланишига тескари йўналишда айлантиришга интилсин.

Агар $\vec{F}$ куч қўйилиш нуқтасининг O марказга нисбатан радиус-векторини $\vec{r}$ билан белгиласак (6.1-расм),

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.1)$$

муносабат ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Векторлар алгебрасидан маълумки, $\vec{r} \times \vec{F}$ вектори $\vec{r}$ ва $\vec{F}$ ётган текисликка перпендикуляр йўналган бўлиб, унинг учидан қараганда векторлар фикран бир нуқтага кўчирилганда $\vec{r}$ ни $\vec{F}$ вектори устига тушириш учун соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда энг қисқа бурчакка буриш керак. Бу векторнинг модули

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \sin(\widehat{r, F}).$$

Расмдан $h = r \sin(\widehat{r, F})$ бўлгани учун

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = F \cdot h = |\vec{M}_O(\vec{F})|. \quad (6.2)$$

$\vec{r} \times \vec{F}$ векторининг йўналиши кучнинг нуқтага нисбатан момент вектори $\vec{M}_O(\vec{F})$ йўналиши билан бир хил бўлади. Шундай қилиб, $\vec{r} \times \vec{F}$ ва $\vec{M}_O(\vec{F})$ векторлари миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши устма-уст тушади, яъни бу векторлар ўзаро тенг. Бинобарин, (6.1) ўринли бўлади.

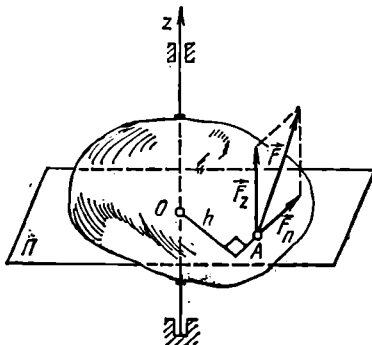
Демак, *кучнинг нуқтага нисбатан momenti вектор катталики бўлиб, куч қўйилган нуқтанинг момент марказига нисбатан радиус-вектори билан шу кучнинг вектор кўпайтмасига тенг.*

6.2 - §. Кучнинг ўққа нисбатан momenti

Фазодаги кучлар системасининг жисмга таъсирини ўрганишда кучнинг нуқтага нисбатан momenti билан бирга кучнинг ўққа нисбатан momenti тушунчаси ҳам киритилади.

z ўқ атрофида айлана оладиган жисмнинг A нуқтасига $\vec{F}$ куч таъсир этсин (6.2- расм). A нуқтадан жисмнинг айланиш ўқига перпендикуляр Π текисликни ўтказамиз. z ўқнинг мазкур текислик билан кесишган нуқтасини O , $\vec{F}$ кучнинг Π текисликдаги проекциясини $\vec{F}_\Pi$ билан белгилаймиз.

$\vec{F}$ кучни $\vec{F}_\Pi$ ва z ўққа параллел бўлган $\vec{F}_z$ ташкил этувчиларга ажратамиз. $\vec{F}_z$ куч жисмни z ўқ атрофида айлантира олмайди. Бу



6.2- расм.

куч жисми z ўқ бўйича силжитишга интилади. Бинобарин, $\vec{F}$ кучнинг z ўқ атрофида айлантириш эффекти шу ўқ атрофида $\vec{F}_\Pi$ кучнинг айлантириш эффекти билан бир хил бўлади.

Кучнинг бирор ўққа нисбатан моменти деб, унинг шу ўққа перпендикуляр текисликдаги проекциясининг ўқ билан мазкур текислик кесишган нуқтасига нисбатан моментига айтилади.

$\vec{F}$ кучнинг z ўққа нисбатан моменти $M_z(\vec{F})$ билан белгиланади; таърифга кўра

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_\Pi). \quad (6.3)$$

(3.8) га асосан $M_o(\vec{F}_\Pi) = \pm F_\Pi \cdot h$ бўлгани учун

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_\Pi \cdot h. \quad (6.4)$$

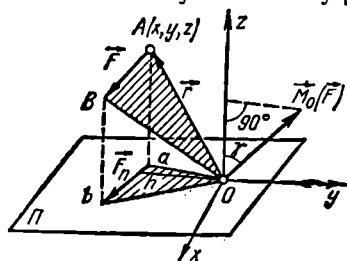
Кучнинг ўққа нисбатан моменти скаляр миқдор бўлиб, ўқнинг мусбат йўналишидан қараганда кучнинг ўққа перпендикуляр текисликдаги проекцияси жисми соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда айлантиришга интилса, куч моменти мусбат, акс ҳолда манфий ишора билан олинади. 6.2-расмдаги $\vec{F}$ кучнинг z ўққа нисбатан моменти мусбат қийматга эга.

Агар $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғи z ўққа параллел бўлса, $\vec{F}_\Pi = 0$, шунингдек, кучнинг таъсир чизиғи ўқни кесиб ўтса, $h = 0$ бўлиб, ҳар иккала ҳолда (6.4) га асосан кучнинг ўққа нисбатан моменти нолга тенг бўлади.

6.3-§. Кучнинг ўққа нисбатан моменти билан шу ўқдаги нуқтага нисбатан моменти орасидаги боғланиш

Лемма. Кучнинг бирор ўққа нисбатан моменти унинг шу ўқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан момент-векторининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.

Исбот. $\vec{F}$ кучнинг O нуқтага нисбатан момент-вектори (3.9) га



6.3- расм.

асосан миқдор жиҳатдан OAB учбурчак юзасининг иккиланганига тенг: $|M_o(\vec{F})| = 2S_{\triangle OAB}$ ҳамда OAB учбурчак текислигига перпендикуляр йўналади (6.3-расм). Унинг z ўқ билан ташкил қилган бурчагини γ билан белгиласак, $\vec{M}_o(\vec{F})$ момент-векторининг z ўқдаги проекцияси қуйидагича ифодаланади.

$$\{\vec{M}_O(\vec{F})\}_z = |\vec{M}_O(\vec{F})| \cdot \cos \gamma = 2S_{\Delta AOB} \cdot \cos \gamma. \quad (6.5)$$

OAB ва Oab учбурчакларнинг текисликлари орасидаги бурчак бу текисликларга перпендикуляр йўналган $\vec{M}_O(\vec{F})$ вектор ва Oz ўқ орасидаги γ бурчакка тенг. OAB учбурчакнинг Π текисликдаги проекцияси Oab га тенг бўлгани учун

$$S_{\Delta OAB} \cdot \cos \gamma = \pm S_{\Delta Oab}.$$

Натижада (6.5) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\{\vec{M}_O(\vec{F})\}_z = \pm 2S_{\Delta Oab}. \quad (6.6)$$

6.3 - расмда $F_{\vec{r}} \cdot \vec{k} = 2S_{\Delta Oab}$ бўлгани учун (6.4) га асосан

$$M_z(\vec{F}) = \pm 2S_{\Delta Oab}. \quad (6.7)$$

(6.6) ва (6.7) ни солиштириб, исботланиши зарур бўлган тенгликни оламиз:

$$M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_z. \quad \blacksquare$$

Худди шунингдек, кучнинг қолган иккита координата ўқларига нисбатан моментлари ҳисобланади. Натижада

$$M_x(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_x, \quad M_y(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_y, \quad M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_z \quad (6.8)$$

формула ўринли бўлади.

(6.1) ва исботланган леммадан фойдаланиб, кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларининг аналитик ифодасини аниқлаймиз. Бунинг учун координаталар бошини O нуқтада олиб, Ox , Oy , Oz ўқларнинг бирлик векторларини $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; $\vec{F}$ кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини X , Y , Z ; A нуқта радиус-вектори $\vec{r}$ нинг координата ўқларидаги проекцияларини x , y , z билан белгилаймиз (6.3 - расм). У ҳолда (6.1) га асосан

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

(6.8) ни назарда тутиб, охириги ифодани Ox , Oy , Oz ўқларга проекцияласак,

$$M_x(\vec{F}) = yZ - zY, \quad M_y(\vec{F}) = zX - xZ, \quad M_z(\vec{F}) = xY - yX. \quad (6.9)$$

(6.9) формулалар кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларининг аналитик ифодасидир. (6.8) ва (6.9) ни эътиборга олиб, кучнинг нуқтага нисбатан моментининг модули аниқланадиган қуйидаги формулага эга бўламиз:

* бу тенгликда γ ўтмас бурчак бўлганда манфий ишора олинади.

$$\begin{aligned}
 |\vec{M}_O(\vec{F})| &= \sqrt{[\vec{M}_O(\vec{F})]_x^2 + [\vec{M}_O(\vec{F})]_y^2 + [\vec{M}_O(\vec{F})]_z^2} = \\
 &= \sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2} = \\
 &= \sqrt{(yZ - zY)^2 + (zX - xZ)^2 + (xY - yX)^2}. \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

Агар кучнинг нуқтага нисбатан момент-векторининг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α , β , γ билан белгиласак, бу векторнинг йўналтирувчи косинуслари қуйидагича аниқланади:

$$\cos \alpha = \frac{M_x(\vec{F})}{\sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{M_y(\vec{F})}{\sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{M_z(\vec{F})}{\sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2}}.$$

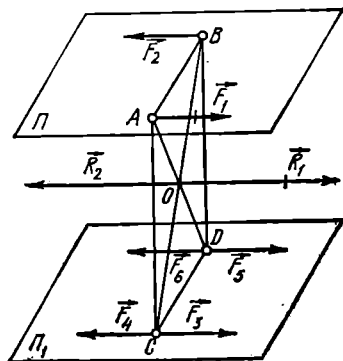
6.4 - §. Жуфтни параллел текисликка кўчириш ҳақидаги теорема

Теорема. *Параллел текисликларда ётувчи, моментларининг абсолют қиймати тенг ва бир хил айланиш йўналишига эга бўлган иккита жуфт куч ўзаро эквивалентдир.*

Исбот. Π текисликда ётувчи ва елкаси $|AB|$ га тенг $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфт куч берилган (6.4 - расм). Π текисликка параллел Π_1 текисликда $[AB]$ га параллел ва тенг CD кесмани оламиз. C ва D нуқталарга миқдорлари $(\vec{F}_3, \vec{F}_4)$ жуфтнинг ташкил этувчиларига тенг $(F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_1)$, таъсир чизиклари $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфт ташкил этувчиларига параллел $(\vec{F}_3, \vec{F}_4) \propto 0$ ва $(\vec{F}_5, \vec{F}_6) \propto 0$ мувозанатлашган кучларни қўямиз. У ҳолда

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6) \quad (6.11)$$

бўлади. $[AB]$ ва $[CD]$ ларга параллелограмм қуриб, унинг $[AD]$ ва $[BC]$ диагоналлариини ўтказамиз. $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_5$ параллел кучларни қўшиб, уларга параллел ва $[AD]$ нинг ўртаси O нуқтага қўйилган



6.4 - расм.

$\vec{R}_1$ кучга эга бўламиз: $R_1 = F_1 + F_5 = 2F_1$. Худди шунингдек, $\vec{F}_2$ ва $\vec{F}_4$ параллел кучларни қўшиб, уларга параллел ва $[BC]$ нинг ўртаси O нуқтага қўйилган $R_2 = F_2 + F_4 = 2F_1$ кучни оламиз. $\vec{R}_1$ ва $\vec{R}_2$ кучларнинг миқдорлари тенг, йўналиши бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналгани учун $(\vec{F}_1, \vec{F}_5, \vec{F}_2, \vec{F}_4) \propto (\vec{R}_1, \vec{R}_2) \propto 0$. Бинобарин,

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6) \propto (\vec{F}_3, \vec{F}_6). \quad (6.12)$$

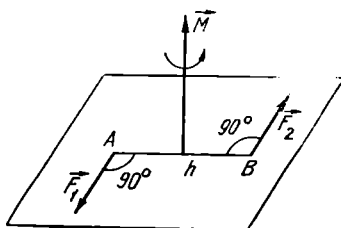
(6.11) ва (6.12) ларни солиштириб, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{F}_3, \vec{F}_6)$ натижани оламиз. 3.5-§ да исботланган теоремага кўра Π_1 текисликда ётувчи $(\vec{F}_3, \vec{F}_6)$ жуфтни моменти шу жуфтнинг моментига тенг ва айланиш йўналиши у билан бир хил бўлган ихтиёрий жуфт куч билан алмаштириш мумкин бўлгани учун Π текисликда ётувчи $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ жуфтни унга параллел Π_1 текисликда ётувчи ва моменти берилган жуфтнинг моментига тенг ҳамда айланиш йўналиши у билан бир хил бўлган ихтиёрий жуфт куч билан алмаштириш мумкин деган хулосага келамиз.

6.5 - §. Жуфтнинг момент-вектори

Жуфт кучнинг жисмга таъсири (худди фазодаги кучнинг нуқтага нисбатан моменти каби) қуйидаги учта фактор: жуфт моменти-нинг модули, жуфтнинг таъсир текислиги ва айланиш йўналиши билан характерланади. Қайд этилган учта факторни аниқлаш учун жуфт моменти у ётган текисликка перпендикуляр йўналган ва модуль жиҳатдан жуфт моментининг абсолют қиймати $|\vec{M}| = F_1 \cdot h = F_2 \cdot h$ га тенг $\vec{M}$ вектори билан ифодаланади. $\vec{M}$ векторини ўнг винт қондаси бўйича, яъни унинг мусбат йўналишидан қаралганда жуфт жисмни соат стрелкаси ҳаракатига тескари айлантиришга интиладиган қилиб йўналтирамиз (6.5- расм).

Жуфтнинг жисмга таъсирини ўзгартирмай ўзининг таъсир текислигида (3.5 - §) ёки унга параллел текисликда ихтиёрий ҳолатга кўчириш мумкин бўлганидан (3.6 - §), жуфт моменти векторини жисмнинг ихтиёрий нуқтасига ўзига параллел равишда кўчириш мумкин. Бинобарин, *жуфт моменти вектори эркин вектор бўлади.*

(3.10) га биноан, $\vec{M} = M_A(\vec{F}_2) = M_B(\vec{F}_1)$; 6.4-расмдан кўрамизки, $\vec{M}$, $\vec{M}_A(\vec{F}_2)$, $\vec{M}_B(\vec{F}_1)$ векторларнинг йўналиши бир хил бўлади. Шу сабабли



6.5- расм.

$$\vec{M} = \vec{M}_A(\vec{F}_2) = \vec{M}_B(\vec{F}_1) \quad (6.13)$$

тенглик ўриқлидир.

Шундай қилиб, ҳар бир жуфтга битта жуфт момент-вектори мос келади, бироқ бирор жуфт момент-векторига параллел текисликларда ётувчи сон-саноқсиз эквивалент жуфтлар мос келади.

6.6-§. Фазодаги жуфтларни қўшиш

Теорема. Кесишувчи текисликларда ётувчи иккита жуфт куч моментни берилган жуфтлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг битта жуфтга эквивалентдир.

Исбот. Кесишувчи Π_1 ва Π_2 текисликларда ётувчи, моментлари мос равишда $\vec{M}_1$ ва $\vec{M}_2$ га тенг жуфтлар берилган бўлсин (6.6-расм). Π_1 ва Π_2 текисликларнинг кесишган чизиғида бирор $AB = d$ кесмани олиб, берилган жуфтларни ўз текислигида умумий d елкага келтирамиз. Натижада 6.6-расмда тасвирланганидек, Π_1 текисликда ётувчи $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ ва Π_2 текисликда ётувчи $(\vec{F}_3, \vec{F}_4)$ жуфт кучларни оламиз. Бу жуфтлар моментларининг модули қуйидагича аниқланади:

$$M_1 = F_1 \cdot d, \quad M_2 = F_3 \cdot d. \quad (6.14)$$

A ва B нуқталарга қўйилган $\vec{F}_1, \vec{F}_3$ ва $\vec{F}_2, \vec{F}_4$ кучларни қўшамиз:

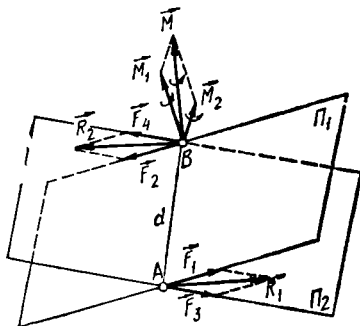
$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_1 &= \vec{F}_1 + \vec{F}_3, \\ \vec{R}_2 &= \vec{F}_2 + \vec{F}_4. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Натижада $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ ва $(\vec{F}_3, \vec{F}_4)$ жуфт кучлар битта $(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ жуфтга эквивалент бўлади. (6.13), (6.15) ва (6.1) га асосан бу жуфтнинг момент-вектори қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_A(\vec{R}_2) = \vec{AB} \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_4) = \vec{AB} \times \vec{F}_2 + \vec{AB} \times \vec{F}_4 = \\ &= \vec{M}_A(\vec{F}_2) + \vec{M}_A(\vec{F}_4) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$



6.6- расм.

$\vec{M}_1$ ва $\vec{M}_2$ момент-векторларига қурилган параллелограмм моментлар параллелограмми дейилади. Бу параллелограммнинг диагонали миқдор ва йўналиш жиҳатдан $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ ва $(\vec{F}_3, \vec{F}_4)$ жуфтларни қўшиш натижасида олинган $(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ тенг таъсир этувчи жуфтнинг моментини ифодалайди. Чунки моментлар па-

параллелограммининг томонлари $\vec{F}_1, \vec{F}_3$ ва $\vec{F}_2, \vec{F}_4$ кучларга қурилган параллелограммининг томонларига перпендикуляр бўлгани учун моментлар параллелограммининг диагонали ($\vec{R}_1, \vec{R}_2$) тенг таъсир этувчи жуфт текислигига перпендикуляр йўналади ва модули $M = R_1 \cdot d$ бўлади. ■

Агар фазода параллел бўлмаган текисликларда ётувчи ва моментлари $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ га тенг жуфтлар системаси берилса, исботланган теоремага асосан жуфтларни кетма-кет қўшиб, битта тенг таъсир этувчи жуфтни оламиз. Бу жуфтнинг моменти берилган жуфтлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n.$$

ёки

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_v. \quad (6.17)$$

Бир неча кучларнинг тенг таъсир этувчиси куч кўпбурчаги усулида топилгани каби (2.1-§) тенг таъсир этувчи жуфтнинг моменти ҳам кўпбурчак усулида аниқлаш мумкин: тенг таъсир этувчи жуфтнинг моменти берилган жуфтларнинг момент-векторларига қурилган кўпбурчада биринчи жуфт момент-векторининг бошини n -жуфтнинг момент-вектори учи билан туташтирувчи ёпувчи томони билан характерланади.

Агар жуфт кучлар параллел текисликларда ётса, бундай жуфтларни 6.4-§ да исботланган теоремага асосан битта текисликка кўчириш мумкин. Маълумки (3.6-§), бундай жуфтлар системаси битта жуфтга эквивалент бўлиб, унинг моменти берилган жуфтлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади.

(6.17) дан фойдаланиб, фазодаги жуфтлар системасининг мувозанат шартларини келтириб чиқариш мумкин. Фазодаги жуфтлар системаси битта тенг таъсир этувчи жуфтга эквивалент ва унинг моменти (6.17) дан аниқлангани учун жуфтлар мувозанатда бўлганда $\vec{M} = 0$ ёки

$$\sum \vec{M}_v = 0 \quad (6.18)$$

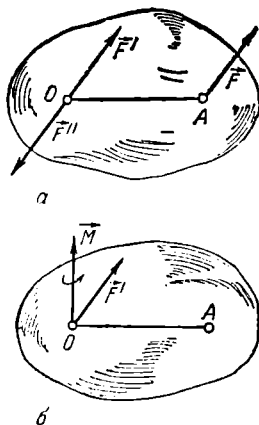
шарт бажарилиши керак. Бинобарин, фазодаги жуфтлар моментларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлса, бундай жуфтлар системаси мувозанатда бўлади.

Жуфтлар системаси мувозанатининг аналитик ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$\sum M_{vx} = 0, \quad \sum M_{vy} = 0, \quad \sum M_{vz} = 0. \quad (6.19)$$

Шундай қилиб, фазодаги жуфтлар моментларининг ҳар бир координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, бундай жуфтлар системаси мувозанатда бўлади.

6.7-§. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасини бир нуқтага келтириш



6.7- расм.

Фазодаги кучлар системасини бир нуқтага келтириш учун (худди текисликдаги кучлар системаси каби, 4.2- §) Пуансо усулидан фойдаланиш мумкин. A нуқтага қўйилган $\vec{F}$ кучни ихтиёрий O нуқтага кўчириш учун O нуқтага $\vec{F}' = \vec{F}$ ва $\vec{F}'' = -\vec{F}$ кучларни қўямиз (6.7- расм, а). Натижада A нуқтага қўйилган $\vec{F}$ куч O нуқтага қўйилган $\vec{F}' = \vec{F}$ кучга ва моменти $\vec{M}$ га тенг ($\vec{F}$, $\vec{F}''$) қўшилган жуфтга эквивалент бўлади ҳамда

$$\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F}). \quad (6.20)$$

Бу ҳол 6.7-расм, б да тасвирланган.

Жисмнинг $A_1, A_2, \dots, A_n$ нуқталарига фазода ихтиёрий йўналган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсир этсин (6.8- расм, а).

Келтириш маркази учун ихтиёрий O нуқтани танлаб, барча кучларини шу марказга қўшилган жуфтлари билан келтираемиз. Натижада келтириш маркази O нуқтага қўйилган

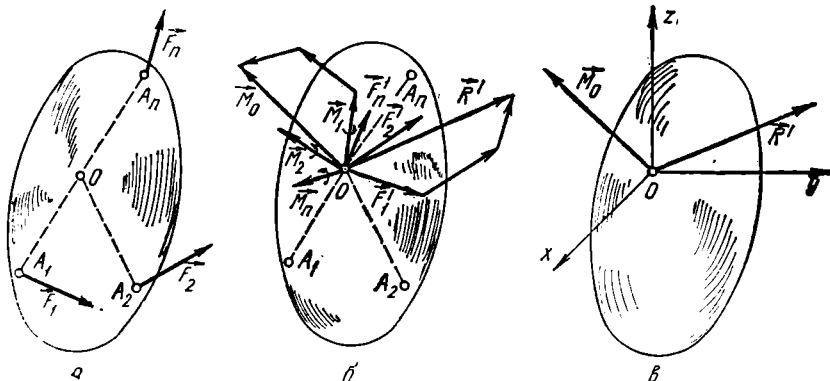
$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n \quad (6.21)$$

кучлар системаси ва моментлари

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1), \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n) \quad (6.22)$$

бўлган $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$ қўшилган жуфтлар системаси ҳосил бўлади (6.8-расм, б); аниқлик учун расмда $n=3$ ҳолни кўрилган.

$n=3$.



6.8- расм.

О нуқтага қўйилган $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n'$ кучларни геометрик қўшиб, битта $\vec{R}'$ кучни оламир: $\vec{R}' = \sum \vec{F}_v'$ ёки (6.21) га асосан

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}_v'. \quad (6.23)$$

Худди текисликдаги кучлар системаси каби барча кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлган $\vec{R}'$ катталиққа фазодаги кучлар системасининг бош вектори дейилади.

$(\vec{F}_1, \vec{F}_1''), (\vec{F}_2, \vec{F}_2''), (\vec{F}_n, \vec{F}_n'')$ фазовий жуфтларни қўшиб, моменти $\vec{M}_0$ га тенг битта жуфтни оламир. Бу жуфтнинг моменти (6.17) га асосан қуйидагича аниқланади. $\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_v$ ёки (6.22) ни эътиборга олсак,

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_v). \quad (6.24)$$

$\vec{M}_0$ га $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системасининг келтириш марказига нисбатан бош моменти дейилади. Бинобарин, фазодаги кучлар системасининг бирор марказга нисбатан бош моменти ташкил этувчи кучларнинг шу марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди: фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасини бирор О марказга келтириш натижасида бу кучлар системаси келтириш марказига қўйилган бош вектор $\vec{R}'$ га тенг битта куч билан моменти $\vec{M}_0$ га тенг битта жуфтга эквивалент бўлади (6.8-расм, в).

6.8-расмда моменти бош моментга тенг битта жуфт куч тасвирланмаган. Бунга сабаб, 6.5-§ да таъкидланганидек, жуфт моменти векторига параллел текисликларда ётувчи сон-саноксиз жуфтлар мос келади.

6.8-§. Фазодаги кучлар системаси бош вектори ва бош моментининг аналитик ифодалари

Бош вектор ва бош моментнинг миқдор ҳамда йўналишини аналитик усулда аниқлаш учун координата бошини келтириш маркази О нуқтада оламир (6.8-расм, в). $\vec{F}_v$ куч қўйилган нуқтанинг координаталарини x_v, y_v, z_v ҳамда $\vec{F}_v$ кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини X_v, Y_v, Z_v билан белгилаймиз. (6.23) ни координата ўқларига проекциялаб, бош вектор $\vec{R}'$ нинг Ox, Oy, Oz ўқларидаги проекцияларини оламир:

$$R'_x = \sum X_v, R'_y = \sum Y_v, R'_z = \sum Z_v. \quad (6.25)$$

Бош векторнинг модули

$$R' = \sqrt{(\sum X_v)^2 + (\sum Y_v)^2 + (\sum Z_v)^2} \quad (6.26)$$

формула ёрдамида, бош векторнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчак косинуслари эса

$$\cos(\widehat{\vec{R}', x}) = \frac{R'_x}{R'}, \quad \cos(\widehat{\vec{R}', y}) = \frac{R'_y}{R'}, \quad \cos(\widehat{\vec{R}', z}) = \frac{R'_z}{R'} \quad (6.27)$$

формулалар билан аниқланади.

(6.24) ни координата ўқларига проекциялаб, кучнинг ўққа нисбатан моменти билан шу ўқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан моменти орасидаги (6.8) муносабатни эътиборга олсак,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_v)]_x = \sum M_x(\vec{F}_v), \\ M_y &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_v)]_y = \sum M_y(\vec{F}_v), \\ M_z &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_v)]_z = \sum M_z(\vec{F}_v) \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

ёки кучнинг ўққа нисбатан моменти (6.9) орқали ифодаласак,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum (y_v Z_v - z_v Y_v), \\ M_y &= \sum (z_v X_v - x_v Z_v), \\ M_z &= \sum (x_v Y_v - y_v X_v) \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

формулалар ўринли бўлади. (6.10) муносабатга кўра бош моментнинг модули қуйидагича аниқланади:

$$M_O = \sqrt{[M_x(\vec{F}_v)]^2 + [M_y(\vec{F}_v)]^2 + [M_z(\vec{F}_v)]^2}. \quad (6.30)$$

Координата ўқлари билан ташкил қилган бурчак косинуслари эса

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O, x}) = \frac{M_x}{M_O}, \quad \cos(\widehat{\vec{M}_O, y}) = \frac{M_y}{M_O}, \quad \cos(\widehat{\vec{M}_O, z}) = \frac{M_z}{M_O} \quad (6.31)$$

формулалардан топилади.

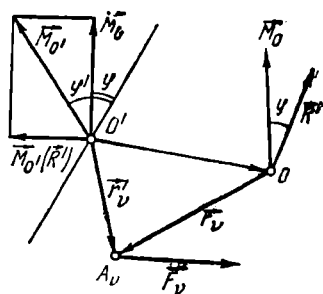
6.9-§. Фазодаги кучлар системасининг инвариантлари

Берилган кучлар системасини унга эквивалент бўлган система билан алмаштиришда ўзгармай қоладиган вектор ёки скаляр катталик *кучлар системасининг инварианти* дейилади.

Худди текисликдаги кучлар системаси каби фазодаги кучлар системасининг бош вектори ҳам берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади ва келтириш марказига боғлиқ бўлмайди. Яъни, кучлар системасининг бош вектори келтириш марказига нисбатан инвариант бўлади. Бош вектор $\vec{R}'$ *кучлар системасининг векторли инварианти* дейилади.

Келтириш марказини ўзгартириш натижасида бош момент қандай ўзгаришини кўрамыз. Фазодаги ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кучлар систе-

масини O марказга келтирганда унинг бош вектори $\vec{R}'$ ва бош моменти $\vec{M}_O$ га тенг бўлсин (6.9-расм). Келтириш маркази учун бошқа O' нуқтани олиб, бу нуқтага нисбатан ҳисобланган бош моментни $\vec{M}_{O'}$ билан белгилайлик. Агар A_v ($v = \overline{1, n}$) нуқтага қўйилган кучнинг O' нуқтага нисбатан радиус-векторини $\vec{r}_v$ билан белгиласак, у ҳолда (6.24) га би-



6.9- расм.

$$\vec{M}_{O'} = \sum \vec{M}_{O'}(\vec{F}_v) = \sum \vec{r}_v \times \vec{F}_v.$$

6.9-расмдан $\vec{r}_v = \vec{O'O} + \vec{r}_v$ бўлгани учун

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum (\vec{O'O} + \vec{r}_v) \times \vec{F}_v = \sum \vec{O'O} \times \vec{F}_v + \sum \vec{r}_v \times \vec{F}_v = \\ &= \vec{O'O} \times \sum \vec{F}_v + \sum \vec{r}_v \times \vec{F}_v = \vec{O'O} \times \vec{R} + \vec{M}_O. \end{aligned} \quad (6.32)$$

(6.3) га асосан $\vec{O'O} \times \vec{R} = \vec{M}_{O'}(\vec{R})$ бош векторнинг O' нуқтага нисбатан моментини ифодалайди. Бунинг назарда тутиб (6.32) ни қўйидагича ёзиш мумкин

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_{O'}(\vec{R}) + \vec{M}_O \quad (6.32)$$

ёки

$$\vec{M}_{O'} - \vec{M}_O = \vec{M}_{O'}(\vec{R}),$$

яъни келтириш марказини ўзгартириш натижасида бош моментнинг ўзгариши, аввалги келтириш маркази O га қўйилган кучлар системаси бош вектори $\vec{R}$ нинг янги келтириш маркази O' га нисбатан моментига тенг.

(6.33) да $\vec{M}_{O'}(\vec{R}) \perp \vec{R}$ эканлигини назарда тутиб, бу тенгликни бош вектор $\vec{R}$ га скаляр кўпайтирамиз:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_{O'} = \vec{R} \cdot \vec{M}_O \quad (6.34)$$

ёки

$$M_{O'} \cos \varphi' = M_O \cos \varphi, \quad (6.35)$$

бунда $\varphi' = \widehat{\vec{R}, \vec{M}_{O'}}$ ва $\varphi = \widehat{\vec{R}, \vec{M}_O}$.

Бинобарин, кучлар системаси бош векторининг бош моментга скаляр кўпайтмаси ёки бош моментнинг бош вектордаги проекция-

си, келтириш марказига боғлиқ бўлмаган ўзгармас катталиқдир. Бу катталик *фазодаги кучлар системасининг скаляр инварианти* дейилади.

6.10-§. Фазодаги кучлар системаси битта жуфтга ёки тенг таъсир этувчига келтириладиган ҳоллар. Вариньон теоремаси

Юқорида кўрганимиздек (6.7-§) жисмга таъсир этувчи фазода ихтиёрий жойлашган $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системасини O марказга келтириш натижасида бу кучлар системаси бош вектор $\vec{R}'$ га тенг битта куч билан моменти бош момент $\vec{M}_O$ га тенг битта жуфт кучга эквивалент бўлади.

Агар кучлар системасининг бош вектори $\vec{R}' = 0$, яъни берилган кучларга қурилган куч кўпбурчаги ёпиқ ҳамда бош моменти $\vec{M}_O \neq 0$ бўлса, бундай кучлар системаси моменти бош момент $\vec{M}_O$ га тенг битта тенг таъсир этувчи жуфтга келтирилади. Бу ҳолда (6.33) га асосан келтириш марказини O' га ўзгартирган билан жуфт моменти ўзгармайди:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O.$$

Тенг таъсир этувчи жуфтнинг моменти $\vec{M}_O$ эркин вектор бўлгани учун уни жисмнинг ихтиёрий нуқтасига қўйиш мумкин. Тенг таъсир этувчи жуфтнинг ташкил этувчилари эса, момент-вектори $\vec{M}_O$ га перпендикуляр ихтиёрий текисликда ётиши мумкин.

Қуйидаги икки ҳолда фазодаги кучлар системаси тенг таъсир этувчи кучга келтирилади:

1. Агар келтириш маркази деб танланган O нуқта учун

$$\vec{R}' \neq 0, \quad \vec{M}_O = 0$$

бўлса, у ҳолда фазодаги кучлар системаси берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг ва O нуқтага қўйилган битта кучга, яъни тенг таъсир этувчи $\vec{R}$ га эквивалент бўлади:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \propto \vec{R}$$

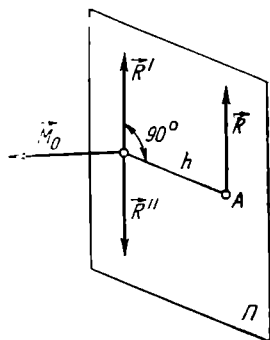
ҳамда

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

2. Агар келтириш маркази O нуқта учун

$$\vec{R}' \neq 0, \quad \vec{M}_O \neq 0$$

ҳамда бош момент $\vec{M}_O$ бош вектор $\vec{R}'$ га перпендикуляр бўлса, у ҳолда фазодаги кучлар системасининг скаляр инварианти $\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$ бўлиб, бундай кучлар система-си тенг таъсир этувчига келтирилишини ис-ботлаймиз. Бош вектор $\vec{R}'$ орқали бош мо-мент $\vec{M}_O$ га перпендикуляр Π текисликни ўтказамиз (6.10- расм). Моменти $\vec{M}_O$ га тенг бўлган $(\vec{R}', \vec{R}'')$ жуфтнинг ташкил этувчи-ларидан бири $\vec{R}''$ ни шундай танлаймизки, у миқдор жиҳатдан бош вектор $\vec{R}'$ га тенг, йўналиши эса.унга қарама-қарши бўлсин. У ҳолда $(\vec{R}, \vec{R}'')$ жуфт-нинг momenti



6.10- расм.

$$M_O = R' \cdot h = R \cdot h$$

формуладан аниқлангани учун жуфтнинг елкаси

$$h = \frac{M_O}{R'}$$

тенгликдан топилади. $(\vec{R}, \vec{R}'')$ жуфтнинг иккинчи ташкил этувчиси $\vec{R}$ O нуқтадан $\vec{M}_O$, $\vec{R}'$ лар ётган текисликка ўтказилган h перпендикулярнинг учига шундай қўйилганки, $\vec{M}_O$ векторнинг учидан қараганимизда $\vec{R}$ куч жиемни O нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда айлантиришга интилади. O нуқтага қўйилган $\vec{R}'$ ва $\vec{R}''$ кучлар мувозанатлашган кучлар системасини ташкил этади: $(\vec{R}', \vec{R}'') \propto 0$. Шу сабабли берилган кучлар систе-маси O' нуқтага қўйилган биргина $\vec{R}$ кучга эквивалент бўлади: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \propto \vec{R}$. Бунда $\vec{R}$ куч берилган кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини ифодалайди.

Демак, бирор O нуқтада бош вектор $\vec{R}'$ бош момент $\vec{M}_O$ га перпендикуляр йўналган бўлса, кучлар системаси бош вектор $\vec{R}'$ га параллел йўналган ва келтириш маркази O дан $OA = h = \frac{M_O}{R'}$ масофада ($\vec{M}_O$ йўналишига мос равишда) A нуқтага қўйилган тенг таъсир этувчи $\vec{R}$ кучга келтирилади.

Фазодаги кучлар тенг таъсир этувчисининг моментига оид қуйидаги *Вариньон теоремасини* исботлаймиз (текисликдаги кучлар системаси учун бу теорема 4.3-§ да исботланган):

Агар фазодаги кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилса, бу тенг таъсир этувчининг ихтиёрий нуқтага нисбатан моменти барча кучларнинг мазкур нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Исбот. Фазодаги $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системаси A нуқтага қўйилган $\vec{R}$ тенг таъсир этувчига келтирилади деб қарайлик. Ихтиёрий O нуқтани оламир ва келтириш марказини ўзгартириш натижасида бош моментнинг ўзгаришини ифодаловчи (6.33) тенгликка асосан система барча кучларининг O нуқтага нисбатан бош моменти учун қуйидаги ифодани ёзамиз:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{M}_A.$$

Берилган кучлар системаси A нуқтада тенг таъсир этувчига келтирилгани туфайли бош момент $\vec{M}_A = 0$ бўлади, бинобарин

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R}),$$

(6.24) формулага асосан бош момент $\vec{M}_O$ система барча кучларининг O нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i).$$

Охирги иккита тенгликни солиштириб, қуйидаги натижани оламир:

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (6.36)$$

(6.36) тенгликни O нуқтадан ўтувчи бирор Oz ўққа проекциялаймир:

$$[\vec{M}_O(\vec{R})]_z = \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_i)]_z.$$

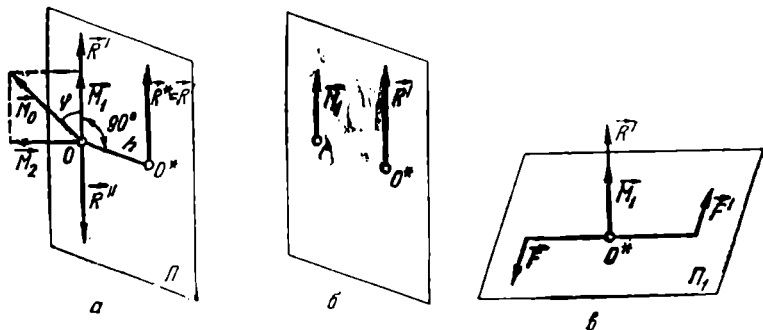
(6.8) тенгликка асосан охирги ифода қуйидагича ёзилади:

$$M_z(\vec{R}) = \sum M_z(\vec{F}_i). \quad (6.37)$$

Демак, фазодаги кучлар системаси тенг таъсир этувчисининг ихтиёрий ўққа нисбатан моменти мазкур кучларнинг ушбу ўққа нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

6.11-§. Фазодаги кучлар системасини динамик винтга келтириш

Кучлар системасини содда ҳолга келтириш билан шуғулланамиз. Берилган кучлар системасини O марказга келтириш натижасида бош вектор $\vec{R}'$ билан бош момент $\vec{M}_O$ орасидаги бурчак $\varphi \neq 90^\circ$ ҳолни текширамир (6.11-расм).



6.11- расм.

Бош момент $\vec{M}_O$ ни бош вектор $\vec{R}'$ бўйлаб йўналган $\vec{M}_1$ ва унга перпендикуляр йўналган $\vec{M}_2$ ташкил этувчиларга ажратамиз (6.11- расм, а):

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= |M_O \cos \varphi| = \frac{R' M_O |\cos \varphi|}{R'} = \frac{|\vec{R}' \cdot \vec{M}_O|}{R'} \\ M_2 &= |M_O \sin \varphi|. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

$\vec{M}_2 \perp \vec{R}'$ бўлгани учун, юқорида кўрганимиздек, моменти $\vec{M}_2$ га тенг жуфт ва $\vec{R}'$ бош векторни, O нуқтадан $\vec{M}_2$ га перпендикуляр ўтказилган Π текисликдаги

$$OO^* = \frac{M_2}{R'} = \frac{M_O |\sin \varphi|}{R'} \quad (6.39)$$

масофада, O^* нуқтага қўйилган $\vec{R}^* = \vec{R}'$ куч билан алмаштириш мумкин (6.11- расм, б).

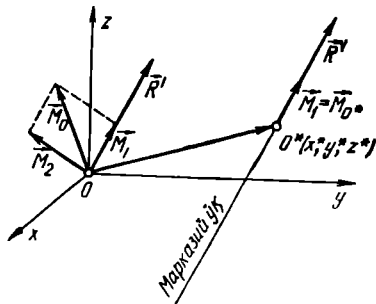
Берилган кучлар системаси учун $\vec{M}_1$ вектори ўзгармас бўлиб, келтириш марказига боғлиқ бўлмайди, шу сабабли уни ўзига параллел равишда O^* нуқтага келтирамиз (6.11- расм, в). Натижада берилган кучлар системаси O^* нуқтага қўйилган $\vec{R}^* = \vec{R}'$ кучга ва шу куч бўйлаб йўналган $\vec{M}_1$ моментли $(\vec{F}, \vec{F}')$ жуфтга келтирилади. Бу жуфт $\vec{M}_1$ га перпендикуляр Π_1 текисликда ётади.

Битта куч ва шу кучга перпендикуляр текисликда ётувчи жуфтдан ташкил топган система *динамик винт* дейилади.

Шундай қилиб, бош вектор нолдан фарқли ва бош моментга перпендикуляр бўлмаган ҳолда, яъни фазодаги кучлар системасининг скаляр инварианти $\vec{R}' \cdot \vec{M}_O \neq 0$ ҳолда кучлар системаси динамик винтга келтирилади. Тинч ҳолатдаги эркин жисмга куч таъсир этса, жисм илгариларама ҳаракат қилади; жуфт куч эса жисмни ай-

ланма ҳаракатга келтиради. Динамик винт таъсиридаги жисм илгарилама ва айланма ҳаракатда (яъни винт ҳаракатида) бўлади.

Фазодаги кучлар системаси динамик винтга келтириладиган O^* нуқта ягона эмас. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{M}_1$ вектори эркин вектор ҳамда $\vec{R}^* = \vec{R}'$ кучни таъсир чизиги бўйлаб кўчириш мумкин бўлгани туфайли $\vec{R}^* = \vec{R}'$ векторнинг таъсир чизигида ётувчи ихтиёрий нуқтада кучлар системаси динамик винтга келтирилади.



6.12- расм.

6.12 - §. Марказий ўқ тенгламаси

Фазода O^* нуқтани шундай танлаш керакки, берилган кучлар системаси шу нуқтада динамик винтни ташкил этсин, яъни бош вектор $\vec{R}'$ билан бош момент $\vec{M}_O$, бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналсин. Бу тўғри чизиқ берилган кучлар системасининг марказий ўқи дейилади.

Марказий ўқ тенгламасини аниқлаш учун $\vec{M}_O$ ва $\vec{R}'$ векторларнинг коллинеарлик шартидан фойдаланамиз (6.12-расм), яъни

$$\frac{\vec{M}_{0*}}{\vec{R}'} = p = \frac{|\vec{R}' \cdot \vec{M}_0|}{(R')^2}, \quad (6.40)$$

бунда p узунлик бирлигида ўлчанадиган ўзгармас катталиқ бўлиб, винт параметри дейилади. (6.32) га асосан O^* нуқтага нисбатан бош момент учун

$$\vec{M}_{O^*} = \overrightarrow{O^*O} \times \vec{R}' + \vec{M}_O = \vec{M}_O - \overrightarrow{OO^*} \times \vec{R}'$$

Бўлганидан (6.40) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\vec{M}_O - \vec{OO}^* \times \vec{R}'}{\vec{R}'} = p. \quad (6.41)$$

(6.41) марказий ўқ тенгламасининг векторли ифодасидир.

Марказий ўқ тенгламасининг аналитик ифодасини ёзиш учун ихтиёрий O нуқтада x, y, z координата ўқларини ўтказамиз.

О нуқтага кучларни келтириш натижасида бош вектор $\vec{R}'$ ва бош момент $\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ га (бунда $\vec{M}_1 \perp \vec{M}_2$, $\vec{M}_1 = \vec{M}_O$.) эга бўлайлик. Агар $\vec{M}_O$, $\vec{R}'$, OO^* векторларнинг проекцияларини мос равишда

$$\vec{M}_O(M_x, M_y, M_z), \vec{R}'(R'_x, R'_y, R'_z), O\vec{O}^*(x^*, y^*, z^*)$$

билан белгиласак, (6.38) ва (6.40) га асосан марказий ўқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан ҳисобланган *динамик винт бош моментининг аналитик ифодаси*

$$M_1 = \frac{|R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z|}{\sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2}}, \quad (6.42)$$

винт параметри

$$\rho = \frac{|R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z|}{\sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2}}, \quad (6.43)$$

марказий ўқ тенгламаси

$$\begin{aligned} \frac{M_x - (y^* R'_z - z^* R'_y)}{R'_x} &= \frac{M_y - (z^* R'_x - x^* R'_z)}{R'_y} = \\ &= \frac{M_z - (x^* R'_y - y^* R'_x)}{R'_z} \end{aligned} \quad (6.44)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

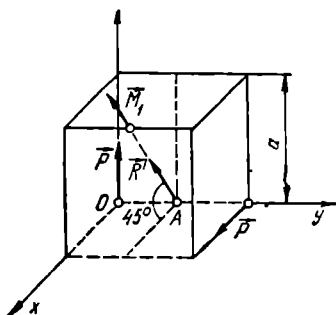
6.12-расмда $M_{O^*} < M_O$ ёки $M_1 < M_O$ тенгсизлик ўринли бўлгани учун марказий ўқда ётувчи барча нуқталарда бош момент минимум қийматга эришади ва (6.38) нинг биринчисидан аниқланади.

Қуйидаги жадвалда фазодаги кучлар системасини бир нуқтага келтириш ҳоллари кўрсатилган (4-ҳолнинг ўринли эканлиги 6.14-§ да берилган)

№№	$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O$	$\vec{R}'$	$\vec{M}_O$	Келтириш ҳоллари
1	$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O \neq 0$	$\vec{R}' \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	Динамик винт
2	$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$	$\vec{R}' \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$ $\vec{M}_O = 0$	Тенг таъсир ётувчи куч
3	$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$	$\vec{R}' = 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	Жуфт куч
4	$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$	$\vec{R}' = 0$	$\vec{M}_O = 0$	Кучлар системаси мувозанатда бўлади

Агар кучлар системаси бир текисликда (масалан, *Оху* текислигида) ётса, у ҳолда бош векторнинг z ўқдаги проекцияси ва бош моментнинг x ва y ўқлардаги проекциялари нолга тенг бўлади:

$$R'_z = 0, M_x = 0, M_y = 0.$$



6.13- расм.

Бу қийматларни

$$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z$$

га қўйсак, $\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$ бўлишини кўра-
миз. Шундай қилиб, текисликдаги
кучлар системаси жадвалдаги 2,3 ва
4-ҳолларга мос келади.

Худди шунингдек, агар фазодаги
кучлар системаси z ўққа параллел бўл-
са, уларнинг x ва y ўқлардаги проек-
циялари ҳамда z ўққа нисбатан мо-
ментлари нолга тенг бўлади, яъни

$$R'_x = 0, R'_y = 0, M_z = 0.$$

Бинобарин, бу ҳолда ҳам кучларнинг скаляр инварианти

$$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z = 0$$

бўлиб, фазодаги кучлар системасини бир нуқтага келтириш жадвал-
даги 2,3 ва 4-ҳолларга мос келади ва текисликдаги кучлар систе-
маси ёки фазодаги параллел кучлар системаси динамик винтга кел-
тирилмайди.

Фазодаги кучларни содда (каноник) ҳолга келтиришга оид қуйи-
даги масалани ечамиз.

6.1- масала. Кубнинг иккита қирраси бўйича $\vec{P}$ куч қўйилган (6.13- расм).
Шу кучлар системаси содда ҳолга келтирилсин.

Ечиш. Бу хилдаги масалалар қуйидаги тартибда ечилади:

1. Координаталар бошини кучлар келтириладиган нуқтада оламиз. Берилган
масалада координата ўқларини 6.13- расмдагидек йўналитирамиз.

2. (6.25—6.27) га асосан бош вектор $\vec{R}'$ нинг миқдор ва йўналишини аниқ-
лаймиз:

$$R'_x = \sum X_v = P, R'_y = \sum Y_v = 0, R'_z = \sum Z_v = P,$$

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2} = P\sqrt{2},$$

$$\cos(\vec{R}', \hat{x}) = \frac{R'_x}{R'} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \vec{R}', \hat{x} = 45^\circ,$$

$$\cos(\vec{R}', \hat{y}) = \frac{R'_y}{R'} = 0, \quad \vec{R}', \hat{y} = 90^\circ,$$

$$\cos(\vec{R}', \hat{z}) = \frac{R'_z}{R'} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \vec{R}', \hat{z} = 45^\circ.$$

(6.28) га асосан:

$$M_x = \sum M_x(\vec{F}_v) = 0, M_y = \sum M_y(\vec{F}_v) = 0,$$

$$M_z = \sum M_z(\vec{F}_v) = -aP.$$

3. Динамик винт бош моментини (6.42) га асосан аниқлаймиз:

$$M_1 = \frac{|R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z|}{\sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2}} = Pa \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Марказий ўқ тенгламасини тузамиз. Бош вектор ва бош моментнинг координата ўқларидаги аниқланган проекцияларини назарда тутиб, (6.44) тенгламадан қуйидаги муносабатни оламиз

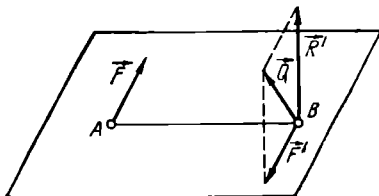
$$\frac{0 - (y^* P - z^* \cdot 0)}{P} = \frac{0 - (z^* P - x^* P)}{0} = \frac{-aP - (x^* \cdot 0 - y^* \cdot P)}{P}.$$

Бунда $z^* = z_1 = 0$ деб қараб, марказий ўқнинг Oxy текислиги билан кесишган $A(x_1, y_1, 0)$ нуқтанинг координаталарини аниқлаймиз: $x_1 = 0, y_1 = \frac{a}{2}$.

Марказий ўқнинг йўналиши бош вектор $\vec{R}'$ йўналиши билан бир хил бўлгани учун марказий ўқ 6.13-расмдагидек, $A(0, \frac{a}{2}, 0)$ нуқта ва кубининг маркази орқали ўтади.

6.13-§. Фазодаги кучлар системасини иккита ўзаро кесишмайдиган кучларга келтириш

Фазодаги кучлар системаси динамик винтга келтирилган деб қарайлик. Динамик винтни бош вектор $\vec{R}'$ га тенг куч ҳамда ташкил этувчилари $\vec{F}$ ва $\vec{F}'$ га тенг жуфтдан иборат деб қараш мумкин (6.14-расм). B нуқтага қўйилган жуфт ташкил этувчи кучлардан бири $\vec{F}'$ ни $\vec{R}$ билан геометрик қўшиб, уларнинг йиғиндисини $\vec{Q}$ билан белгилаймиз. Натижада берилган кучлар системаси фазодаги параллел бўлмаган ва кесишмайдиган иккита кучлар: A нуқтага қўйилган $\vec{F}$ ва B нуқтага қўйилган $\vec{Q}$ га эквивалент бўлади.



6.14- расм.

6.14-§. Фазодаги кучлар системасининг мувозанат шартлари

Теорема. Фазодаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун

$$\vec{R}' = 0, \vec{M}_O = 0 \quad (6.45)$$

тенгликларнинг бажарилиши, яъни кучлар системасининг бош вектори ва ихтиёрый келтириш марказига нисбатан бош momenti нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Зарурлиги. Агар $\vec{R}'$ ва $\vec{M}_O$ нолдан фарқли бўлса, бундай кучлар системаси мувозанатда бўла олмайди, чунки жуфт кучни битта куч билан мувозанатлаш мумкин эмас. Агар $\vec{R}' = 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ бўлса, кучлар системаси битта жуфтга келтирилади ёки $\vec{M}_O = 0$, $\vec{R}' \neq 0$ бўлган ҳолда кучлар системаси келтириш марказига қўйилган битта тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади. Ҳар иккала ҳолда ҳам кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун (6.45) нинг бажарилиши зарурий шарт ҳисобланади.

Етарлилиги. (6.45) шартлар бажарилса, келтириш маркази O га қўчирилган барча кучлар ҳам, қўшилган жуфтлар системаси ҳам нолга эквивалент бўлади. Яъни берилган кучлар системаси мувозанатлашган кучлар системасини ташкил этади.

(6.45) шартлар фазодаги кучлар системаси мувозанатининг векторли ифодасидир. (6.45) нинг геометрик маъноси қуйидагича: фазодаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучлар кўпбурчаги ва берилган кучларнинг исталган келтириш марказига нисбатан момент векторларига қурилган кўпбурчак ёпиқ бўлиши керак.

(6.26) ва (6.30) ни назарда тутиб, (6.45) ўрнига қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_v = 0, \quad \sum Y_v = 0, \quad \sum Z_v = 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_z(\vec{F}_v) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

Бу тенгламалар фазодаги кучлар системаси мувозанатининг аналитик шартларини ифодалайди: фазодаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун барча кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларининг ва кучларнинг учта координата ўқларига нисбатан моментларининг йиғиндиси алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Кучлар системаси мувозанатининг қуйидаги учта хусусий ҳолини алоҳида кўрамиз:

1. Бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси. Агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ бир нуқтада кесувчи кучлар системасини ташкил этса, келтириш маркази учун кучларнинг таъсир чизиқлари кесишган нуқтани оламиз. Натижада барча кучларнинг таъсир чизиқлари учала координата ўқларини кесиб ўтади ва кучларнинг мазкур ўқларга нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Бинобарин, (6.46) даги охириги учта тенглама айниятга айланади.

Шундай қилиб, бир нуқтада кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламаларини аввал келтириб чиқарилган (2.10) кўринишида оламиз:

$$\sum X_v = 0, \quad \sum Y_v = 0, \quad \sum Z_v = 0.$$

* Кучларнинг ўққа нисбатан моментларини ҳисоблашда (6.29) дан ҳам фойдаланиш мумкин.

2. Текисликдаги кучлар системаси. Агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ бир текисликда ётувчи кучлар системасини ташкил этса, кучлар ётган текислик учун Oxy текислигини оламиз. Кучлар z ўққа перпендикуляр текисликда жойлашгани туфайли уларнинг z ўқдаги проекциялари нолга тенг. Кучларнинг таъсир чизиқлари Ox ва Oy ўқларига параллел ёки кесиб ўтгани учун ҳар иккала ҳолда ҳам кучларнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Натижада (6.46) нинг учинчи, тўртинчи ва бешинчи тенгламаларни айнитга айланади. Барча кучлар Oxy текислигида ётганлиги сабабли уларнинг z ўқига нисбатан моментлари координаталар боши O га нисбатан кучлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади. Шу сабабли текисликдаги кучларнинг мувозанат тенгламаларини илгари чиқарилган (4.9) кўринишида ёзиш мумкин:

$$\sum X_v = 0, \sum Y_v = 0, \sum M_O(\vec{F}_v) = 0.$$

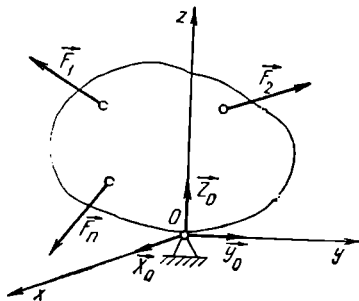
3. Фазодаги параллел кучлар системаси. Агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ фазодаги параллел кучлар системасидан иборат бўлса, z ўқни кучларга параллел йўналтирамиз. Кучларнинг таъсир чизиқлари Oxy текислигига перпендикуляр бўлгани учун уларнинг Ox ва Oy ўқлардаги проекциялари нолга тенг бўлади. Кучлар z ўққа параллел бўлгани учун кучларнинг z ўққа нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Натижада (6.46) даги биринчи, иккинчи ва олтинчи тенгламалар айнитга айланади ва фазодаги параллел кучларнинг мувозанат шартлари қуйидагича ёзиладн:

$$\sum Z_v = 0, \sum M_x(\vec{F}_v) = 0, \sum M_y(\vec{F}_v) = 0. \quad (6.47)$$

6.15-§. Бир нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисмнинг мувозанат шартлари

Юқорида чиқарилган (6.46) кўринишидаги мувозанат тенгламалари эркин қаттиқ жисмга қўйилган кучлар системаси учун ўринли бўлади. Боғланишдаги жисмларнинг мувозанатини аниқлашда боғланишдан бўшатиш ҳақидаги аксиомадан фойдаланамиз.

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсиридаги жисм O нуқтада сферик шарнир воситасида маҳкамланган бўлсин (6.15-расм). Қўзғалмас нуқтани координаталар боши учун қабул қиламиз. Берилган кучлар қаторига сферик шарнир реакция кучининг ташкил этувчилари $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$ ва $\vec{Z}_O$ ларни қўшиб, (6.46) га асосан мувозанат тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:



6.15- расм.

$$\left. \begin{aligned} \sum X_v + X_0 = 0, \quad \sum Y_v + Y_0 = 0, \quad \sum Z_v + Z_0 = 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_z(\vec{F}_v) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

Охирги учта тенгламада номаълум реакция кучлари қатнашмайди ва бу тенгламалар мувозанат шартларини ифодалайди. Бу шартларнинг векторли ифодасини

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_v) = 0 \quad (6.49)$$

шаклида ёзиш мумкин.

(6.49) дан кўрамизки, агар актив кучларнинг қўзғалмао нуқтага нисбатан момент-векторларининг геометрик йиғиндисини нолга тенг бўлса, битта нуқтаси билан маҳкамланган жисм мувозанатда бўлади. Бошқача айтганда, битта нуқтаси билан маҳкамланган жисм мувозанатда бўлиши учун берилган кучлар системаси қўзғалмас нуқтадан ўтувчи

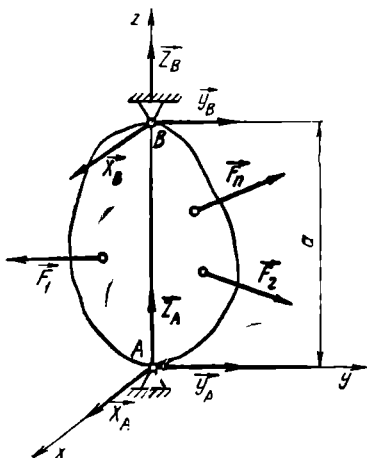
$$\vec{R} = -\vec{R}_0 \quad (6.50)$$

тенг таъсир этувчига келтирилиши керак. (6.48) нинг биринчи учта тенгламасидан қўзғалмао нуқтадаги реакция кучи $\vec{R}_0$ нинг координата ўқларидаги проекциялари аниқланади:

$$X_0 = -\sum X_v, \quad Y_0 = -\sum Y_v, \quad Z_0 = -\sum Z_v.$$

Бу тенгламалар (6.50) векторли тенгламанинг координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди.

6.16-§. Иккита нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисмнинг мувозанат шартлари



6.16- расм.

Иккита A ва B нуқталари сферик шарнир билан маҳкамланган жисм $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсирида мазкур нуқталар орқали ўтувчи ўқ атрофида айланиши мумкин. Координаталар бошини A нуқтада олиб, z ўқни A ва B нуқталар орқали ўтказамиз (6.16- расм). Қўзғалмас нуқталарнинг реакция кучларини координата ўқларининг мусбат йўналиши бўйича йўналган $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ ташкил этувчиларга ажратамиз. Жисм мувозанатда бўлиши учун унга қўйилган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ кучлар мувозанат шартлари (6.46) ни қаноатлантириши керак:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_v + X_A + X_B &= 0, \\ \sum Y_v + Y_A + Y_B &= 0, \\ \sum Z_v + Z_A + Z_B &= 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v) - Y_B \cdot a &= 0, \\ \sum M_y(\vec{F}_v) + X_B \cdot a &= 0, \\ \sum M_z(\vec{F}_v) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

бунда a билан A ва B нуқталар орасидаги масофа белгиланган. Охирги тенгламада реакция кучлари қатнашмайди, шу сабабли бу тенглама иккита нуқтаси маҳкамланган қаттиқ жисмининг мувозанат шартини ифодалайди: *иккита нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисм мувозанатда бўлиши учун актив кучларнинг қўзғалмас нуқталардан ўтувчи ўққа нисбатан моментларининг йиғиндисини нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Тўртинчи ва бешинчи тенгламалардан топилган

$$Y_B = \frac{1}{a} \sum M_x(\vec{F}_v), \quad X_B = -\frac{1}{a} \sum M_y(\vec{F}_v)$$

қийматларни биринчи ва иккинчи тенгламаларга қўйиб X_A ва Y_A ларни аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{1}{a} \sum M_y(\vec{F}_v) - \sum X_v, \\ Y_A &= -\frac{1}{a} \sum M_x(\vec{F}_v) - \sum Y_v. \end{aligned}$$

(6.51) нинг учинчисидан реакция кучларининг z ўқи бўйлаб йўналган ташкил этувчиларининг йиғиндисини аниқлаш мумкин

$$Z_A + Z_B = -\sum Z_v, \quad (6.52)$$

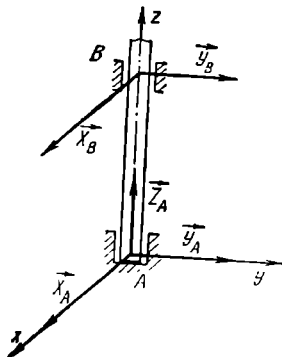
яъни масала статик аниқмасдир. Техникада бу аниқмасликни ҳал қилиш учун A нуқтада таянч подшипник, B нуқтада цилиндрик подшипник ўрнатиш мумкин (6.17-расм). Бу ҳолда $Z_B = 0$ бўлади.

6.2- масала. Оғирлиги $P = 20$ кН бўлган бир жинсли тўғри бурчакли плита A сферик шарнир ва B цилиндрик шарнир воситасида деворга бириктирилган бўлиб, уни CE арқон горизонтал ҳолда ушлаб туради; $\widehat{ECA} = \widehat{BAC} = 30^\circ$ (6.18-расм.). Плитага унинг текислигида ўтувчи ва моменти $M = 5$ кНм га тенг жуфт куч ҳамда DC томоннинг ўртасидаги K нуқтага uz текислигига параллел текисликда ўтувчи ва DC га 60° бурчак остида таъсир этувчи $Q = 8\sqrt{3}$ кН куч қўйилган. $AB = 1$ м. Арқондаги тортилиш кучи ва таянч реакциялари аниқлансин.

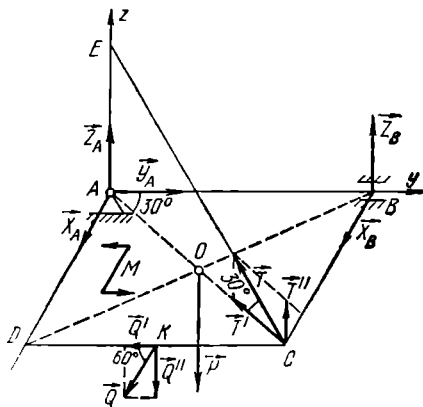
Ечиш. 1. Мувозанати текширилгётган жисм $ABCD$ тўғри бурчакли плитадан иборат. Плитани иккита нуқтаси билан маҳкамланган жисм деб қараш мумкин.

2. Координата ўқларини 6.18-расмдагидек танлаб оламиз.

3. Плитага таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз. Плитага оғирлик маркази O нуқтага қўйилган $P = 20$ кН оғирлик кучи; моменти $M = 5$ кНм га тенг жуфт куч; K нуқтага қўйилган ва DC билан 60° бурчак ташкил этувчи $Q = 8\sqrt{3}$ кН куч; CE ипининг таранглик кучи $\vec{T}$ ҳамда A



6.17- расм.



6.18- расм.

сферик шарнир ва B цилиндр шарнир реакциялари таъсир этади. A сферик шарнирнинг реакция кучини координата ўқларининг мусбат йўналишидаги $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ ташкил этувчиларга, B цилиндр шарнирнинг реакция кучларини цилиндр ўқиға перпендикуляр йўналган $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$ ташкил этувчиларга ажратамиз.

4. 6.18- расмдан фойдаланиб, мувозанат тенгламалари (6.46) ни тузамиз. Бунда $\vec{T}$ ва $\vec{Q}$ кучларининг x , y , z ўқларига нисбатан моментларини ҳисоблаш учун (6.37) кўринишидаги Вариньон теоремасидан фойдаланамиз, яъни $\vec{T}$ ва $\vec{Q}$ кучларни $\vec{T}'$, $\vec{T}''$, $\vec{Q}'$, $\vec{Q}''$ ($T' = T \cos 30^\circ$, $T'' = T \cos 60^\circ$, $Q' = Q \cos 60^\circ$, $Q'' = Q \cos 30^\circ$) ташкил этувчиларга ажратиб, уларнинг мазкур ўқларга нисбатан моментларининг йиғиндисини аниқлаймиз. У ҳолда

$$\sum X_v = 0; X_A + X_B - T \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; Y_A - T \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - Q \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Z_v = 0; Z_A + Z_B - P - Q \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_v) = 0; -P \cdot \frac{AB}{2} + Z_B \cdot AB + T \cdot AB \cos 60^\circ - Q \cos 30^\circ \cdot DK = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_v) = 0; P \cdot \frac{AD}{2} - T \cdot AD \cos 60^\circ + Q \cos 30^\circ \cdot AD = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_v) = 0; X_B \cdot AB + M - Q \cdot \cos 60^\circ \cdot AD = 0,$$

бунда $AD = AB \tan 30^\circ$, $DK = \frac{AB}{2}$.

5. Тенгламалар системасини ечиб, номаълумларни аниқлаймиз:

$$X_B = \frac{M}{AB} - Q \cos 60^\circ \cdot \tan 30^\circ = 1 \text{ кН}, \quad T = \frac{1}{\cos 60^\circ} \left(\frac{P}{2} - Q \cos 30^\circ \right) = 8 \text{ кН},$$

$$X_A = -X_B + T \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = 2,46 \text{ кН},$$

$$Y_A = T \cos^2 30^\circ + Q \cos 60^\circ = 12,93 \text{ кН},$$

$$Z_B = \frac{P}{2} - T \cos 60^\circ + \frac{Q}{2} \cos 30^\circ = 12 \text{ кН},$$

$$Z_A = -Z_B + P + Q \cos 30^\circ - T \cos 60^\circ = 16 \text{ кН}.$$

7-606. ПА РАЛЛЕЛ КУЧЛАР МАРКАЗИ ВА ОФИРЛИК МАРКАЗИ

*«Менга таянч нуқтасини беринглор,
Ерни ўз ўрнидан силжитаман!»*

Архимед

7.1-§. Параллел кучларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлаш. Параллел кучлар маркази

Бу бобда тенг таъсир этувчига келтириладиган параллел кучлар системаси қаралади. 6.9-§ да кўрганнимиздек, фазодаги параллел кучлар учун скаляр инвариант $\vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$ бўлиб, бундай кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилиши учун

$$\vec{R}' \neq 0 \quad (7.1)$$

тенгсизлик бажарилиши керак.

Жисмга (7.1) тенгсизлиكنи қаноатлантирувчи ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) параллел кучлар системаси таъсир этсин. Кучларнинг қўйилган нуқталарини мос равишда $A_1, A_2, \dots, A_n$ ва $Oxuz$ координаталар системасига нисбатан бу нуқталарнинг радиус-векторларини $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ билан белгилаймиз (7.1-расм). Маъкур кучларнинг тенг таъсир этувчисини ва унинг қўйилган нуқтасини аниқлаймиз.

Агар берилган кучларнинг таъсир чизиқларига параллел бўлган бирлик векторни $\vec{e}$ билан белгиласак, у ҳолда ихтиёрий $\vec{F}_v$ кучни

$$\vec{F}_v = F_v^* \vec{e} \quad (7.2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $\vec{F}_v$ куч $\vec{e}$ вектор йўналиши билан бир хил бўлса, $F_v^* = F_v$; $\vec{F}_v$

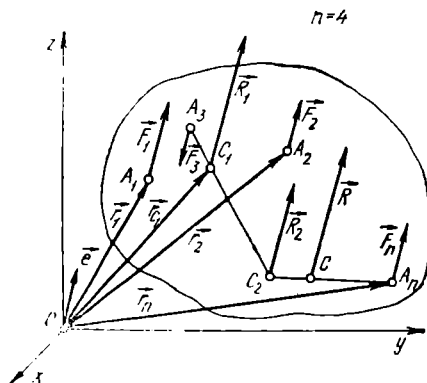
га $\vec{e}$ бир-бирига қарама-қарши йўналса, $F_v^* = -F_v$.

Аввало $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ кучларни қўшамиз ва уларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{R}_1$ билан белгилаймиз. (3.1) га асосан

$$R_1^* = F_1^* + F_2^*. \quad (7.3)$$

Бунда $\vec{R}_1$ билан $\vec{e}$ бир хил йўналгани учун $R_1^* = R_1$.

(3.2) га асосан F_1^* ва F_2^* орасида қуйидаги муносабат ўринли:



$$\frac{F_1^*}{C_1 A_2} = \frac{F_2^*}{A_1 C_1} \text{ ёки } \frac{\vec{A_1 C_1}}{F_2^*} = \frac{\vec{C_1 A_2}}{F_1^*}. \quad (7.4)$$

Агар $\vec{R}_1$ қўйилган C_1 нуқтанинг радиус-векторини r_{C_1} билан белгиласак, у ҳолда 7.1-расмдан қуйидагини оламиз:

$$\vec{A_1 C_1} = \vec{r_{C_1}} - \vec{r_1}, \quad \vec{C_1 A_2} = \vec{r_2} - \vec{r_{C_1}} \quad (7.5)$$

(7.5) ни (7.4) га қўйиб, $\vec{r_{C_1}}$ ни аниқлаймиз:

$$\vec{r_{C_1}} = \frac{F_1^* \vec{r_1} + F_2^* \vec{r_2}}{F_1^* + F_2^*} \quad (7.6)$$

(7.3) тенгликни ва $F^* = -F_3$ эканлигини назарда тутиб, $\vec{R}_1$ ва $\vec{F}_3$ кучларни қўшамиз. (3.5) га асосан

$$R_2^* = R_1 - F_3 = F_1^* + F_2^* + F_3^* = \sum_{v=1}^3 F_v^*,$$

$$\vec{r_{C_2}} = \frac{R_1^* \vec{r_{C_1}} + F_3^* \vec{r_3}}{R_1^* + F_3^*} = \frac{F_1^* \vec{r_1} + F_2^* \vec{r_2} + F_3^* \vec{r_3}}{F_1^* + F_2^* + F_3^*} = \frac{\sum_{v=1}^3 F_v^* \vec{r_v}}{\sum_{v=1}^3 F_v^*}.$$

Худди шунингдек, n та параллел кучларни қўшиш натижасида C нуқтага қўйилган битта тенг таъсир этувчи $\vec{R}$ кучни оламиз (аниқлик учун расмда $n = 4$ ҳоли кўрсатилган):

$$R^* = \sum_{v=1}^n F_v^*, \quad (7.7)$$

$$\vec{r_C} = \frac{\sum_{v=1}^n F_v^* \vec{r_v}}{\sum_{v=1}^n F_v^*}. \quad (7.8)$$

Бунда $\vec{R}$ куч $\vec{e}$ бирлик вектор билан бир хил йўналса, $R^* = R$; $\vec{R}$ ва $\vec{e}$ бир-бирига қарама-қарши йўналса, $R^* = -R$ бўлади.

Агар параллел кучлар бир томонга йўналса, $\vec{e}$ ни шу кучлар йўналишида олиб, (7.7) ва (7.8) да (*) ишорасни тушириб ёзиш мумкин.

(7.8) формула ёрдамида аниқланадиган C нуқта *параллел кучлар маркази* дейилади.

Параллел кучлар марказининг координаталарини x_C, y_C, z_C ; $\vec{F}_v$ куч қўйилган нуқтанинг координаталарини x_v, y_v, z_v билан белгиласак, (7.8) дан параллел кучлар марказининг координаталари аниқланадиган қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$x_c = \frac{\sum_{v=1}^n F_v^* x_v}{\sum_{v=1}^n F_v^*}, \quad y_c = \frac{\sum_{v=1}^n F_v^* y_v}{\sum_{v=1}^n F_v^*}, \quad z_c = \frac{\sum_{v=1}^n F_v^* z_v}{\sum_{v=1}^n F_v^*}. \quad (7.9)$$

(7.8) ва (7.9) формулалардан кўриниб турибдики, фазодаги параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган S нуқтанинг ҳолати кучларнинг йўналишига боғлиқ бўлмай, уларнинг миқдори ва қўйилган нуқталарнинг координаталарига боғлиқдир. Шу сабабли кучларнинг қўйилган нуқталарни ўзгартирмай, барча кучларни бирор α бурчакка бурсак, кучларнинг тенг таъсир этувчиси ҳам мос равишда α бурчакка бурилади ва қўйилган нуқтасининг ҳолати ўзгармайди.

(7.8) даги $\sum F_v^* r_v$ катталик берилган кучлар системасининг S марказга нисбатан статик моменти дейилади.

(7.9) даги $\sum F_v^* x_v$, $\sum F_v^* y_v$, $\sum F_v^* z_v$ катталиклар берилган кучлар системасининг мос равишда yOz xOz ва xOy текисликларга нисбатан статик моментлари дейилади.

Агар координаталар болини параллел кучлар марказида олсак, $x_c = y_c = z_c = 0$ бўлади ва берилган кучлар системасининг параллел кучлар марказига нисбатан статик моментлари нолга тенг бўлади.

7.2-§. Жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш

Исталган қаттиқ жисмни жуда кичик заррачалардан ташкил топган деб қараш мумкин. Бундай заррачаларнинг ҳар бирига вертикал пастга йўналган $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, ... Ерга тортилмиш кучлари (оғирлик кучи) таъсир этади. Статика бўлимида ўрганиладиган жисмларнинг ўлчовлари Ернинг радиусига нисбатан жуда кичик бўлгани учун жисм айрим зарраларининг оғирлик кучини параллел кучлар деб қараш мумкин. Жисм барча зарралари оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчиси $P = \sum P_v$ жисмнинг оғирлик кучи дейилади ҳамда бу параллел кучларнинг маркази мазкур жисмнинг оғирлик маркази дейилади.

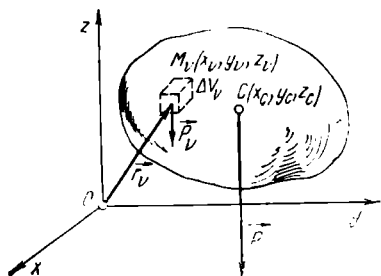
Жисм оғирлик марказининг радиус-вектори (7.8), координаталари (7.9) формулалар асосида аниқланади:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum P_v \vec{r}_v}{P},$$

$$x_c = \frac{\sum P_v x_v}{P}, \quad y_c = \frac{\sum P_v y_v}{P}, \quad z_c = \frac{\sum P_v z_v}{P}. \quad (7.10)$$

Бунда $\vec{r}_v(x_v, y_v, z_v)$ v —заррачанинг радиус-вектори; $\vec{r}_c(x_c, y_c, z_c)$ жисм оғирлик марказининг радиус-вектори (7.2-расм).

Жисмнинг оғирлик маркази геометрик нуқтадан иборат бўлиб, баъзида бу нуқта жисмга тааллуқли бўлмаслиги ҳам мумкин. Ма-



7.2- расм.

Агар жисм бир жинсли бўлса, оғирлик маркази унинг қандай материалдан ташкил топганига боғлиқ бўлмай, фақат геометрик шаклига боғлиқ бўлади. Келгусида асосан бир жинсли жисмларнинг оғирлик марказини аниқлаймиз.

Оғирлиги P га тенг жисм V ҳажмга эга бўлсин (7.2- расм). Агар бирлик ҳажмга тўғри келган оғирликни γ билан белгиласак, бир жинсли жисм учун $\gamma = \text{const}$ бўлади ҳамда жисм γ бўлакчасининг оғирлиги

$$P_v = \gamma \Delta V_v. \quad (7.11)$$

(7.11) ни (7.10) га қўйиб, ҳажмга эга бўлган жисм оғирлик марказининг радиус-вектори ва координаталарини аниқлаймиз:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \gamma \Delta V_v \vec{r}_v}{\sum \gamma \Delta V_v} = \frac{\sum \Delta V_v \vec{r}_v}{V}. \quad (7.12)$$

$$x_c = \frac{\sum \Delta V_v x_v}{V}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta V_v y_v}{V}, \quad z_c = \frac{\sum \Delta V_v z_v}{V}, \quad (7.13)$$

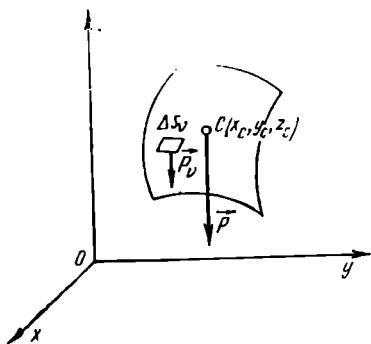
бунда $V = \sum \Delta V_v$ бутун жисм ҳажминини ифодалайди.

Жисмнинг бўлаклар сонини орттира бориб, (7.12) ва (7.13) даги йигиндиларда $n \rightarrow \infty$, $\Delta V_v \rightarrow 0$ бўлганда лимитга ўтсак, ҳажмга эга бўлган жисм оғирлик маркази учун қуйидаги интегралли ифодаларни оламиз:

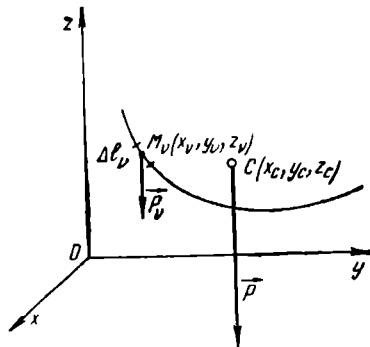
$$\vec{r}_c = \frac{\int_V \vec{r} dV}{V}, \quad (7.14)$$

$$x_c = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad y_c = \frac{\int_V y dV}{V}, \quad z_c = \frac{\int_V z dV}{V}. \quad (7.15)$$

Худди шунингдек, ихтиёрий сиртга эга бўлган пластинканинг оғирлик марказини аниқлаш учун қуйидаги формулалар ўришли бўлади (7.3- расм).



7.3- расм.



7.4- расм.

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \Delta s_v \vec{r}_v}{S}. \quad (7.16)$$

$$x_C = \frac{\sum \Delta s_v x_v}{S}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta s_v y_v}{S}, \quad z_C = \frac{\sum \Delta s_v z_v}{S} \quad (7.17)$$

ёки

$$\vec{r}_C = \frac{\int (S) x dS}{S}, \quad (7.18)$$

$$x_C = \frac{\int (S) x dS}{S}, \quad y_C = \frac{\int (S) y dS}{S}, \quad z_C = \frac{\int (S) z dS}{S}. \quad (7.19)$$

Бунда S — пластинка сиртининг юзаси, x, y, z эса dS элементар юзанинг координаталари.

Чизиқнинг оғирлик маркази қуйидагича аниқланади (7.4- расм):

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \Delta l_v \vec{r}_v}{l}, \quad (7.20)$$

$$x_C = \frac{\sum \Delta l_v x_v}{l}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta l_v y_v}{l}, \quad z_C = \frac{\sum \Delta l_v z_v}{l} \quad (7.21)$$

ёки

$$\vec{r}_C = \frac{\int (l) \vec{r} dl}{l}, \quad (7.22)$$

$$x_C = \frac{\int (l) x dl}{l}, \quad y_C = \frac{\int (l) y dl}{l}, \quad z_C = \frac{\int (l) z dl}{l}, \quad (7.23)$$

бунда l — чизиқнинг узунлиги; x, y, z эса dl бўлакча координаталари.

(7.12), (7.14), (7.16), (7.18), (7.20) ва (7.22) формулаларда каср суратидаги векторли катталиклар мос равишда *ҳажм*, *юза ёки чизиқнинг нуқтага нисбатан статик моментини* ифодалайди.

(7.13), (7.15), (7.17), (7.19), (7.21) ва (7.23) формулаларда — каср суратидаги скаляр катталиклар эса *ҳажм*, *юза ёки чизиқнинг мос координата текисликларига нисбатан статик моментини* ифодалайди.

Хусусан xOy текислигида жойлашган юзанинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментлари

$$\left. \begin{aligned} \int_{(S)} x dS &= x_C \cdot S, \\ \int_{(S)} y dS &= y_C \cdot S \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

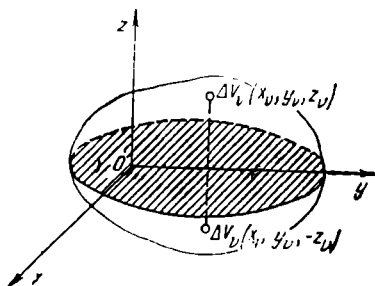
7.3-§. Оғирлик марказини аниқлаш усуллари

Жисмнинг оғирлик марказини топишнинг қуйидаги усулларини кўралик.

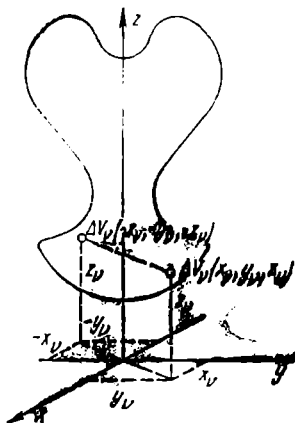
1. Симметрия усули. Агар бир жинсли жисм симметрия текислигига эга бўлса, оғирлик марказини топиш бирмунча соддалашади. xOy текислигини симметрия текислигида оламиз (7.5-расм). У ҳолда ҳар бир x_v , y_v , z_v координаталар билан аниқланадиган ΔV_v ҳажмли бўлакчага координаталари x_v , y_v , $-z_v$ бўлган ΔV_v ҳажмли бўлакча мос келади. Шу сабабли (7.13) да $z_v \Delta V_v$ кўпайтмаларнинг йиғиндиси жуфт-жуфт равишда нолга тенг бўлади. Бинобарин,

$$z_C = \frac{\sum z_v \Delta V_v}{V} = 0.$$

Шундай қилиб, *симметрия текислигига эга бўлган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази симметрия текислигида ётади.*



7.5- расм.



7.6- расм.

Агар жисм z симметрия ўқига эга бўлса (7.6-расм), у ҳолда ҳар бир x_v, y_v, z_v координаталар билан аниқланадиган ΔV_v ҳажмли бўлакчага координаталари $-x_v, -y_v, z_v$ бўлган ΔV_v ҳажмли бўлакча мос келади. Шу тўғрисида (7.13) да $x_v \Delta V_v, y_v \Delta V_v$ кўпайтмаларнинг йиғиндиси жуфт-жуфт равишда нолга тенг бўлади. Демак,

$$x_c = \frac{\sum x_v \Delta V_v}{V} = 0, \quad y_c = \frac{\sum y_v \Delta V_v}{V} = 0.$$

Бинобарин, симметрия ўқига эга бўлган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази симметрия ўқида ётади.

Худди шунингдек, симметрия нуқтасига эга бўлган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази шу нуқта билан устма-уст тушишини исботлаш мумкин. Масалан, бир жинсли доира ёки шарнинг оғирлик маркази унинг симметрия нуқтаси — геометрик маркази билан устма-уст тушади.

2. Бўлакларга ажратиш усули. Баъзида жисмни фикран шундай бўлакларга бўлиш мумкинки, бу бўлакларнинг оғирлиги ва оғирлик маркази олдиндан маълум бўлади. Бундай жисмларнинг оғирлик маркази (7.10) формулалар ёрдамида аниқланади. Хусусан, яси жисм учун бу формулаларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{S} \sum \vec{r}_v S_v, \quad (7.25)$$

$$x_c = \frac{1}{S} \sum x_v S_v, \quad y_c = \frac{1}{S} \sum y_v S_v, \quad (7.26)$$

бунда S_v — ясси жисм бирор бўлагининг юзаси, $\vec{r}_v$ — шу бўлакнинг радиус-вектори, S — ясси жисм юзаси.

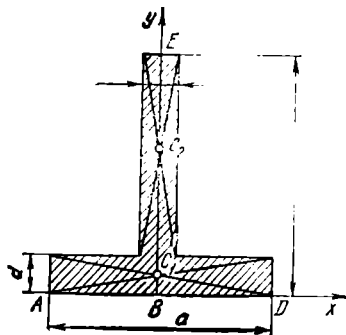
(7.12) ва (7.13) га асосан ҳажмга эга бўлган жисм ёки чизиқнинг оғирлик маркази аниқланадиган қуйидаги формулалар ўринли бўлади:

$$x_c = \frac{1}{V} \sum x_v V_v, \quad y_c = \frac{1}{V} \sum y_v V_v, \quad z_c = \frac{1}{V} \sum z_v V_v, \quad (7.13')$$

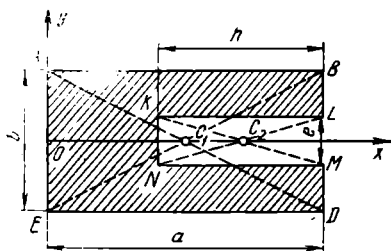
$$x_c = \frac{1}{l} \sum x_v l_v, \quad y_c = \frac{1}{l} \sum y_v l_v, \quad z_c = \frac{1}{l} \sum z_v l_v, \quad (7.21')$$

бунда V_v — жисм бирор бўлагининг ҳажми, l_v — берилган чизиқ бирор бўлагининг узунлиги; x_v, y_v, z_v лар эса мазкур бўлаклар оғирлик марказининг координаталаридир, V — жисмнинг ҳажмини, l — чизиқнинг узунлигини ифодалайди.

7.1-масала. Таврли кесимнинг оғирлик марказидан AD томонгача бўлган масофа топилсин; тавр баландлиги h деворининг қалинлиги b , тоқчасининг кенглиги $AD = a$, қалинлиги d га тенг (7.7-расм).



7.7- расм.



7.8- расм.

Ечиш. Қўрилайтган кесим, AD томонининг ўртасидан ўтувчи Bu симметрия ўқига эга. Шу сабабли унинг оғирлик маркази Bu ўқда ётади. Кесим юзасини фикран иккита тўғри тўртбурчакдан иборат юзага ажратамиз. Ажратилган тўртбурчакларнинг юзалари $S_1 = ad$, $S_2 = b(h - d)$; оғирлик марказининг ордипаталари мос равишда $y_1 = \frac{d}{2}$, $y_2 = d + \frac{h-d}{2} = \frac{h+d}{2}$

бўлгани учун берилган кесимнинг оғирлик марказини (7.26) га асосан аниқлаймиз:

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{d}{2} \cdot ad + \frac{h+d}{2} \cdot b \cdot (h-d)}{ad + b(h-d)} = \frac{ad^2 + bh^2 - bd^2}{2(ad + bh - bd)}$$

3. Манфий юза усули. Агар ясси жисмининг маълум қисмлари қирқиб ташланган бўлса, бундай жисмининг оғирлик марказини аниқлашда манфий юза қўшиш усулидан фойдаланилади. Бу усул бўлақларга бўлиш усулининг хусусий ҳоли бўлиб, унинг моҳияти шундан иборатки, жисмни қирқилмаган яхлит жисм ва қирқилган жисмлардан иборат деб қаралади; бунда қирқилган бўлақларнинг юзаси шартли равишда манфий деб олинади ҳамда оғирлик марказини аниқлашда (7.26) формулалардан фойдаланилади.

7.2- масала. Эни b ва бўйи a га тенг t ўғри тўртбурчак шаклидаги $ABDE$ тахтадан энг e ва бўйи h га тенг $KL MN$ тўғри тўртбурчак шаклидаги қисми кесиб олинган. KL га MN кесмалар $ABDE$ тўғри тўртбурчак томонларига мос равишда параллел. Тахта қолган қисмининг оғирлик маркази KN да ётиши учун h нинг узунлиги қандай бўлиши керак (7.8- расм).

Ечиш. Ox ўқни тахтанинг симметрия ўқни бўйлаб йўналтирамиз. У ҳолда тахтанинг оғирлик маркази x ўқда ётади ва $y_C = 0$.

Манфий юза усулидан фойдаланиб, берилган фигурани $ABDE$ яхлит тўртбурчак юзасидан ва юзаси манфий $KL MN$ тўртбурчакдан иборат деб қараймиз.

У ҳолда $x_1 = \frac{a}{2}$, $S_1 = ab$, $x_2 = a - \frac{h}{2}$, $S_2 = -eh$ эканлигини назарда тутиб, бу қийматларни (7.26) га қўямиз:

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{1}{2} a^2 b - eh \left(a - \frac{h}{2} \right)}{2(ab - eh)} = \frac{a^2 h - 2aeh + eh^2}{2(ah - eh)}.$$

Масаланинг шартига кўра тахта қолган қисмининг оғирлик маркази KN да ётиши учун $x_C = a - h$ бўлиши керак.

x_C нинг иккала қийматини бир-бирига тенглаб қуйидагини оламиз.

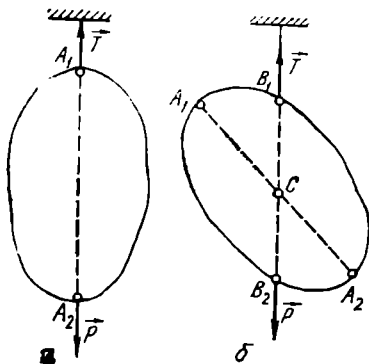
$$a - h = \frac{a^2 b - 2aeh + eh^2}{2(ab - eh)}.$$

Бундан h ни аниқлаш ушбу квадрат тенгламани ечишга келтирилади:

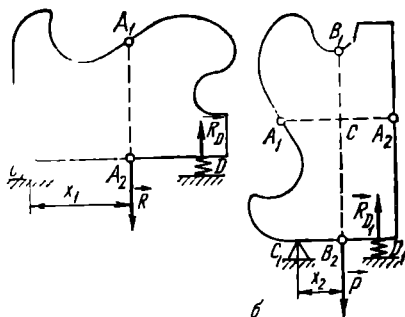
$$eh^2 - 2abh + a^2 b = 0.$$

Шундай қилиб,

$$h = \frac{ab - \sqrt{a^2 b^2 - a^2 be}}{e} = \frac{a}{l} [b - \sqrt{b(b-e)}].$$



7.9- расм.



7.10- расм.

Квадрат илдиз олдида мусбат ишора олинса, масала ечимга эга эмас. Чунки $b > e$ бўлгани учун квадрат илдиз олдида мусбат ишора олинганда $h > a \frac{b}{e} > a$; бунинг бўлиши мумкин эмас.

4. Тажриба усули. Бир жинсли бўлмаган ёки мураккаб шаклли ясси жисмларнинг оғирлик марказини аниқлашда қуйидаги тажриба усулларида ҳам фойдаланилади.

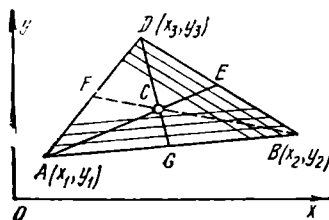
4.1. Илга осии усули. Ясси жисмнинг ихтиёрий A_1 нуқтасидан илга осамиз. Жисм иппинг реакция кучи ва оғирлик кучи таъсирида мувозанатда бўлади (7.9- расм, а). Оғирлик кучи $\vec{P}$ вертикал пастга йўналгани туфайли иппинг реакция кучи $\vec{T}$ вертикал юқорига йўналади. Иппинг йўналишини давом эттириб, расмда оғирлик кучининг таъсир чизиғини A_1A_2 билан белгилаймиз. Шу тарзда жисмни B нуқтасидан осиб, оғирлик кучининг таъсир чизиғи B_1B_2 ни аниқла миз (7.9- расм, б). Нагижада A_1A_2 ва B_1B_2 чизиқларнинг кесишган нуқтаси C берилган ясси жисмнинг оғирлик марказини ифодалайди.

4.2. Тарозиди тортиш усули. Ясси жисмни тарозига қўйиб, унинг оғирлиги P ни аниқлаймиз. Сўнг ясси жисмни C ва D нуқталарда иккита таянчга қўямиз. D нуқтадаги таянчга тарози қўямиз (7.10- расм, а). У ҳолда D нуқтанинг реакция кучи $\vec{R}_D$ миқдор жиҳатдан D нуқтадаги тарози кўрсатган оғирлик кучига тенг бўлади. Жисм таянч нуқталарининг реакция кучи ва оғирлик кучи таъсирида мувозанатда бўлади. Жисмнинг оғирлик кучи $\vec{P}$ ва D нуқтанинг реакция кучи маълум бўлгани учун C нуқтага нисбатан моментлар тенгласини тузиб, бу тенгламадан оғирлик кучининг таъсир чизиғига бўлган x_1 масофани аниқлаймиз. Расмда оғирлик кучининг таъсир чизиғи A_1A_2 билан белгиланган.

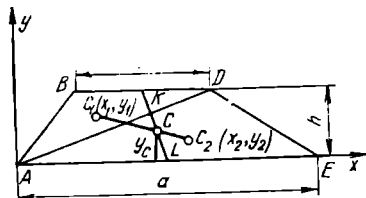
Худди шунингдек, жисмни 90° бурчакка айлантириб, C_1 ва D_1 таянчларга қўямиз. D_1 нуқтанинг реакция кучи миқдор жиҳатдан D_1 нуқтадаги тарози кўрсатган оғирлик кучига тенг бўлади. $\vec{P}$ ва $\vec{R}_{D_1}$ маълум бўлгани учун C_1 нуқтага нисбатан моментлар тенгласини тузиб, бу тенгламалардан оғирлик кучининг таъсир чизиғи B_1B_2 гача бўлган x_2 масофани аниқлаймиз. A_1A_2 ва B_1B_2 ларнинг кесишган нуқтаси C жисмнинг оғирлик марказини ифодалайди.

7.4-§. Оддий шаклли баъзи бир жинсли жисмларнинг оғирлик марказини аниқлаш

1. Учбурчак юзасининг оғирлик маркази. ABD учбурчакни AB томонга параллел бўлган кичик бўлақларга ажратамиз (7.11- расм). Бу бўлақлар ҳар бирининг оғирлик маркази унинг ўртасида ётади,



7.11- расм.



7.12- расм.

яъни учбурчакнинг оғирлик маркази DG медианада ётади. Шу тарзда учбурчак юзасини DB томонга параллел бўлақларга ажратсак, уларнинг оғирлик маркази AE медианада ётади. Бинобарин, учбурчак юзасининг оғирлик маркази унинг медианалари кесишган C нуқтада ётади.

Учбурчак ётган текисликда xOy текисликни ўтказиб, учбурчак учларининг координаталарини (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) билан белгиласак, аналитик геометрияда чиқарилган

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3), \quad y_C = \\ &= \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3)^* \end{aligned} \quad (7.29)$$

формулаларга биноан C нуқтанинг координаталари аниқланади. Маълумки, $CG = \frac{1}{3} DG$.

2. Трапециянинг оғирлик маркази. Асослари a ва b баландлиги h га тенг $ABDE$ трапеция юзасининг оғирлик марказини аниқлаш учун трапецияни AE асосга параллел бўлақларга ажратамиз (7.12-расм). Бу бўлақларнинг оғирлик маркази BD ва AE асосларнинг ўрталарини туташтирувчи KL чизиқда ётади. Бинобарин, трапециянинг оғирлик маркази ҳам шу чизиқда ётади. Трапеция оғирлик марказини аналитик усулда аниқлаш учун C нуқтанинг битта координатасини, масалан y_C ни топиш kifoya. y_C ни топиш учун трапецияни ABD ва ADE учбурчакларга ажратамиз. Бу учбурчакларнинг оғирлик марказини $C_1(x_1, y_1)$ ва $C_2(x_2, y_2)$ билан белгиласак, KL нинг C_1C_2 билан кесишган нуқтаси C трапециянинг оғирлик марказини ифодалайди. Бу учбурчаклар учун

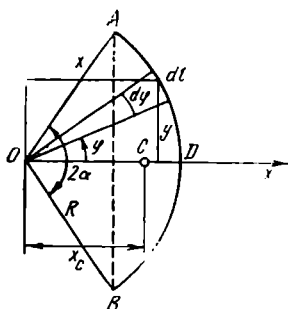
$$y_1 = \frac{2}{3}h, \quad S_1 = \frac{b \cdot h}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{3}h, \quad S_2 = \frac{ah}{2}$$

эканлигини эътиборга олиб, (7.26) га асосан қуйидагини ёзампз:

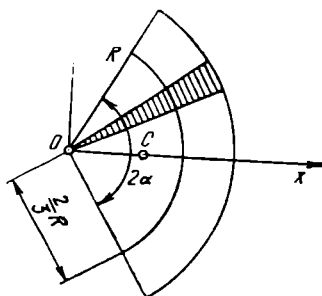
$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{2}{3}h \cdot \frac{bh}{2} + \frac{1}{3}h \cdot \frac{ah}{2}}{\frac{bh}{2} + \frac{ah}{2}} = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}.$$

3. Айлана ёйининг оғирлик маркази. Радиуси R , марказий бурчаги 2α га тенг ADB айлана ёйининг оғирлик марказини аниқлаймиз. Координаталар бошини айлананинг маркази O нуқтада олиб, x ўқни AB ватарга перпендикуляр йўналтирамиз.

* Ефимов Н. В. Аналитик геометрия қисқа курси. Т. Ўқитувчи, 1966, 2-боб, 7-§.



7.13- расм.



7.14- расм.

Айлананинг ёйи x ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун унинг оғирлик маркази x ўқда ётади ($y_C = 0$). 7.13- расмда $x = R \cos \varphi$, $dl = R d\varphi$, $l = 2R\alpha$ эканлигини эътиборга олиб, (7.23) нинг 1-формуласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x_C = \frac{\int_{(l)} x dl}{l} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \varphi d\varphi}{2R\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (7.30)$$

Хусусий ҳолда ярим айлана учун (7.30) да $\alpha = \frac{\pi}{2}$ эканлигини эътиборга олсак,

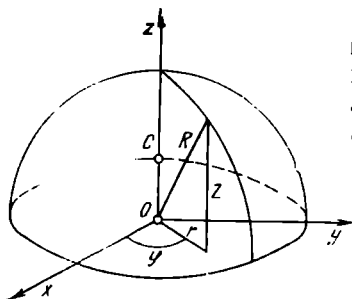
$$x_C = \frac{2R}{\pi} = 0,637 R. \quad (7.31)$$

4. Доира сектори юзасининг оғирлик маркази. Радиуси R , марказий бурчаги 2α га тенг доира сектори юзасининг оғирлик марказини аниқлаш учун x ўқни сектор юзасининг симметрия ўқи бўйлаб йўналтирамиз. 7.14- расмда кўрсатилганидек сектор юзасини бир қанча элементар секторлардан ташкил топган деб қараймиз. Ҳар бир элементар секторни баландлиги R га тенг учбурчак деб қарасак, унинг оғирлик маркази O нуқтадан $\frac{2}{3}R$ масофада ётади. Ён-нобарин, доира секторининг оғирлик маркази, радиуси $\frac{2}{3}R$ га тенг айлана ёйининг оғирлик маркази билан устма-уст тушади. (7.30) га асосан

$$x_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (7.32)$$

Ярим доира учун (7.32) да $\alpha = \frac{\pi}{2}$ эканлигини назарда тутсак,

$$x_C = \frac{4}{3\pi} R = 0,424 R. \quad (7.33)$$



7.15- расм.

5. Ярим шар ҳажмининг оғирлик маркази. Радиуси R га тенг ярим шар ҳажмининг оғирлик марказини аниқлаш учун z ўқни симметрия ўқи бўйлаб йўналтирамиз, y ҳолда $x_C = y_C = 0$ (7.15-расм). (7.15) га кўра

$$z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV,$$

$$\text{бунда } V = \frac{2}{3} \pi R^3$$

$z = \sqrt{R^2 - r^2}$ эканлигини назарда тутиб, r , φ , z цилиндрик координаталарга ўтамиз ва ярим шар ҳажми V бўйича уч қаррали интегрални ҳисоблаймиз*)

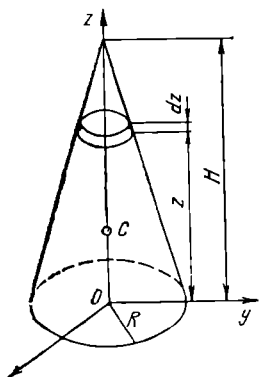
$$\begin{aligned} \int_{(V)} z dV &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z dz = 2\pi \int_0^R \frac{1}{2} (R^2 - r^2) r dr = \\ &= \pi \left[R^2 \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{1}{4} \pi R^4. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, ярим шарнинг оғирлик маркази

$$z_C = \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{3}{8} R. \quad (7.34)$$

формуладан аниқланади.

6. Доиравий конус ҳажмининг оғирлик маркази. Асосининг радиуси R ва баландлиги H га тенг конуснинг оғирлик марказини аниқлаш учун z ўқни конуснинг симметрия ўқи бўйлаб йўналтирамиз. 7.16-расмда кўрсатилганидек, конусни асосига параллел кесимлар билан чегараланган, ҳажми dV га тенг элементар бўлақлардан ташкил топган деб қараш мумкин. y ҳолда



7.16- расм.

$$dV = \frac{\pi(H-z)^2}{H^2} R^2 dz, \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

бўлгани учун (7.15) га асосан

$$z_C = \frac{\int_{(V)} z dV}{V} = \frac{\int_0^H z \frac{\pi(H-z)^2}{H^2} R^2 dz}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} = \frac{1}{4} H. \quad (7.35)$$

Шундай қилиб, доиравий конус ҳажмининг оғирлик маркази унинг асосидан баландликнинг $\frac{1}{4}$ қисмича масофада ётади.

Бу натижани ихтиёрий конус учун ҳам умумлаштириш мумкин.

*) Пискунов Н. С. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. Ўқитувчи Т., 1974, II т., 13- §. 215-бет.

7.5- §. Гюльден теоремалари

Швед астрономи Г Гюльден (1841—1896) исботлаган қуйндаги теоремалар чизиқ ва юзанинг оғирлик марказини аниқлашга тааллуқлидир.

1- теорема. *Ясси эгри чизиқни унинг текислигида ётувчи ва уни кесиб ўтмайдиган ўқ атрофида айлантириши натижасида олинган жисмнинг сирти мазкур чизиқнинг узунлиги билан бу чизиқ оғирлик маркази чизган айлана узунлигининг кўпайтмасига тенг.*

Исбот. xOy текислигида ётувчи, Oy ўқни кесмайдиган ва узунлиги l га тенг AB эгри чизиқ кесмаси берилган бўлсин (7.17- расм). AB эгри чизиқни жуда кичик dl бўлакларга бўламиз. dl кесмани Oy ўқ атрофида айлантириши натижасида ҳосил бўлган сиртнинг юзачини иккинчи тартибли чеккиз кичик миқдоргача аниқлик билан шунингдек сиртга тенг деб олиш мумкин:

$$dS = 2\pi x dl.$$

AB эгри чизиқнинг айланишидан ҳосил бўлган сиртни топиш учун охириги нфодани интеграллаймиз:

$$S = 2\pi \int_{(b)} x dl.$$

(7.23) га кўра $\int_{(b)} x dl = x_c l$, бунда x_c билан AB эгри чизиқ кесмаси оғирлик марказининг координатаси белгиланган.

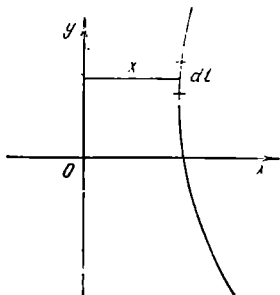
Шундай қилиб,

$$S = 2\pi x_c l. \quad (7.36)$$

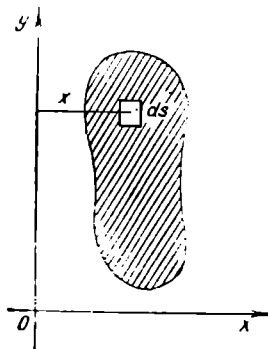
(7.36) дан берилган ясси эгри чизиқ оғирлик марказининг координатасини аниқлаш мумкин:

$$x_c = \frac{S}{2\pi l}.$$

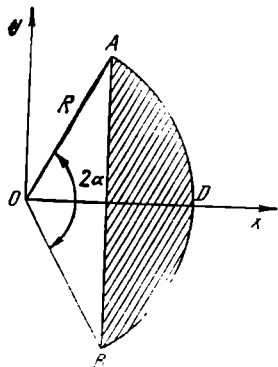
2- теорема. *Ясси фигурани унинг текислигида ётувчи ва уни кесиб ўтмайдиган ўқ атрофида айлантириши натижасида олинган жисмнинг ҳажми, мазкур фигура юзаси билан бу фигура*



7.17- расм.



7.18- расм.



7.19- расм.

оғирлик маркази чизган айлана узунлигининг кўрайтмасига тенг.

Исбот. 1. Oy текислигида ётувчи, Oy ўқни кесмайдиган ва юзаси S га тенг ясси фигура берилган бўлсин (7.18- расм). Берилган ясси фигура юзасини жуда кичик dS юзачаларга бўламиз. dS юзани Oy ўқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми иккинчи тартибли кичик миқдоргача аниқлик билан қуйндагича ифодаланади:

$$dV = 2\pi x dS,$$

бунда x билан dS юза оғирлик марказининг координатаси белгиланган. Берилган юзани Oy ўқ атрофида айлантириш натижасида олинган жисмнинг ҳажми

$$V = 2\pi \int_S x dS$$

формуладан аниқланади. (7.19) га биноан, $\int_S x dS = x_C S$. Бунда x_C билан ясси фигура оғирлик марказининг координатаси белгиланган. Шундай қилиб,

$$V = 2\pi x_C \cdot S. \quad (7.37)$$

(7.37) дан берилган ясси фигура оғирлик марказининг координатасини аниқлаш мумкин:

$$x_C = \frac{V}{2\pi S}.$$

7.3- масала. Радиуси R ва марказий бурчаги 2α га тенг (қўлдан AHB айлана ёйини Oy ўқ атрофида айлантириш натижасида олинган сиртнинг юзаси ҳамда штрихланган сегментни Oy ўқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми аниқлансин (7.19- расм).

Ечиш. (7.30) га кўра айлана ёйининг координатаси $x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$, айлана ёйининг узунлиги $l = 2R\alpha$.

x_C ва l нинг қийматини (7.36) га қўйиб, кезланиётган сирт юзасини аниқлаймиз:

$$S = 4\pi R^2 \sin \alpha.$$

Сегментни айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажми V ни топиш учун дастлаб сегментнинг оғирлик марказини аниқлаймиз. Шу мақсадда манфий юза усулидан фойдаланамиз. Берилган сегментни юзаси $S_1 = R^2 \alpha$ га тенг

доиравий сектордан ва $S_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2R \sin \alpha \cdot R \cos \alpha = -R^2 \sin \alpha \cos \alpha$ манфий юзали OAB учбурчакдан иборат деб қараймиз. (7.26) га асосан

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}, \quad (1)$$

бунда $x_1 = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$ — доиравий сектор оғирлик марказининг коор-

динатаси; $x_2 = \frac{2}{3} R \cos \alpha$ — OAB учбурчак юзасининг оғирлик маркази.

S_1 , S_2 ва x_1 , x_2 ларнинг қийматини (1) га қўйсак,

$$x_C = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha - \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{R^3 \alpha - R^3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Сегмент юзаси $S = S_1 - S_2 = R^2 (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$.

(7.37) га асосан изланаётган V ҳажмини аниқлайми :

$$V = 2\pi x_C \cdot S = \frac{4}{3} \pi R^3 \sin^3 \alpha.$$

II қисм. КИНЕМАТИКА

8-боб. НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

8.1-§. Асосий тушунчалар

Назарий механиканинг кинематика бўлимида нуқта ва абсолют қаттиқ жисмнинг механик ҳаракати фақат геометрик нуқтаи назардан, яъни уларнинг массалари ва таъсир этувчи кучларга боғлиқсиз равишда ўрганилади.

Ҳаракат тушунчаси ҳаракатланувчи жисм (объект), вақт ва фазо тушунчалари билан чамбарчас боғлиқдир.

Фазо (макон) бир вақтда мавжуд бўлган объектларнинг жойлашиш тартибини ифодалайди. Ф. Энгельс бундай деган эди: «Ҳар қандай борлиқнинг асосий формалари макон ва вақтдир» *) Классик механикада моддий жисмларнинг ҳаракати уч ўлчовли Евклид фазосига нисбатан текширилади ҳамда фазо абсолют қўзғалмас деб қаралади.

Жисмнинг механик ҳаракати бошқа бирор жисм билан бириктирилган ва *саноқ системаси* деб аталувчи координаталар системасига нисбатан текширилади. Саноқ системасини шартли равишда қўзғалмас деб олиш ёқн ҳаракатдаги жисмга бириктирилган деб қараш мумкин.

Моддий нуқтанинг саноқ системасига нисбатан ҳаракатини ўрганиш учун унинг координаталарини вақтнинг функцияси сифатида аниқлаш керак. Жисмнинг саноқ системасига нисбатан ҳаракатини ўрганишда эса мазкур жисм нуқталарининг координаталари билан бирга бурчак координаталарини ҳам киритишга тўғри келади.

Назарий механикада узунлик бирлиги сифатида СИ системасида метр (м), бурчак координаталари бирлиги учун радиан (рад) қабул қилинган.

Агар жисм барча нуқталарининг координаталари танлаб олинган саноқ системасига нисбатан доимо ўзгармасдан қолса, у ҳолда жисм мазкур системага нисбатан тинч ҳолатда бўлади. Агар вақтнинг ўтиши билан жисм нуқталарининг координаталари танланган саноқ системасига нисбатан ўзгара борса, жисм шу системага нисбатан ҳаракатда бўлади. Жисм бирор саноқ системасига нисбатан ҳаракатда бўлса,

*) Энгельс Ф. Анти Дюринг. Т., Ўзлавишир, 1957 й, 65-бет

иккинчи санок системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлиши мумкин. Шу нуқтан назардан ҳаракат тушунчаси нисбий характерга эга.

Вақт объектив бўлиқда рўй берувчи ҳодисаларнинг қанча давом этишини ифодалади. Класарий механикада вақт барча санок системалари учун бир хилда ўтади ва бир системанинг иккинчи системага нисбатан ҳаракатига боғлиқ эмас деб ҳисобланади, яъни вақт абсолют деб қаралади. Вақтни ўлчаш учун табиатда учрайдиган ва даврий такрорланувчи ҳодисалардан (масалан, Ернинг ўз ўқи атрофидаги айланишидан) ёки сунъий усулда ҳосил қилинадиган даврий такрорланувчи процесслардан (масалан, соат маятникнинг тебранма ҳаракатидан) фойдаланилади.

Дастлаб вақтнинг энг кичик бирлиги учун бир йилдаги ўртача
Қуёш суткасининг $\frac{1}{24 \cdot 3600}$ бўлагига тенг вақт—секунд қабул қилинган эди. Кузатишлар натижаси Ернинг ўз ўқи атрофида суткалик айланиш вақти ўзгариб бориши аниқланди. Сўнгра СИ системасида вақт бирлиги бир секунд (1с) учун 1900 тропик йилнинг $\frac{31556925,9747}{10^8}$ бўлагига тенг катталиги олинган. Вақт одатда t билан белгиланади. Вақтни ўлчаш бошланғич пайтдан (масалан, $t = 0$ дан) бошлаб ҳисобланади. Вақт икки маънода: берилган он (пайт, масалан, соат 5) ва маълум вақт оралиғи (масалан, 4 соат давомида) тарзида ишлатилади. Вақт бир ўлчамли ва у орқага қайтмайди, яъни вақт ўтмишдан келажакка қараб ривожланади деб ҳисоблаймиз.

Ҳаракати ўрганилаётган жисмни бир қанча нуқталар тўпламидан иборат деб қараш мумкин. Шу сабабли кинематикада аввало айрим нуқтанинг ҳаракати ўрганилади.

Таглаб олинган санок системасига нисбатан нуқтанинг ҳаракатини ўрганиш унинг шу системага нисбатан бирор вақт оралиғидаги траекториясини ва ҳар ондаги тезтик ҳамда тезланишини аниқлаш масаласидан иборат. Нуқта ҳаракатланганда унинг берилган санок системасига нисбатан чизган узлуксиз чизиги *нуқтанинг траекторияси* дейилади. Агар нуқта траекторияси тўғри чизиқдан иборат бўлса, унинг ҳаракати *тўғри чизиqli ҳаракат*, траекторияси эгри чизиқ бўлса, *эгри чизиqli ҳаракат* дейилади.

Нуқта ҳаракати ўрганилаётганда унинг кўчиши тушунчасига дуч келинади. Нуқтанинг ҳаракати ва кўчиши тушунчаларини бир-биридан фарқ қилиш керак. Нуқтанинг кўчиши унинг бошланғич ва охириги ҳолатлари ҳамда вақт оралиғи билан аниқланади, бунда нуқтанинг аввалги ҳолатдан кейинги ҳолатга қандай усул билан ўтиши эътиборга олинмайди. Ҳаракат тушунчасида эса нуқтанинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга вақтга боғлиқ равишда қандай усул билан ўтгани, яъни бошланғич ва охириги пайтлар орасидаги исталган вақт учун фазодаги ўрни ҳисобга олинади.

Нуқта кинематикасида қуйидаги икки асосий масала кўрилади: 1) берилган санок системасига нисбатан нуқтанинг ҳаракатини математик усулда аниқлаш; 2) нуқтанинг берилган ҳаракат қонунига

кўра мазкур ҳаракатнинг барча кинематик характеристикалари (траектория, тезлик, тезланиш ва ҳоказолар) ни аниқлаш.

Кинематика бўлимини ўрганишни векторнинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласини аниқлашдан бошлаймиз.

8.2- §. Векторнинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласи

Скаляр аргумент t нинг функциясида иборат бўлган ҳамда миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгарувчи $\vec{a}$ вектор берилган бўлсин:

$$\vec{a} = \vec{a}(t), \quad (8.1)$$

бунда $\vec{a}$ векторни t аргументнинг узлуксиз ва бир қийматли функцияси деб қараймиз.

Аргументнинг $t_1, t_2, t_3, \dots$ қийматларида $\vec{a}$ вектор мос равишда $\vec{a}_1 = \vec{a}(t_1), \vec{a}_2 = \vec{a}(t_2), \vec{a}_3 = \vec{a}(t_3), \dots$ катталикларга эга бўлсин. Агар бу ўзгарувчи векторларнинг бошини бирор қўзғалмас O нуқтада олсак, уларнинг учи фазода векторнинг годографи деб аталувчи $A_1, A_2, A_3, \dots$ чизиқни чизади (8.1-расм).

Вектор годографи тенгламасини Декарт координаталар системаси орқали ифодалаш учун O нуқтада Декарт координата ўқларини ўтказиб, (8.1) ни бу ўқларга проекциялаймиз (8.2-расм):

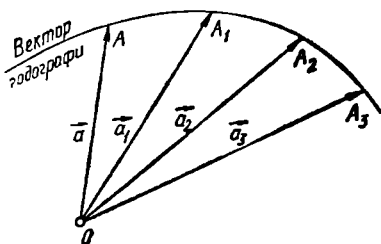
$$\left. \begin{aligned} x &= a_x(t), \\ y &= a_y(t), \\ z &= a_z(t). \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

(8.2) тенгламалар системаси *радиус-вектор годографининг параметрик тенгламалари* дейилади. (8.2) дан t параметрни йўқотиб, годограф тенгламасини икки цилиндрик сиртнинг кесишган чизиғи тарзида ифодалаш мумкин. Масалан, (8.2) нинг учинчи тенгламасини вақтга нисбатан ечиб,

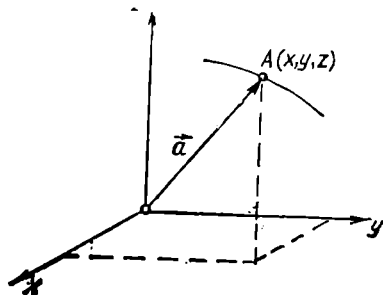
$$t = \varphi(z)$$

муносабатни олайлик. Буни (8.2) нинг биринчи иккита тенгламасига қўйиб

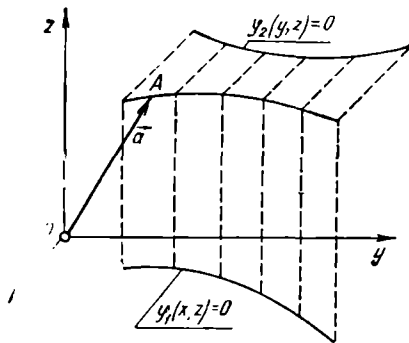
$$x = f_1(z), \quad y = f_2(z)$$



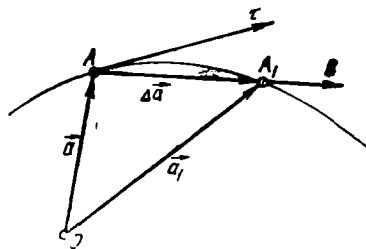
8.1- расм.



8.2- расм.



8.3- расм.



8.4- расм.

ёки

$$\varphi_1(x, z) = 0, \varphi_2(y, z) = 0 \quad (8.3)$$

системани оламиз. (8.3) нинг биринчиси годографнинг Oxz текисликдаги, иккинчиси Oyz текисликдаги проекциясини ифодалайди (8.3- расм). Шундай қилиб, годографни ясовчилари Ox ва Oz ўқларга параллел ва асослари (8.3) тенгламалар билан ифодаланадиган цилиндрлик сиртларнинг кесишган чизиғи деб қараш мумкин.

Ўзгарувчи $\vec{a}$ вектор аргументининг бир-бирига яқин t ва $t + \Delta t$ га мос келувчи қийматларини $\vec{a} = \vec{a}(t)$ ва $\vec{a}_1 = \vec{a}(t + \Delta t)$ билан белгилайлик (8.4- расм). $\vec{a}$ ва $\vec{a}_1$ векторларнинг учларини туташтириб, қуйидаги муносабатни ёзамиз:

$$\vec{a}_1 = \vec{a} + \Delta \vec{a}$$

ёки

$$\Delta \vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}.$$

Бунда $\Delta \vec{a}$ вектор $\vec{a}$ векторнинг аргумент Δt га ўзгаргандаги орттирмасини ифодалайди.

$\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}$ нисбатнинг Δt нолга интилгандаги limiti $\vec{a}$ векторнинг t скаляр аргумент бўйича ҳосиласи дейилади. Шундай қилиб,

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}. \quad (8.4)$$

$\frac{d\vec{a}}{dt}$ векторнинг йўналишини аниқлаймиз. Δt мусбат скаляр катталиқ бўлгани учун $\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}$ вектори $\Delta \vec{a}$ бўйича, яъни годографнинг AB кесувчиси бўйлаб йўналади. Δt нолга интилган лимит ҳолатида ке-

сувчи A нуқтада годографга ўтказилган At уринма бўйлаб йўналиди.

Демак, векторнинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласи мазкур векторнинг годографига ўтказилган уринма бўйича йўналган вектор билан ифодаланади.

(8.4) га асосан, векторнинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласи қуйидаги хоссаларга эга:

Агар $\vec{a}$ вектор миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас ($\vec{a} = \text{const}$) бўлса, у ҳолда $\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$.

2. Векторлар йиғиндисининг ҳосиласи векторлар ҳосилаларининг йиғиндисига тенг:

$$\frac{d(\vec{a} + \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

3. Векторларнинг скаляр ва векторли кўпайтмалари ҳосиласи учун

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}, \\ \frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}\end{aligned}$$

муносабатлар ўринли бўлади.

4. Агар $\lambda = \text{const}$ бўлса,

$$\frac{d(\lambda \vec{a})}{dt} = \lambda \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

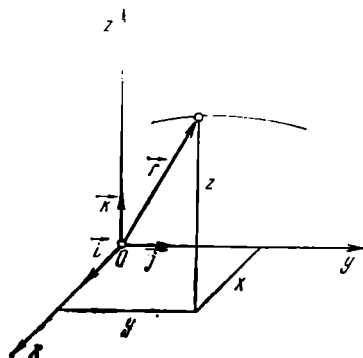
8.3-§. Нуқта ҳаракатини аниқлаш усуллари

Нуқтанинг бирор саноқ системасига нисбатан исталган вақтдаги ҳолатини аниқлаш усули маълум бўлса, унинг ҳаракати аниқланган ёки берилган дейилади; нуқтанинг ҳаракатини аниқловчи ифода унинг ҳаракат тенгламаси ёки ҳаракат қонуни дейилади.

Нуқтанинг ҳаракати асосан қуйидаги уч усулда аниқланади:

1) вектор усули; 2) координаталар усули; 3) табиий усул.

1. Вектор усули. M нуқта қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатда бўлсин. O ва M нуқталарни туташтириб, M нуқтанинг $\vec{r} = \vec{OM}$ радиус-векторини ҳосил қиламиз (8.5-расм). M нуқта ҳаракатланганда вақт ўтиши



8.5- расм.

билан унинг радиус-вектори $\vec{r}$ миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгара боради. Агар нуқтанинг радиус-вектори вақт функцияси сифатидан аниқланган ёки берилган бўлса, яъни

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (8.5)$$

маълум бўлса, нуқтанинг фазодаги ҳолати исталган пайтда аниқ бўлади. Бунда кўриладиган масалалар учун $\vec{r}(t)$ функция бир қийматли, узлуксиз ва камида иккинчи тартибли ҳосилга эга деб қараймиз. (8.5) *нуқта ҳаракатининг вектор кўринишидаги кинематик тенгламаси* дейилади. У нуқта траекториясининг векторли тенгламаси бўлиб, нуқтанинг ҳаракат қонунини ифодалайди. *Нуқта ҳаракатининг* шу тарзда аниқланиши (берилиши) унинг *вектор усулда ифодаланиши* дейилади.

$\vec{r}$ радиус-вектор учидagi M нуқтанинг геометрик ўрни унинг траекториясини, радиус-векторнинг эса годографи ифодалайди.

Агар $\vec{r} = \text{const}$ бўлса, M нуқта олинган саноқ системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлади.

2. Координаталар усули. Дастлаб нуқтанинг ҳолатини тўғри бурчакли Декарт координаталар системасига нисбатан аниқлаймиз. Ҳаракатдаги M нуқтанинг координаталарини x, y, z билан белгилаймиз (8.5-расм). Нуқта ҳаракатланганда вақт ўтиши билан унинг координаталари ўзгара боради, яъни x, y, z координаталар вақтнинг бир қийматли функциясидан иборат бўлади:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Агар (8.6) тенгламалар берилган бўлса, нуқтанинг исталган пайтдаги ҳолатини аниқлаш мумкин. (8.6) функционал муносабатлар воқеасида *нуқтанинг ҳаракатини* аниқлаш уни *координаталар усулида ифодалаш* дейилади. (8.6) ифодалар *нуқта ҳаракатининг Декарт координаталаридаги кинематик тенгламаларини* ифодалайди.

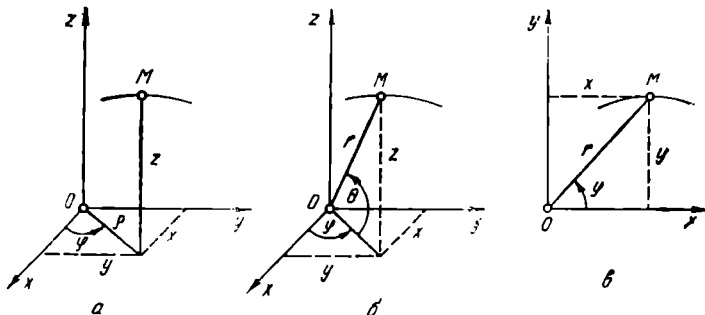
(8.6) тенгламалар нуқта траекториясининг параметрик тенгламаларини ифодалайди. Бунда параметр сифатида t вақт олинган.

(8.6) дан t вақтни йўқотиб, нуқта траекториясининг тенгламасини олиш мумкин.

M нуқтанинг O координаталар бошига нисбатан радиус-векторини $\vec{r}$, координата ўқларининг бирлик йўналтирувчи векторларини $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ билан белгиласак,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (8.7)$$

ўринли бўлади. (8.7) тенглик ҳаракатнинг векторли ва Декарт координаталари орқали аниқлаш усуллари орасидаги боғланишни ифодалайди.



8.6- расм

Агар M нуқта Oxy текислигида ҳаракатланса, унинг ҳаракати

$$x=x(t), y=y(t) \quad (8.6, a)$$

тенгламалар билан аниқланади.

Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатини битта

$$x=x(t) \quad (8.6, б)$$

координата билан аниқлаш мумкин.

Ҳаракатни Декарт координаталаридан ташқари цилиндрик ёки сферик координаталар системасида ҳам аниқлаш мумкин. Агар нуқта бир текисликда ҳаракатланса, қутб координаталар системасидан фойдаланиш мумкин.

Цилиндрик координаталар системасида нуқтанинг ҳолати ρ радиус, φ бурчак (кенглик) ва z аппликата билан аниқланади (8.6-расм, а). Агар

$$\rho=\rho(t), \varphi=\varphi(t), z=z(t) \quad (8.8)$$

берилган бўлса, нуқтанинг ҳаракати цилиндрик координаталарда аниқланган бўлади.

Сферик координаталар системасида нуқтанинг ҳолати қутб радиуси r , кенглик бурчаги φ ва қутб бурчаги θ билан аниқланади (8.6-расм, б). Агар

$$\vec{r}=\vec{r}(t), \varphi=\varphi(t), \theta=\theta(t) \quad (8.9)$$

берилган бўлса, нуқтанинг ҳаракатини сферик координаталарда аниқлаш мумкин.

Ҳаракат қутб координаталарида аниқланиши учун қутб радиуси r ва қутб бурчаги φ вақтнинг функцияси сифатида берилиши керак (8.6-расм, в).

$$r=r(t), \varphi=\varphi(t). \quad (8.10)$$

Декарт координаталарини цилиндрик ва сферик координаталар орқали мос равишда ушбу формулалар ёрдамида ифодалаш мумкин:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z; \quad (8.11)$$

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta. \quad (8.12)$$

Декарт ва қутб координаталари бир-бири билан

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (8.13)$$

тенгламалар воситасида боғланган.

3. Табиий усул. O_1xyz координаталар системасига нисбатан эгри чизиқли ҳаракатдаги нуқта траекториясининг тенгламасини

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0 \quad (8.14)$$

сиртларнинг кеснишган чизиғи деб қараш мумкин (8.7- расм, а). (8.14) траектория тенгламасини ифодалайди, бу тенгламалар ёрдамида нуқтанинг ҳаракатини аниқлаб бўлмайди. Чунки вақтнинг ўтиши билан мазкур траектория бўйича нуқта турлича қонунга қўра ҳаракат қилиши мумкин. Бошқача айтганда, эгри чизиқда санок боши учун олинган қўзғалмас O нуқтага нисбатан ҳисобланган M нуқтанинг ёй координатаси s вақтнинг ўтиши билан турлича ўзгариши мумкин (8.7- расм, б). Нуқтанинг траекториядаги ҳолатини бир қийматли аниқлаш учун ёй координатасининг мусбат ва манфий йўналишларини (чизмада «+» ва «-» ишора билан) оламиз.

Агар траектория тенгламаси ҳамда нуқта ёй координатасининг вақт ўтиши билан ўзгаришини ифодаладиган

$$s = s(t) \quad (8.15)$$

муносабат маълум бўлса, нуқтанинг ҳаракатини тўлиқ аниқлаш мумкин. Бунда $s(t)$ вақтнинг бир қийматли, узлуксиз ва дифференциалланувчи функциясидан иборат.

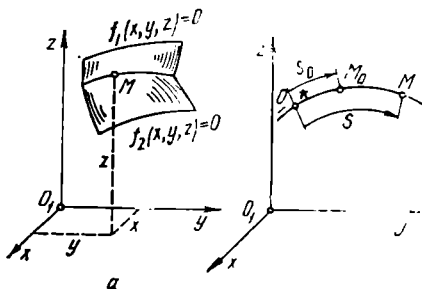
(8.15) тенглама нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракат қонунини ифодалайди.

(t, s) текислигида $s = s(t)$ муносабатни ифодаловчи эгри чизиқ нуқтанинг ҳаракат графиги дейилади.

Нуқтанинг ҳаракатини (8.14) ва (8.15) тенгламалар воситасида аниқлаш унинг табиий усулда аниқланиши дейилади.

Шундай қилиб, нуқтанинг ҳаракатини табиий усулда аниқлаш учун: 1) танланган координаталар системасига нисбатан траектория тенгламаси (8.14); 2) траекторияда санок боши учун олинган қўзғалмас O нуқта ҳамда ёй координатасининг мусбат ва манфий йўналиши; 3) нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракат қонунини ифодаловчи (8.15) тенглама берилган бўлиши керак.

Нуқтанинг ёй координатаси s билан траектория бўйлаб ўтган йўли σ доимо бир хил бўлавермайди. Агар $s = s(t)$ функция t вақтнинг монотон функциясидан иборат бўлса, яъни



8.7- расм.

нуқта доимо бир йўналишда ҳаракатланса, ёй координатаси билан ўтилган йўл устма-уст тушади. Нуқта бошланғич t_0 вақтда M_0 ҳолатни, t_1 вақтда M ҳолатни эгалласин (8.7- расм, б). $t_1 - t_0$ вақт ичида ўтилган йўлни топиш учун уни жуда кичик Δt_v ($v=1, 2, \dots, n$) шундай вақт оралиқларига бўламизки, ҳар бир оралиққа нуқтанинг фақат бир хил йўналиши мос келсин. Δt_v га мос келган ёй координатасининг орттирмасининг Δs_v билан белгилаймиз. Нуқтанинг ўтган йўлни σ мусбат катталиқ бўлиб

$$\sigma = \sum_{v=1}^n \left| \Delta s_v \right| \quad (8.16)$$

қошунчи ердамида аниқланади. Йўл узунлигини ҳисоблашда интегрални ифода ҳам мавжуд. Уни кейинроқ келтирамиз.

8.1- масала. M нуқта

$$x=5 \sin 10 t, \quad y=3 \cos 10 t \quad (1)$$

қонун (бунда x, y лар метрда, t —секундда ўлчанади) асосида ҳаракатланади. Нуқтанинг траекторияси ва бошланғич пайтдаги ҳолати аниқлансин.

Ечиш. Нуқта траекториясининг тенгламасини топиш учун (1) дан вақт t ни йўқотамиз. Бунинг учун (1) ни

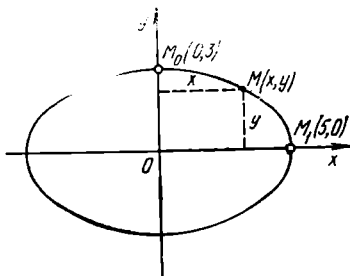
$$\frac{x}{5} = \sin 10 t, \quad \frac{y}{3} = \cos 10 t$$

шаклида ёзамиз. Бу тенгламаларнинг иккала томонини квадратга ошириб, **бир-бири билан қўшамиз.** Натижада

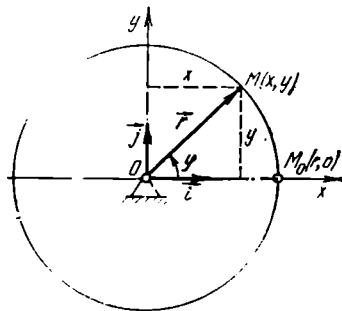
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

кўринишдаги траектория тенгламасини оламиз. Бинобарин, нуқта ярим ўқлари 5 ва 3 га тенг эллипс бўйлаб ҳаракатланади (8.8- расм). Нуқтанинг бошланғич пайтдаги ҳолатини аниқлаш учун (1) га $t=0$ қийматни қўйсак, $x_0=0$, $y_0=3$ бўлади. Шундай қилиб, нуқта бошланғич пайтда Oy ўқда $M_0(0; 3)$ ҳолатни эгаллайди.

8.2- масала. Радиуси r га тенг ғилдирак расм текислигига перпендикуляр бўлган ва ғилдирак марказидаги O нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида $\varphi = \omega t$ (бунда $\omega = \text{const}$) қонун бўйича айланади. Ғилдирак ғардишидаги M нуқтанинг Декарт координаталаридаги ва вектор кўринишидаги ҳаракат тенгламаси аниқлансин (8.9- расм).



8.8- расм.



8.9- расм.

Ечиш. Координаталар бошини айланиш ўқидаги O нуқтада олиб, координата ўқларини расмда кўрсатилганидек йўналтирамиз. Нуқтанинг боғланиш ҳолатини M_0 , ихтиёрий вақтдаги ҳолатини M билан белгилаймиз. $\vec{OM} = r$ радиус-векторнинг ҳолатини Ox ўқдан мусбат (соат стрелкаси айланишига тескари) йўналишда ҳисобланадиган φ бурчак билан аниқлаймиз. M нуқтанинг координаталарини x, y билан белгилаймиз.

M нуқтанинг ҳаракат тенгламасини аниқлаш учун шў x, y ни вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш керак. Расмдан:

$$x = OM \cos \varphi, \quad y = OM \sin \varphi.$$

Бунда $OM = r$, $\varphi = \omega t$ бўлгани учун нуқтанинг изланаётган ҳаракат тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t. \quad (1)$$

(1) нинг ҳар иккаласини квадратга ошириб, уларни қўшсак, нуқта траекториясининг $x^2 + y^2 = r^2$ тенгламасини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, билдирак тўғрида ётган нуқтанинг траекторияси радиуси r га тенг ва маркази O нуқтада ётувчи айланадан иборат.

Нуқта ҳаракат тенгламасининг векторли ифодасини чиқариш учун (8.7) дан фойдаланамиз:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = r(\cos \omega t \cdot \vec{i} + \sin \omega t \cdot \vec{j}).$$

8.3- масала. Тўғри бурчакли қилиб эгилган BCD стержень шундай ҳаракатланадики, унинг B нуқтаси вертикал чизик бўйича сирланади, CD қисми доимо

A қўзғалмас нуқтадан ўтади. φ бурчак эса (8.10- расм) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ оралиқда

$\varphi = kt$ қонунга кўра ўзгаради. $BC = OA = a$ деб олиб, C нуқтанинг ҳаракати ва траекторияси тенгламаси аниқлансин.

Ечиш. C нуқта ҳаракатини Ox и координаталар системасида аниқлаш учун унинг координаталари $x = OL$ ва $y = CL$ лар вақт ўтиши билан қандай ўзгаришини текшираемиз. Берилган расмдан $x = BC \cos \varphi$ ёки $x = a \cos kt$ эканлигини топамиз.

$\widehat{BCD} = 90^\circ$ эканлигидан $\widehat{LCA} = \varphi$. ALC учбурчакдан $CL = AL \operatorname{ctg} \varphi$. Расмдан $AL = OA - OL = a(1 - \cos \varphi)$, шунинг учун $y = a(1 - \cos \varphi) \cdot \operatorname{ctg} \varphi$ ёки

$$y = a(1 - \cos kt) \cdot \operatorname{ctg} kt. \quad (1)$$

Маълумки, $1 - \cos kt = 2 \sin^2 \frac{kt}{2}$. Буни назарда тутиб, (1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$y = a \cdot 2 \sin^2 \frac{kt}{2} \cdot \frac{\cos kt}{\sin kt} = 2a \sin^2 \frac{kt}{2} \cdot \frac{\cos kt}{2 \sin \frac{kt}{2} \cdot \cos \frac{kt}{2}}$$

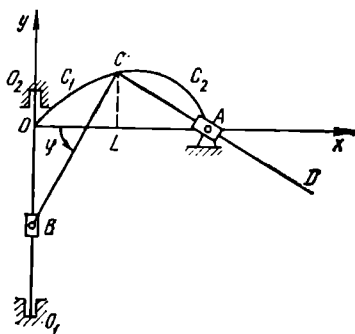
ёки

$$y = a \cos kt \cdot \operatorname{tg} \frac{kt}{2}.$$

Шундай қилиб, C нуқтанинг танлаб олинган Декарт системасидаги ҳаракати

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos kt, \\ y &= a \cos kt \cdot \operatorname{tg} \frac{kt}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

тенгламалар билан аниқланади.



8.10- расм.

Нуқта траекторияси тенгламасини ҳосил қилиш учун (2) дан t ни йўқотиб
 ваъарур. $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ да

$$\operatorname{tg} \frac{kt}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos kt}{1 + \cos kt}}$$

ўринли эканлигини эътиборга олиб, (2) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos kt, \\ y &= a \cos kt \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos kt}{1 + \cos kt}}. \end{aligned} \right\}$$

Бу тенгламаларнинг биринчисини иккинчисига қўйсак,

$$y = x \sqrt{\frac{1 - \frac{x}{a}}{1 + \frac{x}{a}}}$$

ёки

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{a-x}{a+x}, \quad (0 < x \leq a). \quad (3)$$

Шундай қилиб, C нуқтанинг траекторияси (3) тенглама билан аниқланади ва расмда тасвирланган C_1CC_2A строфонда ёйдан иборат бўлади.

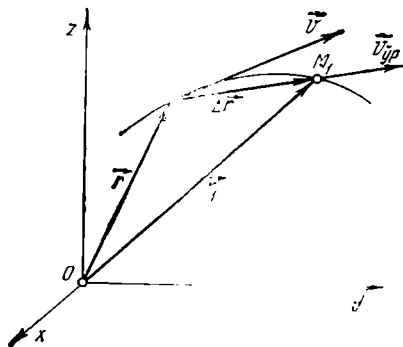
8.4- §. Нуқтанинг тезлиги

1. Ҳаракати вектор усулида берилган нуқтанинг тезлиги.

Нуқтанинг ҳаракати вектор усулда $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тенглама билан берилган бўлсин. Нуқтанинг бирор t пайтдаги траекторияда эгаллаган ҳолатини M , радиус-векторини $\vec{r}$, $t_1 + \Delta t$ пайтдаги ҳолатини M_1 радиус-векторини $\vec{r}_1$ билан белгилайлик (8.11- расм). Нуқтанинг M ва M_1 ҳолатларини туташтирувчи $\overrightarrow{MM_1} = \Delta \vec{r}$ вектор нуқтанинг $\Delta t = t_1 - t$ вақт оралиғидаги *кўчиш вектори* дейилади. Расмдан кўриниб турибдики, $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}$. Бундан нуқтанинг Δt вақт ичидаги кўчиши (радиус-вектор орттирмаси) ни топиш мумкин:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}.$$

Кўчиш вектори $\Delta \vec{r}$ нинг шу кўчиш содир бўладиган Δt вақтга нисбати *нуқтанинг* мазкур вақт оралиғидаги *ўртача тезлик вектори* дейилади ва $\vec{v}_{\text{ўр}}$ билан белгиланади:



8.11- расм.

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Бундин Δt мусбат скаляр миқдор бўлгани учун ўртача тезлик векторини $\Delta \vec{r} = \vec{MM}_1$ вектор бўйича, яъни M нуқтанинг ҳаракат йўналишида MM_1 кесувчи бўйлаб йўналади.

Нуқта ўртача тезлик векторининг Δt нолга интилгандаги limiti нуқтанинг берилган ондаги тезлик вектори дейилади ва $\vec{v}$ билан белгиланади.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

ёки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (8.17)$$

яъни нуқтанинг тезлик вектори унинг радиус-векторидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосиллага тенг.

Юқорида кўрганимиздек, вектор функциянинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласи мазкур вектор графиккага уринма бўйича йўналади; M нуқтанинг траекторияси ва $\vec{r}$ радиус-вектор графикки устма-уст тушади. Шу сабабли берилган пайтдаги тезлик вектори нуқта траекториясига ҳаракат йўналиши бўйича ўтказилган уринма бўйлаб йўналади.

Нуқта тезлигининг модулини $|\vec{v}|$ ёки v билан белгилаймиз. Умумий ҳолда нуқтанинг берилган ондаги тезлик вектори $\vec{v}$ радиус-вектор $\vec{r}$ нинг модулидан олинган $\frac{d|\vec{r}|}{dt}$ ҳосиллага тенг бўлмайди.

Ҳақиқатан ҳам, агар нуқта радиуси $\vec{r}$ га тенг айлана (ёки сфера) бўйлаб ҳаракатланса, унинг айлана марказига нисбатан радиус-вектори $\vec{r}$ фақат йўналиш жиҳатдан ўзгаради. Шу сабабли нуқта айлана бўйлаб ҳаракатланганда $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0$, лекин айлана учун

$|\vec{r}| = \text{const}$ бўлганидан $\frac{d|\vec{r}|}{dt} = 0$. Бинобарин,

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \neq \frac{d|\vec{r}|}{dt}$$

(8.17) га асосан тезликнинг ўлчов бирлигини аниқлаймиз:

$$[v] = \frac{[\text{узунлик}]}{[\text{вақт}]} = \frac{L}{T}$$

СИ бирликлар системасида тезлик ўлчов бирлиги м/с дан иборат.

2. Ҳаракати координаталар устлида беғилган нуқтанинг тезлиги.

Нуқтанинг ҳаракати Декарт координаталарида (8.6) тенгламалар орқали берилган бўлсин. Нуқта тезлиги векторининг координата ўқларидаги проекцияларини v_x, v_y, v_z билан белгиласак, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (8.18)$$

бунда $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ қўзғалмас координата ўқларининг бирлик йўналтирувчи векторлари миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгармас бўлади. (8.17) га қўра (8.7) дан вақт бўйича ҳосила олсак, тезлик вектори учун яна қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}.$$

Бу тенгликни (8.18) билан солиштириб, тезлиkning координата ўқларидаги проекцияларини аниқловчи ушбу формулаларга эга бўламиз:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (8.19)$$

Шундай қилиб, *нуқта тезлигининг бирор қўзғалмас Декарт координата ўқидаги проекцияси ҳаракатланувчи нуқтанинг шу ўққа мос координатасидан вақт бўйича олинган биринчи ҳосилага тенг.*

Нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, унинг модули

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (8.20)$$

формуладан, йўналишини эса

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v}, \vec{j}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\vec{v}, \vec{k}) = \frac{v_z}{v} \quad (8.21)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

Агар нуқта Oxy текисликда ҳаракатланса, (8.19)—(8.21) формулаларда $v_z = 0$ деб қаралади.

Агарда нуқта тўғри чизиқни ҳаракатда бўлса, бу ҳаракатни битта (8.6, б) тенглама билан аниқлаш мумкин. Бу ҳолда (8.18)—(8.20) формулаларда $y = z = 0$ бўлиб, тезлик вектори Ox ўқ бўйича йўналади ва унинг бу ўқдаги проекцияси

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

формуладан аниқланади.

Агар $\dot{x} > 0$ бўлса, нуқта тезлик вектори $\vec{v}$ нинг йўналиши Ox ўқнинг мусбат, $\dot{x} < 0$ да ўқнинг манфий йўналишига мос тушади.

Нуқта бнр текисликда ҳаракатланганида унинг ҳаракати ва тезлигини қутб координаталар системасида ҳам аниқлаш мумкин. Агар $\vec{r}$ радиус-векторнинг бирлик векторини $\vec{r}^\circ$ билан белгиласак,

$$\vec{r} = r \cdot \vec{r}^\circ$$

муносабат ўринли бўлади (8.12-рasm).

Нуқта ҳаракатланганда унинг радиус-вектори миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгаради. Шу сабаб-

ли r ва $\vec{r}^\circ$ лар вақтнинг функциясидан иборат бўлади. Бунини назарда тутиб, (8.17) дан вақт бўйича ҳосила олсак, нуқтанинг тезлиги учун

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (r \cdot \vec{r}^\circ) = \frac{dr}{dt} \vec{r}^\circ + r \frac{d\vec{r}^\circ}{dt} \quad (8.22)$$

муносабат келиб чиқади. $\frac{d\vec{r}^\circ}{dt}$ ни аниқлаш учун Oxy текисликда $\vec{r}^\circ$ векторга перпендикуляр бўлган ва φ бурчак сртатиган томонга йўналган $\vec{\rho}^\circ$ бирлик векторни киритамиз. $\vec{r}^\circ$ ва $\vec{\rho}^\circ$ векторларни Декарт координаталарининг бирлик йўналтирувчи векторлари $\vec{i}$, $\vec{j}$ ҳамда φ бурчак орқали қуйидагича ифодалаш мумкин (8.12-рasm).

$$\vec{r}^\circ = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j},$$

$$\vec{\rho}^\circ = \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j} = -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}.$$

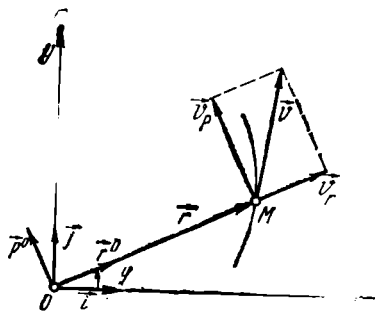
Бу муносабатларни назарда тутиб, $\vec{r}^\circ$ ва $\vec{\rho}^\circ$ нинг вақт бўйича ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{r}^\circ}{dt} &= (-\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{\rho}^\circ, \\ \frac{d\vec{\rho}^\circ}{dt} &= -(\cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}) \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{r}^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

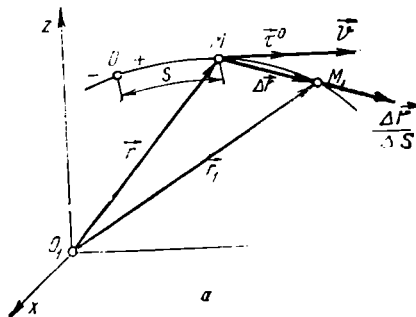
Бу тенгликларнинг биринчисига кўра (8.22) ни

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{r}^\circ + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{\rho}^\circ = \dot{r} \vec{r}^\circ + r \dot{\varphi} \vec{\rho}^\circ \quad (8.24)$$

кўринишида ёзмаиз. (8.24) формула ёрдамида нуқтанинг тезлик векторини ўзаро перпендикуляр бўлган $\vec{r}^\circ$ ва $\vec{\rho}^\circ$ векторлар йўналишидаги иккита $\vec{v}_r = \dot{r} \vec{r}^\circ$ ва $\vec{v}_\varphi = r \dot{\varphi} \vec{\rho}^\circ$ ташкил этувчиларга ажратиш



8.12- рasm.



мумкин. $\vec{v}_r$ тезликнинг радиал таъкил этувчиси, $\vec{v}_p$ эса кўндаланг таъкил этувчиси дейилади. $\vec{v}$ ни $\vec{r}$ ва $\vec{r}'$ йўналишларга проекциялаб, радиал ва кўндаланг тезликларнинг алгебраик қиймати аниқланадиган

$$v_r = \dot{r}, \quad v_p = r\dot{\varphi} \quad (8.25)$$

ифодаларни оламиз. $\vec{v}_r \perp \vec{v}_p$ бўлгани учун тезликнинг модулини

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2} \quad (8.26)$$

формуладан аниқлаймиз. Шундай қилиб, ҳаракати қутб координаталар системасида берилган нуқтанинг тезлиги (8.24) ва (8.26) формулалар воситасида аниқланади.

3. Ҳаракати табиий усулда ифодаланган нуқтанинг тезлиги.

M нуқта берилган траектория бўйлаб $s=s(t)$ қонун асосида ҳаракатлансин (8.13- расм).

Нуқтанинг ўртача тезлиги учун қуйидаги ифодани ёзиш мумкин:

$$\vec{v}_{\text{ўр}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

бунда Δs билан MM_1 ёйнинг узунлиги белгиланган. У ҳолда M нуқтанинг берилган ондаги тезлиги

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

формуладан аниқланади. Агар $\Delta s > 0$ бўлса, $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ вектори $\Delta \vec{r}$ билан

бир хил (8.13- расм, а), $\Delta s < 0$ да $\Delta \vec{r}$ га қарама-қарши йўналади

(8.13- расм, б). Шу сабабли $\Delta \vec{r} \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ векторининг йўналиши

M нуқтада ёй координатаси ортадиган йўналишда траекторияга ўтказилган уринмага интилади. Бу векторнинг модули лимит ҳолатида бирга тенг бўлади:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1.$$

Шундай қилиб, $\frac{d\vec{r}}{ds}$ векторни миқдор жиҳатдан бирга тенг, йўна-

лиши эса нуқта траекториясига M нуқтада ёй координатаси ортадиган йўналишда ўтказилган уринманинг йўналиши билан устма-уст тушади. Бинобарин, $\frac{d\vec{r}}{ds}$ вектори ёй координатасининг мусбат йўналиши бўйича йўналган уринманинг бирлик вектори $\vec{\tau}^0$ ни ифодалайди:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}^0.$$

Натижада ҳаракати табиий усулда берилган нуқтанинг тезлиги учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}^0. \quad (8.27)$$

(8.27) да $\frac{ds}{dt}$ ҳосила $\vec{v}$ тезликнинг уринмадаги проекцияси v_τ ни ифодалайди ва тезликнинг алгебраик қиймати дейилади:

$$v_\tau = \frac{ds}{dt}. \quad (8.28)$$

v_τ нинг абсолют қиймати тезликнинг модулига тенг бўлади:

$$v = |v_\tau| = \left| \frac{ds}{dt} \right|.$$

Бинобарин, нуқта тезлигининг модули ёй координатасидан вақт бўйича олинган ҳосиланинг абсолют қийматига тенг.

(8.28) га асосан (8.27) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{v} = v_\tau \cdot \vec{\tau}^0. \quad (8.27, a)$$

Юқорида кўрганимиздек, уринманинг бирлик вектори $\vec{\tau}^0$ доимо ёй координатасининг мусбат йўналиши бўйича йўналади. Агар бирор пайтда $\frac{ds}{dt} > 0$ бўлса, ёй координатаси орта боради ва нуқта тезлиги $\vec{v}$ нинг йўналиши $\vec{\tau}^0$ билан устма-уст тушади ҳамда $v = v_\tau$ ва $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}^0$ бўлади. Агар $\frac{ds}{dt} < 0$ бўлса, шу пайтда ёй координатаси s камая боради ва $\vec{v}$ тезлик вектори $\vec{\tau}^0$ га қарама-қарши йўналади ҳамда $v = -v_\tau$ ва $\vec{v} = -v \vec{\tau}^0$ муносабат ўринли бўлади (8.13-расмда $\frac{ds}{dt} > 0$ бўлган ҳол кўрсатилган).

Нуқтанинг ўтган йўли доимо мусбат бўлгани учун dt вақт ичида ўтилган йўл $d\sigma = |ds|$ формуладан аниқланади. Шу сабабли тезликнинг модули учун яна қуйидаги формулани оламиз:

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| = \frac{d\sigma}{dt} \quad (8.29)$$

Агар нуқта тезлигининг модули вақтнинг функцияси бўлса $v = v(t)$, (8.29) дан фойдаланиб, нуқтанинг исталган пайтда ўтган йўлини аниқлаш мумкин. Бунинг учун (8.29.) ни dt га кўпайтирамиз:

$$d\sigma = v \cdot dt.$$

Бошланғич пайтда $t=0$ ва $\sigma=0$ деб танлаб олиб, охириги тенгламани вақт ва ўтилган йўл бўйича интеграллаймиз:

$$\int_0^\sigma d\sigma = \int_0^t v(t) dt.$$

Шундай қилиб, бирор вақт оралиғида траектория бўйлаб ўтилган йўл узунлиги учун

$$\sigma = \int_0^t v(t) dt \quad (8.30)$$

муносабатни оламиз.

Бу муносабат Декарт координаталарида

$$\sigma = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (8.31)$$

қутб координаталарида эса

$$\sigma = \int_0^t \sqrt{\dot{r}^2 + (r \dot{\varphi})^2} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \quad (8.32)$$

формулалар билан ифодаланади. (8.32) да φ_0 ва φ билан бошланғич ва охириги пайтдаги қутб бурчаклари белгиланган.

Агар ҳаракат давомида нуқта тезлигининг модули доимо ўзгармасдан қолса, яъни $v(t) = v_0 = \text{const}$ бўлса, бундай ҳаракат *эгри чизиқли текис ҳаракат* дейилади. (8.30) га кўра эгри чизиқли текис ҳаракатда йўл узунлиги учун

$$\sigma = v_0 t$$

формула ҳосил бўлади.

8.4-масала. Нуқтанинг ҳаракати

$$x = v_0 t \cos \alpha_0, \quad y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

тенгламалар билан берилган; бу ерда Ox ўқ горизонтал, Oy вертикал юқорига йўналган, v_0, g ва $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ — ўзгармас миқдорлардир; 1) нуқтанинг траекторияси; 2) унинг энг юқори ҳолатидаги координаталари; 3) нуқта Ox ўқда бўлган вақтидаги тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари топилсин.

Ечиш. 1. Ҳаракат тенгламалари (1) дан вақт t ни йўқотиб, нуқтанинг траекториясини аниқлаймиз. Бунинг учун (1) нинг биринчи тенгламасидан t ни аниқлаб, иккинчисига қўямиз:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2.$$

Бу ифода параболанинг тенгламасидир. Нуқтанинг траекторияси мазкур параболанинг $x \geq 0$ шартни қаноатлантирувчи қисмидан иборат (8.14-рasm).

2. (8.19) га биноан тезликнинг координата ўқларидаги проекциялари учун ушбу ифодаларни оламиз:

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt. \quad (2)$$

Нуқта энг юқори ҳолатни эгаллаганда унинг тезлиги x ўққа параллел бўлади. Шу сабабли $v_y = 0$ ёки $v_0 \sin \alpha_0 - gt_1 = 0$ бўлади, бунда t_1 билан нуқта энг юқори ҳолатга кўтарилгунча ўтган вақт белгиланган. Охири тенгликдан

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Вақт t_1 нинг бу қийматини (1) га қўйиб, нуқта энг юқори ҳолатининг координаталарини аниқлаймиз:

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha_0, \quad y = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha_0.$$

3. Нуқта Ox ўқда ётган вақтда $y = 0$ ёки $v_0 T \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g T^2 = 0$ бўлади, бунда T билан нуқта Ox ўқда бўлган вақт белгиланган.

Охири тенгликдан $T_1 = 0$, $T_2 = \frac{2 v \sin \alpha_0}{g}$ вақтларни аниқлаймиз. $T_1 = 0$ вақт нуқтанинг бошланғич ҳолатига мос келади. T_1 ва T_2 нинг қийматини (2) га қўйиб, нуқта Ox ўқда бўлган вақтидаги тезликнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_y = \pm v_0 \sin \alpha_0.$$

Бунда мусбат ишора нуқтанинг бошланғич ҳолатига мос келади.

8.5-масала. Симдан қилинган $0,1$ м радиусли ҳалқача кийгизилган бўлиб, ҳалқача ҳамда ҳалқанинг O нуқтасидан OA стержень ўтади. Стержень O нуқта атрофида текис айланади (8.15-рasm). Стержень бошланғич пайтда OA_0 ҳолатни эгаллайди. Стерженьнинг O нуқта атрофидаги айланиш бурчаги φ вақтга пропорционал бўлиб, у 5 с ичида тўғри бурчакка бурилади. Ҳалқачанинг тезлиги аниқлансин.

Ечиш. M нуқтанинг ҳаракат қонунини табиий усулда аниқлаймиз. Масаланинг шартига

кўра $\widehat{OA} = \varphi$ ни вақтнинг функцияси сифатида аниқлаймиз: $\varphi = kt$, бунда $k = \text{const}$ бўлиб, пропорционаллик коэффициентини ифо

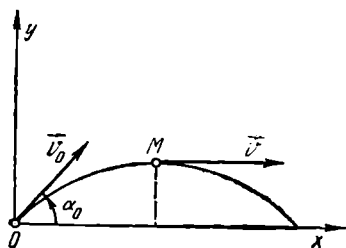
далайди: $t = 5$ с да $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун $k =$

$$= \frac{\pi}{10}. \quad \text{Бинобарин, } \varphi = \frac{\pi}{10} t.$$

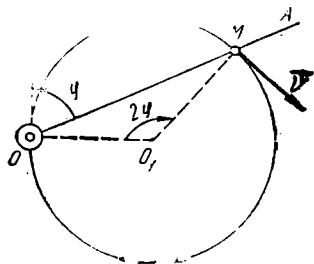
M ҳалқачанинг ҳаракат қонуни қуйидаги муносабатлар ёрдамида аниқланади:

$$\widehat{OO_1M} = 2\varphi, \quad \widehat{OM} = s = 2r\varphi = 0,02\pi t.$$

(8.28) га асосан тезликнинг алгебраик қийматини ҳисоблаймиз:



8.14- рasm.



8.15- рasm,

$$v_{\tau} = \frac{ds}{dt} = 0,02 \pi \text{ м/с.}$$

Ҳаракат давомида $\frac{ds}{dt} = 0,02 \pi > 0$ бўлгани учун тезликнинг модули

$$v = v_{\tau} = 0,02 \pi \text{ м/с.}$$

8.5-§. Нуқтанинг тезланиши

1. Ҳаракати вектор усулида берилган нуқтанинг тезланишини аниқлаш. Нуқта ҳаракати (8.5) тенглама билан ифодаланган бўлсин. M нуқтанинг t пайтдаги тезлигини $\vec{v}$, $t_1 = t + \Delta t$ пайтдаги ҳолатини M_1 ва тезлигини $\vec{v}_1$ билан белгилайлик (8.16-рasm). $\vec{v}_1$ тезлик векторини ўзига параллел равишда M нуқтага кўчирамиз ва тезлик векторининг Δt вақт оралиғидаги орттирмаси $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ ни топамиз.

Тезлик вектори орттирмаси $\Delta \vec{v}$ нинг Δt вақт оралиғига нисбати нуқтанинг мазкур вақт оралиғидаги ўртача тезланиш вектори дейилади ва $\vec{w}_{\text{ор}}$ билан белгиланади:

$$\vec{w}_{\text{ор}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Бунда Δt мусбат скаляр миқдор бўлгани учун тезланиш вектори $\Delta \vec{v}$ бўйлаб йўналади.

Ўртача тезланиш векторининг Δt нолга интилгандаги limiti нуқтанинг берилган ондаги тезланиш вектори дейилади ва $\vec{w}$ билан белгиланади:

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

ёки

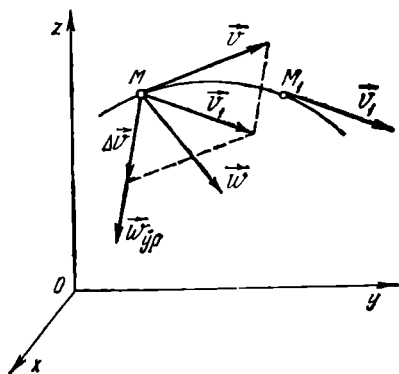
$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (8.33)$$

(8.17) ни эътиборга олсак,

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (8.33, a)$$

муносабат ўринли бўлади.

Демак, нуқтанинг тезланиш вектори унинг тезлик векторидан вақт бўйича олинган биринчи ҳосилага ёки радиус-векторидан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосилага тенг.



8.16- расм.

M нуқта ҳаракатланганда унинг ҳар ондаги тезлик векторини фазонинг бирор қўзғалмас O_1 нуқтасига муттасил қўя борсак, тезлик векторининг учи *тезлик годографи* деб аталадиган эгри чизиқни чизади (8.17-расм). Тезлик годографини чизувчи A нуқтанинг тезлиги.

$$\vec{v}^* = \vec{\omega} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

яъни траектория бўйлаб ҳаракатланувчи нуқтанинг тезланишига тенг бўлади.

(8.33.а) га асосан тезланишнинг ўлчам бирлигини аниқлаймиз:

$$[\omega] = \frac{[\text{узунлик}]}{[\text{вақт}]^2} = \frac{L}{T^2}.$$

СИ бирликлар системасида тезланиш м/с^2 да ўлчанади.

2. Ҳаракати координаталар усулида берилган нуқтанинг тезланиши. Нуқтанинг ҳаракати (8.6) тенгламалар билан берилган бўлсин. Тезланиш векторини *Охуз* Декарт координата ўқларининг бирлик векторлари орқали ифодаланган ташкил этувчиларга қуйидагича ажратиш мумкин:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, \quad (8.34)$$

бунда $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ билан тезланишнинг координата ўқларидаги проекциялари белгиланган. Нуқтанинг тезлигини (8.18) кўринишда ёзиш мумкин бўлгани учун (8.33) га асосан

$$\vec{\omega} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

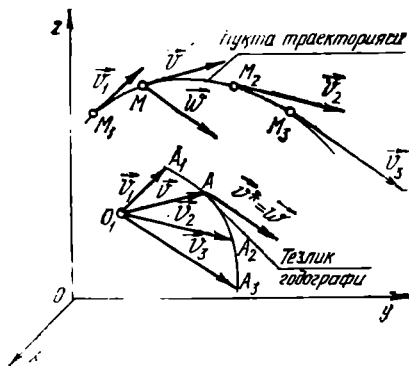
келиб чиқади. Бу тенгликни (8.34) билан солиштириб, тезланишнинг координата ўқларидаги проекцияларини ифодаловчи формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\omega_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad \omega_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \omega_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (8.35)$$

(8.19) га асосан (8.35) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\omega_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad \omega_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad \omega_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (8.36)$$

Демак, нуқта тезланишининг бирор ўқдаги проекцияси нуқта тезлигининг мазкур ўқдаги проекциясидан вақт бўйича олинган биринчи ҳосилага ёки шу ўққа мос координатасидан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосилага тенг.



8.17- расм.

$$w = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad (8.37)$$

йўналиши

$$\cos(\hat{w}, x) = \frac{\dot{x}}{w}, \cos(\hat{w}, y) = \frac{\dot{y}}{w}, \cos(\hat{w}, z) = \frac{\dot{z}}{w} \quad (8.38)$$

формулалардан аниқланади.

Агар нуқта Oxy текислигида ҳаракатланса, $\dot{z} = \ddot{z} = 0$ бўлиб, (8.37) ва (8.38) формулалар

$$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

$$\cos(\hat{w}, x) = \frac{\dot{x}}{w}, \cos(\hat{w}, y) = \frac{\dot{y}}{w}$$

кўринишда ёзилади.

Нуқта Ox ўқ бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилганда $\dot{y} = \dot{z} = 0$ бўлиб, тезланиш вектори Ox ўқ бўйича йўналади, (8.36), (8.37) формулаларга кўра унинг бу ўқдаги проекцияси ва модули $w_x = \ddot{x}$, $w = |\ddot{x}|$ тенгликлардан аниқланади. Агар $x > 0$ бўлса, нуқтанинг $\vec{w}$ тезланиш вектори Ox ўқнинг мусбат йўналиши бўйича, $x < 0$ да эса манфий йўналиши бўйича йўналади.

Агар $\vec{v}$ тезлик вектори билан $\vec{w}$ тезланиш векторининг йўналиши ҳар доим устма-уст тушса, нуқтанинг бундай ҳаракати *тўғри чизиқли тезланувчан ҳаракат*, қарама-қарши йўналса, *тўғри чизиқли секинланувчан ҳаракат* дейилади.

Нуқтанинг ҳаракати қутб координаталарида $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ тенгламалар билан ифодаланган бўлса, унинг тезлиги (8.24) муносабат билан аниқланиши маълум. Шунинг учун (8.33) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{w} = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{r}^0 + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{r}^0}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}^0 + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{p}^0 + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{p}^0}{dt}$$

Агар (8.23) ни ҳисобга олсак,

$$\vec{w} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{r}^0 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{p}^0$$

муносабат ўринли бўлади. Бу тенгликни ўзаро перпендикуляр $\vec{r}^0$ ва $\vec{p}^0$ йўналишларга проекциялаб, *радиал* ва *кўндаланг тезланишларни* ифодаловчи ушбу муносабатларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} w_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \\ w_p &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

Бу ҳолда нуқта тезланишининг модули

$$\omega = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_p^2}, \quad (8.40)$$

йўналиши

$$\cos(\vec{r}^0, \vec{\omega}) = \frac{\omega_r}{\omega}, \quad \cos(\vec{p}^0, \vec{\omega}) = \frac{\omega_p}{\omega} \quad (8.41)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

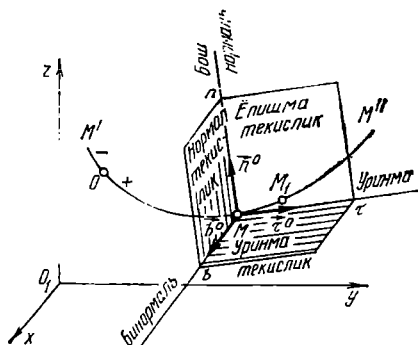
3. Ҳаракати табиий усулда берилган нуқтанинг тезланиши: а) *Табиий координата ўқлари.* Эгрилик вектори. Аввал нуқта тезланишини аниқлаш учун зарур бўлган дифференциал геометриянинг айрим тушунчалари билан танишиб чиқамиз.

Ойхуз координаталар системасида берилган $M'M''$ эгри чизикда M нуқта олиб, шу нуқтада мазкур чизикқа ўтказилган M_τ уринманинг бирлик векторини $\vec{\tau}^0$ билан белгилайлик (8.18-расм). $\vec{\tau}^0$ векторни s ёй координатасининг ўсиши томон йўналтирамиз. $M'M''$ эгри чизикда M нуқтага яқин бўлган M_1 нуқта олиб, $\vec{\tau}^0$ вектори ва M_1 нуқта орқали текислик ўтказайлик; M_2 нуқта берилган чизик бўйлаб M нуқтага интилганда мазкур текисликнинг эгаллаган лимит ҳолати M нуқтадаги *ёпишма текислик* (ёки *эгрилик текислиги*) дейилади. Агар $M'M''$ текисликда ётувчи эгри чизикдан иборат бўлса, ёпишма текислик мазкур чизик ётган текислик билан устма-уст тушади ва эгри чизикнинг ҳамма нуқталари учун умумий бўлади. $M'M''$ эгри чизик бир текисликда ётмаса, M нуқта чизик бўйлаб силжиганда, ёпишма текислик ўз ҳолатини ўзгартириб боради.

M нуқтада $\vec{\tau}^0$ уринмага перпендикуляр равишда ўтказилган текислик *нормал текислик* дейилади. Ёпишма ва нормал текисликларнинг Mn кесишиш чизиги M нуқтадаги *бош нормални* ифодалайди. Бош нормалнинг йўналиши M нуқтадан эгри чизикнинг ботиқ томонига йўналган $\vec{n}^0$ бирлик вектор билан аниқланади.

Ёпишма ва нормал текисликлар ўзаро перпендикуляр жойлашади. Бу иккала текисликнинг ҳар бирига перпендикуляр қилиб M нуқтада ўтказилган (яъни Mn бош нормалга перпендикуляр бўлган) текислик *уринма текислик* дейилади. Нормал ва уринма текисликларнинг Mb кесишиш чизиги M нуқтадаги *бинормални* ифодалайди. Бинормаль йўналиши $\vec{b}^0$ бирлик вектор билан аниқланиб, $\vec{b}^0$ вектор $\vec{\tau}^0$, $\vec{n}^0$ билан ўнг системани ташкил этадиган қилиб олинади.

Нормал, ёпишма ва уринма текисликлардан ташкил топган *учёқлик табиий учёқлик* дейилади.



8.18- расм.

латига боғлиқ бўлгандан, у s ёй координатасининг функцияси билан иборат: $\vec{\tau}^0 = \vec{\tau}^0(s)$.

Бинобарин, (8.42) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{k} = \frac{d\vec{\tau}^0}{ds}. \quad (8.43)$$

Демак, эгри чизиқнинг бирор нуқтадаги эгрилик вектори шу нуқтадаги уринманинг бирлик векторидан ёй координатаси бўйича олинган биринчи ҳосилга тенг.

Δs оралиқда $\vec{\tau}^0$ вектори йўналишининг ўзгариш бурчагини, яъни тенг ёнли ВМА учбурчакда ВМА бурчакни $\Delta\theta$ билан белгилайлик. У ҳолда Δs нинг ишорасига қараб

$$\left(\frac{\Delta \vec{\tau}^0}{\Delta s}, \vec{\tau}^0 \right) = 90^\circ \pm \frac{\Delta\theta}{2}$$

бўлади (8.19-расм, а, б). Δs нолга интилганда $\Delta\theta$ ҳам нолга интилиб, $\vec{k}_{yp}$ ва $\vec{\tau}^0$ орасидаги бурчак 90° га интилади. Шунинг учун $\vec{k}$ вектор йўналиши бош нормаль бирлик вектори $\vec{n}^0$ билан бир хил бўлади ва ёпишма текисликда ётади. Эгрилик векторининг модулини k билан белгиласак, (8.43) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{k} = \frac{d\vec{\tau}^0}{ds} = k \cdot \vec{n}^0, \quad \text{бунда } k = \left| \frac{d\vec{\tau}^0}{ds} \right|. \quad (8.44)$$

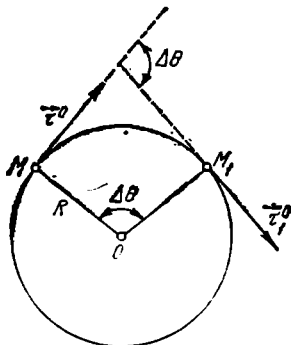
Эгрилик векторининг модулини ҳисоблаймиз: $AB = |\Delta \vec{\tau}^0| = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} k &= \left| \frac{d\vec{\tau}^0}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{\tau}^0}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}. \end{aligned}$$

Бунда $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 1$

бўлгани учун

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$



8.20- расм.

Масалан, радиуси R га тенг айлананинг эгрилигини аниқлайлик (8.20- расм). Бир-бирига яқин M ва M_1 нуқталарда айланага ўтказилган уринманинг бирлик векторлари орасидаги бурчакни $\Delta\theta$ билан белгиласак, $\Delta s = \overset{\frown}{MM_1} = R \cdot \Delta\theta$. Бинобарин, айлана эгрилиги учун ушбу ифода келиб чиқади:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

яъни айлананинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилиги ўзгармас бўлиб, айлананинг радиусига тескари пропорционал бўлади.

Эгри чизиқ эгрилигининг тескари қиймати $\frac{1}{k}$ га *чизиқнинг эгрилик радиуси* дейилади ва ρ билан белгиланади:

$$\rho = \frac{1}{k}. \quad (8.45)$$

Айлана учун $k = \frac{1}{R}$ бўлганидан унинг эгрилик радиуси $\rho_{\text{айл}} = R$ га тенг бўлади. (8.45) га кўра (8.44) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d\vec{\tau}^0}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n}^0, \quad (8.46)$$

яъни эгри чизиқнинг бирор нуқтадаги эгрилик вектори миқдор жиҳатдан унинг мазкур нуқтадаги эгрилик радиусининг тескари қиймати $\frac{1}{\rho}$ га тенг бўлиб, бош нормаль бўйича йўналади.

б) *Тезланишнинг табиий координата ўқларидаги проекциялари.* Ҳаракати табиий усулда берилган нуқтанинг тезлиги (8.27а) ифодасини (8.33) га қўйиб, нуқтанинг тезланиши формуласини оламиз:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau}^0 + v_{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau}^0 + v_{\tau} \frac{d\vec{\tau}^0}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

бунда $\frac{ds}{dt} = v_{\tau}$ ва $v_{\tau}^2 = v^2$ бўлгани учун

$$\vec{w} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau}^0 + v^2 \frac{d\vec{\tau}^0}{ds}.$$

(8.46) га кўра охирги ифода қуйидагича ёзилади:

$$\vec{w} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0. \quad (8.47)$$

(8.47) ифодада *нуқта тезланиши табиий координата ўқларидаги ташкил этувчилари* орқали берилган. Тезланишнинг уринма бўйлаб йўналган ташкил этувчиси

$$\vec{\omega}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau}^0 \quad (8.48)$$

нуқтанинг уринма (тангенциал) тезланиши, бош нормаль бўйича йўналган ташкил этувчиси

$$\vec{\omega}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0 \quad (8.49)$$

эса нуқтанинг нормал тезланиши дейилади.

Бинобарин, М нуқтанинг тезланиш вектори шу нуқта траекториясига ўтказилган ёпишма текисликда ётади ва бинормаль бўйича ташкил

этувчиси нолга тенг: $\omega_b = 0$.

(8.48) ва (8.49) га кўра (8.47) ифода қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\tau + \vec{\omega}_n, \quad (8.50)$$

яъни, эгри чизиqli ҳаракатдаги нуқтанинг тезланиши уринма ва нормал тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг; шу сабабли тезланиш вектори $\vec{\omega}_\tau$ ва $\vec{\omega}_n$ ларга қурилган тўғри тўртбурчакнинг берилган нуқтадан ўтувчи диагонали билан ифодаланади (8.21-рasm).

Тезланишнинг табиий координата ўқларидаги проекциялари

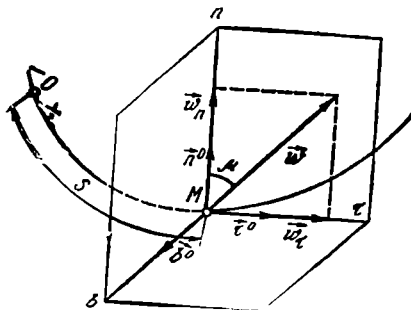
$$\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \omega_b = 0 \quad (8.51)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

(8.51) да $v_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$, $v^2 = v_\tau^2 = \dot{s}^2$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\omega_\tau = \ddot{s}, \quad \omega_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad \omega_b = 0. \quad (8.51,a)$$

Нуқта ҳаракатланганда $\frac{v^2}{\rho} \geq 0$ бўлгани учун нормал тезланиш доимо берилган нуқтада траекторияга ўтказилган бош нормаль бўйича траекториянинг ботиқ томонига йўналади, уринма тезланиш $\frac{dv_\tau}{dt}$ мусбат ёки манфий қийматга эга бўлиши мумкин. Агар $\omega_\tau > 0$ бўлса, уринма тезланишнинг йўналиши $\vec{\tau}^0$ билан бир хил бўлади; $\omega_\tau < 0$ да уринма тезланиш $\vec{\tau}^0$ га қарама-қарши йўналади. 8.21-рasm $\omega_\tau > 0$ ҳоли учун чизилган.



8.21- рasm.

Умумий ҳолда $\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| \neq \left| \frac{dv}{dt} \right|$, чунки $\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|$ тезланишнинг модулини, $\left| \frac{dv}{dt} \right|$ эса уринма ташкил этувчисининг модулини ифодалайди.

Шундай қилиб, тезланиш модули

$$\omega = \sqrt{\omega_{\tau}^2 + \omega_n^2} \quad (8.52)$$

ёки

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{dv_{\tau}}{dt} \right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}$$

формула ёрдамида аниқланади.

Тезланиш векторининг йўналишини унинг бош нормал билан ташкил қилган μ бурчак воситасида топиш мумкин:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\omega_{\tau}|}{\omega_n} = \frac{\rho}{v^2} \left| \frac{dv_{\tau}}{dt} \right|. \quad (8.53)$$

8.6-§. Нуқта ҳаракатининг хусусий ҳоллари

Нуқтанинг тезланишига қараб ҳаракат турларини аниқлаш (8.47) формулага асосланади.

1. **Тўғри чизиқли текис ҳаракат.** Нуқтанинг ҳаракати давомида ҳамиша $\vec{\omega}_{\tau} = 0$, $\vec{\omega}_n = 0$, яъни $\vec{\omega} = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (8.51) га асосан $\frac{dv_{\tau}}{dt} = 0$, $\frac{v^2}{\rho} = 0$ бўлиб, улардан $v = |v_{\tau}| = \text{const}$ ва $\rho = \infty$ эканлиги келиб чиқади. Демак, кўрилатган ҳолда нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракатда бўлади.

2. **Тўғри чизиқли ўзгарувчан ҳаракат.** Нуқта ҳаракати давомида $\vec{\omega}_{\tau} \neq 0$, $\vec{\omega}_n = 0$ бўлсин. Бунда $\omega_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = \ddot{s} \neq 0$ ва $\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ бўлиб, улардан $v = |v_{\tau}| = \left| \frac{ds}{dt} \right| \neq \text{const}$ ва $\rho = \infty$ эканлиги келиб чиқади. Демак, нуқтанинг тезлиги йўналиш жиҳатдан ўзгармай, фақат миқдор жиҳатдан ўзгаради ва нуқта тўғри чизиқли ўзгарувчан ҳаракатда бўлиб, тезланишининг модули

$$\omega = |\omega_{\tau}| = \left| \frac{dv_{\tau}}{dt} \right| = |\ddot{s}|$$

формуладан аниқланади. Бинобарин, *уринма тезланиш тезликнинг миқдор жиҳатдан ўзгаришини ифодалайди.*

Агар фақат бир онда $\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ бўлса, нуқта тўғри чизик бўйича ҳаракатланмай, балки ўша онда нуқта эгри чизиқли траекто-

риянинг букилиш нуқтасидан ўтади (8.22- расм).

3. Эгри чизиқли текис ҳаракат. Бирор вақт оралиғи учун $\omega_\tau = 0$, $\omega_n \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s} = 0, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0.$$

Бундан $v = |v_\tau| = |\dot{s}| = \text{const}$, $\rho \neq \infty$ келиб чиқади. $\rho \neq \infty$ шарт ҳаракат траекторияси эгри чизиқдан иборат бўлишини, $v = \text{const}$ шарт эса нуқта текис ҳаракат қилишини ифодалайди. Демак, бу ҳолда нуқта эгри чизиқли текис ҳаракат қилади. Агар тезликининг уринмадаги проекциясини v_0 билан белгиласак,

$v_\tau = v_0 = \frac{ds}{dt}$ ёки $ds = v_0 dt$ ҳосил бўлади. Бошланғич пайтда, яъни $t = 0$ да $s = s_0$ бўлсин. Шу шарт ҳамда $v_\tau = \text{const}$ эканлигини назарда тутиб, охириги тенгликни интегралласак,

$$s = s_0 + v_0 \cdot t \quad (8.54)$$

келиб чиқади. (8.54) тенглама нуқтанинг эгри чизиқли текис ҳаракат тенгламаси дейилади.

Кўрилатгани ҳолда нуқтанинг тезланиш вектори $\vec{\omega}$ бош нормаль бўйлаб йўналади ва унинг модули

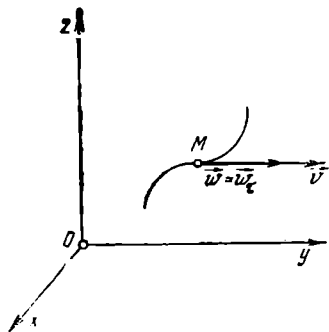
$$\omega = \omega_n = \frac{v^2}{\rho}$$

бўлади. Шундай қилиб, нормал тезланиш эгри чизиқли ҳаракатда *вужудга келади ва тезликининг йўналиши ўзгаришини ифодалайди.*

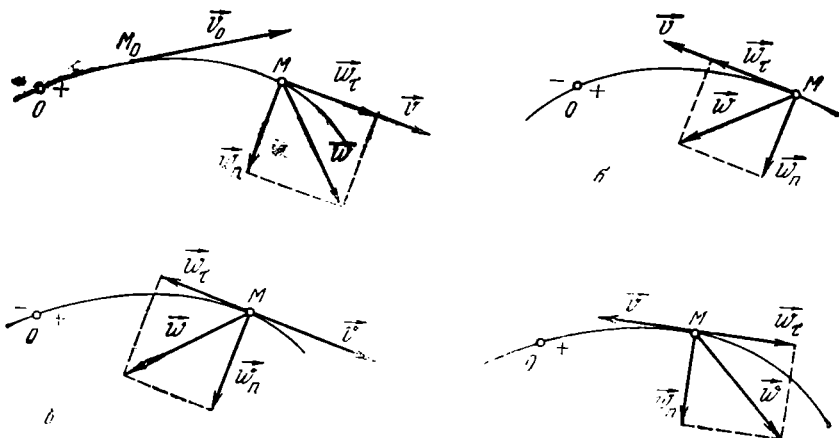
4. Эгри чизиқли ўзгарувчан ҳаракат. Бирор вақт оралиғи учун $\omega_\tau \neq 0$, $\omega_n \neq 0$ бўлсин. Бунда нуқтанинг тезлиги миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгаради, яъни нуқта эгри чизиқли ўзгарувчан ҳаракатда бўлади.

Агар $\omega_\tau = \text{const}$ бўлса, нуқта текис ўзгарувчан ҳаракатда дейилади. $\vec{v}$ ва $\vec{\omega}_\tau$ векторларнинг йўналиши устма-уст тушса, нуқта эгри чизиқли тезланувчан ҳаракатда (8.23- расм, а, б), улар қарама-қарши йўналган бўлса, нуқта эгри чизиқли секинланувчан ҳаракатда (8.23- расм, в, г) бўлади.

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда ёй координатаси $\overline{OM_0} = s_0$, тезлиги v_0 га тенг бўлган (8.23- расм, а) нуқтанинг текис ўзгарувчан ҳаракат тенгламасини чиқарамиз. (8.51) формулага кўра $\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \text{const}$ ёки $dv_\tau = \omega_\tau \cdot dt$ бўлади. Бу тенгламани M_0 ва M нуқталарга мос келувчи чегараларда интегралласак,



8.22- расм.



8.23- расм.

$$v_t = v_0 + \omega_t \cdot t \quad (8.55)$$

келиб чиқади.

$v_t = \frac{ds}{dt}$ эканлигини назарда тутиб, (8.55) ни M_0 ва M нуқта-ларга мос чегараларда интегралласак,

$$s = s_0 + v_0 t + \omega_t \frac{t^2}{2} \quad (8.56)$$

бўлади. (8.56) тенглама нуқта эгри чизиqli текис ўзгарувчан ҳа-ракатининг тенгламасини ифодалайди.

Тўғри чизиqli текис ўзгарувчан ҳаракат тезлиги ва ҳаракат тенгламаси учун ҳам (8.55) ва (8.56) формулалар ўринли бўлади, фақат ёй координатаси s ўрнида нуқтанинг абсциссаси x қатнашади:

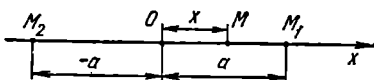
$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 + \omega_x t, \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{\omega_x t^2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.57)$$

бунда $\omega_x = \text{const}$ бўлиб, нуқта тезланишининг x ўқдаги проекция-сини ифодалайди.

5. Гармоник тебранма ҳаракат. Координата боши O га нисба-тан координатаси

$$x = a \sin \omega t \quad (8.58)$$

қонунга кўра (a ва ω — ўзгармас катталиклар) ўзгарувчи M нуқта-нинг тўғри чизиqli ҳаракатини текшираимиз (8.24- расм).



8.24- расм.

(8.58) ифодадаги $\sin \omega t$ $[-1, 1]$ оралиқда ўзгаргани туфайли M нуқта $M_1(a)$ ва $M_2(-a)$ нуқта-лар оралиғида тебраниш маркази O нуқта атрофида тебранма ҳаракат-да бўлади. Нуқтанинг тебраниш

марказидан энг катта масофага четга чиқишини ифодаловчи катталик a тебраниш амплитудаси, ωt тебраниш фазаси, ω эса тебранишнинг доиравий частотаси дейилади.

(8.58) да бошланғич $t = 0$ пайтда $x = 0$ бўлгани учун нуқта тебраниш маркази O дан ўз ҳаракатини бошлайди. Синус функцияси даврий бўлганидан, бирор t вақтда нуқта эгаллаган M_1 вазиятига $t_1 = t + T$ вақт ўтгач яна қайтади. Нуқтанинг бир марта тўлиқ тебраниши учун кетган вақт оралиғи T тебраниш даври дейилади. Тебраниш даврини

$$\sin \omega(t + T) = \sin \omega t \quad (8.59)$$

шартдан фойдаланиб аниқлаймиз. (8.59) тенглик

$$\omega \cdot T = 2\pi$$

бўлганда ўринли. Бинобарин,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8.60)$$

Тебраниш даврининг тескари қиймати

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (8.61)$$

тебраниш такрорлиғи дейилади ва у 1 секунддаги тўла тебранишлар сонини ифодалайди.

Нуқтанинг тезлиги ва тезланишини (8.58) дан мос равишда биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар олиб толамиз:

$$v = |v_x|, \quad \omega = |\omega_x|, \quad v_x = \dot{x} = a\omega \cos \omega t,$$

$$\omega_x = \ddot{x} = -a\omega^2 \sin \omega t.$$

Бу ифодалардан кўрамизки, тебранма ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги ва тезланиши ҳам вақт ўтиши билан даврий равишда такрорланар экан. Нуқта тебраниш маркази O дан ўтаётганда $x = 0$, $\sin \omega t = 0$, $\cos \omega t = \pm 1$ бўлгани учун бу вақтда нуқта тезланиши нолга тенг бўлиб, тезлиги модуль бўйича энг катта қиймати $a\omega$ га эришади. Четки M_1 ва M_2 нуқталарда эса $x = \pm a$, $\sin \omega t = \pm 1$, $\cos \omega t = 0$ бўлиб, M нуқтанинг тезлиги ноль, тезланишининг абсолют қиймати $a\omega^2$ га тенг бўлади.

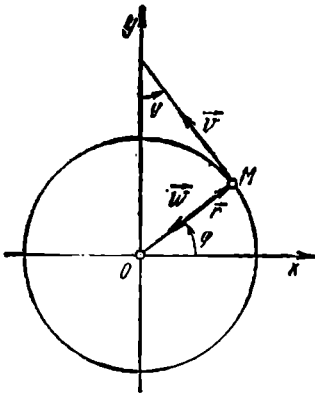
v_x ва ω_x ишораларига қараб, нуқта тебраниш маркази томон тезланувчан, тебраниш марказидан ташқарига секинланувчан ҳаракат қилганини кўриш мумкин.

Нуқта $x = a \cos \omega t$ қонун бўйича ҳаракатланганида ҳам гармоник тебранишлар солир бўлади, фақат бу ҳолда ҳаракат бошланғич $t = 0$ пайтда тебраниш марказидан эмас, балки $M_1(a)$ нуқтадан бошланади.

Нуқта $x = a \sin(\omega t + \alpha)$ ёки $x = a \cos(\omega t + \beta)$ қонунга кўра ҳаракатланганда ҳам юқорида кўрилган ҳоллардан гўёдан фарқ қилмайди, фақат $t = 0$ да нуқта тебраниш марказидан $x = a \sin \alpha$ ёки $x = a \cos \beta$ масофада бўлади. α ёки β тебранишнинг бошланғич фазаси дейилади.

8.6-масала. Нуқтанинг ҳаракати қуйидаги тенгламалар билан берилган

$$\left. \begin{aligned} x &= 10 \cos 2\pi \frac{t}{5}, \\ y &= 10 \sin 2\pi \frac{t}{5} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



8.25- расм.

(x, y — сантиметрлар, t — секундлар ҳисобида). Нуқтанинг траекторияси, тезлиги ва тезланишининг миқдори ва йўналишлари аниқлансин.

Ечиш. Нуқта траекториясининг тенгламасини аниқлаш учун (1) тенгламалардан вақт t ни йўқотамиз. Бунинг учун (1) тенгламаларни иккала томонини квадратга ошириб, сўнгра қўшамиз:

$$x^2 + y^2 = 100.$$

Демак, нуқта траекториясининг тенгламаси радиуси $r = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$ га тенг айланадан иборат (8.25- расм).

(8.19) га асосан нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$v_x = \dot{x} = -4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5}.$$

$$v_y = \dot{y} = 4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5}.$$

(8.20) га кўра нуқта тезлигининг модули

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\left(-4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5}\right)^2 + \left(4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5}\right)^2} = 4\pi \text{ см/с} = 0,04 \pi \text{ м/с га}$$

тенг бўлади.

М нуқта 1-чоракда бўлган ҳол учун (8.21) га асосан $\vec{v}$ тезлик векторининг x ва y ўқлар билан ташкил қилган бурчак косинусларини топамиз:

$$\cos(\vec{v}, \hat{x}) = \frac{v_x}{v} = -\sin 2\pi \frac{t}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{t}{5}\right),$$

$$\cos(\vec{v}, \hat{y}) = \frac{v_y}{v} = \cos 2\pi \frac{t}{5}.$$

Бундан тезликнинг x ва y ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини аниқлаймиз:

$$\vec{v}, \hat{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{t}{5} = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \vec{v}, \hat{y} = 2\pi \frac{t}{5} = \varphi.$$

М нуқтанинг радиуси x ўқ билан φ бурчак ташкил этгани туфайли $\vec{v}$ тезлик вектори шу нуқтада айланага ўтказилган уринма бўйича Ox ўқдан Oy ўққа 90° га айланиб ўтиш томонига йўналган.

(8.36) ва (8.37) дан фойдаланиб, тезланишнинг координата ўқларидаги проекциялари ва модулини топамиз:

$$w_x = \ddot{x} = -\frac{8\pi^2}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5},$$

$$\omega_y = \ddot{y} = -\frac{8\pi^2}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5},$$

$$\omega = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{\left(-\frac{8\pi^2}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8\pi^2}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5}\right)^2} = \frac{8\pi^2}{5} \text{ см/с}^2 = \frac{2\pi^2}{125} \text{ м/с}^2.$$

(8.38) га кўра тезланишнинг йўналтирувчи косинуслари

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{x}) = \frac{\omega_x}{\omega} = -\cos 2\pi \frac{t}{5} = -\cos \varphi = -\cos(\vec{r}, \hat{x}),$$

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{y}) = \frac{\omega_y}{\omega} = -\sin 2\pi \frac{t}{5} = -\sin \varphi = -\cos(\vec{r}, \hat{y})$$

бўлади.

Бу формулалардан тезланиш вектори айлананинг радиуси бўлиб унинг марказига йўналганлигини кўрамыз.

Бу масалада тезлик миқдор жиҳатдан ўзгармаса-да, унинг йўналиши ўзгарган туфайли тезланиш мавжуддир.

8.7-масала. Поезд радиуси $R = 1$ км бўлган аylanма йўлда ҳаракат қилади. Унинг бошланғич тезлиги 54 км/соат бўлиб, биринчи 30 с да у 600 м йўл босди. Поезд ҳаракатини текис ўзгарувчан ҳаракат деб ҳисоблаб, унинг 30 секунд охиридаги тезлиги ва тезланиш аниқлансин.

Ечиш. Поезд радиуси $R = 1$ км = 1000 м айланма йўлда ҳаракатланаётгани учун унинг тезланишини (8.52) га асосан аниқлаш мумкин:

$$\omega = \sqrt{\omega_\tau^2 + \omega_n^2}. \quad (1)$$

Ҳаракат текис ўзгарувчан бўлгани учун поезднинг ҳаракати (8.56) формула

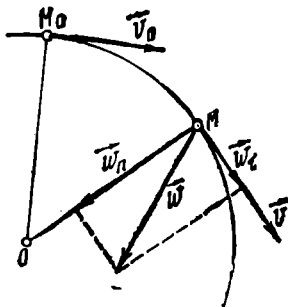
$$s = s_0 + v_0 t + \omega_\tau \frac{t^2}{2} \quad (2)$$

билан ифодаланади. Сапоқ бошини шундай танлаймизки, бунда $s_0 = 0$ бўлсин.

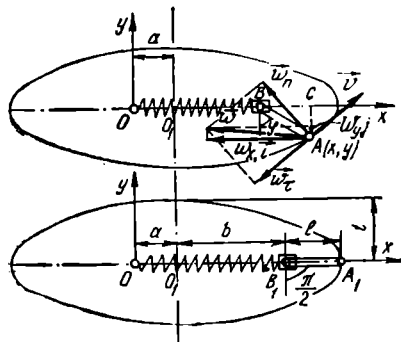
(2) дан $\omega_\tau = 2 \frac{s - v_0 t}{t^2}$ ни оламиз. Бунда $s = 600$ м, $v_0 = 54$ км/соат = 15 м/с $t = 30$ с эканлигини эътиборга олсак,

$$\omega_\tau = \frac{1}{3} \text{ м/с}^2$$

бўлади.



8.26- расм.



8.27- расм.

(8.55) ва (8.51) дан фойдаланиб, поездининг тезлиги ва нормал тезланишини аниқлаймиз:

$$v = v_0 + \omega_\tau t = 25 \text{ м/с},$$

$$\omega_n = \frac{v^2}{R} = 0,625 \text{ м/с}^2.$$

ω_τ ва ω_n ларнинг қийматини (1) га қўйиб, поездининг 30-секунд охиридаги тезланишини топамиз (8.26- расм):

$$\omega = \sqrt{\omega_\tau^2 + \omega_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (0,625)^2} = 0,708 \text{ м/с}^2.$$

8.8-масала. Узунлиги $AB = l$ бўлган стержень B нуқта атрофида $\varphi = \omega t$ қонунга кўра, B ползун эса $s = a + b \sin \omega t$ қонунга кўра ҳаракатланади (8.27- расм, а). A нуқтанинг траекторияси ва $t = 1$ с пайтдаги тезлиги, тезланиши ва траекториясининг эгрилик радиуси аниқлансин. $a = 0,2$ м, $b = 0,6$ м, $l = 0,3$ м,

$\omega = \frac{\pi}{3} \text{ с}^{-1}$ деб олинсин.

Ечиш. Дастлаб A нуқтанинг Oxy координаталар системасига нисбатан ҳаракатини аниқлаймиз.

$$x_A = x = OB + BC = s + l \sin \varphi,$$

$$y_A = y = -AC = -l \cos \varphi.$$

Демак,

$$\left. \begin{aligned} x &= a + (b + l) \sin \omega t, \\ y &= -l \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Нуқта траекториясини аниқлаш учун (1) системадан t ни йўқотиш керак. (1) нг қўйидагича ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-a}{b+l} &= \sin \omega t, \\ \frac{y}{l} &= -\cos \omega t. \end{aligned} \right\}$$

Бу ифодаларни квадратга ошириб қўшсак

$$\frac{(x-a)^2}{(b+l)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1.$$

Бу тенглама маркази координата бошидан Ox координата ўқи бўйича a масофага силжиган ҳамда ярим ўқлари $b+l$ ва l га тенг эллипсдан иборат. Хусусан

$\varphi = \omega t = \frac{\pi}{2}$ га тенг бўлса, AB кесма A_1B_1 ҳолатни эгаллайди (8.27- расм, б).

(1) да $b+l = d$ белгилаш киритсак,

$$x = a + d \sin \omega t,$$

$$y = -l \cos \omega t$$

бўлади.

(8.19) формулага кўра тезликнинг x, y ўқлардаги проекцияларини топамиз:

$$\left. \begin{aligned} v_x = \dot{x} &= d \cdot \omega \cos \omega t, \\ v_y = \dot{y} &= l \omega \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

(8.20) формуладан тезлик модулини аниқлаймиз:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega \sqrt{d^2 \cos^2 \omega t + l^2 \sin^2 \omega t}$$

$$v = \frac{\pi}{3} \sqrt{0,81 \cos^2 \frac{\pi}{3} t + 0,09 \sin^2 \frac{\pi}{3} t} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \sqrt{0,81 - 0,72 \sin^2 \frac{\pi}{3} t}.$$

$t = 1$ с бўлганда (2) ва (3) дан

$$v_x = 0,15 \pi = 0,471 \text{ м/с},$$

$$v_y = 0,087 \pi = 0,272 \text{ м/с},$$

$$v = 0,173 \pi = 0,543 \text{ м/с}$$

Бўлишнинг аниқлаймиз. (8.21) га кўра

$$\cos(\vec{v}, \hat{x}) = \frac{v_x}{v} = \frac{0,471}{0,543} = 0,866,$$

$$\cos(\vec{v}, \hat{y}) = \frac{v_y}{v} = \frac{0,272}{0,543} = 0,5.$$

Шундай қилиб, $(\vec{v}, \hat{x}) = 30^\circ$; $(\vec{v}, \hat{y}) = 60^\circ$ (8.27-расм). Нуқта ~~тезланиш~~ координата ўқларидаги проекциялари (8.36) дан топилади:

$$\omega_x = \ddot{x} = -d\omega^2 \sin \omega t,$$

$$\omega_y = \ddot{y} = l\omega^2 \cos \omega t.$$

(8.37) дан фойдаланиб, тезланиш модули учун

$$\omega = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2 \sqrt{d^2 \sin^2 \omega t + l^2 \cos^2 \omega t}$$

ифодани оламиз.

$t = 1$ с да берилганларни қўйсак, $\omega_x = -0,854 \text{ м/с}^2$; $\omega_y = 0,164 \text{ м/с}^2$, $\omega = 0,87 \text{ м/с}^2$ қийматларни оламиз.

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{x}) = \frac{\omega_x}{\omega} = -0,9816, \cos(\vec{\omega}, \hat{y}) = \frac{\omega_y}{\omega} = 0,1885.$$

Демак, $(\vec{\omega}, \hat{x}) = 169^\circ$, $(\vec{\omega}, \hat{y}) = 79^\circ$, яъни кўрилатган вақтда ~~тезланиш~~ вектор Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан 169° , Oy билан 79° бурчай ҳосил қилади (8.27-расм, а).

Энди $t = 1$ с бўлганда нуқта траекториясининг эгрилик радиусини аниқлаймиз. (8.51) нинг биринчисига кўра:

$$\omega_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{3} \frac{d}{dt} \sqrt{0,81 - 0,72 \sin^2 \frac{\pi}{3} t} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \frac{0,36 \sin \frac{2\pi}{3} t}{\sqrt{0,81 - 0,72 \sin^2 \frac{\pi}{3} t}}$$

$t = 1$ с да $\omega_\tau = -0,628 \text{ м/с}^2$ бўлади.

А нуқтанинг уринма ~~тезланиши~~ 8.27-расмда кўрсатилганидек, эллипсга ўтказилган уринма бўйича йўналиди.

(8.52) формуладан нормал тезлашишни аниқлаймиз:

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 - \omega_\tau^2} = \sqrt{0,7569 - 0,3944} \approx 0,61 \text{ м/с}^2.$$

(8.51) нинг иккинчисига асосан $t = 1$ с бўлганда А нуқта траекториясининг эгирлик радиуси

$$\rho = \frac{v^2}{\omega_n} = 0,485 \text{ м}$$

бўлади.

8.9- масала. $H = 500$ км баландликда сунъий йўлдош Ер атрофида доиравий орбита бўйлаб текис ҳаракатланади. Унинг марказга интилма тезланиши эркин тушувчи жисмнинг тезланишига тенг. Йўлдошнинг тезлиги за бир марта айланиш вақти аниқлансин. Берилган баландликда $g = 8,5 \text{ м/с}^2$; Ернинг радиуси $R = 6370 \text{ км}$ (8.28- расм).

Ечиш. Сунъий йўлдош орбитасининг радиусини r билан белгиласак, у $r = R + H = 6870 \text{ км}$ га тенг бўлади. (8.51) формуланинг иккинчисидан фойдаланиб, сунъий йўлдош тезлигини аниқлаймиз:

$$v = \sqrt{\omega_n \cdot \rho}$$

Бунда $\rho = r = 6870 \text{ км}$, $\omega_n = \omega = g = 8,5 \text{ м/с}^2 = 0,0085 \text{ км/с}^2$ эканлигини эътиборга олсак,

$$v = \sqrt{0,0085 \cdot 6870} = 7,64 \text{ км/с}.$$

Сунъий йўлдош орбитада бир марта айланиши учун кетган вақтни T билан белгиласак, мазкур вақт ичида унинг ўтган йўли $v \cdot T$ га тенг. Худди шу йўл радиуси r га тенг айлана узунлигига тенг, яъни $v \cdot T = 2\pi r$, бундан

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6870}{7,64 \cdot 3600} = 1,568 \text{ соат}.$$

Жавоб: $v = 7,64 \text{ км/с}$, $T = 1,568 \text{ соат}$.

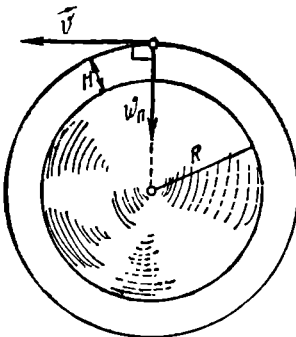
8.10- масала. Нуқта текисликда логарифмик спираль бўйича $r = a e^{k\varphi}$ қонун асосида ҳаракатланади, бунда

$$\varphi = \omega t, (\omega = \text{const}, 1 > k = \text{const}).$$

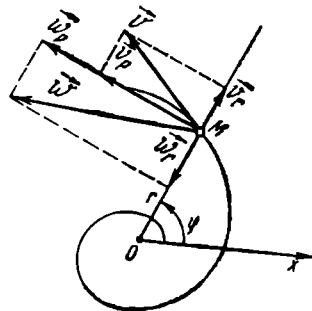
Нуқтанинг тезлик ва тезланиши r нинг функцияси сифатида аниқлансин (8.29- расм).

Ечиш. Нуқтанинг ҳаракати қутб координаталарида берилган:

$$\left. \begin{aligned} r &= a e^{k\omega t}, \\ \varphi &= \omega t. \end{aligned} \right\}$$



8.28- расм.



8.29- расм.

Нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун (8.25) формулага кўра унинг радиал ва кўндаланг ташкил этувчиларини аниқлаймиз:

$$v_r = \dot{r} = a k \omega e^{k\omega t},$$

$$v_p = \dot{\varphi} r = \omega \cdot r.$$

Нуқта тезлигининг модулини (8.26) воситасида аниқлаймиз:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \omega \cdot r \sqrt{k^2 + 1}.$$

(8.39) формуладан фойдаланиб, нуқтанинг радиал ва кўндаланг тезланишларини аниқлаймиз:

$$w_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = a k^2 \omega^2 e^{k\omega t} - r \omega^2 = k^2 \omega^2 r - r \omega^2 = r \omega^2 (k^2 - 1),$$

$k^2 - 1 < 0$ бўлгани учун w_r йўналиши r координата ўсишига тескари бўлади.

$$w_p = r \cdot \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} = 2 k \omega r \cdot \omega = 2 k \omega^2 r.$$

(8.40) дан нуқтанинг тезланиш модулини аниқлаймиз:

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_p^2} = r \omega^2 \sqrt{(k^2 - 1)^2 + 4k^2} = \omega^2 (k^2 + 1) r.$$

9-БОБ. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ИЛГАРИЛАМА ВА ҚЎЗГАЛМАС ЎҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТЛАРИ

Қаттиқ жисм кинематикасида асосан қуйидаги икки масала кўрилади:

1. Жисмнинг танланган координаталар системасига нисбатан ҳар ондаги ҳолатини аниқлаш.

2. Ҳаракат тенгламалари маълум бўлган жисмнинг ёки жисм ҳар бир нуқтасининг кинематик характеристикаларини топиш.

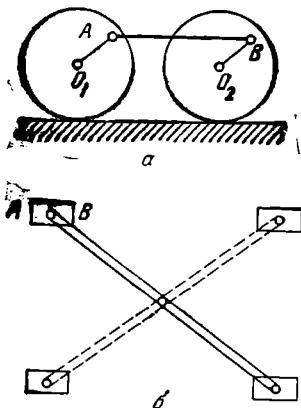
Дастлаб жисмнинг энг содда, хусусий ҳолдаги ҳаракатларини кўриб чиқамиз.

9.1-§. Жисмнинг илгариллама ҳаракати

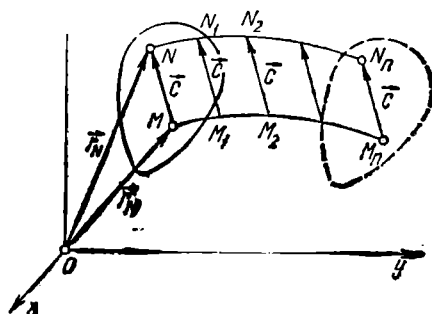
Жисмда олинган ҳар қандай кесма ҳаракат давомида доимо ўзининг бошланғич ҳолатига параллел равишда ҳаракатланса, жисмнинг бундай ҳаракати *илгариллама ҳаракат* дейилади. Масалан, паровоз филдиракларини туташтирувчи AB спарник ёки велосипеднинг AB педали (9.1-рasm, *a*, *b*) илгариллама ҳаракатда бўлади. Бу мисоллардан кўра миёна, илгариллама ҳаракатдаги жисм нуқтасининг траекторияси умуман эгри чизиқдан иборат бўлади.

Жисм *Охуз* қўзғалмас координаталар системасига нисбатан илгариллама ҳаракатда бўлсин (9.2-рasm). Бу ҳолда жисмнинг иккита

нуқтасини туташтирувчи $\overrightarrow{MN}$ вектор миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармасдан қолади, чунки абсолют қаттиқ жисм таърифига кўра MN кесма узунлиги ўзгармайди, илгариллама ҳаракат таърифига кўра $\overrightarrow{MN}$ вектор ўзига параллел равишда ҳаракатланади. Шу туфайли илгариллама ҳаракатдаги жисм учун бу вектор ўзгармас $\overrightarrow{MN} = \text{const} = \vec{c}$ векторни ифодалайди.



9.1- расм.



9.2- расм.

Жисмнинг илгарилама ҳаракатини ўрганиш қуйидаги теоремага асосланади:

Теорема. Илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг ҳамма нуқталари бир хил траектория чизади ва ҳар онда бир хил тезлик ҳамда бир хил тезланишга эга бўлади.

Исбот. Жисмда ихтиёрий M ва N нуқталарни олиб, уларнинг радиус-векторларини $\vec{r}_M$ ва $\vec{r}_N$ билан белгиласак,

$$\vec{r}_N = \vec{r}_M + \vec{MN} \quad (9.1)$$

ўринли бўлади.

Жисм илгарилама ҳаракатда бўлганда $\vec{r}_M$ ва $\vec{r}_N$ ўзгаради, лекин $\vec{MN} = \vec{c}$ вектор ўзгармайди. Агар $\vec{MN}$ векторнинг $t_1, t_2, \dots, t_n$ пайтдаги кетма-кет ҳолатларини мос равишда $\vec{M_1N_1}, \vec{M_2N_2}, \dots, \vec{M_nN_n}$ билан белгилаб, (9.1) га асосан, M нуқтанинг траекторияси $\cup MM_1M_2 \dots M_n$. M_n ни $\vec{MN} = \vec{c}$ векторга силжитсак, у N нуқтанинг траекторияси $\cup NN_1N_2 \dots N_n$ билан устма-уст тушади, яъни M ва N нуқталар бир хил траекториялар бўйлаб ҳаракатланади.

(9.1) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}_N}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} + \frac{d(\vec{MN})}{dt}.$$

Бунда $\vec{MN} = \vec{c} = \text{const}$ бўлгани учун $\frac{d(\vec{MN})}{dt} = 0$.

Бинобарин, $\frac{d\vec{r}_N}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt}$ ёки (8.17) га асосан $\vec{v}_N = \vec{v}_M$ бўлади.

Бу тенглик илгарилама ҳаракатдаги жисм барча нуқталарининг ҳар ондаги тезликларни бир хил бўлишини ифодалайди.

Охирги тенгликдан вақт бўйича ҳосила олсак,

$$\frac{d\vec{v}_N}{dt} = \frac{d\vec{v}_M}{dt}$$

ёки (8.33) га асосан

$$\vec{\omega}_N = \vec{\omega}_M$$

бўлади. Бинобарин, илгарилама ҳаракатдаги жисм барча нуқталарининг ҳар ондаги тезланишлари бир хил бўлади. ■

Шундай қилиб, жисмнинг илгарилама ҳаракати унинг ихтиёрий нуқтаси ҳаракати билан аниқланади. Илгарилама ҳаракатдаги жисм нуқталарининг ҳар ондаги тезлиги ҳам, тезланиши ҳам бир хил бўлганидан, уларни мос равишда жисмнинг тезлиги ва тезланиши деб аташ мумкин.

Охуз координаталар системасига нисбатан илгарилама ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳаракат тенгламасини чиқариш учун жисмнинг ихтиёрий M нуқтасини олиб, унинг координаталарини x_M , y_M , z_M билан белгилаймиз. Жисм ҳаракатланганда бу координаталар вақтнинг функцияси сифатида ўзгаради:

$$x_M = f_1(t), \quad y_M = f_2(t), \quad z_M = f_3(t). \quad (9.2)$$

(9.2) тенглама M нуқтанинг ҳаракат тенгламаси бўлиб, жисмнинг илгарилама ҳаракат тенгламасини ҳам ифодалайди.

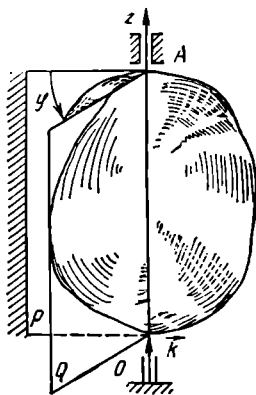
9.2-§. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат тенгламаси

Иккита нуқтаси доимо қўзғалмасдан қоладиган жисмнинг ҳаракати *қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат* дейилади. Қўзғалмас нуқталардан ўтувчи ўқ *айланиш ўқи* дейилади.

Турбиналар диски, генераторларнинг ротори, станокларнинг маховиги каби машина ва механизмларнинг ҳаракати қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмга мисол бўла олади.

Жисмнинг айланиш ўқида ётувчи барча нуқталари қўзғалмас бўлади. Айланиш ўқида ётмайдиган нуқталарининг траекториялари айланиш ўқиға перпендикуляр текисликларда ётувчи айланалардан иборат бўлади.

Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатининг кинематик тенгламасини аниқлаш учун айланиш ўқиға бириктирилган қўзғалмас P текислики ҳамда жисмга бириктирилган ва u билан бирга айланувчи Q текисликини ўтказамиз (9.3-расм). Бу текисликлар орасидаги φ бурчак жисмнинг айланиш бурчаги дейилади. Oz айланиш



9.3- расм.

Ўқи бирлик вектори $\vec{k}$ нинг учидан қараганда φ бурчакнинг ўзгариши соат стрелкаси ҳаракати йўналишига тескари бўлса, айланиш бурчагини мусбат, акс ҳолда манфий олинади. Айланиш бурчаги радианда ўлчанади. Агар жисмнинг айланиш сони N маълум бўлса, айланиш бурчаги $\varphi = 2\pi N$ формула ёрдамида аниқланади.

Айланиш бурчаги φ нинг миқдор ва йўналиши маълум бўлса, Q текисликнинг P текисликка нисбатан ҳолатини аниқлаш мумкин. Q текислик жисмга маҳкам бириктирилгани ва у билан биргаликда ҳаракатлангани учун қўзғалмас ўқ атрофидаги жисмнинг ҳолатини ҳам φ бурчак орқали аниқлаш мумкин.

Жисм Oz ўқ атрофида айланганда унинг айланиш бурчаги φ вақтнинг функцияси сифатида ўзгаради:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (9.3)$$

Бу тенглама жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатининг кинематик тенгламаси дейилади.

9.3-§. Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати бурчак тезлиги. Текис айланма ҳаракат

Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатининг t вақтдаги айланиш бурчагини φ , $t_1 = t + \Delta t$ вақтдаги айланиш бурчагини $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$ билан белгилайлик. $\Delta t = t_1 - t$ вақт оралиғида жисм $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ бурчакка бурилади.

$\Delta\varphi$ нинг Δt га нисбати жисмнинг Δt вақтдаги *ўртача бурчак тезлиги* дейилади:

$$(\omega_z)_{\text{ўр}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатининг берилган ондаги бурчак тезлигини топиш учун ўртача бурчак тезлигининг Δt нолга интилгандаги лимитини оламиз:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

ёки

$$\omega_z = \dot{\varphi}. \quad (9.4)$$

Шундай қилиб, жисмнинг бурчак тезлиги айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг.

φ бурчакнинг ўзгариш қонунига мос равишда ω_z бурчак тезлиги мусбат ёки манфий қийматга эга бўлиши мумкин. Бурчак тезлиқнинг модулини ω билан белгилаймиз: $\omega = |\dot{\varphi}|$.

Қаттиқ жисм кинематикасида жисмнинг бурчак тезлигини вектор сифатида ифодалаш кўпгина қулайликлар яратади.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг бурчак тезлик векторини мазкур ўқ бўйлаб йўналгап ва унинг мусбат йўналишидан қаралганда айланиш соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда

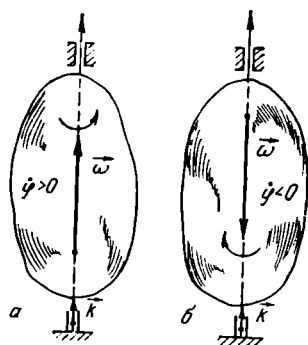
кўринадиган, айланиш ўқининг ихтиёрий нуқтасига қўйилган вектор билан ифодалаймиз (9.4-расм). Бурчак тезлик векторининг модули

$$|\vec{\omega}| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = |\omega_z|$$

формула ёрдамида аниқланади.

Агар айланиш ўқи бирлик векторини $\vec{k}$ билан белгиласак, бурчак тезлик векторини

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k} = \omega_z \cdot \vec{k} \quad (9.5)$$



9.4- расм.

кўринишида ёзиш мумкин. (9.5) дан кўрамизки, $\dot{\varphi} > 0$ бўлса, $\vec{\omega}$ вектори $\vec{k}$ йўналиши бўйича (9.4-расм, а), $\dot{\varphi} < 0$ да $\vec{k}$ га қарама-қарши йўналади (9.4-расм, б).

Айланиш бурчаги радианда, вақт эса секунд (с) да ўлчанганидан, бурчак тезликнинг ўлчов бирлиги $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ ёки с^{-1} бўлади.

Жисм ҳаракати давомида унинг бурчак тезлиги $\omega_z = \omega_0$ ўзгармай қолса, жисм *текис айланма ҳаракатда* дейилади. Бу ҳолда (9.4) га кўра $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 = \text{const}$ ёки $d\varphi = \omega_0 dt$ бўлади.

Вақт 0 дан t гача ўзгарганда айланиш бурчаги φ_0 дан φ гача ўзгаришини эътиборга олиб, охириги тенгликни интегралласак,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \quad (9.6)$$

бўлади. (9.6) ифода *жисм текис айланма ҳаракатининг тенгламаси* дейилади.

Жисм текис айланма ҳаракатда бўлса, техникада кўпинча унинг бир минутдаги айланишлар сонидан фойдаланилади. Жисм бир марта тўла айланганда айланиш бурчаги $\varphi = 2\pi$ бўлади. Жисм бир минутда n марта айланса, текис айланма ҳаракат бурчак тезлиги қуйидагича аниқланади:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ с}^{-1}. \quad (9.7)$$

9.4-§. Жисмнинг бурчак тезланиши. Текис ўзгарувчан айланма ҳаракат

Умумий ҳолда жисмнинг бурчак тезлиги вақт функцияси сифатида ўзгаради. Жисмнинг бирор t вақтдаги Oz ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги $\omega_z(t)$ га, $t_1 = t + \Delta t$ вақтдаги бурчак тезлиги $\omega_z(t_1) = \omega_z(t) + \Delta\omega_z$ га тенг бўлсин. Бурчак тезликнинг Δt вақт ичидаги ортгирмаси $\Delta\omega_z = \omega_z(t_1) - \omega_z(t)$ га тенг бўлади.

$\Delta\omega_z$ нинг Δt вақтга нисбати жисмнинг шу вақтдаги ўртача бурчак тезланиши дейилади ва $(e_z)_{\text{ўр}}$ билан белгиланади:

$$(e_z)_{\text{ўр}} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}$$

Ўртача бурчак тезланишнинг Δt нолга интилгандаги лимити жисмнинг берилган ондаги бурчак тезланиши дейилади:

$$e_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt}.$$

(9.4) тенгликни ҳисобга олсак, охириги ифода

$$e_z = \omega_z = \ddot{\varphi} \quad (9.8)$$

кўринишида ёзилади.

Бинобарин, берилган онда бирор қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисмнинг бурчак тезланиши бурчак тезликдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки берилган ўқ атрофидаги айланма ҳаракат қонунидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

Жисмнинг бурчак тезланишини (бурчак тезлик каби) айланиш ўқи бўйлаб йўналган $\vec{e}$ вектори тарзида ифодалаш мумкин. Бунда жисмнинг бурчак тезланиш вектори шу жисм бурчак тезлик векторидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг деб олинади (9.5-расм):

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} \vec{k} = e_z \vec{k}$$

ёки

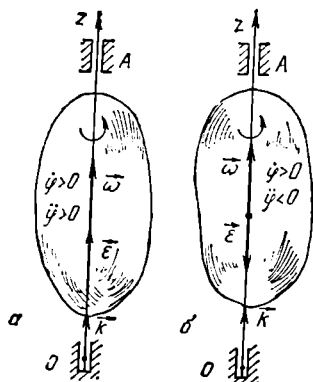
$$\vec{e} = e_z \vec{k} = \ddot{\varphi} \vec{k}. \quad (9.9)$$

Агар жисмнинг бурчак тезлиги модуль жиҳатдан орта борса, бундай ҳаракат *тезланувчан айланма ҳаракат*, камая борса, *секинланувчан айланма ҳаракат* дейилади. Текис айланма ҳаракатда $\omega = \text{const}$ бўлгани учун $e = 0$ бўлади.

Бинобарин, ω_z ва e_z бир хил ишорали бўлса, ҳаракат *тезланувчан* (9.5-расм, а), турли ишорага эга бўлса, ҳаракат *секинланувчан* (9.5-расм, б) бўлади.

Жисм бурчак тезланишининг ўлчов бирлиги $\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ ёки с^{-2} бўлади.

Жисм ҳаракати давомиди бурчак тезланиши ўзгармай қолса (яъни $e_z = \text{const}$), жисм *текис ўзгарувчан айланма ҳаракат*да дейилади. Бу ҳолда (9.8) га кўра $\frac{d\omega_z}{dt} = e_z = \text{const}$ ёки $d\omega_z = e_z dt$ бўлади. Буни вақт 0 дан t гача ўзгарган-



9.5- расм.

да, бурчак тезлиги ω_0 дан ω_z гача ўзгаришини эътиборга олиб интеграллаймиз:

$$\omega_z = \omega_0 + \varepsilon_z t. \quad (9.10)$$

Бу тенглик ёрдамида текис ўзгарувчан айланма ҳаракат бурчак тезлиги аниқланади.

(9.4) ни ҳисобга олиб, (9.10) ни

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon_z t \text{ ёки } d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon_z t) dt$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламани 0 дан t гача бўлган вақт оралиғида айланиш бурчаги φ_0 дан φ гача ўзгаришини ҳисобга олиб интегралласак,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_z \frac{t^2}{2}, \quad (9.11)$$

текис ўзгарувчан айланма ҳаракат тенгламаси келиб чиқади.

9.1- масала. Гирокомпасни ишга тушириш вақтида тинч ҳолатдаги роторнинг бурчак тезланиши вақтга тўғри пропорционал равишда ўзгаради ва биринчи 5 минут охирида роторнинг бурчак тезлиги $18000 \frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ га тенг бўлади. Шу вақт ичида ротор неча марта айланади?

Ечиш. Масаланинг шартига кўра, $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varepsilon_z = at$, бунда a пропорционаллик коэффиценти, $t = 5 \text{ мин} = 300 \text{ с}$ да ротор $n = 18000 \frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ ёки $\omega = \frac{\pi n}{30} = 600 \pi \text{ с}^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади.

Дастлаб пропорционаллик коэффиценти a ни аниқлаймиз. $\varepsilon_z = at$ ва (9.8) формулаларни солиштириб,

$$\frac{d\omega_z}{dt} = at \text{ ёки } d\omega_z = at \cdot dt$$

муносабатни оламиз. Бу тенгламани мос чегаравий шартларда интеграллаб, $\omega = \frac{a t^2}{2}$ ифодани оламиз. Бундан $a = \frac{2 \omega_z}{t^2}$. $t = 300 \text{ с}$ да $\omega_z = 600 \pi \text{ с}^{-1}$ бўлгани учун

$$a = \frac{2 \cdot 600 \pi}{90000} = \frac{\pi}{75}.$$

Шундай қилиб, ротор бурчак тезлиги $\omega_z = \frac{\pi}{150} t^2$ қонунга кўра ўзгарар экан.

(9.4.) га кўра охирги ифодани $d\varphi = \frac{\pi}{150} t^2 dt$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу дифференциал тенгламани $t = 0$ да $\varphi = 0$ бўлишини назарда тутиб интегралласак, роторнинг ҳаракат қонунини ифодаловчи $\varphi = \frac{\pi t^3}{450}$ тенгламани оламиз. $t = 300 \text{ с}$ давомидаги роторнинг айланиш сонини N билан белгиласак, $\varphi = 2 \pi N$ бўлгани учун $2 \pi N = \frac{\pi t^3}{450}$ тенглик ўринли бўлади. Бундан $N = \frac{t^3}{900} = 30000$.

Шундай қилиб, 5 минут давомида ротор 30000 марта айланар экан.

9.2- масала. Двигатель вали $\varepsilon = \pi \text{ с}^{-2}$ бурчак тезланиш билан текис тезла-
нувчан айланма ҳаракат қилиб, $t_2 - t_1 = 10 \text{ с}$ вақт оралиғида 100 марта айлана-

ди. Валнинг t_1 ва t_2 пайтдаги бурчак тезликлари аниқлансин. Бошланғич пайтда вал тинч ҳолатда бўлган.

Ечиш. Вал бошланғич пайтда тинч ҳолатда бўлиб, текис тезланувчан айланма ҳаракат қилгани учун (9.11) ва (9.10) формулалар қуйидагича ёзилади:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_z t^2}{2}, \quad (1)$$

$$\omega_z = \varepsilon_z t. \quad (2)$$

Масаланинг шарида t_1 ва t_2 пайтлар номаълум. Агар t_1, t_2 пайтларга мос келувчи айланиш бурчакларини мос равишда φ_1 ва φ_2 билан белгиласак, (1) га кўра қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon_z t_1^2}{2}; \quad \varphi_2 = \frac{\varepsilon_z t_2^2}{2}. \quad (3)$$

$t_2 - t_1$ вақт оралиғида вал 100 марта айлангани учун шу вақт оралиғидаги бурчак орттирмаси қуйидагича аниқланади:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \cdot 100 = 200\pi \text{ рад}$$

ёки (3) ни эътиборга олсак, $\frac{\varepsilon_z}{2} (t_2^2 - t_1^2) = 200\pi$ ҳосил бўлади.

Масаланинг шартига кўра $\varepsilon_z = \pi \text{ с}^{-2}$, $t_2 - t_1 = 10 \text{ с}$ ёки $t_2 = t_1 + 10$ эканлигини назарда тутсак,

$$\frac{\pi}{2} (t_1^2 + 20t_1 + 100 - t_1^2) = 200\pi$$

ёки $20t_1 = 300$ бўлади. Бундан $t_1 = 15 \text{ с}$ ҳамда $t_2 = t_1 + 10 = 25 \text{ с}$ эканлигини аниқлаймиз.

У ҳолда (2) дан $\omega_{z1} = 15\pi \text{ с}^{-1}$, $\omega_{z2} = 25\pi \text{ с}^{-1}$ ёки (9.7) га кўра

$$n_1 = \frac{60 \omega_{z1}}{2} = 450 \frac{\text{айл}}{\text{мин}}, \quad n_2 = \frac{60 \omega_{z2}}{2} = 750 \frac{\text{айл}}{\text{мин}}$$

бўлади.

9.5- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизиқли тезлиги

Қўзғалмас Oz ўқ атрофида ω_z бурчак тезлик билан айланувчи қаттиқ жисм ихтиёрий M нуқтасининг тезлигини аниқлаймиз. M нуқтадан айланиш ўқиғача бўлган масофани $O_1M = R$ билан белгилайлик (9.6- расм, а). Агар dt вақт оралиғида жисм $d\varphi$ бурчакка айланса, M нуқта айланиш ўқиға перпендикуляр текисликда айлана

бўйлаб ҳаракатланиб $ds = MM_1 = R d\varphi$ бўлган ёй координатасини ўтади ҳамда (8.28) га асосан M нуқта тезлигининг алгебраик қиймати қуйидагича аниқланади:

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \dot{\varphi}. \quad (9.12)$$

Тезликнинг модули эса

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| = R \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|$$

ёки (9.4) га кўра

$$v = R \cdot \omega \quad (9.13)$$

формуладан аниқланади. (9.13) воситасида аниқланадиган v тезлик қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизикли тезлиги деб аталади.

Демак, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг ҳар ондаги чизикли тезлиги миқдор жиҳатдан мазкур нуқтадан айланиш ўқиғача бўлган масофа билан жисмнинг шу ондаги бурчак тезлиги кўпайтмасига тенг.

Жисм барча нуқталарининг бурчак тезликлари ҳар онда ўзaro тенг бўлади. Шу сабабли қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқталарининг чизикли тезликлари мазкур нуқталардан айланиш ўқиғача бўлган масофаларга тўғри пропорционал бўлади (9.6- расм, б).

Нуқтанинг чизикли тезлиги $\vec{v}$ нуқта траекториясини ифодаловчи айланага ҳаракат йўналиши бўйича ўтказилган уринма бўйлаб йўналади (9.6- расм).

Координата бошини айланиш ўқидаги O нуқтада олиб, z ўқни айланиш ўқи бўйлаб йўналтирамыз.

M нуқтанинг O га нисбатан радиус-векторини $\vec{r}$ билан белгилаймиз ва $\vec{\omega}$ бурчак тезлик векторини ўтказамиз (9.6- расм, а).

$\vec{\omega} \times \vec{r}$ вектор кўпайтмани M нуқтанинг тезлик вектори $\vec{v}$ билан солиштирамыз. $\vec{\omega} \times \vec{r}$ вектори, $\vec{\omega}$ ва $\vec{r}$ ётган текисликка перпендикуляр равишда жисмнинг айланиш йўналиши бўйича йўналади, яъни $\vec{\omega} \times \vec{r}$ вектори билан $\vec{v}$ тезликнинг йўналиши бир хил бўлади. Мазкур вектор кўпайтманинг модули

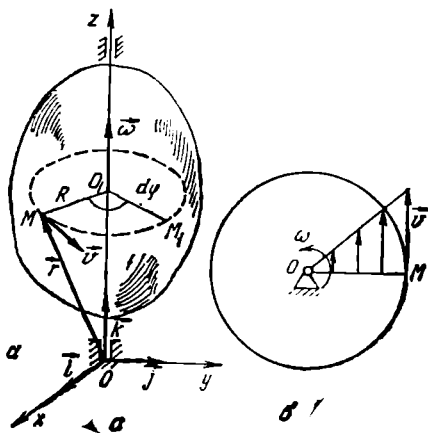
$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \sin(\widehat{(\vec{\omega}, \vec{r})}) = \omega \cdot R,$$

яъни $\vec{v}$ тезликнинг модулига тенг бўлади. Шундай қилиб,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9.14)$$

вектор тенглик исботланди.

Бинобарин, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизикли тезлик вектори жисмнинг бурчак тезлик вектори билан мазкур нуқтанинг айланиш ўқидаги ихтиёрий O нуқтага нисбатан радиус-векторининг вектор кўпайтмасига тенг.



9.6- расм.

M нуқтанинг координаталарини x, y, z билан белгиласак, $\vec{\omega} \times \vec{r}$ вектор кўнайтма учун

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega_z\vec{i} + x\omega_z\vec{j}$$

муносабатни, тезликнинг Декарт координата ўқларидаги проекциялари учун эса

$$v_x = -y\omega_z, v_y = x\omega_z, v_z = 0 \quad (9.15)$$

ифодаларни оламир.

(9.15) га асосан тезликнинг модулини

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |\omega_z| \sqrt{x^2 + y^2}$$

формула ёрдамида аниқлаш мумкин.

9.6-§. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизиқли тезланиши

Қўзғалмас ўқ атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлик ва $\vec{\epsilon}$ бурчак тезланиш билан айланувчи жисм ихтиёрий M нуқтасининг тезланишини (8.50) формулага асосан уринма ва нормал ташкил этувчилардан иборат деб қараш мумкин:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\tau + \vec{\omega}_n = \omega_\tau \vec{\tau}^\circ + \omega_n \vec{n}^\circ. \quad (9.16)$$

M нуқтадан айланиш ўқигача бўлган масофани R билан белгилайлик. (9.12) ва (9.13) ни (8.51) га қўйиб, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқталарининг уринма ва нормал тезланишлари учун ушбу ифодаларни оламир:

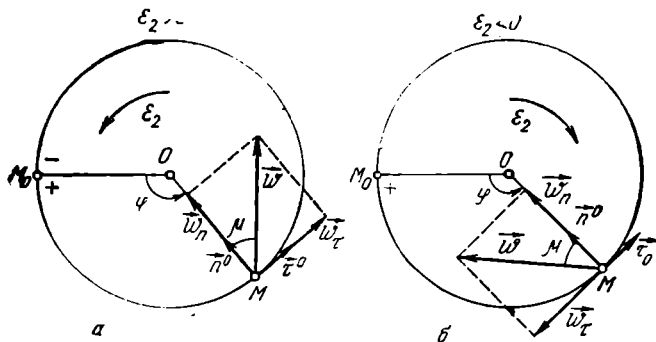
$$\omega_\tau = \frac{d\omega_\tau}{dt} = \ddot{s} = R \cdot \ddot{\varphi} = R \cdot \epsilon_z, \quad (9.17)$$

$$\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R \cdot \omega^2. \quad (9.18)$$

(9.17) ва (9.18) ни эътиборга олиб, (9.16) га кўра нуқтанинг тезланиш векторини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\vec{\omega} = R \epsilon_z \vec{\tau}^\circ + R\omega^2 \vec{n}^\circ. \quad (9.19)$$

Бу формуладаги $R\epsilon_z \vec{\tau}^\circ$ вектор воситасида ифодаланадиган уринма тезланиш ϵ_z бурчак тезланишнинг мусбат ёки манфий қиймат қабул қилишига қараб, φ бурчакнинг мусбат ёки манфий йўналиши билан аниқланади ҳамда *нуқтанинг айланма тезланиши* дейилади (9.7-рasm); $R\omega^2 \geq 0$ бўлгани учун нормал тезланиш доимо бош нормаль бўйича йўналади ва *нуқтанинг марказга интилма тезланиши* дейилади.



расм.

M нуқта тезланишининг модули

$$\omega = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_t^2} = R \sqrt{\epsilon^2 + \omega^2} \quad (9.20)$$

формуладан аниқланади. (9.19) ва (9.20) ёрдамида аниқланадиган тезланиш жисм нуқтасининг *чизиqli тезланиши* дейилади.

M нуқта чизиqli тезланишининг йўналишини аниқлаш учун бош нормаль билан $\vec{\omega}$ вектори орасидаги μ бурчакни аниқлаш кифоя:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\omega_t|}{\omega_n} = \frac{\epsilon}{\omega}. \quad (9.21)$$

Жисмнинг барча нуқталари учун ϵ ва ω бир хил бўлганидан қўзғалмас ўқ атрофида айланаятган жисм нуқталарининг чизиqli тезланиши айланиш ўқидан мазкур нуқталаргача бўлган масофага пропорционал равишда ўзгаради ҳамда берилган онда жисмнинг барча нуқталари учун μ бурчак бир хил қийматга эга бўлади.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқталарининг чизиqli тезланишини (9.14) дан вақт бўйича ҳосила олиб ҳам аниқлаш мумкин:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Бунда $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ бўлгани учун

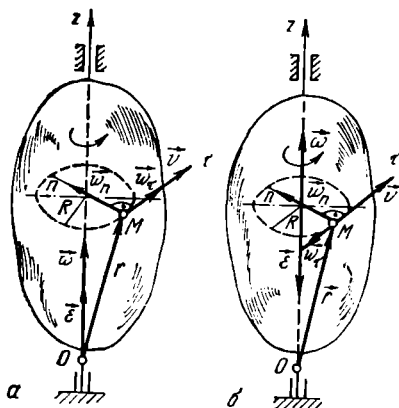
$$\vec{\omega} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (9.22)$$

Бу формулада

$$\vec{\epsilon} \times \vec{r} = \vec{\omega}_\tau \quad (9.23)$$

уринма тезланишини ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам унинг миқдори

$\epsilon r \sin(\widehat{\vec{\epsilon}, \vec{r}})$ га тенг, йўналиши эса $\vec{\omega}$ ва $\vec{\epsilon}$ векторлари бир томон-



9.8- расм.

га йўналганда M нуқтанинг тезлиги билан мос тушади (9.8-расм, а) $\vec{\omega}$ ва $\vec{v}$ қарама-қарши йўналган ҳолда тезлик вектори-га қарама-қарши йўналади (9.8-расм, б). Шу сабабли M нуқта-да айланишнинг мусбат йўналиши бўйича ўтказилган M_τ урин-манинг бирлик векторини $\vec{\tau}$ би-лап белгиласак, уринма тезла-ниш учун

$$\vec{\omega}_\tau = R \cdot \varepsilon_z \cdot \vec{\tau} \quad (9.24)$$

тенглик ўринли бўлади.

(9.22) даги

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega}_n \quad (9.25)$$

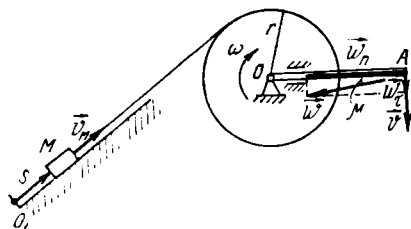
қўшилиувчи марказга интилма (ёки ўққа интилма) тезланишни ифо-далайди. Ҳақиқатан ҳам унинг миқдори $\vec{\omega}$ ва $\vec{v}$ лар ўзаро перпен-дикуляр йўналгани учун ωv ёки $R\omega^2$ га тенг бўлади. $\vec{\omega} \times \vec{v}$ век-тор кўпайтма айланма ҳаракат тезланувчан ёки секинланувчан бўли-шидан қатъи назар, $\vec{\omega}$ ва $\vec{v}$ векторларига перпендикуляр равишда доимо M нуқта траекториясининг маркази томон, яъни бош нормаль Mn бўйича йўналади. Бинобарин, марказга интилма тезланиш учун

$$\vec{\omega}_n = R \omega^2 \vec{n} \quad (9.26)$$

формула ўринли бўлади. Бунда $\vec{n}$ бош нормалнинг бирлик вектори.

Шундай қилиб, (9.23 — 9.26) ларни назарда тутиб, (9.22) фор-муладаги векторли қўшилиувчилар мос равишда (9.19) даги биринчи ва иккинчи қўшилиувчилар билан ифодаланиши исботланди.

9.3- масала. Узунлиги $OA = l = 54$ см га тенг даста радиуси $r = 27$ см бўлган барабан билан биргаликда айланади. Барабанга ип ўралиши натижасида M юк $s = 2\pi l^2$ см қонунга кўра қия текислик бўйлаб кўтарилади. OA даста бир марта тўла айланган пайтда даста учидagi A нуқтанинг тезлик ва тезлани-ши аниқлансин (9.9- расм).



9.9- расм.

Ечиш. M юк қия текислик бўйлаб тўғри чизикли ҳаракат қилади. Даст-лаб ҳаракат қонуни берилган M нуқта-нинг тезлигини (8.28) формулага би-ноан аниқлаймиз:

$$v_\tau = \dot{s} = 6\pi l^2.$$

Барабан ва OA даста O ўқ атро-фида биргаликда айлангани туфайли уларнинг бурчак тезликлари бир хил бўлади. Барабан гардишидаги нуқта-нинг чизикли тезлиги миқдор жиҳатдан

М нуқта тезлигига тенг. Барабан айланма ҳаракатда бўлгани учун унинг гардишидаги нуқтанинг тезлигини (9.13) формула ёрдамида аниқлаш мумкин. Шу сабабли

$$6\pi t^2 = \omega \cdot r$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан барабан (ёки даста) нинг бурчак тезлигини аниқлаймиз:

$$\omega = \frac{6\pi t^2}{r} = \frac{2\pi t^2}{9} \text{ с}^{-1}.$$

(9.8) га кўра дастанинг бурчак тезланишини ҳисоблаймиз:

$$\epsilon = \dot{\omega} = \frac{4\pi t}{9} \text{ с}^{-2}.$$

ОА даста бир марта айланиш учун кетган вақтни t_1 билан белгиласак, $t = t_1$ да *М* юк қия текислик бўйлаб $s_1 = 2\pi r$ айланишнинг узунлигига тенг масофага кўтарилади. Масаланинг шартига кўра $s_1 = 2\pi t_1^3$; бинобарин $2\pi t_1^3 = 2\pi r$ ёки $t_1 = 3$ с.

(9.13) дан фойдаланиб, *А* нуқта чизиқли тезлигининг модулини аниқлаймиз:

$$v = \omega \cdot OA = \frac{2\pi}{9} t^2 \cdot 54 = 12\pi t^2 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

$$t = t_1 = 3 \text{ с да } v = 108\pi \frac{\text{см}}{\text{с}} = 3,39 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

А нуқта тезлигининг йўналиши 9.7-расмда кўрсатилгандек *ОА* айланиш радиусига перпендикуляр бўлади.

(9.17) га кўра

$$\omega_\tau = OA \cdot \epsilon_z = \frac{4\pi t}{9} \cdot OA,$$

$$t = t_1 = 3 \text{ с да } \omega_\tau = \frac{4\pi}{3} \cdot 54 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} = 2,26 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$\epsilon > 0$ бўлгани учун $\vec{\omega}_\tau$ вектор $\vec{v}_A$ бўйича йўналиди. (9.18) га асосан

$$\omega_n = OA \omega^2 = \frac{4\pi^2}{81} t^4 \cdot 54 = \frac{8\pi^2}{3} t^4 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

$$= t_1 = 3 \text{ с да } \omega_n = 21,30 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

А нуқта чизиқли тезланишининг миқдорини (9.20) дан фойдаланиб аниқлаймиз:

$$\omega = \sqrt{\omega_\tau^2 + \omega_n^2} = 21,35 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$\vec{\omega}$ билан *ОА* орасидаги бурчакни μ билан белгиласак, (9.21) формулага асосан

$$\mu = \arctg \frac{|\epsilon|}{\omega^2} = \arctg 0,106,$$

бундан

$$\mu \approx 6^\circ.$$

10-бoб. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ТЕКИС ПАРАЛЛЕЛ ҲАРАКАТИ



10.1-§. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини аниқлаш. Текис шаклнинг ҳаракат тенгламалари

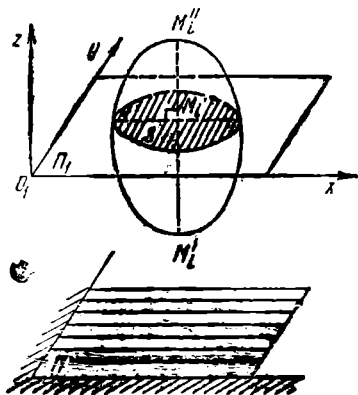
Барча нуқталари берилган қўзғалмас текисликка параллел текисликларда ҳаракатланувчи жисмнинг ҳаракатига текис параллел ҳаракат дейилади.

Жисмнинг текис параллел ҳаракатига мисол тариқасида вагон филдирагининг тўғри чизиқли изда думалашини ёки бир текисликда ҳаракатланувчи машина ва механизм қисмларининг ҳаракатини келтириш мумкин.

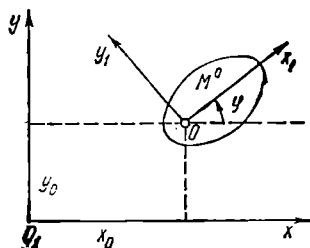
Жисмнинг текис параллел ҳаракатини аниқлаш учун берилган қўзғалмас текисликни Π билан белгилайлик (10.1-расм). Жисмни Π текисликка параллел бўлган Π_1 текислик билан фикран кесиш натижасида ҳосил бўлган кесимни S билан белгилаб, уни *текис шакл* деб атаймиз. Текис параллел ҳаракат таърифига кўра, жисмнинг ҳаракати давомида бу текис шакл доимо қўзғалмас Π текисликка параллел бўлган Π_1 текисликда ҳаракатланади. Агар Π_1 текислик учун $O_1x_1y_1$ текислиқни олиб, жисмда бу текисликка перпендикуляр (ёки O_1z_1 ўққа параллел) $M'_iM''_i$ кесмани олсак, жисм ҳаракати давомида бу кесма доимо O_1z_1 ўққа параллел кўчади, яъни бу кесма илгарилама ҳаракатда бўлади. Демак, жисмнинг $M'_iM''_i$ кесмада ётувчи барча нуқталари бир хил траектория чизади ҳамда ҳар онда бир хил тезлик ва бир хил тезланишга эга бўлади.

Шундай қилиб, жисмнинг $M'_iM''_i$ чизиқда ётувчи нуқталарининг ҳаракатини ўрганиш ўрнига $M'_iM''_i$ кесманинг текис шаклга тааллуқли M_i нуқтасининг ҳаракатини аниқлаш етарлидир. Бошқача айтганда, жисмнинг текис параллел ҳаракатини ўрганиш ўрнига жисмни қўзғалмас Π текисликка параллел Π_1 текислик билан кесиш натижасида олинган S текис шаклнинг ўз текислигидаги (яъни Π_1 текисликдаги) ҳаракатини аниқлаш етарли бўлади.

S юза ҳаракатланавадиган Π_1 текислик текис шаклнинг ҳаракат



10.1- расм.



10.2- расм.

текислиги дейилади. Ҳаракат текислигидаги O_1x_1 қўзғалмас координаталар системасига нисбатан текис шаклнинг ҳаракатини текшириш учун текис шаклда қутб деб аталадиган ихтиёрий O нуқтани олиб (10.2-расм), бу нуқтада текис шаклга бириктирилган Ox_1y_1 координаталар системасини ўтказамиз. Агар $O(x_0, y_0)$ нуқтанинг координаталари ва Ox_1 қўзғалувчи ўқ билан O_1x қўзғалмас ўқ орасидаги φ бурчак маълум бўлса, у ҳолда қўзғалувчи Ox_1y_1 нинг ҳолати, бинобарин, текис шаклнинг ҳаракат текислигидаги ҳолати маълум бўлади. Шу сабабли текис шаклнинг ҳаракат тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f_1(t), \\ y_0 &= f_2(t), \\ \varphi_0 &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

(10.1) тенгламалар текис шакл ҳаракатининг кинематик тенгламалари ёки жисм текис параллел ҳаракатининг тенгламалари дейилади.

(10.1) ифодадаги биринчи иккита тенглама қутбнинг ҳаракатини, учинчиси эса текис шаклнинг қутб атрофидаги айланиш қонунини ифодалайди.

Айланиш бурчаги φ дан вақт бўйича олинган ҳосила текис шаклнинг бурчак тезлиги дейилади ва ω_z билан белгиланади:

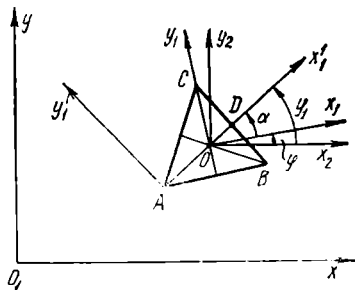
$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Текис шаклнинг бурчак тезлигидан вақт бўйича олинган ҳосила (ёки текис шакл айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосила) текис шаклнинг бурчак тезланиши дейилади ва ϵ_z билан белгиланади:

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Текис шаклнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши қутбнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмаслигини исботлаймиз. 10.3-расмда текис шакл сифатида тенг ёнли ABC учбурчак тасвирланган. Қутб учун медианалар кесишган O нуқтани оламиз. Жисмга бириктирилган ва у билан биргаликда ҳаракатланувчи Ox_1 ўқни AB томонга параллел, Oy_1 ўқни эса OC бўйича йўналтирамиз. У ҳолда айланиш бурчаги $\varphi = \angle x_2 Ox_1$ бўлади.

Агар қутб учун учбурчакнинг A учини олиб, жисмга бириктирилган ва у билан биргаликда ҳаракатланувчи Ax'_1 ўқни AD медиана бўйлаб, Ay'_1 ўқни AD га перпендикуляр йўналтирсак,



10.3- расм.

$$\varphi_1 = \varphi + \alpha \quad (10.2)$$

ифода ўринли бўлади. Бунда α бурчак ўзгармас эканлигини эътиборга олиб, (10.2) тенгликни икки марта дифференциалласак,

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_z, \quad \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon_z$$

исботланиши керак бўлган муносабатларни оламиз. Текис шакл ихтиёрий кўринишда бўлганида ҳам бу тенгликлар ўринли бўлишини исботлаш мумкин.

Алоҳида аҳамиятга молик бўлган қўйидаги икки ҳолни кўраемиз.

1. Агар $x_0 = \text{const}$, $y_0 = \text{const}$ бўлса, қутб қўзғалмай, вақтнинг ўтиши билан фақат φ бурчак ўзгаради. Бу ҳолда текис шакл ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда O нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида айланади. Бинобарин, қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати текис параллел ҳаракатнинг хусусий ҳоли ҳисобланади.

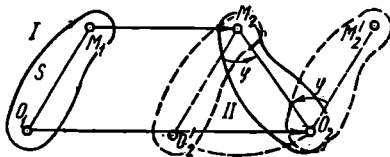
2. Агар $\varphi = \text{const}$ бўлса, фақат қутбнинг координаталари вақтнинг функцияси сифатида ўзгаради ҳамда қўзғалувчи координаталар системаси ўзининг бошланғич ҳолатига параллел равишда ҳаракатланади. Бунда текис шакл ҳамда қаттиқ жисм илгарилама ҳаракатда бўлади.

10.2-§. Текис шаклнинг кўчишига оид теорема

Теорема: *текис шаклнинг ўз текислигидаги ҳар қандай кўчишини қутб билан биргаликдаги илгарилама кўчиши ҳамда қутб атрофидаги айланма кўчишдан ташкил топган деб қараши мумкин.*

Исбот. Текис шакл OM кесмасининг t_1 ва t_2 ихтиёрий пайтдаги ҳолатларини мос равишда O_1M_1 ва O_2M_2 билан белгилайлик (10.4-расм). O нуқтани қутб учун қабул қилиб, текис шаклга шундай илгарилама кўчиш берамизки, натижада унинг O_1 нуқтаси O_2 билан устма-уст тушсин, M_1 нуқта M_2' ҳолатни эгалласин. Бу кўчишда O_1M_1 кесма O_2M_2' (текис шакл пунктир чизиқ билан кўрсатилган) ҳолатни эгаллайди. Текис шаклнинг илгарилама кўчиши O_1O_2 вектор билан аниқланади. Сўнгра текис шаклни ўз ҳаракат текислигида O_2 қутб атрофида $\varphi = \angle M_2'O_2M_2$ бурчакка айлантирсак, O_2M_2 кесма O_2M_2 ҳолатга ўтади ва текис шакл II ҳолатни эгаллайди.

Агар қутб учун M нуқтани олсак, текис шаклни I ҳолатдан II



10.4- расм.

ҳолатга кўчиришда илгарилама

кўчиш $\overrightarrow{M_1M_2}$ вектор билан ифодаланади. Текис шаклни M_2 атрофида $\angle O_2'M_2O_2$ га айлантирсак, текис шакл II ҳолатни эгаллайди. Расмдан кўрамизки, $\overrightarrow{O_1O_2} \neq$

$\overrightarrow{M_1M_2}$, яъни илгарилама кўчиш қутбнинг танланишига боғлиқ бўлади. Илгарилама ҳаракат таърифига кўра $O_2M_2' \parallel O_1M_1$ ва $O_2M_2 \parallel O_1M_1$. Бинобарин, $O_2M_2' \parallel O_2M_2$ ва $\angle M_2'O_2M_2 = \angle O_2'M_2O_2 = \varphi$ бўлади. Шу билан бирга O_2 ва M_2 нуқталар атрофидаги айланиш йўналишлари бир хил бўлади. Демак, қутб атрофидаги айланиш бурчаги қутбни танлашга боғлиқ бўлмайди.

10.3-§. Текис шакл нуқталарининг тезликлари

Текис шакл нуқталарининг тезлигига онд қуйидаги иккита теоремани кўриб чиқамиз.

Теорема 1. *Текис шакл ихтиёрий M нуқтасининг тезлиги қутбнинг тезлиги билан M нуқтанинг қутб атрофида айланишидаги чизиқли тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Исбот. O ва M нуқталарнинг қўзғалмас O_1xu координаталар системасига нисбатан радиус-векторларни мос равишда $\vec{r}_O$ ва $\vec{r}$ бўлсин (10.5-расм). M нуқтанинг O қутбга нисбатан радиус-векторини $\vec{\rho}$ билан белгилайлик (жисм абсолют қаттиқ бўлганидан $\vec{\rho}$ вектор миқдор жиҳатдан ўзгармайди). У ҳолда

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}. \quad (10.3)$$

(10.3) ифодадан вақт бўйича биринчи тартибли ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (10.4)$$

(10.4) да $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_M$ ва $\frac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{v}_O$ бўлиб, моо равишда M ва O нуқталарнинг O_1xu координаталар системасига нисбатан тезликларидир. $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_{MO}$ эса M нуқтанинг O қутбдан ўтувчи ўқ атрофида айланишидаги чизиқли тезлигини ифодалайди. (9.14) га кўра

$$\vec{v}_{MO} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad v_{MO} = \omega \cdot \rho \quad (10.5)$$

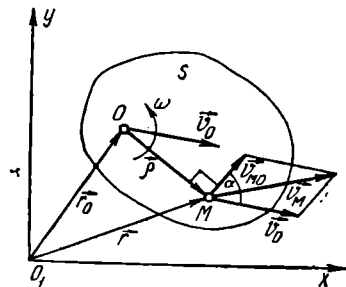
бўлади. $\vec{v}_{MO}$ вектори айланиш йўналишига мос равишда MO кесмага ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади.

Шундай қилиб, (10.4) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

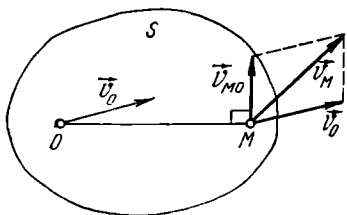
$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO} \quad (10.6)$$

ёки

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (10.7)$$



10.5- расм.



10.6- расм.

Текис шакл нуқтасининг тезлигини (10.6) формула воситасида аниқлашга қутб усулида аниқлаш дейилади.

Агарда $\vec{v}_O$ ва $\vec{v}_{MO}$ ва улар орасидаги бурчак α берилган бўлса, косинуслар теоремасидан фойдаланиб M нуқта тезлигининг миқдори топилади:

$$v_M = \sqrt{v_O^2 + v_{MO}^2 + 2v_O v_{MO} \cos \alpha}. \quad (10.8)$$

Теорема 2. *Текис шакл иккита нуқтаси тезликларининг шу нуқталардан ўтувчи ўқдаги проекциялари ўзаро тенг.*

Исбот. Текис шакл O ва M нуқталарининг тезлик векторлари $\vec{v}_O$ ва $\vec{v}_M$ берилган бўлсин (10.6-расм). O нуқтани қутб деб олсак, M нуқтанинг тезлигини (10.6) кўринишда ёзиш мумкин.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}.$$

Бу ифодани OM ўққа проекциялаймиз:

$$pr_{OM} \vec{v}_M = pr_{OM} \vec{v}_O + pr_{OM} \vec{v}_{MO}. \quad (10.8)$$

$\vec{v}_{MO}$ вектор OM ўққа перпендикуляр бўлгани учун

$$pr_{OM} \vec{v}_{MO} = 0$$

бўлади. Натижада (10.8) дан исботланиши керак бўлган

$$pr_{OM} \vec{v}_M = pr_{OM} \vec{v}_O \quad (10.9)$$

тенгликни оламиз.

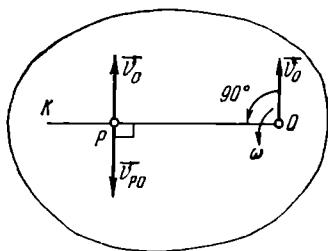
(10.9) ифода ёрдамида текис шакл нуқтасининг тезлигини аниқлашга проекция усули билан аниқлаш дейилади.

10.4-§. Тезликлар оний маркази

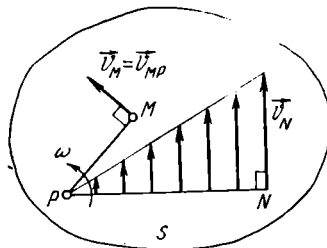
Текис шаклнинг берилган онда тезлиги нолга тенг бўлган нуқтаси *тезликлар оний маркази* ёки *айланиш оний маркази* дейилади.

Теорема. *Агар текис шаклнинг бурчак тезлиги нолдан фарқли бўлса, тезликлар оний маркази мавжуд бўлади.*

Исбот. Берилган онда бурчак тезлиги $\omega_z = \dot{\varphi}$ бўлган текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезлиги $\vec{v}_O$ нолга тенг бўлмасин (10.7-расм). O нуқтани қутб деб оламиз ва бурчак тезлигининг ишорасига қараб текис шаклнинг қутб атрофидаги айланиш йўналишини аниқлаймиз. Агар $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$ бўлса, текис шакл O нуқта атрофида соат стрелкаси айланишига тескари, $\omega_z < 0$ бўлса, соат



10.7- расм.



10.8- расм.

стрелкаси айланадиган йўналишда айланади. $\omega_z > 0$ деб қараб айланиш йўналиши бўйича $\vec{v}_O$ тезлик векторини O атрофида тўғри бурчакка буриш билан олинган OK чизиқда ётувчи ва

$$PO = \frac{v_O}{\omega}$$

тенгликка биноан аниқланадиган P нуқтанинг тезлигини ҳисоблаймиз.

(10.6) га асосан $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO}$. $\vec{v}_{PO}$ вектори OP га перпендикуляр бўлгани учун ва OP кесманинг танлаб олинishiга кўра $\vec{v}_O$ ва $\vec{v}_{PO}$ векторлар қарама-қарши томонга йўналади. (10.5) га кўра $\vec{v}_{PO}$ тезликнинг модули

$$v_{PO} = \omega \cdot PO = \frac{v_O}{\omega} \cdot \omega = v_O.$$

$\vec{v}_O$ ва $\vec{v}_{PO}$ тезлик векторлари миқдор жиҳатдан тенг, йўналишлари қарама-қарши бўлгани учун уларнинг йиғиндиси нолга тенг, яъни

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO} = 0.$$

Демак, тезлиги нолга тенг бўлган тезликлар оний маркази P мавжуд экан. ■

Агар тезликлар оний маркази текис шакл контуридан ташқарида ётса, тезликлар оний маркази учун текис шаклга маҳкам бириктирилган текисликнинг нуқтаси олинади.

Агар P нуқтани қутб деб олсак, $\vec{v}_P = 0$ бўлгани учун текис шакл M нуқтасининг тезлигини (10.6) формулага биноан қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{MP}.$$

Бунда $v_{MP} = \omega \cdot PM$ (10.8- расм) эканлигини назарда тутсак,

$$v_M = \omega \cdot PM \quad (10.10)$$

муносабат ўринли бўлишини кўрамиз. Шундай қилиб, текис шакл нуқталарининг тезликлар оний марказига нисбатан ҳар ондаги тезликлари қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқталарининг тезликлари каби тақсимланади. Бунда айланиш оний маркази орқали текис шакл текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи оний ўқ қўзғалмас ўқ вазифасини ўтайди.

Агар тезликларнинг оний маркази ва текис шакл бирор M нуқтасининг тезлиги $\vec{v}_M$ маълум бўлса, текис шакл исталган нуқтасининг тезлигини аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам (10.10) дан фойдаланиб текис шаклнинг берилган ондаги бурчак тезлигини ҳамда ихтиёрий N нуқтаси тезлигининг миқдори

$$\omega = \frac{v_M}{PM}, \quad v_N = \omega \cdot PN = v_M \frac{PN}{PM} \quad (10.11)$$

формулалар воситасида аниқлаймиз. $\vec{v}_N$ вектори айланиш оний маркази атрофидаги айланишга мос равишда PN чизиққа ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади.

$\vec{v}_N$ тезлик векторининг учини P нуқта билан туташтириб, PN кесмада ётувчи нуқталар тезликларининг тақсимланиш эпюрасини 10.8-расмдагидек тасвирлаш мумкин.

(10.11) ни яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{v_N}{v_M} = \frac{PN}{PM}, \quad (10.12)$$

яъни *текис шакл нуқталарининг тезликлари шу нуқталардан тезликлар оний марказигача бўлган масофаларга тўғри пропорционал бўлади.*

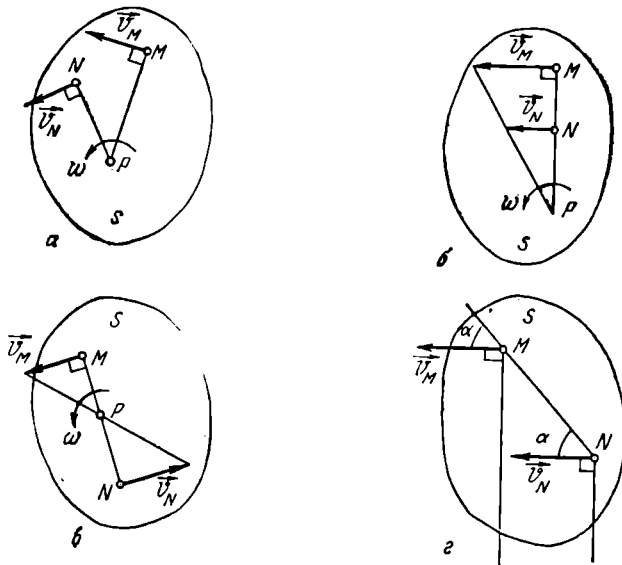
(10.10) ёки (10.12) формулалар воситасида *текис шакл нуқталарининг тезликларини аниқлашга тезликлар оний марказидан фойдаланиб аниқлаш дейилади.*

10.5- §. Тезликлар оний маркази аниқланадиган баъзи ҳоллар

Тезликлар оний марказининг асосий хусусиятларидан фойдаланиб, қуйидаги ҳолларни кўрамиз.

1. Текис шакл иккита M ва N нуқтаси тезликларининг йўналиши маълум бўлсин (10.9-расм, a). M ва N нуқталардан $\vec{v}_M$ ва $\vec{v}_N$ тезлик векторларига перпендикулярлар ўтказсак, уларнинг кесишган P нуқтаси тезликлар оний марказини ифодалайди.

2. Агар M ва N нуқталарнинг тезлик векторлари ўзаро параллел ҳамда $\vec{v}_M \perp MN$ бўлса, тезликлар оний марказини аниқлаш учун текис шакл нуқталари тезликларининг миқдори шу нуқталардан айланиш оний марказигача бўлган масофага пропорционал бў-



10.9- расм.

лиши хусусиятидан фойдаланамиз. Бундай ҳолларда тезликлар оний марказини аниқлаш 10.9- расм, б ва в да кўрсатилган.

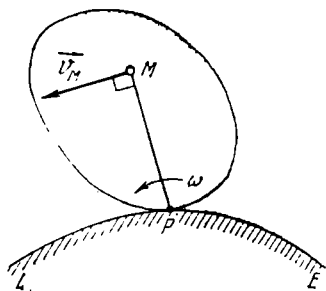
3. Агарда $\vec{v}_M$ ва $\vec{v}_N$ векторлари ўзаро параллел, лекин MN кесмага перпендикуляр бўлмаса, бу векторларга ўтказилган перпендикулярлар чексизликда кесишади ҳамда тезликлар оний маркази мавжуд бўлмайди (10.9- расм, г).

Ҳақиқатан ҳам (10.9) формулага биноан

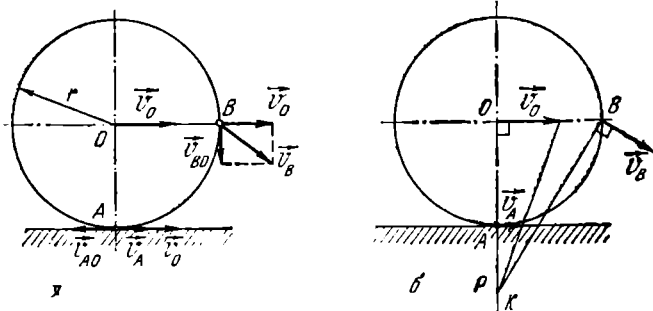
$$v_M \cos \alpha = v_N \cos \alpha.$$

Бинобарин, $\vec{v}_M = \vec{v}_N$ ва (10.6), (10.5) муносабатларни инobatга олсак, $\vec{\omega} \times \overrightarrow{MN} = 0$, яъни текис шаклнинг бурчак тезлиги берилган онда нолга тенг: $\omega = 0$. Демак, берилган онда текис шакл илгариланма ҳаракатда бўлади ҳамда тезликлар оний маркази мавжуд бўлмайди.

4. Текис шакл контури бирор қўзғалмас сирт устида сирпанмасдан думаласа (10.10- расм), ҳар онда текис шакл билан LE чизиқнинг уриниш нуқтаси P нинг тезлиги нолга тенг бўлади. Чунки сирт қўзғалмас бўлгани учун ундаги ҳар бир нуқтанинг, жумладан уриниш нуқтасининг тезлиги нолга тенг бўлади. Уриниш нуқтаси ўз навбатида текис шаклга ҳам тааллуқлидир. Демак, текис шакл



10.10- расм.



10.11- расм.

контурининг қўзғалмас LE чизиққа уриниш нуқтаси тезликлар оний марказини ифодалайди.

10.1- масала. $r = 0,5$ м радиусли ғилдирак тўғри чизиқли йўлда сирпаниб ғилдирайди. Ғилдирак марказининг тезлиги ўзгармас бўлиб, $v_O = 10$ м/с га тенг (10.11- расм, а). Ғилдиракнинг O нуқтадан шакл текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи горизонтал ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги $\omega = 12$ с⁻¹. Ғилдирак гардишидаги A ва B нуқталарнинг тезлиги аниқлансин.

Ечиш. Ғилдирак нуқталари ҳамиша расм текислигида ҳаракатлангани туфайли у текис параллел ҳаракатда бўлади. A ва B нуқталарнинг тезликларини икки усулда аниқлаймиз.

1. Қутб учун O нуқтани олсак, (10.6) формулага асосан A нуқтанинг тезлиги $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{AO}$ га тенг бўлади. Бунда $\vec{v}_{AO}$ миқдор жиҳатдан

$$v_{AO} = r \cdot \omega = 0,5 \cdot 12 = 6 \text{ м/с}$$

бўлиб, A нуқтада ғилдирак айланишига мос равишда горизонтал бўйича чапга йўналади (10.11- расм, а). Қутбнинг тезлиги $\vec{v}_O$ ни A нуқтага кўчирамиз. $\vec{v}_O$ ва $\vec{v}_{AO}$ векторлари бир тўғри чизиқ бўлиб қарама-қарши томонга йўналгани учун улар алгебраик қўшилади:

$$v_A = v_O - v_{AO} = 4 \text{ м/с.}$$

$v_O > v_{AO}$ бўлганидан $\vec{v}_A$ вектори $\vec{v}_O$ вектори бўйлаб йўналади.

B нуқтанинг тезлигини

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{v}_{BO}$$

формула воситасида аниқлаймиз. Бунда $\vec{v}_{BO}$ миқдор жиҳатдан $v_{BO} = r \cdot \omega = 6$ м/с бўлиб, B нуқтада ғилдирак айланишига мос равишда вертикал бўйича пастга йўналади. Қутбнинг тезлиги $\vec{v}_O$ ни B нуқтага кўчириб, B нуқтага қўйилган ўзаро перпендикуляр $\vec{v}_O$ ва $\vec{v}_{BO}$ векторларни қўшсак, уларнинг йиғиндиси тўғри тўртбурчак диагонали бўйлаб йўналади ҳамда $\vec{v}_B$ нинг модули $v_B = \sqrt{v_O^2 + v_{BO}^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = 11,66$ м/с га тенг бўлади.

2. Масалани тезликлар оний марказини топиш усули билан ечиш учун O нуқтадан $\vec{v}_O$ векторга ҳаракат йўналиши бўйича тўғри бурчак остида OK чизиқни ўтказамиз (10.11-расм, б). P айланиш оний маркази O қутбдан

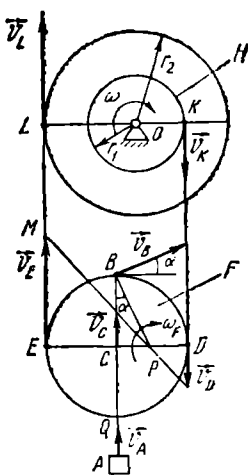
$$PO = \frac{v_O}{\omega} = \frac{5}{6} \text{ м}$$

масофада ётади.

$\vec{v}_A$ ва $\vec{v}_B$ векторлари мос равишда PA ва PB га перпендикуляр бўлиб, ғилдирак айланадиган томонга йўналади ҳамда уларнинг модули (10.10) га асосан аниқланади:

$$v_A = \omega \cdot PA = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4 \text{ м/с},$$

$$v_B = \omega \cdot PB = 12 \sqrt{(0,5)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = 11,66 \text{ м/с}.$$



10.12- расм.

10.2-масала. Раднуслари $r_1 = 20$ см, $r_2 = 40$ см бўлган икки поғонали H барабан O нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади (10.12-расм). H барабан поғоналарига чўзилмайдиган ип ўралган бўлиб, у маркази C бўлган F ғалтакни ҳам қамраб олган. Ипни барабан ва ғалтак сиртлари бўйича сирпанмайди деб қараб, ғалтакнинг бурчак тезлиги, расмда кўрсатилган ҳолатда ғалтак гардишидаги B нуқтанинг тезлиги ($BC \perp ED$) ҳамда ғалтак C нуқтасига осилган A юкнинг тезлиги аниқлансин.

Ечиш. F ғалтак доимо расм текислигида ҳаракатланади, яъни у текис параллел ҳаракатда бўлади.

Ғалтак $KDQEL$ ипда сирпанмасдан думалагани учун

$$\vec{v}_D = \vec{v}_K, v_E = v_L.$$

K ва L нуқталар H барабан гардишидаги нуқталар бўлганидан

$$v_K = \omega \cdot r_1 = 0,6 \text{ м/с},$$

$$v_L = \omega \cdot r_2 = 1,2 \text{ м/с}.$$

Шундай қилиб, $v_D = 0,6 \text{ м/с}$, $v_E = 1,2 \text{ м/с}$ ҳамда $\vec{v}_E \parallel \vec{v}_D$, $\vec{v}_E \perp ED$. Бинобарин, $\vec{v}_E$ ва $\vec{v}_D$ векторлар учлари орқали MN тўғри чизиқ ўтказиб, бу чизиқнинг ED билан кесишган P нуқтаси ғалтакнинг тезликлар оний маркази бўлишини топамиз. (10.12) формулага кўра DP оралиқни аниқлаймиз:

$$\frac{v_E}{EP} = \frac{v_D}{DP} \quad \text{ёки} \quad \frac{v_E}{ED - DP} = \frac{v_D}{DP}.$$

Бу тенгликда $ED = r_1 + r_2 = 0,6 \text{ м}$ бўлгани учун

$$DP = \frac{v_D}{v_E + v_D} \cdot ED = 0,2 \text{ м}.$$

Шундай қилиб, $DP = 0,2 \text{ м}$, $PC = 0,1 \text{ м}$, $PE = 0,4 \text{ м}$.

Ғалтак бурчак тезлиги ω_F ни (10.10) тенгликка биноан аниқлаймиз.

$$\omega_F = \frac{v_D}{DP} = 3 \text{ с}^{-1}.$$

B ва P нуқталарни туташтириб ғалтак айланиши йўналишига мос равишда BP га перпендикуляр ўтказиб, B нуқта тезлигининг йўналишини топамиз. $\vec{v}_B$ модули эса (10.10) формулага биноан топилади:

$$v_B = \omega_F \cdot BP = \omega_F \cdot \sqrt{(PC)^2 + (CB)^2} = 0,95 \text{ м/с.}$$

$$BCP \text{ учбурчакдан: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{PC}{BC}, \alpha = \operatorname{arctg} 0,3 = 18^\circ 30'. \text{ } AC \text{ стержень илга-}$$

рилама ҳаракатда бўлгани учун $\vec{v}_A = \vec{v}_C$. C нуқта F ғалтакка ҳам тегишли бўлганидан

$$v_C = \omega_F \cdot CP = 0,3 \text{ м/с.}$$

Демак, $v_A = 0,3 \text{ м/с.}$

10.3-масала. Планетар — кулиса механизмида OA кривошип O ўқ атрофида ω_O бурчак тезлик билан айланиб, BF стерженга шарнирли боғланган D сателлитни ҳаракатга келтиради (10.13-расм). BF стержень ўзининг ҳаракатида доимо қўзғалмас C нуқтадан ўтади. OA кривошип вертикал ҳолатни эгаллаган, $\varphi = 30^\circ$,

$\widehat{BAO} = 90^\circ$ бўлган пайтда BF стержень C нуқтасининг тезлиги аниқлансин. Қўзғалмас шестерня радиуси $2r$, қўзғалувчи шестерня радиуси r га тенг ҳамда $AB = r\sqrt{3}$.

Ечиш. BF стержень C нуқтасининг тезлиги A ва B нуқталар тезлигига боғлиқ бўлгани туфайли аввал A ва B нуқталар тезлигини аниқлаймиз.

A нуқта ω_O бурчак тезлик билан айланувчи OA кривошипга тегишли бўлганидан $\vec{v}_A \perp OA$ ҳамда

$$v_A = OA \cdot \omega_O = 3r \cdot \omega_O.$$

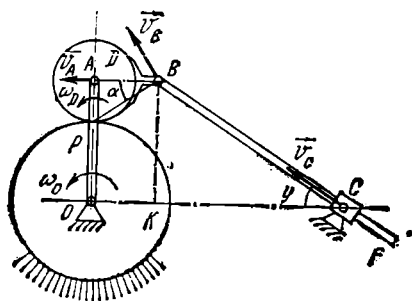
D сателлит текис параллел ҳаракат қилади, бунда қўзғалувчи ва қўзғалмас шестерняларнинг P уриниш нуқтаси сателлитнинг тезликлар оний маркази бўлади. Шунинг учун сателлит B нуқтасининг $\vec{v}_B$ тезлиги P атрофида сателлитнинг айланиш йўналишига мос равишда PB кесмага перпендикуляр равишда йўналади. Тўғри бурчакли PAB учбурчакда:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AP}{AB} = \frac{r}{\sqrt{3}r} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ яъни } \alpha = 30^\circ.$$

Проекция усулидан фойдаланиб B нуқта тезлигини аниқлаймиз:

$$n_{PB} \vec{v}_B = n_{PB} \vec{v}_A.$$

$$\text{Шунга кўра } v_B \cos 60^\circ = v_A \text{ ёки } v_B = \frac{v_A}{\cos 60^\circ} = 6r \omega_O.$$



10.13- расм.

BF стержень ҳаракати ҳам текис параллел ҳаракатдан иборат. Стерженнинг C нуқтаси доимо қўзғалмас нуқтадан ўтгани учун унинг $\vec{v}_C$ тезлиги B нуқта тезлигига мос равишда стержень бўйича йўналади ҳамда проекция усулига асосан $\vec{v}_C$ ва $\vec{v}_B$ ларнинг CB ўқдаги проекциялари ўзаро тенг бўлади:

$$n_{CB} \vec{v}_C = n_{CB} \vec{v}_B.$$

$$\text{Бу формулага кўра } v_C = v_B \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}r \cdot \omega_O.$$

10.6 - §. Центроидалар

Умумий ҳолда тезликлар оний маркази вақтнинг ўтиши билан текис шаклнинг ҳаракат текислигида ўз ҳолатини ўзгартира боради. Агар тезликлар оний марказининг ҳар ондаги ҳолатини текис шаклда ва ҳаракат текислигида белгилаб борсак, уларнинг геометрик ўрни иккита чизиқни ифодалайди.

Тезликлар оний марказининг текис шаклнинг ҳаракат текислигидаги геометрик ўрни *қўзғалмас центроида* дейилади.

Тезликлар оний марказининг текис шаклга боғланган текисликдаги геометрик ўрни *қўзғалувчи центроида* дейилади.

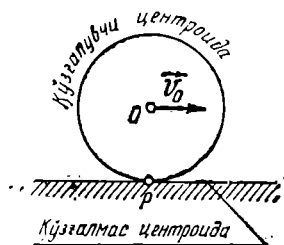
Масалан, қўзғалмас рельс устида сирпанмай думалаётган ғилдирак учун қўзғалмас центроида тўғри чизиқ, қўзғалувчи центроида ғилдирак гардишидаги айланадан иборат (10.14 - расм).

Ҳар онда қўзғалмас ва қўзғалувчи центрсидалар тезликлар оний марказини ифодаловчи P нуқтада умумий уриниш нуқтасига эга бўлади. Шу сабабли қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини геометрик тарзда қуйидагича талқин қилиш мумкин: *текис шаклнинг ҳаракатини қўзғалувчи центроидани қўзғалмас центроида устида сирпантирмасдан думалатиш натижасида олиш мумкин.*

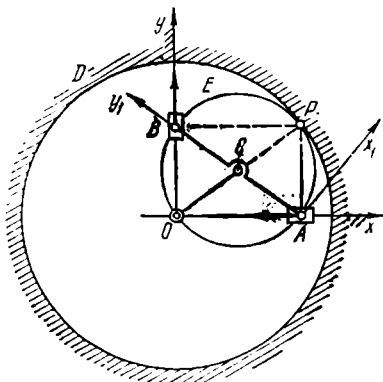
10.4 - масала. Узунлиги $2a$ га тенг бўлган эллипсограф AB линейкасининг A учи Ox ўқ, B учи Oy ўқ бўйлаб ҳаракат қилади. Эллипсограф линейкасининг ҳаракати учун центроидалар топилсин (10.15 - расм).

Ечиш. A ва B нуқтанинг тезлик векторлари Ox ва Oy ўқларда ётади. A ва B нуқталарда уларнинг тезликлари йўналишига перпендикуляр чизиқлар ўтказиб, кесишган нуқтасида ётувчи тезликлар оний маркази P нуқтани аниқлаймиз. AB нинг турли ҳолатига мос равишда P нинг ҳолатини аниқлаш мумкин. 10.15 - расмдан кўрамизки, $OP = AB = 2a$ ҳамиша ўзгармас бўлади. Бинобарин, P нуқтанинг қўзғалмас Ox у координаталар системасига нисбатан геометрик ўрни радиуси $2a$, маркази O нуқтада бўлган айланадан иборат бўлади. Бу айланани D билан белгиласак, у қўзғалмас центроидани ифодалайди.

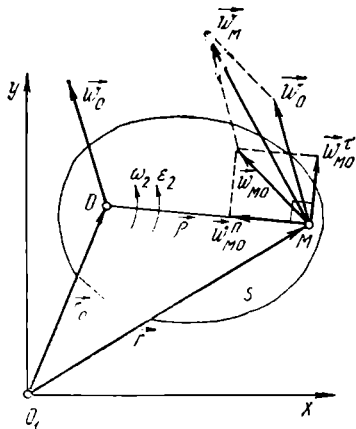
Агар AB нинг ўртасидаги нуқтани C билан белгиласак, ҳаракат давомида ҳамиша $CP = \frac{1}{2} OP = a$ ўзгармас бўлишини кўрамиз. Бинобарин, P нуқтанинг



10.14- расм.



10.15- расм.



10.16- расм.

AB билан биргаликда ҳаракатланувчи Ax_1y_1 координаталар системасига нисбатан геометрик ўрни радиуси a га тенг a ланадан иборат бўлади. Бу айланани E силан белгиласак, у қўзғалувчи центроидани ифодалайди.

AB линейка ҳаракатланганда E айлана D айлана ичида сирпанмасдан ҳаракатланади. Бошқача айтганда, *AB* линейканинг ҳаракати E айлананинг D айлана ичида сирпанмай қилган ҳаракати билан айнан бир хил бўлади.

10.7-§. Текис шакл нуқтасининг тезланишини қутб усулида аниқлаш

Теорема. *Текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши қутбнинг тезланиши билан мазкур нуқта-*

нинг қутб атрофида айланишидаги тезланишининг геометрик йўландисига тенг.

Исбот. Текис шакл M нуқтасининг тезланишини аниқлаш учун (10.7) ифодадан вақт бўйича ҳосила оламиз (10.16- расм).

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (10.13)$$

Бунда $\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{\omega}_M$ ва $\frac{d\vec{v}_O}{dt} = \vec{\omega}_O$ мос равишда қўзғалмас $O_1x_1y_1$ координаталар системасига нисбатан M ва O нуқталарнинг тезланишини, (9.14) га кўра $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{MO}$ — M нуқтанинг O қутб

атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан айланишидаги чизикли тезлигини,

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$ текис шаклнинг бурчак тезланишини ифодалайди. $\vec{\epsilon}$ век-

тори ($\vec{\omega}$ вектори каби) ҳаракат текислигига перпендикуляр йўналади ҳамда $\vec{\epsilon} = \epsilon_z \cdot \vec{k}$ формула ёрдамида аниқланади.

Шундай қилиб, M ва O нуқталарнинг тезланишлари орасида қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_O + \vec{\epsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{MO}. \quad (10.14)$$

Бунда

$$\vec{\epsilon} \times \vec{\rho} = \vec{\omega}_{MO}^{\tau}, \quad (10.15)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{MO} = \vec{\omega}_{MO}^n, \quad (10.16)$$

(10.15) ифода M нуқтанинг O қутб атрофида айланишидаги айланма тезланишини, (10.16) ифода эса M нуқтанинг O қутб атрофида айланишидаги марказга интилма тезланишини ифодалайди.

Шундай қилиб, (10.14) ифодани қуйидагича ёза оламиз:

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{MO}^{\tau} + \vec{\omega}_{MO}^n. \quad (10.17)$$

Бу формулада айланма тезланиш билан марказга интилма тезланишларнинг геометрик йиғиндиси M нуқтанинг O қутб атропоида айланмишидаги тезланишини ифодалайди:

$$\vec{\omega}_{MO}^{\tau} \times \vec{\omega}_{MO}^n = \vec{\omega}_{MO}.$$

Натижада (10.17) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{MO}. \quad (10.18)$$

(10.17) формуладаги $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$ айланма тезланиш вектори M нуқтани O қутб билан бирлаштирувчи OM чизиққа перпендикуляр равишда йўналади; бунда ω_z ва ε_z бир хил ишорали бўлса, $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$ ва $\vec{v}_{MO}$ векторлари бир йўналишда; турлича ишорали бўлса, $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$ нинг йўналиши $\vec{v}_{MO}$ га қарама-қарши бўлади (10.16-расмда ω_z ва ε_z бир хил ишорали бўлган ҳол тасвирланган). (10.17) даги $\vec{\omega}_{MO}^n$ марказга интилма тезланиш вектори ҳамиша M нуқтадан O қутб томон йўналади.

(9.17), (9.18) ва (9.20) формулаларга асосан $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$, $\vec{\omega}_{MO}^n$ ва $\vec{\omega}_{MO}$ ларнинг миқдори

$$\omega_{MO}^{\tau} = \varepsilon \cdot MO, \quad (10.19)$$

$$\omega_{MO}^n = \omega^2 MO, \quad (10.20)$$

$$\omega_{MO} = MO \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (10.21)$$

$\vec{\omega}_{MO}$ нинг йўналиши эса (9.21) га кўра

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (10.22)$$

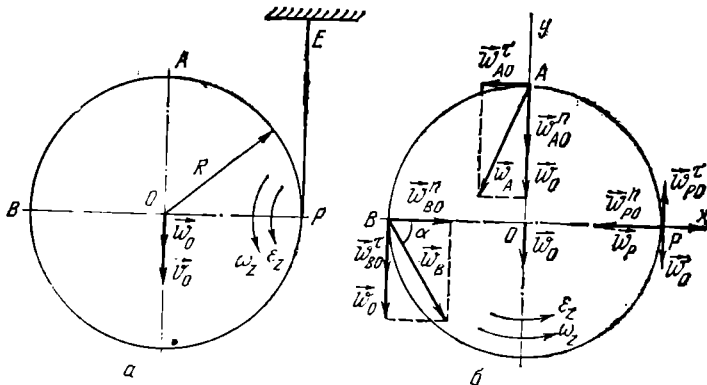
формулалар ёрдамида аниқланади.

10.8-§. Қутб усули билан текис шакл нуқталарининг тезланишларини аниқлашга оид масалалар

Текис параллел ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезланишини аниқлашга доир масалаларни асосан 4 хил гуруҳга бўлиш мумкин.

I хил масалалар. Текис шаклнинг бурчак тезлиги ω , бурчак тезланиши ε ҳамда бирор O нуқтасининг тезланиши $\vec{\omega}_O$ берилган ёки уларни аниқлаш мумкин бўлиб, текис шакл ихтиёрий M нуқтасининг тезланишини аниқлаш сўралади.

M нуқтанинг тезланишини (10.17) дан фойдаланиб, $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$ ва $\vec{\omega}_{MO}^n$ ларнинг миқдорларини эса (10.19), (10.20) формулалар ёрдами-



10.17- расм.

да аниқлаймиз. Сўнгра (10.17)ни ўзаро перпендикуляр иккита M_x ва M_y йўналишга проекциялаб $\vec{\omega}_M$ нинг миқдорини $\omega_M = \sqrt{\omega_{Mx}^2 + \omega_{My}^2}$ формула билан аниқлаш мақсадга мувофиқдир, $\vec{\omega}_M$ йўналиши эса йўналтирувчи косинуслар орқали топилади.

10.5-масала. Радиуси R га тенг ғалтакка E учи қўзғалмайдиغان қилиб боғланган ингичка ип ўралган (10.17-расм, а). Ғалтак пастга тушишида унинг ўқи вертикал бўйича йўналган $v_0 = \frac{1}{2}gt$ тезлик билан ҳаракатланади. Ғалтак гардишидаги P, A, B нуқталарнинг тезланишлари аниқлансин; $PB \perp AO$.

Ечиш. Ғалтак текис параллел ҳаракат қилади. Ғалтак марказидаги O нуқтанинг вертикал бўйича тўғри чизиқли ҳаракати берилган. Бинобарин, O нуқтани қутб деб танлаш учун аввало унинг тезланишини аниқлаймиз:

$$\omega_0 = \frac{dv_0}{dt} = \frac{1}{2}g.$$

$\vec{\omega}_0$ вектори вертикал бўйича пастга йўналган.

Ип осилиб турган қисмининг тезлиги нолга тенг бўлганидан ғалтак P нуқтасининг тезлиги ҳам нолга тенг, яъни P нуқта ғалтакнинг тезликлар оний маркази бўлади. Шу сабабли ғалтакнинг бурчак тезлиги

$$\omega_z = \frac{v_0}{OP} = \frac{g}{2R}t$$

бўлади. $\vec{v}_0$ тезлик йўналишига қўра бурчак тезликни соат стрелкаси ҳаракати-га тескари йўналган ёй стрелкаси тарзида тасвирлаш мумкин.

Ғалтак бурчак тезлиги вақтнинг функцияси сифатида аниқланган. Бинобарин, ғалтакнинг бурчак тезланиши қуйидагича топилади:

$$e_z = \dot{\omega}_z = \frac{g}{2R}.$$

ω_z ва e_z бир хил ишорали бўлгани учун ғалтакнинг бурчак тезланишини 10.17-расм, а да кўрсатилган ёй стрелкаси билан тасвирлаш мумкин.

O нуқтани қутб деб олсак, (10.17) формулага биноан тезликлар оний маркази P нуқтанинг тезланиши қуйидаги тенгламадан аниқланади:

$$\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{PO}^n + \vec{\omega}_{PO}^\tau. \quad (1)$$

(10.20) ва (10.19) га кўра

$$\omega_{PO}^n = \omega^2 \cdot PO = \frac{g^2}{4R} t^2, \quad (2)$$

$$\omega_{PO}^\tau = \varepsilon \cdot PO = \frac{1}{2} g \quad (3)$$

бўлиб, $\vec{\omega}_{PO}^n$ марказга интилма тезланиш вектори P дан O га қараб, $\vec{\omega}_{PO}^\tau$ — айланма тезланиш вектори эса OP га перпендикуляр равишда ε ёй стрелкаси йўналишига мослаб йўналтирилади. 10.17-рasm, b дан кўра миёни, $\vec{\omega}_{PO}^\tau$ ва $\vec{\omega}_O$ векторлари бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган ҳамда $\vec{\omega}_O = -\vec{\omega}_{PO}^\tau$. Шундай қилиб, (1) ифодада $\vec{\omega}_O = -\vec{\omega}_{PO}^\tau$ бўлгани туфайли

$$\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_{PO}^n \text{ ва } \omega_P = \frac{g^2}{4R} t^2.$$

P нуқта тезланиши P дан O га қараб йўналган. A нуқта тезланишини аниқлашда яна O ни қутб деб оламиз:

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{AO}^n + \vec{\omega}_{AO}^\tau. \quad (4)$$

Бу ифодадаги $\vec{\omega}_{AO}^n$ вектори A дан O га қараб, яъни $\vec{\omega}_O$ билан бир томонга, $\vec{\omega}_{AO}^\tau$ эса Ox ўқнинг мусбат йўналишига тескари йўналган. $AO = OP = R$ бўлгани учун $\vec{\omega}_{AO}^n$ ва $\vec{\omega}_{AO}^\tau$ миқдорлари (2) ва (3) тенгликлар билан аниқланади.

(4) вектор тенгламани ўзаро перпендикуляр Ox ва Oy ўқларга проекциялаймиз:

$$\omega_{Ax} = -\omega_{AO}^\tau = -\frac{g}{2},$$

$$\omega_{Ay} = -\omega_O - \omega_{AO}^n = -\frac{g}{4R} (2R + gt^2).$$

Бинобарин, A нуқта тезланишининг модули

$$\omega_A = \sqrt{\omega_{Ax}^2 + \omega_{Ay}^2} = \frac{g}{2R} \sqrt{R^2 + \frac{(2R + gt^2)^2}{4}},$$

$\vec{\omega}_A$ нинг йўналиши эса

$$\cos(\vec{\omega}_A, x) = \frac{\omega_{Ax}}{\omega_A} = -\frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{(2R + gt^2)^2}{4}}},$$

$$\cos(\vec{\omega}_A, y) = \frac{\omega_{Ay}}{\omega_A} = -\frac{2R + gt^2}{2\sqrt{R^2 + \frac{(2R + gt^2)^2}{4}}}$$

формулалардан аниқланади.

B нуқта тезланиши ҳам аввалгига ўхшаш аниқланади:

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{BO}^n + \vec{\omega}_{BO}^\tau. \quad (5)$$

(5) тенгламада

$$\omega_{BO}^n = \omega^2 \cdot OB = \frac{g^2 l^2}{4R}, \quad \omega_{BO}^\tau = \varepsilon \cdot OB = \frac{g}{2}.$$

$\vec{\omega}_{BO}^n$, $\vec{\omega}_{BO}^\tau$ векторларни 10.17-расм, б да кўрсатилганидек йўналган.

(5) да $\vec{\omega}_O$ ва $\vec{\omega}_{BO}^\tau$ бир ил йўналишда, $\vec{\omega}_{BO}^n$ эса мазкур йўналишга перпендикуляр бўлгани учун

$$\omega_B = \sqrt{(\omega_{BO}^n)^2 + (\omega_O + \omega_{BO}^\tau)^2} = \frac{g}{2R} \sqrt{g^2 l^2 + 16R^2}.$$

В нуқта тезланишининг йўналишини α бурчак орқали аниқлаш мумкин:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_{BO}^\tau + \omega_O}{\omega_{BO}^n} = \frac{g}{\frac{g^2}{4R} \cdot l^2} = \frac{4R}{gl^2}$$

ёки

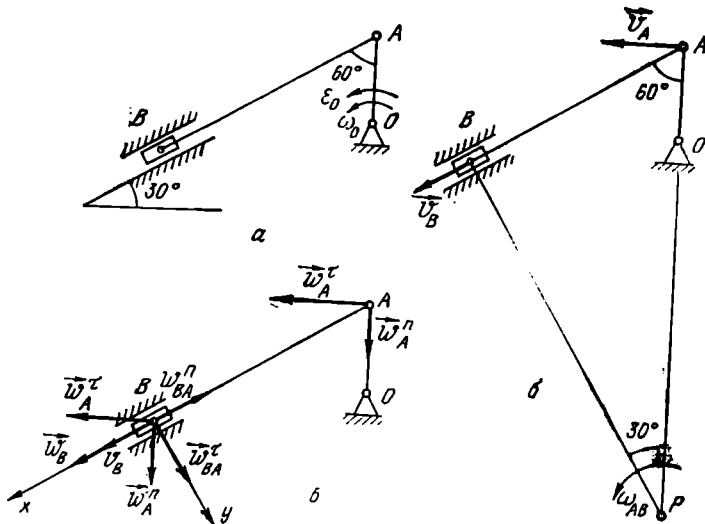
$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4R}{gl^2}.$$

II хил масалалар. Вақтнинг бирор пайти учун текис шакл O нуқтаси тезланишининг миқдор ва йўналиши, оний бурчак тезлик ва бошқа бирор M нуқтаси тезланишининг йўналган чизиғи маълум. Текис шаклнинг шу пайтдаги бурчак тезланиши ва M нуқтасининг тезланишини аниқлаш талаб этилади.

M нуқта тезланишини аниқлашда (10.17) формуладан фойдаланамиз.

Ундаги $\vec{\omega}_{MO}^n$ нинг миқдори (10.20) формула билан аниқланади. Бинобарин (10.17) тенгликнинг ўнг томонидаги $\vec{\omega}_O$ ва $\vec{\omega}_{MO}^n$ векторлар миқдор ва йўналиш жиҳатдан маълум. $\vec{\omega}_{MO}^\tau$ MO га перпендикуляр бўлиб, унинг йўналиши маълум эмас. Одатда $\vec{\omega}_{MO}^\tau$ ни йўналтиришда M нуқтанинг O атрофида айланиши тезланувчан деб қаралади. (10.17) тенгламани $\vec{\omega}_M$ га перпендикуляр йўналишга проекциялаш натижасида $\vec{\omega}_{MO}^\tau$ нинг миқдори аниқланадиган битта тенгламага эга бўламиз. Агар бу катталиқ манфий қийматга эга бўлса, $\vec{\omega}_{MO}^\tau$ нинг ҳақиқий йўналиши олинган йўналишга қарама-қарши, яъни M нинг O атрофида айланиши секинланувчан бўлади. $\vec{\omega}_{MO}^\tau$ ни билган ҳолда (10.19) га асосан ε ни аниқлаймиз. (10.17) ни $\vec{\omega}_M$ га перпендикуляр бўлмаган ўққа проекциялаб, $\vec{\omega}_M$ ни миқдор ва йўналиш жиҳатдан аниқлаймиз. Бунда ω_M нинг ишораси унинг йўналишини характерлайди.

10.6-масала. Кривошип-шатунли механизмнинг берилган ҳолати учун B нуқтанинг тезланиши аниқлансин (10.18-расм, а). Қуйидагилар берилган: $AB = l$, $OA = r$, $\omega_{OA} = \omega_0$, $\varepsilon_{OA} = \varepsilon_0$.



10.18- расм.

Ечиш. OA кривошип ω_0 бурчак тезлик ва ϵ_0 бурчак тезланиш билан айланиш ҳаракатда бўлгани учун A нуқтанинг тезлик ва тезланишини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$[v_A = \omega_0 \cdot r, \quad (1)$$

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_A^\tau + \vec{\omega}_A^n, \quad (2)$$

бунда

$$\omega_A^\tau = \epsilon_0 \cdot r, \quad \omega_A^n = \omega_0^2 \cdot r. \quad (3)$$

Бу векторларнинг йўналиши 10.18-расм, б ва в дагидек йўналтири.

A нуқтани қутб деб олиб, AB шатун B нуқтасининг тезланишини (10.17) га биноан аниқлаймиз (10.18-расм, в):

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^\tau + \vec{\omega}_{BA}^n$$

ёки

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_A^n + \vec{\omega}_{BA}^\tau + \vec{\omega}_{BA}^n. \quad (4)$$

B нуқтанинг ҳаракатини тезланувчан деб қараб, $\vec{\omega}_B$ ни $\vec{v}_B$ бўйича йўналтирамиз.

(4) ифодада

$$\omega_{BA}^\tau = \epsilon_{AB} \cdot AB = \epsilon_{AB} \cdot l, \quad \omega_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \omega_{AB}^2 \cdot l \quad (5)$$

бўлиб, ω_{AB} ва ϵ_{AB} лар мос равишда AB шатуннинг берилган пайтдаги оний бурчак тезланишини ифодалайди.

$\vec{\omega}_{BA}^n$ вектори B нуқтадан A қутбга йўналган; $\vec{\omega}_{BA}^\tau$ эса AB га перпендикуляр йўналган. B нуқтанинг A қутбга нисбатан айланишини тезланувчан деб фараз қилиб, AB шатуннинг P тезликлар оний маркази атрофида айланишидаги оний бурчак тезлик йўналишига мос равишда $\vec{\omega}_{BA}^\tau$ ни 10.18-расм, в дагидек йў-

налтирамиз. Шатуннинг берилган ҳолати учун тезликлар оний маркази P нуқтада бўлгани учун

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega_0 r}{2l}. \quad (6)$$

(6) формула ёрдамида механизмнинг берилган пайтдаги ҳолатига мос келувчи AB шатуннинг оний бурчак тезлиги аниқланади. Шу сабабли, ϵ_{AB} ни (6) ни дифференциаллаш йўли билан аниқлаб бўлмайди. ϵ_{AB} номаълум бўлгани учун ω_{BA}^T ни аниқлашда (4) ни $\vec{\omega}_B$ вектори йўналишига перпендикуляр бўлган Bu ўққа проекциялаймиз:

$$0 = \omega_A^n \cos 30^\circ - \omega_A^T \cos 60^\circ + \omega_{BA}^T.$$

Бундан

$$\omega_{BA}^T = \omega_A^T \cos 60^\circ - \omega_A^n \cos 30^\circ.$$

(3) ни назарда тутсак,

$$\omega_{BA}^T = \frac{r}{2}(\epsilon_0 - \omega_0^2 \sqrt{3}). \quad (7)$$

(7) дан кўрамизки, $\epsilon_0 > \omega_0^2 \sqrt{3}$ бўлса, $\omega_{BA}^T > 0$ ва B нуқтанинг A қутб атрофида оний айланиши тезланувчан бўлади ва $\vec{\omega}_{BA}^T$ йўналиши 10.18-рasm, ϵ да кўрсатилганидек қолади; $\epsilon_0 < \omega_0^2 \sqrt{3}$ ҳолида ω_{BA}^T нинг йўналиши мазкур расмдагига қарама-қарши бўлади.

(5) га кўра $\omega_{BA}^T = \epsilon_{AB} \cdot l$ бўлгани учун

$$\epsilon_{AB} = \frac{r}{2l}(-\omega_0^2 \sqrt{3} + \epsilon_0).$$

(4) ни Bx ўққа проекцияласак,

$$\begin{aligned} \omega_{Bx} = -\omega_{BA}^n + \omega_A^T \cos 30^\circ + \omega_A^n \cos 60^\circ = -\omega_{AB}^2 l + \frac{\epsilon_0 r \sqrt{3}}{2} + \\ + \frac{\omega_0^2 r}{2} = -\frac{\omega_0^2 r^2}{4l} + \frac{\epsilon_0 r \sqrt{3}}{2} + \frac{\omega_0^2 r}{2} = \frac{r}{2} \left[\omega_0^2 \left(-\frac{r}{2l} + 1 \right) + \epsilon_0 \sqrt{3} \right] \end{aligned}$$

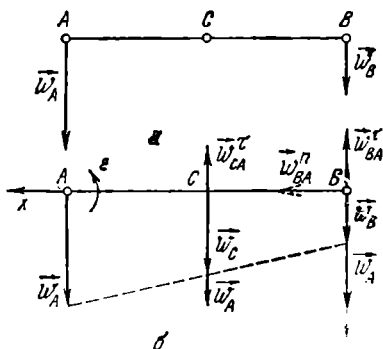
Агар $\left[\omega_0^2 \left(-\frac{r}{2l} + 1 \right) + \epsilon_0 \sqrt{3} \right] > 0$ бўлса, $\vec{\omega}_B$ нинг йўналиши Bx нинг мусбат, акс ҳолда манфий йўналишига мос тушади. Шундай қилиб,

$$\omega_B = \frac{r}{2} \left| \omega_0^2 \left(-\frac{r}{2l} + 1 \right) + \epsilon_0 \sqrt{3} \right|.$$

III хил масалалар. Вақтнинг бирор пайти учун текис шакл иккита O ва M нуқталарининг тезланиши миқдор ва йўналиш жиҳатдан маълум бўлиб, текис шаклнинг шу пайтдаги бурчак тезлиги, бурчак тезланиши, шунингдек ихтиёрий нуқтасининг тезланишини аниқлаш сўралади.

Масалани ечиш учун тезланиши маълум бўлган нуқталардан бири, масалан O нуқтани қутб деб олиб, иккинчи нуқтасининг тезланиши учун (10.17) кўринишдаги тенгламани олиб, уни иккита бир-бирига перпендикуляр йўналишга (одатда OM ва унга тик бўл-

ган йўналишга) проекцияланади. Ҳосил бўлган иккита тенгламадан $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$ ва $\vec{\omega}_{MO}^n$ лар ҳамда (10.20) ва (10.19) воситасида ω ва ϵ лар аниқланади. Бунда $\vec{\omega}_{MO}^n$ M нуқтадан O га қараб йўналган. $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$ вектори $\vec{\omega}_{MO}^n$ га перпендикуляр равишда (10.17) тенглик асосида йўналтирилади.



10.19- расм.

10.7-масала. Узунлиги 0,12 м бўлган бир жинсли стержень текис параллел ҳаракат қилади. Стержень учларидаги нуқталарнинг тезланиши $\omega_A = 0,24$ м/с², $\omega_B = 0,12$ м/с² ҳамда AB га перпендикуляр равишда бир томонга йўналган. Стержень бурчак тезлиги, бурчак тезланиши ва C оғирлик марказининг тезланиши аниқлансин (10.19- расм, а).

Ечиш. $\vec{BA}$ билан $\vec{\omega}_B - \vec{\omega}_A$ айрма орасидаги бурчак 90° га тенг бўлгани учун масала ечимга эга.

Қутб учун A нуқтани қабул қилсак, (10.17) га кўра C нуқтанинг тезланиши

$$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{CA}^{\tau} + \vec{\omega}_{CA}^n \quad (1)$$

формула ёрдамида аниқланади. (1) даги $\vec{\omega}_{CA}^{\tau}$ ва $\vec{\omega}_{CA}^n$ ларни аниқлаш учун дастлаб бурчак тезлик ω ва бурчак тезланиш ϵ ларнинг қийматини ҳисоблаш керак.

Бу катталикларни ҳисоблаш учун B ва A нуқталарнинг тезланишлари орасидаги муносабатни ифодаловчи

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^{\tau} + \vec{\omega}_{BA}^n \quad (2)$$

тенгламадан фойдаланилади. (10.19) ва (10.20) га кўра (2) да

$$\omega_{BA}^{\tau} = \epsilon \cdot AB, \quad \omega_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB$$

ҳамда $\vec{\omega}_{BA}^n$ B дан A га қараб йўналади; $\vec{\omega}_{BA}^{\tau}$ ни йўналтиришда B нинг A қутбга нисбатан айланиши соат стрелкаси айланишига тескари деб оламиз.

(2) ни танлаб олинган x ва y ўқларга проекциялаб

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \omega_{BA}^n, \\ \omega_B &= \omega_A - \omega_{BA}^{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

тенгламаларни оламиз. Шундай қилиб,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{BA}^n &= 0, \\ \omega_{BA}^{\tau} &= \omega_A - \omega_B = 0,12 \text{ м/с}^2 \end{aligned} \right\}$$

■ (10.20), (10.19) ларни эътиборга олсак,

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 0, \\ \epsilon &= \frac{\omega_{BA}^{\tau}}{AB} = 1 \text{ с}^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$e > 0$ бўлгани учун ω_{BA}^T 10.19-расм, б дагидек йўналганлигига ишонч ҳосил қиламиз.

(4) ни эътиборга олсак, (1) да

$$\omega_{CA}^T = e \cdot AC = 0,06 \text{ м/с}^2,$$

$$\omega_{CA}^n = \omega^2 \cdot AC = 0$$

бўлишини кўрамиз.

ω_{CA}^T вектори AB га перпендикуляр равишда C нуқтанинг қутбга нисбатан айланиши йўналишига мослаб олинсин керак.

C нуқтанинг тезланишини аниқлаш учун (1) ни x ва y ўқларга проекциялаймиз:

$$\omega_{Cx} = 0,$$

$$\omega_{Cy} = \omega_A - \omega_{CA}^T = 0,24 - 0,06 = 0,18 \text{ м/с}^2.$$

Бинобарин, C нуқтанинг тезланиши миқдор жиҳатдан $\omega_C = 0,18 \text{ м/с}^2$ га тенг бўлиб, y Bu ўқнинг йўналиши бўйича, яъни $\vec{\omega}_A$ ва $\vec{\omega}_B$ ларга параллел равишда йўналар экан.

IV хил масалалар. Вақтнинг бирор пайти учун текис шаклнинг оний бурчак тезлиги ω ва O нуқтасининг тезланиши $\vec{\omega}_O$ миқдор ва йўналиш жиҳатдан берилган. Ушбу текис шаклнинг ихтиёрий M нуқтаси шакл текислигидаги бирор O_1 қўзғалмас ўқ атрофида ω_1 бурчак тезлик билан айланивчи жисмга ҳам тааллуқлидир. M нуқтанинг тезланишини, текис шакл, шунингдек, O_1 ўқ атрофида айланивчи жисмнинг бурчак тезланишини аниқлаш сўралади.

Бу хилдаги масалаларни ечишда бир томондан M нуқтани текис шаклга тегишли деб қараб, (10.17) тенгламани, иккинчи томондан O_1 ўқ атрофида айланивчи жисмга тааллуқли деб қараб, (9.16) га кўра

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_{MO_1}^T + \vec{\omega}_{MO_1}^n, \quad (a)$$

тенгламани ёзиш мумкин. (10.17) ва (a) тенгламаларни ўнг томонларини ўзаро тенглаштирсак,

$$\omega_{MO_1}^T + \omega_{MO_1}^n = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{MO}^T + \vec{\omega}_{MO}^n \quad (б)$$

векторли тенглама оламиз. ω ва ω_1 берилган бўлгани учун (б) тенгламадаги $\vec{\omega}_{MO_1}^n$, $\vec{\omega}_O$, $\vec{\omega}_{MO}^n$ ларни ҳисоблаб топиш мумкин; $\vec{\omega}_{MO_1}^T$ ва $\vec{\omega}_{MO}^T$ векторларининг йўналиши M нуқтанинг мос равишда O_1 ва O ларга нисбатан айланиши тезланувчан деб тахмин қилиниб танланади. (б) ифодани икки хил йўналишга проекциялашдан ҳосил бўлган тенгламалардан $\omega_{MO_1}^T$ ва ω_{MO}^T аниқланади. Сўнггра M нуқта тезланиши модули (9.20) га асосан

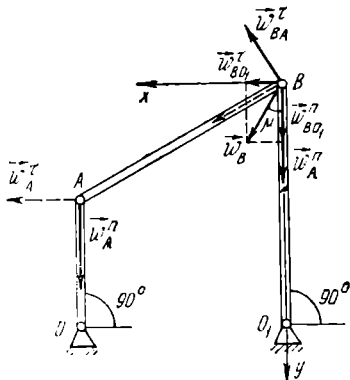
$$\omega_M = \sqrt{(\omega_{MO_1}^T)^2 + (\omega_{MO_1}^n)^2},$$

бурчак тезланишлари эса (10.19) ва (9.17) га кўра аниқланади:

$$\varepsilon = \frac{\omega_{MO}^{\tau}}{MO}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\omega_{MO_1}^{\tau}}{MO_1}.$$

Бу ҳолда M нуқта тезланишининг йўналиши (9.22) тенгликдан фойдаланиб топилади.

10.8-масала. Шарнирли $OABO_1$ тўрт звеноли механизмда OA кривошип ўзгармас ω_0 бурчак тезлик билан ҳаракатланади. Агар $O_1B = AB = 2OA = 2a$ бўлса, механизмнинг 10.20-расмда кўрсатилган ҳолати учун AB стержень ва O_1B кривошипнинг бурчак тезлиги, бурчак тезланиши ва B нуқтасининг тезланиши аниқлансин.



10.20- расм.

Ечиш. B нуқта бир йўла AB кривошипга ва BO_1 шатунга тааллуқли бўлгани учун унинг тезланиши икки хил тенглама ёрдамида аниқланиши мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_B &= \vec{w}_A + \vec{w}_{BA}^{\tau} + \vec{w}_{BA}^n, \\ \vec{w}_B &= \vec{w}_{BO_1}^{\tau} + \vec{w}_{BO_1}^n. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Бунда

$$\vec{w}_A = \vec{w}_A^{\tau} + \vec{w}_A^n \quad (2)$$

ҳамда

$$\left. \begin{aligned} w_A^{\tau} &= OA \cdot \varepsilon_0 = a \cdot 0 = 0, \\ w_A^n &= OA \cdot \omega_0^2 = a \cdot \omega_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{BA}^{\tau} &= AB \cdot \varepsilon_{AB} = 2a \varepsilon_{AB}, \\ w_{BA}^n &= AB \cdot \omega_{AB}^2 = 2a \omega_{AB}^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$w_{BO_1}^n = \frac{v_B^2}{BO_1} = \frac{v_B^2}{2a}.$$

Бу формулаларда ω_{AB} , ε_{AB} лар мос равишда AB шатуннинг оний бурчак тезлиги ва оний бурчак тезланишини ифодалайди. $w_A^{\tau} = 0$ бўлгани учун A нуқтанинг тезланиши $w_A = w_A^n$ фақат марказга интилма тезланишдан иборат бўлади ва A дан O га йўналади. w_{BA}^{τ} тезланиш AB га перпендикуляр, $w_{BO_1}^{\tau}$ эса BO_1 га перпендикуляр йўналади. B нуқтанинг A ва O_1 га нисбатан айланишини тезланувчан деб тахмин қилиб, w_{BA}^{τ} ва $w_{BO_1}^{\tau}$ векторларни 10.20- расмдагидек йўналтираміз.

$\vec{v}_A$ ва $\vec{v}_B$ ўзаро параллел ва уларга ўтказилган перпендикуляр чизиқлар ўзаро кесишмаганлиги туфайли AB шатуннинг берилган ондаги бурчак тезлиги $\omega_{AB} = 0$ бўлади. Шу сабабли $v_A = v_B$ ҳамда

$$w_{BA}^n = 0, \quad (5)$$

$$\omega_{BO_1}^n = \frac{v_A^2}{2a} = \frac{a\omega_0^2}{2}. \quad (6)$$

(2), (3) ва (5) га асосан (1) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{\omega}_{BO_1}^n + \vec{\omega}_{BO_1}^{\tau} = \vec{\omega}_A^n + \vec{\omega}_{BA}^{\tau}. \quad (7)$$

(7) ни $B\gamma$ ўққа проекциялаймиз:

$$\omega_{BO_1}^n = \omega_A^n - \omega_{BA}^{\tau} \cos 30^\circ,$$

бундан

$$\omega_{BA}^{\tau} = \frac{\omega_A^n - \omega_{BO_1}^n}{\cos 30^\circ} = \frac{a\omega_0^2 - \frac{a\omega_0^2}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\omega_0^2 \sqrt{3}}{3}$$

У ҳолда AB шатуннинг бурчак тезланиши

$$\epsilon_{AB} = \frac{\omega_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{a\omega_0^2 \sqrt{3}}{3 \cdot 2a} = \frac{\omega_0^2 \sqrt{3}}{6}.$$

$\epsilon_{AB} > 0$ бўлгани учун $\vec{\omega}_{BA}^{\tau}$ ҳақиқатан ҳам 10.20-расмдагидек йўналганлигига эътибор ҳосил қиламиз.

(7) ифодани Bx ўққа проекцияласак, $\omega_{BO_1}^{\tau} = \omega_{BA}^{\tau} \cos 60^\circ$. Бундан $\omega_{BO_1}^{\tau} = \frac{a\omega_0^2 \sqrt{3}}{6}$. Шундай қилиб

$$\omega_B = \sqrt{(\omega_{BO_1}^{\tau})^2 + (\omega_{BO_1}^n)^2} = \sqrt{\frac{a^2 \omega_0^4}{12} + \frac{a^2 \omega_0^4}{4}} = \frac{a\omega_0^2 \sqrt{3}}{3}.$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\omega_{BO_1}^{\tau}}{\omega_{BO_1}^n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ёки } \mu = 30^\circ.$$

O_1B кривошипнинг бурчак тезланиши

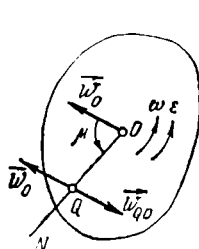
$$\epsilon_{O_1B} = \frac{\omega_{BO_1}^{\tau}}{O_1B} = \frac{\omega_0^2 \sqrt{3}}{12}.$$

10.9-§. Тезланишлар оний маркази

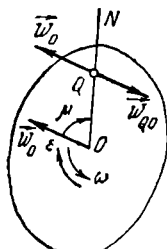
Тезланиши берилган онда нолга тенг бўлган текис шаклнинг (ёки текис шаклга маҳкам бириктирилган ва у билан биргаликда ҳаракатланувчи текисликнинг) нуқтаси *тезланишлар оний маркази* дейилади.

Теорема. *Илгарилама ҳаракатда бўлмаган текис шаклнинг ҳаракат текислигида ҳар онда тезланишлар оний маркази мавжуд бўлади.*

Исбот. Текис шаклнинг бурчак тезлиги ω , бурчак тезланиши ϵ ва айланиш йўналиши ҳамда O нуқтаси (қутб) нинг тезланиши $\vec{\omega}_O$ берилган бўлсин. Тезланишлар оний марказини Q билан белгилай-

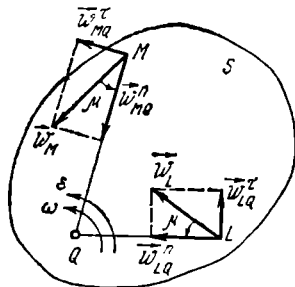


a



b

10.21- расм.



10.22- расм.

лик. Q нуқтанинг ҳолатини аниқлаш учун (10.22) формуладан μ бурчакни топамиз: $\mu = \arctg \frac{\epsilon}{\omega^2}$.

$\vec{w}_0$ вектори билан μ бурчак ташкил этувчи ON тўғри чизиқни ўтказамиз; агар текио шаклнинг айланиши тезланувчан бўлса, μ бурчак айланиш йўналиши бўйича, секинланувчан бўлса, айланишга тескари йўналишда қўйилади (10.21-расм, а, б). ON чизиқда O нуқтадан

$$OQ = \frac{w_0}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}} \quad (10.23)$$

масофада Q нуқтани олсак, бу нуқта тезланишлар оний маркази бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, O нуқтани қутб деб олиб, Q нуқтанинг тезланишини (10.18) га кўра ҳисоблайлик:

$$\vec{w}_Q = \vec{w}_0 + \vec{w}_{QO} \quad (10.24)$$

(10.21) формулага асосан:

$$w_{QO} = OQ \cdot \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4},$$

(10.23) ни эътиборга олсак,

$$w_{QO} = \frac{w_0}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}} \cdot \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} = w_0$$

тенглик келиб чиқади. $\vec{w}_{QO}$ вектори OQ билан μ бурчак ташкил этади, яъни $\vec{w}_{QO}$ вектори $\vec{w}_0$ га миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарма-қарши бўлади: $\vec{w}_{QO} = -\vec{w}_0$. Буни (10.24) га қўйиб, $w_Q = 0$ бўлишини кўрамиз. Шундай қилиб, Q нуқта тезланишлар оний маркази бўлади. ■

Тезланишлар оний маркази Q ҳамда текис шаклнинг оний бурчак тезлиги ω ва оний бурчак тезланиши ϵ маълум бўлса, текис

шакл ихтиёрий M нуқтасининг тезланиши қуйидагича аниқланади (10.22-расм).

Q нуқтани қутб деб олсак, (10.17) га кўра

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_Q + \vec{\omega}_{MQ}^n + \vec{\omega}_{MQ}^t.$$

Бунда $\vec{\omega}_Q = 0$ бўлганидан

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_{MQ}^n + \vec{\omega}_{MQ}^t = \vec{\omega}_{MQ} \quad (10.25)$$

тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, *текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши шу нуқтанинг тезланишлар оний маркази атрофида айланишидаги тезланишига тенг бўлади.*

(10.21) ва (10.22) га кўра қуйидаги формулалар ўринли бўлади.

$$\omega_M = MQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (10.26)$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (10.27)$$

Текис шакл бошқа бирор L нуқтаси тезланишининг миқдори (10.26) га асосан қуйидагича аниқланади:

$$\omega_L = LQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (10.26 \text{ а})$$

йўналиши учун (10.27) формула ўзгармай қолаверади, яъни *текис шакл нуқталарининг тезланиши мазкур нуқталарни тезланишлар оний маркази билан туташтирувчи чизиқлар билан бир хил бурчак ташиқил этади.*

(10.26) ва (10.26, а) дан

$$\frac{\omega_M}{MQ} = \frac{\omega_L}{LQ} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (10.28)$$

муносабатни оламиз.

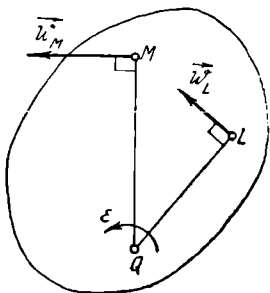
Демак, *текис шакл нуқталарининг тезланишлари шу нуқталардан тезланишлар оний марказигача бўлган масофаларга тўғри пропорционал бўлади.*

Қуйидаги хусусий ҳолларни кўрайлик.

1. Текис шаклнинг бурчак тезлиги нолга тенг, яъни $\omega = 0$ ва $\varepsilon \neq 0$ бўлсин (10.23-расм) У ҳолда (10.27) дан

$$\mu = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \infty = 90^\circ$$

бўлиб, текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши шу нуқтани тезланишлар оний маркази билан туташтирувчи чизиққа перпендикуляр йўналади, яъни текис



10.23- расм.

шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши фақат тезланишлар оний маркази атрофидаги айланма тезланишдан иборат бўлади:

$$\omega_M = \omega_{MQ}^T = MQ \cdot \epsilon, \quad \omega_L = \omega_{LQ}^T = LQ \cdot \epsilon.$$

Бу ҳолда текис шакл икки нуқтасининг тезланиш векторларига мазкур нуқталардан перпендикулярлар ўтказсак, уларнинг кесишган нуқтаси тезланишлар оний марказини ифодалайди.

2. $\omega \neq 0, \epsilon = 0$ бўлсин. У ҳолда $\mu = \arctg \frac{\epsilon}{\omega} = 0$ бўлиб, текис шакл нуқта-

ларининг тезланишлари шу нуқталарни тезланишлар оний маркази билан туташтирувчи чизиқлар бўйича Q нуқта томон йўналади ҳамда $\omega_M = \omega_{MQ}^T = MQ \cdot \omega^2$ бўлади. Бинобарин, кўриляётган ҳолда тезланишлар оний маркази текис шакл нуқталари тезланиш векторларининг кесишган нуқтасида ётади (10.24-рasm).

3. $\omega = 0, \epsilon = 0$ бўлса, берилган онда текис шакл барча нуқталарининг тезланиши геометрик тенг бўлади, чунки (10.17) га биноан текис шакл барча нуқталарининг тезланишлари қутбнинг тезланишига тенг бўлади:

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_L = \dots = \vec{\omega}_O$$

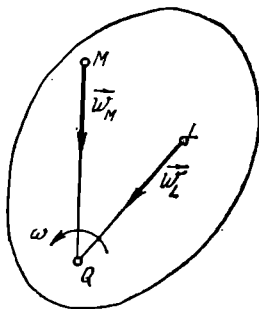
ҳамда

$$MQ = \frac{\omega_M}{0} = \infty.$$

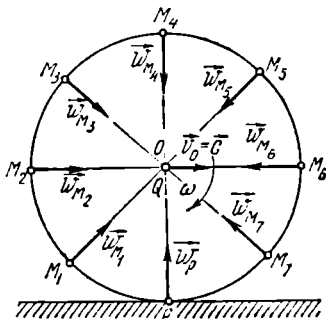
Умумий ҳолда тезликлар оний маркази ва тезланишлар оний маркази устма-уст тушмайди. Мисол тариқасида радиуси R га тенг ва маркази ўзгармас $\vec{v}_O$ тезлик билан ҳаракатланувчи ғилдиракнинг тўғри чизиқли рельсда сирпанмасдан ғилдирашини кўрайлик (10.25-рasm). Ғилдирак сирпанмасдан ҳаракатлангани учун тезликлар оний маркази ғилдиракнинг рельсга тегиб турган P нуқтасида ётади. Шу сабабли

$$v_O = PO \cdot \omega = R \cdot \omega.$$

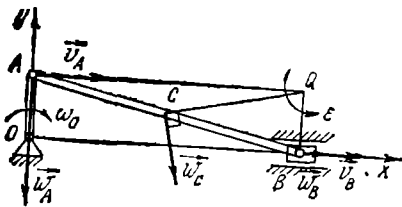
Ғилдирак $\omega = \frac{v_O}{R} = \text{const}$ бурчак тезлик билан ҳаракатланади. Унинг марказидаги O нуқта ўзгармас тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракатлангани учун $\vec{\omega}_O = 0$. Яъни тезланишларнинг оний маркази Q ғилдиракнинг маркази O нуқта билан устма-уст тушади ҳамда ғилдирак исталган нуқтасининг тезланиши унинг тезланишлар оний маркази атрофида айлан-



10.24- рasm.



10.25- рasm.



10.26- расм.

ма ҳаракатидаги марказга интилма тезланишдан иборат бўлади. Масалан, гилдирак тўғинидаги $M_1, M_2, \dots, M_7, P$ нуқталарнинг тезланиши қуйидагича аниқланади:

$$\omega_{M_1} = \omega_{M_2} = \dots = \omega_{M_7} = \omega_P = \\ = R \cdot \omega^2 = \frac{v_0^2}{R}.$$

Гилдирак исталган нуқтасининг тезланиши тезланишларнинг оний марказига йўналади.

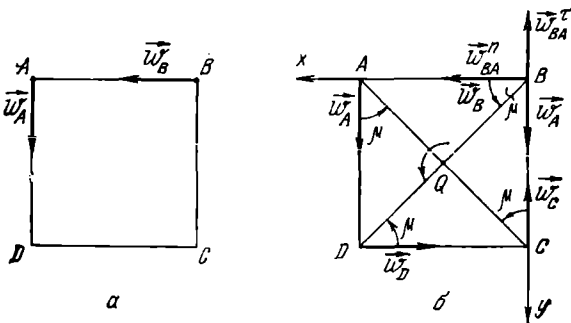
Юқорида кўрганимиздек, қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати текис параллел ҳаракатнинг хусусий ҳолидан иборат бўлади. Бундай ҳаракатдаги жисмнинг қўзғалмас ўқда ётувчи барча нуқталарининг тезлик ва тезланишлари нолга тенг бўлади. Бинобарин, бу ҳолда тезликларнинг оний маркази ва тезланишларнинг оний маркази устма-уст тушади ва айланиш ўқида ётади.

10.9- масала. ОА кривошип Оу ўқда ётганда кривошип-шатунли механизм В ползунининг ва АВ шатун ўртасидаги С нуқтанинг тезланишлари аниқлансин (10.26- расм).

ОА кривошип О нуқта атрофида $\omega_0 = 15 \text{ с}^{-1}$ ўзгармас бурчак тезлик билан айланади. Кривошипнинг узунлиги $OA = 0,4 \text{ м}$, шатуннинг узунлиги $AB = 2 \text{ м}$.

Ечиш. Шатун А ва В нуқталарининг тезлиги $\vec{v}_A$ ва $\vec{v}_B$ ўзаро параллел ҳам-да АВ га перпендикуляр бўлмагани учун тезликлар оний маркази ($\vec{v}_A$ ва $\vec{v}_B$ га А ва В нуқталарда ўтказилган перпендикулярнинг кесишган нуқтаси) чексиз узоқлашган нуқтadan иборат бўлади, яъни берилган онда $\omega_{AB} = 0$ бўлади.

В нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлгани учун унинг тезланиши Ох ўқ бўйлаб йўналади; шатуннинг А нуқтаси ОА кривошипка ҳам тааллуқли бўлиб, ОА кривошип текис айланма ҳаракат қилгани учун $\vec{\omega}_A$ тезланиш айланиш маркази О нуқтага йўналади, унинг қиймати $\omega_A = OA \cdot \omega_0^2 = 90 \text{ м/с}^2$ га тенг. $\omega_{AB} = 0$ бўлгани учун АВ шатун тезланишларининг оний маркази А ва В нуқталарда $\vec{\omega}_A$ ва $\vec{\omega}_B$ тезланишларга перпендикуляр равишда ўтказилган чизиқларнинг кесишган Q нуқтасида бўлади.



10.27- расм.

$$\omega_{AB} = 0, \quad \varepsilon_{AB} = \frac{\omega_A}{AQ} = \frac{90}{\sqrt{2^2 - 0,4^2}} = 45,92 \text{ с}^{-2} \text{ бўлгани учун } B \text{ ва } C \text{ нуқ-}$$

таларнинг тезланишлари фақат тезланишларнинг оний маркази Q нуқта атрофидаги айланма тезланишдан иборат бўлади:

$$\omega_B = BQ \cdot \varepsilon_{AB} = 0,4 \cdot 45,92 = 18,37 \text{ м/с}^2,$$

$$\omega_C = CQ \cdot \varepsilon_{AB} = 1 \cdot 45,92 = 45,92 \text{ м/с}^2.$$

C нуқтанинг тезланиши CQ га перпендикуляр йўналади.

10.10- масала. Томонлари $a = 0,1$ м бўлган $ABCD$ квадрат шакл текислигида ҳаракатланади. Агар берилган онда квадрат A ва B нуқталарининг тезланишлари квадрат томонлари бўйлаб йўналган ҳамда миқдор жиҳатдан $0,1$ м/с² га тенг бўлса, тезланишларнинг оний маркази ҳамда C ва D нуқталарнинг тезланиши аниқлансин (10.27- расм, а).

Ечиш. A нуқтани қутб деб қабул қилсак, (10.17) га асосан B нуқтанинг тезланиши

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^{\tau} + \vec{\omega}_{BA}^n, \quad (1)$$

(1) да

$$\left. \begin{aligned} \omega_{BA}^{\tau} &= \varepsilon \cdot AB, \\ \omega_{BA}^n &= \omega^2 \cdot AB. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(1) да $\vec{\omega}_{BA}^n$ вектори B дан A томон йўналган, $\vec{\omega}_{BA}^{\tau}$ вектори AB га перпендикуляр равишда (1) тенгликка риоя қилган ҳолда йўналтирилади (10.27- расм, б). (1) ни расмда кўрсатилган Bx ва By ўқларга проекциялаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{BA}^n &= \omega_B, \\ \omega_{BA}^{\tau} &= \omega_A. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(2) ва (3) ни солиштириб, квадратнинг берилган ондаги бурчак тезлиги ва бурчак тезланишини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{\omega_B}{AB}} = \sqrt{\frac{0,1}{0,1}} = 1 \text{ с}^{-1}, \\ \varepsilon &= \frac{\omega_A}{AB} = \frac{0,1}{0,1} = 1 \text{ с}^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(10.27) га кўра $\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1$ ёки $\mu = 45^\circ$ бўлади.

A ва B нуқталарда $\vec{\omega}_A$ ва $\vec{\omega}_B$ векторларига соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда $\mu = 45^\circ$ бурчак остида тўғри чизиқлар ўтказсак, уларнинг кесилган нуқтаси Q квадрат диагоналлари кесишадиган нуқта билан устма-уст тушади ҳамда тезланишларнинг оний марказини ифодалайди. У ҳолда C ва D нуқталарнинг тезланиши миқдор жиҳатдан

$$\omega_C = QC \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{AC}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0,1 \text{ м/с}^2,$$

$$\omega_D = QD \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{BD}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0,1 \text{ м/с}^2$$

бўлади. C ва D нуқталарни Q билан туташтирсак, $\vec{\omega}_C$ ва $\vec{\omega}_D$ векторлари QC ва QD га соат стрелкаси айланидиган йўналишга тескари 45° бурчак остида ўтказилган чизиқлар (квадратнинг CB ва DC томонлари) бўйича йўналади.

11-606. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚҰЗҒАЛМАС НУҚТА АТРОФИДАГИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ

11.1-§. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракат тенгламалари. Эйлер бурчаклари

Ҳаракат давомида битта нуқтаси ҳамиша қўзғалмасдан қоладиган қаттиқ жисмнинг ҳаракати қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракат ёки сферик ҳаракат дейилади.

Бундай ҳаракатда жисмнинг барча нуқталари умумий маркази қўзғалмас нуқта билан устма-уст тушувчи сфераларнинг сиртларида ҳаракатланади.

Таянч текислигидаги нуқтаси қўзғалмас бўлган пирилдоқнинг ҳаракати ёки биргина сферик шарнирли боғлапиш қўйилган жисмнинг ҳаракати сферик ҳаракатга мисол бўла олади.

Қўзғалмас O нуқтага эга бўлган жисмнинг $O\xi\eta\zeta$ қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳолатини аниқлаш учун жисмга бириктирилган ва у билан бирга ҳаракатланувчи ҳамда координаталар боши қўзғалмас O нуқта билан устма-уст тушувчи $Oxyz$ қўзғалувчи координаталар системасини ўтказамиз (11.1-расм).

Қўзғалувчи координаталар системасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳолатини Эйлер томонидан тавсия этилган ва *Эйлер бурчаклари* деб аталувчи учта бир-бирига боғлиқ бўлмаган бурчаклар воситасида аниқлаш мумкин. Эйлер бурчаклари қуйидагича белгиланади: $O\xi\eta$ қўзғалмас текислигининг қўзғалувчи Oxy текислик билан кесишган чизиги ON тугунлар чизиги дейилади. Тугунлар чизиги бир йўла Oz ва $O\xi$ га перпендикуляр бўлгани учун бу ўқлар орқали ўтувчи текисликка ҳам перпендикуляр бўлади.

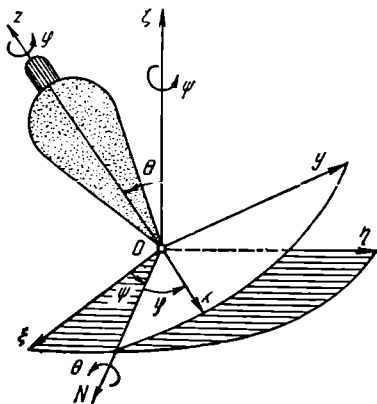
$O\xi\eta$ қўзғалмас текисликда ётувчи, $O\xi$ ўқ билан ON тугунлар чизиги орасидаги бурчак ψ билан белгиланади ва *прецессия бурчаги* дейилади.

Тугунлар чизигининг Ox қўзғалувчи ўқ билан ташкил қилган бурчаги φ билан белгиланиб, у *соф йланиш бурчаги* дейилади. Қўзғалувчи Oz ўқ *соф айланиш ўқи* дейилади.

$O\xi\eta$ ва Oxy текисликлар орасидаги бурчак ёки $O\xi$ қўзғалмас ўқ билан Oz қўзғалувчи ўқ орасидаги бурчак θ билан белгиланади ва *нутация бурчаги* дейилади.

ψ , φ , θ бурчаклар *Эйлер бурчаклари* дейилади.

Эйлер бурчакларининг мусбат йўналиши учун $O\xi$, Oz ва ON ўқларнинг мусбат йўналишидан қараганда мос равишда шу ўқларга перпендикуляр текисликларда ўзга-



11.1- расм.

Рувчи ψ , φ , θ бурчакларнинг соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда орта борадиган йўналишларини қабул қиламиз.

Жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида кўчишига оид қуйидаги теоремани кўриб чиқамиз.

Эйлер теоремаси. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ихтиёрый кўчишини мазкур қўзғалмас нуқтадан ўтувчи учта ўқ атрофида кетма-кет учта айлантириш билан бажариш мумкин.

Исбот. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг чекли вақт ичида кўчгандаги ҳолати $Ox\eta z$ координаталар системаси билан берилган бўлсин.

Бошлангич пайтда қўзғалувчи координаталар системасини $O\xi\eta\zeta$ қўзғалмас координаталар системаси билан устма-уст тушган деб қарайлик. Мазкур қўзғалувчи координаталар системасини $O\xi$ ўқ атрофида I йўналишда ψ бурчакка айлантирсак, у $ON_1\eta_1\zeta$ ҳолатни эгаллайди (11.2-расм). Сўнгга $ON_1\eta_1\zeta$ координаталар системасини ON ўқ атрофида II йўналишда θ бурчакка айлантириб, $ON\eta_2 z$ координаталар системасини оламиз. Ниҳоят, $ON\eta_2 z$ ни Oz ўқ атрофида III йўналишда φ бурчакка буриш натижасида қўзғалувчи $Ox\eta z$ координаталар системасини оламиз. ■

Шундай қилиб, бу теоремага кўра қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисмнинг исталган пайтдаги ҳолатини бир-бирига боғлиқ бўлмаган учта Эйлер бурчаклари воситасида аниқлаш мумкинлигини кўрамиз. Жисмнинг ҳаракати давомида бу бурчаклар вақтнинг узлуксиз функциясида иборат бўлади:

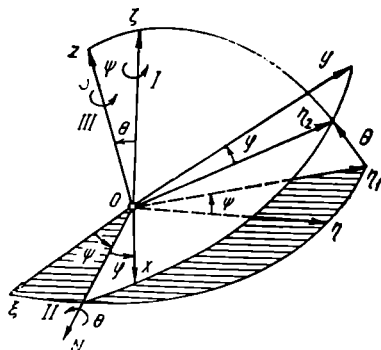
$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (11.1)$$

Бу функционал муносабатлар қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг кинематик тенгламалари ёки сферик ҳаракат тенгламалари дейилади.

11.2-§. Эйлер-Даламбер теоремаси

Теорема. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган қаттиқ жисмнинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ҳар қандай кўчишини қўзғалмас нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида бир айлантириш билан амалга ошириш мумкин.

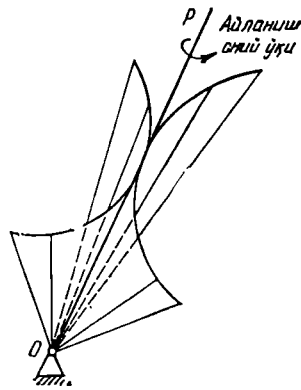
Исбот. Геометриядан маълумки, жисмнинг фазодаги вазиятини унинг бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтасининг ҳолати орқали аниқлаш мумкин. Сферик ҳаракатдаги жисмнинг ҳолати унинг қўзғалмас O нуқтаси билан бир тўғри чизиқда ётмайдиган яна иккита нуқтанинг ҳолати билан аниқланади. O нуқтани марказ қилиб



11.2- расм.

лимит ҳолатига яқинлашади. Δt нолга интилганда OE ўқнинг лимит ҳолатининг ифодаловчи OP ўқ айланиш оний ўқи дейилади.

Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатини кетма-кет узлуксиз элементар кўчишлардан ташкил топган деб қараш мумкин. Эйлер-Даламбер теоремасига биноан, бундай ҳар бир элементар кўчишни айланиш оний ўқи атрофидаги оний айланма ҳаракат тарзида амалга ошириш мумкин. Бинобарин, битта қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳар қандай ҳаракатини айланиш оний ўқлари атрофидаги кетма-кет узлуксиз оний айланма ҳаракатлар тўпламидан иборат деб тасаввур этиш мумкин.



11.4-расм.

Жисмнинг ҳаракати текширилаётган қўзғалмас координаталар системасига нисбатан айланиш оний ўқларининг геометрик ўрни *қўзғалмас аксоид* дейилади. Барча айланиш оний ўқлари жисмнинг қўзғалмас нуқтаси орқали ўтгани туфайли қўзғалмас аксоид, уч қўзғалмас нуқтада ётувчи конус сиртдан иборат бўлади.

Айланиш оний ўқларининг жисмга бириктирилган ва у билан биргаликда ҳаракатланувчи қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан геометрик ўрни конус сиртдан иборат бўлиб, *қўзғалувчи аксоид* дейилади.

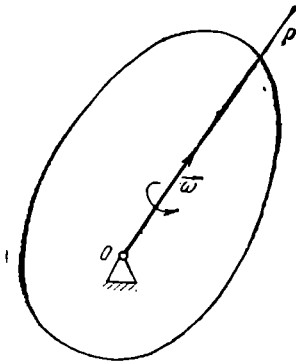
Қўзғалувчи ва қўзғалмас аксоидларни ёлғиз OP айланиш оний ўқининг кўчиши натижасида ҳосил қилингани туфайли бу конуслар ҳар онда бир-бирига умумий ясовчи OP орқали уринади (11.4-расм).

OP оний ўқда ётувчи нуқталарнинг тезликлари берилган онда нолга тенг бўлгани учун жисм ҳаракатланганда қўзғалувчи аксоид қўзғалмас аксоид устида сирғанмай думалайди. Бинобарин, *қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракатини қўзғалувчи аксоидни қўзғалмас аксоид устида сирғантирмай думалатиш натижасида амалга ошириш мумкин.*

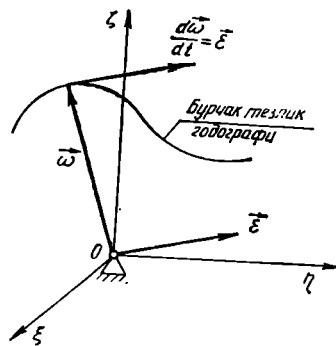
11.4-§. Қўзғалмас нуқта атрофида айланма ҳаракатдаги жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳар ондаги ҳаракатини айланиш оний ўқи атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин бўлгани туфайли бундай ҳаракатни характерлаш учун оний бурчак тезлик ва оний бурчак тезланиш тушунчаларини киритамиз. Оний бурчак тезлиكنинг миқдорини Δt вақт ичида элементар айланиш бурчаги $\Delta \alpha$ орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \alpha|}{\Delta t} \quad (11.2)$$



11.5- расм.



11.6- расм.

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода α бурчакдан t вақт бўйича олинган ҳосилага тенг бўлмаслигини алоҳида уқдириб ўтамыз, чунки қаттиқ жисм қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатланганда бундай бурчакнинг ўзи мавжуд бўлмайди. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракат қонуни маълум бўлганда ω бурчак тезликини ҳисоблаш хусусида кейинчалик (11.8-§ да) батафсил тўхталамиз.

Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатини ўрганишда оний бурчак тезликини вектор тарзида ифодалаш бундай ҳаракатнинг хусусиятларини ўрганишни соддалаштиради.

Келгусида қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг оний бурчак тезлигини қўзғалмас нуқтага қўйилган ва айланиш оний ўқи бўйлаб йўналган шундай $\vec{\omega}$ вектори тарзида ифодалаймизки, унинг мусбат йўналишидан қараганда кузатувчи жисмнинг айланишини соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда кўриши керак (11.5- расм).

Жисм қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатланганда айланиш оний ўқининг йўналиши ўзгара боради, шу сабабли оний бурчак тезлиги ҳам миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгара боради.

Оний бурчак тезлик векторидан вақт бўйича олинган ҳосила оний бурчак тезланиши дейилади, яъни

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (11.3)$$

Шундай қилиб, оний бурчак тезланиш векторини оний бурчак тезлиги вектори учининг тезлиги тарзида қараш мумкин экан. Шу сабабли оний бурчак тезланиш вектори $\vec{\varepsilon}$ оний бурчак тезлик вектори годографига ўтказилган уринма бўйича йўналади (11.6- расм).

$\vec{\varepsilon}$ векторини ҳам қўзғалмас O нуқтага қўйилган деб қараймиз. Демак, умумий ҳолда битта қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг оний бурчак тезланиш вектори $\vec{\varepsilon}$ билан оний бурчак тезлик вектори $\vec{\omega}$ бир чизиқда ётмайди.

11.5-§. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги

Юқориди кўрганимиздек, қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисмнинг ҳар ондаги ҳаракатини мазкур қўзғалмас нуқтадан ўтувчи айланиш оний ўқи атрофидаги оний айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин ҳамда айланиш оний ўқида ўтувчи жисм нуқталарининг берилган ондаги тезликлари нолга тенг бўлади. Агар айланиш оний ўқи ва жисмнинг оний бурчак тезлиги маълум бўлса, битта қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм ихтиёрий M нуқтасининг берилган ондаги тезлигини аниқлаш учун қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги аниқланадиган Эйлер формуласи (9.14) дан фойдаланиш мумкин:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (11.4)$$

бунда $\vec{r}$ билан M нуқтанинг қўзғалмас нуқтага нисбатан радиус-вектори белгиланган (11.7-расм).

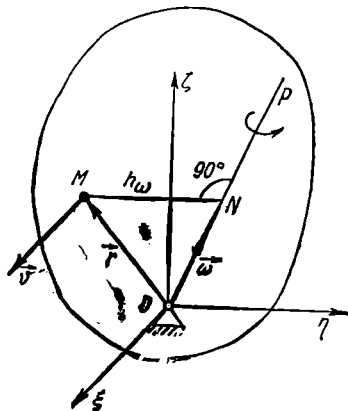
$\vec{r}$ радиус-вектор миқдор жиҳатдан қаттиқ жисмнинг икки нуқтаси орасидаги масофани ифодалагани туфайли шу жисм ҳаракати давомида унинг фақат йўналиши ўзгаради. Бинобарин (11.4) формуласи миқдор жиҳатдан ўзгармасдан, йўналиши жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлиги билан айланиши туфайли ўзгарадиган векторнинг вақт бўйича ҳосиласини ҳисоблаш формуласи деб қараш мумкин.

(11.4) га биноан M нуқта тезлигининг миқдори қуйидагича аниқланади:

$$v = \omega \cdot r \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega \cdot h_{\omega}, \quad (11.5)$$

бунда $h_{\omega} = r \sin(\vec{\omega}, \vec{r})$ бўлиб, M нуқтадан айланиш оний ўқи OP гача бўлган MN масофани ифодалайди.

Шундай қилиб, қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги миқдор жиҳатдан шу нуқтадан айланиш оний ўқиғача бўлган масофага пропорционал бўлади, йўналиши эса $\vec{\omega}$ ва $\vec{r}$ векторлариға (бинобарин MN га) перпендикуляр тарзда оний ўқ атрофидаги айланишга мос равишда йўналади.



11.7- расм.

Агар айланиш оний ўқининг ҳолати ва жисм бирор нуқтасининг тезлиги $\vec{v}$ маълум бўлса, (11.5) формуладан фойдаланиб жисмнинг оний бурчак тезлигини аниқлаш мумкин:

$$\omega = \frac{v}{h_\omega}. \quad (11.6)$$

Оний бурчак тезликнинг қўзғалувчи координата ўқларидаги проекцияларини мос равишда ω_x , ω_y , ω_z ҳамда M нуқтанинг координаталарини x , y , z билан белгиласак, (11.4) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k}.$$

Бу тенгликни қўзғалувчи x , y , z ўқларга проекциялаб, тезлик векторининг мазкур ўқлардаги v_x , v_y , v_z проекцияларини ҳисоблаймиз:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Худди шунингдек, тезликнинг қўзғалмас координата ўқларидаги v_ξ , v_η , v_ζ проекциялари ҳисобланади:

$$\left. \begin{aligned} v_\xi &= \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta, \\ v_\eta &= \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta, \\ v_\zeta &= \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi. \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

(11.7) ва (11.8) формулалар *Эйлер формулалари* дейилади.

Ҳар онда айланиш оний ўқи нуқталарининг тезлиги нолга тенглигини эътиборга олсак, v_x , v_y , v_z ларни нолга тенглаб (11.7) дан

$$\left. \begin{aligned} \omega_y z - \omega_z y &= 0, \\ \omega_z x - \omega_x z &= 0, \\ \omega_x y - \omega_y x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

тенгламаларни оламиз. Бу тенгламаларни

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \quad (11.9)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

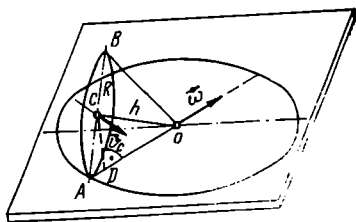
(11.9) формулалар *айланиш оний ўқининг берилган пайт учун қўзғалувчи координаталар системасидаги тенгламаларини* ифодалайди.

Худди шунингдек, айланиш оний ўқининг $O\xi\eta\zeta$ қўзғалмас координаталар системасига нисбатан тенгламаларини

$$\frac{\xi}{\omega_{\xi}} = \frac{\eta}{\omega_{\eta}} = \frac{\zeta}{\omega_{\zeta}} \quad (11.10)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

$\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta}$ лар вақт функцияси сифатида ўзгаришини назарда тутиб, (11.9) ва (11.10) ифодалардан вақт t ни йўқотиш орқали мос равишда қўзғалувчи ва қўзғалмас аксоид тенгламаларини олиш мумкин.



11.8- расм.

11.1- масала. Баланглиги $h = 4$ см, асосининг радиуси $R = 2$ см ва учи қўзғалмас O нуқтада бўлган конус горизонтал текисликда сирпанмасдан юмалайди (11.8- расм). Агар конус асоси марказининг тезлиги $v_C = 18$ см/с $= \text{const}$ бўлса, конуснинг бурчак тезлиги ҳамда қўзғалмас ва қўзғалувчи аксоидлар топилсин.

Ечиш. Конус текисликда сирпанмасдан юмалагани учун A нуқтанинг тезлиги нолга тенг. Масала шаригга кўра O нуқта ҳам қўзғалмас. Бинобарин, OA тўғри чизиқ айланиш оний ўқи бўлади. Конус текисликда сирпанмасдан юмалаганида OA айланиш оний ўқининг қўзғалмас координата системасидаги геометрик ўрни шу горизонтал текисликдан иборат. Демак, қўзғалмас аксоид горизонтал текислик бўлади. OA айланиш ўқининг қўзғалувчи системадаги геометрик ўрнини кузатсак, қўзғалувчи аксоид учи O нуқтада ётувчи, асоси берилган конус асосидан иборат конуснинг ён сирти бўлишига ишонч қиламиз. Бу конуснинг

учидаги бурчаги $\alpha = \widehat{AOB} = 2 \arctg \frac{1}{2} \approx 53^\circ$ га тенг бўлади.

Энди конус оний бурчак тезлигининг миқдор ва йўналишини аниқлаймиз. (11.4) формулага биноан $\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{OC}$ бўлади. Шунинг учун $\vec{v}_C$ кузатувчи томонга йўналган ҳолда $\vec{\omega}$ вектори айланиш оний ўқи бўйича A нуқтадан O нуқтага қараб йўналади. (11.5) формулага асосан $v_C = \omega \cdot CD$ бўлади. Расмдан $CD =$

$$= h \sin \frac{\alpha}{2}. \text{ Бинобарин, } \omega = \frac{v_C}{h \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{18}{1,8} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

11.6-§. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезланиши

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм M нуқтасининг тезланишини аниқлаш учун (11.4) ифодадан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (11.11)$$

Бунда

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{e}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

бўлгани учун (11.11) ни

$$\vec{w} = \vec{e} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (11.12)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (11.12, a)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(11.12) да тезланишнинг

$$\vec{\omega}^e = \vec{\epsilon} \times \vec{r} \quad (11.13)$$

ташкил этувчиси айланма тезланиш,

$$\vec{\omega}^\omega = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (11.14)$$

ташкил этувчиси эса ўққа интилма тезланиш дейилади.

Шундай қилиб

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^\omega \quad (11.15)$$

(11.15) ифода Ривальс теоремасини ифодалайди: қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтасининг тезланиши айланма ва ўққа интилма тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

(11.13) дан кўрамизки, қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг $\vec{\omega}^e$ айланма тезланиши $\vec{\epsilon}$ ва $\vec{r}$ орқали ўтказилган текисликка перпендикуляр равишда шундай йўналадики, унинг учидан қараганда $\vec{\epsilon}$ векторини $\vec{r}$ вектори устига тушириш учун энг кичик бурчакка буриш соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда кўриниши керак (11.9-расм).

Айланма тезланишнинг миқдори

$$\omega^e = \epsilon \cdot r \cdot \sin(\widehat{\vec{\epsilon}, \vec{r}}) = \epsilon \cdot h_e \quad (11.16)$$

тенгликдан аниқланади. Бу формулада h_e билан M нуқтадан оний бурчак тезланиши вектори ётган чизиққа туширилган MK перпендикулярнинг узунлиги белгиланган.

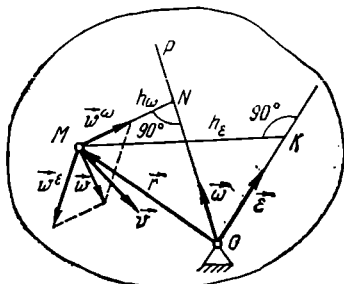
(11.14) тенгликка биноан $\vec{\omega}^\omega$ ўққа интилма тезланиш $\vec{\omega}$ ва $\vec{v}$ векторларига перпендикуляр равишда, яъни M нуқтадан айланиш оний ўқи OP томонга MN бўйича йўналади.

Ўққа интилма тезланишнинг миқдори

$$\omega^\omega = \omega \cdot v \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}}) = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot h_\omega \quad (11.17)$$

формуладан аниқланади. (11.17) да h_ω билан M нуқтадан айланиш оний ўқи-гача бўлган MN масофа белгиланган.

Агар айланма ва ўққа интилма тезланишлар ҳамда улар орасидаги бурчак маълум бўлса, қўзғалмас нуқ-



11.9- расм.

та атрофида айланувчи жисм нуқтаси тезланишининг миқдорини, косинуслар теоремасидан фойдаланиб, қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$\omega = \sqrt{(\omega^\omega)^2 + (\omega^\epsilon)^2 + 2\omega^\omega \omega^\epsilon \cos(\widehat{\vec{\omega}^\omega, \vec{\omega}^\epsilon})}. \quad (11.18)$$

Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезланиш аниқланадиган формулалар қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезланиши топиладиган формулаларга ўхшаса-да, умумий ҳолда улар бир-биридан тубдан фарқ қилади. Бунни қуйидаги жадвалдан кўриш мумкин.

№№	Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм учун	Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм учун
1.	$h_\omega = h_\epsilon = R$	$h_\omega \neq h_\epsilon$
2.	$\widehat{(\vec{\omega}^\tau, \vec{\omega}^n)} = 90^\circ$	$\widehat{(\vec{\omega}^\tau, \vec{\omega}^\omega)} \neq 90^\circ$
3.	$\vec{\omega}^\tau$ ва $\vec{v}$ векторлари бир тўғри чизиқда ётади.	$\vec{\omega}^\epsilon$ ва $\vec{v}$ векторлари бир тўғри чизиқда ётмайди.
4.	$\vec{\omega}$ ва $\vec{\epsilon}$ векторлари бир чизиқда (айланиш ўқида) ётади: $\vec{\omega} \parallel \vec{\epsilon}$	$\vec{\omega}$ ва $\vec{\epsilon}$ векторлари бир чизиқда ётмайди: $\vec{\omega} \neq \vec{\epsilon}$

11.7-§. Оний бурчак тезланиш вектори

Агар қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм оний бурчак тезлик векторининг бирлик векторини $\vec{\omega}^0$ билан белгиласак, у ҳолда

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\omega}^0$$

муносабат ўринли бўлади. $\vec{\epsilon}$ векторининг таърифига кўра

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{\omega}^0 + \omega \cdot \frac{d\vec{\omega}^0}{dt} \quad (11.19)$$

ёки

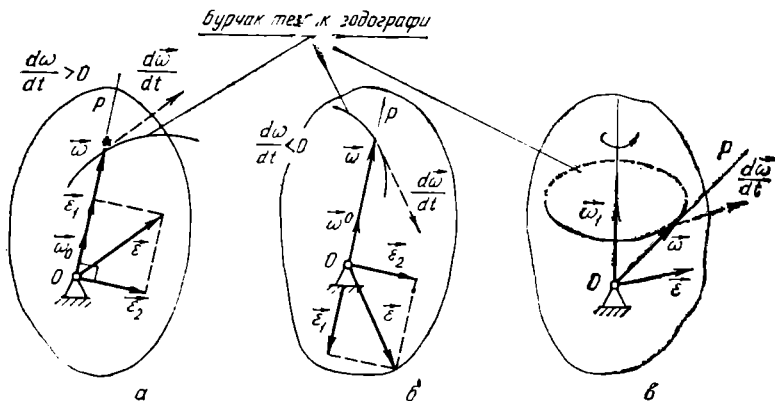
$$\vec{\epsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}^0, \quad \vec{\epsilon}_2 = \omega \cdot \frac{d\vec{\omega}^0}{dt} \quad (11.20)$$

белгилашларни киритсак,

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 \quad (11.21)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(11.21) да жисм оний бурчак тезланишининг $\vec{\epsilon}_1$ ташкил этувчиси вақт ўтиши билан оний бурчак тезлигининг миқдор жиҳатдан ўзгаришини ифодалайди ва $\frac{d\omega}{dt} > 0$ бўлган ҳолда оний бурчак тез-



11.10- расм.

лик вектори бўйича (11.10- расм, а), $\frac{d\omega}{dt} < 0$ да эса унга қарама-қарши йўналади (11.10- расм, б).

Бирлик векторнинг вақт бўйича биринчи ҳосиласи дифференциалланаётган векторга перпендикуляр йўналгани туфайли оний бурчак тезланишининг $\vec{\epsilon}_2$ ташкил этувчиси оний бурчак тезлик векторининг вақт ўтиши билан йўналиш жиҳатдан ўзгаришини ифодалайди ва оний бурчак тезлиги векторига ҳамisha перпендикуляр бўлади (11.10- расм, а, б).

Алоҳида аҳамиятга эга бўлган қуйидаги икки хусусий ҳолни кўрамиз.

1. Жисмнинг оний бурчак тезлик вектори йўналиш жиҳатдан ўзгармай $\left(\frac{d\vec{\omega}^0}{dt} = 0\right)$, фақат унинг миқдори ўзгарсин. Бу ҳолда (11.21) да $\vec{\epsilon}_2 = 0$ бўлгани учун

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}^0$$

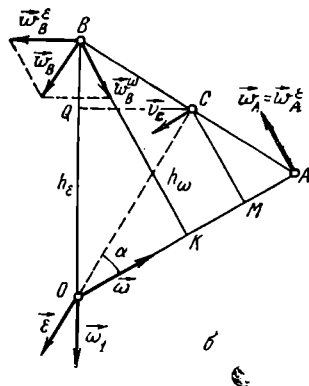
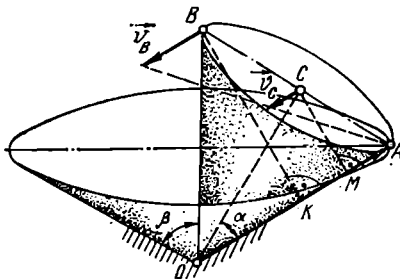
муносабат ўринли бўлади. Бинобарин, бу ҳолда жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракати қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатга эквивалент бўлади.

2. Оний бурчак тезлигининг миқдори ўзгармай ($\omega = \text{const}$) фақат йўналиши ўзгарсин. У ҳолда $\vec{\epsilon}_1 = 0$ бўлиб,

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_2 = \omega \frac{d\vec{\omega}^0}{dt} \quad (11.22)$$

муносабатни оламиз. Бунда бевосита бурчак тезланишининг бурчак

тезлик орқали ифодаси $\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ дан фойдаланамиз. Юқорида кўр-



11.11- расм.

ганимиздек, миқдор жиҳатдан ўзгармас бўлиб йўналиши жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлиги билан айланиши туфайли ўзгарадиган векторнинг вақт бўйича ҳосиласини (11.4) формула билан ҳисоблаш мумкин.

Худди шунга ўхшаш $\vec{\omega}$ ни миқдори ўзгармас бўлган радиус-вектор деб қарасак,

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} \quad (11.23)$$

муносабат ўринли бўлади. (11.23) да $\vec{\omega}_1$ орқали $\vec{\omega}$ вектор йўналган айланиш оний ўқининг бурчак тезлиги белгиланган (11.10- расм, а).

Бу ҳолда бурчак тезланиш векторининг миқдори

$$\epsilon = \omega_1 \cdot \omega \sin(\widehat{\omega_1 \omega}) \quad (11.24)$$

формуладан аниқланади.

11.2- масала. Учидаги бурчаги $2\alpha = 60^\circ$ бўлган I доғравий конус, учидаги бурчаги $2\beta = 120^\circ$ бўлган қўзғалмас II конус ичида сирпанмасдан думалайди (11.11- расм, а). I конус асосининг маркази ўзгармас $v_c = 0,44$ м/с тезликка эга. I конус асосининг радиуси $r = 0,2$ м. I конуснинг оний бурчак тезлиги, оний бурчак тезланиши ва унинг A ҳамда B нуқталарининг тезлик, тезланишлари топилсин.

Ечиш. I конус II конус ичида сирпанмасдан думалаганда унинг учидаги O нуқта қўзғалмасдан қолади ҳамда I конуснинг II конусга тегиб турган OA ясов-чисида ётувчи барча нуқталарнинг тезлиги нолга тенг бўлади, яъни OA чизик I конуснинг айланиш оний ўқини ифодалайди.

Агар C нуқтанинг тезлиги расм текислигидан кузатувчи томонга қараб йўналган деб олсак, оний бурчак тезлик вектори унга мос равишда 11.11- расм, а да кўрсатилгандек йўналади.

C нуқта тезлиги берилгани туфайли конус оний бурчак тезлигининг миқдори (11.6) формуладан фойдаланиб аниқлаймиз:

$$\omega = \frac{v_c}{CM} = \frac{v_c}{r \sin 60^\circ} = 2,54 \text{ с}^{-1}. \quad (1)$$

A нуқта айланиш оний ўқда ётгани учун унинг тезлиги нолга тенг, яъни $v_A = 0$.

(11.5) га асосан B нуқтанинг тезлиги

$$v_B = \omega \cdot BK, \quad (2)$$

бунда BK билан B нуқтадан айланиш оний ўқигача бўлган масофа—оний айланиш радиуси белгиланган. AOB учбурчак тенг томонли бўлгани учун, OBK учбурчакдан

$$BK = 2r \sin 2\alpha = 0,35 \text{ м.} \quad (3)$$

(1) ва (3) ни (2) га қўйсак,

$$v_B = 0,89 \text{ м/с.}$$

B нуқтанинг тезлик вектори расм текислигига тик равишда кузатувчи томонига йўналган.

$\vec{\omega}$ вектори миқдор жиҳатдан ўзгармас бўлгани учун (11.23) га асосан I конуснинг оний бурчак тезланиши

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} \quad (4)$$

формула ёрдамида аниқланади. (4) да $\vec{\omega}_1$ билан OA оний ўқнинг OB ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги белгиланган. C нуқта тезлигини ω_1 орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$v_C = \omega_1 \cdot QC.$$

Бинобарин,

$$\omega_1 = \frac{v_C}{QC} = \frac{v_C}{r \sin 60^\circ} = 2,54 \text{ с}^{-1},$$

$\vec{\omega}_1$ вектори $\vec{v}_C$ нинг йўналишига мос равишда 11.11-расм, б дагидек вертикал пастига йўналади.

$$(4) \text{ га кўра } \epsilon = \omega_1 \cdot \omega \cdot \sin 2\alpha = 5,59 \text{ с}^{-2}$$

бўлиб, $\vec{\epsilon}$ вектори OAB учбурчак текислигига перпендикуляр равишда $\vec{v}_C$ га параллел йўналади.

(11.15) га асосан A нуқтанинг тезланиши $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_A^e + \vec{\omega}_A^{\omega}$ тенгликдан топилади.

$\vec{\omega}_A^e = \vec{\epsilon} \times \vec{OA}$ айланма тезланишни A нуқтага қўйилган ва $\vec{\epsilon}$, $\vec{OA}$ векторлар ётган текисликка перпендикуляр ҳамда $\vec{\epsilon}$ нинг йўналишига мос равишда йўналган вектор тарзида 11.11-расм, б дагидек тасвирлаш мумкин. $\vec{\omega}_A^{\omega}$ вектори OAB учбурчак текислигида ётади ва OA га перпендикуляр йўналади. (11.16) га кўра, у $\omega_A^e = \epsilon \cdot OA = \epsilon \cdot 2r = 2,24 \text{ м/с}$ га тенг.

A нуқта айланиш оний ўқида ётганлиги туфайли $h_{\omega} = 0$. (11.17) га биноан ўққа интилма тезланиш $\vec{\omega}_A^{\omega}$ нинг миқдори ҳам нолга тенг бўлади.

Шундай қилиб, A нуқтанинг тезланиши фақат айланма тезланишдан иборат бўлади: $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_A^e$, яъни $\omega_A = 2,24 \text{ м/с}^2$.

(11.15) га кўра B нуқтанинг тезланиши $\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_B^e + \vec{\omega}_B^{\omega}$ ифодадан топилади. $\vec{\omega}_B^e = \vec{\epsilon} \times \vec{OB}$ айланма тезланиш вектори B нуқтага қўйилади ҳамда $\vec{\epsilon}$ йўналишига мос равишда OB га перпендикуляр йўналади. Унинг миқдори $\omega_B^e = \epsilon \cdot OB = \epsilon \cdot 2r = 2,24 \text{ м/с}^2$ га тенг.

$\vec{\omega}_B^{\omega} = \omega \times \vec{v}_B$ ўққа интилма тезланиш вектори OA айланиш оний ўқига перпендикуляр равишда BK бўйлаб йўналади ҳамда $\omega_B^{\omega} = \omega^2 \cdot BK = \omega^2 \cdot 2r \cdot \sin 60^\circ = (2,54)^2 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 0,816 = 2,23 \text{ м/с}^2$.

$\vec{\omega}_B^e$ ва $\vec{\omega}_B^\omega$ ларни геометрик қўшиб, $\vec{\omega}_B$ ни $\vec{\omega}_B^e$ ва $\vec{\omega}_B^\omega$ ларга қурилган параллелограмм диагонаliga тенг вектор сифатида аниқлаймиз (11.11-расм, б). (11.18) га асосан эса у қуйидагига тенг бўлади:

$$\omega_B = \sqrt{(\omega_B^e)^2 + (\omega_B^\omega)^2 + 2\omega_B^e \cdot \omega_B^\omega \cdot \cos(\widehat{\omega_B^e, \omega_B^\omega})} = \\ = \sqrt{2,24^2 + 2,23^2 - 2 \cdot 2,24 \cdot 2,23 \cdot 0,5} = 2,24 \text{ м/с}^2.$$

11.3-масала. OA кривошипга эркин ўрнатилган ва O учидagi бурчаги 2α га тенг конуссимон тишли гилдирак I конуссимон тишли қўзғалмас асос II да думалайди. OA кривошипнинг OO_1 вертикал қўзғалмас ўқ атрофида айланиш бурчак тезлиги $\vec{\omega}_0$ ва бурчак тезланиши $\vec{\epsilon}_0$ бўлса (11.12-расм), думаловчи гилдиракнинг оний бурчак тезлик вектори ва оний бурчак тезланиш вектори топилсин.

Ечиш. OA кривошип OO_1 ўқ атрофида ω_0 бурчак тезлиги билан айланма ҳаракатда бўлгани учун A нуқтанинг тезлиги қуйидагича аниқланади:

$$v_A = \omega_0 \cdot OA. \quad (1)$$

$\vec{v}_A$ вектори OAC учбурчак текислигига тик равишда ўқувчи томонга йўналади. I гилдирак II гилдирак устида сирпанмай думалагани учун C нуқтанинг тезлиги $\vec{v}_C = 0$. O ва C нуқталарнинг тезликлари нолга тенг бўлгани туфайли OC ўқ I гилдирак учун айланиш оний ўқини ифодалайди. Шу сабабли гилдиракнинг оний бурчак тезлиги $\vec{\omega}$ OC бўлаб йўналади ҳамда A нуқтанинг тезлиги (11.5) формулага биноан топилади:

$$v_A = \omega \cdot AN = \omega \cdot OA \sin \alpha. \quad (2)$$

(1) ва (2) ни солиштириб, оний бурчак тезлиги учун

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sin \alpha}$$

мунсабатни оламиз. Шундай қилиб,

$$\vec{\omega} = \frac{\omega_0}{\sin \alpha} \vec{e}_1, \quad (3)$$

бунда $\vec{e}_1$ билан $\vec{OC}$ нинг бирлик вектори белгиланган.

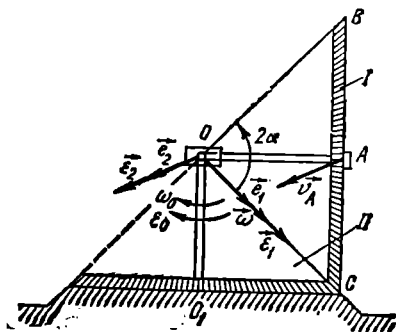
I гилдиракнинг оний бурчак тезланишини аниқлаш учун вақт ўтиши билан ω_0 ҳамда $\vec{e}_1$ нинг ўзгаришини эътиборга олиб, (3) дан вақт бўйича ҳссилла оламиз:

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_0}{dt} \frac{\vec{e}_1}{\sin \alpha} + \frac{\omega_0}{\sin \alpha} \frac{d\vec{e}_1}{dt}, \quad (4)$$

бунда

$$\frac{d\omega_0}{dt} = \epsilon_0$$

ҳамда (11.4) га кўра



11.12-расм.

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\omega}_0 \times \vec{e}_1. \quad (5)$$

(5) да $\frac{d\vec{e}_1}{dt}$ нинг модули

$$\left| \frac{d\vec{e}_1}{dt} \right| = \omega_0 \cdot e_1 \sin (90^\circ - \alpha) = \omega_0 \cos \alpha$$

бўлиб, $\frac{d\vec{e}_1}{dt}$ вектори расм текислигига перпендикуляр равишда ўқувчи томонга $\vec{e}_2$ бирлик вектор бўйлаб йўналади. Шу сабабли

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \omega_0 \cos \alpha \cdot \vec{e}_2 \quad (6)$$

деб ёзиш мумкин. Натижада (4) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\vec{e} = \frac{e_0}{\sin \alpha} \vec{e}_1 + \omega_0^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \vec{e}_2. \quad (7)$$

(7) ни (11.21) билан солиштирсак,

$$|\vec{e}_1| = \frac{e_0}{\sin \alpha}, \quad |\vec{e}_2| = \omega_0^2 \operatorname{ctg} \alpha$$

эканлигини кўрамыз.

Шундай қилиб, I гилдиракнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши, мос равишда, (3) ва (7) формулалар ёрдамида аниқланади.

11.8*-§. Эйлернинг кинематик тенгламалари

Агар жисм оний бурчак тезлигининг қўзғалувчи ёки қўзғалмас координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, (11.7) ва (11.8) формулалар ёрдамида жисм ихтиёрий нуқтаси тезлигининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш мумкин.

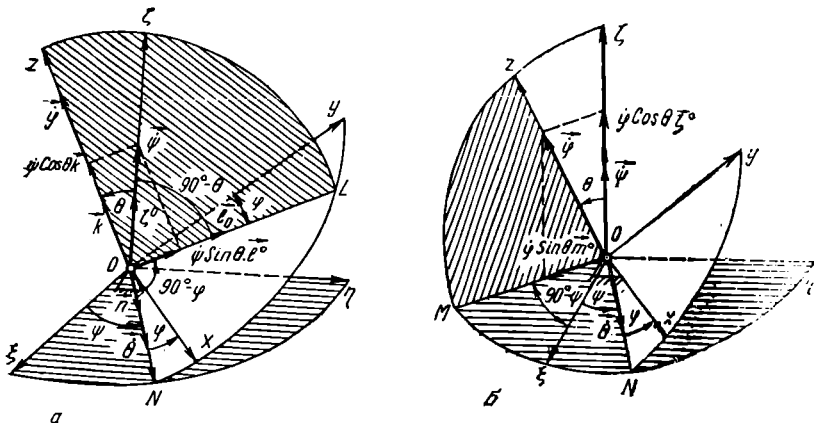
Жисм бурчак тезлигининг қўзғалувчи ва қўзғалмас координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш учун оний бурчак тезлик векторини $O\xi$, Oz , ON ўқлар бўйича йўналган ташкил этувчиларга ажратамиз:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\xi + \vec{\omega}_z + \vec{\omega}_N. \quad (11.25)$$

Агар $O\xi$, Oz , ON ўқларнинг бирлик йўнайтирувчи векторларини мос равишда $\vec{\xi}^0$, $\vec{k}$, $\vec{n}$ билан белгиласак (11.13-расм), (11.25) қуйидагича ёзилади.

$$\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{\xi}^0 + \omega_z \vec{k} + \omega_N \vec{n}. \quad (11.26)$$

11.1-§ да баён этилган Эйлер теоремасига кўра (11.26) даги ω_ξ , ω_z ва ω_N лар мос равишда ψ , φ ва θ бурчакларнинг вақт бирлиги ичида ўзгаришини ифодалайди:



11.13- расм.

$$\omega_z = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}, \quad \omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \omega_N = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.$$

Бинобарин, (11.26) ни

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{\zeta}_0 + \dot{\varphi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{n} = \dot{\psi} + \dot{\varphi} + \dot{\theta} \quad (11.27)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Аввал бурчак тезлик векторининг қўзғалувчи Ox , Oy , Oz ўқлардаги проекцияларини аниқлаймиз. Бунинг учун $Oz\zeta$ ва Oxy текисликларнинг кесишган чизигини OL билан белгилаймиз (11.13-

расм, а). $\vec{\psi}$ ни OL ва z ўқлар бўйича йўналган ташкил этувчиларга ажратамиз:

$$\vec{\psi} = \dot{\psi} \sin \theta \cdot \vec{l} + \dot{\psi} \cos \theta \vec{k}, \quad (11.28)$$

бунда $\vec{l}$ билан OL ўқнинг бирлик вектори белгиланган. (11.28) ни назарда тутиб, (11.27) нинг иккала томонини Ox , Oy , Oz ўқларга проекциялаймиз:

$$\omega_x = (\dot{\psi} \cos \theta) \cdot \cos 90^\circ + (\dot{\psi} \sin \theta) \cos (90^\circ - \varphi) + \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\varphi} \cos 90^\circ,$$

$$\omega_y = (\dot{\psi} \cos \theta) \cdot \cos 90^\circ + (\dot{\psi} \sin \theta) \cos \varphi + \dot{\theta} \cos (90^\circ + \varphi) + \dot{\varphi} \cos 90^\circ,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\theta} \cos 90^\circ + \dot{\varphi}.$$

ёки соддалаштирсак, қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (11.29)$$

(11.29) тенгламалар Эйлернинг кинематик тенгламалари дейилади. Агар Эйлер бурчаклари ψ , θ , φ лар вақтнинг функцияси сифатида маълум бўлса, Эйлернинг кинематик тенгламалари воситасида қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм оний бурчак тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари аниқланади.

Бу проекцияларни ҳисоблаб, оний бурчак тезлигининг миқдор ва йўналишларини

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}, \quad (11.30)$$

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{x}) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{y}) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{z}) = \frac{\omega_z}{\omega} \quad (11.31)$$

формулалар ёрдамида аниқлаймиз.

Худди шунга ўхшаш, оний бурчак тезлик векторининг қўзғалмас координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаш мумкин. $\vec{\psi}$ ва $\vec{\theta}$ векторларнинг $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ ўқларидаги проекциялари осонлик билан ҳисобланади. $\vec{\varphi}$ векторининг қўзғалмас ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаш учун бу векторни $O\zeta z$ ва $O\eta\xi$ текисликларнинг кесишган чизиги OM ҳамда $O\zeta$ ўқлари бўйлаб йўналган ташкил этувчиларга ажратамиз (11.13-расм, б):

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi} \sin\theta \cdot \vec{m}^0 + \dot{\varphi} \cos\theta \vec{\zeta}^0, \quad (11.32)$$

бунда $\vec{m}^0$ билан OM ўқнинг бирлик вектори белгиланган. (11.32) ни эътиборга олиб, (11.27) ни қўзғалмас ўқларга проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \\ \omega_\eta &= -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (11.33)$$

формулаларни оламиз.

(11.33) ни (11.29) билан солиштириб, оний бурчак тезлигининг модули

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta},$$

ҳар иккала ҳолда ҳам айнан бир хил қийматга эга бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Бурчак тезлик векторининг қўзғалмас ўқлар билан ташкил қилган бурчаклари (11.31) формулалар каби формулалар билан аниқланади.

(11.29) ва (11.33) дан кўрамызки, Эйлернинг кинематик тенгламаларни Эйлер бурчаклари ва уларнинг вақт бўйича ҳосилалари билан оний бурчак тезлик векторининг қўзғалуви ва қўзғалмас ўқларидаги проекциялари орасидаги боғланишларни ифодалайди.

11.4-масала. Қўзғалмас O нукта атрофида айланувчи жисмининг ҳаракати қуйидаги Эйлер бурчаклари орқали берилган:

$$\psi = \frac{\pi}{2} t, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \pi t.$$

Жисм оний бурчак тезлиги, айланиш оний ўқи ҳамда қўзғалувчи ва қўзғалмас аксонлар топилсин.

Ечиш. Эйлернинг кинематик формуллари (11.29) дан фойдаланиб бурчак тезлигининг қўзғалувчи координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаймиз:

$$\dot{\psi} = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = \pi. \quad (1)$$

(1) ни (11.29) га қўямиз:

$$\omega_x = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} \sin \pi t,$$

$$\omega_y = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} \cos \pi t,$$

$$\omega_z = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \pi.$$

Юқоридагиларни ихчамлаб қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$\omega_x = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi \sin \pi t, \quad \omega_y = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi \cos \pi t, \quad \omega_z = \frac{5}{4} \pi. \quad (2)$$

Бурчак тезлик векторининг қўзғалмас координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш учун (1) ни (11.33) га қўямиз:

$$\omega_\xi = \pi \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{2} t,$$

$$\omega_\eta = -\pi \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} t,$$

$$\omega_\zeta = \frac{\pi}{2} + \pi \cos \frac{\pi}{3}.$$

Бу тенгликларда $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ бўлишини эътиборга олсак, натижада ω_ξ , ω_η , ω_ζ лар учун ушбу муносабатларни оламиз:

$$\omega_\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \sin \frac{\pi}{2} t, \quad \omega_\eta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pi \cos \frac{\pi}{2} t, \quad \omega_\zeta = \pi. \quad (3)$$

У ҳолда бурчак тезлигининг миқдори қуйидагича ҳисобланади:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \pi \text{ c}^{-1}. \quad (4)$$

(4) дан кўрамизки, бурчак тезлигининг миқдори вақт ўгиши билан ўзгармас экан.

Бурчак тезлик векторининг қўзғалувчи ўқлар билан ташкил қилган бурчаклари (11.31) га кўра ҳисобланади:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{\omega}, \hat{x}) &= \frac{\omega_x}{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \pi \sin \pi t \approx 0,325 \sin \pi t, \\ \cos(\vec{\omega}, \hat{y}) &= \frac{\omega_y}{\omega} \approx 0,325 \cos \pi t, \\ \cos(\vec{\omega}, \hat{z}) &= \frac{\omega_z}{\omega} = 0,945 \text{ ёки } (\vec{\omega}, \hat{z}) = 19^\circ 6'. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Шунингдек, бурчак тезликнинг қўзғалмас ўқлар билан ташкил қилган бурчаклари

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vec{\omega}, \hat{\xi}) &= \frac{\omega_{\xi}}{\omega} = \sqrt{\frac{3}{7}} \sin \frac{\pi}{2} t \approx 0,65 \sin \frac{\pi}{2} t, \\ \cos(\vec{\omega}, \hat{\eta}) &= \frac{\omega_{\eta}}{\omega} = -\sqrt{\frac{3}{7}} \cos \frac{\pi}{2} t \approx -0,65 \cos \frac{\pi}{2} t, \\ (\vec{\omega}, \hat{\zeta}) &= \frac{\omega_{\zeta}}{\omega} = \frac{2}{\sqrt{7}} \approx 0,7559 \text{ ёки } (\vec{\omega}, \hat{\zeta}) = 40^\circ 54'. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

формулалар воситасида аниқланади. (5) ва (6) тенгликларнинг учинчисидан кўрамизки, оний бурчак тезлик вектори, яъни айланиш оний ўқининг Oz ҳамда $O\xi$ ўқлар билан ташкил қилган бурчаклари ҳаракат давомида ўзгармас экан.

Ҳосил бўлган натижаларни (11.27) дан билвосита фойдаланиш йўли билан ҳам олиш мумкин. Кўрилатган ҳолда $\dot{\theta} = 0$ бўлгани туфайли оний бурчак тезлик вектори $zO\xi$ текислигида ётади (11.14-расм) ҳамда (11.27) га кўра

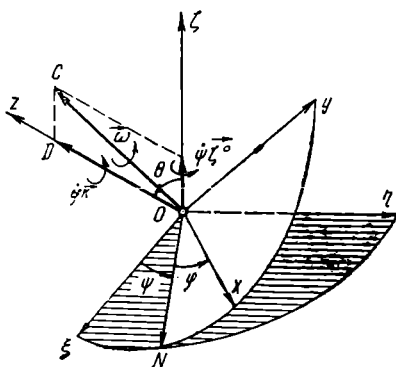
$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{\xi}^0 + \dot{\phi} \vec{k}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги икки вектор орасидаги бурчак $\theta = \frac{\pi}{3}$ бўлгани учун косинуслар теоремасига кўра ODC учбурчакдан

$$\omega = \sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{2} \pi \text{ с}^{-1}$$

келиб чиқади.

Синуслар теоремасига кўра ODC учбурчакдан оний бурчак тезликнинг йўналишини аниқлаймиз:



11.14- расм.

$$\frac{\omega}{\sin 120^\circ} = \frac{\dot{\psi}}{\sin(\vec{\omega}, \hat{z})} = \frac{\dot{\phi}}{\sin(\vec{\omega}, \hat{\xi})}.$$

Бу тенгликлардан

$$(\vec{\omega}, \hat{z}) = 19^\circ 6', \quad (\vec{\omega}, \hat{\xi}) = 40^\circ 54'.$$

(11.9) ва (11.10) га асосан, қўзғалувчи ва қўзғалмас координаталар системасига нисбатан айланиш оний ўқининг тенгламаси, мос равишда қуйидагича ёзилади:

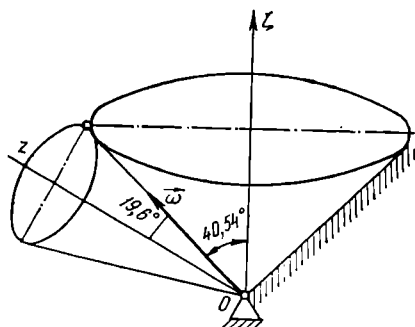
$$\frac{x}{\sqrt{3} \sin \pi t} = \frac{y}{\sqrt{3} \cos \pi t} = \frac{z}{5}, \quad (7)$$

$$\frac{2\xi}{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{2} t} = \frac{2\eta}{-\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} t} = \xi. \quad (8)$$

(7) ва (8) тенгламалардан вақт t ни йўқотиб, мос равишда қўзғалувчи ва қўзғалмас аксоидлар тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2 + y^2}{3} - \frac{z^2}{5} = 0,$$

$$\frac{4}{3} (\xi^2 + \eta^2) - \xi^2 = 0.$$



11.15- расм.

Бу тенгламалардан кўраимизки, қўзғалувчи ва қўзғалмас аксоидлар доиравий конус сиртлардан иборат бўлади (11.15-расм).

12-боб. ЭРКИН ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҲАРАКАТИ

12.1-§. Эркин жисм ҳаракатининг кинематик тенгламалари

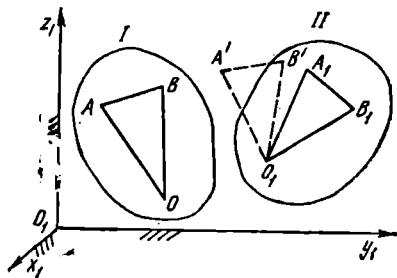
Эркин жисмнинг бирор $O_1x_1y_1z_1$ қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳолати унинг бир тўғри чизиқда ётмайдиган 3 та нуқтасининг ҳолати билан аниқланади. Бу нуқталарни ўзаро тўғри чизиқ кесмалари билан туташтирсак, учбурчак ҳосил бўлади. Жисмнинг ҳолатини аниқловчи мазкур учбурчакнинг ҳаракати қаттиқ жисмнинг фазодаги ҳаракатини батамом характерлайди.

Эркин жисмнинг кўчишига оид қуйидаги Шаль (1793 — 1880) теоремасини исботлаймиз.

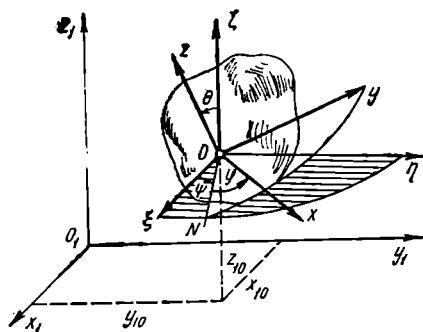
Теорема. *Эркин жисмнинг фазодаги ҳар қандай кўчишини қутб деб олинган нуқтанинг бир илгарилама кўчиши ва қутбдан ўтувчи ўқ атропоидаги бир айланма кўчишдан ташкил топган деб қараш мумкин.*

Исбот. Эркин жисмнинг t_1 пайтдаги I ҳолати OAB учбурчак ҳолати билан аниқлансин; t_2 пайтдаги II ҳолатда эса мазкур учбурчак $O_1A_1B_1$ учбурчак ҳолатини олган бўлсин (12.1-расм). Жисмнинг I ҳолатдан II ҳолатга ўтишини қуйидагича бажариш мумкин. Аввало жисмга шундай илгарилама кўчиш берамизки, унинг O нуқтаси O_1 билан устма-уст тушсин, у ҳолда A, B нуқталар A', B' ҳолатни эгаллайди.

Сўнгра Эйлер-Даламбер теоремасига кўра O_1 нуқтадан ўтувчи бирор ўқ атропоида бир айлантисак, жисм иккинчи ҳолатни эгаллайди. ■



12.1- расм.



12.2- расм.

Албатта, жисмнинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга кўчишини бундай икки ҳаракат йиғиндисидан иборат деб қараш унинг ҳақиқий ҳаракатини тасвирламайди.

Эркин жисмнинг ҳақиқий ҳаракати давомида бу икки ҳаракат бир вақтнинг ўзида содир бўлади.

Шу сабабли эркин қаттиқ жисмнинг ҳақиқий ҳаракатини қуйидагича тасвирлаш мумкин: эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини жисмда қутб учун танлак олинган нуқта билан биргаликда

даги илгарилар ҳаракат ҳамда қутб атрофидаги айланма ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин. Шу жумладан, қутб атрофидаги ҳаракатни мазкур нуқтадан ўтувчи оний ўқлар атрофидаги кетма-кет узлуксиз чексиз кичик айланишлардан ташкил топган деб тасаввур қилиш мумкин.

Жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун унинг бирор O нуқтасини қутб учун танлаб оламиз ҳамда қутб орқали $O_1x_1y_1z_1$ қўзғалмас координаталар системасига ҳамisha параллел равишда ҳаракатланувчи $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасини ва жисмга маҳкам бириктирилган $Oxyz$ координаталар системасини ўтказамиз (12.2-расм).

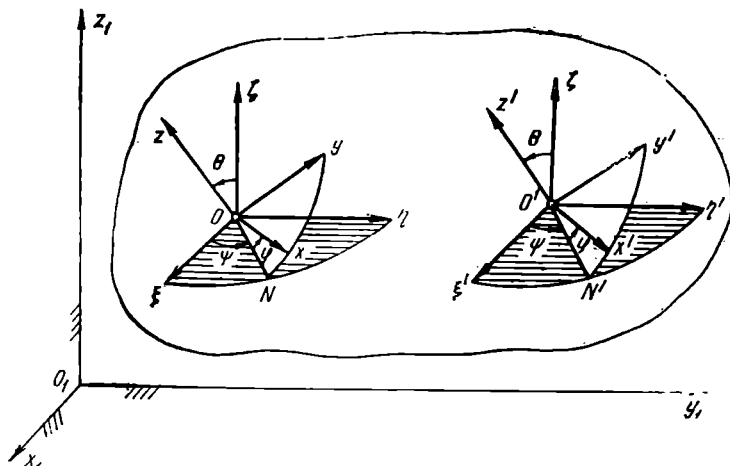
Қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасининг қўзғалмас $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатини ўрганиш эркин жисмнинг $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатини ўрганишга эквивалентдир. $Oxyz$ қўзғалувчи координаталар системасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан исталган пайт, даги ҳолатини аниқлаш учун O қутбнинг координаталари x_{10}, y_{10}, z_{10} ни вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш керак. 11.1-§ да кўрганimizдек, $Oxyz$ координаталар системасининг $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳолати маълум бўлиши учун учта Эйлер бурчаклари ψ, θ, φ ни вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш керак. Бинобарин, эркин қаттиқ жисмнинг қўзғалмас $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системасига нисбатан ҳолати олти та: $x_{10}, y_{10}, z_{10}, \varphi, \psi, \theta$ координаталар билан аниқланади;

Эркин қаттиқ жисм фазода ҳаракатланганда мазкур координаталар бир қийматли, узлуксиз ва камида вақт бўйича иккинчи ҳосиласи мавжуд функциялардан иборат бўлади, яъни:

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= f_1(t), \quad y_{10} = f_2(t), \quad z_{10} = f_3(t), \\ \varphi &= f_4(t), \quad \theta = f_5(t), \quad \psi = f_6(t). \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Бу тенгламалар эркин қаттиқ жисмнинг исталган пайтдаги ҳолатини аниқлайди ва *эркин қаттиқ жисм умумий ҳаракатининг кинематик тенгламалари* дейилади.

(12.1) тенгламаларнинг биринчи учтаси воситасида жисмнинг илгарилар ҳаракати аниқланади. Жисм турли нуқталарининг координаталари



12.3- расм.

наталари турлича бўлгани туфайли бу тенгламалар қутбнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлади.

(12.1) тенгламаларнинг қолган учтаси эркин қаттиқ жисмнинг ҳар ондаги сферик ҳаракатини ифодалайди ва қутбнинг танланишига боғлиқ бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам жисмнинг O ва O' нуқталарида ўзаро параллел бўлган $Oxyz$ ҳамда $O'x'y'z'$ координаталар системасини ўтказсак, бу координаталар системасининг мос ўқлари жисм ҳаракати давомида бир-бирига параллеллигича қолади; O ва O' нуқталардаги Эйлер бурчаклари бир хил бўлади (12.3-расм).

Эркин қаттиқ жисмнинг бурчак тезлиги деганда унинг бирор нуқтасида олинган ва жисм билан биргаликда илгарилема ҳаракат қилувчи координаталар системасига нисбатан ҳисобланган бурчак тезлик тушунилади.

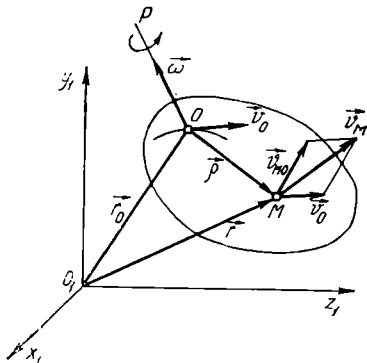
Эркин қаттиқ жисмнинг бурчак тезланиши тушунчаси ҳам худди шу усулда киртилади.

Эркин қаттиқ жисмнинг қутб атрофидаги ҳаракати қутбнинг танланишига боғлиқ бўлмагани учун эркин қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатидаги бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши ҳам қутбнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмайди, яъни O ёки O' нуқталарни қутб учун танлаб олсак, у ҳолда эркин қаттиқ жисмнинг мазкур қутблар атрофидаги айланма ҳаракат бурчак тезликлари $\vec{\omega}$ ва $\vec{\omega}'$, шунингдек, $\vec{\epsilon}$ ва $\vec{\epsilon}'$ бурчак тезланишлари мос равишда тенг бўлади.

12.2-§. Эркин жисм нуқтасининг тезлиги

Эркин қаттиқ жисм иккита нуқтасининг тезликлари орасидаги муносабатни ифодаловчи формулани келтириб чиқарамиз.

Агар эркин жисм бирор O нуқтасининг тезлиги маълум бўлса, шу нуқтани қутб учун қабул қиламиз. Қутбнинг қўзғалмас $O_1x_1y_1z_1$



12.4- расм.

координаталар системасига нисбатан радиус-векторини $\vec{r}_0$, жисм ихтиёрий M нуқтасининг мазкур координаталар системасига нисбатан радиус-векторини $\vec{r}$ ҳамда M нуқтанинг O қутбга нисбатан радиус-векторини $\vec{\rho}$ билан белгиласак (12.4-расм), эркин жисм ҳаракати давомида ҳаминша

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho} \quad (12.2)$$

муносабат ўринли бўлади. Жисмининг O ва M нуқталари орасидаги

масофа ўзгармасдан қолгани туфайли $\rho = \text{const}$ бўлади, яъни $\vec{\rho}$ вектори миқдор жиҳатдан ўзгармас бўлиб, ҳаракат давомида унинг фақат йўналиши ўзгаради.

M нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун (12.2) векторли тенгликдан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \quad (12.3)$$

бунда $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_M$ — M нуқтанинг тезлиги, $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_O$ — O қутбнинг тезлиги.

Эркин қаттиқ жисм ҳаракати давомида $\vec{\rho}$ векторнинг миқдори ўзгармай, фақат йўналиши ўзгаргани учун $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ ҳосила M нуқтанинг O қутб атрофидаги сферик ҳаракат тезлигини ёки O қутбдан ўтувчи айланиш оний ўқи атрофидаги айланма ҳаракат тезлиги $\vec{v}_{MO}$ ни ифодалайди. (11.4) га биноан

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{MO}. \quad (12.4)$$

Натижада (12.3) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (12.5)$$

ёки

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}. \quad (12.6)$$

Шундай қилиб, эркин қаттиқ жисм ихтиёрий M нуқтасининг тезлиги қутбнинг тезлигига тенг бўлган илгарилама ҳаракат тезлиги билан жисмнинг шу қутбдан ўтувчи айланиш оний ўқи атрофида айланишидаги мазкур нуқта тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг.

Текис параллел ҳаракатдаги каби (12.5) формуладан бевосита келиб чиқадиган ҳамда алоҳида аҳамиятга эга бўлган қуйидаги натижаларни келтирамиз:

1. Агар берилган онда эркин жисмнинг бурчак тезлиги нолга тенг бўлса, у ҳолда жисм барча нуқталарининг тезликлари тенг ва жисм шу онда илгариларга ҳаракатда бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\vec{\omega} = 0$ бўлса, (12.5) га кўра $\vec{v}_O = \vec{v}_M$ бўлади. M жисмнинг ихтиёрий нуқтаси бўлгани учун жисм барча нуқталарининг тезлиги қутбнинг тезлигига тенг бўлади.

2. Эркин жисм иккита нуқтаси тезликларининг шу нуқталардан ўтувчи ўқдаги проекциялари ўзаро тенг бўлади.

Ҳақиқатан ҳам (12.5) ни O ва M нуқталар орқали ўтувчи OM ўққа проекцияласак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$n_{p_{OM}}(\vec{v}_O) = n_{p_{OM}}(\vec{v}_M) + n_{p_{OM}}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}).$$

Аммо $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ вектори M нуқтанинг O нуқтага нисбатан радиус-вектори $\vec{\rho}$ га ёки OM ўққа перпендикуляр бўлгани учун унинг мазкур ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлади. Оқибатда

$$n_{p_{OM}}\vec{v}_O = n_{p_{OM}}\vec{v}_M$$

тенглик ўринли бўлади.

12.3-§. Эркин жисм нуқтасининг тезланиши

Эркин жисм ҳаракатининг умумий ҳолида унинг бирор M нуқтаси тезланишини аниқлаш учун мазкур нуқтанинг тезлигини ифодаловчи (12.5) формуладан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (12.7)$$

Бунда

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{w}_M, \quad \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \vec{w}_O, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}, \quad \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

бўлгани туфайли (12.7) ни

$$\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{\epsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \quad (12.8)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (12.4) ни эътиборга олсак, (12.8) ифода

$$\vec{w}_M = \vec{w}_O + \vec{\epsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{MO} \quad (12.8 \text{ а})$$

кўринишни олади.

Эркин қаттиқ жисмнинг тезланиши учун чиқарилган (12.8) ифодани (11.12) билан солиштирсак, $\vec{\epsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ йиғинди M нуқта тезланишининг жисм O қутб атрофида оний айланма ҳаракат-

да бўлгандаги ташкил этувчисини ифодалашини кўрамиз. Тезланишнинг бу ташкил этувчисини $\vec{\omega}_{MO}$ билан белгиласак,

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{MO}. \quad (12.9)$$

(12.9) дан кўрамизки, умумий ҳолда эркин қаттиқ жисм ихтиёрий M нуқтасининг тезланиши O қутбнинг тезланишига тенг бўлган илгарилама ҳаракат тезланиши билан жисмнинг O қутб атрофида айланишида M нуқта олган тезланишларининг геометрик йиндисига тенг.

13-боб. НУҚТАНИНГ МУРАКҚАБ ҲАРАКАТИ

«Фанда кенг, тўппа-тўғри йўл йўқ ва унинг чақир тошли сўқмоқларидан ҳорши би, май, тиришиб-тирмашиб чиқа олган кишигина унинг нузли чўққиларига етишади».

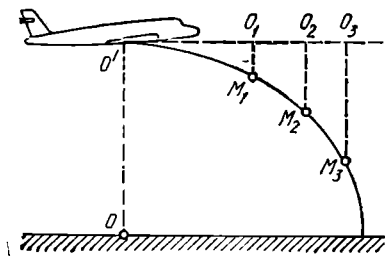
К. Маркс

13.1-§. Нуқтанинг нисбий, кўчирма ва абсолют ҳаракатлари

Шу пайтгача нуқтанинг ҳаракатини қўзғалмас координаталар системасига нисбатан текшириш билан шуғулландик. Лекин механика масалаларини ечишда кўпинча нуқтанинг ҳаракатини бир вақтнинг ўзида иккита координаталар системасига нисбатан текшириш мақсадга мувофиқ бўлади. Бу ҳолда координата системаларидан бирини қўзғалмас деб қабул қиламиз ва уни асосий координаталар системаси деб атаймиз.

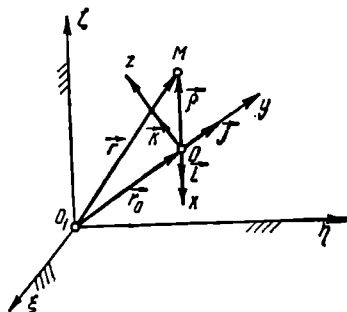
Масалан, ўзгармас тезлик билан тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланаётган самолётдан бошланғич тезликсиз ташланган юкнинг ҳаракатини Ер билан боғланган асосий координаталар системасига ҳамда самолётга бириктирилган координаталар системасига нисбатан текшириш мумкин. Бунда ҳар бир координаталар системасига нисбатан нуқтанинг траекторияси турлича бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинмаса, самолётда ўтирган кузатувчига нисбатан юк тўғри чизиқли ҳаракат қилаётгандек туюлади. Ҳақиқатан ҳам самолётдаги кузатувчи O_1, O_2, O_3 ҳолатларни эгаллаганда юк мазкур нуқталар билан бир вертикал тўғри чизиқларда ётувчи M_1, M_2, M_3 ҳолатларни эгаллайди; Ерда турган кузатувчи эса, самолётдан ташланган юкнинг парабола бўйлаб ҳаракатланаётганлигининг шоҳиди бўлади (13.1-расм).

M нуқта бирор $Ox\eta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатлансин. Ўз навбатида бу координаталар системаси қўзғалмас деб олинадиган $O_1\xi\eta$ асосий координаталар системасига нисбатан ҳа-



13.1- расм.

ракатлансин (13.2-расм). Одатда ҳар иккала координаталар системаси ҳам маълум жисмларга бириктирилган деб қаралади. Аксарият ҳолларда қўзғалмас координаталар системаси Ерга боғлаб олинади. Қўзғалувчи координаталар системаси эса машина ва механизм қисмлари, кема, самолёт, поезд каби ҳаракатдаги объектлар билан боғланган деб қаралади.



13.2- расм.

Нуқтанинг қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан ҳаракати нисбий ҳаракат дейилади.

М нуқтанинг қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан радиус-векторини $\vec{r}$, координаталарини x, y, z ҳамда қўзғалувчи координата ўқларининг бирлик йўналтирувчи векторларини мос равишда $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ билан белгиласак,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (13.1)$$

муносабат ўринли бўлади.

М нуқтанинг нисбий ҳаракат тенгламаларини Декарт координата ўқларидаги ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Нуқтанинг нисбий ҳаракати қўзғалувчи координаталар системаси билан биргаликда ҳаракатланувчи кузатувчи томонидан қайд қилинади. Нуқтанинг қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан траекторияси *нисбий траектория* дейилади. Нуқтанинг бундай ҳаракатдаги тезлик ва тезланиши мос равишда *нисбий тезлик* ва *нисбий тезланиш* дейилади ҳамда $\vec{v}$, ва $\vec{w}$, билан белгиланади.

Қўзғалувчи координаталар системасининг ва у билан ўзгармас равишда боғланган фазо нуқталарининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати кўчирма ҳаракат дейилади. Кўчирма ҳаракат тушунчаси нисбий ҳаракатдаги нуқтага ҳам тааллуқли бўлиши мумкин.

Бундай *нуқтанинг* бирор ондаги *кўчирма ҳаракати* деганда худди шу онда қўзғалувчи координаталар системасининг берилган нуқта билан устма-уст тушувчи нуқтасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати тушунилади.

Нуқтанинг берилган ондаги кўчирма ҳаракатини талқин қилиш учун нуқтанинг шу ондаги нисбий ҳаракатини фикран эътиборга олмай, уни қўзғалувчи координаталар системаси билан биргаликда қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати қаралади.

Шу сабабли *нуқтанинг* берилган ондаги *кўчирма тезлиги* ва *кўчирма тезланиши* деганда худди шу онда қўзғалувчи координата

талар системасининг берилган нуқта билан устма-уст тушувчи нуқтасининг тезлиги ва тезланиши тушунилади. Кўчирма тезлик $\vec{v}_o$, кўчирма тезланиш $\vec{w}_o$ билан белгиланади.

Қўзғалувчи координаталар системасининг турли нуқталари ҳар хил траектория бўйлаб ҳаракатлангани туфайли умумий ҳолда M нуқтанинг кўчирма ҳаракат траекторияси тушунчасини киритиш мумкин эмас.

Нуқтанинг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати *абсолют ҳаракат* дейилади. Нуқта бир вақтнинг ўзида икки ёки ундан ортиқ ҳаракатда иштирок этса, бундай ҳаракат *мураккаб ҳаракат* дейилади. Нуқтанинг абсолют ҳаракати ўз навбатида нисбий ва кўчирма ҳаракатлардан ташкил топгани туфайли нуқтанинг абсолют ҳаракатини мураккаб ҳаракат деб аташ мумкин.

Абсолют ҳаракатдаги нуқтанинг тезлик ва тезланиши мос равишда *абсолют тезлик* ва *абсолют тезланиши* дейилади. Абсолют тезликни $\vec{v}_a$, абсолют тезланишни $\vec{w}_a$ билан белгилаймиз.

Нуқтанинг нисбий ва кўчирма ҳаракатини билган ҳолда унинг абсолют ҳаракатини, бинобарин, абсолют ҳаракат тезлиги ва тезланишини аниқлаш нуқта мураккаб ҳаракати кинематикасининг асосий масаласи ҳисобланади.

13.2-§. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезликларини қўшиш ҳақидаги теорема

Қўзғалувчи *Охуз* координаталар системаси $O_1\xi\eta\zeta$ асосий координаталар системасига нисбатан ихтиёрий равишда ҳаракатлансин (13.2-расм). Юқорида кўрганимиздек, M нуқтанинг ҳаракатини қўзғалувчи ва асосий координата системаларининг ҳар бирига нисбатан аниқлаш мумкин. Бу параграфда нуқтанинг танланган координата системаларига нисбатан тезликлари орасидаги муносабатни аниқлаймиз.

Агар M ва O нуқталарнинг қўзғалмас координата системасига нисбатан радиус-векторларини мос равишда $\vec{r}$ ва $\vec{r}_o$ билан белгиласак, расмдан

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\rho} \quad (13.3)$$

муносабат ўринли бўлишини кўрамиз.

(13.1) ни назарда тутиб, (13.3) ни

$$\vec{r} = \vec{r}_o + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (13.4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар M нуқтанинг нисбий ва кўчирма ҳаракати маълум бўлса, яъни мазкур нуқтанинг нисбий координаталари x , y , z ва қўзғалувчи координаталар системаси бошининг радиус-вектори $\vec{r}_o$ вақтнинг функцияси сифатида ҳамда $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ларнинг вақт ўтиши билан

йўналиш жиҳатдан ўзгариш қонунини берилган бўлса, нуқтанинг асосий координаталар системасига нисбатан ҳаракати ҳам берилган деб ҳисоблаш мумкин.

M нуқтанинг абсолют тезлигини аниқлаш учун (13.4) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (13.5)$$

Бу тенгликда $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_a$ — M нуқтанинг абсолют тезлигини, $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_o$ эса қўзғалувчи координаталар системаси бошидаги O нуқтанинг тезлигини ифодалайди.

(13.5) да қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\vec{v}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad (13.6)$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_o + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (13.7)$$

(13.6) дан кўриниб турибдики, тезликнинг $\vec{v}_r$ ташкил этувчисини ҳисоблашда нуқтанинг фақат нисбий координаталаринини ўзгартириб, $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторлар ўзгармас деб қаралади. Шу сабабли $\vec{v}_r$ нуқтанинг нисбий тезлигини ифодалайди.

(13.7) да x, y, z қатнашмайди, яъни $\vec{v}_e$ ни ҳисоблашда нуқтанинг нисбий ҳаракати эътиборга олинмайди. Шу сабабли $\vec{v}_e$ M нуқтанинг кўчирма тезлигини ифодалайди.

Шундай қилиб, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \quad (13.8)$$

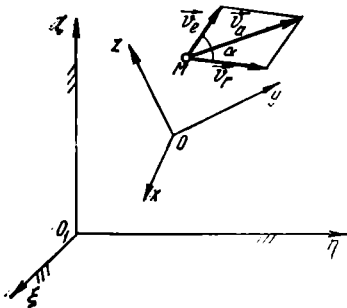
(13.8) тенглама *мираккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезликларини қўйиш ҳақидаги теоремани* ифодалайди; нуқтанинг абсолют тезлиги мазкур нуқта нисбий ва кўчирма тезликларининг *геометрик йиғиндисига тенг*.

Шундай қилиб, нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезликлари миқдор ва йўналиш жиҳатдан маълум бўлса, абсолют тезликнинг модули нисбий ва кўчирма тезликларга қурилган параллелограммнинг диагонали билан ифодаланади. Шу сабабли бу теоремага *тезликларнинг параллелограмм қондаси* дейилади.

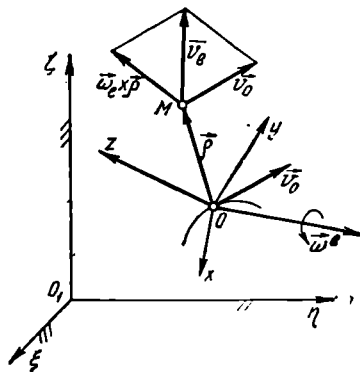
Абсолют тезликнинг модули косинуслар теоремасидан фойдаланиб аниқланади (13.3-расм).

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos \alpha}, \quad (13.9)$$

бу ерда $\alpha = \widehat{\vec{v}_r, \vec{v}_e}$ билан нисбий ва кўчирма тезлик векторлари орасидаги бурчак белгиланган.



13.3- расм.



13.4- расм.

Хусусан нисбий ва кўчирма тезлик векторлари ўзаро перпендикуляр бўлса, яъни $\alpha = 90^\circ$ бўлган ҳолда тезликларга қурилган параллелограмм тўғри тўртбурчакдан иборат бўлади. Шу сабабли бу ҳолда

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}. \quad (13.10)$$

Агар нуқтанинг нисбий ва кўчирма гезликлари бир тўғри чизиқ бўйлаб бир томонга йўналса,

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e} = v_r + v_e, \quad (13.11)$$

қарама-қарши томонга йўналса,

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e} = |v_r - v_e| \quad (13.12)$$

мунсabatлар ўринли бўлади.

Нуқтанинг кўчирма тезлигини аниқлаш устида батафсил тўхталамиз. Агар қўзғалувчи координаталар системасининг берилган ондаги бурчак тезлиги $\vec{\omega}_e$ маълум бўлса, у ҳолда $\frac{d\vec{i}}{dt}$, $\frac{d\vec{j}}{dt}$, $\frac{d\vec{k}}{dt}$ катталикларни мос равишда $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ бирлик векторларнинг учларидаги нуқталарнинг тезлигига тенг деб қараш мумкин. Шу сабабли Эйлер формуласига кўра ушбу

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k} \quad (13.13)$$

тенглиklar ўринли бўлади.

(13.13) ни (13.7) га қўйиб, (13.1) ни эътиборга олсак,

$$\vec{v}_e = \vec{v}_o + \vec{\omega}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{v}_o + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho} \quad (13.14)$$

формула ўринли бўлади (13.4-расм).

(13.14) ва (12.5) тенгликларни солиштириб, (13.14) берилган онда M нуқта $Oxuz$ координаталар системасида эгаллаган ҳолати билан устма-уст тушувчи нуқтанинг тезлигини ифодалашини кўрамиз.

Қуйидаги ҳолларда нуқтанинг кўчирма тезлигини ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

1. Агар кўчирма ҳаракат илгарилама ҳаракатдан иборат бўлса, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ бирлик векторлар ўзига параллел равишда кўчади. Бу ҳолда $\vec{\omega}_e = 0$ бўлиб, (13.14) га кўра кўчирма тезлик учун ушбу муносабат ўринли бўлади:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_O.$$

2. Агар M нуқтанинг ҳаракати давомида қўзғалувчи координаталар системасининг боши қўзғалмасдан қолса, $\vec{v}_O = 0$ бўлиб, (13.14) га кўра M нуқтанинг кўчирма ҳаракат тезлиги худди сферик ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезлиги каби аниқланади:

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}.$$

13.3-§. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезланишларини қўшиш ҳақидаги Кориолис теоремаси

M нуқтанинг абсолют тезланиши $\vec{\omega}_a$ мазкур нуқтанинг абсолют тезлиги $\vec{v}_a$ дан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг бўлади:

$$\vec{\omega}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}.$$

(13.5) дан вақт бўйича ҳосила олсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_a = \frac{d^2 \vec{r}_O}{dt^2} + \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k} + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} + \\ + 2 \left(\dot{x} \frac{d \vec{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d \vec{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d \vec{k}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (13.15)$$

(13.15) да қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\vec{\omega}_r = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}, \quad (13.16)$$

$$\vec{\omega}_e = \frac{d^2 \vec{r}_O}{dt^2} + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2}, \quad (13.17)$$

$$\vec{\omega}_k = 2 \left(\dot{x} \frac{d \vec{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d \vec{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d \vec{k}}{dt} \right). \quad (13.18)$$

(13.16) дан кўриниб турибдики, тезланишнинг $\vec{\omega}_r$ ташкил этувчиси $\vec{r}_O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ларнинг ҳосилаларига боғлиқ эмаю. $\vec{\omega}_r$ ни ҳисоб-

лашда $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ лар ўзгармас, фақат x, y, z ларгина вақтнинг функцияси сифатида ўзгаради деб қаралади. Шу сабабли $\vec{\omega}_r$ *нуқтанинг нисбий тезланишини* ифодалайди. Нуқтанинг нисбий тезланишини ҳисоблашда қўзғалувчи координаталар системасининг ҳаракати эътиборга олинмайди.

(13.17) да $\vec{\omega}_e$ ни ҳисоблашда M нуқта нисбий координаталарининг ўзгариши эътиборга олинмайди, яъни берилган онда

$$x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$$

деб қаралади. Бошқача айтганда $\vec{\omega}_e$ ни ҳисоблашда берилган онда нуқтани қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан тинч ҳолатда деб қараб, унинг қўзғалувчи координаталар системаси билан биргаликда ҳаракатлангандаги тезланиши назарда тутилади. Шу сабабли $\vec{\omega}_e$ *нуқтанинг кўчирма тезланишини* ифодалайди.

(13.18) дан кўрамизки, тезланишнинг $\vec{\omega}_k$ ташкил этувчиси таркибига нуқта нисбий координаталарининг ҳосилалари x, y, z билан бир қаторда қўзғалувчи координаталар системасининг бирлик векторларидан олинган ҳосилалар $\frac{d\vec{i}}{dt}, \frac{d\vec{j}}{dt}, \frac{d\vec{k}}{dt}$ ҳам қатнашади. Шу

нуқтаи назардан қараганда $\vec{\omega}_k$ ни нисбий тезланиш таркибига ҳам, кўчирма тезланиш таркибига ҳам киритиб бўлмайди. $\vec{\omega}_k$ *Кориолис тезланиши* ёки қўшимча тезланиш дейилади.

Шундай қилиб, нуқтанинг абсолют тезланиши учун қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_k. \quad (13.19)$$

(13.19) тенглик мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезланишларини қўйиш ҳақидаги Γ *Кориолис* (1792—1843) *теоремасини* ифодалайди: *мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг абсолют тезланиши унинг нисбий, кўчирма ва Кориолис (ёки қўшимча) тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Агар кўчирма ҳаракат илгарилама ҳаракатдан иборат бўлса, у ҳолда қўзғалувчи координаталар системасининг $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ бирлик векторлари ҳаракат давомида ҳаммisha ўзига параллел равишда кўчади. (13.17) ва (13.18) да $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторлардан вақт бўйича олинган биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар нолга тенг бўлиб,

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0, \vec{\omega}_k = 0$$

муносабатлар ўринли бўлади. Бинобарин, кўрилатган ҳол учун (13.19) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e. \quad (13.20)$$

(13.20) тенглик кўчирма ҳаракати илгарилама ҳаракатдан иборат бўлган нуқтанинг тезланишларини қўйиши ҳақидаги теоремани ифодалайди: кўчирма ҳаракати илгарилама ҳаракатдан иборат бўлган нуқтанинг абсолют тезланиши унинг нисбий ва кўчирма тезланишлари геометрик йиғиндисига тенг.

Агар нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезланишлари миқдор ва йўналиш жihatдан маълум бўлса, у ҳолда абсолют тезланишнинг модули нисбий ва кўчирма тезланишларга қурилган параллелограммининг диагоналига тенг бўлади:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_r\omega_e\cos(\vec{\omega}_r, \vec{\omega}_e)}. \quad (13.21)$$

Шу сабабли (13.20) тенглик тезланишларнинг параллелограмм қоидаси дейилади.

13.4-§. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишлари

Нуқтанинг нисбий тезланишини бевосита (13.16) формула ёрдамида ёки қўзғалувчи координаталар системасини фикран қўзғалмас деб қараб, 8.5-§ да чиқарилган формулалар ёрдамида аниқлаш мумкин.

Нуқтанинг кўчирма тезланиши (13.17) дан фойдаланиб ҳисобланади. Бу формулада $\frac{d^2\vec{r}_O}{dt^2} = \vec{\omega}_0$ қўзғалувчи *Oxyz* координаталар системаси бошининг тезланишини ифодалайди. (13.13) ни эътиборга олиб (13.17) ҳадларни қуйидагича ўзгартириш мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_e \times \vec{i}) = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{i} + \vec{\omega}_e \times \\ &\times \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{e}_e \times \vec{i} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{i}), \end{aligned}$$

бу тенгликда $\vec{e}_e = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt}$ билан берилган ондаги кўчирма ҳаракат бурчак тезланиши белгиланган. Худди шу сингари $\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}$, $\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}$ ларни ҳисоблаш мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} &= \vec{e}_e \times \vec{j} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{j}), \\ \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} &= \vec{e}_e \times \vec{k} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{k}). \end{aligned}$$

Натижада

$$x \frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} = \vec{e}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + \vec{\omega}_e \times$$

$$\times [\vec{\omega}_e \times (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})] = \vec{\epsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho})$$

тенгликни оламиз.

Шундай қилиб, кўчирма тезланиш учун қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0 + \vec{\epsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}). \quad (13.22)$$

(13.22) ва (12.8) тенгликларни солиштириб, (13.22) тенглик Охуз координаталар системасининг берилган онда M нуқта эгаллаган ҳолати билан устма-уст тушувчи нуқтасининг тезланишини ифодалашини кўрамиз.

Бинобарин, кўчирма ҳаракат тезланиши $\vec{\omega}_e$ қўзғалувчи координаталар системасининг бошидаги O нуқтанинг тезланиши $\vec{\omega}_0$ ҳамда айланма тезланиш $\vec{\omega}_e^e = \vec{\epsilon}_e \times \vec{\rho}$ билан ўққа интилма тезланиш $\vec{\omega}_e^o = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho})$ нинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади, яъни (13.5-расм):

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_e^e + \vec{\omega}_e^o. \quad (13.23)$$

(13.13) ни назарда тутиб, Кориолис тезланишини ифодаловчи (13.18) тенгликни қуйидагича ёза оламиз:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_k &= 2 [\dot{x} (\vec{\omega}_e \times \vec{i}) + y (\vec{\omega}_e \times \vec{j}) + \dot{z} (\vec{\omega}_e \times \vec{k})] = \\ &= 2 [\vec{\omega}_e \times (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})]. \end{aligned}$$

Кориолис тезланишини ифодаловчи бу ифода (13.6) га кўра қуйидаги кўринишни олади:

$$\vec{\omega}_k = 2 (\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r). \quad (13.24)$$

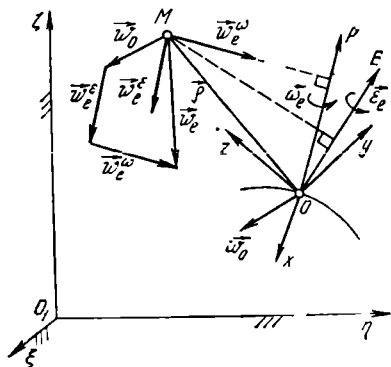
Демак, мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг Кориолис тезланиши қўзғалувчи Охуз координаталар системасининг берилган ондаги бурчак тезлиги билан нуқтанинг нисбий тезлиги векторли кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

Кориолис тезланишининг модули (13.24) тенгликка биноан

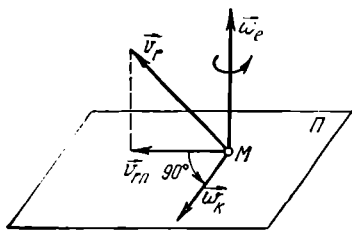
$$\omega_k = 2 \omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}) \quad (13.25)$$

формула билан аниқланади.

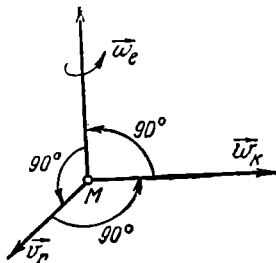
$\vec{\omega}_e$ векторни ўзига параллел гарзда фикран M нуқтага кўчирганда $\vec{\omega}_k$ Кориолис тезланиши вектори $\vec{\omega}_e$ ва $\vec{v}_r$ векторлари ётган текисликка перпендикуляр равишда шундай йўналадики, унинг муо



13.5- расм.



13.6- расм.



13.7- расм.

бат учидан қараганда $\vec{\omega}_e$ ни кичик бурчакка буриб $\vec{v}_r$ устига тушириш соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда бўлиши керак.

$\vec{\omega}_k$ нинг йўналишини аниқлашда қўйидаги Жуковский қондасидан ҳам фойдаланиш мумкин: Кориолис тезланишининг йўналишини аниқлаш учун M нуқтанинг нисбий тезлиги $\vec{v}_r$ нинг берилган ондаги кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги $\vec{\omega}_e$ га перпендикуляр Π текисликдаги проекцияси $\vec{v}_{r\Pi}$ нп мазкур текисликда кўчирма ҳаракат йўналишида 90° бурчакка буриш керак (13.6- расм).

Хусусан, $\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$ бўлса, Кориолис тезланишининг йўналишини аниқлаш учун v_r ни ω_e атрофида кўчирма ҳаракат айланиши йўналишида 90° бурчакка буриш кифоя (13.7- расм).

Қўйидаги хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. Қўзғалувчи *Охуз* координаталар системаси илгарилама ҳаракатда (яъни $\omega_e = 0$ бўлса), (13.24) га биноан $\omega_k = 0$ бўлади.

2. Берилган онда нуқтанинг нисбий тезлиги нолга тенг бўлса, (13.24) га асосан $\omega_k = 0$ бўлади.

3. Берилган онда нисбий ҳаракат тезлиги кўчирма ҳаракат бурчак тезлигига параллел (яъни $\widehat{\omega_e, v_r} = 0^\circ$ ёки $\widehat{\omega_e, v_r} = 180^\circ$) бўлса, шу онда $\sin(\widehat{\omega_e, v_r}) = 0$ бўлгани учун (13.25) га биноан $\omega_k = 0$ бўлади.

13.5- §. Нуқтанинг мураккаб ҳаракатига оид масалалар

Нуқтанинг мураккаб ҳаракатига оид масалаларни ечишда аввало қўзғалмас ва қўзғалувчи координата системалари танланиб, нуқтанинг абсолют ҳаракати нисбий ва кўчирма ҳаракатларга ажратилади.

Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезлигини топишда (13.8) формула билан ифодаланадиган тезликлар параллелограмми қондасидан фойдаланилади.

Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезланишларини аниқлашга оид масалаларни 2 турга бўлиш мумкин:

1. Кўчирма ҳаракати илгарилама ҳаракат бўлган нуқтанинг тезланишларини аниқлаш.

2. Кўчирма ҳаракати илгариларда ҳаракатдан иборат бўлмаган нуқтанинг тезланишларини аниқлаш.

Ҳар иккали турга онд масалаларни геометрик ёки аналитик усулда ечиш мумкин.

Масалани геометрик усулда ечганда нуқтанинг кўчирма ҳаракати турига қараб (13.19) ёки (13.20) тенгликлардан фойдаланилади.

Масалани аналитик усулда ечганда проекциялар усули қўлланилади, яъни (13.19) ёки (13.20) тенгламаларни танланган ўзаро перпендикуляр координата ўқларига проекциялаш йўли билан нуқтанинг тезланиши аниқланади.

13.1- масала. 8.8- масала шартда қайд этилган A нуқтанинг тезлик ва тезланиш тезликларини ва тезланишларни қўшиш теоремаларидан фойдаланиб аниқлансин (13.8- расм). Қуйидагилар берилган:

$$s = \left(0,2 + 0,6 \sin \frac{\pi}{3} t\right) \text{ м}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} t \text{ рад}, \quad AB = l = 0,3 \text{ м}, \quad t = 1 \text{ с}.$$

Ечиш. Қўзғалмас $O_1\xi\eta$ ва қўзғалувчи Bxy координаталар системасини расмда кўрсатилгандек танлаб оламиз. A нуқтанинг қўзғалувчи Bxy координаталар системасига нисбатан l радиусли эйлани ёни бўйлаб $\varphi = \frac{\pi}{3} t$ рад. қонун

асосидаги ҳаракати нисбий ҳаракатни ифодалайди. Bxy координаталар системасининг $O_1\xi\eta$ координаталар системасига нисбатан $s = \left(0,2 + 0,6 \sin \frac{\pi}{3} t\right) \text{ м}$ қонун асосида тўғри чизиqli ҳаракати кўчирма ҳаракатдан иборат. A нуқтанинг $O_1\xi\eta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати мураккаб ҳаракатдир.

A нуқтанинг берилган ондаги ҳолатини аниқлаймиз. B ползунининг $O_1\xi\eta$ координаталар системасига нисбатан ҳолати s координата билан аниқланади. $t = 1 \text{ с}$ бўлганда

$$s = \left(0,2 + 0,6 \sin \frac{\pi}{3}\right) = 0,72 \text{ м}.$$

A нуқтанинг Bxy координаталар системасига нисбатан ҳолати φ бурчак билан аниқланади. $t = 1 \text{ с}$ бўлганда

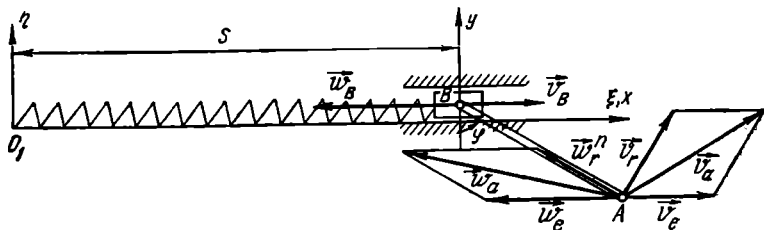
$$\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ рад}.$$

B ползун ва A нуқтанинг берилган ондаги ҳолати 13.8- расмда тасвирланган.

A нуқтанинг абсолют тезлигини (13.8) формула воситасида аниқлаймиз.

Ушбу нуқта нисбий тезлигининг модули $v_r = \omega_r AB = \frac{d\varphi}{dt} l = \frac{\pi}{3} 0,3 = 0,314 \text{ м/с}$

га тенг бўлади. $\vec{v}_r$ вектори φ бурчакнинг мусбат йўналишига мос равишда AB га перпендикуляр йўналади.



13.8- расм.

Кўчирма ҳаракат тўғри чизиқли ҳаракатдан иборат бўлгани учун $\vec{v}_e = \vec{v}_B$ тенглик ўринли бўлади. B нуқта тезлигининг модули $v_B = |v_{Bx}|$ га тенг. Бунда v_{Bx} билан B нуқта тезлигининг x ўқдаги проекцияси белгиланган:

$$v_{Bx} = \frac{ds}{dt} = 0,2 \pi \cos \frac{\pi}{3} t \text{ м/с.}$$

$t = 1$ с бўлганда

$$v_{Bx} = 0,1 \pi = 0,314 \text{ м/с.}$$

v_{Bx} мусбат қийматга эга бўлгани учун $t = 1$ с бўлган пайтда B нуқтанинг тезлиги x ўқи бўйича йўналади.

Шундай қилиб, A нуқта кўчирма тезлигининг модули $v_e = v_B = 0,314$ м/с га тенг бўлади. $\vec{v}_e$ вектори $\vec{v}_B$ га параллел йўналади.

Расмда $(\vec{v}_r, \vec{v}_e) = 60^\circ$ бўлгани учун A нуқтанинг $\vec{v}_a$ абсолют тезлиги $\vec{v}_r$ ва $\vec{v}_e$ ларга қурилган параллелограммининг диагонали бўйлаб йўналади. Шу сабабли

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2 v_e v_r \cos (\vec{v}_r, \vec{v}_e)} = \\ = \sqrt{(0,314)^2 + (0,314)^2 + 2 \cdot 0,314 \cdot 0,314 \cos 60^\circ} = 0,543 \text{ м/с. } v_r = v_e \text{ бўлгани} \\ \text{учун } \vec{v}_a \text{ ва } \vec{v}_e \text{ орасидаги бурчак } 30^\circ \text{ га тенг бўлади.}$$

Кўчирма ҳаракат илгариллама—тўғри чизиқли ҳаракатдан иборат ҳамда нисбий ҳаракат l радиусли айлана ёйи бўйлаб содир бўлгани учун A нуқтанинг тезланишини $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_r^n + \vec{\omega}_e$ формула ёрдамида аниқлаймиз.

Нисбий ҳаракат бурчак тезлиги $\omega_r = \frac{\pi}{3} \text{ с}^{-1}$ ўзгармас бўлгани учун нисбий уринма тезланиш модули

$$\omega_r^r = e_r \cdot AB = \frac{d\omega_r}{dt} t = 0$$

бўлади.

Нисбий нормал тезланиш модул жиҳатдан

$$\omega_r^n = l \omega_r^2 = 0,3 \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 = 0,329 \text{ м/с}^2$$

ўзгармас бўлиб, ҳамisha A дан B нуқтага йўналади.

Кўчирма ҳаракат тўғри чизиқли ҳаракатдан иборат бўлгани учун кўчирма ҳаракат тезланиши $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_B$ га, B нуқта тезланишининг модули эса $\omega_B = |\omega_{Bx}|$ га тенг бўлади.

Бунда ω_{Bx} B нуқта тезланишининг x ўқдаги проекциясини ифодалайди.

$$\omega_{Bx} = \frac{dv_{Bx}}{dt} = -\frac{0,2 \pi^2}{3} \cos \frac{\pi}{3} t \text{ м/с}^2.$$

$t = 1$ с да $\omega_{Bx} = -0,569 \text{ м/с}^2$ бўлади. ω_{Bx} нинг манфий қийматга эга бўлиши $t = 1$ с да B нуқтанинг тезланиши x ўққа қарама-қарши йўналганини ифодалайди.

Шундай қилиб, $t = 1$ с да кўчирма тезланишининг модули $\omega_e = |\omega_{Bx}| = 0,569 \text{ м/с}^2$ га тенг бўлади. $\vec{\omega}_e$ вектори A нуқтада $\vec{\omega}_B$ га параллел равишда йўналади ҳамда $\vec{\omega}_r^n$ билан $\vec{\omega}_e$ орасидаги бурчак 30° га тенг бўлади.

А нуқтанинг абсолют тезланиши $\vec{w}_a$ вектори $\vec{w}_r^n$ ва $\vec{w}_e$ ларга қурилган параллелограмм диагонали бўйлаб йўналадн, модули эса қуйидаги формуладан топилади:

$$w_a = \sqrt{(w_r^n)^2 + w_e^2 + 2 w_r^n \cdot w_e \cos 30^\circ} = 0,87 \text{ м/с}^2.$$

Синуслар теоремасидан фойдаланиб, $\vec{w}_a$ ва $\vec{w}_e$ векторлари орасидаги бурчакни аниқлаймиз:

$$\frac{w_a}{\sin 150^\circ} = \frac{w_r^n}{\sin (\widehat{w_a, w_e})},$$

$$\sin (\widehat{w_a, w_e}) = 0,1891,$$

$$(\widehat{w_a, w_e}) = 11^\circ \text{ ёки } (\widehat{w_a, x}) = 169^\circ.$$

8.8-масала жавоби билан бу масалада олинган натижаларни солиштирсан, улар бир хил эканлигини кўрамиз.

13.2-масала. Диск O нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида соат стрелкаси ҳаракати йўналишида секинланувчан айланма ҳаракат қилади (13.9-рasm, а). Дискнинг AB ватари бўйича P шарча $1,2 \text{ м/с}$ тезлик билан ҳаракатланади. Шарчанинг диск марказига энг яқин масофада бўлган пайтдаги абсолют тезланиши аниқлансин. Шу пайтда $OP = 30 \text{ см}$, дискнинг бурчак тезлиги 3 рад/с , бурчак секинланиши 8 рад/с^2 га тенг.

Ечиш. Қўзғалмас $O\xi\eta$ ва қўзғалувчи O_1x координаталар системасини 13.9-рasm, а дагидек танлаб оламиз. Берилган онда O_1 ва P нуқталар устма-уст тушади. P нуқтаининг O_1x ўқ бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракати нисбий ҳаракатдан, диск билан биргаликда O нуқта атрофидаги айлана ёни бўйлаб ҳаракати эса кўчирма ҳаракатдан иборат. Кўчирма ҳаракатнинг берилган ондаги бурчак тезлиги $w_e = 3 \text{ рад/с}$, бурчак секинланиши $\epsilon_e = 8 \text{ рад/с}^2$. P нуқтанинг $O\xi\eta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати мураккаб ҳаракатдан иборат.

P нуқта берилган онда $O\xi$ ўқда $OP = 0,3 \text{ м}$ масофада ётади (13.9-рasm, а).

Кўчирма ҳаракат O нуқта атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат бўлгани учун (13.19) га кўра P нуқтанинг тезланиши нисбий, кўчирма ва Корнолис тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади:

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_k$$

ёки

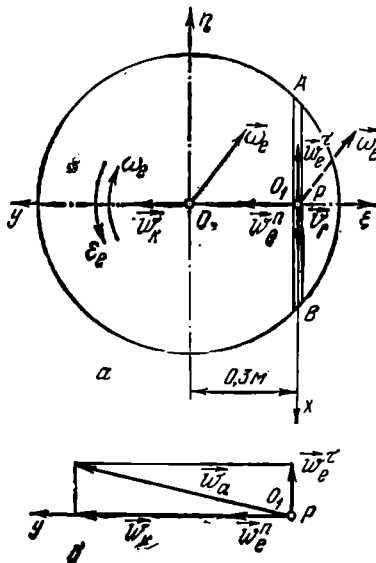
$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e^r + \vec{w}_e^n + \vec{w}_k.$$

P шарча x ўқи бўйлаб $v_r = 1,2 \text{ м/с}$ ўзгармас нисбий тезлик билан ҳаракатлангани туфайли нуқтанинг нисбий тезланиши $w_r = \frac{dv_r}{dt} = 0$ бўлади.

Шарчанинг кўчирма ҳаракатдаги уриятма тезланиши модули

$$w_e^r = OP \cdot \epsilon_e = 0,3 \cdot 8 = 2,4 \text{ м/с}^2 \text{ га тенг.}$$

Берилган онда кўчирма ҳаракат секинланувчан айланма ҳаракатдан иборат



13.9-рasm.

бўлган учун $\vec{\omega}_e^r$ вектори e_e йўналишига мос равишда O_1x ўққа қарама-қарши йўналади.

Берилган онда шарчанинг кўчирма ҳаракатдаги нормал тезланиши модули $\omega_e^n = OP \cdot \omega_e^2 = 0,3 \cdot 3^2 = 2,7 \text{ м/с}^2$ га тенг бўлади. $\vec{\omega}_e^n$ вектори P нуқтадан диск маркази O га йўналади.

Кориолис тезланишининг модули (13.25) га асосан аниқланади. $\vec{\omega}_e$ вектори кузатувчидан расм текислигига перпендикуляр равишда йўналгани учун

$$\sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}) = \sin 90^\circ = 1 \text{ бўлганлигидан } \omega_k = 2 \cdot 3 \cdot 1,2 = 7,2 \text{ м/с}^2.$$

$\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$ бўлган учун $\vec{\omega}_e$ нинг мусбат йўналишидан қараганда $\vec{v}_r$ ни $\vec{\omega}_e$ атрофида соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда 90° бурчакка буриш натижасида Кориолис тезланишининг йўналишини оламиз. $\vec{\omega}_k$ вектори O_1y ўқ бўйича йўналади.

Шарча абсолют тезланишининг ташкил этувчилари: $\vec{\omega}_e^r$ билан $\vec{\omega}_e^n$, $\vec{\omega}_k$ лар орасидаги бурчак 90° дан иборат бўлгани учун $\vec{\omega}_a$ нинг модули қуйидагича аниқланади:

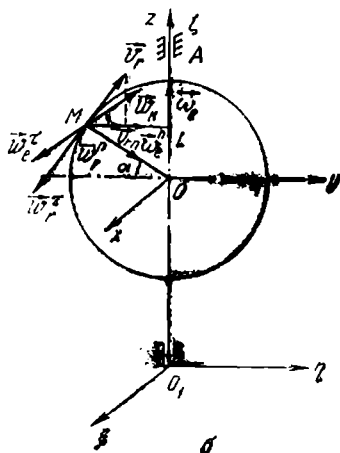
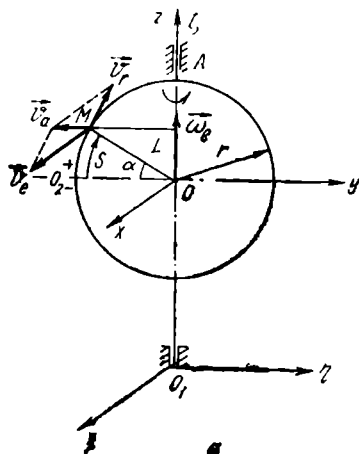
$$\omega_a = \sqrt{(\omega_e^r)^2 + (\omega_e^n + \omega_k)^2} = \sqrt{(2,4)^2 + (2,7 + 7,2)^2} = 10,18 \text{ м/с}^2.$$

11.9-расм, б дан кўрамызки,

$$\cos(\widehat{\vec{\omega}_a, O_1y}) = \frac{\omega_e^n + \omega_k}{\omega_a} = \frac{2,7 + 7,2}{10,18} = 0,9723,$$

$$(\widehat{\vec{\omega}_a, O_1y}) = 13^\circ 29'.$$

13.3. масала. Радиуси $r = 0,3 \text{ м}$ бўлган диск ўзининг вертикал диаметри атрофида $\varphi = (2t + 0,3t^2)$ рад қонунга биноан айланади (13.10-расм, а). M нуқта диск гардиши бўйлаб $O_2M = s = 0,1 \pi \sin \frac{\pi t}{4}$ м тенгламага мувофиқ ҳаракатланади. $t = t_1 = \frac{2}{3} \text{ с}$ бўлган пайтда диск расм текислигида ётади. M нуқтанинг t_1 пайтдаги абсолют тезлиги ва абсолют тезланиши топилсин.



13.10-расм.

Ечиш. Қўзғалмас $O_1 \xi \eta \zeta$ ва қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасини 13.10-расмдагидек танлаб оламиз. M нуқтанинг r радиусли айлана ёйи бўйлаб $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан $s = 0,1 \pi \sin \frac{\pi t}{4}$ қонун бўйича ҳаракати нисбий ҳаракатдир.

Дискнинг $\varphi = 2t + 0,3 t^3$ қонунга биноан $O_1 \zeta$ ўқ атрофидаги айланма ҳаракати кўчирма ҳаракатни ифодалайди. M нуқтанинг $O_1 \xi \eta \zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати мураккаб ҳаракатдан иборат.

Дастлаб M нуқтанинг t_1 пайтдаги ҳолатини аниқлаймиз:

$$(\overline{O_2 M})_{t=t_1} = s_{t=t_1} = 0,1 \pi \sin \frac{2\pi}{3 \cdot 4} = 0,05 \pi \text{ м.}$$

$O_2 M$ ёй узунлиги ўзини тиралган марказий бурчак α билан ўлчанади:

$$(\overline{O_2 M}) = r \cdot \alpha.$$

Бинобарин, t_1 пайтда M нуқтанинг радиуси OO_2 ўқ билан

$$\alpha = \frac{0,05 \pi}{r} = \frac{\pi}{6}$$

бурчак ташкил этади (13.10-расм, а).

M нуқтанинг абсолют тезлигини (13.8) формула воситасида аниқлаймиз:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Бу ифодадаги нисбий тезликнинг алгебраик қийматини (8.28) га асосан аниқлаймиз:

$$v_{r\tau} = \frac{ds}{dt} = \frac{0,1 \pi^3}{4} \cos \frac{\pi t}{4}, \quad (1)$$

$t = t_1$ да $v_{r\tau} = 0,21 \text{ м/с} > 0$ бўлгани туфайли нисбий тезлик модули $v_r = 0,21 \text{ м/с}$, йўналиши эса $O_2 M$ ёй координатаси ортадиган йўналишда M нуқтада дискнинг гардишига ўтказилган уринма бўйича йўналади.

M нуқта кўчирма тезлигининг модули

$$v_e = \omega_e \cdot ML \quad (2)$$

формуладан топилади. (2) да ω_e билан кўчирма ҳаракат бурчак тезлигининг модули белгиланган. Кўчирма ҳаракат бурчак тезлигининг алгебраик қиймати (9.4) формулага кўра топилади:

$$\omega_{ez} = \dot{\varphi} = 2 + 0,6 t, \quad (3)$$

$$t = t_1 \text{ да } \omega_{ez} = 2 + 0,6 \cdot \frac{2}{3} = 2,4 \text{ с}^{-1} > 0.$$

Демак, $\omega_e = 2,4 \text{ с}^{-1}$.

13.10-расм, б дан:

$$ML = r \cos \alpha = 0,3 \cdot 0,866 = 0,26 \text{ м.} \quad (4)$$

Шундай қилиб, (2) дан $v_e = 2,4 \cdot 0,26 = 0,62 \text{ м/с}$ келиб чиқади. $\vec{v}_e$ вектори Ox ўққа параллел равишда кузатувчи томон йўналган.

$(\vec{v}_r, \vec{v}_e) = 90^\circ$ бўлгани учун $v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 0,654 \text{ м/с}$. $\vec{v}_a$ вектори диск текислигига перпендикуляр текисликда жойлашади ҳамда

$$\cos(\vec{v}_a, \vec{v}_e) = \frac{v_e}{v_a} = 0,9480, \quad (\vec{v}_a, \vec{v}_e) = 18^\circ 30',$$

$$\cos(\vec{v}_a, \vec{v}_r) = \frac{v_r}{v_a} = 0,3211, \quad (\vec{v}_a, \vec{v}_r) = 71^\circ 30'.$$

Кўчирма ҳаракат Oz ўқ атрофида айланма ҳаракатдан иборат бўлгани учун M нуқтанинг абсолют тезланиши (13.19) тенглама воситасида аниқланади. Уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r^{\tau} + \vec{\omega}_r^n + \vec{\omega}_e^{\tau} + \vec{\omega}_e^n + \vec{\omega}_k. \quad (5)$$

M нуқта нисбий ҳаракатининг уринма ва нормал тезланишларини (8.51) формулага кўра аниқлаймиз:

$$\omega_r^{\tau} = \frac{dv_r^{\tau}}{dt} = -\frac{0,1}{16} \pi^3 \sin \frac{\pi t}{4},$$

$$t = t_1 \text{ да } \omega_r^{\tau} = -0,10 \text{ м/с}^2.$$

$\omega_r^{\tau} < 0$ бўлгани туфайли, $\vec{\omega}_r^{\tau}$ вектори $\vec{v}_r$ йўналишига қарама-қарши йўналади (13.13- расм, б) ва $|\omega_r^{\tau}| = 0,10 \text{ м/с}^2$.

$$\omega_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{v_r^2}{r} = 0,15 \text{ м/с}^2,$$

$\vec{\omega}_r^n$ вектори MO чизиқ бўйича M дан O марказга қараб йўналади (13.10- расм, б).

M нуқтанинг кўчирма ҳаракатдаги уринма тезланиши модули

$$\omega_e^{\tau} = ML \cdot e_e.$$

бувда $e_e = |e_{ez}|$ кўчирма ҳаракат бурчак тезланишининг модулини ифодалайди, у (3) дан вақт бўйича ҳосила олиб топилади:

$$e_{ez} = \dot{\omega}_{ez} = 0,6 = \text{const} > 0.$$

Бинобарин, $e_e = e_{ez} = 0,6 \text{ с}^{-2}$ бўлиб, M нуқтанинг кўчирма ҳаракати тезланувчан бўлади.

Шундай қилиб, $t = t_1$ да

$$\omega_e^{\tau} = ML \cdot e_e = 0,26 \cdot 0,6 = 0,16 \text{ м/с}^2.$$

$e_{ez} > 0$ бўлгани туфайли $\vec{\omega}_e^{\tau}$ вектори Ox ўққа параллел равишда кузатувчи томон йўналади.

Берилган онда M нуқтанинг кўчирма ҳаракатидаги нормал тезланиши модули $\omega_e^n = ML \cdot \omega_e^2 = 1,50 \text{ м/с}^2$ га тенг бўлади.

$\vec{\omega}_e^n$ вектори M нуқтадан Oz айланиш ўқиға перпендикуляр равишда ML бўйлаб йўналади (13.10- расм, б).

M нуқтанинг Кориолис тезланиши (13.25) га кўра аниқланадн. Берилган пайтда $(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = \alpha = \frac{\pi}{6}$ бўлганидан $\omega_k = 2 \omega_e v_r \sin \frac{\pi}{6} = 0,50 \text{ м/с}^2$ эканлиги келиб чиқади.

Жуковский қондасига кўра Кориолис тезланиши $\vec{\omega}_k$ M нуқтада кузатувчидан диск текислигига перпендикуляр равишда йўналади.

M нуқтанинг абсолют тезланишини проекциялаш усули билан аниқлаймиз, (5) ни x, y, z ўқларига проекциялаймиз:

$$\omega_{ax} = \omega_e^{\tau} - \omega_k = -0,34 \text{ м/с}^2,$$

$$\omega_{ay} = -|\omega_r^{\tau}| \cos 60^\circ + \omega_r^n \cos 30^\circ + \omega_e^n = 1,58 \text{ м/с}^2,$$

$$\omega_{az} = -|\omega_r^{\tau}| \cos 30^\circ - \omega_r^n \cos 60^\circ = -0,6 \text{ м/с}^2,$$

$$w_a = \sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2 + w_{az}^2} = \sqrt{2,98} \approx 1,73 \text{ м/с}^2.$$

М нуқта абсолют тезланишининг йўналиши қуйидагича аниқланади:

$$\cos(\vec{w}_a, x) = \frac{w_{ax}}{w_a} = -0,1965, \quad (\vec{w}_a, x) = 101^\circ 20',$$

$$\cos(\vec{w}_a, y) = \frac{w_{ay}}{w_a} = 0,9133, \quad (\vec{w}_a, y) = 24^\circ,$$

$$\cos(\vec{w}_a, z) = \frac{w_{az}}{w_a} = -0,3468, \quad (\vec{w}_a, z) = 110^\circ 20'.$$

14-БОБ. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ МУРАККАБ ҲАРАКАТИ

14.1-§. Умумий мулоҳазалар

Техникада кўпинча қаттиқ жисмнинг ҳаракатини бир неча координаталар системасига нисбатан ўрганишга туғри келади. Одатда, берилган жисм билан боғланмаган координата системаларидан бири, масалан, $O_1\xi\eta\zeta$ ни қўзғалмас деб қабул қилинади. Шунингдек, берилган жисм билан боғланмаган ва ўз навбатида қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракатланувчи *Охуз* координаталар системаси олинади. Масалан, сунъий йўлдош ичидаги жисмнинг Ерга нисбатан ҳаракатини ўрганишда Ер билан боғланган $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасини қўзғалмас деб олинади; қўзғалувчи *Охуз* координаталар системаси учун сунъий йўлдошга маҳкам бириктирилган координаталар системаси олинади.

Жисмнинг қўзғалувчи *Охуз* координаталар системасига нисбатан ҳаракати *нисбий ҳаракат* дейилади.

Юқорида кўрганимиздек, қўзғалувчи *Охуз* координаталар системасининг қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати кўчирма ҳаракатни ифодалайди. Бунда қўзғалувчи координаталар системасининг ҳаракати деганда, у билан боғланган фазонинг қўзғалмас координаталар системаси билан боғланган фазога нисбатан ҳаракати тушунилади. *Қаттиқ жисмнинг* берилган ондаги *кўчирма ҳаракати* деганда, унинг шу ондаги фақат қўзғалувчи координаталар системаси билан биргаликда қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати назарда тутилади.

Жисмнинг қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати *мураккаб ҳаракат* ёки *абсолют ҳаракат* дейилади. Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг абсолют ҳаракатини нисбий ва кўчирма ҳаракатлардан ташкил топган деб қараш мумкин.

Юқорида эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини унинг қутб нуқтаси билан биргаликдаги илгарилама ҳаракат ва қутб орқали ўтувчи оний ўқ атрофидаги оний айланма ҳаракатлардан ташкил топган мураккаб ҳаракат деб таҳлил қилиш мумкинлигини кўрган эдик. Бу бобда жисмнинг ҳаракатини бошқача нуқтан назардан ўрганамиз.

Юқорида эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракати оддий ҳаракатларга ажратиш йўли билан ўрганилган бўлса, бу ерда жисмнинг мураккаб ҳаракатини оддий ҳаракатларни қўшиш натижасида содир бўлади деб қараймиз. Нисбий ва кўчирма ҳаракатларнинг қай тарзда содир бўлишига қараб, унга мос равишда қаттиқ жисм нуқталари оний тезликларининг ҳар онда қандай тақсимланишини ўрганамиз.

14.2-§. Жисмнинг илгарилама ҳаракатларини қўшиш ҳақидаги теорема

Қаттиқ жисм $Oxuz$ координаталар системасига нисбатан $\vec{v}_1$ тезлик билан илгарилама ҳаракатда бўлсин. Ўз навбатида $Oxuz$ координаталар системаси ҳам қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан $\vec{v}_2$ тезлик билан илгарилама ҳаракат қилсин (14.1-расм). Жисмнинг $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатиши, яъни абсолют ҳаракатини аниқлаймиз.

Нисбий ҳаракат илгарилама ҳаракатдан иборат бўлгани учун жисмнинг барча нуқталари бирдек $\vec{v}_r = \vec{v}_1$ нисбий тезлик билан ҳаракатланади. Худди шунингдек, жисмнинг кўчирма ҳаракати ҳам илгарилама ҳаракатдан иборат бўлгани туфайли унинг барча нуқталари бир хил $\vec{v}_e = \vec{v}_2$ кўчирма тезлик билан ҳаракатланади.

Жисм бирор M нуқтасининг абсолют тезлигини аниқлаш учун тезликларни қўшиш теоремасини ифодаловчи

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (14.1)$$

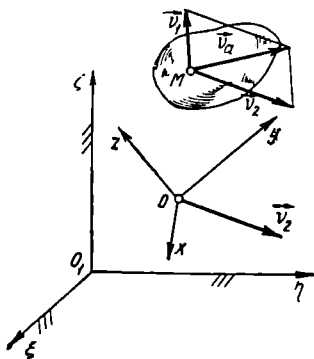
тенгликдан фойдаланамиз. Кўрилатган ҳол учун бу формулани

$$\vec{v}_a = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (14.2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (14.2) дан кўрамизки, жисм барча нуқталарининг абсолют тезликлари бир хил, яъни жисмнинг абсолют ҳаракати илгарилама ҳаракатдан иборат бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди: *агар жисмнинг нисбий ва кўчирма ҳаракатлари илгарилама ҳаракатдан иборат бўлса, жисмнинг абсолют ҳаракати ҳам илгарилама ҳаракатдан иборат бўлади ҳамда абсолют ҳаракат тезлиги нисбий ва кўчирма ҳаракат тезликларининг геометрик йиғиндисига тенгдир.*

Агар жисм бир вақтнинг ўзида $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ тезликлар билан содир бўладиган n та илгарилама ҳаракатларда қатнашса, у ҳолда



14.1- расм.

дастлаб (14.2) га кўра биринчи иккита тезликни геометрик қўшамиз, сўнгра олинган тезликни учинчи тезлик билан геометрик қўшамиз ва ҳ. к. Шу тарзда илгарилама ҳаракат тезликларини геометрик қўша бориб, жисмнинг абсолют ҳаракатни илгарилама ҳаракатдан иборат ва жисм ихтиёрий нуқтасининг абсолют тезлиги $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ илгарилама ҳаракат тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг, яъни

$$\vec{v}_a = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \sum_{v=1}^n \vec{v}_v \quad (14.3)$$

бўлишига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

14.3-§. Жисмнинг кесишувчи ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшиш

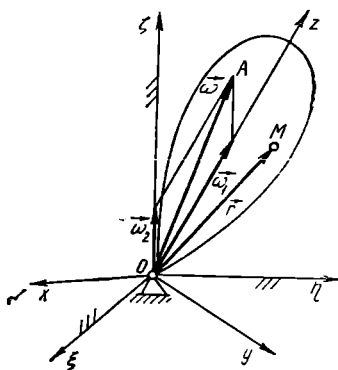
Жисм қўзғалувчи *Oxyz* координаталар системасига нисбатан *Oz* ўқ атрофида ω_1 бурчак тезлик билан, ўз навбатида *Oz* ўқ қўзғалмас *Oξ* ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлсин (14.2-расм). Бошқача айтганда жисм қўзғалувчи *Oz* ўқ атрофида $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан нисбий ҳаракатда ҳамда қўзғалмас *Oξ* ўқ атрофида $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан кўчирма ҳаракатда иштирок этсин. *O* нуқта жисм ҳаракати давомида қўзғалмасдан қолгани сабабли жисмнинг қўзғалмас *Oξηζ* координатага нисбатан ҳаракати *O* нуқта атрофидаги сферик ҳаракатдан иборат бўлади. Жисм абсолют ҳаракатининг оний бурчак тезлиги қандай бўлишини кўриб чиқамиз.

Жисм ихтиёрий *M* нуқтасининг радиус-векторини $\vec{r}$ билан белгилаб, бу нуқтанинг абсолют тезлиги $\vec{v}_M$ ни аниқлаймиз. Кўрилатган ҳол учун (14.1) да

$$\vec{v}_r = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}, \quad \vec{v}_e = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r} \quad \text{бўлади.}$$



14.2- расм.

M нуқтанинг абсолют ҳаракат тезлигини Эйлер формуласи ёрдамида ҳам аниқлаш мумкин:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (14.4)$$

Бунда $\vec{\omega}$ билан абсолют ҳаракат бурчак тезлиги белгиланган.

Охирги иккита тенгликни солиштириб, қуйидаги муносабатни оламиз:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}.$$

M нукта ва унинг радиус-вектори $\vec{r}$ ихтиёрий бўлгани учун

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \quad (14.5)$$

тенглик ўринли бўлади. Шундай қилиб, абсолют ҳаракат бурчак тезлиги ω_1 ва ω_2 ларга қурилган параллелограммнинг OA диагонали билан ифодаланади. (14.5) тенглик бурчак тезликларнинг параллелограмм қоидаси дейилади.

ОА диагонал орқали ўтувчи ўқдаги жисм нуқталарипинг радиус-вектори $\vec{\omega}$ билан бир тўғри чизиқда ётгани учун (14.4) га кўра бу нуқталарнинг тезлиги нолга тенг бўлади, яъни мазкур ўқ айланиш оний ўқидан иборат бўлади.

Натижада қуйидаги теорема исботланди: агар жисм бир вақтда O нуқтада кесишувчи иккита ўқ атрофида айланма ҳаракатда иштирок этса, у ҳолда жисмнинг абсолют ҳаракати O нуқтадан ўтувчи айланиш оний ўқи атрофида оний айланма ҳаракатдан иборат бўлиб, абсолют ҳаракат оний бурчак тезлиги нисбий ва кўчирма ҳаракат бурчак тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Агар жисм бир вақтнинг ўзида O нуқтада кесишувчи n та ўқлар атрофида $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ бурчак тезликлар билан айланма ҳаракатда бўлса, у ҳолда жисмнинг абсолют ҳаракати O нуқтадан ўтувчи оний ўқ атрофидаги оний айланма ҳаракатдан иборат бўлиб, абсолют ҳаракат

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{\omega}_n = \sum_{v=1}^n \vec{\omega}_v$$

оний бурчак тезлик билан содир бўлади.

14.1-масала. Қўш дифференциал қўзғалмас ab ўқ атрафида айлана оладиган III кривошипдан нборат (14.3-расм). Кривошипига IV сателлит эркин ўратилган. Сателлит иккита бир-бирга маҳкам қилиб бириктирилган $r_1 = 5$ см ва $r_2 = 2$ см радиусли конус шаклидаги тишли ғилдиракдан нборат. Бу ғилдираклар ab ўқ атрафида айланганидан, лекин кривошип билан болганидан конус шаклидаги тишли ғилдираклар I ва II билан қўшилган. I ва II ғилдиракларининг радиуслари $R_1 = 10$ см ва $R_2 = 5$ см, бурчак тезликлари тегишлича $\omega_1 = 4,5$ с⁻¹ ва $\omega_2 = 9$ с⁻¹. Агар иккала ғилдирак бир томонга айланса, кривошипнинг бурчак тезлиги ω_3 ва сателлитнинг кривошипга нисбатан бурчак тезлиги ω_4 аниқлансин.

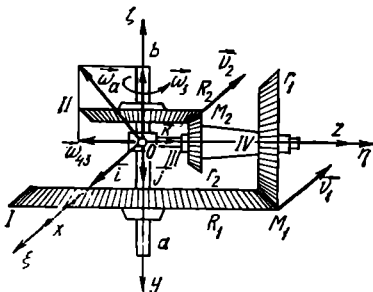
Ечиш. $O\Xi\eta$ қўзғалмас ва $O\chi\eta$ қўзғалувчи координаталар системасини 14.3-расмдагидек танлаб оламиз.

Сателлит қўзғалуви O_2 ўқ атрофида криношипга нисбатан $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{13} = -\omega_{13} \vec{k}$ бурчак тезлик билан нисбий ҳаракатда ҳамда криношип билан биргаликда қўзғалмас.

O_2 ўқ атрофида $\vec{\omega}_e = -\omega_e \vec{i}$ бурчак тезлик билан кўчирма ҳаракатда бўлади, яъни сателлит бир вақтда O нуқтада кесишувчи никита ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлади. Шу сабабли сателлит

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_p = -\omega_{y3} \vec{k} - \omega_{y1} \vec{j}$$

оний бурчак тезлик билан оний айланма
харакатда бўлади.



14.3- ДЗСМ.

M_1 ва M_2 нуқталарнинг абсолют тезликлари расмда кўрсатилганидек йўналадн ва уларнинг модули $v_1 = R_1 \omega_1$, $v_2 = R_2 \omega_2$ га тенг бўлади.

$\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ тезликларни қўзғалувчи координата ўқларига проекциялаймиз:

$$\left. \begin{aligned} v_{1x} &= -R_1 \omega_1, & v_{1y} &= v_{1z} = 0, \\ v_{2x} &= -R_2 \omega_2, & v_{2y} &= v_{2z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

M_1 ва M_2 нуқталарнинг абсолют тезликларини бошқача усулда, Эйлер формуласидан фойдаланиб аниқлаш ҳам мумкин:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{\omega}_a \times \vec{OM}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega_3 & -\omega_{43} \\ 0 & r_1 & R_1 \end{vmatrix}, \\ \vec{v}_2 &= \vec{\omega}_a \times \vec{OM}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega_3 & -\omega_{43} \\ 0 & -r_2 & R_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

ёки қўзғалувчи координата ўқларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} v_{1x} &= -\omega_3 R_1 + \omega_{43} r_1, & v_{1y} &= v_{1z} = 0, \\ v_{2x} &= -\omega_3 R_2 - \omega_{43} r_2, & v_{2y} &= v_{2z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ларни ҳосил қиламиз.

(1) ва (2) тенгламалар системасини солиштириб, қуйидаги иккита тенгламалардан иборат системани оламиз:

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 R_1 - \omega_{43} r_1 &= R_1 \omega_1, \\ \omega_3 R_2 + \omega_{43} r_2 &= R_2 \omega_2. \end{aligned} \right\}$$

Бу тенгламаларни биргаликда ечиб, изланаётган номаълумларни аниқлаймиз:

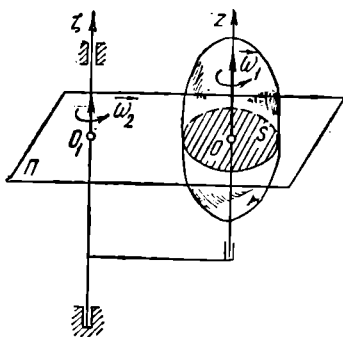
$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{R_1 r_2 \omega_1 + r_1 R_2 \omega_2}{R_1 r_2 + R_2 r_1} = 7 \text{ с}^{-1}, \\ \omega_{43} &= \frac{R_1 R_2 (\omega_2 - \omega_1)}{R_1 r_2 + R_2 r_1} = 5 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

14.4- §. Жисмнинг иккита параллел ўқ атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшиш

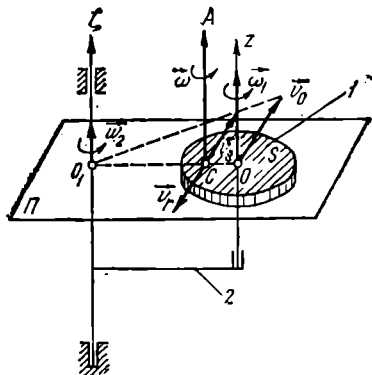
Жисмнинг нисбий ва кўчирма ҳаракатлари ўзаро параллел ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат бўлган ҳолларни кўрамиз.

Жисм қўзғалувчи z ўқ атрофида $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан нисбий ҳаракатда, ўз навбатида Oz ўқ ўзига параллел бўлган қўзғалмас $O_1\xi$ ўқ атрофида $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан кўчирма айланма ҳаракатда бўлсин (14.4- расм). Бу ҳолда жисм нуқталари нисбий ҳаракатда ҳам, кўчирма ҳаракатда ҳам Oz ва $O_1\xi$ ўқларига перпендикуляр текисликларда ҳаракатланади. Шу сабабли жисмнинг бундай ҳаракатини текис параллел ҳаракат деб қараш мумкин.

Бинобарин, бу ҳолда жисмнинг абсолют ҳаракатини ўрганиш жисмни Oz ва $O_1\xi$ ўқларга перпендикуляр бўлган Π текислик билан фикран кесиш натижасида ҳосил бўлган S юзанинг ҳаракатини ўрганишга келтирилади.



14.4- расм.



14.5- расм.

Айланма ҳаракатлар бир томонга ва қарама-қарши томонга йўналган ҳолларни алоҳида кўриб чиқамиз.

1. Нисбий ва кўчирма айланма ҳаракатлар бир томонга йўналган ҳол. Жисм (масалан, шкив 1) горизонтал текисликда ҳаракатланувчи кривошип 2 га маҳкамланган вертикал z ўқ атрофида $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан нисбий ҳаракатда, ўз навбатида кривошип z ўққа параллел бўлган қўзғалмас ζ ўқ атрофида $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан кўчирма айланма ҳаракатда бўлсин (14.5-расм). Айтайлик, нисбий ва кўчирма ҳаракатлар z ва ζ ўқларнинг мусбат йўналишидан қараганда соат стрелкаси айланадиган йўналишга тескари йўналнишда содир бўлсин.

$\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ бурчак тезликларни расмда кўрсатилганидек тасвирлаймиз. Жисмнинг абсолют ҳаракати қандай бўлишини кўриб чиқамиз. Шкивнинг S юзаси орқали z ва ζ ўқларга перпендикуляр Π текислигини ўтказиб, ўқларнинг мазкур текислик билан кесишган нуқталарни мос равишда O ва O_1 билан белгилаймиз. S юзанинг O_1O чизиқда ётувчи C нуқтасининг абсолют тезлиги унинг Oz ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдаги нисбий тезлиги $\vec{v}_r$ ҳамда $O_1\zeta$ ўқ атрофидаги $\vec{v}_e$ кўчирма тезликларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади. Бу иккита тезлик O_1O га перпендикуляр равишда бири-бирига қарама-қарши йўналади. Шу сабабли

$$v_a = v_r - v_e = \omega_1 CO - \omega_2 O_1C.$$

S нуқтани шундай танлаймизки, бу нуқта учун $\omega_1 CO - \omega_2 O_1C = 0$ ёки

$$\frac{O_1C}{CO} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (14.6)$$

тенглик ўринли бўлсин. U ҳолда C нуқтанинг абсолют тезлиги нолга тенг бўлади. Худди шунингдек, C нуқта орқали $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ ларга параллел бўлган CA ўқда ётувчи жисм нуқталарининг абсолют тезлиги ҳам нолга тенглигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бинобарин, CA ўқ абсолют ҳаракатдаги айланиш оний ўқини ифодалайди.

ёки

$$\frac{O_1C}{OC} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (14.8)$$

бўлсин. У ҳолда $v_C = 0$ ҳамда $\vec{\omega}_1$ га параллел бўлган CB ўқ айланиш оний ўқидан иборат бўлади.

(14.8) дан кўрамызки, кўрилатган ҳолда CB оний ўқ O_1O кесмани ташқи томондан нисбий ва кўчирма ҳаракат бурчак тезликларига тескари пропорционал бўлакларга бўлади.

CB ўқ атрофидаги абсолют ҳаракат бурчак тезлиги $\vec{\omega}$ ни аниқлаймиз. Бунинг учун худди юқоридагидек мулоҳаза юритиб, O нуқтанинг тезлиги аниқланадиган

$$v_O = \omega_2 \cdot O_1O,$$

$$v_O = \omega \cdot OC$$

тенгликларни оламыз. Бу тенгликлардан фойдаланиб, абсолют ҳаракат оний бурчак тезлигини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} \omega \cdot OC &= \omega_2 \cdot O_1O, \\ \omega &= \omega_2 \frac{O_1O}{OC} = \omega_2 \cdot \frac{O_1C - OC}{OC} = \omega_2 \left(\frac{O_1C}{OC} - 1 \right). \end{aligned}$$

(14.8) ни эътиборга олсак,

$$\omega = \omega_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 \right)$$

ёки

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad (14.9)$$

тенглик ҳосил бўлади.

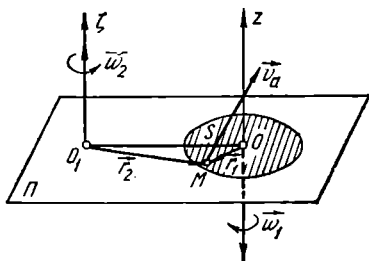
Шундай қилиб, агар жисм бир вақтда иккита параллел ўқ атрофида миқдор жиҳатдан бир-бирига тенг бўлмаган $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ бурчак тезликлар билан ($\omega_1 > \omega_2$) қарама-қарши томонга айлansa, жисмнинг абсолют ҳаракати катта бурчак тезлиги йўналишида $\omega = \omega_1 - \omega_2$ оний бурчак тезлик билан мазкур ўқларга параллел бўлган ва (14.8) тенглик воситасида аниқланадиган оний ўқ атрофидаги оний айланма ҳаракатдан иборат бўлади.

Айланиш оний ўқининг O_1O ўқига нисбатан ҳолатини аниқлаш учун (14.8) дан фойдаланиб, ҳосилавий пропорция тузамиз:

$$\frac{O_1C - OC}{OC} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}$$

ёки

$$\frac{O_1O}{OC} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}.$$



14.7- расм.

Бундан қуйидаги тенгликни оламиз:

$$OC = O_1O \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \quad (14.10)$$

3. Нисбий ва кўчирма бурчак тезликлари миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган ҳол. Агар қаттиқ жисм иккита параллел ўқ атрофида миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган бурчак тезликлар билан айланса, бундай ҳаракат *жуфт айланиш* дейлади.

14.4 ёки 14.5-расмларда тасвирланган S юза Π текисликдаги жуфт айланишда иштирок этсин (14.7-расм). U ҳолда S юза ихтиёрий M нуқтасининг абсолют тезлиги учун

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_1$$

муносабат ўринли бўлади. Бунда $\vec{r}_1$ билан M нуқтанинг O нуқтага нисбатан радиус-вектори белгиланган. Кўрилатган ҳолда $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1$ бўлгани учун:

$$\vec{v}_a = \vec{\omega}_1 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{\omega}_1 \times \vec{OO}_1 = \vec{O_1O} \times \vec{\omega}_1, \quad (14.11)$$

бунда

$$\vec{O_1O} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

(14.11) тенгликдан кўрамизки, M нуқтанинг абсолют тезлиги унинг ҳолатига боғлиқ бўлмасдан, берилган онда жисмнинг барча нуқталари миқдор ва йўналиш жиҳатдан бир хил бўлган абсолют тезлик билан ҳаракатланади, яъни жисмнинг абсолют ҳаракати илгариларча ҳаракатдан иборат бўлади.

$\vec{\omega}_1 \times \vec{O_1O}$ вектор кўпайтма $\vec{\omega}_1$ векторнинг O нуқтага нисбатан моментини ёки $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$ жуфтнинг моментини ифодалайди. Шу сабабли

$$\vec{v}_a = \vec{M}_O(\vec{\omega}_1)$$

муносабат ўринли бўлади. $\vec{v}_a$ ни *жуфт айланиш momenti* деб ҳам аталади.

Бинобарин, жуфт айланишда иштирок этаётган M нуқтанинг абсолют тезлиги $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ лар ётган текисликка перпендикуляр равишда йўналади ҳамда миқдор жиҳатдан $v_a = \omega_1 \cdot O_1O = \omega_1 \cdot h$ га тенг бўлади.

Бунда h билан $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ векторлари орасидаги энг қисқа масофа белгиланган бўлиб, бу масофа *жуфт айланиш елкаси* дейилади.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди: *жуфт айланиш илгарилама ҳаракатга эквивалент бўлиб, илгарилама ҳаракат тезлиги жуфт айланиш моментиға тенг.*

14.2- масала. Ернинг сунъий йўлдоши доиравий орбита бўйлаб экватор текислигида ҳаракатланади ва Ер атрофини 1,5 соатда айланиб чиқади. Қуйидаги икки ҳолда: 1) сунъий йўлдош шарқдан ғарбга учаетганда, 2) ғарбдан шарққа учаетганда унинг Ерға нисбатан бурчак тезлиги ω_1 ҳисоблансин.

Ечиш. Ер ғарбдан шарққа қараб 24 соат ичида ўз ўқи атрофида бир марта айланади. Сунъий йўлдошнинг Ер билан биргаликдаги ҳаракатини кўчирма ҳаракат деб қарасак, кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги

$$\omega_e = \omega_2 = \frac{1}{24} \text{ айл/соат} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ рад/с} = 0,727 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$$

га тенг бўлади.

Сунъий йўлдошнинг абсолют ҳаракат бурчак тезлиги берилган:

$$\omega = \frac{1}{1,5} \text{ айл/соат} = \frac{2\pi}{1,5 \cdot 3600} \text{ рад/с} = 11,629 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

Ер ва унинг сунъий йўлдоши параллел ўқлар атрофида айланади. Сунъий йўлдош шарқдан ғарбга учаетганда унинг нисбий бурчак тезлиги ω_1 кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги ω_2 га қарама-қарши йўналади. Шу сабабли (14.9) га кўра

$$\omega = \omega_1 - \omega_2,$$

бундан

$$\omega_1 = \omega + \omega_2 = \frac{1}{1,5} + \frac{1}{24} = 0,708 \text{ айл/соат} = 12,356 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

Сунъий йўлдош ғарбдан шарққа учаетганда $\vec{\omega}_1$ нинг йўналиши $\vec{\omega}_2$ билан бир хил бўлгани учун (14.7) га асосан

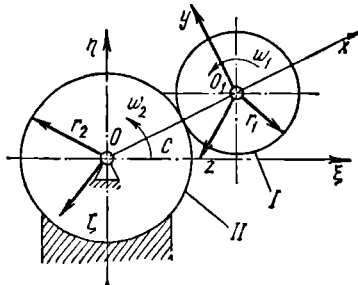
$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

бундан

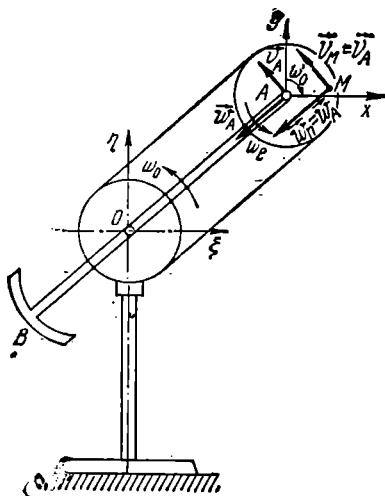
$$\omega_1 = \omega - \omega_2 = \frac{1}{1,5} - \frac{1}{24} = 0,624 \text{ айл/соат} = 10,902 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

14.3- масала. OO_1 кривошип I ва II тишли филдиракларнинг O ва O_1 ўқларини бирлаштиради, филдираклар ўзаро, 14.8-расмда кўрсатилгандек, ташқи тишлар билан илашади. II филдирак қўзғалмайди. OO_1 кривошип ω_2 бурчак тезлик билан айланади. Филдиракларнинг радиуслари r_1 ва r_2 бўлса, I филдиракнинг абсолют бурчак тезлиги ω ва унинг кривошипга нисбатан бурчак тезлиги ω_1 ҳисоблансин.

Ечиш. I филдирак бир вақтнинг ўзида O ва O_1 нуқталардан расм текислигига тик равишда ўтувчи ўзаро параллел O_1z ва $O\xi$ ўқлар атрофида айланма ҳаракатларда иштирок этади. I филдирак кривошип билан боғланган O_1xyz координаталар системасига нисбатан O_1z ўқ атрофида $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}$ бурчак тезлик билан, $O\xi$ ўқ атрофида эса OO_1 кривошип билан биргаликда $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан айланади. $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ векторлари ўзаро параллел ва бир томонга йўналади.



14.8- расм.


$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$
$$\omega_1 = \omega_2 \cdot \frac{r_2}{r_1}$$
$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \omega_2 \frac{r_1 + r_2}{r_1}.$$

диракнинг ўқи туради. Тишли гилдиракларнинг ўлчамлари бир хил бўлиб, ўз-ара занжир воситасида туташади. Агар кривошипнинг узунлиги $OA = l$ бўлса, қўзғалувчи тишли гилдиракнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши, шунингдек, M нуқтасининг тезлиги ва тезланиши аниқлансин (14.9-расм).

Занжирнинг берилган пайтда қўзғалмас тишли ғилдирак билан туташган нуқталарининг абсолют тезликлари нолга тенг бўлгани учун тезликларни қўшим теоремасинан

ҳосил бўлади. Бунда $\vec{v}_r$ занжир нуқталарининг кривошипга нисбатан нисбий тезлиги, $\vec{v}_e$ сса занжир нуқталарининг кўчирма тезлигидан иборат: $\omega_e = \omega_0$ бўлгани учун $v_e = \omega_0 \cdot r$. Қўзғалувчи тишли гилдиракнинг абсолют бурчак тезлигини ω билан белгиласак, унинг нисбий бурчак тезлиги $\omega - \omega_0$ га тенг бўлади:

Бинобарин, $v_r = (\omega - \omega_0)r$.

$$(\omega - \omega_0) r = -\omega_0 r_s$$

Шу сабабли (1) дан $\omega_r = -\omega_0$, яъни кўрилатган ҳолда жуфт айланиш содир бўлади. Исталган пайт учун $\omega = 0$ бўлгани туфайли абсолют ҳаракат бурчак тезланиши

$$e = \frac{r}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

$\omega = 0$, $e = 0$ бўлиши қўзғалувчи тишли ғилдирак ҳаракати илгариларда ҳаракат бўлишини тасдиқлайди. Шунинг сабабли қўзғалувчи тишли ғилдирак ихтиёрий нуқтасининг тезлик ва тезланишлари мос равишда A нуқтанинг тезлик ва тезланишларига тенг бўлади:

$$\begin{aligned} v_M &= v_A = l \omega_0, \\ \omega_M &= \omega_A = l \omega_0^2. \end{aligned}$$

14.5- §. Цилиндрик тишли узатмалар

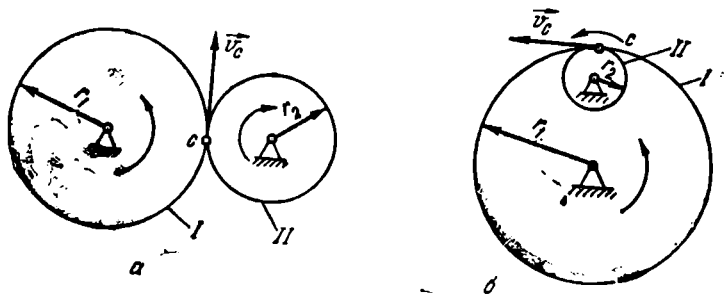
Цилиндрик тишли ғилдираклардан (шестернялардан) ташкил топган узатмаларни кинематик нуқтаи назардан ҳисоблашда аввалги параграфдаги натижалардан фойдаланиш мумкин. Бирор валнинг айланма ҳаракатини унга параллел бўлган иккинчи валга узатишда тишли узатмалардан фойдаланилади. Тишли узатмалар ғилдиракларнинг ҳаракат турига қараб оддий, планетар ва дифференциал узатмаларга ажратилади.

Кетма-кет илашган тишли ғилдиракларнинг айланиш ўқлари қўзғалмасдан қолса, бундай узатма *оддий узатма* дейилади (14.10-рasm, *a* ва *b*). Оддий узатмада ғилдираклардан бири, масалан, тишли ғилдирак I етакчи, қолганлари эса етакланувчи ҳисобланади. Етакчи ғилдирак бурчак тезлиги ω_1 нинг етакланувчи ғилдирак бурчак тезлиги ω_2 га нисбати *узатиш сопи* дейилади. Узатиш сопини $i_{1,2}$ билан белгиласак,

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} *$$

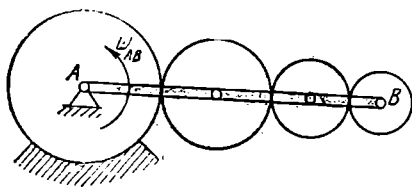
муносабат ўринли бўлади. Оддий узатма иккита тишли ғилдиракдан ташкил топган бўлса, ғилдираклар уринадиган C нуқтада уларнинг тезликлари тенг бўлади:

$$|\omega_1| r_1 = |\omega_2| r_2.$$



14.10- расм.

*— бу параграфда ω билан бурчак тезлигининг алгебраик қиймати белгиланган.



14.11- расм.

Ташқи илашган тишли ғилдираклар қарама-қарши томонга (14.10- расм, а), ички илашган тишли ғилдираклар бир томонга (14.10- расм, б) айланишини ҳамда ғилдиракларнинг тишлар сони z_1 ва z_2 уларнинг радиуслари r_1 ва r_2 га тўғри пропорционал эканлигини эътиборга олсак, узатиш

сони учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1} \quad (14.12)$$

Ички илашган ғилдираклар учун бу формулада муносабат ишора, ташқи илашган ғилдираклар учун эса манфий ишора олинади.

Кетма-кет илашган тишли ғилдираклардан бири қўзғалмас бўлиб, қолганлари мазкур ғилдирак ўқи атрофида айланувчи АВ кривошинга ўрнатилган бўлса, бундай узатма *планетар узатма* дейилади (14.11- расм).

Агар планетар узатмадаги қўзғалмас ғилдирак ҳам ўз ўқи атрофида АВ кривошинга дахлсиз равишда айлана олса, бундай узатма *дифференциал узатма* дейилади.

Планетар ёки дифференциал узатмаларнинг кинематик характеристикаларини аниқлашда қуйидаги усуллардан фойдаланиш мумкин.

1. Бурчак тезликларни қўшиш усули. Планетар ёки дифференциал узатмалардаги ғилдиракларнинг айланиш ўқлари параллел бўлса, у ҳолда (14.7) ёки (14.9) формулалар воситасида абсолют ҳаракат бурчак тезлиги аниқланади. Абсолют ҳаракатнинг бурчак тезлик вектори айланиш оний ўқи билан устма-уст тушади.

2. Тезликлар оний марказидан фойдаланиш усули. Планетар ва дифференциал узатмалардаги ғилдираклар текис параллел ҳаракатда иштроқ этгани туфайли дастлаб берилган ғилдирак учун тезликларнинг оний марказини, сўнгра

$$\omega_a = \frac{v_a}{r}$$

формула ёрдамида унинг абсолют ҳаракат бурчак тезлигини аниқлаймиз.

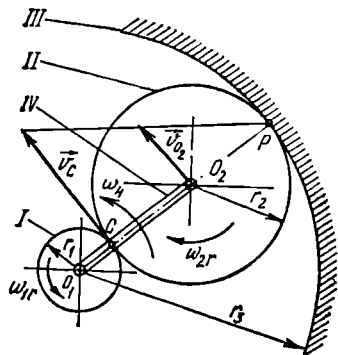
Нисбий ҳаракат бурчак тезлигини (14.7) ёки (14.9) формулалар воситасида аниқлаш мумкин.

3. «Тўхтатиш» усули ёки Видлис усули. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, планетар ёки дифференциал узатма оддий узатмага келтирилади ва унга мос бўлган кинематик муносабатлардан фойдаланилади. Бунинг учун планетар ёки дифференциал узатманинг кривошипни фикран тўхтатилади ва узатма таркибига кирувчи барча ғилдиракларга миқдор жиҳатдан кривошип бурчак тезлигига тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлган бурчак тезлик берилади. У ҳолда кривошипнинг бурчак тезлиги нолга, ғилдиракларнинг бурчак тезлиги эса, дастлабки бурчак тезлиги билан кривошип

бурчак тезликларининг айирмасига тенг бўлади.

Бу усулларни қўллашга оид қу-
йидаги масалаларни ечамиз.

14.5- масала. Чарх тошини тез айлан-
тирувчи илашма қуйидагича тузилган: IV
стержень махсус даста воситасида O_1 ўқ
атрофида ω_1 бурчак тезлиги билан айлан-
тирилади (14.12- расм). Стерженьнинг O_2
учидаги бармоққа r_2 радиусли II ғилди-
рак эркин кийгизилган. Даста айлан-
тирилганда II ғилдирак қўзғалмас III ғилдирак
ичида сирпанмасдан айланади. Бунда иш-
қаланиш ҳисобига II ғилдирак чарх ўқи
билан маҳкам боғланган I ғилдиракни сир-
пантисмасдан айлантиради. III ғилдирак-
нинг радиуси r_3 берилган деб қараб, r_1
нинг шундай қиймати топилсинки, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 12$



14.12- расм.

бўлсин, яъни чарх уни ҳаракатга келтирувчи дастага қараганда 12 марта тезроқ
айлансин.

Ечиш. 1. Масалани бурчак тезликларни қўшиш усулида ечиш учун ғилди-
раklar абсолют бурчак тезликларининг қийматини мос равишда $\omega_1, \omega_2, \omega_3$
($\omega_3=0$) билан белгилаймиз. Ғилдиракларнинг IV стерженга нисбатан бурчак
тезликларини $\omega_{1r}, \omega_{2r}, \omega_{3r}$ билан белгиласак, (14.7) га биноан

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_4, \quad \omega_{2r} = \omega_2 - \omega_4, \quad \omega_{3r} = -\omega_4. \quad (1)$$

Бунда ω_4 билан O_1O_2 стерженнинг бурчак тезлиги белгиланган бўлиб, у
кўчирма ҳаракат бурчак тезлигини ифодалайди.

I ва II ғилдираклар ташқи, II ва III ғилдираклар ички илашгани туфайли
бу ғилдиракларнинг нисбий ҳаракат бурчак тезликлари орасида қуйидаги муно-
сабатлар мавжуд бўлади:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_{2r}}{\omega_{3r}} = \frac{r_3}{r_2}, \quad (2)$$

(1) ни (2) га қўйсак,

$$\frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_2 - \omega_4} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_2 - \omega_4}{-\omega_4} = \frac{r_3}{r_2}.$$

Бу тенгликлари ўзаро кўпайтсак,

$$\frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_4} = \frac{r_3}{r_1}, \quad \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_4} - 1 = \frac{r_3}{r_1}$$

ёки $\frac{\omega_1}{\omega_4} = 12$ бўлгани учун $r_1 = \frac{1}{11} r_3$.

2. Масалани тезликлар оний марказини аниқлаш усули билан ечамиз. II
ғилдирак III ғилдирак ичида сирпанмасдан думалагани сабабли бу ғилдираклар-
нинг илашган P нуқтаси II ғилдирак учун тезликлар оний марказини ифода-
лайди. II ғилдирак марказининг тезлигини

$$v_{O_2} = \omega_4 (r_1 + r_2) \quad (3)$$

формула ёрдамида аниқлаймиз.

I ва II ғилдирақларнинг илашган C нуқтаси иккала ғилдиракка ҳам тааллуқли бўлгани учун

$$v_C = 2 v_{O_4}, \quad (4)$$

$$v_C = \omega_1 r_1. \quad (5)$$

(3), (4) ва (5) дан фойдаланиб ушбу муносабатни оламыз:

$$2 \omega_4 (r_1 + r_2) = \omega_1 r_1,$$

бундан

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1}. \quad (6)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = 12 \text{ ни (6) га қўйсак,}$$

$$12 = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1}, \Rightarrow 10 r_1 = 2 r_2$$

ёки $2 r_2 = r_3 - r_1$ бўлгани учун $11 r_1 = r_3$.

Шундай қилиб,

$$r_1 = \frac{1}{11} r_3.$$

3. Масалани «тўхтатиш» усули билан ечиш учун IV стерженни фикран тўхтатамиз ва барча ғилдирақларга миқдор жиҳатдан IV стерженнинг бурчак тезлиги ω_4 га тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлган бурчак тезлик берамиз ҳамда мос бурчак тезликларни қуйидаги жадвалга ёзамиз.

	Етакчи IV стержень	Ғилдирақлар		
		III	II	I
Тўхтатгунча бурчак тезлиги	ω_4	0	ω_2	ω_1
Тўхтатгандан кейинги бурчак тезлиги	0	$-\omega_4$	$\omega_2 - \omega_4$	$\omega_1 - \omega_4$
Илашиш тури		ички		ташқи

III ва II ғилдирақлар ички ҳамда II ва I ғилдирақлар ташқи илашганлигини эътиборга олиб, (14.12) формулага асосан ушбу тенгликларни оламыз:

$$-\frac{\omega_4}{\omega_2 - \omega_4} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{\omega_2 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = -\frac{r_1}{r_2},$$

бундан

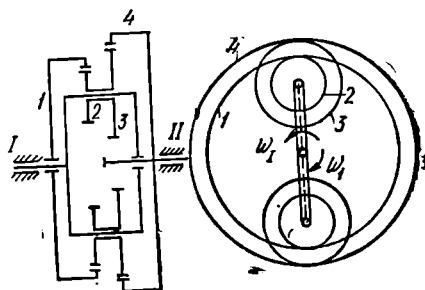
$$\frac{\omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = \frac{r_1}{r_3}$$

ёки $\frac{\omega_1}{\omega_4} = 12$ бўлгани учун

$$r_1 = \frac{1}{11} r_3.$$

14.6- масала. Дифференциал узатмали тезликлар редуктори тишли тўртта ғилдиракдан иборат: булардан биринчиси ички томондан илашган бўлиб, бир

минутда 160 марта айланади, тишларнинг сони $z_1 = 70$, иккинчи ва учинчи филдираклар бир-бирига бириктирилган, уларнинг бурчак тезлиги $n_1 = 1200$ айл/мин бўлиб, етакловчи I валнинг атрофида вал билан бирга айланувчи ўққа ўрнатилган; тишларининг сони $z_2 = 20$, $z_3 = 30$, тўртинчи филдирак учинчи филдирак билан ички томондан илашган ва етакланувчи валга маҳкам ўрнатилган бўлиб, тишларининг сони $z_4 = 80$. Етакланувчи валнинг бир минутда неча марта айланиши топилсин, I вал ва I филдирак қарама-қарши томонга айланади (14.13- расм).



14.13- расм.

Ечиш. Масалани Виллис усули билан ечиш учун I вални фикран тўхтата-

миз ва 1, 2, 3, 4 филдиракларга миқдор жиҳатдан I валнинг бурчак тезлиги ω_1 га тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлган бурчак тезликлар берамиз ва мос бурчак тезликларни ушбу жадвалга жойлаштирамиз.

	Етакловчи вал I	Филдирак (ёки вал) лар		
		1	2,3	4, II
Тўхтатгунча бурчак тезлиги	ω_1	$-\omega_1$	$-\omega_{23}$	$-\omega_{II}$
Тўхтатгандан кейинги бурчак тезлиги	0	$-\omega_1 - \omega_1$	$-\omega_{23} - \omega_1$	$-\omega_{II} - \omega_1$
Илаиш тури		ички	ички	

I вал ва I филдирак ҳамда унга илашган бошқа филдираклар қарама-қарши томонга айлангани учун уларнинг бурчак тезликлари ҳар хил ишора билан олинган.

I ва 2 ҳамда 3 ва 4 филдираклар ички илашганини назарда тутиб, (14.12) га асосан қуйидаги тенгликларни ёзамиз:

$$\frac{-\omega_1 - \omega_1}{-\omega_{23} - \omega_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \frac{-\omega_{23} - \omega_1}{-\omega_{II} - \omega_1} = \frac{z_4}{z_3}.$$

Бу тенгликларни кўпайтсак,

$$\frac{-\omega_1 - \omega_1}{-\omega_{II} - \omega_1} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}, \Rightarrow \frac{\frac{-\omega_1}{\omega_1} - 1}{\frac{-\omega_{II}}{\omega_1} - 1} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3},$$

буяда $\frac{\omega_I}{\omega_1} = \frac{n_I}{n_1}$, $\frac{\omega_{II}}{\omega_1} = \frac{n_{II}}{n_1}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$n_{II} = n_1 \left[\frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} \left(1 + \frac{n_I}{n_1} \right) - 1 \right] = 1200 \cdot \left[\frac{70 \cdot 30}{20 \cdot 80} \left(1 + \frac{160}{1200} \right) - 1 \right] = 585 \text{ айл./мин.}$$

14.6- §. Жисмнинг илгарилама ва айланма ҳаракатларини қўшиш

Қаттиқ жисм бир вақтнинг ўзида $\vec{u}$ тезлик билан илгарилама ҳаракатда ҳамда бирор ўқ атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда иштирок этсин. Улардан қай бирини нисбий ҳаракат ёки кўчирма ҳаракат деб олиш аҳамиятга эга эмас. Чунки ҳар ондаги тезликларнинг тақсимланиши ташкил этувчи ҳаракатларнинг ўрин алмашишига боғлиқ бўлмайди. Қуйидаги учта ҳолни кўриб чиқамиз.

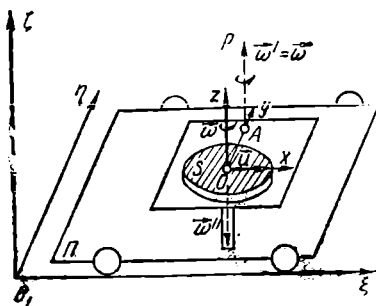
1. Илгарилама ҳаракат тезлиги айланиш ўқиға перпендикуляр йўналган ҳол ($\vec{u} \perp \vec{\omega}$). Айтайлик, қаттиқ жисм қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан Oz ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлсин. Ўз навбатида $Oxyz$ координаталар системаси қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан $\vec{\omega}$ векторға перпендикуляр йўналишда $\vec{u}$ тезлик билан (масалан, аравача билан биргаликда) илгарилама ҳаракатда иштирок этсин (14.14- расм). Бу ҳолда жисм z ўққа перпендикуляр Π текисликка нисбатан текис параллел ҳаракатда бўлади. Агар қутб учун O нуқтани олсак, у ҳолда жисмнинг ҳаракатини қутбнинг тезлигига тенг $\vec{v}_O = \vec{u}$ тезлик билан илгарилама ҳаракат ҳамда қутб атрофидаги ω бурчак тезлик билан содир бўладиган айланма ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин (10.3- §).

Жисмнинг абсолют ҳаракатини аниқлаш учун илгарилама ҳаракат тезлиги $\vec{u}$ ни шундай ($\vec{\omega}'$, $\vec{\omega}''$) жуфт айланиш билан алмаштирамизки, жуфт айланишни ташкил этувчи бурчак тезликлар $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$ шартларни қаноатлантирсин. Бунда $OA = d$ масофа $u = \omega' \cdot d$ тенгликдан аниқланади:

$$d = \frac{u}{\omega'}$$

ёки $\omega' = \omega$ бўлгани учун

$$d = \frac{u}{\omega}. \quad (14.13)$$



14.14- расм.

$\vec{\omega}$ ва $\vec{\omega}''$ векторларнинг йнғиндисин нолға тенг бўлади. Натижада кўриладиган жисмнинг ҳаракатини AP ўқ атрофидаги $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ бурчак тезлик билан содир бўладиган оний айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди: *агар жисм бир*

вақтнинг ўзида Oz ўқ атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда ҳақида $\vec{\omega}$ бурчак тезликка перпендикуляр бўлган $\vec{u}$ тезлик билан илгарилама ҳаракатда иштирок этса, жисмнинг абсолют ҳаракати Oz ўққа параллел бўлган ва ундан $d = \frac{u}{\omega}$ масофада ётувчи ўқ атрофида миқдор ва йўналиши жиҳатдан берилган $\vec{\omega}$ бурчак тезликка тенг бўлган $\vec{\omega}'$ бурчак тезлик билан содир бўладиган оний айланма ҳаракатдан иборат бўлади.

2. Илгарилама ҳаракат тезлиги айланиш ўқиға параллел бўлган ҳол ($\vec{u} \parallel \vec{\omega}$). Винт ҳаракати. Агар жисмнинг абсолют ҳаракати Oz ўқ атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан содир бўладиган айланма ҳаракатдан (нисбий ҳаракатдан) ҳамда z ўққа параллел бўлган $\vec{v}_e = \vec{u}$ тезлик билан содир бўладиган илгарилама ҳаракатдан (кўчирма ҳаракатдан) ташкил топган бўлса, жисмнинг бундай ҳаракати *винт ҳаракати* дейилади (14.15-расм). Айланиш содир бўладиган Oz ўқ винт ўқи дейилади.

Винт ҳаракатида бўлган жисмнинг ихтиёрий M нуқтасидан винт ўқиғача бўлган r масофа ўзгармасдан қолади. Шу сабабли винт ҳаракатида жисмнинг M нуқтаси r радиусли доиравий цилиндр сиртида *винт чизиги* деб аталувчи траектория бўйлаб ҳаракатланади.

Агар $\vec{\omega}$ ва $\vec{u}$ векторлари Oz ўқ бўйича бир томонга йўналса, *ўнг винт*, қарама-қарши томонга йўналса, *чап винт*ни ташкил этади.

Жисмнинг винт ўқи атрофидаги бир марта айланиш вақтини T билан белгилайлик. Агар берилган онда M нуқта цилиндрнинг AB ясовчисида ётса, бу нуқта

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

вақт ўтгандан кейин яна AB ясовчини кесиб ўтади ҳамда бу ясовчи бўйлаб

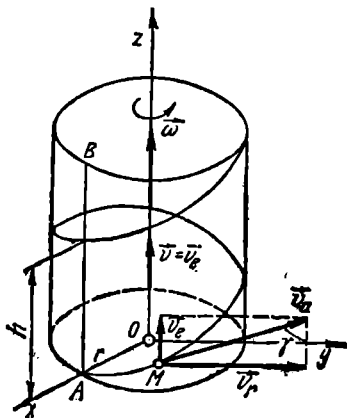
$$h = uT = \frac{2\pi u}{\omega} \quad (14.14)$$

масофага кўчади. h масофа *винт қадами* дейилади.

Илгарилама ҳаракат тезлиги u нинг айланма ҳаракат бурчак тезлиги ω га нисбати винт параметри дейилади ва у p билан белгиланади:

$$p = \frac{u}{\omega}. \quad (14.15)$$

(14.15) ни (14.14) га олиб бориб қўйсак, винт қадами билан винт параметри орасидаги қуйидаги муносабатни оламиз:



14.15- расм.

$$h = 2\pi p.$$

М нуқта винт ўқи атрофида модули $v_r = \omega r$ га тенг нисбий тезлик ҳамда цилиндр ясовчиси бўйлаб $\vec{v}_e = u$ кўчирма тезлик билан ҳаракатланади. Тезликларни қўшиш ҳақидаги теоремага кўра М нуқтанинг абсолют тезлиги қуйидагига тенг:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

ёки кўрилатган ҳолда $\vec{v}_r \perp \vec{v}_e$ бўлгани учун абсолют тезликнинг модули

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{\omega^2 r^2 + u^2} = \omega \sqrt{p^2 + r^2} \quad (14.16)$$

формула ёрдамида аниқланади.

Абсолют тезликнинг цилиндр ясовчиси билан ташкил қилган бурчагини γ билан белгиласак, у ҳолда

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_r}{v_e} = \frac{r\omega}{u} = \frac{r}{p} \quad (14.17)$$

муносабат ўринли бўлади.

Агар ҳаракат давомида $p = \text{const}$ бўлса, у ҳолда (14.17) га биноан

$$\operatorname{tg} \gamma = \text{const}$$

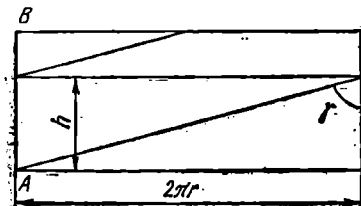
бўлади. Шу сабабли цилиндрни бирор ясовчиси бўйича кесиб, текисликка ёйсак, у ҳолда винт чизиги бу текисликда цилиндр ясовчиси билан γ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқлардан иборат бўлади (14.16-расм). Расмдан

$$h = 2\pi p \operatorname{tg} \gamma$$

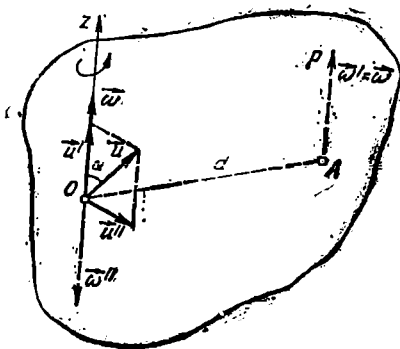
ифодани оламиз.

3. Илгарилама ҳаракат тезлиги айланиш ўқи билан ихтиёрий бурчак ташкил этган ҳол (14.17-расм). Оний винт ҳаракати. Бу ҳолда илгарилама ҳаракат тезлиги u ни $\vec{\omega}$ бўйича йўналган u' ва унга перпендикуляр йўналган u'' ташкил этувчиларга ажратамиз:

$$u' = u \cos \alpha, \quad u'' = u \sin \alpha.$$



14.16- расм.



14.17- расм.

14.18- расм.

нуқталарининг берилган ондаги тезлиги AP ўқ атрофида $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ бурчак тезлик ва илгарилама ҳаракати $u' = u \cos \alpha$ тезлик билан содир бўладиган винт ҳаракатидаги каби аниқланади. Жисм ҳаракатланганда AP ўқ ўз ҳолатини ўзгартира боради. Шу сабабли бундай ҳаракат *оний винт ҳаракати* дейилади.

14.7-масала. Куб шаклидаги қаттиқ жисм берилган онда AB қирраси атрофида $\omega = 1\text{с}^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади ва AC диагональ бўйлаб $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ м/с тезлик билан илгариллама ҳаракат қилади. Агар кубнинг томони $a = 0,5\text{ м}$ бўлса, берилган онда кубнинг абсолют ҳаракати аниқлансин (14.18-расм).

$$u' = u \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,5 \text{ м/с}, \quad u'' = u \sin 45^\circ = 0,5 \text{ м/с}.$$

3- ҳолда кўрганимиздек, кубнинг берилган ондаги ҳаракати AB ўқдан

$$d = \frac{u''}{u} = -\frac{0,5}{1} = 0,5 \text{ м} = a$$

масофада ётувчи, яъни кубнинг E учидан ўтувчи EK қирраси атрофидаги оний винт ҳаракатидан иборат бўлади.

Шундай қилиб, берилган онда кубнинг абсолют ҳаракати унинг EK қирраси атрофида $\omega' = 1 \text{ с}^{-1}$ бурчак тезлик билан содир бўладиган айланма ҳаракатдан ҳамда $u' = 0,5 \text{ м/с}$ тезлик билан содир бўладиган илгарилама ҳаракатдан ташкил топган оний винт ҳаракатидан иборат бўлади.

14.8- масала. Парма $n = 120$ айл/мин га тўғри келадиган бурчак тезлик ҳамда $u = 0,02 \text{ м/с}$ илгарилама ҳаракат тезлиги билан винт ҳаракатда бўлади. Агар айланма ҳаракат бурчак тезлиги $\vec{\omega}$ ва илгарилама ҳаракат тезлиги $\vec{u}$ парма ўқи бўйлаб бир томонга йўналган бўлса, винт қадами ва винт параметри аниқлансин.

Ечиш. Парма $\omega = \frac{120 \pi}{30} = 4\pi \text{ с}^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади. (14.14)

ва (14.15) формулаларга асосан винт қадами ва винт параметрини аниқлаймиз:

$$h = \frac{2\pi u}{\omega} = 0,01 \text{ м},$$

$$p = \frac{u}{\omega} = 0,0016 \text{ м}.$$

15-БОБ. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ҚОНУНЛАРИ

15.1-§. Динамика предмети

Динамика юнонча «*dynamics*» — куч сўзидан олинган. Динамикада моддий нуқта, моддий нуқталар системаси ва абсолют қаттиқ жисмнинг ҳаракати шу ҳаракатни вужудга келтирувчи кучлар билан биргаликда ўрганилади.

Юқорида жисмларнинг бир-бирига ўзаро механик таъсири кучни ифодалашни кўрган эдик. Статикада асосан ўзгармас кучлар ўрганилган эди. Динамикада ўзгармас кучлар билан биргаликда муқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгарувчи кучлар таъсири ҳам ўрганилади. Масалан, моддий нуқтанинг тебранма ҳаракатида унга таъсир этувчи даврий уйғотувчи куч вақтнинг функциясида ноборат бўлади; шунингдек, реактив двигателнинг тортиш кучи ёқилғининг ёпиш вақтига боғлиқ; планеталарнинг тортишиш кучи ёки пружинанинг эластиклик кучи жисмларнинг ҳолатига боғлиқ; нуқтанинг ҳаракати га муҳитнинг кўрсатадиган қаршилиқ кучи нуқтанинг тезлигига боғлиқ бўлади.

Умумий ҳолда кучлар вақтга, куч қўйилган нуқтанинг координаталарига ва тезлигига боғлиқ бўлиши мумкин:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

ёки

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

Механикада кучларнинг табиати ўрганилмайди; бундай масала билан физиканинг электродинамика, қаттиқ жисм назарияси ва бошқа бўлимларида шуғулланилади.

Ишқаланиш кучи тушунчаси киритилганда кўрганимиздек, баъзан тинч турган жисмга куч таъсир этса ҳам у ҳаракатга келмайди. Ҳар қандай жисмнинг ҳаракати унга таъсир этувчи кучлардан ташқари, материянинг асосий хусусиятларидан бири ҳисобланган жисмнинг инертлиги ёки инерциясига боғлиқ бўлади. Куч таъсир этмаганда жисмнинг ўз ҳолатини ёки ҳаракатини сақлашида, куч таъсир этганида эса ўз ҳаракатини бирданига эмас, балки жисм ташкил топган модданинг миқдорига боғлиқ равишда аста-секин ўзгартиришида бу хусусият намоён бўлади.

Қаттиқ жисм ташкил топган модданинг миқдори билан характерланувчи ва жисмнинг инертлик ўлчовини ифодаловчи катталик *инерцион масса* дейилади.

Жисм ташкил топган модданинг миқдори жисмнинг оғирлигига боғлиқ бўлади. Маълумки, жисмнинг оғирлиги жисм турган жойнинг географик кенглиги ва денгиз сатҳидан баландлигига боғлиқ факторлар билан аниқланади, лекин жисмдаги моддаларнинг миқдори бу факторларга боғлиқ бўлмайди. Кузатишларнинг кўрсатишича, Ер сиртига яқин масофадаги жисмнинг оғирлигини унинг эркин тушиш тезланишига нисбати ўзгармас бўлиб, кузатиш жойига боғлиқ бўлмайди, яъни жисмнинг оғирлигини P , эркин тушиш тезланишини g билан белгиласак, у ҳолда берилган жисм учун

$$\frac{P}{g} = m = \text{const} \quad (15.1)$$

бўлади.

Жисмнинг физик хусусиятларига боғлиқ бўлган ва (15.1) формула ёрдамида аниқланадиган m катталикка *гравитацион масса* дейилади.

Одатдаги шароитда (жисмларнинг тезлиги ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлганда ҳамда гравитацион майдони кучли бўлмаганда) кўплаб ўтказилган тажрибалар асосида олинган натижаларга кўра, гравитацион масса ва инерцион масса ўзаро тенг бўлиши исботланган. Бу ҳолат А. Эйнштейннинг нисбийлик назариясида муҳим ўринни эгаллайди ва «*эквивалентлик принципи*» деб юритилади.

Шундай қилиб, *масса жисм ташкил топган модданинг миқдорий ўлчови бўлиши билан бирга инерция ўлчовини ҳам ифодалайди*, бинобарин, динамикада жисмнинг моддийлик ва инерция хусусиятлари намоён бўлади.

Нисбийлик назариясида жисмнинг массаси m унинг тезлигига боғлиқ равишда ушбу

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

формула ёрдамида аниқланиши исботланади. Бунда m_0 — жисмнинг тинч ҳолатдаги массаси; v — жисмнинг тезлиги ва c — ёруғлик тезлиги. Классик механикада жисмларнинг тезлиги ёруғлик тезлигидан анча кичик деб қаралади. Шу сабабли $\frac{v^2}{c^2}$ катталик бирга нисбатан жуда кичик бўлгани учун уни эътиборга олмай жисмнинг массаси ўзгармас деб қаралади.

СИ бирликлар системасида масса килограмм (кг) билан ўлчанади.

Жисмнинг ҳаракати унга таъсир этувчи кучлардан ташқари жисмнинг шаклига, яъни жисм массасининг қандай тақсимланганига ҳам боғлиқ бўлади.

Динамикада дастлаб моддий нуқтанинг ҳаракати ўрганилади. Сўнгра олинган натижалар моддий нуқталар системаси ва қаттиқ жисмга татбиқ қилинади.

15.2-§. Классик механиканинг асосий қонунлари

Динамика асосида тажриба ва кузатишлар воситасида аниқланган қонунлар ётади. Бу қонунлар XVII асрда Г. Галилей ва И.Ньютон томонидан кашф қилинган ҳамда Ньютоннинг «Натурал фалсафанинг математик асослари» асарида (1687 й.) баён қилинган.

Классик механиканинг биринчи қонуни Галилей томонидан кашф қилинган бўлиб, жисмларнинг инертлик хусусиятини ифодалайди ва *инерция қонуни* дейилади.

1-қонун (инерция қонуни). Ташқи таъсирдан танҳоланган моддий нуқта куч таъсир этмагунча ўзининг тинч ҳолатини ёки тўғри чизиқли текис ҳаракатини сақлайди.

Инерция қонунига биноан моддий нуқтанинг тўғри чизиқли текио ҳаракати *инерциал ҳаракат* ёки *инерция бўйича ҳаракат* дейилади.

Инерциал ҳаракатдаги нуқтанинг тезланиши нолга тенг бўлади ($\vec{w} = 0$). 1-қонунга кўра, агар нуқта тинч ҳолатда бўлса, у ўзича силжий олмайди ёки инерциал ҳаракатдаги нуқта ўз-ўзича ҳаракат тезлигининг миқдор ва йўналишини ўзгартириш олмайди. Моддий нуқтанинг тезлигини ўзгартириш учун бирор ташқи таъсир бўлиши керак. Бошқа жисмларнинг берилган нуқтага таъсири, яъни *куч* ана шундай таъсирни ифодалайди.

Кинематика бўлимида нуқтанинг механик ҳаракати бошқа бирор жисм билан боғланган ва саноқ системаси деб аталган координаталар системасига нисбатан ўрганилди. Агар танланган саноқ системаси учун инерция қонуни ўринли бўлса, бундай координаталар системаси *инерциал система* дейилади. Инерциал саноқ системасига нисбатан текширилаётган ҳаракат абсолют ҳаракат деб қаралади.

Тажрибаларнинг кўрсатишича, координаталар боши Қуёш марказида олинган ва ўқлари учта «қўзғалмас» юлдузлар томонга йўналган гелиоцентрик системани инерциал система деб қараш мумкин. Техникада учрайдиган кўпгина масалаларни ечишда инерциал система учун Ер билан боғланган координаталар системаси олинади. Бунда Ернинг суткалик айланиши ҳамда Қуёш атрофидаги эгри чизиқли орбита бўйлаб ҳаракати эътиборга олинмайди.

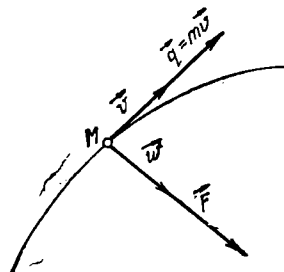
2-қонун (динамиканинг асосий қонуни). Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳаракатлантирувчи кучга пропорционал ва кучнинг таъсир чизиғи бўйича содир бўлади.

Моддий нуқтанинг массасини унинг берилган ондаги тезлик векторига кўпайтмасига тенг $\vec{q}$ вектор *нуқтанинг ҳаракат миқдори* дейилади:

$$\vec{q} = m\vec{v}. \quad (15.3)$$

M нуқтанинг ҳаракат миқдори мазкур нуқтага қўйилган $\vec{q}$ вектор билан ифодаланади (15.1-расм).

Ньютон иккинчи қонунининг векторли ифодаси қуйидагича ёзилади:



15.1- расм.

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F}. \quad (15.4)$$

Агар вақт ўтиши билан нуқтанинг массаси ўзгармасдан қолса, у ҳолда (15.4) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\vec{w} = \vec{F}, \quad (15.5)$$

бунда $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ нуқтанинг тезланишини ифодалайди.

Ньютоннинг 2-қонунини ифодаловчи (15.5) тенглама *нуқта динамикасининг асосий тенгламаси* дейилади. Бу тенгламадан кўра-мизки, *моддий нуқтанинг инерциал системага нисбатан тезланиши нуқтага таъсир этувчи кучга пропорционал бўлиб, мазкур куч бўйича йўналади*. Бинобарин, куч билан нуқта тезланишининг модуллари *орасида* $F = mw$ муносабат ўринли бўлади.

Бу тенгликдан кўрамизки, таъсир этувчи куч миқдор жиҳатдан ўзгармас бўлганда нуқтанинг массаси қанча катта бўлса, унинг тезланиши шунча кичик бўлади, яъни масса моддий нуқта тезлигининг ўзгаришига монанд бўладиган қаршилликни (инертлигини) ифодалайди.

3-қонун (таъсир ва акс таъсир қонуни). Ҳар қандай таъсирга унғи миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган акс таъсир мос келади, яъни иккита моддий нуқтанинг ўзаро таъсири миқдор жиҳатдан тенг ва шу нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналади.

Масалан, A нуқта B нуқтага $\vec{F}_B$ куч билан таъсир этсин; B нуқта эса A нуқтага $\vec{F}_A$ куч билан таъсир этсин (15.2-расм). 3-қонунга кўра

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A \quad (15.6)$$

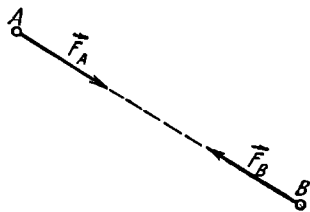
ёки

$$F_B = F_A$$

тенглик ўринли бўлади.

Кучлардан ихтиёрий биттаси «таъсир», иккинчиси эса «акс таъсир» деб аталади. Бундай иккита кучлар ўзаро мувозанатда бўлмайди, чунки улар моддий нуқталар деб тасаввур қилинадиган бошқа-бошқа жисмларга қўйилади.

4-қонун (кучлар таъсирининг ўзаро мустақиллик қонуни). Агар моддий нуқтага бир нечта куч таъсир этса, нуқтанинг тезланиши ҳар бир кучнинг алоҳида таъсиридан нуқта оладиган тезланишларнинг геометрик йиғиндига тенг бўлади.

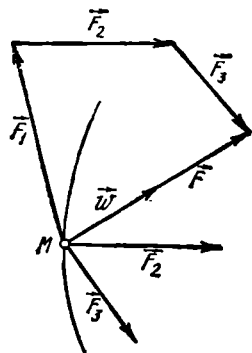


15.2- расм.

M моддий нуқта ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кучлар таъсирида бўлсин. Бу кучлар системаси таъсиридан нуқтанинг олган тезланишини $\vec{w}$, ҳар бир кучнинг алоҳида таъсиридан нуқтанинг оладиган тезланишларини $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n$ билан белгилайлик. У ҳолда 4-қонунга асосан

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \dots + \vec{w}_n. \quad (15.7)$$

Натижа. Нуқтага таъсир этувчи кучлар системаси шу кучлар системасининг тенг таъсир этувчисига динамик эквивалент бўлади.



15.3- расм.

Исбот. M моддий нуқтага ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кучлар таъсир этсин (15.3-расм, аниқлик учун расмда $n = 3$ бўлган ҳол тасвирланган). (15.7) нинг ҳар икки томонини нуқтанинг массаси m га кўпайтирсак,

$$m\vec{w} = m\vec{w}_1 + m\vec{w}_2 + \dots + m\vec{w}_n \quad (15.8)$$

тенглик ҳосил бўлади.

2-қонунга кўра

$$m\vec{w}_1 = \vec{F}_1, \quad m\vec{w}_2 = \vec{F}_2, \quad \dots, \quad m\vec{w}_n = \vec{F}_n.$$

Шу сабабли (15.8) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\vec{w} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

ёки

$$m\vec{w} = \sum \vec{F}_v \quad (15.9)$$

Бу векторли тенглама кучлар системаси таъсиридаги нуқта учун динамиканинг асосий тенгламасини ифодалайди. (15.9) ни (15.5) кўринишда ёзиш учун нуқтага таъсир этувчи $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучларни уларнинг геометрик йиғиндисига (яъни бош векторига) тенг бўлган $\vec{F}$ тенг таъсир этувчи куч билан алмаштириш керак.

$$m\vec{w} = \vec{F} \quad \blacksquare \quad (15.10)$$

($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кучлар таъсиридан M нуқтанинг олган тезланиши $\vec{w}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ бўйлаб йўналади (15.3-расм).

16-606. ЭРКИН МОДДИЙ НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ ВА ДИНАМИКАНИНГ ИККИ АСОСИЙ МАСАЛАСИ

16.1-§. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Массаси m га тенг бўлган M эркин моддий нуқта $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсирида *Охуз* инерциал тўғри бурчакли Декарт координата ўқлари системасига нисбатан ҳаракатлансин. Юқорида кўрганимиздек [(15.9) ёки (15.10)] бу нуқта учун динамиканинг асосий тенгламаси

$$m\vec{w} = \sum \vec{F}_v$$

ёки

$$m\vec{w} = \vec{F}$$

кўринишда ёзилади. Бунда $\vec{F}$ — нуқтага қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси, $\vec{w}$ — нуқтаниннг $\vec{F}$ куч таъсир чизиги бўйлаб йўналган тезланиши (16.1-расм).

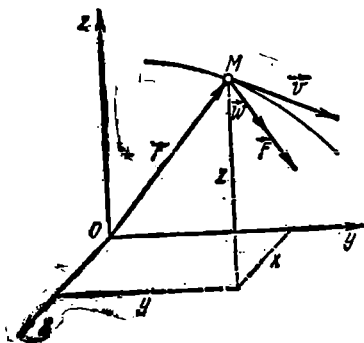
Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини турли формада ифодалаш мумкин. Шулардан айримларини келтирамиз.

1. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг вектор формадаги дифференциал тенгламаси. Нуқтаниннг тезланиш вектори $\vec{w}$ тезлик вектори $\vec{v}$ дан вақт бўйича олинган биринчи ҳосилага ёки нуқтаниннг радиус-вектори $\vec{r}$ дан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосилага тенг бўлгани учун охириги тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (16.1)$$

ёки

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (16.2)$$



16.1- расм.

(16.1) ёки (16.2) тенгламалар эркин моддий нуқта ҳаракатининг вектор формадаги дифференциал тенгламаси дейилади.

2. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг Декарт координата ўқларидаги дифференциал тенгламалари. (16.2) ни *Охуз* инерциал координата системаси ўқларига проекциялаб, ушбу тенгламаларни оламиз:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

ёки

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (16.3)$$

Бунда x, y, z ҳаракатланаётган M нуқтанинг координаталари;

$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$ — нуқта тезланиши $\vec{w}$ нинг координата ўқларидаги проекциялари; F_x, F_y, F_z тенг таъсир этувчи куч $\vec{F}$ нинг проекциялари. Агар $\vec{F}_v$ ($v = 1, 2, \dots, n$) кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларини X_v, Y_v, Z_v билан белгиласак, тенг таъсир этувчининг координата ўқларидаги проекциялари учун

$$F_x = \sum X_v, \quad F_y = \sum Y_v, \quad F_z = \sum Z_v$$

муносабатлар ўринли бўлади. Шу сабабли (16.3) ни

$$m\ddot{x} = \sum X_v, \quad m\ddot{y} = \sum Y_v, \quad m\ddot{z} = \sum Z_v \quad (16.4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(16.3) ёки (16.4) тенгламалар эркин моддий нуқта ҳаракатининг Декарт координата ўқларидаги дифференциал тенгламаларини ифодалайди.

Юқорида кўрганимиздек (15.1-§), умумий ҳолда нуқтага таъсир этувчи кучлар вақт t га, ҳаракатланувчи нуқтанинг координаталари x, y, z га ва нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ га боғлиқ бўлади. Шу сабабли умумий ҳолда (16.3) ни

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \quad (16.5)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

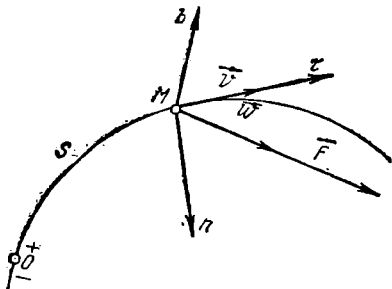
Агар моддий нуқта *Оху* текислигида ҳаракатланса, (16.3) нинг биринчи иккитаси ўринли бўлади:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y. \quad (16.6)$$

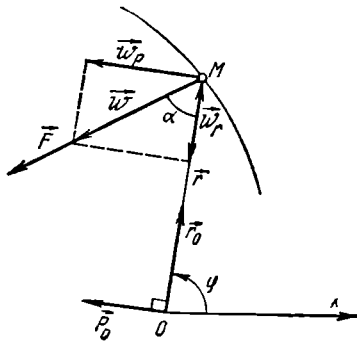
Агар нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлса, *Ох* ўқни ҳаракат траекторияси бўйлаб йўналтирамыз. Бу ҳолда нуқтанинг ҳаракати (16.3) нинг биринчи тенгламаси билан ифодаланади:

$$m\ddot{x} = F_x. \quad (16.7)$$

Бу тенгламага *нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламаси* дейилади.



16.2- расм.



16.3- расм.

3. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг табиий координата ўқларидаги дифференциал тенгламалари. Агар M нуқтанинг ҳаракат траекторияси берилган бўлса, нуқтадан $M\tau$ — уринма, Mn — бош нормаль ва Mb бинормаллардан ташкил топган табиий координата ўқларини (8.5-§) ўтказамиз (16.2-расм). Кинематикадан маълумки [(8.51), (8.51, а) га асосан]:

$$\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s}, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \omega_b = 0,$$

бунда v_τ тезликнинг алгебраик қиймати (тезлик векторининг уринмадаги проекцияси), s — нуқтанинг ёй координатаси, ρ — траекториянинг M нуқтадаги эгрилик радиусидан иборат. Тенг таъсир этувчининг уринма, бош нормаль ва бинормалдаги проекцияларини мос равишда F_τ , F_n , F_b билан белгилаб, эркин моддий нуқта ҳаракатининг табиий координата ўқларидаги дифференциал тенгламаларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{s} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b. \quad (16.8)$$

(16.8) тенгламаларга эркин моддий нуқта ҳаракатининг табиий координата ўқларидаги динамик тенгламалари дейилади. Бу тенгламалар илк бор Л. Эйлер томонидан чиқарилган.

(16.8) нинг охириги тенгламасидан кўрамизки, эркин нуқтага қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ (худди тезланиш вектори $\vec{w}$ каби) M нуқтада траекторияга ўтказилган эгрилик текислигида ётади.

4. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг қутб координаталаридаги дифференциал тенгламалари. Агар моддий нуқта $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$ кучлар таъсирида бир текисликда ҳаракатланса, у ҳолда қутб координаталар системасини ўтказиб, (15.10) ни қутб радиуси ва унга перпендикуляр йўналишга проекциялаймиз (16.3-расм). Тенг таъсир

этувчи куч $\vec{F}$ нинг бу ўқлардаги проекцияларини F_r , F_p билан белгиласак,

$$m\omega_r = F_r, \quad m\omega_p = F_p \quad (16.9)$$

ҳосил бўлади.

Бунда $\omega = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $\omega_p = r\dot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r}$ мос равишда радиал ва кўндаланг тезланишларни ифодалайди. Шундай қилиб, (16.9) ни қуйидагича ёзамиз:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad m(r\dot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r}) = F_p$$

ёки $r\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi})$ эканлигини эътиборга олсак,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) = F_p. \quad (16.10)$$

(16.10) тенгламалар бир текисликда ҳаракатланувчи эркин моддий нуқта ҳаракатининг қутб координаталар системасидаги ҳаракат дифференциал тенгламаларини ифодалайди. Уларга эркин моддий нуқта ҳаракатининг қутб координаталаридаги динамик тенгламалари дейилади.

Динамикада ҳам боғланишдаги нуқтанинг ҳаракатини ўрганиш учун боғланишдан бўшатиш аксиомасидан фойдаланамиз, яъни нуқтани берилган кучлар ва боғланиш реакция кучлари таъсиридаги «эркин» нуқта деб қараймиз. Шу сабабли боғланишдаги нуқта учун чиқарилган динамик тенгламаларда боғланиш реакция кучлари ҳам қатнашади*.

16.2-§. Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласи (тўғри масала)

Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласи, нуқтанинг массаси ва кинематик ҳаракат тенгламалари берилганда шу ҳаракатни вужудга келтирувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлашдан иборат. Бу масалага *нуқта динамикасининг тўғри масаласи* дейилади.

Кучларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлаш учун моддий нуқтанинг кинематик ҳаракат тенгламалари қандай усулда берилишига қараб, нуқтанинг векторли, Декарт координата ўқларидаги, табиий координата ўқларидаги ёки эгри чизиқли координаталардаги динамик тенгламаларидан фойдаланамиз. Барча ҳолларда ҳам масалани ечиш нуқтанинг кинематик тенгламаларидан тезланишни аниқлашга келтирилади.

1. Агар массаси m га тенг моддий нуқтанинг ҳаракати

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

* Боғланишдаги нуқтанинг динамик тенгламалари 18-бобда батафсил ёритилган.

вектор усулида берилса, нуқтанинг радиус-векторидан вақт бўйича икки марта ҳосила олиб, нуқтанинг тезланишини, сўнгра (16.2) га асосан тенг таъсир этувчи кучни топамиз:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (16.11)$$

2. Агар массаси m га тенг моддий нуқта кинематик ҳаракат тенгламаларининг Декарт координата ўқларидаги ифодалари

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

маълум бўлса, улардан икки марта вақт бўйича ҳосила олиб, тезланишнинг координата ўқларидаги проекцияларини, сўнгра (16.3) га кўра тенг таъсир этувчи кучнинг проекцияларини аниқлаймиз:

$$F_x = mx, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = mz. \quad (16.12)$$

Натижада тенг таъсир этувчи кучнинг модулини

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (16.13)$$

йўналтирувчи косинусларини

$$\cos(\vec{F}, \hat{x}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\vec{F}, \hat{y}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\vec{F}, \hat{z}) = \frac{F_z}{F} \quad (16.14)$$

формулалар воситасида топамиз.

3. Агар массаси m га тенг моддий нуқтанинг ҳаракати табиий усулда берилса, у ҳолда тенг таъсир этувчи кучнинг табиий координата ўқларидаги проекцияларини (16.8) тенгламалардан аниқлаймиз. Тенг таъсир этувчи кучнинг модулини

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} \quad (16.15)$$

йўналишини

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{w_\tau}{w_n} \quad (16.16)$$

формулалар ёрдамида ҳисоблаймиз. Бунда μ орқали $\vec{F}$ билан унинг нормал ташкил этувчиси $\vec{F}_n$ орасидаги бурчак белгиланган.

4. Агар массаси m га тенг моддий нуқтанинг кинематик ҳаракат тенгламаси

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

кутб координаталарида берилган бўлса, (16.10) га асосан кучнинг берилган координата ўқларидаги проекцияларини, сўнгра тенг таъсир этувчи кучнинг модуль ва йўналишини

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_p^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w_p}{w_r} \quad (16.17)$$

ифодалар орқали аниқлаймиз, бунда α билан $\vec{w}$ ва $\vec{w}_p$ лар орасидаги бурчак белгиланган.

Баъзида моддий нуқтага таъсир этувчи кучлардан бирортасини (масалан, номаълум реакция кучини) топиш талаб қилинадиган масалаларни ечишга тўғри келади. Масалан, массаси m га тенг нуқтага $\vec{F}(X, Y, Z)$ куч таъсир этади. Нуқтага $\vec{F}$ куч билан биргаликда қандай $Q(Q_x, Q_y, Q_z)$ куч қўйилганда нуқта

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \quad (16.18)$$

қонун бўйича ҳаракат қилади?

(16.4) га асосан

$$m\ddot{x} = X + Q_x, \quad m\ddot{y} = Y + Q_y, \quad m\ddot{z} = Z + Q_z.$$

Бундан изланаётган кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$Q_x = m f_1''(t) - X, \quad Q_y = m f_2''(t) - Y, \quad Q_z = m f_3''(t) - Z.$$

16.3-§. Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласини ечишга доир масалалар

Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласи қуйидаги тартибда ечилади:

1. Моддий нуқтанинг ҳаракати қандай усулда берилишига қараб унга мос координаталар системасини танлаб оламиз.

2. Нуқтага таъсир этувчи берилган кучларни тасвирлаймиз. Агар нуқтага боғланишлар қўйилган бўлса, боғланишдан бўшашиш ҳақидаги аксиомани қўллаб, боғланиш реакция кучларини кўрсатамиз.

3. Берилган кинематик ҳаракат тенгламаларидан тезланишни ёки унинг танланган координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз.

4. Танланган координаталар системасига мос бўлган ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузамиз ва улардан изланаётган номаълум кучларни аниқлаймиз.

16.1-масала. Массаси m га тенг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати

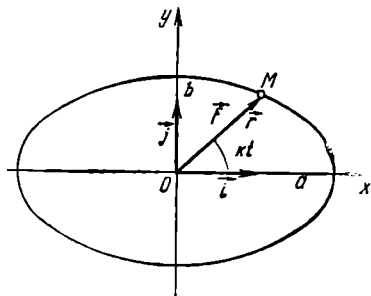
$$\vec{r} = a \vec{i} \cos kt + b \vec{j} \sin kt \quad (1)$$

векторли тенглама билан берилган. Бунда

a, b, k ўзгармас миқдорлар, $\vec{i}, \vec{j}$ лар эса x ва y ўқларининг бирлик векторларини ифодалайди (16.4-рasm). Нуқтага таъсир этувчи куч аниқлансин.

Ечиш. Координата ўқларини rasmда кўрсатилганидек оламиз. (1) га кўра M нуқтанинг координаталари $x = a \cos kt$, $y = b \sin kt$ тенгламалар билан ифодалангани учун мазкур нуқта ярим ўқлари a ва b га тенг эллипс бўйлаб ҳаракатланади.

(1) дан вақт бўйича икки марта ҳосил оламиз:



16.4- рasm.

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= -ak\vec{i}\sin kt + bk\vec{j}\cos kt, \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= -k^2(a\vec{i}\cos kt + b\vec{j}\sin kt).\end{aligned}\quad (2)$$

(16.11) га асосан нуқтага таъсир этувчи куч

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mk^2(a\vec{i}\cos kt + b\vec{j}\sin kt)$$

ёки (1) ни эътиборга олсак,

$$\vec{F} = -mk^2\vec{r}$$

ифодадан топилди.

Бинобарин, нуқтага доимо унинг радиус-вектори $\vec{r}$ га тескари йўналган, яъни O марказга тортувчи куч таъсир этади. Бундай кучга *марказий куч* дейилади.

16.2-масала. Массаси 0,2 кг бўлган нуқтанинг ҳаракати

$$x = 3\cos 2\pi t \text{ см}, \quad y = 4\sin \pi t \text{ см} \quad (1)$$

тенгламалар билан ифодаланади; бу ерда t секундлар ҳисобида. Нуқтага таъсир этувчи кучнинг проекциялари унинг координаталари орқали ифодалансин.

Ечиш. Нуқтанинг кинематик ҳаракат тенгламалари Декарт координата ўқларида бе-

рилган. Координата ўқларини 16.5-расмдагидек йўналтирамиз.

(1) дан вақт бўйича икки марта ҳосила оламиз:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -6\pi\sin 2\pi t, & \dot{y} &= 4\pi\cos \pi t, \\ \ddot{x} &= -12\pi^2\cos 2\pi t, & \ddot{y} &= -4\pi^2\sin \pi t.\end{aligned}$$

(16.12) га асосан $\vec{F}$ кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз.

$$F_x = m\ddot{x} = -2,4\pi^2\cos 2\pi t \frac{\text{кг см}}{\text{с}^2},$$

$$F_y = m\ddot{y} = -0,8\pi^2\sin \pi t \frac{\text{кг см}}{\text{с}^2}.$$

ёки (1) ни эътиборга олсак;

$$F_x = -0,8\pi^2 x \frac{\text{кг см}}{\text{с}^2} = -0,0789 x \frac{\text{кг м}}{\text{с}^2} = 0,0789 x \text{ Н.}$$

$$F_y = -0,2\pi^2 y \frac{\text{кг см}}{\text{с}^2} = -0,0197 y \frac{\text{кг м}}{\text{с}^2} = -0,0197 y \text{ Н.}$$

16.3-масала. Массаси m га тенг моддий нуқта қандай куч таъсирида радиуси r га тенг айлана бўйлаб ўзгармас тезлик билан ҳаракатланади?

Ечиш. Нуқтанинг траекторияси берилгани туфайли унинг ҳаракатини табиий усулда аниқлаймиз. Бунинг учун уринма, бош нормаль ва бинормални 16.6-расмда кўрсатилгандек ўтказамиз; бош нормални айлананинг радиуси бўйича унинг марказига, бинормални расм текислигига перпендикуляр равишда кузатувчи томонга йўналтирамиз.

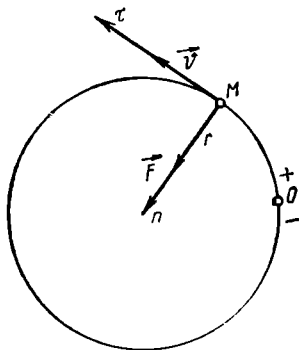
Тезликнинг алгебраик қиймати ўзгармас бўлгани учун (16.8) да $\ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt} = 0$ бўлишини эътиборга олсак, кучнинг табиий координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$F_\tau = 0, \quad F_n = \frac{mv^2}{\rho}, \quad F_b = 0.$$

Шундай қилиб, нуқтанинг берилган ҳаракати миқдор жиҳатдан ўзгармас ва айланиш маркази O га йўналган $\vec{F} = \vec{F}_n$ куч таъсирида содир бўлади.

16.4- масала. Узунлиги l га тенг чўзилмайдиган ипга боғланган ва оғирлиги P га тенг M моддий нуқта O нуқта атрофида

$$\varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$



16.6- расм.

қонун бўйича кичик тебранма ҳаракат қилади (16.7- расм); бунда φ_0 — бошланғич оғиш бурчаги. M нуқта энг пастки ҳолатдан ўтганда ипнинг реакция кучи аниқлансин.

Ечиш. M нуқтанинг ҳаракатини

$$r = l = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

қутб координаталарида берилган деб қараш мумкин. Қутб ўқларини расмда кўрсатилгандек йўналтираимиз.

Моддий нуқтага вертикал пастга йўналган оғирлик кучи $\vec{P}$ қўйилган. M нуқта учун ип боғланиш вазифасини ўтайди. Боғланишдан бўшатиш аксиомасига асосан ипнинг нуқтага таъсирини таранглик кучи $\vec{T}$ билан алмаштираимиз.

M нуқта энг пастки ҳолатдан ўтган пайтда $\vec{P}$ ва $\vec{T}$ бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналади. Шу ҳолат учун (16.10) нинг биринчи тенгламасини тузамиз:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = P - T,$$

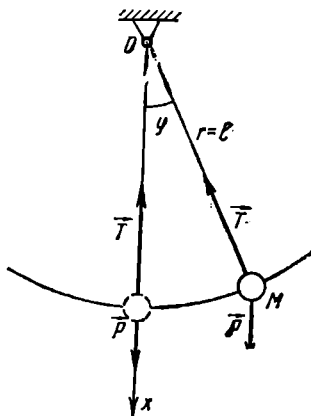
бунда $r = l$, $\ddot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{l}} \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t$ ҳамда нуқтанинг кўрилатган ҳо-

лати учун $\cos \sqrt{\frac{g}{l}} t = 1$ бўлгани сабабли

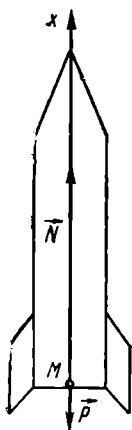
$$T = P + mg\varphi_0^2 = P(1 + \varphi_0^2).$$

16.5- масала. Ракета вертикал юқорига учирилганда миқдори $\omega = 8g$ га тенг тезланишга эга бўлади; бунда $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ эркин тушиш тезланиши. Оғирлиги $P = 600 \text{ Н}$ бўлган космонавтнинг ракета кабинаси тубига кўрсатадиган босим кучи аниқлансин (16.8- расм).

Ечиш. x ўқни вертикал юқорига йўналтириб, ракетанинг x ўқи бўйича тўғри чизиqli ҳаракатини текшираимиз. Космонавтни схематик тарзда оғирлиги P га тенг моддий нуқта деб қараймиз. Космонавт учун кабина туби боғланиш вазифасини ўтайди. Боғланишдан бўшатиш аксиомасидан фойдаланиб, боғланиш реакцияси $\vec{N}$ ни вертикал юқорига йўналтираимиз. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини (16.7) кўринишда тузамиз:



16.7- расм.



16.8. расм.

$$m \ddot{x} = F_x = \sum X_v. \quad (1)$$

Масаланинг шартига кўра тезланиш $\ddot{x} = w = 8 \text{ g}$ бўлиб, вертикал юқорига йўналади ҳамда

$$\sum X_v = N - P.$$

Шу сабабли (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{P}{g} \cdot 8g = N - P,$$

бундан

$$N = 9P = 5400 \text{ Н.}$$

Космонавтнинг кабина тубига босим кучи миқдор жиҳатдан N га тенг бўлади ва вертикал пастга йўналади. Шундай қилиб, рикета старт ҳолатидан учирилганда космонавтнинг кабина тубига кўрсатадиган босим кучи унинг оғирлигига нисбатан 9 барабар катта бўлар экан.

16.4-§. Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи (тескари масала)

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи, нуқтанинг массаси ва унга таъсир этувчи кучлар берилганда нуқтанинг кинематик тенгламаларини аниқлашдан иборат. Бу масала *нуқта динамикасининг тескари масаласи* дейилади.

Иккинчи асосий масалани ечиш учун (16.2), (16.3), (16.8) ёки (16.10) кўринишдаги иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни интеграллаш керак. Нуқтага таъсир этувчи кучлар умумий ҳолда вақт, нуқтанинг ҳолати ва тезлигига боғлиқ бўлгани учун бу дифференциал тенгламаларни умумий ҳолда интеграллаш мумкин эмас. Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи айрим хусусий ҳоллардагина аниқ ечимга эга. Шу сабабли техникада учрайдиган мураккаб масалалар интеграллашнинг сонли усули воситасида электрон ҳисоблаш машиналарини қўллаб тақрибан ечилади. Нуқтанинг ҳаракати қандай усулда аниқланишига қараб, иккинчи масала қуйидагича ечилади:

1. Агар нуқтага таъсир этувчи кучларнинг тенг таъсир этувчи вақт, нуқтанинг радиус-вектори ва радиус-вектордан вақт бўйича олинган ҳосила (тезлик) нинг функцияси сифатида маълум бўлса, у ҳолда (16.2) ни

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (16.19)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу векторли иккинчи тартибли дифференциал тенгламани интеграллаб, унинг умумий ечимини топамиз:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2), \quad (16.20)$$

бунда $\vec{C}_1$ ва $\vec{C}_2$ билан векторли интеграллаш доимийлари кўрсатил-

ган. (16.20) дан кўрамизки, $\vec{F}$ куч таъсирида нуқта сон-саноқсиз қонунлар бўйича ҳаракатланиши мумкин, чунки ҳар гал $\vec{C}_1$ ва $\vec{C}_2$ ни ўзгартириб, янги ҳаракат қонунни оламиз. Шу сабабли (16.19) ни интеграллаш учун конкрет динамик масала учун бошланғич шартлар деб аталадиган қўшимча шартлар берилган бўлиши керак. Вақтнинг бошланғич пайтида, яъни $t = t_0$ да нуқта радиус-вектори ва тезлиги қабул қиладиган

$$\vec{r} = \vec{r}_0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 \quad (16.21)$$

қийматларга векторли кўринишдаги бошланғич шартлар дейилади. Худди шунингдек, бошланғич шартларни Декарт координаталарида

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0. \quad (16.22)$$

ва табиий координаталарда

$$s = s_0, \quad \dot{s} = \dot{s}_0 \quad (16.23)$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

(16.20) дан вақт бўйича ҳосила олиб, интеграллаш доимийларига боғлиқ

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2) \quad (16.24)$$

нуқтанинг тезлигини оламиз.

Ҳаракатнинг бошланғич шартлари (16.21) ни (16.20) ва (16.24) га қўйиб, интеграллаш доимийлари $\vec{C}_1$ ва $\vec{C}_2$ аниқланадиган

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{r}(t_0, \vec{C}_1, \vec{C}_2), \\ \vec{v}_0 &= \vec{v}(t_0, \vec{C}_1, \vec{C}_2) \end{aligned} \right\}$$

иккита векторли тенгламани оламиз. Бу тенгламаларни етиб, $t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0$ нинг функциясидан иборат интеграллаш доимийларини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \vec{C}_1 &= \vec{C}_1(t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0), \\ \vec{C}_2 &= \vec{C}_2(t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0). \end{aligned} \right\}$$

Буларни (16.19) тенгламанинг умумий интегралли (16.20) га қўйиб, (16.21) бошланғич шартларга мос бўлган хусусий интеграллини аниқлаймиз:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0).$$

Юқорида кўрганимиздек, нуқтанинг динамик тенгламаларини умумий ҳолда интеграллаш қийин. Лекин баъзи ҳолларда ҳаракатнинг умумий хусусиятларини характерлайдиган (16.19) дифференциал тенгламанинг биринчи интеграллини аниқлаш мумкин. $\vec{r}(t)$ нинг ҳар қандай қийматларида (16.19) ни қаноатлантирадиган

$$\Phi(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \vec{C}_1$$

муносабатга (16.19) дифференциал тенгламанинг биринчи интегралли дейилади.*

Агар (16.19) нинг бир-бирига боғлиқ бўлмаган иккита

$$\Phi_1(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \vec{C}_1,$$

$$\Phi_2(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \vec{C}_2$$

биринчи интеграллари маълум бўлса, бу векторли тенгламалардан $\vec{r}$ тезликни йўқотиб,

$$Q(t, \vec{r}, \vec{C}_1, \vec{C}_2) = 0$$

муносабатни оламиз. Бундан нуқтанинг радиус-векторини аниқлаш мумкин:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, C_1, C_2).$$

Шундай қилиб, (16.19) нинг иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган биринчи интеграллари маълум бўлса, (16.19) нинг умумий интеграллини оддий алгебраик амаллар ёрдамида топиш мумкин.

Агар нуқтага боғланишлар қўйилган бўлса, (16.19) тенгламадаги кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ нинг таркибига номаълум боғланиш реакция кучлари ҳам кирази. Бу номаълумларни динамик тенгламалардан йўқотиш усули аналитик механика бўлимида кўрилади. Лекин баъзи содда ҳолларда мос координата ўқларини танлаб олиб, боғланиш реакция кучини скаляр кўринишдаги айрим тенгламалардан йўқотиш мумкин.

2. Агар $\vec{F}$ тенг таъсир этувчи кучнинг координата ўқларидаги проекциялари F_x, F_y, F_z лар маълум бўлса, (16.5) кўринишдаги учта иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни интеграллаб, олтита интеграллаш доимийлари $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ га боғлиқ,

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned} \right\} \quad (16.25)$$

кўринишдаги умумий ечимини топамиз.

Конкрет динамик масалани ечиш учун (16.25) га қўшимча равишда (16.22) кўринишдаги бошланғич шартлар берилиши керак.

(16.25) дан вақт бўйича ҳосила олсак, 6 та интеграллаш доимийларинга боғлиқ қуйидаги учта функция ҳосил бўлади:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{y} &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \right\} \quad (16.26)$$

*Айрим ҳолларда динамик тенгламаларнинг биринчи интеграллини топиш ҳақида 21-бобда алоҳида тўхтаб ўтилган.

(16.22) бошланғич шартларни (16.25) ва (16.26) га қўйиб, 6 та интеграллаш доимийлари қатнашадиган 6 та тенгламалар системасини оламиз. Бу тенгламалар системасини биргаликда ечиб, 6 та интеграллаш доимийларини аниқлаймиз:

$$C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \quad (i = 1, 6). \quad (16.27)$$

Интеграллаш доимийларининг топилган бу қийматларини (16.25) га қўйиб, (16.22) бошланғич шартларга мос бўлган нуқтанинг Декарт координаталаридаги кинематик тенгламаларини оламиз:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

3. Агар нуқтага қўйилган тенг таъсир этувчи кучнинг табиий координата ўқларидаги проекциялари ва (16.23) кўринишидаги бошланғич шартлар берилган бўлса, нуқта динамикасининг тескари масаласини ечиш учун (16.8) тенгламалардан фойдаланиш керак. (16.8) даги биринчи тенгламанинг умумий ечимини

$$s = s(t, C_1, C_2) \quad (16.27)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан вақт бўйича ҳосила олсак, интеграллаш доимийлари C_1 ва C_2 га боғлиқ

$$\dot{s} = \dot{s}(t, C_1, C_2) \quad (16.28)$$

нуқтанинг тезлигини аниқлаймиз. (16.27) ва (16.28) га ҳаракатнинг бошланғич шартлари (16.23) ни қўйиб, C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= C_1(t_0, s_0, \dot{s}_0), \\ C_2 &= C_2(t_0, s_0, \dot{s}_0). \end{aligned} \right\} \quad (16.29)$$

(16.29) ни (16.27) га қўйиб, нуқтанинг ёй координатасини вақтнинг функцияси сифатида ифодалаймиз:

$$s = s(t)$$

$v^2 = \dot{s}^2$ бўлишини назарда тутиб, ёй координатасининг бу қийматини (16.8) нинг иккинчисига қўйиш натижасида ҳаракатланувчи нуқта траекториясининг эгрилик радиуси ρ ни вақтнинг функцияси сифатида аниқлаш мумкин.

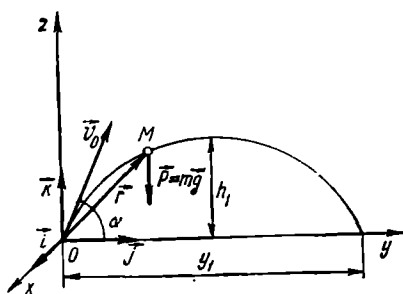
16.5-§. Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласини ечишга доир масалалар

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи қуйидаги тартибда ечилади:

1. Моддий нуқтанинг ҳаракатини аниқлаш усулини танлаб, унга мос координаталар системасини ўтказамиз.

2. Нуқтага таъсир этувчи берилган кучлар ва боғланиш реакция кучларини тасвирлаймиз.

3. Динамик тенгламаларни тузамиз ва уларни интеграллаймиз.



16.9- расм.

4. Ҳаракатнинг бошланғич шартларини аниқлаймиз ва бу шартлардан фойдаланиб интеграллаш доимийларини топамиз.

5. Интеграллаш доимийларининг топилган қийматларини ўрнига қўйиб, моддий нуқтанинг кинематик тенгламаларини оламиз ва бу тенгламалардан изланаётган номаълумларни аниқлаймиз.

Эркин моддий нуқтанинг ҳаракати текшириляётганда Декарт координаталаридан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Боғланишдаги нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракатини ўрганишда нуқтанинг ҳаракат траекторияси маълум бўлса, табиий координата ўқларидан фойдаланиш мумкин.

Агар нуқта марказий куч таъсирида ҳаракатланса, қутб координаталаридан фойдаланиш тавсия этилади.

16.6-масала. Горизонтга α бурчак остида $\vec{v}_0$ бошланғич тезлик билан отилган, фақат $\vec{P} = m\vec{g}$ оғирлик кучи таъсирида бўлган моддий нуқтанинг ҳавосиз бўшлиқдаги ҳаракати аниқлансин.

Ечиш. Моддий нуқтанинг ҳаракатини вектор усулида аниқлаймиз. Координаталар боши O ни нуқтанинг бошланғич ҳолатида олиб, z ўқни вертикал юқорига йўналтирамиз; бошланғич тезлик $\vec{v}_0$ yOz текислигида ётади деб ҳисоблаймиз (16.9- расм).

Нуқтага фақат $\vec{P} = m\vec{g}$ ўзгармас оғирлик кучи таъсир этганидан моддий нуқтанинг динамик тенграмаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$$

ёки

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}.$$

$\vec{g}$ миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлгани учун

$$\int d\vec{v} = \vec{g} \int dt$$

бўлади. Бинобарин, нуқтанинг тезлиги

$$\vec{v} = \vec{g}t + C_1, \quad (1)$$

(1) да $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{g}t + C_1,$$

сўнги тенгламани интегралласак,

$$\vec{r} = \frac{g t^2}{2} + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2 \quad (2)$$

ҳосил бўлади.

Ҳаракатнинг бошланғич шартларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$t_0 = 0 \text{ да } \vec{r}_0 = 0, \vec{v}_0 = \vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha) \vec{j} + (v_0 \sin \alpha) \vec{k}, \quad (3)$$

(3) ни (1) ва (2) ларга қўйиб $\vec{C}_1$ ва $\vec{C}_2$ ларни аниқлаймиз:

$$\vec{C}_1 = (v_0 \cos \alpha) \vec{j} + (v_0 \sin \alpha) \vec{k}, \vec{C}_2 = 0. \quad (4)$$

(4) ни (2) га қўйиб, нуқтанинг векторли кинематик тенгламасини аниқлаймиз:

$$\vec{r} = \frac{g t^2}{2} + [(v_0 \cos \alpha) \vec{j} + (v_0 \sin \alpha) \vec{k}] t. \quad (5)$$

Нуқтанинг траекториясини аниқлаш учун (5) да $\vec{g} = -g \vec{k}$ эканлигини на-
зарда тутиб, уни координата ўқларига проекциялаймиз:

$$x = 0, y = v_0 t \cos \alpha, z = -\frac{g t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha. \quad (6)$$

(6) дан вақт t ни йўқотиб, нуқтанинг траекториясини аниқлаймиз:

$$z = y \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} y^2. \quad (7)$$

Шундай қилиб, нуқтанинг траекторияси yOz текислигида ётувчи, координа-
талар бошидан ўтувчи ва қауариқлиги юқорига қараган параболадан иборат.

Олинган тенгламалардан фойдаланиб, нуқтанинг қандай y_1 масофага бориб
тушиши ва қандай h_1 баландликка кўтарилиши, шунингдек, бу масофа ва баланд-
лик қандай ҳолда максимал қийматга эришишини аниқлаш мумкин.

y_1 ни аниқлаш учун (7) да $z = 0$ деб оламиз. У ҳолда

$$y_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (8)$$

(8) дан кўраимизки, моддий нуқтага муҳитнинг қаршилиқ кучи таъсир этмаса,
 y_1 максимал қийматга эришиши учун $\sin 2\alpha = 1$, яъни $\alpha = 45^\circ$ бўлиши керак.
Шундай қилиб,

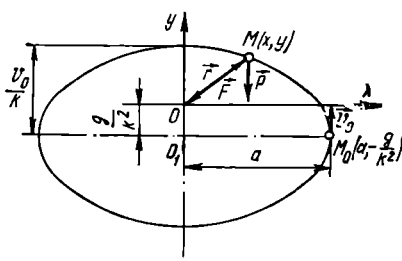
$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Нуқта кўтариладиган энг юқори h_1 баландлиги параболанинг учида бўлади.

Бу нуқтада $z = h_1$, $y = \frac{y_1}{2}$ бўлгани учун

$$h_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (9)$$

(9) дан кўраимизки, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлганда, яъни моддий нуқта вертикал юқорига отил-
ганда у максимал баландликка кўтарилади ҳамда



16.10- расм.

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

бўлади.

Моддий нуқта максимал узоқлик $y_{\max}$ га тушганда унга мос кўтарилиш баландлиги максимал узоқлик $y_{\max}$ нинг тўртдан бирига тенг бўлади, яъни:

$$h_{\alpha = 45^\circ} = \frac{v_0^2}{4g}.$$

16.7-масала. Массаси m га тенг M моддий нуқта вертикал тикисликда шу нуқтадан қўзғалмас O марказгача бўлган масофага пропорционал $\vec{F} = -k^2 m \vec{r}$ марказий куч таъсирида ҳаракатланади, бунда $\vec{r}$ — ҳаракатланувчи нуқтанинг радиус-вектори, k^2 — ўзгармас коэффициент. Агар бошланғич пайтда нуқта $M_0(a, -\frac{g}{k^2})$ ҳолатда вертикал юқорига йўналган бошланғич тезликка эга бўлса, нуқтанинг траекторияси аниқлансин (16.10-расм.)

Ечиш. M моддий нуқтанинг ҳаракатини Декарт координаталар системасига нисбатан текшираимиз. Координаталар бошини қўзғалмас O марказда оламиз ва x, y ўқларини 16.10-расмдагидек йўналтирамиз.

Нуқтага таъсир этувчи оғирлик кучи $\vec{P}$ ва O марказга йўналган торттилиш кучи $\vec{F}$ ни расмда тасвирлаймиз.

Нуқтанинг динамик тенгламасини (16.2) кўринишида тузамиз:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{F}$$

ёки $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}, \vec{P} = m \vec{g}, \vec{F} = -k^2 m \vec{r}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g} - k^2 \vec{r}.$$

Бу векторли тенгламани x ва y ўқларига проекциялаб, нуқтанинг Декарт координата ўқларидаги динамик тенгламаларини оламиз:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (1)$$

$$\ddot{y} + k^2 y = -g. \quad (2)$$

(1) тенглама иккинчи тартибли бир жинсли тенгламадир. Уни интеграллаш учун характеристик тенглама тузамиз: $\lambda^2 + k^2 = 0$; бундан $\lambda_{1,2} = \pm kt$. Бинобарин, (1) тенгламанинг умумий ечимини

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларидир.

(2) тенглама (1) дан фарқли ўлароқ бир жинсли бўлмаган тенгламадир. Шу сабабли унинг умумий ечимини

$$y = y_1 + y_2 \quad (4)$$

кўринишда оламиз, бунда y_2 — бир жинсли бўлмаган (2) тенгламанинг хусусий ечимидир; y_1 — эса

$$\ddot{y} + k^2 y = 0 \quad (5)$$

кўринишдаги бир жинсли тенгламанинг умумий ечимидир:

$$y_1 = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt, \quad (6)$$

(2) тенгламанинг ўнг томони ўзгармас миқдорга тенг бўлгани учун унинг хусусий ечимини $y_2 = A$ кўрипишда ифодалаш мумкин; бунда A — ўзгармас катталиқ.

(2) тенгламада $y_2 = A$ алмаштириш киритсак,

$$y_2 = -\frac{g}{k^2} \quad (7)$$

бўлишини кўрамиз.

(6) ва (7) ни (4) га қўйиб, (2) тенгламанинг умумий ечими учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - \frac{g}{k^2}. \quad (8)$$

Масаланинг шартига кўра ҳаракатнинг бошлапғич шартлари қуйидагича бўлади:

$$t_0 = 0 \text{ да } x_0 = a, y_0 = -\frac{g}{k^2}, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = v_0. \quad (9)$$

Интеграллаш доимийлари C_1, C_2, C_3, C_4 ларни аниқлаш учун (3) ва (8) дан ҳосила олиб,

$$\begin{cases} \dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt, \\ \dot{y} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt. \end{cases} \quad (10)$$

(9) ни (3), (8) ва (10) га қўямиз. Натижада

$$C_1 = a, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = \frac{v_0}{k}. \quad (11)$$

(11) ни (3) ва (8) га қўйиб нуқтанинг Декарт координаталаридаги кинематик тенгламаларини оламиз.

$$\begin{aligned} x &= a \cos kt, \\ y &= \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{g}{k^2}. \end{aligned}$$

Бу тенгламалардан вақт t ни йўқотиб, нуқта траекториясининг тенгласини оламиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y + \frac{g}{k^2}\right)^2}{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = 1. \quad (12)$$

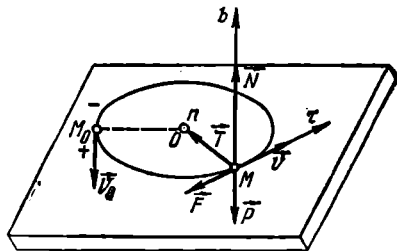
Шундай қилиб, нуқтанинг траекторияси маркази $O_1\left(0, -\frac{g}{k^2}\right)$ нуқтада ётув-

чи, ярим ўқлари a ва $\frac{v_0}{k}$ га тенг эллипсдан иборат.

16.8- масала. Оғирлиги $P = 196$ Н бўлган M моддий нуқта горизонтал стол устида ётади. M нуқта узунлиги $l = 0,35$ м ип билан қўзғалмас O нуқтага боғланган. Таранг тортилган ипнинг йўналишига перпендикуляр йўналишда M нуқтага $v_0 = 4,9$ м/с бошлапғич тезлик берилган, натижада M нуқта l радиусли ай-

лана ёйи бўйлаб ҳаракатланади (16.11-расм). Агар нуқтанинг столга ишқаланиш коэффициентини $f = 0,25$ га тенг бўлса, $t = 1$ с дан кейин нуқтанинг тезлиги ва ипнинг таранглик кучи аниқлансин.

Ечиш. M нуқтанинг траекторияси маълум бўлгани туфайли унинг ҳаракатини табиий усулда аниқлаймиз. M нуқтада а.ланага ҳаракатнинг мусбат йўналиши бўйича M т уринма, айлана радиуси бўйича O нуқтага йўналган Mn бош нормаль ҳамда стол текислигига перпендикуляр равишда юқорига йўналган Mb бинормалларни ўтказамиз.



16.11- расм.

M нуқтага қўйилган вертикал пастга йўналган оғирлик кучи $\vec{P}$, ип бўйлаб O нуқтага йўналган ипнинг таранглик кучи $\vec{T}$, столга перпендикуляр равишда вертикал юқорига йўналган нормал реакция кучи $\vec{N}$ ва ҳаракат тезлигига қарама-қарши йўналган ишқаланиш кучи $\vec{F}$ (бунда $F = fN$) ларни расмда тасвирлаймиз.

M нуқта учун (16.8) кўринишдаги Эйлер тенгламаларини тузамиз:

$$m \frac{dv}{dt} = -fN, \quad (1)$$

$$m \frac{v^2}{l} = T, \quad (2)$$

$$O = N - P. \quad (3)$$

(3) дан $N = P = mg$ бўлгани учун (1) ни

$$m \frac{dv}{dt} = -fmg$$

ёки

$$\frac{dv}{dt} = -fg$$

кўринишда ёзамиз ва сўнгги тенгламани интеграллаймиз:

$$v = -fgt + C.$$

Бошланғич пайт $t_0 = 0$ да $v = v_0$ бўлгани учун $C = v_0$ бўлади. Шундай қилиб, $v = v_0 - fgt$; $t = 1$ с бўлганда $v = 4,9 - 0,25 \cdot 9,8 = 2,45$ м/с.

(2) дан ипнинг таранглик кучини топамиз:

$$T = m \frac{v^2}{l} = \frac{P v^2}{g l} = \frac{196 \cdot (2,45)^2}{9,8 \cdot 0,35} = 342,14 \text{ Н.}$$

16.9-масала. Ер сиртидаги M нуқтадан Ернинг радиусига перпендикуляр равишда v_0 бошланғич тезлик билан ракета учирилган. Ернинг тортиш кучи ракетадан Ер маркази O гача бўлган масофа квадратига тесқари пропорционал равишда ўзгаради. Ер сиртидаги эркин тушиш тезланиши $g = 9,81$ м/с, Ернинг радиуси $R = 6370$ км га тенг. Ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмай, ракетани моддий нуқта деб қараб, унинг ҳаракат тенгламаси аниқлансин (16.12-расм).

Ечиш. Ракетанинг бошланғич пайтдаги тезлиги v_0 билан Ернинг тортиш кучи $\vec{F}$ бир текисликда ётгани туфайли ракетанинг ҳаракати донмо шу текисликда содир бўлади. Ракетанинг ҳаракатини қутб координаталарида аниқлаймиз. Бошлан-

ғич пайтда қутб ўқини OM_0 бўйича йўналтирамиз. Ракетанинг ихтиёрий M ҳолати учун бу ўқнинг бирлик векторлари $\vec{r}^0$ расмда тасвирланган.

Ракетага доимо Ернинг маркази O нуқтага йўналган тортиш кучи $\vec{F}$ таъсир этади, яъни ракета марказий куч таъсирида ҳаракатланади. Масаланинг шартига кўра бу куч O марказдан ракетагача бўлган масофага тескари пропорционал равишда ўзгаради:

$$F = \frac{km}{r^2}, \quad (1)$$

бунда m — ракетанинг массаси, k — аниқланиш лозим бўлган пропорционаллик коэффициенти.

Ернинг сиртида $r = r_0 \approx R$ ва $F = P = mg$ эканлигини эътиборга олиб, r ва F нинг бу қийматларини (1) га қўйсак, $k = gR^2$ муносабат ўринли бўлишини кўрамиз. Натижада (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F = \frac{mgR^2}{r^2}. \quad (2)$$

Моддий нуқтанинг қутб координаталаридаги динамик тенгламалари (16.10) ни тузамиз:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = F_\varphi. \quad (3)$$

$\vec{F}$ куч r ўқ бўйича $\vec{r}^0$ га қарама-қарши йўналгани учун $F_r = -F$, $F_\varphi = 0$.

(2) ни эътиборга олсак, $F_r = -\frac{mgR^2}{r^2}$. У ҳолда (3) ни

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{gR^2}{r^2}, \quad \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = 0 \quad (4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(4) нинг иккинчи тенгламасини интегралласак,

$$r^2 \dot{\varphi} = C_1. \quad (5)$$

C_1 ни аниқлаш учун ҳаракатнинг бошланғич шартларидан фойдаланамиз, яъни

$$t_0 = 0 \text{ да } r_0 = R, \varphi_0 = 0 \quad (6)$$

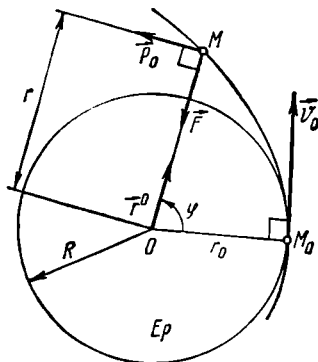
бўлганда ракета бошланғич пайтда M_0 ҳолатни эгаллайди; бундан ташқари бошланғич пайтда $\vec{v}_0$ тезлик r_0 га перпендикуляр бўлгани учун

$$\dot{r}_0 = 0, \quad \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{R}. \quad (7)$$

(6) ва (7) ни эътиборга олиб, (5) дан C_1 ни аниқлаймиз: $C_1 = R v_0$. Шундай қилиб, (5) ни $r^2 \dot{\varphi} = R v_0$ ёки

$$\dot{\varphi} = \frac{R v_0}{r^2} \quad (8)$$

кўринишда ёзиш мумкин.



16.12- расм.

(4) нинг биринчи дифференциал тенгламасини интеграллаш учун $r = r(\varphi)$, бунда $\varphi = \varphi(t)$ эканлигини назарда тутсак, $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}$. У ҳолда (8) га кўра

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{Rv_0}{r^2} = -Rv_0 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (9)$$

муносабат ўринли бўлади. Бундан ташқари, $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}$ бўлгани туфайли (8) ва (9) га асосан $\ddot{r}$ учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\ddot{r} = -\frac{R^2 v_0^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (10)$$

$\ddot{r}$ ва $\dot{\varphi}$ ларнинг қийматини (10) ва (8) дан (4) нинг биринчисига қўйиб,

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{g}{v_0^2}$$

тенгламани ёки u белгилаш киритиб,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{g}{v_0^2} \quad (11)$$

тенгламани оламиз.

(11) ни интеграллаб, ракетанинг изланаётган ҳаракат траекториясини аниқлаймиз. Бу дифференциал тенгламанинг умумий ечимини

$$u = u_1 + u_2 \quad (12)$$

кўринишда излаймиз. Бунда u_1

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 0 \quad (13)$$

кўринишдаги бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини, u_2 эса бир жинсли бўлмаган (11) тенгламанинг хусусий ечимини ифодалайди. (13) нинг характеристик тенгламаси $\lambda^2 + 1 = 0$ кўринишда ёзилади, бундан $\lambda = \pm i$. Бинобарин,

$$u_1 = C_2 \cos \varphi + C_3 \sin \varphi.$$

(11) нинг хусусий ечимини

$$u_2 = \frac{g}{v_0^2}$$

кўринишда оламиз. Шундай қилиб,

$$u = C_2 \cos \varphi + C_3 \sin \varphi + \frac{g}{v_0^2}$$

ёки $u = \frac{1}{r}$ бўлгани учун

$$\frac{1}{r} = C_2 \cos \varphi + C_3 \sin \varphi + \frac{g}{v_0^2} \quad (14)$$

ечимга эга бўламиз.

C_2 ва C_3 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун (14) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$-\frac{1}{r^2} \dot{r} = -C_2 \dot{\varphi} \sin \varphi + C_3 \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (15)$$

(6), (7) бошланғич шартларни (14) ва (15) га қўйиб, C_2 ва C_3 ларни топамиз:

$$C_2 = \frac{v_0^2 - gR}{Rv_0^2}, \quad C_3 = 0.$$

C_2 ва C_3 ларнинг қийматларини (14) га қўйиб, уни r га нисбатан ечсак,

$$r = \frac{\rho}{1 + e \cos \varphi} \quad (16)$$

ҳосил бўлади, бунда $\rho = \frac{v_0^2}{g}$ эгри чизиқнинг параметрини,

$$e = \frac{v_0^2 - gR}{gR} \quad (17)$$

эса унинг эксцентриситетини ифодалайди.

Аналитик геометриядан маълумки, (16) тенглама иккинчи тартибли чизиқларнинг қутб координаталаридаги тенгламасини ифодалайди. Бу иккинчи тартибли чизиқ: а) $e = 0$ бўлса, айлана; б) $e < 1$ бўлса, эллипс; в) $e = 1$ бўлса, парабола; г) $e > 1$ бўлса, гиперболдан иборат бўлади. Бу ҳолларни алоҳида кўрамиз:

а) ракета айлана бўйлаб ҳаракатланса, $e = 0$ бўлиб, (17) га асосан

$$v_0 = \sqrt{gR} \quad (18)$$

тенглик ўринлидир.

Бунда $g = 9,81$ м/с², $R = 6370$ км = $6,37 \cdot 10^6$ м эканлигини эътиборга олсак,

$$v_0 = 7910 \text{ м/с} \approx 7,9 \text{ км/с}. \quad (19)$$

Бу тезлик *биринчи космик тезлик* дейилади.

б) ракета эллипс бўйлаб ҳаракатланса, $e < 1$ бўлиб, (17) дан $v_0 < \sqrt{2gR}$, яъни

$$v_0 = 11\,179 \text{ м/с} \approx 11,2 \text{ км/с}. \quad (20)$$

Бу тезлик *иккинчи космик тезлик* дейилади.

Айлана эллипсининг лимит ҳолати бўлгани туфайли, ракета эллипс бўйлаб ҳаракатланиши учун бошланғич тезлик v_0 қуйидаги тенгсизликни қаноатлантириши керак:

$$\sqrt{gR} \leq v_0 < \sqrt{2gR} \text{ ёки } 7,9 \text{ км/с} \leq v_0 < 11,2 \text{ км/с}. \quad (21)$$

в) ракета парабола бўйлаб ҳаракатланса, $e = 1$ бўлиб, (17) га асосан бошланғич тезлик учун

$$v_0 = \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ км/с} \quad (22)$$

миқдорни оламиз.

г) ракета гипербола бўйлаб ҳаракатланса, $e > 1$ бўлади ва (17) дан

$$v_0 > \sqrt{2gR} \text{ ёки } v_0 > 11,2 \text{ км/с} \quad (23)$$

эканлигини аниқлаймиз.

Шундай қилиб, ракетанинг бошланғич тезлиги $7,9 \text{ км/с} \leq v_0 < 11,2 \text{ км/с}$ шартни қаноатлантирса, ракета айлана ёки эллипс бўйича ҳаракатланади ҳамда Ернинг сунъий йўлдошига айланади. Агар $v_0 > 11,2 \text{ км/с}$ бўлса, ракета парабола ёки гипербола бўйича ҳаракатланиб Ердан узоқлаша боради. $v_0 < 7,9 \text{ км/с}$ бўлса, ракета Ерга қулаб тушади.

16.6-§. Моддий нуқтанинг содда ҳоллардаги тўғри чизиқли ҳаракат дифференциал тенгламаларини интеграллаш

Эркин моддий нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлиши учун унга таъсир этувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси ўзгармав йўналишига эга бўлиши ва бошланғич тезлик эса тенг таъсир этувчи куч бўйича йўналиши ёки нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Ҳақиқатан ҳам эркин моддий нуқтанинг ҳаракат траекторияси x ўқ билан устма-уст тушса, ҳаракат давомида $y = z = 0$ ва $\dot{y} = \dot{z} = 0$ бўлади, яъни нуқтанинг тезлиги x ўқ бўйича йўналади ёки нолга тенг бўлади. Бундан ташқари $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$ бўлгани учун нуқтанинг Декарт координата ўқларидаги динамик тенгламалари (16.3) га асосан

$$F_y = 0, F_z = 0 \quad (16.30)$$

шартлар айнан бажарилади, яъни тенг таъсир этувчи куч x ўқи бўйича йўналади. Шундай қилиб, юқоридаги шартларнинг бажарилиши зарур эканлиги исботланди.

Агар координаталар бошини нуқтанинг бошланғич ҳолатида олиб, x ўқни нуқтанинг бошланғич тезлиги бўйича йўналтирсак, у ҳолда (16.30) шартлар бажарилади, бинобарин,

$$m\ddot{y} = 0, m\ddot{z} = 0$$

бўлади. Бу тенгламаларни икки марта интегралласак,

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= C_1, \dot{z} = C_2, \\ y &= C_1 t + C_3, z = C_2 t + C_4. \end{aligned} \right\} \quad (16.31)$$

x ўқнинг танлаб олинishiга кўра бошланғич шартлар қуйидагича бўлади:

$$t_0 = 0 \text{ да } y_0 = 0, z_0 = 0, \dot{y}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0.$$

Бу шартларни (16.31) га қўйиб, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ бўлишини кўрамиз. Натижада

$$y = 0, z = 0$$

бўлади, яъни нуқтанинг траекторияси x ўқи бўйича содир бўлади. Шундай қилиб, ҳаракат тўғри чизиқли бўлишининг етарли шарти ҳам исботланди.

Ёзиш қисқа бўлиши учун тўғри чизиқли ҳаракатдаги нуқта тезлигининг проекциясини v_x деб ёзиш ўрнига индексини тушириб v деб ёзамиз, яъни v билан тезликнинг алгебраик қийматини белгилаймиз.

(16.7) га асосан нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламасини

$$m\ddot{x} = X(x, v, t) \quad (16.32)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда X — тенг таъсир этувчи кучнинг алгебраик қиймати, $v = \frac{dx}{dt}$ эса тезликнинг алгебраик қийматини ифодалайди. (16.32) тенгламанинг умумий ечимида иккита интеграллаш доимийси қатнашади:

$$x = x(t, C_1, C_2). \quad (16.33)$$

Бундан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2) \quad (16.34)$$

Ҳаракатнинг бошланғич шартлари қуйидагича бўлсин:

$$t = 0 \text{ да } x = x_0, v = v_0. \quad (16.35)$$

(16.35) ни (16.33) ва (16.34) га қўйсак, C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз.

(16.32) тенгламани интеграллаш мумкин бўлган айрим содда ҳолларни кўрамиз.

1. Моддий нуқтага миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлган $\vec{F}$ куч таъсир этсин. Нуқтанинг бошланғич тезлиги $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизигида ётсин. x ўқни $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиги бўйлаб йўналтирамиз. У ҳолда (16.32) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{x} = F, \quad (16.36)$$

бунда F билан кучнинг алгебраик қиймати кўрсатилган. (16.36) да $\ddot{x} = \frac{dx}{dt}$ эканлигини эътиборга олиб, ўзгарувчиларни ажратиш йўли билан интеграллаймиз:

$$dx = \frac{F}{m} dt, \quad (16.37)$$

$$\dot{x} = \frac{F}{m} t + C_1. \quad (16.38)$$

(16.38) ни ҳам ўзгарувчиларни ажратиш усули билан интеграллаймиз:

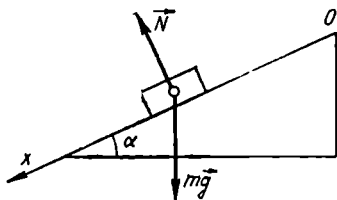
$$dx = \left(\frac{F}{m} t + C_1 \right) dt, \quad (16.39)$$

$$x = \frac{F}{m} t^2 + C_1 t + C_2. \quad (16.40)$$

(16.40) ифода (16.36) нинг умумий ечимидир.

Ҳаракатнинг бошланғич шартлари (16.35) кўринишда бўлсин. У ҳолда (16.35) ни (16.38) ва (16.40) га қўйиб интеграллаш доимийлари C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз: $C_1 = v_0$, $C_2 = x_0$. Бу қийматларни (16.38) га қўйиб, нуқтанинг ҳаракат қонушини аниқлаймиз:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{F}{m} t^2. \quad (16.41)$$



16.13- расм.

(16.41) дан кўрамизки, нуқта ўзгармас куч таъсирида текис ўзгарувчан ҳаракатда бўлар экан. Бу натижани нуқта динамикасининг асосий тенгламаси (15.5) дан ҳам олиш мумкин: $\vec{F} = \text{const}$ бўлгани учун $\vec{w} = \text{const}$ бўлади.

Изоҳ. Ҳаракатнинг бошланғич шартларини назарда тутиб, (16.37) ва (16.39) дан аниқ интеграл олиш ҳам мумкин. Масалан, (16.37) ни (16.35) бошланғич шартларга кўра қуйидагича интеграллаш мумкин

$$\int_{v_0}^v dx = \frac{F}{m} \int_0^t t dt.$$

$$v = v_0 + \frac{F}{m} t.$$

Бунда $v = \frac{dx}{dt}$ эканлигини эътиборга олиб, ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dx = \left(v_0 + \frac{F}{m} t \right) dt.$$

Сўнгги тенгламани (16.35) бошланғич шартларда интегралласак,

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left(v_0 + \frac{F}{m} t \right) dt.$$

(16.41) тенгламани оламиз. Келгусида бу усулдан ҳам фойдаланамиз.

16.10- масала. Оғир жисм горизонтга $\alpha = 30^\circ$ бурчак остида оғган силлиқ қия текислик бўйлаб пастга тушади. Агар жисмнинг тезлиги бошланғич пайтда 2 м/с га тенг бўлса, жисм 9,6 м йўлни қанча вақтда босиб ўтиши топилсин (16.13- расм).

Ечиш. Ох ўқни қия текислик бўйлаб йўналтирамыз. Жисмга вертикал пастга йўналган оғирлик кучи $\vec{mg}$ ва қия текисликка перпендикуляр йўналган нормал реакция кучи $\vec{N}$ таъсир этади. Оғирлик кучининг қия текисликка перпендикуляр йўналишдаги ташкил этувчиси нормал реакция кучи $\vec{N}$ билан мувозанатлашади. (16.32) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$mx = mg \sin \alpha.$$

Ўзгарувчиларни ажратсак,

$$dx = g \sin \alpha dt. \quad (1)$$

Ҳаракатнинг бошланғич шартлари қуйидагича берилган:

$$t_0 = 0 \text{ да } x = 0, \dot{x} = 2 \text{ м/с.} \quad (2)$$

(2) ни назарда тутиб, (1) ни интеграллаймиз:

$$\int_2^v dx = g \sin \alpha \int_0^t dt.$$

$$\dot{x} = 2 + gt \sin \alpha \text{ ёки } dx = (2 + gt \sin \alpha) dt.$$

Сўнгги тенгламани берилган бошланғич шартларда интеграллаймиз:

$$\int_0^x dx = \int_0^t (2 + gt \sin \alpha) dt,$$

$$x = 2t + \frac{gt^2}{2} \sin \alpha.$$

Бунда $x = 9,6$ м, $g = 9,81$ м/с², $\alpha = 30^\circ$ эканлигини назарда тутиб, t ни аниқлаш учун қуйидаги тенгламани оламиз:

$$9,81 t^2 + 8t - 38,4 = 0.$$

$$t = \frac{-8 + \sqrt{64 - 4 \cdot 38,4 \cdot 9,81}}{2 \cdot 9,81} = 1,61 \text{ с.}$$

t ни аниқлашда квадрат илдиз олдида манфий ишора олинмайди, чунки вақт мусбат қийматга эга.

2. Моддий нуқтага фақат вақтга боғлиқ куч таъсир этсин. У ҳолда (16.32) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\ddot{mx} = X(t)$$

ёки тўғри чизиқли ҳаракатда $x = v$, $\dot{x} = \frac{dv}{dt}$ бўлгани учун

$$m \frac{dv}{dt} = X(t). \quad (16.42)$$

Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратсак,

$$mdv = X(t)dt. \quad (16.43)$$

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда нуқтанинг тезлиги v_0 га тенг бўлсин. (16.43) ни бу бошланғич шартларда интеграллаймиз:

$$mv - mv_0 = \int_0^t X(t)dt. \quad (16.44)$$

$X(t)$ маълум функция бўлгани учун охириги интегрални ҳисоблаб, вақтнинг функциясидан иборат бирор $f(t)$ функцияни оламиз, натижада (16.44) ни

$$mv - mv_0 = f(t) \quad (16.45)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (16.45) дан нуқтанинг тезлиги v ни аниқлаймиз:

$$v = v_0 + \frac{1}{m} f(t).$$

Бу тенгламада $v = \frac{dx}{dt}$ бўлгани учун

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} f(t)$$

Ўқи ўзгарувчиларни ажратсак,

$$dx = \left[v_0 + \frac{1}{m} f(t) \right] dt$$

ҳосил бўлади.

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда нуқтанинг абсциссаси x_0 га тенг дейлик. Бу бошланғич шартларда охириги тенгламани интеграллаймиз

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t f(t) dt$$

Ўқи

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t f(t) dt.$$

Бу тенглама вақтга боғлиқ функция тарзида берилган ўзгарувчан куч таъсиридаги нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат қонунини ифодалайди.

16.11- масала. Массаси m га тенг моддий нуқта $F = F_0 \cos \omega t$ (бу ерда F_0 ва ω — ўзгармас миқдорлар) қонунга мувофиқ ўзгарувчи куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Бошланғич пайтда жисмнинг тезлиги $\dot{x} = v_0$ бўлган. Нуқта ҳаракатининг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Бошланғич пайтдаги нуқтанинг ҳолатини координата боши учун қабул қилиб, x ўқни нуқтанинг ҳаракат траекторияси бўйича йўналтирамиз.

Нуқтага $F = F_0 \cos \omega t$ вақтнинг функциясида иборат кул таъсир этади. Нуқтанинг ҳаракат тенгламасини (16.42) кўринишда тузамиз:

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 \cos \omega t$$

Ўзгарувчиларни ажратиб,

$$m dv = F_0 \cos \omega t dt,$$

Бошланғич $t = 0$ пайтда $\dot{x} = v_0$ шартни эътиборга олган ҳолда бу тенгламани интеграллаймиз:

$$mv - mv_0 = \frac{F_0}{\omega} \sin \omega t$$

Ўқи

$$v = v_0 + \frac{F_0}{m \omega} \sin \omega t.$$

Бунда $v = \frac{dx}{dt}$ бўлгани учун

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{F_0}{m \omega} \sin \omega t$$

Ўқи ўзгарувчиларни ажратиб,

$$dx = \left(v_0 + \frac{F_0}{m \omega} \sin \omega t \right) dt$$

тенгламани оламиз.

$t_0 = 0$ пайтда $x_0 = 0$ бошланғич шартни эътиборга олиб, бу тенгламани интеграллаймиз:

$$x = v_0 t + \frac{F_0}{m \omega^2} - \frac{F_0}{m \omega^2} \cos \omega t.$$

Бу тенгламадан кўрамызки, нуқтанинг $F = F_0 \cos \omega t$ куч таъсиридаги тўғрив
чиқиқли ҳаракатини $x_1 = v_0 t + \frac{F_0}{m \omega^2}$ қонун асосида содир бўладиган текис ҳара-
кат ва $x_2 = -\frac{F_0}{m \omega^2} \cos \omega t$ тебранма ҳаракатлардан ташкил топган деб қараш
мумкин.

3. Моддий нуқтага фақат нуқтанинг ҳолатига боғлиқ куч таъ-
сир этсин. У ҳолда (16.32) ни

$$m \frac{dv}{dt} = X(x) \quad (10.46)$$

ёки

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = X(x)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $\frac{dx}{dt} = v$ бўлгани учун

$$mv \frac{dv}{dx} = X(x). \quad (16.47)$$

Ўзгарувчиларни ажратсак,

$$mv dv = X(x) dx \quad (16.48)$$

тенглама ҳосил бўлади.

Нуқтанинг бошланғич $t_0 = 0$ пайтдаги абсциссаси x_0 , тезлиги v_0
га тенг бўлсин. Бу бошланғич шартларда (16.48) ни интеграллаймиз:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x X(x) dx. \quad (16.49)$$

(16.49) нинг ўнг томонидаги интегрални $f(x)$ билан белгилаймиз.

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = f(x).$$

Сўнгги тенгламадан нуқтанинг тезлигини аниқлаймиз

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}$$

ёки $v = \frac{dx}{dt}$ бўлгани учун

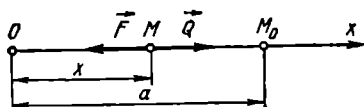
$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)},$$

ўзгарувчиларни ажратсак,

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}} = dt$$

бўлади.

* Илдиз олдидаги ишора нуқтанинг x ўқни мусбат ёки манфий йўналишида
ҳаракатланишига қараб мос равишда танлаб олинади.



16.14- расм.

Нуқтанинг бошланғич $t_0 = 0$ пайтдаги абсциссаси x_0 га тенглигини эътиборга олиб, бу тенгламани интегралласак,

$$\pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} I(x)}} = t$$

ҳосил бўлади.

Бу тенгламани чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, x ни вақтнинг функцияси сифатида аниқлаймиз.

16.12- масала. Массаси m га тенг нуқта $x_0 = a$ ҳолатдан бошланғич тезликсиз координаталар бошидан нуқтагача бўлган масофага пропорционал бўлган $F_x = -C_1 mx$ тортиш кучи ва масофа кубига пропорционал $Q_x = C_2 mx^3$ итариш кучи таъсирида тўғри чиқиқли ҳаракат қилади. C_1, C_2, a лар қандай муносабатда бўлганда нуқта координата бошида тўхтайди?

Ечиш. x ўқни нуқтанинг ҳаракат траекторияси бўйича йўналтирамиз. Нуқта-нинг бошланғич ҳолатини расмда M_0 билан белгилаймиз (16.14- расм).

Нуқтанинг ихтиёрий ҳолатини M билан белгиласак, унга $F_x = -C_1 mx$, $Q_x = C_2 mx^3$ фақат нуқтанинг координаталарига боғлиқ кучлар таъсир этади.

Нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини (16.47) кўринишида тузамиз:

$$mv \frac{dv}{dx} = -C_1 mx + C_2 mx^3$$

ёки

$$v dv = (-C_1 x + C_2 x^3) dx.$$

Бошланғич $t_1 = 0$ пайтда $x_0 = a$, $v_0 = 0$ ҳамда координата бошида $x = 0$, $v = 0$ эканлигини эътиборга олиб, бу тенгламани интеграллаймиз:

$$\int_0^0 v dv = \int_a^0 (-C_1 x + C_2 x^3) dx$$

ёки

$$0 = \frac{C_1 a^2}{2} - \frac{C_2 a^4}{4}.$$

Бундан

$$C_1 = \frac{1}{2} C_2 a^2.$$

4. Моддий нуқтага таъсир этувчи куч фақат нуқтанинг тезлигига боғлиқ бўлсин. Бундай ҳоллар одатда қаршилик кучини ҳисобга олганда учрайди. $x = f(v)$ бўлган ҳолда нуқтанинг тўғри чиқиқли ҳаракат тенгламасини икки усулда интеграллаш мумкин:

I. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини

$$m \frac{dv}{dt} = f(v) \quad (16.50)$$

кўринишда олиб, ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{mdv}{f(v)} = dt.$$

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда $x = v_0$ эканлигини эътиборга олиб, бу тенгламани интеграллаймиз:

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = t. \quad (16.51)$$

(16.51) нинг чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, олинган ифода-ни v га нисбатан ечсак,

$$v = \frac{dx}{dt} = \varphi(t) \quad (16.52)$$

бўлади. Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда $x = x_0$ эканлигини эътиборга олган ҳолда бу тенгламани интеграллаб, нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз:

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi(t) dt.$$

II. Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини яна қуйида-гича ёзиш мумкин:

$$mv \frac{dv}{dx} = f(v).$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{mv dv}{f(v)} = dx.$$

Бу тенгламани юқоридаги бошланғич шартларда интегралласак,

$$\int_{v_0}^v \frac{mv dv}{f(v)} = x - x_0. \quad (16.53)$$

(16.53) нинг чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, олинган тенг-ламани v га нисбатан ечсак, тезликни масофанинг функцияси сифа-тида аниқлаймиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = \psi(x).$$

Бундан

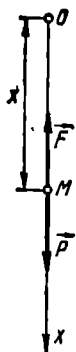
$$\frac{dx}{\psi(x)} = dt.$$

Бу тенгламани юқоридаги бошланғич шартларда интеграллаймиз:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\psi(x)} = t. \quad (16.54)$$

(16.54) нинг чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, олинган тенг-ламани x га нисбатан ечсак, x ни вақтнинг функцияси сифатида ифо-далаш мумкин.

16.13-масала. Оғирлиги $P = mg$ бўлган моддий нуқта бошланғич тезликсиз вертикал бўйича пастга тушади: ҳавонинг қаршилиги нуқтанинг тезлигига про-порционал бўлиб, унга қарама-қарши йўналган, яъни $F_x = -k m v$; бунда k про-порционаллик коэффиценти, m — нуқтанинг массаси. Нуқтанинг тезлиги v ва ўтган йўли x вақтнинг функцияси сифатида аниқлансин.



Ечиш. Нуқтанинг бошланғич пайтдаги ҳолатини координаталар боши O учун қабул қилиб, x ўқни вертикал пастга йўналтирамиз (16.15-расм).

Нуқтага ўзгармас оғирлик кучи $\vec{P}$ ва тезликка пропорционал $F_x = -k m v$ ҳавонинг қаршилик кучи таъсир этади.

Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини (16.50) кўринишида тузамиз:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kmv$$

ёки

$$\frac{dv}{dt} = g - kv.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз

16.15- расм.

$$\frac{dv}{g - kv} = dt. \quad (1)$$

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда $\dot{x}_0 = 0$ эканлигини эътиборга олиб, (1) ни интеграллаймиз:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - kv} = t,$$

$$-\frac{1}{k} \ln \frac{g - kv}{g} = t.$$

Бу тенгламадан v ни аниқласак,

$$v = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (2)$$

ёки

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dx = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) dt. \quad (3)$$

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда $x_0 = 0$ эканлигини эътиборга олиб, (3) ни интегралласак,

$$x = \frac{g}{k} \left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} \right)$$

ҳосил бўлади.

(2) дан кўрамизки, $t \rightarrow \infty$ да нуқтанинг тезлиги ўзгармас қийматга эришадик:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = -\frac{g}{k}.$$

17-боб. МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛИ ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ

17.1-§. Умумий мулоҳазалар

Бу бобда *моддий нуқтанинг* ҳаракат турларидан бири бўлган ва техникада алоҳида аҳамиятга эга бўлган *тебранма ҳаракат* устида тўхталамиз.

Тебранма ҳаракатлар турли табиатга эга бўлиши мумкин. Масалан, иншоотлар пойдеворининг тебраниши, машина ва механизм қисмларининг тебраниши, товуш тўлқинининг тарқалиши жараёнидаги тебранишлар механик ҳаракат натижасида содир бўлади; тебраниш контури, радиотўлқинлар каби тебранишлар электр ва магнит майдонлари кучланганлиги ўзгариши билан боғлиқ бўлади. Шунга қарамасдан тебранишлар бир хил қонуниятга бўйсунди. Масалан, маятник, пружинага осилган юк ва вагон кузовининг тебранишлари, электр контуридаги тебранишлар ёки сувдаги кеманинг чайқалиши бир хил дифференциал тенглама билан ифодаланиши мумкин.

Нуқтанинг тебранма ҳаракатини ўрганишда

- 1) ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузиш;
- 2) тебранма ҳаракат қонунини аниқлаш;
- 3) тебраниш даврини ҳамда мувозанат ҳолатидан энг катта оғишини ҳисоблаш каби масалалар билан шуғулланамиз.

Бу бобда қайтарувчи куч (масалан, пружинанинг эластиклик кучи), муҳитнинг қаршилиқ кучи, вақтнинг функциясида иборат уйғотувчи кучлар таъсиридаги нуқтанинг тебранма ҳаракатини текшираимиз. Бундай кучлардан бирортаси ёки уларнинг маълум комбинацияси таъсиридаги нуқтанинг дифференциал тенгламаларидан электротехника ёки радиотехникада ҳам самарали фойдаланиш мумкин.

17.2-§. Моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати

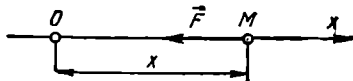
Моддий нуқтани мувозанат ҳолатига қайтаришга интилувчи кучга *қайтарувчи куч* дейилади. Нуқтага унинг мувозанат ҳолатидан оғишига пропорционал бўлган чизиқли қайтарувчи куч таъсир этган ҳолни кўраимиз. x ўқни M нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат траекторияси бўйлаб йўналтирамиз. Координаталар боши O ни M нуқтанинг мувозанатда бўлиши мумкин бўлган ҳолатда оламиз (17.1-рasm).

Агар нуқта мувозанат ҳолатидан x масофага оғдирилса, u ҳолда унга x ўқи бўйлаб ҳамиша O нуқтага йўналган қайтарувчи $\vec{F}$ куч таъсир этади. Бу кучнинг x ўқдаги проекцияси қуйидагича аниқланади:

$$X = -cx, \quad (17.1)$$

бунда c пропорционаллик коэффициентини ифодалайди.

M нуқтанинг қайтарувчи $\vec{F}$ куч



17.1- рasm.

таъсиридаги тўғри чизиqli ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$mx = -cx$$

ёки $\frac{c}{m} = k^2$ белгилаш киритсак,

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (17.2)$$

(17.2) тенглама нуқтанинг эркин тебранма ҳаракат дифференциал тенгламаси дейилади.

Шундай қилиб, моддий нуқтанинг қайтарувчи куч таъсиридаги ҳаракати иккинчи тартибли бир жинсли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама билан ифодаланади.

Бу дифференциал тенгламани интеграллаш учун унинг харақтеристик тенгламасини тузамиз:

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Бу тенглама $\lambda_1 = ik$, $\lambda_2 = -ik$ илдизларга эга бўлгани учун (17.2) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (17.3)$$

бунда C_1 ва C_2 билан интеграллаш доимийлари белгиланган.

(17.3) дан вақт бўйича ҳосила олиб, нуқтанинг тезлигини ифодаловчи

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \quad (17.4)$$

муносабатни оламиз.

C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун бошланғич шартлар берилган бўлиши керак. Айтайлик, бошланғич шартлар қуйидагича бўлсин:

$$t = 0 \text{ да } x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0. \quad (17.5)$$

(17.5) ни (17.3) ва (17.4) га қўйиб,

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$$

эканлигини келтириб чиқарамиз.

C_1 ва C_2 нинг бу қийматларини (17.3) га қўйиб, M нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \quad (17.6)$$

Нуқтанинг ҳаракатини яққолроқ тасаввур қилиш учун C_1 ва C_2 ўрнига

$$C_1 = a \sin \alpha, \quad C_2 = a \cos \alpha$$

тенгликлар воситасида аниқланадиган a ва α янги донмийларни кiritамиз. У ҳолда (17.3) ни

$$x = a \sin (kt + \alpha) \quad (17.7)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама *нуқтанинг гармоник тебраниш ҳаракатини* ифодалайди (8.6-§ га қаралсин).

Шундай қилиб, моддий нуқтанинг чизиқли қайтарувчи куч таъсиридаги эркин тебранма ҳаракати гармоник тебранма ҳаракатдан иборат бўлади.

Нуқтанинг ҳаракат тезлигини аниқлаш учун (17.7) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{x} = a k \cos (kt + \alpha). \quad (17.8)$$

a ва α ни ҳаракатнинг бошланғич шартларидан фойдаланиб аниқлаш мумкин. Айтайлик, ҳаракатнинг бошланғич шартлари (17.5) кўринишида берилган бўлсин. (17.5) ни (17.7) ва (17.8) га қўйсак,

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \dot{x}_0 = a k \cos \alpha$$

ҳосил бўлади.

Бундан a ва α лар аниқланадиган

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \quad (17.9)$$

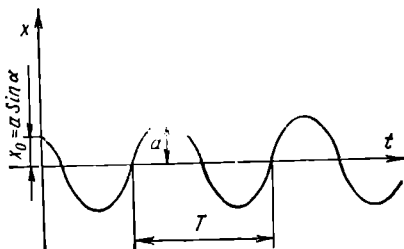
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k x_0}{\dot{x}_0}, \quad \sin \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}_0}{k \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}} \quad (17.10)$$

муносабатларни оламиз.

M нуқтанинг O тебраниш марказидан энг катта оғишига тенг бўлган a масофага *тебраниш амплитудаси* дейилади. M нуқтанинг берилган ондаги ҳолати ва ундан кейинги ҳаракат йўналишини ифодаловчи $kt + \alpha$ аргумент *тебраниш фазаси* дейилади. Бошланғич $t = 0$ пайтдаги фазанинг қиймати α *тебранишларнинг бошланғич фазаси* дейилади.

Нуқтанинг эркин тебранма ҳаракат графиги 17.2-расмда тасвирланган; бунда $x_0 = a \sin \alpha$ нуқтанинг бошланғич пайтдаги оғишини ифодалайди. Нуқта бир марта тўлқ тебраниши учун кетган



17.2- расм.

T вақт тебраниш даври дейилади. Синус функциясининг даври 2π га тенг бўлгани учун

$$k(t + T) + \alpha - (kt + \alpha) = 2\pi$$

ифодадан тебраниш даври аниқланадиган қуйидаги формулани оламиз:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (17.11)$$

Тебраниш даврининг тезкари қийматига тенг бўлган ва нуқта-нинг бир секунддаги тебранишлар сонини ифодаловчи

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi} \quad (17.12)$$

катталиққа тебранишлар частотаси дейилади.

(17.12) дан кўрамизки,

$$k = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (17.13)$$

катталиқ 2π секунд вақт ичида нуқтанинг тўлиқ тебранишлар сонини ифодалайди. Бу катталиқ тебранишларнинг доиравий частотаси дейилади.

Бу формулалардан кўрамизки, эркин тебранишлар частотаси ва тебраниш даври бошланғич шартларга боғлиқ бўлмай, фақат нуқта-нинг массаси ва c коэффициентга боғлиқ бўлади.

17.1-масала. Массаси m га тенг бўлган M юк бикирлиги o га тенг пружинага осилган (17.3-расм). Пружинанинг чўзилмаган ҳолдаги узунлиги $AB = l_0$, унга осилган юк бошланғич тезликсиз қўйиб юборилган. Пружинанинг статик муво-ванат ҳолатидаги чўзилиши λ_{cm} ни маълум деб қараб, юкнинг тебранма ҳаракат қонунини, тебраниш даври ва пружина эластиклик кучининг энг катта қиймати аниқлансин.

Ечиш. Координаталар боши учун юкнинг оғирлик кучи $\vec{mg}$ ва пружинанинг эластиклик кучи статик мувозанатлашган O нуқтани оламиз, O нуқтада

$$mg = c\lambda_{cm} \quad (1)$$

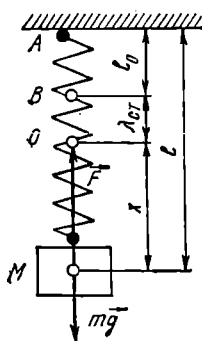
муносабат ўринли бўлади. Шундай қилиб, O координаталар боши B нуқтадан

$\lambda_{cm} = \frac{mg}{c}$ масофада ётади. Ox ўқни вертикал пастга йў-налтираимиз. Юкнинг ихтиёрий ҳолатини M билан белгилаб, унга таъсир этувчи кучларни расмда кўрсатилганидек тасвир-лаймиз. Юкка унинг оғирлик кучи $\vec{mg}$ ва пружинанинг элас-

тиклик кучи $\vec{F}$ таъсир этади. Гук қонунига кўра пружина-нинг эластиклик кучи унинг чўзилшига пропорционал бўла-ди, яъни $F = c\lambda$, бунда c — бикирлик коэффициенти, $\lambda = l - l_0 = \lambda_{cm} + x$ — юкнинг M ҳолатига мос бўлган пружинанинг чўзилиши. Шу сабабли пружина эластиклик кучи-нинг x ўқдаги проекциясини $x = -c(\lambda_{cm} + x)$ формула ёрдамида аниқлаш мумкин.

Юкнинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = mg - c(\lambda_{cm} + x). \quad (2)$$



17.3. расм.

Статик мувозанат ҳолатида (1) тенглик ўринли бўлгани учун (2) ни қуйидагича ёзиш мумкин

$$m\ddot{x} = -cx$$

ёки

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (3)$$

бунда $k^2 = \frac{c}{m}$. (3) тенглик эркин тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасидир. Бинобарин, пружина осилган юк гармоник тебранма ҳаракатда бўлади.

Қўрилаётган ҳолда тебраниш частотаси учун $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}}$, тебраниш даври учун эса (17.12) га асосан

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}} \quad (4)$$

муносабат ўринли бўлади.

(3) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини (17.3) кўришида оламиз:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (5)$$

бундан

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (6)$$

Масаланинг шартига кўра бошланғич шартлар қуйидагича бўлади:

$$t = 0 \text{ да } x_0 = -\lambda_{cm}, \quad \dot{x}_0 = 0. \quad (7)$$

(7) ни (5) ва (6) га қўйиб, $C_1 = -\lambda_{cm}$, $C_2 = 0$ бўлишини аниқлаймиз. Шундай қилиб юк

$$x = -\lambda_{cm} \cos kt \quad (8)$$

қонунга кўра ҳаракатланади.

(8) дан кўраимизки, юкнинг тебраниш амплитудаси a пружинанинг статик чўзилиши λ_{cm} га тенг бўлади: $a = \lambda_{cm}$. Шу сабабли пружинанинг энг катта чўзилиши учун

$$\lambda_{max} = \lambda_{cm} + a = 2\lambda_{cm}$$

муносабат ўринли бўлади. Бинобарин, пружинанинг энг катта эластиклик кучи

$$F_{max} = c\lambda_{max} = 2c\lambda_{cm} = 2mg,$$

яъни F_{max} юкнинг оғирлиги mg дан икки баравар катта бўлади.

17.2-масала. Q юк $h = 1$ м баландликдан бошланғич тезликсиз тушиб, учлари маҳкамланган эластик горизонтал балканинг ўртасига урилади ва у билан бирга тебранади. Юкнинг балка билан биргаликдаги кейинги ҳаракат тенгламаси ёзилсин. Ҳаракат тенгламаси юкнинг балка устидаги статик мувозанат ҳолатидан вертикал пастга йўналган ўққа нисбатан тузилсин. Ўша юк таъсирида балканинг статик эгилиши 0,5 см га тенг, балка массаси ҳисобга олинмасин.

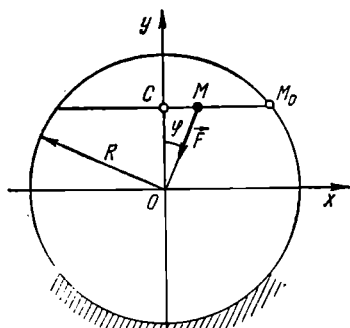
Ечиш. Координаталар бошини юкнинг статик мувозанат ҳолатида олиб, x ўқни вертикал пастга йўналтираимиз. У ҳолда ҳаракатнинг бошланғич шартлари қуйидагича бўлади:

$$t = 0 \text{ да } x = x_0 = -\lambda_{cm} = 0,005 \text{ м}, \quad \dot{x} = v_0 = \sqrt{2gh} = 4,43 \text{ м/с}, \quad (1)$$

бунда v_0 юкнинг балкага урилган пайтдаги тезлигини ифодалайди.

Юкнинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузимиз:

$$m\ddot{x} = mg - c(\lambda_{cm} + x). \quad (2)$$



17.4-рasm.

миша O нуқтага йўналган $\vec{F}$ куч таъсирида ҳаракатланади, пропорционаллик коэффициентини эса 98 Н/м га тенг (17.4-рasm). Ишқаланиш кучи ҳисобга олинмайди, O марказдан ватаргача бўлган масофа $OC = 20 \text{ см}$, айлананинг радиуси эса $R = 40 \text{ см}$. Агар нуқта бошланғич пайтда ўнг томондаги энг четки ҳолатини эгалласа ва бошланғич тезликсиз қўйиб юборилса, у қандай қонун бўйича ҳаракатланади? Нуқта ватарнинг ўртасидан қандай тезлик билан ўтади?

Ечиш. Координаталар бошини доиранинг марказида олиб, ўқларни расмда кўрсатилганидек йўналтирамиз. M нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини

$$m \ddot{x} = X$$

кўринишда тузамиз. Бунда $m = 2 \text{ кг}$, $x = -F \sin \varphi = -98 r \sin \varphi = -98 x \text{ Н}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$2 \ddot{x} = -98 x$$

ёки

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (1)$$

тенглама ҳосил бўлади, бунда $k = \sqrt{\frac{98}{2}} = 7$.

(1) тенглама эркин тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини ифодалайди.

Шундай қилиб, M нуқта горизонтал ватар бўйлаб гармоник тебранма ҳаракатда бўлади.

(1) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини (17.3) кўринишида оламиз

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2)$$

бундан

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (3)$$

Масаланинг шартига кўра бошланғич шартлар қуйидагича бўлади:

$$t = 0 \text{ да } x_0 = CM_0 = \sqrt{R^2 - OC^2} = 0,346 \text{ м}, \quad \dot{x} = 0. \quad (4)$$

(4) ни (2) ва (3) га қўйиб, $C_1 = 0,346$, $C_2 = 0$ бўлишини аниқлаймиз. Шундай қилиб, M нуқта

$$x = 0,346 \cos 7 t \quad (5)$$

Статик мувозанат ҳолатида $mg = c \lambda_{cm}$ муносабат ўринли бўлишини эътиборга олсак, (2) ни

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда $k =$

$$= \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}} = 44,29 \text{ с}^{-1}.$$

Ҳаракатнинг бошланғич шартларини ифодаловчи (1) муносабатларни назарда тутиб, нуқтанинг тебранма ҳаракат қонунини (17.6) га асосан қуйидагича ифодалаймиз:

$$x = (0,005 \cos 44,29 t + 0,1 \sin 44,29 t) \text{ м}.$$

17.3-масала. Вертикал текисликда жойлашган доиранинг горизонтал ватари бўйлаб массаси 2 кг га тенг M моддий нуқта $OM = r$ масофага пропорционал ва ҳа-

қонун бўйича ҳаракатланади ва унинг тезлиги

$$\dot{x} = -2,422 \sin 7t \quad (6)$$

тенгламадан аниқланади.

М нуқта ватарнинг ўртасидан ўтганда $x = 0$ бўлади ва (5) га асосан

$$7t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n_1. \quad (7)$$

(7) ни (6) га қўйиб М нуқта ватарнинг ўртасидан ўтган пайтдаги тезлигини аниқлаймиз:

$$\dot{x} = \pm 2,422 \text{ м/с.}$$

17.3-§. Тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган қаршилик кучи таъсиридаги моддӣ нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати

Юқорида нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати кўрилганда муҳитнинг қаршилиги (ишқаланиш, ҳавонинг қаршилиги ва ҳоказолар) эътиборга олинмаган эди, ваҳоланки, техникада учрайдиган реал масалаларни ечишда қаршилик кучини ҳисобга олишга тўғри келади. Қаршилик кучи тебранма ҳаракат характериға жиддий таъсир кўрсатади. Масалан, бир учи маҳкамлапган ва эркин учига юк осилган пружинани чўзиб, сўнгга қўйиб юборсак, юк бир неча марта тебрангандан кейин ҳавонинг қаршилик кучи туфайли тўхтади.

Ох ўқ бўйича ҳаракатланувчи М моддий нуқтаға $\vec{F}$ қайтарувчи кучдан ташқари нуқтанинг тезлиги $\vec{v}$ га қарама-қарши йўналган $\vec{R}$ қаршилик кучи таъсир этсин (17.5-расм). Нуқтанинг тезлиги унча катта бўлмаганда қаршилик кучини тезликнинг биринчи даражасига пропорционал деб қараш мумкин:

$$\vec{R} = -\mu \vec{v},$$

бунда μ қаршилик коэффициентини ифодалайди. $\vec{R}$ қаршилик кучининг x ўқдаги проекцияси

$$R = -\mu \dot{x}.$$

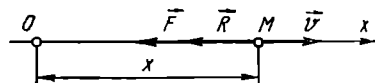
$\vec{F}$ ва $\vec{R}$ кучлар таъсиридаги нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu \dot{x}.$$

Тенгламанинг иккала томонини m га бўлиб, барча ҳадларини бир томонға ўтказсак,

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0 \quad (17.14)$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз, бунда



17.5- расм.

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2n.$$

(17.14) тенглама қайтарувчи куч ва нуқта тезлигининг биринчи даражасига пропорционал бўлган қаршилик кучи таъсиридаги моддий нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини ифодалайди. Бу тенглама коэффицентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли чизиqli бир жинсли тенгламадир. Унинг $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ характеристик тенгламаси $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ илдиэларга эга.

Моддий нуқта ҳаракатининг характери бу илдиэларнинг қабул қиладиган қийматларига боғлиқ бўлади. Агар $n < k$ (қаршилик унча катта бўлмаган ҳол) бўлса, характеристик тенгламанинг илдиэлари қўшма комплекс сонлардан, $n \geq k$ (қаршилик катта бўлган ҳол) бўлса, ҳақиқий сонлардан иборат бўлади.

Бу ҳолларни алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз:

1. Мухитнинг қаршилиги унча катта бўлмаган ҳол ($n < k$). Бу ҳолда $k^2 - n^2 = k_1^2$ белгилаш киритсак, характеристик тенгламанинг илдиэлари $\lambda_{1,2} = -n \pm i k_1$ бўлиб, (17.14) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \quad (17.15)$$

Агар C_1 ва C_2 интеграллаш доимийлари ўрнига

$$C_1 = a \sin \alpha, \quad C_2 = a \cos \alpha$$

тенгликлар воситасида аниқладиган a ва α ўзгармасларни киритсак, нуқтанинг ҳаракат қонуни

$$x = a e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) \quad (17.16)$$

тенглама билан ифодаланади.

(17.16) тенглама нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракат тенгламасидан e^{-nt} кўпайтувчиси билан фарқ қилади. Бу кўпайтувчи вақтнинг ўтиши билан нолга интилади, яъни $t \rightarrow \infty$ да $e^{-nt} \rightarrow 0$. Шу сабабли (17.16) қонун асосида содир бўладиган ҳаракат *сўнувчи тебранма ҳаракат* дейилади. Бундай ҳаракат частотаси k_1 нуқтанинг массаси m , пропорционаллик коэффиценти c билан бир қаторда мухитнинг

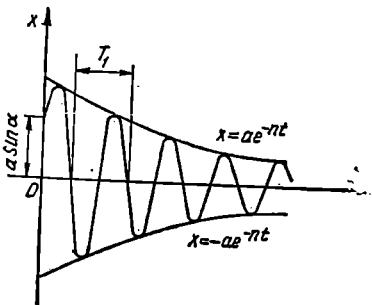
қаршилик коэффиценти μ га ҳам боғлиқ бўлади.

Сўнувчи тебранма ҳаракат графиги 17.6-расмда тасвирланган.

(17.16) да $|\sin(k_1 t + \alpha)| \leq 1$ бўлгани учун x координатанинг абсолют қиймати

$$|x| \leq |a e^{-nt}|$$

шартни қаноатлантиради. Бинобарин, сўнувчи тебранма ҳаракат графиги t ўққа нисбатан симметрик жойлашган



17.6- расм.

$$x = a e^{-nt} \text{ ва } x = -a e^{-nt}$$

чиизиқларга галма-гал уринадиган синусоида билан ифодаланади.

a ва α интеграллаш доимийларини аниқлаш учун (17.16) дан вақт бўйича ҳосила олиб, нуқтанинг тезлигини топамиз:

$$\dot{x} = a k_1 e^{-nt} \cos(k_1 t + \alpha) - a n e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (17.17)$$

Агар бошланғич шартлар

$$t = 0 \text{ да } x = x_0, \dot{x} = v_0$$

кўринишда берилган бўлса, уларни (17.16) ва (17.17) га қўйиб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$x_0 = a \sin \alpha,$$

$$v_0 = a k_1 \cos \alpha - n x_0.$$

Бундан a ва α лар аниқланадиган

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + n x_0)^2}{k_1^2}}, \quad (17.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{x_0}{a}, \\ \cos \alpha &= \frac{v_0 + n x_0}{a k_1} \end{aligned} \right\} \quad (17.19)$$

муносабатларни оламиз.

Сўнувчи тебранма ҳаракат частотаси

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}, \quad (17.20)$$

ҳаракат даври эса

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} \quad (17.21)$$

формула ёрдамида аниқланади.

(17.21) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}, \quad (17.22)$$

бунда $T = \frac{2\pi}{k}$ билан нуқтанинг эркин тебранма ҳаракат даври белгиланган.

(17.22) дан кўрамизки, сўнувчи тебранма ҳаракат даври нуқтанинг эркин тебранма ҳаракат давридан бирмунча катта бўлади. Лекин қаршилиқ кичик бўлганда бу фарқ унча катта бўлмайди ва бунда $T_1 \approx T$ деб олиш мумкин. Бинобарин, унча катта бўлмаган муҳитнинг қаршилиги эркин тебраниш даврига деярли таъсир этмайди.

Моддий нуқтанинг мувозанат ҳолатидан у ёки бу томонга ҳар гал тебрангандаги максимал оғиши *сўнувчи тебранма ҳаракат амплитудаси* дейилади.

Агар бу амплитудаларнинг кетма-кет қийматларидан ташкил топган $a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots$ қаторни олсак, бу қаторнинг иккита кетма-кет a_i, a_{i+1} ҳадлари вақтнинг t_i ва $t_{i+1} = t_i + \frac{T_1}{2}$ пайтларига мос келади (17.7-расм). Яъни $t_{i+1} - t_i = \frac{T_1}{2}$ бўлиб, нуқта $a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots$ ларга оғгандаги вақтлар айирмаси $\frac{T_1}{2}$ га тенг арифметик прогрессияни ташкил этади ҳамда

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{ae^{-n\left(t_i + \frac{T_1}{2}\right)}}{ae^{-nt_i}} = e^{-n\frac{T_1}{2}} \quad (17.23)$$

муносабат ўринли бўлади. $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ нисбат ўзгармас бўлгани туфайли

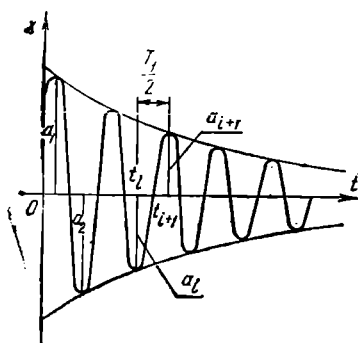
амплитудаларнинг кетма-кет қийматлари, махражи $e^{-n\frac{T_1}{2}}$ га тенг камаювчи геометрик прогрессияни ташкил этади.

$e^{-n\frac{T_1}{2}}$ га тенг бўлган абстракт сон *тебраниш декременти* дейилади. Декрементнинг натурал логарифми модулига тенг катталик *логарифмик декремент* дейилади ва у D билан белгиланади:

$$D = \left| \ln e^{-n\frac{T_1}{2}} \right| = \frac{nT_1}{2} = \frac{\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (17.24)$$

Миқдори n га тенг бўлган коэффициент *сўниш коэффициенти* дейилади.

Шундай қилиб, унча катта бўлмаган қаршиликнинг моддий нуқтани эркин тебранма ҳаракатига таъсири, вақтнинг ўтиши билан тебраниш амплитудасининг камайиши билан характерланади.



17.7- расм.

2. Аperiодик ҳаракат ($n > k$).

Бу ҳолда $n^2 - k^2 = h^2$ белгилаш киритсак, характеристик тенгламанинг илдизлари

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm h$$

ҳақиқий, манфий ва турлича қийматларга эга бўлади. Шу сабабли (17.14) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{ht} + C_2 e^{-ht}). \quad (17.25)$$

Агар C_1 ва C_2 интеграллаш доимийлари ўрнига

$$C_1 = \frac{A+B}{2}, \quad C_2 = \frac{A-B}{2}$$

тенгликлар воситасида аниқланадиган янги A ва B доимийларни киритсак, (17.25) ни

$$x = e^{-nt} \left(A \frac{e^{ht} + e^{-ht}}{2} + B \frac{e^{ht} - e^{-ht}}{2} \right)$$

кўринишда ёза оламиз. Бу тенгламада

$$\frac{e^{ht} + e^{-ht}}{2} = \operatorname{ch} ht, \quad \frac{e^{ht} - e^{-ht}}{2} = \operatorname{sh} ht$$

гиперболик функцияларни киритиб, уни қуйидагича ифодалаймиз:

$$x = e^{-nt} (A \operatorname{ch} ht + B \operatorname{sh} ht). \quad (17.26)$$

Нуқтанинг ҳаракатини янада яққолроқ тасаввур қилиш учун A ва B ўзгармаслар ўрнига

$$A = a \operatorname{sh} \alpha, \quad B = a \operatorname{ch} \alpha$$

тенгликлар ёрдамида аниқланадиган a ва α ўзгармасларни кирита-миз. У ҳолда (17.26) ўрнига

$$x = a e^{-nt} \operatorname{sh} (ht + \alpha) \quad (17.27)$$

тенгламани оламиз.

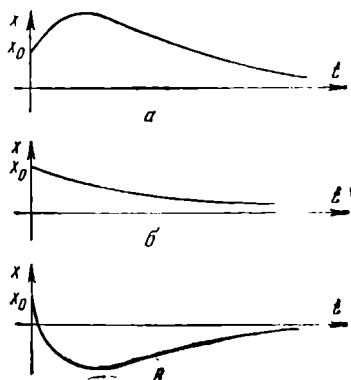
(17.27) дан кўраминик, $n > k$ бўлган ҳолда нуқта тебранма ҳаракатда бўлмайди, чунки гиперболик синус функцияси даврий функция эмас. Бу тенглама аperiодик ҳаракатни ифодалайди.

Бундай ҳаракат графиги бошланғич шартларнинг қандай бўлишига қараб, 17.8-расмда тасвирланган графикларнинг бирортаси каби бўлади.

Агар нуқта бошланғич пайтда x ўқнинг мусбат йўналиши бўйича йўналган бошланғич $\vec{v}_0$ тезликка эга бўлса, у ҳолда бу тезлик ҳисобига нуқта дастлаб мувозанат ҳолатидан узоқлаша боради, сўнгра қайтарувчи куч таъсирида му-возанат ҳолатига аста-секин яқинлаша боради (17.8-расм, а).

Агар нуқта бошланғич пайтда x ўққа қарама-қарши йўналган $\vec{v}_0$ бошланғич тезликка эга бўлса, ҳаракат графиги 17.8-расм, б, в дагидек бўлади. Бу ҳолда нуқтанинг бошланғич тезлиги v_0 етарлича катта бўлса, нуқта мувозанат ҳолатидан бир марта ўтиб, сўнгра бу ҳолатга аста-секин яқинлаша боради (17.8-расм, в).

3. Чегаравий ҳолдаги аperiодик ҳаракат. Бу ҳолда характеристик тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг; ҳақиқий ва манфий қийматга эга бўлади:



17.8- расм.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n.$$

Бу (17.14) тенгламанинг умумий ечимини

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2) \quad (17.28)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ҳолда нуқтанинг тезлиги

$$\dot{x} = -n e^{-nt} (C_1 t + C_2) + e^{-nt} C_1 \quad (17.29)$$

формула ёрдамида аниқланади.

C_1 ва C_2 ни топиш учун ҳаракатнинг бошланғич шартларидан фойдаланамиз. Айтайлик, бошланғич $t = 0$ пайтда нуқта $x = x_0$ ҳолатни эгалласин ва $\dot{x} = v_0$ тезликка эга бўлсин. Бу шартларни (17.28) ва (17.29) га қўйсак,

$$x_0 = C_2,$$

$$v_0 = -n C_2 + C_1 = -n x_0 + C_1,$$

бундан

$$C_1 = v_0 + n x_0$$

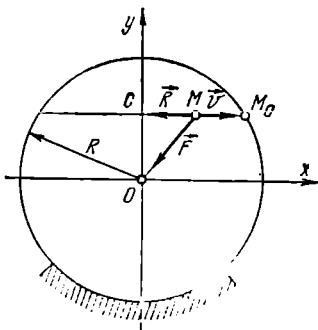
эканлиги топилади.

C_1 ва C_2 ларнинг қийматларини (17.28) га қўйиб, нуқтанинг ҳаракат қонунини қуйидагича ёза оламиз:

$$x = e^{-nt} [x_0 + (v_0 + n x_0) t].$$

Бу тенглама воситасида аниқланадиган ҳаракат ҳам сўнувчи аperiодик ҳаракатдан иборат бўлади.

17.4- масала. 17.3- масаладаги M нуқтага $\vec{F}$ кучдан ташқари нуқтанинг тезлигига қарама-қарши йўналган ва тезликнинг биринчи даражасига пропорционал қаршилик кучи $\vec{R}$ таъсир этганда нуқтанинг ҳаракат қонуни аниқлансин (17.9- расм). Пропорционаллик коэффициенти $\gamma = 10$ Н.с/м.



17.9- расм.

Ечиш. Қаршилик кучи $\vec{R}$ нуқтанинг тезлиги v га қарама-қарши йўналганлигини назарда тутиб, нуқтанинг ҳаракат тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m \ddot{x} = -X + R_x$$

ёки

$$2 \ddot{x} = 98x - 10 \dot{x}.$$

Бу дифференциал тенгламани

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $2n = 5$, $k = 7$.

Характеристик тенглама тузиб, унинг илдзларини аниқлаймиз:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 49} = -2,5 \pm 6,144 \text{ т.}$$

Характеристик тенглама иккита мавҳум қўшма илдизга эга бўлгани учун M нуқтанинг ҳаракати тебранма ҳаракатдан иборат бўлади ҳамда (17.16) га кўра нуқтанинг ҳаракат қонунини

$$x = a e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Нуқта $t = 0$ да $x_0 = CM_0 = 0,346$ м, $\dot{x} = 0$ бошланғич шартларда ҳаракатланишини эътиборга олсак, (17.18) ва (17.19) га кўра

$$a = \sqrt{0,346^2 + \frac{(2,5 \cdot 0,346)^2}{6,144}} = 0,49 \text{ м,}$$

$$\sin \alpha = \frac{x_0}{a} = \frac{0,346}{0,49} = 0,7061$$

$$\alpha = 0,25 \text{ п.}$$

Шундай қилиб, M нуқта

$$x = 0,49 e^{-2,5 t} \sin(6,144 t + 0,25 \text{ п}) \text{ м}$$

қонунга кўра сўнувчи тебранма ҳаракатда бўлади.

17.4- §. Моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати

Моддий нуқтага қайтарувчи кучдан ташқари вақтнинг даврий функциясидан иборат бўлган уйғотувчи куч ҳам таъсир этса, у мажбурий тебранма ҳаракатда бўлади. Даврий куч манбаи ўз табиатига кўра турлича бўлиши мумкин. Ёқилғи ёниши натижасида ҳосил бўладиган газларнинг ички ёнув двигатели поршенига таъсир кучи, электромагнитларнинг ўзгарувчан тортиш кучлари, мувозанатланмаган валнинг айланиши натижасида ҳосил бўладиган марказдан қочирма инерция кучи ана шулар жумласидандир.

Айтайлик, моддий нуқтага таъсир этувчи $\vec{Q}$ уйғотувчи кучнинг x ўқдаги проекцияси $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ га тенг бўлсин; бу ерда H — уйғотувчи кучнинг амплитудаси, p — унинг доиравий частотаси, δ — бошланғич фаза.

$\vec{F}$ қайтарувчи ва $\vec{Q}$ уйғотувчи кучлар таъсиридаги моддий нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$m \ddot{x} = -c x + H \sin(pt + \delta)$$

ёки

$$\ddot{x} + k^2 x = H_0 \sin(pt + \delta), \quad (17.30)$$

$$\text{бунда } k^2 = \frac{c}{m}, \quad H_0 = \frac{H}{m}.$$

(17.30) тенглама *моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракат тенгламаси* дейилади. Бу тенглама коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламадан иборат. Унинг умумий ечими $\ddot{x} + k^2 x = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $x_1 = a \sin(kt + \alpha)$ ва (17.30) тенгламанинг хусусий ечими x_2 ларнинг йиғиндисига тенг:

$$x = x_1 + x_2. \quad (17.31)$$

Агар $p \neq k$ бўлса, (17.30) тенгламанинг хусусий ечимини қуйидаги кўринишда оламиз.

$$x_2 = A \sin(pt + \delta). \quad (17.32)$$

Бу тенгламадаги A доимий катталиқни аниқлаш учун (17.32) дан вақт бўйича икки марта ҳосила олиб,

$$\ddot{x}_2 = -A p^2 \sin(pt + \delta),$$

сўнгра x_2 ва $\ddot{x}_2$ ларнинг қийматини (17.30) тенгламага қўямиз:

$$-A p^2 \sin(pt + \delta) + A k^2 \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta)$$

ёки

$$A(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta). \quad (17.33)$$

Бу тенглик ўринли бўлиши учун чап ва ўнг томондаги $\sin(pt + \delta)$ олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг бўлиши керак:

$$A(k^2 - p^2) = H_0.$$

Бундан

$$A = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \quad (17.34)$$

муносабатни оламиз.

(17.34) ни (17.32) га қўйиб, хусусий ечим учун

$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$$

ифодага эга бўламиз.

Шундай қилиб, (17.30) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (17.35)$$

Бинобарин, *моддий нуқтага бир вақтнинг ўзида $\vec{F}$ қайтарувчи ва $\vec{Q}$ уйғотувчи кучлар таъсир этса, мажкур нуқта k частота билан содир бўладиган эркин тебранма ҳаракат ҳамда уйғотувчи куч частотаси p билан содир бўладиган мажбурий*

тебранма ҳаракатлардан ташкил топган мураккаб ҳаракатда иштирок этади.

(17.35) даги a ва α доимийлар ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. Бу тенгламадаги нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракатини ифодаловчи охириги ҳадда интеграллаш натижасида ҳосил бўладиган доимийлар қатнашмайди. Бинобарин, *мажбурий тебранма ҳаракат, нуқта ҳаракатининг бошланғич шартларига боғлиқ бўлмайди.*

Нуқтанинг

$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad (17.36)$$

қонун асосида содир бўладиган мажбурий тебранма ҳаракатини батафсил текшираимиз.

Мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси

$$A_1 = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} \quad (17.37)$$

тенгликдан аниқланади.

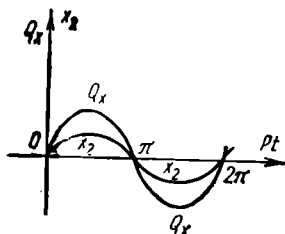
Мажбурий тебранма ҳаракат тенгламасини унинг амплитудаси орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\begin{aligned} k > p \text{ бўлса, } x_2 &= A_1 \sin(pt + \delta), \\ k < p \text{ бўлса, } x_2 &= -A_1 \sin(pt + \delta) = A_1 \sin(pt + \delta - \pi). \end{aligned}$$

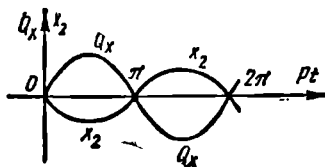
Охириги иккита тенгликдан кўраимизки, агар $k > p$ бўлса, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси, $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ уйғотувчи куч фазаси билан уотма-уст тушади (17.10- расм); агар $k < p$ бўлса, мажбурий тебранма ҳаракат ва уйғотувчи куч қарама-қарши фазага эга бўлади, яъни мажбурий тебранма ҳаракат фазаси уйғотувчи куч фазасидан π га орқада қолади (17.11- расм).

Мажбурий тебранма ҳаракат амплитудасини частоталар нисбати орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

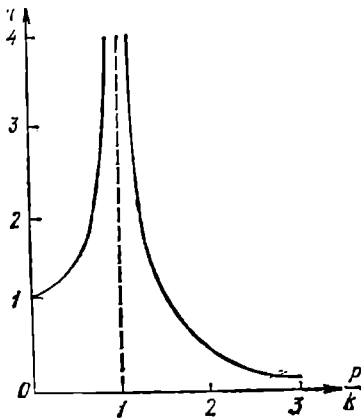
$$A_1 = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{H_0}{k^2 \left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|} = \frac{x_{cm}}{\left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|}, \quad (17.38)$$



17.10- расм.



17.11- расм.



17.12- расм.

бунда $x_{cm} = \frac{H_0}{k^2}$ билан нуқтага уй-
ғотувчи кучнинг максимал қийма-
тига тенг куч таъсир этганда унинг
мувозанат ҳолатидан статик ғиши-
ни ифодаловчи катталиқ белгилан-
ган. Агар $\frac{A_1}{x_{cm}}$ нисбатни η орқали
белгиласак,

$$\eta = \frac{A_1}{x_{cm}} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|}. \quad (17.39)$$

η катталиқ *динамиклик коэф-
фициенти* дейлади; бу коэффи-
циент мажбурий тебранма ҳаракат
амплитудаси статик ғишидан неча
марта ортиқ бўлишини ифодалайди.

17.12- расмда ифодаланган (17.39) ифоданинг графигидан кўра-
мизки, $\frac{p}{k} \rightarrow 1$ да динамиклик коэффиценти жуда катта қийматга
эришади.

17.5- §. Нуқтанинг тепкили тебранишлари

(17.30) тенгламанинг умумий ечимини яна қуйидаги кўринишда
ёзиш мумкин:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (17.40)$$

C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун (17.40) дан
вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{x} = -k C_1 \sin kt + k C_2 \cos kt + \frac{p H_0}{k^2 - p^2} \cos(pt + \delta). \quad (17.41)$$

Айтайлик, ҳаракатнинг бошланғич шартлари қуйидагича бўлсин:

$$t = 0 \text{ да } x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0. \quad (17.42)$$

(17.42) ни (17.40) ва (17.41) га қўйиб, C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз:

$$C_1 = x_0 - \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin \delta,$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k} \cdot \frac{H_0}{k^2 - p^2} \cos \delta.$$

C_1 ва C_2 нинг бу қийматларини (17.40) га қўйиб, тенгламанинг
(17.42) бошланғич шартлардаги умумий ечимини оламиз:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{H_0}{k^2 - p^2} (\sin \delta \cdot \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \cdot \sin kt) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (17.43)$$

(17.43) дан кўрамизки, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ бошланғич шартларда ҳам нуқтанинг уйғотувчи куч таъсирида

$$- \frac{H_0}{k^2 - p^2} (\sin \delta \cdot \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \cdot \sin kt)$$

қонун асосида содир бўладиган тебранишлари эркин тебранишлар частотасига тенг частота билан тебранма ҳаракатда бўлади ҳамда бу тебранишлар амплитудаси бошланғич шартларга боғлиқ бўлмайди.

Мажбурий тебранма ҳаракат частотаси p эркин тебраниш частотаси k билан деярли устма-уст тушганда, бир хил амплитудали ва қарама-қарши фазали иккита бир-бирига яқин частотали ҳаракатларни қўшиш натижасида нуқтанинг тепкили тебраниш (биение) деб аталадиган ҳаракати содир рўлади.

Айтайлик, $\frac{p}{k} \approx 1$, лекин ($k^2 - p^2 \neq 0$) бўлсин, у ҳолда $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ бошланғич шартларда (17.43) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$x \approx \frac{H_0}{k^2 - p^2} [\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \delta)]$$

ёки $\frac{p+k}{2} \approx p$ деб қараб,

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

формулани қўллаб, умумий ечим учун

$$x = \frac{2 H_0}{k^2 - p^2} \sin \left(\frac{p-k}{2} t \right) \cos(pt + \delta) \quad (17.44)$$

ифодани оламиз.

Агар

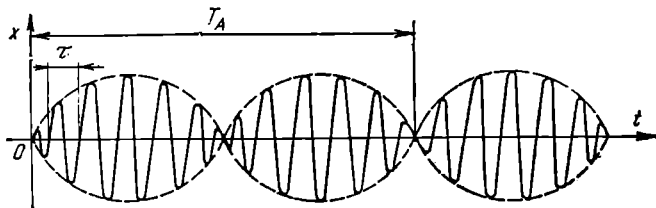
$$A(t) = \frac{2 H_0}{k^2 - p^2} \sin \left(\frac{p-k}{2} t \right) \quad (17.45)$$

белгилаш киритсак, (17.44) ни

$$x = A(t) \cos(pt + \delta) \quad (17.46)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундай ҳаракат графиги 17.13-расмда тасвирланган.

(17.46) дан кўрамизки, тепкили тебранишни частотаси p , даври $T = \frac{2\pi}{p}$ га тенг ҳамда амплитудаси вақтга боғлиқ (17.45) тенглик билан ифодаланадиган даврий қонун асосида ўзгарадиган тебранма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин.



17.13- расм.

Бу ҳолда амплитуданинг ўзгариш даври

$$T_A = \frac{2\pi}{\frac{p-k}{2}} = \frac{4\pi}{p-k}$$

формула билан ифодаланади.

$p \approx k$ бўлгани учун амплитуданинг ўзгариш даври $\tau = \frac{2\pi}{p}$ га нисбатан анча катта бўлади.

17.6- §. Резонанс ҳодисаси

(17.33) дан кўрамизки, $p \approx k$ бўлганда (17.32) кўринишдаги хусусий ечим мавжуд бўлмайди. Бу ҳолда хусусий ечимни қуйидагича таппаб оламиз:

$$x_2^* = \frac{H_0}{k^2 - p^2} (\sin pt - \sin kt).$$

Бу ечимни (17.35) тенглик билан ифодаланадиган умумий ечимдан a , α ва δ катталиклар

$$a = -\frac{H_0}{k^2 - p^2}, \quad \alpha = 0, \quad \delta = 0$$

қийматларни қабул қилган ҳолда келтириб чиқариш мумкин. Агар $p = k$ бўлса, мазкур хусусий ечим $\frac{0}{0}$ кўринишидаги аниқмасоликдан иборат бўлади. Бу аниқмасоликни йўқотиш учун Лопиталь қондасидан фойдаланамиз:

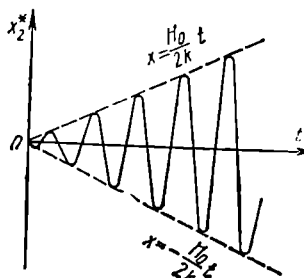
$$x_2^* = H_0 \left[\frac{\frac{d}{dp} (\sin pt - \sin kt)}{\frac{d}{dp} (k^2 - p^2)} \right]_{p=k} = -\frac{H_0 t}{2k} \cos kt. \quad (17.47)$$

Шундай қилиб, $p = k$ ҳолида (17.30) тенгламанинг умумий ечимини

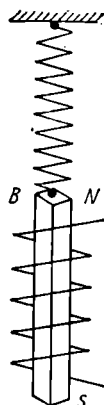
$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{H_0 t}{2k} \cos kt \quad (17.48)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

17.14- расмда x_2^* функциянинг графиги тасвирланган бўлиб, $p = k$ бўлганда вақтнинг ўтиши билан тебраниш амплитудаси вақтнинг чизиқли функцияси сифатида чексиз орта боради. Бу ҳодисага *резонанс* дейилади.



17.14- расм.



17.15- расм.

Резонанс ҳодисасини эътиборга олмаслик натижасида баъзида иншоотлар тўсатдан бузилиб кетиши мумкин. Масалан, осма кўприк устидан солдатлар бир хил қадам ташлаб ўтганда солдат қадамларининг частотаси кўприкнинг тебраниш частотаси билан устма-уст тушганда резонанс ҳодисаси рўй беради ва натижада кўприк бузилиб кетиши мумкин. 1850 йилда Анжер осма кўприги устидан 500 кишилиқ француз пиёда аскарлари батальони бир меъёردа қадам ташлаб ўтиб бораётганда бу кўприк бузилиб кетган ва натижада 226 киши ҳалок бўлган.

Акустика ва радиотехника ҳамда турли иншоотларнинг лойиҳасини динамик ҳисоблашда резонанс ҳодисаси алоҳида аҳамиятга эга.

17.5- масала. Бикирлиги $c = 19,6$ Н/м бўлган пружинага массаси 100 г бўлган магнит стержени осилган. Магнитнинг пастки учи $i = 20 \sin 8 \pi t$ А қонун билан ўзгарувчи ток оқадиган ғалтакдан ўтади. $t = 0$ пайдан бошлаб стерженни соленоидга тортувчи ток ўта бошлайди; шу пайтга қадар магнит стержени пружинада қўзғалмай осилиб турган (17.15- расм). Магнит билан ғалтак орасидаги ўзаро таъсир кучи $F = 0,016 \pi i$ Н. Магнит стержени чўзилмаган пружинага осилиб, бошланғич тезликсиз қўйиб юборилганда у қандай қонун бўйича ҳаракат қилиши аниқлансин.

Ечиш. Магнит стержени тўғри чизиқли илгарилама ҳаракатда бўлади. Унга $P = mg$ оғирлик кучи; $F_1 = cx = 19,6x$ Н эластиклик кучи; $F = 0,016 \pi i$ Н — магнит стержени билан ғалтак орасидаги уйғотувчи куч таъсир этади.

Координаталар бошини магнит стерженнинг статик мувозанат ҳолатида олиб, ҳаракат дифференциал тенгламасини қуйидагича ёза оламиз:

$$m\ddot{x} = -cx + 0,320 \pi \sin 8 \pi t$$

ёки

$$\ddot{x} + k^2 x = H_0 \sin p t. \quad (1)$$

$$\text{Бунда } k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{19,6}{0,1}} = 14; \quad H_0 = \frac{0,320 \pi}{0,1} = 10,05 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}; \quad p = 8 \pi.$$

$p > k$ бўлгани учун резонанс ҳодисаси рўй бермайди.

(1) тенгламанинг умумий ечимини $x = x_1 + x_2$ кўринишда излаймиз. Бунда x_1 билан ўнг томони нолга тенг бўлган (1) тенгламанинг умумий ечими белгиланган. Маълумки, у қуйидагича бўлади:

$$x_1 = C_1 \cos k t + C_2 \sin k t. \quad (2)$$

x_2 эса (1) нинг хусусий ечими бўлиб, магнит стерженининг мажбурий тебранма ҳаракатини ифодалайди.

(1) тенгламанинг хусусий ечимини

$$x_2 = A \sin p t \quad (3)$$

кўринишда оламиз. (3) дан вақт бўйича икки марта ҳосила олиб, сўнггра x_2 ва $\dot{x}_2$ ларнинг қийматини (1) тенгламага қўямиз. У ҳолда тенгламанинг ўнг ва чап томонидаги синуслар олдидаги коэффициентларни тенглаштирсак, $A = \frac{H_0}{k^2 - p^2} = -0,023$ эканлиги келиб чиқади.

Демак, магнит стерженининг мажбурий тебраниши

$$x_2 = -0,023 \sin 8 \pi t = 0,023 \sin (8 \pi t - \pi)$$

қонун асосида содир бўлади. Бу тенгликдан кўрамызки, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси уйғотувчи куч фазасига қарама-қарши бўлади.

Шундай қилиб, (1) тенгламанинг умумий ечими учун

$$x = C_1 \cos 14 t + C_2 \sin 14 t - 0,023 \sin 8 \pi t \quad (4)$$

ифодани оламиз.

C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун (4) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{x} = -14 C_1 \sin 14 t + 14 C_2 \cos 14 t - 0,578 \cdot \cos 8 \pi t. \quad (5)$$

Масаланинг шартига кўра бошланғич $t=0$ пайтда магнит стержени $x_0 = -\lambda_{cm} = -\frac{mg}{c} = -0,05$ м ҳолатни эгаллайди ва $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$. Бу бошланғич шартларни (4) ва (5) га қўйиб, C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз:

$$C_1 = -0,05, C_2 = 0,0413.$$

Шундай қилиб, магнит стержени

$x = (-0,05 \cos 14 t + 0,0413 \sin 14 t - 0,023 \sin 8 \pi t)$ м қонун асосида ҳаракатланади.

17.7-§. Нуқтанинг мажбурий тебранишига муҳит қаршилигининг таъсири

Эркин тебранма ҳаракатдаги нуқтага тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган муҳитнинг қаршилиқ кучи таъсир этганда нуқта сўнувчи тебранма ҳаракатда бўлишини кўрган эдик. Энди мажбурий тебранма ҳаракатдаги нуқтага бундай қаршилиқ кучи қандай таъсир этишини кўрамыз.

Ох ўқ бўйича ҳаракатланувчи M нуқтага қайтарувчи куч $\vec{F}$, уйғотувчи куч $\vec{Q}$ ва тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган $\vec{R} = -\mu \vec{v}$ қаршилиқ кучи таъсир этсин.

Координаталар бошини пружина деформацияланмаган ҳолатига мос келувчи нуқтанинг эгаллаган ҳолатида олиб, унинг ихтиёрий пайтдаги координатасини x билан белгилайлик. У ҳолда нуқтага таъсир этувчи кучларнинг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича ифодаланади:

$$F_x = -cx, Q_x = H \sin (\pi t + \delta) - \mu \dot{x}, R_x = -\mu \dot{x}.$$

Бундай кучлар таъсиридаги нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенглама сини

$$m\ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \delta) - \mu \dot{x}$$

кўринишда ёзиш мумкин. cx ва $\mu \dot{x}$ ҳадларни чап томонга ўтказиб, тенгламанинг иккала томонини m га бўлсак,

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{H}{m} \sin(pt + \delta)$$

ва $\frac{\mu}{m} = 2n$, $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{H}{m} = H_0$ белгилашларни киритсак,

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = H_0 \sin(pt + \delta) \quad (17.49)$$

дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

(17.49) тенглама ҳаракат тезлигига пропорционал бўлган қаршилик кучи таъсиридаги нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини ифодалайди. Бу тенглама коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизиqli дифференциал тенгламадан иборат бўлиб, унинг умумий ечими (17.14) бир жинсли тенгламанинг умумий ечими x_1 билан (17.49) тенгламанинг хусусий ечими x_2 ларнинг йиғиндисига тенг бўлади:

$$x = x_1 + x_2. \quad (17.50)$$

(17.14) тенгламанинг умумий ечимини n ва k ларнинг қандай қийматларни қабул қилишига қараб, мос равишда (17.15) ёки (17.16), (17.25) ёки (17.27) ҳамда (17.28) кўринишда олиш мумкин.

(17.49) тенгламанинг хусусий ечимини

$$x_2 = A \sin(p + \delta - \epsilon) \quad (17.51)$$

шаклида оламиз. Бундаги A ва ϵ доимийларни аниқлаш учун $\dot{x}_2$ ва $\ddot{x}_2$ ларни ҳисоблаб,

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= Ap \cos(pt + \delta - \epsilon), \\ \ddot{x}_2 &= -Ap^2 \sin(pt + \delta - \epsilon), \end{aligned}$$

сўнгра x_2 , $\dot{x}_2$ ва $\ddot{x}_2$ ларнинг қийматини (17.49) га қўямиз:

$$-Ap^2 \sin(pt + \delta - \epsilon) + 2nAp \cos(pt + \delta - \epsilon) + Ak^2 \sin(pt + \delta - \epsilon) = H_0 \sin(pt + \delta). \quad (17.52)$$

Бу тенгламанинг ўнг томонидаги ифодани қуйидагича ёзиб:

$$\begin{aligned} H_0 \sin(pt + \delta) &= H_0 \sin(pt + \delta - \epsilon + \epsilon) = \\ &= H_0 \sin(pt + \delta - \epsilon) \cdot \cos \epsilon + H_0 \cos(pt + \delta - \epsilon) \sin \epsilon, \end{aligned}$$

олинган натижани (17.52) га қўямиз:

$$\begin{aligned} A(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta - \epsilon) + 2npA \cos(pt + \delta - \epsilon) = \\ = H_0 \cos \epsilon \cdot \sin(pt + \delta - \epsilon) + H_0 \sin \epsilon \cdot \cos(pt + \delta - \epsilon). \end{aligned}$$

Бу тенглама t вақтининг ҳар қандай қийматида ўринли бўлиши учун $\sin (pt + \delta - \epsilon)$ ва $\cos (pt + \delta - \epsilon)$ олдидаги моо коэффициентлар ўзаро тенг бўлиши керак:

$$\left. \begin{aligned} A(k^2 - p^2) &= H_0 \cos \epsilon, \\ 2npA &= H_0 \sin \epsilon. \end{aligned} \right\} \quad (17.53)$$

(17.53) дан A ва ϵ лар аниқланадиган ушбу муносабатларни ола-
миз:

$$A = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \quad (17.54)$$

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (17.55)$$

ϵ ни (17.55) дан аниқлаш мумкинлигини назарда тутиб, мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси A нинг қийматини (17.51)га қўй-
сак,

$$x_2 = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} \sin (pt + \delta - \epsilon) \quad (17.56)$$

тенгликни оламир.

Шундай қилиб, k ва n лар орасидаги муносабат қандай бўлиши-
га қараб, (17.49) тенгламанинг умумий ечимини

1) $n < k$ бўлганда ($k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ белгилаш киритиб)

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + A \sin (pt + \delta - \epsilon) \quad (17.57)$$

ёки

$$x = ae^{-nt} \sin (k_1 t + \alpha) + A \sin (pt + \delta - \epsilon); \quad (17.57a)$$

2) $n > k$ муносабат ўринли бўлганда ($h = \sqrt{n^2 - k^2}$).

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{ht} + C_2 e^{-ht}) + A \sin (pt + \delta - \epsilon) \quad (17.58)$$

ёки

$$x = ae^{-nt} \operatorname{sh} (ht + \alpha) + A \sin (pt + \delta - \epsilon); \quad (17.58a)$$

3) $n = k$ ҳолида

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2) + A \sin (pt + \delta - \epsilon) \quad (17.59)$$

кўрinishда ёзиш мумкин.

Бу тенгламаларда C_1 , C_2 ва a , α лар интеграллаш доимийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. Масалан, (17.57) даги C_1 ва C_2 ларни аниқлаш учун ундан вақт бўйича ҳо-
сила оламир ҳамда олинган тенгламага ва (17.57) га $t = 0$ да $x = x_0$,
 $\dot{x} = \dot{x}_0$ бошланғич шартларни қўямиз:

$$C_2 = \frac{1}{k_1} [\dot{x}_0 + nx_0 - nA \sin (\delta - \epsilon) - Ap \cos (\delta - \epsilon)],$$

$$C_1 = x_0 - A \sin (\delta - \epsilon).$$

C_1 ва C_2 нинг бу қийматларини (17.57) га қўйиб, моддий нуқтанинг $n < k$ ҳолдаги ҳаракат қонунини оламиз:

$$x = e^{-nt} \left[\frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t + x_0 \cos k_1 t \right] - e^{-nt} \left\{ \frac{A}{k_1} [n \sin (\delta - \epsilon) + p \cos (\delta - \epsilon)] \sin k_1 t + A \sin (\delta - \epsilon) \cdot \cos k_1 t \right\} + A \sin (pt + \delta - \epsilon). \quad (17.60)$$

(17.60) дан кўрамизки, $n < k$ бўлганда моддий нуқтанинг ҳаракати-ни биринчи қўшилувчи билан ифодаланадиган ва бошланғич шартларга боғлиқ бўлган сўнувчи тебранма ҳаракат, иккинчи қўшилувчи билан ифодаланадиган ва уйғотувчи куч таъсирида k_1 частота билан содир бўладиган сўнувчи тебранма ҳаракат ҳамда учинчи қўшилувчи билан ифодаланадиган соф мажбурий тебранма ҳаракатлардан ташкил топган деб қараш мумкин.

(17.57 — 17.59) формулаларда қатнашувчи e^{-nt} кўпайтувчи вақтнинг ўтиши билан нолга интилади, яъни бу кўпайтувчи қатнашган ҳадлар сўнувчи тебранма ёки аperiодик ҳаракатни ифодалайди. Шу сабабли маълум вақт ўтгандан кейин нуқтанинг ҳаракати фақат

$$x = A \sin (pt + \delta - \epsilon)$$

қонун билан ифодаланадиган мажбурий тебранишдан иборат бўлиб қолади ҳамда мажбурий тебранма ҳаракат қаршилик кучи таъсирида сўнмайди.

Мажбурий тебранишдан фарқли ўлароқ эркин тебранма ҳаракатда жуда кичик қаршилик мавжуд бўлганда ҳам ҳаракат сўнувчи бўлади.

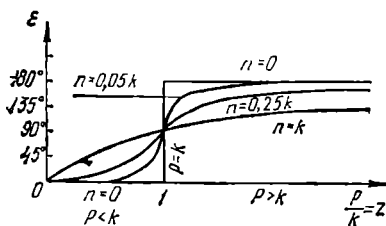
Қаршилик мавжуд бўлганда мажбурий тебранма ҳаракат частотаси p ва тебраниш даври $\tau = \frac{2\pi}{p}$ уйғотувчи куч частотаси ва даврига тенг бўлади ҳамда муҳитнинг қаршилиги мажбурий тебранма ҳаракат частотаси ва даврига таъсир этмайди.

Қаршилик кучи мавжуд бўлганда мажбурий тебранма ҳаракат фазаси $(pt + \delta - \epsilon)$ уйғотувчи куч фазаси $(pt + \delta)$ дан *фаза силжиши* деб аталадиган ва (17.55) формула ёрдамида аниқланадиган ϵ катталиikka орқада қолади.

(17.53) дан кўрамизки, $\sin \epsilon = \frac{2npA}{H_0} > 0$ бўлгани учун ϵ катталик $0 \leq \epsilon \leq \pi$ сегментда ўзгаради. Шу сабабли ϵ ни (18.55) формула воситасида бир қийматли аниқлаш мумкин:

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} \text{ ёки } \operatorname{tg} \epsilon = \frac{2 \frac{n}{k} \frac{p}{k}}{1 - \left(\frac{p}{k} \right)^2} = \frac{2\beta z}{1 - z^2}.$$

Бу формулалардан кўрамизки, ϵ нинг қиймати уйғотувчи куч частотаси билан эркин тебраниш частотасининг ниобатига тенг бўл-



17.16- расм.

ган $\frac{p}{k} = z$ катталиққа ҳамда $\sin$ ниш коэффициентни деб аталадиган $\frac{n}{k} = \beta$ нинг миқдорига боғлиқ бўлади. Бинобарин, β га маълум қийматларни бериб, ϵ билан z орасидаги муносабатни 17.16- расмдагидек тасвирлаш мумкин.

Қаршилик кучи таъсир этмаган ҳолда $n = 0$ ва $\operatorname{tg} \epsilon = 0$ бўлади.

ди. Бу ҳолда кичик частота ($\frac{p}{k} < 1$) билан содир бўладиган мажбурий тебранма ҳаракат учун $\epsilon = 0$ бўлиб, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси билан уйғотувчи куч фазаси устма-уст тушади.

$p = k$ бўлса, яъни уйғотувчи куч частотаси эркин тебранишлар частотаси билан устма-уст тушса, $\sin$ ниш коэффициентни β қандай қийматни қабул қилишидан қатъи назар,

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2pz}{1 - z^2} = \infty \quad \text{ва} \quad \epsilon = \frac{\pi}{2}$$

бўлади. Бинобарин, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси уйғотувчи куч фазасидан $\frac{\pi}{2}$ га орқада қолади.

Катта частота ($\frac{p}{k} > 1$) билан содир бўладиган мажбурий тебранма ҳаракат учун $\epsilon = \pi$ бўлиб, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси уйғотувчи куч фазасидан π га орқада қолади, яъни унга қарама-қарши бўлади.

k , p ва n ларнинг қийматлари маълум бўлса, 17.16- расмда тасвирланган графикдан силжиш фазаси ϵ ни бевосита аниқлаш мумкин.

Муҳитнинг қаршилик кучи мавжуд бўлганда мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси (17.54) формуладан аниқланади. Бу формуладаги касрнинг сурат ва махражини k^2 га бўлиб, мажбурий тебраниш амплитудаси учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$A = \frac{\frac{H_0}{k^2}}{\sqrt{[1 - (\frac{p}{k})]^2 + 4(\frac{n}{k})^2(\frac{p}{k})^2}}$$

ёки

$$A = \frac{x_{cm}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}, \quad (17.61)$$

бунда

$$z = \frac{p}{k}, \quad \beta = \frac{n}{k}, \quad x_{cm} = \frac{H_0}{k^2}$$

бўлиб, x_{cm} катталиқ уйғотувчи куч $\vec{Q}$ нинг максимал қийматига тенг бўлган ўзгармас H куч таъсирида *нуқтанина мувозанат ҳолатидан статик сил-жишини* ифодалайди.

(17.61) дан кўрамизки, сўниш коэф-фициенти β берилганда A мажбурий тебраниш амплитудаси z нинг функ-циясидан иборат бўлади.

17.17-расмда тасвирланган эгри чи-зиқларнинг ҳар бири β нинг маълум қийматида A амплитуда билан z ора-сидаги муносабатни ифодалайди.

(17.61) дан кўрамизки,

$$(A)_{z=0} = x_{cm}; (A)_{z=1} = \frac{x_{cm}}{2\beta} \quad (17.62)$$

ҳамда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A = 0,$$

яъни z ўқ 17.17-расмда тасвирланган эгри чизиқларнинг асимпто-тасини ифодалайди.

z қандай қийматни қабул қилганда A амплитуда максимал қийматга эга бўлишини аниқлаймиз. Бунинг учун (17.61) да илдиз остидаги ифодани $f(z)$ билан белгилаймиз, яъни

$$f(z) = (1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2.$$

$f(z)$ нинг минимал қийматига A нинг максимал қиймати мос ке-лади.

$f(z)$ экстремал қийматларини аниқлаш учун унинг z бўйича би-ринчи ва иккинчи ҳосилаларини ҳисоблаймиз

$$\begin{aligned} \frac{df(z)}{dz} &= -4z(1 - z^2) + 8\beta^2 z, \\ \frac{d^2 f(z)}{dz^2} &= -4 + 12z^2 + 8\beta^2. \end{aligned}$$

$\frac{df(z)}{dz}$ ни нолга тенглаб, z нинг A амплитуда экстремал қий-матларга эришадиган ва бизни қизиқтирадиган $z \geq 0$ қийматларини аниқлаймиз:

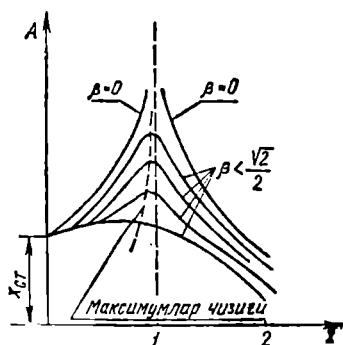
$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}.$$

Агар $\beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ бўлса, у ҳолда $z_1 = 0$ да $\frac{d^2 f(z)}{dz^2} < 0$, яъни

$f(z)$ функция максимумга, A эса минимумга эришади.

$z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$ илдиз учун $\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = 8(1 - 2\beta^2) > 0$, яъни $z = z_2$

бўлганда $f(z)$ минимумга, A эса максимал қийматга эришади.



17.17- расм.

(17.61) формулага $z = \sqrt{1 - 2\beta^2}$ ни қўйиб, мажбурий тебраниш амплитудаси A нинг максимал қийматини аниқлаймиз:

$$A_{max} = \frac{2x_{cm}}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (17.63)$$

(17.63) ни (17.62) билан солиштириб,

$$A_{max} > (A)_{z=1}$$

бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

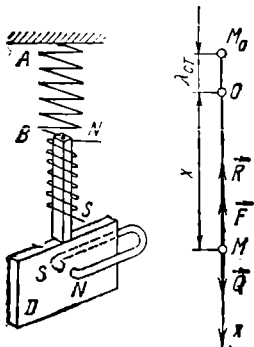
17.17-расмда пунктирли эгри чизиқ амплитуданинг максимал нуқталари орқали ўтади.

Бу расмдан кўрамизки, $z = 1$ га нисбатан z етарлича катта ёки кичик қийматларни қабул қилганда мажбурий тебранишлар амплитудаси муҳитнинг қаршилигига деярли боғлиқ бўлмайди. Аммо z катталики $z = 1$ га яқин қийматларни қабул қилганда муҳит қаршилигининг таъсири ниҳоятда катта бўлади.

Шундай қилиб, агар сўниш коэффициенти $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда $z = z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$ қийматга эришганда резонанс ҳодисаси рўй беради, яъни резонанс $z = \frac{p}{k}$ частоталар нисбати бирдан бирмунча кичик бўлганда содир бўлади. (17.63) га кўра $0 < \beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ га мос бўлган резонанс пайтида мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси чекли бўлади.

Агар сўниш коэффициенти жуда кичик бўлса, у ҳолда $z = 1$ деб олиш мумкин. Бу ҳолда $p = k$ бўлганда, яъни уйғотувчи куч частотаси эркин тебраниш частотаси билан устма-уст тушганда резонанс содир бўлади.

17.17-расмда $\beta = 0$ га мос эгри чизиқ қаршилиқ мавжуд бўлмагандаги нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракатига мос келади. Агар $\beta = 0$, $p = k$ бўлса, (17.61) формулага биноан мажбурий тебраниш амплитудаси чексиз катта қийматга эга бўлади. Бу ҳолда тебранма ҳаракат қонуни (17.48) формула ёрдамида аниқланади.



17.18- расм.

17.6- масала. Бикирлиги $s = 19,6$ Н/м бўлган пружинага магнит стержени ва мис пластинка осилган, уларнинг массаси 50 г дан. Магнит стержень соленоиддан, мис пластинка магнит қутблари орасидан ўтади (17.18- расм). Соленоиддан $i = 20 \sin 8 \pi t$ қонун билан ўзгарувчи ток ўтади ва магнит стержени билан $0,016 \pi$ Н миқдорда ўзаро таъсир кучи ҳосил қилади. Мис пластинканинг уюрма тоқлар туфайли ҳосил бўладиган тормозловчи кучи $k^* v \Phi^2$ га тенг, бу ерда $k^* = 0,001$; $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб ва v — пластинка тезлиги. Бошланғич пайтда магнит стерженини мис пластинка билан биргаликда чўзилмаган пружинага осилган ва унга вертикал

пастга йўналган $x_0 = 5$ см/с бошланғич тезлик берилган. Пластинканинг ҳаракат тенгламаси аниқлансин.

Ечиш. Магнит стерженининг оғирлиги $m_1 g$ пластинканинг оғирлиги $m_2 g$ га тенг бўлгани учун пружинанинг статик чўзилиши

$$\lambda_{ст} = \frac{(m_1 + m_2) g}{c} = \frac{(0,05 + 0,05) \cdot 9,8}{19,6} = 0,05 \text{ м.}$$

Пластинка ва магнит стерженидан иборат система ва унинг инерция маркази тўғри чиқиқли илгариларга ҳаракат қилади. Координаталар бошини система инерция марказининг статик мувозанат ҳолатида олиб, x ўқни вертикал пастга йўналтирамиз ҳамда кучлар схемасини тузамиз. Таъсир этувчи кучларнинг x ўқдаги проекцияси қуйидагича аниқланади:

$$F_x = -cx = -19,6x \text{ Н, } R_x = -k^*v\Phi^2 = -0,5\dot{x} \text{ Н}$$

$$Q_x = 0,32\pi \sin 8\pi t \text{ Н.}$$

Пластинканинг стержень билан биргаликдаги ҳаракат дифференциал тенгламасини

$$m\ddot{x} = -19,6x - 0,5\dot{x} + 0,32\pi \sin 8\pi t$$

ёки ($m = 100 \text{ г} = 0,1 \text{ кг}$ бўлгани учун)

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 196x = 3,2\pi \sin 8\pi t$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламада

$$2n = 5, k^2 = 196, H_0 = 3,2\pi \text{ ва } p = 8\pi$$

белгилашларни киритиб, уни

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = H_0 \sin pt \quad (1)$$

шаклида ёзамиз.

(1) тенгламанинг умумий ечимини қуйидагича оламиз:

$$x = x_1 + x_2. \quad (2)$$

Бу ерда x_1 билан $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими, x_2 билан эса (1) тенгламанинг хусусий ечими белгиланган. x_1 ни аниқлаш учун ушбу ҳисоблашларни бажарамиз:

$$n = 2,5, n^2 = 6,25, k = \sqrt{196} = 14,$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{196 - 6,25} = 13,77.$$

$n < k$ бўлгани учун бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини (17.15) кўринишда оламиз:

$$x_1 = e^{-2,5t} (C_1 \cos 13,77t + C_2 \sin 13,77t) \quad (3)$$

(1) тенгламанинг хусусий ечимини

$$x_2 = A \sin (pt - \epsilon) \quad (4)$$

кўринишда излаймиз. (4) дан биринчи ва иккинчи ҳосилаларни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2 &= pA \cos (pt - \epsilon), \\ \ddot{x}_2 &= -p^2A \sin (pt - \epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(4) ва (5) ни (1) га қўйиб, ушбу тенгламани оламиз:

$$-p^2A \sin (pt - \epsilon) + 2npA \cos (pt - \epsilon) + k^2A \sin (pt - \epsilon) = H_0 \sin pt.$$

Бунда

$$H_0 \sin pt = H_0 \sin (pt - \epsilon + \epsilon) = H_0 \sin (pt - \epsilon) \cdot \cos \epsilon + H_0 \cos (pt - \epsilon) \cdot \sin \epsilon$$

тенглик ўрнати бўлишини назарда тутиб, тенгламанинг чап ва ўнг томонларидаги $\sin(pt - e)$ ва $\cos(pt - e)$ лар олдидаги мос коэффициентларни тенглаштирсак,

$$\begin{aligned} A(k^2 - p^2) &= H_0 \cos e \\ 2npA &= H_0 \sin e. \end{aligned}$$

Бу тенглалардан A ва e лар аниқланадиган

$$A = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \quad \operatorname{tg} e = \frac{2np}{k^2 - p^2}$$

муносабатларни олампз.

Қўрилатган ҳолда

$$A = \frac{3,2 \pi}{\sqrt{(196 - 631,65)^2 + 4 \cdot 6,25 \cdot 631,65}} = 0,022 \text{ м}, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} e = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 25,13}{196 - 631,65} = -0,2884.$$

Шундай қилиб, $\operatorname{tg} e < 0$, лекин $\sin e > 0$ бўлгани учун e бурчакни иккинчи чоракда олиш керак. Бинобарин, $\operatorname{tg}(\pi - e) = 0,2884$, бундан $\pi - e = 16^\circ 5'$ ҳамда

$$e = \pi - \frac{16^\circ 5'}{180^\circ}, \quad e = 0,91 \pi. \quad (7)$$

Демак, пластинка

$$x_2 = 0,22 \sin(8\pi t - 0,91\pi) \text{ м} \quad (8)$$

қонун асосида мажбурий тебранма ҳаракатда бўлади.

(3) ва (8) ни (2) га қўйиб, (1) тенгламанинг умумий ечимини қуйидагича ёза оламиз:

$$x = -[e^{-2,5t} (C_1 \cos 13,77t + C_2 \sin 13,77t) + 0,022 \sin(8\pi t - 0,91\pi)] \text{ м}. \quad (9)$$

C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун $\dot{x}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2,5 e^{-2,5t} (C_1 \cos 13,77t + C_2 \sin 13,77t) + \\ &+ e^{-2,5t} (-13,77 C_1 \sin 13,77t + 13,77 C_2 \cos 13,77t) + \\ &+ 0,55 \cos(8\pi t - 0,91\pi). \end{aligned} \quad (10)$$

(9) ва (10) тенглаларга $t = 0$ да $x = -\lambda_{cm} = -0,05 \text{ м}$, $\dot{x} = 5 \text{ см/с} = 0,05 \text{ м/с}$ бошланғич шартларни қўйсак,

$$-0,05 = C_1 - 0,022 \sin 0,91\pi,$$

$$0,05 = -2,5 C_1 + 13,77 C_2 + 0,55 \cos(-0,91\pi).$$

Бу тенглалардан C_1 ва C_2 ларни аниқлаймиз:

$$C_1 = -0,05 + 0,022 \sin 0,91\pi = -0,05 + 0,022 \sin 163^\circ 48' = -0,0439;$$

$$C_2 = \frac{0,05 - 2,5 \cdot (-0,0439) - 0,55 \cos(-163^\circ 48')}{13,77} = 0,0342.$$

C_1 ва C_2 ларнинг қийматларини (9) га қўйиб, пластинканинг ҳаракат қонунини қуйидагича ифодалаймиз:

$$x = [e^{-2,5t} (-0,0439 \cos 13,77t + 0,0342 \sin 13,77t + 0,022 \sin(8\pi t - 0,91\pi))] \text{ м}.$$

Пластинканинг ҳаракат тенгламасини (17.57а) кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бунинг учун C_1 ва C_2 ўзгармаслар ўрнига a ва α янги ўзгармасларни

$$C_1 = a \sin \alpha, C_2 = a \cos \alpha$$

формулалар ёрдамида киритамиз. Бундан

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{0,0439^2 + 0,0342^2} = 0,0556 \text{ м},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{-0,0439}{0,0342} = -1,2836.$$

Шундай қилиб, $\operatorname{tg} \alpha < 0$ бўлади, лекин $\sin \alpha < 0$ бўлгани учун α бурчакни тўртинчи чоракда олиш керак:

$\alpha = -52^\circ 5' \text{ ёки } \alpha = 307^\circ 55' = 1,71 \pi = 5,372 \text{ рад.}$

Натижада пластинканинг ҳаракат тенгламасини яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x = [0,0556 e^{-2,5 t} \sin (13,77 t + 1,71 \pi) + \\ + 0,022 \sin (8 \pi t - 0,91 \pi)] \text{ м.}$$

Бу тенгламада биринчи қўшилувчи тебраниш даври

$$T = \frac{2 \pi}{k_1} = \frac{2 \pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{6,28}{13,77} = 0,456 \text{ с}$$

бўлган эркин тебранишни, иккинчи қўшилувчи эса, частотаси уйғотувчи кучнинг частотасига тенг бўлган мажбурий тебранишни ифодалайди.

18-БОБ. БОҒЛАНИШДАГИ МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ҲАРАКАТИ

18.1-§. Боғланишдаги нуқта динамикасининг асосий тенгламаси

Агар нуқтаининг ҳаракати боғланишлар билан чекланган бўлса, бундай нуқта *боғланишдаги нуқта* дейилади.

Статика бўлимида кўрганимиздек, жисмлар сирт, ип, занжир, стержень ёки шарнирлар воситасида ўзаро боғланган бўлиши мумкин. Аммо боғланишлар қандай предметлар воситасида амалга оширилишидан қатъи назар боғланишларни аналитик усулда ифодалаш мумкин.

Бу бобда актив кучлар таъсиридаги нуқтанинг қўзғалмас сирт устидаги ёки берилган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракати ўрганилади. Мазкур сирт ёки эгри чизиқнинг тенгламаси *боғланиш тенгламаси* дейилади.

Боғланишдаги нуқтанинг ҳаракатини ўрганишда статика бўлимида кўрилган боғланишдан бўшатиш принциpidан фойдаланилади. Бунинг учун боғланишнинг M нуқтага таъсирини боғланиш реакция кучи $\vec{R}$ билан алмаштириб, мазкур нуқтани актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ ва боғланиш реакция кучи $\vec{R}$ таъсиридаги «эркин нуқта» деб қараймиз. У ҳолда Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра боғланишдаги нуқта динамикасининг асосий қонуни

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{R} \quad (18.1)$$

кўринишда ёзилади.

Агар моддий нуқта ҳаракатланадиган сирт ёки эгри чизиқ идеал

силлиқ бўлмаса, у ҳолда боғланиш реакция кучи $\vec{R}$ ни нормал реакция кучи $\vec{N}$ ва динамик и қаланиш кучи $\vec{F}^{\text{ишқ}}$ дан ташиқил топган деб қараш мумкин. Шу сабабли идеал силлиқ бўлмаган сирт ёки чизиқ бўйлаб ҳаракатланаётган нуқта учун (18.1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{\text{ишқ}}. \quad (18.2)$$

Динамик ишқаланиш кучи $\vec{F}^{\text{ишқ}}$ нуқтанинг тезлик вектори $\vec{v}$ га қарама-қарши йўналади ва Кулон қонунига асосан

$$\vec{F}^{\text{ишқ}} = -f^{\text{ишқ}} N \vec{\tau}^0$$

муносабат ўринли бўлади. Бунда $f^{\text{ишқ}}$ — нуқта ҳаракатлангандаги ишқаланиш коэффицентини; N — нормал реакция кучининг модули; $\vec{\tau}^0$ нуқта траекториясига ҳаракатнинг мусбат йўналиши бўйича ўтказилган уринманинг бирлик вектори.

Агар моддий нуқта идеал силлиқ сирт ёки эгри чизиқ бўйича ҳаракатланса, динамик ишқаланиш кучи $\vec{F}^{\text{ишқ}}$ мавжуд бўлмайди ва бундай нуқта учун

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{N} \quad (18.3)$$

тенглама ўринли бўлади.

(18.2) ёки (18.3) тенгламалар воситасида нуқтанинг массаси, унга таъсир этувчи актив куч ва нуқта ҳаракатланган сирт ёки эгри чизиқнинг тенгламаси берилганда: а) нуқтанинг мазкур сирт ёки эгри чизиқ бўйича ҳаракат қонунини аниқлаш, шунингдек, б) нуқта ҳаракатланганда ҳосил бўладиган реакция кучи, яъни боғланишнинг динамик реакция кучини аниқлаш каби боғланишдаги нуқта динамикасининг асосий масалаларини ечиш мумкин.

18.2*- §. Қўзғалмас силлиқ сирт устидаги нуқтанинг ҳаракати. Лагранжнинг биринчи хил тенгламалари

Агар M нуқта бирор қўзғалмас силлиқ сирт устида ҳаракатланса, у ҳолда M нуқтанинг координаталари

$$f(x, y, z) = 0 \quad (18.4)$$

сиртнинг тенгламасини қаноатлантириши керак.

(18.3) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, қўзғалмас сирт устида ҳаракатланувчи нуқтанинг мазкур ўқларга нисбатан ҳаракат дифференциал тенгламаларини оламиз:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N_x, \\ m\ddot{y} &= Y + N_y, \\ m\ddot{z} &= Z + N_z. \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

Бу ерда X, Y, Z билан $\vec{F}$ кучнинг, N_x, N_y, N_z билан нормал реакция кучи $\vec{N}$ нинг x, y, z ўқлардаги проекциялари белгиланган.

f функциянинг градиенти сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналгани учун

$$\vec{N} \parallel \text{grad } f$$

бўлади. Бунда

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

бўлиб, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ хусусий ҳосилалар $\text{grad } f$ нинг координата

ўқларидаги проекцияларини ифодалайди. Шу сабабли $\vec{N}$ ва $\text{grad } f$ нинг коллинеарлик шартини

$$\vec{N} = \lambda \text{grad } f$$

ёки

$$N_x \vec{i} + N_y \vec{j} + N_z \vec{k} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (18.6)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда λ — пропорционаллик коэффициент бўлиб, боғланиш қўпайтувчиси дейилади.

(18.6) дан N_x , N_y , N_z ларни аниқлаб, (18.5) га қўйсак,

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m \ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

тенгламаларни оламир. Бу тенгламалар қўзғалмас сирт устида ҳаракатланувчи нуқта учун Лагранжнинг биринчи хил тенгламаларини ифодалайди.

(18.7) ва боғланиш тенгламаси (18.4) дан ташкил топган тўртта тенгламалар воситасида тўртта x , y , z , λ номаълумларни вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш мумкин.

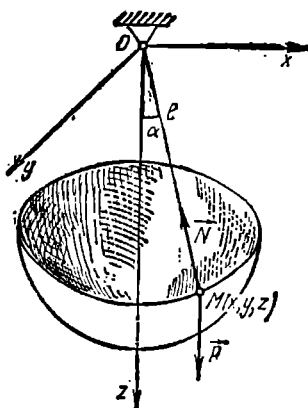
(18.6) га асосан боғланиш реакция кучининг нормалдаги проекцияси

$$N_n = \pm \lambda \text{grad } f = \pm \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \quad (18.8)$$

формуладан аниқланади.

Агар нормал реакция кучи $\vec{N}$ нинг йўналиши M нуқтада сиртга ўтказилган ташқи нормаль бўйича йўналса, (18.6) формулада мусбат ишора; ташқи нормалга қарама-қарши йўналса, манфий ишора олинади. Бунда ташқи нормаль деганда $f(x, y, z) = 0$ сиртга ўтказилган ва $f(x, y, z) > 0$ соҳага йўналган нормаль тушунилади.

Ташқи нормалнинг қандай танлаб олиниши сирт тенгламаси қандай олинишига боғлиқ бўлади. Чунки (18.4) тенглама чап то-



18.1- расм.

монининг ишорасини ўзгартириш билан ташқи нормаль йўналишини қарама-қарши томонга ўзгартириш мумкин.

Шундай қилиб, боғланишдаги нуқтанинг ҳаракати фақат таъсир этувчи кучлар ва бошланғич шартларгагина эмас, балки мазкур нуқтага қўйилган боғланишларга ҳам боғлиқ бўлади. Шунингдек, бошланғич шартлар ихтиёрий бўлмай, балки боғланиш тенгламаларини қаноатлантириши керак.

18.1- масала. Оғирлиги $P = mg$ бўлган M моддий нуқта узунлиги l га тенг, чўзилмайдиган ипга осилган бўлиб, ўзининг оғирлик кучи таъсирида сферик сирт ичида ҳаракатланади (18.1-расм). Ипнинг оғирлигини эътиборга олмай, нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси тузилсин ҳамда ипнинг таранглик кучи аниқлансин.

Қандай бошланғич тезликда M нуқта боғланишни доимо қаноатлантиради? Бу масала сферик тебрангичнинг ҳаракати ҳақидаги масаладир.

Ечиш. Қўзғалмас координата ўқларини 18.1-расмдагидек танлаб олиб, оғирлик кучи $\vec{P}$ нинг бу ўқлардаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$X = 0, Y = 0, Z = P = mg.$$

M нуқта учун OM ип боғланиш вазифасини ўтайди. Ип чўзилмагани туфайли M нуқта мувозанат ҳолатидан оғдирилиб, унга $\vec{v}_0$ бошланғич тезлик берилганда мазкур нуқта радиуси l га тенг сферик сирт ичида ҳаракатланади. Агар нуқтанинг координаталарини x, y, z билан белгиласак, боғланиш тенгламасини

$$f(x, y, z) = l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (1)$$

кўринишда ёза оламиз. Бундан

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z$$

ҳосилаларни ҳисоблаб, Лагранжнинг биринчи хил тенгламалари (18.7) ни тузимиз:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -2\lambda x, \\ m\ddot{y} &= -2\lambda y, \\ m\ddot{z} &= -2\lambda z + mg. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Бу тенгламалар нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини ифодалайди. Нуқтанинг ҳаракатини аниқлаш учун (2) ва (1) тенгламаларни биргаликда ечиш керак.

(2) дан λ ни йўқотиш учун бу тенгламаларнинг биринчисини $\dot{x}$ га, иккинчисини $\dot{y}$ га ва учинчисини $\dot{z}$ га кўпайтириб қўшамиз:

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) = mg \dot{z} - \lambda \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2)$$

ёки $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ ҳамда (1) га кўра $x^2 + y^2 + z^2 = l^2 = \text{const}$ эканлигини эътиборга олиб интегралласак,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgz - mgz_0 \quad (3)$$

тенглик ўринли бўлади. Бунда v_0 билан нуқтанинг бошланғич тезлиги, z_0 билан нуқтанинг бошланғич пайтдаги аппликатаси белгиланган.

Қўрилаган ҳолда боғланиш реакция кучининг нормалдаги проекцияси

$$N_n = \lambda \operatorname{grad} f = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = 2\lambda l \quad (4)$$

формуладан аниқланади. Бу ерда сфера нчдаги соҳа учун $f(x, y, z) > 0$ бўлгани учун n нормаль l радиус бўйлаб O нуқтага йўналади. Боғланиш реакция кучи (ипнинг таранглик кучи) $\vec{N}$ ҳам n нормаль бўйлаб йўналганга учун (4) да мусбат ишора олинади.

Боғланиш кўпайтувчиси λ ни (2) дан ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун (2) тенгламаларнинг биринчисини x га, иккинчисини y га, учинчисини z га кўпайтириб қўшамиз:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \right) - m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = mgz - 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

ёки боғланиш тенгламаси (1) ни эътиборга олсак,

$$2\lambda l = mgz + mv^2. \quad (5)$$

(5) ни назарда тутиб, (4) дан боғланиш реакция кучининг нормалдаги проекциясини аниқлаймиз:

$$N_n = \frac{mgz}{l} + \frac{mv^2}{l}$$

ёки (3) га кўра

$$N_n = \frac{3mgz}{l} + \frac{mv_0^2}{l} - 2mg \frac{z_0}{l}. \quad (6)$$

(6) тенгликдан фойдаланиб, нуқта ҳамиша боғланишни қаноатлантириши учун бошланғич v_0 тезлик қандай шартни қаноатлантиришини топиш мумкин. Бунинг учун $z = -l$ бўлганда N_n минимум қийматга эга бўлишини ва z_0 нинг ҳар қандай қийматида $(N_n)_{\min} > 0$ бўлиши учун

$$(N_n)_{\min} = \frac{mv_0^2}{l} - mg \left(3 + \frac{2z_0}{l} \right) > 0$$

шарт бажарилишини назарда тутамиз. z_0 нинг энг катта қиймати l га тенг бўлганда учун нуқта боғланиш тенгламасини

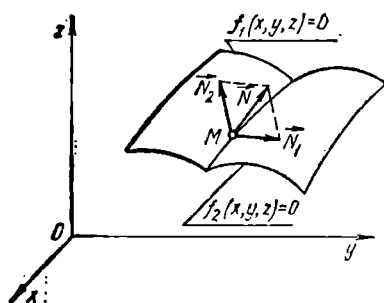
$$v_0 > \sqrt{5gl}$$

шарт бажарилгандагина қаноатлантиради.

18.3-§. Силлиқ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари

Айтайлик, M нуқта $Oxuz$ координаталар системасига нисбатан қўзғалмас бўлган силлиқ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатлансин. Бу чизикни иккита

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (18.9)$$



18.2- расм.

сиртларнинг кесишган чизиғи деб қараш мумкин. Бу сиртларни идеал силлиқ деб қарасак, у ҳолда уларнинг ҳар бирини моддий нуқтага таъсирини мос равишда $\vec{N}_1$ ва $\vec{N}_2$ нормал реакция кучлари билан алмаштириш мумкин (18.2- расм). Бинобарин, силлиқ эгри чизиқнинг нормал реакция кучи $\vec{N}_1$ ва $\vec{N}_2$ ларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади:

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2.$$

Шу сабабли эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи нуқта учун (18.3) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2. \quad (18.10)$$

(18.10) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, қўзғалмас эгри чизиқ бўйича ҳаракатланувчи нуқтанинг мазкур ўқларга нисбатан ҳаракат дифференциал тенгламаларини оламиз:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N_{1x} + N_{2x}, \\ m\ddot{y} &= Y + N_{1y} + N_{2y}, \\ m\ddot{z} &= Z + N_{1z} + N_{2z}. \end{aligned} \right\} \quad (18.11)$$

$\vec{N}_1$ ва $\vec{N}_2$ нормал реакция кучлари мос равишда $\text{grad } f_1$ ва $\text{grad } f_2$ га коллинеар бўлгани туфайли

$$\left. \begin{aligned} \vec{N}_1 &= \lambda_1 \text{grad } f_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \vec{k} \right), \\ \vec{N}_2 &= \lambda_2 \text{grad } f_2 = \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \vec{k} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

Бунда λ_1 ва λ_2 лар боғланиш кўпайтувчиларини ифодалайди.

(18.12) ни назарда тутиб, (18.11) ни

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(18.13) тенгламалар қўзғалмас силлиқ эгри чизиқ бўйича ҳаракатланувчи нуқта учун Лагранжнинг биринчи хил тенгламаларини ифодалайди.

(18.13) ва боғланиш тенгламалари (18.9) дан ташкил топган 5 та тенгламалар системаси воситасида номаълум x, y, z, λ_1 ва λ_2 ларни вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш мумкин.

(19.12) га асосан боғланиш реакция кучларининг n_1 ва n_2 нормаллардаги проекциялари

$$\left. \begin{aligned} N_{1n} &= \pm \lambda_1 |\text{grad } f_1| = \pm \lambda_1 \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2}, \\ N_{2n} &= \pm \lambda_2 |\text{grad } f_2| = \pm \lambda_2 \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

Агар $\vec{N}_1$ ва $\vec{N}_2$ мос равишда $f_1(x, y, z) = 0$ ва $f_2(x, y, z) = 0$ сиртларга ўтказилган ташқи нормаль бўйича йўналса, (18.14) да мусбат ишора олинади.

18.4-§. Берилган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг табиий координата ўқларидаги ифодаси

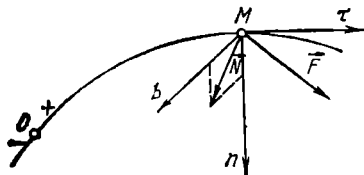
Нуқта қўзғалмас эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланганда унинг ҳаракатини табиий координата ўқларига нисбатан ўрганиш қулай бўлади. M нуқта актив куч $\vec{F}$ таъсирида қўзғалмас силлиқ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатлансин. Бу эгри чизиқда бирор O нуқтани санок боши сифатида оламиз ва ёй координатасининг мусбат ва манфий йўналишини кўрсатамиз. M нуқтада уринма τ , бош нормаль n ва бинормаль b лардан ташкил топган табиий координата ўқларини (8.5-§) ўтказамиз (18.3-расм) ва M нуқтанинг эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатини ифодаловчи (18.3) тенгламани табиий координата ўқларига проекциялаймиз:

$$\begin{aligned} m\omega_\tau &= F_\tau, \\ m\omega_n &= F_n + N_n, \\ m\omega_b &= F_b + N_b \end{aligned}$$

ёки тезланишнинг $\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s}$, $\omega_n = \frac{v^2}{\rho}$, $\omega_b = 0$ проекцияларини эътиборга олсак,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s} &= F_\tau, \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n + N_n, \\ 0 &= F_b + N_b. \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

(18.15) тенгламалар қўзғалмас силлиқ эгри чизиқ бўйича ҳаракат-



18.5 -расм.

ланувчи нуқтанинг табиий координата ўқларидаги ҳаракат дифференциал тенгламалари дейилади.

Бу тенгламаларнинг (18.11) тенгламаларга нисбатан афзаллиги шундан иборатки, (18.15) тенгламалар воситасида нуқтанинг ҳаракат қонунини ва боғланиш реакция кучларини алоҳида-алоҳида аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (18.15) нинг биринчисида боғланиш реакция кучи қатнашмагани туфайли бу тенгламани интеграллаб нуқтанинг тезлигини ва берилган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракат қонунини аниқлаш мумкин; қолган иккита тенгламалар воситасида боғланиш реакция кучининг N_n ва N_b ташкил этувчиларини, бинобарин, боғланиш реакция кучини аниқлаш мумкин.

Айтайлик, моддий нуқта бир текисликда ётувчи силлиқ қўзғалмас эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатлансин. Агар нуқтага эгри чизиқ текислигида ётувчи $\vec{F}$ актив куч таъсир этса, у ҳолда $N_b = 0$ бўлиб, нуқтага бош нормаль бўйича йўналган боғланиш реакция кучи $\vec{N}$ ҳам таъсир этади. Бинобарин, кўриладиган ҳолда (18.15) ни

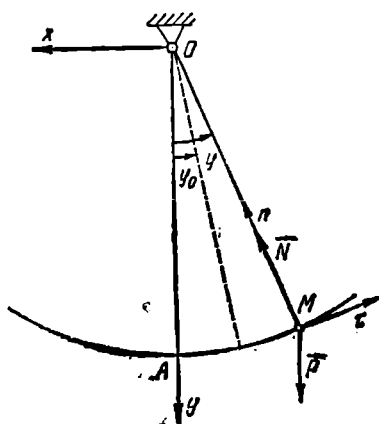
$$\left. \begin{aligned} m \ddot{s} &= F_{\tau} \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + N_n \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар нуқта силлиқ бўлмаган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланса, (18.15) ва (18.16) тенгламаларнинг биринчисида динамик ишқаланиш кучи ($F_{\tau}^{\text{ишқ}} = -f^{\text{ишқ}} N$) ҳам қатнашади.

18.5-§. Математик тебрангич

Вертикал текисликда жойлашган силлиқ айлана бўйлаб оғирлик кучи таъсирида ҳаракатланувчи моддий нуқта *математик тебрангич* дейилади. Масалан, бир учи маҳкамланган чўзилмайдиган ва



18.4- расм.

оғирлиги ҳисобга олинмайдиган ипга осилган M моддий нуқтани математик тебрангич деб қараш мумкин. M нуқтанинг ҳолатини ипнинг вертикал билан ташкил қилган ϕ бурчаги билан аниқлаймиз.

Айтайлик, нуқтанинг массаси m , ипнинг узунлиги l га тенг бўлсин. M нуқтага унинг оғирлик кучи $\vec{P}$ ва ипнинг реакцияси $\vec{N}$ таъсир этади (18.4- расм).

M нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгласини тузиш учун

$$v_{\tau} = \dot{s} = l \dot{\phi}, \quad \rho = l,$$

$$F_{\tau} = P_{\tau} = -mg \sin \varphi, \quad F_n = P_n = mg \cos \varphi$$

бўлишини эътиборга оламиз. У ҳолда (18.10) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\begin{aligned} ml \ddot{\varphi} &= -mg \sin \varphi, \\ ml \dot{\varphi}^2 &= -mg \cos \varphi + N_n. \end{aligned}$$

Бу тенгламаларни

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (18.17)$$

$$N_n = ml \dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi \quad (18.18)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. (18.17) тенглама воситасида математик тебрангичнинг ҳаракат қонунини, (18.18) ёрдамида ипнинг реакция кучини аниқлаш мумкин.

(18.18) дан кўрамызки, ипнинг реакциясини аниқлаш учун $\dot{\varphi}^2$ катталикини φ бурчакнинг функцияси сифатида ифодалаш керак. Бунинг учун

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$$

муносабат ўринли бўлишини назарда тутиб, (18.17) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{1}{2} l d\dot{\varphi}^2 = -g \sin \varphi d\varphi.$$

Бу тенгламани $t=0$ да $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ бошланғич шартларда интеграллаймиз:

$$\frac{1}{2} l \int_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi}^2 = -g \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi$$

ёки

$$l \dot{\varphi}^2 = 2g (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + l \dot{\varphi}_0^2. \quad (18.19)$$

(18.19) ни (18.18) га қўйиб, N_n ни аниқлаймиз:

$$N_n = ml \dot{\varphi}_0^2 + mg (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0).$$

Агар нуқтанинг бошланғич тезлиги $v_0 = l \dot{\varphi}_0$ бўлса, ипнинг реакцияси

$$N_n = \frac{mv_0^2}{l} + mg (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0) \quad (18.20)$$

формуладан аниқланади.

Шундай қилиб, ипнинг реакцияси тебрангичнинг бошланғич оғиш бурчаги φ_0 ва бошланғич тезлиги v_0 га боғлиқ бўлади.

(18.20) дан фойдаланиб, нуқта доимо боғланишни қаноатлантириши учун (яъни ип эгилмаслиги учун) бошланғич тезлик қандай қийматга эга бўлишини аниқлаш мумкин. Бунинг учун $\varphi = \pi$ бўлганда N_n минимум қийматга эришишини ва φ_0 нинг ҳар қандай қийматида $(N_n)_{min} \geq 0$ бўлиши учун

$$(N_n)_{min} = \frac{mv_0^2}{l} - mg(3 + 2 \cos \varphi_0) > 0$$

ёки

$$v_0^2 > (3 + 2 \cos \varphi_0) gl$$

шарт бажарилишини назарда тутамиз.

Хусусан, $\varphi_0 = 0$ бўлса,

$$v_0 > \sqrt{5gl} \quad (18.21)$$

шарт бажарилганда ип доимо эгилмайди (таранг ҳолда бўлади).

Дастлаб тебрангичнинг $\sin \varphi \approx \varphi$ шартни қаноатлантирувчи кичик тебранма ҳаракатини текширамиз. Бу ҳолда тебрангичнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (18.22)$$

Бу эркин тебранма ҳаракатдаги нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасига ўхшашдир. (18.22) нинг умумий ечимини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\varphi = a \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right). \quad (18.23)$$

Бунда a бурчак амплитудасини, α бошланғич фазани ифодалайди ҳамда ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

Шундай қилиб, *математик тебрангичнинг кичик тебранишлари гармоник тебранма ҳаракатдан иборат бўлади.*

Тебрангичнинг кичик тебранишлар даври

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (18.24)$$

формуладан аниқланади. (18.24) дан кўрамизки, тебрангичнинг кичик тебранишлар даври бошланғич оғиш бурчаги φ_0 га боғлиқ бўлмайди.

φ бурчак ихтиёрий қийматни қабул қилиши мумкин бўлган ҳолда тебрангичнинг ҳаракатини текшириш учун (18.19) ни $t = 0$ да $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$ бошланғич шартларда интеграллаймиз. У ҳолда (18.19) ни

$$\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шу сабабли

$$\pm \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} \quad (18.25)$$

муносабат ўринли бўлади. Агар тебрангич φ бурчак ортадиган йўналишда ҳаракатланса, (18.25) да мусбат ишора, акс ҳолда манфий ишора олинади.

(18.25) да ўзгарувчиларни ажратиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\pm d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} dt.$$

Бу тенгламада косинусларни ярим бурчак синуслари

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

орқали алмаштирсак, ушбу тенглама ўринли бўлади:

$$\frac{\pm d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} dt. \quad (18.26)$$

(18.26) ни интеграллаш учун $\sin \frac{\varphi_0}{2}$ ни k билан белгилаб, φ ўрнига

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \alpha \quad (18.27)$$

тенглик ёрдамида аниқланадиган α бурчакни киритамиз. У ҳолда

$$\frac{d\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = k \cos \alpha d\alpha,$$

бундан

$$d\varphi = \frac{2k \cos \alpha d\alpha}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2k \cos \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Натижада (18.26) ни

$$\frac{\pm d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt \quad (18.28)$$

кўринишда ёзиш мумкин. $t = 0$ да $\varphi = \varphi_0$ бошланғич шартларни ҳисобга олиб, (18.27) дан $\alpha = \alpha_0$ бошланғич қиймат учун

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = k \sin \alpha_0$$

ёки

$$\sin \alpha_0 = 1, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$$

ифодани оламиз.

Шундай қилиб, (18.28) ни 0 дан t гача интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$t = \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (18.29)$$

Бинобарин, t вақт билан α орасидаги боғланиш биринчи хил тўла эллиптик интеграл орқали ифодаланади.

(18.24) дан кўрамизки, φ^2 манфий қийматга эга бўлмагани учун $\cos \varphi \geq \cos \varphi_0$ ёки $|\varphi| \leq \varphi_0$, яъни φ бурчак $-\varphi_0$ дан $+\varphi_0$ гача ўзгаради. Шунингдек OA вертикалга нисбатан симметрик бўлган нуқталарда φ^2 бир хил қийматга эга бўлади ҳамда $\varphi = \pm \varphi_0$ да φ^2 нолга тенг бўлади. Бинобарин, худди кичик тебранишлар каби φ бурчак ихтиёрий қийматни қабул қилганда ҳам тебрангич φ_0 бурчак билан аниқланадиган чекка ҳолатлар орасида тебранма ҳаракатда бўлади.

Мазкур тебранишлар даври T_1 ни аниқлаш учун (18.29) даги интегралнинг қуйи чегараси тебрангич $\varphi = \varphi_0$ га оғандаги чекка ҳолатига мос келишини эътиборга оламиз. Бу ҳолатдан тебрангич $\varphi = -\varphi_0$ чекка ҳолатгача ҳаракатланганда (18.29) да манфий ишора олинади. Тебрангич чекка ҳолатдан энг пастки ҳолатигача кўчишида ўтган вақт тебранишнинг чорак даврига тенг бўлишини эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} T_1 &= - \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \end{aligned} \quad (18.30)$$

ёки

$$T_1 = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K.$$

Бунда $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$ биринчи хил тўла эллиптик интегрални ифодалайди. K нинг қиймати бошланғич оғиш бурчаги φ_0 га боғлиқ бўлиб, махсус функциялар жадвалидан аниқланади.

(18.30) даги интеграл остидаги ифодани қаторга ёйиб,

$$\frac{d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} = \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \alpha + \dots \right) d\alpha$$

ифодани оламиз. Бундан ташқари

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \alpha \, d\alpha = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2}$$

бўлишини эътиборга олиб, тебраниш даври учун

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right] \quad (18.31)$$

формулани оламиз.

(18.31) дан кўрамызки, бошланғич оғиш бурчаги φ_0 катталашган сари тебраниш даври T_1 ҳам орта боради.

φ_0 нинг кичик қиймати учун $\sin \frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2}$ деб, (18.31) да фақат биринчи иккита ҳадни эътиборга олсак, тебраниш даврининг тақрибий қиймати қуйидагича ёзилади:

$$T_1 \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right). \quad (18.32)$$

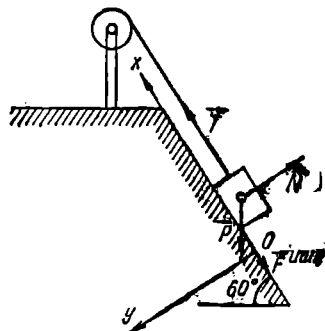
(18.24) ва (18.32) формулалардаги тебраниш даври бир-бирдан $\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right)$ га фарқ қилади. Бу фарқнинг қиймати φ_0 га боғлиқ бўлиб, қуйидаги жадвалдан аниқланади:

φ_0	10°	20°	40°	60°	90°
$1 + \frac{\varphi_0^2}{16}$	1,0019	1,0076	1,0304	1,0684	1,1539

18.2- масала. Массаси $m = 600$ кг бўлган юк радиуси $r = 0,2$ м га тенг чиғириққа ўраладиган трос воситасида горизонт билан 60° бурчак ташкил этувчи қия текислик бўйлаб кўтарилади (18.5- расм). Юкнинг қия текислик билан ишқаланиш коэффициенти $f_{ишқ} = 0,2$. Агар чиғириқ $\varphi = 0,4$ т³ қонун восида айланса, троснинг таранглик кучи вақтнинг функцияси сифатида аниқлансин ҳамда кўтариш бошлангандан 2 секунд ўтгандаги таранглик кучининг миқдори аниқлансин.

Ечиш. Координата ўқларини 18.5- расмдагидек танлаб оламиз. Координаталар бошини юкнинг бошланғич ҳолатида оламиз.

Юк x ўқ бўйлаб ҳаракатланганлиги туфайли боғланиш тенгламасини $y = \text{const}$ кўри-



18.5- расм.

нишда ёзиш мумкин. Юк ихтиёрий ҳолатни эгаллаган пайтда унга таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз. Қия текислик бўйлаб ҳаракатланувчи юкка унинг сғирлик кучи $\vec{P} = m\vec{g}$ трес бўйлаб йўналган треснинг таранглик кучи $\vec{T}$ қия текисликнинг нормал реак ия кучи $\vec{N}$ ва қия текислик бўйлаб пастга йўналган ишқаланиш кучи $\vec{f}^{\text{ишқ}}$ таъсир этади.
(18.2) га асосан

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{f}^{\text{ишқ}}$$

ёки

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + (-f^{\text{ишқ}} \cdot N \cdot \vec{i}) \quad (1)$$

тенглама ўринли бўлади. Бунда $\vec{i}$ билан x ўқнинг бирлик вектори белгиланган. (1) ни x ва y ўқларга проекциялаб, юкнинг қия текислик бўйлаб ҳаракат дифференциал тенгламаларини оламиз:

$$m\ddot{x} = -mg \cos 30^\circ + T - f^{\text{ишқ}} N, \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = -mg \cos 60^\circ + N. \quad (3)$$

$y = \text{const}$ бўлгани учун $\ddot{y} = 0$. Буни эътиборга олиб, (3) дан N ни аниқлаймиз:

$$N = mg \cos 60^\circ.$$

Юкнинг x ўқ бўйлаб тезланиши $\ddot{x}$ чиғириқ тўғинидаги нуқтанинг ур-нма тезланишига тенг бўлгани учун

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi} = 0,2 \cdot 2,4 t = 0,48 t \text{ м.}$$

Натижада (2) дан треснинг таранглик кучи T ни аниқлаш мумкин:

$$\begin{aligned} T &= mg \cos 30^\circ + f^{\text{ишқ}} mg \cos 60^\circ + m\ddot{x} = 600 \cdot 9,8 \frac{\sqrt{3}}{2} + \\ &+ 0,2 \cdot 600 \cdot 9,8 \cdot \frac{1}{2} + 600 \cdot 0,48 t = (5680 + 288 t) \text{ Н} = (5,68 + 0,288 t) \text{ кН.} \\ t &= 2 \text{ с да } T = 6,256 \text{ кН.} \end{aligned}$$

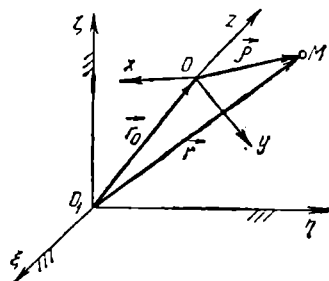
19-606. МОДДИЙ НУҚТАНИНГ НИСБИЙ ҲАРАКАТ ДИНАМИКАСИ

19.1-§. Моддий нуқтанинг нисбий ҳаракат дифференциал тенгламалари. Кў исма ва Қориолис инерция кучлари

Юқоридаги бобларда моддий нуқтанинг ҳаракати инерциал системага нисбатан ўрганилди. Лекин кўпинча нуқтанинг ҳаракатини ихтиёрий равишда ҳаракатланувчи объект билан боғланган координаталар системасига нисбатан текширишга тўғри келади. Масалан, нуқтанинг ҳаракатини тезланувчан ҳаракатдаги ракета, самолёт ёки космик кема билан боғланган координаталар системасига нисбатан ўрганишга эҳтиёж туғилади. Нуқтанинг инерциал бўлмаган бундай системага нисбатан ҳаракати унинг нисбий ҳаракатини ифодалайди.

Бу бобда массаси m бўлган ва берилган кучлар таъсиридаги M нуқтанинг қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ инерциал системага нисбатан маълум қонун асосида ҳаракатланувчи қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатини текшираимиз (19.1-расм). Келгусида $O_1\xi\eta\zeta$ инерциал системани қўзғалмас деб қараймиз.

Боғланишдаги нуқта динамикасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан асосий тенгламасини



19.1- расм.

$$m\vec{\omega} = \vec{F} + \vec{R} \quad (19.1)$$

кўринишда ёзамиз. Бунда $\vec{F}$ — актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси; $\vec{R}$ — боғланиш реакция кучи.

Кориолис теоремасидан (13.3-§) фойдаланиб, нуқтанинг абсолют тезланишини унинг нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишлари орқали ифодалаймиз:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_k. \quad (19.2)$$

(19.2) ни (19.1) га қўйсак,

$$m\vec{\omega}_r + m\vec{\omega}_e + m\vec{\omega}_k = \vec{F} + \vec{R}$$

ёки $\vec{\omega}_e$ ва $\vec{\omega}_k$ қатнашган ҳадларни ўнг томонга ўтказсак,

$$m\vec{\omega}_r = \vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{\omega}_e) + (-m\vec{\omega}_k) \quad (19.3)$$

тенглама ўринли бўлади.

(19.3) дан кўрамизки, нуқтанинг массасини унинг нисбий тезланишига кўпайтмаси актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси билан боғланиш реакция кучларининг йиғиндисига тенг бўлмайди. (19.3) да қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{\omega}_e, \quad (19.4)$$

$$\vec{\Phi}_k = -m\vec{\omega}_k. \quad (19.5)$$

Миқдор жиҳатдан нуқтанинг массаси билан унинг кўчирма тезланиши кўпайтмасига тенг ва кўчирма тезланишига қарама-қарши йўналган $\vec{\Phi}_e$ вектори *кўчирма инерция кучи* дейилади.

Миқдор жиҳатдан нуқтанинг массаси билан унинг Кориолис тезланиши кўпайтмасига тенг, йўналиши Кориолис тезланишига қарама-қарши бўлган $\vec{\Phi}_k$ вектори *Кориолис инерция кучи* дейилади.

Натижада (19.3) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\vec{\omega}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k. \quad (19.6)$$

(19.6) тенглама нуқтанинг инерциал бўлмаган системага нисбатан ҳаракат дифференциал тенгламасини ёки нисбий ҳаракат дифференциал тенгламасини ифодалайди.

Демак, нисбий ҳаракат дифференциал тенгламаси (19.6) ни тузиш учун нуқтага қўйилган актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси $\vec{F}$ ва боғланиш реакция кучлари $\vec{R}$ қаторига кўчирма инерция кучи $\vec{\Phi}_e$ ва Кориолис инерция кучи $\vec{\Phi}_k$ ларни қўшиш керак.

Кўчирма ва Кориолис инерция кучларини ҳисоблашда кинематика бўлимида чиқарилган кўчирма тезланишни ифодаловчи (13.22)

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0 + \vec{e}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) \quad (19.7)$$

ҳамда Кориолис тезланиши аниқланадиган (13.24)

$$\vec{\omega}_k = 2 \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r \quad (19.8)$$

формулалардан фойдаланамиз.

(19.4), (19.5), (19.7) ва (19.8) формулалардан кўрамизки, кўчирма ва Кориолис инерция кучлари нуқтанинг бошқа объектлар билан ўзаро таъсирига эмас, балки нуқтанинг массаси ҳамда нисбий ва кўчирма ҳаракатигагина боғлиқ бўлади. (19.6) ни қўзғалувчи координата ўқларига проекциялаб, нисбий ҳаракат дифференциал тенгламасини Декарт координата ўқларидаги ифодасини оламиз:

$$\left. \begin{aligned} mx &= F_x + R_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}, \\ my &= F_y + R_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}, \\ mz &= F_z + R_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

19.2-§. Классик механиканинг нисбийлик принципи

Айтайлик, кўчирма ҳаракат $\vec{v}_0 = \text{const}$ ўзгармас тезлик билан содир бўладиган тўғри чизиqli илгарилама ҳаракатдан иборат бўлсин, яъни *Охуз* қўзғалувчи координаталар системаси ҳам инерциал системадан иборат бўлсин. У ҳолда кўчирма ҳаракат тезланиши $\vec{\omega}_e = 0$ бўлади, шунингдек, кўчирма ҳаракат тўғри чизиqli илгарилама ҳаракатдан иборат бўлгани учун $\vec{\omega}_e = 0$ ва Кориолис тезланиш $\vec{\omega}_k = 0$ бўлади. Бинобарин,

$$\vec{\Phi}_e = \vec{\Phi}_k = 0$$

бўлиб, нисбий ҳаракат дифференциал тенгламаси (19.6) ни

$$m \vec{\omega}_r = \vec{F} + \vec{R} \quad (19.10)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда нисбий ҳаракат дифференциал тенгламаси билан абсолют ҳаракат дифференциал тенгламаси (19.1) бир хил кўринишга эга бўлади.

Агар M нуқта $O_1\xi\eta\zeta$ ва $Oxyz$ инерциал системаларга нисбатан ҳаракатланса ҳамда уларнинг иккинчиси биринчисига нисбатан $\vec{v}_0$ тезлик билан тўғри чизиқли илгарилама ҳаракатда бўлса, у ҳолда нуқтанинг мазкур системаларга нисбатан радиус-векторлари қуйидаги муносабат билан боғланади:

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{v}_0 t. \quad (19.11)$$

Бунда иккала система учун вақт бир хилда ўтади, яъни

$$t_1 = t \quad (19.12)$$

деб қараймиз. (19.11) ва (19.12) формулалар *Галилей алмаштириши* дейилади. Бирор инерциал системадан бошқа инерциал системага ўтишда динамика қонунлари бу алмаштиришга нисбатан инвариант бўлади. Бу натижа *классик механиканинг нисбийлик принципи* деб аталади. Бу принципга кўра, барча инерциал системаларга нисбатан моддий нуқта бир хил қонун асосида ҳаракатланади.

19.3-§. Нуқтанинг нисбий мувозанати. Вазнсизлик

Агар моддий нуқта қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлса, у ҳолда унинг нисбий тезлиги $\vec{v}_r$, нисбий тезланиши $\vec{w}_r$ ҳамда Кориолис тезланиши $\vec{w}_k$ нолга тенг бўлади. Шу сабабли (19.6) дан қуйидаги кўринишдаги нисбий мувозанат тенгламасини олаемиз:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e = 0. \quad (19.13)$$

Бу тенгламадан кўрамизки, *нуқта нисбий мувозанатда бўлса, нуқтага қўйилган актив ва реакция кучлари кўчирма инерция кучи билан мувозанатлашади.*

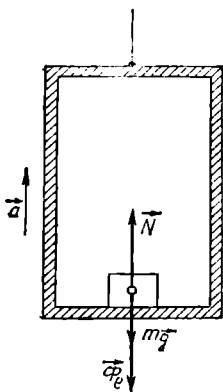
Олинган натижадан фойдаланиб, оғирлик кучи майдонида вертикал бўйлаб тезланувчан (ёки секинланувчан) ҳаракатланувчи жисм вазнининг ортиши ёки камайишини тушунтириш мумкин.

Жисмнинг уни тутиб турувчи горизонтал таянч текислигига кўрсатадиган бссим кучига унинг *вазни* дейилади.

Масалан, юкнинг тарози палласига кўрсатадиган босими юкнинг вазнини ифодалайди.

Агар жисм қўйилган таглик вертикал бўйича тезланувчан ҳаракатда бўлса, у ҳолда мазкур жисмга таъсир этувчи Ернинг тортиш кучи (оғирлик кучи) $\vec{P} = m\vec{g}$ ва жисмнинг вазни бир-биридан фарқ қилишини қуйидаги мисол ёрдамида изоҳлаш мумкин.

Агар лифт кабинаси вертикал бўйича $\vec{a}$ тезланиш билан юқори-га қараб ҳаракатланса, бу тезланиш кўчирма тезланишдан иборат бўлиб, кўчирма инерция кучи $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}$ мавжуд бўлади. Лифт кабинаси полидаги жисмга вертикал пастга йўналган унинг оғирлик



19.2- расм.

кучи ҳамда кабина полининг реакция кучи $\vec{N}$ таъсир этади (19.2-расм). (19.13) га асосан бундай жисмнинг мувозанат тенгламаси

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e = 0 \quad (19.14)$$

кўринишда ёзилади. (19.14) ни лифт ҳаракатланаётган йўналишга проекцияласак,

$$-mg + N - ma = 0$$

муносабат ўринли бўлади. Бундан

$$N = m(g + a)$$

ифодани оламиз. Бинобарин, кўрилатган ҳолда юкнинг вазни ортади. Бу ҳодиса *ортиқча юкланиш* деб аталади.

Старт ҳолатидан вертикал юқорига тезланувчан ҳаракатланаётган космик кема ичидаги пассажирлар ортиқча юкланишга дучор бўлади.

Агар $\vec{a}$ тезланиш вертикал пастга йўналса, у ҳолда кўчирма инерция кучи $\vec{\Phi}_e$ ўз йўналишини ўзгартиради ҳамда

$$N = m(g - a)$$

бўлиб, юкнинг вазни камаяди. Хусусан, $a = g$ бўлса, *вазнсизлик ҳолатига* дуч келамиз.

Космик кемаларни учуришда ортиқча юкланиш ва вазнсизликни ҳисоблаш алоҳида аҳамиятга эга.

19.4- §. Жисмларнинг мувозанати ва ҳаракатига Ер айланишининг таъсири

Ернинг ўз ўқи атрофида

$$\omega_e = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} 0,0000729 \text{ с}^{-1}$$

бурчак тезлик билан айланиши, Ер сиртига яқин жисмнинг мувозанати ва ҳаракатига қандай таъсир этишини қуйидаги икки ҳолда кўриб чиқамиз.

1. Ер сиртига яқин нуқтанинг нисбий мувозанати. Ипга осилган ва массаси m га тенг M нуқтаининг Ер сиртига яқин тинч ҳолатини текширамиз (19.3- расм).

Қўзғалувчи координаталар системаси бошини Ернинг марказидаги O нуқтада олиб, Oz ўқни шимолий қутбга, Oy ўқни M нуқтага тааллуқли меридианнинг экватор билан кесишган нуқтасига, Ox ўқни эса мазкур меридиан текислигига перпендикуляр йўналтирамиз.

M нуқтага Ернинг марказига йўналган $\vec{F}$ ($\vec{F} = m\vec{g}_0$, $\vec{g}_0$ —гравитацион тезланиш) тортиш кучи ва ипнинг таранглик кучи $\vec{T}$ таъсир этади.

(19.14) формулага асосан, M нуқта нисбий мувозанатда бўлиши учун $\vec{F}$ ва $\vec{T}$ кучлар қаторига қўчирма инерция кучи $\vec{\Phi}_e$ ни қўшиш керак, яъни:

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{\Phi}_e = 0. \quad (19.15)$$

Ернинг суткалик айланиш бурчак тезлиги ўзгармас бўлгани туфайли $\vec{\Phi}_e$ куч фақат айланиш ўқиغا перпендикуляр йўналган $\vec{\Phi}_e^n$ нормал ташкил этувчидан (марказдан қочирма инерция кучидан) иборат бўлади ҳамда бу кучнинг модули қуйидагича аниқланади:

$$\Phi_e^n = m \omega_e^2 R_1 = m \omega_e^2 R \cos \theta,$$

бунда R_1 билан M нуқтага мос географик параллелнинг радиуси белгиланган. Натижада (19.15) ни

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{\Phi}_e^n = 0 \quad (19.16)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

$\vec{T}$ кучнинг миқдорини ўлчаш учун ипни динамометр билан алмаштириш мумкин. Динамометр ёрдамида

$$\vec{P} = m \vec{g} = -\vec{T} \quad (19.17)$$

нуқта оғирлик кучининг миқдорини аниқлаймиз. Буни назарда тутиб, (19.16) формуладан қуйидаги муносабатни оламиз:

$$\vec{P} = m \vec{g} = \vec{F} + \vec{\Phi}_e^n. \quad (19.18)$$

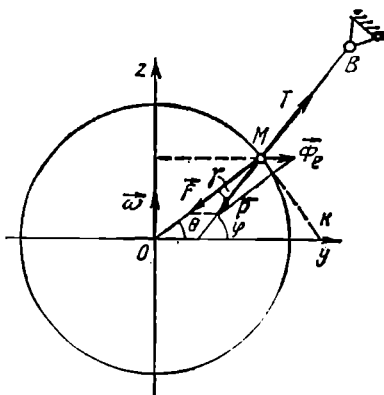
Шундай қилиб, *Ер сиртига яқин нуқтанинг оғирлик кучи Ернинг тортиш кучи билан марказдан қочирма инерция кучларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.*

19.3-расмда геоцентрик кенглик θ билан белгиланган. M нуқта Ерга нисбатан тинч ҳолатда бўлганда ипнинг таранглик кучи $\vec{T}$ йўналган чизик ҳақиқий вертикал деб аталадиган йўналишни ифодалайди. Бу йўналиш билан экватор текислиги орасидаги φ бурчак географик кенглик дейилади.

19.3-расмда кўрамизки, ҳақиқий вертикал билан Ер радиуси орасидаги бурчакни γ билан белгиласак,

$$\varphi = \theta + \gamma$$

муносабат ўринли бўлади.



19.3- расм:

(19.16) ни ипга перпендикуляр бўлган MK йўналишга проекциялаймиз:

$$-F \sin \gamma + \Phi_e^n \sin \varphi = 0.$$

Бунда $F = mg_0$, $\Phi_e^n = m \omega_e^2 R \cos \theta$ бўлгани учун

$$\sin \gamma = \frac{\omega_e^2 R}{g_0} \sin \varphi \cdot \cos \theta$$

муносабат ўринли бўлади.

Ернинг бурчак тезлиги $\omega_e = 0,0000729 \text{ с}^{-1}$, радиуси $R = 6\,350\,000 \text{ м}$ ва оғирлик кучининг тезланиши $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$ бўлишини эътиборга олсак,

$$\frac{\omega_e^2 R}{g_0} \approx 0,0034,$$

бинобарин, $\gamma = \varphi - \theta$ бурчак жуда кичик бўлади ҳамда тақрибан

$$\sin \gamma \approx \gamma \approx \frac{\omega_e^2 R}{2g_0} \sin 2\theta$$

деб ёзиш мумкин. $\theta = 45^\circ$ бўлганда γ максимал қийматга эришади.

(19.16) ни иппинг йўналиши MB га проекциялаймиз:

$$T - F \cos \gamma + \Phi_e^n \cos \varphi = 0,$$

бунда $F = mg_0$, $\Phi_e^n = m \omega_e^2 R \cdot \cos \theta$ ва γ бурчак географик кенглик φ га нисбатан жуда кичик бўлганда $\cos \varphi \approx \cos \theta$ эканлигини эътиборга олиб, иппинг таранглик кучи T ни аниқлаймиз:

$$T \approx mg_0 - m \omega_e^2 R \cos^2 \varphi = m (g_0 - \omega_e^2 R \cos^2 \varphi). \quad (19.19)$$

(19.17) ни назарда тутиб, (19.19) дан Ер сиртидаги оғирлик кучининг тезланишини аниқлаймиз

$$g = g_0 \left(1 - \frac{\omega_e^2 R}{g_0} \cos^2 \varphi \right).$$

Бинобарин, g катталик нуқтанинг географик кенглиги φ га боғлиқ равишда ўзгаради.

Қуйндаги жадвалда турли географик кенгликларга мос бўлган оғирлик кучи тезланиши g нинг қийматлари келтирилган.

0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
9,7803	9,7838	9,7932	9,8062	9,8191	9,8287	9,8322

2. Эркин тушаётган жисмнинг вертикалдан оғиши. Ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмай, Ер сиртига яқин масофада эркин тушаётган моддий нуқтанинг ҳаракатига Ернинг ўз ўқи атрофидаги айланиши қандай таъсир этишини кўриб чиқамиз. Бунинг учун қўзғалувчи $O_1 x y z$ координаталар системаси бошини M нуқтанинг бош-

ланғич ҳолати M_0 ётган вертикалнинг Ер сирти билан кесилган жойида оламиз (19.4-расм). O_1z ўқни ҳақиқий вертикал бўйича юқорига, O_1x ўқни меридиан текислигида O_1z га перпендикуляр равишда жанубга ҳамда O_1y ўқни шарққа йўналтирамиз.

М нуқтага Ернинг тортиш кучи $\vec{F} = m\vec{g}_0$ таъсир этади. Нуқтанинг нисбий ҳаракат тенгламасини тузиш учун бу кучга кўчирма инерция кучи $\vec{\Phi}_e = \vec{\Phi}_e^n$ ва Кориолис инерция кучи $\vec{\Phi}_k = -m\vec{\omega}_k = -2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$ ларни қўшамиз:

$$m\vec{\omega}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e^n - 2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r). \quad (19.20)$$

Юқорида кўрганимиздек, Ернинг тортиш кучи $\vec{F}$ билан кўчирма инерция кучи $\vec{\Phi}_e^n$ ни оғирлик кучи $\vec{P} = m\vec{g}$ билан алмаштириб, нуқтанинг нисбий ҳаракат тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

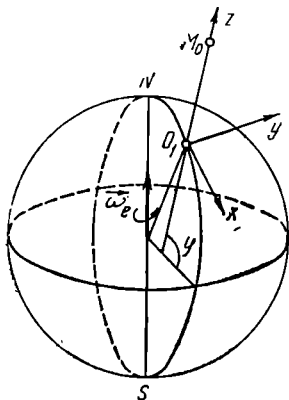
$$m\vec{\omega}_r = m\vec{g} - 2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$$

ёки

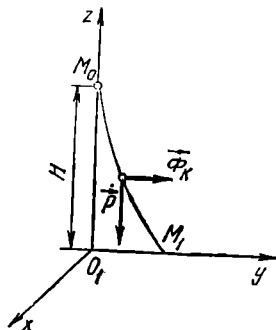
$$\vec{\omega}_r = \vec{g} - 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r). \quad (19.21)$$

Биринчи яқинлашишда Ернинг айланишини эътиборга олмасак, нуқта вертикал бўйлаб $\vec{g}$ тезланиш билан ҳаракатланади.

Кориолис инерция кучи $\vec{\Phi}_k$ нуқтанинг оғирлик кучи $\vec{P}$ га нисбатан анча кичик бўлгани учун иккинчи яқинлашишда нуқтанинг нисбий тезлиги $\vec{v}_r$ ни вертикал бўйича пастга йўналган деб қараш мумкин. Ернинг ўз ўқи атрофидаги айланиш бурчак тезлик вектори $\vec{\omega}_e$ Ернинг айланиш ўқи бўйлаб жанубдан шимолга йўналади. У ҳолда Кориолис тезланиши $\vec{\omega}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$ NOS меридиан текислигига перпендикуляр равишда ғарбга, Кориолис инерция кучи $\vec{\Phi}_k = -m\vec{\omega}_k$ эса шарққа йўналади. Шундай қилиб, иккинчи яқинлашишда нуқта вертикалдан шарққа оғади (19.5-расм). Бу оғишнинг миқдорини ҳисоблаймиз.



19.4- расм.



19.5- расм.

$\vec{\omega}_e$ нинг координата ўқларидаги проекциялари

$$\omega_{ex} = \omega_e \cos \varphi, \quad \omega_{ey} = 0, \quad \omega_{ez} = \omega_e \sin \varphi$$

тенгликлар воситасида аниқлангани сабабли

$$\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega_e \cos \varphi & 0 & \omega_e \sin \varphi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

муносабат ўринли бўлади. Буни назарда тутиб, (19.21) ни x, y, z қўзғалувчи координата ўқларига проекциялаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2 \dot{y} \omega_e \sin \varphi, \\ \ddot{y} &= -2(\dot{x} \omega_e \sin \varphi + \dot{z} \omega_e \cos \varphi), \\ \ddot{z} &= -g + 2 \dot{y} \omega_e \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (19.22)$$

Нуқта ҳаракатини қуйидаги бошланғич шартларда текшираимиз:

$$\left. \begin{aligned} t=0 \text{ да } x=0, y=0, z=H; \\ \dot{x}=0, \dot{y}=0, \dot{z}=0. \end{aligned} \right\} \quad (19.23)$$

ω_e ва φ ўзгармас бўлгани учун (19.22) ни (19.23) бошланғич шартларда интеграллаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 2 y \omega_e \sin \varphi, \\ \dot{y} &= 2 \omega_e (z \cos \varphi + x \sin \varphi), \\ \dot{z} &= -gt + 2 \omega_e y \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (19.24)$$

Бунда интеграллаш доимийлари нолга тенг бўлишини осонгина исботлаш мумкин.

Ернинг бурчак тезлиги $\omega_e = 0,0000729 \text{ с}^{-1}$ миқдор жиҳатдан кичик бўлгани учун биринчи яқинлашишда (19.24) да ω_e қатнашган ҳадларни ҳисобга олмаймиз. У ҳолда

$$x=0, \quad \dot{y}=0, \quad \dot{z}=-gt.$$

Бу тенгламаларни (19.23) бошланғич шартларни эътиборга олиб интегралласак,

$$x=0, \quad y=0, \quad z=H - \frac{1}{2}gt^2. \quad (19.25)$$

Бу тенглама Ернинг ўз ўқи атрофидаги суткалик айланганини эътиборга олмаган ҳолдаги нуқтанинг эркин тушиш қонунини ифода қилади. x, y, z ларнинг (19.25) воситасида аниқланадиган қийматларини (19.22) га қўямиз

$$\ddot{x}=0, \quad \ddot{y}=2\omega_e g t \cos \varphi, \quad \ddot{z}=-g$$

ва ҳосил бўлган тенгламаларни (19.23) бошланғич шартларда интеграллаб, иккинчи яқинлашишда эркин тушувчи нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз:

$$x = 0, y = \frac{1}{3} \omega_e g t^3 \cos \varphi, z = H - \frac{1}{2} g t^2. \quad (19.26)$$

(19.26) дан вақт t ни йўқотиб, нуқта траекториясининг тенгламасини аниқлаймиз

$$y^2 = \frac{8}{9} \frac{\omega_e^2}{g} (H - z)^3 \cos^2 \varphi, \quad (19.27)$$

(19.26) дан кўрамызки, H баландликдан бошлангич тезликсиз тушаётган M нуқта Ернинг ўз ўқи атрофида айланиш натижасида

$$y = \frac{1}{3} \omega_e g t^3 \cos \varphi$$

қонун асосида шарққа оғади. Нуқта Ерга тушган пайтдаги унинг вертикалдан оғиши O_1M_1 ни y_1 билан белгиласак, шу пайтда $z = 0$ бўлгани учун (19.27) дан фойдаланиб y_1 ни аниқлаймиз:

$$y_1 = \frac{1}{3} \omega_e g \cos \varphi \cdot \left(\frac{2H}{g} \right)^{3/2}$$

20-б о б. МЕХАНИК СИСТЕМА ДИНАМИКАСИГА КИРИШ

20.1-§. Механик система. Механик система нуқталарига таъсир этувчи кучларни классификация қилиш

Механик система (ёки қисқача *система*) деб шундай моддий нуқталар тўпламига айтиладики, унинг ҳар бир нуқтасининг ҳаракати ва ҳолати система таркибига кирувчи бошқа нуқталарнинг ҳаракати ва ҳолатига боғлиқ бўлади.

Механик системанинг қандай таппаб олиниши бизнинг ихтиёри-мизга боғлиқ; масалан, автомобилни механик система деб олиш мумкин ёки унинг моторини, тормозлаш системасини (ёхуд уларнинг айрим звеноларини) алоҳида-алоҳида механик система деб қараш мумкин. Шунингдек, исталган жисмни зарралар (нуқталар) тўпламидан иборат механик система деб тасаввур қилиш мумкин.

Агар жисмлар (нуқталар) бир-бирига ўзаро таъсир этмаса (масалан, сувдаги кема, учаётган самолёт ва ҳаракатланаётган поездлар бир-бирига ўзаро таъсир этмайди), бундай жисмлар тўплами механик система бўлмайди.

Агар механик система нуқталари орасидаги масофалар ўзгармасдан қолса (масалан, абсолют қаттиқ жисм), бундай система *ўзгармас механик система* дейилади.

Механик система нуқталарига таъсир этувчи кучларни ички ва ташқи кучларга ажратилади. Механик системани ташкил этувчи нуқталар (ёки жисмлар) нинг ўзаро таъсир кучлари *ички кучлар* дейилади. Масалан, Қуёш системасидаги планеталарнинг ўзаро таъ-

сир кучлари ички кучлардан иборат. Механик система таркибига кирмайдиган нуқта ёки жисмларнинг берилган система нуқталарига таъсир кучлари *ташқи кучлар* дейилади. Масалан, кемани механик система деб қарасак, кема қисмларининг оғирлик кучи, сувнинг қаршилик кучи ташқи кучларни ифодалайди. Одатда, ташқи кучлар $\vec{F}_v^e$, ички кучлар $\vec{F}_v^i$ билан белгиланади*.

Механик системанинг қандай танлаб олинishiга қараб битта кучнинг ўзи ё ташқи, ё ички кучдан иборат бўлиши мумкин. Масалан, автомобиль моторида поршень, шатун ва тирсакли вални механик система деб қарасак, газларнинг поршенга таъсир кучи ташқи кучлардан иборат бўлади, ваҳоланки, моторни механик система деб қарасак, бу кучлар ички кучлардан иборат бўлади.

Механик система нуқталарининг ҳаракати ички кучларга ҳам, ташқи кучларга ҳам боғлиқ бўлади.

Ньютоннинг учинчи қонунига кўра механик система нуқталарига таъсир этувчи ички кучлар жуфт-жуфт равишда миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қаршидир. Шундан келиб чиқиб, ички кучларнинг қуйидаги иккита муҳим хоссаларини оламыз.

1. Система барча ички кучларининг геометрик йиғиндиси (ички кучларнинг бош вектори) нолга тенг:

$$\sum_{v=1}^N \vec{F}_v^i = 0 \quad (20.1)$$

Бунда $\vec{F}_v^i$ билан номери v га тенг нуқтага таъсир этувчи ички кучларнинг тенг таъсир этувчиси белгиланган; N — механик система таркибига кирувчи нуқталарнинг сони. Келгусида N та нуқта бўйича йиғинди олинганда йиғинди чегараларини тушириб ёзамиз.

2. Система барча ички кучларининг ихтиёрий нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндиси (ички кучларнинг бош momenti) нолга тенг:

$$\vec{M}_O^i = \sum M_O (\vec{F}_v^i) = 0 \quad (20.2)$$

ёки

$$\vec{M}_O^i = \sum \vec{r}_v \times \vec{F}_v^i = 0 \quad (20.3)$$

Система иккита M_1 ва M_2 нуқталардан ташкил топса, бу хусусиятларни осонликча исботлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, M_1 ва M_2 нуқталар $\vec{F}_1^i$ ва $\vec{F}_2^i$ ички кучлар билан ўзаро таъсир этса, Ньютоннинг учинчи қонунига кўра $\vec{F}_2^i = -\vec{F}_1^i$ бўлгани учун $\vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i = 0$ тенглик бажарилади; O нуқтага нисбатан иккала кучнинг елкаси h га тенг бўлгани учун бу кучларнинг O нуқтага нисбатан моментлари ҳам миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади (20.1-рasm); натижада

* бунда e ва i индекслари французча *exterieur* — ташқи ва *interieur* — ички сўзларининг бош ҳарфларидан олинган.

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1^t) + \vec{M}_O(\vec{F}_2^t) = 0$$

тенглик ўринли бўлади.

Механик система N та нуқтадан иборат бўлганда ички кучларнинг биринчи ва иккинчи хусусиятларини исботлаш учун ички кучлар система таркибига жуфт-жуфт бўлиб қатнашишини эътиборга олиш керак.

(20.1) ва (20.2) ни координата ўқларига проекциялаб қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\begin{aligned} \sum X_v^t &= 0, & \sum Y_v^t &= 0, & \sum Z_v^t &= 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v^t) &= 0, & \sum M_y(\vec{F}_v^t) &= 0, & \sum M_z(\vec{F}_v^t) &= 0. \end{aligned}$$

Бу тенгламалар фазодаги кучлар системасининг мувозанат тенгламалари (6.46) га ўхшаса-да, ички кучлар системаси мувозанатлашмайди, чунки ички кучлар системанинг турли нуқталарига қўйилган ва бу кучлар таъсиридан системанинг нуқталари бир-бирига нисбатан кўчиши мумкин.

20.2-§. Системанинг массалар маркази

Механик системанинг ҳаракатини ўрганишда мазкур система нуқталари массаларининг тақсимланишини характерловчи катталикларни аниқлаш керак бўлади. Бу катталиклар *массалар геометриясида* ўрганилади.

Механик система N та нуқтадан ташкил топган бўлиб, уларнинг массалари $m_1, m_2, \dots, m_N$ га тенг бўлсин. Система нуқталари $M_1, M_2, \dots, M_N$ нинг қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан радиус-векторларини $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$; координаталарини $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_N, y_N, z_N)$ билан белгилаймиз (20.2- расм). Система таркибига кирувчи нуқталарнинг массалари йиғиндисига тенг

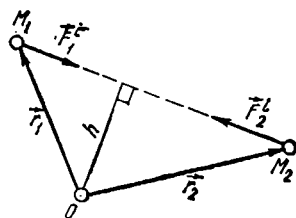
$$M = \sum m_v$$

катталиқка *системанинг массаси* дейилади.

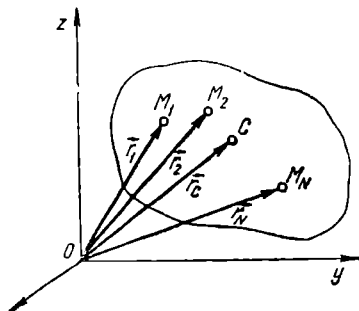
Радиус вектори

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_v \vec{r}_v}{M} \quad (20.4)$$

формула ёрдамида аниқланадиган геометрик C нуқтага *системанинг массалар маркази* дейилади.



20.1- расм.



20.2- расм.

(20.4) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, система массалар марказининг координаталари аниқланадиган

$$x_c = \frac{\sum m_v x_v}{M}, \quad y_c = \frac{\sum m_v y_v}{M}, \quad z_c = \frac{\sum m_v z_v}{M} \quad (20.5)$$

формулаларни оламиз.

Системанинг массалар маркази системанинг бирор нуқтаси билан устма-уст тушмаслиги ҳам мумкин. Масалан, бир жинсли ҳалқа-нинг массалар маркази унинг геометрик маркази билан устма-уст тушади ва ҳалқага тааллуқли бўлмайди.

(20.4) ва (20.5) формулалардан кўрамизки, берилган механик система массалар марказининг ҳолати унга таъсир этувчи кучларга эмас, система нуқталари массаларининг тақсимланишига боғлиқ бўлади.

(20.4) нинг ўнг томонидаги ифоданинг сурат ва махражини g га кўпайтсак,

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_v g \vec{r}_v}{Mg}$$

ёки

$$\vec{r}_c = \frac{\sum P_v \vec{r}_v}{P} \quad (20.6)$$

бўлади. Бунда $P_v = m_v g$ билан система нуқталарининг оғирлиги белгиланган.

7.2-§ да кўрганимиздек, (20.6) формула ёрдамида оғирлик кучи майдонидаги қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази аниқланади. Бинобарин, қаттиқ жисмнинг ёки ўзгармас механик системанинг оғирлик маркази унинг массалар маркази билан устма-уст тушади.

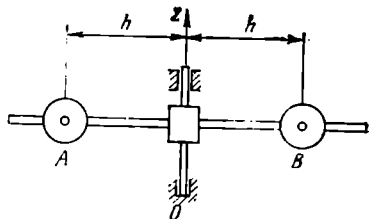
Лекин бундан оғирлик маркази ва массалар маркази айнан бир хил тушунчани ифодалайди, деган хулоса келиб чиқмайди. Берилган ўзгармас механик система оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта унинг оғирлик марказини ифодалайди. Бинобарин, оғирлик маркази тушунчасини фақат оғирлик кучи майдонидаги ўзгармас механик система (хусусан, қаттиқ жисм) учун қўллаш мумкин. Массалар маркази эса қандай кучлар таъсир этишидан қатъи назар, исталган механик система (хусусан, деформацияланувчи жисм) учун маънога эга бўлади.

20.3- §. Инерция моментлари

Система массалар марказининг ҳолати система массаларининг тақсимланишини тўлиқ характерлай олмайди. Масалан, бир хил A ва B шарларнинг марказларидан айланиш ўқи Oz га ҳақ бўлган h масофаларни баб-баравар орттурсак (20.3-расм), у ҳолда A ва B шарлардап ташкил топган системанинг массалар маркази ўзгармайди, бироқ системанинг массалари бошқача тақсимланади ва натижада системанинг ҳаракати ўзгаради (бошқа шартлар ўзгармаганда ай-

ланиш секинроқ содир бўлади). Шу сабабли механикада система массаларининг тақсимланишини характерлаш учун системанинг инерция моменти тушунчаси киритилади.

Моддий нуқтанинг массасини бирор l ўққача бўлган масофа квадратида кўпайтмасига тенг катталиқка нуқтанинг ўққа нисбатан инерция моменти дейилади.



20.3- рasm.

Система нуқталарининг массаларини ўққача (нуқта ёки текислик-кача) бўлган масофалар квадратига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг скаляр катталиқ мос равишда системанинг ўққа (нуқта ёки текисликка) нисбатан инерция моменти дейилади.

Нуқтага нисбатан инерция моменти кўпинча қутбга нисбатан инерция моменти деб ҳам аталади.

Агар l ўққа, O нуқтага ва Π текисликка нисбатан системанинг инерция моментларини I_l , I_O ва I_Π билан белгиласак, таърифта кўра

$$I_l = \sum m_v h_v^2, \quad I_O = \sum m_v r_v^2, \quad I_\Pi = \sum m_v d_v^2 \quad (20.7)$$

формулалар ўринли бўлади. Бунда m_v система M_v нуқтасининг массасини; h_v , r_v , d_v лар эса мос равишда M_v нуқтадан l ўққа, O нуқтага ва Π текисликкача бўлган масофаларни ифодалайди.

СИ бирликлар системасидаги инерция моментининг ўлчамлиги $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$ бўлади.

Агар механик система қаттиқ жисмдан иборат бўлса, бу жисмнинг инерция моментларини аниқлаш учун жисмнинг массалари Δm_v га тенг ($v = 1, 2, \dots, N$) бўлакчалар тўпламидан иборат деб қараймиз ва (20.7) формулаларда m_v лар ўрнига Δm_v ларни қўямиз. Сўнгра жисм ташкил топган бўлакчалар сонини орттира борамиз ва $N \rightarrow \infty$, $\Delta m_v \rightarrow 0$ да лимитга ўтамиз:

$$I_l = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta m_v \rightarrow 0}} \sum_{v=1}^N \Delta m_v h_v^2 = \int_{(M)} h^2 dm, \quad (20.8)$$

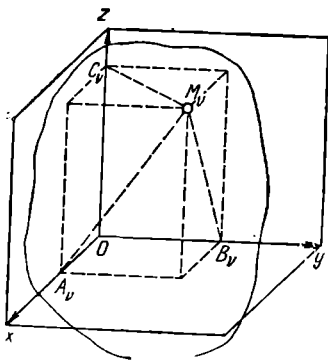
бунда интеграл бутун жисм массаси бўйича олинади.

Ҳажмга эга бўлган жисмнинг ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаш учун (20.8) да $dm = \rho dv$ муносабат ўринли бўлишини эътиборга оламиз. Бу ерда dv жисм бўлакчасининг ҳажмини, ρ зичлигини билдиради.

Бир жинсли жисм учун $\rho = \text{const}$ бўлишини эътиборга олсак, ўққа нисбатан инерция моменти учун яна қуйидаги ифодани оламиз:

$$I_l = \int_{(V)} h^2 \rho dV = \rho \int_{(V)} h^2 dV. \quad (20.9)$$

Бу интеграл бутун жисм ҳажми V бўйича олинади.



20.4- расм.

Агар жисм қалинлиги b га тенг ($b = \text{const}$) юпқа сиртдан иборат бўлса, $dv = bds$ деб қараб (бунда ds сирт бўлақчасининг юзи), (20.9) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$I_l = \rho b \int_{(S)} h^2 ds = \rho_1 \int_{(S)} h^2 ds. \quad (20.10)$$

Мазкур интеграл бутун сирт S бўйича олинади ва $\rho_1 = \rho b$ сирт зичлигини (сирт бўлақчаси массасининг унинг юзига нисбатини) ифодалайди.

Худди шунингдек, кўндаланг кесим юзаси S га тенг ($s = \text{const}$) ингичка стерженнинг ўққа нисбатан инерция моменти $dv = s dl$ (dl — стержень бўлақчасининг узунлиги) бўлишини эътиборга оламиз:

$$I_l = \rho s \int_{(L)} h^2 dl = \rho_2 \int_{(L)} h^2 dl. \quad (20.11)$$

Кўрилатган ҳолда интеграл стержень кесмаси (стержень ўқи) бўйича олинади ҳамда $\rho s = \rho_2$ стерженнинг зичлигини ифодалайди.

Механик системанинг, жумладан, қаттиқ жисмнинг $Oxyz$ Декарт координата ўқларига нисбатан инерция моментларини ҳисоблаймиз. Бунинг учун ихтиёрий O нуқтада координаталар бошини олиб, системанинг массаси m_v га тенг ихтиёрий M_v нуқтасининг координаталарини x_v, y_v, z_v билан белгиласак, мазкур нуқтадан координата ўқларигача бўлган масофалар квадрати мос равишда

$$\begin{aligned} (M_v A_v)^2 &= y_v^2 + z_v^2, \\ (M_v B_v)^2 &= x_v^2 + z_v^2, \\ (M_v C_v)^2 &= x_v^2 + y_v^2 \end{aligned}$$

формулалар ёрдамида аниқланади (20.4-расм). Координата ўқларига нисбатан инерция моментларини I_x, I_y, I_z билан белгиласак, у ҳолда улар учун

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \sum m_v (y_v^2 + z_v^2), \\ I_y &= \sum m_v (x_v^2 + z_v^2), \\ I_z &= \sum m_v (x_v^2 + y_v^2) \end{aligned} \right\} \quad (20.12)$$

мунсабатлар ўринли бўлади.

Координаталар бошига нисбатан системанинг инерция моменти қуйидагича аниқланади:

$$I_o = \sum m_v r_v^2 = \sum m_v (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2). \quad (20.13)$$

Бу ерда r_v^2 билан массаси m_v га тенг M_v нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофа квадрати белгиланган.

Худди шунингдек, координата текисликларига нисбатан инерция моментлари $I_{O_{zx}}, I_{O_{yz}}, I_{O_{xy}}$ учун ушбу формулалар ўринли бўлади:

$$I_{O_{zx}} = \sum m_v y_v^2, I_{O_{yz}} = \sum m_v x_v^2, I_{O_{xy}} = \sum m_v z_v^2. \quad (20.14)$$

(20.12), (20.13) ва (20.14) дан қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O, \quad (20.15)$$

$$I_{O_{yz}} + I_{O_{zx}} + I_{O_{xy}} = I_O, \quad (20.16)$$

$$I_x = I_{O_{zx}} + I_{O_{xy}}, I_y = I_{O_{xy}} + I_{O_{yz}}, I_z = I_{O_{zx}} + I_{O_{yz}}. \quad (20.17)$$

(20.15) системанинг ўрта Декарт координата ўқларига нисбатан инерция моментларининг йиғиндиси мазкур системанинг координаталар бошига нисбатан инерция моментининг иккиланганига тенглигини; (20.16) системанинг ўрта координата текисликларига нисбатан инерция моментларининг йиғиндиси мазкур системанинг координаталар бошига нисбатан инерция моментига тенглигини; (20.17) эса бирор ўққа нисбатан системанинг инерция моменти мазкур системанинг шу ўқ бўйича кесишувчи иккита ўзаро перпендикуляр текисликларга нисбатан инерция моментларининг йиғиндисига тенглигини ифодалайди.

Қўпинча системанинг ўққа нисбатан инерция моментини

$$I_z = Mr_a^2 \quad (20.18)$$

кўринишда ёзилади, бунда M — бутун системанинг массаси. Инерция моменти $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ўлчамга эга бўлишини назарда тутсак, r_a узунлик бирлигида ўлчанишига ишонч ҳосил қиламиз. Бу узунлик *системанинг ўққа нисбатан инерция радиуси* дейилади. Агар системанинг ўққа нисбатан инерция моменти маълум бўлса, инерция радиуси

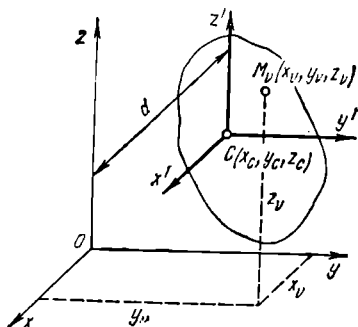
$$r_a = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \quad (20.19)$$

формула ёрдамида аниқланади.

(20.18) дан кўраимизки, инерция радиуси жисмнинг массаси муҳассамлашган нуқтадан z ўққача бўлган шундай масофаки, мазкур нуқтанинг z ўққа нисбатан инерция моменти шу ўққа нисбатан бутун жисмнинг инерция моментига тенг.

20.4-§. Жисмнинг параллел ўқларга нисбатан инерция моментлари ҳақидаги Гюйгенс-Штейнер теоремаси

Жисмнинг массалар маркази орқали ўтувчи ўққа параллел бўлган ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблашни кўриб чиқамиз. Айтайлик, ўзаро параллел бўлган $Oxuz$ ва $Sx'u'z'$ Декарт координата системалари берилган бўлсин, бунда S нуқта системанинг массалар марказида жойлашган (20.5-рasm).



20.5- расм.

Ўққа нисбатан инерция моменти таърифига кўра

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \sum m_v (x_v^2 + y_v^2), \\ I_{z'} &= \sum m_v (x_v'^2 + y_v'^2), \end{aligned} \right\} \quad (20.20)$$

бунда m_v билан M_v нуқтанинг массаси; x_v, y_v, z_v ва x_v', y_v', z_v' билан мазкур нуқтанинг $Oxyz$ ва $Ox'y'z'$ координаталар системасига нисбатан координатлари белгиланган. Агар $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан массалар марказининг координаталарини x_C, y_C, z_C билан белгиласак, у ҳолда M_v

нуқтанинг координаталари $x_v = x_v' + x_C$; $y_v = y_v' + y_C$; $z_v = z_v' + z_C$ муносабатлар билан боғланган бўлади. Координаталарнинг бу қийматларини (20.20) га қўйиб, соддалаштирсак,

$$I_z = \sum m_v \cdot (x_v'^2 + y_v'^2) + 2x_C \cdot \sum m_v x_v' + 2y_C \cdot \sum m_v y_v' + (x_C^2 + y_C^2) \cdot \sum m_v$$

ифода ҳосил бўлади.

Бу ифодада $\sum m_v (x_v'^2 + y_v'^2)$ жисмнинг массалар маркази орқали ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти; $\sum m_v = M$ — бутун жисм массаси; $\sum m_v x_v' = Mx_C' = 0$ ва $\sum m_v y_v' = My_C' = 0$, чунки системанинг массалар марказини ифодаловчи C нуқта $Ox'y'z'$ координаталар системасининг бошида олингани туфайли $x_C' = y_C' = 0$. Бундан ташқари $x_C^2 + y_C^2 = d^2$ (d — Oz ва Cz' ўқлар орасидаги масофа) эканлигини эътиборга олсак,

$$I_z = I_{z'} + Md^2 \quad (20.21)$$

формула ҳосил бўлади.

Бу формула Гюйгенс-Штейнер теоремасини ифодалайди: бирор ўққа нисбатан системанинг инерция моменти системанинг массалар маркази орқали шу ўққа параллел равишда ўтган ўққа нисбатан инерция моменти билан система массасини ўқлар орасидаги масофа квадратига кўпайтмасининг йиғиндисига тенг.

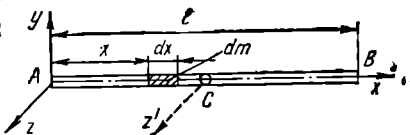
(20.21) формуладан кўрамизки, системанинг массалар маркази орқали ўтувчи ўққа нисбатан ҳисобланган инерция моменти унга параллел бўлган ўқларга нисбатан ҳисобланган инерция моментлари ичида энг кичик қийматга эга бўлади.

20.5- §. Бир жинсли баъзи жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблаш

Қўпинча мураккаб шаклга эга бўлган жисмни оддий шаклли жисмларга ажратиш усули билан унинг инерция моментини аниқлаш қулай бўлади. Бундай жисмнинг инерция моменти унинг бў-

лакляри инерция моментларининг йигиндисидан иборат деб қараш мумкин.

Бир жинсли оддий шаклга эга бўлган баъзи жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблашни кўриб чиқамиз.



20.6- расм.

1. Бир жинсли стерженнинг инерция моменти. x ўқни узунлиги l га тенг ингичка AB стержень бўйлаб йўналтирамиз (20.6-расм). Стерженнинг A учидан ўтувчи ва унинг ўқига перпендикуляр йўналган z ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз.

Айтайлик, стерженнинг массаси M , зичлиги $\rho_2 = \frac{M}{l}$ га тенг бўлсин. У ҳолда стержень dx бўлакчасининг массаси $dm = \rho_2 dx$ эканлигини назарда тутиб, (20.11) га асосан қуйидагини оламиз:

$$I_{Az} = \rho_2 \int_0^l x^2 dx = \rho_2 \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} M l^2. \quad (20.22)$$

Ўққа параллел равишда стерженнинг массалар маркази орқали ўтувчи Cz' ўққа нисбатан инерция моментини Гюйгенс-Штейнер теоремасига асосан аниқлаймиз:

$$I_{Az} = I_{Cz'} + M d^2, \text{ бунда } d^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}.$$

Бинобарин,

$$I_{Cz'} = I_{Az} - M \frac{l^2}{4} = M \frac{l^2}{3} - M \frac{l^2}{4} = M \frac{l^2}{12}. \quad (20.23)$$

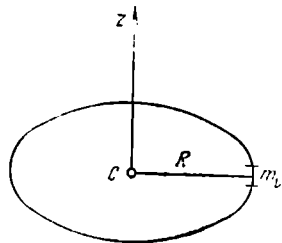
2. Ингичка доиравий ҳалқанинг инерция моменти. Массаси M ва радиуси R га тенг доиравий ҳалқанинг марказидан унинг текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи Cz ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз (20.7- расм). Ҳалқанинг барча нуқталари Cz ўқдан бир хил $h_v = R$ масофада жойлашгани туфайли (20.7) га асосан

$$I_z = \sum m_v h_v^2 = (\sum m_v) R^2 = M R^2 \quad (20.24)$$

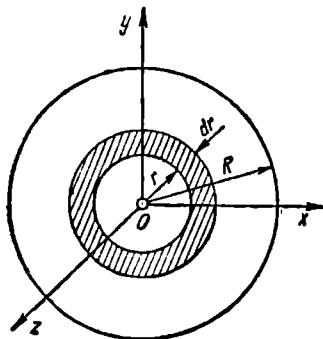
бўлади, бунда $\sum m_v = M$ ҳалқанинг массаси.

(20.24) формула массаси M , радиуси R га тенг юпқа қобиқли цилиндрнинг марказий бўйлама ўқиға нисбатан инерция моментини топиш учун ҳам ўринли бўлади.

3. Бир жинсли доиравий дискнинг инерция моменти. Массаси M , радиуси R га тенг доиравий дискнинг O нуқтага нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз (20.8- расм). O қутбга нисбатан диск-



20.7- расм.



20.8- расм.

нинг инерция моменти шу нуқтадан диск текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи Oz ўққа нисбатан ҳисобланган инерция моментига тенг бўлади. Дискда радиуслари r ва $r + dr$ га тенг айланалар орасидаги доиравий ҳалқани ажратамиз. Бу ҳалқанинг массаси

$$dm = 2\pi r \rho_1 dr$$

га тенг. Бу ерда $\rho_1 = \frac{M}{\pi R^2}$ дискнинг zichligini ifodalaydi.

(20.8) га асосан

$$I_z = \int_{(M)} r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \rho_1 dr = 2\pi \rho_1 \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho_1 \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}. \quad (20.25)$$

Бу формула радиуси R га тенг доиравий цилиндрнинг марказий бўйлама ўқига нисбатан инерция моменти топиш учун ҳам ўринли бўлади.

Диск текислигидаги Ox ва Oy ўқларга нисбатан унинг нуқталари симметрик жойлашгани учун $I_x = I_y$. (20.15) га асосан $2I_o = I_x + I_y + I_z$, лекин $I_z = I_o$ бўлгани учун

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_o = \frac{MR^2}{4}. \quad (20.26)$$

4. Қувурнинг инерция моменти. Массаси M , ташқи радиуси R_1 ва ички радиуси R_2 га тенг қувурнинг марказий бўйлама ўқи Cz га нисбатан инерция моменти радиуслари R_1 ва R_2 га тенг доиравий цилиндрларнинг мазкур ўққа нисбатан инерция моментларининг айирмасига тенг бўлади (20.9-расм). Шундан келиб чиқиб, (20.25) га кўра қуйидагини оламиз:

$$I_{Cz} = M_1 \frac{R_1^2}{2} - M_2 \frac{R_2^2}{2}, \quad (20.27)$$

бунда M_1 ва M_2 билан радиуси R_1 ва R_2 га тенг цилиндрларнинг массаси белгиланган:

$$M_1 = \rho H \pi R_1^2, \quad M_2 = \rho H \pi R_2^2. \quad (20.28)$$

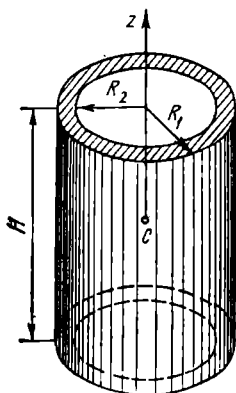
Бу ерда H — қувурнинг узунлиги. (20.28) ни (20.27) га қўйсак,

$$I_{Cz} = \frac{1}{2} \rho \pi H (R_1^4 - R_2^4),$$

лекин қувурнинг массаси

$$M = M_1 - M_2 = \rho \pi H (R_1^2 - R_2^2)$$

га тенглигини эътиборга олсак, қувурнинг марказий бўйлама ўқи Cz га нисбатан инерция

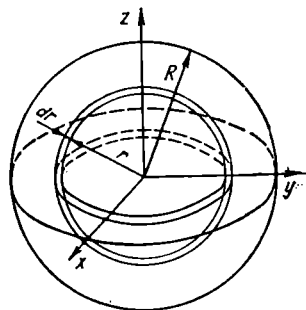


20.9- расм.

моменти учун қўйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$I_{Cz} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2). \quad (20.29)$$

5. Шарнинг инерция моменти. Массаси M , радиуси R га тенг шарнинг маркази ва шу марказдан ўтувчи координата ўқларига нисбатан инерция моментларини ҳисоблаймиз. Шар ичида радиуси r ва қалинлиги dr га тенг шар қобиғини фикран ажратамиз (20.10-рasm). Унинг массаси $dm = \rho dv$ бўлиб, бунда $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ зичликни; $dv = 4\pi r^2 dr$



20.10- рasm.

ажратилган шар қобиғининг ҳажмини ифодалайди. Натижада

$$dm = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr$$

тенглик ўринли бўлади.

Шарнинг марказига нисбатан инерция моменти

$$I_O = \int_{(M)} r^2 dm = 4\pi\rho \int_0^R r^4 dr = 4\pi\rho \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} MR^2 \quad (20.30),$$

формуладан аниқланади.

Шарнинг марказидан ўтувчи координата ўқларига нисбатан инерция моментларини ҳисоблашда бу ўқларга нисбатан шар нуқталари симметрик жойлашганлигини назарда тутсак, $I_x = I_y = I_z$ муносабат ўринли бўлади. Лекин (20.15) га кўра $2I_O = I_x + I_y + I_z = 3I_x = 3I_y = 3I_z$. Бинобарин,

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} I_O = \frac{2}{5} MR^2. \quad (20.31),$$

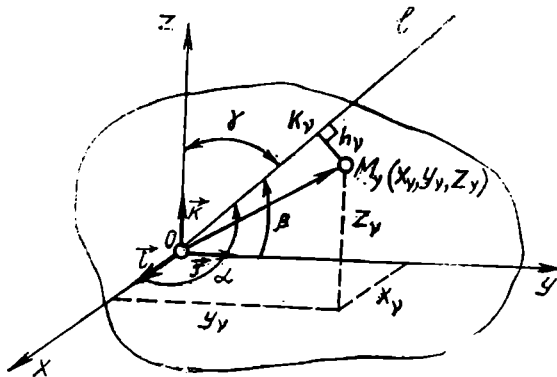
20.6-§*. Жисмнинг берилган нуқтадан ўтувчи ўқларга нисбатан инерция моментлари

Жисмнинг бирор O нуқтаси орқали x, y, z Декарт координата ўқларини ҳамда ихтиёрий l ўқни ўтказамиз; l ўқнинг x, y, z ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α, β, γ билан белгилаймиз (20.11- рasm).

Жисмнинг l ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз. Бунинг учун жисмни $M_\nu (\nu = \overline{1, N})$ нуқталар тўпламидан иборат деб қараймиз. (20.7) га кўра жисмнинг l ўққа нисбатан инерция моменти

$$I_l = \sum m_\nu h_\nu^2 \quad (20.32)$$

формуладан аниқланади, бу ерда h_ν — M_ν нуқтадан l ўққача бўлган масофа.



20.11- расм.

$OK_v M_v$ тўғри бурчакли учбурчакдан

$$h_v^2 = r_v^2 - (OK_v)^2, \quad (20.33)$$

бунда $r_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$ бўлиб, x_v, y_v, z_v лар M_v нуқтанинг координатларини ифодалайди. OK_v кесма $\vec{r}_v = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$ радиус-векторнинг Ol ўқдаги проекциясини ифодалайди. $\vec{r}_v$ векторнинг Ol ўқдаги проекциясини аниқлаш учун бу векторни мазкур ўқнинг бирлик вектори $\vec{l} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ га скаляр кўпайтирамиз:

$$OK_v = \vec{r}_v \cdot \vec{l} = (x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}) (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma) = x_v \cos \alpha + y_v \cos \beta + z_v \cos \gamma. \quad (20.34)$$

(20.33) да r_v^2 ни нуқтанинг координатлари орқали ифодалаб, уни $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ га кўпайтирсак, қуйидагини оламиз:

$$h_v^2 = (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_v \cos \alpha + y_v \cos \beta + z_v \cos \gamma)^2 = (y_v^2 + z_v^2) \cos^2 \alpha + (z_v^2 + x_v^2) \cos^2 \beta + (x_v^2 + y_v^2) \cos^2 \gamma - 2y_v z_v \cos \beta \cos \gamma - 2z_v x_v \cos \gamma \cos \alpha - 2x_v y_v \cos \alpha \cos \beta. \quad (20.35)$$

(20.35) ни (20.32) га қўйсак,

$$I_l = \cos^2 \alpha \sum m_v (y_v^2 + z_v^2) + \cos^2 \beta \sum m_v (z_v^2 + x_v^2) + \cos^2 \gamma \sum m_v (x_v^2 + y_v^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m_v y_v z_v - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum m_v z_v x_v - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m_v x_v y_v.$$

Бу тенгликда (20.12) га кўра

$$\sum m_v (y_v^2 + z_v^2) = I_x, \quad \sum m_v (x_v^2 + z_v^2) = I_y, \quad \sum m_v (x_v^2 + y_v^2) = I_z$$

мос равишда x, y, z ўқларга нисбатан инерция моментлари,

$$\sum m_v y_v z_v = I_{yz}, \quad \sum m_v z_v x_v = I_{zx}, \quad \sum m_v x_v y_v = I_{xy} \quad (20.36)$$

лар эса *марказдан қочирма инерция моментлари* эканлигини эътиборга олсак, жисмнинг l ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг бўлади:

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{yz} \cos \beta \cdot \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha - 2I_{xy} \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (20.37)$$

Жисмнинг l ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаш учун α , β , γ бурчаклардан ташқари O нуқтадан ўтувчи x , y , z ўқларга нисбатан I_x , I_y , I_z , I_{yz} , I_{yz} , I_{zx} , I_{xy} олти инерция моментларини ҳам билиш керак. (20.37) да α , β , γ ларга турлича қийматлар бериб, O нуқтадан ўтувчи ўқлар дастасига нисбатан жисмнинг инерция моментларини аниқлаш мумкин.

20.7*-§. Инерция эллипсоиди

α , β , γ бурчакларга мос равишда жисмнинг l ўққа нисбатан инерция моменти қандай ўзгаришини аниқлаш учун мазкур ўқда O нуқтадан узунлиги

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_l}} \quad (20.38)$$

га тенг кесмани қўямиз (20.12-расм).

ON кесманинг йўналтирувчи косинуслари учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

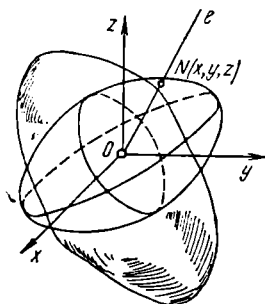
$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{ON} = x\sqrt{I_l}, \\ \cos \beta &= \frac{y}{ON} = y\sqrt{I_l}, \\ \cos \gamma &= \frac{z}{ON} = z\sqrt{I_l}, \end{aligned} \right\} \quad (20.39)$$

бунда x , y , z — N нуқтанинг координаталари. (20.39) ни (20.37) га қўйиб, I_l га қисқартирамиз:

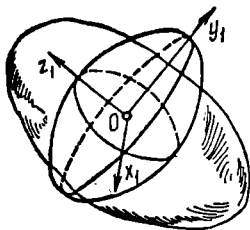
$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy = 1. \quad (20.40)$$

(20.40) тенглама α , β , γ бурчаклар ўзгарганда (20.38) шартпи қаноатлантирувчи N нуқта кўчадиган сиртни ифодалайди. Бу сирт эллипсоиддан иборат бўлади, чунки $I_l \neq 0$ бўлгани учун (20.38) формула ёрдамида аниқланадиган ON масофа чекли бўлади. Бу эллипсоид *инерция эллипсоиди* дейилади.

Жисмнинг ҳар бир нуқтаси учун ўзига яраша инерция эллипсоиди мавжуд бўлади. Агар координата ўқларини сиртнинг O нуқтадан ўтувчи ўзаро перпендикуляр бош



20.12- расм.



20.13- расм.

диаметрлари*) бўйлаб йўналтирсак, эллипсоиднинг тенгламаси соддалашади. Бундай ўқларга *инерция бош ўқлари* дейилади. Жисмининг массалар марказига нисбатан ясалган инерция эллипсоиди *марказий инерция эллипсоиди* дейилади. Марказий инерция эллипсоидининг бош ўқлари *марказий инерция бош ўқлари* деб аталади.

Агар x_1, y_1, z_1 координата ўқлари учун инерция бош ўқларини олсак (20.13- расм), эллипсоид тенгламасида координаталарнинг қў-

пайтмалари қатнашмаслиги аналитик геометрия курсидан маълум:

$$I_{x_1} x_1^2 + I_{y_1} y_1^2 + I_{z_1} z_1^2 = 1. \quad (20.41)$$

Бунда $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{z_1}$ лар инерция бош моментларини ифодалайди.

Агар O нуқта орқали Ox_1, Oy_1, Oz_1 бош ўқлар билан мос равишда α, β, γ бурчак ташкил этувчи l ўқни ўтказсак, у ҳолда (20.37) га биноан бу ўққа нисбатан инерция моменти

$$I_l = I_{x_1} \cos^2 \alpha + I_{y_1} \cos^2 \beta + I_{z_1} \cos^2 \gamma \quad (20.42)$$

формула ёрдамида аниқланади.

Агар хусусий ҳолда иккита инерция бош моментлари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда инерция эллипсоиди айланма эллипсоиддан иборат бўлади. Учала инерция бош моментлари тенг бўлса, инерция эллипсоиди сферадан иборат бўлади.

20.8*- §. Инерция бош ўқларининг хусусиятлари

Инерция бош ўқларининг қуйидаги хусусиятларини кўриб чиқамиз:

1. *Берилган нуқта орқали ўтувчи Декарт координата ўқларидан бири ўшбу нуқта учун инерция бош ўқидан иборат бўлиши учун шу ўққа мос координата қатнашидиган марказдан қочирма инерция моментлари нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Зарурлиги. Айтайлик, Oz ўқ O нуқта учун ясалган инерция эллипсоидининг бош ўқидан иборат ҳамда x ва y ўқлари ихтиёрий бўлсин, у ҳолда инерция эллипсоидининг ҳар бир $M(x, y, z)$ нуқта-сига унга симметрик бўлган $M'(-x, -y, z)$ нуқта мос келади (20.14- расм).

(20.40) тенгламага дастлаб M , сўнгга M' нуқтанинг координаталарини қўйиб,

$$\begin{aligned} I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy &= 1, \\ I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + 2I_{yz}yz + 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy &= 1 \end{aligned}$$

*) сиртга ўтказилган нормаль билан устма-уст тушувчи диаметр бош диаметр дейилади.

тенгламаларни оламиз. Бу тенгламаларнинг иккинчисидан биринчисини айирсак,

$$4I_{yz}yz + 4I_{zx}zx = 0$$

ёки

$$z(I_{yz}y + I_{zx}x) = 0$$

тенглама ўринли бўлади. M нуқтанинг координаталари x, y, z лар нолдан фарқли бўлгани учун охириги тенглама фақат

$$I_{yz} = 0, I_{zx} = 0 \quad (20.43)$$

бўлгандагина ўринли бўлади.

Етарлилиги. Агар (20.43) бажарилса, инерция эллипсоиди тенгламасини

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy = 1$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан кўрамизки, z ўқ инерция бош ўқидан иборат бўлади.

2. Агар бир жинсли жисм симметрия текислигига эга бўлса, инерция бош ўқларидан бири симметрия текислигига перпендикуляр бўлади ҳамда қолган иккита инерция бош ўқлари шу текисликда ётади.

Симметрия текислиги Π да жисмнинг ихтиёрий O нуқтасини олиб, Oz ўқни симметрия текислигига перпендикуляр йўналтирамиз (7.5-расмга қаранг). У ҳолда ҳар бир m_v массали $M_v(x_v, y_v, z_v)$ нуқтага Π текисликка симметрик бўлган ҳудди шундай массали $M'_v(x_v, y_v, -z_v)$ нуқта мос келади. M_v ва M'_v нуқталарнинг координаталари фақат z_v координатасининг ишсраси билан фарқ қилади.

Марказдан қочирма инерция моменти I_{yz} учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади

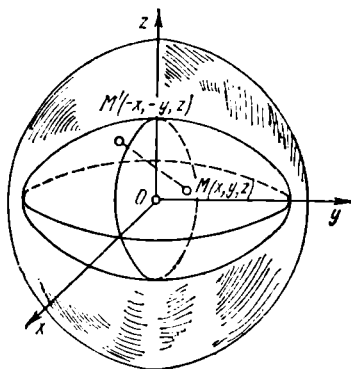
$$I_{yz} = \sum m_v y_v z_v = \sum_{(I)} m_v y_v z_v + \sum_{(II)} m_v y_v \cdot (-z_v) = 0,$$

чунки жисмнинг (I) қисмига мусбат z_v координата, (II) қисмига — z_v манфий координата мос келади. Худди шунингдек,

$$I_{zx} = \sum m_v z_v x_v = \sum_{(I)} m_v z_v x_v + \sum_{(II)} m_v \cdot (-z_v) x_v = 0.$$

I_{yz} ва I_{zx} марказдан қочирма инерция моментлари нолга тенг бўлгани учун Oz ўқ инерция бош ўқидан иборат бўлади. Қолган иккита Ox ва Oy ўқлари Oz га перпендикуляр бўлгани учун симметрия текислиги Π да ётади.

3. Агар бир жинсли жисм симметрия ўқига эга бўлса, бу ўқ марказий инерция бош ўқидан иборат бўлади.



20.14 расм

Агар жисмнинг симметрия ўқи учун z ўқни олсак, ҳар бир x_v, y_v, z_v мусбат координатали, m_v массали нуқтага худди шундай массали, лекин x ва y ўқларга мос координаталари манфий бўлган $-x_v, -y_v, z_v$ нуқтага мос келади (7.6-расмга қаранг) ҳамда

$$I_{zx} = \sum m_v z_v x_v = \sum_{(I)} m_v z_v x_v + \sum_{(II)} m_v z_v \cdot (-x_v) = 0,$$

чунки (I) ва (II) йиғиндилар фақат x_v олдидаги ишора билан бир-биридан фарқ қилади.

Шунга ўхшаш $I_{yz} = 0$ бўлишини исботлаш мумкин.

Бинобарин, симметрия ўқи z инерция бош ўқидан иборат бўлади. Жисмнинг массалар маркази симметрия ўқида ётгани туфайли z ўқ марказий инерция бош ўқи билан устма-уст тушади.

4. Марказий инерция бош ўқи шу ўқда ётувчи барча нуқталар учун инерция бош ўқидан иборат бўлади.

Агар Cz ўқни марказий инерция бош ўқи сифатида олсак (20.15-расм),

$$I_{Czx} = \sum m_v z_v x_v = 0, \quad I_{Cyz} = \sum m_v y_v z_v = 0,$$

$$x_c = \frac{\sum m_v x_v}{M} = 0, \quad y_c = \frac{\sum m_v y_v}{M} = 0$$

бўлади. Бунда $M = \sum m_v$ бутун жисм массаси.

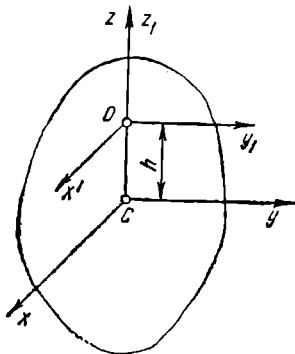
Cz ўқда ихтиёр O нуқтани олиб, бу нуқтада $Cxyz$ га параллел бўлган $Ox_1y_1z_1$ координаталар системасини ўтказамиз. У ҳолда $OC = h$ белгилаш киритиб (20.5) ни эътиборга олсак, $I_{z_1x_1}$ ва $I_{y_1z_1}$ марказдан қочирма инерция моментлари қуйидагича ҳисобланади:

$$I_{z_1x_1} = \sum m_v (z_v - h) x_v = \sum m_v z_v x_v - h M x_c = 0,$$

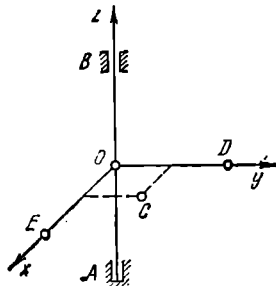
$$I_{y_1z_1} = \sum m_v (z_v - h) y_v = \sum m_v z_v y_v - h M y_c = 0.$$

Бинобарин, O_1z_1 ўқ ҳам инерция бош ўқидан иборат бўлади.

20.1-масала. AB вертикал валга ҳамда ўзаро перпендикуляр бўлган r узунликдаги OE ва OD стерженлар воситасида бир хил E ва D юклар бириктирилган (20.16-расм). Стерженлар ва валнинг массасини ҳисобга олмай ва юкларни мод-



20.15- расм.



20.16- расм.

дий нуқта деб қараб, системанинг массалар маркази C топилсин, шунингдек, I_{zx}, I_{yz}, I_{xy} марказдан қочирма инерция моментлари ҳисоблансин.

Ечиш. Координаталар бошининг O нуқтада олиб, x ўқини OE стержень, y ўқини OD стержень бўйлаб, z ўқини эса AB вал бўйича йўналтираимиз. Агар юкларнинг массаларини m билан белгиласак, $E(r, 0, 0)$, $D(0, r, 0)$ бўлгани учун (20.5) га кўра E ва D нуқталардан ташкил топган система массалар марказининг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$x_C = \frac{\sum_{v=1}^2 m_v x_v}{\sum_{v=1}^2 m_v} = \frac{mr}{2m} = \frac{r}{2},$$

$$y_C = \frac{\sum_{v=1}^2 m_v y_v}{\sum_{v=1}^2 m_v} = \frac{mr}{2m} = \frac{r}{2},$$

$$z_C = \frac{\sum_{v=1}^2 m_v z_v}{\sum_{v=1}^2 m_v} = 0.$$

Бинобарин, системанинг массалар маркази $C \left(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r, 0 \right)$ нуқтада ётади.

z ўқ система нуқталари ётган xy текисликка перпендикуляр йўналгани учун y инерция бош ўқидан иборат бўлади, шу сабабли I_{zx} ва I_{yz} марказдан қочирма инерция моментлари нолга тенг:

$$I_{zx} = 0, I_{yz} = 0.$$

Шунингдек, $E(r, 0, 0)$, $D(0, r, 0)$ бўлгани учун

$$I_{xy} = \sum_{v=1}^2 m_v x_v y_v = 0.$$

Шундай қилиб, $I_{zx} = I_{yz} = I_{xy} = 0$.

20.2-масала. Массаси M , томонлари a ва b га тенг тўғри тўртбурчакли бир жинсли пластинка диагоналларида бири орқали ўтувчи z ўққа бириктирилган (20.17-расм). z ва y ўқлари расм текислигида ётади деб қараб, I_{zx}, I_{yz}, I_{xy} марказдан қочирма инерция моментлари аниқлансин.

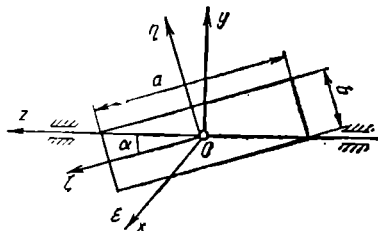
Ечиш. Координата ўқларини пластинканинг массалар марказидаги O нуқта орқали 20.17-расмдагидек йўналтираимиз. Бунда x ўқ пластинка текислигига перпендикуляр йўналгани ва унинг массалар маркази орқали ўтгани учун марказий инерция бўш ўқидан иборат бўлади. Шу сабабли

$$I_{zx} = I_{xy} = 0$$

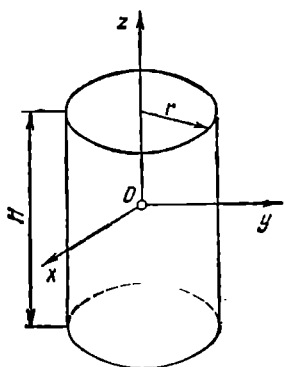
бўлади. I_{yz} марказдан қочирма инерция моменти (20.38) га кўра

$$I_{yz} = \sum m_v y_v z_v \quad \text{ёки} \quad I_{yz} = \int yz \, dm \quad (1)$$

формуладан аниқланади. I_{yz} ни ҳисоблаш учун $O\xi\eta\zeta$ янги координаталар системасига ўтамиз. Бунда ξ ўқ x билан устма-уст тушади; η ўқ тўғри тўртбурчакнинг b томонига параллел; ζ ўқ унга перпендикуляр йўналади. Ox ва $O\xi$ устма-



20.17- расм.



20.18- расм.

уст тушганлиги туфайли $O\xi$ ўқ марказий инерция бош ўқидан иборат бўлади. $O\eta$ ва $O\xi$ ўқлари пластинканинг массалар маркази O нуқта орқали ўтгани ва симметрия ўқларидан иборат бўлгани учун бу ўқлар ҳам марказий инерция бош ўқларидан иборат бўлади. Бинобарин, $O\xi\eta\xi$ координаталар системаси O нуқта учун ясалган инерция эллипсоидининг бош координата ўқларидани иборат бўлади. Oz ва $O\xi$ ўқлари орасидаги бурчак

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad (2)$$

формуладан аниқланади.

Аналитик геометриядаги координата ўқларини буриш формуласидан фойдаланиб, y ва z координаталарни η, ξ координаталар орқали ифодалаймиз:

$$\left. \begin{aligned} y &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ z &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

y, z ларнинг бу қийматларини (1) га қўйсак,

$$I_{yz} = \frac{\sin 2\alpha}{2} \left[\int_{(M)} \xi^2 dm - \int_{(M)} \eta^2 dm \right] + \cos 2\alpha \int_{(M)} \eta \xi dm. \quad (4)$$

$O\xi\eta\xi$ бош координата ўқларидан иборат бўлгани учун

$$\int_{(M)} \eta \xi dm = 0. \quad (5)$$

(4) даги $\int_{(M)} \xi^2 dm$ ва $\int_{(M)} \eta^2 dm$ катталиклар мос равишда $O\xi\eta$ ва $O\xi\xi$ текисликларга нисбатан пластинканинг инерция моментларини ифодалайди ва қуйидагича аниқланади:

$$\int_{(M)} \xi^2 dm = \frac{M}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi^2 d\xi d\eta = \frac{Ma^3}{12} \quad (6)$$

$$\int_{(M)} \eta^2 dm = \frac{M}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \eta^2 d\eta d\xi = \frac{Mb^3}{12}. \quad (7)$$

(5), (6) ва (7) ни (4) га қўйсак,

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \frac{\sin 2\alpha}{2} \frac{M}{12} (a^3 - b^3) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{M}{12} (a^3 - b^3) = \\ &= \frac{Mab}{12} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

20.3- масала. Массаси m , баландлиги H , асосининг радиуси r га тенг доиравий цилиндрнинг оғирлик марказига нисбатан ясалган инерция эллипсоиди тенгламаси тузилсин. Координата ўқлари 20.18- расмда тасвирланган. Координаталар боши O цилиндрнинг оғирлик маркази билан устма-уст тушади.

Ечиш. О нуқтага нисбатан инерция эллипсоиднинг тенгламасини (20.40) кўра
 янгида ёзиш мумкин:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2 I_{yz} yz - 2 I_{zx} zx - 2 I_{xy} xy = 1.$$

(20.25) га кўра

$$I_z = \frac{mr^3}{2}.$$

I_x ва I_y ларни ҳисоблаш учун (20.17) формулалардан фойдаланамиз:

$$I_x = I_{Ozx} + I_{Oxy}, \quad I_y = I_{Oxy} + I_{Oyz}.$$

Вунда

$$I_{Oxy} = \int_{(m)} z^2 dm = \rho \pi r^3 \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz = \rho \pi r^3 \frac{H^3}{12} = \frac{mH^3}{12}.$$

x ва y ўқларга нисбатан цилиндр бир хилда симметрик жойлашгани учун

$$I_{Ozx} = I_{Oyz}. \quad \text{Шу сабабли}$$

$$I_z = I_{Oxx} + I_{Oyz} = 2 I_{Ozx} = 2 I_{Oyz} = \frac{\pi r^3}{2}, \quad I_{Ozx} = I_{Oyz} = \frac{\pi r^3}{4}.$$

Натижада

$$I_x = I_{Ozx} + I_{Oxy} = \frac{m}{4} \left(r^2 + \frac{1}{3} H^2 \right),$$

$$I_y = I_{Oyz} + I_{Oxy} = \frac{m}{4} \left(r^2 + \frac{1}{3} H^2 \right).$$

x , y ўқларининг марказий инерция бош ўқлари бўлгани учун

$$I_{zx} = I_{yz} = I_{xy} = 0.$$

Винобарин, цилиндрнинг оғирлик марказига нисбатан ясалган инерция эллипсоиднинг тенгламаси

$$\frac{m}{4} \left(r^2 + \frac{1}{3} H^2 \right) x^2 + \frac{m}{4} \left(r^2 + \frac{1}{3} H^2 \right) y^2 + \frac{m r^3}{2} z^2 = 1$$

кўринишда ёзилади.

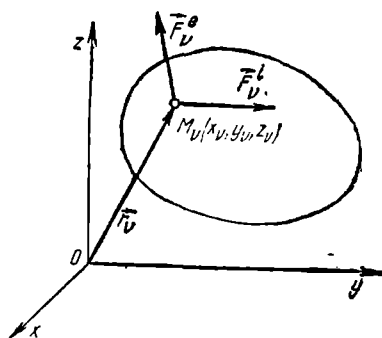
Бу эллипсоиднинг ярим ўқлари

$$a = b = \frac{2}{\sqrt{m \left(r^2 + \frac{H^2}{3} \right)}}, \quad c = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{m}}$$

га тенг айланма эллипсоиддан иборат бўлади.

21.1-§. Механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари

Айтайлик, механик система $M_1, M_2, \dots, M_N$ нуқталардан ташкил топган бўлсин. Массаси m_v , бирор қўзғалмас $Oxyz$ координаталар



системасига нисбатан радиус-вектори $\vec{r}_v$ га тенг система исталган M_v нуқтасига қўйилган ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{F}_v^e$ барча ички кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{F}_v^i$ билан белгиласак (21.1-рasm), бундай нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг векторли ифодаси

21.1- рasm:

$$m_v \frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i \quad (21.1)$$

кўринишда ёзилади. Бунда $\frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{\omega}_v$ мазкур нуқтанинг тезланиши. Системанинг ҳар бир нуқтаси учун (21.1) тенглама ўринли бўлади.

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \\ m_N \frac{d^2 \vec{r}_N}{dt^2} &= \vec{F}_N^e + \vec{F}_N^i, \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Бу тенгламаларни қисқача қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m_v \frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i, \quad (v=1, 2, \dots, N). \quad (21.3)$$

(21.3) тенгламаларни қўзғалмас $Oxyz$ Декарт координата ўқларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} m_v x_v &= X_v^e + X_v^i, \\ m_v y_v &= Y_v^e + Y_v^i, \\ m_v z_v &= Z_v^e + Z_v^i, \end{aligned} \right\} \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (21.4)$$

бу ерда $\ddot{x}_v, \ddot{y}_v, \ddot{z}_v$ орқали $\frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{\omega}_v$ тезланишнинг координата ўқларидаги проекциялари; X_v^e, Y_v^e, Z_v^e билан нуқтага таъсир этувчи барча ташқи кучлар тенг таъсир этувчисининг проекциялари; X_v^i, Y_v^i, Z_v^i билан эса барча ички кучлар тенг таъсир этувчисининг мазкур ўқдаги проекциялари белгиланган.

(21.3) ёки (21.4) тенгламалар *механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари* дейилади. Умумий ҳолда система нуқталарига таъсир этувчи кучлар вақт, система нуқталарининг координаталари ва тезликларининг функциясидан иборат бўлгани учун бу тенгламалар биргаликдаги тенгламалар системасини ташкил этади. Бинобарин, система нуқталарининг массалари ва уларга таъсир этувчи кучларни билган ҳолда берилган бошланғич шартларда механик системанинг ҳаракатини аниқлаш учун (21.3) кўринишдаги N та векторли тенгламалар системаси ёки $3N$ та иккинчи тартибли (21.4) скаляр тенгламалар системасини интеграллашга тўғри келади.

(21.4) тенгламалар системасини интеграллаш натижасида ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланадиган $6N$ та интеграллаш доимийлари ҳосил бўлади. Вақтнинг бирор пайтидаги система нуқталаричинг координаталари ва тезликларининг қиймати *механик система учун бошланғич шартларни* ифодалайди.

Умумий ҳолда (21.3) ёки (21.4) тенгламаларнинг аниқ ечимини аниқлаш ҳатто механик система битта нуқтадан ташкил топганда ҳам муаммодир. Агар механик система нуқталарига боғланишлар қўйилган бўлса, бундай механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини интеграллаш янада қийинлашади. Чунки бу ҳолда механик системанинг ҳаракатини аниқлашдан ташқари берилган кучлар ва боғланишлар асосида яна қўшимча номаълум боғланиш реакция кучларини ҳам аниқлашга тўғри келади.

Механик система нуқталарининг сони орта борган сари ҳаракат дифференциал тенгламаларини интеграллаш мураккаблаша боради. Одатда механик системанинг ҳаракатини аниқлашда бовссита системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини интеграллаш билан шугулланилмайди. Кўпинча система динамикасининг масалаларини ечишда механик системанинг айрим характеристикалар тўпламини аниқлаш етарли бўлади. Бундай характеристикалар тўплами (21.3) ёки (21.4) тенгламалардан келтириб чиқариладиган ва *динамиканинг умумий теоремалари* деб аталадиган теоремалар воситасида аниқланади. Ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема, кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теорема ва кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремалар ана шулар жумласидандир. Айрим ҳолларда бу теоремалардан фойдаланиб, системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси биринчи интегралларини (яъни координаталардан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосила қатнашмайдиган муносабатларни) олиш мумкин.

Агар ҳаракат дифференциал тенгламасининг айрим биринчи интеграллари маълум бўлса, бу биринчи интеграллар системанинг ҳа-

ракатини тўлиқ аниқламаса-да, бутун системанинг ҳаракатини ҳаракат-терлашда муҳим аҳамиятга эга.

Баъзи ҳолларда динамиканинг умумий теоремаларидан фойдаланиб биринчи интегралларни топиш мумкин бўлмаса-да, системанинг ҳаракати ҳақида алоҳида аҳамиятга эга бўлган маълумотларни олиш мумкин. Бу теоремаларни алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз.

21.2-§. Моддий нуқтанинг ва системанинг ҳаракат миқдори. Куч импульси

Кинематика бўлимида тезлик нуқта ҳаракатининг асосий кўрсаткичларидан бири эканлигини кўрган эдик. Динамикада нуқта (ёки система нуқталари) нинг тезлиги билан бирга уларнинг массасини ҳам билиш зарур. Масалан, иккита бир хил шаклдаги пластмассадан ва металлдан ясалган ғилдираклар айнан бир хил кучлар таъсирида турлича ҳаракатда бўлади.

Механикада моддий нуқта механик системанинг ҳаракат ўлчовларидан бири сифатида унинг ҳаракат миқдорин олинади. (15.3) дан маълумки, нуқтанинг массаси m билан берилган ондаги тезлиги $\vec{v}$ нинг кўпайтмасига тенг

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

вектор *нуқтанинг ҳаракат миқдорини* ифодалайди.

Нуқта ҳаракат миқдорининг Декарт координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$q_x = mv_x = m\dot{x}, \quad q_y = mv_y = m\dot{y}, \quad q_z = mv_z = m\dot{z}.$$

Механик система нуқталари ҳаракат миқдорларининг геометрик йиғиндисига тенг вектор

$$\vec{Q} = \sum m_v \vec{v}_v \quad (21.5)$$

системанинг ҳаракат миқдори (ёки ҳаракат миқдорининг бош вектори) дейилади.

(8.1) да $\vec{v}_v = \frac{d\vec{r}_v}{dt}$ ($\vec{r}_v$ — M_v нуқтанинг инерциал системага нисбатан радиус-вектори) ҳамда система нуқталарининг массалари ўзгармас бўлгани учун

$$\vec{Q} = \sum m_v \frac{d\vec{r}_v}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_v \vec{r}_v$$

(20.4) га асосан $\sum m_v \vec{r}_v = M\vec{r}_c$ (M —бутун системанинг массаси, $\vec{r}_c$ —массалар марказининг радиус-вектори) муносабат ўринли бўлгани учун

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt} (M\vec{r}_c) = M \frac{d\vec{r}_c}{dt}$$

бунда $\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c$ система массалар марказининг тезлигини ифодалайди. Демак,

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c \quad (21.6)$$

бўлиб, системанинг ҳаракат миқдори бутун система массаси билан система массалар маркази тезлигининг кўпайтмасига тенг.

(21.6) ни бошқача қўйидагича талқин қилиш ҳам мумкин: системанинг ҳаракат миқдори бутун системанинг массаси мужассамлашган деб қараладиган система массалар марказининг ҳаракат миқдорига тенг.

(21.5) ва (21.6) га кўра, система ҳаракат миқдорининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш мумкин:

$$Q_x = \sum m_v v_{vx} = Mv_{cx},$$

$$Q_y = \sum m_v v_{vy} = Mv_{cy},$$

$$Q_z = \sum m_v v_{vz} = Mv_{cz}.$$

Системанинг ҳаракат миқдорини ҳисоблаш учун *Охуз* инерциал координаталар системаси билан бирга системанинг массалар маркази орқали ўтувчи ва унга параллел равишда ҳаракатланувчи $Sx_1y_1z_1$ координаталар системасини киритамиз (21.2-расм). Натижада система нуқталарининг ҳаракатини $Sx_1y_1z_1$ билан биргаликдаги кўчирма (илгарилама) ҳаракатдан ҳамда бу координата ўқларига нисбатан нисбий ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин. Шу сабабли системанинг ҳаракат миқдорини ҳам кўчирма ва нисбий ҳаракат миқдорларининг йиғиндисидан иборат деб оламиз:

$$\vec{Q} = \vec{Q}^e + \vec{Q}'$$

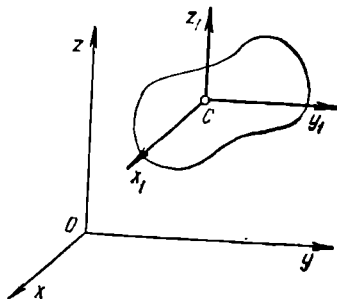
Ҳаракатдаги координаталар системасининг боши системанинг массалар маркази билан устма-уст тушгани сабабли нисбий ҳаракатда $\vec{v}'_c = 0$ бўлади. Бинобарин, (21.4) га кўра $\vec{Q}' = M\vec{v}'_c = 0$. Натижада $\vec{Q} = \vec{Q}^e$ тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, системанинг ҳаракат миқдори унинг массалар маркази билан биргаликдаги илгарилама кўчирма ҳаракатини ҳарактерлайди.

Масалан, массалар маркази орқали ўтувчи қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг ҳаракат миқдор вектори

$$\vec{Q} = \vec{Q}^e = M\vec{v}_c = 0$$

бўлади, чунки массалар маркази қўзғалмас ўқда ётади ва унинг тезлиги $\vec{v}_c = 0$ бўлади. Лекин тўғри чизиқли рельсда сирпанмай ҳаракатланувчи ғилдиракнинг ҳаракат миқдори



21.2- расм.

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C \neq 0$$

бўлади, чунки бу ҳолда ғилдирак массалар марказининг тезлиги $\vec{v}_C \neq 0$ бўлади.

Нуқтанинг ҳаракат миқдори вектори $\vec{q}$ мазкур нуқтага, системанинг ҳаракат миқдори вектори $\vec{Q}$ эса системанинг массалар марказига қўйилган деб қаралади.

Механик ҳаракатнинг векторли ўлчови сифатида ҳаракат миқдори олинади.

Берилган нуқтага бошқа моддий объектларнинг ҳар ондаги механик таъсирини характерловчи ўлчов сифатида *куч* олинади. Лекин куч таъсирининг эффекти унинг ҳар ондаги миқдор ва йўналишигагина боғлиқ бўлмай, балки унинг таъсир вақтига ҳам боғлиқ бўлади.

Миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлган $\vec{F}$ куч билан унинг таъсир вақти t нинг кўпайтмасига тенг

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot t \quad (21.7)$$

вектор *кучнинг импульси* дейилади.

Куч импульсининг йўналиши кучнинг йўналиши билан бир хил бўлади.

Куч импульси *ўзаро механик таъсирнинг векторли ўлчови* дейилади ва берилган вақт ичида моддий нуқта (ёки система) га бошқа моддий объектларнинг таъсирини ифодалайди.

СИ бирликлар системасида куч импульси Н.с билан ўлчанади.

Агар таъсир этувчи куч $\vec{F} = \vec{F}(t)$ вақтнинг функциясида иборат бўлса, кучнинг dt вақт ичидаги таъсири *кучнинг элементар импульси* деб аталадиган

$$d\vec{S} = \vec{F} dt \quad (21.8)$$

катталиқ билан аниқланади.

Куч элементар импульсининг координата ўқларидаги проекциялари

$$dS_x = X dt, \quad dS_y = Y dt, \quad dS_z = Z dt \quad (21.8)$$

ифодалардан, чекли t вақт ичидаги куч импульси эса

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt \quad (21.9)$$

формуладан аниқланади.

Куч импульсининг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$S_x = \int_0^t X dt, \quad S_y = \int_0^t Y dt, \quad S_z = \int_0^t Z dt \quad (21.9')$$

21.1- масала. 21.3- расмда тасвирланган механизмдаги қўзғалмас ғилдирак ичида ҳаракатланувчи ғилдиракнинг радиуси r , массаси M бўлиб, массалар маркази O_1 нуқтада ётади; тўғри чизикли AB стержеининг массаси kM массалар мар-

кази C_1 нуқтада ($AC_1 = C_1B$). OO_1 кривошип O ўқ атрофида ўзгармас ω бурчак тезлиги билан айланади.

Кривошип массасини ҳисобга олмай, системанинг ҳаракат миқдори ҳисоблансиз.

Ечиш. Берилган механизмни радиуси r га тенг гилдирак ва AB стержендан ташкил топган система деб қараймиз. У ҳолда системанинг ҳаракат миқдори $\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$ бўлади. Бунда $\vec{Q}_1$, r радиусли гилдиракнинг; $\vec{Q}_2$ эса AB стерженнинг ҳаракат миқдорини ифодалайди.

(21.6) формулани ҳар бир жисм учун қўлласак,

$$\vec{Q} = M\vec{v}_{O_1} + kM\vec{v}_{C_1}. \quad (1)$$

Бу ерда $\vec{v}_{O_1}$, $\vec{v}_{C_1}$ лар мос равишда гилдирак марказидаги O_1 ва AB стержень массалар маркази C_1 нуқталарнинг тезликларини ифодалади.

O_1 нуқта OO_1 кривошип билан айланма ҳаракатда иштирок этгани туфайли, тезлигининг модули

$$v_{O_1} = r\omega \quad (2)$$

бўлиб, OO_1 га перпендикуляр йўналади.

AB стержень Oy ўқ бўйлаб тўғри чизиқли илгарилема ҳаракатда бўлгани учун унинг C_1 нуқтасининг тезлиги A нуқтанинг тезлигига тенг бўлади ва вертикал юқорига йўналади: $\vec{v}_{C_1} = \vec{v}_A$. A нуқта r радиусли гилдиракка тааллуқли бўлгани учун A нуқтанинг тезлигини топишда гилдираклар тегиб турган C нуқта тезликларнинг оний марказидан иборат эканлигидан фойдаланамиз:

$$\frac{v_A}{v_{O_1}} = \frac{AC}{O_1C} = \frac{2r \sin \varphi}{r} = 2 \sin \varphi,$$

бунда $\varphi = \omega t$ — кривошипнинг айланиш бурчаги. Шундай қилиб,

$$v_{C_1} = v_A = v_{O_1} \cdot 2 \sin \varphi = 2r\omega \sin \omega t. \quad (3)$$

(2) ва (3) ни назарда тутиб, (1) дан ҳаракат миқдорининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

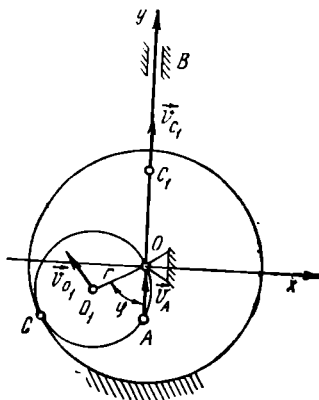
$$Q_x = -Mv_{O_1} \cos \varphi = -Mr\omega \cos \omega t,$$

$$Q_y = Mv_{O_1} \sin \varphi + kMv_{C_1} = Mr\omega (1 + 2k) \sin \omega t.$$

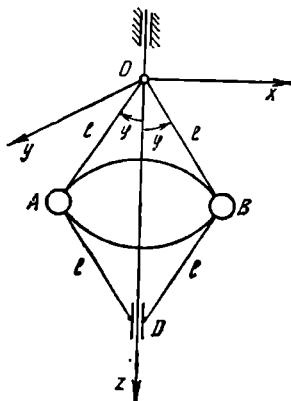
21.2-масала. Вертикал ўқ атрофида тезланувчан айланма ҳаракат қилувчи марказдан қочирма регуляторнинг ҳаракат миқдори ҳисоблансин. Бунда φ бурчак $\varphi = \varphi(t)$ қонуни асосида ўзгаради ва OA , OB стерженлар айланиши натижасида A ва B шарлар кўтарилади. Стерженларнинг узунлиги $OA = OB = AD = BD = l$. Массаси M_2 га тенг D муфтанинг массалар маркази z ўқда ётади. Ҳар бирининг массаси M_1 га тенг A ва B шарлар нуқта деб қаралсин. Стерженларнинг массаси ҳисобга олинмасин (21.4-расм).

Ечиш. Марказдан қочирма регуляторни A , B шарлар ва D муфтadan иборат учта моддий нуқтадан ташкил топган система деб қараймиз. Шу сабабдан

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3.$$



21.3-расм.



21.4-расм.

бунда $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3$ — мос равишда A, B шарлар ва D муфтанинг ҳаракат миқдори.
(15.3) ни системанинг ҳар бир нуқтаси учун қўлаймиз:

$$\vec{Q} = M_1 \cdot \vec{v}_A + M_1 \vec{v}_B + M_2 \vec{v}_D,$$

бунда $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_D$ лар мос равишда A, B, D нуқталарнинг тезлигини ифода-
лайди.

Система нуқталари z ўққа нисбатан симметрик жойлашгани туфайли система-
нинг массалар маркази шу ўқда ётади. Шу сабабли

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= Mx_C = 0, \\ Q_y &= My_C = 0, \\ Q_z &= M\dot{z}_C = M_1\dot{z}_A + M_1\dot{z}_B + M_2\dot{z}_D. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Агар стержеплар xz текислигида ётади десак, $z_A = l \cos \varphi$, $z_B = l \cos \varphi$,
 $z_D = 2l \cos \varphi$ тенгликларни оламиз. Шу сабабли

$$\dot{z}_A = \dot{z}_B = -l \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{z}_D = -2l \dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (2)$$

(2) ни (1) га қўйсак,

$$Q_z = -2 (M_1 + M_2) l \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

21.3-§. Нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Ньютоннинг иккинчи қонуни (15.4) кўринишда ёзиб,

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F},$$

уни dt га кўпайтирсак,

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt \quad (21.10)$$

ёки (21.8) га кўра

$$d(m\vec{v}) = d\vec{S} \quad (21.11)$$

формула ўринли бўлади.

(21.10) ёки (21.11) тенглама *нуқта ҳаракат миқдорининг ўзга-
риши ҳақидаги теореманинг дифференциал кўринишидир*. У қуйи-
дагича ўқилади: *нуқта ҳаракат миқдорининг дифференциали нуқ-
тага таъсир этувчи кучнинг элементар импульсига тенг*.

(21.10) ни координата ўқларига проекциялаб,

$$d(mv_x) = Xdt, \quad d(mv_y) = Ydt, \quad d(mv_z) = Zdt \quad (21.12)$$

ёки

$$dq_x = dS_x, \quad dq_y = dS_y, \quad dq_z = dS_z \quad (21.13)$$

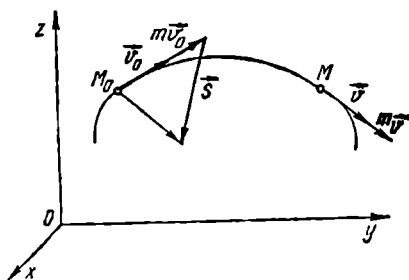
тенгликларни оламиз. Демак, *нуқта ҳаракат миқдори бирор коор-
дината ўқидаги проекциясининг дифференциали нуқтага таъсир
этувчи куч элементар импульсининг мазкур ўқдаги проекциясига
тенг*.

Чекли вақт ичида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгаришини аниқлаш учун (21.10) ни интеграллаймиз:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F} \cdot dt \quad (21.14)$$

ёки

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}, \quad (21.15)$$



21.5- расм.

бунда $\vec{v}_0$ орқали $t_0 = 0$ бошлан-

ғич пайтдаги тезлик, $\vec{v}$ билан исталган t пайтдаги тезлик белгиланган (21.5- расм).

(21.14) ёки (21.15) тенгламалар нуқта ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичида ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: нуқта ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичида ўзгариши нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу вақт ичидаги импульсига тенг.

Агар t_0 ва t_1 вақтлардаги нуқтанинг ҳаракат миқдорлари $m\vec{v}_0$ ва $m\vec{v}$ маълум бўлса, $t_1 - t_0$ вақтдаги нуқтага таъсир этувчи кучнинг импульсини 21.5- расмдагидек тасвирлаш мумкин. Аксинча, чекли вақт ичидаги кучнинг импульси $\int_0^t \vec{F} dt$ ва нуқтанинг бошланғич тезлиги $\vec{v}_0$ маълум бўлса, исталган t пайтдаги нуқтанинг тезлиги

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{m} \int_0^t \vec{F} dt \quad (21.16)$$

формуладан аниқланади.

Нуқта ҳаракат миқдори ўзгаришининг координата ўқларидаги (скаляр) ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m v_x - m v_{0x} = S_x, \quad m v_y - m v_{0y} = S_y, \quad m v_z - m v_{0z} = S_z. \quad (21.17)$$

Демак, нуқта ҳаракат миқдорининг бирор координата ўқи бўйича чекли вақт ичида ўзгариши шу вақт ичидаги нуқтага таъсир этувчи куч импульсининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.

Юқорида исботланган (21.14), (21.15) ва (21.17) қўришишидаги ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремалар $\vec{F}$ куч (агар нуқта $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар системаси таъсирида бўлса, $\vec{F}$ куч учун кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ олинади) фақат вақтнинг функциясидан иборат ёки миқдор ва йўпаллиш жиҳатдан ўзгармас бўлган ҳолларда ўринли бўлади.

Қуйидаги ҳолларда ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари (16.1) ёки (16.3) нинг биринчи интегралларини аниқлаш мумкин:

Агар $\vec{F} = 0$ бўлса, яъни нуқтага ҳеч қандай кучлар таъсир этмаса (ёки таъсир этувчи кучлар нолга эквивалент бўлса), у ҳолда (21.10) га кўра

$$d(\vec{m}\vec{v}) = 0,$$

бинобарин,

$$\vec{m}\vec{v} = \vec{c} = \overrightarrow{const} \quad (21.18)$$

ёки (21.14) га кўра

$$\vec{m}\vec{v} = m\vec{v}_0 \quad (21.19)$$

тенглик ўринли бўлади.

(21.18) ёки (21.19) тенгликлар ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини билдиради ва нуқта ҳаракат дифференциал тенгламаси (16.1) нинг биринчи векторли интегралини ифодалайди.

(21.18) да масса ўзгармас бўлгани учун кўрилаётган ҳолда $\vec{v} = \overrightarrow{const}$ бўлади, яъни нуқта тўғри чизиqli текис ҳаракатда бўлади. Бу натижа Ньютоннинг биринчи қонуни (инерция қонуни) ни ифодалайди.

2) Агар кучнинг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса:

$$X = 0,$$

у ҳолда (21.17) га асосан

$$m v_x - m v_{0x} = 0,$$

бинобарин,

$$v_x = v_{0x} = C_1 \quad (21.20)$$

ёки

$$\dot{x} = C_1$$

кўринишдаги (16.3) тенгламанинг биринчи интегралини оламир. (21.20) дан кўрамирки, таъсир этувчи кучнинг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, нуқта тезлигининг мазкур ўқдаги проекцияси ўзгармасдан қолади.

3) Агар таъсир этувчи куч ҳамиша ўз йўналишини сақласа, масалан, z ўққа параллел бўлса, у ҳолда $X = Y = 0$ бўлади ва 2-ҳолдагидек

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = C_2 \quad (21.21)$$

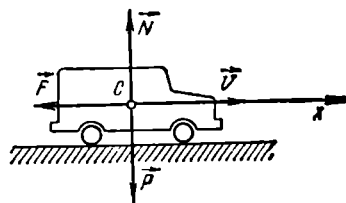
биринчи интеграллар мавжуд бўлади.

(21.21) нинг биринчисини y , иккинчисини x га кўпайтириб, олинган тенгликларни солиштирсак,

$C_1 \dot{y} = C_2 x$ ёки $C_1 dy - C_2 dx = 0$ муносабат ўринли бўлади. Охириги тенгликни интеграллаб қуйидагини оламир:

$$C_1 y - C_2 x = const.$$

Бу тенглама z ўққа параллел текисликда ётувчи эгри чизиқнинг тенгламасини ифодалайди. Бинобарин, кўрилаётган ҳолда нуқтанинг траекторияси ҳамisha z ўққа параллел текисликда ётади.



21.6- расм.

21.3- масала. Оғирлиги P Н бўлган автомобилни t с вақт ичида тезлигини v_0 дан v м/с гача камайтириш учун қандай куч билан тормозлаш керак?

Ечиш. Автомобиль тўғри чизиқли ҳаракатда деб қараймиз (21.6- расм). Автомобильга унинг оғирлик кучи $\vec{P}$, нормал реакция кучи $\vec{N}$, тормозлаш кучи $\vec{F}$ қўйилган бўлиб, барча кучлар йўналиш ва миқдор жиҳатдан ўзгармасдир.

(21.17) нинг биринчи тенгламасидан фойдаланиб, x ўққа нисбатан ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m(v - v_0) = -F \cdot t$$

ёки

$$F = \frac{P}{g} \frac{v_0 - v}{t} \text{ Н.}$$

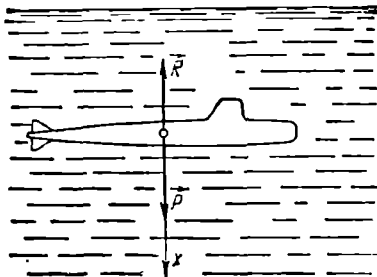
21.4- масала. e электр зарядига эга бўлган m массали заррача $E = A \sin kt$ кучланиш (A ва k — ўзгармас миқдорлар) бир жинсли электр майдонида ҳаракат қилади. Агар электр майдонида заррачага $\vec{E}$ кучланиш томонига йўналган $\vec{F} = e\vec{E}$ куч таъсир қилиши маълум бўлса, заррачанинг t вақтдан кейинги ҳаракат тезлиги аниқлансин. Оғирлик кучининг таъсири ҳисобга олинмасин. Заррачанинг бошланғич тезлиги нолга тенг.

Ечиш. Агар Ox ўқни $\vec{t}$ кучланиш (ўйича йўналтирсак, заррачага вақтнинг функциясида иборат ва x ўқ бўйича йўналган куч $F = eE = eA \sin kt$ таъсир этади (21.7- расм). $v_0 = 0$ эканлигини эътиборга олиб, (21.16) ни x ўққа проекциялаб, керакли тезликни топамиз:

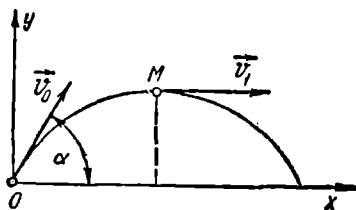
$$v = v_x = \frac{1}{m} \int_0^t F dt = \frac{eA}{m} \int_0^t \sin kt dt = -\frac{eA}{km} (\cos kt - 1).$$

21.5- масала. Тўхтаб турган сув ости кемаси озгина манфий p сузувчанлик олиб, илгариларо ҳаракат қилган сув остига чўқади. Кема кичик манфий сузувчанликка эга бўлганда сувнинг қаршилигини чўқиб тезлигининг биринчи даражасига пропорционал ва $k\sigma v$ га тенг деб қабул қилиш мумкин; бунда k — пропорционаллик коэффициент, σ — кема горизонтал проекциясининг юзи, v — сувга чўқиш тезлигининг миқдори. Кема массаси M га тенг. Кеманинг чўқиш тезлиги v аниқлансин. $t = 0$ бўлганда $v_0 = 0$.

Ечиш. x ўқни вертикал пастга йўналтирсак, сув ости кемасига танланган ўқ бўйлаб ўзгармас манфий сузувчанлик $\vec{p}$ ва унга қарама-қарши йўналган ва тезлигининг функциясида иборат қаршиллик кучи $R = k\sigma v$ таъсир этади (21.8- расм). Шу сабабли нуқта ҳаракат миқдорининг дифференциал кўринишдаги ўзгариши ҳақидаги (21.12) тенгламалар системасининг биринчисидан фойдаланамиз:



21.8- расм.



21.9- расм.

$$d(m v_x) = X dt$$

ёки берилган масала учун

$$d(M v) = (p - k \sigma v) dt.$$

Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб интегралласак, кеманинг чўкиш тезлигини топамиз:

$$\int_0^v \frac{d(M v)}{p - k \sigma v} = \int_0^t dt$$

ёки

$$\ln(p - k \sigma v) \Big|_0^v = - \frac{k \sigma t}{M},$$

бундан

$$v = \frac{p}{k \sigma} \left(1 - e^{-\frac{k \sigma t}{M}} \right).$$

21.6- масала. Снаряд бошланғич O ҳолатдан энг баланд M ҳолатга ўтганга қадар кетган вақт ичида унга таъсир қиладиган барча кучлар тенг таъсир этувчисининг импульси топилсин (21.9- расм).

Беришган: $v_0 = 500$ м/с, $\alpha_1 = 60^\circ$, $v = 200$ м/с, снаряднинг массаси $m = 100$ кг.

Ечиш. (21.17) дан фойдаланиб, барча кучлар тенг таъсир этувчиси импульсининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$S_x = m(v_x - v_{0x}) = 100(200 - 500 \cos 60^\circ) = -5000 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

$$S_y = m(v_y - v_{0y}) = 100(-500 \sin 60^\circ) = -43300 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

21.4- §. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

N та моддий нуқталардан ташкил топган система нуқталарига ички ва ташқи кучлар таъсир этсин. U ҳолда (21.3) да

$$m_v \frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = m_v \vec{w}_v = \frac{d}{dt} (m_v \vec{v}_v), \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

эканлигини назарда тутиб, системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dt}(m_v \vec{v}_v) = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i, \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (21.22)$$

(21.22) тенгламаларни қўшамиз:

$$\frac{d}{dt} \sum m_v \vec{v}_v = \sum \vec{F}_v^e + \sum \vec{F}_v^i,$$

бунда (21.5) га кўра $\sum m_v \vec{v}_v = \vec{Q}$ системанинг ҳаракат миқдорини билдиради. Ички кучларнинг хоссасига кўра $\sum \vec{F}_v^i = 0$ бўлади. $\sum \vec{F}_v^e = \vec{R}^e$ ташқи кучларнинг бош векторини ифодалашини назарда тутсак,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e \quad (21.23)$$

муносабат ўринли бўлади.

(21.23) тенглама система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг дифференциал кўринишидир. У қуйидагича ўқилади: *системанинг ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган биринчи ҳосила системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош векторига тенг.*

(21.23) тенгламада ички кучлар қатнашмайди. Ҳақиқатан ҳам ички кучлар система айрим нуқталарининг ҳаракат миқдори ўзгаришига таъсир этса-да, система ҳаракат миқдорининг ўзгаришига бевосита эмас, балки билвосита, ташқи кучлар орқали таъсир этади.

Масалан, автомобилли система деб қарасак, акселератор педалини босган сари (бунда ҳосил бўладиган куч ички кучдан иборат) автомобиль двигателининг айланишлар сони орта боради; агар автомобиль силлиқ муз устида турган бўлса, двигатель айланишлари ҳар қанча катта бўлса ҳам етакчи елдираклар билан муз устидаги ишқаланиш кучи (ташқи куч) кичик бўлганда автомобиль жойидан силжнмайди, яъни автомобилнинг ҳаракат миқдори нолга тенг бўлади. Лекин қуруқ ва равион асфальт йўлда ишқаланиш кучи етарли даражада катта бўлгани учун акселератор педалини босган сайин автомобиль тезроқ юра бошлайди, яъни унинг ҳаракат миқдори орта боради. Бу мисолда ички кучларнинг ташқи кучлар воситасида система ҳаракат миқдорининг ўзгаришига таъсир эта олиши намоён бўлади.

Қўпинча машина ва механизм қисмларига таъсир этувчи ички кучлар номаълум бўлади. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг амалий афзаллиги шундан иборатки, бу теоремани қўллашда ички кучлар бутунлай эътиборга олинмайди. Шу сабабли механик системани шундай танлаш керакки, натижада олдиндан номаълум бўлган кучларни ички кучлар қаторига киритишга эришиш зарур.

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан суюқлик ва газ динамикасида ҳамда ўзгарувчан массали жисм динамикасида самарали фойдаланилади.

Агар системага ташқи кучлар таъсир этмаса ёки ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса ($\vec{R}^e = 0$), (21.23) ни

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан

$$\vec{Q} = \overrightarrow{const} \quad (21.24)$$

муносабатни оламиз. Векторли интеграллаш доимийси $\overrightarrow{const}$ ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. Агар $t = 0$ да система-нинг нуқталари $\vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}, \dots, \vec{v}_{n0}$ тезликларга эга бўлса,

$$\overrightarrow{const} = \sum m_v \vec{v}_{v0} = \vec{Q}_0$$

тенгликка эришамиз, бунда $\vec{Q}_0$ системанинг бошланғич пайтдаги ҳаракат миқдори.

Шундай қилиб, 21.24 ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0. \quad (21.25)$$

(21.24) ёки (21.25) тенгликлар *механик система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни* деб аталади ҳамда система ҳаракат дифференциал тенгламалари (21.3) нинг биринчи векторли интеграллини ифодалайди. Бу тенгликлардан кўрамизки, *агар системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, системанинг ҳаракат миқдор вектори миқдор ва йўналиши жиҳатдан ўзгармас бўлади.*

(21.23) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг скаляр ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e, \quad (21.26)$$

(21.26) қуйидагича ўқилади: *система ҳаракат миқдорининг бирор ўқдаги проекциясидан вақт бўйича олинган ҳосила, системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.*

(21.23) тенгламанинг чап ва ўнг томонини dt га кўпайтириб, интегралласак:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 = \int_0^t \vec{R}^e dt. \quad (21.27)$$

(21.27) тенглама *система ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичида ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *система ҳара-*

кат миқдорининг чекли вақт ичида ўзгариши система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг шу вақт ичидаги импульсига тенг.

(21.27) ни қўзғалмас Декарт координата ўқларига проекциялаб, қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} Q_x - Q_{ox} &= \int_0^t R_x^e dt, \\ Q_y - Q_{oy} &= \int_0^t R_y^e dt, \\ Q_z - Q_{oz} &= \int_0^t R_z^e dt. \end{aligned} \right\} (21.28)$$

Шундай қилиб, чекли вақт ичида бирор қўзғалмас координата ўқлари бўйича система ҳаракат миқдорининг ўзгариши худди шу вақт ичида системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош вектори импульсининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг бўлади.

Агар ташқи кучлар бош векторининг бирор (масалан, Ox) ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса ($R_x^e = 0$), (21.28) нинг биринчисидан

$$Q_x - Q_{ox} = 0$$

тенгликни оламиз. Бинобарин,

$$Q_x = Q_{ox} = \text{const} \quad (21.29)$$

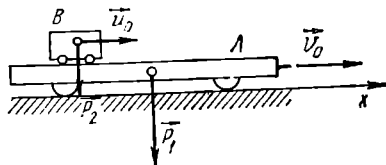
бўлади.

(21.29) тенглик берилган ўқ бўйича система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини ифодалайди: системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система ҳаракат миқдорининг мазкур ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади.

21.7 - масала. Инерцияси бўйича $\vec{v}_0$ тезлик билан ҳаракатланувчи горизонтал A платформа бўйлаб B тележка $\vec{u}_0$ нисбий тезлик билан ҳаракатланади (21.10-расм). Маълум вақтда тележка тормозланади. Агар M — платформа массаси, m — тележка массаси маълум бўлса, тележка тўхтагандан кейин унинг платформа билан биргаликдаги тезлиги аниқлансин.

Ечиш. x ўқи платформанинг ҳаракат йўналишида оламиз. Платформа ва тележкани система деб қарасак, система нуқталарига вертикал пастга йўналган $\vec{P}_1$ ва $\vec{P}_2$ оғирлик кучлари таъсир этади. Шу сабабли ташқи кучлар бош векторининг x ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлади, яъни $R_x^e = 0$.

У ҳолда x ўқ бўйича система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни (21.29) га асосан



21.10- рас.

$$Q_x = Q_{0x}$$

тенглик билан ифодаланади, бу ерда

$$Q_{0x} = m(v_0 + u_0) + Mv_0, \quad Q_x = (M + m)v$$

бўлгани учун қуйидаги ҳосил бўлади:

$$(M + m)v = m(v_0 + u_0) + Mv_0.$$

Бундан изланаётган тезликни топамиз: $v = v_0 + \frac{m}{M + m}u_0$.

21.5-§. Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани келтириб чиқарамиз.

(21.6) дан $\vec{Q}$ нинг қийматини (21.23) га қўямиз:

$$M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{R}^e \quad (21.30)$$

ёки

$$M \vec{w}_C = \vec{R}^e, \quad (21.31)$$

бу ерда $\vec{w}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt}$ — система массалар марказининг тезланиши.

(21.30) ёки (21.31) тенгламалар система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани ифодалайди: системанинг массалар маркази массаси бутун система массасига тенг ва система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори таъсиридаги моддий нуқта каби ҳаракатланади.

Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема ва система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремалар битта теореманинг турли кўринишларидир.

(21.30) ёки (21.31) тенгламаларда ички кучлар қатнашмайди. Шундан келиб чиқиб, ички кучлар система массалар марказининг ҳаракатини ўзгартира олмайди, деган натижани оламиз.

Агар ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса ($\vec{R}^e = 0$), (21.30) га кўра,

$$M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0,$$

бундан

$$\vec{v}_C = \overrightarrow{const}$$

бўлади. Бу тенглик система массалар маркази ҳаракатининг сақланиш қонунини ифодалайди: ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, системанинг массалар маркази тинч ҳолатда ёки тўғри чизиqli текис ҳаракатда бўлади. Агар системанинг массалар маркази бошланғич пайтда қўзғалмас бўлса ($\vec{v}_c = 0$), системанинг массалар маркази кейинчалик ҳам қўзғалмасдан қолади ($\vec{r}_c = \text{const}$).

(21.31) ни қўзғалмас Декарт координата ўқларига проекциялаб, қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$M\ddot{x}_c = R_x^e, \quad M\ddot{y}_c = R_y^e, \quad M\ddot{z}_c = R_z^e. \quad (21.32)$$

(21.32) тенгламалар система массалар марказининг қўзғалмас Декарт координата ўқларига нисбатан ҳаракат дифференциал тенгламаларини ифодалайди.

Агар ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлмай, унинг бирор (масалан, Ox) ўқдаги проекцияси нолга тенг, яъни

$$R_x^e = 0$$

бўлса, (21.32) га кўра

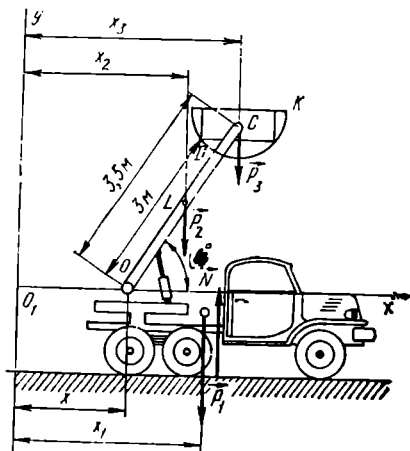
$$M \frac{d\dot{x}_c}{dt} = 0$$

ёки

$$\dot{x}_c = v_{cx} = \text{const} \quad (21.33)$$

бўлади. Бинобарин, системага таъсир этувчи кучлар бош векторининг бирор қўзғалмас ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система массалар маркази тезлигининг мазкур ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади. Агар бошланғич $t = 0$ пайтда система массалар маркази тезлигининг x ўқдаги проекцияси $(v_{cx})_0 = 0$ бўлса, кейинчалик ҳам $v_{cx} = 0$, бинобарин, $x_c = \text{const}$ бўлади, яъни системанинг массалар маркази бу ҳолда x ўқ бўйича кўчмайди. Бу натижа система массалар маркази координаталарининг сақланиш қонунини ифодалайди.

21.8- масала. Массаси 1000 кг га тенг автомашинага электр симларни ремонт қилишда ишлатиладиган қўзғалувчи айланма кран ўрнатилган. Кранинг осма каваси K расм текислигига перпендикуляр горизонтал O ўқ атрофида айланга оладиган L стерженьга бириктирилган (21.11-расм). Бошланғич



21.11- расм.

пайтда кран горизонтал ҳолда ва автомашина тинч ҳолатда бўлган. Агар кран $\alpha = 60^\circ$ бурчакка айланса, тормозланмаган машина қандай масофага силжийди? Бир жинсли L стерженнинг узунлиги 3 метр ва массаси 100 кг га тенг. Қажаванинг массаси 200 кг бўлиб, унинг массалар маркази O ўқдан $OC = 3,5$ м масофада жойлашган. Ҳаракатга кўрсатиладиган қаршилик кучи ҳисобга олинмасин.

Ечиш. Бу масалада автомашина L стержень ва K осма кажавадан ташкил топган учта жисмдан иборат системага эгамиз. Уларнинг огирлик кучлари мос равишда $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ га тенг, гилдиракларга нормал реакция кучларининг йиғиндисини $\vec{N}$ га тенг куч ҳам таъсир этади. Бу кучларнинг барчаси вертикал бўлгани учун уларнинг горизонтал x ўқдаги проекцияларининг йиғиндисини нолга тенг бўлади,

$$R_x^e = 0.$$

Шу сабабли (21.33) га кўра массалар маркази тезлигининг x ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади:

$$\dot{x}_C = v_{Cx} = \text{const.}$$

Бошланғич пайтда $v_{Cx} = 0$ бўлгани учун

$$x_C = \text{const} \quad (1)$$

бўлади.

(20.5) ни эътиборга олсак, (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20} + m_3 x_{30}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

ёки

$$m_1 (x_1 - x_{10}) + m_2 (x_2 - x_{20}) + m_3 (x_3 - x_{30}) = 0. \quad (2)$$

Бунда x_{10}, x_{20}, x_{30} автомашина, L стержень ва K кажава массалари марказининг бошланғич пайтдаги абсциссаларини; x_1, x_2, x_3 лар эса кран $\alpha = 60^\circ$ бурчакка кўтарилгандан кейинги абсциссаларини ифодалайди.

21.11-расмдан:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + x_{10}, & x_2 &= x + \frac{OD}{2} \cos \alpha, \\ x_3 &= x + OC \cos \alpha, & x_{20} &= \frac{OD}{2}, & x_{30} &= OC. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) ни (2) га қўйсак,

$$m_1 x_1 + m_2 \left[x + \frac{OD}{2} (\cos \alpha - 1) \right] + m_3 [x + OC (\cos \alpha - 1)] = 0.$$

$$x = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left[\frac{m_2 OD}{2} (1 - \cos \alpha) + m_3 OC (1 - \cos \alpha) \right] =$$

$$= \frac{1}{1000 + 100 + 200} \cdot \left(\frac{100 \cdot 3}{2} + 200 \cdot 3,5 \right) (1 - 0,5) = 0,327 \text{ м.}$$

21.6*- §. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани суюқликнинг стационар оқимиға татбиқи. Эйлер тенгламаси

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан туташ муҳитлар динамикасида ҳам фойдаланилади. Бу теоремани ўзгарувчан кесимга эга бўлган қувур ичида ҳаракатланувчи суюқликнинг стационар оқими учун қўллаемиз, яъни қувур деворига перпендикуляр ўтказилган бирор кесимдаги суюқлик зарраларининг тезликларини бир хил ва вақтга боғлиқ эмас деб қараймиз.

Қувур девори ҳамда s_1 ва s_2 кесимлар билан чегараланган ҳажмдаги суюқликка ҳажм кучлари (одатда, оғирлик кучлари) ва сирт кучлари (масалан, суюқликнинг қувур деворига ишқаланиш кучлари) таъсир этади.

Ташқи ҳажм кучларининг бош векторини $\vec{R}_x$ ва ташқи сирт кучларининг бош векторини $\vec{R}_c$ билан белгилаймиз.

Агар берилган ҳажмдаги суюқликнинг бирор пайтдаги ҳаракат миқдори $\vec{Q}$ га тенг бўлса, ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_x + \vec{R}_c \quad (21.34)$$

тенглик ўринли бўлади.

Айтайлик, суюқлик ўзгарувчан кесимга эга бўлган қувур бўйлаб ҳаракатлансин (21.12- расм). Суюқликнинг зичлигини (яъни бирлик ҳажмдаги массасини) ρ билан белгилайлик. У ҳолда s_1 кесимдаги суюқликнинг зичлиги ρ_1 га, s_2 кесимда эса ρ_2 га тенг бўлади. $\rho_1 v_1 s_1$ ва $\rho_2 v_2 s_2$ кўпайтмалар s_1 ва s_2 кесимлар орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтувчи суюқлик массаларини ифодалайди. Массанинг сақланиш қонунига кўра

$$\rho_1 v_1 s_1 = \rho_2 v_2 s_2$$

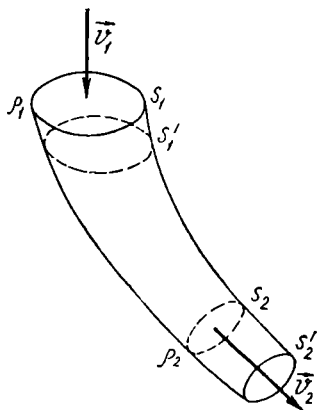
муносабат ўринли бўлади.

Исталган кесим орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтувчи суюқликнинг массасини M_c билан белгиласак, у қуйидагига тенг бўлади:

$$M_c = \rho_1 v_1 s_1 = \rho_2 v_2 s_2. \quad (21.35)$$

СИ бирликлар системасида M_c катталик $\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$ ўлчамга эга бўлади.

Айтайлик, t вақтда s_1 ва s_2 юзалар орасидаги суюқлик ҳажми τ га тенг бўлсин; $t + dt$ вақт ичида худди шу массага эга бўлган суюқлик s'_1 ва s'_2 кесимлар билан чегараланган ҳажмни ишғол этади (21.12- расм). Шундан келиб чиқиб, кўрпаяётган масса ҳаракат миқдорининг



21.12- расм.

ўзгариши s_1 ва s'_1 юзалар орасидаги суюқлик ҳаракат миқдорининг камайиши ҳамда s_2 ва s'_2 юзалар орасидаги суюқлик ҳаракат миқдорининг ортиши ҳисобига содир бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Суюқликнинг оқими стационар бўлганда s_1 ва s_2 кесимлар орқали dt вақт ичида $M_c dt$ суюқлик массаси ўтади ҳамда ҳаракат миқдорлари $M_c dt \vec{v}_1$ ва $M_c dt \vec{v}_2$ га тенг бўлади. dt вақт ичида ҳаракат миқдорининг ўзгаришини $d\vec{Q}$ билан белгиласак,

$$d\vec{Q} = M_c dt \vec{v}_2 - M_c dt \vec{v}_1$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M_c \vec{v}_2 - M_c \vec{v}_1 \quad (21.36)$$

муносабатни оламиз. Бу тенгламадаги $M_c \vec{v}_1$ ва $M_c \vec{v}_2$ кўпайтмалар вақт бирлиги ичидаги s_1 ва s_2 кесимлардаги ҳаракат миқдорини ифода қилади.

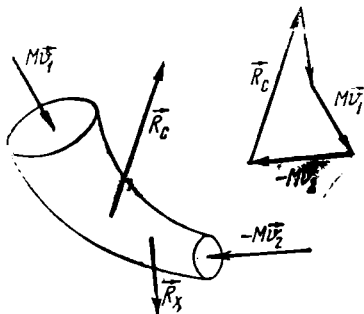
(21.36) ни (21.34) га қўйиб, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$M_c \vec{v}_1 - M_c \vec{v}_2 + \vec{R}_x + \vec{R}_c = 0. \quad (21.37)$$

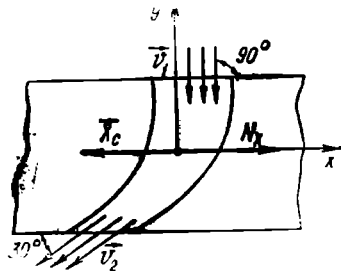
(21.37) тенглама Эйлер тенгламасини ифода қилади: қувурнинг иккита ихтиёрли кесими орқали оқиб ўтувчи суюқликнинг шу кесимлар орасидаги вақт бирлигидаги ҳажмнинг ички томонига йўналган ҳаракат миқдорлари ҳамда ҳажм ва сирт кучлари бош векторларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлади (21.13-расм).

21.9-масала. Қирқими ўзгариб борадиган қўзғалмас каналга горизонтга $\alpha = 90^\circ$ бурчак остида $v_1 = 2$ м/с тезлик билан сув кирмоқда; канал вертикал текисликка нисбатан симметрик бўлиб, сув кирадиган жойидаги қирқими $s_1 = 0,02$ м²; сувнинг капалдан чиқиш жойидаги тезлиги $v_2 = 4$ м/с бўлиб, горизонтга $\alpha = 30^\circ$ бурчак остида йўналган. Канал деворида сув ҳосил қиладиган реакциянинг горизонтал тузувчиси аниқлансин (21.14-расм).

Ечиш. Координата ўқларини 21.14-расмдагидек йўналтирамиз. Канал бўйлаб оқаётган сув зарраларига ҳар онда оғирлик кучи ва канал деворида ҳосил бўладиган реакция кучи таъсир этади. Оғирлик кучлари ҳажм кучларидан иборат



21.13- расм.



21.14- расм.

бўлиб, уларнинг бош вектори каналнинг берилган ҳажминини ишғол этган сувнинг сферлик кучига тенг ва вертикал бўйлаб йўналишни учун унинг горизонтал ўқдаги проекцияси нолга тенг ($X_x = 0$).

Канал деворида сув ҳосил қиладиган реакциянинг горизонтал тузувчиси N_x канал деворида ҳосил бўладиган сирт кучларидан иборат реакция кучи бош векторининг горизонтал ташкил этувчиси $\vec{X}_c$ га миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади. Каналга кирувчи сувнинг v_1 тезлиги x ўқига перпендикуляр ва каналдан чиқувчи сувнинг тезлиги эса x ўқ билан 30° бурчак ташкил этишини назарда тутиб, (21.38) нинг биринчи тенгламасини қўйадиганча тузамиз:

$$M_c v_1 \cos 90^\circ - M_c v_2 \cos 30^\circ + X_c = 0$$

$$\text{ёки } X_c = N_x, \quad M_c = \rho_1 s_1 v_1 = \frac{\gamma}{g} s_1 v_1, \quad \gamma = 9803,92 \text{ Н/м}^3 \text{ бўлгани учун}$$

$$N_x = \frac{\gamma}{g} s_1 v_1 v_2 \cos 30^\circ = \frac{9803,92}{9,81} \cdot 0,02 \cdot 2,4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 138 \text{ Н бўлади.}$$

21.7-§. Ўзгарувчан массали жисм ҳақида тушунча

Назарий механикада асосан массалари ўзгармас бўлган система ва жисмларнинг ҳаракати ўрганилади. Лекин жисмлар ҳаракатланганда унга моддий зарраларнинг қўшилиши ёки ажралиши натижасида жисмларнинг массаси сезиларли даражада ўзгаришига кўплаб мисоллар келтириш мумкин. Масалан, ракета актив участкада ҳаракатланганда ёқилғи ёниб, ундан ажралиши натижасида ракетанинг массаси камая боради; айсбергларнинг эриши (ёки музлаши) натижасида уларнинг массаси камаяди ёки ортади; барабанга қоғоз, ип ёки кабелнинг ўралиши натижасида унинг массаси ортади ва ҳ.к. 1969 йил 16 июлда «Сатурн-5» ракетаси ёрдамида АҚШда учрилган «Аполлон-11» космик кеманинг старт ҳолатидаги массаси 2 950 000 кг; Ойдан Ерга қайтиб тушган бошқариш кабинасининг массаси 5561,5 кг бўлган*). Бундан кўрамизки, космик кема массаси бошланғич пайтдаги миқдорига нисбатан 99,81 % га камайган.

Жисм массаси ўзгаришининг ўзига хос хусусиятларини ўрганишдан аввал ўзгарувчан массали жисм тушунчасини киритамиз.

Вақт ўтиши билан моддий зарраларнинг қўшилиши ёки ажралиши натижасида массаси узлуксиз равишда ўзгарадиган жисм *ўзгарувчан массали жисм* дейилади. Агар ўзгарувчан массали жисм илгариланган ҳаракатда бўлса, бундай жисмни ўзгарувчан массали нуқта деб қараш мумкин.

* Левантовский В. И. Механика космического полета в элементарном изложении. М.: Наука, 1980, 278, 280 б.

21.8-§. И. В. Мешчерский тенгламаси

Ўзгарувчан массали нуқта учун ўзгармас массали нуқта динамикасининг асосий қонунини бевосита қўллаш мумкин эмас.

Ёқилғи сарф бўлиши натижасида массаси узлуксиз равишда камайиб боровчи ракетани моддий нуқта деб қараб, унинг актив участкадаги ҳаракат дифференциал тенгламасини чиқарамиз. Ракета массаси $M(t)$ ни вақтнинг узлуксиз дифференциалланувчи функцияси-дан иборат деб қараймиз. Ракетанинг ҳаракатини бирор қўзғалмас *Охуз* координаталар системасига нисбатан текшираимиз. Ажралувчи зарраларнинг ракетага кўрсатадиган босим кучини ички куч деб оламиз, яъни ракета ва ундан ажралувчи зарраларни битта механик система деб қараймиз.

Айтайлик, бирор t пайтда ракетанинг массаси $M = M(t)$ ва тезлиги $\vec{v}$ га тенг бўлсин. Шу пайтдаги ракетанинг ҳаракат миқдори

$$\vec{Q}_0 = M \vec{v}$$

бўлади. dt вақт ичида ракетадан абсолют тезлиги $\vec{u}$ га тенг dM массали зарралар ажралсин. Ракетанинг массаси M камаювчи функция-дан иборат бўлгани учун $dM < 0$ ва $|dM| = -dM$. $t + dt$ вақтдан кейин система (ракета ва ундан ажралган зарралар) нинг ҳаракат миқдори қуйидагича аниқланади:

$$\vec{Q} = [M - (-dM)] \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) - dM \cdot \vec{u}.$$

dt вақт ичида ҳаракат миқдорининг ўзгаришини $d\vec{Q}$ билан белгиласак,

$$d\vec{Q} = \vec{Q} - \vec{Q}_0$$

ёки

$$\begin{aligned} d\vec{Q} &= (M + dM) (\vec{v} + d\vec{v}) - dM \cdot \vec{u} - M \vec{v} = \\ &= M d\vec{v} + dM (\vec{v} - \vec{u}) + dM \cdot d\vec{v}. \end{aligned} \quad (21.39)$$

Агар ракетага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори $\vec{F}$ билан белгиланса, система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги (21.23) тенгламага кўра,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}. \quad (21.40)$$

(21.39) ни (21.40) га қўйиб, dM $d\vec{v}$ иккинчи тартибли кичик миқдорни эътиборга олмасак,

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dM}{dt} (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{F} \quad (21.41)$$

ёки $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u}_r$ — ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги эканлигини эътиборга олсак,

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}_r \frac{dM}{dt} \quad (21.42)$$

тенгламани оламир.

(21.41) ёки (21.42) тенгламалар *ўзгарувчан массали нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини* ифодалайди. Бу тенглама И.В. Мещерский тенгламаси дейилади.

(21.42) да

$$\vec{u}_r \frac{dM}{dt} = \vec{\Phi} \quad (21.43)$$

катталиқ куч ўлчамига эга бўлади; $\frac{dM}{dt}$ катталиқ вақт бирлиги ичидаги ёқилғи массасининг ўзгаришини ифодалайди. $\vec{\Phi}$ куч зарраларнинг ракетадан $\vec{u}_r$ нисбий тезлик билан ажралиши натижасида ҳосил бўлади ва *реактив куч* дейилади.

(21.43) ни эътиборга олиб, (21.41) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi}. \quad (21.44)$$

(21.44) тенгламадан кўрамизки, *ҳар онда ўзгарувчан массали нуқта массасини унинг тезланишига кўпайтмаси мазкур нуқтага таъсир этувчи ташқи кучлар бош вектори билан реактив кучнинг геометрик йиғиндисига тенг.*

Агар ажралувчи зарраларнинг абсолют тезлиги $\vec{u}$ нолга тенг бўлса, (21.41) ни

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{dM}{dt} \vec{v}$$

ёки

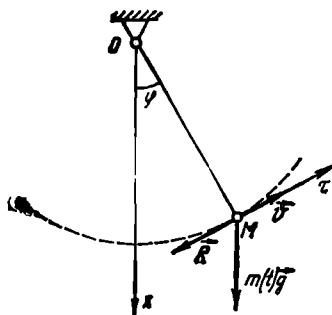
$$\frac{d}{dt} (M \vec{v}) = \vec{F} \quad (21.45)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бинобарин, агар ажралувчи зарраларнинг абсолют тезлиги нолга тенг бўлса, ўзгарувчан массали нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси (21.45) билан Ньютоннинг иккинчи қонунини ифодаловчи (15.4) тенгламалар бир хил кўринишга эга бўлади.

Шунингдек, ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги $\vec{v}_r = \vec{u} - \vec{v}$ бўлса, (21.42) дан

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (21.46)$$

тенгламани оламир.



21.15- расм.

Шундай қилиб, ракетадан ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги нолга тенг бўлса, ўзгармас массали нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси (16.1) билан ўзгарувчан массали нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси (21.46) бир хил кўринишга эга бўлади. Лекин (21.43) ва (21.46) тенгламаларда массанинг ўзгарувчан эканлигини назарда тутиш керак.

Ўзгарувчан массали жисмнинг ҳаракатига оид масалаларни ечишда (21.41), (21.42) ва (21.44) тенгламаларнинг Декарт координата ўқлари ёки табиий

координата ўқларидаги проекцияларидан фойдаланилади.

21.10-масала. Узуниги l га тенг ва массаси $m = m(t)$ қонун асосида ўзгарувчи ҳамда бурчак тезликка пропорционал бўлган $R = \beta \dot{\varphi}$ қаршилик кучи таъсиридаги тебрангичнинг ҳаракат тенгламаси тузилсин. Тебрангичдан ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги нолга тенг деб қаралсин.

Ечиш. Тебрангичга унинг оғирлик кучи $m(t) \vec{g}$ ва тезликка қарама-қарши йўналган муҳитнинг қаршилик кучи $\vec{R}$ таъсир этади (21.15-расм). Ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги $\vec{u}_r = 0$ бўлгани учун $\vec{\Phi} = 0$.

(21.44) ни M нуқтадан ҳаракат траекториясига ўтказилган уринмага проекциялаймиз:

$$M \frac{dv}{dt} = F_{\tau} + \Phi_{\tau}. \quad (1)$$

Масала шартига кўра $M = m(t)$, $F_{\tau} = -m(t) g \sin \varphi + R_{\tau} = -m(t) g \sin \varphi -$

$-\beta \dot{\varphi}$, $\Phi_{\tau} = 0$ бўлгани учун (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -m(t) g \sin \varphi - \beta \dot{\varphi}$$

Бунда $v = l \dot{\varphi}$ бўлгани учун тебрангичнинг ҳаракат дифференциал тенгламасини

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{\beta}{m(t) l} \dot{\varphi}$$

ёки

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{m(t) \cdot l} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин.

21.9-§. Циолковский формуласи

Ернинг тортиш кучи ва ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмай, ракетанинг фақат реактив куч таъсиридаги ҳаракатини текшираемиз. Ёқилғи ёниши натижасида ракетадан ажралувчи зарраларнинг абсолют тезлиги $\vec{u}_r$ миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлиб, ра-

Ракетанинг тезлиги $\vec{v}$ га қарама-қарши йўналган деб қараймиз ва ёқилғи ёниб бўлган пайтдаги ракетанинг тезлигини аниқлаймиз. x ўқ-ни ракета ҳаракати бўйича йўналтирамиз ва $\vec{F} = 0$ эканлигини назарда тутиб, (21.42) ни бу ўққа проекциялаймиз:

$$M \frac{dv}{dt} = - \frac{dM}{dt} u_r$$

ёки

$$dv = - u_r \frac{dM}{M}$$

Бу тенгламани интеграллаймиз:

$$\int_{v_0}^v dv = - u_r \int_{M_0}^M \frac{dM}{M},$$

$$v = v_0 + u_r \ln \frac{M_0}{M}, \quad (21.47)$$

бунда v_0 , M_0 — ракетанинг бошланғич пайтдаги тезлиги ва массаси.

Агар ракета корпусининг массасини M_k , ёнилғи массасини M_g билан белгиласак, ракетанинг бошланғич пайтдаги массаси $M_0 = M_k + M_g$, ёқилғи ёниб бўлгандан кейинги массаси $M = M_k$ бўлади. Ёқилғи ёниб бўлган пайтда, яъни актив участка охирида ракета энг катта тезликка эришади ва бу тезлик (21.47) га асосан

$$v_{max} = v_0 + u_r \ln \left(1 + \frac{M_g}{M_k} \right) \quad (21.47')$$

формуладан аниқланади.

Циолковский сони деб аталадиган

$$z = \frac{M_0}{M_k} \quad (21.48)$$

катталиқни киритсак, (21.47') ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$v_{max} = v_0 + u_r \ln z. \quad (21.49)$$

Бу формула *Циолковский формуласи* дейилади.

(21.49) дан кўрамизки, актив участка охирида ракетанинг тезлиги унинг бошланғич тезлиги v_0 га, ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги u_r га, Циолковский сони z га боғлиқ бўлади. Бундан ракетанинг максимал тезлиги ёқилғининг тез ёки секин сарфланишига боғлиқ бўлмайди, деган хулосага келамиз.

(21.49) дан кўрамизки, v_0 , u_r ва z ортган сари ракета тезлиги ҳам орта боради. Ернинг сунъий йўлдошларини учиришда v_0 ни ошириш учун кўп босқичли ракетадан фойдаланилади. Бирор босқичдаги ёқилғи ёниб бўлгач, бу босқич ракетадан автоматик тарзда

ажралади ва ракета қўшимча бошланғич тезлик олади. u_r ва z ларни ошириш ракета конструкцияси ва ёқилғи турига боғлиқ.

Агар ракетанинг бошланғич тезлиги нолга тенг бўлса, (21.47') ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$v_{max} = u_r \ln z. \quad (21.50)$$

Бу формула ҳам Циолковский формуласи деб аталади. (21.50) дан

$$z = e^{\frac{v}{u_r}} \quad (21.51)$$

муносабатни олампиз.

21.11-масала. Уч босқичли ракета илгарилама ҳаракат қилади, унга Ернинг тортиш кучи ва атмосфера қаршилиғи таъсир этмайди. Ҳар бир босқич учун ажралиш эффектив тезлиги ва Циолковский сони бир хил бўлиб, $v_e = 2500$ м/с, $z = 4$. Биринчи, иккинчи ва учинчи босқичларда ёқилғи ёниб тулаган пайтдаги ракетанинг тезликлари аниқлансин.

Изоҳ. Ернинг тортиш кучи ва атмосферанинг қаршилиғи ҳисобга олинмаган ҳолда ракета учун ажралиш эффектив тезлиги $\vec{v}_e$ ва ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги $\vec{u}_r$ ўзаро тенг бўлади ($\vec{v}_e = \vec{u}_r$).

Ечиш. Изланаётган тезликларни v_1 , v_2 , v_3 билан белгиласак, (21.50) ва (21.49) Циолковский формулаларига кўра

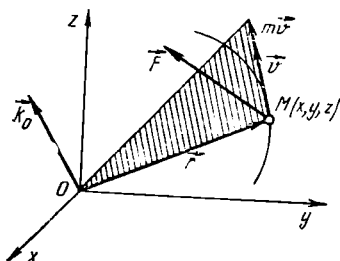
$$v_1 = v_e \ln z = 2500 \cdot \ln 4 = 3465 \text{ м/с},$$

$$v_2 = v_1 + v_e \ln z = 3465 + 2500 \ln 4 = 6930 \text{ м/с},$$

$$v_3 = v_2 + v_e \ln z = 6930 + 2500 \ln 4 = 10395 \text{ м/с}.$$

21.10-§. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг моменти ва системанинг кинетик моменти

Массаси m , ҳаракат тезлиги $\vec{v}$ га тенг M нуқтанинг бирор O марказга нисбатан радиус-вектори $\vec{r}$ га тенг бўлсин. O марказга нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти деб,



21.16- расм.

$$\vec{k}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (21.52)$$

га тенг вектор катталиқка айтилади (21.16- расм).

M нуқта ҳаракат миқдорининг моменти $\vec{k}_O$ момент маркази O нуқтага қўйилади.

Координаталар бошини O марказда олиб, қўзғалмас x , y , z ўқларни ўтказсак, (21.52) ни

$$\vec{k}_O = \vec{M}_O (\vec{m}\vec{v}) = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглик-ни координата ўқларига проекциялаб, ўқларга нисбатан ҳаракат миқдорининг моментларини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= M_x (\vec{m}\vec{v}) = m (y\dot{z} - z\dot{y}), \\ k_y &= M_y (\vec{m}\vec{v}) = m (zx - x\dot{z}), \\ k_z &= M_z (\vec{m}\vec{v}) = m (xy - y\dot{x}). \end{aligned} \right\} (21.52')$$

СИ бирликлар системасида ҳаракат миқдорининг моменти $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ ёки $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ билан ўлчанади.

Механик система барча нуқталарининг O марказга нисбатан ҳаракат миқдори моментларининг геометрик йиғиндиси

$$\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O (m_v \vec{v}_v) = \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v \quad (21.53)$$

га тенг вектор системанинг O марказга нисбатан кинетик моменти ёки система ҳаракат миқдорининг бош моменти дейилади.

Системанинг кинетик моменти $\vec{K}_O$ момент маркази O нуқтага қўйилади.

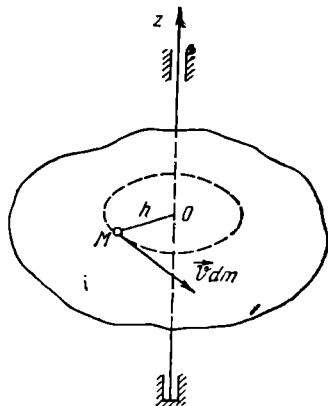
Агар механик система нуқталари бирор ҳажм (сирт ёки чизиқ) бўйича узлуксиз тақсимланган бўлса, у ҳолда (21.53) да йиғинди ўрнига массанинг қандай тақсимланишига мос интеграл олинади.

(21.53) ни координата ўқларига проекциялаб, мос ўқларга нисбатан системанинг кинетик моментини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \sum M_x (m_v \vec{v}_v) = \sum m_v (y_v \dot{z}_v - z_v \dot{y}_v), \\ K_y &= \sum M_y (m_v \vec{v}_v) = \sum m_v (z_v \dot{x}_v - x_v \dot{z}_v), \\ K_z &= \sum M_z (m_v \vec{v}_v) = \sum m_v (x_v \dot{y}_v - y_v \dot{x}_v). \end{aligned} \right\} (21.53')$$

Системанинг ҳаракат миқдори унинг массалар маркази билан биргаликдаги илгариллама ҳаракатини (21.2-§ га мувофиқ), кинетик моменти эса унинг айланма ҳаракатини характерлайди.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айланиш ўқиға нисбатан кинетик моменти. z ўқ атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан айланувчи жисмнинг z ўқиға нисбатан кинетик моменти K_z ни ҳисоблаймиз (21.17-расм). Бунинг учун жисмдан массаси dm га тенг M бўлакчасини ажратамиз ва унн моддий нуқта деб қараймиз. Жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланганда бу бўлакча маркази айланиш ўқидаги O нуқтада ётувчи ва радиуси h га тенг айлана бўйлаб ҳа-



21.17- расм.

ракатланади. M нуқтанинг тезлиги $\vec{v}$ мазкур айланага M нуқтада ўтказилган уринма бўйлаб йўналгани учун $\vec{v} dm$ ҳам уринма бўйлаб йўналади. Шу сабабли z ўққа нисбатан M бўлакчанинг ҳаракат миқдори $\vec{v} dm$ нинг моменти $k_z = M_z(\vec{v} dm) = v dm h = \omega h^2 dm$ га тенг бўлади. Бутун жисмнинг кинетик моменти эса $K_z = \int_{(M)} \omega h^2 dm = \omega \int_{(M)} h^2 dm$ га тенг бўлади.

(20.8) га кўра, $\int_{(M)} h^2 dm = I_z$ бўлганидан қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$K_z = I_z \cdot \omega. \quad (21.54)$$

Демак, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айланиш ўқиға нисбатан кинетик моменти жисмнинг мазкур ўққа нисбатан инерция моменти билан бурчак тезлигининг кўпайтмасига тенг.

Агар система қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи бир неча жисмдан ташкил топган бўлса, унинг кинетик моменти

$$K_z = I_{12} \omega_1 + I_{22} \omega_2 + \dots + I_{n2} \omega_n \quad (21.55)$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Бунда $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ лар ҳар бир жисмнинг бурчак тезлигини; $I_{12}, I_{22}, \dots, I_{n2}$ лар эса жисмларнинг z ўққа нисбатан инерция моментларини ифодалайди.

21.11-§. Нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

M нуқтанинг массаси m га тенг бўлиб, $\vec{F}$ куч таъсирида $\vec{v}$ тезлик билан ҳаракатлансин. Бундай нуқта учун динамиканинг асосий қонунини (16.1) га асосан $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ кўринишда ёзиш мумкин.

Бу тенгламанинг ҳар иккала томонини нуқтанинг радиус-вектори $\vec{r}$ га векторли кўпайтирамиз

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (21.56)$$

Тенгламанинг чап томонидаги ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m \vec{v}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times m \vec{v}.$$

Аммо $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$; $\vec{v} \times m \vec{v}$ вектор кўпайтма нолга тенг. Шу сабабли $\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m \vec{v})$ тенглик ўринли бўлади. Натижада (21.56) дан

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (21.57)$$

тенгламани оламиз.

(21.52) га кўра $\vec{k}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$ вектори нуқтанинг O марказга нисбатан ҳаракат миқдори моментини ифодалайди.

Статика бўлимида кўрганимиздек, (6.1) га кўра $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ M нуқтага қўйилган $\vec{F}$ кучнинг O марказга нисбатан моментини ифодалайди.

Шундай қилиб.

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \quad (21.58)$$

ёки

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) \quad (21.59)$$

тенглама ўринли бўлади.

(21.58) ёки (21.59) тенгламалар нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги қуйидаги теоремани ифодалайди: *моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас марказга нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу марказга нисбатан моментига тенг.*

(21.59) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, нуқта ҳаракат миқдорининг координата ўқларига нисбатан моментлари ўзгариши ҳақидаги теоремани оламиз:

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\vec{F}), \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y(\vec{F}), \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z(\vec{F}), \quad (21.60)$$

яъни *моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу ўққа нисбатан моментига тенг.*

Координата ўқларига нисбатан кинетик моментнинг ифодаси (21.52) ва кучнинг ўққа нисбатан momenti учун ўринли бўлган (6.9) ларни назарда тутиб, (21.60) нп қуйидагича ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d}{dt} (yz - zy) &= yZ - zY, \\ m \frac{d}{dt} (zx - xz) &= zX - xZ, \\ m \frac{d}{dt} (xy - yx) &= xY - yX. \end{aligned} \right\} \quad (21.61)$$

Нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллашга мисол тариқасида нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракатини кўриб чиқамиз.

21.12- §. Нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракати. Юзалар қонуни

Таъсир чизиги ҳамиша фазонинг бирор қўзғалмас нуқтаси орқали ўтувчи куч *марказий куч* дейилади. Масалан, Ерга ҳамиша Қуёш марказига йўналган унинг тортиш кучи таъсир этади.

М нуқтага $\vec{F}$ марказий куч таъсир этсин (21.18- расм). $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиги ҳамиша O нуқтадан ўтгани туфайли унинг шу нуқтага нисбатан моменти нолга тенг бўлади. Бинобарин, (21.59) га асосан

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = 0,$$

яъни, O марказга нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти ўзгармас вектордан иборат бўлади:

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{const} = \vec{c}. \quad (21.62)$$

Бу тенглама *нуқта ҳаракат миқдори моментининг сақланиши ҳақидаги қуйидаги қонунни* ифодалайди: *марказий куч таъсиридаги нуқта ҳаракат миқдорининг куч марказига нисбатан моменти ўзгармасдан қолади.*

(21.62) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, нуқта ҳаракат дифференциал тенгламаларининг учта скаляр биринчи интегралини оламиз:

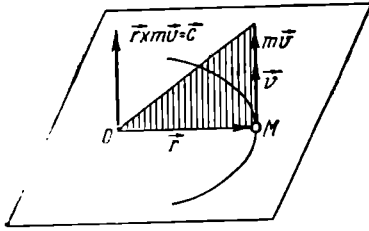
$$\left. \begin{aligned} m(\dot{y}z - z\dot{y}) &= C_1, \\ m(\dot{z}x - x\dot{z}) &= C_2, \\ m(\dot{x}y - y\dot{x}) &= C_3, \end{aligned} \right\} \quad (21.63)$$

бунда C_1 , C_2 , C_3 лар интеграллаш донмийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

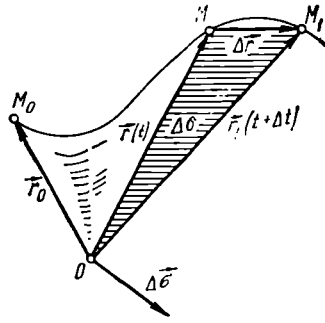
(21.62) га қуйидагича геометрик интерпретация бериш мумкин: $\vec{r}$ ва $\vec{v}$ ётган текисликка ҳар онда перпендикуляр йўналган $\vec{r} \times m\vec{v}$ вектори ҳамиша ўзгармас йўналишга эга бўлади. Шу сабабли $\vec{r}$ ва $\vec{v}$ векторлари доимо O марказдан ўтувчи бир текисликда ётади. Бинобарин, *марказий куч таъсиридаги нуқтанинг траекторияси бир текисликда ётувчи эгри чизиқдан иборат бўлади.* Бу эгри чизик бўйича ҳаракат қандай қонун асосида содир бўлишини аниқлаш учун нуқтанинг *сектор тезлиги* тушунчасини киритамиз.

Айтайлик, t вақтда нуқта ўз траекториясида M ҳолатни, $t + \Delta t$ вақтда M_1 ҳолатни эгалласин (21.19- расм). Агар OMM_1 учбурчак юзини $\Delta\sigma$ билан белгиласак, расмдан $\Delta\sigma$ юза $\vec{r}$ радиус-вектор билан $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ кўчиш вектори векторли кўпайтмаси модулининг ярмига тенг бўлишига ишонч ҳосил қиламиз:

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{r}|.$$



21.18- расм.



21.19- расм.

Қуйидаги формула ёрдамида аниқланадиган

$$\Delta \vec{\sigma} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \Delta \vec{r}) \quad (21.64)$$

$\Delta \vec{\sigma}$ юза векторини киритамиз.

Юза вектори $\Delta \vec{\sigma}$ нинг шу юзага мос Δt вақт ораллиғига нисбатининг $\Delta t \rightarrow 0$ даги лимити *нуқтанинг O марказга нисбатан сектор тезлиги* дейилади.

Шундай қилиб, сектор тезлиги учун

$$\vec{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta t}$$

ёки

$$\vec{v}_\sigma = \frac{d \vec{\sigma}}{dt}$$

формула ўринли бўлади.

Сектор тезлиги $\vec{v}_\sigma$ ни нуқтанинг тезлиги $\vec{v}$ орқали ифодалаш учун (21.64) нинг иккала томонини Δt га бўлиб, $\Delta t \rightarrow 0$ да лимитга ўтамыз:

$$\vec{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v})$$

ёки

$$2 \vec{v}_\sigma = \vec{r} \times \vec{v} = M_O(\vec{v}). \quad (21.65)$$

Бинобарин, *нуқтанинг бирор марказга нисбатан иккиланган сектор тезлиги шу нуқта тезлигининг мазкур марказга нисбатан моментиغا тенг.*

Агар нуқта бир текисликда ҳаракатланса, у ҳолда қутб координаталарини киритиб, сектор тезлигининг миқдори учун ушбу формулани оламиз:

$$\vec{v}_\sigma = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} r v_p = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \quad (21.66)$$

(21.65) нинг иккала томонини m га кўпайтирсак,

$$2 m \vec{v}_\sigma = \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{k}_O$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликни (21.62) билан солиштириб,

$$\vec{k}_O = 2 m \vec{v}_\sigma = \vec{\text{const}} \quad (21.67)$$

бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, марказий куч таъсиридаги нуқтанинг сектор тезлиги ўзгармас бўлади, яъни нуқтанинг радиус-вектори иккита бир хил вақт оралиғида ўзаро тенг юзалар чизади. Бу натижа *юзалар қонуни* дейилади. Юзалар қонуни планеталар ҳаракати учун ўринли бўлиб, Кеплер қонунларидан бирини ифодалайди.

Агар 21.20-расмда тасвирланган эллипс бирор планетанинг орбитасини ифодаласа ҳамда унинг O фокусида Қуёш ётса, у ҳолда перигелий деб аталадиган Π нуқтада планета энг катта $\vec{v}_\Pi$ тезликка, афелий деб аталадиган A нуқтада энг кичик $\vec{v}_A$ тезликка эга бўлади. Бу натижани $\vec{v}_\Pi$ ва $\vec{v}_A$ тезликларнинг O нуқтага нисбатан моментларининг тенглигидан келтириб чиқариш мумкин:

$$v_\Pi \cdot O\Pi = v_A \cdot OA.$$

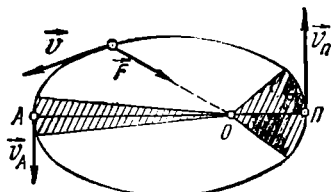
(21.66) ни назарда тутиб, (21.67) га кўра юзалар қонуни яна қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$m r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

ёки

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{const}. \quad (21.68)$$

Агар нуқтага таъсир этувчи нолдан фарқли $\vec{F}$ куч бутун ҳаракат давомида z ўққа параллел бўлса ёки унинг таъсир чизиги z ўқни кесиб ўтса, y ҳолда $M_z(\vec{F}) = 0$ ва (21.60) нинг учинчи тенгламасига кўра



21.20- расм.

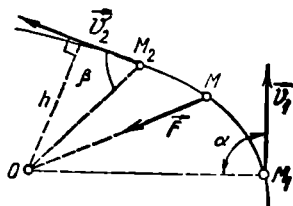
ёки

$$\frac{dk_z}{dt} = 0$$

$$k_z = M_z(m \vec{v}) = \text{const} \quad (21.69)$$

бўлади, яъни *нуқтага таъсир этувчи кучнинг бирор қўзғалмас ўққа*

нисбатан моменти ҳаммша нолга тенг бўлса, у ҳолда нуқтанинг шу ўққа нисбатан кинетик моменти ўзгармасдан қолади. Бу хулоса нуқта кинетик моментининг берилган ўққа нисбатан сақланиш қонунини ифодалайди.



21.21- расм.

21.12- масала. M нуқта таъсир чизиги доимо O нуқтадан ўтадиган марказий $\vec{F}$ куч таъсирида ҳаракатланади. Агар M_1 ҳолатда нуқтанинг тезлиги $v_1 = 4$ м/с бўлса, $\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{3}{2}$ шартни қа-

ноатлантирувчи нуқтанинг M_2 ҳолатдаги тезлиги v_2 аниқлансин. M_1 нуқтада $\vec{v}_1$ билан $\vec{F}$ орасидаги бурчак $\alpha = 90^\circ$, M_2 нуқтада $\vec{v}_2$ билан $\vec{F}$ куч орасидаги бурчак $\beta = 60^\circ$ (21.21- расм). M нуқтанинг оғирлик кучи эътиборга олинмасин.

Ечиш. M нуқта учун O нуқтадан расм текислигига перпендикуляр равнишда ўтувчи z ўққа нисбатан нуқта кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаймиз. (21.60) нинг учинчи тенгламасига кўра

$$\frac{dk_z}{dt} = M_z(\vec{F}).$$

$M_z(\vec{F}) = 0$ бўлгани учун k_z ўзгармас бўлади. Шу сабабли

$$k_{1z} = k_{2z}. \quad (1)$$

Бунда $k_{1z} = mv_1$. OM_1 — нуқтанинг M_1 ҳолатдаги кинетик моменти; $k_{2z} = mv_2 h = mv_2 OM_2 \sin \beta$ — нуқтанинг M_2 ҳолатдаги кинетик моменти. k_{1z} ва k_{2z} ларнинг қийматларини (1) га қўйсак,

$$mv_1 OM_1 = mv_2 \cdot OM_2 \sin \beta,$$

бундан

$$v_2 = \frac{OM_1}{OM_2} \cdot \frac{v_1}{\sin \beta} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6,93 \text{ м/с.}$$

21.13- §. Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

N та нуқтадан ташкил топган механик система нуқталарига қўйилган барча боғланишларни боғланиш реакция кучлари билан алмаштириб, система нуқталарига таъсир этувчи барча кучларни (жумладан, боғланиш реакция кучларини ҳам) $\vec{F}_v^e$ ташқи ва $\vec{F}_v^i$ ички кучларга ажратамиз. Натижада бундай система нуқталарини эркин деб қараб, уларнинг ҳар бири учун кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги (21.58) теоремани қўллаш мумкин:

$$\frac{d}{dt} \vec{M}_O(m_v \vec{v}_v) = \vec{M}_O(\vec{F}_v^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_v^i), \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

Бу тенгламаларни қўшсак,

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{M}_O (m_v \vec{v}_v) = \sum \vec{M}_O (\vec{F}_v^e) + \sum (\vec{M}_O (\vec{F}_v^i)) \quad (21.70)$$

тенглик ўринли бўлади.!

(21.70) да (21.53) га кўра $\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O (m_v \vec{v}_v)$ системанинг кинетик моментини ифодалайди.

Барча ташқи кучларнинг O нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг

$$\vec{M}_O^e = \sum \vec{M}_O (\vec{F}_v^e) \quad (21.71)$$

катталиқ *ташқи кучларнинг O нуқтага нисбатан бош моменти дейилади.*

(20.2) га кўра барча ички кучларнинг O нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисини нолга тенг:

$$\sum \vec{M}_O (\vec{F}_v^i) = 0.$$

Шундай қилиб, (21.70) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e. \quad (21.72)$$

Олинган тенглама система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги ушбу теоремани ифодалайди: *системанинг бирор қўзғалмас нуқтага нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг шу марказга нисбатан бош моменти га тенг.*

(21.72) ни иккала томонини қўзғалмас Декарт координата ўқларига проекциялаб, қуйидаги тенгликларни оламиз:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e, \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e, \quad (21.73)$$

бунда K_x , K_y , K_z лар мос равишда O_x , O_y , O_z ўқларга нисбатан системанинг кинетик моментларини; M_x^e , M_y^e , M_z^e лар эса мазкур ўқларга нисбатан ташқи кучларнинг бош моментларини ифодалайди.

(21.73) тенгламалар қўзғалмас координата ўқларига нисбатан система кинетик моменти ҳақидаги теоремани ифодалайди: *системанинг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг шу ўққа нисбатан бош моменти га тенг.*

Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати, сферик ҳаракати (жумладан, гироскопларнинг ҳаракати) ни ўрганишда самарали фойдаланилади.

(21.72) ва (21.73) тенгламалардан кўриниб турибдики, уларда ички кучлар қатнашмайди. Фақат ички кучлар системанинг кинетик

моментини ўзгартира олмайди. Ички кучлар билвосита ташқи кучлар билан биргаликда система кинетик моментининг ўзгаришига таъсир этиши мумкин.

21.13-масала. Электр чиғириқни юргизиш пайтида унинг A барабанига вақтга пропорционал айлантурувчи момент $m_{a\ddot{a}A} = at$ қўйилади, бунда a — ўзгармас миқдор. M_1 массали B юк массаси M_2 га тенг ва r радиусли A барабанга ўраладиган арқон воситасида кўтарилади (21.22-расм). Барабани доиравий цилиндр деб ҳисоблаб, унинг бурчак тезлиги аниқлансин. Бошланғич пайтда чиғириқ тинч ҳолатда бўлади деб ҳисобланади.

Ечиш. Чиғириқ барабани ва B юкни система деб қарасак, барабанга унинг оғирлик кучи $M_2\vec{g}$, таянч реакция кучи $\vec{N}$ ва $m_{a\ddot{a}A}$ айлантурувчи момент таъсир этади, B юкка эса унинг оғирлик кучи $M_1\vec{g}$ қўйилган.

O нуқтада расм текислигига перпендикуляр йўналган Oz ўқни ўтказиб, бу ўққа нисбатан кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаймиз. (21.73) нинг учинчи тенгламаси

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e \quad (1)$$

дан фойдаланамиз.
(21.54) га асосан

$$K_z = I \omega, \quad (2)$$

бунда

$$I = \frac{M_2 r^2}{2} + M_1 r^2 \quad (3)$$

бўлиб, барабан ва B юкнинг z ўққа нисбатан инерция моментини; ω эса барабанининг бурчак тезлигини билдиради.

Таъсир этувчи кучлар расм текислигида ётгани туфайли $M_z^e = M_0^e$ тенглик ўринли бўлади. $M_2\vec{g}$ ва $\vec{N}$ кучлар O нуқтага қўйилгани учун уларнинг шу нуқтага нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Шу сабабли

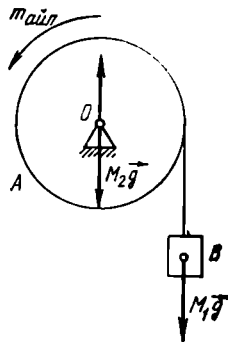
$$M_z^e = M_0^e = m_{a\ddot{a}A} - M_1 g \cdot r = at - M_1 g \cdot r. \quad (4)$$

(2) ва (4) ни (1) га қўйиб, ўзгарувчиларни ажратиб интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} I \frac{d\omega}{dt} &= at - M_1 gr, \\ \int_0^\omega d\omega &= \frac{1}{I} \int_0^t (at - M_1 gr) dt, \\ \omega &= \frac{1}{I} \left(\frac{at^2}{2} - M_1 grt \right). \end{aligned}$$

(3) ни эътиборга олсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$\omega = \frac{(at - 2M_1 gr)}{r^2 (2M_1 + M_2)} t.$$



21.22- расм.

21.14-§. Система кинетик моментининг сақланиш қонуни

Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан қуйидаги натижаларни оламиз.

1. Агар система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор марказга нисбатан бош моменти нолга тенг бўлса, системанинг шу нуқтага нисбатан кинетик моменти миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $\vec{M}_0^e = 0$ бўлса, (21.72)га кўра

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = 0$$

бўлади. Бундан

$$\vec{K}_0 = \overrightarrow{\text{const}} \quad (21.74)$$

2. Агар система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор ўққа (масалан, Oz ўққа) нисбатан бош моменти нолга тенг бўлса, системанинг шу ўққа нисбатан кинетик моменти ҳаракат давомида ўзгармасдан қолади.

Агар $M_z^e = 0$ бўлса, (21.73) га асосан

$$\frac{dK_z}{dt} = 0$$

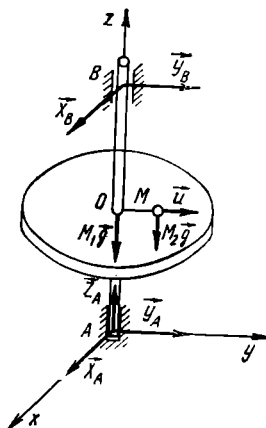
бўлади, бундан эса

$$K_z = \text{const} \quad (21.75)$$

эканлиги келиб чиқади.

(21.74) ва (21.75) тенгламалар система кинетик моментининг сақланиш қонунини ифодалайди.

21.14-масала. Массаси M_1 ва радиуси r га тенг бир жинсли диск ўз марказидан ўтувчи вертикал ўқ атрофида ω_0 бошланғич бурчак тезлик билан айлана-



21.23- расм.

ди. Бошланғич пайтда диск марказидан унинг радиуси бўйлаб M_2 массали нуқта $\vec{u}$ тезлик билан ҳаракат қилади (21.23-расм). Таянч нуқталаридаги ишқаланиш кучларини ҳисобга олмай дискнинг бирор t_1 вақтдан кейинги ҳамда нуқта дискнинг гардишига етган t_2 пайтдаги ($t_1 < t_2$) айланиш бурчак тезликлари ω_1 ва ω_2 аниқлансин.

Ечиш. r радиусли диск ва M нуқтани система деб қарасак, система нуқталарига диск ва нуқтанинг огирлик кучлари $M_1\vec{g}$ ва $M_2\vec{g}$ ҳамда A ва B нуқталарнинг таянч реакция кучлари $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ лар таъсир этади. Бу кучлардан $M_1\vec{g}, M_2\vec{g}, \vec{Z}_A$ лар z ўққа параллел ҳамда $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ лар z ўқни кесиб ўтгани учун уларнинг шу ўққа нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Биноба-

$$M_z^e = 0.$$

Шу сабабли z ўққа нисбатан кинетик моментнинг сақланиш қонунини ифодаловчи $K_z = \text{const}$ ёки

$$K_{0z} = K_{1z} = K_{2z} \quad (1)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Бунда K_{0z} , K_{1z} ва K_{2z} лар системанинг бошланғич пайтдаги, t_1 ва t_2 вақтдан кейинги кинетик моментларини ифодалайди. (21.54), (21.52') ва (20.25) га кўра

$$K_{0z} = I \omega_0 = \frac{M_1 r^2}{2} \omega_0. \quad (2)$$

$$K_{1z} = I \omega_1 + M_2 OM_2^2 \omega_1 = \frac{M_1 r^2}{2} \omega_1 + M_2 u^2 t_1^2 \omega_1 = \frac{\omega_1}{2} (M_1 r^2 + 2M_2 u^2 t_1^2), \quad (3)$$

$$K_{2z} = I \omega_2 + M_2 r^2 \omega_2 = \frac{M_1 r^2}{2} \omega_2 + M_2 r^2 \omega_2 = \frac{\omega_2}{2} (M_1 + 2M_2) r^2 \quad (4)$$

ифодаларни оламиз.

(2), (3) ва (4) ни (1) га қўйиб, ω_1 ва ω_2 ларни аниқтаймиз:

$$\omega_1 = \frac{M_1 r^2 \omega_0}{M_1 r^2 + 2M_2 u^2 t_1^2},$$

$$\omega_2 = \frac{M_1 \omega_0}{M_1 + 2M_2}.$$

21.15-§. Мураккаб ҳаракатдаги системанинг кинетик моменти

Қўпинча моддий нуқталар системасининг қўзғалмас координатлар системасига нисбатан ҳаракатини мураккаб ҳаракатдан иборат деб қараб, уни содда ҳаракатларга ажратиш система кинетик моменти ҳисоблашни осонлаштиради.

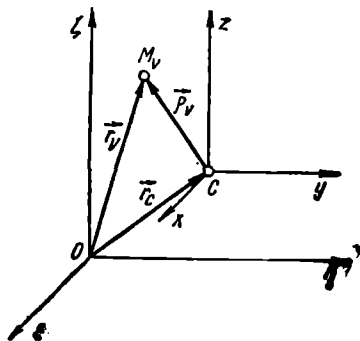
Қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан системанинг массалар маркази билан илгарилама ҳаракат қилувчи *Схуз* координаталар системасини киритамиз (21.24-расм).

Массаси m_v га тенг системанинг ихтиёрий M_v нуқтасининг O нуқтага нисбатан радиус-векторини $\vec{r}_v$, массалар марказидаги C нуқтага нисбатан радиус-векторини $\vec{\rho}_v$ ҳамда C нуқтанинг $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан радиус-векторини $\vec{r}_c$ билан белгиласак,

$$\vec{r}_v = \vec{r}_c + \vec{\rho}_v \quad (21.76)$$

тенглик ўринли бўлади.

Кинематика бўлимидаги (13.8) га кўра, M_v нуқтанинг қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан тезлиги $\vec{v}_{rv}$ нисбий ва $\vec{v}_{cv}$ кўчирма тезликларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади:



21.24- расм.

$$\vec{v}_v = \vec{v}_{rv} + \vec{v}_{ev}.$$

Қўзғалувчи координаталар системаси илгариларда ҳаракатда бўлгани учун $\vec{v}_{ev} = \vec{v}_C$, $\vec{v}_{rv} = \frac{d\vec{\rho}_v}{dt}$. Бинобарин,

$$\vec{v}_v = \vec{v}_C + \vec{v}_{rv}. \quad (21.77)$$

(21.53) га кўра, қўзғалмас O нуқта ва системанинг массалар маркази C га нисбатан системанинг кинетик моментлари учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$\vec{K}_O = \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v, \quad (21.78)$$

$$\vec{K}_C = \sum \vec{\rho}_v \times m_v \vec{v}_{rv}. \quad (21.79)$$

$\vec{K}_O$ ва $\vec{K}_C$ лар орасидаги боғланишни топиш учун (21.78) га $\vec{r}_v$ нинг қийматини (21.76) дан, $\vec{v}_v$ нинг қийматини (21.77) дан келтириб қўямиз:

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= \sum \vec{r}_C \times m_v \vec{v}_C + \sum \vec{\rho}_v \times m_v \vec{v}_C + \sum \vec{r}_C \times m_v \vec{v}_{rv} + \\ &+ \sum \vec{\rho}_v \times m_v \vec{v}_{rv} = \vec{r}_C \times (\sum m_v) \vec{v}_C + (\sum m_v \vec{\rho}_v) \times \vec{v}_C + \vec{r}_C \times \sum m_v \vec{v}_{rv} + \\ &+ \sum \vec{\rho}_v \times m_v \vec{v}_{rv}. \end{aligned} \quad (21.80)$$

(21.80) да $\sum m_v = M$ — бутун система массаси; (20.4) га асосан $\sum m_v \vec{\rho}_v = M \vec{\rho}_C = 0$ (чунки C нуқта координаталар бошида олинган), $\sum m_v \vec{v}_{rv} = \frac{d}{dt} \sum m_v \vec{\rho}_v = 0$ ҳамда (21.79) га кўра $\sum \vec{\rho}_v \times m_v \vec{v}_{rv} = \vec{K}_C$ бўлгани учун уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times M \vec{v}_C + \vec{K}_C \quad (21.81)$$

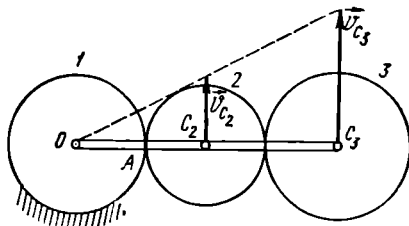
ёки

$$\vec{K}_O = \vec{M}_O(M \vec{v}_C) + \vec{K}_C. \quad (21.82)$$

(21.82) дан кўрамизки, системанинг бирор қўзғалмас марказга нисбатан абсолют ҳаракатининг кинетик моменти, массаси бутун система массасига тенг деб қараладиган система массалар марказининг шу нуқтага нисбатан кинетик моменти билан системанинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моментининг геометрик йиғиндисига тенг. Бунда системанинг нисбий ҳаракати, координатлар боши системанинг массалар маркази билан устма-уст тушувчи ва илгариларда ҳаракатдаги *Схуз* координаталар системасига нисбатан қаралади.

(21.82) ни қўзғалмас ξ, η, ζ координата ўқларига проекциялаб, қуйидаги учта скаляр тенгликларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} K_{\xi} &= M_{\xi} (M \vec{v}_C) + K'_{C\xi}, \\ K_{\eta} &= M_{\eta} (M \vec{v}_C) + K'_{C\eta}, \\ K_{\zeta} &= M_{\zeta} (M \vec{v}_C) + K'_{C\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (21.83)$$



21.25-расм.

21.15-масала. Планетар узатманинг OC_3 кривошип ўқи билан устма-уст тушувчи қўзғалмас z ўққа нисбатан кинетик моменти ҳисоблансин (21.25-расм). Қўзғалмас 1 ва қўзғалувчи 3 гилдиракларининг r радиуслари бир хил. 3 гилдирак массаси m га, 2 гилдиракнинг массаси m_2 га, радиуси эса r_2 га тенг. Кривошип бурчак тезлигининг z ўқдаги проекцияси ω_z га тенг. Кривошип массаси ҳисобга олинмасин. Гилдираклар бир жинсли деб ҳисоблансин.

Ечиш. Планетар узатмани 2 ва 3 гилдираклардан ташкил топган система деб қараймиз. Дастлаб Виллис усулидан фойдаланиб, 3 гилдиракнинг бурчак тезлигини аниқлаймиз. Бунинг учун гилдираклар бурчак тезлиги асосида қуйидаги жадвални тузамиз.

	Етакчи стержень OC_3	Гилдираклар		
		1	2	3
Тўхтагучча бурчак тезлиги	ω_z	0	ω_3	ω_3
Тўхтагандан кейинги бурчак тезлиги	0	$-\omega_z$	$\omega_3 - \omega_z$	$\omega_3 - \omega_z$
Илашиш тури		ташқи	ташқи	

Бинобарин,

$$\frac{-\omega_z}{\omega_3 - \omega_z} = -\frac{r_3}{r}, \quad \frac{\omega_3 - \omega_z}{\omega_3 - \omega_z} = -\frac{r}{r_2}. \quad (1)$$

Бу тенгликларни кўпайтирсак,

$$\frac{-\omega_z}{\omega_3 - \omega_z} = 1, \Rightarrow \omega_3 = 0. \quad (2)$$

Шундай қилиб, 3 гилдирак илгарилама ҳаракатда бўлади.

Қўзғалмас z ўқни O нуқтада расм текислигига перпендикуляр равишда ўтказиб, бу ўққа нисбатан (21.83) нинг учинчи тенгламасини

$$K_z = M_z (m \vec{v}_C) + K'_{Cz} \quad (3)$$

кўринишда ёзамиз.

Системанинг z ўққа нисбатан кинетик моменти

$$K_z = K_{z2} + K_{z3} \quad (4)$$

га тенг бўлади, бунда K_{z2} билан 2 гилдиракнинг, K_{z3} билан 3 гилдиракнинг z ўққа нисбатан кинетик моментлари белгиланган.

(3) ни 2 ва 3 гилдираклар учун қўлаймиз:

$$K_{z2} = M_z (m_2 \vec{v}_C) + K'_{Cz}$$

$$K_{z3} = M_z (m \vec{v}_{C_3}) + K'_{C_3 z}. \quad (6)$$

(5) ва (6) да

$$v_{C_1} = (r + r_2) \omega_z, \quad v_{C_3} = 2(r + r_2) \omega_z$$

бўлгани учун

$$M_z (m_2 \vec{v}_{C_1}) = (r + r_2) m_2 v_{C_1} = (r + r_2)^2 m_2 \omega_z, \quad (7)$$

$$M_z (m_2 \vec{v}_{C_3}) = 2(r + r_2) m v_{C_3} = 4(r + r_2)^2 m \omega_z \quad (8)$$

ўринли бўлади.

C_2 нуқтадан расм текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи $C_2 z_2$ ўққа нисбатан 2 ғилдиракнинг кинетик моменти $K'_{C_2 z} = I_2 \omega_2^2$ га тенг, бунда $I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$ билан 2 ғилдиракнинг $C_2 z_2$ ўққа нисбатан инерция моменти, ω_2^2 билан 2 ғилдиракнинг $C_2 z_2$ ўқ атрафидаги нисбий ҳаракат бурчак тезлиги белгиланган. 2 ғилдирак учун A нуқта тезликларнинг оний маркази бўлгани учун

$$r_2 \omega_2^f = (r + r_1) \omega_z \quad \text{ёки} \quad \omega_2^f = \frac{r + r_2}{r_2} \omega_z$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бинобарин,

$$K'_{C_2 z} = \frac{m_2 r_2^2}{2} \cdot \frac{r + r_2}{r_2} \omega_z = \frac{1}{2} m_2 r_2 (r + r_2) \omega_z. \quad (8)$$

3 ғилдирак илгарилема ҳаракатда бўлгани учун

$$K'_{C_3 z} = 0. \quad (9)$$

(5) — (9) ларга асосан (4) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$K_z = (r + r_2)^2 m_2 \omega_z + \frac{1}{2} m_2 r_2 (r + r_2) \omega_z + 4(r + r_2)^2 m \omega_z = \frac{1}{2} [m_2 (2r + 3r_2) + 8m(r + r_2)] (r + r_2) \omega_z.$$

21.16-§. Система массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

(21.76) ни назарда тутиб, система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг бош моментини қуйидагича ҳисоблаш мумкин:

$$\vec{M}_O^e = \sum \vec{r}_v \times \vec{F}_v^e = \sum (\vec{r}_C + \vec{\rho}_v) \times \vec{F}_v^e = \vec{r}_C \times \sum \vec{F}_v^e + \sum \vec{\rho}_v \times \vec{F}_v^e$$

ёки

$$\vec{M}_O^e = \vec{r}_C \times \vec{R}^e + \vec{M}_C^e, \quad (21.84)$$

бунда $\vec{R}^e = \sum \vec{F}_v^e$ — система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори; $\vec{M}_C^e = \sum \vec{\rho}_v \times \vec{F}_v^e$ — ташқи кучларнинг система массалар марказига нисбатан бош моменти.

(21.81) ва (21.84) га асосан система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.72) тенгламани

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_C \times M \vec{v}_C) + \frac{dK_C^r}{dt} = \vec{r}_C \times \vec{R}^e + \vec{M}_C^e$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу тенгламада

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{r}_C \times M \vec{v}_C) &= \frac{d\vec{r}_C}{dt} \times M \vec{v}_C + \vec{r}_C \times M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{v}_C \times M \vec{v}_C + \\ &+ \vec{r}_C \times M \vec{w}_C = \vec{r}_C \times M \vec{w}_C \end{aligned}$$

бўлгани учун (бунда $\vec{w}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt}$ — система массалар марказининг тезланиши) уни қуйидагича ёза оламиз:

$$\vec{r}_C \times M \vec{w}_C + \frac{dK_C^r}{dt} = \vec{r}_C \times \vec{R}^e + \vec{M}_C^e. \quad (21.85)$$

Массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.31) тенгламага асосан

$$M \vec{w}_C = \vec{R}^e.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини $\vec{r}_C$ га векторли кўпайтирсак,

$$\vec{r}_C \times M \vec{w}_C = \vec{r}_C \times \vec{R}^e.$$

Бинобарин, (21.85) дан

$$\frac{dK_C^r}{dt} = \vec{M}_C^e \quad (21.86)$$

формулани оламиз. Бу формула *системанинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *система массалар марказига нисбатан ҳисобланган системанинг кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг массалар марказига нисбатан боти моментига тенг.*

(21.72) ни (21.86) билан солиштириб, қўзғалмас координаталар системасига ва система массалар маркази билан биргаликда илгариларда ҳаракатда бўлувчи координаталар системасига нисбатан кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремалар бир хил таърифланишини кўрамиз.

(21.86) да ҳам худди (21.72) даги каби ички кучлар қатнашмайди.

Системанинг массалар марказига нисбатан кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремадан қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати ва эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини ташкил этувчиларга ажратганда жисмнинг массалар маркази атрофидаги айланма ҳаракатини ўрганишда бевосита фойдаланилади.

Қуйидаги иккита хусусий ҳолни кўрамиз:

1. Агар $\vec{M}_C^e = 0$ бўлса, у ҳолда (21.86) га кўра $\frac{d\vec{K}_C^r}{dt} = 0$, би-
нобарин,

$$\vec{K}_C^r = \overrightarrow{const}. \quad (21.87)$$

(21.87) тенглик система массалар марказига нисбатан кинетик моментнинг сақланиш қонунини ифодалайди: агар система массалар марказига нисбатан ташқи кучларнинг бош моменти нолга тенг бўлса, у ҳолда системанинг массалар марказига нисбатан кинетик моменти ўзгармасдан қолади. Бунда, хусусан, бошланғич пайтда системанинг массалар марказига нисбатан кинетик моменти нолга тенг бўлса, бутун ҳаракат давомида $\vec{K}_C^r$ ўзгармасдан қолади.

2. Агар $M_{Cx} = 0$ бўлса, у ҳолда (21.86) нинг x ўққа проекцияси $\frac{dK_{Cx}^r}{dt} = M_{Cx}^e = 0$, бинобарин, $K_{Cx}^r = const$ бўлади.

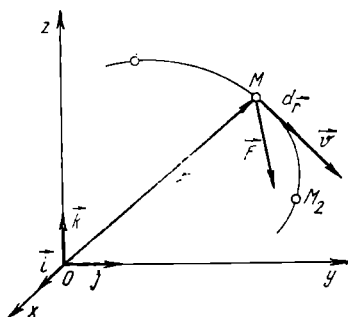
Яъни системанинг массалар маркази билан илгарилама ҳаракат қилувчи координаталар системасининг бирор ўқига нисбатан система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг бош моменти нолга тенг бўлса, у ҳолда бутун ҳаракат давомида системанинг мазкур ўққа нисбатан кинетик моменти ўзгармасдан қолади.

21.17-§. Кучнинг иши ва қуввати

Айтайлик, *Охуз* инерциал координаталар системасига нисбатан радиус-вектори $\vec{r}$ га тенг M нуқта миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгарувчи $\vec{F}$ куч таъсирида бирор эгри чизиqli траектория бўйлаб ҳаракатлансин (21.26-расм). M нуқтанинг dt вақт ичидаги элементар кўчишини $d\vec{r}$ билан белгиласак, (8.17) га кўра $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ бўлгани учун элементар кўчиш тезлик йўналиши бўйича содир бўлади ҳамда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}, \quad (21.88)$$

бунда dx, dy, dz билан элементар кўчишнинг Ox, Oy, Oz инерциал ўқларга нисбатан проекциялари белгиланган. Кинематика бўлимида кўрганимиздек (8.4-§), элементар кўчишнинг модули $|d\vec{r}|$ траекториянинг M нуқтадаги ёй узунлиги дифференциали ds



21.26- расм.

га ёки ўтилган йўл дифференциали $d\sigma$ га тенг:

$$|\vec{dr}| = ds = d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (21.89)$$

$\vec{F}$ кучининг элементар иши деб, шу куч билан у қўйилган нуқта элементар кўчишининг скаляр кўпайтмасига тенг

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}^*) \quad (21.90)$$

катталиққа айтилади.

(21.89) ни назарда тутиб, скаляр кўпайтманинг таърифига кўра, (21.90) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

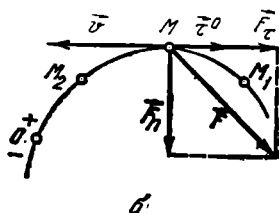
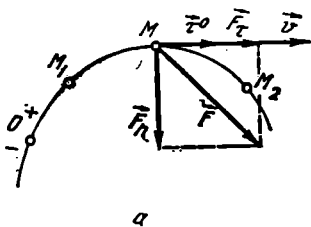
$$d'A = F d\sigma \cos(\vec{F}, \vec{v}). \quad (21.91)$$

M нуқтанинг траекториядаги ҳолатини $s = OM$ ёй координатаси билан ҳам аниқлаш мумкин (8.3-§). Саноқ боши учун O нуқтани олиб, M нуқтада траекторияга ўтказилган уринманинг бирлик вектори $\vec{\tau}^0$ ни ёй координатаси ортадиган томонга йўналтирамыз (21.27-расм).

Агар M нуқта ёй координатаси ортадиган томонга ҳаракатланса (21.27-расм, а), $ds > 0$ бўлиб, $d\sigma = |ds| = ds$ ва $\cos(\vec{F}, \vec{v}) = \cos(\vec{F}, \vec{\tau}^0)$ тенгликлар ўринлидир, чунки бу ҳолда $\vec{v}$ ва $\vec{\tau}^0$ ларнинг йўналиши бир хил бўлади. Қўрилаётган ҳолда (21.91) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$d'A = F ds \cos(\vec{F}, \vec{\tau}^0).$$

Агар M нуқта ёй координатаси камайдиган томонга ҳаракатланса (21.27-расм, б), $ds < 0$ бўлиб, $d\sigma = |ds| = -ds$ ва $\cos(\vec{F}, \vec{v}) = -\cos(\vec{F}, \vec{\tau}^0)$ тенгликлар ўринли бўлади, чунки бу ҳолда $\vec{v}$ ва $\vec{\tau}^0$ лар қарама-қарши томонга йўналади. Шу сабабли (21.91) ни



21.27- расм.

*) умумий ҳолда (21.90) нинг ўнг томони бирор функциянинг тўлиқ дифференциални ифодаламайди. Шу сабабли дифференциал белгиси устига "итрих қўйилган.

$$d'A = F ds \cos(\vec{F}, \vec{\tau^0})$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Биобарин, ҳар иккала ҳолда ҳам

$$d'A = F ds \cos(\vec{F}, \vec{\tau^0}) \quad (21.92)$$

формула ўринли бўлади.

Агар $\vec{F}$ кучни уринма ва нормаль бўйлаб йўналган $\vec{F}_\tau$ ва $\vec{F}_n$ ташкил этувчиларга ажратсак, у ҳолда $\vec{F}$ кучнинг уринма ва нормалдаги проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$\left. \begin{aligned} F_\tau &= F \cos(\vec{F}, \vec{\tau^0}), \\ F_n &= F \cos(\vec{F}, \vec{n^0}). \end{aligned} \right\} \quad (21.93)$$

(21.93) даги биринчи тенгликка кўра кучнинг элементар иши учун ёзилган (21.92) формулани яна қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$d'A = F_\tau ds. \quad (21.94)$$

(21.94) дан кўраимизки, ds элементар кўчишда $\vec{F}$ кучнинг фақат уринма ташкил этувчиси иш бажаради; $\vec{F}_n \perp \vec{v}$ бўлгани учун $\vec{F}_n$ кучнинг ds кўчишдаги иши нолга тенг бўлади.

$\vec{F}$ кучнинг x, y, z ўқдаги проекцияларини X, Y, Z билан белгиласак, (21.90) га кўра элементар иш учун

$$d'A = Xdx + Ydy + Zdz \quad (21.95)$$

формулани оламиз. Бу формула *куч элементар ишининг аналитик ифодаси* дейилади.

Кучнинг чекли M_1, M_2 йўлдаги иши деб, элементар ишдан траекториянинг ёйи бўйича олинган интеграл орқали ифодаланувчи

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} F \cdot \cos(\vec{F}, \vec{\tau^0}) ds \quad (21.96)$$

ёки

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (X dx + Y dy + Z dz) \quad (21.97)$$

скаляр катталikka айтилади.

(21.96) формула *куч ишининг геометрик ифодаси*, (21.97) эса *куч ишининг аналитик ифодаси* дейилади.

СИ бирликлар системасида иш бирлиги учун жоуль ($1 \text{ Ж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ёки $1 \text{ Н} = 0,102 \text{ кгк}$ бўлгани учун $1 \text{ Ж} = 0,102 \text{ кгк} \cdot \text{м}$) қабул қилинган.

Механикада иш тушунчаси билан бирга кучнинг қуввати тушунчаси ҳам киритилади. Кучнинг вақт бирлигидаги иши *кучнинг қуввати* дейилади.

Агар жуда кичик dt вақт ичидаги $\vec{F}$ кучнинг иши $d'A = \vec{F} d\vec{r}$ га тенг бўлса, таърифга кўра кучнинг қуввати

$$N = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (21.98)$$

тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, кучнинг қуввати куч ва тезлик векторларининг скаляр кўпайтмасига тенг.

Куч қувватининг аналитик ифодаси

$$N = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}$$

кўринишда ёзилади. Бунда x, y, z лар куч қўйилган нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди.

(21.98) га кўра

$$N = F \cdot v \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) \quad (21.99)$$

формула ўринли бўлади.

СИ бирликлар системасида кучнинг қуввати ватт (Вт) билан ўлчанади ҳамда $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Ж/с}$ ёки $1 \text{ Ж} = 0,102 \text{ кгк.м}$ бўлгани учун $1 \text{ Вт} = 0,102 \text{ кгк.м/с}$. Техникада кўпинча қувват бирлиги учун киловатт (кВт), мегаватт (МВт) ва «от кучи» (о.к.) олинади ҳамда $1 \text{ кВт} = 1000 \text{ Вт}$, $1 \text{ МВт} = 1000 \text{ 000 Вт}$, $1 \text{ о.к.} = 736 \text{ Вт}$.

21.18-§. Тенг таъсир этувчининг иши ҳақидаги лемма

M моддий нуқтага $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ кучлар таъсир этса, бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N \quad (21.100)$$

нинг иши учун қуйидаги лемма ўринли бўлади.

Лемма. *Ҳаракатланувчи M нуқтага қўйилган тенг таъсир этувчи кучнинг бирор чекли йўлни ўтишидаги иши таъсирчи кучларнинг худди шу йўлни ўтишидаги ишларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

Исбот. (21.96) га асосан $\vec{R}$ кучнинг $M_1 M_2$ йўлни ўтишидаги иши учун

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r}$$

формула ўринли бўлади. (21.100) ни назарда тутиб, бу формулани қуйидагича ёзиш мумкин

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_1 d\vec{r} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_N d\vec{r}. \quad (21.101)$$

Бу тенгламанинг ўнг томонидаги эгри чизиqli интеграллар мос ра-
вишда $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ кучларнинг $M_1 M_2$ йўлини ўтишдаги $A_1, A_2, \dots, A_N$ ишларини ифодалайди. Шундай қилиб, тенг таъсир этувчи
кучнинг иши учун

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_N$$

муносабатни оламиз.

21.19-§. Айрим ҳолларда кучнинг ишини ҳисоблаш

Қуйидаги ҳолларда кучнинг ишини ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

1. Агар $F_\tau = F \cos(\vec{F}, \vec{\tau})$ катталик ёй координатасининг функ-
циясидан иборат бўлса, у ҳолда (21.96) га кўра кучнинг иши учун
қуйидаги муносабатни оламиз:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F \cos(\vec{F}, \vec{\tau}) ds = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau ds, \quad (21.102)$$

бунда s_1 ва s_2 орқали M_1 ва M_2 нуқталарнинг ёй координаталари
белгиланган.

Хусусий ҳолда $\vec{F}$ куч миқдор ва йўналш жиҳатдан ўзгармас
бўлиб, куч қўйилган нуқта тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланса, у
ҳолда $F_\tau = F \cos(\vec{F}, \vec{\tau}) = \text{const}$ бўлиб, $M_1 M_2$ тўғри чизиqli кўчиш-
даги $\vec{F}$ кучнинг иши (21.102) га асосан

$$A = F s \cos \alpha \quad (21.103)$$

формула ёрдамида аниқланади. Бунда s нуқтанинг кўчишини; $\alpha =$

$= \widehat{\vec{F}, \vec{\tau}}$ бурчакни ифодалайди (21.28- расм).

(21.103) да агар

$$\alpha = 0^\circ \text{ бўлса, } A = F \cdot s;$$

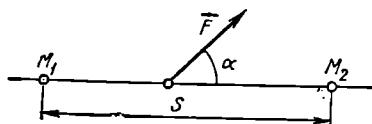
$$\alpha = 180^\circ \text{ бўлса, } A = -F \cdot s;$$

$$\alpha = 90^\circ \text{ бўлса, } A = 0$$

тенгликлар ўринли бўлади.

2. Умумий ҳолда нуқтага таъсир этувчи куч t вақтга, нуқта-
нинг радиус-вектори $\vec{r}$ (ёки x, y, z координаталари) га ва тезлиги
 $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ га боғлиқ бўлади (15.1-§). Шу сабабли нуқтанинг чекли
кўчишдаги иши учун

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) d\vec{r} \quad (21.104)$$



21.26- расм.

формула ўринли бўлади. Бу эгри чи-
зиqli интегрални ҳисоблаш учун нуқ-

танинг ҳаракат қонунини, яъни нуқтанинг радиус-векторини вақт-нинг функцияси сифатида ифодалаш керак:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

У ҳолда $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$ вақтнинг функциясидан иборат бўлади. Натижада (21.104) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)] \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) dt, \quad (21.105)$$

бунда

$$\Phi(t) = \vec{F}[t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)] \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

вақтнинг маълум функцияси; t_1 ва t_2 лар эса моо равишда нуқта M_1 ва M_2 ҳолатлардан ўтган пайтдаги вақтни ифодалайди. Натижада кучнинг ишини ҳисоблаш t аргумент бўйича (21.105) кўринишдаги аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилади.

Шундан келиб чиқиб, умумий ҳолда $\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ куч қўйилган нуқтанинг ҳаракат қонунини билмай туриб, яъни дастлаб бу куч таъсиридаги нуқта учун динамиканинг иккинчи асосий масаласини ечмасдан $\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ кучнинг ишини ҳисоблаш мумкин эмас деган хулосага келамиз.

Шу сабабли нуқтага таъсир этувчи кучлар ва улар қўйилган нуқталарнинг кўчиши асосида бу кучлар таъсиридаги нуқтанинг ҳаракат қонунини билмай туриб ишни ҳисоблаш мумкин бўлган кучларни аниқлаш муҳим аҳамиятга эга. Шундай кучлардан айримларининг иши қандай ҳисобланишини кўриб чиқамиз.

3. **Оғирлик кучининг иши.** M нуқтанинг $\vec{P}$ оғирлик кучи таъсирида M_1 ҳолатдан M_2 га эгри чизик бўйлаб кўчишидаги ишини ҳисоблаймиз (21.29-расм). Бунинг учун z ўқни вертикал юқорига йўналтириб, $\vec{P}$ кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаймиз:

$$X = 0, Y = 0, Z = -P.$$

(21.95) ва (21.97) ларга кўра $\vec{P}$ кучнинг элементар иши

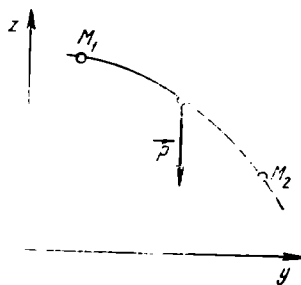
$$d'A = X dx + Y dy + Z dz = -P dz,$$

чекли кўчишдаги иши эса

$$A = - \int_{z_1}^{z_2} P dz$$

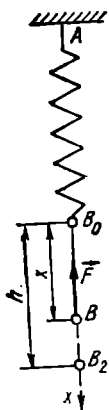
ёки

$$A = -P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2)^*$$

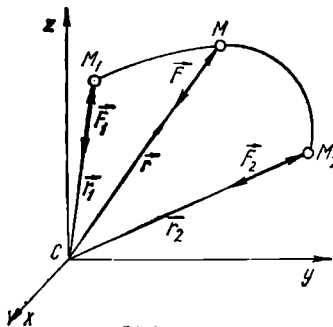


21.29- расм.

* бу формула M нуқтанинг оғирлик кучи $\vec{P}$ ўзгармас бўлган ҳолда ўришли бўлади.



21.30- расм.



21.31- расм.

формулар ёрдамида аниқланади. Бунда $z_1 - z_2 = h$ M нуқтанинг вертикал кўчишини ифодалайди. Нуқтанинг M_1 ҳолати M_2 ҳолатдан баландроқ бўлса, $z_1 > z_2$ бўлиб, $\vec{P}$ кучнинг иши мусбат; M_1 нуқта M_2 дан пастроқ бўлса, $z_1 < z_2$ бўлиб, $\vec{P}$ кучнинг иши манфий қийматга эга бўлади. Бинобарин, оғирлик кучининг иши

$$A = \pm P h \quad (21.106)$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Агар нуқта юқорига ҳаракатланса, бу формулада манфий ишора, пастга ҳаракатланса, мусбат ишора олинади.

(21.106) дан кўрамизки, оғирлик кучининг иши нуқтанинг қандай траектория бўйлаб кўчишига эмас, балки нуқтанинг бошланғич ва охириги пайтдаги ҳолатлари орқали ўтувчи горизонтал текисликлар орасидаги масофага боғлиқ бўлади. Хусусан нуқта горизонтал текисликда ҳаракатланса, нуқтага таъсир этувчи оғирлик кучининг иши нолга тенг бўлади.

4. **Эластиклик кучининг иши.** A учи қўзғалмас қилиб бириктирилган AB пружинани чўзганда пружинани чўзувчи жисмга эластиклик кучи $\vec{F}$ таъсир этади (21.30-расм). Бу куч пружинани эркин учидаги нуқтанинг кўчишига қарама-қарши йўналади ҳамда унинг модули пружинанинг чўзилишига пропорционал бўлади:

$$F = c \cdot B_0 B,$$

бунда c — пружинанинг бикирлик коэффициент.

Координаталар бошини пружина деформацияланмаган ҳолатдаги B_0 нуқтада олиб, x ўқни пружина ўқи бўйлаб вертикал пастга йўналтирамиз.

Пружина эластиклик кучи $\vec{F}$ нинг координата ўқларидаги проекцияси $F_x = -cx$, $F_y = 0$, $F_z = 0$ бўлади.

(21.97) га асосан $B_0 B_2 = h$ кўчишдаги пружина эластик кучининг иши

$$A = - \int_0^h cx \, dx = - \frac{ch^2}{2} \quad (21.107)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

(21.107) дан кўрамизки, эластиклик кучининг иши шу куч қўйилган нуқтанинг қандай қонун асосида ҳаракатланишига эмас, балки нуқтанинг бошланғич ва охириги ҳолатларига боғлиқ бўлади.

5. Тортилиш кучининг иши. Айтайлик, массаси m_1 га тенг M моддий нуқтага фазода доимо қўзғалмас, массаси m_2 га тенг C нуқтага йўналган ва миқдори

$$F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

га тенг тортилиш кучи таъсир этсин (21.31-расм). Бунда f — тортилиш доимийси; r — C ва M нуқталар орасидаги масофа.

$\vec{F}$ куч M нуқтанинг радиус-векторига ҳамisha қарама-қарши йўналгани учун

$$\vec{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (21.108)$$

тенглик ўринли бўлади.

(21.108) ни координата ўқларига проекцияласак,

$$X = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} = -f m_1 m_2 \frac{x}{r^3}, \quad Y = -f m_1 m_2 \frac{y}{r^3}, \quad Z = -f m_1 m_2 \frac{z}{r^3}$$

тенгликлар ҳосил бўлади.

(21.95) га кўра $\vec{F}$ кучнинг элементар иши

$$d'A = X dx + Y dy + Z dz = -f m_1 m_2 \frac{x dx + y dy + z dz}{r^3}$$

ёки

$$x dx + y dy + z dz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} dr^2 = r dr$$

бўлгани учун

$$d'A = -f m_1 m_2 \frac{r dr}{r^3} = -f m_1 m_2 \frac{dr}{r^2}$$

га тенг бўлади.

$\vec{F}$ кучнинг M нуқта M_1 ҳолатдан M_2 ҳолатга кўчишидаги иши

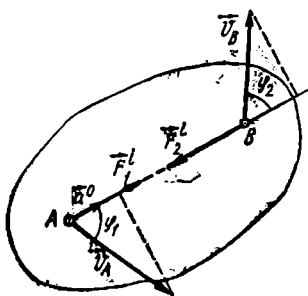
$$A = -f m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = f m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (21.109)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

(21.109) дан кўрамизки, қўзғалмас марказга тортилиш кучининг иши ҳам нуқтанинг траекториясига боғлиқ бўлмайди.

21. 20- §. Қаттиқ жисмга қўйилган кучларнинг иши

Қаттиқ жисмни нуқталари орасидаги масофалар ўзгармас бўлган механик система деб қараб, унга қўйилган кучларнинг ишини ҳисоблаймиз.



21.32- расм.

1. Қаттиқ жисм ички кучларининг иши ва қуввати. Эркин қаттиқ жисмнинг A ва B нуқталарига таъсир этувчи кучларни $\vec{F}_1^l$ ва $\vec{F}_2^l$ билан белгилаймиз (21.32-расм). Ньютоннинг учинчи қонунига кўра ички кучлар миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади, яъни

$$\vec{F}_2^l = -\vec{F}_1^l, \quad F_2^l = F_1^l.$$

Агар $\vec{F}_1^l$ куч бўйича йўналган $\vec{a}^0$ бирлик векторни киритсак, у ҳолда

$$\vec{F}_1^l = F_1^l \vec{a}^0, \quad \vec{F}_2^l = -\vec{F}_1^l = -F_1^l \vec{a}^0.$$

деб ёзиш мумкин. Бу кучларнинг элементар ишлари йиғиндисини аниқлаймиз:

$$d'A_1^l + d'A_2^l = \vec{F}_1^l \cdot \vec{v}_A dt + \vec{F}_2^l \cdot \vec{v}_B dt = F_1^l dt (\vec{v}_A \cdot \vec{a}^0 - \vec{v}_B \cdot \vec{a}^0).$$

Бунда $\vec{v}_A \cdot \vec{a}^0 = v_A \cos \varphi_1 = n p_{AB} \vec{v}_A$; $\vec{v}_B \cdot \vec{a}^0 = v_B \cos \varphi_2 = n p_{AB} \vec{v}_B$ эканлигини назарда тутсак,

$$d'A_1^l + d'A_2^l = \vec{F}_1^l dt (n p_{AB} \vec{v}_A - n p_{AB} \vec{v}_B) = 0$$

бўлади. Чунки кинематика бўлимида кўрганимиздек (12.2-§), эркин жисм иккита нуқтаи тезликларининг шу нуқталардан ўтувчи ўқдаги проекциялари ўзаро тенг бўлади:

$$n p_{AB} \vec{v}_A = n p_{AB} \vec{v}_B.$$

Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг иккита ихтиёрий нуқтасига қўйилган ички кучлар элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

Қаттиқ жисмни ички кучларининг йиғиндиси нолга тенг бўлган жуфт-жуфт нуқталар тўпламидан ташкил топган деб қараш мумкин. Шундан келиб чиқиб, жисмнинг барча жуфт нуқталарига қўйилган ички кучлар элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг, яъни

$$\sum d'A_v^l = 0 \quad (21.110)$$

бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Қаттиқ жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган кучнинг иши қаттиқ жисм нуқталарининг қандай ҳаракат қилишига боғлиқ бўлади. Айрим ҳолларда қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучларнинг иши ва қуввати қандай ҳисобланишини кўриб чиқамиз.

2. Эркин қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучлар системасининг иши ва қуввати. Эркин қаттиқ жисмга $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_N$ кучлар системаси таъсир этсин.

Дастлаб $\vec{F}_v$ кучнинг қувватини аниқлаймиз. (21.98) га кўра

$$N_v = \vec{F}_v \cdot \vec{v}_v, \quad (21.111)$$

бунда $\vec{v}_v$ — қўзғалмас координаталар системасига нисбатан эркин қаттиқ жисм M_v нуқтасининг тезлиги (21.33-расм). Кинематика бўлимида кўрганимиздек, (12.4) га биноан

$$\vec{v}_v = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_v$$

формула ўринли бўлади, бунда $\vec{v}_0$ — қаттиқ жисмда қутб учун танлаб олинган ихтиёрий нуқтанинг тезлиги; $\vec{\omega}$ — қутб атрофидаги айланма ҳаракат бурчак тезлиги; $\vec{\rho}_v$ — M_v нуқтанинг O қутбга нисбатан радиус-вектори. $\vec{v}_v$ қийматини (21.111) га қўйсак,

$$N_v = \vec{F}_v \vec{v}_0 + \vec{F}_v (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_v)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Аралаш кўпайтманинг хоссасига кўра

$$\vec{F}_v (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_v) = \vec{\omega} (\vec{\rho}_v \times \vec{F}_v).$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги қавс ичидаги кўпайтма кучнинг 0 нуқтага нисбатан моментини ифодалайди, яъни

$$\vec{\rho}_v \times \vec{F}_v = \vec{M}_0 (\vec{F}_v).$$

Шундай қилиб,

$$N_v = \vec{F}_v \vec{v}_0 + \vec{\omega} M_0 (\vec{F}_v)$$

ТЕНГЛИКНИ ОЛАМИЗ.

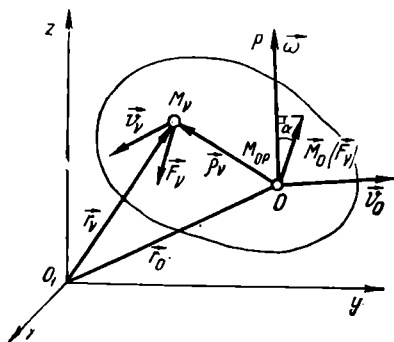
Статика бўлимида кўрганимиздек (6.3-§), кучнинг бирор ўққа нисбатан моменти шу ўқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан куч момент-векторининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг; бу ўқ учун бурчак тезлик йўналган *OP* ўқни олсак,

$$\vec{\omega} \vec{M}_O(\vec{F}_y) = \omega M_O(\vec{F}_y) \cos(\vec{\omega}, \widehat{\vec{M}_O}) = \omega M_{Op}(\vec{F}_y)$$

муносабат ўринли бўлади.

Шундай қилиб, $\vec{F}_v$ кучнинг қуввати учун

$$N_v = \vec{F}_v \vec{v}_0 + \omega M_{OP} (\vec{F}_v) \quad (21.112)$$



21.33- расм.

тенгликни оламир. Бу тенгликни dt га кўпайтириб, $\vec{F}_v$ кучнинг элементар иши $d'A_v$ учун қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$d'A_v = N_v dt = \vec{F}_v \vec{v}_0 dt + \omega dt M_{OP}(\vec{F}_v)$$

ёки

$$d'A_v = \vec{F}_v d\vec{r}_0 + M_{OP}(\vec{F}_v) d\varphi,$$

бунда $\vec{v}_0 dt = d\vec{r}_0$ — қутбнинг элементар кўчиши; $\omega dt = d\varphi$ жисмнинг OP ўқ атрофидаги элементар айланма кўчиши.

Эркин қаттиқ жисмга таъсир этувчи барча кучларнинг элементар иши

$$d'A = \sum d'A_v = (\sum \vec{F}_v) d\vec{r}_0 + [\sum M_{OP}(\vec{F}_v)] d\varphi$$

ёки

$$d'A = \vec{R} d\vec{r}_0 + M_{OP} d\varphi \quad (21.113)$$

формула ёрдамида аниқланади. Бунда $\vec{R} = \sum \vec{F}_v$ — жисмга қўйилган кучлар системасининг бош вектори; $M_{OP} = \sum M_{OP}(\vec{F}_v)$ — OP ўққа нисбатан мазкур кучлар системасининг бош моменти.

(21.113) дан кўрамизки, эркин қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучларнинг элементар иши жисм қутб билан илгариланган ҳаракат қилганда элементар қўчишидаги кучлар бош векторининг иши билан кучларнинг қутбдан ўтувчи OP ўққа нисбатан бош моментининг жисм шу ўқ атрофида айланганда элементар кўчишидаги ишлари йиғиндисига тенг.

(21.113) ни dt га бўлиб, эркин қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучларнинг қувватини ҳисоблаймиз:

$$N = \vec{R} \vec{v}_0 + M_{OP} \omega, \quad (21.114)$$

бунда

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Эркин қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучлар системасининг чекли кўчишдаги ишини аниқлаш учун (21.113) ни интеграллаймиз:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r}_0 + \int_{M_1}^{M_2} M_{OP} d\varphi. \quad (21.115)$$

Бу формулалардан фойдаланиб, қаттиқ жисмнинг асосий ҳаракатлари учун таъсир этувчи кучларнинг иши ва қувватини ҳисоблаймиз.

3. Илгариллама ҳаракатдаги жисмга таъсир этувчи кучларнинг иши ва қуввати. Бу ҳолда $d\varphi = \omega dt = 0$ бўлгани учун

$$d'A = \vec{R} d\vec{r} = R_x dx + R_y dy + R_z dz \quad (21.116)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $d\vec{r}_O = d\vec{r}$ жисм ихтиёрий нуқтасининг кўчишини ифодалайди.

Қўрилаётган ҳолда қувват қуйидагича топилади:

$$N = \vec{R} \cdot \vec{v} = R_x x + R_y y + R_z z, \quad (21.117)$$

бунда $\vec{v}_O = \vec{v}$ — жисм ихтиёрий нуқтасининг тезлиги.

Кучлар системасининг чекли кўчишдаги иши қуйидагича аниқланади:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r}. \quad (21.118)$$

Бинобарин, илгариллама ҳаракатдаги жисм нуқталарига таъсир этувчи кучлар системасининг чекли кўчишдаги иши кучлар системаси бош векторининг мазкур кўчишдаги ишига тенг.

4. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилувчи жисмга таъсир этувчи кучлар системасининг иши ва қуввати. Агар жисм $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ кучлар системаси таъсирида қўзғалмас z ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлса, қутбни айланиш ўқида оламит; натижада $d\vec{r}_O = 0$ ҳамда бурчак тезлик йўналган OP ва z ўқлари устма-уст тушади (21.34-расм). Бинобарин, қўрилаётган ҳолда

$$d'A = M_z d\varphi \quad (21.119)$$

формула ўринли бўлади, яъни қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилувчи жисмга таъсир этувчи кучлар системасининг элементар иши мазкур ўққа нисбатан кучлар бош моментининг жисм ўқ атрофида айланганда элементар кўчишдаги ишига тенг.

Бу ҳолда кучлар системасининг қуввати

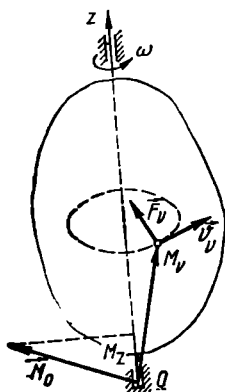
$$N = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega, \quad (21.120)$$

чекли айланма кўчишдаги иши эса

$$A = \int_{M_1}^{M_2} M_z d\varphi \quad (21.121)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

5. Текис параллел ҳаракатдаги жисм нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг иши ва қуввати. Бу ҳолда OP ўқ текис шаклнинг айланиш оний ўқи билан устма-уст тушади ва (21.113),



21.34- расм.

(21.114) ҳамда (21.115) га кўра кучларнинг элементар иши, қуввати ва чекли кўчишдаги иши учун

$$d'A = \vec{R} d\vec{r}_O + M_{OP} d\varphi, \quad (21.122)$$

$$N = \vec{R} \vec{v}_O + M_{OP} \omega, \quad (21.123)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r}_O + \int_{M_1}^{M_2} M_{OP} d\varphi \quad (21.124)$$

формулалар ўринли бўлади. Бунда OP ўқ қутб орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтади.

6. Сферик ҳаракатдаги жисм нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг иши ва қуввати. Бу ҳолда қутб учун жисмнинг қўзғалмас нуқтасини олсак, $d\vec{r}_O = 0$ бўлади ҳамда OP ўқ оний ўқ билан устма-уст тушади. Шу сабабли кўрилатган ҳолда кучлар системасининг элементар иши, қуввати ва чекли кўчишдаги иши

$$d'A = M_{OP} d\varphi, \quad (21.125)$$

$$N = M_{OP} \omega, \quad (21.126)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} M_{OP} d\varphi \quad (21.127)$$

формулалар ёрдамида аниқланади. Бунда ω жисмнинг оний бурчак тезлигини ифодалайди.

21. 21-§. Моддий нуқта ва системанинг кинетик энергияси. Кёниг теоремаси

Механикада моддий нуқта механик ҳаракатининг скаляр ўлчови сифатида унинг кинетик энергияси олинади. Нуқта массасининг тезлиги квадратига кўпайтмасининг ярмига тенг скаляр катталиқ $\frac{mv^2}{2}$ нуқтанинг кинетик энергияси дейилади.

СИ бирликлар системасида нуқтанинг кинетик энергияси $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$ ёки жоулда ўлчанади; $1 \text{ Ж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Механик система барча нуқталарининг кинетик энергиялари йиғиндисига тенг

$$T = \sum \frac{m_v v_v^2}{2} \quad (21.128)$$

катталиқ системанинг кинетик энергияси дейилади.

Нуқта ёки системанинг кинетик энергияси мазкур нуқталар текисларининг йўналишига боғлиқ бўлмайди. Фақат система нуқталари тиш ҳолатда бўлгандагина системанинг кинетик энергияси нолга тенг бўлади.

Кинетик энергия ҳаракатнинг векторли ўлчовини ифодаловчи ҳаракат миқдорига нисбатан универсал катталиқ ҳисобланади, чунки механик ҳаракат бошқа хил ҳаракатларга, масалан, иссиқлик ёки электрга айланганда, механикада тушуниладиган ҳаракат йўналиши ўз маъносини йўқотади.

Механик ҳаракатнинг скаляр ўлчовига кучнинг қуввати, элементар иши ёки чекли кўчишдаги иши каби *ўзаро механик таъсирнинг скаляр ўлчовлари* мос келади. Улар орасидаги муносабатлар кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теорема воситасида ўрнатилади.

✓ Ҳаракатнинг иккала ўлчовини ҳам Ф. Энгельс «Табиат диалектикаси» асарида аниқ изоҳлаб берган: «Шундай қилиб, биз механик ҳаракатнинг икки хил ўлчови борлигини кўрамиз, лекин бу ўлчовларнинг ҳар бири ғоят муайян даражада чекланган донрадаги ҳодисалар учун амал қилишига ҳам ишонч ҳосил қиламиз. Агар мавжуд бўлиб турган механик ҳаракат кўчган тақдирда ҳам механик ҳаракатлигини сақлаб қолса, бундай ҳолда у массанинг тезликка кўпайтмаси тўғрисидаги формула билан ифодаланади. Агар у кўчган тақдирда механик ҳаракат сифатида йўқ бўлиб, потенциал энергия, иссиқлик, электр ва ҳоказолар шаклида яна пайдо бўлса, агар, ҳуллас, у ҳаракатнинг бирон-бир бошқа шаклига айланса, бундай ҳолда ҳаракатнинг бу янги шаклининг миқдори дастлаб ҳаракат қилган массанинг тезлик квадратига кўпайтмасига пропорционалдир. Хуллас, $m\vec{v}$ механик ҳаракатнинг ўзи билан ўлчанадиган механик ҳаракатдир; $\frac{mv^2}{2}$ ўзининг муайян миқдордаги бошқа ҳаракат шаклига айлана олиш қобилияти билан ўлчанадиган механик ҳаракатдир»^{*)}.

Механик система қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатлансин. Системанинг массалар маркази орқали ҳаммиша $O\xi\eta\zeta$ га параллел равишда ҳаракатланувчи $Sxyz$ координаталар системасини ўтказамиз.

Системанинг кинетик энергияси аниқланадиган (21.128) формулада $\vec{v}_v$ система M_v нуқтасининг абсолют тезлигини ифодалайди. Тезликларни қўшиш ҳақидаги теоремага (13.2-§) кўра, M_v нуқтанинг абсолют тезлигини

$$\vec{v}_v = \vec{v}_c + \vec{v}'_v \quad (21.129)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бунда $\vec{v}_c$ билан система массалар марказидаги C нуқтанинг тезлиги (кўчирма тезлик); $\vec{v}'_v$ билан M_v нуқтанинг $Sxyz$ координаталар системасига нисбатан тезлиги (нисбий тезлик) белгиланган.

(21.129) ни (21.128) га қўйсак,

^{*)} Энгельс Ф. Табиат диалектикаси. — Т.: «Ўзбекистон». 1983, 77-б.

$$T = \frac{1}{2} \sum m_v (\vec{v}_C + \vec{v}_v')^2 = \frac{v_C^2}{2} \sum m_v + \vec{v}_C \sum m_v \vec{v}_v' + \frac{1}{2} \sum m_v (v_v')^2$$

ҳосил бўлади, бунда $\sum m_v = M$ — бутун система массаси; $\sum m_v \vec{v}_v' = \frac{d}{dt} \sum m_v \vec{r}_C = \frac{d}{dt} (M \vec{r}_C) = 0$ (чунки координаталар боши C нуқтада бўлгани учун $\vec{r}_C = 0$); $\frac{1}{2} \sum m_v (v_v')^2 = T_C$ — системанинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик энергияси. Системанинг кинетик энергияси учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + T_C. \quad (21.130)$$

(21.130) тенглик системанинг кинетик энергияси ҳақидаги Кёниг теоремасини ифодалайди: система абсолют ҳаракатининг кинетик энергияси бутун система массаси мужассамлашган деб қараладиган система массалар марказининг кинетик энергияси билан системанинг массалар марказига нисбатан кинетик энергияларининг йиғиндисиги тенг.

21.22- §. Қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси

Қаттиқ жисмнинг асосий ҳаракатлари учун кинетик энергияни ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

1. Илгариларда ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблашда унинг барча нуқталари бир хил $\vec{v}_v = \vec{v}$ тезликка эга бўлишини эътиборга оламиз.

$$T = \sum \frac{m_v v_v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_v = \frac{M v^2}{2}, \quad (21.131)$$

бунда $\sum m_v = M$ бутун система массасини ифодалайди.

Бинобарин, илгариларда ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси массаси бутун система массасига тенг система ихтиёрий нуқтасининг кинетик энергиясига тенг.

2. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблашда жисм ихтиёрий M_v нуқтасининг тезлиги $v_v = \omega h_v$ формула ёрдамида аниқланишини эътиборга оламиз, бунда ω — жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги; h_v — жисмнинг M_v нуқтасидан айланиш ўқиғача бўлган масофа.

Шундай қилиб,

$$T = \sum \frac{m_v v_v^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_v h_v^2.$$

Агар бу формулада $I_z = \sum m_v h_v^2$ — жисмнинг айланиш ўқиغا нисбатан инерция моменти эканлигини ҳисобга олсак, кинетик энергия учун қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (21.132)$$

(21.132) дан кўрамизки, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг айланиш ўқиға нисбатан инерция моменти билан унинг бурчак тезлиги квадрати кўпайтмасининг ярмига тенг.

Текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблашда жисмнинг ҳар ондаги ҳаракатини тезликларнинг оний маркази P орқали ўтувчи ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин. Шу сабабли бу ҳолда ҳам (21.132) формулани қўллаш мумкин:

$$T = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \quad (21.132')$$

бунда I_P билан тезликларнинг оний маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр ўтувчи ўққа (айланиш оний ўқиға) нисбатан жисмнинг инерция моменти, ω билан эса айланиш оний бурчак тезлиги белгиланган.

Шундай қилиб, текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси айланиш оний ўқиға нисбатан жисмнинг инерция моменти билан оний бурчак тезлиги квадрати кўпайтмасининг ярмига тенг.

Гюйгенс-Штейнер теоремасини ифодаловчи (20.21) формулага асосан

$$I_P = I_C + M (PC)^2 \quad (21.133)$$

муносабат ўринли бўлади (21.35-расм). Бунда I_C — система массалар маркази орқали айланиш оний ўқиға параллел ўтувчи ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти; PC — мазкур ўқлар орасидаги масофа; M — бутун жисм массаси.

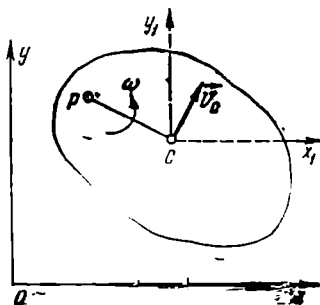
(21.133) ни (21.132) га қўйиб, текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси учун яна қуйидаги ифодани оламиз:

$$T = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 (PC)^2$$

ёки $\omega PC = v_C$ жисм массалар марказининг тезлигини ифодалашини назарда тутсак, қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2. \quad (21.134)$$

Бу формула текис параллел ҳаракатдаги жисм учун Кёниг теоремасини ифодалайди: текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси бутун



21.35- расм.

жисм массаси мужассамлашган деб қараладиган система массалар марказининг кинетик энергияси билан массалар маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўқ аτροφиди айланма ҳаракат кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Эркин қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси учун ҳам (21.134) га ўхшаш формула ўринли бўлади.

4. Сферик ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблашда ҳар ондаги сферик ҳаракатни жисмнинг қўзғалмас нуқтасидан ўтувчи OP айланмиш оний ўқи аτροφиди айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкинлигидан фойдаланамиз. Бу ҳол учун (21.132) формулани қўлласак,

$$T = \frac{1}{2} I_{OP} \omega^2 \quad (21.135)$$

тенглик ўринли бўлади. Бунда I_{OP} — айланиш оний ўқига нисбатан жисмнинг инерция моменти; ω — оний бурчак тезлиги.

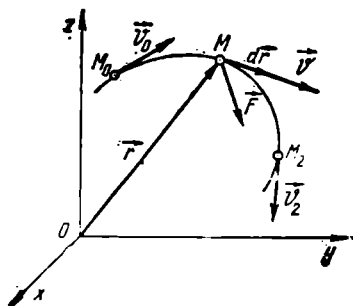
Демак, сферик ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг айланиш оний ўқига нисбатан инерция моменти билан оний бурчак тезлиги квадратиغا кўпайтмасининг ярмига тенг.

Қаттиқ жисмнинг асосий ҳаракатлари кинетик энергиясини ифодаловчи формулалардан кўрамизки, кинетик энергия жисмнинг илгарилама ҳаракатини ҳам, айланма ҳаракатини ҳам характерлай олади.

Агар механик система бир-бири билан боғланган бир неча жисмлардан ташкил топган бўлса, бундай системанинг кинетик энергияси система таркибига кирувчи жисмлар кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг бўлади.

21.23-§. Моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Массаси m га тенг M эркин моддий нуқта $\vec{F}$ куч таъсирида қўзғалмас $Oxuz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатлансин (21.36-расм). (16.1) га кўра бундай нуқта учун Нютоннинг иккинчи қонунини



$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

кўринишда ёзиб, бу тенгламанинг иккала томонини $\vec{F}$ куч қўйилган M нуқтанинг элементар кўчиши $d\vec{r} = \vec{v}dt$ га скаляр кўпайтирамиз:

$$m \vec{v} d\vec{v} = \vec{F} d\vec{r}$$

21.36- расм.

ёки

$$d \left(\frac{m \vec{v}^2}{2} \right) = \vec{F} d \vec{r}$$

Бу тенгламада $\vec{v}^2 = v^2$ эканлигини эътиборга олсак,

$$d \left(\frac{m v^2}{2} \right) = \vec{F} d \vec{r} \quad (21.136)$$

ёки

$$d \left(\frac{m v^2}{2} \right) = d' A \quad (21.136')$$

тенгликни оламиз. Бу формула моддий нуқтанинг дифференциал формадаги кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: нуқта кинетик энергиясининг дифференциали нуқтага таъсир этувчи кучнинг элементар ишига тенг.

$$(21.136) \text{ нинг иккала томонини } dt \text{ га бўлиб, } \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v} = N$$

кучнинг қувватини ифодалашини назарда тутсак, нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m v^2}{2} \right) = N. \quad (21.137)$$

Бинобарин, моддий нуқта кинетик энергиясидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг қувватига тенг.

(21.136) ни нуқтанинг бошланғич ва охири ҳолатлари M_0 ва M_1 га мос чегараларда интеграллаймиз:

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F} d\vec{r} \quad (21.138)$$

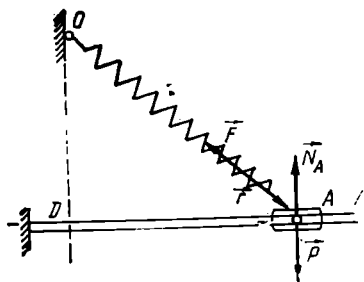
ёки

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = A, \quad (21.139)$$

бунда $A = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F} d\vec{r}$ — кучнинг нуқта M_0 ҳолатдан M_1 ҳолатга

кўчишидаги иши. (21.138) ёки (21.139) тенгламалар нуқтанинг чекли формадаги кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: чекли кўчишидаги нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши унга таъсир этувчи кучнинг худди шу кўчишидаги ишига тенг.

Кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, асосан қуйидаги икки хил масалаларни ечиш мумкин. Биринчи хил масалаларда нуқтанинг бошланғич ёки охири тезлиги аниқланади. Нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқламай туриб, нуқтага таъсир этувчи кучнинг ишини ҳисоблаш мумкин бўлган ҳолда мазкур теоремани қўллаш мақсадга мувофиқ бўлади, албатта. Иккинчи хил



21.37- расм.

масалаларда нуқтанинг тезлиги берилганда унга таъсир этувчи кучларнинг иши (хусусан, куч ёки ёй координатаси) аниқланади. Нуқтага таъсир этувчи кучнинг аналитик ифодаси номаълум бўлганда ёки нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқламай туриб бу хил масалаларни (21.139) формула ёрдамида ечиш аниқса қўл келади.

21.16- масала. O нуқтага бириктирилган ва бикирлиги c га тенг пружина таъсирида m массали A ползун (21.37- расм) горизонтал AD йўналтирувчи бўйлаб ишқаланмасдан ҳаракатланади. Агар ползун бошланғич пайтда A_0 нуқтадан бошланғич тезликсиз қўйиб юборилса, ползун D нуқтада қандай тезлик билан ўтади? $AD = a$ ва ползун D нуқтада бўлганда пружинанинг узунлиги l га тенг ҳамда деформацияланмаган деб қаралади.

Ечиш. Ползунга пружинанинг эластиклик кучи $\vec{F} = -c \vec{r}$ (бунда $\vec{r}$ — A нуқтанинг O нуқтага нисбатан радиус-вектори), оғирлик кучи $\vec{P}$ ва нормал реакция кучи $\vec{N}_A$ таъсир этади. $\vec{P}$ ва $\vec{N}_A$ кучлар A нуқтанинг ҳаракат йўналишига перпендикуляр бўлгани учун бу кучларнинг иши нолга тенг бўлади. Пружинанинг чўзилиши $\Delta l = \sqrt{l^2 + a^2} - l$ бўлгани учун (21.107) га кўра эластиклик кучининг иши қуйидагича ҳисобланади:

$$A = \int_{(\sqrt{l^2+a^2}-l)}^0 c r dr = \frac{c}{2} (\sqrt{l^2+a^2} - l)^2, \quad (1)$$

$v_0 = 0$ ва (1) ни (21.139) га қўйсак,

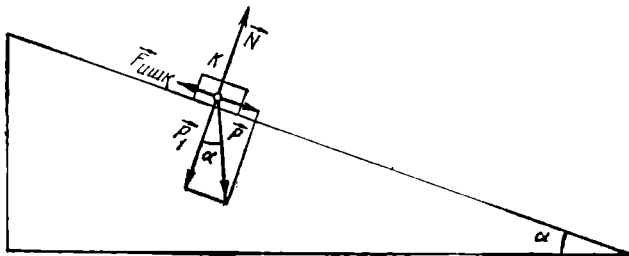
$$\frac{m v^2}{2} = \frac{c}{2} (\sqrt{l^2+a^2} - l)^2,$$

бундан эса

$$v = (\sqrt{l^2+a^2} - l) \sqrt{\frac{c}{m}}$$

ҳосил бўлади.

21.17- масала. K жисм (21.38- расм) ғадир-будур қия текисликда тинч ҳолатда туради. Текислиكنинг қиялик бурчаги α ва $f_0 > \operatorname{tg} \alpha$, бунда $f_0 \rightarrow$ тинч



21.38- расм.

ҳолатдаги ишқаланиш коэффициенти. Агар жисмга бошланғич v_0 тезлик берилса ҳамда ишқаланиш коэффициенти f га тенг бўлса, жисм қандай s йўлни ўтиб тўхтайдиган?

Ечиш. K жисмини массаси унинг оғирлик марказидаги M нуқтада мужассамлашган моддий нуқта деб қараймиз.

M нуқтага унинг оғирлик кучи $\vec{P} = m \vec{g}$, ишқаланиш кучи $\vec{F}^{\text{ишқ}}$ ва текисликнинг нормал реакция кучи $\vec{N}$ таъсир этади.

Нуқтага таъсир этувчи кучлар ўзгармас ҳамда нуқтанинг охириги пайтдаги тезлиги $v = 0$ эканлигини назарда тутсак, (21.139) формула қуйидаги кўринишга олади:

$$-\frac{m v_0^2}{2} = (P \sin \alpha - F^{\text{ишқ}}) s, \quad (1)$$

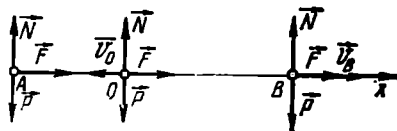
бунда v_0 — нуқтанинг бошланғич пайтдаги тезлиги; s — изланаётган ўтилган йўл. (1) да

$$m = \frac{P}{g}, \quad F^{\text{ишқ}} = f P_1 = f P \cos \alpha$$

эканлигини эътиборга олсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$s = \frac{v_0^2}{2 g (f \cos \alpha - \sin \alpha)}.$$

21.18- масала. Массаси 3 кг бўлган моддий нуқта горизонтал тўғри чизиқ бўйлаб 5 м/с тезлик билан чап томонга ҳаракат қилади. Унга ўнг томонга йўналган ўзгармас куч таъсир эттирилади ва унинг таъсири 30 с дан кейин тўхтатилади, шунда нуқтанинг тезлиги 55 м/с бўлиб, ўнг томонга йўналади. Шу кучнинг миқдори ва бажарган иши топилинсин.



21.39- расм.

Ечиш. Моддий нуқта бошланғич пайтда координаталар бошида бўлиб, горизонтал x ўқ бўйлаб ҳаракатланади деб қараймиз (21.39- расм).

Нуқтага ўнг томонга йўналган ўзгармас $\vec{F}$ куч, оғирлик кучи $\vec{P}$ ва нормал реакция кучи $\vec{N}$ таъсир этади. Нуқта ҳаракат миқдорининг (21.17) тенглик билан ифодаланадиган x ўқ бўйича ўзгариши ҳақидаги теоремага кўра

$$m v_{Bx} - m v_{0x} = \int_0^t F_x dt = F_x t.$$

Бунда $v_{0x} = -v_0 = -5$ м/с, $v_{Bx} = v_B = 55$ м/с, $F_x = F$ эканлигини эътиборга олсак,

$$F = \frac{m (v_B + v_0)}{t} = \frac{3 (55 + 5)}{30} = 6 \text{ Н.}$$

Оғирлик кучи $\vec{P}$ ва нормал реакция кучи $\vec{N}$ ҳаракат йўналишига перпендикуляр бўлгани учун уларнинг иши нолга тенг бўлади. Шу сабабли (21.139) га кўра $\vec{F}$ кучининг иши

$$A = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m}{2} (v_B^2 - v_0^2) = \frac{3}{2} (55^2 - 5^2) = 4500 \text{ Ж} = 4,5 \text{ кЖ.}$$

Нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгаришида нуқта тезлиги йўналишининг ўзгариши алоҳида аҳамиятга эгалиги, нуқта кинетик энергиясининг ўзгаришига эса мутлақо таъсир этмаслиги бу масалада яққол намоён бўлаяпти.

21.24-§. Система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Система кинетик энергияси билан система нуқталарига қўйилган кучларнинг иши орасидаги муносабатни аниқлаймиз. $M_1, M_2, \dots, M_N$ нуқталардан ташкил топган системанинг ихтиёрий M_v нуқтасига таъсир этувчи ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{F}_v^e$, ички кучларникини эса $\vec{F}_v^i$ билан белгилаймиз.

Системанинг ҳар бир нуқтаси учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаймиз. Айтайлик, система бошланғич ҳолатдан исталган ҳолатга кўчганда унинг ихтиёрий нуқтаси M_{0v} ҳолатдан M_v ҳолатга кўчсин ҳамда бу нуқтанинг тезлиги $\vec{v}_{0v}$ дан $\vec{v}_v$ га ўзгарсин (21.40-расм). У ҳолда (21.139) га кўра системанинг ҳар бир нуқтаси учун

$$\frac{m_v v_v^2}{2} - \frac{m_v v_{0v}^2}{2} = A_v^e + A_v^i, \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бунда $A_v^e = \vec{F}_v^e \cdot \vec{r}_v$ кучнинг; $A_v^i = \vec{F}_v^i \cdot \vec{r}_v$ кучнинг $M_{0v}M_v$ кўчишдаги ишлари.

Юқоридаги барча тенгликларни қўшсак,

$$\sum \frac{m_v v_v^2}{2} - \sum \frac{m_v v_{0v}^2}{2} = \sum A_v^e + \sum A_v^i$$

ёки (21.128) га кўра

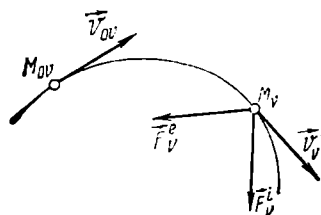
$$T - T_0 = A^e + A^i \quad (21.140)$$

тенглик ўринли бўлади. Бунда T_0 ва T — системанинг бошланғич ва исталган пайтдаги кинетик энергиялари; A^e ва A^i барча ташқи ва ички кучлар системасининг ишлари.

(21.140) тенглама *чекли вақт ичида система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *системанинг бир ҳолатдан бошқа ҳолатга кўчишида кинетик энергиясининг ўзгариши система нуқталарига таъсир этувчи ташқи ва ички кучларнинг мос кўчишлардаги ишларининг йиғиндисига тенг.*

Системанинг жуда кичик вақт ичидаги элементар кўчиши учун бу теорема

$$dT = d'A^e + d'A^i \quad (21.141)$$



21.40-расм.

кўралишида ёзилади. Бунда $d'A^e$ ва $d'A^i$ лар мос равишда система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи ва ички кучларнинг элементар ишларини ифодалайди.

(21.141) ни dt га бўлиб, $\frac{d'A^e}{dt} = N^e$ ташқи кучларнинг қуввати, $\frac{d'A^i}{dt} = N^i$ ички кучларнинг қуввати эканлигини эътиборга олсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i. \quad (21.142)$$

(21.142) тенглама система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг дифференциал кўринишини ифодалайди: система кинетик энергиясидан вақт бўйича олинган ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи ва ички кучлар қувватларининг йиғиндисига тенг.

Аввалги теоремалардан фарқли ўлароқ (21.140) — (21.142) тенгламаларда ички кучлар ҳам қатнашади. Агар механик система ўзгармас системадан ёки абсолют қаттиқ jisмдан иборат бўлса, 21.19-§ да кўрганимиздек, бу ҳолда ички кучлар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади ҳамда (21.140) тенглама

$$T - T_0 = A^e \quad (21.143)$$

кўринишда ёзилади.

(21.140) — (21.142) тенгламаларда ташқи ва ички кучлар таркибида актив ҳамда боғланиш реакция кучлари қатнашади. Агар система нуқталари идеал силлиқ сирт ёки эгри чизиқ бўйича ҳаракатланса, боғланиш реакция кучи фақат нормал ташкил этувчидан иборат бўлиб, ҳаракат йўналишига перпендикуляр йўналади, шунинг учун унинг иши нолга тенг бўлади. Бу ҳолда система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи тенгламаларда идеал боғланиш реакция кучлари қатнашмайди.

21.19-масала. Радиуси r_1 ва массаси M_1 га тенг чигирик барабанига L айлантурувчи момент қўйилган. Барабанга ўралган трос учига M_2 массали C ғилдиракнинг ўқи бириктирилган (21.41-расм). Ғилдирак горизонт билан α бурчак ташкил этувчи қия текислик бўйлаб сирпанмай юқорига думалайди. Барабан n марта айланишда қандай бурчак тезликка эга бўлади? Бошланғич пайтда система тинч ҳолатда бўлган. Троснинг массаси ва ишқаланиш ҳисобга олинмасин.

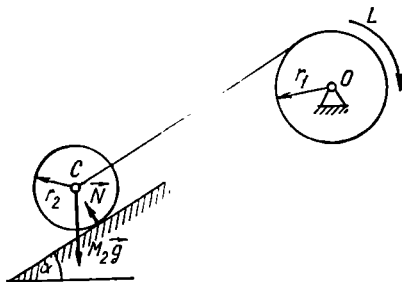
Ечиш. Барабан ва ғилдиракдан ташкил топган системага ғилдиракнинг оғирлик кучи M_2g қия текислиكنинг нормал реакция кучи $\vec{N}$ ва ўзгармас L момент таъсир этади. Барабанинг бурчак тезлиги ω ни аниқлаш учун система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.143) тенгламадан фойдаланамиз:

$$T - T_0 = A^e. \quad (1)$$

Системанинг кинетик энергияси

$$T = T_1 + T_2, \quad (2)$$

бунда T_1 ва T_2 мос равишда ғилдирак ва барабанинг кинетик энергиясини ифодалайди.



21.41- расм.

Гилдирак текис параллел ҳаракатда бўлгани учун унинг кинетик энергиясини (21.134) формулага асосан аниқлаймиз:

$$T_1 = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2.$$

Гилдирак доғравий цилиндрдан иборат бўлгани учун $I_C = \frac{M_2 r_2^2}{2}$, сирпанмасдан думалагани учун $v_C = \omega_2 r_2$. Шу сабабли

$$T_1 = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{4} M_2 r_2^2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{4} M_2 v_C^2 = \frac{3}{4} M_2 v_C^2.$$

Трос чўзилмагани туфайли C нуқтанинг тезлиги барабан гардишидаги нуқтанинг чизикли тезлигига тенг бўлади, яъни $v_C = \omega r_1$. Шундай қилиб,

$$T_1 = \frac{3}{4} M_2 \omega^2 r_1^2 \quad (3)$$

Барабан қўзғалмас O ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун унинг кинетик энергиясини (21.132) формула ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{4} M_1 r_1^2 \omega^2. \quad (4)$$

(3) ва (4) ни (1) га қўйсак,

$$T = \frac{3}{4} M_2 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{4} M_1 r_1^2 \omega^2 = \frac{1}{4} r_1^2 \omega^2 (3M_2 + M_1).$$

Бошланғич пайтда система тинч ҳолатда бўлгани учун

$$T_0 = 0. \quad (6)$$

Барабан n марта айлانганда системага таъсир этувчи барча кучларнинг ишини ҳисоблаймиз. Гилдирак сирпанмай думалагани учун барабан n марта айланганда унинг марказидаги C нуқта қия текислик бўйлаб $s = 2\pi r_1 n$ масофага кўчади, барабан эса $\varphi = \frac{s}{r_1} = 2\pi n$ бурчакка айланади. Нормал реакция кучи $\vec{N}$ нинг йўналиши гилдиракнинг кўчишига перпендикуляр бўлгани учун унинг s кўчишидаги иши нолга тенг. Шу сабабли система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг иши

$$A = A_1 + A_2$$

га тенг бўлади. Бунда A_1 гилдирак оғирлик кучи $M_2 \vec{g}$ нинг қия текислик бўйлаб юқорига s масофага кўчишдаги иши бўлиб, $A_1 = -M_2 g s \sin \alpha = -M_2 g \cdot 2\pi r_1 n \sin \alpha$; A_2 эса L моментнинг барабан $\varphi = 2\pi n$ бурчакка айлангандаги ишини ифодалайди ҳамда

$$A_2 = L \varphi = L \cdot 2\pi n.$$

Шундай қилиб,

$$A = 2\pi n (L - M_2 g r_1 \sin \alpha). \quad (7)$$

(5), (6) ва (7) ни (1) га қўйиб, изланаётган ω бурчак тезликини аниқлаймиз:

$$\omega = \frac{2}{r_1} \sqrt{2\pi n \frac{L - M_2 g r_1 \sin \alpha}{M_1 + 3M_2}}.$$

21.25-§. Потенциалли куч майдони

Куч қўйилган нуқтанинг ҳаракат қонунини билмай туриб, ишни ҳисоблаш мумкин бўлган яна бир туркум кучлар ҳақида тўхталамиз. Бунинг учун куч майдони тушунчасини киритамиз.

Фазонинг бирор соҳасидаги моддий нуқтага унинг координаталарига боғлиқ, миқдор ва йўналиши маълум бўлган кучлар таъсир этса, мазкур соҳа *куч майдони* дейилади.

Агар майдон кучлари вақтга боғлиқ бўлмаса, бундай майдон *стационар куч майдони* дейилади.

Агар куч майдони вақтга ҳам боғлиқ бўлса, бундай майдон *стационар бўлмаган куч майдони* дейилади.

Куч элементар ишининг аналитик ифодаси бўлмиш (21.95) формула

$$d'A = X dx + Y dy + Z dz$$

нинг ўнг томонидаги дифференциал уч ҳад бирор $U(x, y, z)$ функциянинг тўлиқ дифференциалига тенг бўлса, бу функция *кучнинг потенциали* ёки *куч функцияси* дейилади. Куч функцияси мавжуд бўлган майдон *потенциалли куч майдони* дейилади. Бундай майдон *кучи потенциалли куч* ёки *консерватив куч* дейилади.

Агар $\vec{F}$ кучнинг координата ўқларидаги проекциялари

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, Y = \frac{\partial U}{\partial y}, Z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (21.144)$$

шартларни қаноатлантирса,

$$d'A = X dx + Y dy + Z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU \quad (21.145)$$

тенглик ўринли бўлади. Таърифга кўра, бундай майдон потенциалли куч майдонидан иборат бўлади ҳамда фақат координаталарга боғлиқ $U(x, y, z)$ функция кучнинг потенциалини ифодалайди.

Изоҳ. (21.144) шартлар (22.145) тенглик ўринли бўлишининг фақат етарли шартидан иборат бўлиб, зарурий шартини ифодаламайди. Ҳақиқатан ҳам, агар кучнинг координата ўқларидаги проекциялари қуйидаги шартларни қаноатлантирса,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} + Q \dot{z} - R \dot{y},$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} + R \dot{x} - P \dot{z},$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} + P \dot{y} - Q \dot{x},$$

(бунда P, Q, R лар $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ларнинг ихтиёрий функцияси-дан иборат), у ҳолда

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz +$$

$$+ Qdt(z\dot{x} - \dot{x}\dot{z}) + Rdt(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}) + \\ + Pdt(y\dot{z} - z\dot{y}) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU$$

муносабат ўринли бўлади.

Потенциалли куч майдонида нуқтанинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ҳолатдан $M(x, y, z)$ ҳолатга чекли кўчишидаги иши

$$A = \int_{M_0}^M (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{M_0}^M dU = \\ = U(x, y, z) - U_0(x_0, y_0, z_0)$$

ёки

$$A = U - U_0 \quad (21.146)$$

га тенг бўлади.

Бинобарин, потенциалли кучнинг иши нуқтанинг охириги ва бошланғич ҳолатларига мос бўлган куч функцияси қийматларининг айирмасига тенг бўлиб, нуқтанинг траекториясига ҳамда траектория бўйлаб нуқтанинг қандай қонун асосида кўчишига боғлиқ бўлмайди.

Келгусида куч функцияси бир қийматли, чекли ва бутун майдон бўйича камида биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган потенциалли куч майдонини қараймиз.

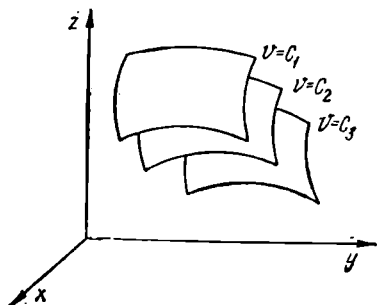
(21.146) дан кўрамизки, нуқта ёпиқ траектория бўйлаб ҳар гал бирор белгиланган нуқтадан ўтганда унинг иши нолга тенг бўлади, чунки бу ҳолда нуқтанинг бошланғич ва охириги ҳолатлари устма-уст тушади, бинобарин, $U = U_0$ бўлиб, $A = 0$ тенглик бажарилади.

21.26-§. Тенг потенциалли сирт. Куч чизиқлари

Куч функциясининг қийматлари бир хил бўлган потенциалли куч майдонидаги нуқтанинг геометрик ўрни *тенг потенциалли сирт* дейилади. Шундай қилиб, тенг потенциалли сиртнинг тенгламасини

$$U(x, y, z) = C \quad (21.147)$$

кўринишда ёзиш мумкин. C га турлича қийматлар бериб, тенг потенциалли сиртлар тўпламини оламиз (21.42-расм).

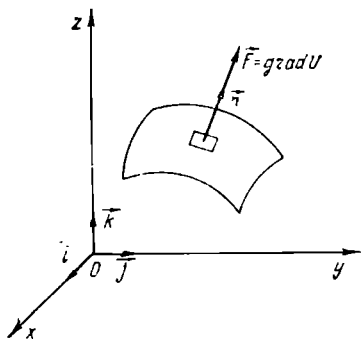


21.42- расм.

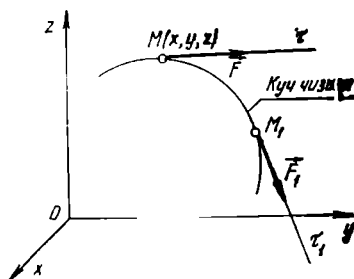
Агар нуқта $U(x, y, z) = C$ тенг потенциалли сирт бўйича элементар кўчиш олса, у ҳолда $dU = 0$ тенглик бажарилади. Шу сабабли

$$d'A = \vec{F} d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = 0, \quad (21.148)$$

яъни тенг потенциалли сирт бўйлаб ҳаракатланувчи нуқтага таъсир этувчи кучнинг элементар иши нолга тенг. (21.148) дан кўрамизки,



21.43- расм.



21.44- расм.

$|\vec{F}| \neq 0$. $|d\vec{r}| \neq 0$ бўлгани учун $\cos(\vec{F}, d\vec{r}) = 0$. Яъни $\vec{F}$ куч ҳар онда тенг потенциалли сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналади (21.43- расм). Шундай қилиб, скаляр функциянинг вектор градиенти тушунчасидан фойдалансак,

$$\vec{F} = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad (21.149)$$

деб ёзиш мумкин. Бунда $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ лар координата ўқларининг бирлик векторларини ифодалайди.

Куч майдонида тенг потенциалли сирт билан бир қаторда куч чизиғи тушунчаси ҳам киритилади. *Куч чизиғи* учун ҳар бир нуқта-сида унга ўтказилган уринма берилган майдон кучига коллинеар бўлган чизиқ олинади (21.44- расм). Куч чизиғининг x, y, z координаталарга нисбатан дифференциал тенгламасини $d\vec{r}$ ва $\vec{F}$ векторларнинг коллинеарлик шартидан фойдаланиб,

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad (21.150)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

21.27-§. Потенциал энергия

Потенциалли куч майдонида кучнинг потенциали U билан бир қаторда майдоннинг бирор нуқтасидаги тўпланган энергия миқдори-ни ифодаловчи ва потенциал энергия деб аталадиган бошқа Π функ-цияни киритиш мумкин.

Моддий нуқта бирор M ҳолатдан бошланғич M_0 ҳолатга кўчи-шида унга таъсир этувчи майдон кучларининг иши *майдоннинг бе-рилган M нуқтадаги Π потенциал энергияси* дейилади.

Шундай қилиб,

$$\Pi = A = U_0 - U, \quad (21.151)$$

бунда U_0 ўзгармас бўлиб, ҳаракатдаги нуқтанинг бошланғич ҳолатига боғлиқ бўлади. Шу сабабли *майдоннинг бирор нуқтасидаги потенциал энергия ихтиёрий ўзгармасгача аниқлик билан мазкур нуқтадаги манфий шиора билан олинган куч функциясига тенг бўлади.*

Агар нуқтанинг бошланғич ҳолати $U_0 = 0$ нуқтада олинса,

$$\Pi = -U$$

бўлади. Бу тенгликни назарда тутиб, элементар иш ва чекли кўчишдаги иш учун қуйидаги ифодаларни ёзиш мумкин:

$$d'A = dU = -d\Pi, \quad A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi. \quad (21.152)$$

Потенциалли куч майдонидаги нуқта ҳар онда $T = \frac{mv^2}{2}$ га тенг кинетик энергияга ва $\Pi = -U$ потенциал энергияга эга бўлади. Бу энергияларнинг йиғиндиси, яъни

$$E = T + \Pi \quad (21.153)$$

моддий *нуқтанинг тўлиқ механик энергияси* дейилади.

21.28-§. Куч функциясини аниқлашга оид мисоллар

Бир жинсли оғирлик кучи майдони, чизиқли эластиклик кучи ва Ньютон тортилиш қонунига биноан, таъсир этувчи куч майдонларининг куч функциясини ҳисоблаймиз. Агар куч функцияси маълум бўлса, потенциал энергия (21.152) га асосан ҳисобланади.

1. Бир жинсли оғирлик кучи майдони. Агар майдон кучи миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлса, бундай майдон *бир жинсли* майдон дейилади. Масалан, Ер сиртига яқин масофада оғирлик кучи майдонини бир жинсли майдон деб қараш мумкин. Ер сиртида қўзғалмас *Охуз* координаталар системасини олиб, z ўқни вертикал юқорига йўналтирамиз (21.45-расм), бу ҳолда бир жинсли оғирлик кучи майдонидаги нуқтага таъсир этувчи $\vec{P}$ кучнинг координатага ўқларидаги проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -P = -mg. \quad (21.154)$$

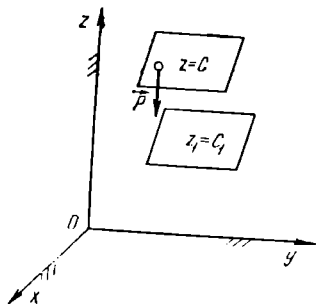
(21.95) га асосан P кучнинг элементар ишини ҳисоблаймиз:

$$d'A = Xdx + Ydy + Zdz = -mgdz = d(-mgz) = dU.$$

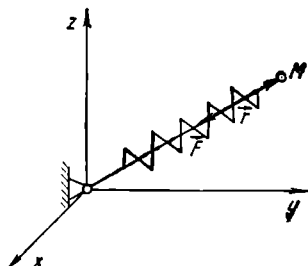
Бу тенгликдан кўрамизки, $\vec{P}$ кучнинг элементар иши $-mgz$ функциянинг тўлиқ дифференциалига тенг бўлгани учун оғирлик кучи майдони потенциалли майдондан иборат бўлади. Бинобарин, оғирлик кучи майдонининг куч функцияси

$$U = -mgz + \text{const.} \quad (21.155)$$

бўлади. Кўрилаётган ҳолда $U = C$ ёки $z = \text{const}$ тенглик билан ифодаланадиган тенг потенциалли сиртлар горизонтал текисликлардан иборат бўлади.



21.45- расм.



21.46- расм.

2. Чизиқли эластиклик кучи майдони. Пружинанинг чизиқли эластиклик кучи

$$\vec{F} = -c\vec{r}$$

формуладан аниқланади (21.46- расм). Бунда c — пружинанинг кирлик коэффициенти; $\vec{r}$ — пружинанинг эркин учигаги нуқтанинг радиус-вектори.

Пружинанинг маҳкамланган O учига координаталар бошини олиб, x, y, z ўқларга $\vec{F}$ кучни проекциялаймиз.

$$X = -cx, Y = -cy, Z = -cz.$$

Бинобарин, кучнинг элементар иши

$$d'A = Xdx + Ydy + Zdz = -c(xdx + ydy + zdz)$$

формуладан аниқланади. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ тенгликни дифференциаллаб,

$$rdr = \frac{1}{2} d(r^2) = xdx + ydy + zdz$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$d'A = -crdr = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right) = dU$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликни интеграллаб, куч функциясини аниқлаймиз:

$$U = -\frac{c}{2}r^2 + const = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + const. \quad (21.155)$$

Кўрилатган ҳолда $U = C$ тенг потенциалли сиртлар $r = const$ бўлган сфералардан иборат.

3. Ньютон тортилиш кучи майдони. Массаси m_1 га тенг M нуқтага доимо қўзғалмас C марказга йўналган ва (21.108) формула ёрдамида аниқланадиган

$$\vec{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

Ньютон тортилиш кучи таъсир этсин (21.31-расмга қаранг). Бунда f — тортилиш доимийси; m_2 — тортилиш марказидаги нуқтанинг массаси; $\vec{r}$ — M нуқтанинг C нуқтага нисбатан радиус-вектори.

(11.109) га кўра $\vec{F}$ кучнинг элементар иши учун

$$d'A = -f m_1 m_2 \frac{dr}{r^2} \quad (21.156)$$

формула ўринли бўлади. Бу тенгламани интеграллаб, куч функциясини аниқлаймиз:

$$U = f \frac{m_1 m_2}{r} + const. \quad (21.157)$$

Бу ҳолда ҳам тенг потенциалли сиртлар маркази координаталар бошидаги сфералардан иборат бўлади.

21.29-§. Моддий нуқта ва механик система учун энергиянинг сақланиш қонуни

(21.152) га кўра $A = \Pi_0 - \Pi$ бўлгани учун моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.139) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi$$

ёки

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi_0 = h,$$

бунда h — ўзгармас бўлиб, бошланғич пайтдаги тўлиқ механик энергияни ифодалайди.

(21.153) га кўра $T + \Pi = E$ тўлиқ механик энергияни ифодалайди. Бинобарин, *энергия интеграл*и деб аталадиган

$$E = T + \Pi = h \quad (21.158)$$

тенглик ўринли бўлади.

(21.158) формула *моддий нуқта механик энергиясининг сақланиш қонуни*ни ифодалайди: *потенциалли куч майдонида ҳаракатланётган нуқтанинг тўлиқ механик энергияси ўзгармасдан қолади.*

Агар механик система нуқталарига таъсир этувчи кучлар потенциалга эга бўлса, у ҳолда системанинг ҳар бир нуқтасига қўйилган кучларнинг иши (21.152) га кўра

$$A_v = \Pi_{0v} - \Pi_v \quad (21.159)$$

формуладан аниқланади. Шу сабабли система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи ва ички кучлар ишларининг йиғиндиси қуйидагига тенг бўлади:

$$A = \sum A_v = \sum \Pi_{0v} - \sum \Pi_v = \Pi_0 - \Pi. \quad (21.160)$$

Бунда $\Pi_0 = \sum \Pi_{0v}$ ва $\Pi = \sum \Pi_v$ мос равишда система нуқталарига таъсир этувчи барча кучларнинг бошланғич ва охири пайтдаги потенциал энергияларининг йиғиндисини ифодалайди.

(21.160) ни система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.140) формулага қўйсак,

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi$$

ёки

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 \quad (21.161)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Бу тенглама *механик система энергиясининг сақланиш қонунини* ифодалайди: *агар система нуқталарига таъсир этувчи ташқи ва ички кучлар потенциалга эга бўлса, у ҳолда мазкур системанинг тўлиқ энергияси ўзгармасдан қолади.*

Механик энергиянинг сақланиш қонуни ўринли бўлган механик система *консерватив система* дейилади.

Моддий нуқта ёки система нуқталарига потенциалга эга бўлмаган қаршилик кучлари (масалан, ишқаланиш кучи) таъсир этса, механик энергиянинг бир қисми иссиқлик, электр ва бошқа энергияларга айланиш натижасида механик энергия камая боради. Бинобарин, бу ҳолда механик энергиянинг сақланиш қонуни ўринли бўлмайди. Лекин барча кўринишдаги (механик, иссиқлик, электр ва бошқа) энергиялардан ташкил топган тўлиқ энергия, механик система ҳар қандай куч майдонида ҳаракатланса ҳам, ўзгармасдан қолади.

22-БОБ. ҚАТТИҚ ЖИСМ ДИНАМИКАСИ

22.1-§. Қаттиқ жисм динамикасининг асосий масалалари

Статика бўлимида кучлар системаси таъсиридаги қаттиқ жисмнинг мувозанат шартлари ўрганилган эди. Кинематика бўлимида эса қаттиқ жисмнинг ҳаракатини аниқлаш усуллари, ихтиёрий нуқтасининг тезлиги ва тезланишини аниқлаш устида тўхталган эдик. Қаттиқ жисм динамикасида учрайдиган масалаларни асосан қуйидаги икки гурппага ажратиш мумкин: биринчи гурппа масалаларда ҳаракати берилган қаттиқ жисмнинг қандай кучлар системаси таъсирида бўлиши аниқланади; иккинчи гурппага онд масалаларда берилган кучлар таъсирида маълум бошланғич шартларга кўра қаттиқ жисм қандай ҳаракат қилиши, боғланишдаги жисм учун эса боғланиш реакция кучлари ҳам аниқланади.

Қаттиқ жисм ҳаракатини ўрганишда система динамикасининг умумий теоремаларидан фойдаланилади. Кинематика бўлимида кўрганимиздек, эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини мураккаб ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин (12.1-§). Бундай мураккаб ҳаракатни қутб учун танлаб олинган жисм ихтиёрий нуқтасининг илгарилама ҳаракати (кўчирма ҳаракат) ва қутб атрофидаги айланма ҳаракат (нисбий ҳаракат) дан ташкил топган деб қараш мумкин.

Динамика бўлимида қутб учун одатда жисмнинг массалар маркази олинади. Шу сабабли массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремадан (21.5-§) фойдаланиб, жисмнинг илгарилама ҳаракат дифференциал тенгламаси тузилади. Бу теоремани ифодаловчи (21.31) тенгламага кўра

$$M\vec{\omega}_C = \vec{R}^e, \quad (22.1)$$

бу ерда M — бутун жисм массаси; $\vec{\omega}_C$ — қаттиқ жисм массалар марказининг тезланиши; $\vec{R}^e$ — ташқи кучларнинг бош вектори.

Система массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема воситасида жисмнинг массалар маркази атрафидаги айланма ҳаракат дифференциал тенгламаси тузилади. Бу теоремани ифодаловчи (21.86) тенгламага кўра

$$\frac{d\vec{K}'_C}{dt} = \vec{M}_C^e, \quad (22.2)$$

бунда $\vec{K}'_C$ — қаттиқ жисмнинг массалар марказига нисбатан кинетик моменти; $\vec{M}_C^e$ — ташқи кучларнинг массалар марказига нисбатан бош моменти.

(22.1) ва (22.2) тенгламалар воситасида қаттиқ жисм динамикасининг юқорида баён этилган иккита асосий масаласини ечиш мумкин.

Бу бобда қаттиқ жисмнинг оддий ҳаракатлари учун қаттиқ жисм динамикасининг асосий масалалари қандай ечилишини кўриб чиқамиз.

22.2-§. Қаттиқ жисмнинг илгарилама ҳаракат дифференциал тенгламалари

Илгарилама ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг барча нуқталари худди жисмнинг массалар маркази каби ҳаракатланади. Шу сабабли илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси

(22.1) кўринишда олиш мумкин. (22.1) да $\vec{\omega}_C = \ddot{\vec{r}}_C$ эканлигини эътиборга олсак, жисмнинг илгарилама ҳаракатини қуйидаги битта иккинчи тартибли векторли тенглама билан аниқлаш мумкин:

$$M\ddot{\vec{r}}_C = \vec{R}^e \quad (22.3)$$

(22.3) ни иккала томонини қўзғалмас координата ўқларига проекциялаб, қаттиқ жисмнинг илгарилама ҳаракатини ифодаловчи скаляр формадаги учта иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини оламиз:

$$M\ddot{x}_C = R_x^e, \quad M\ddot{y}_C = R_y^e, \quad M\ddot{z}_C = R_z^e \quad (22.4)$$

Илгарилама ҳаракатдаги қаттиқ жисм учун динамиканинг икки асосий масаласи худди моддий нуқта динамикасидаги каби ечилади.

Қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан илгарилама ҳаракатдаги жисм унинг массалар марказига бириктирилган $Sxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатланмайди. Шу сабабли илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моменти

$$\vec{K}_C = 0 \quad (22.5)$$

бўлади.

(22.5) ни (22.2) га қўйиб, илгарилама ҳаракатдаги жисм учун

$$\vec{M}_C^e = 0 \quad (22.6)$$

бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Демак, жисм илгарилама ҳаракатда бўлиши учун ташқи кучларнинг жисм массалар марказига нисбатан бош моменти нолга тенг бўлиши шарт, деган хулосага келамиз.

(22.6) тенглик жисм илгарилама ҳаракатда бўлишининг зарурий шартини ифодалайди. Чунки $\vec{M}_C^e = 0$ бўлишига қарамай, жисм массалар маркази атрофида айланма ҳаракатда бўлиши мумкин.

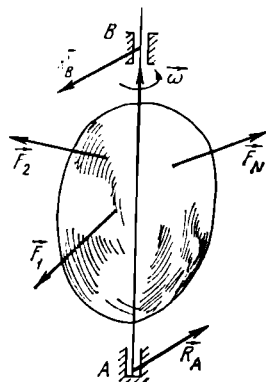
Агар $\vec{M}_C^e = 0$ бўлиши билан биргаликда бошланғич пайтда жисмнинг бурчак тезлиги ҳам нолга тенг бўлса, бундай жисм илгарилама ҳаракатда бўлишини осонликча исботлаш мумкин (бунинг исботи устида тўхталмаймиз).

Шундай қилиб, жисмнинг илгарилама ҳаракатини ўрганиш, массаси бутун система массасига тенг нуқта (массалар маркази) нинг ташқи кучлар бош вектори таъсиридаги ҳаракатини ўрганишга келтирилади.

22.3-§. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси

Қўзғалмас z ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм боғланишдаги жисмдан иборат бўлади. Бундай жисмнинг ҳаракатини ўрганиш учун боғланишдан бўшатиш принцидан фойдаланамиз. Агар ишқаланиш ҳисобга олинмаса, A ва B подшипникларнинг таянч реакцияларини $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ билан алмаштириш мумкин (22.1-расм). Натижада мазкур жисмни $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_N$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ кучлар таъсиридаги эркин жисм деб қараш мумкин.

Қўзғалмас z ўқ атрофида $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракат қилувчи



22.1- расм.

жисмнинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш учун z ўққа нисбатан жисм кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.73) нинг учинчи тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e, \quad (22.7)$$

бунда K_z — жисмнинг z ўққа нисбатан кинетик моменти; $M_z^e = \sum M_z(\vec{F}_i^e)$ жисмга таъсир этувчи $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ кучларнинг z ўққа нисбатан бош моменти. $\vec{R}_A$ ва $\vec{R}_B$ реакция кучлари z ўқни кесиб ўтгани туфайли уларнинг шу ўққа нисбатан моментлари нолга тенг бўлади.

Ишқаланиш кучи мавжуд бўлганда M_z^e таркибига ишқаланиш кучларининг моментини ҳам қўшиш керак.

(21.54) га кўра $K_z = I_z \omega = I_z \varphi$ бўлгани учун $\frac{dK_z}{dt} = I_z \ddot{\varphi}$ тенглик ўринли бўлади. Шу сабабли (22.7) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^e \quad (22.8)$$

ёки

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}_i^e). \quad (22.8')$$

(22.8) ёки (22.8') тенгламалар жисмнинг *қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракати дифференциал тенгламасини* ифодалайди.

Агар жисмнинг z ўқ атрофидаги айланма ҳаракат қонуни $\varphi = \varphi(t)$ ва инерция моменти I_z берилган бўлса, (22.8) дан фойдаланиб, та қи кучларнинг бош моменти M_z^e ни аниқлаш мумкин.

(22.8) тенгламада реакция кучлари қатнашмайди. A ва B таянчларнинг реакция кучларини аниқлаш устида 23.4-§ да батафсил тўхталамиз.

Инерция моменти I_z аниқ ва $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ берилган кучлар таъсиридаги жисмнинг берилган бошланғич шартлардаги ҳаракат қонунини топиш учун (22.8') дифференциал тенгламани мазкур бошланғич шартларга мувофиқ интеграллаш керак.

Агар айланиш ўқи z га нисбатан ташқи кучларнинг бош моменти нолга тенг бўлса, у ҳолда жисмнинг z ўққа нисбатан кинетик моменти ўзгармас бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар $M_z^e = 0$ бўлса, (22.8) га кўра

$$I_z \ddot{\varphi} = 0,$$

бундан

$$K_z = I_z \omega = I_z \omega_0 = \text{const} \quad (22.9)$$

бўлишини кўрамиз. (22.9) да ω, ω_0 лар жисмнинг охириги ва бошланғич пайтларга мос бурчак тезликларини ифодалайди. Бу ҳол

инерцияси бўйича айланаётган жисмнинг ҳаракатига мос келади. Агар бирор машинанинг вали текис айланма ҳаракатда бўлса, бу ҳолда вални ҳаракатга келтирувчи кучларнинг моменти билан ишқаланиш кучларининг моменти миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади.

(22.8') ни қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракат тенгламаларидан бирортаси, масалан, (22.4) нинг биринчи тенгламаси

$$M x_C = R_x^e \quad (22.10)$$

билан солиштирсак, айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг инерция моменти худди илгариланма ҳаракатдаги жисмнинг массасига ўхшаш функцияни бажаради, яъни *инерция моменти айланма ҳаракатдаги жисмнинг инертилик ўлчовини ифодалайди.*

Агар ташқи кучларнинг бош моменти M_z^e ва φ маълум бўлса, (22.8) дан фойдаланиб, жисмнинг айланиш ўқиغا нисбатан инерция моменти I_z ни аниқлаш мумкин.

22.4-§. Физик тебрангич

Массалар маркази орқали ўтмайдиган горизонтал ўқ атрофида ўзининг оғирлик кучи $\vec{P} = Mg$ таъсирида ҳаракатланувчи жисмга *физик тебрангич* дейлади.

Физик тебрангичнинг айланиш ўқи тебрангичнинг *осилиш ўқи* дейлади. ОС масофани a билан белгиласак, тебрангичнинг ҳолати ОС чизиқнинг вертикалдан сгиш бурчаги φ билан аниқланади.

Горизонтал z ўқни тебрангичнинг айланиш ўқи бўйлаб йўналтирамиз (22.2-расм). *Оху* текисликни тебрангичнинг сғирлик маркази C орқали ўтказиб, бу текислик учун расм текислигини оламиз. Тинч ҳолатдан φ бурчакка оғдирилган тебрангичга унинг оғирлик кучи $\vec{P}$ ва O нуқтадаги цилиндрик шарнир реакция кучининг $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ ташкил этувчилари таъсир этади. Ишқаланиш кучини ҳисобга олмаймиз.

Тебрангичга таъсир этувчи кучларнинг z ўққа нисбатан бош моменти

$$M_z^e = M_z(\vec{P}) + M_z(\vec{X}_O) + M_z(\vec{Y}_O) = Pa \sin \varphi$$

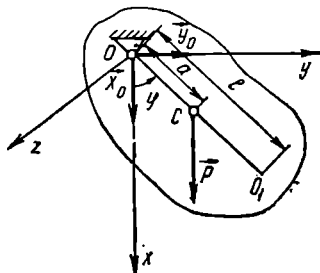
бўлгани учун (22.8) га кўра

$$I_z \ddot{\varphi} = -Pa \sin \varphi$$

ёки

$$\ddot{\varphi} + \frac{Pa}{I_z} \sin \varphi = 0 \quad (22.11)$$

тенгламани оламиз. Бунда I_z тебрангичнинг осилиш ўқиға нисбатан инерция моментини ифодалайди.



22.2- расм.

(22.11) тенглама *физик тебрангичнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси* дейилади. $\sin \varphi \approx \varphi$ муносабат ўринли бўладиган физик тебрангичнинг кичик тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_z} \varphi = 0 \quad (22.12)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$\varphi = A \sin \left(\sqrt{\frac{Mga}{I_z}} t + \varepsilon \right). \quad (22.13)$$

(22.13) дан кўрамизки, φ бурчак тебраниш даври

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mga}} \quad (22.14)$$

бўлган гармоник тебранма ҳаракат қонуни асосида ўзгаради.

(22.11) тенглама математик тебрангичнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси (18.17) дан фақат $\sin \varphi$ олдидаги ўзгармас коэффициентлари билан фарқ қилади.

Тебраниш даври физик тебрангичнинг тебраниш даврига тенг бўлган математик тебрангичнинг узунлигини аниқлаймиз. Бунинг учун (22.11) ва охириги тенгламадаги $\sin \varphi$ лар олдидаги коэффициентларни тенглаймиз:

$$\frac{Pa}{I_z} = \frac{g}{l},$$

бундан

$$l = \frac{I_z g}{Pa} = \frac{I_z}{Ma}. \quad (22.15)$$

(22.15) формула ёрдамида аниқланадиган l катталикка *физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги* дейилади.

(20.21) тенглик билан ифодаланадиган Гюйгенс-Штейнер теоремасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$I_z = I_C + Ma^2, \quad (22.16)$$

бунда I_C билан тебрангичнинг оғирлик маркази орқали z ўққа параллел равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти белгиланган.

(22.16) ни (22.15) га қўйиб, физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги учун

$$l = \frac{I_C}{Ma} + a \quad (22.17)$$

ифодани оламиз.

O нуқтадан оғирлик маркази йўналишида бу катталикни қўйиб, O_1 нуқтани оламиз (22.2-рasm). O_1 нуқта *физик тебрангичнинг силкиниш маркази* дейилади. Оғирлик марказидан силкиниш марказигача бўлган масофа учун

$$a_1 = \frac{l_c}{Ma} \quad (22.18)$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар физик тебрангичнинг осилиш ўқи учун силкиниш маркази орқали ўтувчи ўқни олсак, (22.15) га кўра келтирилган узунлик учун

$$l_1 = \frac{l_c}{Ma_1} + a_1$$

формуланн оламиз. (22.18) га асосан

$$a = \frac{l_c}{Ma_1}.$$

Бинобарин,

$$l_1 = a + a_1 = l$$

тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, O_1 ва O_2 нуқталардан ўтувчи ўқлар учун l_1 ва l келтирилган узунликлар ўзаро тенг бўлади. Бояқча айтганда, силкиниш маркази орқали ўтувчи ўқни осилиш ўқи учун олсак, у ҳолда аввалги осилиш ўқи янги силкиниш марказини ифодалайди, яъни бу ўқлар ўрнини ўзаро алмаштириш мумкин.

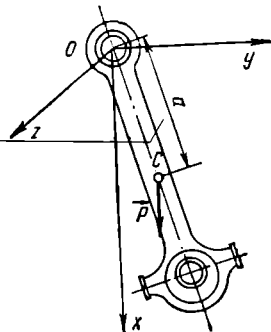
22.5-§. Жисмларнинг инерция моментларини тажриба усули билан аниқлаш

Техникада ихтиёрий шаклдаги бир жинсли ёки бир жинсиз жисмларнинг ўққа нисбатан инерция моментини аниқлашда тажриба усулидан фойдаланилади. Тебратиш усули ва буралма тебраниш усули ана шундай усуллар жумласидандир.

1. Тебратиш усули. Айтайлик, оғирлиги P га тенг шатуннинг оғирлик маркази C орқали ўтувчи, Oz га параллел горизонтал ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаш керак бўлсин. Бунинг учун дастлаб шатуннинг оғирлик марказини аниқлаймиз (7.3-§). Сўнгра шатунни O втулка орқали ўтувчи қўзғалмас Oz горизонтал ўққа осамиз (22.3-расм) ва $\sin \varphi \approx \varphi$ муносабат ўринли бўладиган кичик бурчакка оғдириб тебратамиз. Тебраниш бошлангандан кейин шатуннинг τ вақт ичидаги тебранишлар сони n ни аниқлаймиз. У ҳолда кичик тебраниш даври $T = \frac{\tau}{n}$ формула ёрдамида аниқланади.

Бундай шатунни осилиш ўқи Oz билан устма-уст тушувчи физик тебрангич деб қараш мумкин.

(22.14) га асосан физик тебрангичнинг кичик тебранишлар даври учун



22.3- расм.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Pa}} \quad (22.19)$$

ўринли бўлади. Бунда P — шатуннинг оғирлик кучи; a — оғирлик марказидан осилиш ўқи Oz гача бўлган масофа.

Шундай қилиб шатуннинг, тебраниш даври T , оғирлиги P ва оғирлик марказидан осилиш ўқи гача бўлган a масофа маълум бўлса, шатуннинг осилиш ўқи га нисбатан инерция моменти (22.19) га кўра

$$I_z = \frac{T^2 Pa}{4\pi^2} \quad (22.20)$$

тенглик воситасида аниқланади. Oz ўққа параллел равишда шатуннинг оғирлик марказидан ўтувчи Cz_1 ўққа нисбатан инерция моменти ҳисоблаш учун Гюйгенс-Штейнер теорасини ифодаловчи (20.21) формуладан фойдаланамиз:

$$I_z = I_{z_1} + Ma^2.$$

Бундан

$$I_{z_1} = I_z - Ma^2 = \frac{PaT^2}{4\pi^2} - \frac{Pa^2}{g}. \quad (22.21)$$

I_{z_1} ни билган ҳолда (20.19) га биноан шатуннинг Cz_1 ўққа нисбатан инерция радиусини аниқлаш мумкин:

$$\rho_u = \sqrt{\frac{I_{z_1}}{M}} = \sqrt{\frac{gaT^2}{4\pi^2} - a^2}. \quad (22.22)$$

2. Буралма тебраниш усули. Бу усулда ихтиёрий шаклдаги A жисмнинг инерция моменти аниқлаш учун дастлаб юқори учи қўзғалмас қилиб маҳкамланган симнинг пастки учига инерция моменти I_C маълум бўлган эталон жисм (масалан, бир жинсли диск) осплади ва уни кичик φ бурчакка буриб қўйиб юборилади (22.4-расм, а). Буралган симнинг эластиклик кучи таъсирида эталон жисм буралма тебранма ҳаракатда бўлади. φ бурчак кичик бўлганда эластиклик кучининг моменти буралиш бурчагига пропорционал бўлгани учун буралма тебраниш ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

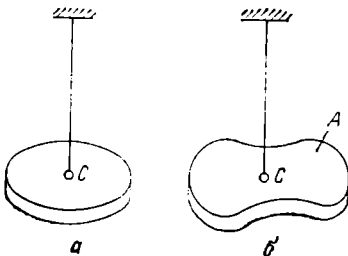
$$I_C \ddot{\varphi} = -k\varphi$$

ёки

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{I_C} \varphi = 0,$$

бунда k — ўзгармас коэффициент бўлиб, симнинг эластиклик хусусиятини ифодалайди.

Эталон жисмнинг тебраниш даври учун



22.4- расм.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_C}{k}} \quad (22.23)$$

формула ўринли бўлади.

Худди шунингдек, эталон жисм ўрнига берилган A жисмни осиб (22.4-расм, б), бу жисмнинг тебраниш даври учун

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I'_C}{k}} \quad (22.24)$$

22.5- расм.

муносабатни оламиз.

(22.23) ва (22.24) тенгликлардан k коэффициентни йўқотиб, A жисмнинг инерция моменти учун

$$I'_C = I_C \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \quad (22.25)$$

формулани оламиз.

22.1- масала. Массаси M_1 ва радиуси r га тенг барабан бир учига M_2 массали C юк осилган трос ёрдамида айлантирилади (22.5- расм). Трос B блок орқали ўтказилган бўлиб, A барабанга ўралган. A барабанга унинг бурчак тезлигига пропорционал бўлган қаршилик моменти m_κ таъсир этади; пропорционаллик коэффициенти α га тенг. Агар бошланғич пайтда система тинч ҳолатда бўлса, барабanning бурчак тезлиги аниқлансин. Трос ва B блокнинг массалари ҳисобга олинмайди. Барабан бир жинсли доиравий цилиндр деб қаралсин.

Ечиш. Барабан ва C юкдан ташкил топган системанинг O нуқтадан расм текислигига перпендикуляр равишда ўтган z ўққа нисбатан ҳаракат дифференциал тенгламасини (22.7) га кўра қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e \quad (1)$$

Бунда K_z — барабан ва C юкдан ташкил топган системанинг z ўққа нисбатан кинетик моменти бўлиб,

$$K_z = I_z \omega + M_2 v \cdot r. \quad (2)$$

(2) да $I_z \omega$ — z ўқ атрофида ω бурчак тезлик билан айланувчи барабanning кинетик моменти; $M_2 v r$ — v тезлик билан илгариланган ҳаракатланувчи C юкнинг кинетик моменти.

$$I_z = \frac{M_1 r^2}{2}, \quad v = \omega r$$

бўлгани учун

$$K_z = \frac{M_1 r^2 \omega}{2} + M_2 r^2 \omega = \frac{r^2 \omega}{2} (M_1 + 2 M_2). \quad (3)$$

Барабан ва юкдан ташкил топган системага таъсир этувчи кучларнинг z ўққа нисбатан бош моменти M_z^e қуйидагича аниқланади:

$$M_z^e = M_2 g r - m_\kappa = M_2 g r - \alpha \omega. \quad (4)$$

(3) ва (4) ни (1) га қўйсак,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{r^2 \omega}{2} (M_1 + 2 M_2) \right] = M_2 g r - \alpha \omega$$

$$\frac{r^2}{2} (M_1 + 2 M_2) \dot{\omega} = M_2 g r - \alpha \omega \quad (5)$$

дифференциал тенгламани олампиз. Бу тенгламада ўзгаришларни ажратиб, бошланғич шартларга мос чегараларда интегралласак,

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{M_2 g r - \alpha \omega} = \frac{2}{r^2 (M_1 + 2 M_2)} \int_0^t dt,$$

$$-\frac{1}{\alpha} \ln (M_2 g r - \alpha \omega) \Big|_0^{\omega} = \frac{2 t}{r^2 (M_1 + 2 M_2)}.$$

Бундан барабаннинг бурчак тезлигини аниқлаймиз

$$\omega = \frac{M_2 g r}{\alpha} (1 - e^{-\beta t}). \quad (6)$$

(6) да $\beta = \frac{2\alpha}{r^2 (M_1 + 2 M_2)}$ белгилаш киритилган.

(6) да $t \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак,

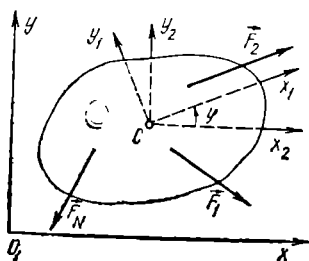
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega = \frac{M_2 g r}{\alpha} = const$$

бўлади.

22.6- §. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламалари

Айтайлик, қаттиқ жисмнинг массаси бирор $O_1 x y$ текисликка нисбатан симметрик жойлашган бўлсин; қаттиқ жисмга таъсир этувчи $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар эса шу текисликда ётсин ҳамда жисм нуқталарининг бошланғич тезлиги мазкур текисликка параллел бўлсин. Бу шартлар бажарилса, қаттиқ жисм текис параллел ҳаракатда бўлади ҳамда бундай ҳаракатни ўрганиш учун жисмни $O_1 x y$ текислик билан кесиш натижасида қирқимда ҳосил бўлган текис шаклнинг ҳаракати ўрганиш кифоя (22.6- расм).

Кинематика бўлимида кўрганимиздек, бундай текис шаклнинг ҳолатини унинг бирор C нуқтасининг координаталари x_C, y_C (динамикада одатда бундай нуқта учун жисмнинг массалар маркази олинади) ва бу нуқтада жисмга маҳкам бириктирилган $C x_1 y_1$ координаталар системаси x_1 ўқининг x ўқ билан ташкил қилган φ бурчаги ёрдамида аниқлаш мумкин.



22.6- расм.

Массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани ифодаловчи (22.1) тенгламани қўзғалмас x ва y ўқларга проекциялаб, x_C ва y_C аниқланадиган қуйидаги иккита дифференциал тенгламани олампиз:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_C &= R_x^e, \\ M y_C &= R_y^e, \end{aligned} \right\} \quad (22.26)$$

бунда M — жисмнинг массаси; R_x^e , R_y^e — бош векторнинг x ва y ўқлардаги проекциялари.

Массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моменти-нинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (22.2) тенгламадан фойдаланиб, φ бурчак аниқланадиган дифференциал тенгламани олиш мумкин.

Агар C нуқтада $O_1 x y$ га параллел равишда ҳаракатланувчи $C x_2 y_2$ координаталар системасини ўтказсак, текис шаклнинг $C x_2 y_2$ координаталар системасига нисбатан нисбий ҳаракати C нуқтада шакл текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи z_2 ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат бўлади. Шу сабабли (21.54) га асосан z_2 ўққа нисбатан текис шаклнинг нисбий ҳаракат кинетик моменти $K_C = I_C \omega = I_C \dot{\varphi}$ муносабат ёрдамида аниқланади. Бинобарин, (22.2) га биноан қуйидаги тенглама ўринли бўлади:

$$I_C \dot{\varphi} = M \dot{c}_C, \quad (22.27)$$

бунда I_C — жисмнинг z_2 ўққа нисбатан инерция моменти;

$M \dot{c}_C$ — z_2 ўққа нисбатан ташқи кучларнинг бош моменти.

Шундай қилиб, (22.26) ва (22.27) тенгламалар системаси қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламаларини ифодалайди.

Агар қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат қонунини ифодаловчи

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t) \quad (22.28)$$

тенгламалар маълум бўлса, яъни массалар марказининг координаталари x_C , y_C ҳамда φ бурчак вақтнинг функцияси сифатида маълум бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг вақт бўйича иккинчи ҳосиласини аниқлаб, (22.26) ва (22.27) га қўйиш натижасида жисм нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг бош векторини аниқлаш мумкин.

Агар жисмга таъсир этувчи кучлар берилган, яъни R_x^e , R_y^e , $M \dot{c}_C$ маълум бўлса, у ҳолда (22.26) ва (22.27) тенгламалар системасини интеграллаб, интеграллаш доимийларини ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқлаш натижасида жисмнинг текис параллел ҳаракат қонунини ифодаловчи (22.28) тенгламаларни олиш мумкин.

Агар $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_N$ кучлар таъсирида текис параллел ҳаракат қилаётган жисм боғланишда бўлса, у ҳолда жисмга таъсир этувчи ташқи кучлар қаторига боғланиш реакция кучларини ҳам қўйиш керак; натижада боғланишдаги жисмнинг текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламалари

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_C &= R_x^e + R_x, \\ M \ddot{y}_C &= R_y^e + R_y, \\ I_C \ddot{\varphi} &= M_C^e + M_C^R \end{aligned} \right\} \quad (22.29)$$

кўринишда ёзилади. Бунда R_x, R_y — боғланиш реакция кучларининг координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси; M_C^e — массалар марказига нисбатан реакция кучларининг бош моменти.

(22.29) тенгламалар қаторига боғланиш тенгламаларини ҳам қўшиш керак. Агар текис параллел ҳаракат қилувчи боғланишдаги жисм массалар марказининг траекторияси маълум бўлса, у ҳолда (22.29) тенгламаларнинг биринчи икkitаси ўрнига бу тенгламаларнинг табиий координата ўқларидаги қуйидаги ifodalаридан фойдаланиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dv_C}{dt} &= R_\tau^e + R_\tau, \\ M \frac{v_C^2}{\rho} &= R_n^e + R_n, \end{aligned} \right\} \quad (22.30)$$

бунда v_C — массалар марказининг тезлиги; ρ — массалар маркази траекториясининг берилган ондаги эгрилик радиуси; R_τ^e, R_n^e — ташқи кучлар бош векторининг уринма ва нормалдаги проекциялари, R_τ, R_n — боғланиш реакция кучларининг уринма ва нормалдаги проекцияларининг йиғиндиси.

Баъзан (22.26) ва (22.27) тенгламаларнинг бирортаси ўрнига кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремадан ҳам фойдаланиш мумкин.

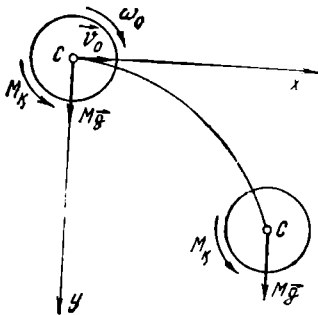
22.2- масала. Диск ўзипинг оғирлик кучи таъсирида вертикал текисликда пастга тушади. Бошланғич пайгда дискка ω_0 бурчак тезлик берилган ҳамда унинг массалар маркази координаталар бошида жойлашган ва горизонтал йўналган v_0 тезликка эга. Дискка унинг массалар маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан айланма ҳаракатига қарама-қарши йўналган ва $\dot{\varphi}$ диск бурчак тезлигининг биринчи даражасига пропорционал бўлган қаршилик моменти таъсир этади (22.7- расм). Пропорционаллик коэффициент β га, z ўққа нисбатан дискнинг инерция моменти I_C га тенг. Дискнинг ҳаракат тенгламаси тузилсин. x ва y ўқлари расмда тасвирланган.

Ечиш. Дискка унинг оғирлик кучи Mg ва қаршилик моменти $M_\kappa = -\beta \dot{\varphi}$ таъсир этади. (22.26) ва (22.27) тенгламалардан фойдаланиб, дискнинг ихтиёрий пайтдаги ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузамиз:

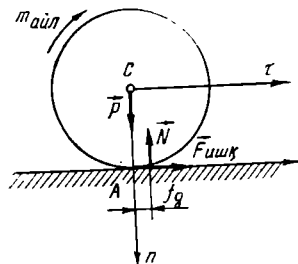
$$M \ddot{x}_C = 0, \quad M \ddot{y}_C = Mg, \quad I_C \ddot{\varphi} = -\beta \dot{\varphi}$$

ёки

$$\ddot{x}_C = 0, \quad \ddot{y}_C = g, \quad \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\frac{\beta}{I_C} \dot{\varphi}. \quad (1)$$



22.7- расм.



22.8- расм.

Бу тенгламаларни $t = 0$ да $\dot{\varphi} = \omega_0$, $x_C = v_0$, $\dot{y}_C = 0$ бошланғич шартлар бўйича интеграллаймиз:

$$\dot{x}_C = v_0, \quad \dot{y}_C = g t, \quad \int_{\omega_0}^{\dot{\varphi}} \frac{d\dot{\varphi}}{\varphi} = -\frac{\beta}{I_C} \int_0^t dt$$

ёки

$$\dot{x}_C = v_0, \quad \dot{y}_C = g t, \quad \dot{\varphi} = \omega_0 e^{-\frac{\beta}{I_C} t}$$

Ҳосил бўлган тенгламаларни $t = 0$ да $x_C = 0$, $y_C = 0$, $\varphi = 0$ бошланғич шартлар асосида интегралласак,

$$x_C = v_0 t, \quad y_C = \frac{g t^2}{2}, \quad \varphi = \omega_0 \int_0^t e^{-\frac{\beta}{I_C} t} dt =$$

$$= -\frac{I_C \omega_0}{\beta} e^{-\frac{\beta}{I_C} t} \Big|_0^t = \frac{I_C \omega_0}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{I_C} t}).$$

лар ҳосил бўлади, бунда φ орқали бошланғич пайтда горизонтал ҳолатни эгалловчи диск диаметрининг x ўқ билан ихтиёрий пайтда ташкил қилган бурчаги белгиланган.

Шундай қилиб, дисkning ҳаракат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$x_C = v_0 t, \quad y_C = \frac{g t^2}{2}, \quad \varphi = \frac{I_C \omega_0}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{I_C} t}).$$

22.3- масала. Радиуси r га тенг ғилдирак тўғри чизикли горизонтал рельсда $m_{ал} = \frac{5}{2} f P r$ айлантурувчи момент таъсирида ҳаракатланади (22.8- расм); бунда f — сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти, P — ғилдиракнинг оғирлиги. Агар думалашдаги ишқаланиш коэффициенти $f_0 = \frac{1}{4} f r$ бўлса, ғилдиракнинг рельсга тегиб турган A нуқтасининг тезлиги аниқлансин. Ғилдирак массаси унинг гардиш бўйлаб текис тақсимланган. Бошланғич пайтда ғилдирак тинч ҳолатда бўлган.

Ечиш. Ғилдиракка унинг оғирлик кучи $\vec{P}$, A нуқтадан f_{∂} масофага қўйилган нормал реакция кучи $\vec{N}$, сирпанишдаги ишқаланиш кучи $\vec{F}_{ишқ}$ (Кулон қонунига кўра $\vec{F}_{ишқ} = f N$), айлантирувчи момент $m_{айл} = \frac{5}{2} f P r$ таъсир этади.

Ғилдиракнинг массалар маркази тўғри чизиқли ҳаракатда ($\rho = \infty$) бўлади. Шу сабабли (22.30) ва (22.27) тенгламалардан фойдаланиб ғилдиракнинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузамиз:

$$\frac{P}{g} \frac{dv_C}{dt} = f \cdot N, \quad (1)$$

$$\frac{P}{g} \frac{v_C^2}{\rho} = P - N, \quad (2)$$

$$I_C \ddot{\Phi} = -F_{ишқ} \cdot r - f_{\partial} \cdot N + m_{айл}. \quad (3)$$

(2) да $\rho = \infty$ $v_C \neq 0$ бўлгани учун

$$P - N = 0, \Rightarrow N = P. \quad (4)$$

(4) ни (1) га қўйиб, мос бошланғич шартларда интегралласак,

$$\frac{P}{g} \int_0^{v_C} dv_C = f P \int_0^t dt, \Rightarrow v_C = f g t. \quad (5)$$

$$(3) \text{ да } I_C = \frac{P}{g} r^2, F_{ишқ} = f \cdot N = f P, f_{\partial} = \frac{1}{4} f r,$$

$m_{айл} = \frac{5}{2} f P r$ эканлигини эътиборга олиб, мос бошланғич шартларда интегралласак,

$$\frac{P}{g} r^2 \int_0^{\dot{\Phi}} d\dot{\Phi} = \int_0^t \left(-f P r - \frac{1}{4} f P r + \frac{5}{2} f P r \right) dt,$$

бундан

$$\dot{\Phi} = \frac{5}{4} \frac{f g t}{r} \quad (6)$$

бўлишини аниқлаймиз.

(10.6) дан фойдаланиб, A нуқта тезлигини аниқлаймиз:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{AC}. \quad (7)$$

(7) ни горизонтал x ўққа проекцияласак,

$$v_{Ax} = v_C - v_{AC} = v_C - r \dot{\Phi} \quad (8)$$

ёки (5) ва (6) ни эътиборга олсак,

$$v_{Ax} = f g t - \frac{5}{4} f g t = -\frac{1}{4} f g t$$

тенглик ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, A нуқта тезлигининг миқдори $v_A = -\frac{1}{4} f g t$ га тенг ҳамда x ўққа қарама-қарши йўналади.

22.4- масала. Массаси m га тенг A диск гардишга B учи қўзғалмайдиган қилиб боғланган ингичка ип ўралган. Диск ипни чуватиб, бошланғич тезликсиз пастга тушади (22.9- расм). Дискнинг A нуқтадан диск текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўқи h баландликдан тушганда унинг тезлиги аниқлансин ва ипнинг тортилиш кучи топилсин.

Ечиш. Диск боғланишдаги жисмдан иборат. Ипни фикран кесиб, унинг дисска таъсирини таранглик кучи $\vec{S}$ билан алмаштирсак, дискни оғирлик кучи $m\vec{g}$ ва таранглик кучи $\vec{S}$ таъсиридаги эркин жисм деб қараш мумкин. Дискнинг массалар марказидаги A нуқта x ўқ бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракатда бўлади. Шу сабабли массалар марказининг ҳаракатини аниқлаш учун (22.26) нинг биринчи тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x}_A = mg - S$$

ёки

$$m\omega_A = mg - S, \quad (1)$$

бунда $\ddot{x}_A = \omega_A$ — A нуқтанинг тезланиши. (1) дан S ни аниқлаймиз:

$$S = m(g - \omega_A).$$

Диск учун (22.27) тенгламани тузиш ўрнига кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.143) тенгламадан фойдаланамиз:

$$T - T_0 = A^e. \quad (3)$$

Диск бошланғич пайтда тинч ҳолатда бўлгани учун

$$T_0 = 0. \quad (4)$$

Дискнинг исталган пайтдаги кинетик энергиясини ҳисоблашда текис параллел ҳаракатдаги жисм учун Кёниг теоремасини ифодаловчи (21.134) формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{4} m v_A^2 = \frac{3}{4} m v_A^2. \end{aligned} \quad (5)$$

бунда v_A — диск массалар марказининг тезлиги.

Дисска таъсир этувчи кучларнинг ишини ҳисоблаймиз. Диск h баландликка пастга тушганда оғирлик кучининг иши mgh га, C нуқта ҳар онда тезликларнинг оний маркази билан устма-уст тушгани учун унга қўйилган $\vec{S}$ кучининг иши нолга тенг бўлади. Бинобарин,

$$A^e = mgh. \quad (6)$$

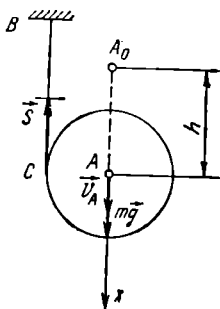
(4), (5) ва (6) ни (3) га қўйсак,

$$\frac{3}{4} m v_A^2 = mgh,$$

бундан

$$v_A^2 = \frac{4}{3} gh \quad (7)$$

ҳосил бўлади.



22.9- расм.

Шундай қилиб, цилиндр ўқи

$$v_A = \frac{2}{3} \sqrt{3gh} \quad (8)$$

тезлик билан ҳаракатланади.

(7) дан вақт бўйича ҳолила олсак,

$$2v_A \frac{dv_A}{dt} = \frac{4}{3} g \frac{dh}{dt},$$

бунда $\frac{dh}{dt} = v_A$, $\frac{dv_A}{dt} = A$ эканлигини эътиборга олиб, диск ўқининг тезлашишини аниқлаймиз:

$$\omega_A = \frac{2}{3} g. \quad (9)$$

(9) ни (2) га қўйиб, илнинг таранглик кучи учун

$$S = m \left(g - \frac{2}{3} g \right) = \frac{m}{3} g \quad (9)$$

ифодани оламиз. Демак, ҳаракат давомида илнинг таранглик кучи ўзгармасдан қолади.

22.7*-§. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракати ва асосий динамик характеристикалари

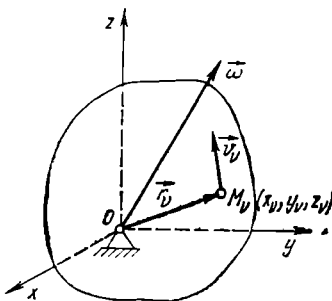
Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракатини ўрганish техникада муҳим аҳамиятга эга. Айниқса, гироскопнинг ажойиб хусусиятларини талқин қилишда қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм ҳаракатига оид назариядан самарали фойдаланилади. Бундан ташқари, эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини ўрганишда ҳам қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракат назариясини татбиқ этиш мумкин, чунки эркин жисмнинг ҳаракатини илгарилла ва унинг бирор нуқтаси атрофида айланма ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин.

Дастлаб қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг динамик характеристикалари, яъни кинетик момент ва кинетик энергияси қандай ҳисобланишини кўриб чиқамиз.

1. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг кинетик моменти.

Жисмнинг қўзғалмас нуқтасида бирор $Oxyz$ координаталар системасини ўтказамиз (22.10-рasm). Қаттиқ жисмни N та кичик элементар бўлақчалардан ташкил топган деб қарасак, (21.53) га кўра жисмнинг қўзғалмас O нуқтасига нисбатан кинетик моменти учун

$$\vec{K}_O = \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v \quad (22.31)$$



22.10- расм.

формула ўринли бўлади. Бунда $\vec{r}_v$ — жисм M_v нуқтасининг радиус-вектори; m_v — мазкур нуқтанинг массаси ва $\vec{v}_v$ — *Охуз* координаталар системасига нисбатан M_v нуқтанинг тезлиги.

Кинематика бўлимида кўрганимиздек, M_v нуқтанинг тезлиги (11.4) Эйлер формуласи ёрдамида аниқланади:

$$\vec{v}_v = \vec{\omega} \times \vec{r}_v. \quad (22.32)$$

(22.32) ни (22.31) га қўйсак,

$$\vec{K}_0 = \sum \vec{r}_v \times m_v (\vec{\omega} \times \vec{r}_v). \quad (22.33)$$

Икки қайтали вектор кўпайтма учун

$$\vec{r}_v \times m_v (\vec{\omega} \times \vec{r}_v) = \vec{\omega} m_v r_v^2 - m_v \vec{r}_v (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_v)$$

формула ўринли бўлгани учун

$$\vec{K}_0 = \vec{\omega} \sum m_v r_v^2 - \sum m_v \vec{r}_v (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_v). \quad (22.34)$$

Агар *Охуз* координаталар системасини жисмга маҳкам бириктирилган деб қарасак, $\vec{K}_0$ нинг қўзғалувчи *Ох* ўқдаги проекцияси қуйидагича ҳисобланади:

$$K_x = \omega_x \sum m_v (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - \sum m_v x_v (\omega_x x_v + \omega_y y_v + \omega_z z_v)$$

ёки

$$K_x = \omega_x \sum m_v (z_v^2 + y_v^2) - \omega_y \sum m_v x_v y_v - \omega_z \sum m_v x_v z_v.$$

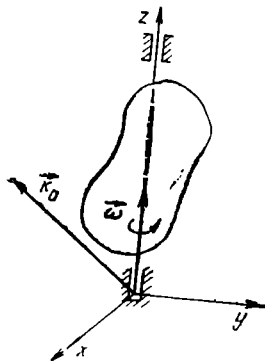
Бунда $\sum m_v (z_v^2 + y_v^2) = I_x$ орқали x ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти; $\sum m_v x_v y_v = I_{xy}$ ва $\sum m_v x_v z_v = I_{xz}$ лар билан эса марказдан қочирма инерция моментлари белгиланишини назарда тутсак, K_x учун ва худди шунингдек K_y , K_z лар учун қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \omega_x I_x - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{xz}, \\ K_y &= -\omega_x I_{xy} + \omega_y I_y - \omega_z I_{yz}, \\ K_z &= -\omega_x I_{xz} - \omega_y I_{yz} + \omega_z I_z. \end{aligned} \right\} \quad (22.35)$$

Агар x , y , z ўқларни жисмнинг қўзғалмас *O* нуқтаси учун ясалган инерция эллипсоидининг бош ўқлари бўйича йўналтирсак, у ҳолда 20.8-§ да кўрганимиздек, марказдан қочирма инерция моментлари нолга тенг бўлади, бинобарин, инерция боли ўқлари учун

$$K_x = I_x \omega_x, \quad K_y = I_y \omega_y, \quad K_z = I_z \omega_z \quad (22.36)$$

формулалар ўринли бўлади.



22.11- расм.

(22.36) дан кўраимизки, x , y , z ўқлар инерция бош ўқларидан иборат бўлса, $\vec{K}_O$ кинетик моментнинг йўналиши бурчак тезлиги $\vec{\omega}$ нинг йўналиши билан устма-уст тушади.

Хусусий ҳолда жисм қўзғалмас z ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлса (22.11-расм), y ҳолда $\vec{\omega}$ бурчак тезлик вектори айланш ўқи бўйлаб йўналади ва $\omega_x = \omega_y = 0$ бўлади. Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатнинг хусусий ҳолидан иборат бўлгани туфайли бундай жисм учун (22.36) ни

$$K_x = -I_{xz} \omega_z, K_y = -I_{yz} \omega_z, K_z = I_z \omega_z \quad (22.37)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар z ўқ O нуқта учун ясалган инерция эллипсоидининг бош ўқидан иборат бўлса, $I_{xz} = I_{yz} = 0$ бўлади ва (22.37) дан

$$K_x = 0, K_y = 0, K_z = I_z \omega_z \quad (22.38)$$

муносабатларни олаимиз.

2. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг кинетик энергияси. (21.128) га кўра жисмнинг кинетик энергияси учун

$$T = \frac{1}{2} \sum m_v v_v^2$$

ёки

$$T = \frac{1}{2} \sum m_v \vec{v}_v^2 = \frac{1}{2} \sum m_v \vec{v}_v \vec{v}_v \quad (22.39)$$

формула ўринли бўлади.

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм нуқтасининг тезлиги учун (22.32) формула ўринли бўлишини эътиборга олсак,

$$T = \frac{1}{2} \sum m_v \vec{v}_v \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_v)$$

ифода ҳосил бўлади. Бунда $\vec{v}_v (\vec{\omega} \times \vec{r}_v) = \vec{\omega} (\vec{r}_v \times \vec{v}_v)$ бўлишини назарда тутсак,

$$T = \frac{1}{2} \sum \vec{\omega} (\vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \frac{1}{2} (\vec{\omega} \cdot \vec{K}_O). \quad (22.40)$$

(22.40) да $\sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \vec{K}_O$ билан системанинг O нуқтага нисбатан кинетик моменти белгиланган.

Шундай қилиб, қўзғалмас нуқтага бўлган жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг айланиш бурчак тезлигини қўзғалмас нуқтага нисбатан кинетик момент векторига скаляр кўпайтмасининг ярмига тенг.

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг кинетик энергияси учун яна қуйидаги формулани ёзиш мумкин:

$$T = \frac{1}{2} K_O \cos(\vec{\omega} \hat{K}_O) = \frac{1}{2} (\omega_x K_x + \omega_y K_y + \omega_z K_z). \quad (22.41)$$

(22.41) дан кўрамизки, жисмнинг кинетик моменти ҳамиша мусбат қийматга эга бўлгани учун $\cos(\vec{\omega} \hat{K}_O) > 0$ бўлади, яъни қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг бурчак тезлиги билан кинетик моменти орасидаги бурчак доимо ўткир бурчакдан иборат бўлади.

(22.35) ни (22.41) га қўйсак,

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) - 2 I_{yz} \omega_y \omega_z - 2 I_{zx} \omega_z \omega_x - 2 I_{xy} \omega_x \omega_y \quad (22.42)$$

формулани оламир. Демак, қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг кинетик энергияси бурчак тезликнинг координата ўқларидаги проекцияларининг квадратик формасидан иборат бўлади.

Агар *Охуз* координата системасининг ўқлари инерция бош ўқларидан иборат бўлса, у ҳолда марказдан қочирма инерция моментлари $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ бўлади ва (22.42) ни

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) \quad (22.43)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар (22.42) дан ω_x , ω_y ва ω_z лар бўйича хусусий ҳосила олиб, (22.35) ни эътиборга олсак,

$$K_x = \frac{dT}{d\omega_x}, \quad K_y = \frac{dT}{d\omega_y}, \quad K_z = \frac{dT}{d\omega_z} \quad (22.44)$$

формулалар ўринли бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

22.8*-§. Эйлернинг динамик тенгламалари

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини чиқариш учун қўзғалмас *O* нуқтада *Oξηξ* қўзғалмас координаталар системаси ва жисм билан биргаликда ҳаракатланувчи *Охуз* координаталар системасини ўтказамиз.

Қўзғалмас *Oξηξ* координаталар системасига нисбатан кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.72) формулага кўра

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e, \quad (22.45)$$

бунда $\vec{K}_O$ — жисмнинг қўзғалмас *O* нуқтага нисбатан кинетик моменти; $\vec{M}_O^e$ — мазкур нуқтага нисбатан ташқи кучларнинг бош моменти.

$Oxyz$ координаталар системаси ўқларининг бирлик векторларини $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ билан белгиласак, $\vec{K}_O$ ни x, y, z ўқлари бўйича ташкил этувчиларга ажратиш мумкин:

$$\vec{K}_O = K_x \vec{i} + K_y \vec{j} + K_z \vec{k}. \quad (22.46)$$

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг динамик тенгламаларини чиқаришда Эйлер иккита соддалаштириш киритади. Улардан биринчиси шундан иборатки, (22.45) тенгламаларни қўзғалувчи координата ўқларига проекцияланади. Бунинг учун дастлаб $\frac{d\vec{K}_O}{dt}$ нинг қўзғалувчи координата ўқларидаги ифодасини аниқлаймиз:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{dK_x}{dt} \vec{i} + \frac{dK_y}{dt} \vec{j} + \frac{dK_z}{dt} \vec{k} + K_x \frac{d\vec{i}}{dt} + K_y \frac{d\vec{j}}{dt} + K_z \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (22.47)$$

Кинематика бўлимида кўрганимиздек, (13.13) га асосан

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k} \quad (22.48)$$

бўлади, бунда $\vec{\omega}$ билан жисмнинг бурчак тезлиги белгиланган.

(22.48) ва (22.46) ни назарда тутиб, (22.47) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O}{dt} &= \frac{dK_x}{dt} \vec{i} + \frac{dK_y}{dt} \vec{j} + \frac{dK_z}{dt} \vec{k} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O = \\ &= \frac{dK_x}{dt} \vec{i} + \frac{dK_y}{dt} \vec{j} + \frac{dK_z}{dt} \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix} = \\ &= \frac{dK_x}{dt} \vec{i} + \frac{dK_y}{dt} \vec{j} + \frac{dK_z}{dt} \vec{k} + \vec{i} (\omega_y K_z - \omega_z K_y) + \\ &\quad + \vec{j} (\omega_z K_x - \omega_x K_z) + \vec{k} (\omega_x K_y - \omega_y K_x) \end{aligned}$$

ёки

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O}{dt} &= \vec{i} \left(\frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y \right) + \vec{j} \left(\frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z \right) + \\ &\quad + \vec{k} \left(\frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x \right). \end{aligned} \quad (22.49)$$

Ташқи кучларнинг бош моменти учун

$$\vec{M}_O = M_x^e \vec{i} + M_y^e \vec{j} + M_z^e \vec{k} \quad (22.50)$$

тенглик ўринли бўлишини назарда тутсак, (22.49) ва (22.50) га асосан (22.45) тенглама қуйидаги учта скаляр тенгламага эквивалент бўлишини кўрамиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y &= M_x^e, \\ \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z &= M_y^e, \\ \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x &= M_z^e. \end{aligned} \right\} \quad (22.51)$$

Эйлер иккинчи соддалаштириш шартида қўзғалувчи координата ўқлари учун O нуқтадаги инерция бош ўқларини олади. Натижада (22.36) га кўра

$$K_x = I_x \omega_x, \quad K_y = I_y \omega_y, \quad K_z = I_z \omega_z$$

бўлади. Бу ҳолда (22.51) тенгламалар системаси қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) &= M_x^e, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) &= M_y^e, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) &= M_z^e. \end{aligned} \right\} \quad (22.52)$$

(22.52) тенгламалар *Эйлернинг динамик тенгламалари* дейилади. Бу тенгламаларни Эйлернинг кинематик тенгламалари (11.29)

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (22.53)$$

билан биргаликда ешиш керак.

22.9*-§. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм учун динамиканинг асосий масалалари

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм учун динамиканинг асосий масалалари: а) жисмнинг

$$\varphi = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t)$$

тенгламалар билан ифодаланган ҳаракат тенгламалари берилганда ташқи кучларнинг бош моментини аниқлаш ва б) жисмга таъсир этувчи кучларнинг momenti маълум бўлганда жисмнинг ҳаракат тенгламаларини аниқлашдан иборат. Динамиканинг биринчи масаласини ечиш φ , ψ , θ ларнинг ҳосилаларини топишга келтирилади; динамиканинг иккинчи масаласини ечиш эса (22.52) ва (22.53) тенгламаларни ечишга келтирилади.

Бу тенгламаларнинг аниқ ечимини жисмга қўйилган кучларнинг momenti, инерция моментлари ва бошланғич шартларга маълум чеклашлар қўйилгандагина аниқлаш мумкин.

Агар бошланғич шартларга ҳеч қандай чек қўйилмаган бўлса, фақат сферик кучи таъсиридаги қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм-

нинг ҳаракати ҳақидаги масаланинг аниқ ечимини қўйидаги учта ҳолдагина аниқлаш мумкин.

1. Эйлер-Пуансо ҳоли. Бу ҳолда ихтиёрий шаклдаги жисмнинг оғирлик маркази қўзғалмас нуқта билан устма-уст тушади ва Эйлер бурчаклари махсус эллиптик функциялар орқали ифодаланади.

2. Лагранж-Пуассон ҳоли. Бу ҳолда жисм симметрия ўқи-га эга бўлади. Агар жисмнинг симметрия ўқи учун z ўқни олсак $I_x = I_y$ бўлади, яъни O нуқта учун ясалган инерция эллипсоиди айланма эллипсоиддан иборат бўлади. Кўрилатган ҳолда қўзғалмас O нуқта ва жисмнинг массалар маркази симметрия ўқида ётади. Бу ҳолда Эйлер бурчаклари квадратура орқали аниқланади.

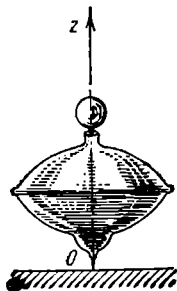
3. С.В. Ковалевская ҳоли. Ковалевская ҳолида $I_x = I_y = 2I_z$ бўлади, яъни O нуқта учун ясалган инерция эллипсоиди чўзиқ айланма эллипсоиддан иборат бўлади. Жисмнинг қўзғалмас нуқтаси симметрия ўқида ётади ҳамда унинг оғирлик маркази инерция эллипсоидининг экваториал текислигида ётади. Бу ҳолда Эйлер бурчакларини аниқлаш гиперэллиптик функциялар орқали ифодаланади.

Лагранж-Пуассон ҳолидан гироскоплар назариясида самарали фойдаланилади.

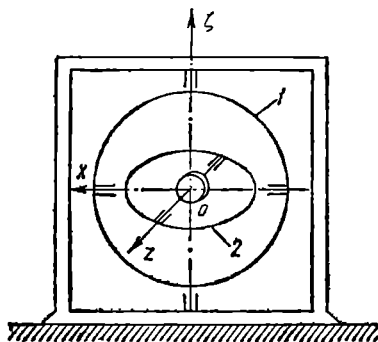
22.10*- §. Эркин гироскопнинг ҳаракати

Ўзининг симметрия ўқи атрофида тез айланадиган ва симметрия ўқидаги қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатлана оладиган жисм *гироскоп* дейилади.

Гироскопга оддий мисол тариқасида бир учи горизонтал текисликка таянган ва симметрия ўқи атрофида тез айланувчи пирилдоқни олиш мумкин (22.12-расм). Техникада турли гироскопик асбобларда гироскоп ротори 22.13- расмда схематик тасвирланган кардан осмасага ўрнатилади. Кардан осмаса одатда қўзғалмас $O\zeta$ ўқ атрофида айлана оладиган ташқи 1 думалоқ ҳалқадан ва унга подшипниклар воситасида бириктирилган ва горизонтал Ox ўқ атрофида айлана оладиган ички 2 думалоқ ҳалқадан иборат бўлади. Ox ўқ ташқи ҳал-



22.12- расм.



22.13- расм.

қага, Oz эса ички ҳалқага подшипниклар воситасида ўрнатилади. Гироскоп Oz ўқининг бу тарзда ўрнатилиши унинг битта O нуқтаси қўзғалмас бўлишини таъминлаши билан бирга мазкур ўқнинг фазода ихтиёрий йўналишни эгаллашига ҳам имкон беради.

Кардан осмасига ўрнатилган гироскопнинг ҳолати Oz , $O\xi$ ва Ox ўқлари атрофидаги учта айланиш бурчаклари φ , ψ , θ билан аниқланади. Шу сабабли бундай гироскопнинг эркинлик даражаси 3 га тенг бўлади.

Агар гироскопга таъсир этувчи ташқи кучларнинг қўзғалмас O нуқтага нисбатан бош моменти нолга тенг бўлса, бундай гироскоп *эркин гироскоп* дейилади. Эркин гироскопни баъзида *мувозанатлашган ёки астатик гироскоп* деб аталади.

Кардан осмасига ўрнатилган ва оғирлик маркази қўзғалмас O нуқта билан устма-уст тушувчи гироскоп эркин гироскопга мисол бўла олади.

Эркин гироскопни Эйлер — Пуансо ва Лангранж — Пуассон ҳолларининг мажмуидан иборат деб қараш мумкин.

Эркин гироскопга таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош моменти $\vec{M}_O^e = 0$ бўлгани учун гироскопнинг абсолют ҳаракат кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремага кўра

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e = 0 \quad (22.54)$$

бўлади. Бинобарин, қўзғалмас O нуқтага нисбатан гироскопнинг кинетик моменти $\vec{K}_O$ миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлади:

$$\vec{K}_O = \overrightarrow{const}. \quad (22.55)$$

Гироскопнинг элементар назариясида $\vec{K}_O$ векторини гироскопнинг Oz ўқи бўйлаб йўналган деб қаралади. Бинобарин, *эркин гироскопнинг ўқи инерциал ҳисоблаш системасига нисбатан ўзгармас йўналишини сақлайди*. Эркин гироскопнинг бу асосий хусусиятидан турли навигация асбоблари ёрдамида фазода ўзгармас йўналишни таъминлашда кенг фойдаланилади.

22.11- §. Резаль теоремаси

Қўзғалмас O нуқтага эга бўлган жисм учун кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремани

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e \quad (22.45)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $\vec{M}_O^e$ — жисмга таъсир этувчи ташқи кучларнинг қўзғалмас O нуқтага нисбатан бош моменти.

$\vec{K}_O$ вектордан вақт бўйича олинган ҳосила бу вектор учининг тезлиги $\vec{u}$ ни ифодалайди, яъни

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{u}.$$

Бунда $\vec{u}$ вектори $\vec{K}_O$ вектори годографига ўтказилган уринма бўйича йўналади. Шундай қилиб, (22.45) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\vec{u} = \vec{M}_O^e. \quad (22.56)$$

Бу формула *Резаль теоремасини* ифодалайди: *жисмнинг қўзғалмас О нуқтага нисбатан кинетик моменти вектори учининг тезлиги барча ташқи кучларнинг шу нуқтага нисбатан бош моментига тенг.*

Резаль теоремаси жисм кинетик моменти ўзгариши ҳақидаги теореманинг кинематик интерпретациясини ифодалайди.

22.12-§. Гироскопнинг элементар назарияси

Техникада қўлланиладиган гироскоп роторининг ўз ўқи атрофида айланиш бурчак тезлиги 20 000 — 60 000 айл/мин га тўғри келади. Гироскоплар кема, самолёт, ракета ва космик кемаларни бошқаришда кенг қўлланилади.

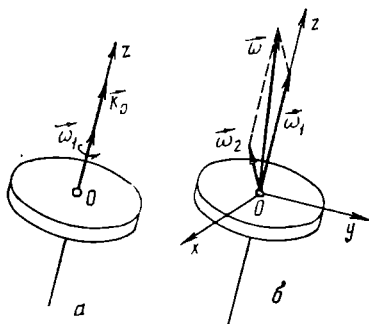
Гироскопнинг ҳаракатини ўрганишда кўпинча унинг ротори ҳаракатини аниқлаш алоҳида аҳамиятга эга.

Агар гироскоп ротори фақат ўзининг Oz симметрия ўқи атрофида $\vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан айланса, унинг $\vec{K}_O$ кинетик моменти Oz ўқ бўйлаб $\vec{\omega}_1$ билан бир хил йўналади (22.14-рasm, а) ҳамда (21.54) га кўра

$$K_z = I_z \omega_1$$

тенглик ўринли бўлади. z ўқни $\vec{\omega}_1$ билан бир хил йўналишда олсак, $K_O = K_z$ бўлиб,

$$\vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1.$$



22.14-рasm.

Айтайлик, гироскоп ротори ўз ўқи Oz атрофида $\vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан айлапсин; Oz ўқ эса, O нуқта атрофида $\vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан айлансин. У ҳолда қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатларини қўшиш ҳақидаги теоремага асосан гироскоп роторининг абсолют бурчак тезлиги $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ бурчак тезликларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади (22.14-рasm, б).

$Oxyz$ координаталар системасининг z ўқини гироскоп ротори ўқи

бўйлаб йўналтирсак, бу координаталар системасининг ўқлари O нуқта учун ясалган инерция эллипсоидининг бош ўқларидан иборат бўлади, бинобарин, (22.36) га асосан кинетик моментнинг x, y, z ўқлардаги проекциялари учун

$$K_x = I_x \omega_{2x}, \quad K_y = I_y \omega_{2y}, \quad K_z = I_z(\omega_1 + \omega_2) \quad (22.57)$$

муносабатларни олампиз. Бунда гироскоп z ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун $I_x = I_y$.

Замонавий гироскопларда $\omega_1 = 6000 \text{ с}^{-1}$ ёки $n = 60\,000$ айл/мин гача бўлган қийматга эришади; ω_2 эса одатда $0,01 \text{ с}^{-1}$ дан ошмайди. Биринчи яқинлашишда $\vec{\omega}_2$ ни эътиборга олмасак, (22.57) ни

$$K_x = 0, \quad K_y = 0, \quad K_z = I_z \omega_1$$

кўринишда ёзиш мумкин. Натижада кинетик момент $\vec{K}_O$ ни Oz ўқ бўйлаб йўналган деб қараш мумкин ва аввалгидек

$$\vec{K}_O = I \vec{\omega}_1 \quad (22.58)$$

формула ўринли бўлади.

Шундай қилиб, элементар назарияда гироскопнинг кинетик momenti унинг симметрия ўқи Oz бўйлаб йўналган ва модули эса гироскопнинг симметрия ўқи Oz га нисбатан унинг инерция momenti билан мазкур ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги кўпайтмасига тенг деб қаралади. Бундай гироскопнинг айрим хусусиятларини кўриб чиқамиз.

1. Кучнинг гироскоп ўқи га таъсири. Шу пайтгача гироскопнинг қўзғалмас нуқтага нисбатан ҳаракатини ташқи кучларнинг momenti нолга тенг бўлган ҳолда текширдик. Энди гироскопга таъсир этувчи ташқи кучларнинг momenti нолдан фарқли бўлган ҳолни кўрамиз.

Айтайлик, оғирлик маркази O нуқтада бўлган гироскоп ротори ўқи га унга перпендикуляр равишда йўналган $\vec{F}$ куч таъсир этсин (22.15-расм). Агар гироскоп ротори ўз ўқи атрофида айланмаса, у $\vec{F}$ куч таъсирида O нуқта атрофида мазкур куч йўналишида кўчади. Агар гироскоп ротори ўз ўқи атрофида жуда катта бурчак тезлик билан айланса, у ҳолда $\vec{F}$ куч таъсирида гироскоп бутунлай бошқача ҳаракатда бўлади.

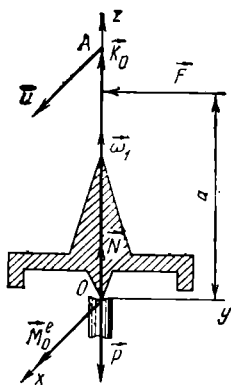
Ҳақиқатан ҳам Резаль теоремасига асосан $\vec{K}_O$ вектори учининг тезлиги

$$\vec{u} = \vec{M}_O^e \quad (22.59)$$

ёки унинг миқдори

$$u = M_O^e = F \cdot a \quad (22.59')$$

формуладан аниқланади.



22.15- расм.

Шундай қилиб, $\vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан айланувчи гироскоп ўқи $\vec{F}$ куч таъсиридан шу куч йўналишида эмас, балки унинг момент-вектори $\vec{M}_O^e$ йўналишида, яъни кучнинг йўналишига перпендикуляр текисликда кўчади.

(22.59') формуладан кўраимизки, $\vec{F}$ кучнинг таъсири тўхтаган заҳоти $\vec{u} = 0$ бўлади. Демак, ротори тез айланаётган гироскоп ўқи инерцион хусусиятга эга бўлмайди.

Агар гироскоп ўқида оний куч таъсир этса (яъни зарба берилса), у ҳолда кинетик момент вектори учигаги A нуқта жуда кичик τ вақт ичида $\vec{u} \cdot \tau$ га тенг кўчиш олади ҳамда гироскоп ўқи деярли бошланғич ҳолатини сақлайди. Бу натижа гироскопнинг асосий хоссаларидан бири бўлиб, *гироскоп ўқининг устуворлик хусусиятини* ифодалайди.

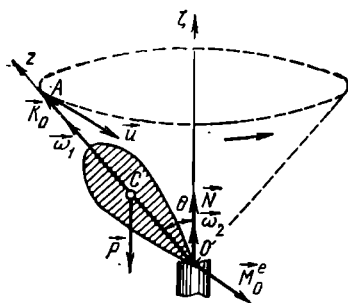
Айтайлик, оний $\vec{F}$ куч гироскоп ўқида жуда кичик вақт $t = \tau$ давомида таъсир этсин, у ҳолда гироскоп ўқидаги A нуқта Oх ўқи йўналишида $u = \tau = Fat$ масофага кўчади. Бунда гироскоп ўқи

$$\alpha = \frac{u_\tau}{K_O} = \frac{F\tau\tau}{I\omega_1} \quad (22.60)$$

бурчакка оғади.

(22.60) формуладан кўраимизки, ω_1 бурчак тезлик орта борган сари α бурчак камая боради. Масалан, оғирлиги $P = 50$ Н, инерция радиуси $\rho_u = 0,1$ м бўлган гироскоп ротори $n = 60\,000$ айл/мин бурчак тезлик билан айлансин. Агар гироскоп ўқида перпендикуляр йўналган ва O нуқтадан $a = 0,2$ м масофага қўйилган $F = 100$ Н куч $\tau = 0,1$ с давомида таъсир этса, шу вақт ичида гироскоп ўқи $\vec{F}$ кучига перпендикуляр йўналишда

$$\alpha = \frac{Fat}{\frac{P}{g} \rho_u^2 \cdot \frac{2\pi n}{60}} = \frac{100 \cdot 0,2 \cdot 0,1}{\frac{50}{9,8} \cdot 0,01 \cdot \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 60000}{60}} = 0,0063 \text{ рад} = 0,36^\circ$$



22.16- расм.

бурчакка оғади, яъни гироскоп ўқи деярли кўчишга улгурмайди.

2. Гироскоп ўқининг прецессияси. Пирилдоқ ҳаракатланганда, прецессия қандай содир бўлишини кўриб чиқамиз. Юқорида чиқарилган формулаларни ўткир учи силлиқ ярим сферик сиртга таянган ва симметрия ўқи атрофида ўзгармас ω_1 бурчак тезлик билан айланувчи пирилдоқ учун қўллашимиз (22.16- расм). Гироскоп-

нинг элементар назариясига кўра, пирилдоқнинг O нуқтага нисбатан кинетик моменти миқдор жиҳатдан $K_O = I_z \omega_1$ га тенг бўлиб, пирилдоқнинг симметрия ўқи Oz бўйлаб йўналади, бунда I_z — пирилдоқнинг Oz ўққа нисбаган инерция моменти. Нормал реакция кучи $\vec{N}$ нинг O нуқтага нисбатан моменти нолга тенг бўлгани учун ташқи кучларнинг O нуқтага нисбатан моменти $\vec{M}_O^e$ оғирлик кучи $\vec{P}$ нинг шу нуқтага нисбатан моментигагина тенг бўлади. Қўзғалмас O нуқтадан пирилдоқнинг оғирлик маркази C нуқтагача бўлган масофани $OC = a$ ва симметрия ўқи Oz билан вертикал $O\xi$ ўқ орасидаги бурчакни θ билан белгиласак,

$$M_O^e = Pa \sin \theta \quad (22.61)$$

бўладн ҳамда $\vec{M}_O^e$ вектори симметрия ўқи ётган вертикал текисликка перпендикуляр йўналади.

(22.61) ни эътиборга олсак, Резаль теоремасига кўра қуйидаги тенгликни ёза оламиз:

$$u = Pa \sin \theta. \quad (22.62)$$

Бунда $\vec{u}$ вектори Oz ўқ ётган вертикал текисликка перпендикуляр бўлиб, $\vec{M}_O^e$ билан бир хил йўналишга эга бўлади.

A нуқта пирилдоқнинг симметрия ўқида ётгани туфайли, бу ўқнинг ҳаракати A нуқтанинг ҳаракати билан аниқланади. Бинобарин, пирилдоқнинг симметрия ўқи оғирлик кучи $\vec{P}$ ётган вертикал текисликка перпендикуляр равишда ҳаракатланади. Бунда θ бурчак ўзгармай, мазкур ўқ доиравий конус сирти бўйлаб, 22.16- расмда тасвирланган стрелка йўналишида айланади. Пирилдоқ ўқининг бундай ҳаракати *прецессия* дейилади.

Oz симметрия ўқи вертикал $O\xi$ ўқ атрофида $\vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан айланганда $\vec{K}_O$ вектори учидаги A нуқтанинг тезлиги

$$\vec{u} = \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_O \quad (22.63)$$

тенгликдан аниқланади. Шунингдек, гироскопнинг элементар назариясида $\vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1$ деб олинишини назарда тутсак,

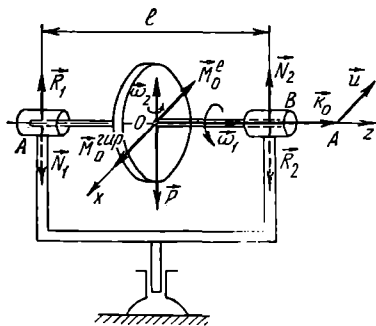
$$\vec{u} = I_z (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1), \quad (22.64)$$

унинг миқдори эса

$$u = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta \quad (22.65)$$

формуладан аниқланади. (22.62) ва (22.65) формулаларни солиштириб,

$$I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta = Pa \sin \theta$$



22.17- расм.

тенгликни сламиз. Бундан пирплдоқнинг прецессия бурчак тезлиги ω_2 ни аниқлаймиз:

$$\omega_2 = \frac{Pa}{I_z \omega_1}.$$

Бу тенгликдан кўрамизки, ω_1 ортган сари процессия бурчак тезлиги камай боради.

3. Гироскопик момент. Гироскоп ўқининг ҳаракати маълум бўлганда бу ўқ таянган нуқталарда ҳосил бўладиган кучларни аниқлаймиз.

Айтайлик, A ва B подшипникларга ўрнатилган гироскоп ротори симметрия ўқи атрофида $\vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан айлансин (22.17-расм); A ва B подшипниклар эса вертикал ўқ атрофида ўзгармас $\vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан айланувчи рамкага ўрнатилган бўлсин. $\omega_1 \gg \omega_2$ бўлган ҳолда гироскопнинг элементар назариясини қўллаш мумкин. Гироскоп ўқи $\vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан вертикал ўқ атрофида прецессия ҳаракатида бўлгани учун Oz ўқ бўйлаб йўналган $\vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1$ вектори учининг тезлиги $\vec{u}$ учун (22.59) формула ўринли бўлади. Лекин $\vec{u} = \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_O = I_z(\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1)$ бўлгани туфайли

$$\vec{M}_O^e = I_z(\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1). \quad (22.66)$$

$\vec{M}_O^e$ момент A ва B подшипникларнинг гироскоп ўқиға босими натижасида ҳосил бўлади ва $\vec{K}_O$ вектори учининг тезлиги $\vec{u}$ билан бир хил йўналади. Таъсир акс таъсирга тенглиги ҳақидаги қонунга кўра ўз навбатида гироскоп ўқи A ва B подшипникларга миқдор жиҳатдан мазкур реакция кучларига тенг, йўналиши эса уларга қарама-қарши йўналган ($\vec{N}_1, \vec{N}_2$) жуфт куч билан акс таъсир кўрсатади. Бу жуфт куч *гироскопик жуфт* дейилади. Унинг моменти эса *гироскопик момент* дейилади ва $\vec{M}_O^{sup}$ билан белгиланади. Гироскопик момент миқдор жиҳатдан ташқи кучларнинг бош моментига тенг ва йўналиши унга қарама-қарши бўлгани учун

$$\vec{M}_O^{sup} = -\vec{M}_O^e$$

ёки (22.66) ни эътиборга олсак,

$$\vec{M}_O^{sup} = -I_z(\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1) = I_z(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2). \quad (22.67)$$

Бундан гироскопик моментнинг модулини аниқлаймиз:

$$M_O^{sup} = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta. \quad (22.68)$$

$$N_A = N_1 + N_1^{cm} = \frac{I_z \omega_1 \omega_2}{l} + \frac{1}{2} P,$$

$$N_B = N_2 - N_2^{cm} = \frac{I_z \omega_1 \omega_2}{l} - \frac{1}{2} P$$

формулалар ёрдамида аниқлаймиз (22.19-расм).

Гироскоплар воситасида снаряд, самолёт ёки ракета каби турли учувчи аппаратларнинг прецессия бурчак тезлигини аниқлашда ёки уларнинг стабил ҳолатини таъминлашда самарали фойдаланилади.

22-5- масала. Массаси $M = 1400$ кг, радиуси $a = 75$ см ва ўз ўқиға нисбатан одинган инерция радиуси $\rho = \sqrt{0,55} a$ бўлган ғилдирак скати горизонтал текисликда радиуси $R = 200$ м бўлган бурилишда ўзгармас $v = 20$ м/с тезлик билан ҳаракат қилади (22.20-расм). Агар рельслар оралиғи $l = 1,5$ м бўлса, скатдан рельсга тушадиган босим аниқлансин.

Ечиш. Ёлдирак скатининг абсолют ҳаракатини унинг массалар маркази билан биргаликдаги илгарилтама ҳаракат (кўчирма ҳаракат) ва массалар маркази атрофидаги айланма ҳаракат (нисбий ҳаракат) дан ташкил топган деб қараймиз ҳамда массалар маркази атрофидаги айланма ҳаракати учун кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаимиз.

Ўлдирак скатининг массалар марказига нисбатан кинетик моменти $\vec{K}_C^r$ нинг миқдори

$$K_C^r = I \omega_1^r$$

формула ёрдамида аниқланади. Бунда $I = M \rho_u^2$ ғилдирак скатининг массалар марказига нисбатан инерция моменти; ω_1^r — скатнинг ўз ўқи атрофидаги айланиш бурчак тезлиги. Ёлдираклар сирпанмасдан ғилдирайди деб қарасак, $\omega_1^r = \frac{v}{a}$ тенглик ўринли бўлади. Бинобарин.

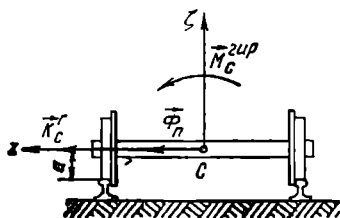
$$K_C^r = \frac{M \rho_u^2 v}{a}.$$

Агар иккала рельс ҳам битта горизонтал текисликда ётади деб қарасак, инерция маркази C атрофида скат $\omega_2 = \frac{v}{R}$ бурчак тезлик билан айланади.

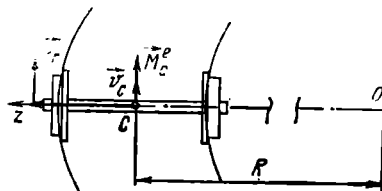
Бунда $\vec{K}_C^r$ векторининг учи

$$u_r = K_C^r \omega_2 = \frac{M \rho_u^2 v^2}{aR} \quad (1)$$

тезликка эга бўлади ва $\vec{u}_r$ нинг йўналиши 22.21-расмда кўрсатилгандек, $\vec{v}$



22.20- расм.



22.21- расм.

тезликнинг йўналиши билан бир хил бўлади. (1) ни эътиборга олсан, Рельс теоремасига кўра

$$M_C^e = \frac{M \rho_a^2 v^2}{aR} = \frac{1400 \cdot 0,55 \cdot 0,75^2 \cdot 20^2}{0,75 \cdot 200} = 1155 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

бўлади. Гироскопик момент $\vec{M}_C^{sup}$ миқдор жиҳатдан M_C^e га тенг

$$M_C^{sup} = M_C^e = 1155 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

йўналиши эса $\vec{M}_C^e$ (ёки $\vec{u}_r$) га қарама-қарши бўлади. Шу сабабли **гироскопик** момент таъсирида ташқи рельсда босим ортади, ички рельсда эса **камаяди**.

Рельсларга тушадиган босимни ҳисоблашда марказдан қочирма **инерция кучи** $\vec{\Phi}_n$ нинг ҳам моментини ҳисобга олиш керак. $\vec{\Phi}_n$ ни С нуқтага қўйилган **деб** қараймиз. Бу кучнинг миқдори

$$\Phi_n = \frac{M v^2}{R} = 2800 \text{ Н}$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Φ_n таъсиридан ҳам ташқи рельсда босим ортади, ички рельсда камаяди.

Рельсларга тушадиган статик босим $\frac{Mg}{2}$ га тенг бўлишини эътиборга олсак, ташқи ва ички рельсларга тушадиган босимлар қуйидагича аниқланади:

$$N = \frac{Mg}{2} \pm \frac{\Phi_n a + M_C^{sup}}{l} = \frac{1400 \cdot 9,8}{2} \pm \frac{2800 \cdot 0,75 + 1155}{1,5} =$$

$$= (6860 \pm 2170) \text{ Н} = (6,86 \pm 2,17) \text{ кН}.$$

Бунда ташқи рельсга тушадиган босимни аниқлашда мусбат ишора, ички рельсдаги босимни аниқлашда манфий ишора олинади.

23-БОБ. ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ. ҚЎЗГАЛМАС ҲАТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ ЖИСМНИНГ АЙЛАНИШ ҲАҚИГА КЎРСАТАДИГАН БОСИМИ

23.1-§. Моддий нуқта учун Даламбер принципи

Ньютон қонунларидан илк бор эркин моддий нуқта ёки эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини ўрганишда фойдаланилган. Боғланишлар аксиомасининг қабул қилиниши натижасида бу қонунлар ихтиёрий механик система учун қўллана бошланди. Боғланишдаги моддий нуқта ёки системаларнинг ҳаракатини ўрганишда Ж. Даламбер томонидан кашф қилинган ва «*Даламбер принципи*» деб аталадиган махсус принципдан фойдаланилади. Эркин моддий нуқта учун Даламбер принципи динамиканинг асосий қонунига эквивалентдир. Боғланишдаги нуқта учун бу принцип боғланишлар аксиомаси билан биргаликда олинган динамиканинг асосий қонунига **эквивалент** бўлади.

Массаси m га тенг боғланишдаги M нуқта учун (18.1) га кўра динамиканинг асосий қонунини

$$m \vec{w} = \vec{F} + \vec{R} \quad (23.1)$$

№№	Нуқтанинг ҳаракат тури	Уринма ва нормал тезланиш	Уринма ва нормал инерция кучи
1.	Тўғри чизиқли текис ҳаракат	$\omega_\tau = 0, \omega_n = 0$	$\Phi_\tau = 0, \Phi_n = 0$
2.	Тўғри чизиқли нотекис ҳаракат	$\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \omega_n = 0$	$ \Phi_\tau = m \left \frac{dv_\tau}{dt} \right ,$ $\Phi_n = 0$
3.	Эгри чизиқли текис ҳаракат	$\omega_\tau = 0, \omega_n = \frac{v^2}{\rho}$	$\Phi_\tau = 0, \Phi_n =$ $= m \frac{v^2}{\rho}$
4.	Айлана бўйлаб ҳаракат	$\omega_\tau = r \cdot \epsilon$ $\omega_n = r \cdot \omega^2$	$ \Phi_\tau = mr \cdot \epsilon $ $\Phi_n = mr \cdot \omega^2$

Даламбер принципи тенгламасини M нуқтадан ўтказилган табиий координата ўқларига проекциялаб,

$$F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau = 0, F_n + R_n + \Phi_n = 0, F_b + R_b = 0 \quad (23.8)$$

тенгламаларни оламиз.

Даламбер принциpidан номаълум реакция кучларини аниқлашда самарали фойдаланилади.

23.1-масала. Радиуси $r = 2$ м бўлган ва ички сирти силлиқ ковак ҳалқа вертикал AB диаметри атрофида $n = 30$ айл/мин бурчак тезлик билан айланади (23.3-расм). Ҳалқа ичида оғирлиги $P = 19,86$ Н бўлган M шарча жойлашган. Шарчанинг ҳалқага нисбатан мувозанатда бўладиган h баландлик ва бу ҳолатга мос бўлган ҳалқанинг реакция кучи N аниқлансин.

Ечиш. Ҳаракатдаги координата ўқларини шундай танлаймизки, Ox текислиги ҳалқанинг текислигида ётсин. M шарчага унинг оғирлик кучи $\vec{P}$ ва ҳалқанинг нормал реакция кучи $\vec{N}$ таъсир этади.

Ҳалқа ўзгармас

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi 30}{60} = \pi \text{ с}^{-1} \quad (1)$$

бурчак тезлик билан ҳаракатлангани учун шарчанинг инерция кучи

$$\Phi = \Phi_n = m\omega_n = m \cdot O_1M \cdot \omega^2 = mr \cdot \cos \alpha \cdot \omega^2 \quad (2)$$

нормал ташкил этувчидан иборат бўлади. Шу сабабли шарчага $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n$ инерция кучини қўйсак, Даламбер принциpigа асосан шарча мувозанатда бўлади.

Шарча учун (23.5) тенгламаларнинг биринчи иккитасини тузамиз

$$-N \cos \alpha + \Phi = 0, \quad -P + N \sin \alpha = 0. \quad (3)$$

(2) ни назарда тутиб, (3) нинг биринчи тенгламасидан $N \cos \alpha = mr \cos \alpha \cdot \omega^2$ мунсabatни оламиз. Бундан

$$N = mr \omega^2 = \frac{P}{g} r \omega^2 = \frac{19,86}{9,8} \cdot 2 \cdot 3,14^2 = 40 \text{ Н.}$$

(3) нинг иккинчи тенгламасидан $\sin \alpha = \frac{P}{N} = \frac{20}{40} = 0,5$ эканлигини топамиз. Бинобарин, $\alpha = 30^\circ$.

ΔO_1MC дан

$$CO_1 = r \sin \alpha = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м.}$$

Шундай қилиб,

$$h = OC - O_1C = 2 - 1 = 1 \text{ м.}$$

23.2-масала. Вал 1 вертикал ўқ атрофида ўзгармас ω бурчак тезлик билан айланади. Валга φ бурчак остида стержень 2 пайвандланган. Улар орасига радиуси r га тенг бир жинсли диск 3 қўйилган (23.4-расм). ω қандай қийматга эришганда дискнинг валга босими нолга тенг бўлади. Валнинг йўғонлиги ҳисобга олинмасин.

Ечиш. O_1y ўқни вал бўйлаб, O_1x ўқни эса дискнинг маркази орқали ўтказамиз. Дискка унинг оғирлик кучи $m\vec{g}$, вал ва стерженларнинг нормал реакция кучлари $\vec{N}_1$ ва $\vec{N}_2$ таъсир этади. Дискнинг валга босими миқдор жиҳатдан $\vec{N}_1$ га тенг бўлади.

Вал ўзгармас бурчак тезлик билан айлангани учун дискнинг инерция кучи

$$\Phi = \Phi_n = mr\omega^2 \quad (1)$$

нормал ташкил этувчидан иборат бўлади. Агар дискнинг марказига $\vec{\Phi}$ инерция кучини қўйсак, Даламбер принципага асосан диск мувозанатда бўлади.

Диск учун (23.5) тенгламаларнинг биринчи икkitасини тузамиз:

$$N_1 - N_2 \cos \varphi + \Phi = 0, \quad (2)$$

$$N_2 \sin \varphi - mg = 0. \quad (3)$$

Бу тенгламалардан N_2 ва N_1 ларни аниқлаймиз:

$$N_2 = \frac{mg}{\sin \varphi}, \quad N_1 = N_2 \cos \varphi - \Phi = mg \cdot \operatorname{ctg} \varphi - mr\omega^2.$$

Охириги тенгламадан кўрамизки, $N_1 = 0$ бўлиши учун

$$\omega = \frac{g}{r} \operatorname{ctg} \varphi$$

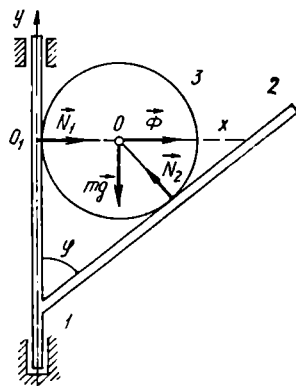
шарт бажарилиши керак.

23.2-§. Механик система учун Даламбер принципи

$M_1, M_2, \dots, M_N$ моддий нуқталардан ташкил топган механик системага геометрик боғланишлар қўйилган бўлсин. Система нуқталарининг массаларини $m_1, m_2, \dots, m_N$ билан белгилаймиз. Системанинг бирор M_v нуқтасига таъсир этувчи актив кучларнинг тенг таъсир этувчисини $\vec{F}_v$; боғланиш реакция кучларининг тенг таъсир этувчисини $\vec{R}_v$ ва бу нуқтанинг инерция кучини $\vec{\Phi}_v$ билан белгиласак, нуқта учун баён этилган Даламбер принципага кўра $\vec{F}_v, \vec{R}_v$ ва $\vec{\Phi}_v$ кучлар ҳар онда ўзаро мувозанатлашади. Шу сабабли системанинг ҳар бир нуқтаси учун

$$\vec{F}_v + \vec{R}_v + \vec{\Phi}_v = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (23.9)$$

тенглик ўринли бўлади.



23.4- расм.

$$\left. \begin{aligned} \vec{\Phi} &= -\frac{d\vec{Q}}{dt}, \\ \vec{M}_O^{\Phi} &= -\frac{d\vec{K}_O}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (23.16)$$

$$(23.17)$$

ифодаларни оламиз.

Демак, система инерция кучларининг бош вектори системанинг ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосиланинг -1 га кўпайтмасига тенг; система инерция кучларининг бирор O марказга нисбатан бош моменти эса мазкур марказга нисбатан системанинг кинетик моментида вақт бўйича олинган ҳосиланинг -1 га кўпайтмасига тенг.

Ҳаракатдаги система нуқталарига қўйилган боғланиш реакция кучларини аниқлашда, яъни динамик реакция кучларини аниқлашда Даламбер принципини қўллаш, айниқса, қўл келади.

23.3-§. Қаттиқ жисм инерция кучларининг бош вектори ва бош моменти

(21.6) га кўра ихтиёрий ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳаракат миқдори $\vec{Q} = M\vec{v}_C$ формула ёрдамида аниқланади. Шу сабабли бундай система инерция кучларининг бош вектори учун қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$\vec{\Phi} = -\frac{d\vec{Q}}{dt} = -M\vec{\omega}_C, \quad (23.18)$$

бунда M — жисмнинг массаси; $\vec{\omega}_C$ — жисм массалар марказининг тезланиши.

Шундай қилиб, ихтиёрий ҳаракатдаги қаттиқ жисм инерция кучлари бош векторининг модули $\Phi = M\omega_C$ бўлиб, массалар марказининг тезланиши ω_C га қарама-қарши йўналади.

Ихтиёрий ҳаракатдаги қаттиқ жисм инерция кучларининг бош моменти ҳисоблашда қутб учун одатда жисм массалар марказидаги C нуқта олинади. У ҳолда (23.17) ни

$$\vec{M}_C^{\Phi} = -\frac{d\vec{K}_C}{dt} \quad (23.19)$$

кўринишда ёзилади.

Агар $Sxuz$ координаталар системаси жисмга маҳкам бириктирилган бўлса, (22.49) га кўра

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_C}{dt} &= \vec{i} \left(\frac{dK_{Cx}}{dt} + \omega_y K_{Cz} - \omega_z K_{Cy} \right) + \\ &+ \vec{j} \left(\frac{dK_{Cy}}{dt} + \omega_z K_{Cx} - \omega_x K_{Cz} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \vec{k} \left(\frac{dK_{Cz}}{dt} + \omega_x K_{Cy} - \omega_y K_{Cx} \right) \quad (23.20)$$

муносабат ўринли бўлади.
(23.20) да

$$\begin{aligned} K_{Cx} &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\ K_{Cy} &= -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \\ K_{Cz} &= -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z \end{aligned}$$

ҳамда

$$\vec{M}_C^\Phi = M_{Cx}^\Phi \vec{i} + M_{Cy}^\Phi \vec{j} + M_{Cz}^\Phi \vec{k}$$

бўлишини эътиборга олсак, (23.19) га биноан ихтиёрий ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг инерция кучлари бош моментининг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$\left. \begin{aligned} M_{Cx}^\Phi &= -I_x \epsilon_x + I_{xy} (\epsilon_y - \omega_x \omega_z) + I_{xz} (\epsilon_z + \omega_x \omega_y) - \\ &\quad - I_{yz} (\omega_z^2 - \omega_y^2) - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z, \\ M_{Cy}^\Phi &= -I_y \epsilon_y + I_{yz} (\epsilon_z - \omega_y \omega_x) + I_{xy} (\epsilon_x + \omega_y \omega_z) - \\ &\quad - I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) - (I_x - I_z) \omega_z \omega_x, \\ M_{Cz}^\Phi &= -I_z \epsilon_z + I_{xz} (\epsilon_x - \omega_y \omega_z) + I_{yz} (\epsilon_y + \omega_x \omega_z) - \\ &\quad - I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (23.21)$$

Хусусий ҳолларда қаттиқ жисм инерция кучларининг бош моменти қандай ҳисобланишини кўриб чиқамиз.

1. Моддий симметрия текислигига эга бўлган қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати. Агар Cz ўқ ҳаракат текислиги билан устма-уст тушувчи моддий симметрия текислигига перпендикуляр бўлса, у ҳолда бу ўқ инерция бош ўқидан иборат бўлади ҳамда

$$I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad \epsilon_x = \epsilon_y = 0, \quad \omega_x = \omega_y = 0.$$

Натижада (23.21) га асосан кўрилатган текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг инерция кучлари бош моменти учун

$$M_{Cx}^\Phi = 0, \quad M_{Cy}^\Phi = 0, \quad M_{Cz}^\Phi = -I_z \epsilon_z \quad (23.22)$$

формулалар ўринли бўлади.

2. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати. Бу ҳолда қутб учун айланиш ўқида ётувчи ихтиёрий нуқта олиб, z ўқни айланиш ўқи бўйлаб йўналтирамиз; x, y ўқларни эса жисмга бириктирилган деб қараймиз. ω ва ϵ векторлари айланиш ўқи бўйлаб йўналгани туфайли $\omega_x = \omega_y = 0, \epsilon_x = \epsilon_y = 0$ бўлади.

Бундан ташқари $\omega_z^2 = \omega^2$ бўлишини эътиборга олиб, (23.21) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

(23.28) тенгламаларнинг биринчи бештаси воситасида A ва B нуқталардаги таянч реакцияларининг ташкил этувчилари X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B ларни аниқлаймиз.

(23.28) нинг олтинчи тенгламасида таянч реакциялари қатнашмайди ва бу тенглама қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат дифференциал тенгламаси (22.8) га эквивалентдир.

Агар жисм нуқталарининг массалари қандай тақсимлангани ва ташқи кучлар маълум бўлса, реакция кучларини қуйидаги тартибда аниқлаш мумкин. Дастлаб $x_C, y_C, M, I_{xz}, I_{yz}, \sum X_v, \sum Y_v, \sum Z_v,$

$\sum M_x(\vec{F}_v), \sum M_y(\vec{F}_v), \sum M_z(\vec{F}_v)$ ларни аниқлаймиз; (23.28) нинг олтинчи тенгламаси ёрдамида ϵ бурчак тезланишни, сўнгра интеграллаш йўли билан ω бурчак тезликни ҳисоблаймиз. ω ва ϵ ларнинг топилган қийматларини (23.28) га қўйиб, A подпятник ва B подшипникнинг реакция кучларини топамиз.

23.5-§. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмни статик ва динамик мувозанатлаш

A ва B таянч нуқталарининг реакция кучларини статик ва динамик ташкил этувчиларга ажратамиз.

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A^{cm} + \vec{R}_A^{\partial}, \quad \vec{R}_B = \vec{R}_B^{cm} + \vec{R}_B^{\partial}.$$

Жисмга таъсир этувчи берилган $\vec{F}_v (v = 1, N)$ кучларни мувозанатловчи реакция кучларининг $\vec{R}_A^{cm}$ ва $\vec{R}_B^{cm}$ ташкил этувчилари *статик реакция кучлари* дейилади. Статик реакция кучларини аниқлаш учун (23.28) нинг биринчи бештасида $\epsilon = 0, \omega = 0$ деб оламиз. Ў ҳолда қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_v + X_A^{cm} + X_B^{cm} &= 0, \\ \sum Y_v + Y_A^{cm} + Y_B^{cm} &= 0, \\ \sum Z_v + Z_A^{cm} &= 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v) - Y_B^{cm} \cdot h &= 0, \\ \sum M_y(\vec{F}_v) + X_B^{cm} \cdot h &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.29)$$

Бу тенгламалар статика бўлимида чиқарилган қўзғалмас ўққа эга бўлган жисмнинг мувозанат тенгламаларини ифодалайди.

Берилган кучлар таъсирида жисм z ўқ атрофида айланиши мумкин. Бундай айланма ҳаракат натижасида жисм нуқталарининг инерция кучлари ҳосил бўлади. Бу инерция кучларини мувозанатловчи реакция кучларининг $\vec{R}_A^{\partial}$ ва $\vec{R}_B^{\partial}$ ташкил этувчилари *динамик реакция кучлари* дейилади.

Жисмга таъсир этувчи берилган кучлар статик реакция кучлари билан мувозанатлашгани туфайли, (23.28) дан динамик реакция кучлари аниқланадиган қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} X_A^\partial + X_B^\partial + My_C \cdot \epsilon + Mx_C \cdot \omega^2 &= 0, \\ Y_A^\partial + Y_B^\partial - Mx_C \cdot \epsilon + My_C \cdot \omega^2 &= 0, \\ -Y_B^\partial \cdot h + I_{xz} \cdot \epsilon - I_{yz} \cdot \omega^2 &= 0, \\ X_B^\partial \cdot h + I_{yz} \cdot \epsilon + I_{xz} \cdot \omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.30)$$

Айланиш ўқи z бўйлаб йўналган инерция кучлари мавжуд бўлмагани туфайли, бу ўқ бўйича йўналган динамик реакция кучлари ҳам бўлмайди.

Қўзғалмас айланиш ўқига эга бўлган ва оғирлик маркази айланиш ўқида ётувчи жисм *статик мувозанатлашган жисм* дейилади. Оз айланиш ўқига эга бўлган статик мувозанатлашган жисмнинг массалар маркази учун $x_C = y_C = 0$ бўлади. Бу ҳолда (23.30) нинг биринчи иккита тенгламасидан

$$X_A^\partial + X_B^\partial = 0, \quad Y_A^\partial + Y_B^\partial = 0, \quad (23.31)$$

яъни

$$\vec{R}_A^\partial = -\vec{R}_B^\partial$$

муносабатни оламиз. Бинобарин, статик мувозанатлашган жисмнинг динамик реакция кучлари жуфт кучни ташкил этади. Бундай жуфт-ни фақат жуфт куч билан мувозанатлаш мумкин бўлгани туфайли динамик реакция кучларини мувозанатловчи жисм нуқталарининг инерция кучлари ҳам жуфт кучга келтирилади.

(23.31) ни назарда тутиб, (23.30) нинг охириги иккита тенгламасидан динамик реакция кучларининг ташкил этувчиларини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} X_A^\partial &= -X_B^\partial = \frac{I_{yz} \epsilon + I_{xz} \omega^2}{h}, \\ -Y_A^\partial &= Y_B^\partial = \frac{I_{xz} \epsilon - I_{yz} \omega^2}{h}. \end{aligned}$$

Динамик реакция кучларининг миқдори

$$R_A^\partial = R_B^\partial = \frac{\sqrt{(I_{xz}^2 + I_{yz}^2)(\epsilon^2 + \omega^4)}}{h} \quad (23.32)$$

формула ёрдамида аниқланади.

(23.32) дан кўрамизки, динамик реакция кучлари фақатгина бурчак тезланишига боғлиқ бўлмай, бурчак тезликка ҳам боғлиқ бўлади. Демак, жисм фақат инерцияси бўйича ўзгармас бурчак тезлик билан айланганда ҳам динамик реакция кучлари ҳосил бўлади.

Динамик реакция кучлари нолга тенг бўлган жисм *динамик мувозанатлашган жисм* дейилади.

(23.32) дан кўрамизки, марказдан қочирма инерция моментлари I_{xz} ва I_{yz} нолга тенг бўлгандагина динамик реакция кучлари нолга тенг бўлади. Бунинг учун динамик мувозанатлашган жисмнинг ай

$$\frac{1}{2} m_1 \omega^2 l \sin \alpha + m_2 \omega^2 l \sin \alpha - \frac{2}{3} m_C \omega^2 l - \frac{2}{3} m_D \omega^2 l = 0, \quad (9)$$

$$-\frac{1}{2} m_1 \omega^2 l \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} l - m_2 \omega^2 l \sin \alpha \cdot l \cdot \cos \alpha + \frac{2}{3} m_C \omega^2 l = 0 \quad (10)$$

(10) дан

$$m_C = \frac{\sqrt{3}}{8} (m_1 + 3 m_2) = 0,216 (m_1 + 3 m_2). \quad (11)$$

(11) ни (9) га қўйиб, m_D ни аниқлаймиз:

$$m_D = 0,159 m_1 + 0,102 m_2.$$

Шундай қилиб, A ва B нуқталарда динамик реакция кучлари ҳосил бўлмаслиги учун C ва D нуқталарнинг массалари

$$m_C = 0,216 (m_1 + 3 m_2), \quad m_D = 0,159 m_1 + 0,102 m_2$$

қийматларга эга бўлиши керак.

23.4- масала. Оғирлиги P бўлган бир жинсли тўғри бурчакли пластинка ўзининг AB диагонали атропоида ω бурчак тезлик билан айланади. Агар томонларининг узунлиги a ва b бўлса, пластинкадан A ва B таянчларга тушадиган динамик босим аниқлансин (23.7- расм).

Ечиш. Жисм билан биргаликда ҳаракатланувчи $Sxyz$ координаталар системасини расмдагилек йўналтираимиз.

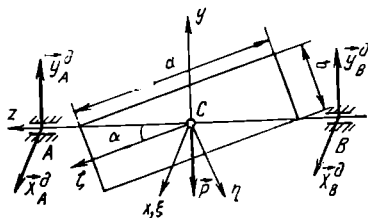
Айланиш ўқиға қўйилган босғлинишларни $\vec{X}_A^d, \vec{Y}_A^d, \vec{X}_B^d$ ва $\vec{Y}_B^d$ динамик реакция кучлари билан алмаштираимиз. У ҳолда $Sxyz$ координаталар системасининг ўқлари марказий ўқлардан иборат эканлигини ва пластинканинг z ўқ атропоида ўзгармас бурчак тезлик билан айланишини эътиборға олиб, (23.30) га ўхшаш тенгламаларни тузаимиз*).

$$X_A^d + X_B^d = 0,$$

$$Y_A^d + Y_B^d = 0,$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} (Y_A^d - Y_B^d) - I_{yz} \omega^2 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} (X_A^d - X_B^d) - I_{xz} \omega^2 = 0.$$



23.7- расм.

Sx ўқ пластинка текислигига перпендикуляр йўналган ҳолни, яъни бу ўқ марказий инерция бош ўқидан иборат бўлган ҳолни кўраимиз. Бу ҳолда

$$I_{xz} = 0. \quad (2)$$

Марказдан қочирма инерция моментини ҳисоблаш учун $S\xi\zeta$ марказий ва бош координаталар системасини шундай танлаймизки, Sx ўқ $S\xi$ билан устма-уст тушсин; $S\xi$ ўқ пластинканинг a томонига параллел, $S\zeta$ эса унга перпендикуляр йўналсин.

* Координаталар боши C нуқтада олингани учун (1) тенгламаларнинг учинчи ва тўртинчисида X_A^d ва Y_A^d лар ҳам қатнашади. Бинобарин, (23.30) ни тузишда координата ўқларини қандай танлаб олиннши алоҳида аҳамиятга эга.

Cz ва $C\xi$ ўқлари орасидаги α бурчак

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

тенгламадан аниқланади.

Координата ўқларини буриш формулалари воситасида марказдан қочирма инерция моменти аниқланадиган

$$I_{yz} = \int_{(M)} yz \, dm$$

интеграл остидаги z , y катталиклардан ξ , η катталикларга ўтамыз:

$$z = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha,$$

$$y = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha.$$

z ва y ларнинг бу қийматларини I_{yz} га қўйсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$I_{yz} = \frac{\sin 2\alpha}{2} \left[\int_{(M)} \xi^2 \, dm - \int_{(M)} \eta^2 \, dm \right] + \cos 2\alpha \int_{(M)} \xi \eta \, dm.$$

$C\xi\eta\xi$ бош координаталар системасидан иборат бўлгани учун марказдан қочирма инерция моменти $\int_{(M)} \xi \eta \, dm = 0$ бўлади.

$C\xi\eta$ ва $C\xi\xi$ текисликларга нисбатан инерция моментларини ҳисоблаймиз:

$$\int_{(M)} \xi^2 \, dm = \frac{P}{abg} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi^2 \, d\xi \, d\eta = \frac{Pa^3}{12g},$$

$$\int_{(M)} \eta^2 \, dm = \frac{P}{abg} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \eta^2 \, d\xi \, d\eta = \frac{Pb^3}{12g}.$$

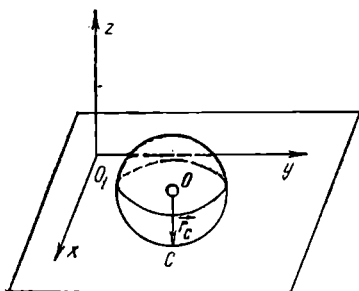
Шундай қилиб,

$$I_{yz} = \frac{P}{12g} (a^3 - b^3) \cdot \frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} =$$

$$= \frac{Pab}{12g} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (3)$$

(2) ва (3) га асосан (1) ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} X_A^\partial + X_B^\partial &= 0, \\ Y_A^\partial + Y_B^\partial &= 0, \\ \frac{Pab\omega^2}{6g} \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} &= Y_A^\partial - Y_B^\partial, \\ X_A^\partial - X_B^\partial &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



24.2- расм.

муносабат геометрик боғланишни ифодалайди. Бундан ташқари, ғилдирак сирпанмасдан ҳаракатлангани учун ғилдиракнинг рельсга тегиб турган C нуқтасининг тезлиги нолга тенг бўлади. Бу шарт

$$x_0 - R\varphi = 0 \quad (4)$$

кинематик боғланиш билан ифодаланади. (4) ни интеграллаб, x_0 ва φ орасидаги муносабатни аниқлаймиз:

$$x_0 - R\varphi = \text{const.}$$

Бинобарин, (4) тенглама билан ифодаланадиган боғланиш голономли боғланишдан иборат бўлади.

Беголоном боғланиш қўйилган жисмга мисол тариқасида горизонтал текислик бўйлаб сирпанмасдан ҳаракатланувчи радиуси R га тенг шарни олиш мумкин (24.2-расм). Шарга қўйилган боғланишлар шарнинг марказидан текисликкача бўлган масофанинг ўзгармаслигини ифодаловчи $z_0 = R$ геометрик боғланиш ва шарнинг текисликка тегиб турган C нуқтасининг тезлиги нолга тенглигини ифодаловчи $\vec{v}_C = 0$ ёки

$$\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_C = 0 \quad (5)$$

кинематик боғланиш билан ифодаланади.

Эйлернинг кинематик тенгламалари (11.29) дан фойдаланиб, (5) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x_0 \vec{i} + \dot{y}_0 \vec{j} + \dot{z}_0 \vec{k} + \left| \begin{array}{c} \vec{i} \\ \dot{\theta} \cos \psi + \varphi \sin \theta \cdot \sin \psi \\ \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ 0 \end{array} \vec{j} + \begin{array}{c} \vec{j} \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \\ -R \end{array} \vec{k} \right| = 0.$$

Бу векторли тенгламани координата ўқларига проекциялаб, қуйидаги учта скаляр тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_0 - R(\dot{\theta} \sin \psi - \varphi \sin \theta \cos \psi) = 0, \\ \dot{y}_0 + R(\dot{\theta} \cos \psi + \varphi \sin \theta \sin \psi) = 0, \\ \dot{z}_0 = 0. \end{array} \right\} \quad (6)$$

(6) тенгламаларнинг биринчи икkitаси интегралланмайди, шунинг учун бу тенгламалар беголоном боғланиш тенгламаларини ифодалайди.

Агар боғланишнинг аналитик ифодаси вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлса, унга *стационар бўлмаган боғланиш* дейилади. Стационар бўлмаган голономли ва бўшатмайдиган боғланиш тенгламалари умумий ҳолда

$$\varphi_{\mu}(x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}, t) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l)$$

кўринишда ёзилади.

Масалан,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (at)^2 \quad (7)$$

тенглама билан ифодаланган боғланиш стационар бўлмаган боғланишдан иборат. (7) нинг геометрик маъноси шундан иборатки, нуқта радиуси вақтга пропорционал равишда ортиб борадиган сфера сиртида ҳаракатланади.

Агар боғланишнинг аналитик ифодаси вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлмаса, бундай боғланиш *стационар боғланиш* дейилади. Голономли, стационар ва бўшатмайдиган боғланишлар тенгламаси умумий ҳолда

$$\varphi_{\mu}(x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l)$$

кўринишда ёзилади. (1) — (4) тенгламалар ҳам стационар боғланиш тенгламаларини ифодалайди.

Келгусида фақат голономли бўшатмайдиган боғланишлар устида ўрталашамиз.

24.2-§. Мумкин бўлган кўчиш. Системанинг эркинлик даражаси

Агар механик системага боғланишлар қўйилган бўлса, бундай система ихтиёрий равишда кўча олмайди, чунки боғланишлар система нуқталарининг фақат баъзи кўчишларигагина йўл қўяди.

Боғланишдаги механик система учун мумкин бўлган кўчиш тушунчасини киритамиз.

Системага қўйилган боғланишни қаноатлантирган ҳолда система нуқталарининг берилган онда тасаввур қилинадиган чексиз кичик кўчишлари *механик системанинг мумкин бўлган кўчиши* дейилади.

Худди шунингдек, боғланишдаги нуқта учун мумкин бўлган кўчиш тушунчаси киритилади.

Мумкин бўлган кўчишлар вақтнинг қайд қилинган пайти учун содир бўлади деб қаралгани туфайли система нуқталарига таъсир этувчи кучлар ҳам умумий ҳолда вақтга боғлиқ бўлишига қарамай, худди шу қайд қилинган пайт учун ўзгармас деб қаралади. Шунингдек, система нуқталарига мумкин бўлган кўчиш берилган пайтда стационар бўлмаган боғланиш тенгламаларида вақт ўзгармас деб олинади.

Мисол тариқасида

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (24.4)$$

кўринишдаги стационар бўлмаган, бўшатмайдиган голономли боғла-

(24.8) ни қуйидагича ёзиш ҳам мумкин:

$$\sum_v (\text{grad } f_\mu)_0 \cdot \delta \vec{r}_v = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l). \quad (24.9)$$

Шундай қилиб, берилган механик системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчиши (24.8) ёки (24.9) тенгламаларни қаноатлантирадиган $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$ ($v = 1, 2, \dots, N$) вариацияларнинг қийматлари билан аналитик аниқланади. $l < 3N$ бўлгани учун (24.8) тенгламалардаги $3N$ та вариациялардан l тасини қолган $3N - l$ таси орқали ифодалаш мумкин. Шу сабабли $3N - l = n$ та вариациялар эркин бўлиб, қолган l таси эса (24.8) тенгламалар воситасида аниқланадн. *Мумкин бўлган эркин кўчишлар сони системанинг эркинлик даражаси дейилади.*

Эркин моддий нуқтанинг эркинлик даражаси 3 га тенг бўлади. Агар нуқта (24.4) тенглама билан ифодаланадиган сирт устида ҳаракатланса, $\delta x, \delta y, \delta z$ орасида (24.5) кўринишидаги битта муносабат мавжуд бўлади. Шу сабабли сирт бўйлаб ҳаракатланаётган нуқтанинг эркинлик даражаси 2 га тенг бўлади. Агар нуқта эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланса, эгри чизиқни иккита сиртнинг кесишган чизиғи деб қараш мумкин бўлганидан, бундай нуқтанинг эркинлик даражаси битта бўлади.

24.3-§. Кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги элементар иши. Идеал боғланишлар

Нуқтага таъсир этувчи $\vec{F}$ кучнинг $\delta \vec{r}$ мумкин бўлган кўчишдаги элементар ишини δA билан белгиласак, элементар иш ҳисобланадиган (21.90) ва (21.95) формулаларга асосан

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \quad (24.10)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Худди шунингдек, N та моддий нуқталардан ташкил топган механик система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг системанинг мумкин бўлган кўчишидаги элементар ишн

$$\sum \delta A_v = \sum \vec{F}_v \cdot \delta \vec{r}_v \quad (24.11)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Система нуқталарига қўйилган боғланиш реакция кучларини $\vec{R}_v$ билан белгилаймиз.

Агар система нуқталарига қўйилган боғланиш реакция кучларининг системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишидаги элементар ишлари йиғиндаси нолга тенг бўлса, бундай боғланишлар идеал боғланишлар дейилади. Бинобарин, идеал боғланишлар учун

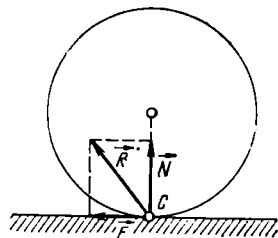
$$\sum \vec{R}_v \cdot \delta \vec{r}_v = 0 \quad (24.12)$$

тенглик ўринли бўлади.

$f(x, y, z) = 0$ боғланиш қўйилган битта нуқта учун (24.12) ни

$$\vec{R} \delta \vec{r} = 0 \quad (24.13)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Демак, идеал боғланиш реакция кучи $\vec{R}$ нуқтанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчиши $\delta \vec{r}$ га перпендикуляр бўйича, яъни мазкур нуқтада $f(x, y, z) = 0$ сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналади.



24.4- расм.

Идеал боғланишларнинг айрим турлари устида тўхталамиз.

1. Абсолют қаттиқ жисм нуқталари орасидаги боғланишни идеал боғланишдан иборат деб қараш мумкин. Бу ҳолда боғланиш реакция кучлари ички кучлардан иборат бўлади ҳамда худди (21.110) даги каби ички кучларнинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишдаги элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

2. Система маҳкамланган нуқталарининг ҳар бири идеал боғланишдан иборат бўлади, чунки бу нуқталарнинг мумкин бўлган кўчиши нолга тенг.

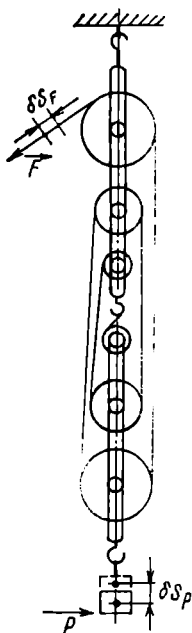
3. Абсолют қаттиқ жисм бошқа қаттиқ жисм устида сирпанмасдан думаласа, бундай боғланиш ҳам идеал боғланишдан иборат бўлади (24.4- расм). Ҳақиқатан ҳам бу ҳолда думалашдаги ишқаланиш мавжуд бўлмайди. Абсолют силлиқ бўлмаган сиртнинг реакция кучи $\vec{R}$ қўйилган C нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши $\delta \vec{r}_C = 0$ бўлади. Бинобарин, $\vec{R}$ кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги иши $\delta A = \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_C = 0$ бўлади ҳамда таърифга кўра бундай боғланиш идеал боғланишдан иборат бўлади.

24.4- §. Мумкин бўлган кўчиш принципи

Бу параграфда моддий нуқталар системасининг мувозанатини текшираамиз. Аввало «мувозанат» сўзи «тинч ҳолат» га эквивалент бўлмай, моддий нуқталар системасига қараганда кўпроқ унга таъсир этувчи кучлар системасига тааллуқлидир. Ҳақиқатан ҳам моддий нуқтага таъсир этувчи кучлар ўзаро мувозанатлашган бўлишига қарамай, моддий нуқта тинч ҳолатда бўлмай, тўғри чизиqli текис ҳаракатда бўлиши мумкин.

1788 йилда Лагранж идеал, стационар ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган моддий нуқталар системасининг мувозанати ҳақидаги мумкин бўлган кўчиш принципини баён этди. Бу принципни Ньютон қонунларидан фойдаланиб исботлаш мумкин. Шу сабабли бу принципни теорема тарзида баён этамиз.

Теорема (мумкин бўлган кўчиш принципи). Идеал, стационар ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган моддий нуқталар системаси мувозанатда бўлиши учун система нуқталарига қўйилган



24.5- расм.

тириб, бу кучни актив кучлар қаторига қўшиш керак. Масалан, боғланиш силлиқ бўлмаган сиртдан иборат бўлса, актив кучлар қаторига сирпанишдаги ишқаланиш кучи ёки умумий ҳолда бундан ташқари думалашдаги ишқаланиш жуфтини қўшиб, боғланишни идеал боғланишга келтирилади. Деворга қисиб маҳкамланган стержень (4.15- расм) тарзидаги боғланишни реакция жуфт momenti ҳамда боғланиш реакция кучининг горизонтал ташкил этувчиси (ёки вертикал ташкил этувчиси) билан алмаштириш йўли орқали идеал боғланишга келтирилади.

24.5- §. Мумкин бўлган кўчиш принципини оддий машиналарга қўллаш

Эркинлик даражаси битта бўлган оддий машиналарга мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаймиз.

1. Полиспаст. Полиспаст иккита обоймага ўрнатилган блоклар системасидан ташкил топади (24.5- расм). Обоймалардан бири қўзғалмайди, иккинчиси эса блоклар орқали ўтказилган ип воситасида ҳаракатланади.

Блокларда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучини ҳисобга олмай, мувозанат ҳолатида $\vec{F}$ ва $\vec{P}$ кучлар орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Полиспастга мумкин бўлган кўчиш берамиз. Агар $\vec{F}$ куч қўйилган нуқта δs_F га кўчса, блоклар орасидаги олтига ип бўлагининг ҳар бири $\frac{1}{6} \delta s_F$ га қисқаради. Шу сабабли $\vec{P}$ куч қўйилган нуқта $\delta s_P = \frac{1}{6} \delta s_F$ масофага юқорига кўчади.

Полиспаст учун мумкин бўлган кўчиш принципини қўлласак,

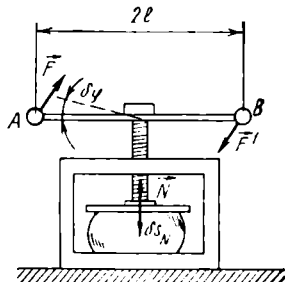
$$F \delta s_F - P \delta s_P = 0$$

ёки

$$F \delta s_F - P \cdot \frac{1}{6} \delta s_F = 0.$$

Бундан $F = \frac{1}{6} P$ бўлишини аниқлаймиз. Демак, ҳаракатлантирувчи $\vec{F}$ кучнинг миқдори кўтарилаётган юкнинг оғирлигидан полиспаст филдиракларининг сони қанча бўлса, шунча марта кам бўлади.

2. Винтли пресс. 24.6-расмда винтли пресс схемаси тасвирланган. Пресснинг жисмга босими ($\vec{F}$, $\vec{F}'$) жуфт куч таъсирида ҳосил бўлади. Сиқилувчи жисмнинг реакция кучи $\vec{N}$ билан мазкур жуфтнинг моменти орасидаги боғланишни мумкин бўлган кўчиш принципи воситасида аниқлаймиз.



24.6- расм.

AB дастага ($\vec{F}$, $\vec{F}'$) жуфт йўналишида $\delta\varphi$ мумкин бўлган кўчиш берамиз. У ҳолда $\vec{N}$ куч қўйилган нуқта бу кучнинг йўналишига қарама-қарши йўналишда δs_N кўчиш олади. Винтли пресс учун мумкин бўлган кўчиш принципини фойдаловчи

$$M \delta\varphi - N \delta s_N = 0 \quad (1)$$

тенгликни тузамиз.

Даста тўлиқ бир марта айланганда винт ўқи (винт қадами деб аталувчи) h масофага кўчади. $\delta\varphi$ ва δs_N орасидаги муносабатни аниқлаш учун винт ўқининг бўйлама кўчиши δs_N нинг винт қадами h га нисбати $\delta\varphi$ кўчишнинг 2π бурчакка нисбатига тенглигидан фойдаланамиз:

$$\frac{\delta s_N}{h} = \frac{\delta\varphi}{2\pi}.$$

Бундан $\delta s_N = \frac{h}{2\pi} \delta\varphi$. δs_N нинг бу қийматини (1) га қўйсак,

$$2 F \cdot l \cdot \delta\varphi - N \cdot \frac{h}{2\pi} \delta\varphi = 0.$$

Бундан $N = 4\pi F \frac{l}{h}$ бўлишини аниқлаймиз.

Жисмни сиқувчи куч миқдор жиҳатдан аниқланган реакция кучи N га тенг бўлади.

24.6-§. Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллашга оид масалалар

Мумкин бўлган кўчиш принципига оид масалаларни қуйидаги уч гурппага бўлиш мумкин:

1. Берилган онда мувозанатда бўлган системага таъсир этувчи кучларни ёки бу кучлар орасидаги муносабатларни аниқлаш.

2. Таъсир этувчи кучлар берилган ҳолда системанинг мувозанат ҳолатини аниқлаш.

3. Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаб, боғланиш реакция кучларини аниқлаш.

24.1-масала. Домкрат механизмда узунлиги R бўлган A даста айланганда типли гилдирак 1, 2, 3, 4 ва 5 лар ҳам айлана бошлайди ва домкрат-

Шундай қилиб, система барчи нуқталарининг мумкин бўлган қўчишларининг δs_D орқали ифодаланиши мумкин. Шу сабабли мумкин бўлган эркин қўчишлар соми 1 га тенг. Бинобарин, қўрилаётган демократ механизмининг эркинлик даражаси 1 га тенг.

(2) ни (1) га қўйсак,

$$P \delta s_D - Q \cdot \frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} \delta s_D = 0$$

-1.8-

тенглик ҳосил бўлади. Бундан

$$P = Q \cdot \frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = 4800 \cdot \frac{0,03 \cdot 0,04 \cdot 0,03}{0,12 \cdot 0,16 \cdot 0,18} = 50 \text{ Н.}$$

24.2- масала. Иккита бир хил бир жинсли AB ва BC стерженлар ўзар B шарнир билан бириктирилган. AB стержень қўзғалмас A шарнир атрофида айлана олади. BC стерженнинг C учига миқдор жиҳаддан стержень оғирлигининг ярмига тенг горизонтал $\vec{F}$ куч қўйилган (24.8- расм). Шарнирлардаги ишқаланишни эътиборга олмай, системанинг мувозанат ҳолатидаги α ва β бурчаклар аниқлансин.

Ечиш. A нуқтани координаталар боши учун қабул қилиб, координата ўқларини 24.8- расмдагидек йўналтирамиз. Ҳар бир стерженнинг узунлигини l билан белгиласак, система B ва C нуқталарига қўйилган боғланишлар қуйидаги 2 та

$$x_B^2 + y_B^2 - l^2 = 0, (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 - l^2 = 0$$

шартлар билан ифодаланади. Бинобарин, системанинг эркинлик даражаси $n = = 2N - m = 2 \cdot 2 - 2 = 2$ га тенг бўлади. Шундан келиб чиқиб, системанинг ҳолатини 2 та α ва β бурчаклар билан аниқлаймиз.

Ҳар бир стерженнинг оғирлик кучини унинг учларига қўйилган иккитадан ташкил этувчиларга ажратсак, натижада системага қўйилган кучлар системасини

A нуқтага қўйилган $\frac{\vec{Q}}{2}$, B нуқтага қўйилган $\frac{\vec{Q}}{2} + \frac{\vec{Q}}{2} = \vec{Q}$ ҳамда C нуқтага қўйилган $\frac{\vec{Q}}{2}$ кучлар системасига келтирамиз (24.8- расм, б).

Мумкин бўлган қўчиш принципни (24.17) га асосан,

$$\frac{Q}{2} \delta x_A + Q \delta x_B + \frac{Q}{2} \delta x_C + F \delta y_C = 0 \quad (1)$$

қўринишда ёзиш мумкин.

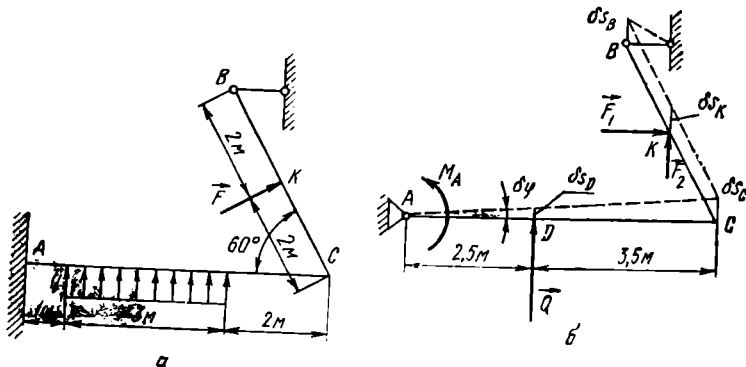
A нуқта қўзғалмас бўлгани учун $\delta x_A = 0$; бундан ташқари $F = \frac{Q}{2}$ эканлигини эътиборга олиб, (1) ни $\frac{Q}{2}$ га қисқартирсак,

$$2 \delta x_B + \delta x_C + \delta y_C = 0 \quad (2)$$

тенгликни оламиз.

δx_B , δx_C ва δy_C ларни α ва β бурчакларнинг вариациялари орқали ифодалаш учун x_B , x_C ва y_C координаталарни α ва β бурчакларнинг функцияси сифатида қуйидагича ифодалаймиз:

$$\left. \begin{aligned} x_B &= l \cos \alpha, \quad x_C = l \cos \alpha + l \cos \beta, \\ y_C &= l \sin \alpha + l \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



24.9- расм.

Нуқтанинг мумкин бўлган кўчишлари мос координаталарнинг вариацияларига тенг бўлишини эътиборга олиб, (3) муносабатларни вариациялаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_B &= -l \sin \alpha \delta \alpha, \quad \delta x_C = -l \sin \alpha \delta \alpha - l \sin \beta \delta \beta, \\ \delta y_C &= l \cos \alpha \delta \alpha + l \cos \beta \delta \beta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) ни (2) га қўйиб, $\delta \alpha$ ва $\delta \beta$ қатнашган ҳадларни алоҳида ажратиб, ушбу тенгликни оламиз:

$$l (\cos \alpha - 3 \sin \alpha) \delta \alpha + l (\cos \beta - \sin \beta) \delta \beta = 0.$$

Бу тенглик системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишлари, яъни $\delta \alpha$ ва $\delta \beta$ вариацияларнинг ҳар қандай қиймати учун ўринли ҳамда $\delta \alpha$ ва $\delta \beta$ лар ўзаро боғлиқсиз бўлгани учун бу вариацияларнинг ҳар бири олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлади:

$$\cos \alpha - 3 \sin \alpha = 0,$$

$$\cos \beta - \sin \beta = 0$$

ёки

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg} \beta = 1.$$

Шундай қилиб,

$$\alpha = \arctg \frac{1}{3} = 18^\circ 25', \quad \beta = 45^\circ.$$

24.3- масала. Система 24.9- расм. а да тасвирланган мувозанат ҳолатини эгаллаган. $\vec{F}$ кучининг таъсир чизиги BC стерженга перпендикуляр йўналган; текис тақсимланган кучларнинг интенсивлиги q га тенг бўлиб, AC стерженга тўғри бурчак оснида қўйилган.

Агар $F = 10$ кН, $q = 2$ кН/м бўлса, стерженларнинг оғирлигини ҳисобга олмаб, А нуқтанинг реакция моменти ва шу нуқтадаги боғланиш реакция кучининг горизонтал ташкил этувчисини аниқлансин.

Ечиш. Текис тақсимланган кучларни улар таъсир этувчи участканинг ўртасидаги D нуқтага қўйилган $Q = q \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$ кН битта куч билан алмаштирамиз. $\vec{F}$ кучини горизонтал ва вертикал ташкил этувчиларга ажратамиз;

$$F_1 = F \cos 30^\circ = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} = 8,66 \text{ кН},$$

$$F_2 = F \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ кН.}$$

Дастлаб A нуқтадаги реакция моменти M_A ни аниқлаймиз. Бунинг учун A нуқтадаги боғланишни қўзғалмас шарнирли таянч билан алмаштирамиз ва системани A нуқта атрофида айланишига тўсқинлик қилувчи боғланишдан бўшатамиз ҳамда унинг системага таъсирини M_A реактив момент билан алмаштирамиз (24.9-рasm, б).

Системани A нуқта атрофида $\delta\varphi$ бурчакка буриб, унга мумкин бўлган кўчиш берамиз. Айтайлик, бу кўчиш соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда бўлсин. У ҳолда система текис параллел ҳаракатда бўлади. C нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини δs_C билан белгиласак,

$$\delta s_C = AC \cdot \delta\varphi.$$

AC стержень A нуқта атрофида $\delta\varphi$ га бурилганда $\vec{Q}$ куч қўйилган D нуқта δs_C га параллел равишда δs_D га кўчади ҳамда

$$\frac{\delta s_D}{\delta s_C} = \frac{AD}{AC}$$

ёки

$$\delta s_D = \frac{AD}{AC} \delta s_C = \frac{AD}{AC} AC \cdot \delta\varphi = AD \cdot \delta\varphi$$

тенглик ўринли бўлади.

C ва B нуқталарнинг кўчиши параллел ва уларга ўтказилган перпендикулярлар бир тўғри чизиқда ётмагани туфайли CB илгариланган ҳаракатда бўлади. Бинобарин, $\vec{F}$ куч қўйилган K нуқтанинг кўчиши ҳам δs_C га параллел бўлади ва

$$\delta s_K = \delta s_C = AC \delta\varphi$$

муносабат ўринли бўлади.

24.9-рasm, б да тасвирланган система учун мумкин бўлган кўчиш принципи қўллаймиз:

$$M_A \delta\varphi + Q \delta s_D + F_2 \cdot \delta s_K = 0$$

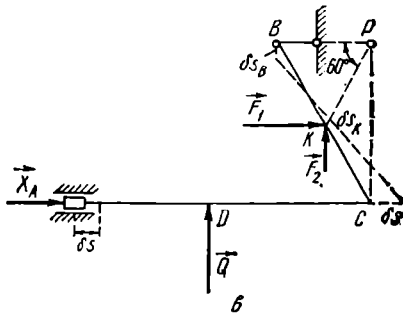
ёки

$$M_A \delta\varphi + QAD \delta\varphi + F_2 \cdot AC \cdot \delta\varphi = 0.$$

Бундан $M_A = -Q \cdot AD - F_2 \cdot AC = -6 \cdot 2,5 - 5 \cdot 6 = -45 \text{ кНм}$. Бу ерда манфий ишора M_A реактив момент аслида соат стрелкаси ҳаракати бўйича йўналганлигини билдиради.

A нуқтадаги боғланиш реакция кучининг горизонтал ташкил этувчиси X_A ни аниқлаш учун A нуқтадаги боғланишни горизонтал йўналтирувчи бўйича ҳаракатлана оладиган сирпангич билан алмаштирамиз (24.9-рasm, а).

Системанинг A нуқтасига горизонтал йўналишда δs кўчиш берамиз. A ползунининг ҳаракати чеклангани учун AC стержень илгариланган ҳаракатда бўлади ва C нуқта ҳам δs га кўчади. BC текис параллел ҳаракатда бўлади. C ва B нуқталарнинг мумкин бўлган кўчиши δs ва δs_B ларга перпендикулярлар ўтказиб, улар



24. 9-рasm.

нинг кесишган нуқтасини P билан белгиласак, бу нуқта BC нинг айланиш оний марказини ифодалайди. K нуқтани P билан туташтириб, K нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши δs_K PK га перпендикуляр бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

$$\delta s_K \text{ ни } \frac{\delta s_K}{\delta s} = \frac{PK}{PC} \text{ тенгликдан аниқлаймиз: } \delta s_K = \frac{PK}{PC} \delta s. \text{ Бунда } PC = 4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \text{ м.}$$

24.9-расм, e да тасвирланган система учун мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаймиз:

$$X_A \delta s + F_1 \cos 30^\circ \cdot \delta s_K - F_2 \cos 60^\circ \delta s_K = 0$$

ёки

$$X_A \delta s + F_1 \frac{KP}{PC} \cos 30^\circ \delta s - F_2 \cos 60^\circ \delta s = 0.$$

Бундан X_A ни аниқлаймиз:

$$X_A = (F_2 \cos 60^\circ - F_1 \cos 30^\circ) \frac{KP}{PC} = \left(5 \cdot \frac{1}{2} - 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{2}{2\sqrt{3}} = -2,88 \text{ кН.}$$

X_A нинг маънавий қийматга эга бўлиши, у аслида кўрсатилган йўналишга тескари йўналганлигини ифодалайди.

24.7-§. Системанинг умумлашган координатлари

Агар механик система N та моддий нуқталардан ташкил топган бўлса, унинг ҳолатини *Охуз* инерциал ҳисоблаш системасига нисбатан $3N$ та x_ν , y_ν , z_ν Декарт координатлари билан аниқлаш мумкин. Айтайлик, механик системага

$$f_\mu(x_\nu, y_\nu, z_\nu, t) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l) \quad (24.3)$$

кўринишдаги голономли, стационар бўлмаган, идеал ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган бўлсин.

У ҳолда системанинг $3N$ та x_ν , y_ν , z_ν координатлари l та боғланиш тенгламаларини қаноатлантиргани туфайли, улар эркин бўла олмайди. $3N$ координатлардан фақат $n = 3N - l$ таси эркин координатлардан иборат бўлади. Системанинг ҳолатини мазкур n та эркин координатлар воситасида, қолган координатларни эса боғланиш тенгламалари воситасида аниқлаш мумкин. Бироқ кўпинча эркин координатларни бундай танлаш мақсадга мувофиқ бўлмайди, чунки бу усулда системанинг ҳолатини аниқлаш анча мураккаб бўлади. Аналитик механикада бундай системанинг ҳолатини бир қийматли аниқлаш учун *умумлашган координатлар* деб аталадиган n та мақсадга мувофиқ равишда танлаб олинган $q_1, q_2, \dots, q_n$ эркин параметрлар олинади. Бундай координатлар учун узунлик ёки бурчак катталиклари ўлчовига эга бўлган параметрларни олиш мумкин. Кўпинча бундай координатлар учун қутб координатлари, цилиндрлик ёки сферик координатлар олинади. Умумлашган координатлар q_i билан белгиланади.

Масалан, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг ҳолатини аниқлашда умумлашган координата сифатида айланиш бурчаги φ ни

($q = \varphi$), сферик ҳаракатдаги жисм учун эса Эйлер бурчакларини ($q_1 = \varphi$, $q_2 = \psi$, $q_3 = \theta$) олиш мумкин. Умумий ҳолда текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун қутб координаталарини ва битта айланиш бурчагини олиш мумкин ($q_1 = x_C$, $q_2 = y_C$, $q_3 = \varphi$).

Айтайлик, механик системанинг ҳолати n та $q_1, q_2, \dots, q_n$ умумлашган координаталар воситасида аниқлансин. Бундай системанинг ҳар бир нуқтаси ҳолатини унинг радиус-вектори $\vec{r}_v$ орқали аниқлаш мумкин бўлгани туфайли, $\vec{r}_v$ ларни умумлашган координаталар ва вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш мумкин:

$$\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (24.18)$$

У ҳолда система нуқталарининг координаталари қуйидагича ифодаланади:

$$\left. \begin{aligned} x_v &= x_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ y_v &= y_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ z_v &= z_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \end{aligned} \right\} (v = 1, 2, \dots, N). \quad (24.19)$$

Агар система нуқталарига голономли, стационар боғланишлар қўйилган бўлса, умумлашган координаталарни (24.19) да вақт ошкор равишда қатнашмайдиган қилиб танлаб олиш мумкин.

Умумлашган координаталарнинг афзаллиги шундан иборатки, бу координаталар эркин бўлиши билан бирга уларни киритиш натижа-сида голономли боғланишларни эътиборга олиш зарурати туғилмай-ди. Чунки умумлашган координаталарни танлаш жараёнида боғла-ниш тенгламалари автоматик тарзда қаноатлантирилади. Юқорида кўрганимиздек (24.2-§), мумкин бўлган эркин кўчишлар (ёки эркин координаталар варнацияси) сонига системанинг эркинлик даражаси дейилади. Бинобарин, *голономли боғланишлар қўйилган система-нинг эркинлик даражаси эркин координаталар сонига тенг бўлади*.

(24.18) га кўра система нуқталарининг dt вақт ичидаги ҳақиқий кўчиши $d\vec{r}_v$ қуйидагича аниқланади:

$$d\vec{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} dt, \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (24.20)$$

Маълумки, мумкин бўлган кўчишни аниқлашда боғланиш тенглама-сида вақт ўзгармас деб қаралади. Шу сабабли (24.18) ёрдамида мум-кин бўлган кўчишни ҳисоблашда $\delta t = 0$ деб олинади:

$$\delta \vec{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i \quad (24.21)$$

24.8. §. Умумлашган кучлар

Юқорида кўрганимиздек, система нуқталарига таъсир этувчи актив кучларнинг мумкин бўлган кўчишдаги ишларининг йиғиндиси (24.11) формула ёрдамида аниқланади. (24.21) ни назарда тутиб, (24.11) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum \delta A_v = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i$$

ёки йиғиндиларнинг тартибини алмаштирсак,

$$\sum \delta A_v = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^N \vec{F}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

тенглик ҳосил бўлади.

Агар

$$Q_i = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \quad (24.22)$$

белгилани киритсак, охириги тенгликни

$$\sum \delta A_v = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (24.23)$$

кўринишда ёза оламиз.

Q_i катталиққа q_i умумлашган координатага мос бўлган *умумлашган куч* дейилади.

Шундай қилиб, система нуқталарига қўйилган актив кучларнинг системанинг мумкин бўлган кўчишдаги элементар ишлари йиғиндисидаги бирор умумлашган координатанинг вариацияси олдидаги коэффициент мазкур умумлашган координатага мос бўлган умумлашган кучни ифодалайди.

Умумлашган кучнинг ўлчови унга мос бўлган умумлашган координатанинг ўлчовига боғлиқ бўлади ва қуйидагича аниқланади:

$$[Q_i] = \frac{[A]}{[q_i]},$$

бунда $[A]$ — ишнинг ўлчови. Агар умумлашган координата узунлик бирлигида ўлчанса, умумлашган куч бирлиги (Н) да ўлчанади; агар умумлашган координата бурчак ўлчовига эга бўлса, умумлашган куч кучнинг моментни бирлиги (Н.м) да ўлчанади.

Умумлашган кучларни ҳисоблаш усуллари устида тўхталамиз.

1. Умумлашган кучларни (24.22) формула воситасида ҳисоблаш мумкин. Бу формуладаги иккита векторнинг скаляр кўпайтмасини уларнинг координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодаласак, умумлашган куч учун

$$Q_i = \sum_{v=1}^N \left(X_v \frac{\partial x_v}{\partial q_i} + Y_v \frac{\partial y_v}{\partial q_i} + Z_v \frac{\partial z_v}{\partial q_i} \right) \quad (24.24)$$

муносабат ўринли бўлади.

2. Умумлашган кучни, масалан Q_1 ни, ҳисоблаш учун системага шундай мумкин бўлган кўчиш берамизки, натижада фақат δq_1 нолдан фарқли бўлсин:

$$\delta q_1 \neq 0, \quad \delta q_2 = 0, \quad \delta q_n = 0.$$

Бу кўчишдаги система нуқталарига қўйилган барча кучларнинг мумкин бўлган иши $(\delta A)_{q_1}$ ни (24.23) га кўра ҳисоблаймиз:

$$(\delta A)_{q_1} = Q_1 \delta q_1.$$

Бундан

$$Q_1 = \frac{(\delta A)_{q_1}}{\delta q_1} \quad (24.25)$$

бўлади.

Қолган умумлашган кучлар ҳам худди шунингдек ҳисобланади.

3. Агар система нуқталарига таъсир этувчи кучлар потенциалга эга бўлса, у ҳолда

$$X_v = \frac{\partial U}{\partial x_v}, \quad Y_v = \frac{\partial U}{\partial y_v}, \quad Z_v = \frac{\partial U}{\partial z_v}$$

тенгликлар ўринли бўлади. X_v, Y_v, Z_v ларнинг бу қийматларини (24.23) га қўйсак,

$$Q_i = \sum_{v=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_v} \frac{\partial x_v}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_v} \frac{\partial y_v}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_v} \frac{\partial z_v}{\partial q_i} \right).$$

Бу тенгликнинг ўнг томонини U функциядан умумлашган координата q_i бўйича олинган хусусий ҳосилага тенг:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (24.26)$$

Шундай қилиб, *потенциалли кучлар таъсиридаги системанинг умумлашган кучи, кучнинг потенциалидан мос умумлашган координата бўйича олинган хусусий ҳосилага тенг бўлади.*

Системанинг потенциал энергияси

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) = -U(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

формула ёрдамида аниқланишини эътиборга олсак, умумлашган куч учун

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (24.27)$$

формула ўринли бўлади.

Агар ишқаланиш кучи мавжуд бўлса, у ҳолда бу кучларни актив кучлар қаторига қўшиб, унга мос умумлашган кучлар ҳисобланади.

24.9-§. Системанинг умумлашган координаталардаги мувозанат шартлари

Юқорида кўрганимиздек, N та моддий нуқталардан ташкил топган механик системага l та голономли боғланишлар қўйилган бўлса, бундай системанинг ҳолатини $n = 3N - l$ та $q_1, q_2, \dots, q_n$ умумлашган координаталар орқали аниқлаш мумкин.

Мумкин бўлган кўчиш принципига асосан голономли, идеал, стационар ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган системанинг (серилган онда барча нуқталарининг тезликлари нолга тенг бўлиши билан бирга $\sum \vec{F}_v \delta \vec{r}_v = 0$ бўлиши, яъни барча актив кучларнинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишдаги ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

(24.11) ва (24.23) га асосан (24.14) ни

$$\sum Q_i \delta q_i = 0$$

ёки

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n = 0 \quad (24.28)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Барча $q_1, q_2, \dots, q_n$ умумлашган координаталар эркин бўлгани учун голономли боғланишлар қўйилган система учун уларнинг вариациялари ҳам эркин бўлади. Шу сабаб-

$\delta q_1 \neq 0$ қолган барча вариациялар $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0$ деб қабул қилиш мумкин. У ҳолда (24.28) дан $Q_1 = 0$ шартни оламиз. Худди шунингдек $\delta q_2 \neq 0$ ҳамда $\delta q_1 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0$ деб қараб, $Q_2 = 0$ ва ҳоказо шартларни оламиз. Шундай қилиб, (24.28) дан қуйидаги мувозанат шартларини оламиз:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_n = 0 \quad (24.29)$$

(24.29) тенгликлар голономли системанинг умумлашган координаталаридаги мувозанат шартларини ифодалайди: голономли, идеал, стационар ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган система мувозанатда бўлиши учун танланган $q_1, q_2, \dots, q_n$ умумлашган координаталарга мос умумлашган кучларнинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир (бошланғич пайтда система барча нуқталарининг тезлиги нолга тенг деб қараймиз).

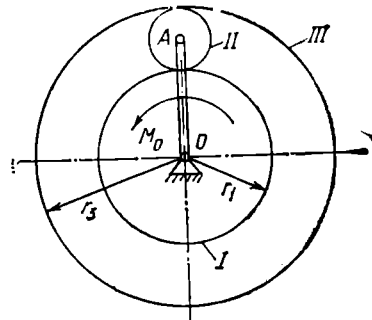
Агар система нуқталарига қўйилган кучлар потенциалга эга бўлса, у ҳолда (24.26) ни назарда тутиб, системанинг мувозанат шартлари (24.29)ни

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0 \quad (24.30)$$

ёки (24.27) га кўра

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0 \quad (24.30')$$

кўринишда ёзиш мумкин. (24.30)
ёки (24.30') шартлар куч функ-
цияси (ёки потенциал энергия) эк-
стремумга эга бўлишининг зарурий
шартини ифодалайди. Шундай қи-
либ, *потенциалли кучлар таъси-
ридаги механик системанинг му-
возанат ҳолатида куч функцияси
ёки потенциал энергия экстремум-
га эришиши мумкин.*



24.10- расм.

24.4-масала. Дифференциал узатма O ўқ атрофида айланадиган иккита I ва III тишли гилдираклардан ҳамда OA даста ёрдамида ҳаракатга келтириладиган ва унга эркин ўрнатилган II тишли югур-
дак гилдиракдан ташқит топган (24.10-
расм). Дастага momenti M_0 га тенг жуфт куч қўйилган. I ва III гилдиракла-
рининг радиуслари мос равишда r_1 ва r_3 га тенг. Механизм горизонтал текисликда
жойлашган. Илқаланишни эътиборга олмай, механизм мувозанатда бўлиши учун
I ва III тишли гилдиракларга қўйиладиган жуфтларнинг momenti M_1 ва M_3
қандай қийматга эга бўлиши аниқлансин.

Ечиш. Системанинг ҳолати OA дастанинг айланиш бурчаги φ_0 ҳамда I тиш-
ли гилдиракнинг айланиш бурчаги φ_1 билан бир қийматли аниқланади. Ҳақиқатан
ҳам, агар OA даста ва I тишли гилдиракни қўзғалмас деб қарасак, у ҳолда система
қўзғалмас бўлади. Бинобарин, системанинг эркинлик даражаси 2 га тенг бўлади.
 φ_0 ва φ_1 бурчакларни умумлашган координаталар учун қабул қиламиз:

$$q_1 = \varphi_0, \quad q_2 = \varphi_1.$$

Системага momenti M_0 га тенг бўлган жуфт куч таъсири йўналишида $\delta\varphi_0$
ва $\delta\varphi_1$ мумкин бўлган кўчиш берамиз. У ҳолда II тишли гилдирак $\delta\varphi_2$, III
тишли гилдирак эса $\delta\varphi_3$ мумкин бўлган кўчишларни олади. Бу кўчишларнинг
йўналиши $\delta\varphi_0$ ва $\delta\varphi_1$ ларга боғлиқ бўлади.

Механизм горизонтал текисликда жойлашгани туфайли гилдиракларнинг оғир-
лик кучи иш бажармайди.

Айтайлик, моментлари M_1 ва M_3 га тенг жуфт кучлар I ва III тишли гил-
диракларни $\delta\varphi_1$ ва $\delta\varphi_3$ мумкин бўлган бурчак кўчиш йўналишида айлантирсин.
У ҳолда система мувозанатда бўлиши учун мумкин бўлган кўчиш принципига
асосан

$$\sum \delta A_v = M_0 \delta\varphi_0 + M_1 \delta\varphi_1 + M_3 \delta\varphi_3 = 0 \quad (1)$$

тенглама ўринли бўлиши керак.

$\delta\varphi_3$ ни $\delta\varphi_0$ ва $\delta\varphi_1$ орқали ифодалаш учун дастлаб Виллис усулидан фой-
даланиб, III тишли гилдиракнинг бурчак тезлиги ω_3 ни ω_0 ва ω_1 орқали ифода-
лаймиз.

	OA даста	Тишли гилдираклар		
		I	II	III
Тўхтагунча бурчак тезлиги	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3
Тўхтагандан кейинги бурчак тезлиги	0	$\omega_1 - \omega_0$	$\omega_2 - \omega_0$	$\omega_3 - \omega_0$
Тишлашиш тури		ташқи		ички

Жадвалдан фойдаланиб, (14.12) га асосан қуйидаги тенгликларни ёзамиз:

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = \frac{r_3}{r_2}.$$

Бу тенгликларни кўпайтирсак,

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = -\frac{r_3}{r_1}, \Rightarrow \omega_3 = \omega_0 \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right) - \omega_1 \frac{r_1}{r_3}. \quad (2)$$

Боғланишлар стационар бўлганда бурчак тезликлар уларга мос мумкин бўлган бурчак кўчишларга пропорционал бўлишини эътиборга олсак, (2) дан

$$\delta\varphi_3 = \delta\varphi_0 \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right) - \delta\varphi_1 \frac{r_1}{r_3} \quad (3)$$

муносабатни оламир.

(3) ни (1) га қўйсак,

$$\sum \delta A_v = \left[M_0 + M_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right) \right] \delta\varphi_0 + \left[M_1 - M_3 \frac{r_1}{r_3} \right] \delta\varphi_1 = 0.$$

(24.25) га асосан φ_0 ва φ_1 бурчакларга мос умумлашган кучларни аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{(\sum \delta A_v) \varphi_0}{\delta\varphi_0} = M_0 + M_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right), \\ Q_2 &= \frac{(\sum \delta A_v) \varphi_1}{\delta\varphi_1} = M_1 - M_3 \frac{r_1}{r_3}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(24.29) га кўра системанинг мувозанат шартларини, яъни $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ тенгламаларни ҳисобга олиб, (4) дан M_3 ва M_1 ларни аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} M_0 + M_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right) &= 0, \quad M_1 - M_3 \frac{r_1}{r_3} = 0, \Rightarrow \\ M_3 &= -\frac{M_0 r_3}{r_1 + r_3}, \quad M_1 = -\frac{M_0 r_1}{r_1 + r_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Бу ифодалардаги манфий ишора I ва III ғилдиракларга қўйилган жуфтларнинг таъсири дастага қўйилган жуфт куч таъсирига қарама-қарши йўналганлигини ифодалайди.

24.10-§. Динамиканинг умумий тенгламаси Даламбер-Лагранж принципи

N та моддий нуқталардан ташкил топган механик система нуқталарига l та идеал ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган бўлсин. Даламбер принципига кўра системанинг бирор M_v нуқтасига таъсир этувчи $\vec{F}_v$ актив ва $\vec{R}_v$ боғланиш реакция кучлари $\vec{\Phi}_v$ инерция кучи билан биргаликда ҳар онда

$$\vec{F}_v + \vec{R}_v + \vec{\Phi}_v = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (23.9)$$

мувозанат шартларини қаноатлантиради. Вақтнинг қайд қилинган бирор пайти учун система нуқталарига $\delta\vec{r}_v$ мумкин бўлган кўчиш берамиз. (23.9) тенгламаларнинг ҳар бирини $\delta\vec{r}_v$ мумкин бўлган кўчишга кўпайтириб, қўшсак,

$$\sum \vec{F}_v \delta \vec{r}_v + \sum \vec{R}_v \delta \vec{r}_v + \sum \vec{\Phi}_v \delta \vec{r}_v = 0$$

ҳосил бўлади.

Идеал боғланишларнинг таърифига кўра $\sum \vec{R}_v \delta \vec{r}_v = 0$ бўлгани учун

$$\sum (\vec{F}_v + \vec{\Phi}_v) \delta \vec{r}_v = 0 \quad (24.31)$$

ёки $\vec{\Phi}_v = -m_v \vec{\omega}_v$ эканлиги ҳисобга олинса,

$$\sum (\vec{F}_v - m_v \vec{\omega}_v) \delta \vec{r}_v = 0 \quad (24.32)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенглама динамиканинг умумий тенгламаси дейилади.

(24.32) га асосан, идеал ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган ҳаракатдаги система нуқталарига таъсир этувчи барча актив ҳамда инерция кучларининг ҳар қандай мумкин бўлган қўчишдаги элементар ишларининг йиғиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади.

(24.31) ёки (24.32) тенгламалар Даламбер ва Лагранж принципларининг мажмуасидан иборат бўлгани учун Даламбер — Лагранж принципи деб аталади.

(24.31) нинг Декарт координаталаридаги ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum [(X_v + \Phi_{vx}) \delta x_v + (Y_v + \Phi_{vy}) \delta y_v + (Z_v + \Phi_{vz}) \delta z_v] = 0. \quad (24.33)$$

Бунда x_v , y_v , z_v билан M_v нуқтанинг координаталари белгиланган (24.33) да

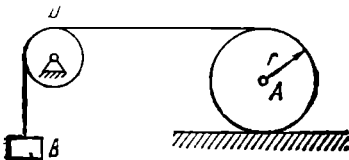
$$\Phi_{vx} = -m_v x_v, \quad \Phi_{vy} = -m_v y_v, \quad \Phi_{vz} = -m_v z_v$$

бўлгани учун динамиканинг умумий тенгламасини

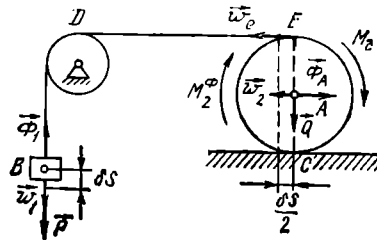
$$\sum [(X_v - m_v x_v) \delta x_v + (Y_v - m_v y_v) \delta y_v + (Z_v - m_v z_v) \delta z_v] = 0 \quad (24.34)$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

24.6-масала. Оғирлиги P га тенг B юк D блок орқали ўтказилган чўзилмайдиган ип воситасида радиуси r ва оғирлиги Q га тенг цилиндрик A ғалтакни ҳаракатга келтирилади (24-11-расм). Ғалтак сирпанмасдан ғилдирайди ва думалаш-



24.11- расм.



24.12- расм.

даги ишқаланиш коэффициентини f_0 га тенг. D блокнинг массасини эътиборга олмай, B юкнинг тезланиши аниқлансин.

Ечиш. Берилган B юкнинг оғирлик кучи $\vec{P}$, ғалтакнинг оғирлик кучи $\vec{Q}$ ва думалашдаги ишқаланиш жуфтининг моменти M_0 ларни 24.12-расмда кўрсатилгандек тасвирлаймиз.

Инерция кучларини топамиз. $\vec{\omega}_1$ тезланиш билан тўғри чизикли ҳаракат қилувчи B юкнинг инерция кучи $\vec{\Phi}_1 = -\frac{P}{g} \vec{\omega}_1$ вектор билан ифодаланади.

Текис параллел ҳаракатдаги ғалтакнинг инерция кучлари ғалтак марказига қўйилган $\vec{\Phi}_2 = -\frac{Q}{g} \vec{\omega}_2$ векторга (бунда $\vec{\omega}_2$ — ғалтак марказининг тезланиши).

Ҳамда моменти $M_2^{\Phi} = -I_{2x} \epsilon_2$ га тенг жуфт кучга келтирилади. Бунда I_{2x} — ғалтакнинг O нуқтадан ғалтак текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти; ϵ_2 — ғалтакнинг бурчак тезланиши.

B юк δs мумкин бўлган кўчиш олса, ип чўзилмаслиги сабабли ғалтак гардишидаги E нуқта ҳам δs мумкин бўлган кўчиш олади. Ғалтак сирпанмасдан думаллагани туфайли C нуқта тезликларининг оқий марказини ифодалайди ва ғалтак марказининг кўчиши $\frac{\delta s}{2}$ га тенг бўлади. Буни назарда тутиб, динамиканинг умумий тенгламасини тузамиз:

$$P \delta s - \Phi_1 \delta s - M_D \delta \varphi - M_2^{\Phi} \delta \varphi - \Phi_2 \frac{\delta s}{2} = 0. \quad (1)$$

Бунда $\delta \varphi = \frac{\delta s}{2r}$ ғалтакнинг мумкин бўлган бурчак кўчишини ифодалайди.

Ип чўзилмаслиги сабабли $\omega_1 = \omega_E = \omega$. A нуқта тўғри чизикли ҳаракатда бўлади. Шу сабабли бу нуқтанинг тезланиши $\vec{\omega}_2$ E нуқтанинг тезланиши $\vec{\omega}_E$ га параллел бўлганидан $\omega_2 = \frac{\omega_E}{2}$ тенглик ўринли бўлади. Бинобарин,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{P}{g} \omega, \\ M_2^{\Phi} &= I_{2x} \epsilon_2 = \frac{Q}{g} \frac{r^2}{2} \frac{\omega}{2r} = \frac{Q}{g} \frac{r}{4} \omega, \\ \Phi_2 &= \frac{Q}{g} \omega_2 = \frac{Q}{g} \frac{\omega}{2}, \\ \Phi_2 &= \frac{Q}{g} \omega_2 = \frac{Q}{g} \frac{\omega}{2}. \end{aligned}$$

Думалашдаги ишқаланиш жуфтининг моменти $M_0 = f_0 Q$ формула ёрдамида аниқланади. Натижада (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$P \delta s - \frac{P}{g} \omega \delta s - f_0 Q \frac{\delta s}{2r} - \frac{Q}{g} \frac{r}{4} \omega \frac{\delta s}{2r} - \frac{Q}{g} \frac{\omega}{2} \frac{\delta s}{2} = 0.$$

Охириги тенгламанинг барча ҳадларини δs га бўламиз:

$$P - \frac{P}{g} \omega - \left(P + \frac{Q}{8} + \frac{Q}{4} \right) \frac{\omega}{g} = 0.$$

Бундан B юкнинг тезланиши ω ни аниқлаймиз:

$$\omega = 8g \cdot \frac{P - \frac{f_0 Q}{2r}}{3Q + 8P}$$

24.11 - §. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари

Динамиканинг умумий тенгламаси воситасида идеал боғланиш реакция кучлари қатнашмайдиган ҳаракат дифференциал тенгламаларини чиқариш мумкин. Бунинг учун динамиканинг умумий тенгламасини ифодаловчи (24.32) тенгламада $\vec{\omega}_v = \frac{d\vec{v}_v}{dt}$ бўлишини эътиборга олиб, уни қуйидагича ёзамиз:

$$\sum_{v=1}^N \left(\vec{F}_v - m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_v = 0. \quad (24.35)$$

(21.21) га кўра радиус-векторнинг вариацияси

$$\delta \vec{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

тенгликдан аниқланишини назарда тутсак,

$$\sum_{v=1}^N \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_v - m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} \right) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i = 0$$

тенглама ўринли бўлади. Бу тенгламада йиғиндилар тартибини ўзгартириб, уни

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^N \vec{F}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} - \sum_{v=1}^N m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) \cdot \delta q_i = 0$$

кўринишда ёзамиз. Бу тенгламада (24.22) га асосан

$$\sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

умумлашган кучларни ифодалайди. Шунинг учун

$$\sum_{i=1}^n \left(Q_i - \sum_{v=1}^N m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (24.36)$$

тенглик ўринли бўлади.

(24.36) да $B = m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ ифодани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$B = \frac{d}{dt} \left(m_v \vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) - m_v \vec{v}_v \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}. \quad (24.37)$$

(24.37) даги $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ ҳадларнинг фақат голономли система учун ўринли бўлган бошқа кўринишдаги ифодасини аниқлаймиз. Бунинг учун нуқтанинг тезлиги унинг радиус-векторидан вақт бўйича олинган ҳосиллага тенг бўлишини ҳамда t вақтнинг радиус-вектор $\vec{r}_v$ ифодасига фақат ошкор равишда қатнашибгина қолмай, балки $q_1, q_2, \dots, q_n$ умумлашган координаталар орқали ҳам қатнашишини эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} \vec{v}_v &= \frac{d\vec{r}_v}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \end{aligned} \quad (24.38)$$

муносабат ўринли бўлади. Бунда $q_i = \frac{dq_i}{dt}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) умумлашган тезлик дейилади.

(24.38) нинг ҳар иккала томонидан умумлашган тезлик $\dot{q}_i$ бўйича хусусий ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}. \quad (24.39)$$

Бу формула ёрдамида $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ аниқланади.

(24.38) нинг иккала томонидан q_i бўйича хусусий ҳосила олсак,

$$\frac{\partial \vec{v}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_i \partial q_i} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial t \partial q_i}. \quad (24.40)$$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ ни ҳисоблаш учун $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ катталиқ умумлашган координаталар ва вақтнинг функциясидаги иборат эканлигини эътиборга олиб, унинг вақт бўйича тўлиқ ҳосиласини топамиз:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_i \partial q_i} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_i \partial t}. \quad (24.41)$$

(24.40) ва (24.41) ни солиштириб, иккита ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосилалар дифференциаллаш тартибига боғлиқ бўлмаслигини назарда тутсак,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial q_i} \quad (24.42)$$

тенгликни оламиз.

Шундай қилиб, $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ нинг қийматини (24.39) ва $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ нинг қийматини (24.42) дан (24.37) га келтириб қўйсак, B учун

$$B = \frac{d}{dt} \left(m_v \vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_v \vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial q_i}$$

ифода ўринли бўлади. Бунда $\vec{v}_v^2 = v_v^2$ ҳамда

$$m_v \vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_v v_v^2}{2} \right), \quad m_v \vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{m_v v_v^2}{2} \right)$$

тенгликларни назарда тутиб, B учун яна қуйидаги ифодани оламиз:

$$B = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_v v_v^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{m_v v_v^2}{2} \right).$$

B нинг бу қийматини (24.36) га қўйиб, ҳосилани йиғиндидан ташқарида ёзсак, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\sum_{i=1}^n \left[Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{v=1}^N \frac{m_v v_v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{v=1}^N \frac{m_v v_v^2}{2} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (24.43)$$

(24.43) да

$$T = \sum_{v=1}^N \frac{m_v v_v^2}{2} \quad (24.44)$$

системанинг кинетик энергиясини ифодалайди. Шу сабабли бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{i=1}^n \left[Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (24.45)$$

(24.45) тенглама *умумлашган координаталар орқали ифодаланган динамиканинг умумий тенгламасидир*. Бу тенгламада

$$- \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

ҳад системанинг $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ мумкин бўлган кўчишидаги барча инерция кучлари ишларининг йиғиндисини ифодалайди.

Голономли боғланишлар қўйилган система учун барча $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ лар эркин бўлган учун улар олдидаги ифодаларни алоҳида-алоҳида нолга тенглаш мумкин:

$$Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ёки

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (24.46)$$

(24.46) тенгламалар Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари ёки механик системанинг умумлашган координаталардаги ҳаракат дифференциал тенгламалари дейилади. Бу тенгламаларнинг сони системанинг эркинлик даражасига тенг бўлади. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларида идеал боғланиш реакция кучлари қатнашмайди.

(24.38) ва (24.44) лардан кўрамизки, системанинг кинетик энергияси аниқланадиган ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} C, \end{aligned} \quad (24.47)$$

яъни системанинг кинетик энергияси умумлашган тезликларнинг квадратик функциясида иборат бўлади.

(24.47) да

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_j}, \quad B_i = \sum_{v=1}^N m_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t}, \\ C &= \sum_{v=1}^N m_v \left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

бўлиб, A_{ij} , B_i ва C катталиклар умумлашган координаталар ва вақтга боғлиқ, лекин умумлашган тезликка боғлиқ эмас. Шу сабабли

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + B_i$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n \left(A_{ij} \dot{q}_j + \frac{da_{ij}}{dt} q_j \right) + \frac{dB_i}{dt}$$

муносабат ўринли бўлади.

Охириги ифодада умумлашган координаталарнинг иккинчи ҳосиласи $\dot{q}_j$ қатнашади. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламасидаги бошқа ҳадлар умумлашган координаталарнинг биринчи даражадан юқори бўлмаган ҳосилаларини ўз ичига олади.

Шундай қилиб, Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари q_i ($i=1, 2, \dots, n$) координаталарга нисбатан иккинчи даражали оддий дифференциал тенгламалар системасидан иборат бўлади.

24.12- §. Потенциалли кучлар таъсиридаги механик система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари

Агар механик система нуқталарига потенциалли кучлар таъсир этса, у ҳолда (24.27) га кўра

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Шу сабабли бундай система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар Лагранж функцияси деб аталадиган

$$L = T + U = T - \Pi$$

функцияни киритсак, $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$ бўлгани учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини қуйидагича ёза оламиз:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (24.48)$$

(24.48) тенгламалар *потенциалли кучлар таъсиридаги механик система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини* ифодалайди.

24.13- §. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини қўллашга оид масалалар

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларига доир масалалар қуйидаги тартибда ечилади.

1. Системанинг эркинлик даражаси аниқланади ва умумлашган координаталар танлаб олинади.

2. Системага таъсир этувчи актив кучлар расмда тасвирланади ва умумлашган кучлар 24.8-§ да баён қилинган усуллардан бири билан ҳисобланади.

3. Системанинг кинетик энергияси умумлашган координаталар ва умумлашган тезликларнинг функцияси сифатида аниқланади.

4. Лагранж тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган кинетик энергиянинг ҳосилалари $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$, $\frac{\partial T}{\partial q_1}$ топилади.

5. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари тузилади ва бу тенгламаларни берилган бошланғич шартларда интеграллаб изланаётган номаълумлар аниқланади.

24.6- масала. Вертикал текисликда жойлашган кулакли механизмда кулак 1 O_1 нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида айланувчи r радиусли, массаси m га тенг бир жинсли дискдан иборат. Кулакка моменти M га тенг жуфт куч таъсир этади. Тишли рейка 2 вертикал йўналтирувчи бўйлаб ҳаракатланади ва тишли блок 3 ни айлантиради. Блок 3 билан спарник 4 шарнир воситасида боғланган (24.13-расм. а). Тишли рейка 2 ва спарникнинг массаси мос равишда m_2 ва m_4 га тенг. Блокнинг айланиш ўқиға нисбатан инерция моменти I га тенг. $R_3 = 2r_3$; $r_3 = 2r/3$; $m_2 = m/3$; $m_4 = m/6$; $I = 2mr^2$ деб қараб, системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси тузилсин. Кривошип 5 нинг массаси эътиборга олинмасин.

Ечиш. Системанинг ҳолати кулак 1 нинг айланиш бурчаги φ билан бир қийматли аниқланади. Ҳақиқатан ҳам, агар кулак 1 ни қўзғалмас деб қарасак, у ҳолда система қўзғалмас бўлади. Бинобарин, системанинг эркинлик даражаси бирга тенг. Кулакнинг айланиш бурчаги φ ни умумлашган координата учун танлаб оламиз: $q = \varphi$. У ҳолда кулакнинг бурчак тезлиги $\dot{q} = \dot{\varphi}$.

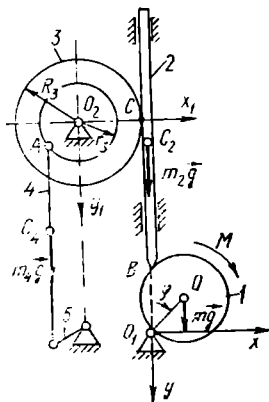
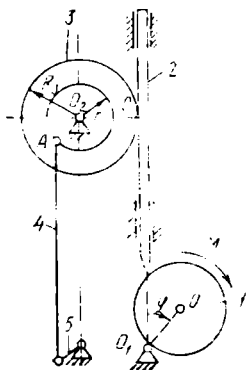
Бу геометрик мулоҳазаларни аналитик усулда ҳам изоҳлаш мумкин. Қаралаётган система кулак 1, тишли рейка 2, блок 3 ва спарник 4 дан ташкил топган бўлиб, уларга қуйидаги голономли боғланишлар қўйилган:

$$y_B = -2r \cos \varphi, \quad (1)$$

$$v_C = R_3 \dot{\varphi}_3, \quad (2)$$

$$v_A = r_3 \dot{\varphi}_3, \quad (3)$$

$$x_{1,A}^2 + y_{1,A}^2 = r_3^2. \quad (4)$$



24.13- расм.

Бунда y_B — B нуқтанинг ординатаси, v_C — рейка ва блок C нуқтасининг тезлиги, Φ_3 — блокнинг бурчак тезлиги, v_A — блок ва спарник A нуқтасининг тезлиги, (1) тенглама тишли рейканинг B нуқтаси доимо кулакка тегиб туришини, (2) тенглама тишли рейка ва блок тишлашган C нуқтада ҳаракат сирпанмасдан содир бўлишини, (3) эса блок A нуқтасининг тезлиги илгариларда ҳаракатдаги спарник A нуқтасининг тезлигига тенглигини, (4) тенглама A нуқта r_3 радиусли айлана бўйлаб ҳаракатланишини ифодалайди.

Кулак I O_1 нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун унинг ҳолати O_1 нуқта атрофидаги айланиш бурчаги φ билан аниқланади. Тишли рейка вертикал йўналишда бўйича тўғри чизиqli ҳаракатда бўлгани учун унинг ҳолати B нуқтанинг ординатаси y_B ; блокнинг ҳолати O_2 нуқта атрофидаги айланиш бурчаги Φ_3 ; спарникнинг ҳолати эса x_{1A} , y_{1A} координаталар билан аниқланади. Шундай қилиб, системанинг ҳолати бешта φ , y_B , Φ_3 , x_{1A} , y_{1A} параметрлар билан аниқланади ва улар орасида тўртта голономли боғланишлар мавжуд. Демак, системанинг эркинлик даражаси 1 га тенг.

Расмда кулакка таъсир этувчи жуфт momenti M , кулак, тишли рейка ва спарникларнинг огирлик кучлари $\vec{m_1g}$, $\vec{m_2g}$ ва $\vec{m_4g}$ ларни тасвирлаймиз (24.13-расм, б).

Кулак φ бурчакка айланганда тишли рейка $h = 2r(1 - \cos \varphi)$ масофага вертикал пастга силжийди; блок

$$\Phi_3 = \frac{h}{r_3} = \frac{3}{2} (1 - \cos \varphi) \quad (5)$$

бурчакка айланади.

Кулакка M момент йўналишида $\delta\varphi$ мумкин бўлган кўчиш берсақ, кулак марказининг координатаси учун $y_O = -r \cos \varphi$ тенглик ўринли бўлгани туфайли унинг вертикал бўйича мумкин бўлган кўчиши қуйидагича аниқланади:

$$\delta y_O = r \sin \varphi \delta\varphi.$$

$$(1) \text{ га кўра тишли рейканинг } B \text{ нуқтаси}$$

$$\delta y_C = \delta y_B = 2r \sin \varphi \delta\varphi$$

кўчиш олади; (5) га асосан блок

$$\delta\Phi_3 = \frac{3}{2} \sin \varphi \delta\varphi$$

бурчакка айланади; $y_{1A} = r_3 \cos \Phi_3$ бўлгани учун спарник $\delta y_{C_4} = \delta y_{1A} = -r_3 \sin \Phi_3 \delta\Phi_3 = -r \sin \varphi \sin \left[\frac{3}{2} (1 - \cos \varphi) \right] \delta\varphi$ га кўчади. Бунда манфий ишора A нуқта юқорига кўчишини ифодалайди. Бу кўчишларда M , m_1g , m_2g ва m_4g лар ишларининг йиғиндисини топамиз.

$$\begin{aligned} \delta A &= M\delta\varphi + m_1g\delta y_O + m_2g\delta y_{C_2} + m_4g\delta y_{C_4} = \\ &= \left\{ M + m_1gr \sin \varphi + \frac{m_2}{3} g \cdot 2r \sin \varphi - \frac{m_4}{6} gr \sin \varphi \cdot \sin \left[\frac{3}{2} (1 - \cos \varphi) \right] \right\} \delta\varphi = \\ &= \left\{ M + \frac{5}{3} mgr \sin \varphi - \frac{m_4}{6} gr \sin \varphi \cdot \sin \left[\frac{3}{2} (1 - \cos \varphi) \right] \right\} \delta\varphi. \end{aligned}$$

Натижада φ умумлашган координатага мос бўлган умумлашган куч қуйидагича аниқланади:

$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = M + \frac{5}{3} mgr \sin \varphi - \frac{m_4}{6} gr \sin \varphi \cdot \sin \left[\frac{3}{2} (1 - \cos \varphi) \right]. \quad (6)$$

Системанинг кинетик энергияси

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (7)$$

формуладан аниқланади. Бунда T_1, T_2, T_3, T_4 лар мос равишда кулак, тишли рейка, блок ва спарникларнинг кинетик энергияларини ифодалайди.

Кулак O_1 нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун

$$T_1 = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2}.$$

Гюйгенс—Штейнер теоремасига кўра,

$$I_1 = I_O + mr^2 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$$

бўлгани туфайли

$$T_1 = \frac{3}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2. \quad (8)$$

Тишли рейка тўғри чизиqli ҳаракатда бўлгани учун

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_B^2.$$

Бунда $m_2 = m/3$ ва (1) га кўра

$$\dot{y}_B = 2r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

бўлгани сабабли

$$T_2 = \frac{2}{3} mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi. \quad (9)$$

Блок O_2 нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун $T_3 = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_3^2$. Бунда $I = 2mr^2$ ҳамда (5) га кўра

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{3}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (10)$$

бўлгани сабабли

$$T_3 = \frac{9}{4} mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi. \quad (11)$$

Спарник 4 илгарилама ҳаракат қилади. Шу сабабли

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_A^2.$$

Бунда $m_4 = m/6$ ҳамда (3) ва (10) га кўра $v_A = r_3 \dot{\varphi}_3 = \frac{2r}{3} \cdot \frac{3}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi = r \dot{\varphi} \sin \varphi$ бўлганидан

$$T_4 = \frac{1}{12} mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \quad (12)$$

ҳосил бўлади.

(8), (9), (11) ва (12) ни (7) га қўйиб, системанинг кинетик энергиясини умумлашган координата ва умумлашган тезликларининг функцияси шифарида аниқлаймиз:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (13)$$

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган кинетик энергиянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) m r^2 \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) m r^2 \ddot{\varphi} + 6 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 3 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Берилган система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} \quad (15)$$

кўринишда ёзиб, (6) ва (14) ни эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) m r^2 \ddot{\varphi} + 3 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = M - \\ &- \frac{m}{6} g r \sin \varphi \cdot \sin \left[\frac{3}{2} (1 - \cos \varphi) \right] + \frac{5}{3} m g r \sin \varphi \end{aligned}$$

тенгламага эга бўламиз.

Шундай қилиб, берилган системанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини қуйидагича ёзамиз:

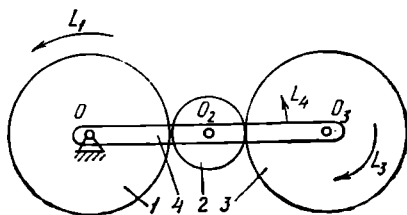
$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) m r^2 \ddot{\varphi} + 3 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi + \frac{m}{6} g r \sin \varphi \cdot \sin \left[\frac{3}{2} (1 - \cos \varphi) \right] - \\ &- \frac{5}{3} m g r \sin \varphi = M. \end{aligned}$$

24.7-масала. Дифференциал механизмда m_1 массали шестерня 1 ва етакчи стержень 4 O нуқтадан ўтувчи вертикал ўқ агрофиди бир-бирига боғлиқсиз равишда айланади (24.14-расм). Шестерня 1 m_2 массали шестерня 2 билан тишлашади, ўз навбатида шестерня 2 m_3 массали шестерня 3 билан тишлашади. Шестерня 1 ва етакчи стержень 4 га моментлари M_1 ва M_4 га тенг жуфт кучлар қўйилган. Шестерня 3 га M_3 қаршилик моменти таъсир этади.

Шестерня 1 ва етакчи стержень 4 нинг бурчак тезланишлари аниқлансин. Шестернялар радиуслари мос равишда r_1 , r_2 ва r_3 га тенг бир жинсли диск деб қаралсин. Етакчи стерженнинг массаси эътиборга олинмасин. Қуйидагилар берилган: $m_1 = m_2 = 9m_3 = 90$ кг, $M_1 = 150$ Н·м, $M_3 = 120$ Н·м, $M_4 = 180$ Н·м, $r_1 = r_3 = 3r_2 = 0,3$ м.

Ечиш. Системанинг ҳолати шестерня 1 ва етакчи стержень 4 ларнинг айланиш бурчаклари φ_1 ва φ_4 билан бир қийматли аниқланади. Ҳақиқатан ҳам, агар шестерня 1 ва етакчи стержень 4 ни қўзғалмас деб қарасак, у ҳолда система қўзғалмас бўлади. Шу сабабли унинг эркинлик даражаси 2 га тенг. φ_1 ва φ_4 бурчакларни умумлашган координаталар учун қабул қиламиз: $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_4$. У ҳолда $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_4$ лар мос равишда шестерня 1 ва етакчи стержень 4 ларнинг бурчак тезликларини ифодалайди.

Дастлаб Виллис усулидан фойдаланиб, шестерня 2 ва 3 ларнинг бурчак тезликлари $\dot{\varphi}_2$ ва $\dot{\varphi}_3$ ларни $\dot{\varphi}_1$ ҳамда $\dot{\varphi}_4$ лар орқали ифодалаймиз.



24.14- расм.

	4 стержень	Шестернялар		
		1	2	3
Тўхтагунча бурчак тезлиги	$\dot{\varphi}_4$	$\dot{\varphi}_1$	$\dot{\varphi}_2$	$\dot{\varphi}_3$
Тўхтагандан кейинги бурчак тезлиги	0	$\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4$	$\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4$	$\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4$
Тишлашиш турн		ташқи		ташқи

Жадвалдан фойдаланиб, қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$\frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4}{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4} = -\frac{r_2}{r_2}, \quad (1)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4}{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4} = -\frac{r_3}{r_2}. \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгликларни кўпайтириб ихчамласак,

$$\frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4}{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4} = \frac{r_3}{r_1} = 1.$$

Бундан фидирак 3 нинг бурчак тезлигини аниқлаймиз:

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_1. \quad (3)$$

(3) ни (2) га қўйиб $\frac{r_3}{r_2} = 3$ эканлигини эътиборга олсак, $\frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4}{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4} = -3$

бўлади, бундан шестерня 2 нинг бурчак тезлиги аниқланадиган

$$\dot{\varphi}_2 = -3\dot{\varphi}_1 + 4\dot{\varphi}_4 \quad (4)$$

тенгликни оламиз.

Q_1 ва Q_2 умумлашган кучларни аниқлаш учун системага таъсир этувчи жуфт моментларининг системани мумкин бўлган кўчишларидаги элементар ишлари йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\delta A = M_1 \delta \varphi_1 + M_4 \delta \varphi_4 - M_3 \delta \varphi_3.$$

(3) га асосан

$$\delta \varphi_3 = \delta \varphi_1$$

тенглик ўринли бўлади. Бинобарин,

$$\delta A = (M_1 - M_3) \delta \varphi_1 + M_4 \delta \varphi_4. \quad (5)$$

Худди шу элементар ишларнинг йиғиндисини

$$\delta A = Q_1 \delta \varphi_1 + Q_2 \delta \varphi_2 \quad (6)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. (5) ва (6) ни солиштириб,

$$Q_1 = M_1 - M_3, \quad Q_2 = M_4 \quad (7)$$

муносабатлар ўринли бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Системанинг кинетик энергияси

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (8)$$

бўлиб, бунда T_1 , T_2 ва T_3 лар мос равишда шестерня 1, 2 ва 3 ларнинг кинетик энергияларини ифодалайди.

Шестерня 1 О нуқтадан ўтувчи вертикал ўқ агрофидла айланма ҳаракатда, шестерня 2 ва 3 лар эса текис параллел ҳаракатда бўлгани учун

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2, \\T_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_{O_2}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2, \\T_3 &= \frac{1}{2} m_3 v_{O_3}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2.\end{aligned}$$

Бунда

$$I_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}, \quad v_{O_2} = (r_1 + r_2) \dot{\varphi}_1, \quad I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2},$$

$$v_{O_3} = (r_1 + 2r_2 + r_3) \dot{\varphi}_1, \quad I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2}$$

ҳамда (3) ва (4) ни эътиборга олиб, T_1 , T_2 ва T_3 ларнинг қийматларини (8) га қўйсак,

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + 9m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \dot{\varphi}_1^2 + [m_2 (r_1 + r_2)^2 + \right. \\&\quad \left. + 8m_2 r_2^2 + m_3 (r_1 + 2r_2 + r_3)^2] \dot{\varphi}_1^2 - 12m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_4 \right\}.\end{aligned}$$

Бундан

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + 9m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \dot{\varphi}_1 - 6m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_4, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + 9m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \ddot{\varphi}_1 - 6m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_4; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} &= [m_2 (r_1 + r_2)^2 + 8m_2 r_2^2 + m_3 (r_1 + 2r_2 + r_3)^2] \dot{\varphi}_1 - \\&\quad - 6m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} &= [m_2 (r_1 + r_2)^2 + 8m_2 r_2^2 + m_3 (r_1 + 2r_2 + r_3)^2] \ddot{\varphi}_1 - \\&\quad - 6m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_1, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_4} &= 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Берилган система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= Q_2 \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

кўринишда ёзиб, (7) ва (9) ни (10) га қўйсак,

$$\frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + 9m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \ddot{\varphi}_1 - 6m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_3,$$

$$[m_2 (r_1 + r_2)^2 + 8m_2 r_2^2 + m_3 (r_1 + 2r_2 + r_3)^2] \ddot{\varphi}_4 - 6m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_1 = M_4$$

тенгламаларни олампиз. Берилган ифодаларнинг сон қийматларини қўйиб, бу тенгламаларни

$$\left. \begin{aligned} 8,55\ddot{\varphi}_1 - 0,6\ddot{\varphi}_4 &= 30, \\ 60\varphi_1 - 0,6\varphi_4 &= 180 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(11) дан шестерня 1 ва етакчи стержень 4 ларнинг изланиётган бурчак тезла-нишларини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 = \ddot{\varphi}_1 &= 3,72 \text{ рад/с}^2, \\ \epsilon_4 = \ddot{\varphi}_4 &= 3,04 \text{ рад/с}^2. \end{aligned}$$

24.14*-§. Гамильтон — Остроградский принципи

Айтайлик, Лагранж функцияси $L = T + U$ га тенг механик системанинг ҳолати $q_1, q_2, \dots, q_n$ умумлашган координаталар билан аниқлансин. Лагранж функцияси билан

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (24.49)$$

тенглик воситасида боғланган S динамик катталиқка *Гамильтон таъсири* дейилади.

Лагранж функцияси $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$ бўлгани туфайли Гамильтон таъсири S ни ҳисоблаш учун $t_0 \leq t \leq t_1$ вақт оралиғида $q_i = q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) функциялар берилган бўлиши керак. Бошқача айтганда, Гамильтон таъсири системанинг ҳаракатига боғлиқ функционалдан иборат.

Механик системанинг ҳаракатини n ўлчовли фазода координаталари $q_1, q_2, \dots, q_n$ га тенг битта нуқтанинг ҳаракати билан ҳаракатланиш мумкин. Айтайлик, $t = t_0$ пайтда системанинг ҳолати n ўлчовли фазода A нуқта, $t = t_1$ вақтда эса B нуқтанинг ҳолатлари билан аниқлансин ҳамда системанинг ҳаракат траекторияси AB эгри чизиқ билан ифодалансин (24.15-расм). Худди шу $t_1 - t_0$ вақт ичида система 24.15-расмда штрих билан кўрсатилган кинематик мумкин бўлган траекториялар бўйлаб ҳам ҳаракатланиши мумкин. AB га системанинг ҳақиқий траекторияси дейилади.



24.15- расм.

Гамильтон принципи воситасида системанинг иккита A ва B ҳолатлари орасида кинематик мумкин бўлган траекториялар ичидан худди шу ҳолатлар орасидаги ҳақиқий ҳаракат траекториясини ажратиш мумкин.

Гамильтон принципи қуйидагича ифодаланади: *системанинг иккита A ва B ҳолатлари орасидаги ҳақиқий ҳаракати, худди шу*

ҳоллар орасидаги ва айнан шу вақт оралиғида содир бўладиган кинематик мумкин бўлган ҳаракатлардан шундай хусусияти билан фарқ қиладики, ҳақиқий ҳаракат учун Гамильтон таъсирининг вариацияси нолга тенг ёки бошқача айтганда, системанинг ҳақиқий ҳаракати учун Гамильтон таъсири стационар қийматга эга бўлади, яъни

$$\delta S = 0. \quad (24.50)$$

Бу принцип стационар боғланишлар қўйилган система учун 1834-1835 йилларда У. Гамильтон томонидан баён этилган. Лекин стационар бўлмаган боғланишлар қўйилган умумий ҳолда бу принципти М. В. Остроградский 1848 йилда баён этган. Шу сабабли бу принципга *Гамильтон — Остроградский принципи* ҳам дейилади.

Голономли боғланишлар қўйилган система учун бу принципти қўллашда солиштирилаётган ҳаракатлар айнан бир хил вақт ичида содир бўлади деб қаралади. Шу сабабли $\delta t = 0$ деб олинади. Бундай вариацияга *изохрон вариация* дейилади. Голономли боғланишлар қўйилган система учун изохрон вариация ва вақт бўйича олинган ҳосила коммутативлик хусусиятига эга:

$$\frac{d}{dt} \delta q = \delta \frac{dq}{dt} \quad (24.51)$$

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларидан Гамильтон принципини келтириб чиқарамиз. Эркинлик даражаси n га тенг ва потенциалли кучлар таъсиридаги системанинг ҳақиқий ҳаракати учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини (24.48) кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Бу тенгламаларнинг ҳар бирини δq_i га кўпайтириб қўшсак,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) = 0. \quad (24.52)$$

(24.51) ни эътиборга олсак,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right).$$

Буни (24.52) га қўйиб,

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) \quad (24.53)$$

муносабатни оламиз.

Лагранж функцияси $L = L(t, q, \dot{q})$ ҳамда кўрилатган ҳолда $\delta t = 0$ бўлгани учун

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \delta L.$$

Шу сабабли (24.53) ни қуйидагича ифодалаймиз:

$$d \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \delta L dt.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини системанинг A ҳолатига мос келувчи $t = t_0$ вақтдан то системанинг B ҳолатига мос келувчи $t = t_1$ вақтгача интеграллаймиз:

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt.$$

A ва B нуқталар қўзғалмас бўлгани учун $[\delta q_i]_{t_0} = 0$ ва $[\delta q_i]_{t_1} = 0$. Бинобарин, системанинг ҳақиқий ҳаракати учун

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0$$

ёки вариация изохрон бўлгани учун

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (24.54)$$

тенглик ўринли бўлади.

(24.54) да $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ бўлишини ҳисобга олсак,

$$\delta S = 0$$

тенгликка эга бўламиз.

Гамильтон таъсири иш $\times$ вақт бирлигида (СИ системасида $\text{кгм}^2/\text{с}$ да) ўлчанади.

24.15*-§. Каноник тенгламалар

Юқорида кўрганимиздек (24.11-§), Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари q_i умумлашган координаталарга нисбатан иккинчи тартибли n та оддий дифференциал тенгламалар системасидан иборат бўлади. Бу тенгламалар системасини $2n$ та биринчи тартибли тенгламалар билан алмаштириш мумкин эканлигини исботлаймиз.

Бунинг учун *умумлашган импульс* деб аталадиган ва Лагранж функцияси L ёки системанинг кинетик энергияси T билан

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (24.55)$$

ёки (24.47) га кўра

$$p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j + b_i \quad (24.56)$$

тенгликлар воситасида боғланган p_i динамик катталикларни киритамиз.

(24.56) да $a_{ij} \neq 0$ бўлгани учун барча $\dot{q}_i$ ларни p_i лар орқали ифодалаш мумкин. Шу сабабли L функцияни фақат p_i ва q_i лар орқали ифодалаймиз.

Гамильтон функцияси деб аталувчи

$$H = -L + \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \quad (24.57)$$

функцияни киритсак, бу функциянинг вариацияси учун

$$\begin{aligned} \delta H = & - \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \\ & + \sum \delta p_i \dot{q}_i + \sum p_i \delta q_i \end{aligned} \quad (24.58)$$

формула ўринли бўлади.

(24.58) да (24.55) га кўра $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ бўлишини эътиборга олсак,

унинг ўнг томонидаги иккинчи ва тўртинчи ҳадларнинг йиғиндиси нолга тенг; бундан ташқари, Лагранжнинг иккинчи хил тенгламасига кўра

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} = p_i$$

бўлади. Бинобарин,

$$\delta H = - \sum \dot{p}_i \delta q_i + \sum \delta p_i \dot{q}_i. \quad (24.59)$$

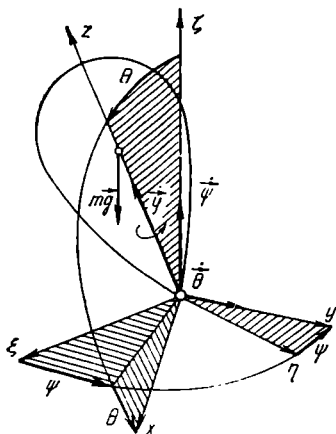
(24.56) воситасида (24.57) да барча $\dot{q}_i$ ларни йўқотиб, $H(p_i, q_i, t)$ функциянинг вариациясини ҳисоблаймиз:

$$\delta H(p_i, q_i, t) = \sum \frac{\partial H_i}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i. \quad (24.60)$$

(24.59) ва (24.60) га асосан қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\sum \frac{\partial H}{\partial q} \delta q_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i = - \sum \dot{p}_i \delta q_i + \sum \dot{q}_i \delta p_i.$$

Голономли система учун δq_i ва δp_i лар ўзаро боғлиқ бўлмагани ҳамда охириги тенглик δq_i ва δp_i ларнинг ҳар қандай қийматларида ўринли бўлгани учун улар олдидаги коэффициентлар мос равишда тенг бўлади.



24.16- расм.

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \quad (24.61)$$

(24.61) тенгламалар Гамильтоннинг каноник тенгламалари дейилади.

Агар система нуқталарига стационар боғланишлар қўйилган бўлса, у ҳолда (24.47) га кўра системанинг кинетик энергияси умумлашган тезликларнинг бир жинсли квадратик функциясидан иборат бўлади, бинобарин, Эйлернинг бир жинсли функциялар ҳақидаги теоремасига кўра

$$\sum p_i \dot{q}_i = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

тенглик келиб чиқади.

Бу ҳолда Гамильтон функцияси учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L = 2T - (T + U) = T - U = T + \Pi; \quad (24.62)$$

яъни стационар боғланиш қўйилган ҳолда Гамильтон функцияси системанинг тўлиқ энергиясига тенг бўлади.

24.8-масала. Оғирлик кучи таъсирида қўзғалмас O нуқта атрофида ҳаракатланувчи пирилдоқ симметрия ўқининг ҳолати Эйлер бурчакларини ифодаловчи прецессия бурчаги ψ ва нутация бурчаги θ билан аниқланади. Агар пирилдоқ массаси m , унинг массалар марказидан O нуқтагача бўлган массага l , z ўққа нисбатан инерция моменти C , O нуқтадан ўтувчи ва экваториал текисликда ётувчи ихтиёрий ўққа нисбатан инерция моменти A га тенг бўлса, ψ , θ ҳамда соф айланиш бурчаги ϕ учун Гамильтон функцияси ва пирилдоқнинг каноник тенгламаларни тuzилсин (24.16-расм).

Ечиш. Пирилдоқ оғирлик кучининг потенциалини ҳисоблаш учун оғирлик кучининг O нуқтага нисбаган моментининг элементар ишини ҳисоблаймиз:

$$dA = mgl \sin \theta d\theta.$$

Бу элементар иш куч функциясининг дифференциалига тенг бўлади:

$$dU = mgl \sin \theta d\theta,$$

бундан

$$U = -mgl \cos \theta + C_1.$$

Потенциал функция ихтиёрий ўзгармасгача аниқлик билан ҳисоблангани туфайли, $C_1 = 0$ деб қараш мумкин. Шундай қилиб,

$$U = -mgl \cos \theta. \quad (1)$$

Пирилдоқнинг кинетик энергияси

$$T = \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] \quad (2)$$

формула ёрдамида аниқланади. Бунда p , q ва r лар пирилдоқ бурчак тезлигининг x , y , z координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди; 24.16-расмдан

$$\left. \begin{aligned} p &= -\dot{\psi} \sin \theta, \\ q &= \dot{\theta}, \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

эканлигини толамиз.

(3) ни (2) га қўйсак,

$$T = \frac{1}{2} [A (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2]. \quad (4)$$

Шундай қилиб, Лагранж функцияси L учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\begin{aligned} L = T + U = \frac{1}{2} [A (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \\ + C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2] - mgl \cos \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

(24.55) га кўра p_φ , p_ψ , p_θ умумлашган импульслар учун ушбу тенгликларни оламиз

$$\left. \begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta), \\ p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A \dot{\psi} \sin^2 \theta + C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta, \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = A \dot{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Бундан

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta &= \frac{p_\varphi}{C}, \\ \dot{\psi} &= \frac{p_\psi}{A \sin^2 \theta} - \frac{p_\varphi}{A \sin^2 \theta} \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(4) ва (7) ни эътиборга олиб, (24.62) формула ёрдамида Гамильтон функциясини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} H = T - U = \frac{1}{2A} \left[\frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + p_\theta^2 \right] + \\ + \frac{1}{2C} p_\varphi^2 + mgl \cos \theta. \end{aligned}$$

(24.61) га асосан, Гамильтоннинг каноник тенгламаларини

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\psi}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \\ p_\psi &= -\frac{\partial H}{\partial \dot{\psi}}, \quad p_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}}, \quad p_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{p_{\psi} - p_{\psi} \cos \theta}{A \sin^2 \theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{A}, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{p_{\psi} - p_{\psi} \cos \theta}{A \operatorname{tg} \theta \sin \theta} + \frac{p_{\varphi}}{C}, \\ \dot{p}_{\psi} &= 0, \quad \dot{p}_{\theta} = -\frac{(p_{\psi} \cos \theta - p_{\psi})(p_{\psi} \cos \theta - p_{\psi})}{A \sin^3 \theta} + mgl \sin \theta, \\ \dot{p}_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

24.16-§. Механик системанинг устувор мувозанати ҳақида тушунча

Механик системанинг мувозанатини 3 турга бўлиш мумкин: устувор, ноустувор ва бефарқ мувозанат.

Агар мувозанат ҳолатидаги механик система нуқталарига кичик бошланғич кўчиш ва кичик бошланғич тезлик бериш натижасида система нуқталари мувозанат ҳолати яқинида тебранма ҳаракатда бўлса, системанинг бундай мувозанати *устувор мувозанат*; мувозанат ҳолатидан узоқлаша борса, *ноустувор мувозанат* дейилади.

Агар механик системани мувозанат ҳолатидан кичик оғдириш натижасида механик система янги ҳолатда ҳам мувозанатда қолса, системанинг бундай ҳолати *бефарқ мувозанат* дейилади.

24.17-расмда тасвирланган цилиндрнинг 1-ҳолати устувор, 2-ҳолати ноустувор ва 3-ҳолати бефарқ мувозанатга мисол бўла олади.

Айталик, голономли боғлангичлар қўйилган механик системанинг ҳолати $q_1, q_2, \dots, q_n$ умумлашган координаталар билан аниқлансин.

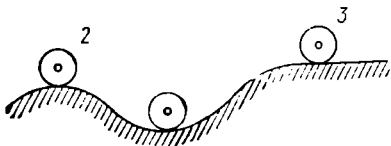
Умумлашган координаталарни системанинг мувозанат ҳолатидан сошлаб ҳисоблаймиз, яъни мувозанат ҳолатида барча $q_1, q_2, \dots, q_n$ координаталарини нолга тенг деб қараймиз.

Вақтнинг бирор t_0 пайтида системани мувозанат ҳолатидан оғдириб, системанинг шу пайтдаги умумлашган координаталари ва умумлашган тезликларини q_{i0} ва $\dot{q}_{i0}$, исталган t пайтдагисини эса q_i ва $\dot{q}_i$ билан белгилаймиз.

Системанинг устувор мувозанатига аниқроқ таъриф бериш учун системанинг умумлашган координаталари ва умумлашган тезликларининг сон қийматини ўлчовсиз катталиқка келтирамиз.

Агар исталганча кичик мусбат сон ε га боғлиқ шундай $\eta > 0$ сонни топиш мумкин бўлсаки,

$$|p_{i0}| \leq \eta, |\dot{q}_{i0}| \leq \eta, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (24.63)$$



24.17- расм.

бўлганда $t > t_0$ вақт учун

$$|q_i| < \varepsilon \quad (24.64)$$

шартлар бажарилса, системанинг бундай мувозанат ҳолати *Ляпунов таърифи*га кўра устувор мувозанат дейилади.

24.17-§. Лагранж-Дирихле теоремаси

Юқорида кўрганимиздек, потенциалли кучлар таъсиридаги механик системанинг мувозанат шартлари (24.30') га мувофиқ

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгламалардан кўраимизки, потенциалли кучлар таъсиридаги системанинг мувозанат ҳолатларига система потенциал энергиясининг экстремал қийматлари мос келади. Лекин (24.30') тенгламалар воситасида система мувозанатининг устуворлигини аниқлай олмаймиз.

Лагранж 1788 йилда голономли ва идеал боғланишлар қўйилган, потенциалли кучлар таъсиридаги механик система устувор мувозанатининг етарли шартлари қуйидаги теорема билан ифодаланишини кўрсатган:

Потенциалли кучлар таъсиридаги системанинг потенциал энергияси минимум қийматга эга бўладиган мувозанат ҳолатлари устувордир.

Исбот. Координаталар бошини системанинг мувозанат ҳолатида олсак, системанинг мувозанат ҳолатида $q_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) бўлади. Потенциал энергиянинг қиймати ихтиёрий ўзгармасгача аниқликда ҳисоблангани туфайли мувозанат ҳолатида уни нолга тенг деб қабул қилиш мумкин: $\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Агар мувозанат ҳолатида системанинг потенциал энергияси минимум қийматга эришса, у ҳолда мусбат ε сонни шунчалик кичик танлаш мумкинки, унинг атрофида $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ функциянинг қўшни экстремумлари қатнашмасин. У ҳолда $|q_i| \leq \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўладиган D соҳада потенциал энергия Π мусбат қийматга эга бўлади.

Координаталардан бири, масалан q_1 , D соҳанинг чегарасига тегишли $q_1 = \pm \varepsilon$ қийматларини, қолган координаталар эса, D соҳада ихтиёрий қийматларни (жумладан, чегаравий қийматларни ҳам) қабул қилганда потенциал энергиянинг энг кичик қийматини Π_1 билан белгилаймиз. Π_1 албатта мусбат қийматга эга бўлади. Худди шунингдек, q_2 координата чегаравий қийматни, қолган координаталар (жумладан q_1 ҳам) D соҳада ихтиёрий қийматларини (ёки чегаравий қийматларни) қабул қилганда потенциал энергиянинг минимал қийматини Π_2 билан белгилаймиз. Шу тарзда барча n та умумлашган координаталар учун қатор

$$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$$

мусбат қийматларни оламинз. Агар уларнинг энг кичигини Π^* билан белгиласак, у ҳолда координаталардан бири миқдор жиҳатдан ϵ га тенг, қолганлари абсолют қиймати бўйича ϵ дан катта бўлмаганда

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq \Pi^*$$

бўлиши муқаррар. Система координаталарига абсолют қиймати ϵ дан кичик бўлган $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$ қийматларни бериб мувозанат ҳолатидан оғдирамиз ва система нуқталарига $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$ бошланғич тезликлар берамиз.

Агар системага идеал ва стационар боғланишлар қўйилган бўлса, боғланиш реакция кучларининг системанинг ҳақиқий кўчишидаги ишлари нолга тенг бўлади. Бинобарин, бундай ҳаракат учун энергиянинг сақланиш қонуни ўринли бўлади:

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0.$$

Ҳаракат давомида системанинг кинетик энергияси ҳамиша мусбат бўлгани учун бу ифодадан

$$\Pi < T_0 + \Pi_0 \quad (24.65)$$

тенгсизлик келиб чиқади. D соҳада потенциал энергия Π мусбат қийматга эга бўлгани учун $(T_0 + \Pi_0)$ ҳам албатта мусбат бўлади. T_0 ва Π_0 узлуксиз бўлгани туфайли $T_0 + \Pi_0$ йиғиндини исталганча кичик қилиб танлаб олиш мумкин. Бошқача айтганда, ϵ дан кичик шундай η сонни топиш мумкинки, $|q_{i0}| < \eta$ ва $|\dot{q}_{i0}| < \eta$ бўлганда

$$T_0 + \Pi_0 < \Pi^*$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. Бу тенгсизлик q_{i0} ва $\dot{q}_{i0}$ ларнинг сон-саноксиз қийматлари учун ўринли бўлади.*

Шундай қилиб, (24.65) га асосан

$$\Pi^* - \Pi > 0 \quad (24.66)$$

Умумлашган координаталарнинг бошланғич қийматлари D соҳа ичида ётгани туфайли (24.66) га асосан ҳаракат давомида умумлашган q_i координаталардан бирортаси ҳам ϵ қийматга эриша олмайди (яъни система нуқталари D соҳадан чиқиб кета олмайди), чунки акс ҳолда $\Pi^* - \Pi$ манфий қийматга эга бўлиши керак; бу натижа (24.66) га зиддир.

Демак, системанинг текширилаётган ҳолати устувордир. 

Бу теореманинг қатъий исботи 1847 йилда Лежен Дирихле томонидан берилган. Шу сабабли бу теорема *Лагранж — Дирихле теоремаси* деб ҳам аталади.

Агар потенциал энергия таркибида айрим умумлашган координаталар ошкор равишда қатнашмаса, у ҳолда мазкур координаталарга нисбатан система бефарқ мувозанатда бўлади.

*) Масалан, бу тенгсизлиكنи қанчалантириш учун $T_0 < \frac{\Pi^*}{2}$ ва $\Pi_0 < \frac{\Pi^*}{2}$

ўринли бўладиган q_{i0} ва $\dot{q}_{i0}$ ларни олиш етарли.

Масалан, горизонтал ясовчига эга бўлган цилиндрик сирт устидаги сфир моддий нуқтанинг мувозанати қаралаётганда x ўқни цилиндрининг ясовчиси бўйлаб йўналтирсак, x координатага нисбатан нуқтанинг мувозанати бефарқ мувозанатдан иборат бўлади.

Потенциалли кучлар таъсиридаги, эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг мувозанати битта

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \quad (24.67)$$

тенглама билан ифодаланади.

Системанинг қаралаётган мувозанат ҳолати устувор эканлигини аниқлаш учун системанинг потенциал энергияси бу ҳолатда минимум қийматга эга бўлиш-бўлмаслигини текшириш керак.

Агар $q = q_0$ мувозанат ҳолатида

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} > 0 \quad (24.68)$$

бўлса, потенциал энергия минимум қийматга эришадп.

Мабодо $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} = 0$ бўлса, иккинчи ҳосила потенциал энергиянинг минимум қийматга эга бўлиш аломатини ифодалай олмайди. Бу ҳолда потенциал энергиянинг навбатдаги $\left(\frac{\partial^k \Pi}{\partial q^k} \right)_{q=q_0}$ ҳосилаларини ҳисоблашга тўғри келади.

Агар потенциал энергиянинг биринчи нолга тенг бўлмаган ҳосиласи жуфғ тартибли ва мусбат қийматга эга бўлса, у ҳолда $q = q_0$ мувозанат ҳолатида потенциал энергия минимум қийматга эга бўлади, бинобарин, системанинг бу мувозанат ҳолати устувор мувозанатдан иборат бўлади.

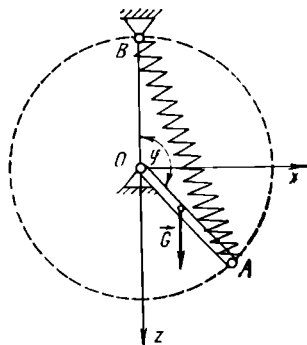
Агарда потенциал энергиянинг биринчи нолга тенг бўлмаган ҳосиласи тоқ тартибга эга бўлса, у ҳолда $q = q_0$ да на минимум ва на максимум мавжуд бўлмайди.

Потенциал энергия минимум қийматга эга бўлмаганда система мувозанатини А.М. Ляпунов теоремалари воситасидан аниқланади.*

24.9- масала. Қўзғалмас O шарнир атрофида айлана оладиган сфирлиги G ва узунлиги l га тенг OA стерженнинг учига AB пружина бириктирилган (24.18- расм). Агар чўзилмаган пружинанинг узунлиги l ва пружинанинг бикирлик коэффициентини c га тенг бўлса, стерженнинг устувор мувозанат ҳолати аниқлансин.

Ечиш. Стерженнинг ҳолатини φ бурчак билан аниқлаш мумкин. Шу сабабли умумлашган координата учун $q = \varphi$ бурчакни оламиз. Системанинг потенциал энергияси стержень сфирлик кучининг потенциал энергияси Π_1 ва деформацияланувчи пружинанинг потенциал энергияси Π_2 ларнинг йиғиндисидан иборат

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$$



24.18- расм.

*) Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М: Гостехиздат, 1950.

Бунда

$$\Pi_1 = -G z_C, \quad \Pi_2 = \frac{c h^2}{2}$$

бўлиб, z_C ва h лар

$$z_C = \frac{l}{2} \cos (180^\circ - \varphi) = -\frac{l}{2} \cos \varphi$$

$$h = AB - l = 2l \sin \frac{\varphi}{2} - l = l \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} - 1 \right)$$

формуларлар ёрдамида аниқлашади.

Натижада системанинг потенциал энергияси учун

$$\Pi = \frac{G l}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} c l^2 \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} - 1 \right)^2$$

тенглик ўринли бўлади.

Потенциал энергиянинг умумташган координата φ бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини аниқлаймиз:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \left[(2 c l - G) l \sin \frac{\varphi}{2} - c l^2 \right] \cos \frac{\varphi}{2};$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2} (2 c l - G) l \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} (2 c l - G) l \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{c l^2}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Системанинг мувозанат ҳолатида

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 \quad \left[(2 c l - G) l \sin \frac{\varphi}{2} - c l^2 \right] \cos \frac{\varphi}{2} = 0.$$

Бу тенгликдан системанинг мумкин бўлган иккита мувозанат шартларини олаемиз:

$$1) \left(2 c l - G \right) l \sin \frac{\varphi_1}{2} - c l^2 = 0, \quad \sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{c l}{2 c l - G}$$

$$2) \cos \frac{\varphi_2}{2} = 0, \quad \frac{\varphi_2}{2} = 90^\circ, \varphi_2 = 180^\circ.$$

Система устувор мувозанатда бўлиши учун

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} > 0$$

шарт бажарилиши зарурлигини назарда тутиб, системанинг устувор мувозанат ҳолатида G ва $c l$ орасида қандай муносабат мавжуд бўлишини ҳар иккала ҳолда текшириб кўрамиз:

$$1) \sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{c l}{2 c l - G} \text{ бўлганда}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi = \varphi_1} = \frac{l (c l - G) (3 c l - G)}{2 (2 c l - G)}.$$

Бунда

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} < 1, \quad \frac{c l}{2 c l - G} < 1, \quad G < c l$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi = \varphi_1} > 0$$

шарт бажарилади. Бинобарин, системанинг φ_1 бурчакка мос мувозанат ҳолати устувордир.

2) $\varphi_2 = 180^\circ$ бўлса,

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi = \varphi_2} = \frac{(G - cl) l}{2}.$$

У ҳолда $G > cl$ шарт бажарилганда

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi = \varphi_2} > 0$$

тенгсизлик ўринли бўлади ва системанинг бундай мувозанат ҳолати устувордир.

24.18- §. Системанинг устувор мувозанати яқинидаги кинетик ва потенциал энергиялар

Агар система нуқталарига голономли стационар боғланишлар қўйилса, $\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ҳамда $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} = 0$ бўлади. Буни

назарда тутиб, (24.47) га асосан мазкур системанинг кинетик энергияси учун

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (24.69)$$

формулани олампиз. Бунда A_{ij} коэффициентлар умумлашган координаталарнинг функциясидан иборат ҳамда $A_{ij} = A_{ji}$ ($i, j = \overline{1, n}$).

Агар системанинг мувозанат ҳолати устувор бўлса, системанинг бундай ҳолати учун потенциал энергия минимум қийматга эга бўлади. Потенциал энергия ихтиёрий ўзгармасгача аниқлангани туфайли координаталар бошини системанинг мазкур мувозанат ҳолатида олсак, бу ҳолатда потенциал энергияни нолга тенг деб қараш мумкин:

$$\Pi_0 = \Pi(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (24.70)$$

$A_{ij}(q_1, \dots, q_n)$ коэффициентлар ва $\Pi(q_1, \dots, q_n)$ потенциал энергияни $q_i = 0$ ($i = \overline{1, n}$) мувозанат ҳолати яқинида Тейлор қаторига ёямиз:

$$A_{ij} = (A_{ij})_0 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 q_k + \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^n \left(\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial q_k \partial q_s} \right)_0 q_k q_s + \dots \quad (24.71)$$

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots \quad (24.72)$$

Системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик ҳаракатини текширишда унинг кинетик ва потенциал энергияси таркибидаги q_i

ва q_i ларга нисбатан учинчи ва ундан юқори тартибли кичик миқдорларни эътиборга олмаймиз. У ҳолда (24.71) да фақат $(A_{ij})_0$ биринчи ҳад билан чегараланишга тўғри келади. Чунки (24.69) га асосан қолган бошқа ҳадларни $q_i q_j$ га кўпайтирганда учинчи ва ундан юқори тартибли кичик миқдорларни олаемиз. Натижада системанинг кинетик энергияси учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (24.73)$$

бунда $a_{ij} = (A_{ij})_0$ коэффициентлар ўзгармас бўлиб, $a_{ij} = a_{ji}$ муносабатларни қаноатлантиради.

(24.72) да (24.70) ва (24.30) ларни назарда тутиб, учинчи ва ундан юқори тартибли кичик миқдорларни эътиборга олмасак,

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j \quad (24.74)$$

бўлади, бунда

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0, \quad (i, j = \overline{1, n}) \quad (24.75)$$

ўзгармас бўлиб, *бикирлик коэффициентлари* дейилади ва $c_{ij} = c_{ji}$ муносабатлар ўринли бўлади.

Маълумки, ушбу кўринишдаги

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (24.76)$$

иккинчи даражали бир жинсли кўпҳад квадратик форма дейилади.

Фақат мусбат қийматга эга ва $x_1, \dots, x_n$ ўзгарувчиларнинг барчаси нолга тенг қийматларни қабул қилгандагина нолга тенг бўлидиган квадратик форма *мусбат аниқланган квадратик форма* дейилади.

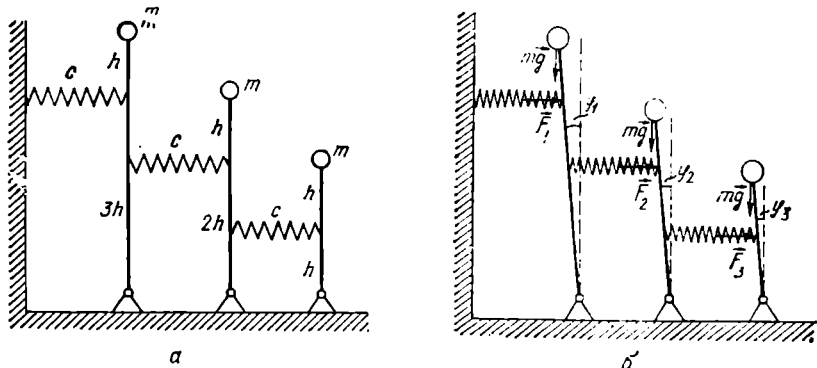
Бу таърифга кўра, системанинг кинетик энергияси мусбат квадратик формадан иборат бўлади. Шунингдек, мувозанат ҳолатида $\Pi_0 = 0$ ва мувозанат ҳолати яқинида потенциал энергия мусбат, яъни

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j > 0 \quad (24.77)$$

бўлгани учун у ҳам мувозанат ҳолати яқинида мусбат аниқланган квадратик формадан иборат бўлади.

Исталган квадратик форманинг мусбат аниқланганлиги қуйидаги *Д. Д. Сильвестр* (1814—1897) *критерийи* орқали аниқланади: *квадратик форма мусбат аниқланган бўлиши учун мазкур форма матрицасининг барча бош диагональ минорлари, яъни*

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (24.78)$$



24.19- расм.

катталиклар мусбат бўлиши зарур ва етарлидир.

Бу критерийдан фойдаланиб Лагранж- Дирихле теоремасини қуйидаги тартибда қўллаш мумкин: потенциал энергиянинг мувозанат ҳолати яқинида $q_1, q_2, \dots, q_n$ ларнинг даражаси бўйича иккинчи даражали кичик миқдоргача аниқликда қаторга ёйиб, биқирлик коэффициентлари c_i ларни топиб, (24.78) детерминантларни тузамиз. Агар $\Delta_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) шартлар бажарилса, системанинг мувозанат ҳолати устувор бўлади.

24.10- масала. 24.19- расм, а да тасвирланган маятниклар системаси вертикал мувозанат ҳолатининг устуворлиги текширилсин: биринчи маятник стерженнинг узунлиги $4h$, иккинчисиники $3h$ ва учинчисиники эса $2h$ га тенг. Ҳамма маятникларнинг массалари ва пружиналарнинг биқирлиги бир хилда бўлиб, m ва c га тенг. Пружиналар бириктирилган нуқталардан маятник шарчаларининг оғирлик марказларигача бўлган масофалар h га тенг. Стерженларнинг массалари ҳисобга олинмасин, шарчалар эса моддий нуқталар деб қаралсин; маятниклар вертикал вазиятда бўлганда пружиналар кучланмаган ҳолатда бўлади.

Ечиш. Системанинг эркинлик даражаси 3 га тенг. Умумлашган координаталар учун маятник стерженларнинг вертикалдан оғиш бурчакларини олғимиз (24.19- расм, б)

$$q_1 = \varphi_1, \quad q_2 = \varphi_2, \quad q_3 = \varphi_3.$$

Пружиналарнинг эластиклик кучларини $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ билан белгиласак, бу кучларнинг миқдори қуйидагича аниқланади:

$$F_1 = 3ch\varphi_1, \quad F_2 = 2hc(\varphi_2 - \varphi_1), \quad F_3 = hc(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Системанинг потенциал энергиясини деформацияланган пружиналарнинг потенциал энергияси Π_I ва оғирлик кучлари потенциал энергиялари Π_{II} нинг йиғиндисидан иборат деб қараймиз:

$$\Pi_I = \frac{9h^2}{2} c\varphi_1^2 + \frac{4h^2}{2} c(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{h^2}{2} c(\varphi_3 - \varphi_2)^2;$$

$$\Pi_{II} = -4mgh(1 - \cos\varphi_1) - 3mgh(1 - \cos\varphi_2) - 2mgh(1 - \cos\varphi_3).$$

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II} = \frac{9h^2}{2} c\varphi_1^2 + 2h^2 c(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{h^2}{2} c(\varphi_3 - \varphi_2)^2 -$$

$$-4mgh(1 - \cos\varphi_1) - 3mgh(1 - \cos\varphi_2) - 2mgh(1 - \cos\varphi_3).$$

Потенциал энергияни φ_1 , φ_2 ва φ_3 ларнинг даражаси бўйича қаторга ёямиз ва бунда

$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} + \dots, \quad \cos \varphi_2 = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} + \dots, \quad \cos \varphi_3 = 1 - \frac{\varphi_3^2}{2} + \dots$$

муносабатлар ўринли бўлишини эътиборга оламиз. Агар учинчи ва ундан юқори тартибли кичик миқдорларни эътиборга олмасак, системанинг потенциал энергияси

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{9h^2}{2} c \varphi_1^2 + 2h^2 c (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{h^2}{2} c (\varphi_3 - \varphi_2)^2 - \\ & - 2mgh\varphi_1^2 - \frac{3}{2} mgh\varphi_2^2 - mgh\varphi_3^2 \end{aligned}$$

формула ёрдамида аниқланади.

(24.75) га асосан биқирлик коэффициентларини ҳисоблаймиз;

$$\begin{aligned} c_{11} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} \right)_0 = 13h^2 c - 4mgh, \\ c_{22} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} \right)_0 = 5h^2 c - 3mgh, \\ c_{33} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_3^2} \right)_0 = h^2 c - 2mgh, \\ c_{12} = c_{21} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \right)_0 = -4h^2 c, \\ c_{13} = c_{31} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_3} \right)_0 = 0, \\ c_{23} = c_{32} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_3} \right)_0 = -h^2 c. \end{aligned}$$

Сильвестр критерийсини қўллаб, қуйидаги устувор мувозанат шартларини оламиз:

$$1) \Delta_1 = c_{11} > 0,$$

$$13h^2 c - 4mgh > 0; \quad (1)$$

$$2) \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 13h^2 c - 4mgh & -4h^2 c \\ -4h^2 c & 5h^2 c - 3mgh \end{vmatrix} > 0,$$

$$49h^4 c^2 - 59mgh^3 c + 12m^2 g^2 h^2 > 0; \quad (2)$$

$$3) \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 13h^2 c - 4mgh & -4h^2 c & 0 \\ -4h^2 c & 5h^2 c - 3mgh & -h^2 c \\ 0 & -h^2 c & h^2 c - 2mgh \end{vmatrix} > 0,$$

$$36h^6 c^3 - 153mgh^5 c^2 + 130m^2 g^2 h^4 c - 24m^3 g^3 h^3 > 0. \quad (3)$$

Шундай қилиб, системанинг устувор мувозанат шартлари (1) (2), (3) тенг-салиқлар билан ифодаланади.

24.19- §. Эркинлик даражаси бирга тенг механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранишлари

Эркинлик даражаси бирга тенг механик системага қўйилган голономли боғланишлар стационар боғланишлардан иборат бўлса, бундай системанинг мувозанат ҳолати яқинидаги кинетик ва потенциал энергиялари (24.73) ва (24.74) га асосан қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad (24.79)$$

бунда $c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0$.

Айтайлик, $c > 0$ бўлсин. Бу ҳолда потенциал энергия минимумга эга бўлади ва Лагранж — Дирихле теоремасига кўра, системанинг мувозанати устувор бўлади.

Кўрилатган ҳол учун (24.79) ни назарда тутиб, Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаси

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

ни тузсак,

$$a \ddot{q} = - c q$$

ёки

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (24.80)$$

Бунда

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}}. \quad (24.81)$$

(24.80) тенглама (17.2) га ўхшашдир. (17.2) битта моддий нуқтанинг гармоник ҳаракатини, (24.80) эса эркинлик даражаси бирга тенг механик системанинг ҳаракатини характерлайди.

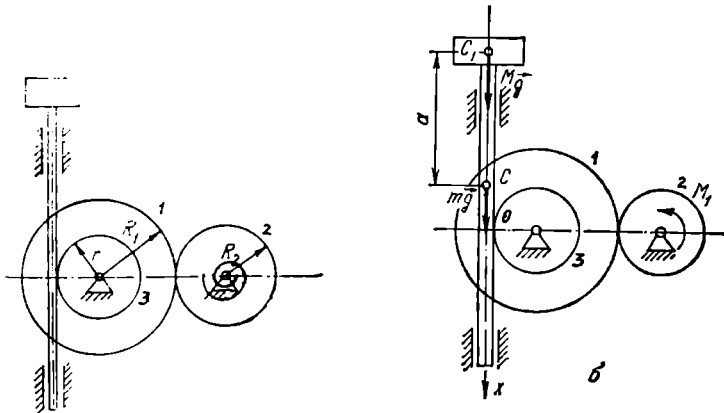
(24.80) тенгламанинг умумий ечимини (17.3) ва (17.7) га ўхшаш бир-бирига эквивалент бўлган қуйидаги икки хил кўринишда ёзиш мумкин

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

ёки

$$q = a_1 \sin(kt + \alpha). \quad (24.82)$$

Бу тенгламалардаги C_1 ва C_2 ёки a_1 ва α лар интеграллаш доимийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. (24.81) тенглик ёрдамида тебранишларнинг доиравий частотаси ҳисобланади.



24.20- расм.

Тебранишлар даври учун

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (24.83)$$

формула ўринли бўлади.

24.11- масала. Массаси M га тенг бўлган юк, 2 ҳамда бир-бирига маҳкам бириктирилган 1 ва 3 тишли ғилдираклар ёрдамида ҳаракатга келтириладиган m массали тишли рейка учига ўрнатилган (24.20- расм, а). 1 ва 3 тишли ғилдиракларнинг инерция моментлари I_1 , 2 ғилдиракники эса I_2 ; радиуслари мос равишда R_1 , r , R_2 га тенг. 2 ғилдирак бикирлик коэффициентини c га тенг ва расмда шартли равишда спирал пружина тарзида берилган етакловчи валга бириктирилган.

Системанинг эркин тебраниш частотаси аниқлансин.

Ечиш. Системанинг ҳолатини етакловчи валнинг айланиш бурчаги φ_2 билан аниқлаш мумкин. Бинобарин, системанинг эркинлик даражаси бирга тенг бўлади. Ҳумлашган координата учун $q = \varphi_2$ ни оламиз. Бошланғич пайтда тишли рейканинг оғирлик маркази унинг r радиусли ғилдирак билан тншлашган O нуқтасида бўтени. Яъни $t = 0$ да $x = 0$, $x_1 = -a$ бўлсин. Бунда x_1 билан юкнинг бошланғич координатаси белгиланган.

Расмда юк ва тишли рейкаларнинг оғирлик кучлари Mg ва mg ларни ҳамда етакловчи валнинг буратишга қарама-қарши йўналган эластиклик жуфт momenti M_1 ни тасвирлаймиз (24.20- расм, б).

Рейканинг оғирлик маркази C ҳолатини эгаллаганда унинг координатаси x , юкнинг координатаси $x - a$ га тенг бўлади; ғилдирак 2 эса $\varphi_2 cm + \varphi_2$ бурчакка айланади. Бунда $\varphi_2 cm$ билан ғилдирак 2 нинг статик мувозанатига мос айланиш бурчаги белгиланган.

Агар φ_2 бурчакни кичик деб қарасак, у ҳолда ғилдирак 2 га миқдор жиҳатдан

$$M_1 = c (\varphi_2 cm + \varphi_2)$$

га тенг эластиклик жуфт momenti таъсир этади.

Системанинг погенсиал энергияси юк ва тишли рейка оғирлик кучларининг потенциал энергиялари Π_1 , Π_2 ҳамда етакловчи валнинг эластиклик momenti потенциал энергияси Π_3 ларнинг йиғиндисидан иборат

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3.$$

Бунда

$$\Pi_1 = -m g x, \quad \Pi_2 = -M g (x - a),$$

$$\Pi_3 = \frac{1}{2} c (\varphi_{2cm} + \varphi_2)^2 - \frac{c \varphi_{2cm}^2}{2}$$

бўлиб, x , φ_1 ва φ_2 лар орасида қуйидаги муносабат мавжуд бўлади:

$$x = r \varphi_1 = r \frac{R_2}{R_1} \varphi_2.$$

Шундай қилиб, системанинг потенциал энергияси учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\begin{aligned} \Pi &= -(M + m) g r \frac{R_2}{R_1} \varphi_2 + M g a + \frac{1}{2} c (\varphi_{2cm} + \varphi_2)^2 - \frac{c \varphi_{2cm}^2}{2} = \\ &= -(M + m) g r \frac{R_2}{R_1} \varphi_2 + M g a + c \varphi_{2cm} \varphi_2 + \frac{c \varphi_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Спирал пружинанинг статик деформациясига мос мувозанат ҳолатида $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}\right)_{\varphi_2=0} = 0$ бўлгани учун

$$-(M + m) g r \frac{R_2}{R_1} + c \varphi_{2cm} = 0$$

тенглик ўринли бўлади. Буни назарда тутиб, системанинг потенциал энергияси учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\Pi = M g a + \frac{1}{2} c \varphi_2^2.$$

Потенциал энергиянинг φ_2 бўйича ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = c \varphi_2. \quad (1)$$

$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} = c > 0$ бўлгани учун потенциал энергия минимум қийматга эга бўлади ва

Лагранж-Дирихле теоремасига кўра, $\varphi_2 = 0$ атрофидаги системанинг мувозанати устувордир.

Системанинг кинетик энергияси

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (2)$$

бўлиб, бунда T_1 ва T_2 лар мос равишда 1, 3 ва 2 ғилдиракларнинг; T_3 эса юк билан тишли рейканинг кинетик энергиясини ифодалайди.

1, 3 ва 2 ғилдираклар қўзғалмас ўқлар атрофида айланма ҳаракатда, тишли рейка ва юк x ўқ бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракатда бўлгани учун

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2.$$

Бунда

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{R_2}{R_1} \dot{\varphi}_2, \quad \dot{x} = r \dot{\varphi}_1 = r \frac{R_2}{R_1} \dot{\varphi}_2$$

булишини назарда тутиб, (2) ни қўйидагича ёзамиз:

$$T = \frac{1}{2} \left[I_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + I_2 + (M+m)r^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right] \dot{\varphi}_2^2. \quad (3)$$

(3) да $a = I_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + I_2 + (M+m)r^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2$ белгилаш киритсак, кинетик энергиянинг ҳосилалари учун қўйидаги ифодаларни оламиз:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = a \dot{\varphi}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = a \ddot{\varphi}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0. \quad (4)$$

Система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламасини

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = - \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \quad (5)$$

кўринишда ёзиб, (1) ва (4) ни (5) га қўйсак,

$$a \ddot{\varphi}_2 = -c \varphi_2$$

ёки

$$\ddot{\varphi}_2 + k^2 \varphi_2 = 0,$$

бунда

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{R_1}{R_2} \sqrt{\frac{c}{(M+m)r^2 + I_1 + I_2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2}}$$

системанинг кичик тебранишлар доиравий частотасини ифодалайди.

24.20-§. Эркинлик даражаси битта бўлган системанинг сўнувчи тебранма ҳаракати

Техникада учрайдиган қўпгина масалаларни ечишда эркинлик даражаси бирга тенг механик система нуқталарига потенциалли кучлардан ташқари, муҳитнинг

$$\vec{R}_v = -\mu_v \vec{v}_v = -\mu_v \dot{r}_v \quad (24.84)$$

кўринишдаги қизиқли қаршилик кучи таъсир этадиган ҳоллар учрайди. Бунда μ_v қаршилик коэффициентини ифодалайди. Системанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш учун

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \quad (24.85)$$

формадаги Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларидан фойдаланамиз. (24.85) да

$$Q = Q^П + Q^R, \quad (24.86)$$

бунда $Q^П$ система нуқталарига таъсир этувчи потенциалли кучларга мос, Q^R эса қаршилик кучи R_v га мос умумлашган кучларни ифодалайди.

Q^{Π} ни

$$Q^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -cq, \quad (24.87)$$

Q^R ни (24.22) га асосан

$$Q^R = \sum_{v=1}^N \vec{R}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q} \quad (24.88)$$

формула ёрдамида аниқланади.

(24.88) да $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q} = \frac{\dot{\vec{r}}_v}{\dot{q}}$ муносабат ўринли бўлишини назарда

тутиб, $\vec{R}_v$ нинг қийматини қўямиз:

$$Q^R = - \sum_{v=1}^N \mu_v \dot{r}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial \dot{q}} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{v=1}^N \frac{\mu_v \vec{r}_v^2}{2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}. \quad (24.89)$$

(24.89) даги $\Phi = \sum_{v=1}^N \frac{\mu_v \dot{r}_v^2}{2}$ га *диссипатив функция* ёки

Релей функцияси дейилади. Бу функция ўзининг тузилиши бўйича системанинг кинетик энергиясига ўхшаш, лекин унда нуқталарнинг массалари ўрнида қаршилик коэффициентлари қатнашади.

Φ функцияни q ва $\dot{q}$ орқали ифодалаймиз. Бунинг учун $\vec{r}_v = \vec{r}_v(q)$, $\dot{\vec{r}}_v = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q} \dot{q}$ эканлигини эътиборга оламиз:

$$\Phi = \sum_{v=1}^N \frac{\mu_v \dot{r}_v^2}{2} = \frac{\dot{q}^2}{2} \sum_{v=1}^N \mu_v \left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q} \right)^2 = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2, \quad (24.90)$$

бунда $B(q) = \sum_{v=1}^N \mu_v \left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q} \right)^2$ ўзгарувчи бўлиб, уни $q=0$ атрофида

q нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёямиз:

$$B(q) = B_0 + \left(\frac{\partial B}{\partial q} \right)_0 q + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \quad (24.91)$$

Агар диссипатив функцияни ҳисоблашда учинчи ва ундан юқори тартибли кичик миқдорларни эътиборга олмасак, у ҳолда (24.91) да) фақат биринчи ҳад B_0 билан чегараланишга тўғри келади, чунки (24.90) га асосан бошқа ҳадларни q^2 га кўпайтирганда учинчи ва ундан юқори тартибли кичик миқдорларни оламиз. Бунда $B_0 = \mu$ белгилаш киритиб, қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2. \quad (24.92)$$

μ катталиқ ўзгармас бўлиб, *умумлашган қаршилиқ коэффициентини* дейилади.

(24.79) ва (24.92) га асосан, Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган кинетик энергиянинг ҳосилаларини ва Q^Φ ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad (24.93)$$

$$Q^\Phi = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = - \mu \dot{q} \quad (24.94)$$

(24.86), (24.87), (24.93), (24.94) ларни (24.85) га қўйиб, *эркинлик даражаси бирга тенг системанинг муҳитнинг чизиқли қаршилиғи таъсиридаги сўнувчи тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини* қуйидаги кўринишда оламиз:

$$a\ddot{q} = -c\dot{q} - \mu\dot{q}$$

ёки

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0, \quad (24.95)$$

бунда $\frac{c}{a} = k^2$, $\frac{\mu}{a} = 2n$ белгилашлар киритилган.

(24.95) тенглама моддий нуқтанинг сўнувчи тебранма ҳаракат дифференциал тенгламаси (17.14) га ўхшаш бўлиб, уни интеграллаш 17.3-§ да батафсил баён этилган. (24.95) ни интеграллашда 17.3-§ дагидек учта ҳолни алоҳида-алоҳида кўриш керак: 1) $n < k$ (қаршилиқ кичик бўлган ҳол); 2) $n > k$ (қаршилиқ катта бўлган ҳол); 3) $n = k$ (чегаравий ҳол). Биринчи ҳолда механик система мувозанат ҳолати яқинида сўнувчи тебранма ҳаракатда, иккинчи ва учинчи ҳолларда эса аperiодик ҳаракатда бўлади.

24.21 - §. Эркинлик даражаси бирга тенг механик системанинг мажбурий тебранма ҳаракати

Эркинлик даражаси бирга тенг механик система нуқталарига потенциалли куч, муҳитнинг тезликка пропорционал қаршилиқ кучи ва вақтнинг функциясидан иборат уйғотувчи куч таъсир этсин. Уйғотувчи кучга мос умумлашган куч

$$Q_1 = H \sin(pt + \delta) \quad (24.96)$$

формула ёрдамида аниқланидиган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда (24.87), (24.94) ва (24.96) га асосан, Q умумлашган куч қуйидагича аниқланади:

$$Q = Q^\Pi + Q^\Phi + Q_1 = -c\dot{q} - \mu\dot{q} + H \sin(pt + \delta). \quad (24.97)$$

(24.93) ва (24.97) ни (24.85) га қўйсак,

$$a q = -c q - \mu q + H \sin(pt + \delta)$$

ёки

$$\ddot{q} + 2n \dot{q} + k^2 q = H_0 \sin(pt + \delta) \quad (24.98)$$

тенгламани оламиз. Бунда $H_0 = \frac{H}{a}$.

(24.98) тенглама тезликка пропорционал қаршилик кучи ва вақтнинг функциясидаги иборат уйғотувчи куч таъсирида бўлган, эркинлик даражаси бирга тенг системанинг мувозанат ҳолати яқинидаги кичик мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламаларини ифодалайди. Бу тенглама худди шундай кучлар таъсиридаги нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгласи (17.49) га ўхшаш бўлиб, уни интеграллаш 17.7-§ да батафсил баён этилган.

Шундай қилиб, эркинлик даражаси бирга тенг механик системанинг мувозанат ҳолати яқинидаги кичик ҳаракатларини ўрганиш моддий нуқтанинг ҳаракатини ўрганишга келтирилади.

24.22* -§. Эркинлик даражаси иккига тенг механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранишлари

Потенциалли кучлар таъсиридаги голономли, стационар боғланишлар қўйилган ва эркинлик даражаси иккига тенг бўлган механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранишларини текшириш учун умумлашган координаталар учун системанинг мувозанат ҳолатидан ҳисобланадиган q_1 ва q_2 координаталарни оламиз. Системанинг мувозанати устувор бўлгани туфайли q_1 , q_2 ҳамда $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ лар бундай мувозанат ҳолати яқинида ҳамиша миқдор жиҳатдан кичик қийматларга эга бўлади.

Эркинлик даражаси иккига тенг бўлган системанинг кинетик энергияси (24.73) га кўра, қуйидагича аниқланади:

$$T = \frac{1}{2} [a_{11}(q_1, q_2) \dot{q}_1^2 + 2a_{12}(q_1, q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22}(q_1, q_2) \dot{q}_2^2]. \quad (24.99)$$

Инерция коэффициентлари a_{ii} умумий ҳолда q_1 ва q_2 координаталарнинг функциясидаги иборат бўлади. Кинетик энергияни иккинчи даражали кичик миқдоргача аниқликда ҳисоблайдиган бўлсак, a_{ii} ларни q_1 ва q_2 нинг даражаси бўйича Маклорен қаторига ёйганда, нолинчи тартибли кичик миқдорларнигина эътиборга олишга тўғри келади:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}(q_1, q_2) &\cong a_{11}(0, 0) = a_{11}, \\ a_{12}(q_1, q_2) &\cong a_{12}(0, 0) = a_{12}, \\ a_{22}(q_1, q_2) &\cong a_{22}(0, 0) = a_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (24.100)$$

Бунда a_{11} , a_{12} , a_{22} инерция коэффициентлари ўзгармас бўлади. Шундай қилиб, эркинлик даражаси иккига тенг бўлган системанинг кинетик энергияси қуйидаги ўзгармас коэффициентли квадратик форма ёрдамида аниқланади:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2). \quad (24.101)$$

Тезлик нолдан фарқли бўлганда кинетик энергия мусбат қийматга эга бўлгани туфайли (24.101) квадратик форма (24.78) Сильвестр критерийсини қаноатлантиради. Кўрилатган система учун бу шартлар қуйидагича ёзилади:

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad (24.102)$$

(24.74) формула ёрдамида эркинлик даражаси иккига тенг системанинг потенциал энергияси аниқланади:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2). \quad (24.103)$$

Устувор мувозанат ҳолати учун (24.103) квадратик форма мусбат аниқланган формадан иборат бўлиб, у (24.78) Сильвестр критерийсини қаноатлантиради;

$$c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (24.104)$$

Кўрилатган система учун

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \end{aligned} \right\} \quad (24.105)$$

кўринишдаги Лагранж тенгламаларини тузиш учун кинетик ва потенциал энергияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2, \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = c_{11}q_1 + c_{12}q_2; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= a_{12}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = a_{12}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2, \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = c_{12}q_1 + c_{22}q_2. \end{aligned} \right\} \quad (24.106)$$

(24.106) да $a_{12} = a_{21}$, $c_{12} = c_{21}$ бўлишини эътиборга олиб, (24.105) га қўйсак,

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24.107)$$

тенгламаларни оламиз.

Шундай қилиб, эркин ик даражаси иккига тенг бўлган потенциалли кучлар таъсиридаги механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранма ҳаракат дифференциал тенгламалари иккита иккинчи тартибли ўрғармас коэффициентли бир жинсли тенгламалар системасидан иборат бўлади. Бу тенгламаларнинг умумий ечимини

$$q_1 = A \sin(kt + e), \quad q_2 = B \sin(kt + e) \quad (24.108)$$

қўринишида излаймиз. Бунда A , B , k ва e лар интеграллаш доимийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

q_1 ва q_2 ларнинг вақт бўйича иккинчи ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\ddot{q}_1 = -Ak^2 \sin(kt + e), \quad \ddot{q}_2 = -Bk^2 \sin(kt + e)$$

ва уларнинг қийматларини (24.92) га қўямиз:

$$\begin{aligned} -a_{11}Ak^2 \sin(kt + e) - a_{12}Bk^2 \sin(kt + e) + c_{11}A \sin(kt + e) + \\ + c_{12}B \sin(kt + e) = 0, \\ -a_{21}Ak^2 \sin(kt + e) - a_{22}Bk^2 \sin(kt + e) + c_{21}A \sin(kt + e) + \\ + c_{22}B \sin(kt + e) = 0. \end{aligned}$$

Бу тенгламалар t нинг ҳар қандай қийматларида айнан бажарилиши учун $\sin(kt + e)$ олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиши керак:

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - a_{11}k^2)A + (c_{12} - a_{12}k^2)B &= 0, \\ (c_{21} - a_{21}k^2)A + (c_{22} - a_{22}k^2)B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.109)$$

Система ҳаракатланганда бу чизиқли бир жинсли алгебраик тенгламалар системаси A ва B га нисбатан нолдан фарқли ечимга эга бўлиши керак (акс ҳолда (24.108) га биноан $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 0$, яъни система тинч ҳолатда бўлади). Шу сабабли (24.109) системанинг детерминанти нолга тенг бўлиши керак:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{21} - a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (24.110)$$

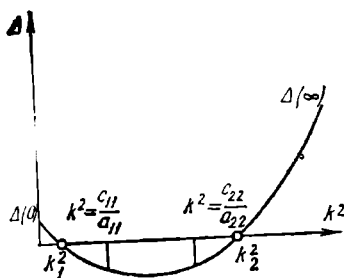
Бу детерминантни очиб ёзсак,

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0, \quad (24.111)$$

(24.110) ёки унга эквивалент бўлган (24.111) тенглама частоталар тенгламаси дейилади.

Частоталар тенгламасининг k^2 га нисбатан иккала илдизи ҳам ҳақиқий ва мусбат бўлишини исботлаймиз. Бунинг учун (24.110) ёки (24.111) тенгламаларнинг чап томонини $\Delta(k^2)$ билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\Delta(k^2) = (c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2$$



24.21-разм.

тенглама параболанинг тенгласини ифодалайди (24.21-расм). Частоталар тенгласининг k_1^2 ва k_2^2 илдиэларига параболанинг k^2 ўқ билан кесишган нуқталари мос келади.

(24.102) ва (24.104) муносабатлардан фойдаланиб, қуйидаги катталикларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \quad \Delta(\infty) > 0,$$

$$\Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = -\frac{(a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11})^2}{a_{11}^2} < 0, \quad \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = -\frac{(a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22})^2}{a_{22}^2} < 0.$$

Бундан кўраимизки, $k^2 = 0$ ва $k^2 = \infty$ лар орасида парабола k^2 ўқни k_1^2 ва k_2^2 ларнинг мусбат илдиэига мос равишда икки марта кесиб ўтади (мазкур графикни чизишда аниқлик учун $\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}}$ ва $k_1^2 < k_2^2$ деб олинган). Бинобарин, (24.110) ёки (24.111) тенгламаларнинг k^2 га нисбатан иккала илдиэи ҳам ҳақиқий ва мусбат қийматга эга бўлади:

$$0 < k_1^2 < \frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}} < k_2^2 < \infty. \quad \blacksquare \quad (24.112)$$

Агар (24.109) тенгламалар бир-бирига боғлиқ бўлмаган тенгламалар системасидан иборат бўлса (масалан, $a_{12} = a_{21} = 0$ ва $c_{12} = c_{21} = 0$ ҳолида), бу ҳолга мос тебраниш частотаси *парциал частота* дейилади ва қуйидагича аниқланади:

$$k_1^* = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}, \quad k_2^* = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}$$

(24.112) формула ва 24.21-расмдан кўраимизки, парциал частоталар k_1 ва k_2 частоталар орасидаги қийматларни қабул қилади, яъни k_1 кичик частотадан катта ва k_2 катта частотадан кичик бўлади. $k_1 = k_2$ бўлиши учун система

$$k^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{22}}{a_{22}}$$

частота билан тебраниши керак. Бу ҳолда парабола k^2 ўққа уринади.

Частоталар тенг бўлганда (24.109) тенгламаларнинг ҳар бири A ва B ларнинг ҳар қандай қийматида ўринли бўладиган айниятлардан иборат бўлади. Бу ҳолда (24.107) тенгламалар q_1 ва q_2 лар аниқланадиган иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган системани ташкил этади ва уларнинг ечимини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha_1), \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha_2) \quad (24.113)$$

(24.113) да A_1 , A_2 , α_1 ва α_2 ўзгармаслар ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

Бу ҳолда система гармоник тебранма ҳаракатда бўлади. Ҳар бир q_1 ва q_2 координаталар синусоида қонуни бўйича бир-бирига боғлиқсиз равишда бир хил частота билан ўзгаради.

Система турлича частота билан ҳаракатланган ҳолда k_1^2 ва k_2^2 лардан квадрат илдиз чиқариб, k_1 ва k_2 ларнинг мусбат қийматларидан фойдаланамиз. k_1 ва k_2 ларнинг ҳар бирига (24.108) тенгламаларнинг биттадан хусусий ечими мос келади. Бунда k_1 частотага A_1 , B_1 ва ϵ_1 ҳамда k_2 частотага A_2 , B_2 ва ϵ_2 ларнинг қийматлари мос келади. Хусусий ечимлар ўзаро чиқиқли боғлиқ бўлмагани туфайли умумий ечим уларнинг чиқиқли комбинациясидан иборат бўлади.

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2), \\ q_2 &= B_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1) + B_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (24.114)$$

A_1 ва B_1 , A_2 ва B_2 сонлар орасида (24.109) тенгламалар билан аниқланадиган боғланиш мавжуд. Бу тенгламаларга k_1 ва k_2 ни қўйсак, у ҳолда (24.109) тенгламалар системасининг детерминанти нолга тенг бўлади. Бинобарин, бу иккита тенгламалар системасининг фақат биттаси боғлиқсиз бўлади. Бу тенгламаларнинг бирор-тасидан (масалан, биринчисидан) қуйидаги нисбатни аниқлаймиз:

$$\frac{B_i}{A_i} = - \frac{c_{11} - a_{11} k_i^2}{c_{12} - a_{12} k_i^2} = \mu_i, \quad (i = 1, 2). \quad (24.115)$$

Ҳар бир k_1 ва k_2 частоталарнинг қийматига уларга мос μ_1 ва μ_2 тўғри келади. (24.115) воситасида аниқланган

$$B_1 = \mu_1 A_1, \quad B_2 = \mu_2 A_2 \quad (24.116)$$

ифодаларни (24.114) га қўйсак, умумий ечим қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2), \\ q_2 &= \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (24.117)$$

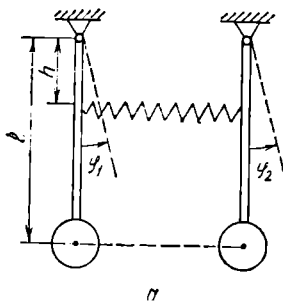
Бу ечимда k_1 ва k_2 частоталар ҳамда μ_1 ва μ_2 коэффициентлар мазкур системани характерловчи маълум сонлар бўлиб, A_1 , A_2 , ϵ_1 ва ϵ_2 ихтиёрий ўзгармаслар ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

(24.117) ёрдамида аниқланадиган умумий ечим формуласидан кўрамызки, эркинлик даражаси иккига тенг системанинг мувозанат ҳолати яқинидаги ҳаракати иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган тебранишлар йиғиндисидан иборат бўлади:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}, \quad q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)}$$

Бунда

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(1)} &= A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1), \quad q_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2), \\ q_2^{(1)} &= \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1), \quad q_2^{(2)} = \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (24.118)$$



24.22- расм.

Иккала координаталарда ҳам биринчи тебраниш k_1 , иккинчиси k_2 частота билан содир бўлади. Бу частоталарга мос тебранишлар системанинг бош тебранишлари дейилади.

(24.118) дан кўрамизки, барча координаталар ҳар бир бош тебранишда гармоник қонун асосида бир хил частота ва фаза билан ҳаракатланади.

(24.115) га асосан, μ_1 ва μ_2 ларнинг физик маъноси қуйидагича бўлади: координаталардан бирида бош тебраниш амплитудаси бошқа координатадаги амплитудадан қанча катта (ёки кичик) бўлишини ифодалайди.

24.12-масала. Ҳузурлиги l ва массаси m бўлган иккита бир хил маятник би-кирлиги c бўлган, учлари маятникларнинг стерженларига маҳкамланган пружина билан h баландликда бир-бирига боғланган (24.22-расм, а). Маятниклардан бири мувозанат вазиятидан α бурчакка оғдирилгандан кейин системанинг маятниклар мувозанати текислигидаги кичик тебранишлари аниқлансин; маятникларнинг бош-ланғич тезлиги нолга тенг. Маятниклар стерженларининг массалари билан пружина массаси ҳисобга олинмасин.

Ечиш. Системанинг эркинлик даражаси иккига тенг. Умумлашган координаталар учун маятникларнинг вертикалдан оғиш бурчаклари $q_1 = \varphi_1$ ва $q_2 = \varphi_2$ ларни оламиз.

Системанинг кинетик энергияси

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) \quad (1)$$

Системанинг потенциал энергияси $m\vec{g}$ оғирлик кучларининг потенциал энергияси Π_I ва деформацияланган пружинанинг эластиклик кучи потенциал энергияси Π_{II} ларнинг йиғиндисига тенг бўлади:

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}.$$

Бунда

$$\Pi_I = mgl(1 - \cos \varphi_1) + mgl(1 - \cos \varphi_2)$$

ёки Π_I ни қаторга ёйиб иккинчи даражали кичик миқдорлар билан чеклансак,

$$\Pi_I = \frac{1}{2} mgl (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

Пружина эл қушнинг потенциал энергияси иккинчи таранбли кичик миқдоргача аниқлик билан олинса,

$$\Pi_{II} = \frac{1}{2} c h^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

Шундай қилиб,

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II} = \frac{1}{2} [(mgl + c h^2) (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - 2 c h^2 \varphi_1 \varphi_2]. \quad (2)$$

(1) ва (2) дан

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

кўринишдаги Лагранж тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган ҳосилаларни аниқлаймиз

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= m l^2 \dot{\varphi}_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = m l^2 \ddot{\varphi}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} &= (mgl + ch^2) \varphi_1 - 2ch^2 \varphi_2; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} &= m l^2 \dot{\varphi}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = m l^2 \ddot{\varphi}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} &= (mgl + ch^2) \varphi_2 - 2ch^2 \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) ни (3) га қўйиб, барча ҳадларни чап томонга ўтказсак, системанинг ҳаракат тенгламаларини

$$\left. \begin{aligned} m l^2 \ddot{\varphi}_1 + (mgh + ch^2) \varphi_1 - ch^2 \varphi_2 &= 0, \\ m l^2 \ddot{\varphi}_2 - ch^2 \varphi_1 + (mgh + ch^2) \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(5) нинг умумий ечимини (24.108) га асосан

$$\varphi_1 = A \sin(kt + \epsilon),$$

$$\varphi_2 = B \sin(kt + \epsilon)$$

кўринишда излаёмиз.

(5) дан кўрамизки,

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= m l^2, \quad a_{22} = m l^2, \\ a_{12} &= 0, \quad c_{11} = mgl + ch^2, \\ c_{22} &= mgl + ch^2; \quad c_{12} = -ch^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(7) ни (24.111) частоталар тенгламаси

$$(c_{11} - a_{11} k^2)(c_{22} - a_{22} k^2) - (c_{12} - a_{12} k^2)^2 = 0$$

га қўйсак,

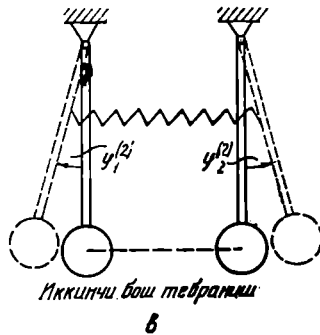
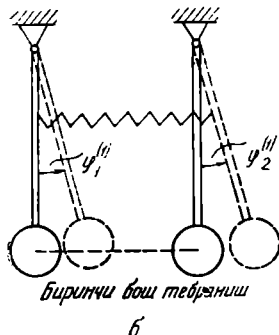
$$(mgl + ch^2 - m l^2 k^2)^2 - c^2 l^4 = 0.$$

Бу тенгламадан бош тебранишлар частоталари квадратини аниқлаймиз

$$k_1^2 = \frac{g}{l}; \quad k_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2ch}{m l^2}, \quad (8)$$

(24.115) га асосан ҳар бир бош тебранишлар амплитудаларининг нисбати учун

$$\frac{B_1}{A_1} = \mu_1 = - \frac{c_{11} - a_{11} k_1^2}{c_{12} - a_{12} k_1^2} = - \frac{mgl + ch^2 - m l^2 \frac{g}{l}}{-ch^2} = +1,$$



24.22- расм

$$\frac{B_2}{A_2} = \mu_2 = \frac{c_{11} - a_{11} k_2^2}{c_{12} - a_{12} k_2^2} = - \frac{mgl + ch^2 - ml^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2} \right)}{-ch^2} = -1$$

тенгликларни оламир.

Шундай қилиб,

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = -A_2$$

Натижада (24.114) га асосан (5) тенгламаларнинг умумий ечимини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2), \\ \varphi_2 &= A_2 \sin(k_1 t + \epsilon_1) - A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

бундаги k_1 ва k_2 лар (8) тенгликлар ёрдамида аниқланади. (9) га кўра биринчи бош тебраниш учун

$$\varphi_1^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1), \quad \varphi_2^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1), \quad (10)$$

иккинчи бош тебраниш учун эса

$$\varphi_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2), \quad \varphi_2^{(2)} = -A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2) \quad (11)$$

муносабатларини оламир. Бу тенгликларга мос бош тебранишлар 24.22-расм, б, а да тасвирланган.

(10) дан кўрамизки, агар биринчи бош тебранишда биринчи маятник вертикалдан $\varphi_1^{(1)}$ бурчакка оғса, иккинчи маятник ҳам худди шу йўналишда $\varphi_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)}$ бурчакка оғати. (11) га кўра иккинчи бош тебранишда биринчи маятник $\varphi_1^{(2)}$ бурчакка оғса, иккинчи маятник унга қарама-қарши йўналишда $\varphi_2^{(2)} = -\varphi_1^{(2)}$ бурчакка оғати.

(9) даги A_1 , A_2 , ϵ_1 ва ϵ_2 ихтиёрий ўзгармаслар ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

Масаланинг шартига кўра бошланғич $t = 0$ пайтда

$$\varphi_{10} = \alpha, \quad \varphi_{20} = 0, \quad \dot{\varphi}_{10} = 0, \quad \dot{\varphi}_{20} = 0. \quad (12)$$

(9) дан вақт бўйича ҳосила оламир:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= A_1 k_1 \cos(k_1 t + \epsilon_1) + A_2 k_2 \cos(k_2 t + \epsilon_2), \\ \dot{\varphi}_2 &= A_1 k_1 \cos(k_1 t + \epsilon_1) - A_2 k_2 \cos(k_2 t + \epsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(9) ва (13) га ҳаракатнинг бошланғич шартлари (10) ни қўямиз:

$$\begin{aligned}\alpha &= A_1 \sin \varepsilon_1 + A_2 \sin \varepsilon_2, \\ 0 &= A_1 \sin \varepsilon_1 - A_2 \sin \varepsilon_2, \\ 0 &= A_1 k_1 \cos \varepsilon_1 + A_2 k_2 \sin \varepsilon_2, \\ 0 &= A_1 k_1 \cos \varepsilon_1 - A_2 k_2 \cos \varepsilon_2.\end{aligned}$$

Бундан

$$\begin{aligned}A_1 k_1 \cos \varepsilon_1 &= A_2 k_2 \cos \varepsilon_2 = 0, \\ \cos \varepsilon_1 &= \cos \varepsilon_2 = 0, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \frac{\pi}{2},\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}2 A_1 \sin \varepsilon_1 &= 2 A_2 \sin \varepsilon_2 = \alpha, \\ A_1 &= A_2 = \frac{\alpha}{2},\end{aligned}\tag{15}$$

(14) ва (15) ни назарда тутиб (9) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\alpha}{2} \left[\sin \left(k_1 t + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(k_2 t + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\alpha}{2} (\cos k_1 t + \cos k_2 t) = \\ &= \alpha \cos \frac{k_1 + k_2}{2} t \cos \frac{k_1 - k_2}{2} t; \\ \varphi_2 &= \frac{\alpha}{2} \left[\sin \left(k_1 t + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(k_2 t + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\alpha}{2} (\cos k_1 t - \cos k_2 t) = \\ &= \alpha \sin \frac{k_1 + k_2}{2} t \sin \frac{k_2 - k_1}{2} t.\end{aligned}$$

Шундай қилиб, (12) бошланғич шартларга мос бўлган (5) тенгламанинг хусусий ечими қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \alpha \cos \frac{k_1 + k_2}{2} t \cdot \cos \frac{k_1 - k_2}{2} t, \\ \varphi_2 &= \alpha \sin \frac{k_1 + k_2}{2} t \cdot \sin \frac{k_2 - k_1}{2} t.\end{aligned}$$

24.23*-§. Устувор ҳаракат ҳақида тушунча

Динамиканинг иккинчи асосий масаласини ечиш натижасида система ҳаракат дифференциал тенгламаларининг берилган кучлар ва бошланғич шартларга мос ечимини аниқлаймиз. Бироқ масалада берилган бошланғич шартлар ҳақиқатда бир оз ўзгариши мумкин бўлган ҳолларни ҳам қарашга тўғри келади. Масалан, снаряд, ракета ёки самолётнинг бошланғич тезлиги ҳамиша ҳисобланган бошланғич тезлик билан устма-уст тушавермайди. Бундан ташқари, система ҳаракати давомида унга масалани ечишда назарда тутилмаган оний кучлар ёки вақтинча кучлар таъсир этадиган ҳоллар ҳам учрайди. Масалан, самолёт учаётганда ҳавонинг зичлиги ўзгариши натижасида қаршилик кучи ўзгариши ёки бошқа қўшимча кучлар таъсир этиши мумкин. Бошланғич пайт учун бундай қўшимча кучларнинг таъсири тўхтаган пайтни олиб, иккинчи ҳолни биричи ҳолга келтириш мумкин.

Берилган кучлар ва шартларга мос бўлган ҳаракатни *асосий ҳаракат*, берилган кучлар ва ўзгарган бошланғич шартларга мос бўлган ҳаракатни эса, *уйғотилган ҳаракат* деб атаймиз. Асосий ҳаракат содир бўладиган бошланғич шартлар билан ўзгарган бошланғич шартлар орасидаги фарқ кичик бўлганда, уйғотилган ҳаракатнинг асосий ҳаракатга яқин бўлиши муҳим амалий аҳамиятга эга. Шу маънода асосий ҳаракатни устувор деб қараш мумкин.

Системанинг устувор ҳаракатини аниқроқ таърифлаш учун ҳолати $q_1, q_2, \dots, q_n$ координаталар билан аниқланадиган ва эркинлик даражаси n га тенг бўлган механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларинин қуйидаги $s = 2n$ та биринчи тартибли дифференциал тенгламаларга келтирамиз:

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \dots, y_s), \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (24.119)$$

Бунда y_i система нуқталарининг координаталари, тезликлари ёки уларнинг бирор функциясидан иборат қандайдир параметрларни ифодалайди.

Айтайлик,

$$y_j = f_j(t)$$

берилган $t = t_0$ да $y_s = y_{s0}$ бошланғич шартларга мос бўлган (24.119) тенгламаларининг хусусий ечимини ифодаласин. Бу хусусий ечимга мос ҳаракатни асосий ҳаракат учун олсак, (24.119) тенгламанинг бошқа ҳар қандай бошланғич шартлардаги хусусий ечимларига мос ҳаракатлар эса *уйғотилган ҳаракатларни* ифодалайди. Уйғотилган ҳаракатнинг асосий ҳаракатдан оғиши y_s ларнинг айирмаси билан аниқланади.

Устувор ҳаракатга А. М. Ляпунов томонидан берилган таърифларни келтирамиз.

Агар исталганча кичик мусбат ϵ сон учун унга боғлиқ шундай мусбат η сон топилсаки, бошланғич $t = t_0$ пайтда

$$|y_j(t_0) - f_j(t_0)| \leq \eta \quad (24.120)$$

шартлар бажариладиган барча уйғотилган ҳаракатлар учун

$$|y_j(t) - f_j(t)| < \epsilon \quad (24.121)$$

тенгсизликлар бажарилса, системанинг бундай асосий ҳаракати устувор дейилади.

Агар бирор қайд қилинган ϵ сон учун исталганча кичик шундай $\eta < \epsilon$ сонни топиш мумкин бўлсаки, (24.120) тенгсизлик бажариладиган бирорта уйғотилган ҳаракат учун вақтнинг бирор пайтида

$$|y_j(t) - f_j(t)| = \epsilon \quad (24.122)$$

тенглик ўринли бўлса, системанинг бундай ҳаракати *ноустувор ҳаракат* дейилади.

24.24*-§. Уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламалари

Ҳаракатнинг устуворлигининг ўрганиш учун ҳаракат тенгламасида

$$x_j = y_j - f_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (24.123)$$

тенглик ёрдамида аниқланадиган янги ўзгарувчига ўтамыз. Бунда $f_j(t)$ асосий ҳаракатга мос бўлган (24.119) тенгламанинг хусусий ечимини; x_j эса асосий ҳаракатдан оғишини ифодалайди. Янги ўзгарувчилар орқали ифодаланган қуйидаги тенгламалар

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, \dots, x_s) &\equiv Y_j(t, x_1 + f_1, \dots, x_s + f_s) - \\ &- Y_j(t, f_1, \dots, f_s) \end{aligned} \quad (24.124)$$

уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламалари дейилади.

x_j ўзгарувчилар орқали (24.120) ва (24.121) тенгсизликларни

$$|x_j(t_0)| \leq \eta, \quad (24.125)$$

$$|x_j(t)| < \varepsilon \quad (24.126)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шу сабабли устувор ҳаракатга яна қуйидаги таърифни бериш мумкин.

Агар исталганча кичик мусбат ε сон учун шундай мусбат η сон топилсаки, бошланғич $t = t_0$ пайтда (24.125) тенгсизликлар бажариладиган барча уйғотилган ҳаракатлар учун (24.126) тенгсизликлар ўринли бўлса, системанинг бундай асосий ҳаракати устувор дейилади.

Агар асосий ҳаракат устувор бўлса ва барча уйғотилган ҳаракатлар учун (24.125) ни қаноатлантирувчи шундай исталганча кичик η сон топилсаки,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t) = 0 \quad (24.127)$$

шартлар бажарилса, у ҳолда асосий ҳаракат асимптотик устувор ҳаракат дейилади.

24.13- масала. Ҳаракати

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x - x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - y - x^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

тенгламалар билан ифодаланадиган нуқтанинг мувозанат ҳолати яқиндаги уйғотилган ҳаракат тенгламалари тузилсин.

Ечиш. Системанинг мувозанат ҳолати

$$\begin{aligned} y - x - x^2 &= 0, \\ 3x - y - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

тенгламалар воситасида аниқланади. Бу тенгламаларни биргаликда ечиб, қуйидаги никита мувозанат ҳолатини аниқлаймиз:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 2.$$

$x_1 = 0, y_1 = 0$ мувозанат ҳолатига мос уйғотилган ҳаракат тенгламаларини чиқариш учун

$$x = x_1 + \xi, y = y_1 + \eta$$

тенгликлар билан аниқланадиган янги ўзгарувчиларга ўтамыз. Уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламалари худди (1) га ўхшаш бўлиб, фақат унда янги ўзгарувчилар қатнашади:

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta - \xi - \xi^2,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = 3\xi - \eta - \xi^2,$$

$x_2 = 1, y_2 = 2$ мувозанат ҳолати яқинидаги ҳаракат тенгламаларини чиқариш учун x ва y ўрнига

$$x = 1 + \xi, y = 2 + \eta$$

тенгликлар билан аниқланадиган ξ ва η ўзгарувчиларни киритамиз. Бу ҳолга мос уйғотилган ҳаракат тенгламалари

$$\frac{d\xi}{dt} = -3\xi + \eta - \xi^2,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi - \eta - \xi^2$$

кўринишда ёзилади.

24. 25*-§. Ҳаракатнинг устуворлиги ҳақидаги Ляпунов теоремалари

Ляпунов ҳаракатнинг устуворлиги аниқланадиган иккита усулни кўрсатган. Биринчи усул (24.124) уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламаларининг ечимларини чексиз қатор тарзда ифодалашдан иборат бўлиб, бу усул (24.123) тенгламаларининг баъзи хусусий ҳоллари учун қўлланади. Биринчи усулни қўллашда жуда кўп ҳисоблашларни бажаришга тўғри келади. Шу сабабли ҳаракатнинг устуворлигини аниқлашда иккинчи усулдан фойдаланилади. Ляпуновнинг иккинчи усули маълум шартларни қаноатлантирувчи ва Ляпунов функцияси деб аталадиган бирор V функцияни топишга келтирилади. Келгусида координаталар боши атрофида аниқланган $x_1, \dots, x_s$ ўзгарувчиларнинг функцияси $V(x_1, \dots, x_s)$ устида тўхталамиз. Бу функцияни бир қийматли, фақат $x_1 = \dots = x_s = 0$ да нолга тенг ва узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб қараймиз.

Таърифлар. 1. Агар $h > 0$ қанча кичик бўлмасин

$$|x_j| \leq h \quad (24.128)$$

соҳада $V(x_1, \dots, x_s)$ функция фақат битта аниқ ишорали (аниқ мусбат ёки аниқ манфий) қийматларни қабул қилса ва фақат $x_1 = \dots = x_s = 0$ да нолга тенг бўлса, у ҳолда $V = V(x_1, \dots, x_s)$ функция (24.128) соҳада *аниқ ишорали функция* дейилади.

2. Агар $V(x_1, \dots, x_s)$ функция (24.128) соҳада фақат бир хил ишорали қийматларни қабул қилса ҳамда $x_1^2 + \dots + x_s^2 \neq 0$ да ҳам

нолга тенг бўла олса, у ҳолда $V = V(x_1, \dots, x_s)$ функция мазкур соҳада ўзгармас (мусбат ёки манфий) ишорали функция дейилади.

3. Агар h қанчалик кичик бўлмасин (24.128) соҳада $V(x_1, \dots, x_s)$ функция ҳам мусбат, ҳам манфий қийматларни қабул қила олса, у ҳолда $V(x_1, \dots, x_s)$ функция мазкур соҳада ўзгарувчи ишорали функция дейилади.

Қуйида баён этилган Ляпуновнинг биринчи теоремаси асосий ҳаракат устуворлигининг етарли шартини ифодалайди:

Агар уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламалари учун аниқ ишорали шундай $V(x_1, \dots, x_s)$ функцияни топиш мумкин бўлсаки, мазкур тенгламаларда қатнашувчи V функциянинг тўлиқ ҳосиласи V га қарама-қарши ўзгармас ишорали ёки айнан нолга тенг бўлса, у ҳолда асосий ҳаракат устувордир.

Ляпуновнинг қуйидаги иккинчи теоремаси ёрдамида ҳаракатнинг асимптотик устуворлиги аниқланади.*)

Агар уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламалари учун шундай аниқ ишорали $V(x_1, \dots, x_s)$ функцияни топиш мумкин бўлсаки, мазкур тенгламаларда қатнашувчи V функциянинг вақт бўйича тўлиқ ҳосиласи ҳам V га қарама-қарши аниқ ишорали функциядан иборат бўлса, у ҳолда асосий ҳаракат асимптотик устувордир.

24.14- масала. Агар уйғотилган ҳаракат тенгламалари

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y - 3z - x(y - 2z)^2, \\ \dot{y} &= -2x + 3z - 3yz, \\ \dot{z} &= 2x - y + y^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

кўринишда берилса, асосий ҳаракатнинг устуворлиги аниқлансин.

Ечиш. Ляпунов функциясини аниқ ишорали мусбат функция шаклида қуйидагича танлаб оламиз.

$$V = 2x^2 + y^2 + 3z^2.$$

У ҳолда

$$\frac{dV}{dt} = 4x\dot{x} + 2y\dot{y} + 6z\dot{z} \quad (2)$$

ёки $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ларнинг қийматини (1) дан келтириб қўйсак,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4xy - 12xz - 4x^2(y - 2z)^2 - 4xy + 6yz - 6y^2z + 12xz - 6yz + 6y^2z = \\ &= -4x^2(y - 2z)^2. \end{aligned}$$

$\frac{dV}{dt} \leq 0$ (бунда тенглик ишораси координаталар боши ҳамда $x=0$ ва $y=2z$ текисликларда

ўринли) бўлгани учун $\frac{dV}{dt}$ ўзгармас ишорали манфий функциядан иборат бўлади.

Бинобарин, Ляпуновнинг биринчи теоремасига асосан, асосий ҳаракат устувордир.

*) — Ляпуновнинг бу теоремалари исботини И. Г. Малкиннинг «Теория устойчивости движения» (М.: Наука, II боб, 9. 10- §, 1966) китобидан ўқиш мумкин.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^3, \\ \dot{y} &= -x - y^3\end{aligned}$$

кўринишда берилса, $x = y = 0$ координаталар боши яқинидаги асосий ҳаракатнинг асимптотик устувор бўлиши исботлансин.

Ечиш. Ляпунов функциясини аниқ ишорали мусбат функция шаклида қуйидагича танлаб оламиз: $V = x^2 + y^2$. У ҳолда V нинг вақт бўйича ҳосиласи

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^4 + y^4)$$

ўзгармас ишорали манфий функция бўлгани учун

$$x = y = 0$$

асосий ҳаракат Ляпуновнинг иккинчи теоремасига кўра асимптотик устувор бўлади ҳамда бу ҳолатдан кичик оғдирилган система вақтнинг ўтиши билан бу ҳолатга яқинлаша боради.

24.26*- §. Биринчи яқинлашишдаги устувор мувозанат

Кўпинча уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламаларининг ечимини аниқлаш амримаҳол бўлгани учун ҳаракатнинг устуворлигини биринчи яқинлашиш усули билан ҳам аниқланади. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, биринчи яқинлашишда ҳаракатнинг устуворлигини аниқлаш учун уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламаларида чизиқли ҳадлар алоҳида ажратиб ёзилади. Мазкур тенгламаларнинг ўнг томони вақтга боғлиқ бўлмаган ҳол билан чекланамиз:

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{js}x_s + Z(x_1, \dots, x_s), \quad (24.129)$$

бунда $a_{jk} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right)_{x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0}$ бўлиб, $Z(x_1, \dots, x_s)$ эса иккинчи ва ундан юқори тартибли x_j ларни ўз ичига олган ҳадларни ифодалайди.

Биринчи яқинлашишда ҳаракатнинг устуворлигини текшириш учун (24.129) да чизиқсиз ҳадларни эътиборга олмай

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{js}x_s \quad (24.130)$$

тенгламалар қаралади ва уларнинг характеристик тенгламаси

$$\lambda^s + A_1 \lambda^{s-1} + A_2 \lambda^{s-2} + \dots + A_s = 0 \quad (24.131)$$

тузилади. У ҳолда ҳаракатнинг устуворлиги аниқланадиган қуйидаги *Ляпунов теоремалари* ўринли бўлади.*)

*) — Ляпуновнинг бу теоремалари исботини И. Г. Малкиннинг «Теория устойчивости движения» (М.: Наука, III боб, 22-§, 1966) китобидан ўқиш мумкин.

1- теорема. Агар биринчи яқинлашишдаги система характеристик тенгламасининг барча илдизлари манфий ҳақиқий қисмга эга бўлса, у ҳолда уйғотилган ҳаракат тенгламасидаги юқори тартибли ҳадлар қандай бўлишидан қатъи назар асосий ҳаракат устувор, шу билан бирга асимптотик устувор бўлади.

2- теорема. Агар биринчи яқинлашишдаги система характеристик тенгламасининг ҳеч бўлмаганда битта илдизи мусбат ҳақиқий қисмга эга бўлса, у ҳолда уйғотилган ҳаракат тенгламасидаги иккинчи ва ундан юқори тартибли ҳадларни ҳар қандай танлашишга қарамай, асосий ҳаракат ноустувор бўлади.

Характеристик тенглама илдизларининг ишорасини аниқлашда қуйидаги Гурвиц теоремасидан фойдаланилади.^{*)}

Теорема. n - тартибли ҳақиқий коэффициентли

$$a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + a_2 x^{s-2} + \dots + a_s = 0$$

тенгламанинг барча илдизлари манфий ҳақиқий қисмга эга бўлиши учун қуйидаги

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

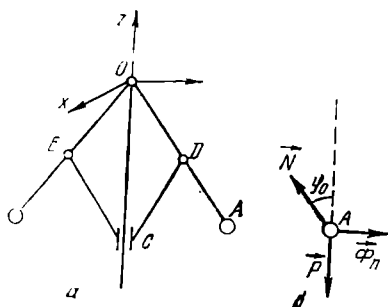
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2s-1} & a_{2s-2} & \dots & \dots & \dots & a_s \end{vmatrix} \quad (24.132)$$

детерминантларнинг барчаси мусбат бўлиши зарур ва етарлидир. Бунда $i > s$ бўлса, $a_i = 0$.

24.16- масала. Уатт регулятори узунликлари l га тенг ва O нуқтада шарнирли бириктирилган OA ва OB стерженлардан ташкил топган бўлиб, бу стерженларнинг учига m массали шарчалар бириктирилган (24.23- расм, а). Вертикал ўқ бўйича сирпана оладиган C муфта CE ва CD стерженлар воситасида шарлар билан бириктирилган. Шарлар моддий нуқталар деб қаралсин. Бурчак тезлик ортган сари шарлар бир-бирдан қочади ва C муфта юқорига кўтарилади, бурчак тезлик камайса, шарлар бир-бирига яқинлашади ва C муфта пастга тушади.

Муфта ва стерженларнинг оғирлигини эътиборга олмай, регулятор ҳаракатининг устуворлиги аниқлансин. Айланувчи қисмларнинг (шарлар бу ҳисобга кирмайди) вертикал ўққа нисбатан инерция моменти I_0 га тенг.

φ_0 бурчак билан аниқланадиган асосий ҳаракатдан регуляторни φ бурчакка оғиши натижасида ҳосил бўладиган тикловчи момент



24.23- расм.

^{*)} — Гурвиц теоремасининг исботини А. Г. Курош «Курс высшей алгебры» (М.: 1963) китобидан ўқиш мумкин.

$$M_z = -k(\varphi - \varphi_0)$$

га тенг. Бунда k — ўзгармас мусбат коэффициент.

Ениш. Регуляторнинг эркинлик даражаси иккига тенг. Умумлашган координаталар учун ОС ўқ атрофидаги айланиш бурчаги β ва ОА, ОВ стерженларнинг ОАВ текисликка перпендикуляр горизонтал ўқ атрофидаги айланиш бурчаги φ ни олаемиз. Регулятор ўзгармас $\beta = \omega_0$ бурчак тезлик билан айланганда φ_0 бурчакни аниқлаймиз. Бунинг учун шарларнинг нисбий мувозанатини текшириш кифоя (24.23-расм, б). Шарларга таъсир этувчи оғирлик кучи $\vec{P}$ ($\vec{P} = m\vec{g}$) ва реакция кучи $\vec{N}$ қаторига нормал инерция кучи $\vec{\Phi}_n$ ($\Phi_n = ml\omega_0^2 \sin \varphi_0$) ни қўшсак, бундай кучлар системасини мувозанатда деб қараш мумкин.

Бу кучларни $\vec{N}$ га перпендикуляр АК ўққа проекцияласак,

$$\Phi_n \cos \varphi_0 - mg \sin \varphi_0 = 0$$

ёки Φ_n нинг қийматини қўйсак,

$$m l \omega_0^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - mg \sin \varphi_0 = 0.$$

Бундан

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l \cos \varphi_0}. \quad (1)$$

Шундай қилиб, регулятор ОС ўқ атрофида берилган ω_0 бурчак тезлик билан айланса, у ҳолда ОА ва ОВ стерженлар вертикалга φ_0 бурчак остида оғган ҳолда ҳаракатланади. Бу ҳаракатни асосий ҳаракат деб атаймиз.

Системанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларидан фойдаланамиз.

Умумлашган кучларни ҳисоблаймиз. Регуляторга шарларнинг оғирлик кучлари ва M_z тикловчи момент таъсир этади.

Шарлар оғирлик кучларининг потенциал энергияси ихтиёрий ўзгармасгача аниқлик билан

$$\Pi = -2mgl \cos \varphi$$

формула ёрдамида аниқланади. Шу сабабли шарларнинг оғирлик кучларига мос бўлган Q_φ умумлашган куч манфий ишора билан олинган потенциал энергиянинг φ бўйича хусусий ҳосиласига тенг бўлади:

$$Q_\varphi = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -2mgl \sin \varphi. \quad (2)$$

Тикловчи M_z моментга мос умумлашган кучни Q_β билан белгиласак, Q_β ни элементар иш ифодасидаги $\delta\beta$ мумкин бўлган кўчиш олдидаги коэффициентга тенг деб қараш мумкин:

$$\delta A_1 = M_z \delta \beta.$$

Бинобарин,

$$Q_\beta = M_z = -k(\varphi - \varphi_0). \quad (3)$$

Системанинг кинетик энергиясини ҳисоблаймиз:

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \dot{\beta}^2 + I_2 \dot{\varphi}^2).$$

Бунда I_1 регулятор айланувчи қисмларининг (шарлар бу ҳисобга қирмайди) z ўққа нисбатан инерция моменти I_0 билан φ бурчакка боғлиқ шарларнинг z ўққа нисбатан инерция моментлари йиғиндисига тенг:

$$I_1 = I_0 + 2ml^2 \sin^2 \varphi.$$

Шарларнинг x ўққа нисбатан инерция моменти

$$I_2 = 2 m l^2$$

Шундай қилиб, системанинг кинетик энергияси умумлашган координаталар оралиқлари қуйидагича ифодаланади:

$$T = \frac{1}{2} [(I_0 + 2 m l^2 \sin^2 \varphi) \dot{\beta}^2 + 2 m l^2 \dot{\varphi}^2].$$

Берилган система учун

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= Q_\beta, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

кўринишдаги Лагранжнинг II хил тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган кинетик энергиянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \beta} &= (I_0 + 2 m l^2 \sin^2 \varphi) \dot{\beta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = \\ &= 4 m l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{\beta} + (I_0 + 2 m l^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\beta}, \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2 m l^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2 m l^2 \ddot{\varphi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 2 m l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\beta}^2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(2), (3) ва (5) ни (4) га қўйсак,

$$\left. \begin{aligned} 4 m l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{\beta} + (I_0 + 2 m l^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\beta} &= -k(\varphi - \varphi_0), \\ 2 m l^2 \ddot{\varphi} - 2 m l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\beta}^2 &= -2 m g l \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Системанинг (1) асосий ҳаракат яқинидаги кичик тебранишларини қараймиз. Бунинг учун қуйидаги алмаштиришни киритамиз:

$$\varphi = \varphi_0 + x, \quad \dot{\beta} = \dot{\beta}_0 + \dot{y} = \omega_0 + \dot{y}. \quad (7)$$

Бунда x ва y лар φ ва β ўзгарувчиларнинг кичик ортитрималарини ифодалайди. (7) ни (6) га киритиб, қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} 4 m l^2 \sin(\varphi_0 + x) \cos(\varphi_0 + x) \dot{x}(\omega_0 + \dot{y}) + [I_0 + 2 m l^2 \sin^2(\varphi_0 + x)] \ddot{y} &= -kx, \\ x - \frac{1}{2} (\dot{\beta}_0 + \dot{y})^2 \sin(2\varphi_0 + 2x) + \frac{g}{l} \sin(\varphi_0 + x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Асосий ҳаракат яқинидаги кичик ҳаракатларни текшириш учун барча ҳадларни биринчи тартибли кичик миқдоргача аниқлик билан ҳисоблаймиз. Бунинг учун $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$ деб фараз қиламиз. Натижада (8) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} I_0 + 2 m l^2 \sin^2 \varphi_0 \ddot{y} + 2 m l^2 \sin^2 \varphi_0 \cdot \dot{\beta}_0 \dot{x} + kx &= 0, \\ x - \dot{\beta}_0 \sin 2\varphi_0 \cdot \dot{y} + \left(-\frac{g}{l} \cos \varphi_0 - \dot{\beta}_0^2 \cos 2\varphi_0 \right) x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Шундай қилиб, системанинг асосий ҳаракати яқинидаги кичик ҳаракатлари учун (9) кўринишидаги иккити ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системасини оламп. Уларни ечиш учун

$$x = C_1 e^{\lambda t}, \quad \dot{y} = C_2 e^{\lambda t}$$

деб фарз қиламп. Бунда C_1, C_2 лар ўзгармас миқдорлар. У ҳолда (9) га мос характеристик тенгламани

$$\left(\frac{I_0}{2m l^2} + \sin^2 \varphi_0 \right) \lambda^3 + \dot{\beta}_0^2 \sin^2 \varphi_0 (1 + 2 \cos^2 \varphi_0 + \frac{I_0}{2m l^2}) \lambda + \frac{k}{2m l^2} \dot{\beta}_0 \sin 2\varphi_0 = 0 \quad (10)$$

кўринишда ёзилади. Бунда

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{I_0}{2m l^2} + \sin^2 \varphi_0, \quad a_1 = 0, \\ a_2 &= \dot{\beta}_0^2 \sin^2 \varphi_0 \left(1 + 2 \cos^2 \varphi_0 + \frac{I_0}{2m l^2} \right), \\ a_3 &= \frac{k}{2m l^2} \dot{\beta}_0 \sin 2\varphi_0 \end{aligned}$$

белгилашларни киритсак,

$$a_0 \lambda^3 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

тенглама ўринли бўлади. Бу характеристик тенглама илдиэларининг ҳақиқий қисми манфий бўлишини ифодаловчи Гурвиц шартлари

$$\begin{aligned} a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} &= a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} &= a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0 \end{aligned}$$

кўринишда ёзилади. Кўрилатган ҳолда $a_0 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 = 0$ бўлгани учун Гурвиц шартлари қаноатланмайди, бинобарин, регуляторнинг ҳаракати ноуствор бўлади. Бу факт эксперимент йўли билан ҳам тасдиқланган. Шу сабабли бошқариш системасига қўшимча звеноларни киритишга тўғри келади.

24.27*- §. Ҳаракатни оптимал бошқариш ҳақида тушунча

Техникада объектларнинг ҳаракатини бошқариш ва бошқаришнинг энг яхши усулнинг танлаш алоҳида аҳамиятга эга. Ҳозирги кунда бошқарилган объектлар деярли ҳар қадамда учрайди; автомобиль, самолёт, регуляторлар билан жиҳозланган турли электроприборлар ана шулар жумласидандир.

Бошқарилувчи объектни бир ҳолатдан бошқа ҳолатга турлича усулларда ўтказиш мумкин. Шундан келиб чиқиб, маълум маънода энг қулай йўл билан ўтишни аниқлашга келтириладиган оптимал бошқариш масаласига дуч келамиз.

Механик система нуқталарига таъсир этувчи баъзи кучлар бошқарувчи — одам (ёки автоматик қурилмалар) воситасида бошқарилиши мумкин. Масалан, самолётнинг ҳаракатини учувчи ёки автопилот таъсирида бошқариш мумкин. Техникада учрайдиган бундай

масалалар бошқариш функцияси қатнашадиган масалалар дейилади. Агар бошқариш функцияси ва таъсир этувчи кучлар маълум бўлса, у ҳолда ҳаракатни бошқариш берилган объектнинг мазкур кучлар таъсиридаги ҳаракатини аниқлашга доир механиканинг оддий масаласига келтирилади.

Бошқаришнинг оптималлиги олдиндан белгиланган сифат белгисига қараб аниқланади. Масалан, икки пункт орасида учадиган самолётнинг энг қисқа вақтда манзилга етишини бошқариш масаласида сифат белгиси учигша сарф бўлган вақт, максимал юк ташиш масаласида эса сифат белгиси ташилган юкнинг оғирлиги билан ифодаланади.

Кўпинча механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари

$$\frac{dx_j}{dt} = f(x_1, \dots, x_s, u_1, \dots, u_k), \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (24.133)$$

ёки

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (24.134)$$

кўринишдаги тенгламаларга келтирилади. Бунда $x_1, \dots, x_s$ лар системанинг берилган ондаги ҳолати ва тезлигини ифодаловчи миқдорлар, $u_1, \dots, u_k$ лар эса бошқариш параметрларини ифодалайди. Масалан, тўғри чизиqli ҳаракатдаги автомобилнинг ҳаракатини унинг босиб ўтган йўли s ва ҳаракат тезлиги v билан характерлаш мумкин. Бу катталиклар вақтнинг функцияси сифатида ўзгаради ва улар двигателнинг тортиш кучи F ни ҳайдовчи томондан ўзгартириш орқали бошқарилади. Бу масалада F бошқарувчи параметрни ифодалайди.

Одатда, бошқариш параметрлари $u_1, \dots, u_k$ лар ихтиёрий бўлмай, уларга маълум шартлар қўйилади. Масалан, u — автомобиль двигателининг тортиш кучи бўлса, u параметр $0 \leq u \leq u_1$ кўринишдаги шартни қаноатлантириши керак.

Бошланғич $t = t_0$ пайтда система x_0 ҳолатда бўлиб, $t = t_1$ пайтда уни x_1 ҳолатга олиб келиш талаб қилинса, бошқариш масаласи

$$\frac{dx}{dt} = f[x, u(t)]$$

дифференциал тенгламаларни ушбу

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

чегаравий шартларда ечимга эга бўладиган $u(t)$ бошқариш функциясини танлашга келтирилади. Бу масаланинг ечими $x(t)$ бўлса, бошқаришнинг сифат белгиси

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0[x(t), u(t)] dt \quad (24.135)$$

формула бўйича ҳисобланади.

Ҳаракат дифференциал тенгламалари (24.133) ёки (24.134) тенгламалар билан ифодаланадиган, механик системанинг ҳаракатини оптимал бошқариш масаласи (24.135) функционалнинг мумкин бўлган энг кичик қийматини аниқлашга келтирилади.

25- БОБ. ЗАРБА НАЗАРИЯСИ

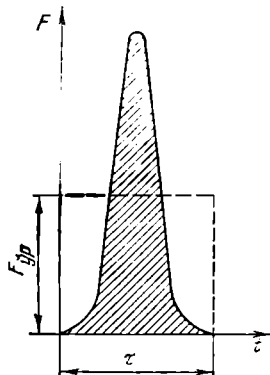
25.1- §. Зарба назариясининг асосий тушунчалари

Жуда кичик вақт ичида системанинг айрим ёки барча нуқталарининг тезлиги, бинобарин, ҳаракат миқдори чекли катталиikka ўзгарса, бундай ҳодиса *зарба* дейилади.

Зарба содир бўладиган вақт *зарба вақти* дейилади. Зарба вақти τ секунднинг мингдан бир ёки ундан кичик улушига тенг бўлади.

Механик система нуқталарига бирданига боғланиш қўйилганда ёки система боғланишдан бир зумда бўшатишда зарба ҳодисаси содир бўлади. Масалан, илгарилама ҳаракатдаги жисм қўзғалмас жисм билан тўқнашганда зарба содир бўлиб, бунда қўзғалмас жисм бирданига қўйилган боғланиш вазифасини ўтайди. Спортчи трамплиндан сакраш пайтида ҳам зарба содир бўлади, бунда зарба спортчи боғланишдан (трамплиндан) бўшатишдан (ажралган) пайтда содир бўлади. Шунингдек, тўп отилганда ёки снаряд портлаганда ҳам зарба содир бўлади.

Зарба даврида вужудга келувчи ва тўқнашувчи жисмларга жуда кичик вақт ичида таъсир этиб, ўта катта қийматга эришадиган ва импульси чекли бўлган куч *зарбали куч* дейилади. Агар $\vec{F}$ куч зарбали кучдан иборат бўлса, одатда бундай кучнинг ўзгариш қонуни маълум бўлмайди, лекин бу куч модулининг тақрибий графигини 25.1- расмдагидек тасвирлаш мумкин. Зарбали куч зарба вақтида жуда тез орта бориб, максимал қийматга эришади, сўнгра зарба даври охиригача тез суръатда камаяди. Кўпинча зарбали кучнинг батафсил ўзгариш қонунини аниқлашга эҳтиёж туғилмай, балки зарба давридаги куч импульсини аниқлаш муҳим аҳамиятга эга бўлади. Ушбу



25.1- расм.

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} \cdot dt \quad (25.1)$$

формула ёрдамида аниқланадиган вектор катталики *зарбали куч импульси* дейилади. Зарбали куч импульси 25.1- расмда тасвирланган *зарбали куч графиги* ҳамда абсцисса ўқи t билан чегараланган штрихланган юза орқали ифодаланadi.

Баъзи зарбали кучнинг таъсирини тасаввур қилиш учун зарба вақтида ўзгармас-

дан қоладиган ва зарбали куч импульси таъсирини бера оладиган ҳамда

$$F_{\text{ўрт}} \cdot \tau = S \quad (25.2)$$

формула ёрдамида аниқланадиган ўртача зарбали куч $F_{\text{ўрт}}$ киритилади.

Техникада зарба ҳодисасидан болғалаш, штамповка, таянч қозиқлар қоқишда ва бошқа соҳаларда фойдаланилади.

25.2- §. Зарба назариясининг асосий тенгламаси

Массаси m га тенг моддий нуқтага жуда кичик τ вақт ичида зарбали $\vec{F}$ куч ва зарбали бўлмаган вақтнинг функциясидан иборат $\vec{Q}$ куч таъсир этсин. Нуқтанинг зарбадан олдинги тезлигини $\vec{u}$, зарбадан кейинги тезлигини $\vec{v}$ билан белгиласак, зарба вақти τ ичида ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \int_0^\tau \vec{F} dt + \int_0^\tau \vec{Q} dt \quad (25.3)$$

формула ўринли бўлади.

(25.3) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи зарбали куч импульси $\vec{S}$ га тенг; иккинчи қўшилувчи учун Лагранжнинг ўрта қиймат ҳақидаги теоремасини қўлласак,

$$\int_0^\tau \vec{Q} dt = \vec{Q}_{\text{ўрт}} \cdot \tau.$$

Буида $\vec{Q}_{\text{ўрт}}$ билан $\vec{Q}$ кучининг $(0, \tau)$ оралиқда қабул қиладиган ўртача қиймати белгиланган. $\vec{Q}_{\text{ўрт}}$ чекли катталиқ, τ эса кичик қийматга эга бўлгани туфайли $\vec{Q}_{\text{ўрт}} \cdot \tau \approx 0$ деб олиш мумкин. Яъни зарба вақтида зарбали бўлмаган кучларнинг импульсини зарбали куч импульсига нисбатан эътиборга олмаслик мумкин. Шундай қилиб, зарба вақтида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S}, \quad (25.4)$$

яъни зарба вақтида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши нуқтага таъсир этувчи зарбали куч импульсига тенг.

(25.4) тенглама зарба назариясининг асосий тенгламаси дейилади.

Агар нуқтага бир вақтнинг ўзида бир неча зарбали кучлар таъсир этса, (25.4) да мазкур зарбали кучлар импульсларининг геометрик йиғиндиси олинади.

(25.4) тенглама дифференциал тенгламадан иборат бўлмай, балки чекли миқдорлар қатнашалиган алгебраик тенгламадан иборат.

Бу тенглама воситасида зарбали импульс маълум бўлганда зарба вақтида нуқта тезлигининг ўзгаришини ёки зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги нуқтанинг тезликлари берилганда зарбали куч импульсини аниқлаш мумкин.

Худди шунингдек, келгусида учрайдиган зарба назариясига оид барча тенгламалар дифференциал тенгламалардан иборат бўлмай, балки алгебраик (чекли) тенгламалардан ташкил топади.

(25.4) ни Декарт координата ўқларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} m u_x - m v_x &= S_x, \\ m u_y - m v_y &= S_y, \\ m u_z - m v_z &= S_z, \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

яъни зарба вақтида нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўйғалмас ўқдаги проекциясининг ўзгариши шу нуқтага таъсир этувчи зарбали куч импульсининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.

Агар зарбали куч импульси маълум бўлса, у ҳолда (25.4) дан фойдаланиб, нуқтанинг зарбадан кейинги тезлигини аниқлаймиз:

$$\vec{u} = \vec{v} + \frac{\vec{S}}{m}. \quad (25.6)$$

(25.6) тенгламадан кўраимизки, зарбадан кейинги тезлик $\vec{u}$ зарбадан олдинги тезлик $\vec{v}$ дан $\frac{\vec{S}}{m}$ га тенг чекли катталиikka фарқ қилади. Зарба вақти τ жуда кичик ва бу вақт ичида нуқтанинг тезлиги чекли миқдорга ўзгаргани туфайли зарба вақтида нуқтанинг кўчиши жуда кичик бўлади ва одатда уни эътиборга олинмайди. Шундай қилиб, зарба вақтида нуқта кўчишга улгурмайди.

25.3- §. Зарба вақтида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Айтайлик, N та моддий нуқталардан ташкил топган механик система берилган бўлсин. Зарба вақтида зарбали бўлмаган кучларнинг импульсини эътиборга олмаслик мумкин бўлгани учун система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг импульсини ташқи ва ички зарбали кучлар импульсидан ташкил топган деб қараш мумкин. Агар система ихтиёрий M_v нуқтасининг зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги тезликларини мос равишда $\vec{v}_v$ ва $\vec{u}_v$ билан белгиласак, зарба назариясининг асосий тенгламасига кўра

$$m_v \vec{u}_v - m_v \vec{v}_v = \vec{S}_v^e + \vec{S}_v^i, \quad (25.7)$$

тенглик ўринли бўлади. Бунда $\vec{S}_v^e$ ва $\vec{S}_v^i$ мос равишда ташқи ва ички зарбали кучлар импульсларини ифодалайди. Система учун бундай тенгламалардан N тасини ёзиб, уларни ҳадлаб қўшсак,

Бунда

$$\sum m_v \vec{u}_v = \vec{Q}, \quad \sum m_v \vec{v}_v = \vec{Q}_0$$

мос равишда системанинг зарбадан кейинги ва зарбадан олдинги ҳаракат миқдорларини ифодалайди. Бундан ташқари, ички кучларнинг хусусиятига кўра, $\sum \vec{S}_v^i = 0$ бўлгани учун

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_v^e. \quad (25.8)$$

Бу тенглама зарба вақтида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: зарба вақтида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши, система нуқталарига қўйилган ташқи зарбали кучлар импульсларининг йиғиндисига тенг.

Агар

$$\sum \vec{S}_v^e = 0$$

бўлса, (25.8) га кўра

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0, \quad (25.8')$$

яъни фақат ички зарбали кучларнинг импульси зарба вақтида бутун системанинг ҳаракат миқдорини ўзгартира олмайди.

(25.8) ни координата ўқларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} Q_x - Q_{0x} &= \sum S_{vx}^e, \\ Q_y - Q_{0y} &= \sum S_{vy}^e, \\ Q_z - Q_{0z} &= \sum S_{vz}^e. \end{aligned} \right\} \quad (25.9)$$

(25.9) дан кўраимизки, $\sum S_{vx}^e = 0$ бўлса,

$$Q_x = Q_{0x},$$

яъни агар ташқи зарбали куч импульсларининг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система ҳаракат миқдорининг мазкур ўқдаги проекцияси зарба вақтида ўзгармасдан қолади.

(21.6) га кўра

$$\vec{Q} = M \vec{u}_c, \quad \vec{Q}_0 = M \vec{v}_c, \quad (25.10)$$

бунда $M = \sum m_v$ бутун система массаси, $\vec{u}_c$ ва $\vec{v}_c$ лар мос равишда система массалар марказининг зарбадан кейинги ва зарбадан олдинги тезликларини ифодалайди. (25.9) ни назарда тутиб, (25.8) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M(\vec{u}_c - \vec{v}_c) = \sum \vec{S}_v^e. \quad (25.11)$$

(25.11) тенглама зарба вақтида система массалар маркази ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: зарба вақтида система массалар маркази ҳаракат миқдорининг ўзгариши система нуқталарига таъсир этувчи ташқи зарбали куч импульсларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Хусусий ҳолда $\sum \vec{S}_v^e = 0$ бўлса, (25.11) га кўра

$$\vec{u}_c = \vec{v}_c.$$

Демак, ташқи зарбали куч импульсларининг геометрик йиғиндисини нолга тенг бўлса, система массалар марказининг зарбадан кейинги ва зарбадан олдинги тезликлари ўзгармасдан қолади.

(25.11) ни координата ўқларига проекциялаб қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} M(u_{cx} - v_{cx}) &= \sum S_{vx}^e, \\ M(u_{cy} - v_{cy}) &= \sum S_{vy}^e, \\ M(u_{cz} - v_{cz}) &= \sum S_{vz}^e. \end{aligned} \right\} \quad (25.12)$$

25.4*- §. Зарба вақтида нуқта ва система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Юқорида кўрганимиздек, зарба вақтида нуқта кўчишга улгурмайди. Шу сабабли зарбадан олдинги ва кейинги нуқтанинг радиус-векторини $\vec{r}$ билан белгилаб, зарба назариясининг асосий тенгламаси (25.4) ни $\vec{r}$ га векторли кўпайтирсак, қуйидагини оламиз:

$$\vec{r} \times m \vec{u} - \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times \vec{S}.$$

Бу муносабат зарба вақтида нуқта кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифода тайди. Зарба вақтида нуқта кинетик моментининг бирор марказга нисбатан ўзгариши нуқтага қўйилган зарбали куч импульсининг мазкур марказга нисбатан моментига тенг. Бу теоремани N та нуқтадан ташкил топган системанинг ҳар бир нуқтаси учун қўлласак,

$$\vec{r}_v \times m_v \vec{u}_v - \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \vec{r}_v \times \vec{S}_v^e + \vec{r}_v \times \vec{S}_v^i, \quad (v = \overline{1, N}) \quad (25.13)$$

тенгламалар ўринли бўлади. Бунда $\vec{S}_v^e$ ва $\vec{S}_v^i$ лар мос равишда системанинг M_v нуқтасига таъсир этувчи ташқи ва ички кучлар зарбали импульсларини ифодалайди. (25.13) тенгламаларни қўшамиз:

$$\sum \vec{r}_v \times m_v \vec{u}_v - \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \sum \vec{r}_v \times \vec{S}_v^e + \sum \vec{r}_v \times \vec{S}_v^i,$$

бунда $\sum \vec{r}_v \times m_v \vec{u}_v = \vec{K}_0$, $\sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \vec{K}_0^0$ мос равишда системанинг O марказга нисбатан зарбадан кейинги ва зарбадан олдинги кинетик

моментларини; $\sum \vec{r}_v \times \vec{S}_v^e = \sum \vec{M}_O(\vec{S}_v^e)$ эса ташқи зароали кучлар импульсларининг O марказга нисбатан моментларининг йиғиндисини ифодалайди. Ички кучларнинг хусусиятига кўра, $\sum \vec{r}_v \times \vec{S}_v^i = \sum \vec{M}_O(\vec{S}_v^i) = 0$.

Шундай қилиб, қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\vec{K}_O - \vec{K}_O^o = \sum \vec{M}_O(\vec{S}_v^e). \quad (25.14)$$

Бу тенглик зарба вақтида система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: зарба вақтида система кинетик моментининг бирор марказга нисбатан ўзгариши система нуқталарига қўйилган зарбали кучлар импульсларининг мазкур марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Агар

$$\sum \vec{M}_O(\vec{S}_v^e) = 0$$

бўлса, (25.14) га кўра,

$$\vec{K}_O = \vec{K}_O^o,$$

яъни фақат ички кучларнинг импульси зарба вақтида система кинетик моментини ўзгартира олмайди.

(25.14) ни координата ўқларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} K_x - K_x^o &= \sum M_x(\vec{S}_v^e), \\ K_y - K_y^o &= \sum M_y(\vec{S}_v^e), \\ K_z - K_z^o &= \sum M_z(\vec{S}_v^e). \end{aligned} \right\} \quad (25.15)$$

Хусусий ҳолда $\sum M_x(\vec{S}_v^e) = 0$ бўлса, (25.15) га асосан $K_x = K_x^o$.

25.5- §. Зарба вақтида зарбали кучнинг иши ҳақидаги Кельвин теоремаси

21.17- § да чиқарилган формулалар ёрдамида зарбали кучларнинг зарба вақтидаги ишини бевосита ҳисоблаш анча мураккабдир. Чунки зарбали кучлар жуда катта қийматга эришади ҳамда зарба вақтида система нуқталарининг кўчиши эътиборга олинмайдиган даражада кичик бўлади. Зарба назариясининг асосий тенгламаси (25.4) дан фойдаланиб, зарбали кучларнинг зарба вақтидаги ишини ҳисоблаш мумкин.

(25.4) ни дастлаб $\vec{u}$ га, кейин $\vec{v}$ га кўпайтирсак,

$$\begin{aligned} m\vec{u}^2 - m\vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{S} \cdot \vec{u}, \\ m\vec{u} \cdot \vec{v} - m\vec{v}^2 &= \vec{S} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Бу тенгликларни қўшиб, 2 га бўлсак,

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \vec{S} (\vec{u} + \vec{v}). \quad (25.16)$$

Нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан (25.16) тенгликнинг чап томони унга таъсир этувчи $\vec{F}$ кучининг иши A га тенг. Шу сабабли

$$A = \frac{1}{2} \vec{S} (\vec{u} + \vec{v}). \quad (25.17)$$

(25.17) тенглама кучнинг ишини мазкур куч импульси ва нуқтанинг ўртача тезлиги орқали аниқлайдиган *Кельвин теоремасини* ифодалайди: *бирор вақт оралиғида нуқтага қўйилган кучнинг иши, кучнинг мазкур вақт оралиғидаги импульси билан нуқтанинг бошланғич ва охири тезликлари йиғиндиси скаляр кўпайтмасининг ярмига тенг.*

Кельвин теоремасини нуқтанинг ҳар қандай ҳаракатларига ҳам қўллаш мумкин.

Механик система учун Кельвин теоремасини келтириб чиқаришда системанинг ҳар бир нуқтаси учун (25.17) га ўхшаш тенгламаларни ёзиб, улар ўзаро қўшилади:

$$\sum A_v = \frac{1}{2} \sum \vec{S}_v (\vec{u}_v + \vec{v}_v). \quad (25.18)$$

Бунда $\vec{S}_v$ билан системанинг M_v нуқтасига таъсир этувчи ташқин ва ички кучлар импульсларининг геометрик йиғиндиси белгиланган: $\vec{S}_v = \vec{S}_v^e + \vec{S}_v^i$.

25.6-§. Жисмнинг қўзғалмас сиртга урилишидаги тўғри зарба. Тикловчи коэффициентни тажриба йўли билан аниқлаш

Агар жисм массалар марказининг тезлиги қўзғалмас сиртга урилиши олдида сирт билан жисм уриладиган нуқтада қўзғалмас сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналса, бундай зарба *тўғри зарба* дейилади.

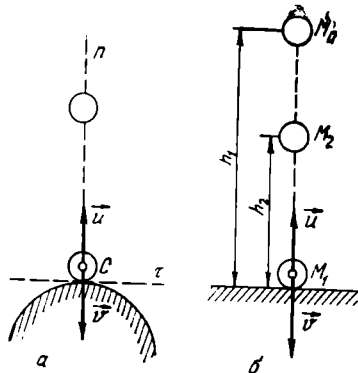
Айтайлик, бошланғич тезликсиз эркин тушаётган ва массаси m га тенг шар қўзғалмас горизонтал текисликка (ёки урилиш нуқтасидаги нормаль вертикал юқорига йўналган қўзғалмас сиртга) $\vec{v}$ тезлик билан урилсин (25.2-расм). Бундай тўғри зарбада шарнинг зарбадан кейинги тезлиги $\vec{u}$ сиртга ўтказилган Cn нормаль бўйича юқорига йўналади.

Зарба вақтини икки даврга бўлиш мумкин: биринчи даврни τ_1 билан белгиласак, бу вақт мобайнида шарнинг тезлиги нолга тенг бўлгунча, у деформацияланади; иккинчи τ_2 даврида эса эластиклик кучи таъсирида, бутунлай бўлмаса-да, шар ўз шаклини тиклайди

ва u тезлик билан сиртдан қапчийди. Шу сабабли зарба вақтини τ билан белгиласак, $\tau = \tau_1 + \tau_2$ бўлади.

Шар қўзғалмас текисликка урилганда бўладиган тўғри зарбада шарнинг зарбадан кейинги ва олдинги тезлиги миқдорларининг ўзаро нисбатига тенг катталик зарбадаги *тиклосчи коэффициент* дейилади ва k билан белгиланади:

$$k = \frac{u}{v}. \quad (25.19)$$



25.2 расм.

Агар $k = 1$ бўлса, бундай зарба *абсолют эластик зарба* дейилади. Бу

ҳолда $u = v$ бўлиб, зарба натижасида шарнинг тезлиги зарбадан олдинги тезлик йўналишига қарама-қарши йўналади.

Агар $k = 0$ бўлса, бундай зарба *абсолют эластик бўлмаган зарба* дейилади. Бундай зарбадан кейинги шарнинг тезлиги $u = 0$ бўлади.

Тикловчи коэффициент $0 < k < 1$ бўлган ҳоллардаги зарба *эластик зарба* дейилади.

Зарба вақтининг биринчи даврида силлиқ сиртнинг шарга таъсир этувчи ўзгарувчи зарбали реакция кучини $\vec{N}_1$, иккинчи давридагисини $\vec{N}_2$ билан белгилайлик. У ҳолда ҳар иккала вақт оралиғи учун зарба назариясининг асосий тенгламаси (25.4) ни тузиб, нормалга проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} 0 - (-mv) &= S_1, \\ mv - 0 &= S_2 \end{aligned} \right\}$$

ҳосил бўлади, бунда $S_1 = \int_0^{\tau_1} N_1 dt$ ва $S_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \tau_2} N_2 dt$ лар биринчи ва иккинчи зарба даврларига мос бўлган реакция кучларининг зарбали импульсларини ифодалайди. Зарбали бўлмаган кучларнинг, масалан, оғирлик кучининг зарба вақтидаги импульсини эътиборга олмаймиз. Шундай қилиб,

$$mv = S_1; \quad mv = S_2$$

тенгликлар ўринли бўлади. (25.19) ни назарда тутиб, бу тенгликлардан тикловчи коэффициент ва зарбали импульслар орасидаги қуйидаги муносабатни олампиз:

$$k = \frac{S_2}{S_1}, \quad (25.20)$$

яъни шар қўзғалмас сиртга урилгандаги тўғри зарбада зарба вақтининг иккинчи даврига мос зарбали куч импульсининг биринчи

давридаги зарбали кўч импульсига нисбати тикловчи коэффициентга тенг бўлади.

Тикловчи коэффициент тажриба усулида қуйидагича аниқланади. Синалаётган жисм матерпалидан ясалган шарча h_1 баландликдан худди шундай материалдан (ёки бошқа синалувчи материалдан) ясалган салмоқли горизонтал плитига бошлангич тезликсиз ташланади (25.2-расм, б). Зарбадан кейин шарча h_2 баландликка кўтарилади.

M_0/M_1 участка учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаб, шарчанинг зарбадан олдинги тезлиги v ни аниқлаймиз: $v = \sqrt{2gh_1}$.

Худди шунингдек, M_1/M_2 участка учун бу теоремани қўлласак, шарчанинг зарбадан кейинги тезлиги учун

$$u = \sqrt{2gh_2}$$

формула ўринли бўлади. u ва v нинг қийматларини (25.19) га қўйиб тикловчи коэффициентни аниқлаймиз.

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (25.21)$$

Қуйидаги жадвалда катта тезлик билан тўқнашувчи айрим жисмларнинг тикловчи коэффициентлари қиймати берилган:

Тўқнашувчи жисмлар	k
Ёғоч шар резинага урилганда	0,26
Ёғоч шарлар ўзаро урилганда	0,50
Пўлат шарлар ўзаро урилганда	0,56
Шиша шарлар ўзаро урилганда	0,94

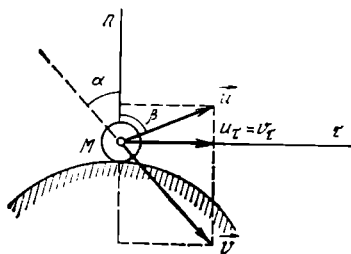
Агар шар қўзғалмас сиртга урилган пайтда унинг массалар марказининг тезлиги урилиш нуқтасида қўзғалмас сиртга ўтказилган нормаль билан α бурчак ташкил этса, бундай зарба *қийишқ зарба* дейилади (25.3-расм). $\alpha = 0$ бўлса, тўғри зарба содир бўлади.

α бурчак *тушиш бурчаги* дейилади. Умумий ҳолда шар сиртга урилгандан кейин унга ўтказилган Mn нормалга β бурчак остида

$\vec{u}$ тезлик билан қапчийди. β бурчакка *қайтиш бурчаги* дейилади.

Агар сиртни идеал силлиқ сиртдан иборат деб қарасак, зарбали реакция кучи сиртга ўтказилган нормаль бўйлаб йўналади ва унинг уринмадаги проекцияси нолга тенг бўлади. Бу ҳолда зарба назариясининг асосий тенгламаси (25.4) ни M_τ уринмага проекцияласак,

$$m\vec{u}_\tau - m\vec{v}_\tau = 0$$



25.3- расм.

$$u_{\tau} = v_{\tau}. \quad (25.22)$$

Қийишқ зарбада

$$k = \frac{|u_n|}{|v_n|} \quad (25.23)$$

га тенг катталиқка *тиқловчи коэффициент* дейилади. Бунда $|u_n|$ ва $|v_n|$ орқали $\vec{u}$ ва $\vec{v}$ тезликларнинг нормалдаги проекцияларининг абсолют қиймати белгиланган.

(25.23) дан

$$|u_n| = k |v_n|. \quad (25.24)$$

(25.22) ва (25.24) га асосан шар марказининг зарбадан кейинги тезлиги қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{u_{\tau}^2 + u_n^2} = \sqrt{v_{\tau}^2 + k^2 v_n^2} = \sqrt{(v \sin \alpha)^2 + (kv \cos \alpha)^2} = \\ &= v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

25.3- расмдан

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\tau}}{|v_n|}; \operatorname{tg} \beta = \frac{v_{\tau}}{|u_n|} = \frac{v_{\tau}}{k |v_n|} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha.$$

Шундай қилиб,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha. \quad (25.26)$$

Бу формула воситасида қайтиш бурчаги билан тушиш бурчаги орасидаги муносабат аниқланади.

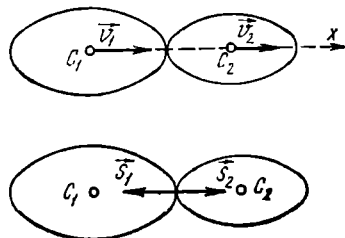
25.7-§. Иккита жисмнинг тўғри марказий зарбаси

Агар иккита жисм бир-бирнга уриладиган нуқталаридаги умумий нормаль жисмларнинг массалар маркази орқали ўтса ҳамда зарба олдидаги жисмларнинг тезликлари мазкур умумий нормаль бўйича йўналса, бундай зарба *тўғри марказий зарба* дейилади.

Массалари m_1 ва m_2 га тенг иккита жисм зарбадан олдин ҳам, кейин ҳам илгариларга ҳаракатда бўлсин. Бундай жисмларнинг тўғри марказий зарбасини текширалиш.

Жисмларнинг зарбадан олдинги тезликлари $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$ га тенг бўлиб, жисмлар урилганда уриниш нуқтасида ўтказилган умумий нормаль бўйича йўнаلسин (25.4- расм).

Агар жисмлар бир томонга ҳаракатланса, зарба содир бўлиши учун $v_1 > v_2$ шарт бажарилиши керак. Жисмларнинг массаси, зарбадан олдинги тезликлари ва зарбадаги *тиқловчи коэффициент* маълум бўлганда зарба-



25.4- расм.

дан кейинги жисмлар массалар марказининг тезлиги ва зарбали импульсни аниқлаймиз. Ташқи зарбали импульслар таъсир этмагани туфайли (25.8') га асосан қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2,$$

яъни системанинг зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги ҳаракат миқдорлари ўзаро тенг бўлади. Бу векторли тенгликни жисмларнинг массалар марказини туташтирувчи C_1x ўққа проекцияласак,

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}. \quad (25.27)$$

Бу тенгламада u_{1x} ва u_{2x} иккита номаълум қатнашадн. Агар тикловчи коэффициент берилган бўлса, бу номаълумларни аниқлаш учун яна битта қўшимча тенгламани олиш керак. Зарбадан кейин иккинчи жисмнинг тезлиги биринчисига нисбатан ортгани туфайли ($u_{1x} < u_{2x}$) жисмларнинг тўғри зарбасида тикловчи коэффициент жисмларнинг зарбадан кейинги ва зарбадан олдинги нисбий тезликларининг нисбатига тенг бўлади

$$k = \frac{|u_{1x} - u_{2x}|}{|v_{1x} - v_{2x}|} = - \frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}, \quad (25.28)$$

бунда $v_{1x} > v_{2x}$ деб қараймиз. (25.28) дан

$$u_{2x} - u_{1x} = k (v_{1x} - v_{2x}) \quad (25.29)$$

тенгликни оламиз. (25.27) ва (25.29) тенгламаларни биргаликда ечиб, жисмларнинг зарбадан кейинги тезликларини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - (1 + k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}), \\ u_{2x} &= v_{2x} + (1 + k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}). \end{aligned} \right\} \quad (25.30)$$

Илгарилама ҳаракатдаги жисмлар урилганда ҳосил бўладиган $\vec{S}_1$ ва $\vec{S}_2$ ($\vec{S}_1 = -\vec{S}_2$) зарбали импульсларни аниқлаш учун жисмларнинг бирортаси, масалан, биринчиси учун (25.3) ни қўллаймиз. У ҳолда иккита жисмдан ташкил топган система учун ички ҳисобланган зарбали импульс биринчи жисм учун ташқи импульсдан иборат бўлади. Натижада

$$m_1 (u_{1x} - v_{1x}) = S_{1x}; \quad S_{1x} = -S_{2x} \quad (25.31)$$

ёки (25.30) га асосан

$$S_{1x} = -S_{2x} = -(1 + k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}). \quad (25.32)$$

Агар жисмларнинг иккинчиси қўзғалмас бўлса, у ҳолда (25.30) ва (25.32) да $v_{2x} = 0$ бўлгани туфайли

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} v_{1x}, \\ u_{2x} &= (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} v_{1x}, \\ S_{1x} &= -S_{2x} = -(1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_{1x}. \end{aligned} \right\} \quad (25.33)$$

Қуйидаги хусусий ҳолларни кўрамыз:

1. Абсолют эластик бўлмаган зарба ($k=0$). Бу ҳолда (25.30) га кўра

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}, \quad (25.34)$$

яъни *абсолют эластик бўлмаган зарбадан кейин жисмлар бир хил тезлик билан ҳаракатланади*, бошқача айтганда, абсолют эластик бўлмаган зарба натижасида иккала жисм бир-биридан ажралмай, бир хил тезлик билан ҳаракатланади.

Бу ҳолда зарбали куч импульси учун

$$S_{1x} = -S_{2x} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}) \quad (25.35)$$

формула ўринли бўлади.

2. Абсолют эластик зарба ($k=1$). Бу ҳолда (25.30) ва (25.32) га асосан

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - \frac{2m_2}{m_1+m_2} (v_{1x} - v_{2x}), \\ u_{2x} &= v_{2x} + \frac{2m_1}{m_1+m_2} (v_{1x} - v_{2x}), \\ S_{1x} &= -S_{2x} = -2 \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (v_{1x} - v_{2x}). \end{aligned} \right\} \quad (25.36)$$

(25.35) ва (25.36) формулаларни солиштириб, абсолют эластик зарбадаги зарбали импульс миқдори абсолют эластик бўлмаган зарбадаги импульс миқдорига нисбатан икки баравар катта бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

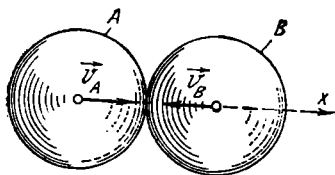
Жисмларнинг массалари тенг ($m_1 = m_2$) бўлган хусусий ҳолда (25.36) дан қуйидагини оламиз:

$$u_{1x} = v_{2x}, \quad u_{2x} = v_{1x}.$$

Яъни абсолют эластик зарбада иккита бир хил массали жисмлар тўқнашиши натижасида уларнинг тезликлари алмашади. Агар иккинчи жисм тинч ҳолатда бўлиб, биринчи жисм унга келиб урилса,

$$u_{1x} = 0, \quad u_{2x} = v_{1x},$$

яъни зарбадан кейин иккинчи жисм худди биринчи жисм эга бўлган тезлик билан ҳаракатланади; биринчи жисм эса тинч ҳолатда бўлади.



25.5- расм.

25.1- масала. Бир хилдаги иккита A ва B эластик шар бир-бирига қараб ҳаракатланади. Урилишдан олдинги тезликлар нисбати қандай бўлганда A шар урилишдан кейин тўхтаб қолади? Зарба вақтидаги тикловчи коэффициент k га тенг.

Ечиш. x ўқни шарлар марказини туташтирувчи чизик бўйича $\vec{v}_A$ йўналган томонга йўналтирамиз (25.5- расм). У ҳолда (25.30) формуланинг биринчисиди $u_{1x} = 0$, $m_1 =$

$= m_2 = m$, $v_{1x} = v_A$, $v_{2x} = -v_B$ бўлишини эътиборга олсак,

$$0 = v_A - \frac{1}{2} (1 + k) (v_A + v_B),$$

бундан шарларнинг урилишдан олдинги тезликлари нисбатини аниқлаймиз:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{1 + k}{1 - k}.$$

25.8- §. Зарба вақтида кинетик энергиянинг йўқолиши. Карно теоремаси

Иккита жисмнинг тўғри марказий зарбасида $|S_{1x}| = |S_{2x}| = S_x$ белгилаш киритсак, у ҳолда ҳар қайси жисмга таъсир этувчи зарбали импульслар ва тикловчи коэффициент (25.31) ва (25.28) га кўра қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned} m_1 (u_{1x} - v_{1x}) &= S_x, \\ m_2 (u_{2x} - v_{2x}) &= -S_x, \\ k &= \frac{u_{2x} - u_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}}. \end{aligned} \quad (25.37)$$

(25.29) ни назарда тутиб, (25.37) нинг биринчисини $u_{1x} + kv_{1x}$ га, иккинчисини $u_{2x} + kv_{2x}$ га кўпайтириб, олинган тенгламаларни қўшсак,

$$m_1 (u_{1x} - v_{1x}) (u_{1x} + kv_{1x}) + m_2 (u_{2x} - v_{2x}) (u_{2x} + kv_{2x}) = 0. \quad (25.38)$$

Бу тенгламани бошқача кўринишда ёзиш учун қуйидаги айниятлардан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} u_{1x} (u_{1x} - v_{1x}) &= \frac{1}{2} (u_{1x}^2 - v_{1x}^2) + \frac{1}{2} (u_{1x} - v_{1x})^2, \\ kv_{1x} (u_{1x} - v_{1x}) &= \frac{1}{2} k (u_{1x}^2 - v_{1x}^2) - \frac{1}{2} k (u_{1x} - v_{1x})^2, \end{aligned}$$

уларни қўшсак,

$$\begin{aligned} (u_{1x} - v_{1x}) (u_{1x} + kv_{1x}) &= -\frac{1}{2} (1 + k) (u_{1x}^2 - v_{1x}^2) + \\ &+ \frac{1}{2} (1 - k) (u_{1x} - v_{1x})^2. \end{aligned} \quad (25.39)$$

Худди шунингдек, қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$(u_{2x} - v_{2x})(u_{2x} + kv_{2x}) = \frac{1}{2}(1+k)(u_{2x}^2 - v_{2x}^2) + \frac{1}{2}(1-k)(u_{2x} - v_{2x})^2. \quad (25.40)$$

(25.39) ва (25.40) ни эътиборга олиб, (25.38) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{2}(1+k)[(m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2) - (m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2)] + \frac{1}{2}(1-k)[m_1 (u_{1x} - v_{1x})^2 + m_2 (u_{2x} - v_{2x})^2] = 0. \quad (25.41)$$

Бунда

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2),$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2)$$

лар мос равишда системанинг зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги кинетик энергияларини ифодалайди:

$$T = \frac{1}{2}[m_1 (u_{1x} - v_{1x})^2 + m_2 (u_{2x} - v_{2x})^2]$$

катталиқ эса зарба натижасида йўқотилган тезликка мос кинетик энергияни ифодалайди.

Юқоридаги белгилашларни назарда тутиб, (25.41) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T_1 - T_2 = \frac{1-k}{1+k} T. \quad (25.42)$$

(25.42) тенглик *иккита жисмнинг тўғри марказий эластик зарбасида кинетик энергиянинг йўқолишига оид Карно теоремасини* ифодалайди: *эластик зарбада йўқотилган кинетик энергия, йўқотилган тезликка мос кинетик энергиянинг $\frac{1-k}{1+k}$ қисмига тенг.*

Абсолют эластик зарба учун $k = 1$ ва

$$T_1 = T_2,$$

яъни абсолют эластик зарбада кинетик энергия йўқолмайди.

Абсолют эластик бўлмаган зарба учун $k = 0$ бўлади ва

$$T_1 - T_2 = T \quad (25.43)$$

формула ўринли бўлади. Бу ҳолда кинетик энергия максимал даражада йўқолади (потенциал ва иссиқлик энергияларига айланади).

(25.43) тенглик *абсолют эластик бўлмаган зарба учун Карно теоремасини* ифодалайди: *абсолют эластик бўлмаган зарбада йўқотилган кинетик энергия йўқотилган тезликка мос кинетик энергияга тенг.*

Абсолют эластик бўлмаган зарба натижасида жисмлар бир хил u_x тезликка эга бўлади:

$$u_{1x} = u_{2x} = u_x.$$

Шу сабабли (25.37) нинг биринчи иккита тенгламасини

$$\left. \begin{aligned} m_1 (u_x - v_{1x}) &= -S_x, \\ m_2 (u_x - v_{2x}) &= S_x \end{aligned} \right\} \quad (25.44)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламалардан фойдаланиб, u_x ва S_x ларни аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}, \\ S_x &= \frac{m_1 m_2 (v_{1x} - v_{2x})}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \right\} \quad (25.45)$$

(25.44) ни эътиборга олиб, йўқотилган тезликка моа кинетик энергия учун

$$T = \frac{S_x^2}{2m_1} + \frac{S_x^2}{2m_2} = \frac{S_x^2}{2m_1 m_2} (m_1 + m_2) \quad (25.46)$$

ифодани оламиз. (25.46) га S_x нинг қийматини (25.45) дан келтириб қўйсак,

$$T = \frac{m_1 m_2 (v_{1x} - v_{2x})^2}{2 (m_1 + m_2)}. \quad (25.47)$$

T нинг бу қийматини (25.43)га қўйиб, абсолют эластик бўлмаган жисм учун Карно теоремасини яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2 (v_{1x} - v_{2x})^2}{2 (m_1 + m_2)}. \quad (25.48)$$

(25.48) ни иккинчи жисм қўзғалмас бўлган ҳол учун қўллаймиз. У ҳолда $v_{2x} = 0$ бўлгани сабабли

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2 v_{1x}^2}{2 (m_1 + m_2)}$$

ёки кўрилатган ҳолда $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2$ бўлгани учун

$$T_1 - T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1. \quad (25.49)$$

Шундай қилиб, иккинчи жисм қўзғалмас бўлганда кинетик энергиянинг сарф бўлиши биринчи жисм кинетик энергиясининг $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ қисмига тенг бўлади.

Бу формулалардан фойдаланиб, сандон устига қўйилган қиздирилган металлга урилатган болғанинг фойдали иш коэффициентини аниқлаш мумкин. Болғанинг массаси m_1 , қиздирилган металл ва

сандоннинг биргаликдаги массаси m_2 га тенг бўлсин. Қиздирилган металлни абсолют эластик бўлмаган жисм деб қараш мумкин. Бу ҳолда металлни деформациялаш учун сарф бўлган $T_1 - T_2$ йўқотилган кинетик энергия фойдали ҳисобланади; $T_1 - T_2$ ни болганинг кинетик энергияси T_1 га нисбати болганинг фойдали иш коэффициентини ифодалайди:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (25.50)$$

(25.50) дан кўраимизки, болганинг массаси сандон массасига нисбатан етарлича кичик бўлганда унинг фойдали иш коэффициенти катта бўлади.

25.2-масала. Тобланаётган металл билан биргаликдаги массаси $m_2 = 240$ т бўлган сандон устига массаси $m_1 = 10$ т бўлган болга муҳраси $v = 5$ м/с тезлик билан тушади. Бунда тикловчи коэффициент $k = 0,3$ га тенг эластик зарба содир бўлади деб қараб, болганинг фойдали иш коэффициенти аниқлансин.

Ечиш. Болганинг муҳраси сандон устидаги тобланаётган металл устига тушганда тўғри марказий зарба содир бўлади деб қараймиз. Ох ўқни болганинг ҳаракат йўналиши бўйича, яъни вертикал пастга йўналитирамиз. У ҳолда болганинг зарбадан олдинги тезлиги $v_{1x} = v$ ҳамда сандон қўзғалмас бўлгани учун унинг зарбадан олдинги тезлиги $v_{2x} = 0$ бўлади. (25.33) га асосан, болга ва сандоннинг зарбадан кейинги тезликлари u_{1x} ва u_{2x} ларни аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} u_{1x} &= v - (1 + k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{(m_1 - km_2)}{m_1 + m_2} v, \\ u_{2x} &= (1 + k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} v. \end{aligned} \quad (1)$$

(1) ни эътиборга олиб, (25.41) формула ёрдамида йўқотилган тезликка мос системанинг кинетик энергиясини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} \left[\frac{(m_1 - km_2) v}{m_1 + m_2} - v \right]^2 + \frac{m_2}{2} \left[\frac{m_1 (1 + k) v}{m_1 + m_2} \right]^2 = \\ &= \frac{m_1}{2} \frac{v^2 m_2^2 (1 + k^2)}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 (1 + k^2) v^2}{2 (m_1 + m_2)^2} = \frac{(1 + k^2) m_1 m_2 v^2}{2 (m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

(25.42) га биноан, йўқотилган кинетик энергия учун

$$T_1 - T_2 = \frac{1 - k}{1 + k} T = \frac{(1 - k^2) m_1 m_2 v^2}{2 (m_1 + m_2)}$$

ифодани оламиз. Бу масалада металлни деформациялаш учун сарф бўлган $T_1 - T_2$ йўқотилган кинетик энергия фойдали ҳисобланади. Шу сабабли болганинг фойдали иш коэффициенти қуйидагича аниқланади:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

бунда $T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ — болганинг кинетик энергиясига тенг барча сарф бўлган энергия.

Шундай қилиб, болганинг фойдали иш коэффициенти

$$\eta = \frac{(1 - k^2) m_2}{m_1 + m_2} = \frac{[1 - (0,3)^2] \cdot 240 \cdot 10^3}{(10 + 240) \cdot 10^3} \approx 0,874.$$

25.9* - §. Зарбали кучларнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи ва текис параллел ҳаракатдаги жисмга таъсири

Айтайлик, қаттиқ жисм қўзғалмас z ўқ атрофида ω_0 бурчак тезлик билан айланаётган бўлсин. Бундай жисмга зарбали кучнинг таъсир этиши натижасида унинг бурчак тезлиги қандай ўзгаришини кўриб чиқамиз. Шу мақсадда зарба вақтида z ўққа нисбатан кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (25.15) нинг учинчи тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\text{қ} \quad K_z - K_z^0 = \sum M_z(\vec{S}_v^e). \quad (25.51)$$

(25.54) га асосан, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айланиш ўқиға нисбатан кинетик моменти

$$K_z = I_z \omega, \quad K_z^0 = I_z \omega_0$$

формулалар ёрдамида аниқланади. K_z ва K_z^0 нинг бу қийматларини (25.51) га қўйсак,

$$I_z (\omega - \omega_0) = \sum M_z(\vec{S}_v^e). \quad (25.52)$$

Бундан

$$\omega - \omega_0 = \frac{\sum M_z(\vec{S}_v^e)}{I_z}. \quad (25.53)$$

Бинобарин, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмга ташқи зарбали кучлар таъсир этиши натижасида унинг бурчак тезлигининг ўзгариши, ташқи зарбали куч импульсларининг мазкур ўққа нисбатан моментлари йиғиндисининг худди шу ўққа нисбатан жисм — инерция моментига нисбатига тенг.

Зарбали кучларнинг текис параллел ҳаракатдаги жисмга таъсирини аниқлаш учун жисмнинг массалар маркази ҳаракатланадиган текисликда x ва y ўқлари ўтказамиз. Жисмнинг текис параллел ҳаракатини жисм массалар марказининг итгарилма ҳаракати ва массалар маркази оқати ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан айланма ҳаракатларнинг мажмуасидан иборат деб қараш мумкин.

Айтайлик, массалар марказининг зарбадан олдинги тезлиги $\vec{v}_c$, жисмнинг бурчак тезлиги эса ω_0 га тенг бўлсин. У ҳолда (24.12) га асосан массалар маркази тезлигининг x ва y ўқлари бўйича ўзгариши аниқланадиган қўйидаги иккита тенгламани оламиз

$$\left. \begin{aligned} m(u_{Cx} - v_{Cx}) &= \sum S_{vx}^e, \\ m(u_{Cy} - v_{Cy}) &= \sum S_{vy}^e \end{aligned} \right\} \quad (25.54)$$

(25.54) да S_{vx}^e ва S_{vy}^e лар $\vec{S}_v^e$ ташқи зарбали импульсининг x ва y ўқлардаги проекцияларини ифодалайди.

Агар жисмнинг массалар маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда z ўқни ўтказсак, зарба вақтида z ўқ кўчишга улгурмайди, шу сабабли z ўққа нисбатан зарба вақтида кинетик моментнинг ўзгариши (25.52) га асосан

$$I_{Cz}(\omega - \omega_0) = \sum M_{Cz}(\vec{S}_i^*) \quad (25.55)$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Бу ерда I_{Cz} — массалар маркази билан биргаликда ҳаракатланувчи ўққа нисбатан жисмнинг инерция момёнти; $M_{Cz}(\vec{S}_i^*)$ — ташқи зарбали куч импульси $\vec{S}_i^*$ нинг C_z ўққа нисбатан моментини ифодалайди.

Шундай қилиб, *ташқи зарбали импульслар таъсирида текио параллел ҳаракатдаги жисм массалар марказининг зарбадан кейинги тезлиги (25.54), жисм бурчак тезлигининг зарба вақтидаги ўзгариши (25.55) формулалар ёрдамида аниқланади.*

25.10*-§. Зарба маркази

Айтайлик, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг бирор M нуқтасига ташқи зарбали импульс $\vec{S}$ таъсир этсин. Бу импульс таъсирида таянч нуқталарида $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ зарбали реакция импульслари ҳосил бўлади ва таянч нуқталарига зарбали босимлар таъсир этади.

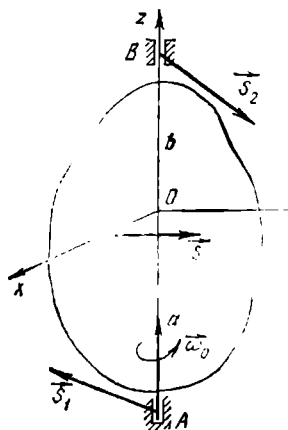
Координата ўқларини қуйидагича танлаймиз: z ўқни зарбадан олдинги жисмнинг бурчак тезлиги ω_0 бўйлаб йўналтирамиз; Oxy текисликни зарбали импульс қўйилган M нуқта орқали, x ўқни OM бўйлаб йўналтирамиз (25.6-расм). У ҳолда M нуқтанинг координаталари қуйидагига тенг бўлади:

$$x_M = OM = h, \quad y_M = 0, \quad z_M = 0.$$

Зарба вақтида жисм кўчишга улгурмагани туфайли жисм билан боғланган $Oxyz$ координаталар системасини зарба вақтида қўзғалмас деб қараш мумкин.

A ва B таянчлардан Oxy текислигигача бўлган масофаларни мос равишда a ва b билан белгилаймиз.

O нуқтага нисбатан зарба вақтида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ва кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремаларни ифодаловчи (25.10) ва (25.14) тенгламаларни тузимиз:



25.6- расм.

$$\left. \begin{aligned} \vec{Q} - \vec{Q}_0 &= \vec{S} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2, \\ K_0 - \vec{K}_0^0 &= \vec{M}_0(\vec{S}) + \vec{M}_0(\vec{S}_1) + \vec{M}_0(\vec{S}_2). \end{aligned} \right\} \quad (25.56)$$

Айтайлик, жисм зарбадан олдин ва зарбадан кейин 25.6 - расмда тасвирланган $\vec{\omega}_0$ вектори йўналишига мос айлан син. У ҳолда

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega, \\ \omega_{0x} &= \omega_{0y} = 0, \quad \omega_{0z} = \omega_0 \end{aligned}$$

ва

$$\begin{aligned} u_{Cx} &= -\omega y_C, \quad u_{Cy} = \omega x_C, \quad u_{Cz} = 0, \\ v_{Cx} &= -\omega_0 y_C, \quad v_{Cy} = \omega_0 x_C, \quad v_{Cz} = 0, \end{aligned}$$

(22.35) га кўра,

$$\begin{aligned} K_x &= -I_{zx}\omega, \quad K_y = -I_{yz}\omega, \quad K_z = I_z\omega, \\ K_x^0 &= -I_{zx}\omega_0, \quad K_y^0 = -I_{yz}\omega_0, \quad K_z^0 = I_z\omega_0. \end{aligned}$$

Бу муносабатларни эътиборга олиб, (25.56) ни координата ўқ-ларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} -My_C(\omega - \omega_0) &= S_x + S_{1x} + S_{2x}, \\ Mx_C(\omega - \omega_0) &= S_y + S_{1y} + S_{2y}, \\ 0 &= S_z + S_{1z}, \\ -I_{zx}(\omega - \omega_0) &= aS_{1y} - b \cdot S_{2y}, \\ -I_{yz}(\omega - \omega_0) &= -a \cdot S_{1x} + bS_{2x} - h \cdot S_z, \\ I_z(\omega - \omega_0) &= hS_y. \end{aligned} \right\} \quad (25.57)$$

(25.57) тенгламаларнинг биринчи бештаси воситасида зарбали реакция импульсларининг проекциялари: S_{1x} , S_{1y} , S_{1z} , S_{2x} ва S_{2y} лар аниқланади; охириги тенглама воситасида жисмнинг зарба вақтидаги бурчак тезлигининг ўзгариши аниқланади.

Қандай шартлар бажарилганда ташқи зарбали импульслар таъсир этганда таянч нуқталарида зарбали реакция импульси ҳосил бўлмаслигини кўриб чиқамиз. Бу ҳолда S_{1x} , S_{1y} , S_{1z} , S_{2x} , S_{2y} лар нолга тенг бўлиши керак. Натижада (25.57) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} -My_C(\omega - \omega_0) &= S_x, \\ Mx_C(\omega - \omega_0) &= S_y, \\ 0 &= S_z, \\ -I_{zx}(\omega - \omega_0) &= 0, \\ -I_{yz}(\omega - \omega_0) &= -hS_z, \\ I_z(\omega - \omega_0) &= h \cdot S_y. \end{aligned} \right\} \quad (45.58)$$

(25.58) дан таянч нуқталарида зарбали реакция кучлари ҳосил бўлмайдиغان изланаётган шартларни оламиз:

1) (25.58) нинг учинчи тенгламасига кўра зарбали куч импульси айланиш ўқиға перпендикуляр бўлиши керак;

2) $S_z = 0$ бўлгани учун (25.58) нинг тўртинчи ва бешинчи тенгламаларига асосан, $I_{zx} = I_{zy} = 0$, яъни Oz айланиш ўқи бу ўқнинг Oxy текислиги билан кесишган нуқтасида бош инерция ўқидан иборат бўлиши керак;

3) (25.58) нинг биринчи ва иккинчи тенгламаларидан кўрамизки, $x_C S_x + y_C S_y = 0$ ёки $\vec{r}_C \cdot \vec{S} = 0$ бўлиши керак; бошқача айтганда, жисм масса марказининг радиус-вектори $\vec{r}_C$ ҳамда зарбали импульс $\vec{S}$ векторлари ўзаро перпендикуляр бўлиши керак, яъни зарбали куч импульси айланиш ўқи ва массалар маркази орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр йўналиши зарур;

4) (25.58) нинг иккинчи ва олтинчи тенгламаларига биноан, қуйидаги тенглик ўринли бўлиши керак:

$$x_C \cdot h = \frac{I_z}{M} = \rho^2, \quad (25.59)$$

бунда ρ жисмнинг айланиш ўқиға нисбатан инерция радиусини ифодалайди. (25.58) формула ёрдамида зарбали импульс қўйиладиган M нуқтанинг ҳолати аниқланади:

$$h = \frac{I_z}{M x_C}. \quad (25.60)$$

Юқоридаги шартларни қаноатлантирадиган M нуқта зарба маркази дейилади.

Агар жисм моддий симметрия текислиги Π га эга бўлса, юқоридаги шартлар соддалашади. Бу ҳолда айланиш ўқи моддий симметрия текислиги Π билан кесишган O нуқтада инерция бош ўқидан иборат бўлади ҳамда жисмнинг оғирлик маркази C ҳам Π текисликда ётади (25.7-расм). Кўрилатган хусусий ҳолда зарба таянч нуқталарига таъсир этмаслиги учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

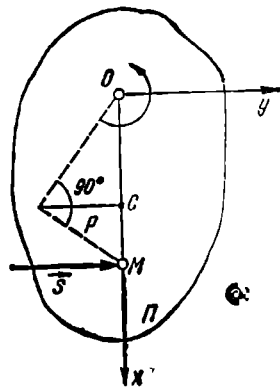
1) $\vec{S}$ зарбали импульс Π текисликда ётши ва OC га перпендикуляр бўлиши керак;

2) зарбали импульс $\vec{S}$ нинг таъсир чизигидан айланиш ўқиғача бўлган масофа

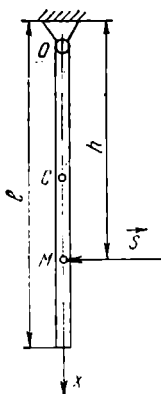
$$h = OM = \frac{\rho^2}{x_C} = \frac{I_z}{M x_C} \quad (25.61)$$

формула ёрдамида аниқланади. Бунда ρ билан жисмнинг айланиш ўқиға нисбатан инерция радиуси белгиланган.

(25.61) дан кўрамизки, зарба маркази айланиш ўқиға мос бўлган силкиниш маркази (22.4-§) билан устма-уст тушиши керак.



25.7- расм.



25.8- расм.

Зарба марказини аниқлаш техникада кўп қўлланилади. Масалан, материалларнинг мустаҳкамлигини динамик синаш учун қўлланиладиган зарба машинасида зарба марказини аниқлаш алоҳида аҳамиятга эга.

25.3- масала. Зарба марказини аниқлашда ишлатиладиган асбобда массаси m ва узунлиги l га тенг стержень унинг O учидан унга перпендикуляр равишда ўтувчи қўзғалмас горизонтал ўқ атрофида айлана олади. 25.8-расмда тасвирланган мувозанат ҳолатида зарба импульси стержень ва айланиш ўқи га перпендикуляр йўналган зарба берилади. Зарба маркази ва стерженнинг зарбалаб кейинги бурчак тезлиги аниқлансин.

Ечиш. x ўқни стержень бўйлаб вертикал пастга йўналтириб, (25.60) га асосан O нуқтадан зарба марказигача бўлган $h = OM$ масофани аниқлаймиз:

$$h = \frac{I_z}{mx_C} = \frac{2ml^2}{3ml} = \frac{2}{3} l.$$

Зарба олдида стержень тинч ҳолатда ($\omega_0 = 0$) бўлишини эътиборга олиб, (25.55) формула воситасида стерженнинг зарбадан кейинги бурчак тезлигини аниқлаймиз.

$$\omega = \frac{S \cdot h}{I_z} = \frac{S \cdot \frac{2}{3} l}{\frac{ml^2}{3}} = \frac{2S}{l \cdot m}.$$

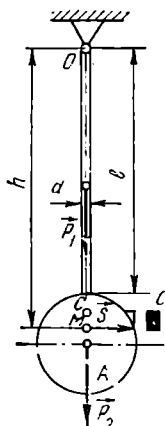
25.4 - масала. Зарба машинасининг радиуси $r = 0,1$ м ва қалинлиги $\delta = 0,05$ м бўлган A пўлат дискдан ва диаметри $d = 0,02$ м ва узунлиги $l = 0,9$ м бўлган доиравий B пўлат стержендан иборат. O ўққа зарба тегмаслиги учун урилайётган C брус O айланиш ўқи ётган горизонтал текисликдан қандай h масофага ўрнатилиши керак? Зарба горизонтал йўналишида берилади деб қаралсин (25.9-расм).

Ечиш. Стержень ва дискнинг огирлигини $\vec{P}_1$ ва $\vec{P}_2$ билан белгиласак,

$$P_1 = \gamma l \frac{\pi d^2}{4}, \quad P_2 = \gamma \pi r^2 \delta,$$

бунда γ — бирлик ҳажмга тўғри келган пўлатнинг огирлиги.

O нуқтадан системанинг массалар марказигача бўлган масофа.



25.9- расм.

$$OC = \frac{P_1 \frac{l}{2} + P_2 (l + r)}{P_1 + P_2}$$

формула ёрдамида аниқланади. Бундан ташқари,

$$\rho^2 = \frac{I_z}{M} = \frac{P_1 \frac{l^2}{3} + P_2 (l + r)^2 + P_2 \frac{r^2}{2}}{P_1 + P_2}$$

муносабат ўринли бўлади. Олинган ифодаларни

$$h = OM = \frac{\rho^2}{OC}$$

формулага қўйсак,

$$h = \frac{l^3 \cdot \frac{d^2}{12} + r^2 \delta \left[(l + r)^2 + \frac{r^2}{2} \right]}{l^2 \cdot \frac{d^2}{8} + r^2 \delta (l + r)} = 0,934 \text{ м.}$$

Айрим механик катталикларнинг ўлчов бирликлари

Асосий катталиклар	Ўлчамлиги	Ўлчов бирлиги				Бошқа бирликлар билан СИ бирликлари орасидаги боғланишлар
	СИ ва СГС	МКГСС	СИ	СГС	МКГСС	
1	2	3	4	5	6	7

Асосий бирликлар

Ўзунлик	L	L	м	см	м	$1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$
Масса	M	$L^{-1}FT^2$	кг	г	т.м.б.-кгк. $\text{с}^2/\text{м}$	$1 \text{ т.м.б} = 9,81 \text{ кг}$
Вақт	T	T	с	с	с	

Қўшимча бирликлар

Ясси бурчак	1		1 рад	рад	рад	—
Фазовий бурчак	1		1 ср	ср	ср	—

Ҳосилавий бирликлар

Юза	L^2	L^2	м^2	см^2	м^2	$1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$
Ҳажм	L^3	L^3	м^3	см^3	м^3	$1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$
Тезлик	LT^{-1}	LT^{-1}	м/с	см/с	м/с	$1 \text{ см/с} = 10^{-2} \text{ м/с}$
Тезланиш	LT^{-2}	LT^{-2}	м/с ²	см/с ²	м/с ²	$1 \text{ см/с}^2 = 10^{-2} \text{ м/с}^2$
Бурчак тезлик	T^{-1}	T^{-1}	рад/с	рад/с	рад/с	—
Бурчак тезланиш	T^{-2}	T^{-2}	рад/с ²	рад/с ²	рад/с ²	—
Зичлик	$L^{-3}M$	$L^{-4}FT^2$	кг/м ³	г/см ³	т.м. б./м ³ =кгк.с ² /м ⁴	$1 \text{ г/см}^3 = 10^3 \text{ кг/м}^3$
Куч	LMT^{-2}	F	Н	дина	кгк	$1 \text{ кгк} = 9,81 \text{ Н}$
Босим	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	$1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$ Па	дина/см ²	кгк/м ²	$1 \text{ кгк/м}^2 = 9,81 \text{ Па}$ $1 \text{ атм} = 1,01325 \text{ Па}$

1	2	3	4
Кучнинг импульси	LMT^{-1}	FT	Н.с
Ҳаракат миқдори	LMT^{-1}	FT	кг.м/с
Кучнинг моменти	L^2MT^{-2}	LF	Н. м
Инерция моменти	L^2M	LFT^2	кг.м ²
Кинетик моменти	L^2MT^{-1}	LFT	кг.м ² /с
Иш, энергия	L^2MT^{-2}	LF	Ж
Қувват	L^2MT^{-3}	LFT^{-1}	Вт
Тебраниш частотаси	T^{-1}	T^{-1}	Гц

Давоми

	5	6	7
дина.с	кгк.с	1 кгк.с = 9,81 Н.с.	
г. см/с	г.м.б. м/с = кгк.с.	1 кгк.с = 9,81 кг. м/с	
дяна. с	кгк.м	1 кгк м = 9,81 Н.м.	
г.см ²	г.м.б.м ² = кгк.м.с ²	1 г.см ² = 10 ⁻⁷ кг.м ²	
г.см ² /с	г.м.б.м ² /с = кгк.м.с	1 г.см ² /с = 10 ⁻⁷ кг.см ² /с	
эрг	кгк.м	1 кгк.м. = 9,81 Ж	
эрг/с	кгк.м/с	1 эрг = 10 ⁻⁷ Ж	
Гц	Гц	1 от кучи = 736 Вт	
		1 эрг/с = 10 ⁻⁷ Вт	
		—	

1. Азиз-Қориев С.Қ., Янгуразов Ш.Х. Назарий механикадан масалалар ечиш методикаси (Статика ва кинематика). Қайта ишланган 2-нашри. — Т.: Ўқитувчи, 1974.
2. Азиз-Қориев С.Қ., Янгуразов Ш.Х. Назарий механикадан масалалар ечиш методикаси (Динамика). — Т.: Ўқитувчи, 1967.
3. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.Н. Руководство к решению задач по теоретической механике. — 6-е стереотип. изд. — М.: Высшая школа, 1968.
4. Багъ М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. — 7-е изд., доп. М.: Наука, 1975, т. I; — 6-е изд., доп. — М.: Наука, 1975, т. II; — М.: Наука, 1973, т. III.
5. Бражниченко Н.А., Кан В.Л., Минцбург Б.Б. [и др.]. Сборник задач по теоретической механике. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1974.
6. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1971.
7. Бутенин Н.В., Луни Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1979, тт. I, II.
8. Воронков И.М. Курс теоретической механики. — 13-е стереотип. изд. — М.: Наука, 1966.
9. Гернет М.М. Курс теоретической механики. — 2-е изд. — М.: Высшая школа, 1973.
10. Добролюбов В.В., Никитин В.В. Курс теоретической механики — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1983.
11. Колесников К.С., Блюмин Г.Д., Дронг В.И. [и др.]. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1983.
12. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1981, т. I; 6-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1983, т. 2.
13. Мещерский И.В. Назарий механикадан масалалар тўплами. — Русча 30-нашрига мувофиқлаштирилган 2-нашри. — Т.: Ўқитувчи, 1967.
14. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. — 35-е изд., перераб. — М.: Наука, 1981.
15. Старжинский В.М. Теоретическая механика. — М.: Наука, 1980.
16. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. 9-е изд. — М.: Наука, 1974.
17. Шохайдарова П., Шозиётов Ш., Зоиров Ж. Назарий механика. — Т.: Ўқитувчи, 1981.
18. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. — 6-е изд. испр. — М. Высшая школа, 1984, ч.2.
19. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. — 6-е изд., испр. — М.: Высшая школа, 1984, ч. 1.
20. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: Высшая школа, 1975, ч. 2.
21. Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. [и др.]. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. — 3-е изд. испр. — М.: Высшая школа, 1978.
22. Урозбоев М.Т. Назарий механика асосий курси. — Қайта ишланган 3-нашри. — Т.: Ўқитувчи, 1966.

- Абу Али ибн Сино (980 — 1037) — ўрта аср Шарқининг энциклопедист олими 6
 Амонтон Гильом (1663 — 1705) — француз олими 54
 Архимед (эрамизгача 287 — 212) — мутафаккир, қадимги Юнонистоннинг буюк математиги ва физиги 9, 97
 Беруний Абу Райхон (973 — 1048) — Ўрта Осиё (Хоразм) олими, математика, физика, астрономия, фалсафа, геология каби соҳаларда муҳим асарлар ёзган 6
 Вариньон Пьер (1654 — 1722) — француз механиги ва математиги 9
 Галилей Галилео (1564 — 1642) — итальян олими 4, 7
 Гюльден Гуго (1841 — 1896) — швед астрономи 109
 Даламбер Жан Лерон (1717 — 1783) — француз математиги ва физиги 7
 Дирихле Петер Густав (Лежен Дирихле) (1805 — 1859) — немис олими 512
 Жуковский Николай Егорович (1847 — 1921) — рус математиги ва механиги мамлакатимиз гидро ва аэродинамика фанининг асосчиси 7, 9
 Ильюшин Александр Антонович (1911 йилда туғилган) — совет механик олими 8
 Ишлинский Александр Юльевич (1913 йилда туғилган) — совет механик олими 8
 Карло Лазар Николла (1753 — 1823) — француз математиги 557
 Келдиш Мстислав Всеволодович (1911 — 1978) — совет математиги ва механиги, академик 8
 Кельвин (Томсон Уильям) (1824 — 1907) — инглиз физиги 550
 Ковалевская Софья Васильевна (1850 — 1891) — рус олимаси. Дунёда биринчи аёл математик 7
 Коперник Николай (1473 — 1543) поляк математиги ва астрономи 7
 Кориолис Гюстав Гаспар (1792 — 1843) — француз механик олими 218
 Королев Сергей Павлович (1906 — 1966) — атоқли совет конструктори, амалий космонавтика асосчиси, академик 8
 Кремон Луиджи (1830 — 1903) — италиялик олим математик 65
 Кулон Шарль Огюстон (1736 — 1813) — француз инженери ва физиги 54
 Лагранж Жозеф Луи (1736 — 1813) — француз математиги ва механиги 7, 9, 475, 511
 Ленин Владимир Ильич (1870 — 1924) — мутафаккир, революционер, Совет Иттифоқи Коммунистик партияси ва Совет давлатининг асосчиси 4, 5
 Ломоносов Михаил Васильевич (1711 — 1765) — рус энциклопедист олими, шоир 7
 Ляпунов Александр Михайлович (1857 — 1918) — рус математиги, академик 536
 Максвелл Жемс Кларк (1831 — 1879) — инглиз физик олими 65
 Маркс Карл (1818 — 1883) — мутафаккир, революционер, илмий коммунизм асосчиси 212
 Мещерский Иван Всеволодович (1859 — 1935) — рус механик олими, ўзгарувчан массали жисм механикасининг асосчиси 7
 Ньютон Исаак (1643 — 1727) — буюк инглиз олими, файласуфи. Классик механика қонунларининг асосчиси 7
 Остроградский Михаил Васильевич (1801 — 1862) — рус математиги, академик 7
 Пуансо Луи (1777 — 1869) — француз математиги, механиги, инженери 9, 35
 Раҳматуллин Халил Аҳмедович (1909 — 1988) — ўзбек совет механик-олими, академик 8

Сильвестр Жемс Жозеф (1814—1894)—инглиз математиги 516
 Ҳуфбек Муҳаммад Тарағай (1394—1449)—Ўрта Осиёлик буюк олим, астро-
 ном, математик 6
 Циолковский Константин Эдуардович (1857—1935)—рус совет олими ва их-
 тирочиси, ракета двигатели назариясига асос солган 7
 Чаплигин Сергей Александрович (1869—1942)—рус совет математиги, акаде-
 мик 7,9 Шаль Мишель (1793—1880)—француз механик-олими 207
 Эйлер Леонард (1707—1783)—математик, механик, физик. Россияда яшаган
 ва ижод қилган 7, 256
 Эйнштейн Альберт (1879—1955)—немис физик-олими, нисбийлик назарияси-
 нинг асосчиси 6
 Энгельс Фридрих (1820—1895)—мутафаккир, революционер, илмий комму-
 низм асосчиларидан бири 4, 9, 112, 405
 Урозбоев Муҳаммад Тошевич (1906—1971)—ўзбек совет механик-олими, ака-
 демик 8
 Қобулов Восил Қобулович (1921 йилда туғилган)—ўзбек совет механик-оли-
 ми, академик 8



- абсолют қаттиқ жисм 9
 - эластик бўлмаган зарба 551
 - зарба 551
- айлана ёйининг оғирлик маркази 106
- айланиш оний ўқи 191
- айланма инерция кучи 453
- аналитик боғланишлар
 - механика 468
- аниқ ишорали функция 536
- апериодик ҳаракат 292
- асимптотик устувор ҳаракат 535
- асосий ҳаракат 534
- беголоном боғланиш 469
- бефарқ мувозанат 510
- бнкирлик коэффициенти 516
- бинормаль 133
- бош нормаль 133
- боғланиш 13
 - кўпайтувчиси 313
 - реакция кучи 13
 - тенгламаси 311
- боғланишдаги механик система 468, 471
 - нуқта 311
 - учун Даламбер принципи 452
 - система 468
- боғланишдан бўшатиш принципи 13
- боғланишлар 468
 - аксиомаси 13
- бурчак тезликларининг параллелограмм қоидаси 231
- бўшатадиган боғланиш 469
- бўшатмайдиган боғланиш 469
- вазнсиз стержень 15
- вазнсизлик ҳолати 328
- Варианс теоремаси 38, 85
- вақт 113
- винт параметри 88
 - чизиғи 245
 - ўқи 245
 - қадами 245
 - ҳаракати 245
- Галилей алмаштириши 327
- Гамильтон таъсири 504
 - Остроградский принципи 505
- Гамильтоннинг каноник тенгламалари 508
- гармоник тебранма ҳаракат 140
- географик кенглик 329
- геометрик боғланиш 469
- геоцентрик кенглик 329
- гироскоп 442
- гироскопик жуфт 448
 - момент 448
- голономли боғланиш 469
- гравитацион масса 250
- Гурвиц теоремаси 539
- Гюйгенс—Штейнер теоремаси 340
- Гюльден теоремалари 109
- Даламбер принципи 451
 - Лагранж принципи 491
- динамик винт 87
 - — бош моментининг аналитик ифодиси 89
 - мувозанатлашган жисм 463
 - реакция кучлари 462
- динамика 8, 249
- динамиканинг асосий қонуни 251
 - умумий тенгламаси 491
 - — теоремалари 353
- динамиклик коэффициенти 298
- дифференциал тенгламанинг биринчи интеграллари 264
 - узатма 240
 - формадаги моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема 409
- дифференциалли боғланиш 469
- думалашдаги ишқаланиш жуфти 59
 - — коэффициенти 59
 - — моменти 59
- доира секторининг оғирлик маркази 107
- доиравий дискнинг инерция моменти 341
 - конуснинг оғирлик маркази 108
 - ҳалқанинг инерция моменти 341
- ёпишма текислик 133
- жисмнинг абсолют ҳаракати 228
 - берилган ондаги бурчак тезланиши 152
 - бурчак тезлиги 150
 - вазни 327
 - илгарилама ҳаракат тенгламаси 422
 - — ҳаракати 147
 - кўчирма ҳаракати 228
 - мураккаб ҳаракати 228
 - нисбий ҳаракати 228
 - оний бурчак тезланиши 192

- оғирлик кучи 99
- — маркази 99
- **такис айланма ҳаракат тенгламаси** 151
- — — ҳаракати 151
- — — ўзгарувчан айланма ҳаракати 152
- **секинланувчан айланма ҳаракати** 152
- сферик ҳаракат тенгламалари 189
- — — ҳаракати 188
- тезланувчан айланма ҳаракати 152
- қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракат тенгламалари 189
- — — — — ҳаракати 188
- — — ўқ атрофида айланма ҳаракат кинематик тенгламаси 150
- — — — — ҳаракати 149
- Жуковский қондаси** 449
- жуфт айланиш** 236
- — — моменти 236
- — — куч 29
- — — моменти вектори 77
- жуфтнинг елкаси** 29
- — — моменти 31
- — — текислиги 29
- варба** 544
- вақти 544
- вақтида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема 545
- — — нуқта кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема 548
- — — система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема 549
- — — система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема 547
- маркази 563
- назариясининг асосий тенгламаси 545
- варбали куч** 544
- — — графиги 544
- — — импульси 544
- идеал боғланиш** 474
- изохрон вариация** 505
- инерциал система** 251
- ҳаракат 251
- инерцион масса** 250
- инерция бош ўқлари** 346
- эллипсоиди 345
- қонуни 251
- ички кучлар** 333
- ишқаланиш бурчаги** 54
- конуси 54
- кучи 53
- соҳаси 55
- Карно теоремаси** 557
- Кельвин теоремаси** 550
- кесишувчи кучлар системаси** 16
- — — кучларнинг мувозанат тенгламалари 92
- кинематик боғланиш** 469
- кинетостатика тенгламалари** 456
- — — усули 452
- Ковалевская ҳоли** 442

- консерватив куч** 415
- система 421
- Кориолис инерция кучи** 325
- тезланиши 218, 220
- теоремаси 218
- кран фермалари** 60
- кинематика** 8
- куч** 251
- ишининг геометрик ифодаси 394
- — — аналитик ифодаси 394
- кўпбурчаги 22
- майдони 415
- функцияси 415
- чизиги 417
- элементар ишининг аналитик ифодаси 394
- — — қувватининг аналитик ифодаси 395
- кучлар системаси** 10
- системасининг бош вектори 36
- — — векторли инварианти 82
- — — инварианти 82
- — — марказга нисбатан статик моменти 99
- — — марказий ўқи 88
- — — текисликка нисбатан статик моменти 99
- таъсирининг ўзаро мустақиллик қонуни 252
- кучни аналитик усулда аниқлаш** 21
- кучнинг елкаси** 30
- импульси 356
- йўналиши 9
- миқдори 9
- нуқтага нисбатан момент вектори 73
- — — моменти 30
- таъсир чизиги 10
- текисликдаги проекцияси 20
- чекли йўлдаги иши 394
- элементар импульси 356
- ўққа нисбатан моменти 74
- қуввати 394
- кўпбурчак қондаси** 17
- кўприк фермалари** 60
- кўчирма инерция кучи** 325
- Лагранж—Дирихле теоремаси** 512
- Пуассон ҳоли 442
- Лагранжнинг биринчи хил тенгламалари** 312, 316
- иккинчи хил тенгламалари 496
- логарифмик декремент** 292
- Ляпунов таърифиға кўра устувор мувозанат** 511
- теоремалари 536, 538
- функцияси 537
- Ляпуновнинг иккинчи усули** 536
- Максвелл—Кремон диаграммаси** 65, 68
- марказдан қочирма инерция кучи** 453
- — — моменти 345
- марказий инерция бош ўқлари** 346
- — — эллипсоиди 346

- куч 380
- массалар геометрияси 335
- математик тебрангич 318
- механик система 333
 - учун бошлангич шартлар 353
 - энергиясининг сақланиш қонуни 421
 - ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни 364
 - системанинг мумкин бўлган кўчиши 471
 - ҳаракат дифференциал тенгламалари 353
 - ҳаракат 4
 - ҳаракатнинг векторли ўлчови 356
- Мешчерский тенгламаси 373
- моддий нуқта 9
 - динамикасининг биринчи асосий масаласи 257
 - иккинчи асосий масаласи 262
 - механик энергиясининг сақланиш қонуни 420
 - нуқтанинг мажбурий ҳаракат тенгламаси 296
 - тебранма ҳаракати 283
 - тўлиқ механик энергияси 418
- моментлар параллелограмми 78
- мувозанат ҳолати 10
- мувозанатлашган гироскоп 443
 - кучлар системаси 10
- мумкин бўлган кўчиш принципи 475
- назарий механика 4
- нолга эквивалент система 10
- нормал инерция кучи 329
 - реакция кучи 14
 - текислик 133
- ноустувор мувозанат 510
 - ҳаракат 534
- нуқта динамикасининг асосий тенгламаси 252
 - тесқари масаласи 262
 - тўғри масаласи 257
 - механик ҳаракатининг скаляр ўлчови 404
 - тезланишининг кўндаланг ташкил этувчиси 132
 - радиал ташкил этувчиси 132
 - тезлигининг алгебраик қиймати 127
 - кўндаланг ташкил этувчиси 126
 - модули 127
 - радиал ташкил этувчиси 126
 - ҳаракат мақдори моментининг сақланиш қонуни 380
 - — — — — ўзгариши ҳақидаги теорема 379
 - — — — — миқдорининг чекли вақт пачида ўзгариши ҳақидаги теорема 359
 - — — — — ўзгариши ҳақидаги теорема 358
 - — — — — теореманинг дифференциал кўриниши 358
 - нуқтанинг абсолют тезланиши 214

- — — — — тезлиги 214
- — — — — ҳаракати 214
- айланма тезланиши 156, 172
- берилган ондаги тезланиш вектори 130
- — — — — тезлик вектори 123
- кинематик тенгламаси 117
- гармоник тебранма ҳаракати 285
- инерция кучи 452
- кинетик энергияси 404
- кўчирма тезлиги 213, 215
- — — — — ҳаракат тезланиши 213, 218
- — — — — тезлиги 213, 215
- — — — — ҳаракати 213
- кўчиш вектори 123
- марказга интилма тезланиши 156, 172
- мураккаб ҳаракати 214
- нисбий тезланиши 213, 218
- — — — — ҳаракат дифференциал тенгламаси 326
- — — — — тезлиги 213
- — — — — траекторияси 213
- — — — — ҳаракати 213
- — — — — нормал тезланиши 137
- — — — — сектор тезлиги 381
- — — — — тебраниш фазаси 141
- — — — — амплитудаси 141
- — — — — текис ўзгарувчан ҳаракати 139
- — — — — тепкили тебраниши 298
- — — — — траекторияси 113
- — — — — тўғри чизиqli ҳаракат дифференциал тенгламаси 255
- — — — — уринма тезланиши 137
- — — — — эгри чизиqli текис ўзгарувчан ҳаракат тенгламаси 140
- — — — — — — — — — — ҳаракат тенгламаси 139
- — — — — — — — — — — ўзгарувчан ҳаракати 139
- — — — — эркин тебранма ҳаракат дифференциал тенгламаси 284
- — — — — ўртача тезланиш вектори 130
- — — — — тезлик вектори 122
- — — — — ўтган йўли 128
- — — — — ўққа нисбатан инерция моменти 337
- — — — — ҳаракат миқдори 354
- — — — — ҳаракатини векторли усулда аниқлаш 117
- — — — — табиий усулда аниқлаш 119
- — — — — цилиндрлик координаталарда аниқлаш 118
- Ньютоннинг учинчи қонуни 13
- оддий узатма 239
- онийнинг ҳаракати 247
- ортиқча юкланиш 326
 - — — — — стерженга эга бўлган ферма 62
 - — — — — бўлмаган ферма 62
- оғирлик кучининг иши 397
 - — — — — марказини аниқлашнинг бўлақларга ажратиш усули 103
 - — — — — манфий юза усули 104
 - — — — — симметрия усули 102

- — — тажриба усули 105
- параллел кучлар маркази 98
- — — системаси 27
- параллелограмм аксиомаси 12
- планетар узатма 240
- потенциалли куч 415
- — — майдони 415
- прецессия бурчаги 188
- Пуансо усули 80
- Резаль теоремаси 444
- резонанс 301
- Риттер нуқталари 70
- усули 70
- ричаг 41
- мувозанати 42
- саноқ системаси 112
- Сильвестр критерийси 516
- силлиқ текисликнинг реакция кучи 14
- сирпанишдаги ишқаланиш 53
- — — коэффициенти 54
- — — кучи 53
- система 333
- кинетик моментининг сақланиш қонуни 386
- — — ўзгариши ҳақидаги теорема 384
- — — энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани дифференциал кўриниши 413
- массалар маркази координатларининг сақланиш қонуни 367
- — — марказига нисбатан кинетик моментининг сақланиш қонуни 392
- — — марказининг сақланиш қонуни 367
- — — ҳаракати ҳақидаги теорема 366
- учун Даламбер принципи 456
- ҳаракат миқдорининг бош моменти 377
- — — чекли вақт ичида ўзгариши ҳақидаги теорема 364
- — — ўзгариши ҳақидаги теорема 362
- системанинг бош тебранишлари 530
- кинетик энергияси 404
- — — ҳақидаги Кёниг теоремаси 406
- марказга нисбатан кинетик моменти 377
- массалар маркази 335
- массаси 335
- нуқтага нисбатан инерция моменти 337
- текисликка нисбатан инерция моменти 337
- эркинлик даражаси 471
- ўққа нисбатан инерция радиуси 339
- — — моменти 337
- қутбга нисбатан инерция моменти 337

- ҳаракат миқдори 354
- соф айланиш бурчаги 188
- — — ўқи 188
- статик аниқ масала 42
- — — ферма 62
- ишқаланиш кучи 54
- мувозанатлашган жисм 463
- нзаниқ масала 42
- нзаниқ ферма 62
- реакция кучлари 462
- статика 8
- стационар боғланиш 471
- бўлмаган боғланиш 471
- — — куч майдони 415
- куч майдони 415
- стержендаги зўриқиш 23
- стерженнинг инерция моменти 341
- сферик шарнирнинг реакция кучи 15
- сўниш коэффициенти 292, 306
- сўнувчи тебранма ҳаракат амплитудаси 292
- — — даври 291
- табиий координата ўқлари 133, 134
- учёқлик 133
- таранглик кучи 16
- ташқи кучлар 334
- кучларнинг нуқтага нисбатан бош моменти 384
- таъсир ва акс таъсир қонуни 252
- тақсимланган кучлар 43
- тебраниш даври 141, 286
- декременти 292
- частотаси 286
- тебранишларининг доиравий частотаси 141
- бошланғич фазаси 141
- тезлик голографи 131
- тезликларнинг параллелограмм қондаси 215
- тезланишларнинг параллелограмм қондаси 219
- текис параллел ҳаракатдаги жисм учун Кёниг теоремаси 407
- шакл 160
- — — нуқтасининг тезлигини проекция усули билан аниқлаш 164
- — — — — тезликлар оний марказидан фойдаланиб аниқлаш 166
- — — — — қутб усулида аниқлаш 164
- — — ҳаракатнинг кинематик тенгламалари 161
- шаклнинг айланиш оний маркази 164
- — — бурчак тезланиши 161
- — — бурчак тезлиги 161
- — — тезланишлар оний маркази 182
- — — тезликлар оний маркази 164
- — — ҳаракат текислиги 160
- — — тенгламалари 161
- текисликдаги кучлар системаси 35
- — — системасининг бош моменти 36

- — — мувозанат тенгламалари 93
- — — — шартлари 39
- параллел кучлар мувозанати 41
- тенг таъсир этувчи куч 10
- потенциалли сирт 416
- тикловчи коэффициент 551
- тортилиш кучининг иши 399
- трапециянинг оғирлик маркази 106
- туғун 60
- кесиш усули 62
- туғунлар чизиги 188
- тушиш бурчаги 552
- тўғри зарба 552
- марказий зарба 553
- чизиқли секинланувчан ҳаракат 132
- — тезланувчан ҳаракат 132
- узатиш сони 239
- уйғотилган ҳаракат 534
- — дифференциал тенгламалари 585
- умумлашган координата 484
- куч 486
- тезлик 494
- уринма текислик 133
- учбурчак юзасининг оғирлик маркази 105
- устувор мувозанат 510
- фаза силжиши 305
- фазо 112
- фазадаги кучлар системаси 72
- — — мувозанатининг аналитик ифодаси 92
- — — векторли ифодаси 92
- — системасининг бош вектори 81
- — — бош моменти 81
- — — скаляр инварианти 84
- параллел кучларнинг мувозанат шартлари 93
- физик тебрангич 425
- тебрангичнинг келтирилган узунлиги 426
- — эсилиш ўқи 425
- — силкиниш маркази 426
- — ҳаракат дифференциал тенгламаси 426
- ферма 60
- цилиндрик шарнирнинг реакция кучи 15
- Циолковский формуласи 375, 376
- чап винг 245
- частоталар тенгламаси 527
- чекти формалаги нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема 409
- вақт ичида система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема 412
- чизиқнинг координата текисликларига нисбатан статик моменти 102
- нуқтага нисбатан статик моменти 102
- эгрилик радиуси 136
- Шаль теоремаси 207
- шарнинг инерция моменти 343
- шарнир 15
- эгри чизиқли текис ҳаракат 128, 139
- — ҳаракат 113
- чизиқнинг эгрилик вектори 134
- Эйлер бурчаклари 188
- теоремаси 189, 370
- Даламбер теоремаси 189
- Пуансо ҳоли 442
- Эйлернинг динамик тенгламалари 441
- кинематик тенгламалари 204
- эквивалент кучлар системаси 10
- эквивалентлик принципи 250
- эластик зарба 551
- эластиклик кучининг иши 398
- энергия интеграли 420
- эркин айланиш ўқи 464
- гироскоп 443
- моддий нуқта учун Даламбер принципи 452
- — ҳаракат дифференциал тенгламасининг векторли ифодаси 254
- — нуқтанинг Декарт координата ўқларидаги дифференциал тенгламалари 255
- — табиий координата ўқларидаги динамик тенгламалари 256
- система 468
- қаттиқ жисм нуқтасининг тезланиши 212
- — — тезлиги 210
- — жисмнинг кинематик тенгламалари 208
- юзалар қонуни 382
- юзанинг координата текисликларига нисбатан статик моменти 102
- ясси ферма 60
- ўзаро механик таъсирнинг векторли ўлчови 356
- — — скаляр ўлчови 405
- ўзгармас механик система 333
- ишорали функция 537
- ўзгарувчан массали жисм 371
- — нуқта 371
- — нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси 373
- ўзгарувчи ишорали функция 537
- ўнг винг 245
- ўртача зарбали куч 545
- ўқ бўйича система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни 365
- қайтарувчи куч 283
- қайтиш бурчаги 552
- қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламалари 431
- қийшиқ зарба 552
- қотиш принципи 13
- қувурнинг инерция моменти 342
- қўзғалмас аксонд 191

- аксоиднинг тенгламаси 195
- нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг айланма тезланиши 196
- — — — — тезлиги 193
- — — — — ўққа интилма тезланиши 196
- центроида 171
- қўзғалувчи аксоид 191
- аксоиднинг тенгламаси 195
- таянчнинг реакция кучи 15
- центроида 171
- қўшилган жуфт 35
- ҳажмининг координата текисликларига нисбатан статик моменти 102
- нуқтага нисбатан статик моменти 102
- ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни 360
- тенгламаси 116
- қонуни 116
- ҳаракатдаги ишқаланиш коэффициенти 54
- ҳақиқий вертикал 329

Сўз боши	3
Кириш	4
I ҚИСМ. ҚАТТИҚ ЖИСМ СТАТИКАСИ	9
1- б о б. Статиканинг асосий тушунчалари ва аксиомалари	9
1.1- §. Статиканинг асосий тушунчалари	9
1.2- §. Статика аксиомалари	10
1.3- §. Боғланиш ва боғланиш реакциялари	13
2- б о б. Қесишувчи кучлар системаси	16
2.1- §. Қесишувчи кучларни геометрик қўшиш .	16
2.2- §. Уч кучнинг мувозанати ҳақидаги теорема	17
2.3- §. Кучни ташкил этувчиларга ажратиш	18
2.4- §. Кучнинг текисликдаги ва ўқдаги проекцияси .	19
2.5- §. Тенг таъсир этувчини аналитик усулда аниқлаш	21
2.6- §. Қесишувчи кучлар системасининг мувозанати	21
3- б о б. Текисликдаги параллел кучлар ва жуфтлар назарияси	27
3.1- §. Иккита параллел кучларни қўшиш	27
3.2- §. Жуфт куч ҳақида тушунча .	29
3.3- §. Куч моментининг алгебраик қиймати	30
3.4- §. Жуфт кучнинг momenti	31
3.5- §. Эквивалент жуфтлар ҳақидаги теорема	32
3.6- §. Бир текисликда ётувчи жуфтларни қўшиш. Текисликдаги жуфтларнинг мувозанат шартлари	34
4- б о б. Текисликдаги кучлар системаси	35
4.1- §. Кучни ўзига параллел қўчиришга оид лемма	35
4.2- §. Текисликдаги кучлар системасининг бош вектори ва бош momenti	36
4.3- §. Текисликдаги кучлар системасини тенг таъсир этувчига келтириш. Вариньон теоремаси	37
4.4- §. Текисликдаги кучлар системасининг мувозанат шартлари	39
4.5- §. Текисликдаги параллел кучларнинг мувозанат шартлари	41
4.6- §. Ричагнинг мувозанати	41
4.7- §. Статик аниқ ва статик ноаниқ масалалар	42
4.8- §. Тақсимланган кучлар	43
4.9- §. Бир текисликда ётувчи бир неча жисмдан ташкил топган системанинг мувозанати	48
4.10- §. Ишқаланиш. Сирпанишдаги ишқаланиш	53
4.11- §. Думалашдаги ишқаланиш	58

5-боб. Фермаларни ҳисоблаш усуллари	60
5.1*- §. Ферма ҳақида тушунча	60
5.2*- §. Ферма стерженларидаги зўриқишларни тугунларни кесиш усули билан аниқлаш	62
5.3*- §. Максвелл — Крмон диаграммаси	65
5.4*- §. Риттер усули	70
6-боб. Фазодаги кучлар системаси	72
6.1- §. Кучнинг нуқтага нисбатан момент-вектори	72
6.2- §. Кучнинг ўққа нисбатан моменти	73
6.3- §. Кучнинг ўққа нисбатан моменти билан шу ўқдаги нуқтага нисбатан моменти орасидаги: боғланиш	74
6.4- §. Жуфтни параллел текисликка кўчириш ҳақидаги теорема	76
6.5- §. Жуфтнинг момент- вектори	77
6.6- §. Фазодаги жуфтларни қўшиш	78
6.7- §. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасини бир нуқта- га келтириш	80
6.8- §. Фазодаги кучлар системаси бош вектори ва бош моментининг аналитик ифдалари	81
6.9- §. Фазодаги кучлар системасининг инвариантлари	82
6.10- §. Фазодаги кучлар системаси битта жуфтга ёки теги таъсир этувчига келтириладиган ҳоллар. Вариньон теоремаси	84
6.11- §. Фазодаги кучлар системасини динамика винтга келтириш	86
6.12- §. Марказий ўқ тенгламаси	88
6.13- §. Фазодаги кучлар системасини иккига ўзаро кесинмайдиган кучларга келтириш	91
6.14- §. Фазодаги кучлар системасининг мувозанат шартлари	91
6.15- §. Бир нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ jisмнинг мувоза- нат шартлари	93
6.16- §. Иккита нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ jisмнинг мувоза- нат шартлари	94
7-боб. Параллел кучлар маркази ва оғирлик маркази	97
7.1- §. Параллел кучларнинг теги таъсир этувчисини аниқлаш. Па- раллел кучлар маркази	97
7.2- §. Jисмнинг оғирлик марказини аниқлаш	99
7.3- §. Оғирлик марказини аниқлаш усуллари	102
7.4- §. Оғирлик маркази баъзи бир jисмнинг оғирлик мар- казини аниқлаш	105
7.5- §. Гюльден теоремалари	109
II Қисм. КИНЕМАТИКА	112
8-боб. Нуқта кинематикаси	112
8.1- §. Асосий тушунчалар	112
8.2- §. Векторнинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласи	114
8.3- §. Нуқта ҳаракатини аниқлаш усуллари	116
8.4- §. Нуқтанинг тезлиги	122
8.5- §. Нуқтанинг тезланиши	130
8.6- §. Нуқта ҳаракатининг хусусий ҳоллари	138
9-боб. Қаттиқ jisмнинг илгариллама ва қўзғалмас ўқ атрофидаги айлан- ма ҳаракатлари	147
9.1- §. Jисмнинг илгариллама ҳаракати	147
9.2- §. Қаттиқ jisмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат тенгламаси	149
9.3- §. Jисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати бур- чак тезлиги. Текис айланма ҳаракат	150
9.4- §. Jисмнинг бурчак тезланиши. Текис ўзгарувчан айланма ҳа- ракат	151

9.5- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизиқ- ли тезлиги	154
9.6- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизиқ- ли тезланиши	156
10- б о б. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати . . .	160
10.1- §. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини аниқлаш. Те- кис шаклнинг ҳаракат тенгламалари	160
10.2- §. Текис шаклнинг кўчишига оид теорема	162
10.3- §. Текис шакл нуқталарининг тезликлари	163
10.4- §. Тезликлар оний маркази	164
10.5- §. Тезликлар оний маркази аниқланадиган баъзи ҳоллар	166
10.6- §. Центроидалар	171
10.7- §. Текис шакл нуқтасининг тезланишини қўтб усулида аниқлаш	172
10.8- §. Қўтб усули билан текис шакл нуқталарининг тезланишла- рини аниқлашга оид масалалар	173
10.9- §. Тезланишлар оний маркази	182
11- б о б. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракати	188
11.1- §. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳа- ракат тенгламалари. Эйлер бурчаклари	188
11.2- §. Эйлер-Даламбер теоремаси	189
11.3- §. Оний айланиш ўқи. Аксидлар	190
11.4- §. Қўзғалмас нуқта атрофида айланма ҳаракатдаги жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши	191
11.5- §. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги	193
11.6- §. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тез- ланиши	195
11.7- §. Оний бурчак тезланиш вектори	197
11.8*- §. Эйлернинг кинематик тенгламалари	202
12- б о б. Эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракати	207
12.1- §. Эркин жисм ҳаракатининг кинематик тенгламалари	207
12.2- §. Эркин жисм нуқтасининг тезлиги	209
12.3- §. Эркин жисм нуқтасининг тезланиши	211
13- б о б. Нуқтанинг мураккаб ҳаракати	212
13.1- §. Нуқтанинг нисбий, кўчирма ва абсолют ҳаракатлари	212
13.2- §. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезликларини қўшиш ҳақи- даги теорема	214
13.3- §. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезланишларини қўшиш ҳақидаги Кориолис теоремаси	217
13.4- §. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг нисбий, кўчирма ва Корио- лис тезланишлари	219
13.5- §. Нуқтанин мураккаб ҳаракатига оид масалалар	221
14- б о б. Қаттиқ жисмнинг мураккаб ҳаракати	228
14.1- §. Умумий мулоҳазалар	228
14.2- §. Жисмнинг илгарилама ҳаракатларини қўшиш ҳақидаги тео- рема	229
14.3- §. Жисмнинг кесишувчи ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатла- рини қўшиш	230
14.4- §. Жисмнинг иккита параллел ўқ атрофидаги айланма ҳаракат- ларини қўшиш	232
14.5- §. Цилиндрик тишли узатмалар	239
14.6- §. Жисмнинг илгарилама ва айланма ҳаракатларини қўшиш	244
III Қисм. ДИНАМИКА	249
15- б о б. Динамиканинг асосий қонунлари	249

15.1- §. Динамика предмети	249
15.2- §. Классик механиканинг асосий қонунлари	251
16- боб. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари ва динамиканинг икки асосий масаласи	254
16.1- §. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари	254
16.2- §. Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласи (тўғри масала)	257
16.3- §. Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласини ечишга доир масалалар	259
16.4- §. Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи (тескари масала)	262
16.5- §. Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласини ечишга доир масалалар	265
16.6- §. Моддий нуқтанинг содда ҳоллардаги тўғри чизиқли ҳаракат дифференциал тенгламаларини интеграллаш	274
17- боб. Моддий нуқтанинг тўғри чизиқли тебранма ҳаракати	283
17.1- §. Умумий мулоҳазалар	283
17.2- §. Моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати	283
17.3- §. Тезликининг биринчи даражасига пропорционал бўлган қаршилик кучи таъсиридаги моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати	289
17.4- §. Моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати	295
17.5- §. Нуқтанинг тепкили тебранишлари	298
17.6- §. Резонанс ҳодисаси	300
17.7- §. Нуқтанинг мажбурий тебранишига муҳит қаршилигининг таъсири	302
18- боб. Боғланишдаги моддий нуқтанинг ҳаракати	311
18.1- §. Боғланишдаги нуқта динамикасининг асосий тенгламаси	311
18.2*- §. Қўзғалмас силлиқ сирт устидаги нуқтанинг ҳаракати. Лагранжийинг биринчи хил тенгламалари	312
18.3- §. Силлиқ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари	315
18.4- §. Берилган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг табиий координата ўқларидаги ифодаси	317
18.5- §. Математик тебрангич	318
19- боб. Моддий нуқтанинг нисбий ҳаракат динамикаси	324
19.1- §. Моддий нуқтанинг нисбий ҳаракат дифференциал тенгламалари. Кўчирма ва Кориолис инерция кучлари	324
19.2- §. Классик механиканинг нисбийлик принципи	326
19.3- §. Нуқтанинг нисбий мувозанати. Вазнесизлик	327
19.4- §. Жисмларнинг мувозанати ва ҳаракатга Ер айланishiининг таъсири	328
20- боб. Механик система динамикасига кириш	333
20.1- §. Механик система. Механик система нуқталарига таъсир этувчи кучларни классификация қилиш	333
20.2- §. Системанинг массалар маркази	335
20.3- §. Инерция моментлари	333
20.4- §. Жисмнинг параллел ўқларга нисбатан инерция моментлари ҳақидаги Гюйгенс — Штейнер теоремаси	339
20.5- §. Бир жиссли баъзи жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблаш	340
20.6*- §. Жисмнинг берилган нуқтадан ўтувчи ўқларга нисбатан инерция моментлари	343

20.7*- §. Инерция эллипсоиди	345
20.8*- §. Инерция бош ўқларининг хусусиятлари	346
II- б о б. Динамиканинг умумий теоремалари	352
21.1- §. Механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари	352
21.2- §. Моддий нуқтанинг ва системанинг ҳаракат миқдори. Куч им- пульси	354
21.3- §. Нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема	358
21.4- §. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема	362
21.5- §. Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема	366
21.6*- §. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани сувоқликнинг стационар оқимга татбиқи. Эйлер тенгламаси	369
21.7- §. Ўзгарувчан массали жисм ҳақида тушунча	371
21.8- §. И. В. Мещерский тенгламаси	372
21.9- §. Циолковский формуласи	374
21.10- §. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг моменти ва системанинг кинетик моменти	376
21.11- §. Нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема	378
21.12- §. Нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракати. Юзалар қонуни	380
21.13- §. Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема	383
21.14- §. Система кинетик моментининг сақланиш қонуни	386
21.15- §. Мураккаб ҳаракатдаги системанинг кинетик моменти	387
21.16- §. Система массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кине- тик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема	390
21.17- §. Кучнинг иши ва қуввати	392
21.18- §. Тенг таъсир этувчининг иши ҳақидаги лемма	395
21.19- §. Айрим ҳолларда кучнинг ишини ҳисоблаш	396
21.20- §. Қаттиқ жисмга қўйилган кучларнинг иши	399
21.21- §. Моддий нуқта ва системанинг кинетик энергияси. Кёниг теоремаси	404
21.22- §. Қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси	406
21.23- §. Моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема	408
21.24- §. Система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема	412
21.25- §. Потенциалли куч майдони	415
21.26- §. Тенг потенциалли сирт. Куч чиқиқлари	416
21.27- §. Потенциал энергия	417
21.28- §. Куч функциясини аниқлашга оид мисоллар	418
21.29- §. Моддий нуқта ва механик система учун энергиянинг сақ- ланиш қонуни	420
22- б о б. Қаттиқ жисм динамикаси	421
22.1- §. Қаттиқ жисм динамикасининг асосий масалалари	421
22.2- §. Қаттиқ жисмнинг илгариланган ҳаракат дифференциал тенг- ламалари	422
22.3- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисм- нинг ҳаракат дифференциал тенгламаси	423
22.4- §. Физик тебрангич	425
22.5- §. Жисмларнинг инерция моментларини тажриба усули билан аниқлаш	427
22.6- §. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламалари	430
22.7*- §. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракати ва асосий динамик характеристикалари	436
22.8*- §. Эйлернинг динамик тенгламалари	439
22.9*- §. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм учун динамиканинг асосий масалалари	441
22.10*- §. Эркин гироскопнинг ҳаракати	442

22.11- §. Резаль теоремаси	443
22.12- §. Гироскопининг элементар назарияси	444
23- б о б. Даламбер принципи. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айланиш ўқиға кўрсатадиган босими	451
23.1- §. Моддий нуқта учун Даламбер принципи	451
23.2- §. Механик система учун Даламбер принципи	455
23.3- §. Қаттиқ жисм инерция кучларининг бош вектори ва бош моменти	458
23.4- §. Жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланганда подшипникларнинг динамик реакция кучларини таниқлаш	460
23.5- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмни статик ва динамик мувозанатлаш	462
24- б о б. Аналитик механика	468
24.1- §. Боғланишлар ва уларнинг классификацияси	468
24.2- §. Мумкин бўлган кўчиш. Системанинг эркинлик даражаси	471
24.3- §. Кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги элементар иши. Идеал боғланишлар	474
24.4- §. Мумкин бўлган кўчиш принципи	475
24.5- §. Мумкин бўлган кўчиш принципини оддий машиналарға қўллаш	478
24.6- §. Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллашға оид масалалар	479
24.7- §. Системанинг умумлашган координаталари	484
24.8- §. Умумлашган кучлар	486
24.9- §. Системанинг умумлашган координаталардаги мувозанат шартлари	488
24.10- §. Динамиканинг умумий тенгламаси. Даламбер—Лагранж принципи	490
24.11- §. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари	493
24.12- §. Потенциалли кучлар таъсиридаги механик система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари	497
24.13- §. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини қўллашға оид масалалар	497
24.14*-§. Гамильтон—Остроградский принципи	504
24.15*-§. Каноник тенгламалар	506
24.16- §. Механик системанинг устувор мувозанати ҳақида тушунча	510
24.17- §. Лагранж—Дирихле теоремаси	511
24.18- §. Системанинг устувор мувозанати яқинидаги кинетик ва потенциал энергиялари	515
24.19- §. Эркинлик даражаси бирға тенг механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранишлари	519
24.20- §. Эркинлик даражаси битға бўлган системанинг сўнувчи тебраниш ҳаракати	522
24.21- §. Эркинлик даражаси бирға тенг механик системанинг мажбурий тебраниш ҳаракати	524
24.22*-§. Эркинлик даражаси иккиға тенг механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранишлари	525
24.23*-§. Устувор ҳаракат ҳақида тушунча	533
24.24*-§. Уйғоғилган ҳаракат дифференциал тенгламалари	535
24.25*-§. Ҳаракатнинг устуворлиги ҳақидаги Ляпунов теоремалари	536
24.26*-§. Биринчи яқийлашишдаги устувор мувозанат	538
24.27*-§. Ҳаракатни оптимал бешқариш ҳақида тушунча	542
25- б о б. Зарба назарияси	544
25.1- §. Зарба назариясининг асосий тушунчалари	544
25.2- §. Зарба назариясининг асосий тенгламаси	545
25.3- §. Зарба вақтида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема	546
25.4*-§. Зарба вақтида нуқта ва система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема	548

25.5- §. Зарба вақтида зарбали кучнинг иши ҳақидаги Кельвин теоремаси	549
25.6- §. Жисмнинг қўзғалмас сиртга урилишидаги тўғри зарба. Тикловчи коэффициентни тажриба йўли билан аниқлаш	550
25.7- §. Иккита жисмнинг тўғри марказий зарбаси	553
25.8- §. Зарба вақтида кинетик энергиянинг йўқолиши. Қарно теоремаси	556
25.9*- §. Зарбали кучларнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи ватекис параллел ҳаракатдаги жисмга таъсири	560
25.10*- §. Зарба маркази	561
1- илова. Айрим механик катталикларнинг ўлчов бирликлари	565
Фойдаланилган адабиётлар	567
Номлар кўрсаткичи	568
Асосий тушунчаларнинг алфавит кўрсаткичи	570

Рашидов Т. ва бошқ.

Назарий механика асослари: Олий техника ўқув юрт. студ. учун дарслик/Т. Рашидов, Ш. Шовиётов, Қ. Б. Мўминов; Т. Рашидов таҳририда. — Т.: Ўқитувчи, 1990. — 584 б.

1. 1, 2 Автордош.

Рашидов Т. и др. Основы теоретической механики. Учебник для высш. техн. учеб. заведений.

ББК 22,21я73

№228 — 90
Навоий номли ЎзССР Давлат кутубхонаси
Тираж 2000 Қарғ., тиражи 4000

На узбекском языке

**ТУРСУНБАЙ РАШИДОВ, ШАМИРЗА ШАЗИЯТОВ, КАДЫР БАКАНОВИЧ
МУМИНОВ**

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Учебник для высших технических учебных заведений

1е издание

Ташкент — «Ўқитувчи» — 1990

Махсус муҳаррир Эркин Эргашев

Нашриёт муҳаррири Амир Аҳмедов

Бадний муҳаррир Ф. Некқадамбоев

Техн. муҳаррир Т. Скиба

Корректор М. Минахмедова

ИБ № 4716

Теришга берилди 6. 12. 89. Босишга рухсат этилди 28. 04. 90. Формати 60×90/16. Т. қозғи №2. Қегли 10 шпонсив. Гарнитура литературная. Юқори босма усулида босилди. Шартли 6, л 36,5. Шартли кр.-отт. 36,5. Нашр. л 30,5. Тиражи 10 000. Зак. № 2282. Баҳос 1с. 30 т.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 11 — 78 — 85.

Ўзбекистон ССР Матбуот давлат комитети «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасининг Бош корхонасида терилди, 3-босмахонасида босилди. Тошкент, Муродов кўчаси, 1. 1990.

Набрано на Головном предприятии, отпечатано в типографии №3 ГППО «Матбуот» Государственного комитета Уз ССР по печати. Ташкент, ул. Мурадова, 1.