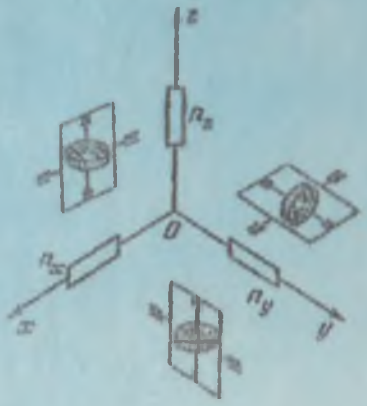
Hotam To`raev

HARAKATNING TURG`UNLIK NAZARIYASI



«ALOQAChI»

22.1.
T.97.

HOTAM TO‘RAEV

HARAKATNING TURG‘UNLIK NAZARIYASI

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta
maxsus ta’lim vazirligi tomonidan
oliy o‘quv yurtlari uchun o‘quv qo‘llanma
sifatida tavsiya etilgan

TOSHKENT «Aloqachi» 2006

TDU KUTUBXONASI
JIXOZ 365819

O'quv qo'llanmada harakat turg'unlik nazariyasining umumiy tushunchalari va ta'riflari, statsionar harakatlar uchun Lyapunovning ikkinchi usuli, konservativ sistemalar muvozanat holati va statsionar harakatlarning turg'unligi, statsionar harakatlar uchun birinchi yaqinlashish usuli bo'yicha turg'unlik kriteriylari, statsionar harakatlar uchun kritik hollarni tadqiq etish, Raus–Gurvits muammosi va nogolonom sistemalar turg'unligi bayon qilinadi.

Mazkur o'quv qo'llanmasi oliy o'quv yurtlarining 5460100– matematika, 5480100– amaliy matematika va informatika, 5440200– mexanika yo'nalishlari bo'yicha bakalavriatura va magistraturada ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan.

Kitobdan aspirantlar, ilmiy xodimlar hamda radiotexnika, amaliy mexanika, aviasozlik va kosmik texnika, avtomatlashtirish va boshqaruv tizimlari sohalarida ishlayotgan muhandis-matematiklar va mutaxassislar ham foydalanishlari mumkin.

Mas'ul muharrir: dotsent A.Musayev

Taqrizchilar:

A.Y.Krasinskiy – professor, fizika-matematika fanlari doktori;
O.M.Do'smatov – professor, fizika-matematika fanlari doktori;
F.Sattorov – dotsent, fizika-matematika fanlari nomzodi;
I.X. Siddiqov – dotsent, fizika-matematika fanlari nomzodi

© «Aloqachi», T., 2006.
© Hotam To'rayev, T., 2006.

Kitobimni rafiqam Dilbarxon Abdullayevaga bag'ishlayman

SO'ZBOSHI

Muhtaram o'quvchilarga tavsiya etilayotgan ushbu kitob nazariy mexanika kursini to'ldiruvchi o'quv adabiyoti sifatida yozilgan.

Rus va boshqa xorijiy tillarda turg'unlik nazariyasiga bag'ishlangan ko'plab adabiyotlar nashr etilgan, masalan, A.M. Lyapunov [52], I.G. Malkin [53], N.N. Krasovskiy [39], E.A. Barbashin [8], N.G. Duboshin [26], Y.I. Neymark va N.A. Fufayev [71] kabi taniqli olimlarning kitoblari shular jumlasidandir. Afsuski, hozirgacha o'zbek tilida turg'unlik nazariyasiga bag'ishlangan o'quv adabiyoti (darslik, o'quv qo'llanma, monografiya) yozilmagan. Shuning uchun ham ushbu qo'llanmani o'zbek tilida birinchi bo'lib yozishga jazm qildim.

Mazkur qo'llanmada asosan avtonom sistemalar (tizimlar) harakatining turg'unligi yoritilgan. Keltirilgan nazariy masalalarni bayon etishda misollardan keng foydalanilgan. Turg'unlik nazariyasini birinchi bo'lib o'rganayotgan talabalar amaliy masalalarni yechish uchun tatbiq etayotganda doimo qiyinchiliklarga duch kelishini hisobga olib, fan va texnikaning har xil sohalaridan misollar tanlanib, ularning yechish yo'llari ko'rsatilgan.

Qo'llanma sakkiz bobdan iborat bo'lib, **birinchi bobda** turg'unlik nazariyasiga oid umumiy tushunchalar va ta'riflar keltirilgan.

Ikkinchi bobda statsionar (barqaror) harakatlar uchun Lyapunovning ikkinchi usuli yoritilgan. Ikkinchi usulning asosiy poydevori hisoblangan Lyapunovning turg'unlik, asimptotik turg'unlik va noturg'unlik haqidagi teoremalari, harakatning batamom asimptotik turg'unligi haqidagi Barbashin–Krasovskiy teoremalari, N.G. Chetayev teoremasi, hosilasi o'zgarmas ishorali bo'lgan Lyapunov funksiyalariga asoslangan Barbashin–Krasovskiy kriteriysi va teoremalarning tatbig'iga doir turli misollar keltirilgan.

Uchinchi bobda konservativ sistemalar muvozanat holati va statsionar (barqaror) harakatlarning turg'unligi tadqiq etilgan. Muvozanat holatining turg'unligi haqidagi Lagranj–Dirixle teoremasi, muvozanat holatining noturg'unligi haqidagi Lyapunov teoremasi, siklik koordinatalar, Raus teoremasi va teoremalarning tatbig'iga doir misollar yoritilgan.

Kitobning **to'rtinchi bobida** statsionar harakatlar uchun birinchi yaqinlashish usuli bo'yicha turg'unlik kriteriylari qaraladi. Bu yerda birinchi yaqinlashish tenglamalari, o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqlashtirilgan tenglamalar sistemasi uchun Lyapunov funksiyasini tuzish, harakatning turg'unligi haqidagi Lyapunov teoremalari va bu teoremalarning tatbig'iga doir misollar keltirilgan.

Kitobning **beshinchi bobida** statsionar harakatlar uchun kritik hollarni tadqiq etish bayon etilgan. Bu yerda bitta nol ildizga ega bo'lgan hol, juft sof mavhum ildizlar holi hamda turg'unlik sohasining «xavfli» va «xavfsiz»

chegaralari ko'rilgan. Nazariy natijalar muayyan dinamik sistemalarni tekshirishga tatbiq etilgan.

Oltinchi bobda Raus–Gurvits muammosi yoritilgan. Bunda Koshi indeksi haqidagi tushuncha, Shturm teoremasi, Raus algoritmi, Raus–Gurvits teoremasi, maxsus hollar, Orlando formulasi, Lenar va Shipar kriteriysi, bog'lanishlarning geometrik sxemasi, Neymarkning turg'unlik va noturg'unlik haqidagi teoremalari, Neymarkning D-bo'laklash usuli, bir kompleks parametr va ikki haqiqiy parametr tekisligida turg'unlik sohasini yasash, Naykvist kriteriysi, Mixaylov kriteriysi, kriteriylarning tatbig'iga doir misollar qaralgan.

Kitobning **yettinchi bobida** kuchlar tarkibining harakat turg'unligiga ta'siri o'rganilgan. Bu yerda matematik tarkibiga qarab kuchlarning turi (klassifikatsiyasi), turg'unlik koeffitsiyentlari, potensial sistema harakatining turg'unligiga dissipativ va giroskopik kuchlarning ta'siri, Tomson va Tet teoremalari, faqatgina giroskopik va dissipativ kuchlar ta'siridagi harakatning turg'unligi, harakatning turg'unligiga nokonservativ kuchlarning ta'siri yoritilgan, teoremalarning texnikaviy sistemalar harakatining turg'unligini tadqiq yetilishga doir misollar qaralgan.

Sakkizinchi bobda nogolonom sistemalar muvozanat holatlari va stasionar harakatlarining turg'unligini tadqiq etish masalalari keltirilgan. Shu masalalarga bag'ishlangan Y.I. Neymark va N.A. Fufayev, V.V. Rumyansev, A.V. Karapetyan teoremalari ko'rib chiqiladi.

Nijniy Novgorodda 1966–1973-yillar davomida akademik A.A. Andronov maktabida professorlar Y.I. Neymark va N.A. Fufayev ilmiy rahbarligida ta'lim olib qaytgandan so'ng, 1973-yildan boshlab Samarqand Davlat universiteti amaliy matematika fakultetining 3–5 kurs talabalariga muallif tomonidan maxsus kurs sifatida uzluksiz o'qilayotgan ma'ruzalar matni kitobga asos qolib olindi.

Uning tuzilishi va mazmuniga hurmatli ustozlarim V.Q. Qobulov, Y.I. Neymark va N.A. Fufayev tomonlaridan fakultet talabalariga o'qilgan ma'ruzalarning ham ijobiy ta'siri bor.

Kitob, shuningdek, o'z ishida turg'unlik nazariyasidan foydalanuvchi aspirantlarga, muhandislarga va ilmiy xodimlarga ham foydali bo'ladi deb ishonaman.

Kitob matnining qo'lyozmasi bilan mufassal tanishib, uning mazmunini va sifatini yaxshilash yo'lida foydali ko'rsatma va maslahatlar bergan taqrizchilar professor A.Y. Krasinskiy, professor O.M. Do'smatov va dotsent F. Sattorovlarga, muharrirlik ishini bajargan dotsent A. Musayevga hamda kitob matnini kompyuterga kiritgan kafedramiz xodimi X. Yakubovaga o'z minnatdorchiligimni bildiraman.

Muallif

KIRISH

Mexanikada turg'unlik muammosi dastlab sistemaning muvozanat holatini o'rganish uchun paydo bo'ldi. Oddiy kuzatishlardan ma'lumki, sistemaning ayrim muvozanat holatlari kichik toyilishlarda turg'un va boshqalari yetarli kichik toydiruvchi kuchlar ta'sirida noturg'un bo'ladi. Masalan, mayatnikning quyi muvozanat holati oniy ravishda ta'sir etuvchi kichik toydiruvchi kuch ta'sirida turg'un, yuqori muvozanat holati esa noturg'undir. Bu oddiy misolda turg'unlik masalasi albatta elementar ravishda yechiladi, ammo umumiy holda qanday shartlar bajarilganda sistemaning muvozanat holatlari turg'un bo'ladi degan masala har doim ham aniq bo'lavermaydi. 1644-yilda og'irlik kuchi ta'siri ostidagi jismlar sistemasi muvozanat holatining turg'unlik kriteriysini umumiy holda E. Torichelli ta'riflab berdi. 1788-yilda J. Lagranj ixtiyoriy konservativ golonom sistema muvozanat holatining turg'unligini aniqlovchi yetarli shartlarni ifodaladi [51]. Bu teoremaning qat'iy isboti G. Lejen–Dirixlega tegishli [119].

XIX asrning o'rtalarida fan va texnikada jismning faqat muvozanat holatini emas, balki harakatining turg'unligini ham aniqlash muammosi paydo bo'ldi.

Masalan, kam quvvatli bug' mashinalarida o'rnatilgan markazdan qochma regulatorlar (rostlagichlar) dvigatelning berilgan aylanishini turg'un holda saqlar edi. Mashinalar quvvatining ortishi bilan oldingi sxemada tayyorlangan regulatorlar dvigatel aylanishini qat'iy tartibga solib tursa-da, lekin bu aylanishni kuchaytirib, noturg'un ish rejimini yaratardi. O'sha zamondagi muhandis va texniklar uchun tushunarli bo'lmagan bu hodisa dvigatelsozlik sanoatida katta inqiroz tug'dirdi va ko'p mamlakatlar olimlarini bu muammoni hal etishga jalb etishni talab qildi.

J.K. Maksvell (1868-y.), I.A. Vishnegradskiy (1876–1877-yillar) va boshqa olimlarning tadqiqotlari, bu masalaning yechimi uchun ham, rostlash nazariyasining umumiy taraqqiyoti uchun ham harakat turg'unligining kriteriylarini aniqlash lozimligini ko'rsatdi.

XIX asrning oxirlarida harakatning turg'unligi masalalarini umumiy holda izohlovchi ishlar paydo bo'ldi.

1868-yilda J.K. Maksvell «O regulyatorax» degan ilmiy ishida mashina-regulator sistemasi harakatining differensial tenglamalarini tuzib, kichik tebranishlar nazariyasiga asosan tenglamalarni statsionar harakat atrofida chiziqlashtiradi. Maksvell bo'yicha mashina-regulator sistemasining statsionar harakati turg'un bo'lishi uchun xarakteristik tenglama ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishi kerak. Maksvell uchinchi darajali xarakteristik tenglamalar uchun ildizlarning haqiqiy qismi manfiy bo'lishining yetarli va zaruriy shartlarini topdi [58]. 1868-yilning o'zida u London matematiklar jamiyati oldiga ixtiyoriy darajali tenglamalar uchun bunday shartlarni topish masalasini qo'yadi. Maksvell qo'ygan muammoni bir necha yildan keyin E.J. Raus to'rtinchi va beshinchi darajali tenglamalar uchun yechdi.

1877-yilda u Maksvell va Stoks tavsiyasiga asosan yozgan «Ustoychivost zadannogo sostoyaniya dvijeniya» ishida bu masalani ixtiyoriy darajali xarakteristik tenglamalar uchun yechdi.

1877–1884-yillarda E.J. Raus [116,117] siklik koordinatali konservativ golonom sistemalar statsionar harakatining turg'unlik shartlarini, 1879-yilda esa U. Tomson (lord Kelvin) va P. Tet giroskopik va dissipativ kuchlarning harakat turg'unligiga ta'sirini o'rganib, bir qator teoremalarni yaratdilar [112].

1876-yilda I.A. Vishnegradskiy o'zining «O regulyatorax pryamogo deystviya» ishida markazdan qochma regulator bilan ta'minlangan bug' mashinasi harakatining turg'unligini tadqiq etadi [17]. U kichik tebranishlar nazariyasini qo'llab, mashina va regulator orasidagi munosabatni to'g'ri aks etdiruvchi harakat tenglamalarini tuzib, sistema harakatining turg'unligini tekshirish masalasini uchinchi darajali xarakteristik tenglamani tekshirishga, ya'ni algebraik masalaga keltirdi. U xarakteristik tenglama ildizlarining haqiqiy qismi manfiy ishorali bo'lishi uchun yetarli va zarur bo'lgan shartlarni topdi. Bu shartlarning ajoyib geometrik talqinini berdi. Shuning uchun ham I.A.Vishnegradskiyni o'z-o'zini avtomatik rostlash nazariyasining asoschisi deb hisoblaydilar.

1882-yilda N.E. Jukovskiy o'zining doktorlik dissertatsiyasida [32] har xil usullardan foydalanib harakat turg'unligining bir qator umumiy masalalarini o'rgandi.

1893-yilda slovak muhandisi, Syurix politexnikumi professori A. Stodola I.A. Vishnegradskiyning chiziqli nazariyasini regulatorlar harakatini tadqiq etishga qo'llar ekan, yuqori darajali algebraik tenglamalarda barcha ildizlarning haqiqiy qismi manfiy ishorali bo'lish shartlarini topish zaruriyatiga duch keldi. Maksvell va Raus ishlaridan bexabar holda u o'zining do'sti Syurix politexnikumining matematigi A. Gurvitsdan haqiqiy koeffitsientli n-tartibli algebraik tenglamada barcha ildizlarning haqiqiy qismi manfiy bo'lishining yetarli va zarur shartlarini topishni iltimos qiladi. Taxminan 25 yil avval Maksvell qo'ygan masalani va 15 yil oldin Raus yechgan masalani Gurvits fransuz olimi Ermit ishlariga tayanib, 1893-yilda qaytadan yechadi:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \qquad (a_0 > 0)$$

ko'phad barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishi uchun

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \qquad (a_k = 0, \quad k > n)$$

Gurvits determinantining bosh minorlari musbat (ya'ni $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$) bo'lishi yetarli va zarurdir. Gurvitsning bu kriteriysi shakl jihatidan Raus kriteriysidan farq qilsa-da, mazmunan u bilan birdir. Hozirgi vaqtda bu tengsizliklarni Raus–Gurvits tengsizliklari (kriteriysi) deb ataydilar.

Agar Gurvits determinantining bosh minorlari musbat bo'lsa, u holda ko'phadning barcha koeffitsiyentlari $a_1 > 0$, $a_2 > 0, ..., a_n > 0$ bo'ladi. Bu holni fransuz matematiklari Lenar va Shipar tadqiq etib, 1914-yilda yangi turg'unlik kriteriysini kashf etishga muyassar bo'ldilar. Ularning kriteriysi bo'yicha hisob-kitoblar Raus–Gurvits kriteriysiga nisbatan qariyb ikki baravar kamayadi.

Yuqorida nomlari keltirilgan olimlarning ba'zi natijalari va tadqiq etish usullari hozirgi kunda ham o'z ahamiyatini yo'qotgani yo'q.

O'sha vaqtdagi ishlarning asosiy kamchiligi quyidagilardan iborat: toyilgan harakatning tenglamalarini tadqiq etishda mualliflar toyilgan harakatning chiziqlashtirilgan tenglamalarini tekshirib, yuqori tartibli hadlarning harakatga ta'sirini hisobga olmas edilar. Masalan, agarda toyilgan harakatning tenglamalari

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\alpha x_2 + \alpha x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha x_1 + \alpha x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

ko'rinishda bo'lsa, bu tenglamalarni

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\alpha x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha x_1 \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

tenglamalar sistemasi bilan almashtirib, harakatning turg'un yoki noturg'un ekanligini (a) tenglamalar sistemasi bilan emas, balki (b) tenglamalar sistemasi orqali aniqlash tavsiya etilgan. Ammo harakatning turg'unligi haqida (b) tenglamalarga asoslanib olingan natija (a) tenglamalar sistemasi bo'yicha olingan natijaga umuman olganda mos kelmaydi.

1892-yilda A.M. Lyapunov o'zining "Obschaya zadacha ob ustoychivosti dvijeniya" nomli doktorlik dissertatsiyasida hozirgi zamon turg'unlik nazariyasining asosini yaratdi [52]. Turg'unlikning umumiy ta'rifi berildi, turg'unlikni tadqiq etishning ikkita usuli yaratildi (usullarning asosini u bergan turg'un, asimptotik turg'un va noturg'un harakatlar haqidagi teoremalar tashkil etadi), birinchi yaqinlashish bo'yicha harakatning turg'un va noturg'unligi haqidagi teoremalar tavsiya etildi,

xarakteristik sonlar nazariyasi ishlab chiqildi, oddiy kritik hollarda harakatning turg'unlik masalalari yechimi topildi. Xususan, A.M. Lyapunov birinchi bo'lib, Lagranj teoremasining teskarisini topish masalasini qo'yib, ikki xususiy hol uchun uning yechimini berdi va h.k.

N.G. Chetayev [101–104] ham harakatning turg'unlik nazariyasiga katta hissa qo'shdi: noturg'unlik haqida umumiy teorema yaratdi, nostatsionar harakatlarning noturg'unligi haqidagi teoremalarni ishlab chiqdi, Lyapunov funksiyasini tuzishning samarali usulini berdi, Lagranj teoremasining teskarisini bir qator hollar uchun yaratdi va h.k.

Lyapunovdan keyin harakatning turg'unlik nazariyasi turli yo'nalishlar bo'yicha rivojlandi. Lyapunov qo'llagan usullar chuqurlashtirildi va u olgan natijalar oydinlashtirildi, Lyapunov tomonidan turg'unlik nazariyasiga kiritilgan tushunchalar kengaytirildi. Jumladan, ko'p olimlarning e'tibori chekli vaqt oralig'ida, boshlang'ich shartlar katta bo'lganda, uzluksiz ta'sir etuvchi toydiruvchi kuchlar hamda tasodifiy kuchlar ta'sir etayotganda turg'unlik shartlarini topishga qaratilgan edi.

Uzluksiz ta'sir etuvchi toydiruvchi kuchlar ta'siri ostidagi harakatlarning turg'unligiga oid 1936–1955-yillar davomida olib borilgan tadqiqot ishlarida N.G. Chetayev, I.G. Malkin, I.L. Massera, E.A. Barbashin, N.N. Krasovskiy, V.E. Germaidze va K.P. Persidskiyning xizmatlari benihoyat kattadir.

E.A. Barbashin, N.P. Yerugin, V.A. Pliss va N.N. Krasovskiylar 1950–1955-yillar davomida har qanday kattalikdagi toyilishlar uchun asimptotik turg'unlikning yetarli shartlarini ishlab chiqdilar.

1957-yilda V.V. Rumyansev Lyapunovning ikkinchi usulini o'zgaruvchilarning faqat bir qismiga nisbatan harakat turg'unligini tadqiq etishni talab qiladigan dinamik sistemalarga joriy etdi.

1949-yilda N.N. Bautin turg'unlik sohasining chegarasi yaqinida dinamik sistemaning xulqini tadqiq etib, turg'unlik sohasining «xavfli» va «xavfsiz» chegaralari degan tushunchalarni kiritdi.

Avtomatika, radiotexnika, boshqarish va rostlash nazariyalarida paydo bo'lgan yangi turg'unlik masalalarini yechish uchun Naykvist, Mixaylov, Popov kriteriylari hamda Neymarkning D-bo'laklash usuli yaratildi.

Dinamik sistemalarda sodir etilishi mumkin bo'lgan noturg'unlikning mexanizmini va sababini bilish faqatgina to'g'ri ideallashtirish uchun emas, balki ayrim hollarda tebranma harakat va noturg'unlik paydo bo'lmasligi uchun sistema konstruktsiyasiga qanday o'zgartirishlar kiritish kerakligini bilish uchun ham zarurdir. Bu keyingi holat juda ham katta amaliy ahamiyatga ega. Y.I. Neymark 1955-yilda turg'unlik va noturg'unlik hodisalarini tekshirishga fizika nuqtayi nazaridan yondashib, ikkita teorema yaratdi va bu teoremalar orqali dinamik sistemada yuz berishi mumkin bo'lgan noturg'unlikning mexanizmini va sababini ko'rsatdi, harakat turg'unligiga kuchlar tarkibining ta'sirini izohlab berdi.

Nogolonom sistemalar turg'unligi va kichik tebranishlari masalasi bo'yicha E. Uitekker, O. Bottema, M.A. Ayzerman va F.R. Gantmaxer, A.N. Obmorshev, G.N. Knyazev, Y.I. Neymark va N.A. Fufayev, V.V. Rum-

yansev, A.V. Karapetyan, A.Y. Krasinskiy, I.E. Emelyanova, B. Atajanov, H.T. To‘raev va boshqalar shug‘ullanganlar.

XX asrning 60-yillarigacha olimlar o‘rtasida nogolonom sistemalar muvozanat holatlarining turg‘unligini tadqiq etish masalasida yagona yondashish yo‘q bo‘lib, hatto, turg‘unlikni tekshirish usullari borasida ham bir qator qarama-qarshiliklar bor edi.

1965-yilda Y.I. Neymark va N.A. Fufayev nogolonom sistemalarda muvozanat holatlari yakkalangan holda mavjud bo‘lmasligi va ular o‘lchovi kamida nogolonom bog‘lanishlar soniga teng bo‘lgan (ko‘pxillik) sirt tashkil qilishlarini ko‘rsatdilar. Nogolonom sistemalar harakati tenglamalarining xarakteristik tenglamalari: 1) m ta nol ildizga ega, bu yerda m – nogolonom bog‘lanishlar soni; 2) uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa simmetrik emas (golonom sistemalarda simmetrik bo‘ladi).

Nogolonom sistemalarda muvozanat holatlari sirtining mavjudligi sababli ular harakatining turg‘unligini muvozanat holatlari sirtiga nisbatan qo‘yish (yakkalangan muvozanat holati atrofida emas) lozim.

Nogolonom sistemalarning statsionar harakatlari xuddi golonom sistemalarnikidek fazaviy fazo va konfiguratsiyalar fazosida biror o‘lchamli sirtni tashkil qiladi. Shuning uchun bu yerda ham statsionar harakatlar sirtining turg‘unligi tadqiq etilgandagina masala korrekt qo‘yilgan bo‘ladi.

E. Urunbayev harakatning turg‘unligini EHM vositasi bilan tadqiq etish usullarini yaratdi. U determinantning elementlari polinomial hadlar bo‘lgan holda uni yoyish usuli, Gurvits, Lenar va Shipar, Mixaylov va Naykvist kriteriylari, umumlashgan Shturm qatori hamda D-bo‘laklash usuli asosida sistema parametrlari tekisligida turg‘unlik sohalarini yasashni avtomatlashtirish usullari va ko‘rilayotgan sistema konstruktiv parametrlarining turg‘unlik sohalarining chegaralariga ta’sirini o‘rganish uchun hisoblash eksperimentlarini o‘tkazish uslubini ishlab chiqdi [93–97].

Turg‘unlik nazariyasi fizika, kimyo, astronomiya, biologiya, radioelektronikada, texnikada keng qo‘llaniladi.

Shuni ta’kidlaymizki, turg‘unlik nazariyasi hali ham mukammal holatga keltirilgan emas, unda yechilmagan masalalar juda ko‘p. U yildan-yilga rivojlanib bormoqda. Bu rivojlanishga butun dunyo olimlari, shu jumladan, O‘zbekiston olimlari ham o‘z hissalarini qo‘shmoqdalar.

I B O B. UMUMIY TUSHUNCHALAR VA TA'RIFLAR

1- §. Harakatning turg'unlik nazariyasi mavzusi haqida

Harakatning turg'unlik nazariyasi *moddiy sistema (tizim) harakatiga toydiruvchi (qo'zg'atuvchi) omillarning ta'sirlarini tadqiq etish bilan shug'ullanuvchi fandir.* Toydiruvchi omillar (faktorlar) sifatida moddiy sistema harakatiga ta'sir etuvchi asosiy kuchlarga nisbatan yetarlicha kichik bo'lgan va shuning uchun ham harakatning matematik modelini tuzishda hisobga olinmaydigan kuchlar qaraladi. Bu kuchlarning ta'sir etish tartibi aslida aniq emas. Ular bir onda ta'sir qilishi mumkin, natijada moddiy sistemaning dastlabki holati – koordinata va tezliklarning dastlabki qiymati bir ozgina o'zgaradi. Shuningdek, toydiruvchi omillar sistema harakatiga uzluksiz ta'sir etishi ham mumkin. Buning natijasida biz tuzgan matematik model aslidan farq qiladi, chunki unda kichik tuzatuvchi hadlar hisobga olinmagan bo'ladi.

Aniqki, kichik toydiruvchi omillarning moddiy sistema harakatiga ta'siri har xil harakatlar uchun bir xil bo'lmaydi. Ayrim harakatlarga ularning ta'siri bilinmas darajada, ya'ni toyilgan harakatning toyilmagan harakatdan farqi kam bo'ladi. Aksincha, boshqa harakatlarga toydiruvchi omillarning ta'siri sezilarli darajada bo'lib, toydiruvchi kuchlar qanchalik kichik bo'lmasin, toyilgan harakat toyilmagan harakatdan ancha farq qiladi. Birinchi turdagi harakatni *turg'un* va ikkinchi turdagi harakatni *noturg'un* (turg'un emas) *harakat* deb aytamiz.

Harakatning turg'unlik nazariyasi *ko'rilayotgan harakatning turg'un yoki noturg'un ekanligini aniqlab beruvchi belgilarni (alomatlarni) topish bilan shug'ullanadi.* Hayotda toydiruvchi omillar doimo mavjud bo'lganligi uchun harakatning turg'unligi masalasi benihoyat katta nazariy va amaliy ahamiyatga egadir.

Harakatning turg'unlik masalasi bilan ko'pgina buyuk matematik va mexanik olimlar shug'ullanishgan. Muvozanat holatining turg'unligi to'g'risidagi teoremani 1788-yilda Lagranj yaratgan edi [51]. Bu ishga asoslanib Raus olib borgan izlanishlar ayrim xususiy hollarda harakatning turg'unlik belgilarini topishga turtki berdi. Turg'unlik masalalari bilan U. Tomson va P.G. Tet (1810), J.K. Maksvell (1868), I.A. Vishnegradskiy (1877), N.E. Jukovskiy (1882), Stodola, Gurvits ham shug'ullandilar. Bu olimlar o'z tadqiqotlarida harakatning xususiy hollarinigina qaraganlar va uncha asoslanmagan usullardan foydalanganlar. Masalaning birinchi qat'iy yechimi fransuz olimi Puankarega taalluqli. Ammo Puankarening natijalari xususiy xarakterga ega edi.

1892-yilda A.M. Lyapunov «Obschaya zadacha ob ustoychivosti dvijeniya» mavzusida doktorlik dissertatsiyasini himoya qildi. Bu dissertatsiyada harakatning turg'unlik masalasi keng ma'noda qo'yildi va uni yechishning qat'iy usullari ko'rsatildi. Lyapunovning bu ishi turg'unlikni tadqiq etishda kelgusi hamma ilmiy izlanishlar uchun asos bo'ldi.

Yuqorida biz harakatning turg'un va noturg'unligi tushunchalarini sxematik ravishda ifodaladik. Bu tushunchalarga aniq ta'rif birinchi bo'lib A.M. Lyapunov tomonidan berilgan [52].

Mazkur kitob harakatning Lyapunov ma'nosidagi turg'unlik nazariyasi va uning tatbiqlari masalalariga bag'ishlanadi.

2- §. Turg'un harakat. Toyilgan harakatning differensial tenglamasi

2.1. Turg'un harakatning ta'riflanishi

Harakatning turg'unligi haqidagi tushuncha muvozanat holatining turg'unligi to'g'risidagi tushunchaning bevosita umumlashmasidir.

$q_1, q_2, ..., q_k$ umumlashgan koordinatalar bilan aniqlangan va k erkinlik darajasiga ega bo'lgan ixtiyoriy dinamik sistemani ko'rib o'taylik. Faraz qilaylik, ko'rilayotgan sistema $q_i = \alpha_i$ $(i = \overline{1,k})$ muvozanat holatiga ega bo'lsin. Demak, harakat tenglamasi $q_i = \alpha_i$ xususiy yechimga ega bo'ladi. Ushbu

$$q_i(t_0) = \alpha_i + \varepsilon_i, \qquad \dot{q}_i(t_0) = \dot{\varepsilon}_i \qquad (i = 1,2,...,k)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi sistemaning harakatini ko'raylik.

Agar hamma shunday turdagi harakatlar uchun vaqtning $t = t_0$ qiymatida ε_i boshlang'ich chetlanishlar va $\dot{\varepsilon}_i$ $(i = 1,2,...,k)$ boshlang'ich tezliklar yetarlicha kichik musbat η sondan kichik bo'lganda koordinatalar chetlanishi (og'ishi) $q_i = \alpha_i$ va $\dot{q}_i$ tezliklarning absolut miqdori hamma vaqt $(t > t_0)$ istalgancha kichik musbat ε sondan kichikligicha qolsa, u holda muvozanat holati **turg'un** deb aytiladi. Aks holda muvozanat holati **noturg'un** deb aytiladi.

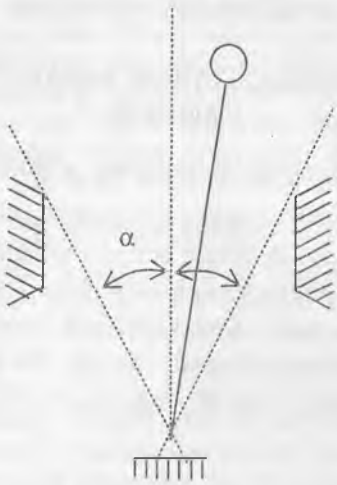
Mayatnikning quyi va yuqori vertikal holati mos ravishda turg'un va noturg'un muvozanat holatiga oddiy misol bo'la oladi.

Turg'unlik ta'rifidan quyidagi ikkita asosiy tasdiq kelib chiqadi:

1) Muvozanat holatining turg'un yoki noturg'unligi unga yaqin harakatlarning xarakteriga qarab aniqlanadi.

2) Muvozanat holati turg'un bo'lishi uchun sistemaning bu muvozanat holatidan boshlang'ich toyilishi va boshlang'ich tezligini shunday tanlab olish zarurki, ularning har biri berilgan istalgancha kichik sondan kichik bo'la olsin.

Masalan, 1.1- shaklda ko'rsatilgan mayatnikning yuqori muvozanat holati α burchak har qancha kichik bo'lishiga qaramasdan, harakatning boshlang'ich shartlarini qanday qilib olishimizdan qat'iy nazar, mayatnikning muvozanat holatdan toyilishini α burchakdan kichik qilib bo'lmaydi.



1.1- shakl.

Muvozanat holatining turg'unligini qanday aniqlagan bo'lsak, harakatning Lyapunov bo'yicha turg'unligini ham xuddi shunday aniqlaymiz.

Quyidagi matematik model (differensial tenglamalar) bilan aniqlangan ixtiyoriy dinamik sistemani ko'raylik:

$$\frac{dY_s}{dt} = Y_s(t, y_1, y_2, ..., y_n) \quad (s = 1,2,...,n), \qquad (1.2.1)$$

bu yerda y_s – harakat bilan bog'liq bo'lgan parametrlar, masalan, koordinata va tezliklar yoki umuman shu miqdorlarga bog'liq bo'lgan funksiyalar.

Ko'rilayotgan sistemaning $y_s = f_s(t)$ xususiy yechimiga mos kelgan harakatini **toyilmagan harakat** deb, sistemaning $f_s(t)$ dan farq qiluvchi qolgan barcha $y_s(t)$ harakatlarini **toyilgan harakatlar** deb aytamiz.

$y_s(t) - f_s(t)$ ayirmalarning qiymatlari **toyilishlar** deb aytiladi.

1- ta'rif. *Agar har qanday kichik* $\varepsilon > 0$ *son uchun shunday musbat* $\eta(\varepsilon)$ *son mavjud bo'lsaki, barcha* $y_s = y_s(t)$ *toyilgan harakatlar uchun* $t = t_0$ *boshlang'ich paytda*

$$|y_s(t_0) - f_s(t_0)| \le \eta \tag{1.2.2}$$

munosabatning bajarilishidan barcha $t > t_0$ lar uchun

$$|y_s(t) - f_s(t)| < \varepsilon \tag{1.2.3}$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda toyilmagan harakat $y_s(s = \overline{1,n})$ *miqdorlarga nisbatan* ***turg'un*** *deb aytiladi.*

Toyilmagan harakat turg'un bo'lmasa, **u noturg'un** deb aytiladi. Shunday qilib, harakatning noturg'un bo'lishi uchun shunday musbat kichik ε son mavjud bo'lishi va har qanday istalgancha kichik η son uchun (1.2.2) munosabatni qanoatlantiruvchi birorta toyilgan harakat uchun hech bo'lmaganda biror payt $(t = t')$ da (1.2.3) tengsizlikning bajarilmasligi (tenglikka aylanishi) yetarlidir.

2- ta'rif. *Agar toyilmagan harakat* y_s *miqdorlarga nisbatan turg'un bo'lsa va shunday istalgancha kichik* $\delta > 0$ *son mavjud bo'lsaki,* $t = t_0$ *paytda*

$$|y_s(t_0) - f_s(t_0)| < \delta \tag{1.2.4}$$

munosabatning bajarilishidan $t > t_0$ *lar uchun*

$$\lim_{t \to \infty} |y_s(t) - f_s(t)| = 0 \tag{1.2.5}$$

bo'lishligi kelib chiqsa, u holda toyilmagan harakat y_s *miqdorlarga nisbatan* ***asimptotik turg'un*** *deb aytiladi.*

3- ta'rif. *Agar* $t \to \infty$ *da* $y_s(t)$ *toyilgan harakat* $f_s(t)$ *toyilmagan harakatga* t_0 *ga nisbatan tekis intilsa, u holda toyilmagan harakat* t_0 *ga* ***nisbatan tekis asimptotik turg'un*** *deb aytiladi.*

4- ta'rif. *Agar* $y_s(t)$ *toyilgan harakat* $f_s(t)$ *toyilmagan harakatga* $t \to \infty$ *da* $y_s(t_0)$ *boshlang'ich shartlarga nisbatan tekis intilsa, u holda* $y_s = f_s(t)$ *toyilmagan harakat* $y_s(t_0)$ *boshlang'ich shartlarga nisbatan* ***tekis asimptotik turg'un*** *deb aytiladi.*

Agar (1.2.1) sistema avtonom bo'lsa, ya'ni o'ng tarafidagi Y_s funksiyalar oshkor ravishda t ga bog'liq bo'lmasa, u holda toyilmagan harakat doimo boshlang'ich shartlarga nisbatan tekis asimptotik turg'un bo'ladi. Bu natijaga 1949-yilda I.L. Masser erishgan [53].

5- ta'rif. *Agar* $y_s = f_s(t)$ *toyilmagan harakat Lyapunov bo'yicha turg'un bo'lib va (1.2.5) munosabat istalgan boshlang'ich shartlar uchun bajarilsa, u holda toyilmagan harakat batamom asimptotik turg'un deyiladi.*

2.2. Toyilgan harakatning differensial tenglamalari

Turg'unlikni tadqiq etish uchun (1.2.1) differensial tenglamalarda y_s o'zgaruvchilar o'rniga yangi x_s o'zgaruvchilar kiritamiz:

$$x_s(t) = y_s(t) - f_s(t) \qquad (s = \overline{1,n}). \qquad (1.2.6)$$

bu yerda $f_s(t)$ – toyilmagan harakatga mos keluvchi (1.2.1) ning xususiy yechimi, $y_s(t)$ – toyilgan harakatga mos keluvchi (1.2.1) ning xususiy yechimi, $x_s(t)$ – toyilishning miqdori.

Yangi o'zgaruvchilarga nisbatan (1.2.1) differensial tenglamalarning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (s = \overline{1,n}), \qquad (1.2.7)$$

bu yerda

$$X_s(t, x_1, x_2, ..., x_n) = Y_s(t, x_1 + f_1, ..., x_n + f_n) - Y_s(t, f_1, ..., f_n). \qquad (1.2.8)$$

Xuddi shu (1.2.7) tenglamalar *toyilgan harakatning differensial tenglamalari* deb aytiladi.

Ravshanki, (1.2.8) munosabatga ko'ra $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ trivial yechim $y_s = f_s(t)$ toyilmagan harakatga mos keluvchi toyilgan harakatning muvozanat holati bo'ladi.

Shunday qilib, (1.2.6) munosabat orqali yangi $x_s(t)$ o'zgaruvchilar kiritilganligi tufayli, toyilgan harakatning $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ muvozanat holatiga (1.2.1) tenglamaning $y_s = f_s(t)$ toyilmagan harakati mos keladi va aksincha. Demak, $y_s = f_s(t)$ toyilmagan harakatning turg'unlik masalasi (1.2.7) differensial tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi toyilgan harakat muvozanat holatining turg'unlik masalasiga keltirildi. Bundan o'z navbatida, toyilgan harakatning muvozanat holati turg'un (asimptotik turg'un) ligidan toyilmagan harakatning ham turg'un (asimptotik turg'un) bo'lishligi kelib chiqadi.

Yangi $x_s(t)$ o'zgaruvchilar uchun (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4) va (1.2.5) munosabatlar mos ravishda quyidagi ko'rinishlarga ega bo'ladi:

$$|x_s(t_0)| \le \eta, \tag{1.2.9}$$

$$|x_s(t)| < \varepsilon, \tag{1.2.10}$$

$$|x_s(t_0)| < \delta, \tag{1.2.11}$$

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0. \tag{1.2.12}$$

Endi (1.2.7) sistemaning $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ muvozanat holati uchun turg'unlik ta'rifini beraylik.

6- ta'rif. *Agar har qanday istalgancha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday musbat $\eta(\varepsilon)$ sonni tanlab olish mumkin bo'lsaki, hamma toyilgan harakatlar uchun boshlang'ich $t = t_0$ vaqtda (1.2.9) munosabatning bajarilishidan $t > t_0$ lar uchun (1.2.10) tengsizlikning bajarilishi kelib chiqsa, u holda toyilmagan harakat (toyilgan harakatning $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ muvozanat holati) turg'un deb aytiladi.*

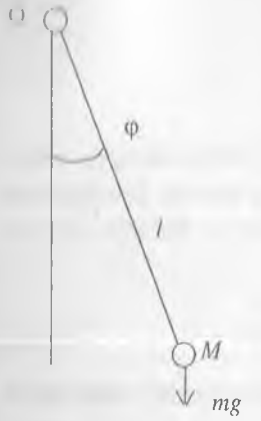
7- ta'rif. *Agar toyilmagan harakat turg'un va $\delta > 0$ sonni shunday tanlash mumkin bo'lsaki, (1.2.11) tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha toyilgan harakatlar uchun (1.2.12) munosabat bajarilsa, u holda toyilmagan harakat asimptotik turg'un deb aytiladi.*

Xuddi shu tarzda tekis asimptotik turg'unlik va batamom asimptotik turg'un tushunchalarini ham keltirish mumkin.

Endi toyilgan harakat tenglamasini tuzishga oid misollar ko'rib chiqaylik.

3- §. Toyilgan harakat tenglamalarini tuzishga doir misollar

1 - m i s o l. Matematik mayatnik toyilgan harakatining tenglamasi



1.2-shakl.

Matematik mayatnik tebranma harakatining differensial tenglamasi

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi$$

yoki

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.3.1}$$

ko'rinishda bo'lishini bilamiz, bu yerda $\varphi = \varphi(t)$ – mayatnikning vertikal o'qdan og'ish burchagi. $\varphi(0) = \alpha$, $(\dot{\varphi})_0 = 0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi harakatning φ va $\dot{\varphi}$ larga nisbatan turg'unligini tekshirish masala-

sini ko'raylik (1.2-shakl). (1.3.1) dinamik sistemaning berilgan boshlang'ich shartlarga mos keluvchi xususiy yechimi $\varphi = f(t)$ ko'rinishda bo'ladi, bunda $f(t)$ – biror davriy funksiya (analitik ko'rinishi bizga zarur emas).

Ushbu $x = \varphi(t) - f(t)$ yangi o'zgaruvchini kiritib, (1.3.1) dan quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}\sin(x + f(t)) + \frac{g}{l}\sin f(t),$$

yoki $\sin(x + f(t))$ ni x bo'yicha qatorga yoyib,

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x\cos f(t) + \frac{g}{2l}x^2 \sin f(t) + \ldots \qquad (1.3.2)$$

ga kelamiz. U matematik mayatnik toyilgan harakatini ifodalovchi izlangan differensial tenglamadir.

2 - m i s o l. Qo'zg'almas nuqta atrofida inersiya bo'yicha aylanayotgan qattiq jism toyilgan harakatining tenglamasi

Ma'lumki, qo'zg'almas nuqta atrofida inersiya bo'yicha aylanayotgan qattiq jismning differensial tenglamasi quyidagi sistema ko'rinishida bo'ladi (nazariy mexanikaga doir ixtiyoriy o'quv qo'llanmani ko'ring):

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = 0, \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = 0, \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.3)$$

bu yerda p, q, r – oniy burchak tezlikning jism mahkamlangan nuqtadagi bosh inersiya o'qlariga mos keluvchi qo'zg'aluvchi koordinatalar sistemasidagi proyeksiyalari, A, B, C – shu o'qlarga nisbatan inersiya momentlari.

(1.3.3) tenglamalar

$$p = \omega = \text{const}, \qquad q = r = 0 \qquad (1.3.4)$$

xususiy yechimga va yana qolgan ikki o'qqa mos keluvchi xuddi shunday ikkita xususiy yechimga ($p = r = 0$, $q = \omega = \text{const}$; $p = q = 0$, $r = \omega = \text{const}$) ega.

(1.3.3) harakatni toyilmagan harakat sifatida qabul qilib va quyidagi yangi

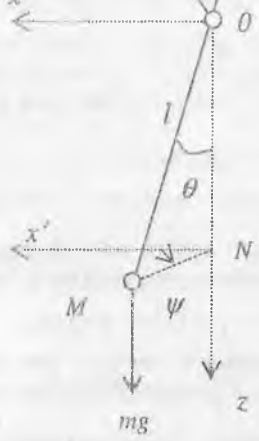
$$x = p - \omega, \quad y = q, \quad z = r$$

o'zgaruvchilarni (1.3.3) ga qo'ysak, toyilgan harakatning differensial tenglamalari sistemasiga kelamiz:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dx}{dt} + (C-B)\,yz = 0, \\ B\frac{dy}{dt} + (A-C)(x+\omega)z = 0, \\ C\frac{dz}{dt} + (B-A)(x+\omega)y = 0. \end{aligned}\right| \qquad (1.3.5)$$

3 - m i s o l. Konik (konussimon) mayatnik toyilgan harakatining differensial tenglamalari

Dastlab, O nuqtada vaznsiz OM ipda osilgan m massali M moddiy nuqtani ko'raylik. Ipning uzunligi l ga teng bo'lsin. M moddiy nuqtaning holatini ψ va θ burchaklar orqali aniqlaymiz (1.3- shaklga qarang).



1.3- shakl.

Bu sferik mayatnikning kinetik va potensial energiyalari mos ravishda

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta),$$

TDU KUTUBXONASI
JIXOZ 365819

$$\Pi = -mgl\cos\theta \tag{1.3.6}$$

bo‘ladi. Ushbu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}$$

Lagranj tenglamalaridan foydalanib, sferik mayatnik harakatining differensial tenglamalarini tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} &ml^2\ddot{\theta} - ml^2\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta = 0,\\ &ml^2\dot{\psi}\sin^2\theta + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta = 0. \end{aligned}\right| \tag{1.3.7}$$

(1.3.7) sistema birmuncha soddalashtirishlardan so‘ng,

$$\left.\begin{aligned} &ml^2\ddot{\theta} - ml^2\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta = 0,\\ &\ddot{\psi} = -2\dot{\theta}\dot{\psi}\operatorname{ctg}\theta. \end{aligned}\right| \tag{1.3.8}$$

ko‘rinishga keladi. (1.3.8) sistemani birinchi tartibli normal differensial tenglamalar sistemasiga keltirish uchun quyidagi

$$\theta = y_1, \quad \dot{\theta} = y_2, \quad \dot{\psi} = y_3 \tag{1.3.9}$$

yangi o‘zgaruvchilarni kiritamiz. Yangi o‘zgaruvchilarda sferik mayatnik harakatining differentsial tenglamalari sistemasi

$$\left.\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2,\\ &\dot{y}_2 = -\frac{g}{l}\sin y_1 + y_3^2\sin y_1\cos y_1,\\ &\dot{y}_3 = -2y_2y_3\operatorname{ctg} y_1 \end{aligned}\right| \tag{1.3.10}$$

ko‘rinishga keladi.

Endi gorizontal joylashgan aylana bo‘ylab o‘zgarmas tezlikda harakat qilayotgan mayatnik (konussimon mayatnik)ni ko‘raylik. Bu holda

$$\begin{aligned} &\theta = y_1 = f_1(t) = \alpha = \text{const},\\ &\dot{\theta} = y_2 = f_2(t) = 0, \qquad (1.3.11)\\ &\dot{\psi} = y_3 = f_3(t) = \omega = \text{const} \end{aligned}$$

bo‘ladi.

y_1, y_2 va y_3 larning bu qiymatlarini (1.3.10) ga qo‘yib, ushbu konussimon mayatnik parametrlari qanoatlantirishi lozim bo‘lgan

$$\omega^2 \cos\alpha = \frac{g}{l} \qquad (1.3.12)$$

munosabatni topamiz.

(1.3.11) tengliklar bilan aniqlangan harakatni toyilmagan harakat sifatida qabul qilamiz. U holda yuqorida bayon etilgan nazariyaga asosan

$$y_1 = \alpha + x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = \omega + x_3. \qquad (1.3.13)$$

y_1, y_2, y_3 larning (1.3.13) tengliklar bilan aniqlanadigan qiymatlarini (1.3.10) sistemaga qo'yib (α va ω larning o'zgarmas sonlar ekanligini hisobga olib), toyilgan harakatning differensial tenglamalari sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(\alpha + x_1) + (\omega + x_3)^2 \sin(\alpha + x_1)\cos(\alpha + x_1), \\ \dot{x}_3 &= -2x_2(\omega + x_3)\operatorname{ctg}(\alpha + x_1). \end{aligned}\right| \qquad (1.3.14)$$

(1.3.14) sistema differensial tenglamalarining o'ng tarafidagi funksiyalar ((1.3.12) tenglikni hisobga olganimizda) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ nuqtada nolga aylanadi, ya'ni $X_s(0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ shartlar bajariladi. Bu funksiyalarni muvozanat holati atrofida x_1, x_2 va x_3 lar bo'yicha qatorga yoyib va faqat chiziqli hadlarni qoldirib, quyidagi birinchi yaqinlashish tenglamalari sistemasini hosil qilamiz ((1.3.12) tenglikni hisobga olganda):

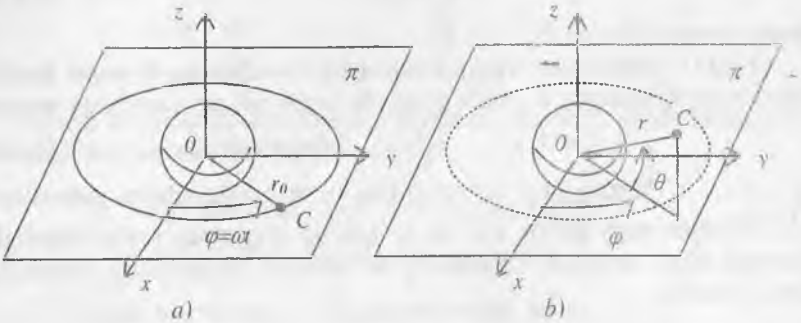
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= (\omega^2 \cos 2\alpha - \frac{g}{l}\cos\alpha)x_1 + \omega \sin 2\alpha \cdot x_3, \\ \dot{x}_3 &= -2\omega \operatorname{ctg}\alpha \cdot x_2. \end{aligned}\right| \qquad (1.3.15)$$

4 - m i s o l. Yer sun'iy yo'ldoshi massa markazi toyilgan harakatining differentsial tenglamalari

Yer sun'iy yo'ldoshiga faqat Yerning tortish kuchlari ta'sir etadi deb faraz qilamiz. Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi F sun'iy yo'ldosh massasining markaziga ta'sir etadi va uning moduli

$$F = \mu \frac{m}{r^2} \qquad (1.3.16)$$

butun olam tortishish qonuni bilan aniqlanadi deb qabul qilamiz.



1.4- shakl.

Bu yerda $\mu = gR^2 = fM$ – Yerning gravitatsion parametri, R – Yer sharining radiusi, g – Yer tortish kuchining tezlanishi, M – Yer massasi, f – gravitatsion doimiysi, $r=OC$ – Yer markazi O dan sun'iy yo'ldosh massa markazi C gacha bo'lgan masofa, m – sun'iy yo'ldosh massasi.

Yer sun'iy yo'ldoshi massa markazining (π) tekislikda yotgan va radiusi r_0 bo'lgan doira bo'yicha tekis harakatini ko'ramiz (1.4,*a*-shakl). Bunday harakat Yer sun'iy yo'ldoshining statsionar harakati deb ham aytiladi. Sun'iy yo'ldosh statsionar harakatining parametrlarini qanoatlantiruvchi shartni bevosita Nyutonning

$$mr_0\omega^2 = \mu\frac{m}{r_0^2},\ (\omega^2 r_0^3 = \mu \quad \text{yoki} \quad \omega = \sqrt{\mu / r_0^3}) \qquad (1.3.17)$$

ikkinchi qonunidan foydalanib topamiz, bu yerda $\omega = \dot{\varphi} = \text{const}$ – sun'iy yo'ldosh radius-vektori r_0 aylanishining statsionar harakatidagi burchak tezligi.

Sun'iy yo'ldoshning statsionar harakatiga $t = t_0$ vaqtda qandaydir toydiruvchi kuchlar oniy ravishda ta'sir etdi deb faraz qilaylik. Masalan, raketaning oxirgi bosqichidan sun'iy yo'ldoshning ajralishi paytida uning radiusi r_0 bo'lgan doira bo'yicha tekis harakat qilishga sharoit yaratib beradigan shartlar ozgina buzilishi mumkin. Natijada, sun'iy yo'ldoshning harakati toyilgan bo'ladi, xususan, endi u doira bo'yicha harakat qilmaydi, radius-vektor aylanishining burchak tezligi $\varphi \neq \sqrt{\mu / r_0^3}$ bo'ladi, harakat (π) tekislikda yuz bermaydi va h.k.

Yer sun'iy yo'ldoshining toyilgan harakati differensial tenglamalarini keltirib chiqarish uchun $Oxyz$ koordinatalar sistemasini shunday tuzamizki, uning xy koordinata tekisligi (π) tekislik bilan ustma-ust tushsin.

Yer sun'iy yo'ldoshi massasi markazining toyilgan harakatdagi holatini r, φ, θ sferik koordinatalar orqali aniqlaymiz (1.4,*b*-shakl). Sun'iy yo'ldoshning kinetik va potensial energiyalari mos ravishda

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\cos^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2), \quad \Pi = -\mu\frac{m}{r} \tag{1.3.18}$$

tengliklar orqali aniqlanadi.

Sun'iy yo'ldoshning statsionar harakati turg'unligini $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}$ va φ miqdorlarga nisbatan o'rganamiz. Buning uchun uning toyilgan harakati tenglamasini Lagranjning

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (q_j = r, \theta, \varphi) \tag{1.3.19}$$

tenglamasidan foydalanib tuzamiz. Avval r koordinata uchun tenglamani tuzishda zarur bo'ladigan hosilalarni (1.3.18) dan foydalanib topamiz:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\cos^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{\mu m}{r^2}.$$

Bu ifodalarni r koordinata uchun (1.3.19) tenglamaga qo'yib,

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\cos^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2 = -\mu\frac{m}{r^2} \tag{A}$$

ni hosil qilamiz. Toyilgan harakat tenglamasini tuzish uchun, qoidaga asosan, $r = r_0 + x$, $\varphi = \omega + y$ deb qabul qilamiz va ularni (A) ga qo'yib, so'ngra m ga bo'lib,

$$\ddot{x} - (r_0 + x)\dot{\theta}^2 - (r_0 + x)\cos^2\theta\cdot(\omega + y)^2 = -\frac{\mu}{(r_0 + x)^2} \tag{1.3.20}$$

ni hosil qilamiz. Xuddi shu tarzda ish yuritib,

$$(r_0 + x)\ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta} + (r_0 + x)\cos\theta\sin\theta\cdot(\omega + y)^2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[(r_0 + x)^2\cos^2\theta\sin\theta\cdot(\omega + y)] = 0$$

tenglamalarni ham keltirib chiqaramiz. Endi (1.3.20) va (1.3.21) toyilgan harakat tenglamalarini normal differensial tenglamalar ko'rinishiga keltiramiz. Buning uchun yangi

$$x = x_1, \quad \dot{x} = x_2, \quad \theta = x_3, \quad \dot{\theta} = x_4, \quad y = x_5$$

o'zgaruvchilarni kiritamiz. Bularni (1.3.20) va (1.3.21) tenglamalarga qo'yib va ularni hosilalar bo'yicha yechib, Yer sun'iy yo'ldoshining toyilgan harakati differensial tenglamalarining normal ko'rinishiga ega bo'lamiz:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= (r_0 + x_1)[x_4^2 + \cos^2 x_3(\omega + x_5)^2] - \frac{\mu}{(r_0 + x_1)^2}, \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= -2\frac{x_2 x_4}{r_0 + x_1} - \frac{1}{2}(\omega + x_5)^2 \sin 2x_3, \\
\dot{x}_5 &= -2\frac{x_2}{r_0 + x_1}(\omega + x_5) + 2x_4(\omega + x_5)\operatorname{tg} x_3.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.22)$$

Bu tenglamalarning o'ng tarafidagi funksiyalar $x_1 = x_2 = \ldots = x_5 = 0$ koordinata boshida ((1.3.17) ni hisobga olganda) nolga aylanadi, ya'ni $X_s(0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ shart bajariladi.

(1.3.22) tenglamalar sistemasining birinchi yaqinlashish tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= s\omega^2 x_1 + 2r_0\omega x_5, \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= -2\omega^2 x_3, \\
\dot{x}_5 &= -2\frac{\omega}{r_0} x_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.23)$$

Bu tenglamalarni keltirib chiqarishda (1.3.17) tenglik inobatga olingan.

4-§. Statsionar va nostatsionar harakatlar

Yana umumiy holga, ya'ni toyilgan harakatning (1.2.7) tenglamasiga qaytaylik.

Toyilgan harakat tenglamasidagi $X_s(t,x_1,...,x_n)$ funksiyalar vaqtning $t \geq t_0$ bo'lgan ixtiyoriy qiymatlari uchun muvozanat holatini qamrab oluvchi

$$|x_s(t)| \leq H \tag{1.4.1}$$

sohada aniqlangan, uzluksiz va uzluksiz xususiy hosilalarga ega, ya'ni shu sohada $x_1, x_2, ..., x_n$ argumentlarning golomorf (analitik) funksiyalari bo'lsin, bu yerda N – ixtiyoriy yetarlicha kichik musbat son. Shu shartda ularni

$$X_s = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n + \sum P_s^{(m_1,m_2,...,m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n} \tag{1.4.2}$$

qatorga yoyish mumkin, bu yerda

$$p_{s\sigma} = \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_\sigma}\right)_0, \qquad (s,\sigma = 1,2,...,n), \tag{1.4.3}$$

$$P_s^{(m_1,m_2,...,m_n)} = \frac{1}{m_1!\ m_2!\ ...m_n!}\left(\frac{\partial^{(m_1+m_2+...+m_n)} X_s}{\partial x_1^{m_1}\ \partial x_2^{m_2}\ ...\ \partial x_n^{m_n}}\right)_0 \tag{1.4.4}$$

$m_1 + m_2 + ... + m_n > 1$, $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$, $(m = 2,3,...)$, O belgisi esa hosila olingandan keyin $x_1,...,x_n$ lar o'rniga $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ ni qo'yishni bildiradi.

(1.4.2) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$X_s = X_s^{(1)} + X_s^{(2)} + ... + X_s^{(m)} + ..., \tag{1.4.5}$$

bu yerda

$$X_s^{(1)} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n, \tag{1.4.6}$$

$$X_s^{(m)} = \sum P_s^{(m_1,m_2,...,m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n}. \tag{1.4.7}$$

Bu yig'indi hamma butun manfiy bo'lmagan va $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$ $(m = 2,3,...)$ shartni qanoatlantiruvchi $m_1, m_2, ..., m_n$ sonlar bo'yicha

olinadi. Shunday qilib, $X_s^{(1)}$ *ifoda* $x_1, x_2, ..., x_n$ larga nisbatan chiziqli bo'lgan hadlar majmuasini, $X_s^{(m)}$ *ifoda esa* $x_1, x_2, ..., x_n$ larga nisbatan m-darajali hadlar majmuasini bildiradi. $X_s^{(m)}$ ko'phaddagi har xil o'xshash bo'lmagan hadlar soni

$$N = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m} = \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}$$

ga teng. Masalan, $X_s^{(2)}$ ko'phaddagi, ya'ni n o'zgaruvchili kvadratik formadagi har xil hadlar soni

$$N = \frac{n(n+1)}{2}$$

ga teng bo'ladi.

X_s funksiyalar umumiy holda oshkora ravishda t ga bog'liq bo'lishi mumkin. Shuning uchun ham (1.4.2) dagi koeffitsiyentlar t vaqtning uzluksiz funksiyalari bo'ladi. Bu holda toyilmagan harakatni **nostatsionar** *harakat* deb ataymiz.

Amalda X_s funksiyalar oshkora ravishda t ga bog'liq bo'lmaydigan hollar ham uchraydi. Buning natijasida (1.4.2) yoyilmadagi koeffitsiyentlar haqiqiy o'zgarmas sonlar bo'ladi. Bu holda toyilmagan harakatni **statsionar** *harakat* deb ataymiz. Statsionar va nostatsionar degan tushunchalarni A.M. Lyapunovning o'zi kiritgan edi. Masalan, toyilgan harakatning (1.3.23) differensial tenglamalari oshkor ravishda t vaqtga bog'liq emas. Shuning uchun bu harakat statsionar harakat bo'ladi. Ko'p amaliy masalalar xuddi shunday holga keltiriladi.

Tebranma harakatni ifoda etuvchi differensial tenglamalarning o'ng tarafidagi funksiyalar t ga nisbatan davriy funksiyalardir. Masalan, 1-misoldagi matematik mayatnikning harakatini ifodalovchi (1.3.14) tenglamaning o'ng tarafidagi funksiya t ga nisbatan davriy, chunki tenglama ifodasida qatnashuvchi $f(t)$ – davriy funksiya.

5 - §. Uzluksiz ta'sir etadigan toydiruvchi kuchlar ta'siridagi harakatning turg'unligi haqida

Yuqorida tanishilgan Lyapunov kiritgan ta'riflarda toyilmagan harakatning turg'unligi boshlang'ich shartlarning toyilishiga nisbatan ko'riladi, ya'ni turg'unlik masalasi oniy ravishda ta'sir etadigan toydiruvchi omillarga nisbatan qaraladi. Ammo real mexanik (fizik va b.) sistema

miqdor jihatidan uncha katta bo'lmagan doimiy ta'sir etib turuvchi kuchlar ta'siri ostida bo'ladi. Sistemaning harakat tenglamasini tuzayotganda bu kuchlarni amaliy jihatdan hisobga olish deyarli mumkin emas. Shuning uchun ham toyilmagan harakatning turg'unligini uzluksiz ta'sir etib turadigan toydiruvchi omillarga nisbatan tadqiq etish muhim amaliy ahamiyatga egadir. Bu esa o'z navbatida matematik nuqtayi nazardan, turg'unlikni tadqiq etish jarayonida nafaqat boshlang'ich shartlarning toyilishini, balki harakat tenglamasining toyilishini ham hisobga olish kerakligini anglatadi.

Uzluksiz ta'sir etib turadigan toydiruvchi omillar ta'siridagi harakatning turg'unligiga oid 1936–1955 yillar davomida olib borilgan tadqiqot ishlarida N.G. Chetayev, I.G. Malkin, I.L. Massera, E.A. Barbashin, N.N. Krasovskiy, V.E. Germaidze va K.P. Persidskiyning xizmatlari katta dir ([53] ning 20–21, 302–307 betlariga qarang) [8,11,21–23,25,40, 53,55,102].

Uzluksiz ta'sir etib turadigan toydiruvchi omillar ta'siridagi harakat turg'unligining quyidagi ta'rifini beramiz.

Dinamik sistemaga oniy ravishda toydiruvchi omillar ta'sir etgandagi harakat tenglamasi

$$\frac{dY_s}{dt} = Y_s(t, y_1, y_2, ..., y_n) \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (1.5.1)$$

ko'rinishda ekanligini ko'rgan edik.

Dinamik sistemaga toydiruvchi omillar uzluksiz ta'sir etib turganda harakat tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{dY_s}{dt} = Y_s(t, y_1, y_2, ..., y_n) + R_s(t, y_1, y_2, ..., y_n) \ (s = \overline{1,n}), \qquad (1.5.2)$$

bu yerda $R_s(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ – toydiruvchi omillarni ifodalovchi noma'lum funksiyalar. Ular yetarlicha kichik va (1.5.2) tenglamaning ko'rilayotgan toyilmagan harakat atrofidagi yechimini ta'minlovchi ba'zi umumiy shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalardir.

8- ta'rif. *Agar har qanday istalgancha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday ikkita boshqa musbat $\eta_1(\varepsilon)$ va $\eta_2(\varepsilon)$ sonlar topilib, $\{t > t_0;\ |y_s - f_s(t)| < \varepsilon\}$ sohada*

$$|R_s(t, y_1, y_2, ..., y_n)| < \eta_2(\varepsilon) \qquad (1.5.3)$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi $R_s(t, y_1, ..., y_n)$ funksiyalarning qanday bo'lishidan qat'iy nazar (1.5.2) tenglamalarning har qanday $y_s(t)$ yechimi uchun t vaqtning $t = t_0$ paytida

$$|y_s(t_0) - f_s(t_0)| < \eta_1(\varepsilon) \qquad (1.5.4)$$

munosabatning bajarilishidan $t \geq t_0$ *bo'lganda*

$$|y_s(t) - f_s(t)| < \varepsilon \qquad (1.5.5)$$

tengsizliklarning hamma vaqt bajarilishi kelib chiqsa, u holda uzluksiz ta'sir etadigan toydiruvchi omillar ta'siridagi $y_s = f_s(t)$ *toyilmagan harakat ((1.5.1) tenglamaning xususiy yechimi) turg'un deb aytiladi.*

Shu tarzda aniqlangan uzluksiz toydiruvchi omillar ta'siridagi toyilmagan harakatning turg'unlik tushunchasi Lyapunov bo'yicha turg'unlik tushunchasining bevosita umumlashmasi bo'lib, katta amaliy ahamiyatga egadir.

Birinchi qarashda Lyapunovning turg'unlik nazariyasi qiymatsizlangandek ko'rinishi mumkin. Ammo aslida bunday emas, chunki, birinchidan, Lyapunov yaratgan usullar uzluksiz ta'sir etadigan toydiruvchi omillar ta'siridagi toyilmagan harakatlarning turg'unligini tadqiq etishda ham yaraydi.

Ikkinchidan, amaliy jihatdan eng zarur hollarda, toydiruvchi omillar uzluksiz ta'sir etib turgandagi turg'unlik masalasi bevosita Lyapunov ma'nosidagi turg'unlik masalasiga keltiriladi. Uchinchidan, statsionar va davriy harakatlarning asimptotik turg'unligi toydiruvchi omillar uzluksiz ta'sir etib turgandagi harakatning turg'un bo'lishi uchun yetarli shart ekanligi isbotlangan [53].

Yuqorida keltirilgan mulohazalardan shu narsa kelib chiqadiki, turg'unlikning Lyapunov bergan ta'rifi muhim amaliy ahamiyatga ega. Ammo amaliy masalalarda dinamik sistema harakatining nafaqat turg'unligini, balki boshlang'ich toyilishning mumkin bo'lgan sohasini ham aniqlash talab etiladi. Keyingi masala bilan A.M. Lyapunov shug'ullangan bo'lmasa ham, u yaratgan usullar bu masalani yechishga imkoniyat yaratadi.

Yuqorida berilgan asosiy ta'riflarni sharhlash uchun bir nechta oddiy misollar ko'raylik.

1- misol. Toyilgan harakatning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y, \qquad \frac{dy}{dt} = +\alpha x, \qquad (1.5.6)$$

bu yerda α – haqiqiy o'zgarmas son. Tenglamalarning o'ng tarafidagi $F(x,y) \equiv -\alpha y$ va $G(x,y) \equiv \alpha x$ funksiyalar t vaqtga bog'liq emas hamda x va y larning barcha haqiqiy qiymatlari uchun golomorfdir. Demak, toyilmagan harakat statsionar harakatdir.

(1.5.6) differensial tenglamalarning umumiy yechimi

$$x = x_0 \cos\alpha(t-t_0) - y_0 \sin\alpha(t-t_0),$$
$$y = x_0 \sin\alpha(t-t_0) + y_0 \cos\alpha(t-t_0) \qquad (1.5.7)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda x_0, y_0 lar x va y larning $t = t_0$ vaqtga mos keluvchi boshlang'ich qiymatlari (boshlang'ich toyilish) dir.

(1.5.7) tenglamalardan

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 \qquad (1.5.8)$$

ga bo'lamiz. Shuning uchun ham har qanday musbat ε son uchun shunday $\eta = \varepsilon$ son topiladiki, $t = t_0$ vaqtda x_0, y_0 larning

$$x_0^2 + y_0^2 \le \eta^2$$

tengsizlikni qanoatlantirishidan, (1.5.8) ga asosan, $t > t_0$ da

$$x^2 + y^2 \le \varepsilon^2$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, toyilmagan harakat, ya'ni (1.5.6) tenglamalarning $x = y = 0$ muvozanat holati turg'un bo'ladi.

2- **misol.** Toyilgan harakatning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha y, \qquad \frac{dy}{dt} = \alpha x, \qquad (1.5.9)$$

bu yerda α – haqiqiy o'zgarmas son. Bu tenglamalarning umumiy yechimi

$$x = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{1}{2}(x_0 - y_0)e^{-\alpha(t-t_0)},$$
$$y = \frac{1}{2}(x_0 + y_0)e^{\alpha(t-t_0)} - \frac{1}{2}(x_0 - y_0)e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (1.5.10)$$

ko'rinishga ega, bu yerda x_0, y_0 lar x va y larning $t = t_0$ vaqtga mos keluvchi boshlang'ich qiymatlari. (1.5.10) ifodasidan ko'rinib turibdiki, (1.5.9) differensial tenglamalarning $x = y = 0$ muvozanat holati (toyilmagan harakat) turg'un emas, chunki x_0 va y_0 larning istalgancha kichik qiymatlari uchun ham x va y larning qiymati t bilan birgalikda chegaralanmagan holda o'sadi va $|x_s(t)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilmaydi.

6-§. Turg‘unlik masalasini yechish usullari haqida

Agarda toyilgan harakatning differensial tenglamalarini integrallash mumkin bo‘lganda edi, turg‘unlik masalasini tadqiq etishda hech qanday qiyinchiliklarga duch kelinmasdi. Ammo bunday holllar juda ham oz uchraydi, amaliy masalalarda esa deyarli uchramaydi. Shuning uchun ham tadqiqotchilar differensial tenglamalarni integrallamasdan, turg‘unlik masalasini yechish usullarini topish ustida ishladilar. Lyapunovdan oldin o‘tgan tadqiqotchilar asosan chiziqlashtirish usulidan foydalanar edilar. Bu usul quyidagidan iborat.

Toyilgan harakatning tenglamasi

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (1.6.1)$$

berilgan, $X_s(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar esa $|x_s(t)| \le H$ (N–yetarlicha kichik musbat son) sohada aniqlangan, uzluksiz va uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. $X_s(t, 0, 0, ..., 0) \equiv 0$ bo‘lganligi uchun $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ (1.6.1) dinamik sistemaning muvozanat holati (toyilmagan harakat) bo‘ladi. $X_s(t, x_1, ..., x_n)$ funksiyalarni shu muvozanat holati atrofida (golomorfligi uchun) $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarning darajalari bo‘yicha qatorga yoyib, (1.6.1) sistemani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n + X_s^*(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad (s = \overline{1,n}), \quad (1.6.2)$$

bu yerda X_s^* ifoda X_s funksiyalar yoyilmasidagi darajasi birinchidan yuqori bo‘lgan hadlar majmuasidan iborat, ya’ni nochiziqli funksiya. Turg‘unlik masalasi ko‘rilayotganda, odatda (1.6.2) ning yechimi x_s o‘zgaruvchilarning yetarlicha kichik boshlang‘ich qiymatlari uchungina qaraladi. Tabiiyki, bunday holda x_s yechimlarning xarakteri (1.6.2) tenglamalardagi birinchi darajali hadlar bilan aniqlanadi deb o‘ylash mumkin. Boshqacha qilib aytganda, turg‘unlik masalasini yechish uchun

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (1.6.3)$$

chiziqli tenglamani tadqiq etish kifoya degan xulosaga kelish mumkin. (1.6.3) differensial tenglamalarga (1.6.2) tenglamalar sistemasining **birinchi yaqinlashish tenglamalari** deb aytiladi.

Tomson va Tet, Raus, Gurvits, N.E. Jukovskiy, Maksvell, Vishnegradskiy turg‘unlik masalalarini xuddi shu usuldan foydalanib tadqiq etgan edilar [17,32,112,116,117]. Bu holda masala ancha soddalashadi

va statsionar harakatlar uchun p_{sj} koeffitsiyentlar o'zgarmas sonlar bo'lganligidan (1.6.3) differensial tenglamalarni yopiq shaklda integrallash mumkin.

Ammo bu yo'sinda masalanini yechilishi qat'iy emas va, umuman aytganda, noto'g'ri bo'lishi mumkin. Aslida (1.6.2) chiziqlimas statsionar tenglamalarni (1.6.3) chiziqli tenglamalar bilan almashtirish, bir masalani ikkinchi bir masala bilan almashtirish degan so'zdir. Bunda almashtirilgan ikkinchi masala birinchisiga umuman bog'liq bo'lmay qolishi ham mumkin. Ikkinchidan, toyilmagan harakat aslida noturg'un bo'lsa ham, birinchi yaqinlashish tenglamalarini tadqiq etish natijasida turg'un bo'lib qolishi ham mumkin va, aksincha. Bu holatni quyidagi misolda kuzatsa bo'ladi.

1- misol. Toyilgan harakatning differensial tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$\frac{dx}{dt} = -y + ax^3, \quad \frac{dy}{dt} = x + ay^3, \tag{1.6.4}$$

bu yerda a -o'zgarmas son. Bu tenglamalarning ixtiyoriy yechimlarini $x(t)$ va $y(t)$ lar deylik. Dastavval, (1.6.4) tenglamalarni hisobga olib, $x^2(t) + y^2(t)$ ifodaning hosilasini olamiz:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) = x(t)[-y(t) + ax^3(t)] +$$
$$+ y(t)[x(t) + ay^3(t)] = a[x^4(t) + y^4(t)]. \tag{1.6.5}$$

Bunda ikki hol bo'lishi mumkin.

1. $a > 0$ bo'lsin. U vaqtda $\frac{d}{dt}[x^2(t) + y^2(t)] > 0$ bo'ladi va, demak, $x^2(t) + y^2(t)$ funksiya t ning o'sishi bilan o'sadi. Bu funksiyaning o'sishi natijasida va (1.6.5) ning o'ng tomoniga asosan uning vaqt bo'yicha olingan hosilasi ham o'sadi. Shunday qilib, boshlang'ich $x(t_0)$ va $y(t_0)$ shartlar yetarlicha kichik bo'lganda ham $x^2(t) + y^2(t)$ funksiya t ning o'sishi bilan o'sadi, demak, toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

2. $a < 0$ bo'lsin. Bu holda toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi, chunki $\frac{d}{dt}[x^2(t) + y^2(t)] < 0$ va $x^2(t) + y^2(t)$ funksiya musbat bo'lib qolgan holda, doimo kamayadi va 0 ga intiladi, ya'ni

$\lim_{t\to\infty}[x^2(t)+y^2(t)]=0$. Demak, toyilmagan harakatning turg'un yoki noturg'un bo'lishi dinamik sistema a parametrining ishorasiga bog'liq ekan.

Ikkinchidan, (1.6.4) dinamik sistemaning birinchi yaqinlashish tenglamalari

$$\frac{dx}{dt}=-y,\quad \frac{dy}{dt}=x \tag{1.6.6}$$

ko'rinishda bo'ladi. (1.6.6) tenglamalarning umumiy yechimi

$$x=x_0\cos t-y_0\sin t,\quad y=x_0\sin t+y_0\cos t \tag{1.6.7}$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda x_0, y_0 lar x va y larning $t=t_0=0$ paytdagi boshlang'ich qiymatlaridan iborat.

Yetarlicha kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\eta<\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$ sonni tanlab olamizki, $t=t_0=0$ da $|x_0|\le\eta$, $|y_0|\le\eta$ tengsizliklarning bajarilishi va (1.6.7) tenglamalarga asosan $t>t_0$ bo'lganda hamma vaqt

$$|x|<\varepsilon,\quad |y|<\varepsilon$$

ning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, toyilmagan harakat birinchi yaqinlashishda turg'un bo'ladi. Ammo bu turg'unlik, (1.6.7) ga asosan, asimptotik bo'lmaydi. Yuqorida biz ko'rdikki, (1.6.4) real sistema $a<0$ da asimptotik turg'un va $a>0$ da noturg'un bo'ladi. Shunday qilib, toyilmagan harakatning xarakterini (1.6.4) differensial tenglamalardagi yuqori darajali hadlar aniqlaydi.

Boshqa tomondan, yana shunday hollar mavjudki, ularda birinchi yaqinlashishda turg'unlik masalasi to'liq yechiladi. Shuning uchun ham **birinchi yaqinlashishda turg'unlikning yetarli va zaruriy shartlarini aniqlash masalasi** paydo bo'ladi. Bu masalani dastlab Lyapunov qo'ygan va statsionar hamda davriy harakatlar uchun uning to'liq yechimini bergan. Lyapunov tomonidan nostatsionar harakatlarning keng sinfi uchun ham turg'unlik masalasi yechib berilgan.

Shunday qilib, Lyapunov birinchi bo'lib turg'unlik masalalarini yechish uchun:

1) qachon birinchi yaqinlashish sistemasini tadqiq etish kifoya ekanligini;

2) qachon toydirilgan harakat tenglamalaridagi yuqori darajali hadlarni hisobga olgan holda tadqiqotni o'tkazish kerakligini ko'rsatdi.

Qo'yilgan masalalarni echish uchun Lyapunov maxsus usullar yaratdi. Turg'unlik masalalarini yechishning hamma usullarini u ikki kategoriyaga

(toifaga) bo'ladi. Birinchi kategoriyaga toydirilgan harakat tenglamalarining umumiy yoki xususiy yechimlarini bevosita topish usullarini kiritgan. Bu echimlarni odatda qatorlar ko'rinishida izlaydilar. Birinchi kategoriyadagi hamma usullar majmuasini Lyapunov **birinchi usul** deb atagan.

Ammo turg'unlik masalalarini yechishning boshqa usullarini ham ko'rsatish mumkin. Bu usullarda toydirilgan harakat tenglamalarining umumiy yoki xususiy yechimlarini topish talab etilmaydi. Bu yerda maxsus xususiyatlarga ega va $t, x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan qandaydir funksiyalar izlanadi. Ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi bunday funksiyalarning mavjudligi turg'unlik masalasini hal qiladi. Ikkinchi kategoriyadagi hamma usullar majmuasini Lyapunov turg'unlikni tadqiq etishning **ikkinchi usuli** deb atagan.

Ikkinchi usulning asosi sifatida Lyapunov o'zi yaratgan va isbot qilgan bir nechta asosiy teoremalarni olgan. Bu teoremalar shunday samarali bo'lib chiqdiki, ularning yordamida turg'unlik masalasini birinchi yaqinlashish usuli bilan osongina hal etish mumkin bo'ldi. Shu bilan birga ular yordamida qanday hollarda birinchi yaqinlashish usuli bilan turg'unlik masalasi yechilmasligi va masalani yechish uchun tenglamadagi yuqori darajali hadlarni hisobga olish kerakligi aniqlanadi.

Quyida Lyapunovning ikkinchi usuli uchun asos bo'lib xizmat qiluvchi asosiy teoremalar va ularning tatbiqlari yoritiladi.

II B O B. STATSIONAR HARAKATLAR UCHUN LYAPUNOVNING IKKINCHI USULI

1- §. Lyapunov funksiyalari. Aniq ishorali va o'zgaruvchan ishorali funksiyalarning alomatlari

Biz bundan keyin faqat statsionar harakatlarni ko'rib o'tamiz. Bu hol uchun toyilgan harakatning differensial tenglamalari

$$\frac{dX_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (2.1.1)$$

ko'rinishda bo'ladi. X_s funksiya oshkora ravishda t vaqtga bog'liq emas. Lyapunov o'zining tadqiqotlarida X_s funksiyani $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning darajalari bo'yicha qatorga yoyiluvchi va bu qator

$$|x_s| \le H \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (2.1.2)$$

sohada yaqinlashuvchi deb faraz qilgan edi, bu yerda N – o'zgarmas kichik son. Ammo Lyapunov ikkinchi usulining hamma hollari va ularga bog'liq bo'lgan isbotlar umumiyroq farazlar uchun ham o'z kuchini saqlaydi. Aniqrog'i, X_s funksiyaning analitikligini (2.1.2) sohada uzluksiz va (2.1.1) tenglamalar (2.1.2) sohadagi x_s larning har bir boshlang'ich x_s^0 qiymatlar sistemasi uchun yagona yechimga ega bo'lishligini ta'minlovchi shartlar bilan almashtirish mumkin.

1.1. Lyapunov funksiyalari

$x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani ko'raylik. Bu funksiya koordinata boshini o'z ichiga olgan

$$|x_s| \le h \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (2.1.3)$$

sohada aniqlangan, bir qiymatli, uzluksiz, uzluksiz xususiy hosilalarga ega va $h \le H$ deb faraz qilamiz. Bu yerda h yetarlicha kichik musbat son va $V(0, 0, ..., 0) = 0$.

1- ta'rif. *(2.1.3) sohada faqatgina bir xil ishorali qiymatlar qabul qiluvchi $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya aniq ishorali deb aytiladi. Agar (2.1.3)*

sohada V faqat musbat qiymatlar qabul qilsa, u aniq musbat ishorali, faqat manfiy qiymatlar qabul qilganda esa aniq manfiy ishorali funksiya deb ataladi.

2- ta'rif. *Agar* $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiya (2.1.3) sohada faqatgina bir xil ishorali qiymatlar qabul qilib, shuning bilan birga koordinata boshidan tashqari boshqa* $(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \neq 0)$ *nuqtalarda ham nolga aylansa, u holda bunday funksiya o'zgarmas (o'zgarmas musbat yoki o'zgarmas manfiy) ishorali deb ataladi.*

3- ta'rif. *(2.1.3) sohada aniq ishorali ham, o'zgarmas ishorali ham bo'lmagan* $V(x_1, ..., x_n)$ *funksiyaga o'zgaruvchan ishorali deb ataladi.*

Demak, ta'rifga binoan o'zgaruvchan ishorali funksiya (2.1.3) sohada ham musbat, ham manfiy ishorali qiymatlar qabul qiladi.

Berilgan ta'riflarni misollarda tushuntiraylik. **Tushunish oson bo'lishi uchun** $n = 3$ **deb olamiz.** U vaqtda

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^4, \qquad V = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

funksiyalar aniq musbat ishorali bo'ladi. Bu funksiyalar uchun (2.1.3) tengsizlikdagi h **son istalgancha katta bo'lishi mumkin.**

$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3^3$ funksiya h **ning istalgancha yetarli kichik** qiymatlari uchungina aniq musbat ishorali bo'ladi.

$V = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$, $V = x_1^2 + x_2^2$ lar o'zgarmas ishorali funksiyalardir. Haqiqatan ham, birinchi funksiya $x_1 = -x_2$, $x_3 = 0$ va ikkinchisi $x_1 = x_2 = 0$ va ixtiyoriy x_3 qiymatlarda nol qiymat qabul qiladi.

$V = x_1$, $V = x_1^2 + x_2^2 - x_3^4$ lar o'zgaruvchan ishorali funksiyalar bo'ladi.

1.2. Funksiyalarning aniq ishoralilik va o'zgaruvchan ishoralilik alomatlari

Lyapunovning ikkinchi usulini amaliy masalalarni yechishga tatbiq etish uchun $V(x_1, ..., x_n)$ funksiyaning aniq ishorali va o'zgaruvchan ishorali ekanligini aniqlaydigan kriteriylarni bilish zarur. Afsuski, hozirgacha bunday turdagi umumiy kriteriylar mavjud emas va umumiy holda bu masala juda ham murakkabdir. Ammo, ko'plab xususiy hollar uchun bu masala biror sodda kriteriy yordamida hal etiladi. Bularning ayrimlarini (ba'zan isbotsiz) keltiramiz.

m tartibli bir jinsli $V(x_1, ..., x_n)$ forma berilgan bo'lsin. U vaqtda ixtiyoriy λ uchun

$$V(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^m V(x_1, ..., x_n)$$

bajarilishidan ravshanki, agar V aniq ishorali funksiya bo'lsa, u holda butun fazoda ham (nafaqat muvozanat holati atrofida) funksiyaning aniq ishoralilik xususiyati saqlanadi. Xuddi shunday, agar V funksiya o'zgaruvchan ishorali bo'lsa, u holda butun fazoda ham u o'zgaruvchan ishorali bo'ladi. O'z-o'zidan ko'rinib turibdiki, m-tartibli forma uchun, aniq ishoralilik faqatgina m juft son bo'lgandagina yuz berishi mumkin.

1-lemma. *Har qanday toq tartibli forma o'zgaruvchan ishorali funksiya bo'ladi.*

Agar m **juft son bo'lsa**, u holda V aniq ishorali ham, o'zgaruvchan ishorali ham bo'lishi mumkin. O'zgaruvchilarning soni ikkidan katta ($n > 2$) bo'lganda, ikkinchi tartiblidan yuqori bo'lgan formalar uchunoq yuqorida aytilgan ikki holning qaysi biri mavjud bo'lishini aniqlash ancha murakkab masaladir. Ikkinchi tartibli forma uchun (o'zgaruvchilar soni istalgancha bo'lishi mumkin) bu masala juda ham oddiy ravishda quyidagicha yechiladi.

Ushbu

$$2V = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (2.1.4)$$

kvadratik forma berilgan bo'lsin. Ma'lumki, (2.1.4) formani

$$V = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \qquad (2.1.5)$$

ko'rinishga keltiradigan determinanti nolga teng bo'lmagan cheksiz ko'p

$$y_s = a_{s1} x_1 + a_{s2} x_2 + \cdots + a_{sn} x_n \quad (s = \overline{1, n}) \qquad (2.1.6)$$

chiziqli almashtirishlar mavjud.

1. *Agar λ_s koeffitsiyentlarning barchasi nolga teng emas va bir xil ishorali bo'lsa, u holda V forma aniq ishorali bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda V faqat $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ bo'lgandagina nolga aylanadi. Bu hol, (2.1.6) ning determinanti nolga teng bo'lmaganligi uchun, faqat $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ bo'lgandagina yuz beradi.*

2. *Agar λ_s koeffitsiyentlarning bir qismi nolga teng bo'lib, qolganlari bir xil ishorali bo'lsa, u holda V forma o'zgarmas ishorali bo'ladi.*

3. *Agar λ_s koeffitsiyentlar orasida musbat ishoralisi ham, manfiy ishoralilari ham topilsa, u holda V forma o'zgaruvchan ishorali bo'ladi.*

Noldan farqli λ_s koeffitsiyentlarning soni va bu koeffitsiyentlar qatoridagi ishoralarning o'zgarish soni (2.1.6) almashtirishning qanday tanlanishiga bog'liq emas.

Berilgan kvadratik formaning aniq ishorali yoki o'zgaruvchan ishorali ekanligi Silvester kriteriysi yordamida aniqlanadi.

Silvester teoremasi. *(2.1.4) kvadratik forma aniq musbat ishorali bo'lishi uchun uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.1.7)$$

matritsaning hamma

$$\Delta = C_n, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \ \dots, \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

bosh minorlari musbat bo'lishi yetarli va zarurdir.

Ushbu teoremaning isboti F.R. Gantmaxerning [20] kitobida keltirilgan. Silvester kriteriysidan kvadratik formaning aniq manfiy ishorali bo'lishining yetarli va zaruriy shartini keltirib chiqarish mumkin:

(2.1.4) kvadratik forma aniq manfiy ishorali bo'lishi uchun

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0,\ \dots \qquad (2.1.8)$$

tengsizliklarning bajarilishi yetarli va zarurdir.

1- misol. Misol sifatida quyidagi funksiyani ko'ramiz:

$$V = 1 + \sin^2 x_1 - \cos(x_1 - x_2).$$

Bu funksiyani x_1 va x_2 darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\sin x_1 = x_1^2 + \dots, \quad \cos(x_1 - x_2) = 1 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \dots,$$

bu yerda nuqtalar bilan x_1 va x_2 larga nisbatan ikkidan yuqori darajali bo'lgan hadlar belgilangan. $\sin x_1$ va $\cos(x_1 - x_2)$ larning yoyilmalarini V funksiyaning ifodasiga qo'yib soddalashtirishlardan so'ng

$$V = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + \dots$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiyaning kvadratik formani tashkil etadigan barcha hadlarining koeffitsiyentlaridan

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsani tuzamiz. Bu matritsaning bosh diagonal minorlari

$$\Delta_1 = 3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

ga teng bo'ladi. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ bo'lgani uchun, Silvestr kriteriysiga asosan, V funksiya aniq musbat ishorali bo'ladi.

$V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya ixtiyoriy m- tartibli forma bo'lsin. Endi $W(0, 0, ..., 0) = 0$ va yetarlicha kichik qilinishi mumkin bo'lgan A musbat o'zgarmas son uchun

$$|W(x_1, x_2, ..., x_n)| < A\{|x_1| + ... + |x_n|\}^m \qquad (2.1.9)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani qaraymiz. Quyidagi tasdiq o'rinli.

2- lemma. *Agar V forma m-tartibli aniq ishorali bo'lsa, u holda (2.1.3) sohada (2.1.9) tengsizlikni qanoatlantiruvchi $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya uchun, uning qanday tanlab olinishiga bog'liq bo'lmagan holda*

$$U(x_1, x_2, ..., x_n) = V(x_1, x_2, ..., x_n) + W(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2.1.10)$$

forma ham ishorasi V ning ishorasi bilan bir xil bo'lgan aniq ishorali forma bo'ladi. Bu yerda (2.1.9) da ishtirok etuvchi A koeffitsiyent yetarlicha kichik musbat o'zgarmas son va faqat $V(x_1, ..., x_n)$ forma koeffitsiyentlariga bog'liq deb hisoblanadi.

Agar V o'zgaruvchan ishorali forma va yuqoridagi shartlar o'rinli bo'lsa, u holda U forma ham o'zgaruvchan ishorali.

Isbot. Dastavval

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 = 1 \qquad (2.1.11)$$

bo'ladigan ixtiyoriy α_1, α_2, ... α_n haqiqiy sonlar uchun

$$x_s = \rho\alpha_s, \qquad \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

deb belgilaymiz. U holda

$$U(x_1, x_2, ..., x_n) = \rho^m V(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + W(\rho\alpha_1, ..., \rho\alpha_n)$$

ga ega bo'lamiz.

V aniq ishorali, masalan, aniq musbat ishorali forma bo'lsin. x_s miqdorlar (2.1.3) sohada yotishi uchun ρ ni yetarli kichik son deb hisoblab, (2.1.9) va (2.1.11) lar asosida

$$|W(\rho\alpha_1,...,\rho\alpha_n)| < A\rho^m\{|\alpha_1|+...+|\alpha_n|\}^m < A\rho^m n^m \qquad (2.1.12)$$

munosabatni yoza olamiz.

Aytaylik, l son $V(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ formaning quyi chegarasi bo'lsin, ya'ni

$$V(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) \geq l. \qquad (2.1.13)$$

Musbat ishorali $V(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ forma (2.1.11) sferada faqat musbat qiymatlar qabul qilganligidan l albatta musbat son bo'ladi. Faqat V formaning koeffitsiyentlariga bog'liq bo'lgan A son, agar $\frac{l}{n^m}$ sondan kichik $\left(A < \frac{l}{n^m}\right)$ bo'lsa, u holda (2.1.3) sohaning koordinata boshidan tashqari hamma nuqtalarida, $U(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya (2.1.12) va (2.1.13) larga asosan, faqat musbat qiymatlar qabul qiladi. Demak, agar V aniq ishorali funksiya bo'lsa va $W(x_1,...,x_n)$ (2.1.9) tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $U(x_1,...,x_n)$ funksiya ham aniq ishorali bo'ladi.

V o'zgaruvchan ishorali forma bo'lganda, u (2.1.11) sferada ham musbat, ham manfiy ishorali qiymatlar qabul qiladi.

$$V(\alpha_1',\alpha_2',...,\alpha_n') = \alpha > 0 \quad \text{va} \quad V(\alpha_1'',\alpha_2'',...,\alpha_n'') = -b < 0$$

shunday qiymatlarning ixtiyoriy ikkitasi bo'lsin. Agar $A < \frac{a}{n^m}$ va $A < \frac{b}{n^m}$ deb qabul qilinsa, ρ qanchalik kichik bo'lmasin,

$$U(\alpha_1',\alpha_2',...,\alpha_n') > 0 \quad \text{va} \quad U(\alpha_1'',\alpha_2'',...,\alpha_n'') < 0$$

lar bajariladi. Demak, U forma o'zgaruvchan ishorali bo'ladi. Shunday qilib, lemma to'liq isbot bo'ldi.

2-lemmaga asoslangan quyidagi tasdiqlarni isbotsiz keltiramiz.

3- lemma. *Formaning aniq ishorali yoki o'zgaruvchan ishorali ekanligi unga koeffitsiyentlari yetarlicha kichik bo'lgan har qanday o'sha tartibli formani qo'shish bilan o'zgarmaydi.*

Endi

$$V(x_1,...,x_n) = V_m(x_1, x_2,..., x_n) + V^*(x_1,..., x_n) \qquad (2.1.14)$$

bo'lsin, bu yerda V_m forma m-tartibli, V^* esa m dan katta tartibli forma.

4- lemma. *Agar V_m aniq ishorali forma bo'lsa, u holda (2.1.14) bilan aniqlanadigan V ham aniq ishorali forma bo'ladi va agar V_m o'zgaruvchan ishorali forma bo'lsa, u holda V ham o'zgaruvchan ishorali forma bo'ladi.*

Shunday qilib, analitik funksiyalarning aniq ishorali yoki o'zgaruvchan ishorali ekanligini uning ifodasidagi eng kichik tartibli hadlarning majmuasi aniqlaydi.

Masalan, ikki argumentli $V(x,y) = x^2 + y^2 + xy^2 + y^3$ funksiya aniq ishorali va

$$V(x, y) = x^2 - y^2 + xy^2 + y^3$$

funksiya o'zgaruvchan ishorali funksiya bo'ladi.

Agar forma ifodasidagi eng kichik tartibli hadlarning majmuasi o'zgarmas ishorali bo'lsa, u holda uning aniq ishorali yoki o'zgaruvchan ishorali ekanligi masalasini yoyilmasidagi yuqori tartibli hadlar majmuasi hal qiladi.

Masalan, x va y argumentli quyidagi to'rtta funksiyani ko'raylik:

$$V = x^2,$$

$$V = x^2 - 2xy^2,$$

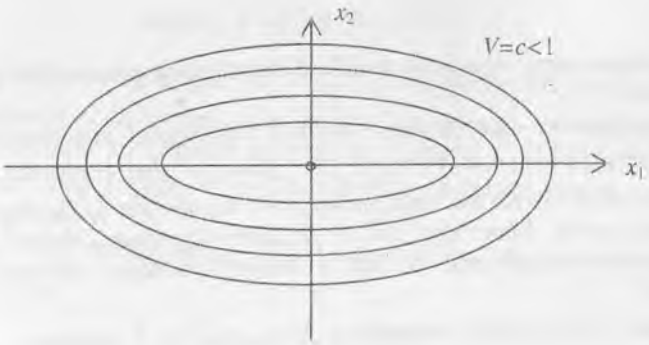
$$V = x^2 - 2xy^2 + y^4 + x^4 = (x - y^2)^2 + x^4,$$

$$V = x^2 - 2xy^2 + y^4 + x^4 + xy^5.$$

Bu funksiyalarning birinchisi **o'zgarmas musbat ishorali** forma, unga 3- tartibli $(-2xy^2)$ hadni qo'shib, ikkinchi funksiyani hosil qilamiz va u **o'zgaruvchan ishorali** bo'ladi. Hosil etilgan funksiyaga $(x^4 + y^4)$ to'rtinchi tartibli hadlarni qo'shib, uchinchi funksiyani hosil qilamiz va u **aniq ishoralidir**. Uchinchi funksiyaga xy^5 oltinchi tartibli hadni qo'shib, to'rtinchi funksiyani hosil qilamiz va u **o'zgaruvchan ishorali** forma bo'ladi.

Bu misolning yechimidan ushbu natija kelib chiqyapti: *agar biror funksiya hamma argumentlarining formasi bo'lmasa, u holda unga yuqori tartibli hadlarni qo'shish natijasida uning aniq ishorali yoki o'zgaruvchan ishorali ekanligini buzish mumkin.*

5-lemma. *Agar $V(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiya aniq ishorali bo'lsa, u holda shunday musbat h son topiladiki, barcha $|c| < h$ bo'lganda $V=s$ sirtlar koordinata boshi O ga nisbatan yopiq bo'ladi.*



2.1-shakl.

Kelgusida biz $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning xarakterini tadqiq etilayotgan differensial tenglamalarning traektoriyalari bo'ylab o'rganamiz va bu tadqiq natijasida ko'rilayotgan sistema traektoriyalarining xarakteri haqida ham xulosa chiqaramiz. Bunday maqsad uchun ishlatiladigan $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalarni **Lyapunov funksiyalari** deb atash qabul qilingan.

2- §. Harakat turg'unligi haqidagi Lyapunovning birinchi teoremasi

Endi Lyapunovning harakat turg'unligiga bag'ishlangan asosiy teoremalarini ko'rib o'tamiz. $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ argumentlari toyilgan harakat differensial tenglamalarining yechimlari deb qaraladi. U holda bu funksiyaning vaqt bo'yicha toyilgan harakat differensial tenglamalariga ko'ra olingan to'liq hosilasi

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} =$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}X_2 + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}X_n = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s$$

ga teng bo'ladi. Bu ifodani qisqacha

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s = W(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2.2.1)$$

ko'rinishda yozamiz. (2.2.1) ifodadan ko'rinib turibdiki,

$$V(0,0,...,0) \equiv W(0,0,...,0) \equiv 0.$$

Lyapunovning turg'unlik haqidagi birinchi teoremasi quyidagicha ifodalanadi.

Teorema A. *Agar toyilgan harakat differensial tenglamalari uchun shunday aniq ishorali* $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiya topish mumkin bo'lsaki, uning vaqt bo'yicha bu tenglamalarga ko'ra olingan to'liq hosilasi yoki V funksiyaning ishorasiga teskari bo'lgan o'zgarmas ishorali funksiya, yoki aynan nolga teng bo'lsa, u holda toyilmagan harakat turg'un bo'ladi.*

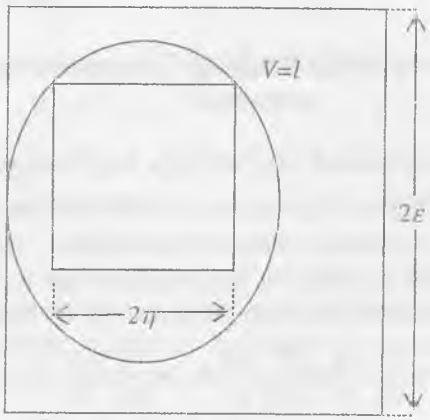
Isbot. Umumiylikni buzmasdan, $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya

$$|x_s| \le h \le H \qquad (s = \overline{1, n}) \tag{2.2.2}$$

sohada aniq musbat ishorali deb faraz qilamiz. Shu sohada, teoremaning shartiga ko'ra,

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s \le 0 \tag{2.2.3}$$

tengsizlik bajariladi.



2.2- shakl.

ε – ixtiyoriy yetarli kichik musbat son va $\varepsilon < h$ bo'lsin. $|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|$ sonlarning eng kattasini x bilan belgilaymiz, ya'ni

$$x = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\},$$

so'ngra

$$x = \varepsilon \tag{2.2.4}$$

munosabat bilan bog'langan $x_1, x_2, ..., x_n$ miqdorlarning barcha qiymatlari majmuasini ko'ramiz, ya'ni markazi koordinata boshi bilan ustma-ust tushadigan va qirralari koordinata o'qlariga parallel hamda tomoni 2ε ga teng bo'lgan n- o'lchovli kub yoqlarida yotgan hamma nuqtalarni qaraymiz.

$V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning (2.2.4) shart uchun aniq quyi chegarasi l bo'lsin, ya'ni

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) \geq l. \tag{2.2.5}$$

(2.2.2) sohada V faqat musbat qiymat qabul qilganligi uchun $l > 0$ bo'ladi. V (2.2.2) sohada uzluksiz bo'lganligidan uning (2.2.4) to'plamdagi aniq quyi chegarasi bu funksiyaning shu to'plamda qabul qiladigan qiymatlaridan bittasi bo'ladi.

Endi boshlang'ich qiymati $x_s^0 = x_s(t_0)$

$$\left|x_s^0\right| \leq \eta \tag{2.2.6}$$

shartni qanoatlantiradigan toyilgan harakat differensial tenglamalarining yechimi $x_s(t)$ ni ko'ramiz. η son ε dan kichik va u shunchalik kichik bo'lsinki,

$$V(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) < l \tag{2.2.7}$$

tengsizlik bajarilsin. η sonni ana shunday tanlab olish mumkin, chunki V uzluksiz funksiya va $V(0, 0, ... ,0) = 0$. $x_s(t)$ yechimlarni $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning ifodasiga qo'yib, t vaqtga bog'liq bo'lgan $V(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ ga ega bo'lamiz. Bu funksiya, (2.2.3) munosabatga asosan, (2.2.2) sohada kamayuvchi funksiya bo'ladi. Demak, $x_s(t)$ ning (2.2.2) sohada yotadigan hamma qiymatlari uchun

$$V(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \leq V(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) < l. \tag{2.2.8}$$

Bu munosabatdan barcha $t > t_0$ lar uchun

$$\left|x_s(t)\right| < \varepsilon \qquad (s = \overline{1, n}) \tag{2.2.9}$$

ning bajarilishi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, $\eta < \varepsilon$ bo'lganidan va $x_s(t)$ ning uzluksizligidan hech bo'lmaganda t ning t_0 ga yaqin qiy-

matlari uchun (2.2.9) tengsizliklar bajariladi. Agar bu tengsizliklar bajarilmasa, u holda vaqtning shunday $t = T$ payti topiladiki, shu paytda x_s larning hech bo'lmasa birortasining miqdori ε ga teng bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, shunday $t = T$ payt mavjud bo'ladiki, shu paytda (2.2.4) munosabat bajariladi va, demak, (2.2.5) ga asosan

$$V(x_1(T), x_2(T), ..., x_n(T)) \geq l$$

bo'lishi kerak. Ammo bunday bo'lishi mumkin emas, chunki $\varepsilon < h$ bo'lganligidan (2.2.4) to'plam (2.2.2) sohada yotadi, demak, $x = \varepsilon$ uchun (2.2.8) tengsizlik bajariladi.

Shunday qilib, (2.2.6) shartni qanoatlantiruvchi toyilgan harakat differensial tenglamalarining hamma $x_s(t)$ yechimlari barcha $t > t_0$ lar uchun (2.2.9) tengsizliklarni qanoatlantiradi. Demak, toyilmagan harakat (toyilgan harakatning muvozanat holati) turg'un bo'ladi.

Izoh. *Teoremaning keltirilgan isbotidan, berilgan ε son uchun amaliy masalalar uchun zarur bo'lgan η sonni topish algoritmi kelib chiqadi*:

1) Berilgan ε songa asosan (2.2.4) to'plamda $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning aniq quyi chegarasi $l(\varepsilon)$ topiladi;

2) $\eta(\varepsilon)$ sonni topilgan $l(\varepsilon)$ songa asosan shunday tanlash lozimki, $|x_s^0| < \eta$ tengsizliklarning bajarilishidan $V(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) < l$ kelib chiqsin.

$l(\varepsilon)$ sonni topish usulini ko'rsataylik. $V = \sum_{s,\sigma=1}^{n} A_{s\sigma} x_s x_\sigma$ musbat ishorali kvadratik forma bo'lsin. V kvadratik formaga mos keluvchi

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \gamma & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \gamma & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} - \gamma \end{vmatrix} = 0 \qquad (A)$$

xarakteristik tenglamani tuzamiz. Algebradan ma'lumki, bu tenglamaning hamma ildizlari **haqiqiy** va **musbat** sonlardir. $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilar

$$x = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} = \varepsilon \quad \text{yoki} \quad x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \varepsilon^2$$

shartlarni qanoatlantirganda V funksiyaning aniq quyi chegarasi (eng minimal qiymati) $l(\varepsilon)$

$$l = \alpha\varepsilon^2 \qquad (B)$$

formula orqali aniqlanadi, bu yerda α – (A) tenglamaning eng kichik qiymatli ildizi.

Xuddi shunday, V ning aniq yuqori chegarasi (eng maksimal qiymati) L va $\eta(\varepsilon)$ son

$$L = \omega\varepsilon^2, \quad \eta^2 = \frac{\alpha}{\omega}\varepsilon^2$$

formulalar orqali aniqlanadi, bu yerda ω – (A) ning eng katta qiymatli ildizi. Bu tasdiqlarning isbotini G.N. Duboshin [26] asarining 89–91-betlaridan topasiz.

Agar funksiya $V = A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + ... + A_{nn}x_n^2$ tenglik bilan aniqlansa, u holda l va Llar

$$l = A_{rr}\varepsilon^2, \qquad L = A_{kk}\varepsilon^2$$

formulalar bilan aniqlanadi, bu yerda A_{rr} – koeffitsiyentlarning eng kichigi, A_{kk} esa koeffitsiyentlarning eng kattasi.

Agar $V = A(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$ bo'lsa, u holda

$$l = L = A\varepsilon^2$$

bo'ladi.

1- misol. Toyilgan harakat differensial tenglamalari

$$\dot{x}_1 = x_2 + 3x_1^2x_2^2 - 4x_1^5,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 + x_1^3x_2$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Aniq musbat ishorali

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

funksiyani olib, uning toyilgan harakat tenglamalariga ko'ra vaqt bo'yicha to'liq hosilasini topamiz:

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1\left(x_2 + 3x_1^2x_2^2 - 4x_1^5\right) +$$

$$+ x_2(-x_1 - x_2^3 + x_1^3x_2) = -(2x_1^3 - x_2^2)^2.$$

V aniq musbat ishorali funksiya va uning vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi $\dot{V}$ o'zgarmas manfiy ishorali funksiya bo'lgani uchun teoremaning hamma shartlarini qanoatlantiradi. Demak, $x_1 = x_2 = 0$ toyilmagan harakat turg'un bo'ladi.

2- misol. Toyilgan harakat tenglamalari

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1 + x_2),$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_1(x_1 + x_2)$$

ko'rinishda bo'lsin. Agar V funksiyani

$$V = x_1^2 + x_2^2$$

ko'rinishda olsak, u holda uning toyilgan harakat tenglamalariga nisbatan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi

$$\dot{V} = -2x_1^2$$

bo'ladi. V aniq musbat ishorali va $\dot{V}$ o'zgarmas manfiy ishorali funksiyalar, shuning uchun teorema A ga asosan, toyilmagan harakat turg'un bo'ladi.

3- misol. Quyidagi toyilgan harakatning tenglamalari berilgan bo'lsin:

$$\dot{x}_1 = x_2 - 3x_3 - x_1(x_2 - 2x_3)^2,$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_3 - x_2(x_1 + x_3)^2,$$

$$\dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 - x_3.$$

V funksiyani

$$V = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$$

ko'rinishda olamiz. Uning vaqt bo'yicha toyilgan harakat tenglamalariga asosan olingan to'liq hosilasi

$$\dot{V} = -4x_1^2(x_2 - 2x_3)^2 - 2x_2^2(x_1 + x_3)^2 - 6x_3^2$$

bo'ladi.

V aniq musbat ishorali funksiya va $\dot{V}$ o'zgarmas manfiy ishorali funksiya bo'lganligidan, isbot qilingan teoremaga asosan, toyilmagan harakat turg'un bo'ladi.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun V funksiyaning aniq quyi chegarasi (eng minimal qiymati) $l = \varepsilon^2$ va $\eta^2 = \frac{1}{3}\varepsilon^2$ ekanligini topamiz.

Demak, agar boshlang'ich

$$x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2 \le \frac{1}{3}\varepsilon^2$$

shartni qanoatlantiruvchi x_{10}, x_{20} va x_{30} larni olsak, u holda hamma $t > t_0$ lar uchun

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \varepsilon^2$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

3- §. Harakatning asimptotik turg'unligi haqidagi Lyapunov teoremasi

Quyida bayon etiladigan harakatning asimptotik turg'unligi haqidagi Lyapunovning teoremasi uning birinchi teoremasini to'ldiradi.

Teorema B. *Agar toyilgan harakat differensial tenglamalari uchun shunday aniq ishorali* $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiya topilib, uning bu tenglamalarga nisbatan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi V ning ishorasiga teskari aniq ishorali funksiya bo'lsa, u holda toyilmagan harakat asimptotik turg'undir.*

Isbot. Xuddi birinchi teoremaning isbotidagi kabi $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ aniq musbat ishorali funksiya bo'lsin.

Demak, teoremaning shartiga asosan $\frac{dV}{dt}$ aniq manfiy ishorali funksiya bo'ladi, ya'ni (2.2.2) sohada

$$V \geq 0, \qquad \frac{dV}{dt} \leq 0$$

munosabatlar bajariladi.

ε son h dan kichik ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Ko'rilayotgan hol uchun birinchi teoremaning shartlari to'liq bajariladi va, demak, toyilmagan harakat turg'un bo'ladi. Shu sababli ham har qanday yetarlicha kichik musbat ε son uchun shunday musbat $\eta(\varepsilon)$ son topiladiki, toyilgan harakat differensial tenglamalarining har qanday $x_s(t)$ yechimlari uchun $t = t_0$ paytda

$$\left|x_s^0(t)\right| \leq \eta \tag{2.3.1}$$

bajarilishidan barcha $t > t_0$ lar uchun

$$\left|x_s(t)\right| < \varepsilon \tag{2.3.2}$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi.

Endi teorema sharti bajarilganda toyilmagan harakatning asimptotik turg'un bo'lishini, ya'ni

$$\lim_{t \to \infty} x_s(t) \equiv 0 \qquad (s = \overline{1, n}) \tag{2.3.3}$$

ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, ko'rilayotgan $x_s(t)$ yechimlar doimo (2.3.2) sohada yotganligi uchun teoremaning shartiga asosan $V(x_1(t), ..., x_n(t))$ funksiyaning vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi t ning hamma qiymatlari

uchun (nolga aylanmasdan) manfiy bo'ladi. $\dot{V}$ aniq ishorali funksiya bo'lganligi uchun faqat koordinata boshida nol qiymat qabul qiladi.

Shunday qilib, $\dot{V}$ doimo manfiy, demak, $V(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ funksiya monoton kamayuvchi bo'ladi. Shuning uchun ham bu funksiya $t \to \infty$ da biror α limitga (undan doimo katta bo'lgan holda) intiladi, ya'ni doimo

$$V(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)) > \alpha \tag{2.3.4}$$

bo'ladi.

$\alpha = 0$ ekanligini isbot qilamiz. Teskarisini faraz qilaylik. Demak, $\alpha \neq 0$ va V aniq musbat ishorali funksiya bo'lganligidan $\alpha > 0$ bo'ladi. V funksiya uzluksiz funksiya bo'lganligi uchun (2.3.4) tengsizlikdan

$$x(t) = \max\left\{|x_1(t)|,...,|x_n(t)|\right\} > a \tag{2.3.5}$$

kelib chiqadi, bu yerda a – biror musbat son. O'z navbatida $\dot{V}$ aniq manfiy ishorali funksiya bo'lganligidan (2.3.5) ga asosan

$$\frac{dV}{dt} \leq -b$$

ni hosil qilamiz, bu yerda b – biror musbat son. Demak, hamma $t > t_0$ lar uchun

$$V(x_1(t),...,x_n(t)) = V(x_1(t_0),...,x_n(t_0)] + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}dt \leq$$

$$\leq V(x_1(t_0),...,x_n(t_0)) - b(t-t_0) \tag{2.3.6}$$

ga ega bo'lamiz.

Biroq buning bo'lishi mumkin emas, chunki (2.3.6) tenglikning o'ng tarafidagi ifoda bilan birga V funksiya t ning yetarli katta qiymatlarida manfiy bo'lib qoladi. Teoremaning shartiga asosan esa $V(x_1(t),...,x_n(t))$ musbat ishorali funksiyadir. Biz qarama-qarshilikka kelib qoldik. Demak,

$$\lim_{t\to\infty} V(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)) = 0$$

va $V(x_1(t),...,x_n(t))$ aniq ishorali funksiya ekanligidan

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0$$

bo'ladi. Demak, teorema sharti bajarilganda, toyilmagan harakat tik turg'un bo'ladi.

Izoh. *Toyilgan harakat differensial tenglamalarining* $x_s(t)$ *yechimlari uchun* $\lim_{t\to\infty} x_s(t)=0$ *shartning bajarilishini ta'minlay oladigan* $x_s^0=x_s(t_0)$ *boshlang'ich qiymatlarning eng katta sohasini asimptotik turg'unlik sohasi deb ataymiz.*

Keltirilgan isbotdan ravshanki, bu soha hech qachon $|x_s(t_0)|<\eta$ sohadan kichik bo'lmaydi. $\eta(\varepsilon)$ sonni berilgan ε songa asosan topish algoritmi 2-§ dagi izohda berilgan.

1 - misol. Toyilgan harakat differensial tenglamalari

$$\dot{x}_1=-x_2+x_1x_2-x_1^3-\frac{1}{2}x_1x_2^2,$$

$$\dot{x}_2=-3x_2+x_1x_2+x_1^2x_2-\frac{1}{2}x_1x_2^2$$

bo'lsin. V funksiyani quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\left(3x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\right).$$

Bu funksiyaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsaning bosh minorlari Silvester kriteriysi shartlarini qanoatlantirganligi uchun u aniq musbat ishoralidir, ya'ni $V\geq 0$.

V funksiyaning vaqt bo'yicha to'liq hosilasi

$$\dot{V}=(3x_1-x_2)\dot{x}_1-(x_1-x_2)\dot{x}_2$$

ko'rinishda bo'ladi. $\dot{V}$ ifodasidagi $\dot{x}_1$ va $\dot{x}_2$ larning o'rniga toyilgan harakat tenglamalaridan qiymatlarini keltirib qo'yib, soddalashtirganimizdan keyin

$$\dot{V}=-3x_1^4+2x_1^2x_2-2x_2^2$$

ga ega bo'lamiz. Bu funksiya koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

matritsani qaraylik, bu yerda o'zgaruvchilar sifatida x_1^2 va x_2 lar olingan. A ning bosh minorlari

$$\Delta_1=-3<0,\quad \Delta_2=5>0.$$

Demak, Silvester kriteriysiga asosan $\dot{V}$ funksiya x_1^2 va x_2 o'zgaruvchilarga (shuning uchun ham x_1 va x_2 larga) nisbatan aniq manfiy ishorali funksiya bo'ladi, ya'ni $\dot{V}\leq 0$ bo'ladi.

Shunday qilib, V aniq musbat ishorali va $\dot{V}$ aniq manfiy ishorali funksiyalar bo'lganliklaridan, teorema B ga asosan, toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi.

2- misol. Toyilgan harakat tenglamalari quyidagicha bo'lsin:

$$\dot{x}_1 = -3x_2 + x_2 - x_3 + 3x_1(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2),$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 5x_2 + x_3 + 5x_2(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2),$$

$$\dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_3(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2).$$

Lyapunov funksiyasini

$$V = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ko'rinishda olamiz. Uning vaqt bo'yicha toyilgan harakat tenglamalariga ko'ra olingan to'liq hosilasi

$$\dot{V} = -2(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2)(1 - 6x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_3^2)$$

bo'ladi. V funksiya x_1, x_2 va x_3 o'zgaruvchilarning hamma qiymatlarida aniq musbat ishoralidir, $\dot{V}$ funksiya esa

$$6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 < 1$$

sohada aniq manfiy ishorali bo'ladi. Demak, V va $-\dot{V}$ funksiyalar uchun

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le \frac{1}{6}$$

sohada $V > 0$ va $-\dot{V} > 0$ munosabatlar o'rinli, ya'ni teorema B ning hamma shartlari qanoatlantiriladi va shuning uchun ham toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi. Bu misolda $\eta^2 = \frac{1}{6}$ deb olish mumkin, u holda $t = t_0$ vaqtda boshlang'ich

$$x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2 \le \frac{1}{6}$$

shartni qanoatlantiruvchi hamma x_1, x_2 va x_3 yechimlar uchun

$$\lim_{t\to\infty} x_1 = \lim_{t\to\infty} x_2 = \lim_{t\to\infty} x_3 = \lim_{t\to\infty} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0$$

munosabat bajariladi.

3- misol. Quyidagi tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\dot{x}_2 = +x_1 - x_2 + (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2).$$

V funksiyani

$$V = x_1^2 + x_2^2$$

ko'rinishda olib, undan vaqt bo'yicha to'liq hosila olamiz:

$$\dot{V} = -2(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

V aniq musbat ishorali funksiya, $\dot{V}$ funksiya esa

$$x_1^2 + x_2^2 < 1$$

sohada manfiy ishoralidir. Shuning uchun, agar boshlang'ich qiymatni

$$x_{10}^2 + x_{20}^2 < 1$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlasak, u holda $\lim_{t\to\infty}(x_1^2 + x_2^2) = 0$ bo'ladi. Bu yerdan $\lim_{t\to\infty} x_1 = \lim_{t\to\infty} x_2 = 0$ va toyilmagan harakatning asimptotik turg'un ekanligi kelib chiqadi.

4- §. Harakatning batamom asimptotik turg'unligi haqidagi Barbashin – Krasovskiy teoremalari

Lyapunov kichik toyilishlar uchun asimptotik turg'unlikning yetarlilik shartlarini yaratdi. Boshqacha qilib aytganda, Lyapunov teoremasi faqat $t = t_0$ boshlang'ich vaqtda dinamik sistema harakatiga ta'sir etadigan toydiruvchi kuchlar miqdori yetarlicha kichik bo'lgan hollardagina to'g'ridir, ya'ni

$$|x_s(t_0)| < \eta \qquad (2.4.1)$$

tengsizlikdagi η yetarli kichik musbat son bo'lishi kerak. Ammo, amaliyotda (masalan, boshqaruv jarayonlarida, kuzatuvchi sistemalarida, avtomatik regulatorlarda va boshqa qurilmalarda) dinamik sistemaga ta'sir etadigan toydiruvchi kuchlarning miqdori (demak, $x_s(t_0)$ larning miqdori ham) katta bo'lishi mumkin. Bu hollar uchun Lyapunov teoremasi o'z kuchini yo'qotadi.

E.A. Barbashin, N.P. Yerugin, V.A. Pliss va N.N. Krasovskiy 1950–1955-yillar davomida har qanday kattalikdagi toyilishlar uchun asimptotik turg'unlikning yetarli shartlarini ishlab chiqdilar [9,10,27,28,40,77].

Bu hollarda (2.4.1) boshlang'ich $x_s(t_0)$ toyilishlar sohasining ko'lamini baholash masalasi muhimdir. Shuning uchun ham toyilmagan harakatning asimptotik turg'unligi haqidagi ta'rifni to'ldirish lozim bo'lib qoladi.

1-ta'rif. *Agar G masalaning sharti bo'yicha $x_s(t_0)$ o'zgaruvchilarning $x_s(t_0)$ boshlang'ich toyilishlar yotishi mumkin bo'lgan oldindan berilgan o'zgarish sohasi bo'lib, toyilmagan harakat $x_s = 0$ turg'un va*

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0 \qquad (2.4.2)$$

(2.4.2) *munosabat G sohadagi hamma* $x_s(t_0)$ *lar uchun bajarilsa, u holda toyilmagan harakat keng ko'lamda asimptotik turg'un deyiladi.*

Ayrim holda, *G* soha

$$|x_s(t_0)| \le N \qquad (2.4.3)$$

tengsizlik bilan ham aniqlanishi mumkin, bu yerda *N* – berilgan musbat son.

2- ta'rif. *Agar toyilmagan harakat turg'un bo'lsa va (2.4.2) munosabat har qanday boshlang'ich* $x_s(t_0)$ *toyilishlar uchun bajarilsa, u holda toyilmagan harakat batamom asimptotik turg'un deb ataladi.*

Lyapunovning asimptotik turg'unlik haqidagi teoremasini keng ko'lamda asimptotik turg'unlik va batamom asimptotik turg'unlik hollari uchun umumlashtirish mumkin. Quyida E.A. Barbashin va N.N. Krasovskiyning shu masalaga bag'ishlagan teoremalarini (asimptotik turg'unlik kriteriylarini) isbotsiz keltiramiz.

Teorema B_1. *Agar toyilgan harakat differensial tenglamalari uchun*

$$|x_s| \le Q \qquad (2.4.4)$$

sonada aniq ishorali $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiya topilib, uning toyilgan harakat tenglamalariga asosan vaqt bo'yicha olingan* $M_N < m_Q$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi to'liq hosilasi ham (2.4.4) sohada V ning ishorasiga teskari aniq ishorali funksiya bo'lsa, u holda toyilmagan harakat*

$$|x_s(t_0)| \le N \qquad (2.4.5)$$

sohadagi $x_s(t_0)$ *boshlang'ich toyilishlarga nisbatan keng ko'lamda asimptotik turg'un bo'ladi.*

Bu yerda m_Q bilan $|V(x_1, x_2, ..., x_n)|$ funksiyaning $x = Q$ $\left(x = \max\left[|x_1|, ..., |x_n|\right]\right)$ shart bajarilgandagi aniq quyi chegarasi, M_N bilan esa $x = N$ shart uchun $|V(x_1, x_2, ..., x_n)|$ funksiyaning aniq yuqori chegarasi belgilangan.

Teorema B_2. *Agar toyilgan harakat differensial tenglmalari uchun shunday musbat ishorali* $V(x_1, ..., x_n)$ *funksiya topilib, uning toyilgan harakat tenglamalariga ko'ra vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi hamma* x_s *lar uchun manfiy ishorali funksiya hamda*

$$\lim_{x\to\infty} V(x_1, ..., x_n) = \infty$$

bo'lsa, u holda toyilmagan harakat batamom asimptotik turg'un bo'ladi.

Teoremadagi $\lim_{x\to\infty} V = \infty$ shartni quyidagicha tushunish lozim: har qanday N son uchun $Q > N$ sonni shunday tanlab olish mumkinki $M_N < m_Q$ tengsizlik bajarilsin. U vaqtda teorema B_2 ning to'g'riligi teorema B_1 dan kelib chiqadi. Bu shartning batamom turg'unlik masalalari uchun muhimligini N.P. Yerugin o'zining [27] ishida ko'rsatgan edi.

5- §. Turg'unlik haqidagi teoremalarning geometrik talqini

Harakat turg'unligi haqidagi Lyapunovning teoremalariga sodda geometrik talqin berish mumkin. Bu talqin teoremalarning asosiy mazmunlarini tushunishga yordam beribgina qolmasdan, balki ko'pgina texnik masalalarni yechishda ham foydalaniladi.

Biz quyida keltirayotgan geometrik talqinni I.G. Malkin 1929—1931-yillarda Qozon fizika-matematika jamiyatida ifodalagan edi [54].

Dastlab Lyapunovning birinchi teoremasida soddalik uchun $n = 3$ deb faraz qilamiz. Aniq ishorali $V(x_1, x_2, x_3)$ funksiya mavjud va bu funksiya uchun $\dot{V} \le 0$ bo'lsin. Endi.

$$V(x_1, x_2, x_3) = c \qquad (2.5.1)$$

sirtlarni yasaymiz, bu yerda c –noldan yetarlicha kichik farq qiladigan o'zgaruvchi musbat parametr. 1-§ da ko'rsatilgan ediki, (2.5.1) sirtlar yopiq va koordinata boshini qamrab oladi, $c = 0$ bo'lganda esa nuqtaga aylanadi (koordinata boshi). Agar $c_1 < c_2$ bo'lsa, u holda $V = c_1$ sirt $V = c_2$ sirtning ichida to'liq yotadi.

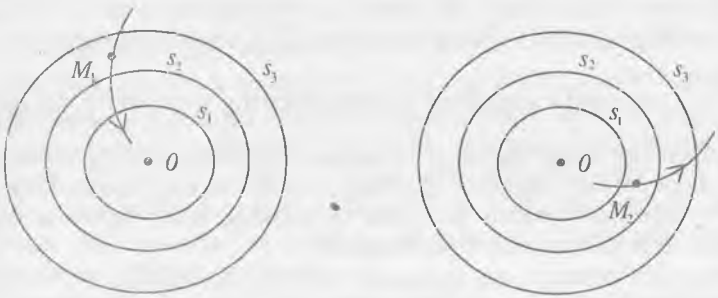
Boshlang'ich $t = t_0$ vaqtda koordinata boshi atrofining biror nuqtasidan chiqayotgan

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2.5.2)$$

toyilgan harakat differensial tenglamalarining biror integral egri chizig'ini ko'ramiz. Bu integral egri chiziq t ning o'sishi bilan hech qachon (2.5.1) sirtlarning birortasini ichkarisidan tashqariga qarab kesib o'tmaydi. Haqiqatan ham, agar biror nuqtada bu kesishuv yuz bersa edi, u holda bu nuqtada yoki uning atrofida $V(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ funksiya musbat hosilaga ega bo'lardi, chunki birinchi (2.5.1) sirtni qamrab olgan ikkinchi (2.5.1) sirtga o'tishda $V(x_1, x_2, x_3)$ funksiya o'sadi. Ammo, $\dot{V} \le 0$ ekanligidan, bunday bo'lishi mumkin emas. Shunday qilib, agar

boshlang'ich vaqtda biror integral egri chiziq biror (2.5.1) sirtning ichida bo'lsa, u holda u $t > t_0$ vaqtlarda ham uning ichida qoladi.

c ning yetarlicha kichik qiymatlarida (2.5.1) sirt koordinata boshini qamrab olganidan, toyilmagan harakatning turg'unligi kelib chiqadi (2.3-shaklga qarang).



2.3- shakl.

Agar V funksiya aniq manfiy ishorali bo'lsa, u holda koordinata boshining yetarli kichik atrofidan chiqayotgan har bir integral egri chiziq (2.5.1) sirtlarni tashqaridan ichkariga qarab kesib o'tadi, chunki $V(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ funksiya uzluksiz kamayishi kerak. U holda integral egri chiziqlar koordinata boshiga uzluksiz yaqinlashadi. Demak, toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi.

Shunday qilib, Lyapunovning ikkinchi usuli geometrik nuqtayi nazardan turg'unlikni tekshirishni koordinata boshini qamrab (o'rab) olgan (2.5.1) sirtlarni yasashga keltiriladi. Agar (2.5.2) tenglamalarning integral egri chiziqlari $t > t_0$ vaqtlarda bu sirtlarni tashqaridan ichkariga qarab kesib o'tsa, u holda toyilmagan harakat turg'un, integral egri chiziqlar (2.5.1) sirtlarni ichkaridan tashqariga qarab kesib o'tganda esa toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi. Qandaydir mulohazalar asosida yuqorida aytilgan xususiyatlarga ega bo'lgan sirtlar mavjudligini aniqlasak, u holda turg'unlik masalasi osongina yechiladi.

6- §. Harakatning noturg'unligi haqidagi Lyapunovning birinchi teoremasi

Endi harakatning noturg'unligi haqidagi Lyapunov teoremalarini ko'rib o'tamiz. Uning birinchi teoremasi quyidagicha ta'riflanadi.

Teorema D. *Agar toyilgan harakat differensial tenglamalari uchun shunday* $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiya topilib va uning toyilgan harakat tenglamalariga ko'ra vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi aniq ishorali funksiya bo'lib, funksiyaning o'zi esa ishorasi* $\dot{V}$ *nikiga teskari bo'lgan o'zgarmas ishorali funksiya bo'lmasa, u holda toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.*

Isbot. $\frac{dV}{dt} = \dot{V}$ funksiya

$$|x_s| \le h \le H \tag{2.6.1}$$

sohada aniq ishorali bo'lsin. h ni shunday yetarlicha kichik musbat son deb faraz qilamizki, toyilgan harakatning (2.5.2) differensial tenglamalari (2.6.1) sohada $x_s(t)$ larning har bir $x_s(t_0)$ boshlang'ich qiymatlari uchun yagona yechimga ega bo'lsin. Yana, aniqlik uchun, $\dot{V} > 0$ deylik.

η qancha kichik son bo'lmasin,

$$|x_s^0| \le \eta \tag{2.6.2}$$

sohada yotuvchi $x_s(t)$ yechimlarning shunday boshlang'ich x_s^0 qiymatlari topilib, ma'lum bir $t > t_0$ vaqtda $x_s(t)$ yechimlar (2.6.1) sohadan chiqib ketishi, ya'ni $|x_s(t)| > \varepsilon \le h$ bo'lishini ko'rsatish mumkin. Shu bilan toyilmagan harakatning noturg'unligi isbotlanadi.

Shu maqsadda, x_s^0 larning qiymatlarini shunday tanlab olamizki, faqat (2.6.2) tengsizlik bajarilib qolmasdan, balki

$$V(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) > 0 \tag{2.6.3}$$

ham bo'lsin.

Qiymatlari (2.6.2) va (2.6.3) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x_s^0 larni tanlab olish mumkin, chunki teoremaning shartiga asosan V funksiya o'zgarmas manfiy ishorali emas va, demak, koordinata boshining yetarlicha kichik atrofida V funksiya musbat qiymatlar qabul qila oladi. Endi (2.5.2) tenglamalarning (2.6.2) va (2.6.3) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi boshlang'ich x_s^0 qiymatlarga mos keluvchi $x_s(t)$ yechimini ko'ramiz. Bu yechim qandaydir t vaqtda albatta (2.6.1) sohadan chiqib ketadi. Bu tasdiqni isbot qilish uchun teskarisini faraz qilamiz, ya'ni hamma $t > t_0$ vaqtlarda $x_s(t)$ yechimlar (2.6.1) tengsizlikni qanoatlantirsin. U vaqtda har doim $V > 0$ bo'ladi va, demak, $V(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ funksiya doimo o'sadi.

Shuning uchun

$$V(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) > V\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \qquad (2.6.4)$$

ni yozishga haqlimiz. Bu yerdan albatta

$$x(t) = \max\left\{ |x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)| \right\} \geq \lambda \qquad (2.6.5)$$

kelib chiqadi, bu yerda λ – biror musbat son. Agar $x(t) < \lambda$ bo'lsa, u holda $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uzluksiz funksiya va $V(0, 0, \ldots, 0) = 0$ bo'lganligi uchun λ ning yetarlicha kichik qiymati uchun (2.6.4) tengsizlik bajarilmasligi mumkin.

$\dot{V}$ musbat ishorali funksiya bo'lganligi sababli (2.6.5) tengsizlikdan ko'rilayotgan $x_s(t)$ yechimlar uchun har doim

$$\dot{V} \geq l$$

tengsizlik bajariladi, bu yerda l – yetarlicha kichik musbat son. Demak,

$$V(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = V\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt \geq V\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) + l(t - t_0). \qquad (2.6.6)$$

bo'ladi.

(2.6.6) munosabatdan $V(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ funksiyaning cheksiz o'sishi kelib chiqadi. Ammo, bu $x_s(t)$ yechim (2.6.1) sohadan chiqmaydi degan farazimizga to'g'ri kelmaydi. Demak, farazimiz noto'g'ri ekan. Bu toyilmagan harakatning noturg'un ekanligini bildiradi.

7- §. Harakatning noturg'unligi haqidagi Lyapunovning ikkinchi teoremasi

Endi Lyapunovning harakat noturg'unligi haqidagi ikkinchi teoremasini isbot qilamiz.

Teorema E. *Agar shunday V funksiya topilib, uning toyilgan harakat tenglamalariga asosan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi (2.6.1) sohada*

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2.7.1)$$

ko'rinishga ega hamda bunda λ – o'zgarmas musbat son, W esa, yoki aynan nol, yoki o'zgarmas ishorali funksiya bo'lsa va agar oxirgi holda V funksiya W ning ishorasiga teskari bo'lgan o'zgarmas ishorali bo'lmasa, u holda toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

Isbot. Aniqlik uchun $W > 0$ bo'lsin. U holda (2.7.1) munosabatdan

$$\frac{dV}{dt} \geq \lambda V \tag{2.7.2}$$

ni hosil qilamiz. Xuddi teorema D dagidek $x_s(t)$ yechimning $t = t_0$- dagi boshlang'ich qiymatlarini shunday tanlab olamizki,

$$\left|x_s^0\right| \leq \eta, \qquad V\left(x_1^0,...,x_n^0\right) > 0 \tag{2.7.3}$$

tengsizliklar bir vaqtda bajarilsin, bu yerda η – istalgancha kichik musbat son. Shu shartlar bajarilganda, $x_s(t)$ yechim vaqti kelib (2.6.1) sohadan chiqib ketishini ko'rsatamiz. Aksini, ya'ni (2.6.1) tengsizliklar doimo bajariladi deb faraz qilamiz. U holda (2.7.2) tengsizliklar doimo bajariladi va $V\left(x_1^0, x_2^0,..., x_n^0\right) > 0$ bo'lganligi uchun (2.7.2) ga asosan $\dot{V}$ doimo musbat bo'lib qoladi, ya'ni $\dot{V} > 0$. Demak, $V(x_1(t),...,x_n(t))$ o'suvchi funksiya bo'ladi. U vaqtda (2.7.2) tengsizlikdan

$$\frac{dV}{dt} \geq \lambda V(x_1(t),..., x_n(t)) \geq \lambda V\left(x_1^0,...,x_n^0\right) \tag{2.7.4}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan

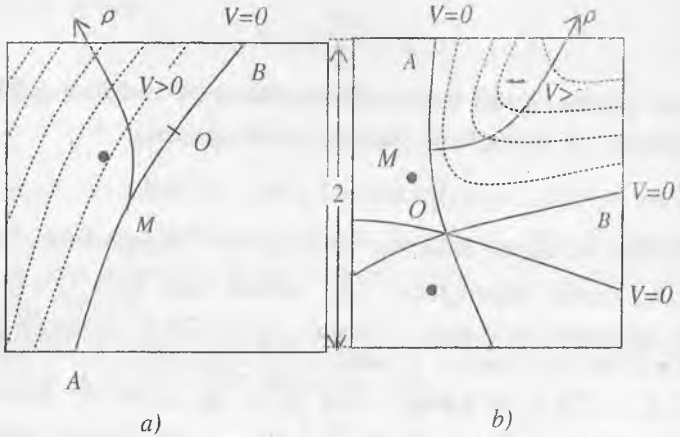
$$V \geq \lambda V\left(x_1^0,..., x_n^0\right)(t - t_0) \tag{2.7.5}$$

munosabat kelib chiqadi. (2.7.5) ning bo'lishi mumkin emas, chunki (2.6.1) sohada V funksiya chegaralangan. Shunday qilib, (2.6.1) tengsizlik ko'rilayotgan $x_s(t)$ yechim uchun buziladi. Bu holat toyilmagan harakatning turg'un emasligini ko'rsatadi.

8- §. Teorema D ning geometrik talqini. N.G. Chetaev teoremasi

Teorema D ga ham, xuddi teorema A va B lar uchun bo'lganidek, geometrik talqin berish mumkin.

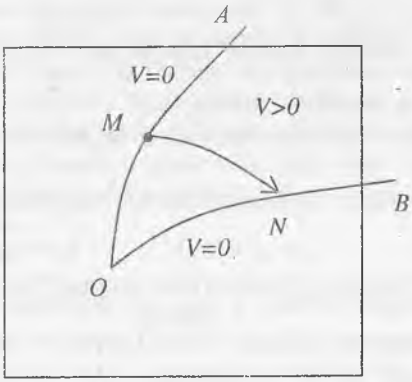
Soddalik uchun $n = 2$ deb olamiz va avval V funksiyani **aniq ishorali emas** deb hisoblaymiz. Bu holda $V(x_1, x_2) = 0$ egri chiziq koordinata boshidan o'tadigan bitta yoki bir nechta haqiqiy tarmoqqa (shoxga) ega bo'ladi (2.4-shakl).



2.4- shakl.

$\frac{dV}{dt}$ funksiya **aniq musbat ishorali** bo'lsin. Teorema shartiga asosan koordinata boshi atrofida kamida bitta $V>0$ soha bo'ladi. Bu soha $V=0$ egri chiziqlar bilan chegaralangan bo'ladi. 2.4,b-shakldagi AOB sektor o'sha sohalarning bittasini ifodalaydi, punktirlangan chiziqlar esa $V=C>0$ egri chiziqlarni bildiradi. Soha chegarasining ixtiyoriy M nuqtasidan chiqayotgan MP integral egri chiziqni ko'raylik. M nuqtani koordinata boshiga juda ham yaqin qilib olish mumkin. $\frac{dV}{dt}>0$ bo'lganligi uchun bu integral egri chiziq t ning o'sishi bilan albatta $V=C$ egri chiziqlar oilasini ichkaridan tashqariga (S ning o'sadigan tomoniga) qarab kesib o'tadi va $V=C$ chegaradan uzoqlashadi. Ravshanki, integral egri chiziqlar hamma vaqt koordinata boshidan uzoqlasha boradi va agar biror t vaqtda $V>0$ sohaning ikkinchi chegarasiga etib bormasa (2.4- shakl), oqibatda (2.6.1) sohadan chiqib ketadi.

Ammo $V>0$ sohaning ikkinchi chegarasini kesishi mumkin emas, chunki agar biror N nuqtada sodir bo'lsa edi, (2.5- shakl) u holda bu nuqtada, ravshanki, $\frac{dV}{dt}\le 0$ bo'lardi (chunki V funksiya musbat qiymatdan nol qiymatga o'zgarishi uchun albatta kamayishi, ya'ni $\dot{V}\le 0$ bo'lishi kerak).



2.5- shakl.

Shunday qilib, koordinata boshiga istalgancha yaqin bo'lgan nuqtadan chiquvchi va ma'lum vaqtda (2.6.1) sohadan chiqib ketuvchi integral egri chiziqlar mavjud ekan. Demak, toyilmagan harakat turg'un bo'lmaydi.

Teoremani isbot qilishda V aniq ishorali funksiya bo'lganda ham hech narsa o'zgarmaydi. Bu holda koordinata boshining butun atrofi $V > 0$ soha bo'ladi.

Keltirilgan geometrik talqin N.G. Chetayevga Lyapunovning bu teoremasini umumlashtirish imkonini berdi.

Haqiqatan ham, yuqorida yuritilgan mulohazalarda $\frac{dV}{dt}$ ning aniq ishorali funksiya ekanligi hech qanday rol o'ynagani yo'q. Agar «aniq ishorali» iborani «$\frac{dV}{dt}$ funksiya $V > 0$ sohaning hamma nuqtalarida musbat ishorali qiymat ($\frac{dV}{dt} > 0$) qabul qiladi» degan ibora bilan almashtirsak ham yuqorida yuritilgan mulohazalar o'zgarmaydi. Shunday qilib, 1934-yilda N.G. Chetayev ta'riflagan quyidagi teoremaga kelamiz [100–102].

N.G. Chetayev teoremasi. *Agar toyilgan harakat differensial tenglamalari uchun shunday $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani topish mumkin bo'lib:*

1) koordinata boshining istalgancha kichik atrofida $V > 0$ bo'ladigan soha mavjud va uning chegarasida $V = 0$;

2) $V > 0$ sohaning hamma nuqtalarida $\frac{dV}{dt} > 0$ bo'lsa, u holda toyilmagan harakat turg'un bo'lmaydi.

N.G. Chetayev teoremasining aniq analitik isbotini [101] kitobdan topish mumkin.

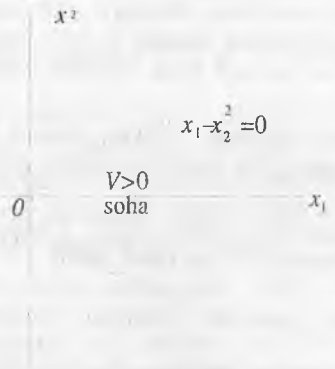
1- misol. Toyilgan harakat differensial tenglamalari

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + 2x_1x_2^2, \qquad \dot{x}_2 = x_1x_2$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. $x_1 = x_2 = 0$ toyilmagan harakatning turg'un emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun Lyapunov funksiyasini

$$V = x_1 - x_2^2 \tag{2.8.1}$$

ko'rinishda olamiz. Bu funksiya uchun $V > 0$ soha mavjud va uning chegarasida $V = x_1 - x_2^2 = 0$ (2.6- shakl).



2.6- shakl.

V funksiyadan toyilgan harakat tenglamalariga asosan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi

$$\dot{V} = \dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2 = x_1^3 + 2x_1x_2^2 - 2x_2 \cdot x_1x_2 = x_1^3 \tag{2.8.2}$$

bo'ladi. $\dot{V}$ funksiya barcha $x_1 > 0$ va istalgan x_2 lar uchun musbat, demak, $V > 0$ sohada $\dot{V} > 0$ bo'ladi (2.5- shaklga qarang). U holda Chetayev teoremasiga asosan toyilmagan harakat noturg'undir.

Shuni ta'kidlaymizki, tanlab olingan V funksiya Chetayev teoremasining shartlariga bo'ysunsa-da, Lyapunov teoremasining shartlarini qanoatlantirmaydi (chunki $x_1 < 0$ hollarda $\dot{V} < 0$ bo'ladi).

Izoh. 2–7-§ larda keltirilgan teoremalar (A, B, D va E teoremalar) Lyapunovning ikkinchi usuli bilan harakat turg'unligini tadqiq etishning poydevori hisoblanadi. Ularni isbotlashda toyilgan harakatning differensial tenglamalariga kirgan hamma o'zgaruvchilarga nisbatan toyilmagan harakat turg'unligi tadqiq etilyapti deb qaraladi. 1957-yilda V.V. Rumyansev Lyapunovning ikkinchi usulini o'zgaruvchilarning faqat bir qismiga nisbatan harakat turg'unligini tadqiq etishni talab etadigan dinamik sistemalarga joriy etdi [80].

9- §. Integrallar bog'lanmasi vositasida Lyapunov funksiyasini tuzish

Lyapunovning ikkinchi usuli teoremalarini tatbiq etish, aniq xususiyatlarga ega bo'lgan funksiyani topishni taqozo qiladi. Afsuski, hozirgacha bunday funksiyalarni topishning umumiy usuli mavjud emas. Shunday bo'lsa-da, ko'p hollarda toyilgan harakat tenglamalarining integrallari aniq bo'lganda, ulardan foydalanib Lyapunov funksiyasini yasash mumkin bo'lib qoladi.

Toyilgan harakat differensial tenglamalari

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + ... + p_{sn}x_s + X_s^*(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (s = \overline{1, n}) \qquad (2.9.1)$$

ushbu

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = h = \text{const} \qquad (2.9.2)$$

integralga keltirilgan va bu integral uchun $F(x) - F(0)$ ayirma $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning musbat ishorali funksiyasi bo'lsin. U holda Lyapunov funksiyasi sifatida

$$V = F(x_1, x_2, ..., x_n) - F(0) \qquad (2.9.3)$$

ni olish mumkin.

Haqiqatan ham, V funksiyaning toyilgan harakat tenglamalariga nisbatan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi (2.9.2) munosabatga asosan aynan nolga teng bo'ladi, ya'ni $\dot{V} = 0$. Demak, V funksiya Lyapunovning harakat turg'unligi haqidagi birinchi teoremasining (teorema A) hamma shartlarini qanoatlantiradi.

Ayrim hollarda toyilgan harakat differensial tenglamalari bir nechta

$$F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = h_1, ..., F_m(x_1, x_2, ..., x_n) = h_m \qquad (2.9.4)$$

integrallarga ega bo'lishi mumkin. Bu yerda $h_1, h_2, ..., h_m$ – o'zgarmas sonlar va $F_1, ..., F_m$ larning birortasi ham musbat ishorali funksiya emas. Bu hol uchun N.G. Chetayev V funksiyani (2.9.4) **integrallar bog'-**

lanmasi orqali izlashni tavsiya etdi [101,102]. Umumiy ko'rinishda bu **bog'lanma** quyidagicha ifodalanadi:

$$V = \lambda_1[F_1 - F_1(0)] + ... + \lambda_m[F_m - F_m(0)] + \tau_1[F_1^2 - F_1^2(0)] + ... + \tau_m[F_m^2 - F_m^2(0)], \tag{2.9.5}$$

bu yerda $\lambda_1,...,\lambda_m$, $\tau_1,...,\tau_m$ – aniqmas o'zgarmas sonlar.

Agar λ_j va τ_j $(j=\overline{1,m})$ o'zgarmas sonlarni V musbat ishorali funksiya bo'ladigan qilib tanlab olish mumkin bo'lsa, u holda bu funksiya teorema A ning hamma shartlarini qanoatlantirar edi (chunki $V = \text{const}$ ham toyilgan harakat differensial tenglamalarining integrali bo'ladi).

Integrallar bog'lanmasi orqali Lyapunov funksiyasini yasashning Chetayev usuli ancha samaralidir. Aniq masalalarni Chetayev usulidan foydalanib tadqiq etishda quyidagi eslatmalarni hisobga olish tavsiya etiladi:

1. $2m$ ta λ_j va τ_j koeffitsiyentlardan birortasini ixtiyoriy ravishda tanlash, masalan, $\lambda_1 = 1$ deb olish mumkin.

2. Ko'pincha hamma $\tau_j = 0$ deb qabul qilib, V funksiyani faqat chiziqli integrallar bog'lanmasi orqali yasash mumkin.

Chiziqli integrallar bog'lanmasi yetarli bo'lmagan holdagina V funksiyani yasashga kvadratik integrallarni jalb etish maqsadga muvofiq.

3. Ko'p hollarda toyilgan harakat tenglamalarining integrallarini tenglamalarning o'zlarini tuzmasdan umumiy anglash (masalan, mexanikaning umumiy teoremalaridan foydalanib) asosida tuzish mumkin. Ortiqcha almashtirishlardan qochib, bu usuldan keng foydalanish kerak.

10- §. Hosilasi o'zgarmas ishorali bo'lgan Lyapunov funksiyalariga asoslangan kriteriylar

Lyapunovning teorema B da keltirilgan asimptotik turg'unlik kriteriysi toyilgan harakat differensial tenglamalariga nisbatan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi $\dot{V}$ aniq ishorali bo'lgan $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ Lyapunov funksiyasiga tayanadi. Ammo texnikada, asosan, keng ko'lamda va batamom turg'unlikni tadqiq etish lozim bo'lgan nochiziqli sistemalar holida ba'zan shunday musbat ishorali V funksiyani yasash mumkinki, uning hosilasi $\dot{V}$ faqat o'zgarmas manfiy ishorali funksiya bo'ladi (aniq manfiy ishorali funksiya bo'lmaydi). Shu vaqtning o'zida hosilasi aniq manfiy ishorali funksiya bo'ladigan Lyapunov funksiyasini yasash katta qiyinchiliklar tug'diradi. Shu boisdan ham shunday umumiy kriteriyni topish zaruriyati tug'ildiki, bu kriteriy shartlari bajarilganda hosilasi o'zgarmas ishorali funk-

siya bo'lgan Lyapunov funksiyasi uchun toyilmagan harakat har qanday boshlang'ich shartlar uchun asimptotik turg'un bo'lsin.

XX asrning 40–60 yillarida bir qator shunday kriteriylar tavsiya etildi.

Kriteriyni ifodalagan dastlabki teoremalar o'ng tarafidagi funksiyalar oshkor ravishda t vaqtga bog'liq bo'lmagan differensial tenglamalar sistemasi (avtonom sistemalar) uchun isbot etildi [8,10]. Bu kriteriylar unchalik o'zgarishsiz vaqt bo'yicha davriy bo'lgan sistemalar uchun umumlashtirildi. Keyinchalik ikkita va undan ortiq Lyapunov funksiyalaridan foydalanish hisobiga noavtonom (nostatsionar) sistemalar uchun shunga o'xshash kriteriylar isbot etildi [57].

Biz bu yerda Lyapunovning asimptotik turg'unlik va noturg'unlik teoremalarining umumlashtirilishi bo'lgan E.A. Barbashin va N.N. Krasovskiyga mansub teoremalarni isbotsiz keltiramiz. Ularning isboti E.A. Barbashin, I.G. Malkin va N.N. Krasovskiyning kitoblarida keltirilgan [8,39 (464–466 betlar), 53].

Toyilgan harakat differensial tenglamalari

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (2.10.1)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bu yerda x_s funksiya

$$|x_s| < H \quad (H = \text{const} \quad \text{yoki} \quad H = \infty) \qquad (2.10.2)$$

sohada aniqlangan, uzluksiz va uzluksiz xususiy hosilalarga ega hamda $X_s(0,0,...,0) \equiv 0$ deb hisoblanadi.

$V(x_1, x_2, ..., x_n)$ Lyapunov funksiyasining (2.10.1) tenglamalarga nisbatan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi $\dot{V}$ o'zgarmas manfiy ishorali funksiya bo'lsin. (2.10.2) sohadagi $\frac{dx}{dt} = 0$ bo'ladigan hamma nuqtalar majmuasini (to'plamini) M bilan belgilaymiz. $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ muvozanat holati bu to'plamning elementi bo'lmaydi, bu yerda har doim $\dot{V}(0, 0, ..., 0) \equiv 0$.

Quyidagi asimptotik turg'unlik haqidagi kriteriyni keltiramiz.

Barbashin – Krasovskiy teoremasi. *Agar (2.10.1) toyilgan harakat differensial tenglamalari uchun (2.10.2) sohada shunday aniq musbat V funksiya topilib, uning hosilasi $\dot{V}$:*

1) M soha tashqarisida $\dot{V} < 0$;

2) M sohada $\dot{V} = 0$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi.

Endi toyilmagan harakatning noturg'unligi haqidagi umumlashgan teoremani keltiramiz.

Teorema. *Agar (2.10.1) toyilgan harakat differensial tenglamalari uchun shunday* $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiyani topish mumkin bo'lib, uning* $\dot{V}$ *hosilasi* M *soha* $0 < t < \infty$ *vaqt ichida sistemaning* $x_s(t)$ *butun traektoriyasiga ega bo'lmagan* $\{x_s\}$ *nuqtalar majmuasi bo'lganda:*

1) M *soha tashqarisida* $\dot{V} > 0$;

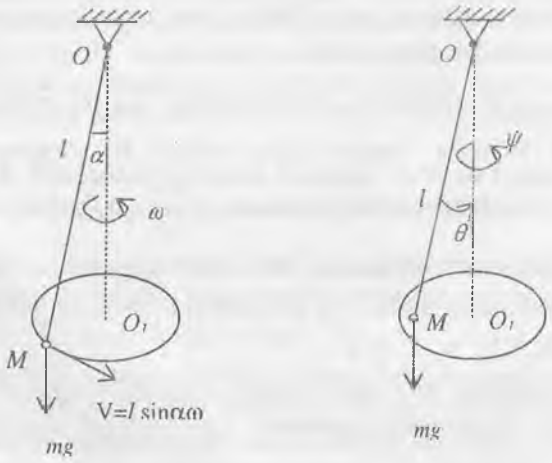
2) M *sohada* $V = 0$

shartlarni qanoatlantirsa va agar koordinata boshining ixtiyoriy atrofida shunday nuqtalar topilsaki, ular uchun $V > 0$ *bo'lsa, u holda toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.*

11- §. Lyapunovning harakat turg'unligi haqidagi teoremasining tatbiqiga doir misollar

1 - m i s o l. Konik (konussimon) mayatnik harakatining turg'unligi

Uzunligi l ga teng bo'lgan vaznsiz ipga osilgan m massali moddiy nuqtaning statsionar (barqaror) harakatini ko'rib o'taylik. Bu nuqta gorizontal joylashgan doira bo'yicha og'irlik kuchi ta'siri ostida o'zgarmas tezlik bilan harakat qilsin (2.7,a- shakl).



a) *b)*

2.7- shakl.

O nuqtaga maxkamlangan mayatnikning ipi statsionar harakatda doiraviy konus chizadi. OO_1 vertikal o'q bilan ip orasidagi burchakni α bilan, ipning vertikal o'q atrofida aylanishining burchak tezligini ω bilan belgilaymiz. Statsionar harakatda α burchak, ip uzunligi l va burchak tezligi ω orasida quyidagicha munosabat borligini oldingi paragraflarda ko'rgan edik:

$$\omega^2 \cos\alpha = \frac{g}{l}. \qquad (2.11.1)$$

Mayatnikning doira bo'ylab statsionar harakatini toyilmagan harakat sifatida qabul qilamiz. Bu harakatga qandaydir yetarlicha kichik toydiruvchi kuchlar ta'sir qilsin. Toyilgan harakatda OO_1 vertikal bilan ip orasidagi burchakni θ, OO_1 o'q atrofida aylanishining burchak tezligini ψ deb olib, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\theta = \alpha + x_1, \qquad \dot{\theta} = x_2, \qquad \psi = \omega + x_3. \qquad (2.11.2)$$

Toyilmagan harakatning θ, $\dot{\theta}$ va ψ larga nisbatan turg'unligini o'rganamiz. Mayatnikning kinetik va potensial energiyalari

$$T = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \psi^2\right), \qquad \Pi = -mgl\cos\theta$$

ko'rinishda bo'ladi.

Mayatnikka ta'sir etayotgan og'irlik kuchi potensial kuch va ψ siklik koordinata (T kinetik energiya ψ koordinataga bog'liq emas va umumlashgan kuch $Q_\psi = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \psi} = 0$) ekanligi uchun ushbu ikkita harakat integrali (h va n – o'zgarmas sonlar) ga ega bo'lamiz:

$$T + \Pi = \frac{ml}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \psi^2\right) - mgl\cos\theta = \frac{ml^2}{2}h,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = ml^2 \sin^2\theta \cdot \psi = ml^2 n. \qquad (2.11.3)$$

Bu yerda $\dfrac{ml^2}{2}$ va ml^2 ko'paytuvchilarni qulaylik uchun kiritdik.

(2.11.3) ning ikkinchi formulasi OO_1 vertikal o'qqa nisbatan mayatnik harakat miqdorining momenti bo'ladi.

(2.11.2) munosabatlardan foydalanib, (2.11.3) integrallarni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = [\dot{x}_2^2 + \sin^2(\alpha + x_1) \cdot (\omega + x_3)^2] - \frac{2g}{l}\cos(\alpha + x_1) = h,$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = \sin^2(\alpha + x_1) \cdot (\omega + x_3) = n. \qquad (2.11.4)$$

(2.11.4) integrallarni dinamikaning umumiy teoremalaridan foydalanib topdik. Albatta, avval toyilgan harakat differensial tenglamalarini tuzib (1- bobdagi (1.3.14) formulaga qarang), keyin (2.11.4) integrallarni topish ham mumkin edi.

Endi mayatnik statsionar harakatining θ, $\dot{\theta}$ va ψ larga nisbatan turg'unligini tekshiraylik. Topilgan integrallarning birortasi ham x_1, x_2 va x_3 o'zgaruvchilarga nisbatan aniq ishorali funksiya emas. Shuning uchun ham $\lambda_1 = 1$ va $\lambda_2 = \lambda$ deb belgilab, Chetayev usuliga asosan (2.11.4) integrallarning chiziqli bog'lamasini tuzamiz:

$$V = F_1 - F_1(0) + \lambda\,[F_2 - F_2(0)] = [\dot{x}_2^2 + \sin^2(\alpha + x_1) \cdot (\omega + x_3)^2] -$$

$$-\frac{2g}{l}\cos(\alpha + x_1) - (\omega^2 \sin^2\alpha - \frac{2g}{l}\cos\alpha) + \lambda \sin^2(\alpha + x_1) \cdot (\omega + x_3) - \lambda \sin^2\alpha \cdot \omega.$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ qiymatda V funksiya nolga teng bo'lishi uchun $-\left(\omega^2 \sin^2\alpha - \frac{2g}{l}\cos\alpha\right)$ va $-\lambda \sin^2\alpha \cdot \omega$ hadlarni kiritdik. $\frac{g}{l}$ munosabatni (2.11.1) dagi qiymati bilan almashtiramiz va V funksiyani x_1, x_2 va x_3 o'zgaruvchilarning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\sin^2(\alpha + x_1) = \sin^2\alpha + \sin 2\alpha \cdot x_1 + \cos 2\alpha \cdot x_1^2 + \ldots,$$

$$\cos(\alpha + x_1) = \cos\alpha - \sin\alpha \cdot x_1 - \frac{1}{2}\cos\alpha \cdot x_1^2 + \ldots$$

(bu yerda nuqtalar orqali yuqori tartibli hadlar belgilangan) ifodalarni V funksiyaning ifodasiga qo'yib va hadlarni guruhlab

$$V = \omega((\lambda + \omega)\cos 2\alpha + \omega\cos^2\alpha)x_1^2 + x_2^2 + \sin^2\alpha \cdot x_3^2 +$$

$$+ \omega \sin 2\alpha \cdot (\lambda + 2\omega)x_1 + \sin^2\alpha \cdot (\lambda + 2\omega)x_3 + \sin 2\alpha \cdot (\lambda + 2\omega)x_1 x_3 + \ldots \qquad (2.11.5)$$

ni hosil qilamiz. Ravshanki, V funksiya aniq musbat ishorali bo'lishi uchun uning yoyilmasida birinchi darajali hadlar bo'lmasligi zarurdir. Shuning uchun ham (2.11.5) ifodadagi x_1, x_2 va x_3 larga nisbatan birinchi tartibli hadlarni nolga aylantirish uchun $\lambda = -2\omega$ deb qabul qilamiz. U holda V funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$V = \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot x_1^2 + x_2^2 + \sin^2 \alpha \cdot x_3^2 + \dots \ . \qquad (2.11.5')$$

(2.11.5′) ning kvadratik qismi koeffitsiyentlari Silvester kriteriysi shartlarini qanoatlantirgani uchun x_1, x_2 va x_3 larning yetarlichā kichik qiymatlarida V musbat ishorali funksiya bo‘ladi. V ning vaqt bo‘yicha olingan to‘liq hosilasi, (2.11.4) integrallarga ko‘ra, aynan nolga teng, ya’ni $\dot{V} \equiv 0$ bo‘ladi. Demak, Lyapunovning teorema A siga asosan toyilmagan harakat θ. $\dot{\theta}$ va ψ larga nisbatan turg‘undir.

2- m i s o l. Yer sun’iy yo‘ldoshi statsionar harakatining turg‘unligi

Yer Sun’iy yo‘ldoshi radiusi r_0 bo‘lgan aylana bo‘yicha o‘zgarmas tezlik bilan harakat qilish mumkinligini 1- bobning 3-§ ida ko‘rsatgan edik. Bu harakatning parametrlari

$$\omega_2 r_0^3 = \mu \qquad (2.11.6)$$

shartni qanoatlantirishi kerak edi.

Sun’iy yo‘ldoshning toyilgan harakatdagi holatini r, φ, θ sferik koordinatalar bilan aniqlaymiz (1.4-shakl).

Sun’iy yo‘ldoshning kinetik va potensial energiyalari

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2), \ \Pi = -\mu \frac{m}{r}$$

ifodalar bilan aniqlanadi.

Sun’iy yo‘ldoshga ta’sir etayotgan tortish kuchi potensial va φ siklik koordinata bo‘lganligi uchun ikkita harakat integrali (h va n – o‘zgarmas sonlar)

$$T + \Pi = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2\right) - \mu\frac{m}{r} = \frac{m}{2}h \ , \ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = mn \qquad (2.11.7)$$

mavjud bo‘ladi.

Sun’iy yo‘ldoshning doiraviy orbita bo‘yicha statsionar harakatining $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}$ va φ o‘zgaruvchilarga nisbatan turg‘unligini tadqiq qilamiz. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$r = r_0 + x_1, \quad \dot{r} = x_2, \quad \theta = x_3, \quad \dot{\theta} = x_4, \quad \dot{\varphi} = \omega + x_5 .$$

Kiritilgan yangi o‘zgaruvchilar bo‘yicha topilgan integrallarni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$F_1 = x_2^2 + (r_0 + x_1)^2 x_4^2 + (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 \cdot (\omega + x_5)^2 - 2\frac{M}{r_0 + x_1} = h,$$

$$F_2 = (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 \cdot (\omega + x_5) = n. \qquad (2.11.8)$$

Bu misolda ham biz toyilgan harakat differensial tenglamalarining ikkala integralini umumiy mulohazalarga tayanib topdik.

Endi sun'iy yo'ldosh toyilmagan harakatining turg'unligini tekshiramiz.

Topilgan integrallarning birortasi ham x_1, x_2, x_3, x_4 va x_5 o'zgaruvchilarning aniq musbat ishorali funksiyasi bo'lmaydi. Shuning uchun ham Lyapunov funksiyasini bu integrallarning bog'lanmalari sifatida izlaymiz:

$$V = F_1 - F_1(0) + \lambda [F_2 - F_2(0)] + \tau [F_2^2 - F_2^2(0)],$$

bu yerda λ va τ – o'zgarmas sonlar. F_1 va F_2 integrallarning qiymatlarini (2.11.8) dan V ning ifodasiga keltirib qo'yamiz:

$$V = x_2^2 + (r_0 + x_1)^2 x_4^2 + (r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 \cdot (\omega + x_5)^2 - 2\frac{M}{r_0 + x_1} =$$

$$- r_0^2 \omega^2 + 2\frac{M}{r_0} + \lambda [(r_0 + x_1)^2 \cos^2 x_3 \cdot (\omega + x_5) - r_0^2 \omega] +$$

$$+ \tau [(r_0 + x_1)^4 \cos^4 x_3 \cdot (\omega + x_5)^2 - r_0^4 \omega^2]. \qquad (2.11.9)$$

Bu ifodaning o'ng tarafidagi trigonometrik funksiyalarni va $\dfrac{M}{(r_0 + x_1)}$ kasrni $x_1, x_2, ..., x_5$ larga nisbatan muvozanat holati atrofida qatorga yoyamiz:

$$\cos^2 x_3 = \left(1 - \frac{x_3^2}{2} + ...\right)^2 = 1 - x_3^2 + ...,$$

$$\cos^4 x_3 = \left(1 - \frac{x_3^2}{2} + ...\right)^4 = 1 - 2x_3^2 + ...,$$

$$\frac{\mu}{r_0 + x_1} = \frac{\mu}{r_0} - \mu\frac{x_1}{r_0^2} + \mu\frac{x_1^2}{r_0^3} + ...,$$

bu yerda nuqtalar bilan yuqori tartibli hadlar belgilangan.

Statsionar harakatda ω va r_0 parametrlar $\omega^2 r_0^3 = \mu$ shartni qanoatlantirishini hisobga olib, topilgan ifodalarni (2.11.9) ga qo'yamiz. U holda soddalashtirishlardan keyin quyidagini hosil qilamiz:

$$V = \omega(-\omega + \lambda + 6\tau r_0^2\omega)x_1^2 + x_2^2 - r_0^2\omega(\omega + \lambda + 2\tau r_0^2\omega)x_3^2 +$$
$$+ r_0^2 x_4^2 + r_0^2(1 + \tau r_0^2)x_5^2 +$$
$$+ 2r_0\omega(2\omega + \lambda + 2\tau r_0^2\omega)x_1 + r_0^2(2\omega + \lambda + 2\tau r_0^2\omega)x_5 +$$
$$+ 2r_0(2\omega + \lambda + 4\tau r_0^2\omega)x_1x_5 + \ldots \qquad (2.11.10)$$

V aniq musbat ishorali funksiya bo'lishi uchun uning ifodasida o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi tartibli hadlar bo'lmasligi zarurligini bilamiz. Shuning uchun (2.11.10) ifodada x_1 va x_2 larga nisbatan birinchi tartibda bo'lgan hadlarning koeffitsiyentlarini nolga tenglashtiramiz:

$$2\omega + \lambda + 2\tau r_0^2\omega = 0. \qquad (2.11.11)$$

Demak, V aniq musbat ishorali funksiya bo'lishi uchun λ va τ o'zgarmas sonlar (2.11.11) shartni qanoatlantirishi kerak. Bu yerdan

$$\lambda = -2\omega - 2\tau r_0^2\omega \qquad (2.11.12)$$

ni topamiz. λ ning bu qiymatini (2.11.10) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$V = \omega^2(4\tau r_0^2 - 3)x_1^2 + x_2^2 +$$
$$+ r_0^2\omega^2 x_3^2 + r_0^2 x_4^2 + r_0(1 + \tau r_0^2)x_5^2 + 4\tau r_0^3\omega x_1x_5 + \ldots .$$

Bu ifodadagi kvadratik hadlarni ikkita guruhga ajratamiz, ya'ni V funksiyani $V = V_1 + V_2 + \ldots$ ko'rinishda yozamiz, bu yerda

$$V_1 = x_2^2 + r_0^2\omega^2 + x_3^2 + r_0^2 x_4^2,$$
$$V_2 = \omega^2(4\tau r_0^2 - 3)x_1^2 + 4\tau r_0^2\omega x_1x_5 + r_0^2(1 + \tau r_0^2)x_5^2.$$

V_1 funksiya x_2, x_3 va x_4 o'zgaruvchilarga nisbatan aniq musbat ishorali funksiyadir. Demak, V funksiya aniq musbat ishorali funksiya bo'lishi uchun V_2 funksiya ham x_1, x_5 o'zgaruvchilarga nisbatan musbat ishorali funksiya bo'lishi kerak. Buning uchun τ ning shunday qiymatini topish kerakki, V_2 funksiya x_1 va x_5 larga nisbatan aniq musbat ishorali funksiya bo'lsin. Shu maqsadda Silvester kriteriysidan

foydalanamiz. V_2 ning ifodasidagi x_1 va x_5 o'zgaruvchilarning koeffisiyentlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} \omega^2(4\tau r_0^2 - 3) & 2\tau r_0^3 \omega \\ 2\tau r_0^3 \omega & r_0^2(1+\tau r_0^2) \end{pmatrix}$$

matritsani qaraymiz. Bu yerdan

$$\Delta_1 = \omega^2(4\tau r_0^2 - 3) > 0, \quad \Delta_2 = \omega^2 r_0^2(\tau r_0^2 - 3) > 0. \qquad (2.11.13)$$

Bulardan ko'rinib turibdiki,

$$\tau > \frac{3}{r_0^2} \qquad (2.11.14)$$

bo'lganda, (2.11.13) dagi ikkala tengsizlik ham bajariladi. Demak, V_2 funksiya x_1 va x_5 o'zgaruvchilarga nisbatan musbat ishorali funksiya va u bilan birga V funksiya ham $x_1, x_2, ..., x_5$ o'zgaruvchilarga nisbatan musbat ishorali funksiya bo'ladi.

Shunday qilib, V funksiya $x_1, ..., x_5$ o'zgaruvchilarga nisbatan musbat ishorali funksiya bo'lishi uchun λ va τ o'zgarmas sonlar mos ravishda (2.11.12) va (2.11.14) shartlarni qanoatlantirishi yetarlidir. Bu holda Yer sun'iy yo'ldoshining statsionar harakati $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, \varphi$ o'zgaruvchilarga nisbatan turg'un bo'ladi. V.V. Rumyansev ham o'zining [81] ilmiy ishida boshqa usul bilan shu natijani olgan. U o'zining bu ishida sun'iy yo'ldoshning boshqa statsionar harakatlarining turg'unligini ham tekshirgan.

Izoh. Turg'unlik masalalarini ikki guruhga bo'lish mumkin.

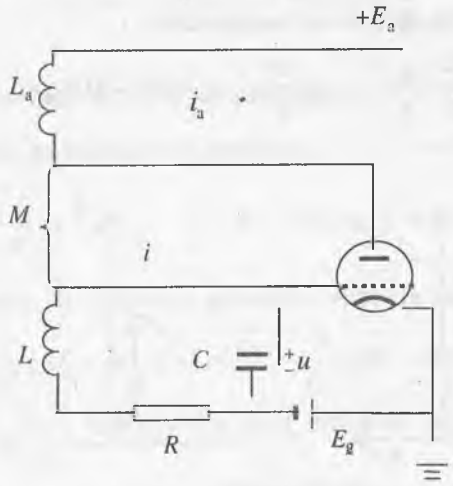
1. *Ko'p amaliy masalalarda ko'rilayotgan harakat turg'un bo'ladimi, asimptotik turg'un bo'ladimi yoki noturg'un bo'ladimi, degan savollarga javob berishga to'g'ri keladi. Hozir ko'rilgan misollar aynan shu guruh masalalarga taalluqli edi.*

2. *Ammo texnikada ko'pincha boshqa turdagi masalalar ham uchraydi. Dinamik sistema parametrlarining ayrim qiymatlarida toyilmagan harakat noturg'un ekanligi ma'lum bo'ladi. Shu sababli quyidagi masala kelib chiqadi:* ***sistema parametrlari qanday tanlanganda, uning toyilmagan harakati turg'un yoki asimptotik turg'un bo'ladi?*** *Bu savolga javob berish algoritmlarini topish juda ham muhim ilmiy va texnikaviy ahamiyatga egadir.*

12- §. Asimptotik turg‘unlik haqidagi teoremaning tatbig‘iga doir misollar

1- m i s o l. Lampali generatorning turg‘unlik sharti

Induktiv teskari aloqali va to‘r zanjirida tebranish konturi bo‘lgan lampali generatorning oddiy sxemasini ko‘rib o‘taylik (2.8- shakl) [1].



2.8- shakl.

Kirxgof qonunlaridan foydalanib, zanjirdagi tokning yo‘nalishini va kondensator musbat qutbining holatini hisobga olib (turdagi tokni e’tiborga olmagan holda) to‘rdagi tokning quyidagi tenglamalarini hosil qilamiz:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{c} i, \qquad L\frac{di}{dt} = u - Ri - M\frac{di_a}{dt}, \tag{2.12.1}$$

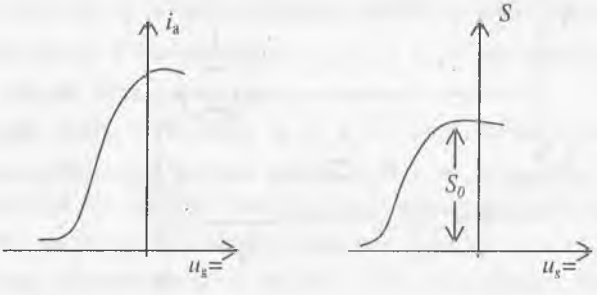
bu yerda u – to‘rdagi kuchlanish, i – zanjirdagi tok, L – o‘zinduktsiya koeffitsiyenti, i_a – anod toki, $M\frac{di_a}{dt}$ – teskari aloqadagi elektr yurituvchi kuch, C – kondensator sig‘imi, R –zanjirning qarshiligi. L_a g‘altak orqali oqayotgan anod tokining konturga ta’siri ostida $M\frac{di_a}{dt}$ elektr yurituvchi kuch (e.y.k.) hosil bo‘ladi. Anod toki faqat to‘rning kuchlanishiga $u_g = u$ bog‘liq deb faraz qilib (katta koeffitsiyentli kuchaytirishi bo‘lgan triodlar uchun bu juda yaxshi bajariladi),

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{di_a}{du}\frac{du}{dt} = S(u)\frac{du}{dt} \qquad (2.12.2)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda $S(u) = \frac{di_a}{du}$ – lampa toki i_a ning tiklik harakteristikasi (2.9- shakl). $\frac{di_a}{dt}$ ning qiymatini (2.12.2) dan (2.12.1) qo'ysak, harakatning differensial tenglamalari

$$\frac{du}{dt} = -\frac{i}{c}, \qquad L\frac{di}{dt} = u - \frac{1}{c}[RC - MS(u)]i \qquad (2.12.3)$$

ko'rinishga keladi.



a) *b)*

2.11- shakl.

Kuchlanish u va i tokka nisbatan $u = 0$, $i = 0$ muvozanat holatning turg'unligini tekshiramiz. Buning uchun Lyapunov funksiyasini

$$V = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{C}i^2 + 2\varepsilon u i + u^2\right) \qquad (2.12.4)$$

ko'rinishda tanlaymiz, bu yerda ε – biror haqiqiy son. V funksiyaning koeffitsiyentlari matritsasi

$$\begin{pmatrix} \frac{L}{C} & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

dan foydalanib, Silvester kriteriysining

$$\Delta_1 = \frac{L}{C} > 0, \qquad \Delta_2 = \frac{L}{C} - \varepsilon^2 > 0 \qquad (2.12.5)$$

shartlarini topamiz. Birinchi shart doimo bajariladi, ikkinchisi bo'lsa, ε sonning moduli bo'yicha yetarlicha kichik qiymatlari uchun bajariladi.

V funksiyaning toyilgan harakat differensial tenglamalariga nisbatan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi

$$\dot{V} = \left(\frac{L}{C} i + \varepsilon u\right)\frac{di}{dt} + (\varepsilon i + u)\frac{du}{dt} \qquad (2.12.6)$$

ko'rinishda bo'ladi. (2.12.3) tenglamalardan $\frac{di}{dt}$ va $\frac{du}{dt}$ larning qiymatini (2.12.6) ga keltirib qo'yganimizda

$$\dot{V} = \left(\frac{L}{C} i + \varepsilon u\right)\left\{\frac{u}{L} - \frac{1}{LC}[RC - MS(u)]\, i\right\} + (\varepsilon i + u)\left(-\frac{i}{c}\right)$$

ni hosil qilamiz. Bu ifodaning qavslarini ochib va hadlarini guruhlasak,

$$\dot{V} = -\frac{1}{C^2}[RC - MS(u) + \varepsilon C]i^2 - \frac{\varepsilon}{LC}[RC - MS(u)]ui + \frac{\varepsilon}{L}u^2$$

kelib chiqadi. $S(u)$ funksiyani u ning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$S(u) = S(0) + S'(0)u + \ldots \qquad (2.12.7)$$

va buni $\dot{V}$ ning ifodasidagi $S(u)$ o'rniga qo'yamiz:

$$\dot{V} = -\frac{1}{C^2}[RC - MS_0 + \varepsilon C]i^2 - \frac{\varepsilon}{LC}(RC - MS_0)ui + \frac{\varepsilon}{L}u^2 + \ldots, \qquad (2.12.8)$$

bu yerda nuqtalar bilan u va i larga nisbatan yuqori tartibli bo'lgan hadlar belgilangan va $S_0 = S(0)$.

$\dot{V}$ funksiya kvadratik qismining koeffisiyentlaridan tuzilgan

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{C^2}(RC - MS_0 + \varepsilon C) & \frac{-\varepsilon}{2LC}(RC - MS_0) \\ -\frac{\varepsilon}{2LC}(RC - MS_0) & \frac{\varepsilon}{L} \end{pmatrix}$$

matritsaning bosh diagonal minorlarini topamiz:

$$\Delta_1' = -\frac{1}{C^2}(RC - MS_0) - \frac{\varepsilon}{C},$$
$$\Delta_2' = -\frac{\varepsilon}{LC^2}(RC - MS_0) - \frac{(RC - MS_0)^2 + LC}{4L^2C^2}\varepsilon^2. \qquad (2.12.9)$$

1. Sistemaning parametrlari

$$RC - MS_0 > 0 \qquad (2.12.10)$$

tengsizlikni qanoatlantirsin.

ε ning ixtiyoriy kichik sonligidan foydalanamiz. Uni $\varepsilon < 0$ deb qabul qilib va moduli bo'yicha yetarli darajada kichik qilib olamizki, (2.12.5) shartdagi Δ_2 va (2.12.9) formuladagi Δ_1' va Δ_2' lar quyidagi shartni qanoatlantirsin:

$$\Delta_2 > 0, \qquad \Delta_1' < 0, \qquad \Delta_2' > 0. \qquad (2.12.11)$$

(2.12.11) shartlarning bajarilishini doimo ta'minlash mumkin, chunki bu determinantlar yoyilmasidagi ikkinchi hadlar birinchi hadlarga nisbatan ε bo'yicha yuqori tartiblidir. ε ning bu qiymatida (2.12.4) tenglik bilan aniqlanadigan V musbat ishorali funksiya bo'ladi (Silvester kriteriysi shartlari bajariladi: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$) va (2.12.8) formula bilan aniqlanadigan $\dot{V}$ aniq manfiy ishorali funksiya bo'ladi (bu yerda ham Silvester kriteriysi shartlari bajariladi: $\Delta_1' < 0, \Delta_2' > 0$). Demak, (2.12.10) shart bajarilsa, u holda teorema B ga asosan sistemaning $i = 0, u = 0$ muvozanat holati kuchlanish u va tok i larga nisbatan asimptotik turg'un bo'ladi.

2. Endi sistemaning parametrlari

$$RC - MS_0 < 0 \qquad (2.12.12)$$

shartni qanoatlantirsin.

Bu holda $\varepsilon > 0$ va uni shunday yetarlicha kichik qilib olamizki,

$$\Delta_2 > 0, \qquad \Delta_1' > 0, \qquad \Delta_2' > 0 \qquad (2.12.13)$$

tengsizliklar bajarilsin. ε sonning bu qiymatida V funksiya va uning hosilasi $\dot{V}$ aniq musbat ishorali funksiya bo'ladi. Harakatning noturg'unligi haqidagi Lyapunov teoremasiga asosan sistemaning $i = 0, u = 0$ muvozanat holati noturg'un bo'ladi.

Shunday qilib, *muvozanat holatining asimptotik turg'un yoki noturg'un bo'lishi sistemaning parametrlarini konstruktor tomonidan qanday qilib tanlab olishiga bog'liq ekan: agar (2.12.10) shartlar bajarilsa, u*

holda i va u larga nisbatan muvozanat holati asimptotik turg'un bo'ladi, (2.12.12) shartlar bajarilganda tok i va kuchlanish u larga nisbatan muvozanat holat noturg'un bo'ladi.

$RC = MS_0$ hol amaliy ahamiyatga ega bo'lmaganligi uchun biz uni tadqiq etmadik.

Bu misol fanning texnika taraqqiyotiga katta xizmat qilishini yana bir bor ko'rsatadi.

3- m i s o l. Avtomatik rostlash sistemasining turg'unligi nazariyasining bitta masalasi haqida

Masalaning qo'yilishi. 1949-yilda M.A. Ayzerman tomonidan bitta chiziqlimas elementga ega bo'lgan avtomatik rostlash sistemasining (sistema avtomaticheskogo regulirovaniya) turg'unligi haqidagi quyidagi masala qo'yildi [3–5].

Avtomatik rostlash sistemasining harakati

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + f(x_k), \\ \frac{dx_s}{dt} &= a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n \qquad (s = \overline{2,n}) \end{aligned} \tag{2.12.14}$$

differensial tenglamalar orqali ifodalansin, bu yerda a_{sj} – o'zgarmas sonlar. (2.12.14) sistema bilan birgalikda

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + hx_k, \\ \frac{dx_s}{dt} &= a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n \qquad (s = \overline{2,n}) \end{aligned} \tag{2.12.15}$$

chiziqli sistemani ham ko'ramiz. (2.12.15) sistema harakteristik tenglamasi barcha ildizlarining haqiqiy qismi

$$\alpha < h < \beta \tag{2.12.16}$$

intervalda yotgan h ning hamma qiymatlarida manfiy ishoraga ega, ya'ni (2.12.15) sistemaning muvozanat holati asimptotik turg'un bo'lsin.

$f(0) = 0$ va barcha $x_k \neq 0$ lar uchun

$$\alpha x_k^2 < x_k f(x_k) < \beta x_k^2 \qquad \text{yoki} \qquad \alpha < \frac{f(x_k)}{x_k} < \beta \tag{2.12.17}$$

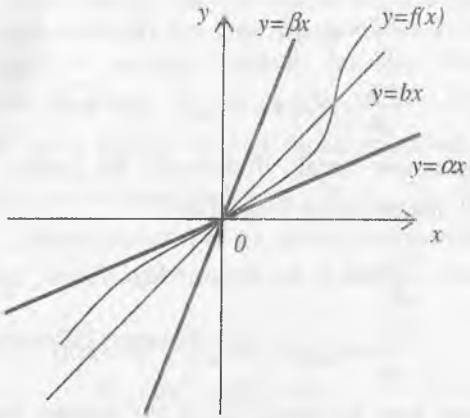
tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday bir qiymatli va uzluksiz $f(x_k)$ funksiya uchun (2.12.14) sistemaning $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ muvozanat

holati butunlayiga asimptotik turg'un bo'ladimi yoki yo'qmi degan muammo paydo bo'ladi.

Boshqacha qilib aytganda, agar $y = f(x)$ egri chiziqning grafigi $y = \alpha x$ va $y = \beta x$ to'g'ri chiziqlar oralig'ida joylashgan bo'lsa (2.10-shakl), u holda bu (2.12.14) sistemaning $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ muvozanat holati batamom asimptotik turg'un bo'lishi uchun yetarlimi?

Bu muammo M.A. Ayzerman tomonidan qo'yildi [4] va juda ham ko'p matematik va mexaniklar tadqiqotlariga sabab bo'ldi.

1950-yilda bu masala ikkinchi tartibli sistemalar uchun N.P. Yerugin tomonidan to'liq o'rganildi [28]. U o'zining tadqiqotlarida differensial tenglamalarning sifat nazariyasidan foydalandi. 1952-yilda I.G. Malkin ham Lyapunovning ikkinchi usuliga tayanib, bu muammoni ikkinchi tartibli sistemalar uchun ko'rib chiqdi [55]. V.A. Pliss Ayzerman muammosini uchinchi tartibli sistemalar uchun tadqiq etdi [77]. N.P. Yerugin, I.G. Malkin va V.A. Plissning izlanishlari ko'pgina kelgusi ilmiy tadqiqotlarga yo'l ochdi.



2.10-shakl.

Biz bu yerda N.P. Yerugin va I.G. Malkinning natijalarini keltiramiz. Dastlab nochiziqliligi birinchi koordinataga bog'liq bo'lgan ikkinchi tartibli

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx + cy \tag{2.12.18}$$

sistemani ko'rib o'taylik. Uning birinchi yaqinlashish

$$\frac{dx}{dt} = hx + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx + cy \tag{2.12.19}$$

tenglamalari uchun xarakteristik tenglama

$$\lambda^2-(h-c)\lambda+hc-ab=0$$

(2.12.20) ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglama ildizlarining haqiqiy qismi

$$h+c<0, \qquad hc-ab>0 \tag{2.12.21}$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi h ning hamma qiymatlarida manfiy ishorali bo'ladi.

(2.12.19) sistema uchun Lyapunov funksiyasini

$$\dot{V}=-2(h+c)(ab-hc)x^2 \tag{2.12.22}$$

shartni qanoatlantiruvchi $V=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2$ kvadratik forma sifatida tanlaymiz.(2.12.22) dan foydalanib, α, β va γ o'zgarmas koeffitsiyentlarni aniqlaganimizdan keyin Lyapunov funksiyasi

$$V=(cx-ay)^2+hcx^2-abx^2 \tag{2.12.23}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. (2.12.21) shartlar V ning aniq musbat ishorali funksiya va $\dot{V}$ ning o'zgarmas manfiy ishorali funksiya bo'lishini ta'minlaydi.

Endi (2.12.23) funksiya asosida (2.12.18) sistema uchun Lyapunov funksiyasini tuzamiz. (2.12.18) sistema (2.12.19) sistemadan faqat hx funksiya o'rnida $f(x)$ nochiziqli funksiya turganligi bilan farq qiladi. (2.12.23) ifodasida h koeffitsiyent x^2 ning oldida turibdi. Agar hx^2 ifodani $2\int_0^x hxdx$ integral sifatida qarasak, u holda (2.12.18) sistema uchun Lyapunov funksiyasini

$$V=(cx-ay)^2+2c\int_0^x f(x)\,dx-abx^2 \tag{2.12.24}$$

ko'rinishda tanlash tabiiydir. Bu funksiyaning (2.12.18) sistemaga nisbatan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi

$$\dot{V}=-2\left(\frac{f(x)}{x}+c\right)\left(ab-\frac{f(x)}{x}c\right)x^2$$

ga teng. $V=(cx-ay)^2+2\int_0^x(cf(x)-abx)\,dx$ bo'lganligidan V ning aniq musbat ishorali funksiya bo'lishlik sharti $x\neq 0$ da

a) $c\dfrac{f(x)}{x}-ab>0$

dan iborat.

a) shart ushbu

b) $\dfrac{f(x)}{x}+c<0 \qquad (x\neq 0)$

shart bilan birgalikda $\dot{V}$ ning o'zgarmas manfiy ishorali funksiya bo'lishini ta'minlaydi. Ravshanki, $x=0$ to'plamda $\dot{V}=0$ bo'ladi va sistemaning butun traektoriyalari yo'q. V funksiya cheksiz katta bo'lishi uchun $|x|\to\infty$ da

s) $\int\limits_0^x (cf(x)-abx)dx\to\infty$

shart bajarilishini talab qilish yetarli.

a), b) va s) shartlar, Barbashin–Krasovskiy teoremasiga asosan, (2.12.18) sistema muvozanat holatining batamom asimptotik turg'un bo'lishini ta'minlaydi.

Agar s) shart bajarilmasa, u holda (2.12.18) ning muvozanat holati har qanday boshlang'ich shartlarda asimptotik turg'un bo'lmasligi N.N. Krasovskiy tomonidan ko'rsatilgan [39].

Endi nochiziqli ikkinchi koordinataga bog'liq bo'lgan ikkinchi tartibli

$$\frac{dx}{dt}=ax+f(y), \qquad \frac{dy}{dt}=bx+cy \tag{2.12.25}$$

sistemani ko'rib o'tamiz. Bu sistemaning birinchi yaqinlashish

$$\frac{dx}{dt}=ax+hy, \qquad \frac{dy}{dt}=bx+cy \tag{2.12.26}$$

tenglamalari uchun xarakteristik tenglama

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-bh=0$$

ko'rinishga ega. Bu tenglama ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishi uchun

$$a+c<0, \qquad ac-bh>0$$

tengsizliklarning bajarilishi yetarli va zarurdir.

$f(y)=yh(y)$ bo'lsin, u holda

$$ac-bh(y)>0. \tag{2.12.27}$$

Bundan tashqari, $|y|$ ning yetarlicha katta qiymatlari uchun $ac-bh(y)>\varepsilon$ tengsizlik bajariladi deb faraz qilamiz, bu yerda ε – istalgancha kichik musbat son.

Xususan, agar $b=0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya chegaralanmagan. Ammo $b=0$ da, (2.12.27) asosan $a<0$, $c<0$ bo'ladi va (2.12.25) sistemani bevosita integrallash natijasi shuni ko'rsatadiki, muvozanat holati har qanday boshlang'ich shartlarda va har qanday $f(x)$ funksiya uchun asimptotik turg'un bo'ladi.

Endi $b\neq 0$ deb hisoblab, quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$2V=-2b\int_0^y f(y)\,dy+b^2x^2-2ab\,xy+(a+c)ay^2\equiv$$
$$\equiv 2\int_0^y [ac-bh(y)]\,ydy+(bx-ay)^2. \qquad (2.12.28)$$

(2.12.27) shartga asosan V aniq musbat ishorali funksiya bo'ladi. V ning (2.12.25) na nisbatan vaqt bo'yicha to'liq hosilasini olamiz:

$$\frac{dV}{dt}=ac(a+c)\,y^2-b(a+c)f(y).$$

Endi $f(y)$ o'rniga (2.12.27) ni qanoatlantiradigan $h=h(y)$ni qo'yib, $y\neq 0$ lar uchun

$$\frac{dV}{dt}=(a+c)\,(ac-bh)\,y^2<0 \qquad (2.12.29)$$

ni hosil qilamiz.

Bu yerdan, agar (2.12.25) tenglamalardagi funksiya (2.12.27) shartni qanoatlantirsa, u holda muvozanat holat har qanday boshlang'ich shartlarda ham asimptotik turg'un bo'ladi degan natijaga kelamiz.

Demak, (2.12.18) va (2.12.25) sistemalar uchun M.A. Ayzerman muammosi doimo ijobiy hal bo'ladi.

III BOB. KONSERVATIV SISTEMALAR MUVOZANAT HOLATI VA STATSIONAR HARAKATLARINING TURG'UNLIGI

1- §. Muvozanat holatining turg'unligi haqidagi Lagranj teoremasi

Agar toyilgan harakat differensial tenglamalari

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (s = \overline{1, n}) \tag{3.1.1}$$

$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \text{const}$ birinchi integralga ega bo'lsa, $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ aniq ishorali funksiya, u holda Lyapunov teoremasi toyilmagan harakatning turg'unligini isbotlashga imkoniyat yaratadi. Haqiqatan ham, bu holda $\dot{V} = 0$ va V funksiya Lyapunov teoremasining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Bu erdan toyilmagan harakatning turg'unligi kelib chiqadi. Xuddi shu holat bilan golonom konservativ sistemalar muvozanat holatining turg'unligini tadqiq etayotganda duch kelamiz.

1788-yilda fransuz olimi J. Lagranj (1736–1813) o'zining "Analitik mexanika" kitobida ixtiyoriy golonom konservativ sistema muvozanat holati turg'unligining etarli shartlarini topdi [51].

Golonom va statsionar bog'lanishlarga ega bo'lgan mexanik sistemani ko'raylik. Sistemaning holatini $q_1, q_2, ..., q_s$ umumlashgan erkin koordinatalar aniqlasin. Ravshanki, bunday sistemaning muvozanat holatida Q_k umumlashgan kuchlar nolga teng bo'ladi:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, ..., Q_s = 0. \tag{3.1.2}$$

Agar Q_k umumlashgan kuchlar q_j koordinatalar va $\dot{q}_j$ tezliklarga bog'liq bo'lsa, u holda sistemaning muvozanat holatlarini topish uchun (3.1.2) tengliklarda $\dot{q}_j = 0$ ni kiritib, hosil bo'lgan tenglamalarni $q_1, q_2, ..., q_s$ larga nisbatan echish kerak.

Konservativ sistemalar uchun

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \tag{3.1.3}$$

bu yerda P– sistemaning potentsial energiyasi.

(3.1.3) ga asosan (3.1.2) tenglamalar quyidagi ko'rinishga ega:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}=0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}=0, \ldots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}=0. \tag{3.1.4}$$

Bu tenglamalarni $q_1, q_2, \ldots, q_s$ larga nisbatan echsak, muvozanat holatlarni aniqlaymiz. Bunday muvozanat holatlar bir nechta va ularning ayrimlari turg'un, ayrimlari esa noturg'un bo'lishi mumkin. Masalan, oddiy matematik mayatnik ikkita muvozanat holatiga ega: quyi muvozanat holati turg'un va yuqori muvozanat holati noturg'un bo'ladi.

Sistemaning birorta mavjud bo'lgan muvozanat holatini ko'ramiz. Bu holatda potentsial energiya nolga teng bo'lsin. Bunga har doim yerishish mumkin, chunki potentsial energiya doimo additiv o'zgarmasgacha aniqlikda topiladi. Bundan tashqari, muvozanat holatida $q_1 = q_2 = \ldots = q_s = 0$ bo'lsin, Muvozanat holatining turg'unligini $q_1, \ldots, q_s$ koordinatalar va $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ tezliklarga nisbatan ko'rib o'tamiz. U vaqtda Lagranjning

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \quad \frac{dq_k}{dt}=\dot{q}_k \qquad (k=\overline{1,s}) \tag{3.1.5}$$

tenglamalari toyilgan harakatning tenglamalari bo'ladi. Tenglamalar soni $n = 2s$ va ular

$$T + \Pi = h \tag{3.1.6}$$

energiya integraliga ega bo'ladi, T – sistemaning kinetik energiyasi. Golonom konservativ sistemalar uchun

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} c_{kj} q_k q_j + \ldots, \tag{3.1.7}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j + \ldots, \tag{3.1.8}$$

bo'ladi, bu erda

$$c_{kj} = c_{jk} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0, \tag{3.1.9}$$

$$a_{kj} = a_{jk} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\right)_0. \tag{3.1.10}$$

Lagranj–Dirixle teoremasi. *Agar golonom statsionar bog'lanishlarga ega bo'lgan konservativ sistemaning yakkalangan (izolirovanniy) muvozanat holatida potensial energiya minimumga ega bo'lsa, u holda bu muvozanat holat turg'un bo'ladi.*

Isbot. Ko'rilayotgan muvozanat holatida potentsial energiya minimumga ega bo'lsin. U holda $q_1 = q_2 = ... = q_s = 0$ muvozanat holatining istalgancha kichik atrofida Π potensial energiyaning qiymatlari musbat bo'ladi. Bu muvozanat holatining kichik atrofida P potensial energiya q_j o'zgaruvchilarning aniq musbat ishorali funksiyasi bo'lishini ko'rsatadi. Boshqa tomondan, golonom va statsionar bog'lanishli konservativ sistemaning (3.1.8) kinetik energiyasi $\dot{q}_j$ umumlashgan tezliklarning aniq musbat ishorali kvadratik formasi bo'ladi. Demak, (3.1.6) ga asosan sistemaning to'liq energiyasi

$$V = T + \Pi \qquad (3.1.11)$$

$q_1,...,q_s$ umumlashgan koordinatalar va $\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_s$ umumlashgan tezliklarning aniq musbat ishorali funksiyasidan iboratdir. V funksiyaning vaqt bo'yicha to'liq hosilasi, (3.1.6) ga asosan, nolga teng, ya'ni $\dot{V} = 0$. Shunday qilib, V funksiya Lyapunov teoremasining hamma shartlarini qanoatlantirgani uchun ko'rilayotgan mexanik sistemaning $q_1 = q_2 = ...$ $... = q_s = 0$ **muvozanat holati turg'un** bo'ladi.

Lagranj–Dirixle teoremasi amaliyotda keng qo'llaniladi. Uni amalda qo'llash uchun T va P funksiyalarni (3.1.7) va (3.1.8) ko'rinishlarga keltirgandan keyin Silvester kriteriysidan foydalanish kerak. Agar c_{kj} koeffitsientlar Silvester kriteriysini qanoatlantirsa, u holda (3.1.7) ning kvadratik qismi $q_1,...,q_s$ o'zgaruvchilarning aniq musbat ishorali funktsiyasi, demak, P potentsial energiya ham muvozanat holati atrofida aniq musbat ishorali funksiya bo'ladi. Bu potentsial energiyaning minimum qiymatga egaligini hamda sistema, Lagranj teoremasiga asosan, muvozanat holatining turg'un ekanligini bildiradi.

Lagranj–Dirixle teoremasi faqatgina konservativ sistema muvozanat holati turg'unligining **etarli shartini** aniqlaydi: agar yakkalangan muvozanat holatida potentsial energiya minimumga ega bo'lsa, u holda bunday muvozanat holat turg'un bo'ladi.

Ammo sistemaning muvozanat holatida potensial energiya maksimumga ega bo'lsa, u holda bunday muvozanat holat noturg'un bo'ladimi yoki yo'qmi, degan savolga bu teorema javob bermaydi.

Amaliyotda juda ham zarur bo'lgan bu savolga Lyapunov o'zining ikki teoremasi bilan javob bergan. Bu teoremalarni isbotsiz keltiramiz [52].

Lyapunovning birinchi teoremasi. *Agar yakkalangan muvozanat holatida potentsial energiya minimumga ega bo'lmasa va uning mavjud emasligi potensial energiya yoyilmasidagi yuqori tartibli hadlarni jalb etmasdan faqat ikkinchi tartibli hadlar bilan aniqlansa, u holda muvozanat holat noturg'un bo'ladi.*

Lyapunovning ikkinchi teoremasi. *Agar yakkalangan muvozanat holatida potensial energiya maksimumga ega bo'lsa va bu holat potentsial energiya yoyilmasida mavjud bo'lgan hadlarning eng kam yuqori darajali hadlari bilan aniqlansa, u holda muvozanat holat noturg'un bo'ladi.*

N.G. Chetayev Lyapunovning bu ikkala teoremasini umumlashtirib, quyidagi teoremani isbot etdi [102].

Teorema. *Agar* $q_1, q_2, ..., q_s$ *o'zgaruvchilarning analitik funksiyasi bo'lgan potensial energiya yakkalangan muvozanat holatida minimumga ega bo'lmasa, u holda muvozanat holat noturg'un bo'ladi.*

2- §. Lagranj–Dirixle teoremasining tatbiqiga doir misollar

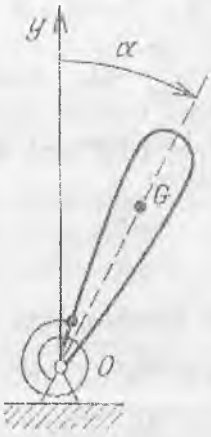
Endi Lagranj–Dirixle teoremasining tatbiqlarini ko'rib o'tamiz.

Misol. *Massa markazi tayanchdan yuqorida turgan fizik mayatnikning muvozanat holati noturg'un bo'ladi. Bu holatni barqarorlashtirish uchun jism bilan tayanch o'rtasiga spiral prujina o'rnatilgan. Bu spiral prujina mayatnikning* α *og'ish burchagiga proportsional bo'lgan tiklovchi moment yaratadi. Muvozanat holatini barqarorlashtirish uchun proportsionallik koeffitsiyentining qiymatini qanday tanlab olish kerak?*

Echish. Jismga ta'sir etayotgan kuchlarning potensial energiyasi

$$\Pi(\alpha) = mgl\cos\alpha + \frac{1}{2}c\alpha^2$$

ga teng bo'ladi, bu yerda m–jismning massasi, l–massa markazi G bilan mayatnikning tebranish o'qi O orasidagi masofa $(l = OG)$, c–izlanayotgan prujinaning qattiqlik koeffitsiyenti.



3.1- shakl.

Muvozanat holatida

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \Pi' = -mgl\sin\alpha + c\alpha = 0 .$$

Parametrlarning har qanday qiymatida ham bu tenglamaning yechimi $\alpha = 0$, ya'ni fizik mayatnikning muvozanat holati $\alpha = 0$ bo'ladi.

$$\Pi''(0) = -mgl + c > 0$$

bo'lganda, potensial energiya muvozanat holatida minimumga ega bo'ladi. Bu yerdan

$$c > mgl$$

bo'lgandagina, muvozanat holatining turg'un (barqaror) bo'lishi kelib chiqadi.

3- §. Siklik koordinatalar. Raus almashtirishi

Shunday mexanik sistemalar sinfi mavjudki, ularning kinetik energiyasi oshkor ravishda ba'zi koordinatalarga bog'liq bo'lmaydi va bu koordinatalarga mos kelgan umumlashgan kuchlar nolga teng bo'ladi. Bunday koordinatalar **siklik koordinatalar**, qolganlari esa **pozitsion** yoki **nosiklik koordinatalar** deb ataladi. Masalan, Yer sun'iy yo'ldoshi uchun φ siklik koordinata, θ va r lar pozitsion koordinatalar, konik (konussimon) mayatnik uchun ψ siklik koordinata, θ esa pozitsion koordinata bo'ladi. Pildiroq uchun α va β pozision, φ siklik koordinatadir.

Biror dinamik sistema uchun $q_1, q_2, ..., q_s$ pozitsion va $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ siklik koordinatalar bo'lsin. Siklik koordinatalar uchun Lagranj tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = Q_{\varphi_j} \qquad (j = \overline{1,m}) \qquad (3.3.1)$$

T kinetik energiya siklik koordinata ta'rifiga asosan oshkora ravishda φ_j ga bog'liq bo'lmagani uchun

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = 0 .$$

Bundan tashqari, siklik koordinatalarga mos kelgan Q_{φ_j} umumlashgan kuchlar nolga teng, ya'ni

$$Q_{\varphi_j} = 0 . \qquad (3.3.2)$$

Shunday qilib, siklik koordinatalar uchun (3.3.1) Lagranj tenglamalari

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j}=0 \qquad (j=\overline{1,m}) \tag{3.3.3}$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamalar quyidagi

$$p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j}=c_j=\text{const} \qquad (j=\overline{1,m}) \tag{3.3.4}$$

birinchi integrallarga ega, *ya'ni siklik koordinatalarga mos kelgan umumlashgan impulslar butun harakat davomida o'zgarmas bo'lib qoladi.*

Pozitsion koordinatalar uchun Lagranj tenglamalarini almashtirishda (3.3.4) birinchi integrallardan foydalanish mumkin.

Bu almashtirishlar Raus tomonidan ko'rsatilgani uchun uning nomi bilan yuritiladi. Biz bu yerda faqat olingan natijalarni keltiramiz. Natijalarning isbotini D.R. Merkin va N.G. Chetayevning [60,102] kitoblaridan topasiz.

T kinetik energiya tezliklarga nisbatan kvadratik forma bo'lgani uchun (3.3.4) birinchi integrallarning o'ng tarafi $\dot{\varphi}_j$ siklik tezliklarga nisbatan chiziqli bo'ladi. m ta birinchi integraldan $\dot{\varphi}_j$ larni q_k va $\dot{q}_k$ lar orqali ifodalaymiz va ularni T siklik energiyaning ifodasiga kiritib, hosil bo'lgan yangi ifodani T^* bilan belgilaymiz. Bundan keyin R Raus funksiyasini

$$R=T^*-\sum_{k=1}^{m}c_k\dot{\varphi}_k \tag{3.3.5}$$

formula orqali aniqlab olamiz.

Bu formulada $\dot{\varphi}_k$ siklik tezliklar ularning (3.3.4) birinchi integrallardan topilgan ifodalar bilan almashtirilgan deb qaraladi. q_j pozitsion koordinatalar uchun tenglamalar (sistemaga ta'sir etayotgan kuchlar potensial kuchlar deb faraz qilinadi; aks holda tenglamaning o'ng tarafida Q_j umumlashgan kuchlar turadi)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial R}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \qquad (j=\overline{1,s}) \tag{3.3.6}$$

ko'rinishga keladi.

Raus funksiyasi faqat q_k va $\dot{q}_k$ larga bog'liq bo'lib, φ siklik koordinata va $\dot{\varphi}$ siklik tezlikka bog'liq bo'lmaydi. Shuning uchun ham pozitsion koordinatalar bo'yicha sodir bo'layotgan harakatni (siklik koordinatalarni inobatga olmaganday bo'lib) (3.3.6) tenglamalar asosida tadqiq qilish mumkin. Shu sababli siklik koordinatalar bo'yicha yuz berayotgan harakatni **oshkormas harakat** va pozitsion koordinatalar bo'yicha sodir bo'layotgan harakatni **oshkor harakat** deb aytamiz.

Endi R Raus funksiyasining strukturasini (tuzilishini) ko'rib o'taylik. Hamma bajarilgan almashtirishlar natijasida hosil qilingan va (3.3.5) formula bilan aniqlanadigan R Raus funksiyasi uchta hadning yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$R = R_2 + R_1 + R_0, \tag{3.3.7}$$

bu yerda R_2 – ifodasida $\dot{q}$ pozitsion tezliklar ikkinchi darajada qatnashuvchi hadlar yig'indisi, ya'ni

$$R_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j, \tag{3.3.8}$$

R_1 – ifodasida $\dot{q}$ pozitsion tezliklar birinchi darajada qatnashuvchi hadlar yig'indisi, ya'ni

$$R_1 = \sum_{j=1}^{s} a_j\dot{q}_j, \tag{3.3.9}$$

R_0 – ifodasi $\dot{q}$ pozitsion tezliklarga bog'liq bo'lmagan hadlar yig'indisi. Bu tengliklarda $a_{kj} = a_{jk}$ hamda a_j va R_0 lar $q_1, q_2, ..., q_s$ pozitsion koordinatalar va $c_1, c_2, ..., c_m$ o'zgarmas sonlarga bog'liq funksiyalar. R_2 kvadratik forma aniq musbat ishorali bo'ladi [61].

(3.3.6) tenglamalarga R Raus funksiyasining ifodasini (3.3.7) dan keltirib qo'yamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(R_2 + R_1 + R_0)}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial(R_2 + R_1 + R_0)}{\partial q_j} = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_j}.$$

R_0 ning $\dot{q}$ bog'liqmasligini hisobga olib va alohida qo'shiluvchilarga ajratib guruhlaganimizdan keyin

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial R_2}{\partial q_j} = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial R_0}{\partial q_j} - \left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial R_j}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial R_1}{\partial q_j}\right\} \tag{3.3.10}$$

ifodaga kelamiz. (3.3.9) foormuladan foydalanib, o'ng tomonda qavs ichidagi ifodani almashtiramiz:

$$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{j=1}^{s} a_j \dot{q}_j = a_j .$$

a_j koeffitsiyentning $q_1, q_2, ..., q_s$ lar orqali t vaqtga nisbatan murakkab funksiya ekanligini hisobga olib,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{da_j}{dt} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial a_j}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

ni topamiz. (3.3.9) formulada j indeksni k ga almashtirib, q_j bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{k=1}^{s} a_j \dot{q}_j = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \dot{q}_k .$$

Demak,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R_1}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k = \sum_{k=1}^{s} g_{jk} \dot{q}_k ,$$

bu erda g_{jk} giroskopik koeffitsiyentlar

$$g_{jk} = \frac{\partial a_j}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_j} \qquad (3.3.11)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Endi (3.3.10) tenglamalarni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R_2}{\partial q_j} = -\frac{\partial W}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{s} g_{jk} \dot{q}_k \quad (j = \overline{1,s}), \qquad (3.3.12)$$

bu yerda

$$W = \Pi - R_0 . \qquad (3.3.13)$$

(3.3.12) tenglamalarni biror keltirilgan sistema deb qarash mumkinki, unda R_2 va W funksiyalar mos ravishda **kinetik** va **potensial** energiya vazifasini bajaradi. Bu sistemaning umumlashgan kuchlari

$$Q_j = -\frac{\partial W}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^{s} g_{jk} \dot{q}_k \qquad (3.3.14)$$

tengliklar bilan aniqlanadi, bu yerda $\sum g_{jk}\dot{q}_k$ – **giroskopik kuchlar** deb ataladi. Giroskopik koeffitsiyentlarning aniqlanishiga ko'ra ((3.3.11) ga qarang), ularning matritsasi **qiyshiq simmetrik** bo'ladi, ya'ni

$$g_{jk} = -g_{kj}. \tag{3.3.15}$$

Agar giroskopik kuchlar yo'q bo'lsa (bu holat, odatda, $R_1 = 0$ da yuz beradi), u holda sistemani **giroskopik bog'lanmagan** deb ataymiz. Giroskopik kuchlarning asosiy xususiyati shundan iboratki, haqiqiy siljishda ularning bajargan ishi nolga teng bo'ladi. Bu xususiyat ularga Tomson va Tet bergan [112] ta'rifning asosini tashkil etadi.

(3.3.12) keltirilgan sistemaning differensial tenglamalaridan energiya integralini hosil qilish mumkin:

$$R_2 + W = R_2 + \Pi - R_0 = \text{const}. \tag{3.3.16}$$

Bu integralning fizik ma'nosi ravshandir: *keltirilgan sistemaga ta'sir etayotgan giroskopik kuchlar ish bajarmaydi va, demak, ular umumiy energiya balansini o'zgartirmaydi.*

4- §. Statsionar harakatlar turg'unligi

Ma'lum sharoitda m ta siklik va s ta pozitsion koordinatalari bo'lgan moddiy sistema statsionar harakat qilishi mumkin. Statsionar harakatda **hamma pozitsion koordinatalar** va **siklik tezliklar** boshlang'ich qiymatlariga teng bo'lgan **o'zgarmas qiymatga** ega bo'ladi. Bu statsionar harakat mavjud bo'lishi uchun zarur bo'lgan shart quyidagi mulohazalardan kelib chiqadi.

Ta'rifga asosan statsionar harakatda barcha pozitsion koordinatalar qiymatlarini o'zgarmas holda saqlaydi, ya'ni

$$q_k(t) = q_{k0} = \text{const} \qquad (k = \overline{1, s}).$$

Bu keltirilgan sistemaning muvozanatda (harakatsiz) turishini bildiradi. O'z navbatida buning uchun sistemaga ta'sir etayotgan hamma umumlashgan kuchlar nolga teng, ya'ni

$$Q_j = -\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)_{q_0} - \sum_{k=1}^{s} g_{jk}\dot{q}_k = 0$$

bo'lishi yoki statsionar harakatda (keltirilgan sistema muvozanatda) barcha $\dot{q}_i$ lar uchun $\dot{q}_k = 0$ bo'lishini hisobga olganda

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)_{q_0} = 0 \qquad (j=\overline{1,s}) \tag{3.4.1}$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Keltirilgan sistemaning potensial energiyasi $W = \Pi - R_0$ ((3.3.13) ga qarang) ekanligini hisobga olib, (3.4.1) shartlarga boshqacha ko'rinish berish mumkin:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_{q_0} = \left(\frac{\partial R_0}{\partial q_j}\right)_{q_0} \qquad (j=\overline{1,s}). \tag{3.4.2}$$

Shunday qilib, *statsionar harakat mavjud bo'lishi uchun* q_j *pozision koordinatalarning boshlang'ich qiymatlari* s *ta (3.4.1) shartlarni qanoatlantirishi va hamma pozitsion tezliklarning boshlang'ich qiymatlari nolga teng bo'lishi (*$q = \text{const}$ *va* $\dot{q} = 0$ *bo'lganda hamma* $\dot{\varphi}$ *siklik tezliklar o'zgarmas qiymatlarini saqlaydi) yetarli va zarurdir.*

R_0 ning ifodasiga (3.3.4) siklik integrallarning c_j o'zgarmas sonlari kirganliklari tufayli q_{0j} ning statsionar harakatlari qiymati c_j ni o'z ichiga olgan $\dot{\varphi}$ siklik tezliklarga bog'liq bo'ladi.

Statsionar harakatni toyilmagan harakat sifatida qarab, uning turg'un bo'lish shartlarini aniqlaymiz. Umumiylikni buzmasdan, statsionar harakatda hamma q_j pozitsion koordinatalar nolga teng, ya'ni (3.4.1) tenglamalarning yechimlari $q_{10} = q_{20} = ... = q_{s0} = 0$ deb qabul qilishimiz mumkin. U holda keltirilgan sistemaning (3.3.12) tenglamalari q_j pozitsion koordinatalar va $\dot{q}_j$ pozitsion tezliklarga nisbatan toyilgan harakatning differensial tenglamalari bo'ladi. Statsionar harakatning turg'unligi haqidagi bir qator teoremalarni Raus isbot qilgan. Bu erda ular orasidan ko'p tarqalgan va amaliyotda muhim bo'lgan bittasini keltiramiz.

Raus teoremasi. *Agar statsionar harakatda keltirilgan sistemaning* $W = \Pi - R_0$ *potensial energiyasi minimumga ega bo'lsa, u holda, hech bo'lmaganda (3.3.4) siklik integrallarning qiymatini buzmaydigan toyilishlar uchun, statsionar harakat* q_j *pozitsion koordinatalar va* $\dot{q}_j$ *tezliklarga nisbatan turg'un bo'ladi.*

Isbot. Berilgan moddiy sistemaning statsionar harakati paytida keltirilgan sistema muvozanatda (harakatsiz) bo'ladi. Bundan tashqari, kel-

tirilgan sistema uchun (3.3.16) energiya integrali mavjud. Shu tufayli Raus teoremasini isbot qilish uchun Lagranj teoremasining isbotini qaytarish yetarli.

Keltirilgan Raus teoremasi faqatgina (3.3.4) siklik integrallarning qiymatini buzmaydigan toyilishlar uchun to'g'ridir. Lyapunov Rausning bu teoremasidagi kamchilikni tuzatadigan teoremani yaratdi. Biz uni isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *Agar keltirilgan sistema W potensial energiyasi ham ko'rilayotgan statsionar harakatga mos keluvchi $p_j = c_j$ qiymatlar uchun ham $p_j = c_j + \eta_j$ qiymatlar uchun minimumga ega, bu yerda $|\eta_j|$ yetarlicha kichik miqdor, hamda W ni minimumga aylantiruvchi $q_1, q_2, ..., q_s$ o'zgaruvchilarning qiymatlari p_j miqdorlarning uzluksiz funksiyalari bo'lsa, u holda statsionar harakat q_k pozision koordinatalar va q_k tezliklarga nisbatan turg'un bo'ladi.*

Lyapunov Raus teoremasini umumlashtirgan bu teoremasining isbotini keltirmagan.

W uzluksiz funksiya bo'lgan hol uchun V.V. Rumyansev bu teoremani isbot qiladi [81]. [81] kitobda statsionar harakatlar turg'unlik nazariyasi deyarli to'liq keltirilgan. Kitobdagi ko'p natijalar V.V. Rumyansev tomonidan olingan.

Ta'kidlash zarurki, statsionar harakatlarning turg'unligiga potensial energiya minimumga ega bo'lmagan holda ham erishish mumkin (giroskopik kuchlar yordami bilan). Shuning uchun ham Lagranj teoremasiga teskari bo'lgan Lyapunov va Chetayev teoremalarini statsionar harakatga qo'llash mumkin emas.

Ammo giroskopik bog'lanmagan sistemalar uchun quyidagi teorema to'g'ridir.

Teorema. *Agar giroskopik bog'lanmagan sistemaning yakkalangan statsionar harakati uchun (3.3.4) siklik integrallarning mahkamlangan qiymatlarida q larning analitik funksiyasi bo'lgan W minimum qiymatga ega bo'lmasa, u holda statsionar harakat noturg'un bo'ladi.*

Izoh. *Raus teoremasini amaliy masalalarni yechishda foydalanish uchun teorema shartlari bajarilganda, $W - W_0$ funksiyaning aniq musbat ishorali ekanligini aniqlash yetarli, bu yerda W ning statsionar harakatdagi qiymati W_0 deb olingan. Shuning uchun ham bu funksiyani qatorga yoyish va Silvester kriteriysidan foydalanish kerak.*

5- §. Raus teoremasining tatbiqiga doir misollar

Kitobning 2- bobida konussimon mayatnik va Yer sun'iy yo'ldoshi statsionar harakatlarining turg'unligini Chetayev usuli bilan isbot qilgan edik. Endi Raus teoremasini tatbiq etib shu natijalarni olamiz.

1- m i s o l. Konik mayatnik statsionar harakatining turg'unligi

Oldin konik (konussimon) mayatnikning quyidagi kinetik va potensial energiyalari topilgan edi:

$$T=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta),\qquad \Pi=-mgl\cos\theta.$$

Bu ifodalardan ko'rinib turibdiki, ψ – siklik koordinata (u kinetik energiya ifodasiga faqat $\dot{\psi}$ burchak tezlik orqali kiryapti va potensial energiya ifodasida yo'q) va θ – pozision koordinata. (3.3.4) formulaga asosan, siklik integralni tuzamiz:

$$p=\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}=ml^2\sin^2\theta\cdot\dot{\psi}=c, \tag{3.5.1}$$

Bu yerdan $\dot{\psi}$ topib, T kinetik energiya ifodasiga kiritamiz:

$$\dot{\psi}=\frac{c}{ml^2\sin^2\theta},\qquad T^*=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\frac{c^2}{ml^2\sin^2\theta}.$$

(3.3.5) formuladan foydalanib, R Raus funksiyasini topamiz:

$$R=T^*-c\dot{\psi}=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\frac{c^2}{ml^2\sin^2\theta}-c\cdot\frac{c}{ml^2\sin^2\theta}$$

yoki

$$R=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}\frac{c^2}{ml^2\sin^2\theta}.$$

(3.3.7), (3.3.8) va (3.3.9) formulalarga asoslanib,

$$R_2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2,\qquad R_1=0,\qquad R_0=-\frac{1}{2}\frac{c^2}{ml^2\sin^2\theta}$$

ni hosil qilamiz. $R_1=0$ bo'lganligi uchun ko'rilayotgan sistema giroskopik bog'lanmagan bo'ladi. Endi keltirilgan sistemaning $W=\Pi-R_0$ potensial energiyasini topamiz:

$$W=-mgl\cos\theta+\frac{1}{2}\frac{c^2}{ml^2\sin^2\theta}. \tag{3.5.2}$$

Barqaror harakatdagi θ burchakning qiymatini α bilan, ψ siklik tezlikning qiymatini ω bilan belgilaymiz. Statsionar harakat mavjud bo'lishining (3.4.1) sharti quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_{\theta=\alpha} = mgl\sin\alpha - \frac{c^2\cos\alpha}{ml^2\sin^3\alpha} = 0 \qquad (3.5.3)$$

yoki almashtirishlar o'tkazgandan keyin

$$\frac{\sin^4\alpha}{\cos\alpha} = \frac{c^2}{m^2gl^3} \qquad (3.5.4)$$

ga keladi.

Bu formula (3.5.3) tenglamaning bir parametrli yechimlar oilasini aniqlaydi va (3.5.4) ga mos keladigan konussimon mayatnik burchak tezligining qiymati (3.5.1) tenglikdan aniqlanadi:

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \omega = \frac{c}{ml^2\sin^2\alpha} \qquad (3.5.5)$$

(3.5.4) va (3.5.5) tengliklardan c parametrni chiqarsak, ushbu tenglikka kelamiz:

$$\omega^2\cos\alpha = \frac{g}{l}.$$

Bu tenglik konik mayatnik statsionar harakating mavjud bo'lishi sharti hisoblanadi va oldin biz uni elementar mulohazalar orqali topgan edik.

Endi mayatnik statsionar harakatini toyilmagan harakat sifatida qabul qilib, uning turg'unligini Raus teoremasi yordamida tadqiq qilamiz.

Buning uchun $\theta = \alpha + x$ ni W ning (3.5.2) ifodasiga kiritamiz va $W - W_0$ ayirmani x ning darajalari bo'yicha qatorga yoyaamiz:

$$W - W_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_{\theta=\alpha} \cdot x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial^2 \theta}\right)_{\theta=\alpha} \cdot x^2 + \ldots$$

yoki (3.5.3) ni hisobga olib,

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\alpha} \cdot x^2 + \ldots$$

ni hosil qilamiz, bu yerda nuqtalar bilan x ning darajalari ikkinchidan yuqori bo'lgan hadlar belgilangan. $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\alpha}$ ni topib o'rniga qo'yganimizdan keyin

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\left[mgl + \frac{c^2}{ml^2} \frac{\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha} \right] x^2 + \ldots$$

ga ega bo'lamiz.

x^2 oldidagi ko'paytuvchi musbatligi uchun W funksiya statsionar harakatda **minimumga** ega. Bundan tashqari, har qanday $\theta = \alpha \neq \frac{\pi}{2}$ uchun (3.5.4) yechim (3.5.1) integraldagi c o'zgarmas songa uzluksiz bog'liq. Siklik tezlik $\psi = \omega$ ham $\theta = \alpha \neq 0$ qiymatlarda c ga uzluksiz bog'liq bo'ladi. Shuning uchun ham Raus teoremasi va umumlashgan Lyapunov teoremasiga asosan konik mayatnikning statsionar harakati φ, θ va $\dot{\psi}$ o'zgaruvchilarga nisbatan turg'undir.

IV BOB. STATSIONAR HARAKATLAR UCHUN BIRINCHI YAQINLASHISH USULI BO'YICHA TURG'UNLIK KRITERIYLARI

Ko'p hollarda, asosan amaliyotda, harakatning turg'unligini birinchi yaqinlashish tenglamalari asosida tadqiq qiladilar. Ammo, kitobning 1-bobida ko'rsatganimizdek, birinchi yaqinlashish tenglamalari harakat turg'unligi haqida umuman noto'g'ri xulosalar berishi mumkin. Shuning uchun ham shunday shartlarni topish masalasi tug'iladiki, bu shartlar bajarilganda, birinchi yaqinlashish tenglamalari asosida harakat turg'unligi haqida to'g'ri xulosa chiqarish mumkin bo'lsin. Boshqacha qilib aytganda, *qanday shartlar bajarilganda, birinchi yaqinlashish tenglamalari asosida turg'unlik haqida olingan natijalar to'g'ri bo'ladi* degan muammo paydo bo'ladi. Bu muammo XIX asrning ikkinchi yarmida paydo bo'ldi va uni A.M. Lyapunov 1892-yili o'zining doktorlik dissertatsiyasida avtonom sistemalar va ba'zi bir noavtonom sistemalar uchun yechdi.

Bu bobda barqaror harakatlar uchun birinchi yaqinlashish usuli bo'yicha turg'unlik kriteriylarini (yetarli va zarur shartlarni) bayon etamiz.

1- §. Birinchi yaqinlashish tenglamalari

Biror sistema toyilgan harakatining differensial tenglamalari quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n + X_s(x_1, x_2, ..., x_n) \quad (s = \overline{1,n}). \qquad (4.1.1)$$

Bu yerda p_{sj} – o'zgarmas sonlar, X_s esa t vaqtga bog'liq bo'lmagan $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning funksiyalari va

$$|x| \le H \qquad (4.1.2)$$

sohada o'sha o'zgaruvchilar darajalari bo'yicha qatorga yoyiluvchi va yoyilmasi birinchi hadining darajasi ikkidan kam bo'lmasligi kerak.

(4.1.1) sistemaning birinchi yaqinlashish tenglamalari

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n \quad (s = \overline{1,n}). \qquad (4.1.3)$$

Bu tenglamalarning xususiy yechimlari quyidagi ko'rinishda izlanadi:

$$x_1 = A_1 e^{\lambda t}, ..., \; x_n = A_n e^{\lambda t}, \qquad (4.1.4)$$

bu yerda $A_1,...,A_n$, λ – o'zgarmas sonlar. (4.1.4) larning vaqt bo'yicha hosilasi

$$\dot{x}_1 = A_1\lambda e^{\lambda t},...,\quad \dot{x}_n = A_n\lambda e^{\lambda t} \tag{4.1.5}$$

ga teng bo'ladi. $x_1, x_2,...,x_n$ va $\dot{x}_1, \dot{x}_2,...,\dot{x}_n$ larning qiymatlarini (4.1.4) va (4.1.5) lardan (4.1.3) ga keltirib qo'yib va nolga teng bo'lmagan $e^{\lambda t}$ umumiy ko'paytuvchiga qisqartirib, hadlarni guruhlaganimizdan keyin

$$\left.\begin{aligned} &(p_{11}-\lambda)A_1 + p_{12}A_2 + ... + p_{2n}A_n = 0,\\ &p_{21}A_1 + (p_{22}-\lambda)A_2 + ... + p_{2n}A_n = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &p_{m}A_1 + p_{21}A_2 + ... + (p_{nn}-\lambda)A_n = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.1.6}$$

aniqmas $A_1, A_2,..., A_n$ o'zgarmas sonlarga nisbatan bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga kelamiz. Bu sistema noldan farq qiluvchi yechimga (aks holda hamma $x_s \equiv 0$) ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga aylanishi zarur:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \cdots & p_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.1.7}$$

Bu yerdan quyidagini hosil qilamiz

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0, \tag{4.1.8}$$

bunda a_s koeffisiyentlar (4.1.3) tenglamalardagi p_{sj} koeffisiyentlarning funksiyalari bo'ladi ($s=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$). (4.1.7) ni xarakteristik determinant va (4.1.8) ni (4.1.3) birinchi yaqinlashish tenglamalari sistemasining λ ga nisbatan xarakteristik tenglamasi deb ataymiz.

Algebraning asosiy teoremasiga asosan (4.1.8) xarakteristik tenglama n ta $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ ildizlarga ega bo'ladi.

a) Agar xarakteristik tenglama ildizlari orasida karralilari bo'lmasa (ya'ni bir-biriga teng emas), u holda har doim shunday xosmas chiziqli almashtirish

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} v_{kj} x_j \qquad (k = \overline{1,n}) \tag{4.1.9}$$

mavjudki (bu yerda v_{kj} – qandaydir o'zgarmas sonlar), u (4.1.3) birinchi yaqinlashish tenglamalarini quyidagi ko'rinishga keltiradi:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_n &= \lambda_n y_n. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

$y_1, y_2, ..., y_n$ o'zgaruvchilar **kanonik o'zgaruvchilar** deb aytamiz. Agar (4.1.9) almashtirishlarni (4.1.1) toyilgan harakat tenglamalariga nisbatan qo'llasak, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda y_1 + Y_1, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + Y_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_n &= \lambda_n y_n + Y_n, \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

bu yerda Y_s $(s = \overline{1,n})$ – nochiziqli hadlar, yoyilmasi $y_1, ..., y_n$ larga nisbatan kamida ikkinchi darajali hadlardan boshlanadi.

Xarakteristik tenglamaning har qanday $\lambda = \alpha + i\beta$ kompleks ildiziga bitta $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ qo'shma ildiz mos keladi (α, β – haqiqiy o'zgarmas sonlar). Ularga $y = u + iv$ va $\overline{y} = u - iv$ kompleks – qo'shma kanonik o'zgaruvchilar mos keladi, bu yerda u va v lar t ning haqiqiy funksiyasi. Xarakteristik tenglamaning haqiqiy ildizlariga y haqiqiy kanonik o'zgaruvchilar mos keladi.

(4.1.9) almashtirishning v_{kj} koeffisiyentlari o'zgarmas sonlar bo'lganligi uchun toyilmagan harakatning x_k o'zgaruvchilarga nisbatan turg'unligidan (noturg'unligidan) y_k kanonik o'zgaruvchilarga nisbatan turg'unligi (noturg'unligi) kelib chiqadi va, aksincha.

Ko'rilayotgan sistemaning toyilgan harakat differensial tenglamalari (4.1.3) ko'rinishda bo'lsin yoki kanonik o'zgaruvchilarda (4.1.10) ko'rinishda, ya'ni chiziqli bo'lsin. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ lar bir-biriga teng bo'lmaganligi uchun (oddiy ildizlar), (4.1.10) tenglamalar ham bir-biriga

bog'liq emas. Ular oson integrallanadi va umumiy yechim quyidagi ko'rinishga ega:

$$y_1 = y_{01}e^{\lambda_1 t},$$
$$y_2 = y_{02}e^{\lambda_2 t}, \qquad (4.1.12)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = y_{0n}e^{\lambda_n t},$$

bu yerda $y_{01},\ldots,y_{0n}$ lar $y_1,\ldots,y_n$ larning $t=0$ paytdagi (boshlang'ich) qiymatlari.

$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lsin. Agar $\alpha_k \neq 0$ va $\beta_k \neq 0$ bo'lsa, kompleks ildizga, $\alpha_k = 0$ va $\beta_k \neq 0$ bo'lsa sof mavhum ildizga, $\alpha_k \neq 0$ va $\beta_k = 0$ bo'lsa, haqiqiy ildizga, $\alpha_k = \beta_k = 0$ bo'lganda esa nol ildizga ega bo'lamiz. Ma'lumki,

$$\left|e^{\lambda_k t}\right| = \left|e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}\right| = e^{\alpha_k t}\left|e^{i\beta_k t}\right|$$

yoki har qanday β_k va t lar uchun $\left|e^{i\beta_k t}\right| = 1$ bo'lishini hisobga olib,

$$\left|e^{\lambda_k t}\right| = e^{\alpha_k t} \qquad (4.1.13)$$

ni hosil qilamiz. $t \to \infty$ da (4.1.13) tenglikdan quyidagilar kelib chiqadi:

a) agar $\alpha_k < 0$ bo'lsa, u holda $\left|e^{\lambda_k t}\right| \to 0$,

b) agar $\alpha_k = 0$ bo'lsa, u holda $\left|e^{\lambda_k t}\right| = 1$, (4.1.14)

d) agar $\alpha_k > 0$ bo'lsa, u holda $\left|e^{\lambda_k t}\right| \to \infty$.

Demak, agar xarakteristik tenglamaning ildizlari oddiy bo'lsa, u holda (4.1.12) umumiy yechim va (4.1.14) munosabatlardan chiziqli avtonom sistema harakatining turg'unligi haqidagi quyidagi teoremalar kelib chiqadi:

1. *Agar xarakteristik tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy ishorali ($\alpha_k < 0$) bo'lsa, u holda toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi ($t \to \infty$ da hamma $y_k \to 0$);*

2. *Agar xarakteristik tenglama ildizlaridan hech bo'lmaganda bittasining haqiqiy qismi musbat bo'lsa, u holda toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi ($t \to \infty$ da hech bo'lmaganda bitta $y_k \to \infty$);*

3. *Agar xarakteristik tenglama ildizlaridan biror qismining haqiqiy qismi nolga teng va qolganlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lsa, u holda toyilmagan harakat turg'un (asimptotik emas) bo'ladi (barcha* y_k *lar chegaralangan va ularning bir qismi nolga intiladi).*

b) Xarakteristik tenglamaning birorta λ_j **ildizi** l **karrali bo'lsin.** Bu ildizga avvalgidek

$$x_s = A_s e^{\lambda_j t} \tag{4.1.4,a}$$

yechim mos keladi, bu yerda ham A_s lar (4.1.6) tenglamalarni qanoatlantiradi. Ammo bu holda λ_j ildizga (4.1.3) tenglamaning (4.1.4,a) dan farq qiluvchi boshqa xususiy yechimlari ham mos keladi. Bu yechimlar

$$x_s = f_s(t) e^{\lambda_j t} \qquad (s = \overline{1,n}) \tag{4.1.15}$$

ko'rinishda bo'lib, bu yerda $f_s(t)$ – biror t ga nisbatan ko'phad [78]. Bu ko'phadlarning darajasi hech qachon $(l-1)$ dan katta emas, ammo $(l-1)$ dan kichik bo'lishi mumkin.

Bu yerda $D(\lambda_j)$ determinantning ((4.1.7) ga qarang) rangi $(n-1)$ ga tengmi yoki undan kichik bo'lishiga qarab, ikki hol yuz berishi mumkin.

Izoh. *Asosiy determinantdan* k *satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan determinant* $(n-k)$*- tartibli minor deb ataladi. Agar* m *dan kichik tartibli barcha minorlari nolga teng bo'lgan holda, aqalli bitta* m*- tartibli minori noldan farqli bo'lsa, bu determinantning rangi* m *ga teng deb aytiladi.*

$D(\lambda_j)$ determinantning rangi $(n-1)$ ga teng bo'lsin, u holda (4.1.3) tenglamaning quyidagi l ta yechimi mavjud bo'ladi:

$$\begin{aligned} x_s^{(1)} &= f_s(t) e^{\lambda_j t}, \\ x_s^{(2)} &= \frac{df_s}{dt} e^{\lambda_j t}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_s^{(l)} &= \frac{d^{(l-1)} f_s}{dt} e^{\lambda_j t}. \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Bu yechimlar chiziqli bog'lanmagan (erklidir). Oxirgisi (4.1.4,a) ga mos bo'ladi. Demak, λ_j karrali ildizga bir guruh yechim mos kelyapti.

$D(\lambda_j)$ **determinantning rangi** $(n-2)$ **ga teng bo'lsin.** U holda l karrali λ_j ildizga l ta chiziqli bog'liqmas yechim mos keladi, ammo endi bu yechimlar ikki guruhga bo'linadi:

$$x_s^{(k)} = \frac{d^{k-1} f_s^{'}}{dt^{k-1}} e^{\lambda_j t} \qquad (k = 1,2,\ldots, p+1),$$
$$x_s^{(m)} = \frac{d^{m-1} f_s^{'}}{dt^{m-1}} e^{\lambda_j t} \qquad (m = 1,2,\ldots, q+1), \tag{4.1.17}$$

bu yerda $k+m = p+q+2 = l$, $f_s^{'}(t)$ ko'phad k-tartibli, $f_s^{''}(t)$ esa m-tartibli ko'phad.

Umuman, $D(\lambda_j)$ **determinantning rangi** $(n-r)$ **ga teng bo'lsin.** U holda l karrali ildizga avvalgidek l ta chiziqli bog'liqmas yechimlar mos keladi va bu yechim (4.1.17) ga o'xshagan r ta guruhga bo'linadi.

$D(\lambda_j)$ determinantning rangi $(n-l)$ dan kichik bo'la olmaydi. Aks holda, λ_j ildizning karrasi l dan katta bo'lardi [78]. Shuning uchun ham l karrali λ_j ildizga mos keluvchi yechimlar guruhining soni l dan katta bo'la olmaydi. Agar guruhlar soni l ga teng bo'lsa, u holda har bir guruh bitta yechimdan iborat va hamma yechimlar (4.1.4,a) ko'rinishda bo'ladi.

Shunday qilib, barcha hollarda ham (4.1.3) tenglamalarning karrali ildiziga mos kelgan xususiy yechimlari soni shu ildiz necha karrali bo'lsa, shuncha bo'ladi.

Bu yechimlarni topish chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish masalasiga keltiriladi. N.G. Chetayev tomonidan bunday tenglamalarni tuzishning eng sodda usuli ko'rsatilgan [102].

(4.1.8) xarakteristik tenglamaning hamma ildizlarini topgandan keyin, biz (4.1.3) tenglamalarning chiziqli bog'liqlimas n ta xususiy yechimini topamiz. Bu yechimlarni $x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sn}$ deb belgilab (birinchi indeks – funksiya raqamlari, ikkinchi indeks – yechim raqami), (4.1.3) tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$x_s = C_1 x_{s1} + C_2 x_{s2} + \ldots + C_n x_{sn}, \tag{4.1.18}$$

bu yerda $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar va ular dastlabki (boshlang'ich) shartlardan topiladi. Agar qaysi bir yechimda x_s ning

boshlang'ich qiymati yetarlicha kichik miqdor bo'lsa, u holda bu yechimga mos kelgan C_j son ham yetarlicha kichik son bo'ladi.

Xarakteristik tenglama ba'zi ildizlarining haqiqiy qismi nolga teng va barcha qolgan ildizlarining haqiqiy qismi manfiy ishorali bo'lsin. U vaqtda bu ildizlar yoki nolga teng, yoki sof mavhum songa teng bo'ladi. Har bir nolga teng bo'lgan ildizga, agar u oddiy ildiz bo'lsa yoki ildiz karrali bo'lganda ham unga mos kelgan yechimlarning guruhlar soni ildiz karrasiga teng bo'lsa, u holda

$$x_s = A_s \tag{4.1.19}$$

yechim mos keladi. Aks holda (4.1.3) sistemaga

$$x_s = f_s(t) \tag{4.1.20}$$

yechim mos keladi ((4.1.15) ga qarang), bu yerda $f_s(t)$ – ko'phadlar. Har bir $\pm\beta i$ sof mavhum ildizga, agar u oddiy ildiz yoki karrali hamda unga mos kelgan yechimlarning guruhlar soni ildiz karrasiga teng bo'lsa, u holda

$$x_s = P_s\cos\beta t - Q_s\sin\beta t, \qquad x_s = P_s\sin\beta t + Q_s\cos\beta t \tag{4.1.21}$$

yechim mos keladi, bu yerda P_s, Q_s – haqiqiy o'zgarmas sonlar ($A_s = P_s + iQ_s$). Agar $\pm\beta i$ karrali ildizlar bo'lsa va ularga mos kelgan yechimlar guruhlarining soni ildizning karrasidan kichik bo'lsa, u holda (4.1.3) sistema shu ildizlarga mos kelgan

$$x_s = \varphi_s\cos\beta t - \psi_s\sin\beta t, \qquad x_s = \varphi_s\sin\beta t + \psi_s\cos\beta t \tag{4.1.22}$$

yechimga ega bo'ladi, bu yerda φ_s va ψ_s – ko'phadlar ($f_s = \varphi_s + i\psi_s$).

(4.1.19) yoki (4.1.21) ko'rinishdagi yechimlarning borligi harakat turg'unligini buzmaydi, chunki yechimga kiruvchi hamma funksiyalar chegaralangan, (4.1.20) yoki (4.1.22) ko'rinishdagi yechimlarning mavjudligi esa noturg'un harakatga olib keladi.

Shunday qilib, agar xarakteristik tenglama ildizlari orasida karrali ildizlar mavjud bo'lsa, u holda ikki hol yuz beradi:

a) agar karrali ildizga mos kelgan (4.1.3) tenglamalar yechimlarining guruhlari soni ildizning karrasiga teng bo'lsa, u holda toyilmagan harakat turg'unligini tadqiq etish natijalari xuddi xarakteristik tenglama hamma ildizlari oddiy ildizlar bo'lgandagi kabi bo'ladi, ya'ni yuqorida keltirib chiqarilgan 1–3-teoremalar o'z kuchini saqlaydi.

b) agar karrali ildizga mos kelgan (4.1.3) tenglamalar yechimlarining guruhlari soni ildizning karrasidan kichik bo'lsa, u holda xarakteristik tenglamaning hamma ildizlari oddiy ildizlar bo'lganda olingan natijalar-

dan, bu hol uchun faqat 1–2-teoremalargina o'z kuchini saqlaydi, 3-teorema esa o'z kuchini yo'qotadi, ya'ni toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

Demak, agar toyilgan harakatning differensial tenglamalari (4.1.3) ko'rinishda bo'lsa, u holda biz quyidagi natijalarga kelamiz:

1. *Toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'lishi uchun, xarakteristik tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismlari manfiy bo'lishi yetarli va zarurdir;*

2. *Agar xarakteristik tenglamaning ildizlari orasida hech bo'lmaganda bittasining haqiqiy qismi musbat bo'lsa, u holda toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi;*

3. *Agar xarakteristik tenglama haqiqiy qismi musbat ildizlarga ega bo'lmay, haqiqiy qismi nolga teng bo'lgan oddiy yoki karrali ildizlarga ega va karrali ildizlar holida har bir ildizga mos kelgan yechimlarning guruhlari soni, shu ildizning karrasiga teng bo'lsa, u holda toyilmagan harakat turg'un bo'ladi. Agar xarakteristik tenglamaning haqiqiy qismi nolga teng har bir karrali ildiziga mos yechimlarning guruhlari soni shu ildizning karrasidan kichik bo'lsa, u holda toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.*

Shunday qilib, chiziqli sistemaning toyilmagan harakati turg'unligini tekshirish masalasi chiziqli toyilgan harakat tenglamalari xarakteristik tenglamasining ildizlarini tekshirish masalasiga, ya'ni algebraik masalaga keltirildi. Bu yerda Lyapunovning ikkinchi usulini qo'llashning hojati yo'q. Shunga qaramasdan, biz (4.1.3) tenglamalar uchun Lyapunov funksiyasini yasash usullarini o'rganamiz, chunki bu funksiyalar bo'lajak tadqiqotlarimizda fundamental rol o'ynaydi. Buning uchun ayrim yordamchi mulohazalar bilan tanishishga to'g'ri keladi.

2- §. Ba'zi yordamchi mulohazalar

Faraz qilaylik, $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya m-tartibli forma bo'lsin. Bu formaning (4.1.3) tenglamalarga nisbatan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasini ko'ramiz:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n). \qquad (4.2.1)$$

$\frac{dV}{dt}$ funksiya ham m-tartibli forma bo'ladi.

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n) = \lambda V \qquad (4.2.2)$$

munosabatni qanoatlantiruvchi V formani topishni maqsad qilib qo'yamiz, bu yerda λ –o'zgarmas son. Izlanayotgan formaning koeffisiyentlari

qandaydir tenglamalar sistemasini qanoatlantirishi kerak. Bu sistemani (4.2.2) tenglamaning chap va o'ng tarafidagi o'xshash hadlarning koeffitsiyentlarini tenglashtirish yo'li bilan hosil qilamiz. Bu sistemani hosil etishni $m=1$ bo'lgan hol, ya'ni

$$V = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \tag{4.2.3}$$

uchun ko'rsatamiz.

(4.2.3) ni (4.2.2) ga qo'yib va chap hamda o'ng tarafdagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koeffitsiyentlar qanoatlantirishi lozim bo'lgan quyidagi tenglamalar sistemasini topamiz:

$$\left.\begin{array}{l} p_{11}a_1 + p_{21}a_2 + \ldots + p_{n1}a_n = \lambda a_1, \\ p_{12}a_1 + p_{22}a_2 + \ldots + p_{n2}a_n = \lambda a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{1n}a_1 + p_{2n}a_2 + \ldots + p_{nn}a_n = \lambda a_n. \end{array}\right|$$

Bu chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{21} & \ldots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{1n} & p_{2n} & \ldots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

nolga teng bo'lishi etarli va zarurdir. Shunday qilib, (4.2.2) tenglamani (4.2.3) chiziqli forma qanoatlantirishi uchun λ xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lishi yetarli va zarur. Xarakteristik tenglamaning har bir ildiziga bitta (4.2.3) chiziqli forma mos keladi. Agar xarakteristik tenglama n ta har xil ildizga ega bo'lsa, u holda (4.2.2) munosabatni qanoatlantiruvchi n ta chiziqli formaga ega bo'lamiz.

Endi $m>1$ bo'lsin, ya'ni $V = \sum A^{(m_1 m_2 \ldots m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$. N orqali m-tartibli forma hadlarining sonini, ya'ni $A^{(m_1 m_2 \ldots m_n)}$ aniqmas koeffitsiyentlarning sonini belgilaymiz.

Bu son

$$N = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!} \tag{4.2.4}$$

tenglik orqali aniqlanishini 2- bobda ko'rgan edik, bu yerda

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n, \tag{4.2.5}$$

$m_1, m_2, ..., m_n$ – manfiymas butun sonlar. V formaning o'zgaruvchilari oldidagi koeffitsiyentlarni $a_1, a_2, ..., a_N$ lar bilan belgilaymiz. Ularni (4.2.2) tenglamaga qo'ygandan so'ng, chap va o'ng tarafdagi o'xshash hadlar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, a_j larni aniqlash uchun quyidagi bir jinsli chiziqli tenglamalarni hosil qilamiz:

$$A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + ... + A_{iN}a_N = \lambda a_i \quad (i = \overline{1, N}), \tag{4.2.6}$$

bu yerda A_{ij} lar $p_{s\sigma}$ koeffitsiyentlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat o'zgarmas sonlar. Masalan, $m = 2, n = 2$ va $V = a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2$ bo'lganda, (4.2.6) sistema quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{aligned} &2p_{11}a_1 + p_{21}a_2 = \lambda a_1, \\ &2p_{12}a_1 + (p_{11} + p_{22})a_2 + 2p_{21}a_3 = \lambda a_2, \\ &p_{12}a_2 + 2p_{22}a_3 = \lambda a_3. \end{aligned}$$

(4.2.6) sistema noldan farq qiluvchi yechimga ega bo'lishi uchun λ quyidagi tenglamani qanoatlantirishi yetarli va zarurdir.

$$D_m(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2.7}$$

Shunday qilib, m-tartibli V forma (4.2.2) tenglamaning yechimi bo'lishi uchun λ algebraik tenglama (4.2.7) ning ildizi bo'lishi yetarli va zarurdir.

(4.2.7) tenglamaning ildizlari bilan xarakteristik tenglama ildizlari orasidagi oddiy munosabatni Lyapunovning quyidagi teoremasi aniqlab beradi.

1-teorema. *(4.2.7) tenglamaning barcha ildizlari*

$$\lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + ... + m_n\lambda_n \tag{4.2.8}$$

formula orqali aniqlanadi, bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – xarakteristik tenglama ildizlari, $m_1, m_2, ..., m_n$ ushbu

$$m_1 + m_2 + ... + m_n = m \tag{4.2.9}$$

munosabat bilan bog'langan manfiymas butun sonlar.

Teoremaning isbotini N.G. Malkinning [53, 64–66-betlar] va N.G. Duboshinning [26, 152–154 betlar] kitoblaridan topish mumkin.

Berilgan $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ forma m-tartibli bo'lsin. Quyidagi

$$\frac{dV}{dt} = \sum(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n) = U \qquad (4.2.10)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi m-tartibli $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ formani aniqlaymiz.

V formaning koeffitsiyentlarini $a_1, a_2, ..., a_N$, bilan va berilgan U formaning koeffitsiyentlarini $b_1, b_2, ..., b_N$ bilan belgilaymiz. $a_1, a_2, ..., a_N$ koeffitsiyentlarni aniqlash uchun (4.2.10) tenglamaning chap va o'ng tarafidagi o'xshash hadlarning koeffitsiyentlarini tenglashtirib, quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + ... + A_{iN}a_N = b_N \qquad (i = \overline{1, N}). \qquad (4.2.11)$$

Bu tenglama (4.2.6) dan faqat o'ng tarafidagi ifoda bilan farq qiladi, ya'ni (4.2.6) dagi λa_i o'rniga (4.2.11) da b_N turibdi.

(4.2.11) sistemaning determinanti

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{vmatrix}$$

$D_m(0)$ bilan mos keladi ((4.2.7)ga qarang). Agar $D_m(0)$ nolga teng bo'lmasa, u holda (4.2.11) tenglamaning yagona bitta $a_1, a_2, ..., a_N$ yechimi bor va, demak, (4.2.10) ni qanoatlantiruvchi yagona V forma mavjud bo'ladi. Ammo, $D_m(\lambda)$ ko'phadning hamma ildizlari (4.2.8) tenglama orqali aniqlanadi. Shunday qilib, quyidagi Lyapunov teoremasiga kelamiz.

2- teorema. *Agar xarakteristik tenglamaning λ_j ildizlari shunday bo'lsaki, (4.2.10) munosabat bilan bog'langan $m_1, m_2, ..., m_n$ manfiy butun sonlarning hech bir qiymatida (4.2.8) nolga aylanmasa, u holda oldindan berilgan m-tartibli $U(x_1, ..., x_n)$ formaning qanday bo'lishidan qat'iy nazar (4.2.10) tenglamani qanoatlantiruvchi bitta va faqat bitta o'sha tartibli $V(x_1, ..., x_n)$ forma mavjud bo'ladi.*

3- §. O‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Lyapunov funksiyasini tuzish

O‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (4.3.1)$$

uchun Lyapunov funksiyasini tuzish usullarini ko‘rib o‘tamiz.

1. Toyilmagan harakat asimptotik turg‘un bo‘lsin. Bu hol faqat xarakteristik tenglamaning hamma λ_j ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo‘lgandagina yuz beradi. Ko‘rilayotgan holda 2- bobdagi teorema B ning hamma shartlarini qanoatlantiruvchi funksiya mavjud bo‘ladimi? Bunga quyidagi teorema ijobiy javob beradi.

1- teorema. *Agar xarakteristik tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo‘lsa, u holda oldindan berilgan aniq ishorali $U(x_1,...,x_n)$ forma qanday bo‘lishidan qat’iy nazar,*

$$\frac{dV}{dt} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n) = U \qquad (4.3.2)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi bitta va faqat bitta o‘sha tartibli $V(x_1,...,x_n)$ forma mavjud bo‘ladiki, u albatta ishorasi U ning ishorasiga teskari bo‘lgan aniq ishorali forma bo‘ladi.

Isbot. Xarakteristik tenglama hamma λ_j ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo‘lganligidan bir vaqtda nolga teng bo‘lmaydigan $m_1, m_2, ..., m_n$ manfiymas butun sonlarning hech bir qiymatida (4.2.8) miqdor nolga teng bo‘lmaydi. Shuning uchun ham 2-§ dagi 2-teoremaga asosan (4.3.2) ni qanoatlantiruvchi bitta va faqat bitta $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ forma mavjud bo‘ladi. Endi, agar U aniq ishorali forma bo‘lsa, u holda V ham ishorasi U ning ishorasiga teskari bo‘lgan aniq ishorali forma bo‘lishini isbot qilishimiz kerak.

Aniqlilik uchun, U aniq manfiy ishorali forma bo‘lsin. V formani ko‘ramiz. Uch hol bo‘lishi mumkin: 1) V forma manfiy ishorali qiymatlar qabul qilishi mumkin; 2) V – o‘zgarmas musbat ishorali forma; 3) V – aniq musbat ishorali forma.

Agar birinchi hol yuz bersa, u holda V funksiya teorema V ning hamma shartlarini qanoatlantirgan bo‘ladi va, demak, toyilmagan harakat noturg‘un bo‘ladi. Bu shartga ziddir.

Ikkinchi hol ham bo‘lishi mumkin emas. Haqiqatan ham, $x_s(t)$ ni (4.3.1) ni qanoatlantiruvchi funksiya sifatida qarab, uning $x_s^0 = x_s(t_0)$

boshlang'ich qiymatini shunday tanlab olamizki, $V(x_1^0,...,x_n^0)=0$ bo'lsin. Bu mumkin, chunki shart bo'yicha V o'zgarmas ishorali forma (aniq ishorali forma emas). Ammo $\frac{dV}{dt}$ manfiy bo'lgani uchun V kamayuvchi funksiya bo'ladi va, demak, V manfiy ishorali funksiya bo'lib qoladi. Bu uning o'zgarmas musbat ishorali funktsiya ekanligiga ziddir. Demak, bu hol ham bo'lishi mumkin emas.

Shunday qilib, faqat uchinchi hol qoladi.

Demak, V aniq musbat ishorali forma bo'ladi. Isbot etilganiga ko'ra V funksiya teorema B ning hamma shartlarini qanoatlantiradi va, demak, ko'rilayotgan hol uchun Lyapunov funksiyasi bo'ladi.

Shunday qilib, *o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli tenglamalar sistemasining xarakteristik tenglamasi barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lgan holda* ***Lyapunov funksiyasini*** *tuzish uchun ixtiyoriy tartibli aniq ishorali formani olish kerak va vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi bu formaga teng bo'lgan ikkinchi formani izlash kerak bo'ladi. Oldingi paragrafda ko'rdikki, bu masala algebraik tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi. Agar oldindan olingan forma katta tartibli bo'lsa, u holda hisoblash jarayoni murakkab bo'ladi. Shuning uchun ham U forma sifatida doimo qandaydir aniq ishorali kvadratik formani, masalan, x_s lar kvadratlarining yig'indisini olish ma'quldir,*

2. Xarakteristik tenglama ildizlarining hech bo'lmaganda bittasining haqiqiy qismi musbat bo'lsin. U vaqtda (4.3.1) tenglamalar uchun toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi. Teorema D yoki teorema E shartlarini qanoatlantiruvchi Lyapunov funksiyasining mavjudligi va uni topish yo'lini quyidagi Lyapunov teoremalari ko'rsatib beradi.

2- teorema. *Agar xarakteristik tenglamaning ildizlari orasida hech bo'lmaganda bitta haqiqiy qismi musbat ishorali ildiz mavjud bo'lsa va agar bu ildizlar shunday bo'lsaki,*

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + ... + m_n\lambda_n \qquad (4.3.3)$$

miqdor

$$m_1 + m_2 + ... + m_n = m \qquad (4.3.4)$$

munosabat bilan bog'langan $m_1, m_2, ..., m_n$ manfiymas butun sonlarning hech bir qiymatida nolga aylanmasa, u holda oldindan berilgan m-tartibli aniq ishorali U forma qanday bo'lishidan qat'iy nazar, (4.3.2) tenglamani qanoatlantiruvchi o'sha tartibli bitta va faqat bitta V forma mavjud bo'ladi va u ishorasi U ga teskari bo'lgan o'zgarmas ishorali (qisman, aniq ishorali) forma bo'lmasligi mumkin.

Isbot. Faraz qilaylik, U ixtiyoriy m-tartibli aniq ishorali forma bo'lsin. Aniqlik uchun, u aniq musbat ishorali deb hisoblaymiz. Oldingi paragrafning 2-teoremasiga asosan (4.3.2) tenglamani qanoatlantiruvchi bitta va faqat bitta o'sha tartibli V forma mavjud bo'ladi. Biz bu formaning na aniq manfiy ishorali va na o'zgarmas manfiy ishorali forma bo'lolmasligini isbot qilishimiz kerak. Haqiqatan ham, agar V aniq manfiy ishorali forma bo'lganida edi, u holda V teorema B ning hamma shartlarini qanoatlantirgan va, demak, toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'lar edi. Ammo bu mumkin emas, chunki toyilmagan harakat noturg'un.

Ikkinchi tarafdan, V o'zgarmas manfiy ishorali forma bo'la olmaydi (xarakteristik tenglama ildizlari qanday bo'lishidan qat'iy nazar). Bunga ishonish uchun, xuddi oldingi teoremani isbot qilgandek, V formani boshlang'ich qiymatlari nolga aylantiradigan (4.3.1) tenglamaning birorta $x_i(t)$ yechimini ko'rish kifoya. Bu yechim uchun, $\frac{dV}{dt}$ musbat ishorali bo'lganligi sababli, V funksiya o'sadi va musbat qiymatlar qabul qiladi. Bu shartga ziddir. Shunday qilib, teorema to'liq isbot etildi.

Teoremadagi V funksiya teorema D ning hamma shartlarini qanoatlantiruvchi Lyapunov funksiyasidir.

Izoh. *Isbot qilingan teorema faqatgina (4.3.3) ifoda nolga aylanmaydigan hol uchun V funksiyani tuzish usulini beradi. Ammo bu shart bajarilmasligi mumkin. Masalan, xarakteristik tenglamaning ayrim ildizlari nolga teng bo'lganda, (4.3.3) ifoda nolga aylanadi va, demak, teorema* D *ni qanoatlantiradigan V funksiya mavjud bo'lmaydi. Ammo, bu holda teorema* E *ni qanoatlantiruvchi funksiya mavjud. Bu funksiyaning mavjudligini va uning ko'rinishi qanday bo'lishini quyidagi teorema ko'rsatib beradi.*

3- teorema. *Agar xarakteristik tenglamaning ildizlari orasida hech bo'lmaganda bitta haqiqiy qismi musbat bo'lgan ildiz mavjud bo'lsa, u holda oldindan berilgan ixtiyoriy m - tartibli aniq ishorali $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ forma qanday bo'lishidan qat'iy nazar, doimo*

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V + U \qquad (4.3.5)$$

munosabatni qanoatlantiruvchi o'sha tartibli V forma hamda α musbat son topiladi va V ishorasi U ning ishorasiga teskari bo'lgan o'zgarmas ishorali forma bo'lmasligi mumkin.

Teoremaning isbotini I.G. Malkinning [53,70–71 betlar] kitobidan topish mumkin.

Keyingi ikki paragrafda isbot qilingan teoremalarning muhimligi shundan iboratki, xarakteristik tenglama ildizlarining xususiyatlarini bilgan holda, biz ba'zi tenglamalarni qanoatlantiruvchi V funksiyaning mavjudligini aniqlaymiz va bu o'sha tenglamaning yechimini topish zaruriyatidan bizni xalos etadi.

Isbot qilingan teoremalarni qo'llash uchun faqatgina ildizlarni bilish yoki ularning xususiyatlarini aniqlash talab qilinadi. Bu esa algebraik masalani yechish bilan hal etiladi.

4- §. Birinchi yaqinlashish bo'yicha turg'unlik haqidagi Lyapunov teoremalari

Endi biz Lyapunovning asosiy teoremalarini isbot qila olamiz. Bu teoremalar toyilmagan harakatning turg'unligini tadqiq etish masalasini ba'zi algebraik tenglamalarning ildizlarini tekshirish masalasiga keltiradi.

Toyilgan harakatning differensial tenglamalari

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n + X_s(x_1,...,x_n) \qquad (s=\overline{1,n}) \qquad (4.4.1)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin, bu yerda $X_s(x_1,...,x_n)$ funksiya

$$|x_s| \le H \qquad (4.4.2)$$

sohada $x_1, x_2, ..., x_n$ larning darajalari bo'yicha qatorga yoyiladi va bu qator boshlang'ich hadining darajasi ikkidan kam bo'lmaydi, p_{sk} esa o'zgarmas sonlar. (4.4.1) tenglamalar sistemasining birinchi yaqinlashish tenglamalari sistemasi

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_1 + ... + p_{sn}x_n \qquad (s=\overline{1,n}) \qquad (4.4.3)$$

ko'rinishda, (4.4.3) sistemaning xarakteristik tenglamasi esa

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (4.4.4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda a_j lar p_{sk} koeffitsiyentlarning funksiyalari bo'ladi.

1- teorema. *Agar birinchi yaqinlashish tenglamalari sistemasining xarakteristik tenglamasi barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lsa, u holda toyilgan harakatning differensial tenglamalaridagi yuqori darajali X_s hadlarning qanday bo'lishidan qat'iy nazar, toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi.*

Isbot. Xarakteristik tenglama hamma ildizlarining haqiqiy qismi $\lambda_j (j=\overline{1,n})$ manfiy bo'lsin. U vaqtda 3- § dagi 1- teoremaga asosan

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{dV}{dx_s} = (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n) = -(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi V forma mavjud bo'ladi va u albatta aniq musbat ishorali bo'ladi (chunki uning ishorasi $U = -(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$ ning ishorasiga teskari bo'lishi kerak). Bu formaning (4.4.1) toyilgan harakatning differensial tenglamalariga asosan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasini topamiz:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n + X_s) = -(x_1^2 + ... + x_n^2) + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}.$$

$\sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}$ funksiyaning yoyilmasi kamida uchinchi tartibli had bilan boshlanganligi tufayli, $\frac{dV}{dt}$ funksiya, 2- bobdagi 4- lemmaga asosan, X_s funksiyalarning qanday bo'lishidan qat'iy nazar aniq manfiy ishorali bo'ladi.

Shunday qilib, V funksiya (4.4.2) sohada aniq musbat ishorali funksiya va $\frac{dV}{dt}$ aniq manfiy ishorali funksiyadir. Demak, V funksiya teorema B ning hamma shartlarini qanoatlantiradi va toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi. Teorema isbotlandi.

2- teorema. *Agar xarakteristik tenglamaning ildizlari orasida hech bo'lmaganda bitta haqiqiy qismi musbat ishorali ildiz mavjud bo'lsa, u holda toyilgan harakatning differensial tenglamalaridagi yuqori darajali hadlarning qanday tanlab olinishidan qat'iy nazar, toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.*

Isbot. Xarakteristik tenglama ildizlari orasida hech bo'lmaganda bittasining haqiqiy qismi musbat bo'lsin. U vaqtda 3- § dagi 3- teoremaga asosan

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{dV}{dx_s}(p_{s1}x_1 + ... + p_{sn}x_n) = \alpha V + (x_1^2 + x_2^2 ... + x_n^2)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi V forma va $\alpha > 0$ son mavjud va V forma musbat qiymatlar qabul qilishi mumkin.

Bu formadan (4.4.1) toyilgan harakat tenglamalariga asosan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosila

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s} = \alpha V + W(x_1, x_2, ..., x_n)$$

ko'rinishga ega, bu yerda

$$W(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + ... + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}.$$

$W(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya 2- bobdagi 4- lemmaga asosan aniq musbat ishoralidir.

Shunday qilib, V funksiya musbat qiymatlar qabul qilganligi va W funksiya aniq musbat ishorali bo'lganligi uchun V funksiya Lyapunovning teorema E sini qanoatlantiradi va, demak, X_s funksiyani qanday tanlab olishimizdan qat'iy nazar toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

1 va 2 – teoremalarga mos ravishda teskari teoremalar isbotlangan.

1′- teorema. *Agar X_s funksiyalarning qanday tanlab olinishidan qat'iy nazar, toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'lsa, u holda birinchi yaqinlashish differensial tenglamalarining xarakteristik tenglamalari barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'ladi.*

2′- teorema. *Agar X_s funksiyalarni qanday tanlab olishimizdan qat'iy nazar, toyilmagan harakat noturg'un bo'lsa, u holda birinchi yaqinlashish tenglamalarining xarakteristik tenglamalarining ildizlari orasida hech bo'lmaganda bittasining haqiqiy qismi musbat bo'ladi.*

Isbot qilingan Lyapunovning ikkala teoremasi amaliyot uchun juda ham muhim ahamiyatga ega, chunki bu teoremalar qachon turg'unlik masalalarini birinchi yaqinlashish tenglamalari asosida tadqiq etish mumkinligini ko'rsatadi. Bu keyingi masala bir necha bor ta'kidlaganimizdek, sof algebraik masalaga, ya'ni o'zgarmas koeffitsiyentli algebraik tenglama ildizlarining xususiyatlarini tadqiq etish masalasiga keltiriladi.

Shuni ham ta'kidlash kerakki, bu teoremalar yordamida biz Lyapunov funksiyasini topish yoki uni tuzish imkoniyatiga ega bo'lish bilan birga, asimptotik turg'unlik sohasini topish va qaysi vaqt oralig'ida $(T \le t < \tau)$ sistema asimptotik turg'un yoki noturg'un bo'lishi mumkin degan masalalarni ham hal qilish imkoniyatiga ega bo'lamiz.

Endi xarakteristik tenglama ildizlari orasida haqiqiy qismi musbat ishoralisi bo'lmasdan, ayrimlarining haqiqiy qismi nolga teng bo'lganda, turg'unlik masalasi qanday yechilishini ko'raylik.

Eslatib o'tamizki, bu hol uchun birinchi yaqinlashish tenglamalarini tadqiq etish natijasida toyilmagan harakat yoki turg'un (ammo asimptotik turg'un emas), yoki noturg'un bo'ladi degan xulosaga kelgan edik.

Toyilgan harakatning nochiziqli differensial tenglamalari uchun bu xulosa o‘z kuchini saqlaydimi yoki yo‘qmi degan savollarga javob berishga to‘g‘ri keladi.

Bu savolga Lyapunovning quyidagi teoremasi javob beradi.

3- teorema. *Agar birinchi yaqinlashish tenglamalarining xarakteristik tenglamasi haqiqiy qismi musbat ishorali ildizlarga ega bo‘lmasdan, haqiqiy qismi nolga teng ildizlari bor bo‘lsa, u holda toyilgan harakatning differensial tenglamalaridagi* X_s *funksiyalarni shunday tanlab olish mumkinki, xohishimiz bo‘yicha toyilmagan harakat turg‘un yoki noturg‘un bo‘ladi.*

Demak, birinchi yaqinlashish tenglamalari bo‘yicha turg‘un bo‘lgan harakat aslida noturg‘un bo‘lishi mumkin va, aksincha. Bu holda, toyilmagan harakatning turg‘un yoki noturg‘un bo‘lishi toyilgan harakat tenglamalaridagi yuqori darajali X_s hadlarga to‘liq bog‘liq ekan.

Shunday qilib, toyilgan harakatning differensial tenglamalari

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n + X_s(x_1,...,x_n) \quad (s = \overline{1,n})$$

ko‘rinishda bo‘lganda, turg‘unlik masalalarini tadqiq etishni ikki kategoriyaga bo‘lish mumkin:

1) nokritik hol, bu yerda turg‘unlik masalalari birinchi yaqinlashish tenglamalari orqali yechiladi;

2) kritik hol, bu yerda turg‘unlik masalalarini echish uchun yuqori tartibli X_s hadlarni jalb etish lozim bo‘lib qoladi. Xarakteristik tenglamaning haqiqiy qismi musbat ishorali ildizlari yo‘q va haqiqiy qismi nolga teng bo‘lgan ildizlari bor bo‘lgandagina kritik hol mavjud bo‘ladi. Matematika nuqtayi nazaridan kritik holni, bir istisno hol sifatida ko‘rish mumkin. Ammo mexanika nuqtayi nazaridan bu hollar juda ham muhimdir.

5-§. Teoremalarning tatbiqiga doir misol

1- m i s o l. Snaryadning aylanma harakati turg‘unligining zaruriy sharti

Ikkinchi bobda snaryad statsionar harakati (snaryad aylanma harakati) turg‘unligining $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}$ va $\dot{\varphi}$ larga nisbatan yetarli sharti aniqlangan edi:

$$J_z^2 n^2 > 4 J_x P \ell . \qquad (4.5.1)$$

Bu tengsizlikka qarama-qarshi bo'lgan tengsizlik bajarilganda, snaryad aylanma harakati (statsionar harakati) noturg'un bo'lishini ko'rsatamiz.

Toyilgan harakatning differensial tenglamalarini tuzamiz. Snaryad aylanma harakatining kinetik va potensial energiyalari quyidagi ko'rinishga ega edi (2- bob, 11- § ga qarang):

$$T=\frac{1}{2}J_x(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2\cos^2\alpha)+\frac{1}{2}J_z(\dot{\varphi}-\dot{\beta}\sin\alpha)^2, \qquad \Pi=Pl\cos\alpha\cos\beta.$$

Harakatning noturg'unligini ko'rsatish uchun toyilgan harakatning birorta traektoriyasi ε sferadan chiqib ketishini ko'rsatish yetarli. Buning uchun

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=J_z(\dot{\varphi}-\dot{\beta}\sin\alpha)=J_z n \tag{4.5.2}$$

birinchi integral o'zining qiymatini saqlaydigan $t=0$ paytdagi $\alpha=\alpha_0$, $\dot{\alpha}=\dot{\alpha}_0$, $\beta=\beta_0$, $\dot{\beta}=\dot{\beta}_0$, $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0=n$ toyilishlarni ko'ramiz.

Birinchi yaqinlashish tenglamalarini tuzish uchun T kinetik va Π potensial energiyalarni $\alpha,\dot{\alpha},\beta$ va $\dot{\beta}$ larning darajalari bo'yicha (faqat ikkinchi darajali hadlarni saqlagan holda) qatorga yoyamiz. U holda o'zgarmas hadgacha (son) aniqlikda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$T=\frac{1}{2}J_x(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2)+\frac{1}{2}J_z(\dot{\varphi}-\dot{\beta}\alpha)^2, \qquad \Pi=-\frac{1}{2}Pl(\alpha^2+\beta^2).$$

Lagranj tenglamasi va (4.5.2) birinchi integraldan foydalanib, α,β va $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ larga nisbatan toyilgan harakatning birinchi yaqinlashish differensial tenglamalarini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} J_x\ddot{\alpha}+J_z n\dot{\beta}-Pl\alpha=0,\\ J_x\ddot{\beta}-J_z n\dot{\alpha}-Pl\beta=0.\end{aligned}\right\} \tag{4.5.3}$$

(4.5.3) sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} J_x\lambda^2-Pl & J_z n\lambda \\ -J_z n\lambda & J_x\lambda^2-Pl \end{vmatrix}=0$$

yoki

$$J_x^2\lambda^4+(J_z^2n^2-2J_xPl)\lambda^2+P^2l^2=0 \tag{4.5.4}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Gurvits kriteriysini bu xarakteristik tenglamaga ishlatib bo'lmaydi, chunki $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, $\Delta_3 = 0$ va ularning birortasi qarama-qarshi ma'noga ega emas. Shuning uchun turg'unlik masalasini boshqa usul bilan yechamiz.

(4.5.4) xarakteristik tenglamaning har bir $\lambda = \nu \pm \mu i$ ildiziga $-\lambda = -\nu \mp \mu i$ ildiz javob beradi (noma'lum λ faqat juft darajada bo'lgani uchun). Shuning uchun ham, agar birorta ildizning haqiqiy qismi nolga teng bo'lmasa ($\mathrm{Re}\,\lambda = \nu \neq 0$), u holda albatta haqiqiy qismi musbat ishorali bo'lgan ildiz mavjud bo'ladi. Demak, bu holda Lyapunovning birinchi yaqinlashish bo'yicha 2- teoremasiga asosan toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi. Bundan, o'z navbatida, snaryad toyilmagan harakatining turg'un bo'lishi uchun (4.5.4) xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari sof mavhum bo'lishi zarur, ya'ni $\lambda = \mu i$ ko'rinishga ega bo'lishi kerak va λ^2 ga nisbatan ildizlar haqiqiy manfiy sonlar bo'lishi lozim. Ammo, buning uchun (4.5.4) tenglamaning λ^2 ga nisbatan D diskriminanti

$$D = (J_z^2 n^2 - 2J_x P\ell)^2 - 4J_x^2 P^2 \ell^2 = J_z^2 n^2 (J_z^2 n^2 - 4J_x P\ell) > 0$$

tengsizlikni qanoatlantirishi zarur.

Bu yerdan ko'rinib turibdiki, agar (4.5.1) tengsizlikka (turg'unlikning yetarli shartiga) qarama-qarshi tengsizlik bajarilsa (ya'ni $J_z^2 n^2 < 4J_x P\ell$ bo'lsa), u holda $D < 0$ va, demak, toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

Shunday qilib,

$$J_z^2 n^2 > 4J_x P\ell$$

shart toyilmagan harakat turg'unligining faqat yetarli shartigina emas, balki zaruriy sharti ham bo'ladi.

2- m i s o l. Lampali generatorning turg'unlik sharti

Ikkinchi bobda lampali generator toyilgan harakatining quyidagi nochiziqli differensial tenglamalari

$$C\frac{du}{dt} = -i\,, \quad L\frac{di}{dt} = u - \frac{1}{C}[RC - MS(u)]i \tag{4.5.5}$$

ni topgan edik. Toyilmagan harakatning asimptotik turg'un bo'lishining shartini Lyapunovning ikkinchi usuli asosida aniqlangan edi. Bu misolda biz ushbu shartni Lyapunovning birinchi yaqinlashish usulidagi teoremalar orqali aniqlaymiz.

$S(u)$ funksiyaning u darajasi bo'yicha qatorga yoyilmasi

$$S(u) = S_0 + S'(0)\,u + \ldots$$

ko‘rinishda edi. Bu ifodani (4.5.5) tenglamalar sistemasidagi $S(u)$ o‘rniga qo‘yib va faqat chiziqli hadlarni qoldirganimizdan keyin, quyidagi birinchi yaqinlashish differensial tenglamalari

$$C\frac{du}{dt} = -i\,, \quad L\frac{di}{dt} = u - \frac{1}{C}(RC - MS_0)i$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamalarning

$$\begin{vmatrix} C\lambda & 1 \\ -1 & L\lambda + \dfrac{RC - MS_0}{C} \end{vmatrix} = 0$$

xarakteristik tenglamasini

$$CL\lambda^2 + (RC - MS_0)\lambda + 1 = 0$$

ko‘rinishga keltiramiz.

Gurvits kriteriysi bo‘yicha doimo $(C > 0,\ L > 0)$

$$RC - MS_0 > 0$$

shart bajarilganda, lampali generatorning muvozanat holati (toyilmagan harakati) i tok va u kuchlanishga nisbatan asimptotik turg‘un bo‘ladi. Agar $RC - MS_0 < 0$ bo‘lsa, u holda muvozanat holat noturg‘un bo‘ladi.

Agar $RC - MS_0 = 0$ bo‘lsa, u holda xarakteristik tenglama ikkita sof mavhum qiymatli ildizga ega bo‘lib, turg‘unlik masalasini birinchi yaqinlashish tenglamalari orqali hal qilish mumkin emas.

Bu yechimni shu masalaning 2- bobdagi yechimi bilan solishtirganimizda Lyapunovning birinchi yaqinlashish usulidagi teoremalari turg‘unlikni tadqiq etishni ancha soddalashtirganini ko‘ramiz.

V BOB. BARQAROR HARAKATLAR UCHUN KRITIK HOLLARNI TADQIQ ETISH

1-§. Xarakteristik tenglama. Bitta nol ildizga ega bo'lgan hol. Differensial tenglamalarni maxsus ko'rinishga keltirish

Toyilgan harakat differensial tenglamalari sistemasi quyidagi $(n+1)$ - tartibli sistema bo'lsin:

$$\frac{dy_j}{dt}=q_{j1}y_1+q_{j2}y_2+...+q_{j,n+1}y_{n+1}+Y_j(y_1,...,y_{n+1})\ (j=\overline{1,n+1}), \qquad (5.1.1)$$

bu yerda q_{ji} – o'zgarmas sonlar, Y_j – koordinata boshi (muvozanat holati) atrofida y_s o'zgaruvchilarning darajalari bo'yicha qatorga yoyiluvchi funksiya. Qator kamida ikkinchi darajali haddan boshlanadi. (5.1.1) sistemaning birinchi yaqinlashish tenglamalari

$$\frac{dy_j}{dt}=q_{j1}y_1+q_{j2}y_2+...+q_{j,n+1}y_{n+1} \qquad (j=\overline{1,n+1}) \qquad (5.1.2)$$

ko'rinishda bo'ladi. (5.1.2) birinchi yaqinlashish tenglamalari sistemasi xarakteristik tenglamasining bitta ildizi nolga teng va qolgan n ta ildizining haqiqiy qismi manfiy bo'lsin.

(5.1.2) tenglamalarning birorta y_j o'zgaruvchisi o'rniga quyidagi almashtirish

$$x=a_1y_1+a_2y_2+...+a_{n+1}y_{n+1}$$

orqali x o'zgaruvchini kiritamiz, bu yerda a_j biror o'zgarmas sonlar. Bu o'zgarmas sonlarni shunday tanlab olamizki, almashtirilgan tenglama

$$\frac{dx}{dt}=0$$

ko'rinishga ega bo'lsin. Demak, biz quyidagi tenglikka kelamiz:

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{j=1}^{n+1}a_j\frac{dy_j}{dt}=\sum_{j=1}^{n+1}a_j(q_{j1}y_1+...+q_{j,n+1}y_{n+1})=0.$$

Endi y_k oldidagi koeffitsiyentlarni nolga tenglashtirib, quyidagi bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$q_{1k}a_1+q_{2k}a_2+...+q_{n+1,k}a_{n+1}=0 \qquad (k=\overline{1,n+1}). \qquad (5.1.3)$$

(5.1.2) sistemaning xarakteristik tenglamasi nol ildizga ega ekanligi uchun (5.1.3) sistemaning determinanti nolga teng bo'ladi va, demak, bu

sistema hamma a_j lar nolga teng bo'lmagan yechimga ega. Aniqlilik uchun $a_{n+1} \neq 0$ deb faraz qilaylik. U holda x ni y_{n+1} o'zgaruvchi o'rniga qabul qilishimiz mumkin. Qolgan y_i o'zgaruvchilarni kelgusida x_i bilan belgilaymiz.

Shunday qilib, (5.1.2) tenglamalarni

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_{n+1} y_{n+1} \\ x_i &= y_i \quad (i = \overline{1,n}) \end{aligned}\right\} \tag{5.1.4}$$

almashtirishlar va

$$p_{sk} = q_{sk} - \frac{1}{a_{n+1}} q_{s,n+1} a_k, \qquad p_s = \frac{1}{a_{n+1}} q_{s,n+1} \qquad (s,k = \overline{1,n})$$

belgilashlar kiritib,

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x$$

ko'rinishga keltiramiz, bu yerda p_s, p_{sj} – o'zgarmas sonlar. Bu sistemaning ushbu

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} & p_1 \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{2n} & p_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\lambda & p_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

xarakteristik tenglamasi $\lambda = 0$ va

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \ldots & p_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.1.5}$$

tenglamalarga ajraladi.

Xarakteristik tenglama chiziqli almashtirishlarga nisbatan invariant bo'lganligi va ko'rilayotgan holda u n ta haqiqiy qismi manfiy ishorali ildizga ega bo'lganligi uchun (5.1.5) tenglama ildizlarining hamma haqiqiy qismi manfiy bo'ladi.

Agar (5.1.4) almashtirishlarni (5.1.1) ga nisbatan qo'llasak, u holda (5.1.1) tenglamalar quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = X(x, x_1, x_2, ..., x_n), \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + ... + p_{sn}x_n + p_s x + X_s(x, x_1, x_2, ..., x_n) \quad (s = \overline{1,n}), \end{aligned}\right\} \tag{5.1.6}$$

bu yerda X va X_s lar $x, x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning analitik funksiyalari va ularning yoyilmasi kamida ikkinchi darajali haddan boshlanadi.

Xarakteristik tenglamasi bitta nol ildizga ega bo'lgan kritik holda toyilgan harakatning differensial tenglamalari (5.1.6) ko'rinishga ega bo'ladi. Qolgusi tadqiqotlarni biz shu differensial tenglamalarga nisbatan olib boramiz.

Izoh. Bundan keyin x o'zgaruvchini **kritik** o'zgaruvchi, $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarni esa **nokritik** o'zgaruvchilar deb ataymiz. Shunga muvofiq (5.1.6) sistemaning birinchi tenglamasini **kritik** tenglama, qolgan n ta tenglamasini esa **nokritik** tenglamalar deb ataymiz.

2- §. Birinchi tartibli sistema uchun masalani tadqiq etish

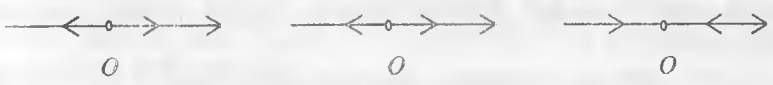
Dastlab, $n = 0$ bo'lgan holni ko'raylik. Bu hol uchun toyilgan harakat differensial tenglamasi

$$\frac{dx}{dt} = X(x) = gx^m + g_{m+1}x^{m+1} + \cdots \tag{5.2.1}$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $m \geq 2$ va g, g_{m+1} – biror o'zgarmas sonlar.

Ko'rilayotgan xususiy holda turg'unlik masalasi osongina yechiladi: agar m juft son bo'lsa, u holda toyilmagan harakat noturg'un va m toq son bo'lsa, u holda $g < 0$ da toyilmagan harakat asimptotik turg'un, $g > 0$ da esa noturg'un bo'ladi.

Haqiqatan ham, agar m juft son bo'lsa, u holda (5.2.1) tenglamaning o'ng tarafidagi funksiya koordinata boshining atrofida g ning ishorasiga mos keladigan qiymat qabul qiladi (2-bobdagi 4-lemmaga asosan).



a) *b)* *d)*

5.1- shakl.

Shuning uchun ham (5.2.1) tenglamaga asosan x o'qi bo'yicha harakat qilayotgan tasvirlovchi nuqta harakatining tezligi nuqtaning dastlabki paytda koordinata boshining chapida yoki o'ngida turishidan qat'iy nazar, ma'lum yo'nalishga ega bo'ladi.

Demak, agar tasvirlovchi nuqta dastlabki lahzada $g > 0$ bo'lganda koordinata boshidan o'ngda va $g < 0$ bo'lganda chapda tursa, u holda bu nuqta X funksiyaning aniq ishorali sohasidan chiqgunga qadar koordinata boshidan uzoqlashadi (5.1,a-shakl). Shunday qilib, bu holda toyilmagan harakat, g ning ishorasi qanday bo'lishidan qat'iy nazar, noturg'un bo'ladi.

Agar m toq son bo'lsa, u holda tasvirlovchi nuqta tezligining yo'nalishi koordinata boshidan o'tganda o'zgaradi. Bu hol uchun $g > 0$ da, nuqta koordinata boshidan uzoqlashadi (5.1,b- shakl) va $g < 0$ bo'lganda, u, aksincha, koordinata boshiga yaqinlashadi (5.1,d- shakl). Demak, $g > 0$ bo'lganda, toyilmagan harakat noturg'un, $g < 0$ esa asimptotik turg'un bo'ladi.

Ko'rilayotgan masala uchun Lyapunov funksiyasini osongina tuzish mumkin.

a) m – toq son bo'lsin, u holda

$$V = \frac{1}{2} g x^2$$

deb olamiz. Uning vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi

$$\frac{dV}{dt} = g^2 x^{m+1} + g g_{m+1} x^{m+2} + \ldots$$

ga teng bo'ladi. V va $\dot{V}$ funksiyalarning ikkalasi ham aniq ishorali. Agar $g > 0$ bo'lsa, u holda ikkalasi ham bir xil ishorali va, demak, V funksiya teorema D ning hamma shartlarini qanoatlantirgani uchun toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

Agar $g < 0$ bo'lsa, u holda V va $\dot{V}$ larning ishoralari bir-biriga qarama-qarshi va, demak, V funksiya teorema B ning hamma shartlarini qanoatlantiradi. Shunday qilib, bu holda toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi.

b) m – juft son bo'lganda, Lyapunov funksiyasini $V = x$ shaklda izlaymiz. U vaqtda $\dot{V} = g x^m + \ldots$ aniq ishorali funksiya bo'ladi. V funksiya qiymatining ishorasi esa, g qanday qiymat qabul qilishidan qat'iy nazar, $\dot{V}$ qiymatining ishorasi bilan bir xil bo'lishi mumkin.

Demak, $g>0$ da ham, $g<0$ da ham V funksiya teorema D ning hamma shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

3- §. $(n+1)$ - tartibli sistema uchun masalani xususiy holda tadqiq etish

Endi $n\neq 0$ deb faraz qilamiz. Shu bilan birga, biz (5.1.6) differensial tenglamalarning o'ng tarafidagi funksiyalar ayrim qo'shimcha shartlarni qanoatlantiradi deb faraz qilamiz. Ushbu

$$\left.\begin{aligned} X^{(0)}(x) &= X(x,0,0,...,0) = gx^m + g^{m+1}x^{m+1} + ... \\ X_s^{(0)}(x) &= X_s(x,0,0,....0) = g_s x^{m_s} + g_s^{m_s+1}x^{m_s+1} + ... \ (s=\overline{1,n}) \end{aligned}\right\} \quad (5.3.1)$$

belgilashlarni kiritamiz, bu yerda g, g^{m+1}, g_s, $g_s^{m_s+1}$ –o'zgarmas sonlar. U holda qo'shimcha shartlar quyidagilardan iborat:

1) $X^{(0)}(x)$ aynan nolga teng bo'lmaydi;

2) $m_s \geq m$;

3) (5.1.6) tenglamalardagi barcha $p_s = 0$ bo'lsin.

Bu shartlar bajarilganda turg'unlik masalasi birdaniga yechiladi:

Agar m – juft son bo'lsa, u holda toyilmagan harakat doimo noturg'un bo'ladi.

Agar m – toq son bo'lsa, u holda $g>0$ bo'lganda toyilmagan harakat noturg'un va $g<0$ bo'lganda asimptotik turg'un bo'ladi.

Boshqacha qilib aytganda, masalaning yechimi

$$\frac{dx}{dt} = X^{(0)}(x) = gx^m + g^{m+1}x^{m+1} + ...$$

bitta differensial tenglama bilan ifodalangan toyilgan harakat muvozanat holatining turg'unlik masalasining yechimi bilan bir xil bo'ladi.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan 3 ta shart bajarilganda, turg'unlik masalasini yechish uchun hamma nokritik tenglamalarni va kritik tenglamadagi hamma nokritik o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan hadlarni tashlab yuborib, hosil bo'lgan bir o'zgaruvchili bitta differensial tenglamani tadqiq etish yetarlidir.

Keltirilgan tasdiqni isbotlash uchun toyilgan harakatning

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X^{(0)}(x) + X'(x,x_1,...,x_n), \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + ... + p_{sn}x_n + X_s(x,x_1,...,x_n) \quad (s=\overline{1,n}) \end{aligned}\right\} \quad (5.3.2)$$

differensial tenglamalari uchun Lyapunovning teorema B yoki teorem D larini qanoatlantiruvchi V funksiyani tuzish kerak bo'ladi, bu yerda $X'(x,x_1,...,x_n)$ функция $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ nuqtada nolga aylanuvchi funksiya bo'lishi lozim.

Demak, shunday $V(x,x_1,...,x_n)$ ni topish kerakki, uning (5.3.2) ga nisbatan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi $\dot{V}$ aniq ishorali funksiya bo'lsin.

a) Avval m – toq son bo'lgan holni ko'rib o'taylik.

$W(x_1,x_2,...,x_n)$ quyidagi munosabatni qanoatlantiruvchi $x_1,x_2,...,x_n$ o'zgaruvchilarning kvadratik formasi bo'lsin:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + ... + p_{sn}x_n) = x_1^2 + ... + x_n^2. \qquad (5.3.3)$$

(5.1.5) xarakteristik tenglama ildizlarining barchasi haqiqiy qismi manfiy bo'lganligidan 4- bobdagi 1- teoremaga asosan bunday W forma mavjud va u aniq manfiy ishorali bo'ladi.

Lyapunov funksiyasini quyidagi ko'rinishda tanlab olamiz:

$$V = \frac{1}{2}gx^2 + W(x_1,...,x_n) + x^2Q_2 + ... + x^mQ_m, \qquad (5.3.4)$$

bu yerda $Q_k(x_1,x_2,...,x_n)\,(k=\overline{2,m})$– lar $x_1,x_2,...,x_n$ o'zgaruvchilarning chiziqli formasi. Q_k chiziqli formalarni shunday tanlaymizki, V funksiyaning (5.3.2) sistemaga ko'ra vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi

$$\frac{dV}{dt} = (g^2 + F(x,x_1,...,x_n))x^{m+1} + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}(x,x_1,...,x_n)x_\alpha x_\beta \qquad (5.3.5)$$

ko'rinishga ega va aniq musbat ishorali funksiya bo'lsin, bu yerda F va $F_{\alpha\beta}$ lar $x,x_1,...,x_n$ o'zgaruvchilarning qandaydir funksiyalari bo'lib, ularning $x = x_1 = ... = x_n = 0$ nuqtadagi qiymati nolga teng.

V funksiyani ko'rib o'taylik. $W(x_1,...,x_n)$ kvadratik formaning aniq manfiy ishorali ekanligini yuqorida aytib o'tgan edik. Shuning uchun ham $g < 0$ bo'lsa, $x,x_1,...,x_n$ o'zgaruvchilarning

$$\frac{1}{2}gx^2 + W(x_1,...,x_n) \qquad (5.3.6)$$

kvadratik formasi ham aniq manfiy ishorali, shunga binoan (5.3.4) formula bilan aniqlanadigan V funksiya ham aniq manfiy ishorali bo'ladi.

Shunday qilib, $g<0$ bo'lganda $\frac{dV}{dt}$ – aniq musbat ishorali va V – aniq manfiy ishorali funksiyalar bo'ladi va, demak, V funksiya Lyapunov teorema B sining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Bu yerdan toyilmagan harakatning asimptotik turg'unligi kelib chiqadi.

Agar $g>0$ bo'lsa, u holda (5.3.6) kvadratik forma va, demak, V funksiya o'zgaruvchan ishorali va shunga ko'ra $\frac{dV}{dt}$ ham aniq ishorali funksiya bo'ladi. Shunday qilib, bu holda V funksiya teorema D ning hamma shartlarini qanoatlantiradi va toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

b) Endi m juft son bo'lsin. Bu holda g o'zgarmas sonning qanday ishorali bo'lishidan qat'iy nazar, toyilmagan harakat noturg'un bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun V funksiyani quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$V=\alpha^2 gx+W(x_1,...,x_n)+xQ_1+...+x^{m-1}Q_{m-1}, \qquad (5.3.7)$$

bu yerda W – (5.3.3) munosabatni qanoatlantiruvchi aniq manfiy ishorali kvadratik forma, $Q_1,Q_2,...,Q_{m-1}$ lar $x_1,x_2,...,x_n$ o'zgaruvchilarning qandaydir chiziqli formalari. Bu formalarni shunday tanlab olamizki, V ning hosilasi quyidagi ko'rinishga ega bo'lsin:

$$\frac{dV}{dt}=(\alpha^2 g^2+F)x^m+\alpha^2 gX^{(2)}+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}F_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta \qquad (5.3.8)$$

bu yerda F ifoda x ning funksiyasi va $F(0)=0$, $F_{\alpha\beta}$ ifoda $x_1,...,x_n$ larning funksiyasi va $F_{\alpha\beta}(0,...,0)=0$.

Agar α^2 yetarlicha kichik son bo'lsa, u holda $\frac{dV}{dt}$ aniq musbat ishorali funksiya bo'ladi. Yoyilmasi chiziqli hadlar bilan boshlanadigan V funksiya esa, ravshanki, o'zgaruvchan ishorali, demak, V funksiya teorema D ning hamma shartlarini qanoatlantiradi hamda toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

Shunday qilib, ko'rilayotgan hol uchun hamma tasdiqlarni isbot qildik.

Tasdiqlarning to'laroq isbotini G.N. Duboshinning [26, 180–186 betlar] va I.G. Malkinning [53, 94 – 101 betlar] kitoblaridan topish mumkin.

Bu kitoblarda nima uchun Lyapunov funksiyasini (5.3.4) va (5.3.7) ko'rinishlarda izlashni tushuntiruvchi mulohazalar keltirilgan.

4- §. $(n+1)$ - tartibli sistema uchun masalani umumiy holda tadqiq etish

Turg'unlik masalasini umumiy hol, ya'ni (5.1.6) toyilgan harakat tenglamalarining o'ng tarafidagi funksiyalarni chegaralovchi hech qanday shartlar qo'yilmagan holda ko'rib o'tamiz.

Masalani umumiy holda yechish uchun (5.1.6) tenglamalar sistemasini oldingi paragrafdagi chegaralovchi shartlar bajariladigan ko'rinishga keltiramiz. Shu maqsadda

$$f_s = p_{s1}x_1 + ... + p_{sn}x_n + p_s x + X_s = 0 \qquad (s = \overline{1,n}) \tag{5.4.1}$$

tenglamalar sistemasini qaraymiz. Bu tenglamalarning chap qismi $x = x_1 = ... = x_n = 0$ nuqtada nolga aylanadi. (5.4.1) tenglamalar sistemasidan x_s $(s = \overline{1,n})$ o'zgaruvchilarni x o'zgaruvchining funksiyalari sifatida aniqlaymiz. Bu sistemaning $x_1,...,x_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan funksional determinanti $x = x_1 = ... = x_n = 0$ nuqtada noldan farqli. Haqiqatan ham,

$$\left\{\frac{\partial(f_1,...,f_n}{\partial(x_1,...,x_n)}\right\}_{x=x_j=0} = |p_{ik}| \neq 0,$$

chunki (5.1.5) xarakteristik tenglamaning nolga teng ildizi mavjud emas. Shuning uchun ham oshkormas funksiyalarning mavjudligi haqidagi teoremaga asosan (5.4.1) sistemaning yagona yechimi mavjud va $x_s(s = \overline{1,n})$ funksiyalar $x = 0$ da nolga aylanib, ular x ning darajalari bo'yicha qatorga yoyiladi hamda bu qator x ning yetarlicha kichik qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytilgan funksiyalar

$$u_s(x) = A_s^{(1)}x + A_s^{(2)}x^2 + ... \tag{5.4.2}$$

bo'lsin, ya'ni

$$p_{s1}u_1 + ... + p_{s2}u_2 + ... + p_{sn}u_n + p_s x + X_s(x,u_1,...,u_n) \equiv 0. \tag{5.4.3}$$

Endi (5.1.6) tenglamalarda o'zgaruvchilarni quyidagicha almashtiramiz:

$$x_s = \xi_s + u_s(x). \tag{5.4.4}$$

U holda

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \xi_1 + u_1(x), ..., \xi_n + u_n(x)),$$

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}(\xi_1 + u_1) + ... + p_{sn}(\xi_n + u_n) + p_s x +$$

$$+ X_s(x, \xi_1 + u_1, ..., \xi_n + u_n) - \frac{du_s}{dx}\frac{dx}{dt},$$

yoki, (5.4.3) ga asosan

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \overline{X}(x, \xi_1, ..., \xi_n), \\ &\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + ... + p_{sn}\xi_n + \overline{X}_s(x, \xi_1, ..., \xi_n) \quad (s = \overline{1,n}), \end{aligned}\right\} \tag{5.4.5}$$

bu yerda

$$\left.\begin{aligned} &\overline{X} = X(x, \xi_1 + u_1, ..., \xi_n + u_n), \\ &\overline{X}_s = X_s(x, \xi_1 + u_1, ..., \xi_n + u_n) - X_s(x, u_1, ..., u_n) - \frac{du_s}{dx}\overline{X} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.6}$$

lar x, ξ_j o'zgaruvchilarning analitik funksiyalari. Bu funksiyalarning yoyilmasi kamida ikkinchi darajali hadlardan boshlanadi.

Eski o'zgaruvchilar birdaniga nolga aylanganida, shunda va faqat shundagina yangi o'zgaruvchilar bir vaqtda nolga aylanadi. Shuning uchun eski o'zgaruvchilarga nisbatan turg'unlik masalasi yangi o'zgaruvchilarga nisbatan turg'unlik masalasiga ekvivalentdir. Demak, ko'rilayotgan umumiy holda turg'unlik masalasini tadqiq etish uchun (5.4.5) sistemani ko'rishimiz kifoya bo'ladi.

(5.4.5) tenglamalar sistemasi oldingi paragrafda ko'rilgan chegaralovchi shartlardan ikkinchi va uchinchisini qanoatlantiradi.

Haqiqatan ham, (5.4.5) sistemaning oxirgi n ta tenglamasida barcha $p_s = 0$. $X^{(0)}$ va $X_s^{(0)}$ funksiyalar uchun (5.4.6) ga asosan

$$\left.\begin{aligned} &\overline{X}^{(0)}(x) = \overline{X}(x, 0, ..., 0) = X(x, u_1(x), ..., u_n(x)), \\ &\overline{X}_s^{(0)}(x) = \overline{X}_s(x, 0, ..., 0) = -\frac{du_s}{dx}\overline{X}^{(0)} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.7}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu yerdan ko'rinib turibdiki, $X_s^{(0)}(x)$ funksiya yoyilmasidagi birinchi hadning darajasi $\overline{X}^{(0)}$ ning yoyilmasidagi eng past darajali hadnikidan kam emas, ya'ni $m_s \geq m$.

Demak, agar $\overline{X}^{(0)} \not\equiv 0$ bo'lsa, u holda (5.4.5) sistema oldingi paragrafdagi barcha chegaralovchi shartlarni qanoatlantiradi. Shuning uchun

ham $\overline{X}^{(0)} \not\equiv 0$ bo'lgan holda, biz turg'unlik masalasini yechish uchun oldingi paragrafda olingan natijalardan foydalanishimiz mumkin.

Agar $\overline{X}^{(0)} \equiv 0$ bo'lsa, u holda (5.4.7) ga asosan $X_s^{(0)} \equiv 0$ va oldingi paragrafdagi shartlar bajarilmaydi. Bu holni adabiyotda **maxsus hol** deb aytadilar va uni maxsus tadqiq etish kerak bo'lib qoladi.

Hozir biz nomaxsus holni ko'ramiz. Bu holda, oldingi paragrafdagi natijalarga asosan, biz (5.4.5) sistemadagi faqat birinchi tenglamani ko'rishimiz, $\xi_1,...,\xi_n$ larga bog'liq bo'lgan hamma hadlarni tashlab yuborishimiz va shu ishlarning natijasida hosil qilingan

$$\frac{dx}{dt} = \overline{X}^{(0)}(x) \tag{5.4.8}$$

tenglamani yoki (5.4.7) ning birinchi tenglamasiga asosan

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u_1(x),..., u_n(x)) \tag{5.4.9}$$

tenglamani tadqiq yetishimiz kerak. Bu tenglama uchun turg'unlik masalasi uning o'ng tarafidagi funksiya yoyilmasidagi kichik hadi orqali hal bo'ladi. Agar bu kichik hadning daraja ko'rsatkichi toq va uning oldidagi koeffitsiyent manfiy son bo'lsa, u holda toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi. Qolgan hamma hollarda toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

Shunday qilib, xarakteristik tenglama bitta nol ildizga ega va qolgan ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lsa, u holda turg'unlik masalasini yechish uchun quyidagi algoritmdan foydalanish kerak:

1. Toyilgan harakat tenglamasini (5.1.6) ko'rinishga keltirish kerak.
2. Nokritik tenglamalarning o'ng tarafini nolga tenglashtirib, hosil qilingan (5.4.1) tenglamalarni x_s larga nisbatan yechish kerak.

$X(x, u_1(x),..., u_n(x)) \equiv 0$ bo'lsa, u holda maxsus holga duch kelamiz. Bu masalaning yechimini keyingi paragraflardan beramiz.

5- §. Misollar

Biz ko'rayotgan kritik holda turg'unlik masalasini yechish uchun oldingi paragrafda bayon etilgan algoritmning 2-bandiga asosan (5.4.1) tenglamalarni x_s larga nisbatan yechish kerak. Bu yechimni topish uchun uni ushbu

$$x_s(x) = B_s^{(1)}x + B_s^{(2)}x^2 + ... \qquad (s = \overline{1,n}) \tag{5.5.1}$$

qator sifatida izlaymiz, bu yerda $B_s^{(i)}$ – aniqmas koeffitsiyentlar. Bu koeffitsiyentlarni aniqlash uchun (5.5.1) qatorni (5.4.1) ga qo'yamiz va

bir xil darajali x o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlarni nolga tenglashtiramiz. Birinchi darajali x oldidagi koeffitsiyentni nolga tenglashtirib, ushbu

$$p_{s1}B_1^{(1)} + p_{s2}B_2^{(1)} + ... + p_{sn}B_n^{(1)} + p_s = 0 \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (5.5.2)$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan $B_s^{(1)}$ $(s = \overline{1,n})$ koeffitsiyentlar topiladi.

Bu tenglamalar chiziqli, noldan farqli determinantga ega va shuning uchun ham bitta va faqat bitta yechimga ega. Xuddi shunday, x^i o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsiyentlarni nolga tenglashtirib, $B_s^{(i)}$ koeffitsiyentlarni topish uchun quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$p_{s1}B_1^{(i)} + p_{s2}B_2^{(i)} + ... + p_{sn}B_n^{(i)} + p_s^{(i)} = 0 \qquad (s = \overline{1,n}), \qquad (5.5.3)$$

bu yerda p_s^i lar $B_j^{(1)}$, $B_j^{(2)}$, ..., $B_j^{(i-1)}$ larga nisbatan biror ko'phad.

(5.5.3) tenglamalar $B_s^{(i)}$ koeffitsiyentlarni ketma-ket topishga imkon beradi.

$B_s^{(i)}$ koeffitsiyentlarni aniqlab bo'lgandan keyin, X funksiyaning x_s o'zgaruvchilari o'rniga (5.5.1) qatorni qo'yish lozim. X ning yoyilmasidagi x ga nisbatan eng kichik darajali hadi turg'unlik masalasini hal qiladi. Bizni qatordagi faqat eng kichik darajali had qiziqtirgani uchun umumiy holda hisoblashlar o'tkazayotganda amaliy nuqtayi nazardan (5.5.1) qatordagi faqatgina $B_s^{(1)}x$ hadni aniqlash kifoyadir, chunki ushbu had X funksiyaning yoyilmasidagi eng kichik darajali hadni aniqlaydi. Agar (5.5.1) qatorni X funksiya ifodasiga qo'yganimizda, X va X_s funksiyalarning koeffitsiyentlari orasidagi qandaydir munosabatlarga asosan eng kichik darajali had nolga teng bo'lib qolsa, u holda (5.5.1) qatordagi $B_s^{(2)}x^2$ hadni va ayrim vaqtlarda yuqori darajali hadlarni ham hisobga olishga to'g'ri keladi.

Shuni ham ta'kidlab o'tamizki, agar (5.5.2) tenglamalardagi barcha $p_s = 0$ bo'lsa, u holda $B_1^{(1)} = B_2^{(1)} = ... = B_n^{(1)} = 0$ va, demak, $X_s(x)$ ning yoyilmasi kamida ikkinchi darajali hadlardan boshlanadi. Umuman, agar barcha $p_s x + X_s(x,0,...,0)$ funksiyalar ifodasida k -darajaligacha hadlar yo'q va bu funksiyalardan birortasining ifodasida $(k+1)$-tartibli had qatnashsa, u holda (5.5.1) yoyilma $(k+1)$ - tartibli haddan boshlanadi.

Bu izohlardan keyin bir nechta misollarni ko'raylik.

1 - m i s o l. Toyilgan harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishga keltirilgan bo'lsin:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + \alpha x_1^2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + 4x_3 + \beta x_2^2, \qquad (5.5.4)$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 - 4x_3 + \gamma x_3^2,$$

bu yerda α, β, γ – ayrim o'zgarmas sonlar. (5.5.4) sistemaning birinchi yaqinlashish tenglamalari

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + 4x_3, \qquad (5.5.5)$$
$$\dot{x}_3 = x_1 - 4x_3$$

ko'rinishga ega. (5.5.5) ning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -0 & -1-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$\lambda\,(\lambda+3)^2 = 0.$$

Bu tenglama ushbu ildizlarga ega:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -3, \qquad \lambda_3 = -3$$

va, demak, bu yerda kritik holga duch keldik.

(5.5.5) tenglamalarning birinchi integrali

$$x_1 + x_2 + x_3 = C.$$

(5.5.4) tenglamalardagi x_3 o'zgaruvchi o'rniga yangi x o'zgaruvchini

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

munosabat orqali kiritib, uni quyidagi maxsus ko'rinishga keltiramiz ((5.1.6) ga qarang):

$$\dot{x} = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma (x - x_1 - x_2)^2,$$
$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + \alpha x_1^2, \qquad (5.5.6)$$
$$\dot{x}_2 = -4x_1 - 5x_2 + 4x + \beta x_2^2.$$

Endi x_1 va x_2 o'zgaruvchilarga nisbatan yechilishi lozim bo'lgan quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini tuzamiz ((5.4.1) ga qarang):

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + \alpha x_1^2 &= 0, \\ -4x_1 - 5x_2 + 4x + \beta x_2^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.7)$$

Birinchi tenglamadan

$$x_2 = x_1 - \alpha x_1^2 \qquad (5.5.8)$$

ni topib, ikkinchi tenglamaga keltirib qo'yamiz:

$$-9x_1 + 4x + (5\alpha + \beta)x_1^2 - 2\alpha\beta x_1^3 + \alpha^2\beta x_1^4 = 0. \qquad (5.5.9)$$

Bu tenglamaning yechimini ushbu qator sifatida izlaymiz ((5.4.2) ga qarang):

$$x_1 = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (5.5.10)$$

Bu qatorni (5.5.9) dagi x_1 o'rniga qo'yib va x ning darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni nolga tenglashtirgandan so'ng, quyidagi tenglamalarga kelamiz:

$$\begin{aligned} &-9a_1 + 4 = 0, \\ &-9a_2 + (5\alpha + \beta)a_1^2 = 0, \\ &-9a_3 + 2(5\alpha + \beta)a_1 a_2 - 2\alpha\beta a_1^3 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Bu tenglamalardan ketma-ket barcha koeffitsiyentlarni topamiz:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4}{q}, \\ a_2 &= \frac{1}{q}(5\alpha + \beta)a_1^2 = \frac{4^2}{q^3}(5\alpha + \beta), \qquad (5.5.11) \\ a_3 &= \frac{2}{q}(5\alpha + \beta)a_1 a_2 - \frac{2}{q}\alpha\beta a_1^3 = \frac{2\cdot 4^3}{q^5}(25\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(5.5.11) ni (5.5.10) ga qo'yib, avval x_1 ni va keyin x_1 ni (5.5.8) ga qo'yib, x_2 ni topamiz:

$$x_1 = u_1(x) = \frac{4}{9}x + \frac{4^2}{9^3}(5\alpha + \beta)x^2 + \frac{2\cdot 4^3}{9^5}(25\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)x^3 + \ldots,$$

$$x_2 = u_2(x) = a_1 x + (a_2 - \alpha a_1^2)x^2 + (a_3 - 2\alpha a_1 a_2)x^3 + \ldots.$$

Endi topilgan x_1 va x_2 larning ifodalarini

$$X = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma(x - x_1 - x_2)^2$$

funksiyaga keltirib qo'ysak, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$X^{(0)} = X(x, u_1(x), \ldots, u_2(x)) = \frac{1}{9^2}(16\alpha + 16\beta + \gamma)x^2 +$$

$$+ \frac{4^3}{9^4}\left[10\alpha^2 - 6\alpha\beta + 2\beta^2 - \frac{\gamma}{2}(\alpha + 2\beta)\right]x^3 + \ldots.$$

Bu ifodani oldingi paragrafda bayon etilgan nazariya asosida tadqiq etsak, quyidagi natijalarga erishamiz:

a) Agar $16\alpha + 16\beta + \gamma \neq 0$ bo'lsa, u holda toyilmagan harakat ((5.5.6) ning muvozanat holati) noturg'un bo'ladi.

b) Agar $16\alpha + 16\beta + \gamma \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$10\alpha^2 - 6\alpha\beta + 2\beta^2 > \frac{\gamma}{2}(\alpha + 2\beta)$$

munosabat uchun toyilmagan harakat noturg'un,

$$10\alpha^2 - 6\alpha\beta + 2\beta^2 < \frac{\gamma}{2}(\alpha + 2\beta)$$

tengsizlik bajarilganda esa asimptotik turg'un bo'ladi.

d) Haqiqiy koeffitsiyentlar uchun

$$10\alpha^2 - 6\alpha\beta + 2\beta^2 = \frac{\gamma}{2}(\alpha + 2\beta)$$

tenglik bajarilmaydi.

2- m i s o l. Lyapunov tavsiya etgan misolni ko'rib o'taylik [34].

Toyilgan harakat differensial tenglamalari quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = (3m-1)x^2 - (m-1)y^2 - (n-1)z^2 + (3n-1)yz - 2mzx - 2nxy = X(x, y, z),\\
&\dot{y} = -y + x + (x - y + 2z)(y + z - x) = Y(x, y, z) - y + x,\\
&\dot{z} = -z + x - (x + 2y - z)(y + z - x) = -z + x + Z(x, y, z),
\end{aligned} \tag{5.5.12}$$

bu yerda m va n – biror o'zgarmas sonlar.

Bu tenglamalar sistemasi (5.1.6) maxsus ko'rinishga ega va uning birinchi yaqinlashish tenglamalarining xarakteristik tenglamasi

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -1, \qquad \lambda_3 = -1$$

ildizlarga ega.

Oldingi paragrafda bayon etilgan nazariyaga asosan (5.5.12) sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalarini nolga tenglashtirib, ulardan y va z larni x ning funksiyasi sifatida topish kerak:

$$\left.\begin{aligned}
&-y + x + (x - y + 2z)(y + z - x) = 0,\\
&-z + x - (x + 2y - z)(y + z - x) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.5.13}$$

Buning uchun (5.5.13) sistemadagi tenglamalarni qo'shib va ayirib,

$$-y-z+2x+3(z-y)(y+z-x)=0,$$

$$z-y+(y+z-x)(2x+y+z)=0$$

larni hosil qilamiz. Endi ξ, η yangi o'zgaruvchilarni

$$y+z=\xi, \qquad z-y=\eta \tag{5.5.14}$$

munosabat orqali kiritib, so'nggi tenglamalarni

$$\left.\begin{aligned} -\xi+2x+3(\xi-x)\eta=0,\\ \eta+(\xi-x)(2x+\xi)=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.5.15}$$

soddaroq ko'rinishga keltiramiz. (5.5.15) dan η ni chiqarib tashlab, ξ ga nisbatan uchinchi darajali (kub) tenglamaga kelamiz:

$$3\xi^3+(1-9x^2)\xi+6x^3-2x=0.$$

Bu tenglamaning chap tarafi $x=0$ da nolga aylanadi va uning yechimini

$$\xi=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

qator ko'rinishida izlaymiz. $a_1,a_2,\ldots$ koeffitsiyentlarni topib,

$$\xi=2x-12x^3+\ldots$$

ga kelamiz. Bu ifodani (5.5.15) sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yib,

$$\eta=(x-\xi)(2x+\xi)=-4x^2+60x^4+\ldots$$

ni aniqlaymiz. ξ va η larning ifodasini (5.5.14) ga qo'yib, y va z larni topamiz:

$$y=x+2x^2-6x^3-30x^4+\ldots,$$

$$z=x-2x^2-6x^3+30x^4+\ldots.$$

y va z larning bu ifodalarini (5.5.12) sistemaning o'ng tarafidagi X funksiyaning y va z o'zgaruvchilari o'rniga qo'yib, quyidagi qatorni hosil qilamiz:

$$X^{(0)}(x)=X(x,u_1(x),u_2(x))=4(5m-7n)x^4+24(m-n)x^5+\ldots. \tag{5.5.16}$$

$X^{(0)}(x)$ funksiyaning ifodasini tadqiq qilib quyidagi natijalarga erishamiz:

a) Agar $5m-7n\neq 0$ bo'lsa, u holda tovilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

b) Agar $5m-7n=0$ bo'lsa, u holda $X^{(0)}(x)$ quyidagi ko'rinishga keladi:

$$X^{(0)}(x) = \frac{48}{5} nx^5 + \dots .$$

Bu yerdan: agar $n > 0$ (demak, $m > 0$) bo'lsa, toyilmagan harakatning noturg'un, $n < 0$ bo'lganda esa asimptotik turg'un bo'lishi kelib chiqadi.

d) $m = n = 0$ da, $X^{(0)}(x) \equiv 0$ bo'ladi, yaъni maxsus holga kelamiz. Bu holni kelgusi paragraflarda ko'rib o'tamiz.

3 – m i s o l. Toyilgan harakat tenglamalari

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 + bxy + cy^2 = X(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + kx + lx^2 + mxy + ny^2 = -y + kx + Y(x, y)$$

ko'rinishda bo'lsin, bu yerda a, b, c, k, l, m, n – o'zgarmas sonlar [52].

Ushbu

$$-y + kx + lx^2 + mxy + ny^2 = 0$$

tenglamani tuzib, uning yechimini

$$y(x) = kx + B_2x^2 + B_3x^3 + \dots$$

qator sifatida izlaymiz. Bu qatorni $X(x, y)$ ning ifodasiga qo'yib,

$$X(x, y(x)) = A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$A_2 = a + bk + ck^2, \quad A_3 = (b + 2ck)B_2, \quad A_4 = (b + 2ck)B_3 + cB_2^2.$$

Toyilmagan harakat turg'un bo'lishi uchun

$$A_2 = a + bk + ck^2 = 0 \qquad (5.5.16)$$

bo'lishi **zarurdir**. Bu shart bajarilgan deb faraz qilamiz. U vaqtda A_3 koeffitsiyentni qarashga to'g'ri keladi. Buning uchun B_2 ni hisoblash kerak:

$$B_2 = l + mk + nk^2. \qquad (5.5.17)$$

Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin.

a) $B_2 \neq 0$, u holda, agar $b + 2ck \neq 0$ bo'lsa, toyilmagan harakat $B_2(b + 2ck) > 0$ da noturg'un bo'ladi. Agar $b + 2ck = 0$ bo'lsa, u holda A_4 koeffitsiyentni ko'rishga to'g'ri keladi. Bu holda $c \neq 0$ bo'lsa, toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi. Agar $c = 0$ bo'lsa, u holda $a = 0$ va $b = 0$, demak, $X(x, y) \equiv 0$ bo'ladi va biz maxsus holga duch kelamiz.

b) Endi $B_2 = 0$ bo'lsin. U vaqtda (5.5.17) ga asosan (A) tenglama $y = kx$ yechimga ega bo'ladi. Bu echim (5.5.16) ga asosan $X(x, y(x))$ funksiyani aynan nolga aylantiradi, ya'ni $X(x, y(x)) \equiv 0$. Demak, yana maxsus holga kelamiz.

6- §. Maxsus holda turg'unlik masalasini tadqiq etish

Endi maxsus holni ko'ramiz. Demak, $X(x, x_1, ..., x_n)$ funksiya ifodasidagi $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilar o'rniga

$$p_{s1}u_1 + p_{s2}u_2 + ... + p_{sn}u_n + p_s x + X_s(x, u_1, ..., u_n) \equiv 0 \qquad (s = \overline{1,n})$$

tenglamalarni qanoatlantiruvchi $u_s(x)$ funksiyani qo'yganimizda $X(x, u_1^{(x)}, ..., u_n(x)) \equiv 0$ bo'lsin. Bu holda

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = X(x, x_1, ..., x_n), \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + ... + p_{sn}x_n + p_s x + X_s(x, x_1, ..., x_n) \quad (s = \overline{1,2}) \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.1)$$

tenglamalar sistemasini

$$x_s = \xi_s + u_s(x) \qquad (s = \overline{1,n})$$

belgilashlar yordami bilan hosil qilingan

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \overline{X}(x, \xi_1, ..., \xi_n), \\ &\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + ... + p_{sn}\xi_n + \overline{X}(x, \xi_1, ..., \xi_n) \quad (s = \overline{1,n}) \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.2)$$

tenglamalar sistemasidagi $\overline{X}$ va $\overline{X}_s$ lar uchun

$$\overline{X}(x, 0, ..., 0) = \overline{X}_s(x, 0, ..., 0) = 0 \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (5.6.3)$$

bo'ladi. Bu munosabatlar bevosita

$$\left.\begin{aligned} &\overline{X} = X(x, \xi_1 + u_1, ..., \xi_n + u_n), \\ &\overline{X}_s = X_s(x, \xi_1 + u_1, ..., \xi_n + u_n) - X_s(x, u_1, ..., u_n) - \frac{du_s}{dx}\overline{X} \end{aligned}\right\}$$

munosabatlardan kelib chiqadi.

Ammo, (5.6.2) tenglamalar sistemasi, (5.6.3) munosabatlar bajarilganda,

$$x = c, \quad \xi_1 = \ldots = \xi_n = 0 \tag{5.6.4}$$

yechimga ega, bu yerda c – ixtiyoriy o'zgarmas son. Demak, (5.6.1) tenglamalar sistemasi

$$x = c, \quad x_s = u_s(c) \tag{5.6.5}$$

yechimga ega. Sistemaning trivial yechimi $x = x_1 = \ldots = x_n = 0$ (5.6.5) yechimlar oilasining orasida bo'ladi va u $c = 0$ qiymatga mos keladi.

Ma'lumki, ko'rilayotgan dinamik sistemaning toyilmagan barqaror harakati trivial yechimga mos keladi. Xuddi shunday, dinamik sistemaning boshqa barqaror harakatlari (5.6.5) yechimga mos keladi. Shunday qilib, maxsus holda tadqiq etilayotgan toyilmagan harakat barqaror harakatlar oilasiga mansub bo'ladi.

Bu tasdiqning aksi ham to'g'ri, ya'ni maxsus holda barqaror harakat toyilmagan harakat bo'ladi (bu tasdiqning isboti I.G. Malkin [53] kitobining 109–111 betlarida keltirilgan).

Masalan, oldingi boblarda ko'rilgan qo'zg'algan nuqta atrofida inersiya bo'yicha aylanayotgan qattiq jism ixtiyoriy $c = \omega$ parametrga bog'liq bo'lgan uchta barqaror harakatlar oilasiga ega:

$$p = \omega, \quad q = r = 0; \quad q = \omega, \quad r = p = 0; \quad r = \omega, \quad p = q = 0,$$

bu yerda p, q, r – oniy burchak tezligi vektorining bosh inersiya o'qlari bo'yicha yo'nalgan koordinata o'qlaridagi proeksiyalari.

Shunday qilib, maxsus holda toyilmagan harakat barqaror harakatlar oilasiga mansub bo'ladi, bunda $x, x_1, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan bu oila (5.6.5) munosabat bilan, $x, \xi_1, \ldots, \xi_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan esa (5.6.4) formulalar bilan aniqlanadi.

Maxsus holda toyilmagan harakat doimo turg'un. Turg'unlik bu holda asimptotik bo'lmaydi. Ammo, toyilmagan harakatga yetarlicha yaqin bo'lgan har qanday toyilgan harakat $t \to \infty$ da toyilmagan harakatga intilmasdan, yuqorida ko'rsatilgan barqaror harakatlar oilasining birorta harakatiga baribir intiladi. Boshqacha qilib aytganda, x°, ξ_s° boshlang'ich qiymatlari yetarli kichik bo'lgan har qanday $x(t), \xi_s(t)$ toyilgan harakatlar uchun

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \alpha, \qquad \lim_{t \to \infty} \xi_s(t) = 0$$

munosabat o'rinlidir, bu yerda α – tanlangan toyilgan harakatga bog'liq bo'lgan o'zgarmas son.

Toyilmagan harakatning xuddi shunday xususiyatiga toyilmagan harakatga yetarlicha yaqin bo'lgan oilaning barcha barqaror harakatlari ham ega bo'ladi.

Keltirilgan mulohaza Lyapunovning umumiy teoremasining xususiy holi hisoblanadi. Bu teoremani I.G. Malkin 1938-yilda umumlashtirgan va uning boshqacha isbotini bergan. Biz bu yerda o'sha teoremani keltiramiz.

Toyilgan harakat differensial tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= Y_i(t, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_k) \quad (i=\overline{1,k}), \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + ... + p_{sn}x_n + X_s(t, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_k) \quad (s=\overline{1,n}), \end{aligned}\right\} \tag{5.6.6}$$

bu yerda Y_i, X_s – barcha $t \geq 0$ da chegaralangan funksiya, t ga bog'liq bo'lgan koordinata boshi atrofida y_i, x_s o'zgaruvchilarning analitik funksiyalari, shu o'zgaruvchilar bo'yicha yoyilmasi kamida ikkinchi darajali haddan boshlanadi. Bu yerda yana

$$Y_i(t, 0, ..., 0, y_1, ..., y_k) = X_s(t, 0, ..., 0, y_1, ..., y_k) = 0$$

munosabat o'rinli, ya'ni faqatgina $x_s = 0$ $(s=\overline{1,n})$ da Y_i va X_s funksiyalar nolga aylanadi.

p_{sj} koeffitsiyentlar shundayki,

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.6.7}$$

tenglama faqat haqiqiy qismi manfiy bo'lgan ildizlarga ega.

(5.6.6) tenglamalar sistemasining quyidagi xususiy yechimi mavjud:

$$y_1 = c_1, ..., \; y_k = c_k, \quad x = x_1 = ... = x_n = 0. \tag{5.6.8}$$

Bu yechim k ga, ixtiyoriy c_i o'zgarmas son (parametr)larga bog'liq va tadqiq etilayotgan toyilmagan harakatni o'z ichiga olgan barqaror harakatlar oilasini aniqlaydi. Agar X_s va Y_i lar t ga bog'liq bo'lmasa va $k=1$ bo'lsa, u holda (5.6.6) sistema maxsus holda (5.6.2) sistemaga aylanadi.

Teorema. *Agar toyilgan harakatning differensial tenglamlar sistemasi (5.6.6) ko'rinishga ega bo'lsa, u holda toyilmagan harakat turg'un*

bo'ladi. Bu yerda toyilmagan harakatga yetarlicha yaqin har qanday toyilgan harakat vaqtning chegaralanmay o'sishi bilan (5.6.8) oilaning birorta barqaror harakatiga intiladi.

Agar c_i parametrlarning qiymatlari yetarlicha kichik bo'lsa, u holda (5.6.8) oiladagi barcha barqaror harakatlar shu xususiyatga egadir.

Teoremaning isboti I.G. Malkin [53] kitobining 114–118 betlarida keltirilgan.

Kelgusi paragrafda biz ikkinchi kritik holni, ya'ni xarakteristik tenglama juft sof mavhum ildizga ega bo'lgan holni tadqiq etamiz.

7- §. Juft sof mavhum ildizlar holi. Toyilgan harakat tenglamalarini maxsus ko'rinishga keltirish

Quyidagi $(n+2)$ -tartibli tenglamalar sistemasini ko'rib o'tamiz:

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1}z_1 + ... + q_{j.\,n+2}z_{n+2} + Z_j(z_1,...,z_{n+2}) \ (j = \overline{1,n+2}), \qquad (5.7.1)$$

bu yerda har bir Z_j ifoda $z_1,...,z_{n+2}$ o'zgaruvchilarga nisbatan koordinata boshining biror atrofida analitik funksiya, $z_1,...,z_{n+2}$ larning darajalari bo'yicha yoyilmasi esa kamida ikkinchi tartibli haddan boshlanadi. Birinchi yaqinlashish

$$\frac{dz_j}{dt} = q_{j1}z_1 + ... + q_{j.\,n+2}z_{n+2} \quad z_{n+2} \quad (j = \overline{1,n+2}) \qquad (5.7.2)$$

sistemasining xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\rho & q_{12} & \cdots & q_{1,\,n+2} \\ q_{21} & q_{22}-\rho & \cdots & q_{2,n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n+2.1} & q_{n+2,2} & \cdots & q_{n+2.n+2}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.7.3)$$

juft sof mavhum $\pm\lambda i$ ildizga va n ta haqiqiy qismi manfiy bo'lgan ildizlarga ega bo'lsin.

Quyidagi

$$x = a_1z_1 + a_2z_2 + ... + a_{n+2}\,z_{n+2}, \qquad y = b_1z_1 + b_2z_2 + ... + b_{n+2}\,z_{n+2}$$

almashtirishlar vositasida ikkita qandaydir z_j o'zgaruvchilar o'rniga yangi x va y o'zgaruvchilarni kiritamiz, bu yerda a_j va b_j – o'zgarmas sonlar. Bu o'zgarmas sonlarni shunday tanlab olamizki, (5.7.2) sistemaning ikkita tenglamasi

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x$$

ko'rinishga kelsin. Demak, biz

$$\sum_{j=1}^{n+2} a_j (q_{j1} z_1 + \ldots + q_{j,\,n+2} z_{n+2}) = -\lambda \sum_{j=1}^{n+2} b_j z_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n+2} b_j (q_{j1} z_1 + \ldots + q_{j,\,n+2} z_{n+2}) = \lambda \sum_{j=1}^{n+2} a_j z_j$$

munosabatlarga ega bo'lishimiz kerak. Bu munosabatlarning ikki tarafidagi bir xil darajali z_k lar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, a_j va b_j larga nisbatan $2n+4$ ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} &q_{1k} a_1 + q_{2k} a_2 + \ldots + q_{n+2,k} a_{n+2} + \lambda b_k = 0, \\ &q_{1k} b_1 + q_{2k} b_2 + \ldots + q_{n+2,k} b_{n+2} - \lambda a_k = 0 \qquad (k = \overline{1, n+2}). \end{aligned}\right\} \tag{5.7.4}$$

Agar a_j va b_j noma'lumlar o'rniga $c_j = a_j + i b_j$ kompleks noma'lumlarni kiritsak, u holda $(n+2)$ ta tenglamali sistemaga kelamiz. Haqiqatan ham, (5.7.4) dagi ikkinchi guruh tenglamalarni i ga ko'paytirib, mos ravishda birinchi guruh tenglamalariga qo'shsak, $(n+2)$ ta bir jinsli chiziqli tenglama sistemasiga kelamiz:

$$q_{1k} c_1 + q_{2k} c_2 + \ldots + q_{n+2,k} c_{n+2} - \lambda i c_k = 0 \qquad (k = \overline{1, n+2}).$$

Shartga asosan (5.7.3) tenglama λi ildizga egaligidan hosil qilingan sistemaning $D(\lambda i)$ determinanti nolga teng bo'ladi. Demak, bu sistema c_i larga nisbatan notrivial yechimga ega. Bu yechimlarning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib, (5.7.4) sistemaning yechimini hosil qilamiz.

Shunday qilib, topilgan x va y larni z_j larning ikkitasi sifatida qabul qilib, qolganlarini x_j bilan belgilasak, (5.7.2) sistema quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x, \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + p_s x + q_s y \qquad (s = \overline{1, n}), \end{aligned}\right\}$$

bu yerda p_{sj}, p_s, q_s – biror o'zgarmas sonlar. Agar aytilgan almashtirishlarni (5.7.1) ga nisbatan qo'llasak, ular quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y, x_1, ..., x_n),\\
&\frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y, x_1, ..., x_n),\\
&\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + ... + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, x_1, ..., x_n) \quad (s = \overline{1,n}),
\end{aligned}\right\} \tag{5.7.6}$$

bu yerda X, Y, X_s – xuddi Z_j larga o'xshash funksiyalar.

Hosil qilingan tenglamalar sistemasi ko'rilayotgan holni kelgusida tadqiq etish uchun asos bo'lib xizmat qiladi.

Har qanday chiziqli sistemaning xarakteristik tenglamasi chiziqli almashtirishlar natijasida o'zgarmaydi. Shuning uchun ham (5.7.6) ning birinchi yaqinlashish tenglamalari sistemasining xarakteristik tenglamasi (5.7.3) xarakteristik tenglama bilan mos kelishi kerak. Ammo (5.7.6) sistema chiziqli qismining xarakteristik tenglamasi $\pm\lambda i$ ildizlarni beruvchi $p^2 + \rho^2 = 0$ va

$$\begin{vmatrix}
p_{11} - \rho & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\
p_{21} & p_{22} - \rho & \cdots & p_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} - \rho
\end{vmatrix} = 0 \tag{5.7.7}$$

tenglamalarga ajraladi. Demak, (5.7.7) tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'ladi.

Biz ko'rilayotgan ikkinchi kritik holni dastlab $n = 0$ hol uchun ko'rib o'tamiz.

8- §. Ikkinchi tartibli sistema. Masalani yechishning birinchi usuli

$n = 0$ bo'lganda toyilgan harakat differensial tenglamalari ikkinchi tartibli sistemadan iborat bo'ladi:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y), \tag{5.8.1}$$

bu yerda X va Y larning yoyilmasi kamida ikkinchi darajali haddan boshlanadi.

(5.8.1) ko'rinishdagi tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadigan integral egri chiziqlarning xususiyatlarini birinchi bo'lib fransiyalik olim A. Puankare o'rgangan [79]. Uning tadqiqotlariga tayanib, toyilmagan harakatning nafaqat xarakterini tekshirish, balki koordinata boshi atrofida (5.8.1) tenglamalarning integral egri chiziqlari «xulqining» umumiy tasvirini ham berish mumkin.

Shu maqsad uchun ushbu

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta \tag{5.8.2}$$

almashtirishlar orqali r va ϑ qutb koordinatalarini kiritamiz. (5.8.2) munosabatlardan

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \tag{5.8.3}$$

tenglamalar kelib chiqadi.

(5.8.3) tenglamalarni t bo'yicha differensiallab,

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}}{x^2 + y^2}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan (5.8.1) sistemaga asosan

$$r\frac{dr}{dt} = xX + yY, \qquad r^2\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda r^2 + xY - yX$$

yoki x va y larni (5.8.2) ifodalari bilan almashtirsak, quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = X(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)\cos\vartheta + Y(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)\sin\vartheta = rR(r,\vartheta), \\ \dfrac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \dfrac{1}{2}[Y(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\cos\theta - X(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta] = \lambda + \theta(r,\vartheta), \end{cases} \tag{5.8.4}$$

bu yerda $R(r,\vartheta)$, $\theta(r,\vartheta)$ lar r va ϑ larning funksiyalari, ular yetarlicha kichik r lar uchun r ning darajalari bo'yicha yaqinlashuvchi qatorga yoyiladi hamda

$$R(0,\vartheta) = \theta(0,\vartheta) \equiv 0.$$

Bu qatorlarning koeffitsiyentlari davri 2π ga teng bo'lgan ϑ ning davriy funksiyalaridan iborat. Ularning har biri $\cos\vartheta$ va $\sin\vartheta$ larga nisbatan oddiy ko'phaddir. Shuning uchun ham ularni kosinus va sinuslarning chekli yig'indisi deb qarash mumkin.

Integral egri chiziqlarning tenglamasini hosil qilish uchun (5.8.4) dan t vaqtni chiqarib tashlab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{rR(r,\vartheta)}{\lambda + \theta(r,\vartheta)} = r^2 R_2(\vartheta) + r^3 R_3(\vartheta) + \ldots, \qquad (5.8.5)$$

bu yerda $R_k(\vartheta)$ $(k = 2,3,...)$ ifoda $\cos\vartheta$ va $\sin\vartheta$ larga nisbatan ko'phad.

(5.8.5) tenglamaning o'ng tarafida turgan qator r ning yetarlicha kichik qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'ladi.

(5.8.5) tenglamaning $r = 0$ trivial yechimi mavjud. Demak, integral egri chiziqlarning bittasiga koordinata boshi mos keladi. (5.8.5) tenglamaning o'ng tarafi koordinata boshi atrofida analitik bo'lgani uchun bu atrofning har bir nuqtasidan (differensial tenglamalar yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaga asosan) bitta va faqat bitta integral egri chiziq o'tadi. Bu yerdan koordinata boshi atrofidagi biror nuqtadan chiqayotgan istalgan integral egri chiziq koordinata boshini hech qachon kesmasligi kelib chiqadi.

(5.8.5) tenglamaning o'ng tarafi analitik ekanligidan yana bu tenglamaning

$$r(0,c) = c \qquad (5.8.6)$$

boshlang'ich shart bilan aniqlanadigan uning har qanday $r = r(\vartheta, c)$ yechimi c parametrning darajalari bo'yicha qatorga yoyilishi kelib chiqadi:

$$r(\vartheta, c) = r_1(\vartheta)c + r_2(\vartheta)c^2 + \ldots. \qquad (5.8.7)$$

Agar c yetarlicha kichik bo'lsa, (5.8.7) qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu qatorning yaqinlashish radiusi ϑ ning o'zgarish intervaliga bog'liq. Ammo, bu interval har qancha katta bo'lmasin, shunday yetarlicha kichik γ son topiladiki, barcha $|c| \le \gamma$ lar uchun (5.8.7) qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Biz γ sonni shunchalik kichik deb hisoblaymizki, $|\vartheta| \le 2\pi$ lar uchun (5.8.7) qator yaqinlashuvchi bo'lsin.

r_i koeffitsiyentlarni topish uchun (5.8.7) qatorni (5.8.5) tenglamaning ikki tarafiga ham qo'yamiz va bir xil darajali c lar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtiramiz. (5.8.7) ni (5.8.5) ga qo'yganimizdan keyin uning o'ng tarafida hosil bo'ladigan qatorning c^i darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni F_i bilan belgilasak, quyidagi tenglikka kelamiz:

$$\left\{r^2 R_2(\vartheta) + r^3 R_3(\vartheta) + \ldots\right\}_{r = r_1(\vartheta)c + r_2(\vartheta)c^2} + \ldots = F_2 c^2 + F_3 c^3 + \ldots., \qquad (5.8.8)$$

bu yerda F_i lar $(i = 2,3,...)$ $r_2, r_3, ..., r_{i-1}$ lar bo'yicha ko'phadlar bo'lib, koeffitsiyentlari $R_2, R_3, ..., R_i$ larga bog'liq va ν argumentning 2π davrli funksiyalari ($\cos\vartheta$ va $\sin\vartheta$ larga nisbatan ko'phadlar)dir. Xususan,

$$F_2 = R_2 r_1^2, \qquad F_3 = R_3 r_1^3 + 2R_2 r_1 r_2.$$

r_i funksiyalarni aniqlovchi tenglamalar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr_1}{d\vartheta} = 0, \quad \frac{dr_2}{d\vartheta} = R_2 r_1^2 = F_2, \quad \frac{dr_3}{d\vartheta} = R_3 r_1^2 + 2R_2 r_1 r_2 = F_3 \\ &\frac{dr_i}{d\vartheta} = F_i \quad (i = 4,5,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{5.8.9}$$

Bundan tashqari, (5.8.6) dan quyidagi boshlang‘ich shartlarni hosil qilamiz

$$r_1(0) = 1, \qquad r_2(0) = r_3(0) = \ldots = 0 \tag{5.8.10}$$

Demak,

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \int_0^{\vartheta} R_2 d\vartheta, \quad r_3 = \int_0^{\vartheta} (R_3 + 2R_2 r_2)\, d\vartheta, \ldots, \quad r_i = \int_0^{\vartheta} F_i\, d\vartheta. \tag{5.8.11}$$

Shunday qilib, oddiy kvadraturada ketma-ket barcha $r_i(\vartheta)$ funksiyalar aniqlanadi. $r_2(\vartheta)$ funksiya uchun biz davriy funksiyaning kvadraturasiga ega bo‘lamiz. Bunday kvadraturalarning kelgusida biz doimo foydalanadigan bitta umumiy xususiyatini ko‘rsatib o‘tamiz.

$f(\vartheta)$ biror uzluksiz ω davrli davriy funksiya bo‘lsin, u holda

$$F(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} f(\vartheta)\, d\vartheta = g\vartheta + \varphi(\vartheta) \tag{5.8.12}$$

ifodalanish o‘rinli, bu yerda $\varphi(\vartheta)$ funksiya 2π davrli davriy funksiya, g esa quyidagicha aniqlanadigan o‘zgarmas son.

$$g = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{5.8.13}$$

Agar $f(\vartheta)$ quyidagi

$$f(\vartheta) = g + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{\omega} \vartheta + B_n \sin \frac{2\pi n}{\omega} \vartheta \right)$$

Fure qatoriga yoyilsa, u holda g ning (5.8.13) formula bilan aniqlanishi ravshan bo‘lib qoladi. Haqiqatan ham, bu holda quyidagiga egamiz:

$$F(\vartheta) = g\vartheta + \frac{\omega}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n} \sin \frac{2\pi n}{\omega} \vartheta - \frac{B_n}{n} \cos \frac{2\pi n}{\omega} \vartheta \right).$$

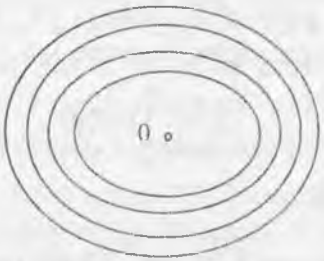
Bu yerdan ko‘rilayotgan hol uchun (5.8.12) formulaning to‘g‘riligi yanada ayon bo‘ladi.

Endi r_2 koeffitsiyentni ko‘raylik. R_2 davriy funksiya bo‘lganligi uchun r_2 yoki (5.8.12) ko‘rinishda bo‘ladi, yoki davriy (agar $g=0$ bo‘lsa) funksiya bo‘ladi. Ikkinchi holda $R_3+2R_2r_2$ funksiya davriy bo‘ladi va shuning uchun ham r_3 yoki (5.8.12) ko‘rinishga ega, yoki davriy funksiya bo‘ladi. Shu tarzda davom ettirsak, biz ikki hol mavjud ekanligiga iqror bo‘lamiz: 1) i indeks har qancha katta bo‘lmasin, barcha r_i koeffitsiyentlar 2π davrli davriy funksiyalar bo‘ladi; 2) yoki bu koeffitsiyentlar orasida davriy emas funksiyalar mavjud. Agar r_m birinchi davriymas koeffitsiyentlar bo‘lsa, u holda

$$r_m = g\vartheta + \varphi(\vartheta), \qquad g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_m d\vartheta \tag{5.8.14}$$

o‘rinli, bu yerda $\varphi(\vartheta)$ funksiya 2π davrli davriy funksiya.

a) Barcha r_j funksiyalar davriy. Bu holda c ning qatorning yaqinlashishi sohasidagi bitta qiymatlarida (5.8.7) yechim davriy va, demak, $r(2\pi,c)=r(0,c)$ va koordinata boshining yetarlicha kichik atrofida barcha integral egri chiziqlar yopiq hamda bu nuqtani qamrab oladi (5.2-shakl). Puankare bunday



5.2- shakl.

koordinata boshini (muvozanat holatini) **markaz** (sentr) deb atadi va ilmiy adabiyotda shu atama qabul qilingan.

b) r_j koeffitsiyentlar orasida davriy emaslari ham mavjud. Shunday koeffitsiyentlardan birinchisi r_m bo‘lsin, u holda r_m uchun (5.8.14) formula o‘rinli bo‘ladi, bu erda $g\neq 0$ va barcha $r_2, r_3, \ldots, r_{m-1}$ koeffitsiyentlar davriydir.

Ushbu

$$r = \rho + \rho^2 r_2(\vartheta) + \ldots + \rho^{m-1} r_{m-1}(\vartheta) + \rho^m \varphi(\vartheta) \equiv$$
$$\equiv \rho + \rho^2 r_2(\vartheta) + \ldots + \rho^{m-1} r_{m-1}(\vartheta) + \rho^m r_m(\vartheta) - g\vartheta\rho^m \tag{5.8.15}$$

almashtirish vositasida (5.8.5) tenglamani o'zgartiramiz. (5.8.8) munosabatga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d\rho}{d\vartheta}(1 + 2\rho r_2 + \ldots + m\rho^{m-1}\varphi) + \rho^2 \frac{dr_2}{d\vartheta} + \ldots + \rho^m \frac{dr_m}{d\vartheta} - g\rho^m =$$
$$= \rho^2 F_2 + \ldots + \rho^m F_m + \rho^{m+1} F_{m+1} + \ldots,$$

yoki (5.8.9) ni hisobga olib,

$$\frac{d\rho}{d\vartheta}(1 + 2\rho r_2 + \ldots + m\rho^{m-1}\varphi) = g\rho^m + \rho^{m+1} F_{m+1} + \ldots$$

ga ega bo'lamiz. Bu erdan

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = g\rho^m + R^*_{m+1}(\vartheta)\rho^{m+1} + \ldots = \rho^m (g + \rho R^*_{m+1}(\vartheta) + \ldots) \tag{5.8.16}$$

ni hosil qilamiz. (5.8.15) almashtirishning koeffitsiyentlari davriy bo'lganligi uchun R^*_{m+n} lar ϑ ning 2π davrli funksiyalaridir.

(5.8.16) tenglamadan $\frac{d\rho}{d\vartheta}$ hosila koordinata boshining yetarlicha kichik atrofida g ning ishorasiga mos bo'lgan (o'zgarmas) ishorani saqlashligi kelib chiqadi. Agar $g < 0$ bo'lsa, u holda $\vartheta \to +\infty$ da $\rho(\vartheta)$ funksiya uzluksiz kamayib, nolga intiladi. (5.8.15) almashtirishlarga asosan r radius-vektor ham xuddi shunday xususiyatga ega bo'ladi. Demak, koordinata boshining etarlicha kichik atrofida joylashgan barcha integral egri chiziqlar spirallardan iborat. Ular koordinata boshi atrofida cheksiz ko'p marta aylanib, logarifmik spiral singari asimptotik ravishda unga yaqinlashadi. Puankare bunday koordinata boshini **fokus** deb atagan va biz ham bundan keyin shunday deb ataymiz (5.3- shakl).

5.3- shakl.

$g>0$ bo'lganda ham integral egri chiziqlarning «hulqi» xuddi yuqorida bayon etilganday bo'ladi. Faqat bu holda $\vartheta \to +\infty$ da spirallar koordinata boshidan uzluksiz ravishda uzoqlashadi.

Endi turg'unlik masalasini ko'raylik. Markaz holida boshlang'ich paytda yetarlicha kichik bo'lgan r va u bilan birga x va y lar doimo yetarlicha kichikligini saqlaganliklari uchun toyilmagan harakat turg'un bo'lsa-da, asimptotik turg'unmas.

Koordinata boshi fokus bo'lgan holni ko'raylik. (5.8.4) sistemaning ikkinchi tenglamasi ko'rsatadiki, koordinata boshining yetarlicha kichik atrofida θ ning qiymati ($r=0$ va $\theta(0,\vartheta)=0$) modul bo'yicha λ dan kichik bo'lsa, $\frac{d\vartheta}{dt}$ hosila biror musbat sondan katta bo'ladi. Demak, t ning o'sishi bilan ϑ ning qiymati ham o'sadi va, agar integral egri chiziq koordinata boshining yetarlicha kichik atrofida qolsa, $t \to \infty$ da ϑ ham cheksiz chegaralanmagan holda o'sadi. Oxirgi hol aynan $g<0$ bo'lganda yuz beradi. Bu holda ϑ ning o'sishi bilan integral egri chiziqlar koordinata boshiga yaqinlashadi va $\vartheta=+\infty$ da unga asimptotik ravishda intiladi. Demak, $g<0$ bo'lganda, toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi (5.3- shaklga qarang).

$g>0$ bo'lganda, integral egri chiziqlar ϑ ning o'sishi va, demak, t ning ham o'sishi bilan koordinata boshidan uzoqlashadi. Barcha integral egri chiziqlar boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lmagan holda koordinata boshining atrofini (boshlang'ich vaqtda o'sha yerda bo'lganligiga qaramasdan) tashlab ketadi. Bu yerdan toyilmagan harakatning noturg'unligi kelib chiqadi.

Demak, markaz bo'lgan holda toyilmagan harakat turg'un, ammo asimptotik turg'un emas. Fokus holida, $g<0$ bo'lsa, toyilmagan harakat asimptotik turg'un, $g>0$ bo'lganda esa noturg'un bo'ladi.

Shunday qilib, *bizni qiziqtirayotgan holda turg'unlik masalasini yechish uchun quyidagi algoritmdan foydalanish kerak:*

1. *(5.8.1) tenglamalar sistemasini (5.8.2) almashtirishlarni bajarib va t vaqtni chiqarib bitta (5.8.5) tenglamaga keltiramiz.*
2. *(5.8.5) tenglamaning echimini*

$$r = c + c^2 r_2(\vartheta) + c^3 r_3(\vartheta) + \ldots.$$

qator ko'rinishida izlaymiz, bu yerda $r_2(0)=r_3(0)=\ldots=0$. Bu qatorni (5.8.5) ga qo'yib hamda chap va o'ng tarafdagi bir xil darajali c larning koeffitsiyentlarini tenglashtirib, $r_i(\vartheta)$ funksiyalarni ketma-ket kvadraturada aniqlashga imkon beradigan tenglamalarni hosil qilamiz.

Bu yerda barcha $r_i(\vartheta)$ *lar yoki davriy funksiyalar, yoki* $r_2, r_3, ..., r_m, ...$ *orasida davriymas funksiyalar ham mavjud bo'lishi mumkin.*

Birinchi holda toyilmagan harakat turg'un bo'ladi, ammo asimptotik turg'un emas.

Ikkinchi holda $r_2, r_3, ...$ *lar orasida birinchi davriy emas koeffitsiyent* r_m *bo'lsa, u albatta (5.8.14) formulalar orqali aniqlanadi. Agar* $g > 0$ *bo'lsa, toyilmagan harakat noturg'un,* $g < 0$ *bo'lganda esa asimptotik turg'un bo'ladi.*

Misol. Toyilgan harakatning differensial tenglamalari

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \beta x^2 + \gamma x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad (5.8.17)$$

ko'rinishda bo'lsin, bu yerda α, β, γ – o'zgarmas sonlar.

(5.8.17) tenglamani

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x - \beta x^2 - \gamma xy^2 + \alpha y^3 \qquad (5.8.18)$$

tenglamalar sistemasiga keltirib,

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta$$

almashtirishlarni kiritamiz. U vaqtda bu tenglamalar

$$\frac{dr}{dt} = -\beta r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta + (\alpha\sin^4\vartheta - \gamma\cos\vartheta\sin^3\vartheta)r^3,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 1 - \beta\cos^3\vartheta\cdot r + (\alpha\sin^3\vartheta\cos\vartheta - \gamma\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta)r^2$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamalardan t ni chiqarib,

$$\frac{dr}{d\vartheta} = -\beta\cos^2\vartheta\sin\vartheta\cdot r^2 + (\alpha\sin^4\vartheta - \gamma\cos\vartheta\sin^3\vartheta - \beta^2\cos^5\vartheta\sin\vartheta)r^3 + ...$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamaning yechimini

$$r = c + r_2c^2 + r_3c^3 + ...$$

qator sifatida izlaymiz, bu erda $r_2(0) = r_3(0) = ... = 0$. Bir xil darajali c oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib,

$$\frac{dr_2}{d\vartheta} = -\beta\cos\vartheta\sin\vartheta,$$

$$\frac{dr_3}{d\vartheta} = -\alpha\sin^4\vartheta - \{\gamma\cos\vartheta\sin^2\vartheta + \beta^2\cos^5\vartheta + 2\beta\cos^2\vartheta\cdot r_2\}\sin\vartheta$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$r_2 = \beta\left(\frac{\cos^3\vartheta}{3} - \frac{1}{3}\right),$$

$$r_3 = \alpha\int_0^{\vartheta}\sin^4\vartheta\,d\vartheta - \int_0^{\vartheta}\{\gamma\cos\vartheta\sin^2\vartheta + \beta^2\cos^5\vartheta + 2\beta\cos^2\vartheta\cdot r_2\}\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

va $r_2(\vartheta)$ davriy, $r_3(\vartheta)$ esa davriy emasligi kelib chiqadi.

r_3 funksiya

$$r_3 = g\vartheta + f(\vartheta)$$

formula orqali aniqlanadi, bu yerda

$$g = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\vartheta\,d\vartheta$$

va $f(\vartheta)$ – davriy funksiya.

Demak, $\alpha > 0$ bo'lganda, toyilmagan harakat noturg'un, $\alpha < 0$ bo'lganda esa – asimptotik turg'un bo'ladi.

9- §. Ikkinchi tartibli sistema. Lyapunov funksiyasini tuzish usuli bilan masalani yechish

Lyapunov tomonidan tavsiya etilgan usul bilan masalani yechishni ko'rsatamiz. Bu usul (5.8.1) tenglamalar sistemasi uchun Lyapunov funksiyasini tuzishga asoslanadi.

Dastlab quyidagi masalani ko'ramiz. $u_m(x,y)$ ifoda x va y o'zgaruvchilarga nisbatan berilgan m - tartibli forma bo'lsin. (5.8.1) sistemaning birinchi yaqinlashish

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x \tag{5.9.1}$$

tenglamalariga ko'ra vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi u_m formaga teng bo'lgan $v_m(x,y)$ formani izlaymiz. Boshqacha qilib aytganda,

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_m}{\partial y} - y\frac{\partial v_m}{\partial x}\right) = u_m(x,y) \tag{5.9.2}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $v_m(x,y)$ formani topish kerak. Bu masala 4-bobning 2- §idagi 2- teoremaning xususiy holi bo'ladi. O'sha yerda olingan natijalarga ko'ra

$$v_m = a_1 x^m + a_2 x^{m-1} y + \ldots + a_{m+1} y^m,$$

$$u_m = b_1 x^m + b_2 x^{m-1} y + \ldots + b_{m+1} y^m$$

formalarni (5.9.2) ga qo'yib va o'xshash hadlar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, a_j larni topish uchun quyidagi chiziqli tenglamalarni hosil qilamiz:

$$A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + \ldots + A_{i,m+1}a_{m+1} = b_i \quad (i = \overline{1, m+1}), \tag{5.9.3}$$

bu erda A_{ij} – biror o'zgarmas sonlar.

Bu sistemaning determinanti nolga teng bo'lmasa, u yagona yechimga ega. Demak, (5.9.3) sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun

$$D_m(\rho) = \begin{vmatrix} A_{11} - \rho & A_{12} & \ldots & A_{1,m+1} \\ A_{21} & A_{22} - \rho & \ldots & A_{2,m+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_{m+1,1} & A_{m+1,2} & \ldots & A_{m+1,m+1} - \rho \end{vmatrix} = 0 \tag{5.9.4}$$

tenglama nolga teng bo'lgan ildizga ega bo'lmasligi kerak.

Ammo, 4- bob, 2-§dagi 1- teoremaga asosan (5.9.4) tenglamaning barcha ildizlari

$$\rho = (m_1 - m_2)\, i\lambda \tag{5.9.5}$$

formula bilan aniqlanadi. Bu erda m_1 va m_2 lar

$$m_1 + m_2 = m \tag{5.9.6}$$

munosabat bilan bog'langan har qanday manfiymas butun sonlar.

Agar m – toq son bo'lsa, u holda (5.9.5) ni nolga aylantiradigan (5.9.6) munosabat bilan bog'langan m_1 va m_2 larning hech qanday juftligi mavjud emas. Demak, m toq son bo'lganda, (5.9.4) determinant noldan farq qiladi va (5.9.3) sistema (5.9.2) tenglamani qanoatlantiruvchi bitta va faqat bitta $v_m(x, y)$ formani aniqlab beruvchi yagona yechimga ega.

Endi m juft son bo'lsin deb faraz qilamiz. Bu holda $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$ bo'ladi va (5.9.6) ni qanoatlantiradi.

Faqatgina ana shu juftlik kombinatsiyada (5.9.5) ifoda nolga aylanadi. Demak, bu holda (5.9.4) tenglama nolga teng ildizga ega va (5.9.3) sistemaning determinanti nolga teng bo'ladi. Ammo, bu determinantning m- tartibli birorta ham minori nolga teng emas. Haqiqatan ham, barcha m- tartibli minorlar nolga teng bo'lganda, (5.9.4) tengla-

maning nolga teng ildizi hech bo'lmaganda ikki karrali bo'lardi, chunki u faqat $D_m(\lambda)$ ni emas, balki $\frac{d\,D_m(\lambda)}{d\lambda}$ ni ham nolga aylantirgan bo'lardi.

(5.9.3) sistemaning determinanti nolga teng bo'lgani uchun bu sistema, umuman aytganda, yechilmovchidir. Bu holda (5.9.3) tenglamaning chap tarafidagi hadlar o'zaro chiziqli bog'langan bo'ladi, ya'ni hech bo'lmaganda birortasi noldan farq qiluvchi shunday $M_1, M_2, ..., M_{m+1}$ sonlar mavjudki, (5.9.3) sistemaning chap tarafidagi hadlarni bu sonlarga ko'paytirib, so'ngra qo'shsak, biz aynan nolni hosil qilamiz. (5.9.3) sistema yechiluvchi bo'lishi uchun uning o'ng tarafidagi hadlar ham shu chiziqli bog'lanishda bo'lishi zarur, ya'ni quyidagi ayniyat bajarilishi lozim:

$$Mb_1 + M_2 b_2 + ... + M_{m+1} b_{m+1} = 0. \qquad (5.9.7)$$

Bu shart (5.9.3) sistemaning yechiluvchi bo'lishi uchun yetarli hamdir, chunki $D_m(0)$ determinantning nolga teng bo'lmagan m - tartibli minorlari ham mavjud va shuning uchun ham bu sistemaning chap tarafi faqat bitta chiziqli munosabat bilan bog'langan.

Shunday qilib, m juft son bo'lganda, (5.9.2) tenglamani qanoatlantiruvchi v_m forma faqat u_m formaning koeffitsiyentlari (5.9.7) munosabat bilan bog'langan bo'lsagina mavjuddir.

Shuning uchun ham m juft son bo'lgan hol uchun masalaning qo'yilishini sal o'zgartiramiz.

Endi (5.9.2) tenglamani emas, balki

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_m}{\partial y} - y\frac{\partial v_m}{\partial x}\right) = u_m + G(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}} \qquad (5.9.8)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi v_m formani izlaymiz, bu yerda G – biror o'zgarmas son. Uni shunday tanlab olamizki, (5.9.8) tenglama yechimga ega bo'lsin.

Endi (5.9.3) sistema ushbu

$$A_{i1}a_1 + ... + A_{i,m+1}a_{m+1} = b_i + k_i G \qquad (\overline{i = 1, m+1})$$

sistemaga aylanadi, bu yerda $k_1, k_2, ..., k_{m+1}$ lar $(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}$ formaning koeffitsiyentlari. Sistemaning yechiluvchi bo'lishlik sharti

$$\sum_{i=1}^{m+1} M_i b_i + G\sum_{i=1}^{m+1} k_i M_i = 0 \qquad (5.9.9)$$

ko'rinishga keladi.

G o‘zgarmas son (5.9.9) tenglamadan bir qiymatli ravishda aniqlanadi. Uni topish uchun (5.9.9) tenglamani tuzish shart emas, uni (5.9.8) tenglamadan foydalanib, topish mumkin. Buning uchun G va v_m forma aniqlangan deb hisoblaymiz. Ularni (5.9.8) ga qo‘yib, har qanday x va y larning qiymatlarini qanoatlantiruvchi, ayniyatga kelamiz. Xususan, $x=\cos\vartheta$, $y=\sin\vartheta$ qiymatlarda ham u ayniyat bo‘ladi. (5.9.8) ga $x=\cos\vartheta$, $y=\sin\vartheta$ larni qo‘yib, hosil bo‘lgan ayniyatni $d\vartheta$ ga ko‘paytirib, 0 dan 2π gacha oraliqda integrallaymiz. U holda

$$\frac{dv_m(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}{d\vartheta}=\left\{-y\frac{\partial v_m(x,y)}{\partial x}+x\frac{\partial v_m(x,y)}{\partial y}\right\}_{x=\cos\vartheta,\ y=\sin\vartheta}$$

va, demak,

$$\int_0^{2\pi}\left\{x\frac{\partial v_m}{\partial y}-y\frac{\partial v_m}{\partial x}\right\}_{x=\cos\vartheta,\ y=\sin\vartheta}d\vartheta=v_m(\cos\vartheta,\sin\vartheta)\Big|_0^{2\pi}=0$$

$$m_1\rho_1+\ldots+m_n\rho_n=\frac{1}{m}(m_1+\ldots+m_n)\mu=\mu$$

larni hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$2\pi G+\int_0^{2\pi}u_m(\cos\vartheta,\sin\vartheta)\,d\vartheta=0\,. \qquad (5.9.10)$$

Shunday qilib, o‘zgarmas son G bilan u_m forma koeffitsiyentlari orasidagi munosabatni topdik. Agar (5.9.8) tenglama yechimga ega bo‘lsa, u holda bu munosabatning bajarilishi zarur bo‘ladi. Isbot qilinganga ko‘ra bunday munosabat bitta bo‘ladi va, demak, u (5.9.9) munosabat bilan bir xil bo‘ladi.

(5.9.10) formula G o‘zgarmas sonni birdaniga topishga imkon beradi.

Endi qo‘yilgan masalani hal qilishga o‘tamiz. Toyilgan harakat differensial tenglamalarini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\lambda y+X_2(x,y)+X_3(x,y)+\ldots,\\ \frac{dy}{dt}&=\lambda x+Y_2(x,y)+Y_3(x,y)+\ldots,\end{aligned}\right\} \qquad (5.9.11)$$

bu yerda X_k, Y_k lar x va y funksiyalardagi k - tartibli hadlar majmuasi. Bu sistema uchun teorema B yoki teorema D ni qanoatlantiruvchi Lyapunov funksiyasini tuzamiz. Bu funksiya

$$V = x^2 + y^2 + f_3(x, y) + f_4(x, y) + \ldots \qquad (5.9.12)$$

ko'rinishda bo'lsin, bu yerda $f_k(x, y)$ – biron-bir k-tartibli forma $(k = 1, 2, \ldots)$.

f_3, f_4, ... formalarni shunday tanlab olamizki, V ning (5.9.11) tenglamalarga ko'ra vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi

$$\frac{dV}{dt} = \left(2x + \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_4}{\partial x} + \cdots\right)\left(-\lambda y + X_2 + X_3 + \cdots\right) + \left(2y + \frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial y} + \cdots\right)\left(\lambda x + Y_2 + Y_3 + \cdots\right) \qquad (5.9.13)$$

aniq ishorali funksiya bo'lsin.

(5.9.13) tenglamaning o'ng tarafidagi ifoda 3-tartibli hadlardan boshlanadi. Bu hadlar quyidagilardan iborat:

$$V_3 = \lambda\left(x\frac{\partial f_3}{\partial y} - y\frac{\partial f_3}{\partial x}\right) + 2xX_2 + 2yY_2,$$

$$V_4 = \lambda\left(x\frac{\partial f_4}{\partial y} - y\frac{\partial f_4}{\partial x}\right) + X_2\frac{\partial f_3}{\partial x} + Y_2\frac{\partial f_3}{\partial y} + 2xX_3 + 2yY_3, \qquad (5.9.14)$$

.....

$$V_m = \lambda\left(x\frac{\partial f_m}{\partial y} - y\frac{\partial f_m}{\partial x}\right) + F_m(x, y),$$

bu yerda $F_m(x, y)$ ifoda f_3, f_4,... formalarga bog'liq bo'lgan m-tartibli forma. Demak, agarda f_3, f_4,... formalarni qaysidir shartlardan aniqlay olsak, u holda F_m forma ham aniq bo'ladi.

Ma'lumki, $\frac{dV}{dt}$ funksiya aniq ishorali bo'lishi uchun uning yoyilmasi juft tartibli haddan boshlanishi zarur. Shuning uchun ham f_3 formani shunday tanlab olish kerakki, (5.9.14)da uchinchi tartibli hadlar nolga aylansin, ya'ni

$$\lambda\left(x\frac{\partial f_3}{\partial y} - y\frac{\partial f_3}{\partial x}\right) = -2xX_2 - 2yY_2$$

munosabat bajarilsin. Shunday f_3 formani tanlab olgandan keyin, f_4 formani endi shunday tanlaymizki, $\frac{dV}{dt}$ ifodasidagi V_4 to'rtinchi tartibli

hadlar majmuasi aniq ishorali forma bo'lsin, ya'ni bu hadlar majmuasini aniq ishorali $G_4(x^2+y^2)^2$ formaga tenglashtiramiz:

$$\lambda\left(x\frac{\partial f_4}{\partial y} - y\frac{\partial f_4}{\partial x}\right) = -F_4(x,y) + G_4(x^2+y^2)^2,$$

bu yerda $F_4(x,y) = 2xX_3 + 2yY_3$.

Biz hozir (5.9.8) turdagi tenglamani qanoatlantiruvchi juft tartibli forma haqida gap yurityapmiz. Bu forma mavjud bo'lishi uchun G_4 aniqlangan son bo'lishi kerak. Bu sonni (5.9.10) ga asosan quyidagicha topamiz:

$$G_4 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_4(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,d\vartheta.$$

Shunday qilib topilgan G_4 miqdor nolga teng bo'lmasin. U holda

$$v = x^2 + y^2 + f_3 + f_4$$

funksiyaning to'liq hosilasi

$$\frac{dV}{dt} = G_4(x^2+y^2)^2 +$$

yuqori tartibli hadlar aniq ishorali funksiya bo'ladi. Bu funksiya bilan G_4 ning ishorasi bir xil, V funksiyaning o'zi esa aniq musbat ishorali bo'ladi. Shuning uchun ham, B va D teoremalarga asosan, toyilmagan harakat $G_4 > 0$ bo'lganda noturg'un va $G_4 < 0$ bo'lganda asimptotik turg'un bo'ladi.

Ammo G_4 miqdor nolga teng bo'lishi ham mumkin. Bu holda (5.9.13) ifodaning yoyilmasi 5- tartibli haddan boshlanadi. $\frac{dV}{dt}$ funksiya aniq ishorali bo'lishi uchun bu hadlarni nolga aylantirish kerak. Buning uchun f_5 formani shunday tanlab olish kerakki, $V_5 = 0$ bo'lsin. Bu oxirgi tenglama (5.9.2) ko'rinishda bo'ladi va undan f_5 ni shu usul bilan topganimizdan keyin, f_6 ni shunday tanlaymizki, $\frac{dV}{dt}$ ning ifodasidagi oltinchi tartibli hadlar aniq ishorali $G_6(x^2+y^2)^3$ formaga teng bo'lsin.

Shunday qilib, f_6 ni topish uchun quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\lambda\left(x\frac{\partial f_6}{\partial y}-y\frac{\partial f_6}{\partial x}\right)=-F_6(x,y)+G_6\left(x^2+y^2\right)^3,$$

bu yerda

$$G_6=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_6(\cos\vartheta,\sin\vartheta)\,d\vartheta.$$

Agar $G_6\neq 0$ bo'lsa, u holda

$$V=x^2+y^2+f_3+f_4+f_5+f_6$$

funksiyaning to'liq hosilasi $\frac{dV}{dt}=G_4(x^2+y^2)^2+$ yuqori tartibli hadlar aniq ishorali forma, V funksiyaning o'zi esa, avvalgidek, aniq musbat ishorali bo'ladi. Bu yerda ham toyilmagan harakat $G_6>0$ bo'lganda noturg'un, $G_6<0$ da esa asimptotik turg'un bo'ladi.

Agar $G_6=0$ bo'lsa, f_k formalarni topishni yana davom ettirish kerak. Xuddi oldin bayon etilgan tarzda ish tutib, ya'ni (5.9.13) dagi toq tartibli hadlarni nolga tenglashtirib, juft tartibli hadlarni $G_m(x^2+y^2)^m$ formaga tenglashtirib va G_m ni

$$G_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_m\left(\cos\vartheta,\sin\vartheta\right)d\vartheta \qquad (5.9.15)$$

formula orqali aniqlab, biz mumkin bo'lgan ikki holning bittasiga duch kelamiz: 1) yoki m indeksning qanchalik katta bo'lishidan qat'iy nazar barcha G_m lar nolga teng bo'ladi, 2) yoki biz oxiri shunday m ga kelamizki, $G_m\neq 0$ bo'ladi.

Agar ikkinchi holga duch kelsak, u holda turg'unlik masalasi G_m ning ishorasi bilan hal bo'ladi: toyilmagan harakat $G_m>0$ bo'lganda noturg'un va $G_m<0$ bo'lganda asimptotik turg'un bo'ladi.

Endi barcha G_m koeffitsiyentlar nolga teng bo'lsin deb faraz qilaylik. Albatta, barcha koeffitsiyentlarni hisoblab chiqish yo'li bilan bunga ishonish ancha murakkab masala, biroq qandaydir usul bilan buni tasdiqlasak, u holda turg'unlik masalasi osongina yechiladi. Haqiqatan

ham, bu holda koordinata boshi markaz bo'ladi. Demak, toyilmagan harakat turg'un, ammo asimptotik turg'un emas. (5.9.11) tenglamalar umumiy yechimining davri boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lgan davriy funksiya bo'ladi.

Bayon etilgan turg'unlikni tadqiq etish usulini amalda qo'llash uchun G_m koeffitsiyentlarni yoki (5.9.15) formulalar orqali aniqlash kerak, yoki bevosita bu formulani keltirib chiqaradigan usuldan foydalanish mumkin. Buning uchun $\frac{dV}{dt}$ ning ifodasidagi m - tartibli hadlarni aniqlab, ularni $G_m(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}$ ga tenglashtirib va hosil bo'lgan tenglamalarga $x=\cos\vartheta$, $y=\sin\vartheta$ larni qo'yib, 0 dan 2π gacha oraliqda integrallash kerak. Bu yerda f_m forma chiqarib tashlanadi, shuning uchun biz uni $\frac{dV}{dt}$ ifodasidagi m-tartibli hadni aniqlashda hisobga olmasligimiz mumkin.

1-misol. Oldingi paragrafda tadqiq etilgan

$$\frac{dx}{dt}=-y,\quad \frac{dy}{dt}=x-\beta x^2-\gamma xy^2+\alpha y^3$$

sistemani ko'raylik. V funksiyani

$$V=x^2+y^2+f_3+f_4+\ldots$$

kabi olib, f_3 formani shunday tanlaymizki, $\frac{dV}{dt}$ ning ifodasidagi uchinchi tartibli hadlar nolga teng bo'lsin. Demak,

$$x\frac{\partial f_3}{\partial y}-y\frac{\partial f_3}{\partial x}-2\beta xy^2=0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu ifodaga

$$f_3=a_1x^3+a_2x^2y+a_3xy^2+a_4y^3$$

ni qo'yib, so'ngra o'xshash hadlar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, quyidagi tenglamalarga kelamiz:

$$a_2=0,\ 2a_3-3a_1-2\beta=0,\ 3a_4-2a_2=0,\ a_3=0.$$

Bu yerdan

$$f_3=-\frac{2}{3}\beta x^3$$

ga ega bo‘lamiz. f_4 formani aniqlash uchun to‘rtinchi tartibli hadlarni $G_4(x^2+y^2)^2$ ga tenglashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$x\frac{\partial f_4}{\partial y}-y\frac{\partial f_4}{\partial x}-2\gamma xy^3+2ay^4=G_4(x^2+y^2)^2. \qquad (5.9.16)$$

G_4 o‘zgarmas sonni aniqlaymiz. Agar u nolga teng bo‘lmasa, f_4 ni aniqlash kerak bo‘lmay qoladi va barcha hisoblashlar shu bilan tamom tugaydi. Agar G_4 nolga teng bo‘lsa, u holda f_4 ni ham, f_5 ni ham va, shunday bo‘lishi ham mumkinki, navbatdagi yuqori tartibli formalarni ham aniqlashga to‘g‘ri keladi. G_4 ni aniqlash uchun (5.9.16) ga $x=\cos\vartheta$, $y=\sin\vartheta$ larni qo‘yib, ϑ bo‘yicha 0 dan 2π oralig‘igacha integrallaymiz. Bu amalni bajarishda $x\frac{\partial f_4}{\partial y}-y\frac{\partial f_4}{\partial x}$ hadlarni hisobga olmaslik mumkin, chunki ular bu amalni bajarish jarayonida tushib qoladi. Shunday qilib, quyidagini hosil qilamiz:

$$G_4=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\vartheta\,d\vartheta-\frac{\gamma}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\alpha\,d\vartheta.$$

Agar $\alpha<0$ bo‘lsa, u holda toyilmagan harakat asimptotik turg‘un, agar $\alpha>0$ bo‘lsa, u noturg‘un bo‘ladi.

Agar $\alpha=0$ bo‘lsa, u holda oldingi paragrafda ko‘rsatganimizdek, koordinata boshi markaz bo‘lib, toyilmagan harakat turg‘un bo‘ladi.

10- §. Ikkinchi tartibli sistema. Masalani yechishning uchinchi usuli

Ushbu

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda y+X(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=\lambda x+Y(x,y) \qquad (5.10.1)$$

tenglamalar bilan ifodalangan sistemaning turg‘unlik masalasini yechishning Lyapunov tomonidan ko‘rsatilgan uchinchi usulini ko‘rib o‘tamiz.

8- § da ko‘rsatgan edikki, (5.10.1) sistema uchun koordinata boshi yoki markaz, yoki fokus bo‘lib, ularning qaysi biri mavjud bo‘lishini aniqlash turg‘unlik masalasining asosiy vazifasi bo‘ladi. Agar koordinata boshi markaz bo‘lsa, u holda toyilmagan harakat turg‘un bo‘ladi; agar fokus bo‘lsa, u holda toyilmagan harakatning turg‘un yoki noturg‘un bo‘lishi 8- § da kiritilgan g o‘zgarmas sonning ishorasi bilan aniqlanadi.

O‘sha erda ko‘rsatgan edikki, koordinata boshi markaz bo‘lgan holda va faqat shu holda (5.10.1) tenglamalarning umumiy yechimi davriy bo‘ladi. Shunday qilib, turg‘unlik masalasini hal qilish uchun (5.10.1) tenglamalarning umumiy yechimi davriy bo‘ladimi yoki yo‘qmi ekanligini aniqlashga harakat qilishimiz kerak. Bu yechim davriy bo‘lsa, toyilmagan harakat turg‘un va agar davriy bo‘lmasa, u holda g o‘zgarmas sonning ishorasini aniqlash masalasini hal qilishimiz kerak bo‘ladi. Buning uchun (5.10.1) sistemaning

$$x(0) = c, \qquad y(0) = 0 \tag{5.10.2}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi $x(t)$, $y(t)$ yechimini ko‘ramiz, bu yerda c – yetarlicha kichik ixtiyoriy o‘zgarmas son.

Agar koordinata boshi markaz bo‘lsa, u holda bu yechim davriy bo‘lib, uning davri

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}\left(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots\right) \tag{5.10.3}$$

formula ((5.8.20) formulaga qarang) bilan aniqlanadi. Bu yerda $h_1, h_2, \ldots$ lar biror o‘zgarmas sonlar va c ning yetarlicha kichik qiymatlarida (5.10.3) qator yaqinlashuvchidir.

Haqiqatan ham, koordinata boshi markaz bo‘lsin deb faraz qilaylik. Bu holda (5.10.1) tenglamalarda t o‘zgaruvchini τ o‘zgaruvchi bilan quyidagicha

$$t = \frac{\tau}{\lambda}(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots) \tag{5.10.4}$$

almashtiramiz. Shu yo‘sinda hosil qilingan

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \left(-y + \frac{1}{\lambda}X\right)\left(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots\right) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \left(-x + \frac{1}{\lambda}Y\right)\left(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.10.5}$$

tenglamalarning (5.10.2) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi davriy va uning davri 2π ga teng bo‘ladi.

(5.10.5) tenglamalarning o‘ng tarafidagi ifodalar c ga nisbatan analitik funksiyalardir. Shuning uchun ham bu tenglamalarning har qanday yechimi c ga nisbatan analitik bo‘ladi. Bundan tashqari, har bir bunday yechim o‘zining x_0, y_0 boshlang‘ich qiymatlariga (bizda $x_0 = c$, $y_0 = 0$) nisbatan ham analitik bo‘ladi. Bu mulohazani ko‘rilayotgan davriy yechimga qo‘llab, u c ga nisbatan analitik degan xulosaga kelamiz.

Demak, bu yechim quyidagi ko'rinishga ega:

$$\left.\begin{aligned} x &= cx_1(\tau) + c^2 x_2(\tau) + \ldots, \\ y &= cy_1(\tau) + c^2 x_2(\tau) + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (5.10.6)$$

bu yerda o'ng tarafdagi qatorlar yetarlicha kichik c uchun yaqinlashuvchi. Bu yechim davri 2π ga teng bo'lgan davriy funksiya bo'lganligi uchun barcha $x_m(\tau), y_m(\tau)$ lar ham davri 2π ga teng bo'lgan davriy funksiyalar bo'ladi. Bundan tashqari, (5.10.2) boshlang'ich shartlardan

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = x_3(0) = \ldots = y_1(0) = y_2(0) = \ldots = 0 \qquad (5.10.7)$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, agar korrdinata boshi markaz bo'lsa, u holda (5.10.5) tenglamalar (bu erda h_i – biror aniqlangan o'zgarmas sonlar) (5.10.6) ko'rinishli $x_m(\tau), y_m(\tau)$ davriy funksiyalarga bog'liq bo'lgan yechimga ega bo'ladi. Agar, h_i o'zgarmas sonlarni qanday qilib olishimizdan qat'iy nazar, (5.10.5) sistema $x_m(\tau), y_m(\tau)$ davriy funksiyalarga bog'liq bo'lgan (5.10.6) davriy yechimga ega bo'lmasa, u holda bu koordinata boshi fokus ekanligini bildiradi.

(5.10.6) ni (5.10.5) ga qo'yib va c ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, x_m va y_m funksiyalar qanoatlantirishi kerak bo'lgan tenglamalarni hosil qilamiz. Shu yo'l bilan birinchi navbatda

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -y_1, \quad \frac{dy_1}{d\tau} = x_1$$

sistema hosil qilinadi, bu yerdan (5.10.7) boshlang'ich shartlarni hisobga olganda,

$$x_1 = \cos\tau, \quad y_1 = \sin\tau$$

yechimga ega bo'lamiz. So'ngra

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_2}{d\tau} &= -y_2 - h_1 \sin\tau + \frac{1}{\lambda} X_2(\cos\vartheta, \sin\vartheta), \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= -x_2 - h_1 \cos\tau + \frac{1}{\lambda} Y_2(\cos\vartheta, \sin\vartheta), \end{aligned}\right\} \qquad (5.10.8)$$

sistemani hosil qilamiz, bu yerda $X_2(x,y), Y_2(x,y)$ ifodalar X va Y funksiyalar ifodasidagi darajali hadlar majmuasi.

Shunga o'xshash tenglamalarni X_k va Y_k $(k>2)$ funksiyalar uchun ham topamiz. Bu tenglamalarning o'ng tarafidagi funksiyalar ifodasida $h_1, h_2, ..., h_{k-1}$ o'zgarmas sonlar qatnashadi. Biz faqat h_{k-1} o'zgarmas son qatnashuvchi tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$\frac{dx_k}{d\tau} = -y_k - h_{k-1}\sin\tau + P_k, \qquad \frac{dy_k}{d\tau} = x_k + h_{k-1}\cos\tau + Q_k, \qquad (5.10.9)$$

bu yerda P_k va Q_k lar x_2, y_2, x_3, y_3,... larga nisbatan ko'phadlar. Bu ko'phadlarning koeffitsiyentlari faqat $h_1, h_2, ..., h_{k-2}$ o'zgarmas sonlarga bog'liq.

(5.10.8) tenglamalar quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\frac{du}{d\tau} = -v + f(\tau), \quad \frac{dv}{d\tau} = u + F(\tau), \qquad (5.10.10)$$

bu yerda $f(\tau)$ va $F(\tau)$ lar τ ning 2π davrga ega bo'lgan davriy funksiyalari. Bu tenglamalarning davriy yechimlarini topish masalasi yuzaga keladi. Bu birinchi darajali erkinlikka ega bo'lgan chiziqli sistemaning majburiy tebranishlarini aniqlash masalasidir. Biz ko'rayotgan holda rezonans hodisasi mavjud, chunki erkin tebranishlar davri toydiruvchi kuchning davri bilan bir xil. Shuning uchun ham (5.10.10) tenglamalar umumiy holda davriy yechimga ega emas. Ular davriy yechimga ega bo'lishlari uchun f va F funksiyalar ayrim shartlarni qanoatlantirishlari kerak.

f va F funksiyalarning Furye qatoriga yoyilmasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$f = a_0 + a_1\cos\tau + b_1\sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n\cos n\tau + b_n\sin n\tau),$$

$$F = A_0 + A_1\cos\tau + B_1\sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty}(A_n\cos n\tau + B_n\sin n\tau),$$

bu yerda

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos\tau\,d\tau, \quad b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\sin\tau\,d\tau, \\ A_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\cos\tau\,d\tau, \quad B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\tau)\sin\tau\,d\tau \end{aligned}\right| \qquad (5.10.11)$$

Izlanayotgan davriy yechimning Furye qatoriga yoyilmasi quyidagicha bo'lsin:

$$u = c_0 + c_1 \cos\tau + d_1 \sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n \cos n\tau + d_n \sin n\tau),$$

$$v = C_0 + C_1 \cos\tau + D_1 \sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty} (C_n \cos n\tau + D_n \sin n\tau).$$

u va v larning qiymatlarini (5.10.10) ga qo'yganimizda, $C_0 = a_0$, $c_0 = -A_0$ larni va koeffitsiyentlarni aniqlashga imkon beradigan quyidagi tenglamalarni topamiz:

$$nd_n = -C_n + a_n, \quad nc_n = D_n - b_n, \quad nD_n = c_n + A_n, \quad -nC_n = d_n + B_n.$$

Bu tenglamalardan barcha $n > 1$ lar uchun c_n, d_n, C_n, D_n larni topish mumkin. Agar $n = 1$ bo'lganda

$$A_1 - b_1 = 0, \qquad B_1 + a_1 = 0$$

munosabatlar bajarilmasa, u holda bu tenglamalar yechilmovchidir.

Bu munosabatlar bajarilsa, u vaqtda quyidagilarni topamiz:

$$D_1 = \alpha, \quad d_1 = \beta, \quad C_1 = \alpha_1 - \beta, \quad c_1 = \alpha - b_1,$$

bu yerda α va β – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Shunday qilib, (5.10.11) ni inobatga olgan holda, quyidagi xulosaga kelamiz:

1. (5.10.10) sistemaning davriy yechimi bo'lishi uchun

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [f(\tau)\cos\tau + F(\tau)\sin\tau]\,d\tau = 0, \\ \int_0^{2\pi} [F(\tau)\cos\tau - f(\tau)\sin\tau]\,d\tau = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.10.12)$$

munosabatlarning bajarilishi yetarli va zarur.

2. Agar bu munosabatlar bajarilsa, u holda aytilgan davriy yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} u = \alpha\cos\tau + \beta\sin\tau + \bar{u}(\tau), \\ v = \alpha\sin\tau + \beta\cos\tau + \bar{v}(\tau), \end{aligned}\right\} \qquad (5.10.13)$$

bu erda α va β – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar, $\bar{u}(\tau)$, $\bar{v}(\tau)$ lar 2π davrli davriy funksiyalar. Tarkibida ikkita ixtiyoriy o'zgarmas son qatnashuvchi bu yechim (5.10.10) sistemaning umumiy yechimi bo'ladi.

3. Agar (5.10.12) munosabatlar bajarilmasa, u holda (5.10.10) tenglamalar davriy yechimga ega emas. $a_1\cos\tau + b_1\sin\tau$ va $A_1\cos\tau + B_1\sin\tau$ hadlarga

$$u_1 = \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{b_1 - A_1}{2}\tau\sin\tau - \frac{A_1 + b_1}{2}\cos\tau,$$

$$v_1 = \frac{A_1 - b_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\sin\tau + \frac{a_1 + B_1}{2}\cos\tau$$

xususiy yechimlar mos keladi va (5.10.10) ning umumiy yechimi

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha\cos\tau + \beta\sin\tau + \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{b_1 - A_1}{2}\tau\sin\tau + \bar{u}(\tau), \\ v &= \alpha\sin\tau - \beta\cos\tau + \frac{A_1 - b_1}{2}\tau\cos\tau + \frac{a_1 + B_1}{2}\tau\sin\tau + \bar{v}(\tau) \end{aligned}\right\} \quad 5.10.14)$$

ko‘rinishda ega, bu yerda $\bar{u}(\tau)$ va $\bar{v}(\tau)$ lar – davriy funksiyalar, α va β lar esa ixtiyoriy o‘zgarmas sonlardir.

Shundan so‘ng, barcha $x_2, y_2, \ldots, x_{k-1}, y_{k-1}$ funksiyalar davriy va barcha $h_1, h_2, \ldots h_{k-2}$ o‘zgarmas sonlar ham aniqlangan deb faraz qilamiz. U vaqtda (5.10.9) tenglamalarning x_k va y_k larni aniqlovchi o‘ng tarafidagi hadlar τ ning aniqlangan davriy funksiyalari bo‘ladi. Demak, bu tenglamalar (5.10.10) ko‘rinishga ega. Shuning uchun ham x_k va y_k lar davriy funksiyalar bo‘lishi uchun quyidagi

$$\left.\begin{aligned} 2\pi h_{k-1} + \int_0^{2\pi}(Q_k\cos\tau - P_k\sin\tau)\,d\tau = 0, \\ \int_0^{2\pi}(P_k\cos\tau + Q_k\sin\tau)\,d\tau = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5.10.15)$$

munosabatlarning, (5.10.12) ga asosan, bajarilishi yetarli va zarur.

Bu munosabatlarning birinchisi h_{k-1} o‘zgarmas sonni aniqlaydi. Ikkinchi munosabat bajarilishi ham, bajarilmasligi ham mumkin. Agar u bajarilmasa, (5.10.5) tenglamalar, h_i o‘zgarmas sonlarni qanday qilib olishimizdan qat’iy nazar, davriy yechimga ega bo‘lmaydi. Demak, bu holda koordinata boshi fokus bo‘ladi.

Shunday qilib, koordinata boshi markaz bo‘lishi uchun (5.10.15) shartning ikkinchisi har qanday k uchun bajarilishi zarurdir.

Agar biz qandaydir usul bilan ikkinchi shartning bajarilishini aniqlasak, u vaqtda barcha x_k, y_k funksiyalar davriy bo‘ladi. Shu bilan birga funksiyalarning barchasi (5.10.13) ko‘rinishga ega va har birining ifodasiga kiruvchi ikkita ixtiyoriy o‘zgarmas son bir qiymatli ravishda

boshlang'ich $x_k(0)=y_k(0)=0$ shartlardan aniqlanadi. Bu holda (5.10.6) qatorlar, ilgari aniqlaganimizdek, yaqinlashuvchi bo'ladi va (5.10.1) sistemaning davriy yechimini ifodalaydi. Shu asosda koordinata boshi markaz va toyilmagan harakat turg'un degan xulosaga kelamiz.

Ammo, $x_k(\tau)$ va $y_k(\tau)$ funksiyalarni aniqlash jarayonida biror k indeks uchun (5.10.15) munosabatlarning ikkinchisi bajarilmaydigan holga kelib qolish mumkin. Bu holda, oldin aytganimizdek, koordinata boshi fokus bo'ladi. Shuning uchun ham turg'unlik masalasini hal qilish uchun 8- § da kiritilgan g o'zgarmas sonning ishorasini aniqlash zaruriyati tug'iladi. Bu o'zgarmas son ushbu

$$g=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(P_k\cos\tau+Q_k\sin\tau\right)d\tau=\frac{a_1+B_1}{2}, \qquad (5.10.16)$$

formula orqali aniqlanadi, bu yerda a_1 son P_k ifodasida $\cos\tau$ oldidagi koeffitsiyent, B_1 son Q_k ifodasida $\sin\tau$ oldidagi koeffitsiyent.

(5.10.16) formulaning to'g'riligini isbot qilaylik. Buning uchun x ning $t=T$ yoki shunga teng bo'lgan $\tau=2\pi$ paytdagi qiymatini ko'ramiz. Biz T ning qiymatini aniqlovchi (5.10.3) qator $(k-1)$ - darajali hadda uziladi deb faraz qilamiz. (5.10.14) ga asosan x_k va y_k lar uchun tenglamalarning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$x_k=\alpha\cos\tau+\beta\sin\tau+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left(P_k\cos\tau+Q_k\sin\tau\right)d\tau\right\}\tau\cos\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left\{2\pi h_{k-1}+\int_0^{2\pi}\left(Q_k\cos\tau-P_k\sin\tau\right)d\tau\right\}\tau\sin\tau+\overline{x_k}(\tau),$$

$$y_k=\alpha\sin\tau+\beta\sin\tau+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left(P_k\cos\tau+Q_k\sin\tau\right)d\tau\right\}\tau\cos\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left(P_k\cos\tau+Q_k\sin\tau\right)d\tau\right\}\tau\sin\tau+\overline{y_k}(\tau),$$

bu yerda $\overline{x}_k$, $\overline{y}_k$ – davriy funksiyalar. Yana davom etib, α va β lar uchun (5.10.7) boshlang'ich shartlardan quyidagini hosil qilamiz:

$$\alpha+\overline{x}_k(0)=0, \qquad -\beta+\overline{y}_k(0)=0$$

va, demak,

$$\alpha+\overline{x}_k(2\pi)=0, \qquad -\beta+\overline{y}_k(2\pi)=0. \qquad (5.10.17)$$

Barcha $x_1, y_2, \ldots, x_{k-1}, y_{k-1}$ funksiyalar davriy ekanligini, (5.10.7) boshlang'ich shartlarni va ularga mos bo'lgan (5.10.17) ni e'tiborga olib, (5.10.6) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$(x)_{t=T} = c + c^k \int_0^{2\pi} (P_k \cos\tau + Q_k \sin\tau)\, d\tau + c^{k+1}(\cdots) + \cdots . \qquad (5.10.18)$$

Shu miqdorning o'zini 8- § da olingan natijalarga asosan ham topa olamiz. O'sha natijalarga ko'ra $\vartheta = 2\pi$ bo'lganda (5.8.7), (5.8.10) va (5.8.14) lar asosida r uchun va, demak, $x = r\cos\vartheta$ uchun ham quyidagini topamiz:

$$(x)_{\vartheta=2\pi} = c + 2\pi\, g\, c^m + c^{m+1}(\cdots) + \cdots \qquad (5.10.19)$$

(5.10.18) va (5.10.19) formulalarning ikkalasida ham c o'zgarmas son r va x ning $t = \vartheta = 0$ paytdagi qiymatini ifodalaydi. Bu formulalarni solishtirish ko'rsatadiki, $m = k$, chunki $t = T$ da ϑ qutb burchagi 2π dan k dan kam bo'lgan tartibli miqdorga (c ga nisbatan) farq qiladi va g haqiqatan ham (5.10.16) formula orqali aniqlanadi.

Odatdagidek, turg'unlik masalasi g ning ishorasi bilan yechiladi. $g > 0$ bo'lganda, toyilmagan harakat noturg'un va $g < 0$ bo'lganda, asimptotik turg'un bo'ladi.

Shunday qilib, turg'unlik masalasini yechish uchun biz quyidagi ***algoritm****dan foydalanishimiz lozim:*

1. (5.10.4) almashtirishlar orqali (5.10.1) tenglamalar sistemasini (5.10.5) ko'rinishiga keltiramiz va uning yechimini

$$\left.\begin{aligned} x &= c\cos\tau + c^2 x_2(\tau) + c^3 x_3(\tau) + \ldots \\ y &= c\sin\tau + c^2 y_2(\tau) + c^3 y_3(\tau) + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (5.10.20)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu erda c – ixtiyoriy o'zgarmas son, $x_i(\tau)$, $y_i(\tau)$ lar esa τ ning (5.10.7) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi 2π davrli davriy funksiyalari.

2. x_k va y_k funksiyalarni topish uchun (5.10.9) tenglamalarni hosil qilamiz. Agar (5.10.15) munosabatlar bajarilsa, u holda (5.10.9) tenglamalarning yechimi davriy bo'ladi. Bu munosabatlarning birinchisi h_{k-1} o'zgarmas sonni bir qiymatli ravishda topishga imkon yaratadi, ikkinchi munosabat esa, bajarilishi ham mumkin, bajarilmasligi ham mumkin. Birinchi holda (5.10.9) tenglamalarning boshlang'ich shartlar bilan aniqlanadigan davriy yechimi mavjud. Agar bu davriy yechim k indeksning istalgancha katta barcha qiymatlari uchun mavjud bo'lsa, u holda toyilmagan harakat turg'un, (5.10.20) va (5.10.3) qatorlar yaqin-

lashuvchi bo'ladi hamda ular mos ravishda davriy yechimni va (5.10.1) tenglamalarning davrini ifoda etadi.

3. Agar x_k, y_k larni hisoblash jarayonida biz shunday k indeksga duch kelsakki, uning uchun (5.10.15) munosabatlarning ikkinchisi bajarilmasa, u holda toyilmagan harakat $g>0$ bo'lganda noturg'un, $g<0$ bo'lganda esa asimptotik turg'un bo'ladi. O'zgarmas son g (5.10.16) formula orqali aniqlanadi.

Keltirilgan algoritm (5.10.1) tenglamalar sistemasining davriy yechimini (agar u mavjud bo'lsa) va uning davrini topishning eng qulay usulini beradi.

Yechimlarning o'zlari esa amalda qo'llanish uchun eng qulay shaklda (formada) ifodalanadi. Bu yechimlar chiziqlimas tebranishlar nazariyasida muhim ahamiyatga ega.

Oxirida shuni ta'kidlaymizki, o'zgarmas son h_1 doimo nolga teng bo'ladi. Bu bevosita (5.10.15) va (5.10.8) lardan kelib chiqadi. Isbot qilish mumkinki, umuman, birinchi nolga teng bo'lmagan h_j o'zgarmas sonlarning indeksi juft bo'ladi.

1- misol. Oldingi paragrafda tadqiq etilgan

$$\frac{dx}{dt}=-y,\qquad \frac{dy}{dt}=x-\beta x^2-\gamma xy^2+ay^3$$

sistemani yana qaraymiz. Bu yerda

$$t=\tau\ (1+h_2c^2+\ldots)$$

almashtirishni bajarib, quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{dx}{d\tau}=-y\left(1+h_2c^2+\ldots\right),$$

$$\frac{dy}{d\tau}=\left(x-\beta x^2-\gamma xy^2+ay^3\right)\left(1+h_2c^2+\ldots\right).$$

Sistemaning yechimini (5.10.20) ko'rinishda izlaymiz. Uni sistemaga qo'yib hamda chap va o'ng tarafdagi bir xil darajali c lar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, x_k va y_k larni aniqlovchi quyidagi tenglamalarga kelamiz:

$$\frac{dx_2}{d\tau}=-y_2,\qquad \frac{dy_2}{d\tau}=x_2-\beta\cos^2\tau=x_2-\frac{\beta}{2}\left(1+\cos 2\tau\right),$$

$$\frac{dx_3}{d\tau}=-y_3-h_2\sin\tau,\qquad \frac{dy_3}{d\tau}=x_3+h_2\cos\tau-\gamma\sin^2\tau\cos\tau+a\sin^3\tau.$$

x_2 va y_2 larni aniqlovchi tenglamalar rezonans beruvchi garmonikalarga ega emas va shuning uchun ham x_2 va y_2 davriy funksiyalar bo'ladi. x_3 va y_3 funksiyalar esa davriy bo'lmaydi, chunki (5.10.16) ga asosan o'zgarmas son g quyidagi

$$g = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\tau\,d\tau - \frac{\gamma}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\tau\cos\tau\,d\tau = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^4\tau\,d\tau$$

ko'rinishga ega va u nolga teng emas. Turg'unlik masalasini α ning ishorasi hal qiladi: $\alpha > 0$ bo'lganda toyilmagan harakat noturg'un, $\alpha < 0$ da esa, asimptotik turg'un bo'ladi.

11- §. $(n+2)$- tartibli sistemani xususiy holda tadqiq etish

Kelgusida bizga 4- bob, 2- § da bayon etilgan 2- teoremaning bevosita umumlashmasi bo'lgan bitta yordamchi mulohaza kerak bo'ladi. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarning m-tartibli k ta $u_1, u_2, \ldots, u_m$ formalari berilgan bo'lsin. Qanday shartlar bajarilganda,

$$\sum_{s=1}^{n}\left(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_s} = q_{i1}v_1 + \ldots + q_{ik}v_k + u_i \quad (i = \overline{1,k}) \tag{5.11.1}$$

munosabatni qanoatlantiruvchi yana boshqa k ta m-tartibli $v_1, v_2, \ldots, v_k$ formalar mavjud bo'ladi degan masalani yechishga to'g'ri keladi, bu yerda q_{ij} – biror o'zgarmas sonlar.

Shu maqsadda $\rho_1, \ldots, \rho_n$ lar orqali

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\rho & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\rho & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{5.11.2}$$

tenglamaning ildizlarini va $\mu_1, \ldots, \mu_n$ lar orqali,

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\mu & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22}-\mu & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn}-\mu \end{vmatrix} = 0 \tag{5.11.3}$$

tenglamaning ildizlarini belgilab olamiz.

Yuqorida aytilgan shartlarni aniqlab beruvchi quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. *Agar (5.11.2) va (5.11.3) tenglamalar ildizlari orasida*

$$m_1\rho_1 + m_2\rho_2 + \ldots + m_n\rho_n = \mu_i \qquad (5.11.4)$$

ko'rinishdagi hech qanday munosabat mavjud bo'lmasa, u holda (5.11.1) tenglamalarni qanoatlantiruvchi bitta va faqat bitta m-tartibli $v_1,\ldots,v_k$ formalar sistemasi mavjud bo'ladi, bu yerda $m_1,m_2,\ldots,m_n$ lar

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m \qquad (5.11.5)$$

munosabat bilan bog'langan manfiymas butun sonlar.

Isbot. Matematik induktsiya usulidan foydalanamiz. Shuning uchun dastlab $k=1$ holni ko'rib o'tamiz. Demak, bitta

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial v}{\partial x_s} = \mu v + u \qquad (5.11.6)$$

tenglama berilgan, bu yerda u forma m- tartibli forma. (5.11.3) ning faqat bitta μ ildizi bo'ladi.

$$\sum_{s=1}^{n} x_s\frac{\partial v}{\partial x_s} = mv$$

bo'lganligi uchun (5.11.6) tenglamani

$$\sum_{s=1}^{n}\left(p_{s1}x_1 + \ldots + \left(p_{ss} - \frac{\mu}{m}\right)x_s + \ldots + p_{sn}x_n\right)\frac{\partial v}{\partial x_s} = u$$

ko'rinishda yozish mumkin

Agar quyidagi

$$m_1\rho_1' + m_2\rho_2' + \cdots + m_n\rho_n' = 0 \qquad (5.11.7)$$

munosabat bajarilsa, u holda 4- bob, 2- § da bayon etilgan teoremaga asosan bu tenglama yagona yechimga ega. Bu yerda $m_1,m_2,\ldots,m_n$ – manfiymas butun sonlar, ρ_s' lar esa

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \frac{\mu}{m} - \rho' & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{11} - \frac{\mu}{m} - \rho' & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} - \frac{\mu}{m} - \rho' \end{vmatrix} = 0$$

tenglamaning ildizlari.

Ammo ravshanki,

$$\rho_2 = \rho_s - \frac{\mu}{m}, \tag{5.11.8}$$

demak, (5.11.7) munosabat

$$m_1\rho_1 + \cdots + m_n\rho_n = \frac{1}{m}(m_1 + \cdots + m_n)\mu = \mu \tag{5.11.9}$$

ko'rinishni oladi. Bu yerdan teoremaning $k=1$ hol uchun to'g'riligi kelib chiqadi.

Xuddi shu usulda teorema $(k-1)$ ta noma'lum funksiya uchun ham to'g'ri deb qabul qilib, uni k ta noma'lum funksiya uchun ham to'g'riligini isbotlash mumkin. Teorema isbotining bu qismi bilan qiziqqanlarga [53] kitobning 151–152 betlarini o'qishni tavsiya etamiz.

1-misol. Quyidagi sistema berilgan bo'lsin:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n)\frac{\partial v_j}{\partial x_s} = \lambda(k-j+1)v_{j-1} - j\lambda v_{j+1} + u_j \ (j=\overline{1,k};\ v_0 = v_{k+1} = 0). \tag{5.11.10}$$

Bu erda $u_1,...,u_k$ – oldindan berilgan ixtiyoriy m-tartibli formalar, λ – musbat son. (5.11.2) tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lsin deb faraz qilamiz.

Bu holda (5.11.10) sistema bitta va faqat bitta m-tartibli forma ko'rinishidagi $v_1,...,v_k$ echimga ega bo'ladi.

Haqiqatan ham, ko'rsatish mumkinki, ko'rilayotgan holda (5.11.3) tenglamaning ildizlari agar k juft son bo'lsa,

$$\pm\lambda i, \quad \pm 3\lambda i, \ldots, \pm(k-3)\lambda i, \quad \pm(k-1)\lambda i$$

va k toq son bo'lsa,

$$0, \quad \pm 2\lambda i, \ \pm 4\lambda i, \ \ldots, \pm(k-1)\lambda i$$

dan iborat bo'ladi. Ravshanki, bu holda bir vaqtda nolga teng bo'lmagan har qanday manfiymas butun $m_1, m_2, ..., m_n$ sonlar uchun (5.11.4) munosabat bajarilmaydi. Demak, har qanday m uchun teoremani ishlatish mumkin.

Endi $(n+2)$-tartibli sistemani $n>0$ hol uchun tadqiq yetamiz. *Toyilgan harakatning differensial tenglamalari* (7- § ga qarang)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}=-\lambda y+X(x,y,x_1,...,x_n),\\
&\frac{dx}{dt}=\lambda x+Y(x,y,x_1,...,x_n),\\
&\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\cdots+p_{sn}x_n+p_s x+q_s y+X_s(x,y,x_1,...,x_n)\quad (s=\overline{1,n})
\end{aligned}\right\} \qquad (5.11.11)$$

ko'rinishda va p_{sj} *koeffitsiyentlar shundayki,*

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\rho & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\rho & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.11.12)$$

xarakteristik tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'ladi.

Bu yerda (5.11.11) sistema uchun turg'unlik masalasini xususiy holda tadqiq etamiz. Keyin umumiy holni tadqiq etish ham shu xususiy holga keltirilishini ko'rsatamiz.

X, Y va X_s funksiyalarning $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan barcha hadlarini tashlab yuborib, bu funksiyalarning x va y larga bog'liq bo'lgan qolgan qismini mos ravishda $X^0(x,y)$, $Y^0(x,y)$ va $X_s^{(0)}(x,y)$ bilan belgilab olamiz, ya'ni

$$X^0(x,y)=X(x,y,0,...,0), \quad Y^0(x,y)=Y(x,y,0,...,0),$$
$$X_s^0(x,y)=X_s(x,y,0,...,0).$$

Quyidagi ikkinchi tartibli sistemani qaraymiz:

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda y+X^0(x,y), \quad \frac{dy}{dt}=\lambda x+Y^0(x,y). \qquad (5.11.13)$$

Bu sistema uchun turg'unlik masalasini yechganda, biz ikki holning bittasiga duch kelamiz: 1) umumiy hol, yaəni qachon masala X^0 va Y^0 lar yoyilmalaridagi chekli sondagi hadlar bilan hal etiladi (koordinata boshi fokus bo'lgan hol); 2) maxsus hol, qachon turg'unlik masalasi X^0 va Y^0 lar yoyilmalaridagi juda ham katta darajali hadlarni ko'rishni talab etadi (markaz holi).

Shu hollarning birinchisi yuz bergan deylik. (5.11.13) sistema turg'unligini yechish masalasi X^0 va Y^0 lar yoyilmalaridagi eng ko'pi bilan $2N-1$ darajali hadlarga bog'liq bo'lsin. Bu son (daraja) doimo toq

bo'lishini 9- § da ko'rsatgan edik. Qaralayotgan holda (5.11.11) tenglamalar uchun quyidagi ikki shart bajariladi deb faraz qilamiz:

1. Barcha p_s va q_s o'zgarmas sonlar nolga teng.

2. $X_s^{(0)}$ funksiyalarning yoyilmasi kamida 2N–1 darajali hadlar bilan boshlanadi.

Agar bu ikki shart bajarilsa, u holda $(n+2)$-tartibli (5.11.11) sistemaning turg'unlik masalasi ikkinchi darajali (5.11.13) sistemaning turg'unlik masalasiga ekvivalentdir, ya'ni, agar (5.11.13) sistema muvozanat holati (toyilmagan harakat) noturg'un bo'lsa, u holda (5.11.11) sistemaning ham muvozanat holati noturg'un bo'ladi va, aksincha, (5.11.13) sistemaning turg'unligi (5.11.11) sistemaning turg'unligini keltirib chiqaradi.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan ikki shart bajarilganda, turg'unlik masalasini hal qilish uchun nokritik ildizlarga mos keladigan hamma tenglamalarni ($x_1,...,x_n$ larga nisbatan tuzilgan tenglamalarni) tashlab yuborish va kritik ildizlarga mos kelgan tenglamalardagi (x va y larga nisbatan tuzilgan tenglamalardagi) nokritik o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan hadlarni ham tashlab yuborish kerak bo'ladi.

Keltirilgan mulohazalarni isbotlash uchun xuddi xarakteristik tenglamaning bitta ildizi nolga teng bo'lgan holdagidek ish tutamiz. Shu maqsadda (5.11.11) tenglamalar sistemasi uchun Lyapunov funksiyasini (5.11.13) sistema uchun alohida tuzilgan Lyapunov funksiyasi va (5.11.11) sistemaning nokritik tenglamalari (oxirgi n ta tenglama) uchun tuzilgan Lyapunov funksiyalarining yig'indisi sifatida topamiz. Bu funksiyaning (5.11.11) tenglamalarga ko'ra vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi aniq ishorali funksiya bo'lishi kerak.

9- § da ko'rsatdikki, (5.11.13) sistema uchun Lyapunov funksiyasi

$$U = x^2 + y^2 + f_3(x,y) + f_4(x,y) + \cdots + f_{2N-1}(x,y)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu erda f_i lar x va y larning i-tartibli formalari. Bu funksiyaning (5.11.13) tenglamalarga ko'ra vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi

$$\frac{\partial U}{\partial x}(-\lambda y + X^0) + \frac{\partial U}{\partial x}(\lambda x + Y^0) = G(x^2+y^2)^N + \sum_{\alpha+\beta=2N} \varphi_{\alpha\beta}(x,y)\, x^\alpha x^\beta$$

ko'rinishda bo'ladi , bu yerda $\varphi_{\alpha\beta}(x,y)$ funksiya $x=y=0$ nuqtada nolga aylanadi. (5.11.13) sistema uchun turg'unlik masalasi G ning ishorasi bilan yechiladi: toyilmagan harakat $G>0$ bo'lganda noturg'un va $G<0$ bo'lganda asimptotik turg'un bo'ladi.

Biz (5.11.11) tenglamalar uchun ham shu natija o'z kuchini saqlashini ko'rsatishimiz kerak.

(5.11.12) xarakteristik tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lganligi sababli oldindan berilgan $U = \sum_{s=1}^{n} x_s^2$ aniq musbat ishorali forma uchun

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n) = \sum_{s=1}^{n} x_s^2 \qquad (5.11.14)$$

munosabatni qanoatlantiruvchi aniq manfiy ishorali $W(x_1,...,x_n)$ kvadratik forma mavjud.

Quyidagi

$$V = G\left[x^2 + y^2 + f_3(x,y) + ... + f_{2N-1}(x,y)\right] + \\ + W(x_1,...,x_n) = \varphi(x,y) + W(x_1,...,x_n) \qquad (5.11.15)$$

funksiyani ko'ramiz. Bu funksiyaning (5.11.11) tenglamalar sistemasiga ko'ra vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[-\lambda y + X^0(x,y) + X'(x,y,x_1,...,x_n)\right] + \\ + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[\lambda x + Y^0(x,y) + Y'(x,y,x_1,...,x_n)\right] + \\ + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}\left[p_{s1}x_1 + ... + p_{sn}x_n + X_s^{(0)}(x,y) + X'(x,y,x_1,...,x_n)\right]$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda X', Y', X_s' lar X, Y, X_s lar yoyilmasidagi $x_1,...,x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan hadlar majmuasi hamda ular $x_1 = \cdots = x_n = 0$ da nolga aylanadi.

Agar X', Y' va X_s^0 funksiyalar aynan nolga aylanganida edi, V ning hosilasi

$$G^2(x^2 + y^2)^N + G\sum_{\alpha+\beta=2N} \varphi_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}x_i x_j \qquad (5.11.16)$$

ko'rinishga ega bo'lardi, bu yerda f_{ij} lar $x, y, x_1,..., x_n$ o'zgaruvchilarning analitik funksiyalari va $x = y = x_1 = \cdots = x_n = 0$ da nolga aylanadi. Bu hosila, ravshanki, $(n+2)$ ta $x, y, x_1,..., x_n$ o'zgaruvchilarning aniq musbat ishorali funksiyalari bo'lar edi. Ammo, yuqorida keltirilgan

(5.11.16) munosabat, umuman aytganda, bajarilmaydi va shuning uchun ham $\frac{dV}{dt}$ aniq musbat ishorali deya olmaymiz va u quyidagi ko'rinishga ega:

$$\frac{dV}{dt} = G^2(x^2+y^2)^N + \sum_{\alpha+\beta=2N} \varphi_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta + \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x_i + P(x, y, x_1, \ldots, x_n). \tag{5.11.17}$$

Bu yerda $\varphi_{\alpha\beta}$ funksiya endi $x_1,\ldots,x_n$ larga ham bog'liq bo'ladi va $\varphi_{\alpha\beta}(0, 0, 0,\ldots,0) = 0$, P esa shunday hadlarning majmuasiki, ularni na

$$G^2(x^2+y^2)^N + \sum_{\alpha+\beta=2N} \varphi_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \tag{5.11.18}$$

guruh hadlarga va na

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x_i x_j$$

guruh hadlarga qo'shib bo'lmaydi.

P funksiyani to'liqroq tadqiq etaylik. Bu funksiyaning yoyilmasida uchinchi darajali hadlardan pasti yo'q, chunki $\frac{dV}{dt}$ ning ifodasida yagona ikkinchi darajali hadlar (5.11.14) ifoda bo'ladi. P funksiyaning yoyilmasida $x_1,\ldots,x_n$ o'zgaruvchilardan erkin bo'lgan hadlar ham yo'q, chunki bu hadlarning barchasi $\frac{dV}{dt}$ ning

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(-\lambda y + X^0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\lambda x + Y^0)$$

tarkibiy ifodasida bo'ladi va, demak, ularni (5.11.18) ga kiritish mumkin.

$x_1,\ldots,x_n$ larga nisbatan chiziqli bo'lgan hadlardan P ning ifodasida faqat x va y larga nisbatan tartibi $2N$ dan past bo'lgan hadlar mavjud bo'ladi. Shu turdagi hadlarning qolgan qismini (5.11.18) ga kiritish mumkin. $x_1,\ldots,x_n$ larga nisbatan ikkinchi darajali va undan yuqori darajali hadlarning barchasini (5.11.17) ga kiritish mumkin va shuning uchun ham ular P ning ifodasida yo'q.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan mulohazalardan kelib chiqadiki, P funksiya

$$P=P_2(x_1,...,x_n,x,y)+P_3(x_1,...,x_n,x,y)+\cdots+P_n(x_1,...,x_n,x,y), \qquad (5.11.19)$$

ko'rinishga ega, bu yerda P_k lar x va y larga nisbatan k-tartibli formalar. Ularning koeffitsiyentlari $x_1,...,x_n$ larga nisbatan chiziqli formalar bo'ladi. $\frac{dV}{dt}$ ifodasida P funksiyaning bo'lishi uning aniq ishorali ekanligini buzadi. Shuning uchun ham biz V funksiya ifodasiga shunday hadlarni kiritishimiz kerakki, $\frac{dV}{dt}$ ning ifodasida P ga kiruvchi hadlar, ya'ni x_j larga nisbatan chiziqli va x, y larga nisbatan $2N$ dan kichik darajali hadlar bo'lmasin. Shu maqsadda V ning ifodasiga qo'shimcha

$$Q_k(x_1,...,x_n,x,y)=v_1x^k+v_2x^{k-1}y+\cdots+v_kxy^{k-1}+v_{k+1}y^k \qquad (5.11.20)$$

hadlarni kiritamiz, bu yerda $2\le k\le 2N-1$, v_j esa $x_1,...,x_n$ larning chiziqli formalari. Buning natijasida $\frac{dV}{dt}$ ning ifodasida paydo bo'ladigan yangi qo'shiluvchi hadlar uning aniq ishorali forma bo'lishini buzadigan P funksiyaning yo'qolishini ta'minlaydi.

Shunday qilib, biz (5.11.11) tenglamalar sistemasi uchun V funksiyani

$$V=G(x^2+y^2+f_3+...+f_{2N-1})+W(x_1,...,x_n)+$$
$$+Q_2(x,y,x_1,...,x_n)+...+Q_{2N}(x,y,x_1,...,x_n)$$

yoki

$$V=G(x^2+y^2)+W(x_1,...,x_n)+F(x,y,x_1,...,x_n)$$

tarzda olamiz va uning vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi

$$\frac{dV}{dt}=G^2(x^2+y^2)^N+\sum_{a+\beta=2N}\varphi_{a\beta}\,x^a x^\beta+\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{a,\beta=1}^{n}F_{a\beta}\,x_a\,x_\beta$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $\Phi_{a\beta}$ va $F_{a\beta}$ lar $x=y=x_1=\cdots=x_n=0$ da nolga aylanadi, F lar $x,y,x_1,...,x_n$ o'zgaruvchilarning analitik funksiyasi, yoyilmasi kamida uchinchi darajali hadlardan boshlanadi. $\frac{dV}{dt}$ funksiya aniq musbat ishorali forma bo'ladi.

W funksiya aniq manfiy ishorali forma ekanligidan V $(n+2)$ta $x, y, x_1, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan, agar $G<0$ bo'lsa, aniq manfiy ishorali va agar $G>0$ bo'lsa, o'zgaruvchan ishorali forma bo'ladi. Bu yerdan B va D teoremalarga asosan xuddi ikkinchi tartibli (5.11.14) sistemadagidek (5.11.11) to'liq sistemaning ham toyilmagan harakati $G<0$ da asimptotik turg'un, $G>0$ da esa noturg'un bo'ladi degan xulosaga kelamiz. Shunday qilib, bizni qiziqtiruvchi tasdiq isbotlandi.

12- §. $(n+2)$- tartibli sistemani umumiy holda tadqiq etish

Oldingi paragrafda $(n+2)$- tartibli sistemani xususiy holda ko'rgan edik. Umumiy holda masalani yechish uchun (5.11.11) sistemani shunday ko'rinishga keltiramizki, uning uchun oldingi paragrafda qo'yilgan ikkita shart bajarilsin. Shu maqsad bilan o'z navbatida bu sistemani shunday o'zgartiramizki, u (5.11.11) ko'rinishni saqlasin, ammo nokritik o'zgaruvchilarga mos kelgan har bir tenglamaning o'ng tarafidagi yoyilmada hamma nokritik o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan hadlarni tashlaganimizdan keyin yoyilmaning qolgan qismi yetarlicha katta darajali hadlardan boshlansin.

Buning uchun (5.11.11) sistemadagi $x_1, ..., x_n$ o'zgaruvchilar o'rniga yangi $\xi_1, ..., \xi_n$ o'zgaruvchilarni quyidagi almashtirishlar orqali kiritamiz:

$$\xi_s = x_s - v_s(x, y) \qquad (s = \overline{1,n}), \tag{5.12.1}$$

bu yerda $v_s(x, y)$ lar x va y larning analitik funksiyasi va $v_s(0,0) = 0$. O'zgartirilgan tenglamalar

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = -\lambda y + \bar{X}(x, y, \xi_1, ..., \xi_n) = -\lambda y + \bar{X}(x, y, \xi_1 + v_1, ..., \xi_n + v_n),\\
&\frac{dy}{dt} = \lambda x + \bar{Y}(x, y, \xi_1, ..., \xi_n) = \lambda x + \bar{Y}(x, y, \xi_1 + v_1, ..., \xi_n + v_n),\\
&\frac{d\xi_s}{dt} = \Xi_s(x, y, \xi_1, ..., \xi_n) = p_{s1}\xi_1 + ... + p_{sn}\xi_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, \xi_1 +\\
&+ v_1, ..., \xi_n + v_n) - \left[\frac{\partial v_s}{\partial x}(-\lambda y + \bar{X}) + \frac{\partial v_s}{\partial y}(\lambda x + \bar{Y})\right] + p_{s1}v_1 + ... + p_{sn}v_n.
\end{aligned}\right\} \tag{5.12.2}$$

ko'rinishda bo'ladi.

$\Xi_s^{(0)}(x, y)$ orqali Ξ_s dagi $\xi_1,...,\xi_n$ nokritik o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lmagan barcha hadlarni belgilab olamiz, ya'ni

$$\Xi_s^{(0)}(x, y) = [p_{s1}v_1 + ... + p_{sn}v_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, v_1, ..., v_n)] -$$

$$- \left\{ \frac{\partial v_s}{\partial x} [-\lambda y + X(x, y, v_1, ..., v_n)] + \frac{\partial v_s}{\partial y} [\lambda x + Y(x, y, v_1, ..., v_n)] \right\}.$$

Endi $v_1,...,v_n$ funksiyalarni shunday tanlab olamizki, $\Xi_s^{(0)}$ funksiyaning yoyilmasi kamida m - tartibli hadlardan boshlansin, bu yerda m – yetarlicha katta son. U vaqtda (5.12.2) sistema oldingi paragrafdagi ikki shartni qanoatlantiradigan ko'rinishni oladi va turg'unlik masalasini yechish uchun bu sistemaning x va y kritik o'zgaruvchilarga mos kelgan tenglamalar o'ng tarafidagi $\xi_1,...,\xi_n$ nokritik o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan hadlarni tashlab, hosil bo'lgan ikkinchi tartibli sistemani ko'ramiz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, v_1(x, y), ..., v_n(x, y)), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, v_1(x, y), ..., v_n(x, y)). \end{aligned}\right\} \qquad (5.12.4)$$

Bu sistemani tadqiq etish jarayonida ikki holga duch kelamiz. m son har qancha katta bo'lmasin, (5.12.4) sistema uchun turg'unlik masalasi m dan kichik tartibli hadlar vositasi bilan yechilmaydigan hol bo'lishi mumkin. Bu maxsus holga to'g'ri keladi va biz uni keyinchalik alohida ko'rib o'tamiz.

Ammo, shunday hollar ham mavjudki va biz buni umumiy hol deb ataymiz, yetarlicha katta m sonlar uchun (5.12.4) sistemaning turg'unlik masalasi m - tartiblidan katta bo'lmagan hadlar orqali yechiladi, chunki m dan yuqori tartibli bo'lgan hadlarning turg'unlikka ta'siri bo'lmaydi. Bu holda $(n+2)$-tartibli (5.11.11) sistema uchun turg'unlik masalasi ikkinchi tartibli (5.12.4) sistema bilan hal bo'ladi: agar (5.12.4) sistema uchun toyilmagan harakat noturg'un bo'lsa, u holda (5.11.11) sistema uchun u noturg'un bo'ladi va (5.12.4) sistema uchun ham asimptotik turg'un bo'lsa, u holda (5.11.11) sistema uchun ham asimptotik turg'un bo'ladi.

Haqiqatan ham, shart bo'yicha (5.12.4) sistema uchun turg'unlik masalasi m-tartibli haddan katta bo'lmagan hadlar bilan hal etilgani uchun va (5.12.3) funksiyaning yoyilmasi kamida m-tartibli hadlar bilan boshlanganligi tufayli (5.12.2) sistema oldingi paragrafdagi hamma (ikkita) shartlarni qanoatlantiradi. O'sha paragrafda olingan natijalarga

asosan (5.12.4) sistema (5.12.2) sistema uchun va, demak, (5.11.11) sistema uchun ham turg'unlik masalasini to'liq hal qiladi.

Endi (5.12.3) ifodasidagi $(m-1)$-tartibligacha bo'lgan barcha hadlarni nolga aylantiradigan $v_s(x,y)$ funksiyalarni topish yo'lini ko'rsatamiz. Shu maqsad uchun uni

$$v_s(x,y) = v_s^{(1)}(x,y) + v_s^{(2)}(x,y) + \cdots \qquad (s=\overline{1,n}) \tag{5.12.5}$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $v_s^{(k)}(x,y)$ lar x va y o'zgaruvchilarning k-tartibli formalari. U vaqtda (5.12.3) munosabatdagi birinchi tartibli hadlar

$$\Xi_{s1}^{(0)} = -\lambda\left(\frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial y}x - \frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial x}y\right) + p_{s1}v_1^{(1)} + \ldots + p_{sn}v_n^{(1)} + p_s x + q_s y \quad (s=\overline{1,n}) \tag{5.12.6}$$

va k-tartibli hadlar majmuasi

$$\Xi_{sk}^{(0)} = -\lambda\left(\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial y}x - \frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial x}y\right) + p_{s1}v_1^{(k)} + \ldots + p_{sn}v_n^{(k)} + u_s^{(k)}(x,y) \quad (s=\overline{1,n}) \tag{5.12.7}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda $u_s^{(k)}(x,y)$ lar $v_s^{(1)}, \cdots, v_s^{(k-1)}$larga bog'liq bo'lgan k-tartibli formalar.

(5.12.3) ifodada birinchi darajali hadlar qatnashmasligi uchun $v_s^{(1)}(x,y)$ chiziqli formani shunday tanlab olish kerakki, $\Xi_{s1}^{(0)} = 0$ bo'lsin va (5.12.3) ifodadagi funksiyalar yoyilmasi kamida m-darajali hadlar bilan boshlanishi uchun

$$\lambda\left(\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial y}x - \frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial x}y\right) = p_{s1}v_1^{(k)} + \ldots + p_{sn}v_n^{(k)} + u_s^{(k)}(x,y) \quad (s=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m-1}) \tag{5.12.8}$$

tenglamalar bajarilishi kerak.

$u_s^{(k)}$ funksiya faqat $j<k$ bo'ladigan $v_s^{(j)}$ larga bog'liq bo'lganligidan (5.12.8) tenglamalar $k=1$ dan boshlab $v_s^{(k)}$ larni ketma-ket topishga imkon beradi. $v_s^{(1)}$ ni topish uchun o'ng tarafi aniq bo'lgan tenglamalarni hosil qilamiz, chunki (5.12.6) ga asosan $u_s^{(1)} = p_s x + q_s y$. (5.12.3) yoyilmalar kamida m - tartibli had bilan boshlanishlari uchun (5.12.5) qatorning $(m-1)$-tartibligacha bo'lgan hadlarini aniqlashga to'g'ri keladi.

Barcha $v_s^{(1)}, v_s^{(2)}, \ldots, v_s^{(k-1)}$ hadlar aniqlangan deb hisoblaylik. U vaqtda $v_s^{(k)}$ larni topish uchun biz o'ng tarafi aniq bo'lgan (5.12.8) teng-

lamalarni hosil qilamiz. Bu tenglamalarning ko'rinishi oldingi paragrafdagi (5.11.1) tenglamalarniki kabidir. Hozirgi holda (5.11.1) tenglamaning ildizlari $\pm\lambda i$ va (5.11.3) tenglamaning ildizlari (5.11.2) ning $\rho_1,\ldots,\rho_n$ ildizlaridan iborat bo'ladi. Endi (5.11.4) munosabat

$$(m_1 - m_2)\lambda i = \rho_j$$

ko'rinishni oladi va u hech qanday manfiymas butun m_1, m_2 sonlar uchun bajarilmasligi uchun 11- § dagi teoremaga asosan (5.12.18) sistema k indeks qanday bo'lishidan qat'iy nazar $v_s^{(k)}$ yechimga ega bo'lishi kerak. Bu echimni aniqmas koeffitsiyentli formalar shaklida izlash maъqul. Aniqmas koeffitsiyentlarni topish uchun chiziqli bir jinslimas algebraik tenglamalar hosil kilinadi.

Endi amaliy masalalarni yechishda (5.12.5) qatorning nechta hadini topishimiz lozimligi haqida to'xtalib o'taylik. Agar ikkinchi darajali sistema uchun turg'unlik masalasi chekli darajali hadlar bilan yechilsa, u holda bu daraja doimo toq son ekanligini oldingi paragraflarda aytgan edik. Amalda masala deyarli ko'pincha uchinchi darajali hadlar bilan echiladi. Demak, (5.12.3) yoyilmada birinchi va ikkinchi darajali hadlar bo'lmasligi kerak. Buning uchun v_s funksiyalarning (5.12.5) yoyilmasida faqat $v_s^{(1)}(x,y)$ birinchi tartibli va $v_s^{(2)}(x,y)$ ikkinchi tartibli hadlarni olish kifoya. Bunday hadlar orqali aniqlanuvchi v_s funksiyalarni (5.12.4) tenglamalarga qo'yib, ular uchun turg'unlik masalasini yechamiz. Agar masala uchinchi darajali hadlar bilan yechilmasligi ma'lum bo'lsa va, demak, hech bo'lmaganda to'rtinchi va beshinchi darajali hadlarni ko'rishga to'g'ri kelsa, u holda $v_s^{(3)}$ va $v_s^{(4)}$ formalarni ham aniqlashga to'g'ri keladi. Agar beshinchi darajali hadlar bilan ham (5.12.4) uchun turg'unlik masalasi hal bo'lmasa, u holda yanadi yuqori darajali formalarni aniqlash kerak bo'ladi.

(5.12.4) tenglamalar (5.11.11) tenglamalarning birinchi va ikkinchisidan x_s o'zgaruvchilarni $v_s(x,y)$ funksiyalar bilan almashtirish natijasida olinganligini eslatib o'tamiz.

(5.12.8) tenglamalarni hosil qilish uchun xususiy hosilali

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}(-\lambda y + X(x,y,v_1,\ldots,v_n)) + \frac{\partial v_s}{\partial y}(\lambda x + Y(x,y,v_1,\ldots,v_n)) = \tag{5.12.9}$$

$$= p_{s1}v_1 + \cdots + p_{sn}v_n + p_s x + q_s y + X_s(x,y,v_1,\ldots,v_n) \quad (s=\overline{1,n})$$

tenglamalarning yechimini (5.12.5) qator ko'rinishda topish kerak.

Shuning uchun ham aytilgan barcha mulohazalar ko'rilayotgan holda turg'unlik masalasini yechish uchun bizni quyidagi **algoritmga** olib keladi:

1. (5.11.11) tenglamalar holida turg'unlik masalasinii yechish uchun xususiy hosilali (5.12.9) tenglamalar sistemasi tuziladi va uning yechimi (5.12.5) qatorlar sifatida izlanadi.

2. Bunday qatorlar doimo mavjud va yagona bo'ladi. (5.11.11) sistemaning dastlabki ikkita tenglamasidagi x_s o'zgaruvchilarni (5.12.5) qatorlar bilan ($v_s(x, y)$ funksiyalar bilan) almashtirib, ikkinchi darajali (5.12.4) sistema hosil qilinadi.

3. (5.12.4) sistema uchun turg'unlik masalasi chekli sondagi hadlar bilan yechiladi deb faraz qilinadi. U vaqtda, agar (5.12.4) sistema uchun toyilmagan harakat noturg'un bo'lsa, u holda (5.11.11) sistema uchun ham u noturg'un bo'ladi. Agar (5.12.4) sistema uchun toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'lsa, u holda (5.11.11) sistema uchun ham u asimptotik turg'un bo'ladi. Turg'unlik masalasi yechish uchun (5.12.5) qatorlardagi hadlarning nechtasini olish massalasini biz yuqorida aytib o'tgan edik.

Izoh. *Bitta nol ildizga ega bo'lgan kritik hol hamda juft sof mavhum ildizlarga ega bo'lgan kritik hollar uchun toyilgan harakat tenglamalari analitik bo'lmaganda, turg'unlik masalasining echimi [16] da berilgan.*

Misol. Ikkinchi misol sifatida A.I. Lure tadqiq etgan avtomatik rostlash (regulirovanie) sistemasining bitta masalasini ko'rib o'taylik [48]. Sistema harakatining (rostlanadigan ob'ekt, o'lchagich, servomotor va b.q.) differensial tenglamalari

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta_i}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^{n+2} b_{i\alpha}\eta_\alpha + \eta_i f(\sigma), \\ \sigma &= \sum_{\alpha=1}^{n+2} j_\alpha \eta_\alpha \qquad i = \overline{(1, n+2)} \end{aligned}\right\} \tag{5.12.10}$$

ko'rinishda bo'lsin, bu yerda $b_{i\alpha}$, h_i, j_a – o'zgarmas sonlar, $f(\sigma)$ – chiziqlimas funksiya va $f(0) = 0$.

$f(\sigma)$ funksiya σ ning analitik funksiyasi va u

$$f(\sigma) = c\sigma + \psi_2\sigma^2 + \psi_3\sigma^3 + \cdots$$

ko'rinishga ega deylik.

(5.12.10) ning birinchi yaqinlashish sistemasi

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n+2} a_{i\alpha}\eta_\alpha, \qquad a_{i\alpha} = b_{i\alpha} + h_i j_a c \qquad i = \overline{1, n+2} \qquad (5.12.11)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu sistemaning $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_{n+2} = 0$ muvozanat holatining turg'unligi uchun

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \cdots & a_{1,n+2} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \cdots & a_{2,n+2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n+2,n+2} - \rho \end{vmatrix} = 0 \qquad 5.12.12)$$

xarakteristik tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishi yetarlidir. Shuni ta'kidlaymizki, turg'unlik sohasining ko'lami ildizlar haqiqiy qismining son miqdoriga bog'liq. Agar (5.12.12) tenglamaning hech bo'lmaganda ayrim ildizlarining haqiqiy qismi miqdor jihatdan kichik bo'lsa, u holda turg'unlik sohasi nuqtayi nazardan tadqiq etilayotgan muvozanat holatini noturg'un deb qarash mumkin. Shunday qilib, kritik holni tadqiq etish masalasiga kelamiz. Bu masalani (5.12.10) sistemaga nisbatan ko'ramiz. Bu yerda (5.12.12) xarakteristik tenglama juft sof $\pm\lambda i$ mavhum ildizlarga va qolgan n tasi haqiqiy qismi manfiy bo'lgan il-dizlar deb faraz qilamiz.

(5.12.12) tenglamaning hamma ildizlari oddiy (karralimas) bo'lsin. Quyidagi chiziqli almashtirishlarni kiritamiz:

$$x_i = A_{i1}\eta_1 + A_{i2}\eta_2 + \cdots + A_{i,n+2}\eta_{n+2} \qquad (i = \overline{1, n+2}). \qquad (5.12.13)$$

Bu yerda A_{ij} koeffitsiyentlar

$$a_{1s}A_{i1} + a_{2s}A_{i2} + \cdots + a_{n+2,s}A_{i,n+2} = \rho_i A_{is} \qquad (i = \overline{1, n+2}); \qquad s = \overline{1, n+2})$$

tenglamalardan aniqlanadi, ya'ni

$$A_{ij} = C_i \Delta_{ij}(\rho_i),$$

bu yerda $\Delta_{\alpha\beta}$ – (5.12.12) determinantning β-satr va α-ustun bo'yicha algebraik to'ldiruvchisi, C_i – ixtiyoriy o'zgarmas son. (5.12.13) almashtirish (5.12.11) tenglamalarni

$$\frac{dx_i}{dt} = \rho_i x_i \qquad (i = 1, n+2)$$

ko'rinishga, (5.12.10) sistemani esa

$$\frac{dx_i}{dt} = \rho_i x_i + \psi_2 \sigma^2 + \psi_3 \sigma^3 + \cdots$$

ko'rinishga keltiradi. Bu yerda C_i o'zgarmas son

$$\frac{1}{C_i} = \sum_{\alpha=1}^{n+2} \Delta_{1\alpha}(\rho_i)\, h_\alpha$$

shartni qanoatlantiradi deb faraz qilamiz va

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n+2} a_\alpha x_\alpha$$

ko'rinishga ega bo'ladi (a_α – biror o'zgarmas sonlar).

$\rho_{n+1} = i\lambda$, $\rho_{n+2} = -i\lambda$ va qolgan n ta ildizning haqiqiy qismi manfiy bo'lsin. U vaqtda

$$x_{n+1} = x + iy, \qquad x_{n+2} = x - iy$$

deb qabul qilib, sistema harakatining tenglamalarini

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = -\lambda y + \psi_2 \sigma^2 + \psi_3 \sigma^3 + \cdots, \\ &\frac{dy}{dt} = \lambda x, \\ &\frac{dx_s}{dt} = \rho_s x_s + \psi_2 \sigma^2 + \psi_3 \sigma^3 + \cdots, \\ &\sigma = ax - by + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \end{aligned}\right\} \qquad (5.12.14)$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu yerda a va b lar $2a_{n+1}$ koeffitsiyentning haqiqiy va mavhum qismlari (a_{n+2} koeffitsiyent a_{n+1} ga qo'shma kompleks bo'ladi).

$$\lambda x \frac{\partial v_s}{\partial y} + (-\lambda y + \psi_2 \sigma^2 + \psi_3 \sigma^3 + \cdots) \frac{\partial v_s}{\partial x} = \rho_s v_s + \psi_2 \sigma^3 + \psi_3 \sigma^3 + \cdots \quad (i = \overline{1,n})$$

tenglamalarni tuzib, ularning yechimini

$$v_s = v_s^{(1)} + v_s^{(2)} + \cdots \qquad (i = \overline{1,n}) \qquad (5.12.15)$$

qator shaklida izlaymiz. Odatdagidek, (5.12.15) asosida oldingi tenglama vositasida $v_s^{(1)}$ funksiya uchun

$$\lambda \left(x \frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial y} - y \frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial x} \right) = \rho_s v_s^{(1)}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerdan $v_s^{(1)} = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun ham $v_s^{(2)}$ funksiya uchun tenglama

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_s^{(2)}}{\partial y} - y\frac{\partial v_s^{(2)}}{\partial x}\right) = \rho_s v_s^{(2)} + \psi_2(ax - by)^2 --$$

ko'rinishda bo'ladi. $v_s^{(2)}$ funksiyani

$$v_s^{(2)} = \frac{1}{2}(M_s x^2 + 2P_s xy + N_s y^2)$$

ko'rinishda izlaymiz. Buni oldingi tenglamaga qo'yib hamda xy, x^2 va y^2 lar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, so'ngra hosil bo'lgan tenglamalarni M_s, P_s, N_s larga nisbatan yechib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\frac{1}{2}M_s = -\frac{\psi_2}{4\lambda^2 + \rho_s^2}\left[-2ab\lambda + \frac{1}{2}\rho_s(a^2 - b^2)\right] - \frac{\psi_2(a^2 + b^2)}{2\rho_s},$$

$$P_s = -\frac{\psi_2}{4\lambda^2 + \rho_s^2}\left[2\lambda(a^2 - b^2) + 2ab\rho_s\right],$$

$$\frac{1}{2}N_s = -\frac{\psi_2}{4\lambda^2 + \rho_s^2}\left[2ab\lambda - \frac{1}{2}\rho_s(a^2 - b^2)\right] - \frac{\psi_2(a^2 + b^2)}{2\rho_s}.$$

Masalani birinchi usul bilan yechamiz. Buning uchun $v_s^{(2)}$ forma ifodasiga $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ larni qo'yamiz. U holda, M_s, P_s, N_s koeffitsiyentlarning ifodasini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$v_s^{(2)} = r^2(\alpha_s + \beta_s\cos 2\vartheta + \gamma_s\sin 2\vartheta),$$

bu yerda

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_s &= -\frac{\psi_2(a^2 + b^2)}{2\rho_s}, \\
\beta_s &= -\frac{\psi_2[\rho_s(a^2 - b^2) - 4\lambda ab}{2(4\lambda^2 + \rho_s^2)}, \\
\gamma_s &= \frac{\psi_2[2\lambda(a^2 - b^2) + 2ab\rho_s]}{2(4\lambda^2 + \rho_s^2)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.12.16)$$

(5.12.14) sistemaning dastlabki ikkita tenglamasidagi x_s lar o'rniga (5.12.15) qatorni qo'yamiz va qutb koordinatalariga o'tib, t ni chiqargandan so'ng, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R_2 r^2 + R_3 r^3 + \cdots . \qquad (5.12.17)$$

Bu yerda

$$R_2 = \frac{\psi_2}{\lambda}(a\cos\vartheta - b\sin\vartheta)\cos\vartheta ,$$

$$R_3 = \frac{\psi_2^2}{\lambda_2}(a\cos\vartheta - b\sin\vartheta)^4 \sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{1}{\lambda}\{2\psi_2(a\cos\vartheta - b\sin\vartheta)\times$$

$$\times(\alpha + \beta\cos 2\vartheta + \gamma\sin 2\vartheta) + \psi_3(a_3\cos\vartheta - b\sin\vartheta)^3\}\cos\vartheta ,$$

$$\alpha = \sum_{s=1}^{n} a_s\alpha_s , \qquad \beta = \sum_{s=1}^{n} a_s\beta_s , \qquad \gamma = \sum_{s=1}^{n} a_s\gamma_s .$$

Oxirgi uchta ifodani hisobga olib, (5.12.16)ga asosan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2}\psi_2(a^2+b^2)S_1 , \\ \beta &= 2\lambda ab\psi_2 S_2 - \frac{1}{2}(a^2-b^2)\psi_2 S_3 , \\ \gamma &= \lambda(a^2-b^2)\psi_2 S_2 + ab\psi_2 S_3 , \end{aligned}\right\} \qquad (5.12.18)$$

bu yerda

$$S_1 = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\alpha}{\rho_\alpha} , \qquad S_2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\alpha}{4\lambda^2+\rho_\alpha^2} , \qquad S_3 = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{a_\alpha\rho_\alpha}{4\lambda^2+\rho_\alpha^2} .$$

(5.12.17) tenglamaning yechimini

$$r = c + r_2(\vartheta)c^2 + r_3(\vartheta)c^3 + \cdots$$

qator shaklida izlaymiz. Buni (5.12.17) ga qo'yib hamda o'ng va chap tomondagi bir xil darajali c lar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib,

$$r_2 = \int_0^{\vartheta} R_2 d\vartheta , \qquad r_3 = \int_0^{\vartheta}(R_3 + 2R_2 r_2)\, d\vartheta$$

ifodalarni hosil qilamiz.

$r_2(\vartheta)$ funksiya davriy bo'ladi. Shuning uchun

$$\int_0^{\vartheta} R_2 r_2\, d\vartheta = \int_0^{\vartheta} r_2\, d\, r_2 = \frac{1}{2}r_2^2$$

ifoda ham davriy funksiyadir. Shunga ko‘ra

$$r_3 = g\vartheta + \ \textit{davriy funksiya}$$

ifodadagi g o‘zgarmas son

$$g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_3\, d\vartheta$$

formula orqali aniqlanadi. Bu yerdan

$$g = -\frac{ab(a^2+b^2)}{4\lambda^2}\psi_2^2 + \frac{1}{2\lambda}(2a\alpha + a\beta - b\gamma)\psi_2 + \frac{3(a^2+b^2)}{8\lambda}\psi_3$$

yoki, (5.12.18) ni hisobga olib,

$$g = \frac{a^2+b^2}{4\lambda^2}\left[\psi_2^2(-ab - 2\lambda a S_1 + 2\lambda^2 b S_2 - a\lambda S_3) - \frac{3}{2}a\lambda\psi_3\right]$$

ni topamiz. Agar g ning ifodasiga kirgan miqdorlarni (5.12.10) sistemadagi koeffitsiyentlar orqali ifodalasak va uncha muhim bo‘lmagan $\frac{1}{2\lambda}(a^2+b^2)$ musbat ko‘paytuvchini tashlab yuborsak, u holda A.I. Lure ko‘rsatganidek, quyidagini hosil qilamiz:

$$g = R_e \frac{D(i\lambda)}{\Delta'(i\lambda)}\left\{\left(\frac{\psi_2}{c}\right)^2\left[\frac{D(2i\omega)}{\Delta(2i\omega)} - 3 + 2\frac{D(0)}{\Delta(0)}\right] + \frac{3}{2}\frac{\psi_3}{c}\right\}, \qquad (5.12.19)$$

bu yerda $D(\rho)$ – (5.12.12) determinantning $c = 0$ bo‘lgandagi qiymati.

13- §. $(n+2)$- tartibli sistemani maxsus holda tadqiq etish

Toyilgan harakat differensial tenglamalari quyidagi ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_n),\\
&\frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n),\\
&\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s \qquad (s = \overline{1,n}).
\end{aligned}\right\} \qquad (5.13.1)$$

Endi maxsus holni ko'rishga o'tamiz. Turg'unlik masalasini tadqiq etishning oldingi paragraflarda bayon etilgan qoidasiga asosan quyidagi xususiy hosilali

$$(-\lambda y + X(x, y, v_1, \ldots, v_n))\frac{\partial v_s}{\partial x} + (\lambda x + Y(x, y, v_1, \ldots, v_n))\frac{\partial v_s}{\partial y} = \tag{5.13.2}$$
$$= p_{s1}v_1 + \cdots + p_{sn}v_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, v_1, \ldots, v_n)$$

differensial tenglamalarni tuzamiz. Bu tenglamalarni quyidagi formal qatorlar qanoatlantirishi mumkin:

$$v_s(x, y) = v_s^{(1)}(x, y) + v_s^{(2)}(x, y) + \cdots \qquad (s = \overline{1, n}) \tag{5.13.3}$$

Bu qatorlardagi $(m-1)$ hadlar bilan kifoyalanib va (5.13.1) sistemaning dastlabki ikkita tenglamasidagi x_s o'zgaruvchilarni $v_s(x, y)$ butun ratsional funksiyalar bilan almashtirib, quyidagi ikkinchi tartibli sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, v_1, \ldots, v_n), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, v_1, \ldots, v_n). \end{aligned}\right\} \tag{5.13.4}$$

(5.13.4) sistema uchun turg'unlik masalasi m - darajalidan.(m – yetarlicha katta son) yuqori bo'lmagan hadlar bilan hal etilishi mumkin. Bu oldin ko'rilgan umumiy hol bo'ladi. Bu holda (5.13.1) sistema uchun turg'unlik masalasi (5.13.4) sistema bilan yechiladi.

Ammo, shunday hollar mavjudki, m son qanchalik katta bo'lmasin, va, demak, (5.13.3) qatorda olingan hadlar soni har qancha katta bo'lmasin, (5.13.4) sistema uchun turg'unlik masalasi m dan kichik tartibli bo'lgan hadlar bilan yechilmaydi. Bu holda sistemadagi m dan yuqori darajali bo'lgan hadlarni o'zgartirib, xohishimizga qarab, toyilmagan harakatni turg'un yoki noturg'un qilishimiz mumkin. Bu hol **maxsus hol** deb aytiladi. Oldingi paragrafda bayon etilgan turg'unlikni yechish qoidasi (algoritmi) maxsus holni tadqiq etishga yaramaydi.

Shunday bo'lsada, biz maxsus holda ham (5.13.1) sistemaning turg'unlik masalasi ikkinchi tartibli (5.13.4) sistemaning turg'unlik masalasiga ekvivalent ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun (5.13.4) tenglamalardagi $v_s(x, y)$ funksiyalar (5.13.3) qatorning chekli sondagi hadlarinigina emas, balki butun qatorni ifodalashi kerak. U vaqtda, ravshanki, (5.13.3) qator yaqinlashuvchi bo'lgandagina, (5.13.4) sistema ma'noga ega bo'ladi. Bu qator haqiqatan ham yaqinlashuvchi bo'ladimi?

Bu masala A.M. Lyapunov tomonidan hal qilingan. U bu qator uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkinligini ko'rsatgan. Masalan,

$$\left[-\lambda y-\frac{1}{2}x(x^2+y^2)\right]\frac{\partial v}{\partial x}+\left[\lambda x-\frac{1}{2}y(x^2+y^2)\right]\frac{\partial v}{\partial y}=-v+x^2+y^2$$

tenglama uchun (5.13.3) formal qator

$$v=x^2+y^2+(x^2+y^2)^2+2!(x^2+y^2)^3+3!(x^2+y^2)^4+\cdots$$

ko'rinishga ega va uzoqlashuvchidir.

Ammo, bundan (5.13.3) qatorlar doimo uzoqlashuvchi bo'ladi degan xulosa kelib chiqmaydi. **Maxsus hollar uchun (5.13.3) qatorlar albatta yaqinlashuvchi bo'lishi Lyapunov tomonidan isbot etilgan.**

Demak, Lyapunov tasdig'iga asosan (5.13.4) sistema aniqlangan, ya'ni ma'noga ega bo'ladi. Bu sistema uchun turg'unlik masalasi chekli sondagi hadlar bilan hal etilmasligi tufayli 8–10- § lardagi natijalarga asosan koordinata boshi $x=y=0$ (5.13.4) tenglamalar uchun markaz bo'ladi. (5.13.4) tenglamalar bilan ifodalanuvchi toyilmagan harakat turg'un (ammo asimptotik turg'un emas) va umumiy yechim davriy funk-siya bo'ladi.

Bu davriy yechimni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\left.\begin{aligned}\tau&=\lambda(1+h_2c^2+h_3c^3+\cdots)^{-1}t,\\ x&=c\cos\tau+c^2x^2(\tau)+\cdots,\\ y&=c\sin\tau+c^2y^2(\tau)+\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(5.13.5)$$

Bu yerda $x^{(k)}(\tau)$, $y^{(k)}(\tau)$ *lar* τ *ning* 2π *davrli davriy funksiyalari va* $x^{(k)}(0)=y^{(k)}(0)=0$, h_j *– biror aniq aniqlangan o'zgarmas sonlar,* c *esa* x *ning boshlang'ich qiymati bo'lgan ixtiyoriy o'zgarmas son. (5.13.5) dagi hamma qatorlar* c *ning yetarlicha kichik qiymatlari uchun yaqinlashuvchi bo'ladi.*

Maxsus holda xuddi shunday holat $(n+2)$*- tartibli (5.13.1) sistema uchun ham mavjud: bu sistema ham* x *ning boshlang'ich qiymati bo'lgan ixtiyoriy bitta o'zgarmas songa bog'liq davriy yechimga ega bo'ladi. Bu sistema uchun* $x=y=x_1=\cdots=x_n=0$ *toyilmagan harakat ham turg'un bo'ladi. Bu holda davriy yechimdagi* x *va* y *lar (5.13.5) formulalar bilan aniqlanadi,* x_s *lar esa*

$$x_s=v_s(x,y)\qquad(s=\overline{1,n})\qquad(5.13.6)$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $v_s(x,y)$ – *(5.13.3) bilan aniqlanadigan funksiyalar.*

Bu tasdiqlarni isbot qilishdan oldin shuni ta'kidlaymizki, agar $x=x(t)$, $y=y(t)$ funksiyalar (5.13.4) tenglamalarning biror xususiy yechimi bo'lsa, u holda $x=x(t)$, $y=y(t)$, $x_s=v[x(t),y(t)]$ funksiyalar (5.13.1) sistemaning biror xususiy yechimini aniqlaydilar. Haqiqatan ham, bu funksiyalarni (5.13.1) sistemaga qo'ysak, (5.13.2) va (5.13.4) larga asosan, sistemadagi tenglamalarning ayniyatga aylanishiga ishonch hosil qilamiz. Bu yerdan bevosita kelib chiqadiki, (5.13.1) sistema (5.13.5) va (5.13.6) formulalar orqali aniqlanadigan davriy yechimga ega.

Endi $(n+2)$- tartibli (5.13.1) sistema uchun toyilmagan harakat turg'un ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun sistemadagi x,y,x_s o'zgaruvchilar o'rniga

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi+\rho^2x^{(2)}(\varphi)+\cdots,\\ y &= \rho\sin\varphi+\rho^2y^{(2)}(\varphi)+\cdots,\\ x_s &= \xi_s+v_s(x,y)\quad (s=\overline{1,n}) \end{aligned}\right\} \tag{5.13.7}$$

almashtirishlar bilan yangi ρ,φ,ξ_s o'zgaruvchilarni kiritamiz. U vaqtda (5.13.1) sistemaning dastlabki ikkita tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\cos\varphi+2\rho x^{(2)}(\varphi)+\cdots\right]\frac{d\rho}{dt}+\left[-\sin\varphi+\frac{dx^{(2)}(\varphi)}{d\varphi}\rho+\cdots\right]\cdot\rho\frac{d\varphi}{dt}=R_1(\rho,\varphi,\xi_s),\\ &\left[\sin\varphi+2\rho y^{(2)}(\varphi)+\cdots\right]\frac{d\rho}{dt}+\left[\cos\varphi+\rho\frac{dy^{(2)}(\varphi)}{d\varphi}\rho+\cdots\right]\cdot\rho\frac{d\varphi}{dt}=R_2(\rho,\varphi,\xi_s), \end{aligned}\right\} \tag{5.13.8}$$

bu yerda R_1,R_2 – yoyilmasida ozod hadlar bo'lmagan $\rho,\xi_1,\ldots,\xi_n$ o'zgaruvchilarning analitik funksiyalari. Bu yoyilmalarning koeffitsiyentlari 2π davrli φ ning davriy funksiyalari bo'ladi.

(5.13.8) tenglamalarni $\frac{d\rho}{dt}$ va $\rho\frac{d\varphi}{dt}$ larga nisbatan yechamiz. $\frac{d\rho}{dt}$ va $\rho\frac{d\varphi}{dt}$ larga nisbatan chiziqli tenglamalarning Δ determinanti quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\Delta = 1 + \rho\left[\cos\varphi + \frac{dy^{(2)}(\varphi)}{d\varphi} + 2\cos\varphi \cdot x^{(2)}(\varphi) - \right.$$

$$\left. - \sin\varphi \frac{dx^{(2)}(\varphi)}{d\varphi} + 2\sin\varphi \cdot y^{(2)}(\varphi)\right] + \rho^{(2)}(\cdots) \mp \cdots .$$

Bu erdan $\frac{1}{\Delta}$ miqdorning ρ ga nisbatan analitikligi kelib chiqadi. Bu miqdorning ρ darajalari bo'yicha yoyilmasining koeffitsiyentlari φ ga nisbatan davriydir. Demak,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= R(\rho, \varphi, \xi_1, \ldots, \xi_n), \\ \rho\frac{d\varphi}{dt} &= \Phi(\rho, \varphi, \xi_1, \ldots, \xi_n) \end{aligned}\right\} \qquad (5.13.9)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda R va Φ lar $-R_1$ va R_2 larga o'xshash funksiyalar, ya'ni ρ va ξ_s larga nisbatan analitik, φ ga nisbatan davriy va $\rho = \xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$ da nolga aylanadi.

x, y, x_s lar o'rniga (5.13.7) ni qo'ygandan keyin (5.13.1) sistemaning oxirgi n ta tenglamasi

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}\xi_1 + \cdots + p_{sn}\xi_n + P_s(\varphi)\rho + \Xi_s(\rho, \varphi, \xi_1, \ldots, \xi_n) \quad (s = \overline{1,n}) \qquad (5.13.10)$$

ko'rinishga keladi. Bu yerda $P_s(\varphi)$ lar φ ga nisbatan 2π davrli analitik funksiyalar, ularning yoyilmasi kamida ikkinchi darajali hadlardan boshlanadi. Bu yoyilmalarning koeffitsiyentlari φ ning 2π davrli davriy funksiyalari bo'ladi.

(5.13.1) sistemaning (5.13.5) va (5.13.6) davriy yechimining ifodasi yangi ρ, φ, ξ_s o'zgaruvchilarda quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\rho = c, \qquad \varphi = \tau, \qquad \xi_s = 0 \qquad (s = \overline{1,n}). \qquad (5.13.11)$$

Demak, (5.13.9) va (5.13.10) tenglamalar (5.13.11) xususiy yechimga ega. Buning uchun

$$P_s(\varphi) \equiv 0, \qquad R(\rho, \varphi, 0, \ldots, 0) = \Xi_s(\rho, \varphi, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (s = \overline{1,n})$$

munosabatlarning bajarilishi zarurdir.

Ammo bu holda (5.13.9) sistemaning birinchi tenglamasi va (5.13.10) tenglamalardan iborat $(n+1)$- tartibli sistema (bu yerda $\tau - t$

ning biror aniqmas funksiyasi) biz 6- § da ko'rgan (bitta nol ildizga ega bo'lgan maxsus hol)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= Y_i(t,\ x_1,...,x_n,\ y_1,...,y_n) \qquad (i=\overline{1,k}) \\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s(t,\ x_1,...,x_n,\ y_1,...,y_k) \qquad (s=\overline{1,n}) \end{aligned}\right\}$$

sistemaning ((5.6.2) ga qarang) xususiy holi bo'ladi. 6- § dagi natijalarga asosan yuqorida aytilgan $(n+1)$- tartibli sistemaning $\rho=\xi_1=\cdots=\xi_n=0$ toyilmagan harakati turg'un bo'ladi. U vaqtda (5.13.7) almashtirishning xarakteriga asosan (5.13.1) sistemaning $x=y=x_1=\cdots=x_n=0$ toyilmagan xarakati ham turg'un bo'ladi.

Shunday qilib, maxsus holda toyilmagan harakatning turg'unligini va toyilgan harakat tenglamalarining (5.13.5) va (5.13.6) formulalar bilan aniqlanadigan davriy echimi mavjudligini isbot qildik.

Demak, maxsus holda turg'unlik masalasi osongina yechiladi. Ammo, afsuski, hozirgacha ko'rilayotgan hol markaz ekanligini aniqlaydigan birorta umumiy usul mavjud emas. Haqiqatan ham, agar biz maxsus holga ega bo'lsak, u vaqtda (5.13.4) tenglamalarda qanchalik ko'p hadlarni ko'rmaylik, yanada yuqori darajali hadlar qaralganda fokus holiga kelmasligimizga bizda ishonch bo'lmaydi.

Ammo, bitta umumiy alomatni ko'rsatish mumkinki, agar u bajarilsa, ko'rilayotgan hol albatta markaz bo'ladi.

(5.13.1) sistema

$$x^2 + y^2 + F(x, y, x_1,..., x_n) = \text{const} \qquad (5.13.12)$$

ko'rinishdagi birinchi integralga ega bo'lsin, bu yerda F ifoda $x, y, x_1,..., x_n$ o'zgaruvchilarning analitik funksiyasi, uning yoyilmasi kamida uchinchi darajali hadlardan boshlanadi. Agar (5.13.1) sistema (5.13.12) birinchi integralga ega bo'lsa, u holda ko'rilayotgan hol albatta markaz bo'lishini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, (5.13.12) munosabatdagi x_s o'zgaruvchilar o'rniga (5.13.2) ning formal yechimi bo'lgan (5.13.3) qatorni $(v_s(x, y)\text{ni})$ keltirib qo'ysak, (5.13.4) sistemaning formal birinchi integralini hosil qilamiz, ya'ni qatorning barcha

$$[-\lambda y + X(x, y, v_s)]\frac{\partial H}{\partial x} + [\lambda x + Y(x, y, v_s)]\frac{\partial H}{\partial y},$$

kabi hadlari yo'qoladi, bu yerda

$$H = x^2 + y^2 + F(x, y, v_1(x, y), ..., v_n(x, y)).$$

U vaqtda (5.13.4) sistema uchun (9- § dagi mulohazalarga asosan) $x = y = 0$ nuqta markaz bo'ladi va shu bilan bizning tasdig'imiz isbotlanadi.

Lyapunov bu tasdiqning aksi ham to'g'riligini isbotlagan, ya'ni (5.13.1) sistema albatta (5.13.12) ko'rinishdagi birinchi integralga ega bo'lishi zarurligini ko'rsatgan.

Bundan tashqari, agar (5.13.1) sistema (5.13.12) ko'rinishdagi birinchi integralga ega bo'lsa, u holda

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \rho & p_{12} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{21} & p_{22} - \rho & \cdots & p_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{n,n} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

xarakteristik tenglama ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishi yoki bo'lmasligidan qat'iy nazar (5.13.1) sistema (5.13.5) va (5.13.6) formulalar bilan aniqlanadigan davriy yechimga ega bo'lishini ham Lyapunov isbotlab bergan. Eng muhimi, bu ildizlarning birortasi ham $\pm N\lambda i$ ko'rinishga ega bo'lmasligi kerak, bu yerda N – butun musbat son yoki nol.

Ko'rsatilgan davriy yechimlar chiziqlimas tebranishlar nazariyasida muhim rol o'ynaydi [56].

14- §. Turg'unlik sohasining «xavfli» va «xavfsiz» chegaralari

Endi turg'unlik sohasining «xavfli» va «xavfsiz» chegaralari haqida to'xtalib o'tamiz [12]. Bu masala «amaliy» turg'unlik tushunchasi bilan bevosita bog'langan.

Toyilgan harakatning tenglamasi

$$\frac{dx_s}{dt} = q_{s1}x_1 + \cdots + q_{sn}x_n + X_s(x_1, ..., x_n) \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (5.14.1)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin, bu yerda X_s funksiya $x_1, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning yoyilmasi kamida ikkinchi darajali hadlar bilan boshlanadigan funksiyasi.

(5.14.1) sistema parametrlari fazosining

$$\mathrm{Re}(\rho_s) < 0 \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (5.14.2)$$

munosabat bilan aniqlanadigan sohasini ko'raylik, bu yerda $\rho_1, ..., \rho_n$ – birinchi yaqinlashish sistemasi xarakteristik tenglamasining ildizlari. Bu

ildizlar sistema parametrlarining funksiyalaridir. (5.14.2) soha tadqiq etilayotgan toyilmagan harakatga nisbatan turg'unlik sohasidir, chunki (5.14.2) munosabat bajarilganda toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi. Aksincha, aqalli birorta ρ_s ildizning haqiqiy qismi musbat bo'lgan parametrlar fazosining barcha nuqtalar majmuasi noturg'unlik sohasini tashkil etadi.

Turg'unlik sohasini noturg'unlik sohasidan ajratadigan chegara parametrlar fazosining (5.14.2) tengsizliklarning hech bo'lmaganda birortasi tenglikka aylanadigan parametrlar fazosining barcha nuqtalar majmuasidan iborat, ya'ni chegarada ρ_s larning hech bo'lmaganda ayrimlari kritik ildizlar bo'ladi. Parametrlarning chegara nuqtalariga mos keluvchi qiymatlarida toyilmagan harakat X_s funksiyaning ifodasiga qarab turg'un ham, noturg'un ham bo'lishi mumkin.

Sistema parametrlari turg'unlik sohasida yotadi deb faraz qilaylik, u holda barcha ρ_s ildizlarning haqiqiy qismi manfiy va toyilmagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi. Bu holda har qanday boshlang'ich shartlar uchun barcha X_s funksiyalar nolga aylangan taqdirda ham toyilmagan harakat turg'un bo'ladi. Ammo, agar funksiyalarning ba'zilari noldan farqli bo'lsa, u holda, umuman aytganda, boshlang'ich shartlar ma'lum chegaradan chiqmagan holdagina toyilmagan harakat turg'un bo'ladi. Agar xarakteristik tenglama ildizlarining haqiqiy qismlari (miqdor jihatdan) kichik bo'lsa, yaъni turg'unlik sohasining chegarasiga yaqin bo'lsa, u holda mumkin bo'lgan boshlang'ich toyilishlarning maksimal miqdori yetarli kichik bo'ladi. Agar haqiqatan ham shunday holat yuz bersa, u holda amaliy nuqtai nazardan bu sistemani noturg'un sistema deb qarashga to'g'ri keladi.

Xuddi shunday holat sistema parametrlari noturg'unlik sohasida yotganda ham sodir bo'lishi mumkin (agar sistema chegaraga juda yaqin bo'lsa). Bu holda boshlang'ich toyilishlarning maksimal miqdori juda kichik bo'lganda Lyapunov bo'yicha toyilmagan harakat noturg'un bo'lishiga qaramasdan, amaliy nuqtai nazardan uni turg'un deb qarash mumkin.

Misol sifatida quyidagi differensial tenglamalar bilan ifodalangan

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha^2 - x^2) \qquad (5.14.3)$$

dinamik sistemaning turg'unligini tekshiraylik, bu yerda α – biror o'zgarmas son. Bu sistemaning $x = 0$ muvozanat holati mavjud va u noturg'un, chunki birinchi yaqinlashish $\frac{dx}{dt} = \alpha^2 x$ sistemasining xa-

rakteristik tenglamasi ildizi α^2 ga teng, ya'ni musbat son. (5.14.3) sistemaning umumiy yechimi

$$\alpha^2(t-t_0)=\ln\frac{\left|x\sqrt{\alpha^2-x_0}\right|}{\left|x_0\sqrt{\alpha^2-x}\right|} \qquad (5.14.4)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $x_0=x(t_0)$. (5.14.4) ifodaga asosan $|x_0|<\alpha$ da ham, $|x_0|>\alpha$ da ham x haqiqiy qiymatga ega bo'ladi.

Ikki holda ham

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\pm\alpha. \qquad (5.14.5)$$

Bu yerdan yana bir marta $x=0$ muvozanat holatining noturg'unligi kelib chiqadi, chunki boshlang'ich paytda toyilish har qancha kichik bo'lmasin, u ma'lum bir paytda biror tayin sondan, masalan, $\frac{\alpha}{2}$ dan katta bo'ladi. Ammo, boshqa tarafdan, ko'rilayotgan masalada α ning qiymati amaliy jihatdan kichik bo'lsa, u holda $x=0$ muvozanat holatidan α ga teng miqdorda toyilish amaliy ahamiyatga ega emas va bu muvozanat holati x ning har qanday boshlang'ich qiymatlari uchun **amaliy turg'un** deb aytiladi.

Aksincha, agar differensial tenglama

$$\frac{dx}{dt}=-\alpha^2x+x^3$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda xarakteristik tenglamaning ildizi $-\alpha^2$ teng, yaъni manfiy bo'ladi va shuning uchun ham $x=0$ muvozanat holati (toyilmagan harakat) Lyapunov bo'yicha asimptotik turg'un bo'ladi. Ammo, α juda ham kichik son bo'lsa, u holda amaliy nuqtai nazardan bunday toyilmagan harakatni noturg'un deb qarashga to'g'ri keladi, chunki agar x ning boshlang'ich qiymati α dan katta bo'lsa, u vaqtda $\lim_{t\to\infty} x(t)=\pm\infty$ bo'ladi. Haqiqatan ham, $|x|>\alpha$ qiymatlari uchun $x\frac{dx}{dt}>0$ tengsizlik o'rinlidir.

Shunday qilib, amaliy nuqtayi nazardan muhim bo'lgan dinamik sistemaning turg'unlik sohasi chegarasi yaqinidagi xulqi haqidagi masala kelib chiqadi. Bu masalani Nijniy Novgorodlik olim N.N. Bautin tadqiq etgan [12]. U turg'unlik sohasi chegarasining yoki bitta ildiz, yoki ikkita ildiz kritik bo'lgan qismlarini tadqiq etdi. Ikkinchi holda ikkala ildiz ham noldan farq qiladi, yaъni sof mavhum ildizlar deb qaralgan

Birinchi holda, bitta kritik ildiz bo'lganligi uchun u, albatta, nolga teng bo'ladi. Dinamik sistemaning turg'unlik sohasi chegarasi yaqinidagi xulqi uning chegaraning o'zidagi xulqi bilan aniqlanishini N.N. Bautin isbotlagan.

Har ikki holda ham toyilgan harakat differensial tenglamalarini

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + \mu(r_{s1}x_1 \cdots + r_{sn}x_n) + X_s \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (5.14.6)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $r_{s\sigma}$ – biror o'zgarmas sonlar, $p_{s\sigma}$ lar esa shunday o'zgarmas sonlarki,

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\rho & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\rho & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.14.7)$$

xarakteristik tenglamaning yoki bitta ildizi nolga teng, yoki ikkita ildizi juft sof mavhum ildiz bo'lib, qolgan barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy ishorali bo'ladi. μ miqdor kichik qiymatli parametr bo'lib, sistemaning turg'unlik sohasining chegarasiga qay darajada yaqinligini ifodalaydi. Bu parametr shunchalik kichik deb hisoblanadiki,

$$\begin{vmatrix} p_{11}+\mu r_{11}-\rho & p_{12}+\mu r_{12} & \cdots & p_{1n}+\mu r_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1}+\mu r_{n1} & p_{n2}+\mu r_{n2} & \cdots & p_{nn}+\mu r_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

xarakteristik tenglamaning haqiqiy qismi manfiy ildizlarining soni (5.14.7) ning haqiqiy qismi manfiy ildizlarining soniga teng, ya'ni yoki $n-1$, yoki $n-2$ ga teng bo'ladi. Bu tenglama qolgan il-dizlarining haqiqiy qismi ham manfiy, ham musbat bo'lishi, ya'ni (5.14.6) sistema ham turg'unlik sohasida, ham noturg'unlik sohasida bo'lishi mumkin.

a) Turg'unlik sohasining chegarasida ko'rilayotgan (5.14.6) sistema asimptotik turg'un bo'lsin. Boshqacha qilib aytganda,

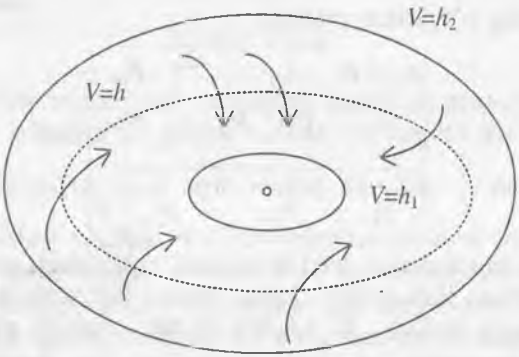
$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s \qquad (s = \overline{1,n}) \qquad (5.14.8)$$

sistemaning toyilmagan harakati asimptotik turg'un bo'lsin. U vaqtda, oldingi paragraflarda ko'rdikki, bitta nolga teng ildizga ega bo'lgan holda ham, juft sof mavhum ildizga ega bo'lgan holda ham (5.14.8) sistema uchun Lyapunovning B teoremasini qanoatlantiruvchi $V(x_1,...,x_n)$ funksiya mavjud bo'ladi. Aniqlik uchun, bu funksiya aniq

musbat ishorali bo'lsin. U holda uning vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi

$$W(x_1,...,x_n)=\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\cdots+p_{sn}x_n+X_s)\frac{\partial V}{\partial x_s} \qquad (5.14.9)$$

aniq manfiy ishorali funksiyadir. Teorema B ning geometrik talqinidan foydalanamiz. $V=h$ yopiq sirtlar sistemasini ko'ramiz:



5.4- shakl.

Koordinata boshiga (muvozanat holatiga) yetarlicha yaqin joylashgan bu sirtlarni (5.14.8) ning integral egri chiziqlari tashqaridan ichkariga qarab kesib o'tadi (5.4- shakl). $V=h_1$ va $V=h_2$ shu sirtlarning ikkitasi bo'lsin. Bu sirtlardan birinchisini (ikkinchisining ichida yotgan deb qaraladi, ya'ni $h_1<h_2$), koordinata boshiga yetarlicha yaqin joylashtirishimiz mumkin. Ikkinchisini bo'lsa, aksincha, sirtlar oilasidagi eng katta sirtga yaqin qilib olamiz. Bu katta sirtni ham (5.14.8) ning integral egri chiziqlari tashqaridan ichkariga qarab kesadi.

Endi V funksiyadan (5.14.6) ga ko'ra vaqt bo'yicha to'liq hosila olamiz:

$$\frac{dV}{dt}W+\mu\sum_{s=1}^{n}(r_{s1}x_1+\cdots+r_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s}. \qquad (5.14.10)$$

W funksiya aniq manfiy ishorali bo'lganligi uchun $V=h_1$ va $V=h_2$ sirtlar orasidagi barcha nuqtalarda $W<-l$ tengsizlik bajariladi. (l – noldan farqli musbat son). Bu yerdan, agar μ yetarlicha kichik son

bo‘lsa, u holda bu nuqtalardan (5.14.10) ifoda ham manfiy ishorali qiymatlar qabul qilishi kelib chiqadi. Demak, yetarlicha kichik μ uchun $V = h_1$ va $V = h_2$ sirtlar orasida joylashgan barcha sirtlarni (5.14.6) to‘liq sistemaning integral egri chiziqlari tashqaridan ichkariga qarab kesib o‘tadilar. (5.14.6) sistema turg‘unlik sohasidami yoki noturg‘unlik sohasidami ekanligiga qaramasdan bu holat o‘zgarmay qoladi.

Demak, agar (5.14.6) sistemani ifodalovchi $x_1,...,x_n$ nuqta $V = h_1$ va $V = h_2$ sirtlar orasiga tushib qolsa, u holda u koordinata boshiga qarab yaqinlashadi (hech bo‘lmaganda $V = h_1$ sirt bilan chegaralangan sohagacha). Agar μ yetarlicha kichik bo‘lsa (ya’ni sistema turg‘unlik sohasining chegarasiga yetarlicha yaqin bo‘lsa), u vaqtda bu sohani yetarlicha kichik qilish mumkin.

Agar bu holda sistema noturg‘unlik sohasida bo‘lsa ham, biz toyilmagan harakatni **amaliy turg‘un** deb qarashimiz mumkin, chunki dastlabki paytda yetarlicha kichik bo‘lgan toyilishning o‘sishiga qaramasdan, u amalda ancha kichikligicha qoladi (yetarlicha kichik μ uchun yetarlicha kichik bo‘ladi). Bundan tashqari, agar boshlang‘ich toyilishlar uncha kichik bo‘lmasa ham, ular kichraya boshlaydi va oxirida yetarli kichik bo‘lib qoladi (yetarlicha kichik μ uchun yetarlicha kichik bo‘ladi). Faqat boshlang‘ich toyilishlar $V = h_2$ sirt chegaralangan sirtdan tashqari chiqadigan holdagina ular vaqt o‘tishi bilan kamaymasligi mumkin.

Agar sistema turg‘unlik sohasida bo‘lsa, u holda V funksiyani shunday tanlab olish mumkinki, faqat (5.14.9) ifoda emas, balki (5.14.10) ifoda ham manfiy ishorali bo‘ladi.

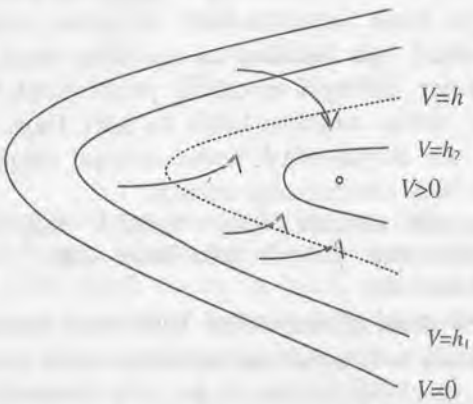
Demak, $h_1 = 0$ deb qabul qilish mumkin. Toyilmagan harakat asimptotik turg‘un bo‘ladi. Bu holda boshlang‘ich joiz toyilishlar uchun aniq chekli chegara mavjud bo‘ladi. Bu chekli chegara μ ga, ya’ni sistemaning turg‘unlik sohasining chegarasiga yaqinligiga bog‘liq emas.

Shunday qilib, agar turg‘unlik sohasining chegarasida sistema asimptotik turg‘un bo‘lsa, u holda bu chegaraning yaqinidagi turg‘unlik (agar u mavjud bo‘lsa) «amaliy» noturg‘unlikka o‘ta olmaydi. Aksincha, agar chegaraning yaqinida noturg‘unlik mavjud bo‘lsa, u holda uni amaliy nuqtayi nazardan turg‘un deb qarash mumkin.

Yuqorida keltirilgan mulohazalar turg‘unlik sohasining chegarasida istalgancha sondagi kritik ildizlar mavjud bo‘lganda ham o‘z kuchini saqlaydi ([35]ning 310–317 betlariga qarang).

b) Endi turg‘unlik sohasi chegarasining ko‘rilayotgan qismida toyilmagan harakat noturg‘un bo‘lsin. U vaqtda ikki holda ham (5.14.8) sistema uchun Lyapunovning D teoremasi shartlarini qa-

noatlantiruvchi $V(x_1,...,x_n)$ funksiya mavjud va, demak, (5.14.9) ifoda oldingidek aniq ishorali bo'ladi. V funksiyaning o'zi bo'lsa, koordinata boshining yetarlicha kichik atrofida (5.14.9) ifodaning ishorasi bilan bir xil ishorali qiymat qabul qilishi mumkin. Aniqlik uchun (5.14.9) ifoda aniq musbat ishorali bo'lsin va $V>0$ sohani ko'ramiz (5.3- shakl). Bu soha $V=0$ sirt bilan chegaralangan. Bu sohada $V=h$ sirtlar oilasini chizamiz, bu yerda $h>0$. (5.14.9) hosila musbat bo'lganligi uchun (5.14.8) sistemaning integral egri chiziqlari bu sirtlarni V ning o'sishi tomon kesadi (5.3- shaklga qarang). $V=h$ sirtlar oilasidan ikkita $V=h_1$ va $V=h_2$ sirtni ajratamiz. Bu yerda h_1 ni istalgancha kichik qilib olish mumkin. Demak, $V=h_1$ sirt $V=0$ sirtga yetarlicha yaqin bo'ladi. (5.14.9) funksiya aniq musbat ishorali bo'lganligi uchun $V=h_1$ va $V=h_2$ sirtlar orasidagi sohada u noldan farq qiluvchi musbat aniq quyi chegaraga ega bo'ladi.



5.5-shakl.

U vaqtda agar μ ning qiymati yetarlicha kichik bo'lsa, bu sohada ham (5.14.10) hosilaning qiymati musbat bo'ladi. Demak, $V=h_1$ va $V=h_2$ sirtlar orasida joylashgan barcha $V=h$ sirtlarni nafaqat (5.14.8) sistemaning integral egri chiziqlari, balki (5.14.6) sistemaning ham integral egri chiziqlari V ning o'sishi tomon kesib o'tadi. Shuning uchun ham ifodalovchi nuqta $V=h_1$ va $V=h_2$ sirtlar orasidagi sohaga tushgandan keyin $V=h_2$ sirtning tashqarisiga chiqquncha koordinata boshidan doimo uzoqlashadi. $V=h_2$ sirt koordinata boshidan chekli masofada turadi.

Ravshanki, amaliy nuqtayi nazardan toyilmagan harakat hech bo‘lmaganda noturg‘un bo‘ladi. Haqiqatan ham, agar toyilmagan harakat hatto turg‘un bo‘lsa ham (bu hol (5.14.6) sistema turg‘unlik sohasida bo‘lgandagina yuz beradi), joiz boshlang‘ich toyilishlar sohasi shunday kichik bo‘lishi kerakki, $V = h_1$ sirt undan tashqarida joylashgan bo‘lishi kerak. Amalda $V = h_1$ sirt, yetarlicha kichik μ uchun koordinata boshiga yetarlicha yaqin joylashgan bo‘ladi.

Shunday qilib, turg‘unlik sohasining chegarasida toyilmagan harakat noturg‘un bo‘lib, agar sistema bu chegara yaqinida bo‘lsa (turg‘unlik yoki noturg‘unlik sohasida ekanligiga qaramasdan), doimo yetarlicha kichik boshlang‘ich toyilish topiladiki, ular vaqtning o‘tishi bilan o‘sadi va natijada toyilgan harakat toyilmagan harakatdan sezilarli darajada farq qiladi, ya’ni toyilmagan harakat noturg‘un bo‘ladi.

Barcha bayon etilgan mulohazalar shuni ko‘rsatyaptiki, sistema turg‘unlik sohasining chegarasiga yetarlicha yaqin turganda toyilmagan harakatning amaliy turg‘un yoki noturg‘un bo‘lishi shu sistemaning chegarada Lyapunov bo‘yicha turg‘un yoki noturg‘un bo‘lishiga bog‘liq ekan:

1. *Agar turg‘unlik sohasining chegarasida sistema asimptotik turg‘un bo‘lsa, u holda chegaraga yaqin sohada u amaliy turg‘un bo‘ladi.*

2. *Agar turg‘unlik sohasining chegarasida sistema noturg‘un bo‘lsa, u holda chegaraga yaqin sohada u amaliy noturg‘un bo‘ladi.*

Shu sababli, toyilmagan harakat turg‘un bo‘lgan turg‘unlik sohasining chegarasi **«xavfsiz» chegara** va noturg‘un bo‘lgan chegara **«xavfli» chegara** deb aytiladi. «Xavfli» va «xavfsiz» chegaralarni topish masalasi kritik hollarda turg‘unlikni tadqiq etish masalasiga keltiriladi.

VI BOB. RAUS–GURVITS MUAMMOSI

1- §. Raus–Gurvits muammosi paydo bo'lishining tarixi

IV bobda ko'rib o'tdikki, Lyapunovning I-teoremasiga asosan

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}x_k + X_s(x_1,\ldots,x_n) \qquad (s=\overline{1,n}) \tag{6.1.1}$$

differensial tenglamalar sistemasining muvozanat holati (toyilmagan harakati) asimptotik turg'un bo'lishi uchun

$$\Delta(\lambda) = |\lambda E - A|$$

xarakteristik tenglamaning barcha λ_s ildizlari (ya'ni $A = \|p_{sk}\|_1^n$ matritsaning barcha xarakteristik sonlari) ning haqiqiy qismi manfiy bo'lishi yetarli va zarur. Bu yerda X_s – yoyilmasi kamida ikkinchi darajali hadlar bilan boshlanadigan funksiya.

Shuning uchun ham berilgan algebraik tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy ishorali bo'lishining yetarli va zarur shartlarini topish masalasi mexanik, elektrik, avtomatik boshqarish va rostlash (regulirovanie) sistemalarining turg'unlik masalasini tadqiq etish uchun fundamental ahamiyatga egadir.

Bu masalaning muhimligini birinchi bo'lib XIX asrning ikkinchi yarmida mashinalarni rostlash nazariyasining asoschilari bo'lgan angliyalik fizik, Kembrij universitetining professori J.K. Maksvell (1831–1879) va rossiyalik muhandis-matematik, Peterburg texnologiya institutining professori I.A. Vishnegradskiy (1831–1895) ko'rsatgan edilar [17,58]. Ular o'zlarining rostlagichlarga (regulatorlarga) bag'ishlagan ishlarida yuqorida aytilgan yetarli va zaruriy shartlarni uchinchi darajali algebraik tenglamalar uchun topdilar va tadqiqotlarida foydalandilar.

1868-yilda Maksvell London matematiklar jamiyati oldiga ana shu yetarli va zaruriy shartlarni yuqori darajali algebraik tenglamalar uchun topish masalasini qo'yadi. Bu masala aslida fransuz matematigi Ermit tomonidan hal etilgan edi [88]. Ammo uning natijalari amaliy sohalarda ishlayotgan tadqiqotchilar foydalana oladigan holatga keltirilmagan edi. Shuning uchun ham Ermitning bu ishi keng tarqalmadi.

1875-yilda angliyalik mexanik Raus [115–117], Shturm teoremasi va Koshi indekslari nazariyasidan foydalanib, dastlab to'rtinchi va beshinchi darajali algebraik tenglamalar uchun va 1877-yilda («Ustoychivost zadannogo sostoyaniya dvijeniya» kitobida) ixtiyoriy darajali algebraik

tenglamalar uchun o'ng yarim tekislikda ($\mathrm{Re}\, z > 0$) yotgan ildizlar soni k ni topish algoritmini yaratdi. $k = 0$ bo'lganda, bu algoritm turg'unlik kriteriysini beradi.

Bu kriteriy ixtiyoriy darajali xarakteristik tenglama ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishining yetarli va zaruriy shartlarini beradi.

1890-yillarda slovak muhandis tadqiqotchisi, Syurix politexnika instituti professori, gaz va bug' turbinalar nazariyasining asoschisi Aurel Stodola (1859–1942), Maksvell va Raus ishlaridan bexabar holda, algebraik tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishining yetarli va zarur shartlarini topishni Syurix politexnika instituti professori, matematik A. Gurvitsdan iltimos qildi. 1895-yilda A. Gurvits [20] 15 yil oldin Raus tomonidan yechilgan masalani, fransuz matematigi Ermitning ishlariga asoslanib, ikkinchi marta yechimini berdi. Ammo Gurvits Raus yechimini qaytarmaydi. U masalaning yechimini elegant determinant shaklida yozilgan tengsizliklar sifatida berdi. Gurvitsning bu kriteriysi forma jihatidan Raus kriteriysidan farq qilsa-da, mazmun jihatidan u bilan mos keladi. Hozirgi vaqtda bu tengsizliklarni Raus–Gurvits tengsizliklari yoki Raus–Gurvits kriteriysi deb ataydilar.

Ammo Gurvits kriteriysi yaratilguncha, hozirgi zamon turg'unlik nazariyasining asoschisi A.M. Lyapunov o'zining mashhur dissertatsiyasida [52] xarakteristik tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishi uchun qanday yetarli va zaruriy shartlar bajarilishi kerakligini ko'rsatadigan teorema yaratdi. Bu shartlar rostlash nazariyasida keng qo'llaniladi.

1914-yilda fransuz matematiklari Lenar va Shipar tomonidan yangi turg'unlik kriteriysi yaratildi [20]. Lenar-Shipar turg'unlik kriteriysida determinant tengsizliklar soni Raus–Gurvits kriteriysidagiga nisbatan taxminan ikki marta kam.

Shu jihatdan ularning kriteriysi Raus–Gurvits kriteriysidan ustun turadi.

Avtomatika, radiotexnika, boshqarish va rostlash nazariyalarida paydo bo'lgan yangi turg'unlik masalalarini yechish uchun Naykvist, Mixaylov, Popov kriteriylari hamda Neymarkning D-bo'laklash usuli yaratildi [62,65,63].

2- §. Koshi indeksi va Shturm teoremasi

Raus–Gurvits muammosini o'rganishni Koshi indeksini ko'rishdan boshlaymiz [20].

1- ta'rif. *Koshi indeksi deb, haqiqiy ratsional $R(x)$ funksiyaning qiymati argumentning a dan b gacha o'zgarish paytida $-\infty$ dan $+\infty$ ga o'tishdagi uzilishlar $+\infty$ dan $-\infty$ ga o'tishdagi uzilishlar sonining ayirmasiga aytiladi. Bu yerda a, b – haqiqiy sonlar yoki $\pm\infty$. Uzilish-*

lar sonini hisoblashda x ning chetki (chegaraviy) a va b qiymatlari hisobga olinmaydi. Koshi indeksini $I_a^b R(x)$ belgi bilan belgilaymiz.

Ushbu ta'rifga asosan, agar A_i, $\alpha_i (i = \overline{1,p})$ – haqiqiy sonlar, $R_1(x)$ – haqiqiy qutblarga ega bo'lmagan rasional funksiya bo'lganda

$$R(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{x - \alpha_i} + R_1(x)$$

bo'lsa, u holda

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(x) = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{sign} A_i \qquad (6.2.1)$$

va, umuman,

$$I_a^b R(x) = \sum_{a<\alpha_i<b} \operatorname{sign} A_i \qquad (a<b). \qquad (6.2.2)$$

Bu yerda $\operatorname{sign} a$ (a – haqiqiy son) odatdagidek $a>0$, $a<0$ va $a=0$ bo'lishiga mos ravishda $+1$, -1 yoki 0 qiymatlar qabul qiluvchi ishora funksiya.

Izoh. *Ratsional funksiyani cheksizlikka aylantiradigan argumentning qiymati shu funksiyaning qutbi (polyusi) deb aytiladi.*

Xususan, agar $f(x) = a_0(x-\alpha_1)^{n_1} \cdots (x-\alpha_m)^{n_m}$ haqiqiy ko'phad ($i \neq k$ da $\alpha_i \neq \alpha_k$; $(i = \overline{1,m})$) va ko'phadning $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ildizlari orasida faqat birinchi p tasi haqiqiy bo'lsa, u holda

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{x-\alpha_j} = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{x-\alpha_i} + R_1(x),$$

bu yerda $R_1(x)$ – haqiqiy qutblarga ega bo'lmagan haqiqiy ratsional funksiya.

Shuning uchun ham

$$I_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (a<b)$$

indeks $f(x)$ funksiyaning (a,b) interval orasidagi har xil haqiqiy ildizlarining soniga teng bo'ladi.

Ixtiyoriy haqiqiy ratsional $R(x)$ funksiyani

$$R(x) = \sum_{i=1}^{p} \left\{ \frac{A_i^{(1)}}{x-\alpha_i} + \cdots + \frac{A_{n_i}^{(i)}}{(x-\alpha_i)^{n_i}} \right\} + R_1(x)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda barcha α va A lar haqiqiy sonlar $\left(A_{n_i}^{(i)} \neq 0;\ i=\overline{1,p}\right)$; $R_1(x)$ funksiya esa haqiqiy qutblarga ega emas. U vaqtda

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(x) = \sum_{(n_i\ toq)} \operatorname{sign} A_{n_i}^{(i)} \tag{6.2.3}$$

va umuman

$$I_b^a R(x) = \sum_{\substack{a<\alpha_i<b \\ n_i\ toq}} \operatorname{sign} A_{n_i}^{(i)} \qquad (a<b). \tag{6.2.4}$$

Agar $R(a)=R(b)=0$ bo'lsa, u holda $I_a^b R(x)$ indeksni $\operatorname{arctg} R(x)$ uzluksiz funksiyaning orttirmasi orqali ifodalash mumkin:

$$I_a^b R(x) = -\Delta_a^b \operatorname{arctg} R(x) \qquad (a<b). \tag{6.2.5}$$

Izoh. (6.2.3) formulada n_i toq bo'lgan sonlarga mos keluvchi i qiymatlar uchungina jamlash (summa) belgisi ishlatiladi. (6.2.4) da esa faqat $a<\alpha_i<b$ va n_i toq sonlarga mos keluvchi i lar bo'yicha jamlash amalga oshiriladi. Agar $a=-\infty$ va $b=+\infty$ bo'lsa, u holda (6.2.5) formula har qanday ratsional $R(x)$ kasr uchun to'g'ri bo'ladi, chunki bu holda $R(-\infty)=R(+\infty)=0$.

$I_a^b R(x)$ indeksni hisoblash usullaridan biri *Shturmning klassik teoremasiga* asoslanadi.

$$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,f_m(x) \tag{6.2.6}$$

haqiqiy ko'phadlar qatori berilgan bo'lib, bu qator (a,b) ($a=-\infty$ va $b=+\infty$ bo'lishi ham mumkin) intervalga nisbatan quyidagi ikki xossaga ega deb hisoblaymiz:

1. Bu funksiyalarning birortasi, masalan, $f_k(x)$ ni nolga aylantiruvchi har qanday $x(a<x<b)$ qiymatda u bilan qo'shni (yonma-yon) ikkita $f_{k-1}(x)$ va $f_{k+1}(x)$ funksiyalarning qiymatlari noldan farq qiladi va qarama-qarshi ishoralarga ega bo'ladi, ya'ni $f_k(x)=0$ $(a<x<b)$ dan $f_{k-1}(x)\ f_{k+1}(x)<0$ kelib chiqadi.

2. (6.2.6) qatorning oxirgi $f_m(x)$ funktsiyasi (a,b) intervalda nolga teng bo'lmaydi, ya'ni $\forall x\in(a,b)$ lar uchun $f_m(x)\neq 0$.

Bunday (6.2.6) ko'phadlar qatori (a,b) *intervaldagi Shturm qatori* deb aytiladi.

Tayinlangan x qiymat uchun (6.2.6) qatordagi ishora o'zgarishlari sonini $V(x)$ deb belgilaymiz.

Bu yerda, agar $a<x<b$ va $f_1(x)=0$ bo'lsa, u holda 1- xossaga asosan $V(x)$ ni aniqlash jarayonida (6.2.6) qatordagi nol qiymatlarni tashlab yuborish yoki ularga istalgan ishorani berish mumkin. Agar a chekli son bo'lsa, u holda $V(a)$ ni $V(a+\varepsilon)$ deb qarash kerak, bu yerda ε shunday musbat kichik sonki, $(a,a+\varepsilon)$ intervalda birorta ham $f_i(x)$ $(i=\overline{1,m})$ funksiya nolga aylanmaydi. Xuddi shunday, agar b chekli son bo'lsa, u vaqtda $V(b)$ ni $V(b-\varepsilon)$ deb qarash kerak, bu yerda ε son yuqorida aytilgandek aniqlanadi.

U vaqtda x ning a dan b gacha o'zgarishi davomida $V(x)$ ning miqdori faqat (6.2.6) qatordagi birorta funksiyaning nol qiymatdan o'tishida o'zgarishi mumkin. Ammo, birinchi xossaga asosan, $V(x)$ miqdor $f_k(x)$ $(k=\overline{2,m-1})$ funksiya nol qiymatdan o'tganda o'zgarmaydi, $f_1(x)$ funksiya nol qiymatdan o'tayotganda esa, (6.2.6) qatorning ishora o'zgarishlari soni $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ nisbatning $-\infty$ dan $+\infty$ (yoki aksincha) o'tishiga qarab bittaga kamayadi yoki ortadi.

Shuning uchun quyidagi Raus teoremasi o'rinlidir.

1-teorema (Raus). *Agar* (a,b) *intervalda*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ ...,\ f_m(x)$$

Shturm qatori va $V(x)$ *bu qatordagi ishora o'zgarishlari soni bo'lsa, u holda*

$$\mathrm{I}_a^b \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = V(a)-V(b)\,. \qquad (6.2.7)$$

Izoh. *Shturm qatoridagi barcha hadlarni bitta ixtiyoriy* $d(x)$ *ko'phadga ko'paytiramiz. Shunday hosil qilingan yangi ko'phadlar qatori* ***Shturmning umumlashgan qatori*** *deb aytiladi. (6.2.6) qatorning barcha hadlarini bitta ko'phadga ko'paytirilishi (6.2.7) munosabatning na chapdagi va na o'ngdagi qismini o'zgartirmasligi tufayli Shturmning umumlashgan qatori uchun ham Shturm teoremasi o'z kuchini saqlaydi.*

$f(x)$ va $g(x)$ ixtiyoriy ko'phadlar hamda $f(x)$ ning darajasi $g(x)$ ning darajasidan kichik bo'lmasin. U vaqtda Evklid algoritmi vositasi

Haqiqatan ham, $f_1(x)$ ni $f_2(x)$ ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqni $-f_3(x)$ bilan, $f_2(x)$ ni $f_3(x)$ ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiqni $-f_4(x)$ bilan belgilab va shu singari davom ettirib, quyidagi qatorni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} &f_1(x) = q_1(x)f_2(x) - f_3(x), \\ &f_2(x) = q_2(x)f_3(x) - f_4(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_{k-1}(x) = q_{k-1}(x)f_k(x) - f_{k+1}(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_{m-1}(x) = q_{m-1}(x)f_m(x), \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

bu yerda $f_m(x)$ ko'phad $f(x)$ va $g(x)$ ning hamda shu tarzda tuzilgan (6.2.6) qator barcha funksiyalarining eng katta umumiy bo'luvchisi. Agar $f_m(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ bo'lsa, u holda (6.2.8) ga asosan hosil bo'lgan (6.2.6) qator 1 va 2- xossalarni qanoatlantiradi va u Shturm qatori bo'ladi. Agar $f_m(x)$ ko'phad (a,b) intervalda ildizga ega bo'lsa, u holda (6.2.6) umumlashgan Shturm qatori bo'ladi, chunki uning barcha hadlarini $f_m(x)$ ga bo'lishdan keyin u Shturm qatori bo'ladi.

Demak, istalgan $R(x)$ ratsional funksiyaning indeksini Shturm teoremasi orqali aniqlash mumkin. Buning uchun $R(x)$ ni $Q(x) + \dfrac{g(x)}{f(x)}$ ko'rinishda yozish kifoya, bu yerda $Q(x)$, $f(x)$, $g(x)$ – ko'phadlar va $f(x)$ ning darajasi $g(x)$ ko'phadning darajasidan katta. Agar $f(x)$ va $g(x)$ lar uchun umumlashgan Shturm qatori tuzilsa, u holda

$$I_a^b R(x) = I_a^b \frac{g(x)}{f(x)} = V(a) - V(b).$$

$f(x)$ ning (a,b) intervaldagi har xil ildizlari sonini Shturm teoremasi orqali aniqlash mumkin, chunki bu son $I_a^b \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ga teng ekanligini biz ko'rgan edik.

3- §. Raus algoritmi. Maxsus hollar. Misollar

3.1.Raus algoritmi

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya z kompleks argument funksiyasi sifatida ushbu ko'rinishda aniqlangan bo'lsin:

$$f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \cdots \quad (a_0 \neq 0)$$

Haqiqiy ko'phadning o'ng yarim tekislikda ($\operatorname{Re} z > 0$) yotgan ildizlari sonini aniqlash Raus masalasini tashkil qiladi.

Avval $f(z)$ ko'phadning ildizlari mavhum o'qda yotmagan holni ko'raylik, ya'ni $f(z)$ ning nol va sof mavhum ildizlari bo'lmagan holni ko'rib o'tamiz.

O'ng yarim tekislikda markazi nolda va radiusi R ga teng bo'lgan yarim aylana chizamiz, shu yarim aylana hamda mavhum o'q bilan chegaralangan sohani ko'ramiz (6.1-shakl).

6.1-shakl.

R ning yetarlicha katta qiymatlarida $f(z)$ ning haqiqiy qismi musbat bo'lgan barcha ildizlari shu sohaning ichida yotadi. Shuning uchun ham sohaning chegarasi aylanib o'tilganda (konturini) $\arg f(z)$ argumentning orttirmasi $2k\pi$ ga teng bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $f(z) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$ bo'lsa, u holda $\Delta \arg f(z) = \sum_{i=1}^{n} \arg (z - z_i)$. Agar z_i nuqta ko'rilayotgan sohaning ichida yotgan bo'lsa, u vaqtda $\Delta \arg (z - z_i) = 2\pi$; agar bu sohaning tashqarisida yotgan bo'lsa, u holda $\Delta \arg (z - z_i) = 0$. Ikkinchi tarafdan, $\arg f(z)$ ning R radiusli yarim aylana bo'yicha aylanib o'tishgandagi orttirmasi $R \to \infty$ da $\arg (a_0 z^n)$ ning orttirmasi bilan aniqlanadi va u $n\pi$ ga teng bo'ladi. Shuning uchun ham $\arg f(z)$ ning mavhum o'q bo'yicha ($R \to \infty$) orttirmasi

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg f(i\omega) = (n - 2k)\pi \qquad (6.3.1)$$

ga teng bo'ladi.

$f(z)$ ko'phadni ixtiyoriy kompleks songa ko'paytirganimizda (6.3.1) formuladagi $\Delta \arg f(i\omega)$ o'zgarmasligi tufayli

$$\frac{1}{i^n} f(i\omega) = f_1(\omega) - if_2(\omega), \tag{6.3.2}$$

bu yerda

$$\left.\begin{aligned} f_1(\omega) &= a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - \cdots, \\ f_2(\omega) &= b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - \cdots \end{aligned}\right\} \tag{6.3.3}$$

Koshi indeksidan foydalanib, (6.2.5) va (6.3.2) formulalardan quyidagini topamiz:

$$\frac{1}{\pi}\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg f(i\omega) = -\frac{1}{\pi}\Delta_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = \Gamma_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)}.$$

Shuning uchun ham (6.3.1) formuladan

$$\Gamma_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + \cdots}{a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + \cdots} = n - 2k. \tag{6.3.4}$$

(6.3.4) munosabatning chap tarafidagi ifodaning indeksini aniqlash uchun Shturm teoremasiga murojaat qilamiz. (6.3.3) dagi tengliklar bilan aniqlanadigan $f_1(\omega)$ va $f_2(\omega)$ funksiyalardan foydalanib, Evklid algoritmi yordamida (Rausga o'xshatib) umumlashgan Shturm qatorini tuzamiz:

$$f_1(\omega),\ f_2(\omega),\ f_3(\omega),\ldots,\ f_m(\omega). \tag{6.3.5}$$

Endi regular (muntazam) holni ko'ramiz: $m = n+1$. Bu holda (6.3.5) qatordagi har bir funksiyaning darajasi oldingi funksiyaning darajasidan bir birlikka kam va oxirgi $f_m(\omega)$ ning darajasi nolga teng.

Izoh. *Regular holda (6.3.5) oddiy (umumlashmagan) Shturm qatori bo'ladi.*

Evklid algoritmidan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$$f_3(\omega) = \frac{a_0}{b_0}\omega f_2(\omega) - f_1(\omega) = c_0\omega^{n-2} - c_1\omega^{n-4} + c_2\omega^{n-6} - \cdots,$$

$$f_4(\omega) = \frac{b_0}{c_0}\omega f_3(\omega) - f_2(\omega) = d_0\omega^{n-3} - d_1\omega^{n-5} + \cdots,$$

bu yerda

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= a_1 - \frac{a_0}{b_0}b_1 = \frac{b_0a_1 - a_0b_1}{b_0},\ c_1 = a_2 - \frac{a_0}{b_0}b_2 = \frac{b_0a_2 - a_0b_2}{b_0}, \cdots; \\ d_0 &= b_1 - \frac{b_0}{c_0}c_1 = \frac{c_0b_1 - b_0c_1}{c_0},\ d_1 = b_2 - \frac{b_0}{c_0}c_2 = \frac{c_0b_2 - b_0c_2}{c_0}, \cdots; \end{aligned}\right\} \tag{6.3.6}$$

Qolgan $f_5(\omega),...,f_{n+1}(\omega)$ ko'phadlarning koeffitsiyentlari ham xuddi shunday aniqlanadi.

Shuni ta'kidlaymizki,

$$f_1(\omega),\ f_2(\omega),...,\ f_{n+1}(\omega) \qquad (6.3.7)$$

ko'phadlarning har biri juft yoki toq funksiya va yonma-yon turganlari doimo har xil juftlikda bo'ladi.

Raus sxemasini tuzamiz:

$$\begin{array}{l} a_0,\ a_1,\ a_2,...,\\ b_0,\ b_1,\ b_2,...,\\ c_0,\ c_1,\ c_2,...,\\ d_0,\ d_1,\ d_2,...,\\ .....\\ ..... \end{array} \qquad (6.3.8)$$

(6.3.6) formulalarga asosan bu sxemaning har bir satri oldingi ikki satrdan quyidagi qoida bilan aniqlanadi:

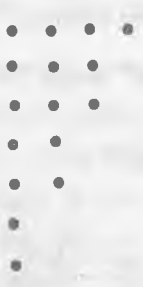
Yuqori satrdagi sonlardan quyi satrdagi mos sonlarni shunday songa ko'paytirib ayirish kerakki, birinchi ayirma nolga aylansin. Bu nolga teng bo'lgan ayirmani tashlab, izlanayotgan keyingi satr hosil qilinadi.

Regular hol shu bilan xarakterlanadiki, yuqorida berilgan qoidani ketma-ket ishlatish natijasida hosil qilingan

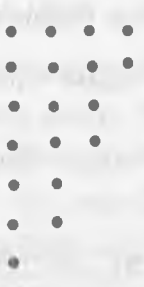
$$b_0,\ c_0,\ d_0,\ ...$$

qatorda nolga teng sonni uchratmaymiz va bu sonlar $(n+1)$ ta bo'ladi.

6.2 va 6.3 - shakllarda $n=6$ va $n=7$ hollar uchun regular sxemaning skeleti berilgan:



6.2- shakl.



6.3- shakl.

Bu shakllarda sxemaning elementlari nuqta orqali ifodalangan.

Regular holda $f_1(\omega)$ va $f_2(\omega)$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi $f_{n+1}(\omega) = \text{const} \neq 0$ bo'ladi. Shuning uchun ham bu ko'phadlar birdaniga nolga aylanmaydi, ya'ni haqiqiy ω lar uchun $f(i\omega) = f_1(\omega) - -if_2(\omega) \neq 0$. · Demak, **regular holda (6.3.4) formula o'rinlidir**. Bu formulaning chap tarafiga Shturm teoremasini ($(-\infty, +\infty)$ intervalda) qo'llab va (6.3.7) qatordan foydalanib, (6.3.4) ga asosan quyidagini hosil qilamiz.

$$V(-\infty) - V(+\infty) = n - 2k\,. \tag{6.3.9}$$

Izoh. *$\omega = +\infty$ bo'lganda, $f_k(\omega)$ ning ishorasi katta koeffitsiyentning ishorasi bilan bir xil, $\omega = -\infty$ bo'lganda esa bu ishoradan $(-1)^{n-k+1}$ $(k = \overline{1, n+1})$ ko'paytuvchi bilan farq qiladi.*

Bu yerda

$$V(+\infty) = V(a_0, b_0, c_0, d_0, \ldots), \qquad V(-\infty) = V(a_0, -b_0, c_0, -d_0, \ldots).$$

Demak,

$$V(-\infty) + V(+\infty) = n \tag{6.3.10}$$

(6.3.9) va (6.3.10) tengliklardan

$$k = V(a_0, b_0, c_0, d_0, \ldots) \tag{6.3.11}$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, regular hol uchun quyidagi tasdiqni isbot qildik.

2- teorema (Raus). *Haqiqiy $f(z)$ ko'phadning $\operatorname{Re} z > 0$ o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlari soni Raus sxemasining birinchi ustunidagi ishora o'zgarishlari soniga teng bo'ladi.*

Amaliyotda zarur bo'lgan quyidagi xususiy holni ko'raylik: $f(z)$ ko'phad barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lsin. Bu holda $f(z)$ ko'phad sof mavhum ildizlarga ega emas. Shuning uchun ham (6.3.4) va, demak, (6.3.9) formulalar o'rinlidir. $k = 0$ bo'lganligi uchun (6.2.17) formulani quyidagicha yozamiz:

$$V(-\infty) - V(+\infty) = n\,. \tag{6.3.12}$$

Ammo, $0 \le V(-\infty) \le m - 1 \le n$ va $0 \le V(+\infty) \le m - 1 \le n$. Shuning uchun ham (6.3.12) formula $m = n + 1$ va $V(+\infty) = 0$, $V(-\infty) = m - 1 = n$ bo'lgandagina o'rinli. U holda (6.3.11) munosabatdan quyidagi kelib chiqadi:

Raus kriteriysi. *Haqiqiy $f(z)$ ko'phad barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishi uchun Raus algoritmi bajarilganda, Raus sxemasining birinchi ustunidagi barcha elementlar noldan farqli va bir xil ishorali bo'lishi yetarli va zarur.*

Raus teoremasi (6.3.4) formulaga asoslangan. Bu formulaning o'zi, mavhum o'qda $f(z)$ ko'phadning ildizlari yotmaydi degan faraz natijasida keltirib chiqarilgan. Agarda

$$f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \ldots \quad (a_0 \neq 0)$$

ko'phadning k ta ildizi o'ng yarim tekislikda va s ta ildizi mavhum o'qda yotgan bo'lsa, u holda (6.3.4) formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi ([20], 475-b.):

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - \cdots}{a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - \cdots} = n - 2k - s \ . \qquad (6.3.13)$$

Bu munosabat (6.3.4) formulaning umumlashmasi bo'ladi.

3.2. Maxsus hollar. Misollar

Biz hozirgacha regular holni ko'rib o'tdik. Bu holda Raus sxemasidagi $b_0, c_0, d_0, \ldots$ elementlarning birortasi ham nolga teng bo'lmaydi.

Ammo, amaliy masalalarni Raus algoritmi orqali yechish jarayonida $b_0, c_0, \ldots$ qatordagi biror h_0 son nolga teng bo'lishi mumkin, ya'ni $h_0 = 0$. h_0 turgan satrga Raus algoritmini qo'llab bo'lmaydi, chunki navbatdagi satr elementlarini topishda h_0 ga bo'lishga to'g'ri keladi. Buning natijasida **maxsus hol** yuzaga keladi:

Maxsus hollar ikki turga bo'linadi:

1. h_0 **turgan satrdagi sonlar orasida nolga teng bo'lmagan sonlar ham topiladi**. Bu (6.3.5) qatorning biror joyida daraja ko'rsat-gichi birdan ko'proq kamayganini bildiradi.

2. h_0 **turgan satrdagi barcha sonlar nolga teng bo'ladi**. U vaqtda bu satr $(m+1)$- satr bo'ladi. Bu yerda m – (6.2.6) umumlashgan Shturm qatoridagi hadlar soni. Bu holda (6.3.5) qatordagi funksiyalar darajasi hamma vaqt birga kamayadi, ammo oxirgi $f_m(\omega)$ funksiyaning darajasi noldan katta.

Ikki holda ham (6.3.5) qatordagi funksiyalar soni $m < n+1$ bo'ladi. Oddiy Raus algoritmi maxsus hol uchun yaramaganligi tufayli, Raus 1-

va 2- maxsus hollarda sxemani davom ettirish uchun alohida (maxsus) qoidalar beradi.

Birinchi maxsus holda Raus bo'yicha $h_0 = 0$ o'rniga ixtiyoriy aniq ishorali yetarlicha kichik ε sonni qo'yib, sxemani davom ettirish kerak. Bu holda sxemaning birinchi ustunidagi keyingi elementlar ε ning ratsional funksiyalari bo'ladi. Bu elementlarning ishorasi ε ning "kichikligi" va ishorasi bilan aniqlanadi. Agar bu elementlarning birortasi yana ε ga nisbatan ham nolga teng bo'lsa, u holda bu elementni boshqa kichik η son bilan almashtirib, algoritmni davom ettiramiz.

Misol. $f(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 1$ bo'lsin.

Raus sxemasi (ε kichik parametr bilan) quyidagicha bo'ladi:

1, 2, 1

1, 2

ε, 1 $\qquad k = V\left(1, 1, \varepsilon, 2 - \dfrac{1}{\varepsilon}, 1\right) = 2.$

$2 - \dfrac{1}{\varepsilon}$

1

Endi ikkinchi turdagi maxsus holni ko'rib o'tamiz. Raus sxemasida elementlarning qiymatlari

$$a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0,\ldots,\ e_0 \neq 0,\ \ h_0 = 0,\ \ h_1 = 0,\ \ h_2 = 0,\ldots$$

shaklda bo'lsin. Bu hol uchun umumlashgan Shturm qatorining oxirgi ko'phadi

$$f_m(\omega) = e_0\omega^{n-m+1} - e_1\omega^{n-m-1} + \cdots$$

ko'rinishni oladi.

Raus nolga teng bo'lgan $f_{m+1}(\omega)$ o'rniga $f_m(\omega)$ ni qo'yishni taklif qiladi, ya'ni nolga teng bo'lgan h_0, $h_1, \ldots$ o'rniga mos ravishda

$$(n-m+1)e_0, \qquad (n-m-1)e_1, \ldots$$

larni yozib, algoritmni davom ettirishni tavsiya etadi.

Misol.

$$f(z) = z^{10} + z^9 - z^8 - 2z^7 + z^6 + 3z^5 + z^4 - 2z^3 - z^2 + z + 1$$

ko'phad berilgan bo'lsin. Bu ko'phad uchun Raus sxemasi quyidagicha:

$$
\begin{array}{lll}
\omega^{10} & 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 & \\
\omega^{9} & 1 \quad -2 \quad 3 \quad -2 \quad 1 & \\
\omega^{8} & 1 \quad -2 \quad 3 \quad -2 \quad 1 & \\
\omega^{7} & \begin{matrix} 8 & -12 & 12 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \end{matrix} & \\
\omega^{6} & -1 \quad 3 \quad -3 \quad 2 & \\
\omega^{5} & \begin{matrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} & k = V(1,1,1,2,-1,1,1,2,-1,1,1) = 4 \\
\omega^{4} & \begin{matrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} & \\
\omega^{3} & \begin{matrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{matrix} & \\
\omega^{2} & -1 \quad 2 & \\
\omega & 1 & \\
\omega^{0} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} &
\end{array}
$$

Izoh. *Birinchi ustundagi elementlarning ishorasini o'zgartirmasdan, ayrim olingan satrning barcha elementlarini birorta bir xil songa ko'paytirish mumkin. Bu izohdan sxemani tuzishda foydalanildi.*

4- §. Raus-Gurvits teoremasi

Oldingi paragrafda koeffitsiyentlari muayyan sonlar bo'lgan haqiqiy ko'phadning o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlari sonini topishning Raus algoritmini bayon etdik.

Agarda ko'phadning koeffitsiyentlari parametrlarga bog'liq bo'lsa va parametrlarning qaysi qiymatlarida k ning u yoki bu qiymatga ega ekanligini topish talab etilsa (mexanik yoki elektrik sistemalarni loyihalashda xuddi shunday masala qo'yiladi), u holda $c_0, d_0, \ldots$ miqdorlarni berilgan ko'phadning koeffitsiyentlari orqali ifodalash maqsadga muvofiqdir. Bu masalani yechib, biz k sonni topish metodini, xususan, Gurvits tomonidan yaratilgan turg'unlik kriteriysini hosil qilamiz.

Ushbu

$$f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \ldots \qquad (a_0 \neq 0)$$

ko'phad berilgan bo'lsin. Quyidagi n-tartibli kvadrat matritsa **Gurvits matritsasi** deb aytiladi:

$$H = \begin{Vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ 0 & a_1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-3} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix} \qquad (6.4.1)$$

$$\left(a_k = 0, \text{ agar } k > \left[\frac{n}{2}\right] \right)$$

$$\left(b_k = 0, \text{ agar } k > \left[\frac{n-1}{2}\right] \right)$$

Regular holni ko'rib o'tamiz, ya'ni $b_0 \neq 0$, $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$,... bo'lsin. H matritsaning ikkinchi, to'rtinchi, ... satrlaridan mos ravishda $\frac{a_0}{b_0}$ ga ko'paytirilgan birinchi, uchinchi, ... satrlarni ayirib, quyidagi matritsaga ega bo'lamiz:

$$\begin{Vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ 0 & 0 & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}.$$

Bu yerda $c_0, c_1, \ldots$ – nollar bilan to'ldirilgan Raus sxemasining uchinchi satr elementlari $\left(c_k = 0, \quad \text{agar} \quad k > \left[\frac{n}{2}\right] - 1 \right)$.

Hosil bo'lgan matritsaning uchinchi, beshinchi, ... satrlaridan mos ravishda oldindan $\frac{b_0}{c_0}$ ga ko'paytirilgan ikkinchi, to'rtinchi, ... satrlarni ayiramiz. Natijada ushbu

$$\begin{Vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & \cdots \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & d_0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{Vmatrix}$$

matritsani hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib, oxiri uchburchakli

$$R = \begin{Vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots \\ 0 & 0 & d_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}$$

matritsaga kelamiz. Bu matritsa **Raus matritsasi** deb aytiladi. Bu matritsani Raus sxemasidan ((6.3.8) ga qarang): 1) birinchi satrni tashlash; 2) satrlarni, ularning birinchi elementlari bosh diagonallarda yotadigan qilib o'ngga surish; 3) n- tartibli kvadrat matritsaga kelguncha nollar bilan to'ldirish yo'li orqali olinadi.

1- ta'rif. *Agar har qanday* $p \le n$ *lar uchun* $A = \|a_{ik}\|_1^n$ *va* $B = \|b_{ik}\|_1^n$ *matritsalarning birinchi* p *satrlariga mos kelgan* p*-tartibli minorlari teng, ya'ni*

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}.$$

bo'lsa, bu matritsalar teng kuchli matritsalar deb ataladi.

Matritsaning qandaydir satridan qaysidir oldingi satrini ixtiyoriy songa ko'paytirib ayirganimizda, birinchi p $(p = \overline{1,n})$ satrlari p-minorining qiymati o'zgarmagani uchun 1-ta'rifga asosan Gurvits matritsasi H va Raus matritsasi R teng kuchli bo'ladi:

$$\mathrm{H}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{pmatrix}. \qquad (6.4.2)$$

H va R matritsalarning teng kuchliligi tufayli R matritsaning barcha elementlarini (ya'ni Raus sxemasining elementlarini) Gurvits matritsasi H ning minorlari orqali ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, (6.4.2) dagi p ga ketma-ket 1, 2, 3, ... qiymatlar berib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{lll} H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=b_0, & H\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=b_1, & H\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=b_2,\ldots, \\ H\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=b_0c_0, & H\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=b_0c_1, & H\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}=b_0c_2,\ldots, \\ H\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=b_0c_0d_0, & H\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&4\end{pmatrix}=b_0c_0d_1, & H\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&5\end{pmatrix}=b_0c_0d_2,\ldots \end{array}\right| \quad 6.4.3)$$

va hokazo. Bu yerdan Raus sxemasining elementlarini tuzamiz:

$$\left.\begin{array}{lll} b_0=H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, & b_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, & b_2=H\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ldots, \\ c_0=\dfrac{H\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, & c_1=\dfrac{H\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, & c_2=\dfrac{H\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}},\ldots, \\ d_0=\dfrac{H\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}}, & d_1=\dfrac{H\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&4\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}}, & d_2=\dfrac{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&5\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}},\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right| \quad (6.4.4)$$

H matritsaning ketma-ket bosh minorlari **Gurvits determinantlari** deb aytiladi. Biz ularni quyidagicha belgilaymiz:

$$\Delta_1=H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=b_0,\ \Delta_2=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}b_0&b_1\\a_0&a_1\end{vmatrix},\ldots\Delta_n=H\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\1&2&\ldots&n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}b_0&b_1&\ldots&b_{n-1}\\a_0&a_1&\ldots&a_{n-1}\\0&b_0&\ldots&b_{n-1}\\0&a_0&\ldots&a_{n-1}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\end{vmatrix} \quad (6.4.5)$$

1-izoh. *(6.4.3) formulalarga asosan*

$$\Delta_1=b_0, \quad \Delta_2=b_0c_0, \quad \Delta_3=b_0c_0d_0,\ldots \qquad (6.4.6)$$

ni hosil qilamiz. Agar $f(z)$ *ko'phadning koeffitsiyentlari muayyan sonlardan iborat bo'lsa, u holda (6.4.5) formulalar Gurvits determinantlarini hisoblashning eng oson yo'lini beradi. Bu hisoblashlar Raus sxemasini tuzishga keltiriladi.* $\Delta_1 \neq 0, \ldots, \Delta_p \neq 0$ *lardan birinchi* p *ta* $b_0, c_0, \ldots$ *larning nolga teng emasligi kelib chiqadi va, aksincha. Bu holda Raus sxemasining uchinchi satridan boshlab* p *ta ketma-ket kelayotgan satrlari aniqlangan bo'ladi. Ular uchun (6.4.4) formulalar o'rinlidir.*

2- izoh. *Regular hol (hamma* $b_0, c_0, \ldots$ *lar ma'noga ega va nolga teng bo'lmagan hol)*

$$\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 \neq 0, \quad \Delta_n \neq 0$$

tengsizliklar bilan xarakterlanadi.

3-izoh. *Raus sxemasining elementlarini Raus algoritmi vositasi bilan aniqlashdan ko'ra (6.4.4) formulalar orqali topish umumiyroqdir. Masalan, agar* $b_0 = \mathrm{H}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ *bo'lsa, u holda Raus algoritmi berilgan ko'phadning koeffitsiyentlaridan iborat bo'lgan birinchi ikki qatordan tashqari boshqa biror nimani bermaydi. Ammo, agar* $\Delta_1 = 0$ *bo'lsa ham boshqa* $\Delta_2, \Delta_3, \ldots$, *determinantlar noldan farq qilsa, u holda biz (6.4.4) formulalar orqali* c *lardan tashkil topgan satrini cheklab, Raus sxemasidagi boshqa barcha satrlarni aniqlashimiz mumkin.*

(6.4.6) formulalarga asosan

$$b_0 = \Delta_1, \qquad c_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \qquad d_0 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ldots$$

va shuning uchun ham

$$V(a_0, b_0, c_0, \ldots) = V\left(a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ldots\right) = V(a_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \ldots).$$

Demak, quyidagini tasdiqlash mumkin.

Raus – Gurvits teoremasi.

$f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + \cdots$ *haqiqiy ko'phadning o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlari soni* k

$$k = V\left(a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ldots\right) \tag{6.4.7}$$

formula bilan yoki

$$k = V(a_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \ldots) \qquad (6.4.8)$$

ifoda orqali aniqlanadi.

4-izoh. *Keltirilgan Raus–Gurvits teoremasi*

$$\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 \neq 0, \quad \Delta_n \neq 0$$

regular hol uchun to'g'ridir. Gurvits determinantlarining ayrim Δ_i *lari nolga teng bo'lgan maxsus hollarda bu formulalardan qanday foydalanish yo'lini keyingi paragrafda beramiz.*

$f(z)$ haqiqiy ko'phadning barcha ildizlari qachon $\operatorname{Re} z < 0$ chap yarim tekislikda yotishini ko'ramiz. Bu holda, Raus kriteriysiga asosan, barcha $a_0, b_0, c_0, \ldots$ lar noldan farqli va bir xil ishorali bo'lishlari kerak.

Regular hol uchun (6.4.7) dan $k = 0$ bo'lganda, quyidagi kriteriyni hosil qilamiz:

Raus – Gurvits kriteriysi.

$$f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \cdots \quad (a_0 \neq 0)$$

haqiqiy ko'phad barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishi uchun

$$\left.\begin{array}{l} a_0\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad a_0\Delta_3 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \ldots \\ a_0\Delta_n > 0 \ \ (n \text{ toq son bo'lganda}) \\ \Delta_n > 0 \ \ (n \text{ juft son bo'lganda}) \end{array}\right\} \qquad (6.4.9)$$

tengsizliklarning bajarilishi yetarli va zarur.

5-izoh. *Agar* $a_0 > 0$ *bo'lsa, u holda bu tengsizliklar quyidagicha yoziladi:*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \quad \Delta_n > 0 \,. \qquad (6.4.10)$$

Agar $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ *ko'rinishda bo'lsa, u holda* $a_0 > 0$ *bo'lganda (6.4.10) Raus–Gurvits shartlarini determinantlar bilan ifodalangan quyidagi tengsizliklar orqali berish mumkin:*

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix} > 0 \qquad (6.4.11)$$

Barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lgan haqiqiy ko'phad ***Gurvits ko'phadi*** *deb aytiladi.*

5-§. Orlando formulasi. Raus – Gurvits teoremasidagi maxsus hollar

Amaliy masalalarni yechayotganda, Gurvits determinantlarining ayrimlari nolga teng bo'lishi mumkin. Bu hollarda Δ_{n-1} determinantni bosh koeffitsiyent a_0 va $f(z)$ ($f(z)$ ko'phadning koeffitsiyentlari ixtiyoriy kompleks sonlar ham bo'lishi mumkin) ko'phadning $z_1,...,z_n$ ildizlari bilan ifodalovchi quyidagi Orlando formulasi [20,99] kerak bo'lib qoladi:

$$\Delta_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{n-1} \prod_{i<k}^{1\cdots n} (z_i + z_k) \ . \qquad (6.5.1)$$

$n = 2$ bo'lganda, bu formula $a_0 z^2 + b_0 z + a_1 = 0$ kvadrat tenglamadagi bizga ma'lum bo'lgan b_0 ni topish $\Delta_1 = b_0 = -a_0(z_1 + z_2)$ formulasiga keladi.

(6.5.1) formula n- darajali $f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + \cdots$ ko'phad uchun to'g'ri deb faraz qilamiz va uni $(n+1)$ - darajali

$$F(z) = (z+h) f(z) = a_0 z^{n+1} + (b_0 + h a_0) z^n +$$
$$+ (a_1 + h b_0) z^{n-1} + \cdots \quad (h = -z_{n+1})$$

ko'phad uchun ham to'g'riligini isbot qilamiz

Shu maqsadda $(n+1)$ - tartibli

$$D = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & h^n \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & -h^{n-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} & h^{n-2} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} & -h^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & (-1)^n \end{vmatrix}$$

$$\left(a_k = 0, \ agar \ k > \left[\frac{n}{2}\right] \right)$$
$$\left(b_k = 0, \ agar \ k > \left[\frac{n-1}{2}\right] \right)$$

yordamchi determinantni tuzamiz. D ning birinchi satrini a_0 ga ko'paytiramiz va unga ikkinchi satrni $-b_0$ ga, uchinchi satrni a_1 ga, to'rtinchi satrni $-b_1$ ga va h.k. ko'paytirib qo'shamiz. U vaqtda birinchi satrning oxirgisidan boshqa hamma elementlari nolga aylanadi. Oxirgi elementi $f(h)$ ga teng bo'ladi. Bu yerdan.

$$D = (-1)^n \Delta_{n-1} f(h)$$

ligi kelib chiqadi.

Boshqa tarafdan, D ning har bir satriga (oxirgisidan tashqari) keyingisini h ga ko'paytirgan holda qo'shib, $F(z)$ ko'phadning $(-1)^n$ ga ko'paytirilgan n-tartibli Δ_n^* Gurvits determinantini hosil qilamiz:

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} b_0 + ha_0 & b_1 + ha_1 & \cdots \\ a_0 & a_1 + hb_0 & \cdots \\ 0 & b_1 + ha_0 & \cdots \\ 0 & a_0 & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix} = (-1)^n \Delta_n^* .$$

Demak,

$$\Delta_n^* = \Delta_{n-1} f(h) = a_0 \Delta_{n-1} \prod_{i=1}^{n} (h - z_i) .$$

Bu formuladagi Δ_{n-1} ni (6.5.1) ifoda bilan almashtirib va $h = -z_{n+1}$ deb qabul qilib,

$$\Delta_n^* = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} a_0^n \prod_{i<k}^{1\cdots n+1} (z_i + z_k)$$

formulani hosil qilamiz.

Shunday qilib, matematik induksiya usuli orqali Orlando formulasining ixtiyoriy darajali ko'phad uchun to'g'riligini isbot qildik.

Orlando formulasidan: $f(z)$ ko'phadning ikkita ildizi yig'indisi nolga teng bo'lgandagina, $\Delta_{n-1} = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

$\Delta_n = c\,\Delta_{n-1}$ ekanligidan (bu yerda c berilgan $f(z)$ ko'phadning ozod hadi va $c = (-1)^n a_0 z_1 z_2 \cdots z_n$). (6.5.1) formuladan

$$\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_0 z_1 z_2 \cdots z_n \prod_{i<k}^{1\cdots n} (z_i + z_k) \qquad (6.5.2)$$

ifodani hosil qilamiz.

(6.5.2) formuladan Δ_n ning nolga aylanishi uchun $f(z)$ ko'phadning o'zi bilan birga unga qarama-qarshi son ham ildiz bo'ladigan z ildizi mavjud bo'lishining yetarli va zarurligi kelib chiqadi, ya'ni agar z son $f(z)$ ning ildizi bo'lsa, u holda $-z$ ham $f(z)$ ning ildizi bo'lishi yetarli va zarurdir.

Maxsus holda Gurvits determinantlarining ayrimlari nolga teng bo'ladi. Bu holda $\Delta_n \neq 0$ va, demak, $\Delta_{n-1} \neq 0$ deb faraz qilamiz.

Haqiqatan ham, agar $\Delta_n = 0$ bo'lsa, u holda $f(z)$ ko'phad shunday z' ildizga ega bo'ladiki, $-z'$ ham uning ildizi bo'ladi. Agar

$$F_1(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-2} + \cdots, \qquad F_2(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-3} + \cdots$$

bo'lganda, $f(z) = F_1(z) + F_2(z)$ deb qabul qilsak, u holda $f(z') = f(-z') = 0$ tenglikdan $F_1(z') = F_2(z') = 0$ ning kelib chiqishi haqida xulosa qilamiz. Demak, z' son $F_1(z)$ va $F_2(z)$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi $d(z)$ ning ildizi bo'ladi. $f(z) = d(z) f^*(z)$ deb qabul qilib, $f(z)$ ko'phad uchun Raus–Gurvits masalasini $f^*(z)$ ko'phad uchun Raus–Gurvits masalasiga keltiramiz. Bu ko'phad uchun Gurvitsning oxirgi determinanti nolga teng emas. Demak, doimo $\Delta_n \neq 0$ deb hisoblashimiz mumkin.

Maxsus hol uchun Raus–Gurvits teoremasiga qo'shimcha bo'lgan quyidagi tasdiq mavjud.

Teorema. *Agar Gurvits determinantlaridan ayrimlari nolga teng (ammo $\Delta_n \neq 0$) bo'lsa, u holda $f(z)$ haqiqiy ko'phadning o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlari soni*

$$k = V\left(a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)$$

formula orqali aniqlanadi. Bu yerda har bir qatorasiga nolga teng bo'lgan p ($\Delta_s \neq 0$), $\Delta_{s+1} = \cdots = \Delta_{s+p} = 0$ ($\Delta_{s+p+1} \neq 0$) determinantlar guruhi uchun (p - hamma vaqt toq son) V ning qiymatini hisoblashda

$$V\left(\frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}}, \frac{\Delta_{s+1}}{\Delta_s}, \cdots, \frac{\Delta_{s+p+2}}{\Delta_{s+p+1}}\right) = h + \frac{1-(-1)^h \varepsilon}{2}, \tag{6.5.3}$$

formuladan foydalanish kerak, bu yerda

$$p = 2h - 1, \qquad \varepsilon = \operatorname{sign}\left(\frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}} \frac{\Delta_{s+p+2}}{\Delta_{s+p+1}}\right)$$

va $s = 1$ bo'lganda, $\frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}}$ ni Δ_1 ga, $s = 0$ bo'lganda esa a_0 ga almashtirish kerak.

Bu teoremaning isbotini Gantmaxer [20] kitobining 490–493 betlaridan topish mumkin.

6- §. Lenar va Shiparning turg'unlik kriteriysi [20]

Ushbu

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n \qquad (a_0>0)$$

haqiqiy koeffitsiyentli ko'phad berilgan bo'lsin. $f(z)$ ko'phad barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishligining zarur va yetarli shartini ifodalovchi Raus–Gurvits kriteriysi quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_1>0,\quad \Delta_2>0,\ \cdots,\ \Delta_n>0, \tag{6.6.1}$$

bu yerda

$$\Delta_i=\begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_i \end{Vmatrix} \qquad (a_k=0,\ k>n)$$

i- tartibli Gurvits determinanti $(i=1,2,...,n)$.

Agar (6.6.1) shart bajarilsa, u vaqtda $f(z)$ ko'phadning barcha koeffitsiyentlari musbat ishorali, ya'ni

$$a_1>0,\quad a_2>0,\ \cdots,\ a_n>0 \tag{6.6.2}$$

bo'ladi (6.6.2) shart, (6.6.1) shartdan farqli o'laroq, $f(z)$ ko'phad ildizlarining barchasi $\operatorname{Re} z<0$ chap yarim tekislikda yotishligining zaruriy sharti hisoblanadi.

Ammo (6.6.2) shartning bajarilishi natijasida (6.6.1) shartlar bir-biriga bog'liq bo'lib qoladi. Masalan, n=4 bo'lganda Raus–Gurvits sharti bitta $\Delta_3>0$ shartga; n=5 bo'lganda ikkita $\Delta_2>0,\ \Delta_4>0$, n=6 bo'lganda ikkita $\Delta_3>0$, $\Delta_5>0$ shartga keltiriladi.

Bu holat frantsuz matematiklari Lenar va Shipar tomonidan tadqiq yetildi va ular 1914 yili Raus–Gurvits kriteriysidan farq qiladigan turg'unlik kriteriysini yaratdilar.

Lenar va Shipar kriteriysi.

$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n$ $(a_0>0)$ haqiqiy ko'phad ildizlari hammasining haqiqiy qismi manfiy bo'lishi uchun ushbu

1) $a_n>0,\ a_{n-2}>0,\ \cdots,\ \Delta_1>0,\ \Delta_3>0,\ \cdots;$

2) $a_n>0,\ a_{n-2}>0,\ \cdots,\ \Delta_2>0,\ \Delta_4>0,\ \cdots;$

3) $a_n > 0,\ a_{n-1} > 0,\ a_{n-3} > 0,\ \cdots,\ \Delta_1 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \cdots;$

4) $a_n > 0,\ a_{n-1} > 0,\ a_{n-3} > 0,\ \cdots,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_4 > 0,\ \cdots$

to'rtala shartdan istalgan bittasining bajarilishi zarur va yetarli.

1), 2), 3) va 4) shartlar Gurvits shartlariga nisbatan ma'lum qulaylikka ega, chunki ularda (Gurvits tengsizliklariga nisbatan) qariyb 2 marta kam tengsizliklar mavjud. $\Delta_1 > 0,\ \Delta_3 > 0, \cdots$ va $\Delta_2, \Delta_4 > 0, \cdots$, tengsizliklarga nisbatan, amalda $\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0, \cdots$ ko'rinishdagi tengsizliklardan foydalanish ma'qul, chunki bu tengsizliklarda kichik tartibli determinantlar qatnashadi.

Bu kriteriydan barcha koeffitsiyentlari (hatto faqat $a_n, a_{n-2}, \cdots$ lardan bir qismi) musbat bo'lgan $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ haqiqiy ko'phad barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lganda Gurvitsning (6.6.1) determinant tengsizliklari erkin bo'la olmasligi kelib chiqadi, ya'ni juft tartibli Gurvits determinantlarining musbatligidan toq tartibli Gurvits determinantlarining musbatligi kelib chiqadi va aksincha.

Lenar va Shipar 1) shartni maxsus kvadratik formalardan foydalanib topganlar [20] (kriteriyning isboti [20] ning 509–512 betlarida keltirilgan). Ular erishgan ayrim asosiy natijalarni M.G. Kreyn va M.A. Naymarkning [46] fundamental obzorida topish mumkin.

Lenar va Shipar kriteriysidan quyidagi **natija** kelib chiqadi:

Agar $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ *haqiqiy ko'phadning barcha koeffitsiyentlari*

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \cdots,\ a_n > 0$$

shartlarni qanoatlantirsa va $\Delta_n \neq 0$ bo'lsa, u vaqtda bu ko'phadning $\operatorname{Re} z > 0$ o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlari soni k

$$k = 2V(1, \Delta_1, \Delta_3, \ldots) = 2V(1, \Delta_2, \Delta_4 \ldots)$$

formula orqali aniqlanadi.

7- §. Turg'unlik va noturg'unlik hodisalarini tekshirishga fizik yondashuv

Noturg'unlik va o'z-o'zidan tebranma harakatning hosil bo'lishi fan va texnikaning ko'p tarmoqlari uchun benihoyat keng qiziqish uyg'otadi. Boshqarish tizimlarida, radiotexnik sistemalarda, kimyoviy va biologik jarayonlarda, iqtisodiyotda, energetikada, qurilish tarmoqlarida, harakatlanuvchi va boshqa ko'pgina sistemalarda noturg'unlik va tebranma harakat paydo bo'ladi. Ba'zi hollarda noturg'unlik va o'z-o'zidan tebranma harakat zararli hodisa sifatida paydo bo'ladi va u bilan qarshi kura-

shishga to‘g‘ri keladi. Masalan, samolyot qanotining tebranma harakati (flatteri) yoki avtomobil oldingi g‘ildiraklarining avtotebranma harakati shular jumlasidandir. Shu kabi boshqa hollarda, aksincha, o‘z-o‘zidan tebranma harakatni hosil qilish maqsad qilib qo‘yiladi. Radiotexnik hamda kvantli generatorlarda, soatlarda, musiqa asboblari va h.k..

Agar ko‘rilayotgan dinamik sistemaning harakat tenglamasi to‘g‘ri tuzilgan bo‘lsa, u holda amaliyotda hosil bo‘ladigan ko‘pgina masalalarning harakat turg‘unligini tadqiq etish xarakteristik tenglama ildizlarini tekshirishga keltirilishini ko‘rgan edik. Ammo, o‘rganilayotgan sistemani to‘g‘ri ideallashtirish va harakatning chiziqli tenglamalari bizni qiziqtirayotgan masalalarni to‘g‘ri (adekvat) aks ettirishi uchun noturg‘unlik va tebranma harakat hosil bo‘lishining sababini va mexanizmini bilish zarur yoki har holda foydalidir. Mumkin bo‘lgan noturg‘unlikning mexanizmini va sababini bilish nafaqat to‘g‘ri ideallashtirish uchun, balki ayrim hollarda tebranma harakat va noturg‘unlik paydo bo‘lmasligi uchun qaralayotgan sistema konstruktsiyasiga qanday o‘zgartirishlar kiritish kerakligini ham ko‘rsatadi. Bunday ma’lumotni bilish juda ham zarurdir (foydalidir), chunki harakat tenglamalarini tadqiq etish natijalari sistema konstruktsiyasiga qanday o‘zgartirishlar kiritish kerakligini aniqlab bermaydi va eng yaxshi holda sistema parametrlarining qiymatini qanday tanlash zarurligi haqida ma’lumot olish mumkin, xolos.

Shuning uchun ham ko‘rilayotgan sistema harakatida paydo bo‘lishi mumkin bo‘lgan tebranma harakat hamda noturg‘unlikning mexanizmi va sababini oldindan o‘rganib bilish katta amaliy ahamiyatga egadir.

Noturg‘unlik va o‘z-o‘zidan tebranma harakat paydo bo‘lishining mexanizmi yoki mexanizmlari deb nimani tushunamiz?

Ular, har bir muayyan hol uchun o‘ziga xos: masalan, skripka torida paydo bo‘ladigan tebranma harakat uchun – manfiy ishqalanish kuchining mavjud bo‘lishi, rostlagich sistemalarda paydo bo‘ladigan tebranma harakat uchun – manfiy ishqalanish kuchining mavjud bo‘lishi, rostlagich sistemalarda paydo bo‘ladigan tebranma harakat uchun – teskari bog‘lanish konturidagi keraksiz faza munosabatlarining mavjudligi, kimyoviy jarayonlarda – temperaturaning oshishi va hokazo. Ammo, ayrim sistemalar sinfi uchun noturg‘unlik paydo bo‘lishining mexanizmlarini oldindan ko‘rsatish mumkin.

Bundaylardan biri sifatida bir-biriga ta’sir etadigan ossillatorlar sistemasini ko‘rsatish mumkin.

7.1.Ossillator sifatida tavsiflash

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ lar biror skleronom bog‘lanishli golonom sistemaning umumlashgan koordinatalari bo‘lsin. Bunday sistemaning harakat tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=\overline{1,n}), \tag{6.7.1}$$

bu yerda

$$T=\frac{1}{2}A_{ik}(q_1,...,q_n)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k \qquad (A_{ik}=A_{ki})$$

– sistemaning kinetik energiyasi,

$$Q_i=Q_i\,(q_1,q_2,...,q_n;\ \ \dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_n)$$

– umumlashgan kuchlar.

(6.7.1) dan ko'rinib turibdiki, sistemaning muvozanat holatida

$$Q_i\,(q_1,q_2,...,q_n;\ \ 0,\,0,...,0)=0 \qquad (i=\overline{1,n}). \tag{6.7.2}$$

Bunda $q_1=q_2=\cdots=q_n=0$ lar (6.7.1) ni qanoatlantiruvchi sistemaning muvozanat holati va uning atrofida (6.7.1) tenglamalarni chiziqlashtirish mumkin bo'lsin.

Chiziqli tenglamalarni hosil qilish uchun (6.7.1) tenglamalarni tuzishdan oldin

$$T=A_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k$$

funksiyani Makloren qatoriga yoyish va bu qatorning

$$T=a_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k \qquad (i=\overline{1,n};\ \ k=\overline{1,n})$$

ikkinchi tartibli hadlari bilan qanoatlanish mumkin, bu yerda $a_{ik}=A_{ik}(0,...,0;\ 0,...,0)$, ya'ni kinetik energiya $\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_n$ umumlashgan tezliklar bo'yicha o'zgarmas koeffitsiyentli kvadratik formadir.

Konservativ sistemalar uchun $V=V(q_1,q_2,...,q_n)$ potensial energiya bo'lganda,

$$Q_i=-\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

o'rinli. Muvozanat holatida esa

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=0 \qquad (i=\overline{1,n}). \tag{6.7.3}$$

Bu holda ham chiziqli tenglamalarni tuzishgacha $V(q_1,q_2,...,q_n)$ potensial energiyani muvozanat holati atrofida Makloren qatoriga yoyish va unda oqibatda harakat tenglamasiga ta'siri bo'lmaganligi uchun o'zgarmas hadni tashlab yuborish mumkin. (6.7.3) ga asosan, yoyilmada chiziqli hadlar qatnashmaydi. Demak, V ning yoyilmasi $q_1,q_2,...,q_n$ umumlashgan koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajali had bilan

boshlanadi. U vaqtda yuqori darajali kichik hadlarni tashlab yuborgandan keyin quyidagini topamiz:

$$V = \frac{1}{2} c_{i\,j} q_i q_j ,$$

bu yerda

$$c_{ij} = c_{ji} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{q_s = 0} .$$

Shunday qilib, potensial energiya $q_1, q_2, ..., q_n$ umumlashgan koordinatalarga nisbatan o'zgarmas koeffitsiyentli kvadratik forma bo'ladi.

T va V larning taqribiy olingan ifodalariga asosan konservativ sistemaning muvozanat holati atrofidagi harakatining chiziqlashtirilgan (bundan keyin chiziqli) tenglamalari

$$a_{ij}\ddot{q}_j + c_{ij} q_j = 0 \qquad (i = \overline{1,n}) \tag{6.7.4}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar sistemaga qovushqoq ishqalanish kuchlari ham ta'sir etsa, u holda

$$F = \frac{1}{2} B_{ij}(q_1, q_2, ..., q_n)\, \dot{q}_i \dot{q}_j$$

dissipatsiya funksiyasini (Reley funksiyasini) kiritib, ularni hisobga olish mumkin. Bu holda (6.7.1) tenglamalardagi umumlashgan kuchlar

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = \overline{1,n})$$

ifodalar bilan aniqlanadi.

Harakatning chiziqli tenglamalarini hosil qilish uchun F funksiyani $q_1, q_2, ..., q_n$, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ larga nisbatan muvozanat holati atrofida Makloren qatoriga yoyib, ikkinchi darajali hadlar bilan chegaralanamiz:

$$F = \frac{1}{2} b_{i\,j} \dot{q}_i q_j ,$$

bu yerda $b_{ij} = B_{ij}(0, 0, ..., 0)$ va $b_{ij} = b_{ji}$. Shunday qilib, dissipatsiya funksiyasi F ham $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ umumlashgan tezliklarga nisbatan o'zgarmas koeffitsiyentli kvadratik forma bo'ladi.

Demak, agar sistemada qovushqoq ishqalanish kuchlari ham qatnashsa, u holda chiziqlashtirilgan (6.7.1) tenglamalar

$$a_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}\dot{q}_j + c_{ij} q_j = 0 \qquad (i = \overline{1,n}) \tag{6.7.5}$$

ko'rinishda bo'ladi.

(6.7.5) tenglamalar sistemaning muvozanat holati atrofidagi **kichik tebranma harakatining tenglamalari** deb aytiladi. Ixtiyoriy umumlashgan kuchlar ta'siri ostidagi sistemaning harakat tenglamasi ham (6.7.5) ko'rinishda bo'ladi, ammo bu yerda $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$ munosabatlar umuman bajarilmasligi mumkin.

Agar qaralayotgan (6.7.5) sistemaning i koordinatasidan tashqari qolgan barcha koordinatalarini nolga tenglashtirsak (belgilab qo'ysak), u holda u birinchi erkinlik darajasiga ega bo'lgan sistemaga aylanadi va quyidagi ikkinchi tartibli chiziqli tenglama bilan ifodalanadi:

$$a_{ii}\ddot{q}_i + b_{ii}\dot{q}_i + c_{ii}q_i = 0. \qquad (6.7.6)$$

Bunday sistemani ossillator (partsial ossillator) sifatida qaraymiz va u q_i umumlashgan koordinataga muvofiqdir.

a_{ii}, b_{ii} va c_{ii} larni mos ravishda uning (i ossillatorning) **massasi, ishqalanish koeffitsiyenti** va **qattiqlik** (elastiklik) koeffitsiyenti deb aytamiz. Masalan, barcha a_{ii}, b_{ii} va c_{ii} koeffitsiyentlari musbat bo'lgan prujinaga osilgan yukning qovushqoq muhitdagi tebranma harakatining matematik modeli shunday parsial ossillatorga misol bo'la oladi.

(6.7.5) sistemaning i-tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$a_{ii}\ddot{q}_i + b_{ii}\dot{q}_i + c_{ii}q_i = -\sum_{j\neq 1}\left(a_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}\dot{q}_j + c_{ij}q_j\right) \qquad (6.7.7)$$

va uni

$$F_i = -\sum_{j\neq 1}\left(a_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}\dot{q}_j + c_{ij}q_j\right) \qquad (6.7.8)$$

kuch ta'siri ostidagi i parsial ossillatorning harakat tenglamasi sifatida qaraymiz. Bu F_i kuch i ossillatorga ta'sir etayotgan barcha qolgan ossillatorlar ta'sirining yig'indisidan iborat. Bu yerda j ossillator i ossillatorga

$$f_{ij} = -a_{ij}\ddot{q}_j - b_{ij}\dot{q}_j - c_{ij}q_j \qquad (6.7.9)$$

kuch bilan ta'sir etadi. Xuddi shunday i ossillator j ossillatorga

$$f_{ji} = -a_{ji}\ddot{q}_i - b_{ji}\dot{q}_i - c_{ji}q_i \qquad (6.7.10)$$

kuch bilan ta'sir etadi.

Bu ikkita ossillatorning o'zaro ta'sirlarini koordinata, tezlik va tezlanishlar bo'yicha o'zaro hamda yo'naltirilgan ta'sirlarga bo'lamiz (6.1-jadvalga qarang).

6.1-jadval

O‘zaro ta’sir etuvchi kuchlar (bog‘lanishlar)	Koordinata bo‘yicha	Tezlik bo‘yicha	Tezlanish bo‘yicha
O‘zaro	$c_{ij} = c_{ji}$ elastiklik	$b_{ij} = b_{ji}$ ishqalanish $b_{ij} = -b_{ji}$ giroskopik	$a_{ij} = a_{ji}$ inersion
i ossillatordan j ossillatorga yo‘naltirilgan	$c_{ij} = 0$ $c_{ji} \neq 0$	$b_{ij} = 0$ $b_{ji} \neq 0$	$a_{ij} = 0$ $a_{ji} \neq 0$

O‘zaro koordinata bo‘yicha ta’sir etayotgan elastik kuchlar quyidagi potentsial funksiya bilan ifodalanadi:

$$\frac{1}{2}c_{ii}q_i^2 + c_{ij}q_iq_j + \frac{1}{2}c_{jj}q_j^2 .$$

O‘zaro va ishqalanish kuchlar

$$\frac{1}{2}b_{ii}\dot{q}_i^2 + b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{1}{2}b_{jj}\dot{q}_j^2$$

dissipativ funksiya orqali ifodalanadi va inersion o‘zaro ta’sirlar inersial kuchlar bilan birgalikda

$$\frac{1}{2}a_{ii}\dot{q}_i^2 + a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{1}{2}a_{jj}\dot{q}_j^2$$

kinetik energiyani beradi.

Ossillatorlar orasidagi o‘zaro ta’sirlar qandaydir yo‘l bilan o‘zaro va yo‘naltirilgan ta’sirlarga bo‘lingan bo‘lsin.

O‘zaro ta’sirlar (bog‘lanishlar) ning koeffitsiyentlari sifatida a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} larni saqlaymiz va yo‘naltirilgan bog‘lanishlar koeffitsiyentlarini mos ravishda α_{ij}, β_{ij} va γ_{ij} lar orqali belgilaymiz. Bunga muvofiq, (6.7.5) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozamiz:

$$\sum_j \left(a_{ij}\ddot{q}_j + \alpha_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}\dot{q}_j + \beta_{ij}\dot{q}_j + c_{ij}q_j + \gamma_{ij}q_j\right) = 0 . \qquad (6.7.11)$$

(6.7.11) tenglamalarning har birini $\dot{q}_i$ ga ko‘paytirib qo‘shamiz va oddiy almashtirishlardan keyin quyidagi munosabatga kelamiz

$$\frac{d}{dt}(T+V) = -2F - A - B - C , \qquad (6.7.12)$$

bu yerda T – kinetik energiya, F – dissipativ funksiya. V –potensial energiya

$$2T = \sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad 2F = \sum b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad 2V = \sum c_{ij}q_iq_j$$

va A, B, C lar

$$A = \sum \alpha_{ij}\dot{q}_i\ddot{q}_j,\quad B = \sum \beta_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad C = \sum \gamma_{ij}\dot{q}_iq_j$$

kabi aniqlanadigan funksiyalardir.

$H = T + V$ miqdorni sistemaning **energiyasi** deb aytamiz. H miqdorini o'zgartirmaydigan o'zaro ta'sir etuvchi kuchlarni **konservativ**, doimo kamaytiruvchilarini **dissipativ**, ko'paytuvchi o'zaro ta'sir etuvchi kuchlar **aktiv** kuchlar deb aytamiz. Energiyaning o'zgarishini ifodalovchi (6.7.12) tenglamadan bevosita quyidagilar kelib chiqadi:

1) xususiy va o'zaro elastik, inertsial hamda giroskopik kuchlar **konservativ** kuchlar bo'ladi;

2) F funksiyaning qiymati musbat bo'lganda xususiy va o'zaro ishqalanish kuchlar **dissipativ** va F ning qiymati manfiy bo'lganda **aktiv** kuchlar bo'ladi.

3) barcha yo'naltirilgan kuchlar **aktiv** kuchlardir, chunki A, B, C formalar manfiy qiymatlar qabul qilishi mumkin. Yo'naltirilgan va manfiy ishorali ishqalanish kuchlari aktiv bo'lganligi sababli ularni realizatsiya qilish uchun tashqi energiya manbai talab etiladi.

7.2. Bog'lanishlarning geometrik sxemasi va noturg'unlikning strukturaviy shartlari

Endi o'zaro ta'sirlarning **geometrik sxemasi** degan tushunchani kiritamiz. Buning uchun har bir parsial ossillatorni nuqta bilan belgilaymiz. Agar i va j ossillatorlar orasida o'zaro bog'lanishlar (ta'sirlar) mavjud bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi nuqtalarni egri chiziq kesmasi bilan tutashtiramiz. Agar ular orasida yo'naltirilgan bog'lanishlar mavjud bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi nuqtalarni yo'naltirilgan bog'lanishning yo'nalishini ifodalovchi strelkali egri chiziq kesmasi bilan tutashtiramiz. Bunday kesmani yo'naltirilgan kesma deb aytamiz. Shunday usul bilan hosil qilingan geometrik sxemani (nuqta hamda bu nuqtalarni birlashtiruvchi yo'naltirilmagan va yo'naltirilgan kesmalar majmuasini) ossillator sifatida ifodalangan sistema bog'lanishlarining geo-metrik sxemasi deb aytiladi.

Bu geometrik sxemaning yo'naltirilgan bog'lanishlari faqatgina strelka bilan ko'rsatilgan yo'nalish bo'yicha, yo'naltirilmaganlari esa istalgan yo'nalishda o'tadi.

Ta'rif. *Yo'naltirilmagan va hech bo'lmaganda bitta yo'naltirilgan bog'lanishlardan iborat o'zaro kesishmovchi kesmalardan iborat yopiq kontur tsikl deb aytiladi.*

Geometrik sxema va kiritilgan tushunchalardan foydalanib, Nijniy Novgorod davlat universitetining professori akademik Y.I. Neymark quyidagi teoremalarni yaratdi [64].

1- teorema. *Agar sistemaning* $H = T + V$ *energiyasi* $q_1, q_2, ..., q_n$ *va* $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ *o'zgaruvchilarning aniq musbat ishorali funksiyasi bo'lsa, u holda sistema noturg'un bo'lishi uchun sikl yoki manfiy ishqalanish kuchining mavjud bo'lishi zarur va etarli.*

2- teorema. *Agar* T *kinetik energiya* $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ *o'zgaruvchilarning aniq musbat ishorali funksiyasi va* V *potensial energiya* $q_1, q_2, ..., q_n$ *o'zgaruvchilarning o'zgaruvchan ishorali funksiyasi bo'lsa, u holda sistema turg'un bo'lishi uchun yoki manfiy ishorali ishqalanish kuchi, yoki siklning mavjud bo'lishi zarurdir.*

Bu teoremalar quyidagi oddiy faktni ifodalaydi: birinchi holda sistemani noturg'un qilishga kerak bo'lgan tashqi energiya kelishi uchun va ikkinchi holda sistemani muvozanat holatiga keltirish uchun manfiy ishqalanish kuchi yoki sikl mavjud bo'lishining zarurligini bildiradi.

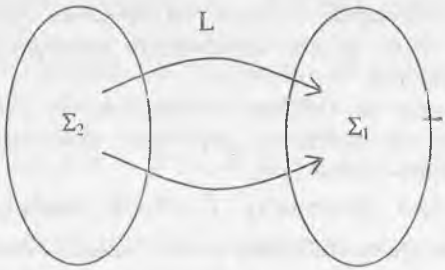
Xuddi shunday sistemadan energiyani chiqarib yuborish uchun musbat ishqalanish kuchi yoki siklning mavjud bo'lishi zarurdir.

1- teoremaning isbotini keltiramiz. Agar sistemada manfiy ishqalanish kuchi va yo'naltirilgan bog'lanishlar mavjud bo'lmasa, u holda (6.7.12) ga asosan

$$\frac{d}{dt}(T+V) = -2F \le 0 \quad , \qquad (6.7.13)$$

bo'ladi. Shu tufayli ham $H = T + V$ funksiya aniq musbat ishorali funksiya bo'lganligi uchun Lyapunov teoremasiga asosan sistemaning muvozanat holati turg'un bo'ladi. Demak, sistema muvozanat holatining noturg'un bo'lishi uchun manfiy ishqalanish kuchi yoki yo'naltirilgan bog'lanishlarning mavjud bo'lishi zarurdir.

Sistemada yo'naltirilgan bog'lanishlardan boshqa manfiy ishqalanish kuchi ham, sikl ham mavjud bo'lmasin. Bu holda ham sistema muvozanat holati noturg'un bo'lmasligini ko'rsatamiz. Haqiqatan, agar sistema muvozanat holati noturg'un bo'lganda edi, bu holat sistema parametrlarining har qanday yetarlicha kichik miqdorda o'zgarishlarida ham saqlanardi. Shu sababli F dissipativ funksiyani aniq musbat ishorali deb qarash mumkin. Sistemadagi ossillatorlar soni n dan kam bo'lgan hol uchun yuqoridagi tasdiq to'g'ri bo'lsin. n ossillatordan iborat sistemani ko'ramiz. L geometrik sxemadagi



6.4- shakl.

qandaydir yo'naltirilgan bog'lanish, $\sum_1$ esa L bo'yicha tushish mumkin bo'lgan ossillatorlar bo'lsin. Sikl mavjud bo'lmaganligi uchun $\sum_1$ ga hamma ossillatorlar kirmaydi. $\sum_1$ ga kirmagan ossillatorlar sistemasini $\sum_2$ bilan belgilaymiz. $\sum_1$ ossillatorlar $\sum_2$ ossillatorlarga ta'sir eta olmaydi (6.4- shaklga qarang) va, demak, farazimizga asosan $\sum_2$ sistema turg'un, ya'ni uning istalgan toyilishi so'nuvchidir. $\sum_1$ ossillatorlar sistemasi n ta ossillatordan kam bo'lgan sistemani ifodalaydi va unga $\sum_2$ ossillatorlar sistemasi ta'sir etadi. Ammo $\sum_1$ ga ta'sir etuvchi kuchlar nolga intiladi, chunki $\sum_2$ dagi tebranma harakat ma'lum davr ichida so'nadi. Demak, $\sum_1$ ning ham tebranma harakati so'nadi. Shunday qilib, sistemaning muvozanat holati turg'un bo'ladi. Demak, sistema muvozanat holati noturg'un bo'lishi uchun manfiy ishorali ishqalanish kuchi yoki sikl mavjud bo'lishi etarlidir.

Endi 2- teoremaning isbotini keltiramiz. V funksiya manfiy qiymat qabul qilishi mumkin, lekin sistemada manfiy ishqalanish kuchi va sikl mavjud emas deb faraz qilaylik. Bu holda sistema turg'un bo'la olmasligini ko'rsatamiz. Bir ossillatorli sistema uchun bu tasdiq to'g'ridir. Bu tasdiqni ko'pi bilan n ossillatordan iborat sistema uchun to'g'ri deb $n+1$ ossillatordan iborat sistemani qaraymiz. Xuddi oldingiday, bu sistemadan $n+1$ ossillatordan kam sonli $\sum_2$ qism sistemani ajratib olamiz. Agar ajratib olingan $\sum_2$ qism sistema uchun V funksiyaning mos qismi V_2 manfiy ishorali qiymat qabul qila olsa, u holda $\sum_2$ sistema noturg'un bo'ladi (Lyapunovning teorema D siga asosan) va, demak, butun $\sum$ sistema ham noturg'un bo'ladi. Agar V funksiyaning V_2 qismi manfiy ishorali qiymat qabul qila olmasa, u holda $\sum_1$ qism sistemaga mos keluvchi uning V_1 qismi manfiy qiymat qabul

qiladi. Bu holda $\sum_2$ sistema turg'un va $\sum_1$ sistema bo'lsa, noturg'un bo'ladi. Bu yerdan yana butun $\sum$ sistemaning noturg'unligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, T kinetik energiyasi aniq musbat ishorali funksiya bo'lgan bir-biriga bog'langan ossillatorlar sistemasi noturg'un bo'lishi uchun yoki V funksiya manfiy qiymat qabul qila olishi, yoki manfiy ishqalanish kuchi mavjud, yoki sikl mavjud bo'lishi kerak.

Bu xulosaga asosan aytish mumkinki, bir-biriga bog'langan ossillatorlar sifatida tavsiflanishi mumkin bo'lgan sistemalarning noturg'un bo'lishining asosiy sabablari va mexanizmlari quyidagilardan iborat:

a) *statistik turg'unlikning buzilishi, ya'ni V funksiya musbat aniq ishoralilikni yo'qotib, o'zgaruvchan ishorali funksiyaga aylanishi*;

b) *manfiy dissipatsiyaning hosil bo'lishi, ya'ni manfiy ishqalanish kuchlari hisobidan sistemaga tashqi manbadan energiya kelishi*;

d) *sistemaga energiyani olib kela oladigan (yo'naltirilgan bog'lanishi bo'lgan) yopiq siklning mavjud bo'lishi*.

Shuni ham e'tirof yetish kerakki, statistik noturg'un sistemani b) va d) mexanizmlar orqali turg'un qilish mumkin, ya'ni manfiy qiymat qabul qila oladigan V funksiyali sistemani turg'un qilish uchun manfiy ishqalanish kuchlar yoki sikl mavjud bo'lishi kerak.

Shunday qilib, a), b) va d) mexanizmlardan birortasi mavjud bo'lgandagina qaralayotgan sistema noturg'un bo'lishi mumkin. Shu bilan birga aytish joizki, noturg'unlik haqiqatan ham paydo bo'lishi uchun bu mexanizmlar miqdor jihatdan qancha bo'lishi aniq emas. Bu savolga javob berish uchun sistema parametrlari qiymatlarini qaysi oraliqda o'zgartirishimiz mumkinligini aniqlashtirishimiz kerak. O'z-o'zidan ham ma'lum va osongina tekshirish mumkinki, agar V funksiya o'zgaruvchan ishorali bo'lsa va b) hamda d) mexanizmlar mavjud bo'lmasa, u holda sistema noturg'un bo'ladi; agar sistemada xos manfiy ishqalanish kuchi mavjud bo'lsa, u holda uning miqdorini yetarlicha katta qilish hisobidan noturg'unlikka kelish mumkin; sistemada sikl mavjud bo'lsa, u holda doimo yo'naltirilgan bog'lanish tarkibiga kirgan parametrlarni tanlab olish yo'li bilan uni noturg'un qilish mumkin [64,69].

Shunday qilib, noturg'unlikni keltirib chiqaruvchi mexanizmlarning parametrlarini yetarlicha o'zgartirish yo'li bilan sistemani noturg'un qilish mumkin va shu ma'noda ularning mavjud bo'lishi sistemaning noturg'un bo'lishi uchun yetarlidir.

8- §. Chiziqlashtirilgan sistemalarda noturg‘unlikning paydo bo‘lishiga doir misollar

1- m i s o l. Avtomobilning boshqariluvchi oldingi g‘ildiraklari harakatining noturg‘unligi sabablari

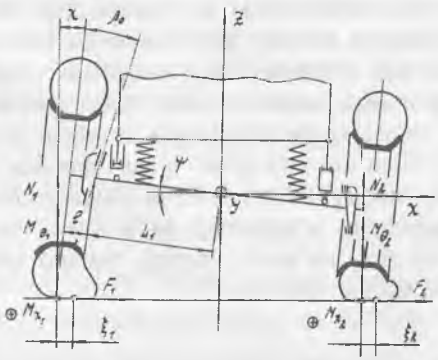
Avtomobil o‘z harakati davomida ma’lum tezlikka yetgandan keyin boshqariluvchi oldingi g‘ildiraklarida o‘z-o‘zidan tebranma harakat boshlanadi. Bu tebranma harakat natijasida avtomobil shinalari tez eyiladi, oldingi podveska (osma) va boshqarish sistemasining qismlari ishdan chiqadi, avtomobil harakatining noturg‘un bo‘lishi va hatto boshqaruvni yo‘qotish xavfi paydo bo‘ladi. Shuning uchun ham avtomobil harakatining turg‘unligini tadqiq etish masalasi muhim amaliy ahamiyatga egadir.

Avtomobilning boshqariluvchi g‘ildiraklari, rul boshqaruvi va oldingi podveskadan iborat sistema harakatining turg‘unlik masalasini ko‘raylik.

Bu sistemaning harakat tenglamasi uvod gipotezasiga asosan quyidagicha bo‘ladi [92]:

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\psi} + \left[h_1 + \frac{a_2 r^2}{V}\right]\dot{\psi} + K_1\psi &= \underline{\gamma_0 J\ddot{\theta}} + \left[\underline{c_0 V + \gamma_0 \frac{a_2 r^2}{V}}\right]\dot{\theta} + \underline{a^2 r\theta}, \\ J_2\ddot{\theta} + h_2\dot{\theta} + (K_2 + \gamma_0 a_2 r)\theta &= \underline{\gamma_0 J\ddot{\psi}} - \left[\underline{c_0 V - \gamma_0 \frac{a_2 r^2}{V}}\right]\psi. \end{aligned} \tag{6.8.1}$$

Bu yerda θ – oldingi g‘ildiraklarning shkvoren o‘qi atrofida aylanish burchagi, ψ – oldingi podveskaning g‘ildiraklar bilan birgalikda avtomobilning bo‘ylama o‘qi atrofida aylanish burchagi, γ_0 – shkvorenning bo‘ylama burchagi, V – avtomobilning tezligi. Qolgan parametrlarning fizika (mexanik) ma’nosi [92] da keltirilgan (6.5- shakl).



6.5- shakl.

(6.8.1) sistemani ikkita bir-biriga bog‘langan ossillator sistemasi sifatida qarash mumkin: θ va ψ. Bu ossillatorlarda massa (inersiya), musbat ishqalanish kuchi va elastiklik (shinalar, ressor va boshqaruv organlarining elastikligi) mavjud. G‘ildiraklarning aylanishi va γ_0 burchakning mavjudligidan bu ossillatorlar orasida giroskopik va inersion bog‘lanishlar mavjud (tenglamalardagi tagi bitta chiziq bilan chizilgan hadlar). Bundan tashqari, ular o‘rtasida θ dan ψ ga qarab koordinata bo‘yicha yo‘naltirilgan bog‘lanish mavjud (tagi ikki marta chizilgan had), chunki θ burchakning o‘zgarishi natijasida oldingi g‘ildiraklar buriladi va natijada avtomobilning bo‘ylama o‘qi (ψ o‘qi) bo‘yicha moment hosil qiluvchi g‘ildiraklarga ta’sir etuvchi yon reaksiya kuchi paydo bo‘ladi. Giroskopik va inersion bog‘lanishlar yo‘naltirilgan bog‘lanish bilan birgalikda siklni tashkil etadi. Demak, 1- teoremaga asosan ko‘rilayotgan sistema potentsial noturg‘un sistemadir, ya’ni yo‘naltirilgan bog‘lanishning parametrlarini shunday tanlab olish mumkinki, sistema noturg‘un bo‘ladi. Yo‘naltirilgan bog‘lanishni realizatsiya etish uchun tashqi energiya manbayi zarurdir. Ko‘rilayotgan sistema uchun doimiy tashqi energiya manbai bo‘lib avtomobil dvigateli xizmat qiladi va sirpanishsiz harakat qilayotgan g‘ildiraklar «tashqi» aloqa (bog‘lanish) vazifasini bajaradi. U asosiy sistemani energiya manbayi bilan bog‘laydi.

Shunday qilib, uvod gipotezasiga asosan oldingi g‘ildiraklar harakat noturg‘unligining asosiy sababi sistemada siklning mavjudligidir. Bu sikl θ va ψ lar ossillatorlar orasidagi o‘zaro giroskopik va inertsion bog‘lanishlar hamda θ dan ψ ga qarab yo‘naltirilgan bog‘lanishdan iborat.

Sistemaning geometrik sxemasidan (6.6- shakl) ko‘rinadiki, harakatni turg‘un qilish uchun yoki θ va ψ lar orasidagi o‘zaro bog‘lanishlarni, yoki θ dan ψ ga qarab yo‘naltirilgan bog‘lanishni yo‘q qilish kerak. θ dan ψ ga qaratib yo‘naltirilgan bog‘lanishni faqat absolut qattiq g‘ildiraklarga o‘tish hisobida yo‘q qilish mumkin,

6.6- shakl.

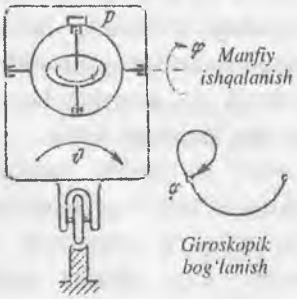
ya'ni g'ildiraklarga elastik shinalar kiydirmaslik yo'li bilan erishish mumkin. Albatta, buni amalga oshirish noo'rindir. θ va ψ lar orasidagi o'zaro bog'lanishlarni bog'lanmagan parallelogramm yoki svechali podveskaga o'tish yo'li bilan yo'qotish mumkin. Shuning uchun ham barcha tez yurar **yengil mashinalar** bog'lanmagan podveska bilan jihozlangan.

Demak, uvod gipotezasi asosida bog'langan podveskadan bog'lanmagan podveskaga o'tish orqali avtomobil oldingi g'ildiraklarining harakatini turg'un qilish mumkin (chunki bu holda sikl mavjud bo'lmaydi).

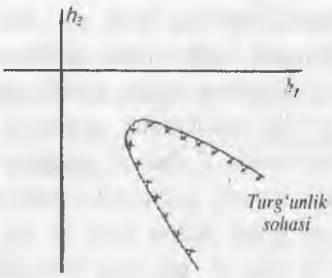
Shunday qilib, Y.I. Neymarkning teoremalari sistemaning harakat tenglamalarini tadqiq etmasdan turib, konstruktsiyaga o'zgartirishlar kiritish yo'li bilan uning harakatini turg'un qilishga imkon yaratadi.

2-misol. Girostabillashtirilgan bir relsli vagon [63]

Bir relsli vagon harakatini stabillashtirish uchun vagon ichiga ikki erkinlik darajasiga ega bo'lgan tez aylanadigan giroskop o'rnatiladi (6.7-shakl). Vagon-giroskop sistemasi harakatini giroskop aylanishining burchak tezligi o'zgarmas bo'lgan holda ikki φ va ϑ burchaklar bilan ifodalash mumkin. Burchaklarga mos kelgan ossillatorlar manfiy elastiklikka (qayishqoqlikka) egadir. Vagonning



6.7- shakl.



6.8- shakl.

massa markazi uning tayanch nuqtasidan yuqorida joylashganligi uchun u manfiy elastiklikka ega bo'ladi. Giroskop ramkasining aylanish burchagi ϑ bo'yicha manfiy elastiklik p yuk orqali sun'iy ravishda erishiladi. φ va ϑ ossillatorlar orasida anchagina kattalikdagi giroskopik bog'lanish mavjud. Qaralayotgan sistemaning harakat tenglamasi quyidagicha:

$$\left.\begin{aligned} A_1\ddot{\varphi} + h_2\dot{\varphi} - k_1\varphi = g\vartheta, \\ A_2\ddot{\vartheta} + h_2\dot{\vartheta} - k_2\vartheta = -g\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (6.8.2)$$

(6.8.2) sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{aligned} A_1A_2z^4 + (A_1h_2 + A_2h_1)z^3 + (-A_1k_2 - A_2k_1 + \\ + h_1h_2 + g^2)z^2 + (-h_1k_2 - h_2k_1)z + k_1k_2 = 0 \end{aligned} \qquad (6.8.3)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. (6.8.3) tenglamadan ko‘rinib turibdiki, agar $h_1 > 0$ va $h_2 > 0$ bo‘lsa, u holda sistemaning toyilmagan harakati noturg‘undir. Shunga qaramasdan, h_1 yoki h_2 parametrlarning birortasi manfiy ishorali bo‘lganda sistemaning qolgan parametrlarini shunday tanlab olish mumkinki, qaralayotgan sistemaning toyilmagan harakati turg‘un bo‘ladi (6.8-shakl).

9- §. Turg‘unlik sohalarini yasash. Y.I. Neymarkning D- bo‘laklash usuli [63, 65]

Yuqorida o‘tkazilgan mulohazalardan ma’lumki, chiziqli sistemalar muvozanat holatining turg‘unligini tadqiq etish masalasi ko‘phad va analitik funksiyalar ildizlarining kompleks o‘zgaruvchilar tekisligida qanday joylashishiga bog‘liq.

Ko‘pgina texnik masalalarda parametrlarning shunday qiymatlarini tanlab olish kerakki, ko‘rilayotgan sistemaning harakati asimptotik turg‘un bo‘lsin. Masalan, konstruktiv parametrlarning qanday qiymatlarida kema, samolyot va raketalar oldindan berilgan yo‘nalish bo‘yicha turg‘un harakat qiladi? Turbina va generatorlarning parametrlarini shunday tanlab olish kerakki, ular berilgan ish rejimini turg‘un saqlab qolsin va hokazo.

Agar xarakteristik tenglamaning darajasi $n \le 4$ bo‘lsa, u vaqtda turg‘unlik sohasini Gurvits kriteriysi yordami bilan topish mumkin. $n \ge 5$ hollar uchun bu kriteriydan foydalanish og‘ir kechadi. Aniqlanishi lozim bo‘lgan parametrlarning soni ikkidan ko‘p bo‘lmagan hol uchun Y.I. Neymark tomonidan ixtiyoriy n darajali xarakteristik tenglamalar uchun turg‘unlik sohasini yasash usuli ishlab chiqildi [65]. *D-* **bo‘laklash usuli** deb aytiladigan ushbu usulni izohlashga o‘tamiz.

Ushbu

$$F(z; \mu_1, \mu_2, ..., \mu_m) \qquad (6.9.1)$$

ifoda kompleks o‘zgaruvchi z va haqiqiy $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ parametrlarning analitik funksiyasi bo‘lsin. z kompleks o‘zgaruvchi tekisligida qandaydir G soha berilgan bo‘lsin. $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ parametrlar fazosini $D(i, j)$ sohalarga bo‘laklab chiqamiz. Bu yerda $D(i, j)$ soha i ta ildizi G soha ichida va j ta ildizi G soha tashqarisida yotgan (6.9.1) funksiyalarga mos keladi. i va j lar o‘rnida cheksizlik ham kelishi mumkin. Turg‘unlik nazariyasi uchun G soha sifatida $|z| \le 1$ birlik doiraning tashqarisida yotgan soha yoki $\mathrm{Re}\, z > 0$ o‘ng yarim tekislik olinadigan hollar qiziqish uyg‘otadi.

$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ parametrlar bo‘yicha turg‘unlik sohasi j ning har xil qiymatlariga mos keluvchi $D(0, j)$ sohalarning birlashmasidan (yig‘indisidan) iborat bo‘ladi. Parametrlar fazosini har xil i va j larga mos keluvchi $D(i, j)$ sohalarga bo‘laklash G sohaga nisbatan $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ parametrlar fazosini **D-bo‘laklash** deb aytiladi.

G soha chiziqdan iborat bo‘lishi ham mumkin, masalan, haqiqiy o‘q yoki musbat haqiqiy yarim o‘q, birinchi holda D-bo‘laklash parametrlar fazosini turli sondagi haqiqiy va kompleks ildizlarga mos keluvchi sohalarga bo‘laklaydi.

D - bo‘laklashni o‘rganish va undan amalda foydalanish uchun quyidagi interpretatsiyadan (talqindan) foydalanamiz.

$$F(z; \mu_1, \mu_2, ..., \mu_m) = 0 \qquad (6.9.2)$$

munosabat kompleks tekislikning z nuqtalariga parametrlar fazosining $\mu(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ nuqtasini mos qilib qo‘yuvchi T nuqtaviy akslantirishni ifodalasin [68]. Agar z nuqtaga $\mu(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ nuqta javob bersa, u vaqtda bu parametrlarning ushbu qiymatida (6.9.2) tenglama z ildizga ega ekanligini bildiradi.

Umumiy holda T ham va unga teskari bo‘lgan T^{-1} akslantirish ham bir qiymatli bo‘lmaydilar. Har bir z nuqtaga μ parametrlar fazosida $(m-2)$ o‘lchovli giperfazo to‘g‘ri keladi (μ fazoning o‘lchovidan 2 birlik kam o‘lchovli fazo). Parametrlar fazosining har bir μ nuqtasiga (bu nuqtaga parametrlarning $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ qiymatlari mos keladi) (6.9.1) analitik funksiyaning barcha $z_1, z_2, ...$ ildizlari to‘g‘ri keladi. Agar i son G sohadagi $z_1, z_2, ...$ ildizlar soni va j son G soha to‘ldiruvchisi bo‘lgan sohadagi ildizlar soni bo‘lsa, u holda $\mu \in D(i, j)$. (6.9.1) funksiya m-darajali ko‘phad va $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ uning koeffitsiyentlari bo‘lsin, ya’ni

$$F(z;\mu_1,\mu_2,...,\mu_m)=z^m+\mu_1 z^{m-1}+\cdots+\mu_m .$$

Har bir $(\mu_1,\mu_2,...,\mu_m)$ nuqtaga m ta $z_1,z_2,...,z_m$ ildiz mos keladi. Ma'lumki, $\mu_1,\mu_2,...,\mu_m$ parametrlarni $z_1,z_2,...,z_m$ ildizlarning qiymatlari orqali ifodalash mumkin, chunki

$$\begin{aligned}F(z;\mu_1,\mu_2,...,\mu_m)&=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)=\\&=z^m+\mu_1 z^{m-1}+\cdots+\mu_m .\end{aligned}\tag{6.9.3}$$

Bu yerdan

$$\begin{aligned}\mu_1&=z_1+z_2+\cdots+z_m,\\\mu_2&=z_1z_2+z_1z_3+\cdots+z_mz_{m-1},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\mu_m&=z_1z_2\cdots z_m.\end{aligned}\tag{6.9.4}$$

Endi o'ng yarim tekislikda yoki ixtiyoriy G sohaga nisbatan D-bo'laklashni ko'rib o'tamiz. $D(i,j)$ sohaning har bir μ nuqtasiga m ta $z_1,z_2,...,z_m$ nuqtalar mos keladi, bulardan i tasi G sohada va $j=m-i$ tasi G sohadan tashqarida yotadi. Xususan, $D(m,0)$ sohaning har bir μ nuqtasiga G sohaning m ta $z_1,z_2,...,z_m$ nuqtalari mos keladi va, aksincha, G sohaning m ta ixtiyoriy $z_1,z_2,...,z_m$ nuqtalariga faqat bitta μ nuqta mos keladi ($z_1,z_2,...,z_m$ larning har biri μ nuqtaga akslanadi). Demak, parametrlar fazosining $D(m,0)$ sohasi m ta G sohaning topologik ko'paytmasiga topologik ekvivalentdir.

Agar G soha bog'lanishli bo'lsa, u holda $D(m,0)$ soha ham bog'lanishli bo'ladi. Agar G soha bir bog'lanishli bo'lsa, u vaqtda $D(m,0)$ soha nafaqat bog'lanishli bo'ladi, balki m-o'lchovli Evklid fazosiga o'xshash (gomeomorf) bo'ladi.

Xuddi shunday $D(i,j)$ soha i ta G soha va uning j ta to'ldiruvchilarining (chegarasiz) topologik ko'paytmasiga topologik ekvivalentdir. Bu yerdan, xususan birlik doira yoki o'ng yarim tekislikka nisbatan D-bo'laklash o'tkazilganda barcha $D(i,j)$ sohalar m-o'lchovli Evklid fazosiga o'xshash (gomeomorf) bo'lishi kelib chiqadi.

μ nuqtaning biror D sohadan ikkinchi sohaga o'tishi uchun shu μ nuqtaga mos keluvchi $z_1,z_2,...,z_m$ ildizlardan bittasi yoki bir nechtasi G sohaga uning chegarasini kesib kirishi yoki undan chiqib ketishi kerak. Demak, μ parametrlar fazosida D- bo'laklashning chegarasi μ

nuqtalardan iborat. Bu nuqtalar uchun G sohaning chegarasiga taalluqli biror z qiymatda

$$z^m + \mu_1 z^{m-1} + \cdots \mu_m = 0 \quad (6.9.5)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Shuning uchun ham z nuqta kompleks o'zgaruvchi tekisligidagi G sohaning chegarasi bo'ylab yurganida (6.9.5) tenglamani μ parametrlar fazosidagi D- bo'laklashning parametrik tenglamasi sifatida qarash mumkin.

Parametrlar fazosi ikki o'lchovli bo'lganda, ya'ni ikki haqiqiy τ va ν parametrlar fazosida yoki bitta $\mu = \tau + i\nu$ kompleks parametr fazosida (bu parametrlar (6.9.1) funksiya ifodasiga chiziqli ravishda kirganda) D- bo'laklashni osongina yasash mumkin.

10- §. Bir kompleks parametr tekisligida turg'unlik sohasini yasash

Ixtiyoriy n- darajali ko'phad berilgan va uning koeffitsiyentlari μ kompleks parametrga chiziqli tarzda bog'langan bo'lsin. Bu holda uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$P(z) + \mu Q(z). \quad (6.10.1)$$

μ kompleks parametr tekisligining har bir μ nuqtasiga G sohaning ichida s ta va bu sohaning tashqarisida $n-s$ ta ildizi mavjud bo'lgan (6.10.1) ko'phad mos keladi. Shunday qilib, μ tekisligi G sohada (6.10.1) ko'phad turli s sondagi ildizlarga ega bo'lgan $D(s)$ sohalarga bo'laklanadi. Bir $D(s)$ sohadan ikkinchi sohaga o'tish uchun (6.10.1) ko'phad ildizlarining bittasi G sohaning chegarasini kesib o'tishi kerak. G soha chegarasining parametrik tenglamasini

$$z = \Gamma(\omega) \quad (6.10.2)$$

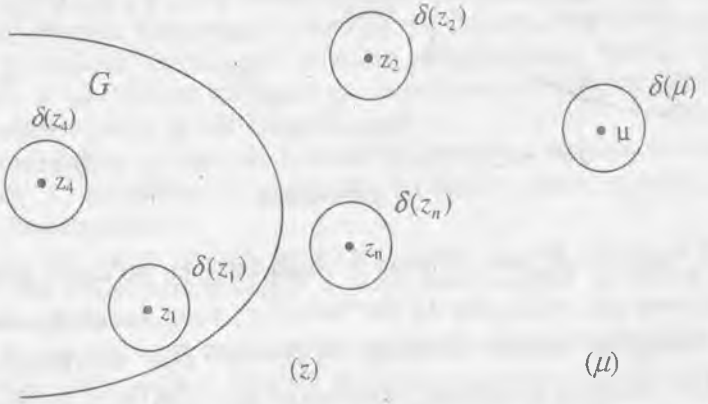
ko'rinishda yozishga erishdik deb faraz qilaylik, bu yerda ω parametr biror intervalda o'zgaradi. U vaqtda D- bo'laklash chegarasining parametrik tenglamasi

$$\mu = -\frac{P(\Gamma(\omega))}{Q(\Gamma(\omega))} \quad (6.10.3)$$

ko'rinishda bo'ladi. (6.10.3) egri chiziq μ tekislikni bir nechta sohalarga bo'laklaydi. Bu sohalarning har birida (6.10.1) ko'phad ildizlarining soni s bir xil bo'ladi. Bu sohalarning birorta nuqtasida (6.10.1) ko'phad ildizlarining soni s ni topish kerak. Agar μ tekislikning D-bo'laklashini, z kompleks parametr tekisligi G ni μ tekislikka

$$\mu = -\frac{P(z)}{Q(z)} \qquad (6.10.4)$$

munosabat orqali T nuqtaviy akslantirish sifatida qaralsa, u vaqtda s sonini topish osonlashadi. Bu holda D-bo'laklashning (6.10.3) N chegarasi, G soha chegarasini (6.10.4) formula orqali μ tekisligiga akslantirish natijasida hosil bo'ladi. μ nuqtasiga z

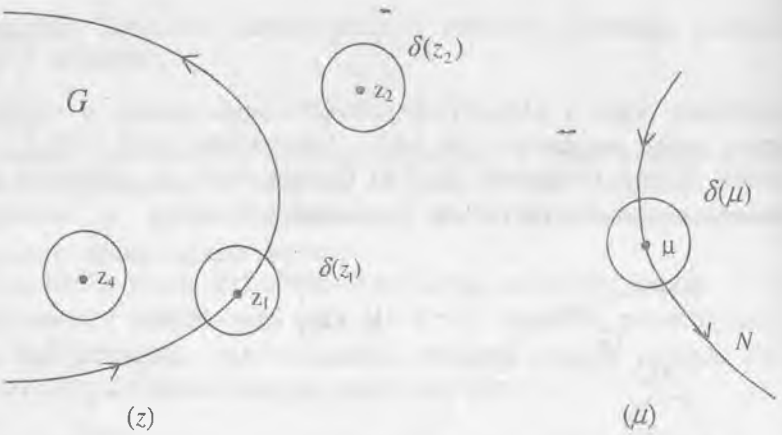


6.9-shakl.

tekisligida n ta $z_1, z_2, ..., z_n$ ildiz mos keladi. Agar $\mu \in D(z)$ bo'lsa, u vaqtda bu ildizlarning s tasi $(z_1, z_2, ..., z_s)$ G sohada va $n-s$ tasi G sohadan tashqarida yotadi. $z_1, z_2, ..., z_n$ nuqtalarning har biri (6.10.4) formula orqali μ nuqtaga akslanadi. Bu holda $z_1, z_2, ..., z_n$ nuqtalarning $\delta(z_1), \delta(z_2), ..., \delta(z_n)$ atroflari μ nuqtaning $\delta(\mu)$ atrofiga aylanadi (6.9- shakl).

μ nuqta $D(s)$ sohaning biridan ikkinchisiga o'tishi uchun $z_1, z_2, ..., z_n$ ildizlarning biri yoki bir nechtasi G sohaning chegarasini kesib o'tishi kerak.

z_1 ildiz G sohaning chegarasida yotgan bo'lsin (6.10- shakl).



6.10- shakl.

U vaqtda unga mos μ nuqta N chegaraning bir bo'lagida yotadi. N chegaraviy egri chiziqning bu bir bo'lagi z_1 nuqta yotgan G sohaning bir bo'lagining aksidir. Bu yerda $\delta(z_1)$ atrof $\delta(\mu)$ atrofga aylanadi. (6.10.4) akslanish konformlik xususiyatiga ega, ya'ni $\delta(z_1)$ kichik atrofni $\delta(\mu)$ atrofga aylanishi uning radial cho'zilishidan va biror burchakka burilishidan iborat bo'ladi. G soha doimo chap tarafda qolishi sharti bilan G sohaning chegarasida musbat yo'nalishni tanlab olamiz. z nuqta G soha chegarasida musbat yo'nalish bo'yicha qarab harakat qilganda unga mos bo'lgan μ nuqta N chegaraviy egri chiziq bo'yicha harakat qiladi. Uning bu harakat yo'nalishini musbat yo'nalish sifatida qabul qilamiz. z_1 nuqta G sohaning chegarasini chap tarafdan o'ng tarafga qarab kesib o'tsin. Bu vaqtda akslanishning konformlik xususiyatiga asosan unga mos bo'lgan μ nuqta ham N egri chiziqning chap tarafdan o'ng tarafga qarab kesib o'tadi. z_1 nuqta chegaraviy egri chiziqni chap tarafdan o'ng tarafga kesib o'tganda, u G sohadan chiqib ketadi, ya'ni G soha ichidagi ildizlar soni bittaga kamayadi. Bu holda z_1 ga mos keluvchi μ nuqta $D(s)$ sohadan $D(s-1)$ sohaga o'tadi. Shunday qilib, μ nuqta N egri chiziqni chap tarafdan o'ng tarafiga qarab kesib o'tsa, s son bittaga kamayadi. Demak, $D(s)$ sohalarni topish uchun s sonni μ kompleks tekislikning istalgan bir nuqtasida topish kifoya. Qolganlarini yuqorida bayon etilgan qoidaga asosan topish mumkin, ya'ni D-bo'laklashning N chegarasini μ nuqta chap tarafdan o'ng tarafga qarab

kesib o'tsa, s son bittaga kamayadi va o'ng tomondan chap tomonga qarab kesib o'tsa, s son bittaga ko'payadi degan qoidaga asosan barcha mavjud bo'lgan $D(s)$ sohalar topiladi. Bu qoidani amalda qo'llash yana ham qulay bo'lishi uchun N egri chiziqni musbat yo'nalishda aylanib, uni chap tarafdan shtrixlab chiqamiz. Agar N egri chiziqning ayrim bo'laklarini bir necha marta aylansak, u holda shuncha marta o'sha bo'-lakni shtrixlaymiz.

N egri chiziq bir marta shtrixlangan bo'lsin. U vaqtda N egri chiziq-ni kesib o'tishda s sonning o'zgarishini quyidagicha ifodalash mumkin: N egri chiziqni shtrixlangan tarafdan shtrixlanmagan tarafga kesib o'tishda s son bittaga kamayadi va shtrixlanmagan tarafdan shtrixlan-gan tarafga o'tishda s son bittaga ko'payadi.

Shunday qilib, g egri chiziq bilan chegaralangan ixtiyoriy G sohaga nisbatan μ ko'phadlar tekisligini D- bo'laklash uchun quyidagi qoi-dadan foydalanamiz:

1. *g egri chiziq (6.10.4) munosabat orqali μ tekisligiga akslanti-riladi. Shu tarzda hosil etilgan N egri chiziqning musbat yo'nalishi topi-ladi va u shtrixlanadi.*

2. *N egri chiziq μ tekisligini bo'laklagan sohalardan bittasini $D(s)$ deb faraz qilib, qolgan sohalar shtrixlash qoidasiga asosan topiladi. Eng kichik va eng katta s songa da'vogar sohalar topiladi.*

3. *μ tekisligida birorta ko'phad uchun qo'shimcha mulohazalar yuri-tib, uning G soha ichida va undan tashqarisida yotgan ildizlarining soni topiladi.*

G sohaning g chegarasini μ tekislikka akslantirish uchun uning (6.10.2) parametrik tenglamasidan foydalanish qulaydir. Bu holda N egri chiziqning parametrik tenglamasi (6.10.3) ko'rinishda bo'ladi. Agar G soha birlik doira yoki chap yarim tekislik bo'lsa, g chegaraviy egri chiziq (6.10.2) ko'rinishda yoziladi, bu yerda mos ravishda

$$\Gamma(\omega) = e^{i\omega}\ (0 \le \omega \le 2\pi) \quad \text{va} \quad \Gamma(\omega) = i\omega\ (-\infty < \omega < +\infty) \qquad (6.10.5)$$

bo'lib, uning aksi bo'lgan N egri chiziq mos ravishda

$$\mu = -\frac{P(e^{i\omega})}{Q(e^{i\omega})} \qquad \text{yoki} \qquad \mu = -\frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \qquad (6.10.6)$$

ko'rinishda yoziladi, bu erda haqiqiy parametr ω mos ravishda 0 dan 2π gacha va $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o'zgaradi. Bu holda ω ning o'sishi bilan N egri chiziqdagi μ nuqtaning o'zgarish yo'nalishi musbat yo'nalish bo'ladi.

Biz yuqorida ixtiyoriy n-darajali ko'phadning koeffitsiyentlari bir kompleks parametrdan chiziqli tarzda bog'langan hol uchun shu kompleks parametr tekisligida D- bo'laklashni yasashning umumiy nazariyasini ifodalab berdik.

Endi umumiy nazariyani tushunish oson bo'lishi uchun ixtiyoriy n-darajali

$$a_0(\mu)\,p^n + a_1(\mu)\,p^{n-1} + \cdots + a_n(\mu) = 0 \qquad (6.10.7)$$

xarakteristik tenglamaning a_k koeffitsiyentlari μ kompleks parametrga chiziqli ravishda bog'langan $(a_{k_{(\mu)}} = b_k + \mu c_k)$ hol uchun D-bo'laklashni yasashni ko'rib o'taylik.

(6.10.7) xarakteristik tenglamaning barcha $p = \alpha + i\beta$ ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'ladigan μ parametrning qiymatlar sohasini (agar bu soha mavjud bo'lsa) topish talab etilsin.

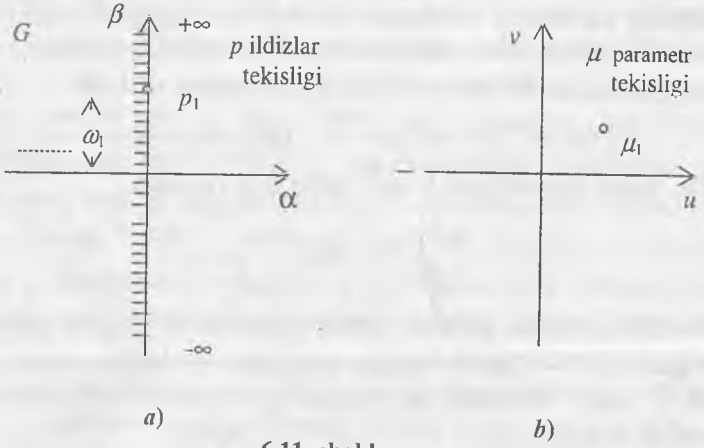
Bu $p = \alpha + i\beta$ kompleks o'zgaruvchi tekisligida barcha ildizlar chap yarim tekislikda yotishi kerak demakdir. (6.10.7) xarakteristik tenglamani

$$P(p) + \mu Q(p) = 0 \qquad (6.10.8)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamadan μ parametrni topamiz:

$$\mu = -\frac{P(p)}{Q(p)}. \qquad (6.10.9)$$

(6.10.9) munosabat μ ni p ning funksiyasi sifatida aniqlaydi. p ga har xil qiymat berib, μ ning qiymatlarini (haqiqiy yoki kompleks) topishimiz mumkin.



a) *b)*

6.11- shakl.

G sohaning shtrixlangan chegarasini (6.11- shakl,a) μ kompleks parametr tekisligiga nuqtaviy akslantirish uchun $p=i\omega$ deb olamiz, bu yerda $i=\sqrt{-1}$, ω – haqiqiy son va $-\infty$ dan $+\infty$ gacha qiymat qabul qiladi. p ning bu qiymatini (6.10.9) ga qo'yib,

$$\mu=-\frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}=-\frac{P_1(\omega)+iP_2(\omega)}{Q_1(\omega)+iQ_2(\omega)}$$

ni hosil qilamiz va bu munosabatning o'ng tomonini haqiqiy va mavhum qismlarga ajratamiz:

$$\mu=-\frac{P_1Q_1+P_2Q_2}{Q_1^2+Q_2^2}+i\frac{P_1Q_2-P_2Q_1}{Q_1^2+Q_2^2}. \qquad (6.10.10)$$

$\mu=u+iv$ kompleks parametr ekanligini hisobga olsak, (6.10.10) tenglamadan D- bo'laklashning chegarasi bo'lgan N egri chiziqning

$$u(\omega)=-\frac{P_1Q_1+P_2Q_2}{Q_1^2+Q_2^2}, \qquad v(\omega)=\frac{P_1Q_2-P_2Q_1}{Q_1^2+Q_2^2} \qquad (6.10.11)$$

parametrik tenglamasini hosil qilamiz. Shunday qilib, D- bo'laklashning chegarasi p ildizlar tekisligi β mavhum o'qining μ kompleks parametr tekisligidagi aksidir. (6.10.11) munosabatga asosan ω ga nisbatan $u(\omega)=u(-\omega)$ – juft funktsiya va $v(\omega)=-v(-\omega)$ - toq funktsiya.

Misol. $p^4+(3+\mu)p^3+(2+\mu)p^2+(5+2\mu)p+8=0$ (6.10.12)
xarakteristik tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglamadan μ ni topamiz:

$$\mu=-\frac{p^4+3p^3+2p^2+5p+8}{p^3+p^2+2p}. \qquad (6.10.12')$$

Bu yerdan $P(p)=p^4+3p^3+2p^2+5p+8$ va $Q(p)=p^3+p^2+2p$. (6.10.12′) tenglamadagi p o'rniga $p=i\omega$ ni qo'yib,

$$\mu=-\frac{(\omega^4-2\omega^2+8)+i(-3\omega^3+5\omega)}{-\omega^2+i(-\omega^3+2\omega)} \qquad (6.10.13)$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu yerdan

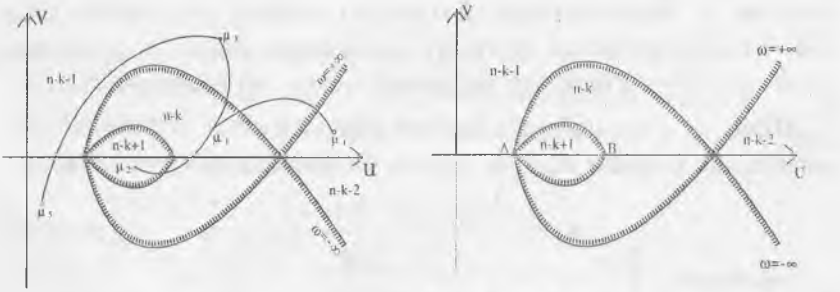
$$P_1(\omega)=\omega^4-2\omega^2+8, \qquad P_2(\omega)=-3\omega^3+5\omega,$$
$$Q_1(\omega)=-\omega^2, \qquad Q_2(\omega)=-\omega^3+2\omega.$$

(6.10.13) munosabatni haqiqiy va mavhum qismlarga ajratib, D-bo'laklashning chegarasi N egri chiziqning parametrik tenglamasini topamiz:

$$u(\omega) = -\frac{2\omega^6 - 9\omega^4 + 2\omega^2}{\omega^6 - 3\omega^4 + 4\omega^2},$$
$$v(\omega) = \frac{-\omega^7 + \omega^5 - 7\omega^3 + 16\omega}{\omega^6 - 3\omega^4 + 4\omega^2}. \qquad (6.10.14)$$

Endi umumiy holga qaytaylik. $p = \alpha + i\beta$ ildizlar tekisligining mavhum o'qida yotgan qandaydir p_1 nuqtani olamiz. p tekisligining p_1 nuqtasiga $p_1 = i\omega_1$ koordinata to'g'ri keladi (6.11-shakl,*a*). (6.10.11) parametrik tenglamaga $\omega = \omega_1$ qiymatni qo'yib, μ tekisligida unga mos kelgan μ_1 nuqtani yasaymiz (6.11-shakl,*b*).

Agar ω ga $-\infty$ dan $+\infty$ gacha qiymat bersak, u vaqtda μ tekisligida qandaydir egri chiziqni hosil qilamiz. Bu egri chiziq p ildizlar tekisligi mavhum o'qining μ kompleks parametr tekisligidagi aksi bo'ladi. Shunday qilib topilgan egri chiziq (6.12-shakl,*a* da ko'rsatilgandek bo'lsin deb faraz qilamiz) **D-bo'laklashning chegarasi** deb aytiladi.



a) *b*)

6.12- shakl.

D- bo'laklashning chegarasini ($\omega = -\infty$ ga mos kelgan nuqtadan $\omega = +\infty$ mos kelgan nuqtagacha bo'lgan oraliqni) chap tarafdan shtrixlaymiz (6.12- shakl,*a*). $u(\omega)$ juft funksiya va $v(\omega)$ toq funksiya bo'lganligi uchun D- bo'laklashning chegarasini yasashda ω ni 0 dan $+\infty$ gacha o'zgartirish yetarli. ω ning $-\infty$ dan 0 gacha bo'lgan qiymatlariga mos keluvchi chegarani hosil qilish uchun yasalgan chegaraning μ tekislikning u o'qiga nisbatan ko'zgudagi aksini olish kifoyadir. D-

bo'laklash chegarasida yotgan μ nuqtalarga p ildizlar tekisligidagi $p=i\omega$ nuqtalar, ya'ni xarakteristik tenglamaning sof mavhum ildizlari mos keladi. μ tekislikning u haqiqiy o'qida (D- bo'laklash chegarasida yotmagan) yotgan μ_1 nuqtani olamiz va uning qiymatini (6.10.7) xarakteristik tenglamaga keltirib qo'yamiz:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0\,, \qquad (6.10.15)$$

bu yerda a_k $(k=\overline{0,n})$ koeffitsiyentlar haqiqiy sonlar. (6.10.15) xarakteristik tenglamaning koeffitsiyentlaridan

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix} \qquad (6.10.16)$$

Gurvits determinantini tuzamiz. Ma'lumki, p ildizlar tekisligining o'ng yarim tekisligida yotgan ildizlar soni

$$a_0,\ \Delta_1,\ \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ \cdots,\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \qquad (6.10.17)$$

qatordagi ishoralarning o'zgarish soniga teng, bu yerda $\Delta_i(i=\overline{1,n})$ – Gurvits determinantining bosh minorlari. Shu qoidadan foydalanib μ_1 nuqtaga mos bo'lgan (6.10.15) xarakteristik tenglamaning o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlarining sonini topamiz. (6.10.15) tenglamaning o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlarining soni k ga teng deb faraz qilaylik. Avval misol ko'raylik.

Misol. (6.10.12) xarakteristik tenglamadagi $\mu=\mu_1$ parametrning qiymati 4 ga teng bo'lsin, ya'ni μ_1=4. U vaqtda μ_1=4 ni (6.10.12) tenglamaga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$p^4 + 7p^3 + 6p^2 + 13p + 8 = 0\,. \qquad (6.10.15')$$

Bu tenglamaning Gurvits determinanti

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 7 & 13 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 7 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} \qquad (6.10.16')$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerdan

$$a_0 = 1, \quad \Delta_1 = 7, \quad \Delta_2 = 29, \quad \Delta_3 = -15, \quad \Delta_4 = -120$$

ni hosil qilamiz va (6.10.17) qatordagi ishora almashinishlar

$$+, \quad +, \quad +, \quad -, \quad + \qquad (6.10.17')$$

ko'rinishda bo'ladi. (6.10.17′) qatordagi ishoralar o'zgarish soni 2 ga teng.

Demak, μ tekisligining μ_1=4 nuqtasiga mos keluvchi xarakteristik tenglamaning p ildizlar tekisligining o'ng yarim tekisligida yotgan ildizlarining soni $k=2$ ga teng, ya'ni 2 ta ildizining haqiqiy qismi musbat ishorali bo'ladi. Shunday qilib, (6.10.15′) xarakteristik tenglamaning 2 ta ildizi chap yarim tekislikda va 2 ta ildizi o'ng yarim tekislikda yotadi, ya'ni 2 ta ildizining haqiqiy qismi manfiy va 2 ta ildizining haqiqiy qismi musbat ishorali bo'ladi (ya'ni D(2,2)).

Endi umumiy holni qarashni davom etaylik. O'ng yarim tekislikda yotgan ildizlar soni k ga teng bo'lgani uchun chap yarim tekislikda yotgan ildizlar soni $n-k$ ga teng bo'ladi, demak, $D(n-k,k)$. μ_1 nuqtadan μ_2 nuqtaga o'tish uchun D- bo'laklash chegarasini shtrixlanmagan tarafdan shtrixlangan tarafga kesib o'tganimiz uchun bu nuqtaga mos kelgan xarakteristik tenglamaning $n-k+1$ ta ildizi chap yarim tekislikda yotadi. μ_1 dan μ_3 ga o'tish uchun chegarani shtrixlangan tarafdan shtrixlanmagan tarafga qarab kesib o'tamiz, demak, bu nuqtada $n-k-1$ ta ildiz chap yarim tekislikda yotganini topamiz. μ_3 dan μ_5 nuqtaga o'tishda biz D- bo'laklash chegarasini kesmaymiz (bu ildizlar tekisligida biz mavhum o'qni kesib o'tmaymiz degan mulohaza bilan teng kuchlidir). Demak, μ_5 nuqtada ham chap yarim tekislikda yotgan ildizlar $n-k-1$ ta bo'ladi.

Shunday qilib, D- bo'laklashning chegarasi butun μ tekislikni sohalarga bo'laklab tashlaydi. Bu sohalarning har birida xarakteristik tenglamaning ma'lum miqdordagi ildizlari chap yarim tekislikda yotadi. 6.12-shaklda keltirilgan misolda D- bo'laklash chegarasi μ tekislikni 4 sohaga bo'laklab tashlagan: $D(n-k+1, k-1)$, $D(n-k, k)$, $D(n-k-1, k+1)$,

$D(n-k-2,\ k+2)$. Agar $k=1$ bo'lsa, $D(n-k+1,\ k-1) \equiv D(n,0)$ soha turg'unlik sohasi bo'ladi va μ parametrning $A<\mu<B$ intervaldagi barcha qiymatlarida (6.10.7) xarakteristik tenglama hamma ildizlarining haqiqiy qismi manfiy ishorali bo'ladi, ya'ni barcha ildizlari p ildizlar tekisligining chap yarim tekisligida yotadi.

11- §. Ikki haqiqiy parametr tekisligida turg'unlik sohasini D- bo'laklash usuli bilan yasash

Ixtiyoriy n-darajali ko'phadning koeffitsiyentlari τ va ν haqiqiy parametrlar bilan chiziqli tarzda bog'langan bo'lsin. U vaqtda bu ko'phadni

$$\tau P(z)+\nu Q(z)+R(z) \tag{6.11.1}$$

ko'rinishda yozish mumkin. τ va ν parametrlarning qanday qiymatlarida (agar bunday qiymatlar mavjud bo'lsa) (6.11.1) ko'phadning barcha ildizlari chap yarim tekislikda yotadi degan savolga javob berishimiz kerak. Bu masalani yechish uchun D- bo'laklash usulidan foydalanamiz. Xuddi, avvalgi bir parametrli holdagidek, z ildizlar tekisligining har bir nuqtasiga (τ, ν) parametrlar tekisligining birorta nuqtasi mos keladi.

(τ, ν) parametrlar tekisligida D- bo'laklash o'tkazish uchun z ildizlar tekisligining mavhum o'qini (τ, ν) parametrlar tekisligiga akslantiramiz. Buning uchun

$$\tau P(z)+\nu Q(z)+R(z)=0 \tag{6.11.2}$$

tenglamaga $z=i\omega$ $(-\infty<\omega<+\infty)$ ni qo'yamiz, so'ngra haqiqiy va mavhum qismlarga ajratib, mos ravishda nolga tenglashtiramiz:

$$\left.\begin{aligned}&\tau P_1(\omega)+\nu Q_1(\omega)+R_1(\omega)=0,\\&\tau P_2(\omega)+\nu Q_2(\omega)+R_2(\omega)=0.\end{aligned}\right\} \tag{6.11.3}$$

(6.11.3) munosabatni τ va ν larga nisbatan yechib, D- bo'laklash chegarasi N ning parametrik tenglamasini topamiz:

$$\tau=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{Q_1R_2-Q_2R_1}{P_1Q_2-P_2Q_1}, \qquad \nu=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{P_2R_1-P_1R_2}{P_1Q_2-P_2Q_1}, \tag{6.11.4}$$

bu yerda

$$\Delta=P_1Q_2-P_2Q_1, \quad \Delta_1=Q_1R_2-Q_2R_1, \quad \Delta_2=P_2R_1-P_1R_2.$$

Misol. Ushbu

$$(\tau p+1)(6p+2)+3\nu=0 \qquad (6.11.5)$$

ko‘phad berilgan bo‘lsin. (6.11.5) ko‘phadni

$$\tau(6p^2+2p)+3\nu+6p+2=0 \qquad (6.11.6)$$

ko‘rinishga keltirish mumkin. Bu yerdan

$$P(p)=6p^2+2p, \quad Q(p)=3, \quad R(p)=6p+2.$$

(6.11.6) tenglamaga $p=i\omega$ ni qo‘yib, haqiqiy va mavhum qismlarga ajratamiz:

$$\left[-6\tau\omega^2+3\nu+2\right]+i\left[2\tau\omega+6\omega\right]=0.$$

Kompleks son nolga teng bo‘lishi uchun uning haqiqiy va mavhum qismlari nolga teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$\left.\begin{aligned}-6\tau\omega^2+3\nu+2=0,\\ 2\tau\omega+6\omega=0.\end{aligned}\right\}$$

Bu yerdan $\Delta=-6\omega$, $\Delta_1=18\omega$, $\Delta_2=4\omega+36\omega^3$ va D- bo‘laklashning chegarasi N ning parametrik tenglamasi

$$\tau=-3, \qquad \nu=-\frac{36\omega^2+4}{6}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

(6.11.4) formulalar $\Delta\neq 0$ dagina to‘g‘ri bo‘ladi. $\Delta=0$ da ikki hol: 1) yoki $\Delta_1\neq 0$, yoki $\Delta_2\neq 0$; 2) $\Delta_1=\Delta_2=0$ bo‘lishi mumkin. 1) hol hech qanday ahamiyatga ega emas, chunki bu holga mos keluvchi (τ,ν) nuqta cheksiz uzoqlashadi («cheksizlikka ketadi»). 2) hol, aksincha, maxsus hol hisoblanadi, chunki bu holda (6.11.3) tenglamalar bir-biriga chiziqli bog‘langan bo‘ladi. Bu maxsus holni tug‘dirayotgan $z=i\omega$ nuqtaga endi bitta nuqta emas, balki butun bir to‘g‘ri chiziq mos keladi, demakdir. Bu to‘g‘ri chiziq (6.11.3) tenglamalarning istalgan bittasi bilan ifodalanadi va uni **maxsus to‘g‘ri chiziq** deb ataymiz.

Agar ko‘phadning bosh (a_0) va ozod hadlari (a_n) τ va ν parametrlarga bog‘liq bo‘lsa, ularni nolga tenglashtirib mos ravishda $\omega=\infty$ va $\omega=0$ qiymatlarga mos keluvchi maxsus to‘g‘ri chiziqlarga ega bo‘lamiz:

$$a_0(\tau,\nu)=0, \qquad (6.11.7)$$

$$a_n(\tau,\nu)=0. \qquad (6.11.8)$$

Shunday qilib, umumiy holda D- bo'laklashning chegarasi N egri chiziqdan va ayrim maxsus to'g'ri chiziqlardan iborat bo'ladi. (6.11.4) formulalar D- bo'laklashning N egri chizig'ini aniqlaydi. ω musbat yo'nalishda ($-\infty$ dan $+\infty$ gacha) o'zgarganda (τ, ν) nuqta ham N egri chiziq bo'ylab musbat yo'nalishda harakat qiladi. $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ hol uchun maxsus to'g'ri chiziqlar aniqlanadi. $\tau(\omega)$ va $\nu(\omega)$ lar ω ga nisbatan juft funksiyalar bo'lganligi tufayli ω ning $(0,+\infty)$ intervaldagi qiymatlari uchun D- bo'laklashning N chegarasini yasash kifoya. ω ning $(-\infty,0)$ intervaldagi qiymatlarida (τ, ν) nuqta N chegaraning $\omega=+\infty$ nuqtaga mos kelgan $(\tau_\infty, \nu_\infty)$ nuqtasidan $\omega=0$ nuqtaga mos kelgan (τ_0, ν_0) nuqtasigacha harakat qilib keladi, ya'ni N chegaraviy egri chiziq bo'ylab ω ning $-\infty < \omega < +\infty$ o'zgarish qiymatlarida (τ, ν) nuqta ikki marta yuradi.

(τ, ν) tekisligida D- bo'laklashning chegaralari o'tkazilgandan keyin shtrixlash qoidasidan foydalanib, ularni shtrixlab chiqish kerak. Shtrixlash qoidasini asoslash uchun z_0 nuqtaning $\delta(z_0)$ atrofini (τ_0, ν_0) nuqtaning $\delta(\tau_0, \nu_0)$ atrofiga akslanishini ko'rib o'tamiz. Bu akslanish (6.11.2) yoki (6.11.3) formulalar orqali amalga oshiriladi. $z = z_0 + \delta z$, $\tau = \tau_0 + \delta\tau$ va $\nu = \nu_0 + \delta\nu$ bo'lsin, z, τ va ν ning bu qiymatlarini (6.11.2) ga qo'yib va ayrim o'rin almashtirishlarni o'tkazgandan keyin

$$\begin{aligned} &\tau_0 P(z_0 + \delta z) + \nu_0 Q(z_0 + \delta z) + R(z_0 + \delta z) + \\ &+ \delta\tau\, P(z_0) + \delta\nu_0 Q(z_0) + \ldots = 0 \end{aligned} \tag{6.11.9}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda ko'p nuqtalar $\delta\tau, \delta\nu, \delta z$ larga nisbatan yetarlicha kichik ikkinchi tartibli hadlarni bildiradi va

$$\tau_0 P(z_0) + \nu_0 Q(z_0) + R(z_0) = 0,$$

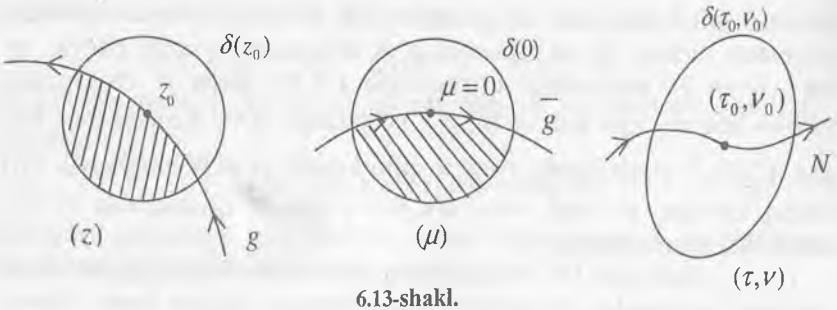
chunki z_0 nuqta (τ_0, ν_0) nuqtaga akslanadi. δz ni $\delta\tau, \delta\nu$ lar bilan bog'lovchi munosabatni birinchi yaqinlashishda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\delta\mu = -\tau_0 P(z_0 + \delta z) - \nu_0 Q(z_0 + \delta z) - R(z_0 + \delta z), \tag{6.11.10}$$

$$P(z_0)\delta\tau + Q(z_0)\delta\nu = \delta\mu. \tag{6.11.11}$$

$\delta(z_0)$ ning atrofini $(\delta\tau_0, \delta\nu_0)$ ning atrofiga akslantirishni ketma-ket (6.11.10) formula orqali $\delta(z_0)$ ning atrofini μ kompleks o'zgaruvchi-

ning yordamchi tekisligidagi $\mu = 0$ nuqtaning $\delta(0)$ atrofiga akslantirishdan va (6.11.11) formula orqali $\delta(0)$ ning atrofini $\delta(\tau_0, \nu_0)$ ning atrofiga akslantirishdan iborat deb qarash mumkin (6.13-shakl). Birinchi (6.11.10) akslantirish konform bo'ladi. Ikkinchi chiziqli akslantirishni haqiqiy va mavhum



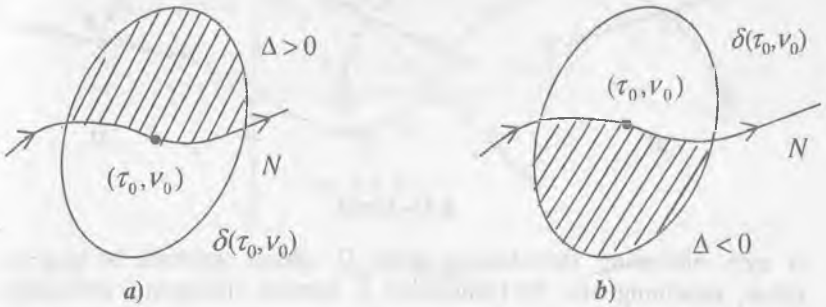
6.13-shakl.

qismlarga ajratib yozamiz:

$$\begin{aligned} P_1(z_0)\delta\tau + Q_1(z_0)\delta\nu &= \delta\mu_1, \\ P_2(z_0)\delta\tau + Q_2(z_0)\delta\nu &= \delta\mu_2, \end{aligned} \qquad (6.11.12)$$

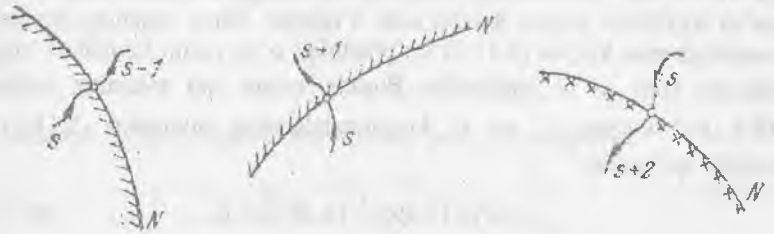
bu yerda $\delta\mu_1$ va $\delta\mu_2$ lar $\delta\mu$ ning haqiqiy va mavhum qismlari, P_1, Q_1 va P_2, Q_2 mos ravishda $P(z_0)$ va $Q(z_0)$ ning haqiqiy va mavhum qismlari. z_0 nuqta uning atrofini ikki qismga bo'luvchi g chegarada yotgan bo'lsin deb faraz qilamiz (6.13- shakl). Shu shaklda g chegarani aylanib o'tishning musbat yo'nalishi ko'rsatilgan. $\delta(z_0)$ atrof konform ravishda $\delta(0)$ atrofga almashadi (6.13- shakl). Bu akslanish natijasida g chegaraning chap tarafi mos ravishda μ tekisligidagi $\overline{g}$ egri chiziqning chap tarafiga o'tadi. Navbatdagi $\delta(0)$ atrofni $\delta(\tau_0, \nu_0)$ atrofga chiziqli akslantirishda $\delta(0)$ atrof siqilishi yoki cho'zilishi mumkin va yana agar (6.11.12) chiziqli almashtirishning Δ determinanti manfiy ishorali bo'lsa, u holda ko'zguda akslanish yuz berishi mumkin (6.14- shakl).

Buning ma'nosi quyidagidan iborat: ikkinchi chiziqli akslantirishda agar $\Delta > 0$ bo'lsa, u vaqtda g egri chiziqning chap tarafi N chegaraviy egri chiziqning chap tarafiga (6.14-shakl,*a*) va, aksincha, agar $\Delta < 0$ bo'lsa, u vaqtda N ning o'ng tarafiga o'tadi (6.14- shakl, *b*).



6.14- shakl.

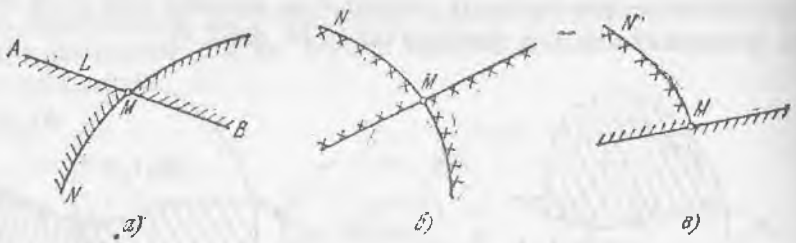
O'tkazilgan tekshirishlar D- bo'laklashning N chegarasini shtrixlash qoidasini aniqlaydi: *N egri chiziqning musbat yo'nalishi bo'ylab aylanib, agar $\Delta > 0$ bo'lsa, uning chap tarafini va, agar $\Delta < 0$ bo'lsa, uning o'ng tarafini shtrixlash kerak. Bir marta shtrixlangan N egri chiziqni shtrixlangan tarafiga kesib o'tganimizda chap yarim tekislikda yotgan ildizlar soni s bittaga ortadi va, aksincha, shtrixlanmagan tarafiga o'tganimizda s son bittaga kamayadi (6.15- shakl).*



6.15- shakl.

D- bo'laklashning chegarasi, N egri chiziqdan tashqari, L maxsus to'g'ri chiziqlardan ham iborat bo'lishi mumkin. L maxsus to'g'ri chiziqlarni shtrixlash qoidasi N egri chiziqni shtrixlash qoidasidan farq qiladi, chunki L da aylanishning musbat yo'nalishi degan tushunchani aniqlash mumkin emas. Buning sababi L faqat bittta z nuqtaning obrazi bo'ladi.

Shunga qaramasdan, maxsus to‘g‘ri chiziqlarni shtrixlash qoidasi N egri chiziqni qay tarzda shtrixlanganligidan kelib chiqadi.



6.16- shakl.

N egri chiziqning shtrixlangan tarafi G sohaga yondosh bo‘lgan egri chiziq tarafining aksi bo‘lganligidan L maxsus chiziqning shtrixlangan tarafi chegaraviy $z \in g$ nuqtaning G soha nuqtalaridan iborat yarim atrofining aksidan iborat bo‘ladi.

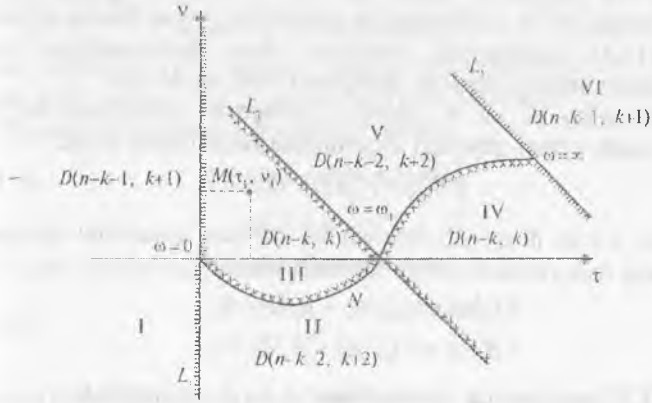
6.16- shaklda N egri chiziq bilan L maxsus chiziqning ba’zi o‘zaro joylashishlari ko‘rsatilgan.

D-bo‘laklashning hamma chegaralarini yasaganimizdan keyin (τ, ν) tekisligi bir nechta sohalarga bo‘linadi (6.17- shakl.)

6.17- shaklda L_1, L_2, L_3 – maxsus to‘g‘ri chiziqlar, N esa D bo‘laklashning chegaraviy egri chizig‘i.

Har bir sohaning nuqtalariga mos kelgan (6.11.2) ko‘phadlarning ildizlar tekisligining chap va o‘ng yarim tekislikda yotgan ildizlari soni bir xil bo‘ladi. Bir sohadan ikkinchi bir sohaga o‘tganda chap va o‘ng yarim tekislikda yotgan ildizlar soni o‘zgaradi. Biror sohaning qandaydir nuqtasiga mos kelgan (6.11.2) ko‘phadning o‘ng yarim tekislikda yotgan ildizlari soni k ni aniqlaylik. Buning uchun shu sohaning ixtiyoriy $M(\tau_1, \nu_1)$ nuqtasi τ_1 va ν_1 koordinatalarining qiymatini (6.11.2) ga keltirib qo‘yamiz:

$$\tau_1 P(p) + \nu_1 Q(p) + R(p) = 0. \qquad (6.11.13)$$



6.17- shakl.

(6.11.13) ko'phadni ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad (6.11.14)$$

bu yerda $a_i (i = \overline{0,n})$ – ma'lum haqiqiy sonlar. (6.11.12) tenglamaning Gurvits determinanti

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. Ushbu determinant bosh minorlaridan

$$a_0,\ \Delta_1,\ \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ \frac{\Delta_3}{\Delta_2},\ \cdots,\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \qquad (6.11.15)$$

qatorni tuzamiz. Bu qatordagi ishoralar o'zgarish soni (6.11.13) (yoki (6.11.14)) ko'phadning o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlari soniga teng. O'ng yarim tekislikda yotgan ildizlarning soni k ga teng bo'lsin. U vaqtda (τ, v) tekisligini D- bo'laklash 6.17- shaklda ko'rsatilgandek bo'ladi: $D(n-k-1, k+1)$–I soha, $D(n-k-2, k+2)$–II soha, $D(n-k, k)$ – III soha, $D(n-k, k)$–IV soha, $D(n-k-2, k+2)$–V soha va $D(n-k-1, k+1)$–VI soha.

Agar $k=0$ bo'lsa, u vaqtda III va IV sohalar turg'unlik sohalari bo'ladi. Demak, τ va ν larning bu sohalarda yotgan barcha qiymatlari uchun (6.11.2) xarakteristik tenglama bilan ifodalanadigan hamma dinamik sistemalarning harakati asimptotik turg'un bo'ladi.

Shunday qilib, τ va ν haqiqiy parametrlar tekisligida turg'unlik sohasini yasash uchun quyidagi algoritmdan foydalanish kerak:

1. $$\tau P(z)+\nu Q(z)+R(z)=0 \qquad (6.11.2')$$

tenglamaga $z=i\omega$ ni qo'yib, haqiqiy va mavhum qismlarini ajratgandan so'ng, ularni mos ravishda nolga tenglashtiriladi:

$$\left.\begin{aligned}\tau P_1(\omega)+\nu Q_1(\omega)+R_1(\omega)=0,\\ \tau P_2(\omega)+\nu Q_2(\omega)+R_2(\omega)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (6.11.3')$$

2. (6.11.3') tenglamalar sistemasidan τ va ν lar topiladi:

$$\tau=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \nu=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad (6.11.4')$$

bu yerda $\Delta=P_1Q_2-P_2Q_1$, $\Delta_1=Q_1R_2-Q_2R_1$, $\Delta_2=P_2R_1-P_1R_2$.

3. $\Delta\neq 0$ hol uchun ω ga 0 dan $+\infty$ gacha qiymat berib, (6.11.4') asosan, (τ,ν) tekisligida D- bo'laklashning N chegaraviy egri chizig'i yasaladi.

4. $\omega=0$ va $\omega=\infty$ qiymatlarga mos keluvchi (agar mavjud bo'lsa) L_1 va L_2 maxsus to'g'ri chiziqlarni hamda $\Delta(\omega_1)=\Delta_1(\omega_1)=\Delta_2(\omega_1)=0$ hol uchun ω_1 qiymatga mos keluvchi L_3 maxsus to'g'ri chiziq (τ,ν) tekisligida yasaladi (6.17- shaklga qarang).

5. Shtrixlash qoidasi bo'yicha N egri chiziqning musbat yo'nalishi bo'yicha aylanganimizda $\Delta>0$ bo'lsa, uning chap tarafi va $\Delta<0$ bo'lsa, o'ng tomoni shtrixlanadi. N egri chiziqning shtrixlanganligiga qarab L_1, L_2 va L_3 maxsus to'g'ri chiziqlar shtrixlab chiqiladi. N egri chiziq bilan L maxsus to'g'ri chiziqlarning shtrixlangan taraflari bir-biriga qaragan bo'lishi kerak.

6. (τ,ν) tekislikning istalgan $M(\tau_1,\nu_1)$ nuqtasining τ_1 va ν_1 koordinatalarini (6.11.2') tenglamaga qo'yib, bu tenglamaning Gurvits determinantini tuziladi va (6.11.15) qatordagi ishora o'zgarishlar soni (o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlar sonini) aniqlanadi.

7. $M(\tau_1,\nu_1)$ nuqta yotgan sohadan D- bo'laklash chegaralarini boshqa sohalarga kesib o'tib (τ,ν) tekislik D- bo'laklab chiqiladi.

8. Agar sohalar ichida $D(n,0)$ soha (n – xarakteristik tenglamaning darajasi) mavjud bo'lsa, u holda bu $D(n,0)$ soha turg'unlik sohasi bo'ladi. τ va ν larning turg'unlik sohasidagi barcha qiymatlari uchun dinamik sistemaning harakati asimptotik turg'un bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$\tau(p^3+p^2)+\nu(p^2+p)+1=0 \qquad (6.11.2'')$$

ko'phad uchun (τ,ν) haqiqiy parametrlar tekisligini D- bo'laklash o'tkazish talab etilsin. Uni algoritm bo'yicha bajaramiz.

1. Algoritmning birinchi qadamiga asosan

$$\left.\begin{aligned}-\omega^2\tau-\omega^2\nu+1=0,\\ -\omega^3\tau+\omega\nu=0.\end{aligned}\right\}$$

2. N egri chiziqning parametrik tenglamasi:

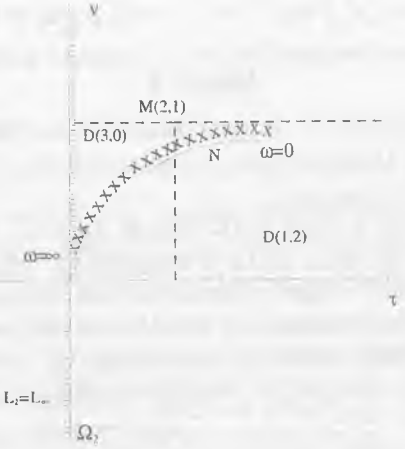
$$\tau=\frac{1}{\omega^2(1+\omega^2)}, \qquad \nu=\frac{1}{1+\omega^2}$$

va $\Delta=-\omega^3(1+\omega^2)$, $\Delta_1=-\omega$, $\Delta_2=-\omega^3$.

3. (τ,ν) tekisligida N egri chiziqni yasaymiz.

4. $\omega=0$ mos keluvchi L_1 maxsus to'g'ri chiziq mavjud emas, $\omega=\infty$ mos keluvchi L_2 maxsus to'g'ri chiziq $\tau=0$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. $\omega=\omega_1$ mos keluvchi L_3 maxsus to'g'ri chiziq ham mavjud emas.

5. ω ning $-\infty$ dan 0 gacha o'zgarishida $\Delta>0$ va ω ning 0 dan $+\infty$ gacha o'zgarishida $\Delta<0$ bo'lganligi uchun N egri chiziqning musbat yo'nalishi bo'yicha aylanib uni chap tarafdan ikki marta shtrixlab chiqamiz (6.18- shaklga qarang). L_2 ni shunday bir marta shtrixlaymizki, uning shtrixlangan tarafi N ning shtrixlangan tarafiga qaragan bo'lsin (6.18- shaklga qarang).



6.18- shakl.

6. (τ, ν) tekisligida yotgan ixtiyoriy $M(2;1)$ nuqtaning $\tau = 2$ va $\nu = 1$ koordinatalarini (6.11.2″) ko'phadga keltirib qo'yamiz:

$$2p^3 + 3p^2 + p + 1 = 0.$$

Bu tenglamaning Gurvits determinanti

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

va (6.11.15) qator

$$2, \quad 3, \quad \frac{1}{3}, \quad 1 \qquad (6.11.15')$$

ko'rinishda bo'ladi. (6.11.15′) qatorda ishora o'zgarishlar soni 0 ga teng bo'ladi. Demak, bu nuqta uchun ildizlar tekisligining o'ng yarim tekisligida birorta ham ildiz yotmaydi, ya'ni xarakteristik tenglama hamma ildizlarining haqiqiy qismi manfiy bo'ladi. $M(2;1)$ nuqta yotgan sohada $D(3,0)$ bo'ladi.

7. $D(3,0)$ sohadan boshqa sohalarga D- bo'laklashning chegaralarini kesib o'tganimizda 6.18- shaklda ko'rsatilgan D- bo'laklashga kelamiz.

Shunday qilib, τ va ν ning D(3,0) sohadagi barcha qiymatlarida ko'rilayotgan dinamik sistema harakati asimptotik turg'un bo'ladi.

12- §. Mixaylov kriteriysi [60, 62]

Ushbu

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n = 0 \qquad (6.12.1)$$

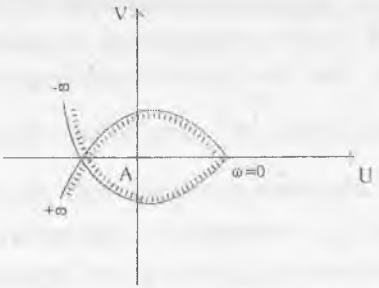
xarakteristik tenglama berilgan bo'lsin. λ parametr kiritib, umumiyroq

$$D(p) = \lambda \qquad (6.12.2)$$

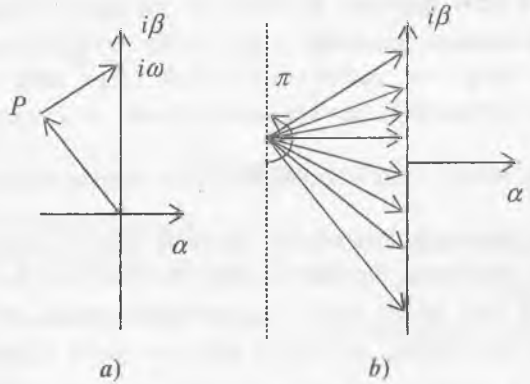
tenglamalar sinfini qaraymiz. Bu tenglamadan $\lambda = 0$ bo'lganda (6.12.1) kelib chiqadi. (6.12.1) tenglamaga $p = i\omega$ ni qo'yib, λ parametr bo'yicha D- bo'laklashni o'tkazamiz.

A turg'unlik sohasi bo'lsin (6.19- shakl). Agar $\lambda = 0$ nuqta A sohaning ichida yotsa, u holda (6.12.1) xarakteristik tenglama barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy ishorali bo'ladi. N egri chiziqni shtrixlamasdan, A soha turg'unlik sohasi bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlaydigan qoidani ko'rsatish mumkin. Bu qoidani A.V. Mixaylov yaratgan bo'lib, u avtomatik regulatorlar nazariyasida ko'p ishlatiladi. Buning uchun $\lambda = 0$ holni, ya'ni (6.12.1) tenglamani ko'rib o'tamiz. (6.12.1) ning darajasi n ga teng va $p_1, p_2, \ldots, p_n$ lar uning ildizlari bo'lsin. U vaqtda

$$D(p) = a_0(p - p_1)(p - p_2) \cdots (p - p_n). \qquad (6.12.3)$$



6.19- shakl.



6.20- shakl

(6.12.3) munosabatga $p = i\omega$ ni qo'yamiz:

$$D(i\omega) = a_0(i\omega - p_1)(i\omega - p_2) \cdots (i\omega - p_n).$$

Agar P ildizlar tekisligida p_k nuqtani belgilab olsak, u holda $i\omega - p_k$ vektor p_k nuqtadan mavhum o'qda yotgan $i\omega$ nuqtaga yo'naltirilgan bo'ladi. p_k nuqta chap yarim tekislikda yotgan bo'lsin (6.20- shakl). U vaqtda ω ni $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o'zgartirganimizda $(i\omega - p_k)$ vektorning argumenti π ga ortadi. Shuning uchun, agar barcha $p_1, p_2, ..., p_n$ ildizlar chap yarim tekislikda yotsa, u vaqtda ω ning $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o'zgarishida $D(i\omega)$ vektor argumentining orttirmasi (hamma $(i\omega - p_k)$ vektorlar argumenti orttirmalarining yig'indisiga teng) πn ga teng bo'ladi. Agar r ta ildiz o'ng yarim tekislikda va $n - r$ ta ildiz

chap yarim tekislikda yotsa, u vaqtda argumentlar orttirmasining yig'indisi $(n-2r)\pi$ ga teng bo'ladi.

ω ni 0 dan $+\infty$ gacha o'zgartirish bilan kifoyalanamiz. U vaqtda $D(i\omega)$ xarakteristik vektor argumentining o'zgarishi 2 martaga kamayadi (ω ning $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o'zgarishiga nisbatan) va turg'un sistema uchun uning qiymati $\pi\frac{n}{2}$ teng bo'ladi. Shuni qayd qilish kerakki, ω ning o'sishi bilan chap yarim tekislikda yotgan barcha p_k ildizlar uchun hamma $(i\omega - p_k)$ vektorlarning argumentlari va, demak, turg'un sistema $D(i\omega)$ xarakteristik vektorining ham argumenti monoton ravishda o'sadi.

Shunday qilib, A turg'unlik sohasi bo'lishi uchun $D(p)=\lambda$ tenglamani $\lambda = u + iv$ parametr bo'yicha D- bo'laklash chegarasi $\omega = 0$ bo'lganda, koordinata boshidan o'ng tarafda bo'lgan haqiqiy o'qdan boshlanib ω ning $+\infty$ gacha o'sishi bilan $D(p)$ ning radius-vektori soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi aylanib n kvadrat orqali o'tishi kerak.

Keltirilgan natijaviy mulohazani Mixaylov kriteriysi sifatida ifodalaymiz.

Mixaylov kriteriysi. *Sistemaning harakati turg'un bo'lishi uchun: 1) xarakteristik vektorning moduli ω ning barcha $(-\infty<\omega<+\infty)$ qiymatlarida noldan farq qilishi va 2) bu vektorning argumenti $\omega = 0$ bo'lganda nolga teng bo'lib, ω ning 0 dan $+\infty$ gacha monoton ravishda o'zgarishida u monoton tarzda 0 dan $\frac{\pi}{2}\cdot n$ gacha o'sishi zarur va yetarlidir (n – xarakteristik tenglamaning darajasi).*

Misol. Xarakteristik tenglamasi

$$p^3 + 4p^2 + p + 1 = 0$$

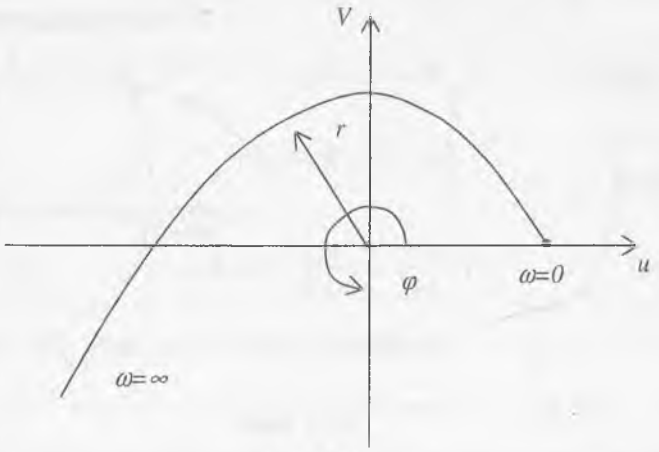
bo'lgan dinamik sistemaning turg'unligini tekshirish talab etilsin. Buning uchun tenglamaga p ning o'rniga $i\omega$ ni qo'yamiz va haqiqiy hamda mavhum qismlarini ajratamiz:

$$D(i\omega) = -4\omega^2 + 1 + i(-\omega^3 + \omega).$$

Bu yerdan

$$\left.\begin{aligned} u(\omega) &= -4\omega^2 + 1, \\ v(\omega) &= -\omega(1-\omega^2). \end{aligned}\right\} \qquad (6.12.4)$$

(u, v) tekisligida $D(i\omega)$ vektorning godografini (6.12.4) tenglamalar sistemasiga asosan yasaymiz. Bu godograf 6.21-shaklda keltirilgan.



6.21-shakl

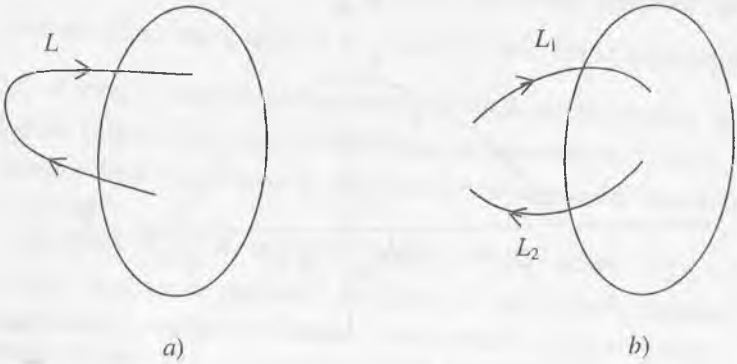
Rasmdan ko'rinib turibdiki, $\omega = 0$ da godograf u haqiqiy o'qning musbat qismini kesadi va ω ning 0 dan $+\infty$ gacha o'zgarishida uning argumenti $\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot 3$ ga teng bo'ladi, ya'ni godograf 3-kvadrant orqali o'tadi.

Keyingi ikki paragrafda bayon etilgan D- bo'laklash usulining texnikaviy masalalarni yechishda tatbiq qilinishini ko'rib o'tamiz.

13-§. Yopiq sistema va ochiq sistema harakatlari o'rtasidagi bog'lanish. Dinamik sistemalarni operator orqali ifodalashda qo'zg'almas nuqta printsipi

Statik turg'un sistema noturg'un bo'lishi uchun faqat tashqi manbadan sistemaga energiya keltiradigan mexanizm mavjud bo'lishi kerak. Yopiq siklga kiruvchi manfiy ishqalanish kuchi, yo'naltirilgan ta'sir etuvchi kuch (bog'lanish) va kechikuvchi yo'naltirilgan bog'lanishlar bunday mexanizmlarga misol bo'la oladi. Ammo energiya keltiruvchi mexanizmning mavjudligi sistemaning noturg'un bo'lishini bildirmaydi. Sistema noturg'un bo'lishi uchun unga yetarlicha intensiv tarzda energiya kelishi kerak. Bu o'z navbatida koordinatalar va bu koordinatalar bo'yicha ta'sir etadigan yo'naltirilgan kuchlarning o'zgarishi o'rtasida

qulay fazaviy munosabat mavjud bo'lishini taqozo qiladi. Bu munosabatlarni ko'rish uchun sistemada L yo'naltirilgan bog'lanishni (6.22-shakl, *a*) ajratib, uni uzamiz va natijada L_1 kirish va L_2 chiqishga ega bo'lgan sistemaga ega bo'lamiz (6.22- shakl, *b*).



6.22- shakl.

Dastlabki sistemani (6.22- shakl,*a*) doimo kirishi chiqishiga teng bo'lgan ochiq sistema deb qarash mumkin. Bu har xil mumkin bo'lgan kirishli ochiq sistemaning harakati kirishi chiqishiga teng bo'lgan yopiq sistemaning harakatini o'z ichiga oladi, demakdir.

Chiziqli sistemaning istalgan harakatini (L yo'naltirilgan bog'lanish x miqdorining o'zgarishi ko'zda tutilyapti)

$$x = e^{zt} \qquad (6.13.1)$$

ko'rinishdagi harakatlarning superpozitsiyasi sifatida qarash mumkin. Shuning uchun kirishi $x = e^{zt}$ bo'lgan ochiq sistemaning y chiqishi nimaga teng bo'lishini ko'raylik. Dastlab umumiyroq masalani qaraymiz.

$x(t)$ – chiziqli sistemaning ixtiyoriy kirishi, $y(t)$ – uning chiqishi bo'lsin. $x(t)$ va $y(t)$ lar orasida qanday bog'lanish mavjud?

Chiziqli sistemalar keng sinflarining tasvirlanishida nolinchi boshlang'ich shartlarda kirishning $X(p)$ tasviri bilan chiqishning $Y(p)$ tasviri o'rtasidagi munosabatni

$$Y(p) = K(p)\,X(p) \qquad (6.13.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $K(p)$ – **uzatish koeffitsiyenti** deb aytiladi. Masalan, $x(t)$ kirish va $y(t)$ chiqish orasidagi bog'lanish biror

$$a_m \frac{d^m x}{dt^m} + \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_0 x = b_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + b_0 y \qquad (6.13.3)$$

differensial munosabat orqali berilgan bo'lsin. (6.13.3) ga nisbatan Laplas almashtirishini qo'llab

$$\left(a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \cdots + a_0\right) X(p) = \left(b_m p^n + \cdots + b_0\right) Y(p)$$

yoki

$$Y(p) = K(p)\, X(p) \qquad (6.13.4)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$K(p) = \frac{a_m p^m + \cdots + a_0}{b_n p^n + \cdots + b_0}.$$

Agar $x(t)$ bilan $y(t)$ orasidagi bog'lanish

$$a_m x(t + m\tau) + \cdots + a_0 x(t) = b_n y(t + n\tau) + \cdots + b_0 y(t) \qquad (6.13.5)$$

ayirmali differensial tenglama ko'rinishida berilgan bo'lsa, u vaqtda z - almashtirishni qo'llab,

$$Y(z) = K(z)\, X(z) \qquad (6.13.6)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$K(z) = \frac{a_m z^m + \cdots + a_0}{b_n z^n + \cdots + b_0}.$$

Ma'lumki, $x(t)$ funksiyaning Laplas almashtirishi p kompleks o'zgaruvchining analitik funksiyasi bo'ladi va quyidagi Laplas integrali bilan aniqlanadi:

$$X(p) = \int_0^\infty e^{-pt} x(t)\, dt \qquad (6.13.7)$$

va $x(t)$, $x(t+\tau)$, $x(t+2\tau)$, ... ketma-ketlikning z - almashtirishi bo'lsa, z kompleks o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib,

$$X(z) = x(t) + x(t+\tau)\, z^{-1} + x(t+2\tau)\, z^{-2} + \cdots \qquad (6.13.8)$$

ko'rinishda aniqlanadi.

Agar kirish va chiqish tasvirlari orasidagi bog'lanish (6.13.2) ko'rinishda bo'lsa, u holda originalda Laplas almashtirishi va z - almashtirish hollarida bu bog'lanish mos ravishda

$$y(t)=\int_0^t \psi(t-\tau)x(\tau)d\tau, \qquad (6.13.9)$$

$$y(t+j\tau)=\sum_{s=0}^{j}\psi(j-s)x(t+s\tau) \quad \text{--} \qquad (6.13.10)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda $\psi(t)$ va mos ravishda $\psi(j)$ – **saqlanish** (javob berish) **funksiyalari** deb ataladi. ψ javob berish funksiyasi K uzatish koeffitsiyentining originali bo'ladi.

Bu chekinishdan keyin, sistemaga $x=e^{zt}$ ko'rinishdagi kirish ta'sir etganda uning chiqishi nimaga teng bo'lishini ko'raylik. e^{zt} ning tasviri $(p-z)^{-1}$ bo'ladi. Shuning uchun chiqishning tasviri $K(p)(p-z)^{-1}$ ko'rinishda bo'ladi. $K(p)$ ni ko'phadlar nisbati deb qarab, chiqishning tasvirini oddiy tasvirlarga yoyamiz va unga mos bo'lgan originalni

$$K(p)(p-z)^{-1}=\frac{K(z)}{p-z}+\sum c_k(p-\lambda_k)^{-1}\leftrightarrow K_z e^{zt}+\sum c_k e^{\lambda_k t} \qquad (6.13.11)$$

ko'rinishda topamiz. Chiqish originalining $K(z)e^{zt}$ birinchi hadi majburiy tebranishga mos keladi. Bu tebranish xuddi sistema kirishiga berilgan ta'sirdek e^{zt} qonun bilan harakat qiladi va undan o'zgarmas $K(z)$ ko'paytuvchi bilan farq qiladi. Chiqish originalining qolgan hadlari erkin tebranishlardan iborat. Bu erkin tebranishlarning $\lambda_1, \lambda_2,...$ «chastotalari» $K(p)$ uzatish koeffitsiyentining ildizlari (qutblari) bo'ladi. $c_1, c_2,...$ koeffitsiyentlar umumiy holda boshlang'ich shartlarga bog'liq. (6.13.11) ifodada ular nolinchi boshlang'ich shartlarga to'g'ri keladi. Nolga teng bo'lmagan boshlang'ich shartlarda ularning qiymatlari boshqacha bo'ladi.

Keltirilgan mulohazalardan ko'rinib turibdiki, chiziqli sistemaning chiqishi (toyilgan yoki toyilmagan) (6.13.11) ifoda ko'rinishida ifodalanadi va $c_1, c_2,...$ koeffitsiyentlarning qiymati boshlang'ich shartlarga bog'liq. Qisman, boshlang'ich shartlarni shunday tanlab olish mumkinki, barcha $c_1, c_2,...$ - koeffitsiyentlar nolga teng bo'lsin. U vaqtda e^{zt} kirishga ega bo'lgan sistemaning chiqishi $K(z)e^{zt}$ ga teng bo'ladi.

Endi dastlab qo'yilgan masalaga qaytishimiz mumkin: ochiq sistemaning (yo'naltirilgan bog'lanishi uzilgan sistemaning) barcha mumkin bo'lgan harakatlari bilan dastlabki yopiq sistema harakatlari orasidagi

bog'lanishni aniqlaylik. Bu masalani quyidagicha qo'yish mumkin: kirish $x(t)$ va chiqish $y(t)$ orasidagi bog'lanishi

$$y(t) = L(x(t), \Sigma) \tag{6.13.12}$$

ko'rinishda bo'lgan ochiq sistema mavjud bo'lsin, bu yerda Σ – boshlang'ich shartlar. Unga mos bo'lgan yopiq sistemaning harakati ochiq sistemaning

$$x(t) = y(t) \tag{6.13.13}$$

holga to'g'ri keladigan harakatidan iborat bo'ladi. Kirish bilan chiqish orasidagi bog'lanishni aniqlaydigan ochiq sistemaning L operatori bo'yicha yopiq sistemaning harakati haqida nima aytish mumkin? Masalaning bunday qo'yilishi ham hozir ko'rilayotgan chiziqli sistemalarga, ham nochiziqli sistemalarga taalluqli, u ham turg'unlik masalalarini tadqiq etishda, ham boshqa masalalarda, masalan, davriy harakatlarni izlashda ishlatiladi. Bu umumiylikni va qamrab olinadigan masalalarning kengligini ko'rsatish uchun shuni ta'kidlaymizki, agar L operatorni funksiyalar fazosini tasvirlovchi sifatida qarasak, u vaqtda bu tasvir uchun yopiq sistemaning harakatlari L operatorning qo'zg'almas nuqtalari bo'ladi. *Shuning uchun ham yopiq va ochiq sistemalar orasidagi bog'lanishni dinamik sistemalarni operatorli tasvirlashning qo'zg'almas nuqta prinsipi deb atash mumkin.* Qo'zg'almas nuqta prinsipini chiziqli sistemalar turg'unligini yoki noturg'unligini tadqiq etishda tatbiq etishning ma'nosi shundan iboratki, bizni yopiq sistemaning e^{zt} ko'rinishidagi harakatlari qiziqtiradi va shunday ko'rinishdagi kirishlar uchun sistemaning chiqishi

$$K(z)e^{zt} + \sum c_k(z, \Sigma)e^{\lambda_k t} \tag{6.13.14}$$

ko'rinishda ifodalanadi, bu yerda har bir z uchun Σ boshlang'ich shartlarni shunday tanlab olish mumkinki, $c_k(z, \Sigma)$ koeffitsiyentlarning barchasi nolga aylanadi. Ma'lumki, bizni qiziqtirayotgan ko'rinishdagi erkin harakatlar z ning faqat

$$K(z) = 1 \tag{6.13.15}$$

munosabatni qanoatlantiruvchi qiymatlari uchun mavjud bo'ladi.

Agar (6.13.13) tenglik faqat haqiqiy qismi ($\operatorname{Re} z$) manfiy bo'lgan z qiymatlar uchun bajarilsa, u vaqtda chiziqli yopiq sistema turg'un bo'ladi va bu tenglik hech bo'lmaganda bitta haqiqiy qismi musbat bo'lgan z uchun bajarilsa, u vaqtda chiziqli sistema noturg'un bo'ladi. Bu hollarning qaysi biri mavjud bo'lishini Naykvist kriteriysi hal qilib beradi.

14-§. Naykvist kriteriysi [63,65]

Ushbu

$$W = K(z) \qquad (6.14.1)$$

formula orqali z kompleks parametr tekisligini W tekisligiga akslantiramiz.

Agar bu akslanish

$$\operatorname{Re} z \geq 0 \qquad (6.14.2)$$

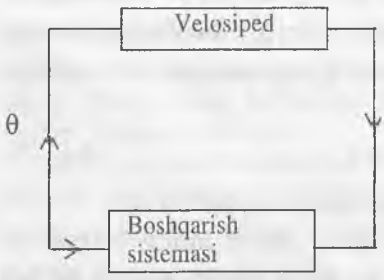
yarim tekislikni W tekisligining W=1 nuqtadan tashqarida yotgan D sohasiga akslantirsa, u holda sistema turg'un bo'ladi. Aksincha, agar W=1 nuqta D sohaning ichida yotsa, u vaqtda sistema noturg'un bўladi.

W tekisligidagi D sohaning chegarasi z tekisligidagi $\operatorname{Re} z \geq 0$ yarim tekislikning chegarasi bo'lgan mavhum o'qning aksidir. Bu chegaraning tenglamasi

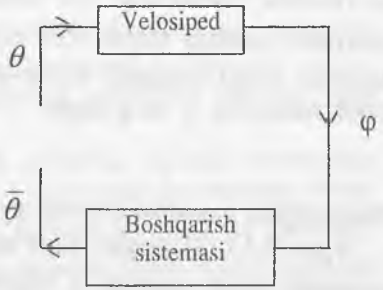
$$W = K(i\omega) \qquad (6.14.3)$$

ko'rinishga ega, bu yerda $-\infty < \omega < +\infty$, $i = \sqrt{-1}$.

(6.14.3) egri chiziq quyidagi fizik ma'noga ega. Sistema kirishiga chastotasi ω bo'lgan garmonik tebranish berilsin, ya'ni $x = e^{i\omega t}$ bo'lsin. U vaqtda (6.13.13) ga asosan sistemaning chiqishida ham ma'lum tarzda tanlab olingan boshlang'ich shartlarda $K(i\omega)e^{i\omega t}$ miqdorga teng bo'lgan garmonik tebranma harakat paydo bo'ladi. Shuning uchun ham $K(i\omega)$



6.23- shakl.



6.24- shakl.

chiqish va kirishdagi garmonik qismini bog'lovchi amplituda-fazaviy chastota xarakteristikasini anglatadi: $K(i\omega)$ ning moduli chiqish va kiri-

shdagi amplitudalarning nisbatini, argumenti esa chiqish va kirishdagi fazalar orasidagi siljishni bildiradi.

Misol. Yuqorida bayon etilgan mulohazalarni oddiy velosiped modelining turg'unligini tadqiq etishga tatbiq etamiz. Bu oddiy model [63]

$$J\ddot{\varphi} - Mh\varphi = -\frac{MV^2}{a}\theta - \frac{MbV}{a}\dot{\theta}, \tag{6.14.4}$$

$$\theta = \alpha\varphi + \beta\dot{\varphi} \tag{6.14.5}$$

tenglama bilan ifodalanadi, bu yerda φ – velosiped tekisligi bilan vertikal o'q orasidagi burchak (qiyalik burchagi) θ – rulning burilish burchagi, V – velosipedning tezligi, θ, φ – yetarlicha kichik miqdorlar, a, b, M, J, h – velosiped parametrlari.

(6.14.5) ifoda rul boshqarish qonunini ifodalaydi. Velosiped rulni boshqarish qonunini ro'yobga chiqaruvchi boshqarish sistemasi bilan birgalikda yopiq sistemani tashkil etadi (6.23- shakl).

Agar 6.24- shaklda ko'rsatilgandek, bog'lanishlardan bittasini uzsak, u vaqtda ochiq sistemaning θ dan $\bar{\theta}$ ga uzaytirish koeffitsiyentini (6.14.4) va (6.14.5) tenglamalardan topish mumkin va u

$$K(p) = -\frac{\left(\frac{MV^2}{a} + \frac{MbV}{a}p\right)(\alpha + \beta p)}{Jp^2 - Mh} \tag{6.14.6}$$

ga teng bo'ladi.

Haqiqatan ham, tasvirlashga o'tganimizdan keyin (6.16.4) velosiped harakati tenglamasidan

$$\varphi(p) = -\frac{\left(\frac{MV^2}{a} + \frac{MbV}{a}p\right)}{Jp^2 - Mh}\theta(p) \tag{6.14.7}$$

va (6.14.5) boshqarish qonunidan

$$\bar{\theta}(p) = (\alpha + \beta p)\varphi(p) \tag{6.14.8}$$

kelib chiqadi. (6.14.7) ifodani $\varphi(p)$ o'rniga (6.16.8) ga keltirib qo'ysak, $\theta(p)$ va $\bar{\theta}(p)$ tasvirlar orasidagi bog'lanishni topamiz:

$$\bar{\theta}(p) = K(p)\,\theta(p),$$

bu yerda $K(p)$ (6.14.6) ifodaga teng.

Boshqariladigan velosiped harakati turg'unligi $W=1$ nuqta D soha ichida yoki tashqarisida yotishiga bog'liq bo'ladi. D sohani topish uchun z tekisligining o'ng yarmini W tekisligiga

$$W = K(z) \tag{6.14.9}$$

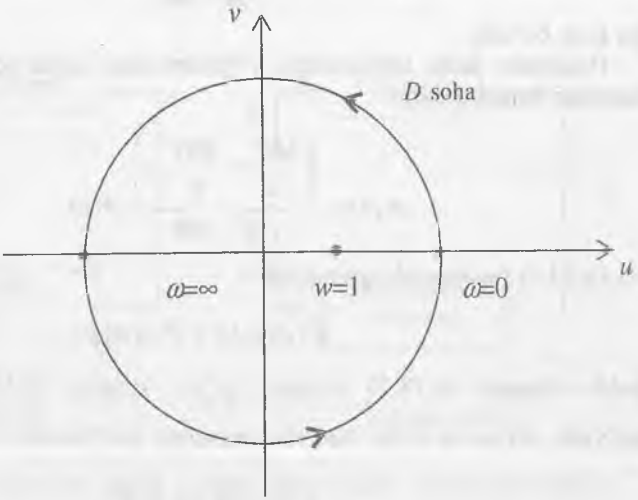
vositasida akslantiramiz. z tekisligi mavhum o'qining aksi D sohaning chegarasidan iborat. Uni topish uchun (6.16.9) ga $z = i\omega$ ni qo'yamiz, hosil bo'lgan ifodani haqiqiy va mavhum qismlarga ajratamiz:

$$w = u + iv = +\frac{\alpha\dfrac{MV^2}{a} - \dfrac{MbV\beta}{a}\omega^2}{+J\omega^2 + Mh} + i\frac{\dfrac{MV^2}{a}\beta\omega + \dfrac{MbV\alpha}{a}}{+J\omega^2 + Mh}.$$

Bu yerdan W tekisligidagi D soha chegarasining ushbu

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{MV(\alpha V - b\beta\omega^2}{a(J\omega^2 + Mh)}, \\ v &= \frac{MV(\beta V\omega + \alpha b)}{a(J\omega^2 + Mh)} \end{aligned}\right\} \tag{6.14.10}$$

parametrik tenglamasini topamiz. 6.25- shaklda $\alpha > 0, \beta > 0$ hol uchun



6.25- shakl.

D soha keltirilgan. Bu yerda ko‘rsatilganicha, $\alpha V^2 > ah$ bo‘lganda sistemaning harakati turg‘un, $\alpha V^2 < ah$ da esa noturg‘un bo‘ladi. Sistema parametrlarining uzluksiz o‘zgarishi natijasida D sohaning chegarasi $w=1$ nuqta orqali o‘tganda turg‘un harakatdan noturg‘un harakatga o‘tiladi. (6.14.10) parametrik tenglama, sistema parametrlari o‘zgarishi uning turg‘unligiga qanday tarzda ta’sir etishini tadqiq etishga imkoniyat yaratadi.

15- §. Turg‘unlik kriteriylari va algoritmlari. τ - va ν - o‘tish. Mavhum o‘qning chap va o‘ng tarafida yotgan ildizlar sonini topish algoritmi

Ko‘phadlarni D- bo‘laklash strukturasini bilish turg‘unlikni tadqiq etish algoritmlarini yaratishga ma’lum imkoniyatlar yaratadi. Bu algoritmlarni yaratish g‘oyasini quyidagicha izohlash mumkin: qaralayotgan ko‘phadlar (funksiyalar) fazosida $M_0, M_1, M_2, ..., M_n$ yo‘l tanlanadi. Bu yo‘l dastlabki funksiyaga mos keluvchi M_0 nuqtadan chekli M_n nuqtaga boradi. M_n nuqtaga mos keluvchi funksiya qaysi $D(s)$ sohaga mansubligi aniqlangan yoki osongina aniqlanadi. Bu yo‘l shunday tanlab olinadiki, har bir M_k nuqtadan M_{k+1} nuqtaga o‘tishda qaralayotgan G sohada yotgan ildizlar sonining o‘zgarishini aniqlash mumkin bo‘lsin. Ko‘phadlar uchun bu yo‘lni shunday tanlaymizki, M_k nuqtadan M_{k+1} nuqtaga o‘tishda M_{k+1} ga mos keluvchi ko‘phadning darajasi kamaysin. Bu g‘oyaning qanday amalga oshishini τ- va ν- o‘tishlar orqali tushuntiramiz.

Y.I. Neymark tomonidan ishlab chiqilgan τ- va ν- o‘tish deb ataladigan mavhum o‘qning chap va o‘ng tarafida yotgan ildizlar sonini topish algoritmini bayon etamiz [63].

$P_n(z)$ ko‘phad n- darajali va

$$P_n(i\omega) = f_n(\omega) + ig_n(\omega) \qquad (6.15.1)$$

bo‘lsin, bu yerda

$$f_n(\omega) = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_n\omega^n,$$

$$g_n(\omega) = b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 + \cdots + b_n\omega^n$$

– haqiqiy ko‘phadlar. $P_n(z)$ ko‘phadni

$$\begin{Bmatrix} f_n(\omega) \\ g_n(\omega) \end{Bmatrix} \quad \text{yoki} \quad \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{Bmatrix} \tag{6.15.2}$$

jadvallarning birortasi orqali ifodalaymiz.

Masalan, $8z^2 + (2-3i)z + 5$ ko'phad

$$\begin{Bmatrix} 5+3\omega-8\omega^2 \\ 2\omega \end{Bmatrix} \quad \text{yoki} \quad \begin{Bmatrix} 5, & 3, & -8 \\ 0, & 2, & 0 \end{Bmatrix}$$

jadvallar orqali ifodalanadi.

Teorema.

$$\begin{Bmatrix} f_n(\omega) \\ g_n(\omega) \end{Bmatrix} \tag{6.15.3}$$

ko'phaddan

$$\begin{Bmatrix} f_n(\omega) \\ g_n(\omega) + \tau f_n(\omega) \end{Bmatrix} \tag{6.15.4}$$

ko'phadga o'tishda chap va o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlarning soni o'zgarmaydi, bu yerda τ *– ixtiyoriy haqiqiy son.*

Isbot. Soddalik uchun $f_n(\omega)$ va $g_n(\omega)$ ko'phadlarning umumiy haqiqiy ildizlari mavjud bo'lmasin deb faraz qilamiz. τ ning uzluksiz o'zgarishi natijasida (6.15.4) ko'phadning chap va o'ng yarim tekisliklarida yotgan ildizlarining soni faqat z kompleks o'zgaruvchining mavhum o'qni kesib o'tishi natijasida o'zgarishi mumkin, ya'ni agar (6.15.4) ko'phadning $z = i\omega$ mavhum ildizi yoki (6.15.1) ga asosan $f_n(\omega)$ va $g_n(\omega) + \tau f_n(\omega)$ ko'phadlarning yangi umumiy haqiqiy ildizi paydo bo'lsa, bu hol yuz beradi. Ammo bunday umumiy ildizning paydo bo'lishi mumkin emas, chunki $f_n(\omega) = 0$ va $g_n(\omega) + \tau f_n(\omega) = 0$ lardan $f_n(\omega) = 0$ va $g_n(\omega) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Umuman, agar $f_n(\omega)$ va $g_n(\omega)$ larning koeffitsiyentlari shunday uzluksiz o'zgarsaki, $f_n(\omega)$ va $g_n(\omega)$ ko'phadlarning umumiy haqiqiy ildizi paydo bo'lmasa, u holda $\begin{Bmatrix} f_n(\omega) \\ g_n(\omega) \end{Bmatrix}$ ko'phadning chap va o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlari soni o'zgarmay qoladi. Bunday o'tishlar **joiz (mumkin bo'lgan) o'tishlar** deb aytiladi.

Aytilganlarga ko'ra $\alpha > 0$ lar uchun

$$\begin{Bmatrix} f_n(\omega) \\ g_n(\omega) \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} \alpha f_n(\omega) \\ g_n(\omega) \end{Bmatrix} \text{ va } \begin{Bmatrix} f_n(\omega) \\ g_n(\omega) \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} f_n(\omega) \\ \alpha g_n(\omega) \end{Bmatrix} \qquad (6.15.5)$$

o'tishlar joiz bo'ladi.

(6.15.3) dan (6.15.4) ga joiz o'tishni τ **-o'tish** deb aytamiz. $P_n(z)$ ko'phadni $-i$ ga ko'paytirish

$$\begin{Bmatrix} f_n(\omega) \\ g_n(\omega) \end{Bmatrix} \text{ ko'phaddan } \begin{Bmatrix} g_n(\omega) \\ -f_n(\omega) \end{Bmatrix} \text{ ko'phadga}$$

o'tish bilan ekvivalentdir. Shuning uchun

$$\begin{Bmatrix} f_n(\omega) \\ g_n(\omega) \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} g_n(\omega) \\ -f_n(\omega) \end{Bmatrix} \qquad (6.15.6)$$

o'tish ham joizdir.

Endi $g_n(\omega) = \omega g_{n-1}(\omega)$, ya'ni $b_0 = 0$ bo'lsin. Agar λ ning 0 dan biror qiymatigacha uzluksiz o'zgarishida $a_0 - \lambda b_1$ qiymat nolga aylanmasa, u holda

$$\begin{Bmatrix} f_n(\omega) \\ \omega g_{n-1}(\omega) \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} f_n(\omega) - \lambda g_{n-1}(\omega) \\ \omega g_{n-1}(\omega) \end{Bmatrix} \qquad (6.15.7)$$

o'tish joiz o'tish bo'ladi. Bu o'tishni λ **-o'tish** deb aytamiz.

Haqiqatan ham, $f_n(\omega) - \lambda g_{n-1}(\omega) = 0$ va $\omega g_{n-1}(\omega) = 0$ munosabatlardan $f_n(\omega) = 0$ va $g_{n-1}(\omega) = 0$, yoki $\omega = 0$ va $f_n(0) + \lambda g_{n-1}(0) = 0$ munosabatlar, ya'ni $a_0 - \lambda b_1 = 0$ kelib chiqadi.

Agar $a_0 - \lambda b_1 \to 0$ bo'lsa, u holda λ-o'tishda ko'phad ildizlarining qanday o'zgarishini kuzataylik. Ushbu

$$\begin{Bmatrix} f_n(\omega) - \lambda g_{n-1}(\omega) \\ \omega g_{n-1}(\omega) \end{Bmatrix}$$

jadval

$$\begin{aligned} & f_n(-iz) - \lambda g_{n-1}(-iz) + i(-iz) g_{n-1}(-iz) = \\ & = a_0 - \lambda b_1 + (b_1 - i a_1 - i\lambda b_2) z + z^2(\cdots) \end{aligned} \qquad (6.15.8)$$

ko'phadni ifodalaydi. $b_1 \neq 0$ bo'lgan umumiy holda $a_0 - \lambda b_1 \to 0$ da (6.15.8) ko'phadning bitta ildizi nolga intiladi. Bu ildiz z_1 bo'lsin. Uni (6.15.8) ga asosan

$$z_1 = -\frac{a_0 - \lambda b_1}{b_1 - i a_1 - i\lambda b_2} + z_1^2(\cdots)$$

ko'rinishda yozish mumkin va bu yerdan

$$\operatorname{Re} z_1 = -\frac{(a_0 - \lambda b_1) b_1}{b_1^2 + (a_1 + \lambda b_2} + \operatorname{Re} z_1^2(\cdots) \qquad (6.15.9)$$

bo'lishligini topamiz.

Oxirgi (6.15.9) ifodadan ko'rinib turibdiki, z_1 ning haqiqiy qismining ishorasi $-a_0 b_1$ ning ishorasi bilan bir xil, ya'ni λ noldan $\lambda = a_0 / b_1$ gacha o'zgargan paytda nolga aylanuvchi z_1 ildiz $-a_0 b_1 > 0$ bo'lganda o'ng yarim tekislikdan va $-a_0 b_1 < 0$ da chap yarim tekislikdan o'tadi.

Ushbu natijani λ parametr bo'yicha ko'phadni D- bo'laklash (6.15.8) yo'li bilan ham olish mumkin. Haqiqatan ham, (6.15.8) ko'phadni λ kompleks parametr bo'yicha D- bo'laklash natijasida hosil bo'ladigan N egri chiziqning parametrik tenglamasi

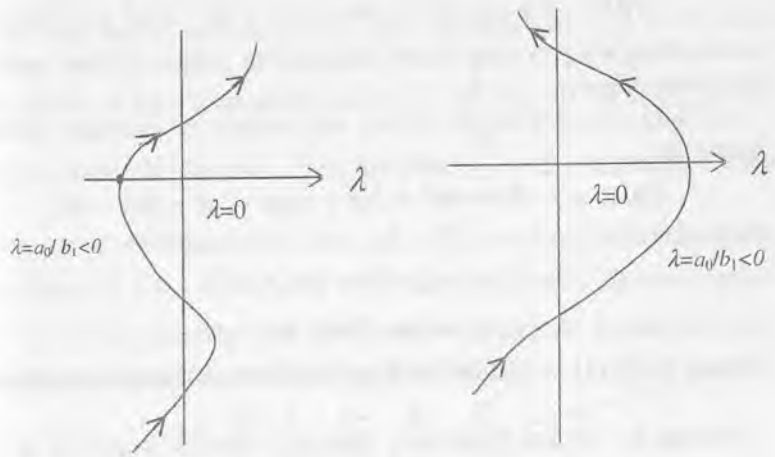
$$\lambda = \frac{f_n(\omega) + i\omega\, g_{n-1}(\omega)}{g_{n-1}(\omega)} = \frac{f_n(\omega)}{g_{n-1}(\omega)} + i\omega$$

ko'rinishda bo'ladi va bu chiziq haqiqiy o'qni $\omega = 0$ ga mos keladigan $\lambda = f_n(0) g_{n-1}^{-1}(0) = a_0 / b_1$ nuqtada kesadi. ω qiymatning o'sishi natijasida N egri chiziq pastdan yuqoriga qarab intiladi va chap tarafidan shtrixlanadi.

Bu yerdan λ ning haqiqiy o'q bo'ylab $\lambda = 0$ dan chekli $\lambda = a_0 / b_1$ qiymatgacha uzluksiz monoton o'zgarishida dastlabki $P_n(z)$ ko'phad $z P_{n-1}(z)$ ko'phadga o'tib, shu bilan birga, agar $a_0 / b_1 < 0$ bo'lsa, nolga teng bo'lgan ildiz o'ng yarim tekislikdan va $a_0 / b_1 > 0$ bo'lsa, chap yarim tekislikdan o'tadi (6.26- shakl).

n - darajali

$$P_n(z) = \begin{Bmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots \\ b_0, & b_1, & b_2, & \ldots \end{Bmatrix}$$



6.26- shakl.

ko'phad berilgan bo'lsin. τ - o'tish orqali bu ko'phaddan

$$\begin{Bmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \dots \\ 0, & \bar{b}_1, & \bar{b}_2, & \dots \end{Bmatrix}$$

ko'phadga va λ-o'tish orqali

$$\begin{Bmatrix} a_0 - \lambda\bar{b}_1, & a_1 - \lambda\bar{b}_2, & \dots \\ 0, & \bar{b}_1, \dots & \end{Bmatrix}$$

ko'phadga o'tamiz. $\lambda = a_0 / \bar{b}_1$ qiymatda bu keyingi ko'phad $zP_{n-1}(z)$ ko'phadga o'tadi. Oldingi mulohazalarga asosan $P_n(z)$ ko'phadning o'ng yarim tekislikda yotgan ildizlari soni s_n

$$s_n = \begin{cases} s_{n-1}, \text{ agar } \delta_1 = a_0 / \bar{b}_1 > 0 \text{ bo'lsa} \\ s_{n-1} + 1, \text{ agar } \delta_1 = a_0 / \bar{b}_1 < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases} \qquad (6.15.10)$$

ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, n-darajali $P_n(z)$ ko'phadning o'ng va chap yarim tekisliklarda yotgan ildizlari sonini topish masalasini $(n-1)$- darajali $P_{n-1}(z)$ ko'phadning xuddi shunday masalasiga keltirdik.

Misol. To'rtinchi darajali

$$P_4(z) = 3 + (3 + 8i)z + (4 + 7i)z^2 + (6 - 3i)z^3 + iz^4 \quad (6.15.11)$$

ko'phadning o'ng va chap yarim tekisliklarda yotgan ildizlari sonini topish talab etilsin.

(6.15.11) ga $z = i\omega$ ni qo'yib, uni haqiqiy va mavhum qismlarga ajratamiz:

$$P_4(i\omega) = 3 - 8\omega - 4\omega^2 + 3\omega^3 + i(3\omega - 7\omega^2 - 6\omega^3 + \omega^4).$$

Bu yerdan

$$f_4(\omega) = 3 - 8\omega - 4\omega^2 + 3\omega^3,$$

$$g_4(\omega) = 3\omega - 7\omega^2 - 6\omega^3 + \omega^4.$$

Demak, (6.15.11) ko'phadni quyidagi jadval orqali ifodalash mumkin:

$$\begin{Bmatrix} 3, & -8, & -4, & 3, & 0 \\ 0, & 3, & -7, & -6, & 1 \end{Bmatrix}.$$

λ-o'tishdan foydalanib va $\lambda = 1$ deb olib, oxirgi ko'phaddan

$$\begin{Bmatrix} -1, & 2, & 2, & 0 \\ 3, & -7, & -6, & 1 \end{Bmatrix} \quad (6.15.12)$$

ko'phadga kelamiz, bu yerda $\delta_1 = 3{,}3 > 0$. (6.15.12) ko'phadga τ-o'tishni qo'llab ($\tau = 3$),

$$\begin{Bmatrix} -1, & 2, & 2, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 1 \end{Bmatrix} \quad (6.15.13)$$

ko'phadga kelamiz.

Endi (6.15.13) ko'phadga λ-o'tishni bajarib,

$$\begin{Bmatrix} 2, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 1 \end{Bmatrix} \quad (6.15.14)$$

ko'phadga kelamiz, bu yerda $\delta_2 > 0$. Bu jarayonni davom ettirib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{Bmatrix} 2, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 1 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\tau=1/2 \text{ o'tish}} \begin{Bmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 2 \end{Bmatrix} \xrightarrow[\delta_3>0]{\lambda\text{-o'tish}},$$

$$\begin{Bmatrix} -3, & 0 \\ 1, & 2 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\tau\text{-o'tish}} \begin{Bmatrix} -3, & 0 \\ 0, & 2 \end{Bmatrix} \xrightarrow[\delta_4<0]{\lambda\text{-o'tish}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

τ- va λ-o'tishlar natijasida biz $P_4(z)$ ko'phaddan $\begin{Bmatrix}0\\2\end{Bmatrix}=2i$ ko'phadga keldik va bu o'tishlar jarayonida $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, $\delta_3>0$, $\delta_4<0$ ekanligini aniqladik. Demak, $P_4(z)$ ko'phad $\begin{Bmatrix}0\\2\end{Bmatrix}=2i$ ko'phadga o'tishda o'ng yarim tekislikdan bitta ildiz ($\delta_4<0$) va chap yarim tekislikdan uchta ildiz ($\delta_1>0$, $\delta_2>0$, $\delta_3>0$) nolga aylanadi. Shuning uchun ham $P_4(z)$ ko'phadning bitta ildizining haqiqiy qismi musbat va uchta ildizining haqiqiy qismi manfiy ishorali bo'ladi.

16-§. Ko'phad ildizlari haqiqiy qismining manfiy va musbat ishoralilari sonini topishning determinantli kriteriylari

$P_n(z)$ ko'phadning o'ng va chap yarim tekisliklarda yotgan ildizlarining sonini topish uchun τ- va λ-o'tishlardan foydalanib, $P_n(z)$ ko'phadning jadvalidan $P_{n-1}(z)$ ko'phadning jadvaliga, $P_{n-1}(z)$ dan $P_{n-2}(z)$ ga va hokazo $P_1(z)$ dan $P_0(z)$ ga o'tamiz va $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ larning ishoralarini aniqlaymiz. Demak, $P_n(z)$ ko'phadning o'ng va chap yarim tekislikda yotgan ildizlarining sonini topish masalasini $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ larning ishoralarini aniqlash masalasiga keltiriladi.

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ larning qiymatlarini topish uchun bajariladigan barcha ketma-ket o'tishlarni bajarmaslik maqsadida ushbu

$$
A_{2n}=\left\|\begin{array}{cccccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \ldots & 0\\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 & \ldots & 0\\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & 0 & \ldots & 0\\
\multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & a_0 & a_1 & \cdots & a_n\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & b_0 & b_1 & \cdots & b_n
\end{array}\right\| \qquad (6.16.1)
$$

(chap tomonda bloklar: B_2, B_4, …, B_{2n})

matritsani ko'ramiz.

(6.16.1) ifodani

$$P_n(z) = \begin{Bmatrix} f_n(\omega) \\ g_n(\omega) \end{Bmatrix}$$

ko'phadning matritsasi deb aytamiz. $P_n(z)$ ko'phaddan $P_{n-1}(z)$ ko'phadga o'tishda (6.16.1) matritsaning qanday o'zgarishini kuzatamiz. τ-o'tishda A_{2n} matritsaning 2, 4, 6,... juft satrlariga 1, 3, 5,... toq satrlarining τ soniga ko'paytirilgan mos elementlari qo'shiladi. Bu jarayon natijasida (6.18.1) matritsaning jadvalida chiziq bilan ajratib ko'rsatilgan $B_2, B_4, B_6, \ldots$ determinantlarning qiymati o'zgarmaydi va A_{2n} matritsaning o'zi esa quyidagi

$$\left\|\begin{array}{c|cc|cc|ccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ B_2 & b_0 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 & \ldots & \bar{b}_n & 0 & \ldots & 0 \\ \hline & & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ B_4 & 0 & 0 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \ldots & b_n & 0 & \ldots & 0 \\ \hline & \multicolumn{2}{c|}{\ldots\ldots} & \multicolumn{2}{c|}{\ldots\ldots} & \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots} \\ & 0 & 0 & & & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ B_{2n} & 0 & 0 & & & 0 & 0 & \bar{b}_1 & \ldots & \bar{b}_n \\ \hline & & & A_{2n-2} & & A_{2n-4} & & & & \end{array}\right\| \qquad (6.16.2)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Navbatdagi λ-o'tishda 3, 5, 7, ... toq satrlardan λ ga ko'paytirilgan 2,4,6,... juft satrlarning mos elementlari ayiriladi. Bu holda ham $B_2, B_4, B_6, \ldots$ determinantlarning qiymatlari o'zgarmaydi. (6.16.2) da A_{2n-2} orqali ifodalangan ifoda $P_{n-1}(z)$ ko'phadning matritsasi bo'ladi va B_2 determinantning $a_0\bar{b}_1$ qiymati δ_1 ning qiymatiga teng bo'ladi. A_{2n} matritsaning o'zi esa, τ- va ν- o'tishlardan keyin quyidagi

$$\left\|\begin{array}{cccccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 & \dots & \bar{b}_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \dots & \bar{a}_n & 0 & \dots & 0 & \\
0 & 0 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \dots & \bar{b}_n & 0 & \dots & 0 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \dots & \dots & \bar{a}_n & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \dots & \dots & \bar{b}_n &
\end{array}\right\|$$

A_{2n-2}

ko'rinishni oladi. $P_{n-1}(z)$ ko'phaddan $P_{n-2}(z)$ ko'phadga o'tish uchun A_{2n-2} matritsaga τ - va ν - o'tishlarni qo'llaymiz, A_2 matritsagacha bu jarayonni davom ettirib, ushbu

$$\left\|\begin{array}{cccccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{b}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \bar{\bar{b}}_2 & \bar{\bar{b}}_3 & \cdots & \bar{\bar{b}}_n & \cdots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \tilde{a}_{n-1} & \tilde{a}_n & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{b}_n &
\end{array}\right\| \qquad (6.16.3)$$

kelamiz. Bu matritsaning ifodasidan ko'rinib turibdiki,

$$B_2 = \delta_1, \qquad B_4 = \delta_1\delta_2,..., \quad B_{2n} = \delta_1\delta_2\cdots\delta_n$$

va, demak, $\delta_1,\delta_2,...,\delta_n$ lar orasidagi manfiy miqdorlarning soni

$$1, \quad |B_2|, \quad |B_4|, \quad ...., \quad |B_{2n}| \qquad (6.16.4)$$

determinantlar qatoridagi ishora o'zgarishlar soniga teng bo'ladi.

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \qquad (6.16.5)$$

haqiqiy koeffitsiyentli ko'phad uchun yuqorida keltirilgan mulohazalarni boshqacharoq olish borish ham mumkin. Bunda A_{2n} matritsa o'rniga

$$A_n = \begin{array}{c|c|ccc|ccc} B_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline B_2 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \hline B_3 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \hline & \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \hline B_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{array}$$

ko'rinishdagi matritsadan foydalanish mumkin. Bu yerda ham haqiqiy ko'phadning o'ng yarim tekislikdagi ildizlari soni

$$a_0, \quad |B_1|, \quad \frac{|B_2|}{|B_1|}, \dots, \frac{|B_n|}{|B_{n-1}|} \tag{6.16.6}$$

qatordagi ishora o'zgarishlar soniga tengligini ko'rsatish mumkin. Demak, ko'phadning barcha ildizlari chap yarim tekislikda yotishi uchun (6.16.6) qatordagi hamma $a_0 > 0$, $|B_1| > 0, \dots, |B_n| > 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu tasdiq Raus–Gurvits kriteriysining o'zginasidir va biz buni boshqa yo'l bilan topdik.

Shunday qilib, kompleks va haqiqiy koeffitsiyentli ko'phadlar uchun turg'unlikning determinantli kriteriylari mos ravishda (6.16.4) va (6.18.6) determinantlarning musbat bo'lishidan iborat ekan. Ammo turg'unlik sohasining chegarasini faqat $|B_{2n}|$ va mos ravishda $|B_n|$ determinantlar aniqlaydi. Turg'unlik sohasining chegarasida $|B_{2n}|=0$ va $|B_n|=0$ bo'ladi.

Haqiqiy ko'phadlar uchun $|B_n| = 0$ tenglama bilan aniqlanadigan turg'unlik sohasining chegarasi $|B_n| = a_n|B_{n-1}|$ bo'lganligi uchun ikki qismga: ikkita sof mavhum ildizga mos keluvchi $|B_{n-1}| = 0$ ga va bitta haqiqiy 0 ildizga mos keluvchi $a_n = 0$ ga bo'linadi.

VII BOB. HARAKAT TURG'UNLIGIGA KUCHLAR TARKIBINING TA'SIRI

1- §. Kuchlarni matematik tarkibiga qarab sinflarga ajratish [60]

Ko'p hollarda sistemaga ta'sir etayotgan kuchlarning tarkibiga qarab uning turg'un yoki noturg'un ekanligini aniqlash mumkin. Shuning uchun ham kuchlarning matematik tarkibiga qarab ularni sinflarga ajratishni ko'rib chiqamiz.

x_k va $\dot{x}_k$ miqdorlarga nisbatan harakatning turg'unligini tadqiq etish toyilgan harakatning ushbu

$$A\ddot{x} + B_1\dot{x} + C_1x = X \tag{7.1.1}$$

matritsaviy differensial tenglamasini tahlil qilishga keltiriladi deb hisoblaymiz. Bu yerda x – elementlari $x_1,...,x_s$ bo'lgan ustun-matritsa; A, B_1, C_1 – o'zgarmas koeffitsiyentli s tartibli berilgan kvadrat matritsalar; X – elementlari $X_1,...,X_s$ bo'lgan, x_k va $\dot{x}_k$ larni kamida ikkinchi darajada o'z ichiga olgan hamda barcha $x_k = \dot{x}_k = 0$ bo'lganda nolga aylanuvchi ustunmatritsa. Bundan tashqari, $A = \left\| a_{kj} \right\|$ simmetrik matritsa ($A = A'$) va

$$T = \frac{1}{2} A\dot{x} \cdot \dot{x} \tag{7.1.2}$$

aniq musbat ishorali funksiya, chunki

$$A\dot{x} \cdot \dot{x} = a_{11}\dot{x}_1^2 + \cdots + a_{ss}\dot{x}_s^2 + 2a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \cdots + 2a_{s-1,s}\dot{x}_{s-1}\dot{x}_s = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{kj}\dot{x}_k\dot{x}_j \qquad (a_{kj} = a_{jk}). \tag{7.1.3}$$

(7.1.1) tenglamaga biror moddiy sistemani mos qilib qo'yish mumkin. U vaqtda $x_1,...,x_s$ lar sistemaning koordinatalari, $\dot{x}_1,...,\dot{x}_s$ lar tezliklari va (7.1.2) kvadratik forma uning kinetik energiyasi bo'ladi. Ko'p hollarda bu kvadratik forma haqiqatan ham real sistemaning kinetik energiyasi bo'ladi, ammo ayrim hollarda y harakat tenglamalarini o'zgartirish

natijasida ham hosil bo'lishi mumkin (Raus tenglamalarida o'zgartirish kiritganimizda hosil bo'lgan edi: $R = R_2 + R_1 + R_0$, bu yerda R_2 – kvadratik forma).

(7.1.1) tenglamaning $B_1\dot{x}$ va $C_1 x$ ustun-matritsalarini (mos ishora bilan olganda) kuchlar sifatida talqin qilish mumkin. Ular ayrim hollarda real kuchlarni ifodalaydi va ayrim hollarda toyilgan harakat tenglamalarini keltirib chiqarishda hosil bo'ladigan hadlarni ifodalaydi.

Kelgusida soddalik uchun (7.1.2) kvadratik forma kinetik energiya deb ataladi, $B_1\dot{x}$ va $C_1 x$ matritsalar – sistemaga ta'sir etayotgan kuchlar, $x_1,..., x_s$ larni o'zgaruvchilar, ularning vaqt bo'yicha olingan $\dot{x}_1,..., \dot{x}_s$ hosilalarini esa tezliklar deb aytamiz.

B_1 va C_1 matritsalarni simmetrik va qiyshiq simmetrik matritsalarga ajratamiz:

$$B_1 = B + G, \qquad C_1 = C + P, \tag{7.1.4}$$

bu yerda B va C simmetrik matritsalar hamda G va P qiyshiq simmetrik matritsalar quyidagicha aniqlanadi:

$$\left.\begin{aligned} B = B' &= \frac{1}{2}(B_1 + B_1'), \qquad & G = -G' &= \frac{1}{2}(B_1 - B_1'), \\ C = C' &= \frac{1}{2}(C_1 + C_1'), \qquad & P = -P' &= \frac{1}{2}(C_1 - C_1'). \end{aligned}\right| \tag{7.1.5}$$

(7.1.4) ifodalarni (7.1.1) tenglamaga qo'ysak,

$$A\ddot{x} + B_1\dot{x} + G\dot{x} + Cx + Px = X \tag{7.1.6}$$

ni hosil qilamiz.

$C = \|c_{kj}\|$ simmetrik matritsali Cx kuch **potensial** yoki **konservativ kuch**,

$$\Pi = \frac{1}{2} Cx \cdot x \tag{7.1.7}$$

kvadratik forma esa sistemaning potensial energiyasi deb ataladi.

Cx kuchlar real og'irlik, elastiklik kuchlar potensialining chiziqli qismini (nochiziqli potensial kuchlar qismi X matritsa ifodasiga kiradi) ifodalaydi.

$B = \|b_{kj}\|$ simmetrik matritsa yordamida

$$F = \frac{1}{2} B\dot{x} \cdot \dot{x} \tag{7.1.8}$$

kvadratik formani tuzamiz. U manfiy bo'lmagan holda **tarqalish** (sochilish) **funksiyasi** yoki Releyning **dissipativ funksiyasi** deb, o'z navbatida bu funksiyaga mos $B\dot{x}$ kuchlar **dissipativ kuchlar** deb ataladi.

Agar F kvadratik forma musbat bo'lishdan tashqari yana aniq musbat ishorali ham bo'lsa, u holda dissipasiya **to'liq**, aks holda esa **to'liq emas** deb aytiladi.

Agar F funksiya manfiy qiymatlar ham qabul qilsa, bu $B\dot{x}$ matritsaga kiruvchi kuchlar orasida **tezlatuvchi kuchlar** mavjudligini bildiradi. Odatda dissipativ kuchlar, jismlarning tabiiy ravishda qarshilik ko'rsatadigan muhitida harakat qilganida, omik qarshiligi bor elektr zanjirlarida va h.k. hollarda hosil bo'ladi. Qoida bo'yicha tezlatuvchi kuchlar maxsus qurilmalar orqali hosil qilinadi.

$\dot{x}$ tezliklarga chiziqli bog'langan va $G = \|g_{kj}\|$ qiyshiq simmetrik matritsasi bor $G\dot{x}$ kuchlar **giroskopik kuchlar** deb ataladi. Ko'pincha bu kuchlar giroskopi bor sistemalarda va boshqa, masalan, avtomobil, samolyot, biologik populyatsiya, o'zgarmas magnit maydonida elektronning harakati kabi sistemalarda ham mavjud bo'lishi mumkin.

x koordinata chiziqli bog'langan va $P = \|p_{kj}\|$ qiyshiq simmetrik matritsasi bor Px kuchlarning barqaror aniq nomi yo'q.

G. Sigler ularni **tsirkulyatsion kuchlar** deb atadi, giroskopik sistemalar nazariyasida ularni **radial korreksiya kuchlari** deb, ko'pincha esa ularni yana **nokonservativ kuchlar**, **psevdogiroskopik** kuchlar deb ham ataydilar. Biz bundan keyin ularni (bu atama uncha to'g'ri emasligini bilgan holda) **nokonservativ** (konservativ emas) **kuchlar** deb ataymiz. Nokonservativ kuchlar tabiiy ravishda mavjud bo'lishi va maxsus qurilmalar orqali hosil etilishi mumkin.

X kuchlarni **nochiziqli kuchlar** deb ataymiz. Bu kuchlar yoyilmasida x_k va $\dot{x}_k$ lar kamida ikkinchi darajada qatnashadi hamda $x_k = 0$ va $\dot{x}_k = 0$ bo'lganda bu yoyilma nolga teng bo'ladi.

Misol. Toyilgan harakatning tenglamasi

$$3\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 5\dot{x}_1 - x_1 + 2x_2 = X_1,$$

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + 6x_1 + 5x_2 = X_2$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bu tenglamalarda A, B_1, C_1 matritsalar mos ravishda

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad B_1 = \begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -1 \end{Vmatrix}, \qquad C_1 = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 5 \end{Vmatrix}$$

kabi aniqlanadi. Sistemaning kinetik energiyasini tuzamiz:

$$T = \frac{1}{2} A\dot{x} \cdot \dot{x} = \frac{1}{2}\left(3\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2\right).$$

T kvadratik forma uchun Silvestr kriteriysi bajariladi: $\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = 2 > 0$. Demak, u aniq musbat ishorali.

B_1 va C_1 matritsalarning satr va ustunlarini mos ravishda joylarini almashtirib, ularning transponirlangan B_1' va C_1' matritsalarini topamiz:

$$B_1' = \begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \qquad C_1' = \begin{Vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}.$$

B_1 va C_1 matritsalarni simmetrik va qiyshiq simmetrik matritsalarga ajratamiz:

$$B = \frac{1}{2}\left(B_1 + B_1'\right) = \begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}, \qquad G = \frac{1}{2}\left(B_1 - B_1'\right) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$C = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_1'\right) = \begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}, \qquad P = \frac{1}{2}\left(C_1 - C_1'\right) = \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Endi Reley funksiyasi F ni va potensial energiya P ni topamiz:

$$F = \frac{1}{2} B\dot{x} \cdot \dot{x} = \frac{1}{2}\left(5\dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2 - \dot{x}_2^2\right),$$

$$\Pi = \frac{1}{2} Cx \cdot x = \frac{1}{2}\left(-x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2\right).$$

Reley funksiyasi (F) ham musbat qiymat (masalan, $x_2 = 0$ va $x_1 \neq 0$ bo'lganda), ham manfiy qiymat (masalan, $x_1 = 0$ va $x_2 \neq 0$ bo'lganda) qabul qilishi mumkin. Shuning uchun ham $B\dot{x}$ kuchlar orasida ham dissipativ, ham tezlatuvchi kuchlar mavjud. Giroskopik ($G\dot{x}$), potensial (Cx) va nokonservativ (Px) kuchlarning matritsalari mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$G\dot{x} = \begin{Vmatrix} \dot{x}_2 \\ -\dot{x}_1 \end{Vmatrix}, \qquad Gx = \begin{Vmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \end{Vmatrix}, \qquad Px = \begin{Vmatrix} -2x_2 \\ 2x_1 \end{Vmatrix}.$$

$x = 0$, $\dot{x} = 0$ toyilmagan harakatning turg'unligini tadqiq etishdan oldin

$$x = \Lambda z$$

formula orqali yangi $z_1, z_2, ..., z_s$ o'zgaruvchilarga o'tamiz, bu yerda Λ – matritsa. Bu formulani (7.6) tenglamaga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$A\Lambda\ddot{z} + B\Lambda\dot{z} + G\Lambda\dot{z} + C\Lambda z + P\Lambda z = X(\Lambda z).$$

Bu tenglamaning ikki tomonini chapdan Λ matritsaning transponirlangan Λ' matritsasiga ko'paytiramiz:

$$\Lambda'A\Lambda\ddot{z} + \Lambda'B\Lambda\dot{z} + \Lambda'G\Lambda\dot{z} + \Lambda'C\Lambda z + \Lambda'P\Lambda z = Z, \qquad (7.1.9)$$

bu yerda $Z = \Lambda'X(\Lambda Z)$ – ustun-matritsa va uning elementlarining ifodasiga z_k va $\dot{z}_k$ larning birinchidan yuqori darajalari kiradi.

Eslatib o'tamizki, A va C matritsalar simmetrik, bundan tashqari A– aniq musbat ishorali. Chiziqli algebradan quyidagi **teorema** ma'lum:

Agar s tartibli A va C matritsalar simmetrik va A matritsa aniq musbat ishorali bo'lsa, u vaqtda:

1) $\det(A\lambda + C) = 0$ (7.1.10)

xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari haqiqiy;

2) *Doimo shunday xosmas* Λ *matritsa topiladiki,*

$$\Lambda'A\Lambda = E, \quad \Lambda'C\Lambda = C_0 \qquad (7.1.11)$$

bo'ladi, bu yerda E – birlik matritsa va

$$C_0 = \begin{Vmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_s \end{Vmatrix} \qquad (7.1.12)$$

diagonal matritsa, bunda $c_1, c_2, ..., c_s$ *lar mos ravishda* (7.1.10) *tenglamaning ildizlariga teng.*

Teoremaning 2) qismidan quyidagi kelib chiqadi: agar ikkita kvadratik forma

$$T = \frac{1}{2}A\dot{x}\cdot\dot{x} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}a_{kj}\dot{x}_k\dot{x}_j,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}Cx\cdot x = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}c_{kj}x_kx_j$$

berilgan va bunda T aniq-musbat ishorali bo'lsa, u vaqtda doimo shunday

$$x = \Lambda z$$

almashtirish topiladiki (Λ– xosmas matritsa), yangi o'zgaruvchilarda T va Π larning ifodalari

$$T = \frac{1}{2}\dot{z}\cdot\dot{z} = \frac{1}{2}\left(\dot{z}_1^2 + \cdots + \dot{z}_s^2\right), \tag{7.1.13}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}C_0 z\cdot z = \frac{1}{2}\left(C_1 z_1^2 + \cdots + C_s z_s^2\right) \tag{7.1.14}$$

ko'rinishni oladi.

Λ xosmas matritsa bo'lsin. U vaqtda A va C matritsalar simmetrik va A– aniq-musbat ishorali ekanligi uchun, teoremaga asosan, (7.1.11) munosabatlar bajariladi.

Bu yerda $\Lambda' B\Lambda$ matritsa simmetrik, $\Lambda' G\Lambda$ va $\Lambda' P\Lambda$ matritsalar esa qiyshiq simmetrik bo'ladi.

Haqiqatan ham, matritsalar nazariyasidagi

$$(AB)' = B'A', \qquad (A')' = A \tag{7.1.15}$$

formulalarga asosan

$$(\Lambda' B\Lambda)' = (B\Lambda)'(\Lambda')' = \Lambda' B'\Lambda$$

yoki B simmetrik matritsa bo'lganligi uchun $B = B'$ va

$$(\Lambda' B\Lambda)' = \Lambda' B\Lambda .$$

Demak, $\Lambda' B\Lambda$ simmetrik matritsa bo'ladi.

Agar simmetrik B matritsa o'rniga qiyshiq simmetrik G (yoki R) matritsani olsak, u vaqtda

$$(\Lambda' G\Lambda)' = (C\Lambda)'(\Lambda')' = \Lambda' G'\Lambda$$

ni yoki G ning qiyshiq simmetrik matritsa ekanligini va ular uchun $G' = -G$ tenglik mavjudligini hisobga olib,

$$(\Lambda' G\Lambda)' = -\Lambda' G\Lambda$$

ni hosil qilamiz. Demak, $\Lambda' G\Lambda$ ham qiyshiq simmetrik matritsa bo'ladi. Xuddi shunday, $\Lambda' P\Lambda$ ham qiyshiq simmetrik matritsa ekanligini isbotlash mumkin.

Keltirilgan mulohazalarni va $E\ddot{z} = \ddot{z}$ ni hisobga olib, (7.1.9) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\ddot{z} + B\dot{z} + G\dot{z} + C_0 z + P z = Z , \tag{7.1.16}$$

bu yerda yozuvni soddalashtirish uchun $\Lambda' B\Lambda$, $\Lambda' G\Lambda$ va $\Lambda' P\Lambda$ matritsalar mos ravishda dastlabki B, G, P harflar bilan belgilangan.

Agar yuqorida keltirilgan teoremani A va B yoki B va C (C–to'liq dissipatsiyaga ega deb hisoblab) matritsalarga qo'llasak, u vaqtda yana (7.1.9) tenglamaning ikkita yangi formasini yozish mumkin:

$$\ddot{z} + B_0\dot{z} + G\dot{z} + Cz + Pz = Z, \tag{7.1.17}$$

$$A\ddot{z} + B_0\dot{z} + G\dot{z} + C_0z + Pz = Z, \tag{7.1.18}$$

bu erda C_0 va B_0 – haqiqiy elementli diagonal matritsalar:

$$C_0 = \begin{Vmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_s \end{Vmatrix}, \qquad B_0 = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_s \end{Vmatrix}.$$

Shunday qilib, $x = \Lambda z$ almashtirish yordami bilan (7.1.6) tenglamani uchta (7.1.16), (7.1.17) va (7.1.18) ko'rinishdagi haqiqiy formalarning birortasiga keltirish mumkin. Bu almashtirishda potensial, dissipativ, giroskopik va nokonservativ kuchlar yana o'sha tarkibda (strukturada) gi kuchlarga aylanadi. Aniqki, z_k va $\dot{z}_k$ larga nisbatan turg'unlikdan (noturg'unlikdan) x_k va $\dot{x}_k$ larga nisbatan turg'unlik (noturg'unlik) kelib chiqadi. Shuning uchun ham bizni (7.1.6) tenglamani (7.1.16), (7.1.17) va (7.1.18) tenglamalarning birortasiga keltiradigan $x = \Lambda z$ almashtirishning o'zi qiziqtirmaydi. Bizga shunday almashtirishning mavjudligini bilish kifoyadir.

Dastlabki B va C matritsalar bilan ulardan hosil qilingan B_0 va C_0 matritsalar o'rtasida

$$b_1b_2\cdots b_s = \Delta^2 \det B, \quad c_1c_2\cdots c_s = \Delta^2 \det C \tag{7.1.19}$$

munosabatlar mavjud, bu yerda $\Delta = \det\Lambda$ – almashtirish matritsasining determinanti. Haqiqatan ham, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ formulani (7.1.11) formulalarning ikkinchisiga qo'llab,

$$\det C_0 = \det\Lambda' \cdot \det C \cdot \det\Lambda$$

ni hosil qilamiz. Ikkinchidan, $\det\Lambda' = \det\Lambda$ ekanligini hisobga olib, bu munosabatdan

$$\det C_0 = \Lambda^2 \det C$$

ni hosil qilamiz, bu yerda $\Delta = \det\Lambda$. Bu yerda C_0 diagonal matritsa, shuning uchun

$$\det C_0 = c_1c_2\cdots c_s,$$

demak,

$$c_1 c_2 \cdots c_s = \Delta^2 \det C . \qquad (7.1.20)$$

Xuddi shunday, (7.1.19) formulalarning birinchisini ham isbotlash mumkin.

Tezlatuvchi kuch mavjud bo'lmasa, B matritsaning b_k elementlari orasida manfiylari yo'q va to'liq dissipatsiya holatida barcha b_k lar musbat bo'ladi. Agar tezlatuvchi kuchlar mavjud bo'lsa, u holda b_k elementlar orasida manfiylari ham bo'ladi. Π potentsial energiyaning minimumida barcha c_k koeffitsiyentlar musbat, maksimumida esa manfiy bo'ladi.

2- §. Faqat potensial kuchlar ta'siri ostidagi sistema harakatining turg'unligi. Turg'unlik koeffitsiyentlari

Qaralayotgan sistemaga faqatgina Cx potensial kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsin va qolgan barcha kuchlarga nisbatan, ular yo'q, ya'ni $B = G = P = Z = 0$ deb faraz qilamiz. U holda (7.1.16) foydalanib, toyilgan harakat tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\ddot{z} + C_0 z = 0 . \qquad (7.2.1)$$

C_0 diagonal matritsa ekanligini hisobga olib, (7.2.1) matritsali-tenglamani skalar tenglamalar ko'rinishida yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{z}_1 + c_1 z_1 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\ddot{z}_s + c_s z_s = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.2)$$

Bu yerda $z_1, z_2, \ldots, z_s$ lar **normal koordinatalar** deb aytiladi. (7.2.2) tenglamalar bir-biri bilan bog'lanmagan va har biri alohida integrallanadi:

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad c_k > 0; \qquad c_k = \mu_k^2 \ \text{bo'lsin}, \\ &\qquad z_k = A_k \sin(\mu_k t + \varepsilon_k); \\ &2.\quad c_k < 0; \qquad c_k = -\nu_k^2 \ \text{bo'lsin}, \\ &\qquad z_k = A_k e^{\nu_k t} + B_k e^{-\nu_k t}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.3)$$

bu yerda A_k, B_k va ε_k – o'zgarmas sonlar. Ravshanki, birinchi holda $\lambda = \pm \mu_k i$ $(i = \sqrt{-1})$, ikkinchi holda esa $\lambda = \pm \nu_k$ xarakteristik sonlardir.

(7.2.3) dan ko'rinib turibdiki, agar barcha $c_k > 0$ bo'lsa, $z_k = 0$ va $\dot{z}_k = 0$ toyilmagan harakat z_k koordinata va $\dot{z}_k$ tezliklarga nisbatan (demak, x_k va $\dot{x}_k$ larga nisbatan ham) turg'un bo'ladi. Har bir $c_k < 0$ ga (agar u mavjud bo'lsa) noturg'un z_k koordinata to'g'ri keladi va, demak, $c_k < 0$ bo'lganda, toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi (chunki $c_k < 0$ bo'lsa, $\lambda = \pm\nu_k$ xarakteristik sonlarning biri musbat). U vaqtda Z nochiziqli funksiyalarning qanday bo'lishidan qat'iy nazar toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi (Lyapunovning teorema D siga asosan). Shuning uchun ham c_k sonlar sistemaning **turg'unlik koeffitsiyentlari** va manfiy ishorali c_k lar soni **turg'unlik darajasi** deb aytiladi. Bu ta'riflar fransuz olimi Puankare tomonidan berilgan.

Kelgusida bizni faqat c_k noturg'un koeffitsiyentlar sonining juft yoki toqligigina qiziqtiradi.

(7.1.19) formulalarning ikkinchisi

$$c_1 c_2 \cdots c_s = \Delta^2 \det C \tag{7.2.4}$$

dan foydalanib, sistema turg'unlik darajasining juftligini aniqlash mumkin. Bu yerda normal koordinatalarga o'tishning hojati yo'q. Haqiqatan ham, agar manfiy ishorali c_k koeffitsiyentlar soni juft bo'lsa, u vaqtda $c_1 c_2 \cdots c_s$ ko'paytmaning ishorasi musbat bo'ladi (c_k koeffitsiyentlar orasida nolga tenglari yo'q deb faraz qilamiz) va (7.2.4) tenglikdan $\det C > 0$ ekanligi kelib chiqadi. Agar manfiy ishorali c_k koeffitsiyentlar soni toq bo'lsa, u holda $c_1 c_2 \cdots c_s$ ko'paytmaning ishorasi manfiy bo'ladi va, demak, $\det C < 0$. Shunday qilib, oddiy qoidani hosil qilamiz: *dastlabki toyilgan harakat differensial tenglamalarida potensial kuchlari matritsasi C ning determinanti musbat bo'lsa, sistema noturg'unlik darajasi juft,* $\det C < 0$ *bo'lganda esa toq bo'ladi.*

Bu qoidani ikkita misolga tatbiq etib ko'ramiz.

1- misol. Toyilgan harakat tenglamasi

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 5x_1 + 2x_2 = 0, \\ &\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 + 2x_1 - x_2 = 0 \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

ko'rinishda bo'lsin. Koordinataga chiziqli bog'langan kuchlarning matritsasi .

$$C = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}$$

simmetrik bo'lganligi uchun (7.2.5) sistema potensial sistema bo'ladi. Bu matritsaning determinanti manfiy:

$$\det C = \begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} = -9 .$$

Shuning uchun tenglamalarni normal ko'rinishga keltirmasdan sistema toq darajali noturg'unlikka ega deb aytish mumkin. Koordinatalar soni ikkita bo'lganligi uchun bitta turg'un koordinata va bitta noturg'un koordinata mavjud bo'ladi.

2- misol. Toyilgan harakat tenglamasi

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + x_1 + 2x_3 = 0, \\ &\ddot{x}_2 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ &\ddot{x}_3 + 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{aligned} \qquad (7.2.6)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bu sistema uchun potensial kuchlar matritsasi

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

simmetrik. Shuning uchun (7.2.6) potensial sistemadir. Bu matritsaning determinanti musbat:

$$\det C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{Vmatrix} = 14 .$$

(7.2.6) tenglamalar sistemasini normal holga keltirmasdan tasdiqlash mumkinki, agar sistema noturg'un koordinatalarga ega bo'lsa, u vaqtda ularning soni juft bo'ladi. C matritsaning bosh diagonal minorlari uchun

$$\Delta_1 = 1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 < 0, \qquad \Delta_3 = \det C = 14 > 0.$$

Bu yerda Silvester determinantlaridan (potensial energiya kvadratik forma ekanligini eslang) biri manfiy bo'lganligi uchun koordinatalar orasida noturg'unlari mavjud bo'ladi. Uning soni juft bo'lishi kerak, barcha koordinatalar soni esa uchta. Shuning uchun ham sistema bitta turg'un va ikkita noturg'un koordinataga ega.

3- §. Potensial sistema harakatining turg'unligiga dissipativ va giroskopik kuchlarning ta'siri

Real sharoitlarda potensial sistemaga dissipativ kuchlar ta'sir qiladi. Bu kuchlar qarshilik muhiti hisobidan yoki maxsus o'rnatilgan qurilmalar orqali ta'sir ko'rsatadi.

Bundan tashqari, shunday sistemalar ham mavjudki, ularga potensial va dissipativ kuchlardan tashqari giroskopik kuchlar ham ta'sir etadi.

Dastlab, faqat potensial kuchlar ta'siri ostidagi $z=0$ va $\dot{z}=0$ toyilmagan harakat noturg'un deb faraz qilamiz. Shunday savol tug'iladi: potensial kuchlarga giroskopik kuchlarni qo'shib harakatni stabillashtirish (barqarorlash) mumkinmi? Oddiy misollar ko'rsatadiki, ayrim hollarda buni amalga oshirish mumkin. Haqiqatan ham,

$$\left.\begin{aligned}\ddot{z}_1 + c_1 z_1 = 0,\\ \ddot{z}_2 + c_2 z_2 = 0\end{aligned}\right\} \qquad (7.3.1)$$

potensial sistema $c_1 < 0$ va $c_2 < 0$ bo'lganda noturg'undir. Sistemaga, mos ravishda $g\ddot{z}_2$ va $-g\dot{z}_1$ giroskopik kuchlarni qo'shib,

$$\left.\begin{aligned}\ddot{z}_1 + g\dot{z}_2 + c_1 z_1 = 0,\\ \ddot{z}_2 - g\dot{z}_1 + c_2 z_2 = 0\end{aligned}\right\} \qquad (7.3.2)$$

ni hosil qilamiz. (7.3.2) sistema sistemaning yechimini

$$z_1 = Ae^{\lambda t}, \qquad z_2 = Be^{\lambda t}$$

ko'rinishida izlaymiz. Uning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix}\lambda^2 + c_1 & g\lambda\\ -g\lambda & \lambda^2 + c_2\end{vmatrix} = \lambda^4 + (g^2 + c_1 + c_2)\lambda^2 + c_1 c_2 = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglamada λ faqat juft darajalari bilan qatnashayotganligi uchun har bir λ ildizga $-\lambda$ ildiz javob beradi. Shuning uchun, agar hech bo'lmaganda birorta ildizning haqiqiy qismi nolga teng bo'lmasa, u vaqtda haqiqiy qismi musbat bo'lgan ildiz topiladi. Bundan shu kelib chiqadiki, xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari sof mavhum va λ^2 ga nisbatan ildizlar – manfiy haqiqiy sonlar bo'lgandagina sistema turg'un bo'ladi. Buning uchun o'z navbatida xarakteristik tenglamaning koeffitsiyentlari

$$c_1 \cdot c_2 > 0, \quad g^2 + c_1 + c_2 > 0, \quad (g^2 + c_1 + c_2)^2 - 4c_1 c_2 > 0$$

shartlarni bajarishi zarur va yetarli. Bu uchta tengsizlikni (farazga asosan $c_1 < 0$ va $c_2 < 0$) bitta

$$|g| > \sqrt{-c_1} + \sqrt{-c_2} \tag{7.3.3}$$

shartga keltirish mumkin.

Shunday qilib, agar g koeffitsiyent (7.3.3) shartni qanoatlantirsa, u vaqtda noturg'un (7.3.1) potensial sistema $g\dot{z}_2$ va $-g\dot{z}_1$ giroskopik kuchlarni qo'shish natijasida stabillashadi (barqarorlashadi).

Tabiiyki, ikkinchi savol ham o'rinli: har doim giroskopik kuchlarni qo'shish usuli bilan noturg'un potensial sistemani stabillashtirish (barqarorlashtirish) mumkinmi? Giroskopik stabillashtirishning zaruriy shartlaridan birini quyidagi Tomson va Tet teoremasi beradi. Tomson va Tet o'z teoremalarini 1879-yili isbot qilganlar [112]. Yetarli shartlar [60,102] ishlarda ishlab chiqilgan.

Teorema (Tomson va Tetning birinchi teoremasi). *Agar poten-sial sistema toyilmagan harakatining noturg'unligi toq darajali bo'lsa, u vaqtda harakatni hech qanday giroskopik kuchlar bilan stabillashtirish (barqarorlashtirish) mumkin emas.*

Isbot. Potensial sistema

$$\ddot{z} + c_0 z = 0 \tag{7.3.4}$$

noturg'unligi toq darajada bo'lsin. Sistemaga ixtiyoriy $G\dot{z}$ giroskopik kuchlarni qo'shib,

$$\ddot{z} + G\dot{z} + C_0 z = 0 \tag{7.3.5}$$

sistemani hosil qilamiz. C_0 – diagonal va G qiyshiq simmetrik matritsalar ekanligini hisobga olib, xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$\Delta = \det(E\lambda^2 + G\lambda + C_0) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^2 + c_1 & g_{12}\lambda & \cdots & g_{1s}\lambda \\ g_{21}\lambda & \lambda^2 + c_2 & \cdots & g_{2s}\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{s1}\lambda & g_{s2}\lambda & \cdots & \lambda^2 + c_s \end{vmatrix} = 0.$$

Determinantni yoyib, λ darajasi bo'yicha hadlarni guruhlaganimizdan keyin

$$\Delta = \lambda^{2s} + \cdots + a_s = 0$$

xarakteristik tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamaning ozod hadi (uni topish uchun determinantga $\lambda = 0$ ni qo'yish kifoya)

$$a_s = c_1 c_2 \cdots c_s$$

kabi topiladi. Teoremaning shartiga asosan manfiy ishorali $c_1, c_2, \cdots, c_s$ koeffitsiyentlarning soni toq, shuning uchun ham $a_s < 0$ ($c_k \neq 0$ deb faraz qilinadi). Bundan, o'z navbatida, xarakteristik tenglama ildizlaridan hech bo'lmaganda bittasining haqiqiy qismi musbat bo'lishi kelib chiqadi. Giroskopik kuchlarning a_s ozod had ishorasiga ta'siri yo'qligidan, $z = 0$ va $\dot{z} = 0$ toyilmagan harakatning noturg'unligi (7.3.4) sistemaga har qanday giroskopik kuchlarni qo'shganda ham saqlanadi.

Eslatma. Nochiziqli sistemalar uchun ham teorema o'z kuchini saqlaydi. Chunki Lyapunovning ikkinchi teoremasiga asosan xarakteristik tenglama ildizlaridan hech bo'lmaganda bittasining haqiqiy qismi musbat bo'lganda Z nochiziqli funksiyaning qanday bo'lishidan qat'iy nazar, toyilmagan harakat noturg'undir.

Endi turg'un potensial sistemaning harakatiga giroskopik va dissipativ kuchlarning ta'sirini ko'rib o'taylik.

Teorema (Tomson va Tetning ikkinchi teoremasi). *Agar potensial sistemaning $z = 0$ va $\dot{z} = 0$ toyilmagan harakati turg'un bo'lsa, u vaqtda ixtiyoriy giroskopik va dissipativ (to'liq dissipatsiyali bo'lishi shart emas) kuchlar qo'shilganda ham sistemaning turg'un harakati saqlanadi.*

Isbot. $\ddot{z} + C_0 z = 0$ turg'un potensial sistemaga $G\dot{z}$ giroskopik va $B\dot{z}$ dissipativ kuchlarni qo'shganimizda

$$\ddot{z} + B\dot{z} + G\dot{z} + C_0 z = 0 \qquad (7.3.6)$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamaning ikkala tomonini ham o'ng tarafdan $\dot{z}$ vektorga ko'paytiramiz:

$$\ddot{z} \cdot \dot{z} + B\dot{z} \cdot \dot{z} + G\dot{z} \cdot \dot{z} + C_0 z \cdot \dot{z} = 0. \qquad (7.3.7)$$

Birinchi paragrafdagi (7.1.8) $F = \frac{1}{2} B\dot{x} \cdot \dot{x}$ formulaga asosan $B\dot{z} \cdot \dot{z} = 2F$, bu yerda F– dissipatsiya funksiyasi. Bundan tashqari, G qiyshiq simmetrik matritsa uchun $G\dot{z} \cdot \dot{z}$ ko'paytma nolga teng bo'ladi (chunki bu matritsalar uchun $z_{kk} = 0$, $z_{kj} = -z_{jk}$ va $G\dot{z} \cdot \dot{z} = 0$). Almashtirish natijasida hosil qilingan (7.1.16) tenglamani ko'rayotganimiz uchun, bu yerda

$$A = E,\ P = 0,\ Z = 0,\ T = \frac{1}{2} E\dot{z} \cdot \dot{z} \ \text{ va } \ \Pi = \frac{1}{2} C_0 z \cdot z.$$

U vaqtda, quyidagi o'z-o'zidan ayon bo'lgan

$$\ddot{z}\cdot\dot{z}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{z}\cdot\dot{z})=\frac{dT}{dt},\qquad C_0\mathbf{z}\cdot\dot{\mathbf{z}}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(C_0\mathbf{z}\cdot\mathbf{z})=\frac{d\Pi}{dt}$$

tengliklarni hisobga olib, (7.3.7) tenglamani

$$\frac{d\ (T+\Pi)}{dt}=-2F \tag{7.3.8}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Teoremaning shartiga asosan potensial sistema turg'un bo'lgani uchun barcha $c_k>0$ va Π potentsial energiya z_k koordinatalarga nisbatan aniq-musbat ishorali bo'ladi.

Demak, z_k koordinata va $\dot{z}_k$ tezliklarga nisbatan $V=T+\Pi$ to'liq energiya aniq-musbat ishoralidir. Shunday qilib, (7.3.8) tenglikka asosan $G\dot{z}$ giroskopik kuchlar va $B\dot{z}$ dissipativ kuchlarning xarakterlari qanday bo'lishidan qat'iy nazar aniq-musbat ishorali V funksiyadan (7.3.6) toyilgan harakat differentsial tenglamasiga nisbatan vaqt bo'yicha olingan to'liq hosilasi musbat bo'lmaydi. Bulardan Lyapunovning turg'unlik haqidagi teoremasiga asosan $z_k=0$ va $\dot{z}_k=0$ toyilmagan harakatning turg'unligi kelib chiqadi.

Tomson va Tetning ikkinchi teoremasida turg'un potensial sistemaga ixtiyoriy giroskopik va dissipativ kuchlar qo'shiladi deb aytilgan. Endi ko'shilgan dissipativ kuchlar ixtiyoriy bo'lmasdan, balki to'liq dissipatsiyali dissipativ kuchlar bo'lgan holni ko'rib o'taylik. Bu holda F dissipativ kuchlar aniq-musbat ishorali funksiya bo'ladi.

Teorema (Tomson va Tetning uchinchi teoremasi). *Agar* $z=0$ *va* $\dot{z}=0$ *toyilmagan harakat birgina potensial kuchlar ta'sirida turg'un bo'lsa, u vaqtda ixtiyoriy giroskopik kuchlar va to'liq dissipatsiyali dissipativ kuchlarni qo'shganimizda u asimptotik turg'un bo'ladi.*

Isbot. Isbotdagi amallar (hisoblash) oddiyroq bo'lishi uchun $s=2$ deb qabul qilib (ixtiyoriy s uchun isbot o'xshash), (3.6) matritsaviy tenglamani skalar formada yozamiz:

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{z}_1+b_{11}\,\dot{z}_1+b_{12}\,\dot{z}_2+g_{12}\,\dot{z}_2+c_1\,z_1=0,\\&\ddot{z}_2+b_{21}\,\dot{z}_1+b_{22}\,\dot{z}_2+g_{21}\,\dot{z}_1+c_2\,z_2=0.\end{aligned}\right\} \tag{7.3.9}$$

Yangi

$$\dot{z}_1=y_1,\ \dot{z}_2=y_2,\ z_1=y_3,\ z_2=y_4$$

o'zgaruvchilar kiritib, ikkita ikkinchi tartibli (7.3.9) tenglamalarni to'rtta birinchi tartibli tenglama ko'rinishida yozamiz:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -(b_{11}\, y_1 + b_{12}\, y_2 + g_{12}\, y_2 + c_1 y_3),\\
\dot{y}_2 &= -(b_{21}\, y_1 + b_{22}\, y_2 + g_{21}\, y_1 + c_2 y_4),\\
\dot{y}_3 &= y_1,\\
y_4 &= y_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.3.10)$$

Quyidagi kvadratik formani qaraymiz:

$$V = \frac{1}{2}\left[y_1^2 + y_2^2 + c_1 y_3^2 + c_2 y_4^2 + 2\varepsilon\ (c_1 y_1 y_3 + c_2 y_2 y_4)\right], \qquad (7.3.11)$$

bu yerda ε – biror musbat son.

(7.3.11) kvadratik forma koeffitsiyentlari matritsasini tuzamiz:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon c_2 \\ \varepsilon c_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon c_2 & 0 & c_2 \end{Vmatrix} \qquad (7.3.12)$$

Bu matritsaning bosh diagonal minorlarini $\Lambda_m(\varepsilon)$ bilan belgilaymiz, bu yerda m 1, 2, 3, 4 qiymatlarni qabul qiladi. $\varepsilon = 0$ bo'lganda

$$\Delta_1(0) = 1,\ \Delta_2(0) = 1,\ \Delta_3(0) = c_1,\ \Delta_4(0) = c_1 c_2 \qquad (7.3.13)$$

ga ega bo'lamiz.

Teorema shartiga asosan sistema faqat potensial kuchlar ta'sirida turg'un bo'lgani uchun $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ va, demak, barcha m lar uchun $\Delta_m(0) > 0$. $\Delta_m(\varepsilon)$ determinant ε parametrga nisbatan uzluksiz bo'lgani uchun ε ning yetarli kichik qiymatlari uchun barcha $\Delta_m(\varepsilon)$ lar musbat bo'ladi. ε ning bunday qiymatlarida (7.3.12) matritsaning bosh diagonal minorlari noldan katta, ya'ni bu matritsa uchun Silvestr kriteriysining shartlari bajariladi va, demak, V funksiya aniq-musbat ishorali bo'ladi.

V funksiyadan vaqt bo'yicha to'liq hosila olamiz:

$$\dot{V} = y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2 + c_1 y_3\dot{y}_3 + c_2 y_4\dot{y}_4 +$$
$$+ \varepsilon c_1\ (y_3\dot{y}_1 + y_1\dot{y}_3) + \varepsilon\ c_2\ (y_4\dot{y}_2 + y_2\dot{y}_4).$$

Bu tenglamadagi $\dot{y}_m$ lar o'rniga ularning qiymatlarini (7.3.10) dan keltirib qo'yamiz, hadlarni guruhlaymiz va $g_{12} = -g_{21}$ ni hisobga olganimizda

$$\dot{V} = -\{(b_{11} - \varepsilon\ c_1)\ y_1^2 + (b_{22} - \varepsilon\ c_2)\ y_2^2 + \varepsilon\ c_1^2\ \ y_3^2 + \varepsilon\ c_2^2\ \ y_4^2 + \\ + 2b_{12}\ y_1\ y_2 + \varepsilon\ c_1\ b_{11}\ y_1\ y_3 + \varepsilon\ c_2\ \ (b_{21} - g_{12})\ y_1\ y_4 + \\ + \varepsilon\ c_1\ (b_{12} + g_{12}) y_2\ y_3 + \varepsilon\ c_2 b_{22} y_2\ y_4\} \qquad (7.3.14)$$

ni hosil qilamiz. $-\dot{V}$ funksiya koeffitsiyentlarining matritsasini tuzamiz:

$$\begin{Vmatrix} b_{11} - \varepsilon c_1 & b_{12} & \frac{\varepsilon}{2} c_1 b_{11} & \frac{\varepsilon}{2} c_2 (b_{21} - g_{12}) \\ b_{21} & b_{22} - \varepsilon c_2 & \frac{\varepsilon}{2} c_1 (b_{12} + g_{12}) & \frac{\varepsilon}{2} c_2 b_{22} \\ \frac{\varepsilon}{2} c_1 b_{11} & \frac{\varepsilon}{2} c_1 (b_{12} + g_{12}) & \varepsilon\ c_1^2 & 0 \\ \frac{\varepsilon}{2} c_2 (b_{21} - g_{12}) & \frac{\varepsilon}{2} c_2 b_{22} & 0 & \varepsilon c_2^2 \end{Vmatrix} \qquad (7.3.15)$$

Bu matritsa bosh diagonal minorlarini $\Delta_m^1(\varepsilon)\ (m = \overline{1,4})$ bilan belgilaymiz. ε yetarli kichik son deb faraz qilib, $\Delta_m^1(\varepsilon)$ larni topamiz:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_m^1(\varepsilon) &= b_{11} + ..., \\ \Delta_2^1(\varepsilon) &= b_{11}\ b_{22} - b_{12}^2 + ..., \\ \Delta_3^1(\varepsilon) &= \varepsilon\ c_1^2 (b_{11}\ b_{22} - b_{12}^2) + ..., \\ \Delta_4^1(\varepsilon) &= \varepsilon^2\ c_1^2\ c_2^2 (b_{11}\ b_{22} - b_{12}^2) + ..., \end{aligned}\right\} \qquad (7.3.16)$$

bu yerda nuqtalar bilan o'z ifodasida ε ni yanada yuqoriroq darajalarini ((7.3.16) da yozilganlarga nisbatan) saqlaydigan hollar ifodalangan.

Releyning dissipatsiya funksiyasi

$$F = \frac{1}{2}(b_{11}\ \dot{z}_1^2 + 2b_{12}\ \dot{z}_1\ \dot{z}_2 + b_{22}\ \dot{z}_2^2)$$

aniq-musbat ishorali (shartga asosan dissipatsiya to'liq) va, demak, uning koeffitsiyentlari Silvestr shartlari

$$\Delta_1 = b_{11} > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}\ b_{22} - b_{12}^{2*} > 0$$

ni qanoatlantiradi.

Shunday qilib, ε ni tanlab olish yo'li bilan bir vaqtda V funksiyani aniq-musbat ishorali va uning vaqt bo'yicha olingan $\dot{V}$ to'liq hosilasini aniq-manfiy ishorali qilish mumkin.

Shuning uchun ham Lyapunovning B teoremasiga asosan

$$y_1 = \dot{z}_1 = 0, \qquad y_2 = \dot{z}_2 = 0, \qquad y_3 = z_1 = 0, \qquad y_4 = z_2 = 0$$

toyilmagan harakat asimptotik turg'undir va shu bilan teorema isboti yakunlanadi. Keltirilgan isbot N.G. Chetayevga tegishli [102]. Noturg'un potentsial sistemani ayrim hollarda giroskopik kuchlar orqali stabillashtirish mumkinligini bu paragrafning boshida ko'rsatgan edik. Biz bu holda dissipativ kuchlarni hisobga olmagan edik. Endi dissipativ kuchlarning giroskopik stabillashtirish jarayonidagi rolini ko'rib o'tamiz.

Teorema (Tomson va Tetning to'rtinchi teoremasi). *Potensial kuchlar ta'sirida noturg'un bo'lgan* $z = 0$ *va* $\dot{z} = 0$ *toyilmagan harakat har qanday giroskopik va to'liq dissipatsiyali dissipativ kuchlarni qo'shganimizda ham noturg'unligicha qoladi.*

Isbot. Potensial kuchlar ta'sirida $\mathbf{z} = 0$ va $\dot{\mathbf{z}} = 0$ toyilmagan harakat noturg'un bo'lgani uchun c_k koeffitsiyentlar orasida hech bo'lmaganda bitta manfiy ishoralisi topiladi. Shuning uchun ham $y_1 = \dot{z}_1$, $y_2 = \dot{z}_2$, $y_3 = z_1$, $y_4 = z_2$ larni shunday tanlab olish mumkinki, (7.3.11) ifoda bilan aniqlangan V funksiya manfiy bo'lsin. c_k larning ishoralari qanday bo'lishidan qat'iy nazar ((7.3.16) minorlarning bosh hadlari yoki c_k ga bog'liq emas, yoki uni kvadrati bilan o'z ifodasida saqlanadi) ixtiyoriy yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ larda $\dot{V}$ aniq-musbat ishorali funktsiya bo'ladi. Shunday qilib, Lyapunovning D-teoremasi shartlari to'liq bajarilgani uchun toyilmagan harakat noturg'undir.

Isbot qilingan teoremadan quyidagi kelib chiqadi: *agar noturg'un potensial sistemani giroskopik kuchlar orqali stabillashtirsak ham yetarli kichik to'liq dissipatsiyali dissipativ kuchlar vaqtning o'tishi bilan erishilgan turg'unlikni buzadi.* Shuning uchun ham Tomson va Tet faqat potensial kuchlar ta'siri ostida mavjud bo'lgan turg'unlikni abadiy turg'unlik va giroskopik stabillashtirish orqali erishilgan turg'unlikni muvaqqat turg'unlik deb atashni taklif etganlar.

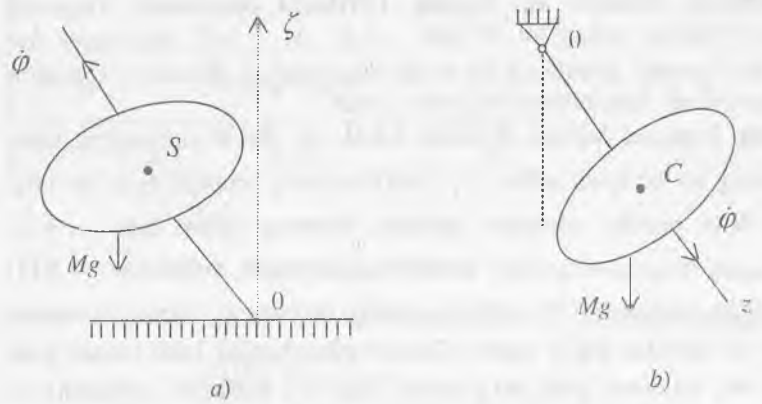
4- §. Tomson va Tet teoremalarining tatbiqiga doir misollar

1- m i s o l. Pildiroq turg'unligi

Pildiroq o'qi z ning holatini α va β burchaklar bilan aniqlaymiz. Sistemaning massa markazi C tayanch nuqtadan yuqorida turganligi sababli ikkala α va β koordinatalar pildiroq aylanmayotganda noturg'un bo'ladi (7.1- shakl,*a*).

Shunday qilib, pildiroqning noturg'un koordinatalar soni juft va Tom va Tetning birinchi teoremasidagi zaruriy shart bajariladi. Pildiroq toyilgan harakatining α va β larga nisbatan differensial tenglamalarini ikkinchi bobda topgan edik:

$$\left.\begin{aligned} J_x\ddot{\alpha} + J_z n\dot{\beta} - P\ell\alpha = 0, \\ J_x\ddot{\beta} - J_z n\dot{\alpha} - P\ell\beta = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7.4.1)$$



7.1- shakl.

(7.4.1) tenglamalarni

$$J_x\ddot{\alpha} - P\ell\alpha = 0, \qquad J_x\ddot{\beta} - P\ell\beta = 0$$

noturg'un potensial sistemaga mos ravishda $J_z n\dot{\beta}$ va $-J_z n\dot{\alpha}$ giroskopik kuchlarni qo'shish natijasida hosil qilingan deb qarash mumkin.

Agar $c_1 = c_2 = -\dfrac{P\ell}{J_x}$, $g = \dfrac{J_z n}{J_x}$ deb qabul qilsak, y vaqtda (7.4.1) tenglamalar sistemasi (7.3.2) tenglamalar sistemasi bilan mos keladi. Giroskopik stabillashtirish sharti (7.3.3) bu misol uchun

$$\frac{J_z n}{J_x} > 2\sqrt{\frac{P\ell}{J_x}}$$

yoki

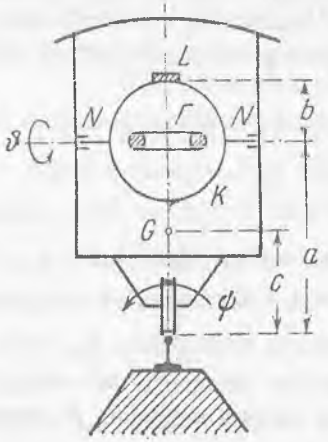
$$J_z^2 n^2 > 4P\ell J_x$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu shartni kitobning ikkinchi bobida (nochiziqli sistema uchun) ham topgan edik.

Agar massa markazi S osilish nuqtasidan pastda joylashgan bo'lsa (giroskopik mayatnik, 7.1- shakl, *b*), u vaqtda α va β koordinatalar turg'un bo'ladi. Bu holatda Tomson va Tetning ikkinchi teoremasiga asosan xar qanday n burchak tezlik uchun α va β koordinatalar turg'un bo'ladi. Tomson va Tetning to'rtinchi teoremasiga asosan pildiroqning turg'unligi muvaqqat va giroskopik mayatnikning turg'unligi abadiydir.

2- m i s o l. Giroskopik bir relsli vagon

XX asrning birinchi choragida bir relsli vagon va ikki g'ildirakli avtomobillarning eksperimental nusxalari paydo bo'ldi. Ularning massa markazi relsdan (yo'ldan) yuqorida joylashgan edi (7.2- shakl). Vagonning (avtomobilning) vertikal holati noturg'un va uni stabillashtirish uchun giroskopdan foydalanilgan.



7.2- shakl.

Vagonning vertikal holatini stabillashtirish uchun sistemaning parametrlari qanoatlantirishi lozim bo'lgan munosabatlarni aniqlashdan oldin masalani sifat jihatdan ko'rib o'tamiz. Vagonning massa markazi relsdan yuqorida turadi. Shuning uchun vertikaldan vagonning og'ishini belgilaydigan ψ burchagi noturg'un koordinata bo'ladi.

Tomson va Tetning birinchi teoremasiga asosan faqat noturg'un koordinatalarning soni juft bo'lgandagina toyilmagan harakatni giroskopik stabillashtirish mumkin. Bundan shu narsa kelib chiqadiki, sistemaning ikkinchi koordinatasi θ (giroskop o'rnatilgan halqaning burilish burchagi) ham noturg'un koordinata bo'lishi kerak. Shu maqsadda halqaning yuqori qismiga L yukni o'rnatilgan. Shunday qilib, sistema ikkita

ψ va θ noturg'un koordinataga ega bo'ladi va uni giroskopik stabil lashtirish mumkin bo'lib qoladi.

Vagon va halqa bilan giroskop tebranishlari natijasida hosil bo'ladigan qarshilik kuchlarini hisobga olamiz (bu kuchlar muhitning qarshiligi va tayanch nuqtalaridagi ishqalanish natijasida yuzaga keladi). Tomson va Tetning to'rtinchi teoremasiga asosan bu kuchlar giroskopik stabillashtirishni buzadi (chunki giroskopsiz sistema noturg'un). Shuning uchun ham stabillashtirishni amalga oshirish uchun boshqa xil kuch kiritish kerak. Shu maqsadda K halqaning aylanish o'qi N ga maxsus elektromagnit qurilma o'rnatilgan. Bu qurilma $k_2\dot{\theta}$ tezlatuvchi moment yaratadi. Moment aylanish burchak tezligiga proporsional bo'lib, halqaning aylanish tomoniga yo'nalgan bo'ladi (tebranishlar nazariyasida bunday momentlar va kuchlarni manfiy ishqalanish deb ataydilar).

Tomson va Tet teoremalari orqali bir relsli giroskopik vagonning turg'unligini ta'minlaydigan kuchlarning xarakterini aniqlaganimizdan keyin sonli tahlilga o'tamiz. Buning uchun sistemaning toyilgan harakat differensial tenglamalaridan foydalanamiz [75]:

$$\left.\begin{aligned} A_1\ddot{\psi} + k_1\dot{\psi} - H\dot{\theta} - c_1\psi &= \psi. \\ A_2\ddot{\theta} - k_2\dot{\theta} + H\dot{\psi} - c_2\theta &= \Theta. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Bu yerda

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= J + (M + M_0)a^2 + A + c_0, \\ A_2 &= A_0 + A, \quad c_1 = P \cdot c, \quad c_2 = p \cdot b, \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

A_0 va C_0 halqaning inersiya momentlari, M_0 – uning massasi, A –giroskopning ekvatorial inertsiya momenti, M –uning massasi, J –vagonning rels o'qiga nisbatan inersiya momenti, P–vagonning og'irligi, p – qo'shimcha L yukning og'irligi, H –giroskopning kinetik momenti, k_1 – vagonga ta'sir etayotgan qarshilik kuchining koeffitsiyenti, k_2 tezlatuvchi moment $-k_2\dot{\theta}$ ni yaratuvchi qurilma xarakteristikasining tikligi; a, b va c o'zgarmas sonlarning miqdori 7.2- shaklda ko'rinib turibdi, G – butun sistemaning massa markazi (L yukdan tashqari), ψ va θ – nochiziqli kuchlar.

(a) tenglamalarni

$$A_1\ddot{\psi} - c_1\psi = 0, \quad A_2\ddot{\theta} - c_2\theta = 0$$

noturg'un potensial sistemaga $H\dot{\psi}$ va $-H\dot{\theta}$ giroskopik kuchlarni, $k_2\dot{\psi}$ dissipativ kuchni, $-k_2\dot{\theta}$ tezlatuvchi kuchni hamda ψ va Θ no-

chiziqli kuchlarni mos ravishda qo'shish natijasida hosil qilingan deb qarash mumkin.

Birinchi yaqinlashish tenglamalarining (ular ψ va Θ larni tashlash natijasida hosil bo'ladi) xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} A_1\lambda^2 + k_1\lambda - c_1 & -H\lambda \\ H\lambda & A_2\lambda^2 - k_2\lambda - c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinantni yoyib va hadlarni guruhlaganimizdan keyin

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

ni hosil qilamiz, bu yerda

$$\begin{aligned} a_0 &= A_1A_2, \quad a_1 = k_1A_2 - k_2A_1, \\ a_2 &= H^2 - c_2A_1 - c_1A_2 - k_1k_2, \\ a_3 &= k_2c_1 - k_1c_2, \quad a_4 = c_1c_2. \end{aligned} \tag{d}$$

To'rtinchi tartibli sistema uchun Gurvits kriteriysini yozamiz ($a_0 > 0$):

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad \Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0.$$

Biz ko'rayotgan holda $a_0 > 0$ va $a_4 > 0$ shartlar o'z-o'zidan bajariladi, yana $\Delta_3 > 0$ dan $a_2 > 0$ bajarilishi, qolgan $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ va $\Delta_3 > 0$ shartlardan esa quyidagilar kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} &\frac{c_2}{c_1}k_1 < k_2 < \frac{A_2}{A_1}k_1, \\ &H^2 > c_2A_1 + c_1A_2 + k_1k_2 + \\ &+ \frac{A_1A_2(k_2c_1 - k_1c_2)^2 + c_1c_2(k_1A_2 - k_2A_1)^2}{(k_2c_1 - k_1c_2)(k_1A_2 - k_2A_1)}. \end{aligned} \tag{e}$$

Birinchi shart qurilma xarakteristikasining tiklik koeffitsiyenti k_2 ning o'zgarish chegarasini, ikkinchi shart H kinetik momentning quyi chegarasini aniqlaydi. (e) shartlarning bajarilishi xarakteristik tenglama ildizlaridan barchasining haqiqiy qismi manfiy bo'lishini ta'minlaydi. U vaqtda Lyapunovning birinchi yaqinlashish usulidagi birinchi teoremasiga asosan bir relsli vagon toyilmagan harakati asimptotik turg'un bo'ladi.

(d) formulalardan ko'rinib turibdiki, agar $k_2 < 0$ bo'lsa (tezlatuvchi moment o'rniga oddiy qarshilik kuchi yuzaga keladi), a_3 koeffitsiyent

manfiy hamda Tomson va Tetning to‘rtinchi teoremasiga asosan sistema noturg‘un bo‘lib qoladi. Demak, sistema turg‘un bo‘lishi uchun albatta tezlatuvchi moment mavjud bo‘lishi zarur.

5- §. Faqat giroskopik va dissipativ kuchlar ta’siri ostidagi harakatning turg‘unligi

Shu vaqtgacha sistemaga giroskopik va dissipativ kuchlar potensial kuchlar bilan birgalikda ta’sir etayotgan hollar ko‘rib o‘tildi. Ammo amalda shunday sistemalar mavjudki, ularda dissipativ va giroskopik kuchlar potensial kuchlarsiz ta’sir ko‘rsatadi. Ana shunday sistemalarning turg‘unligini ushbu paragrafda o‘rganamiz.

5.1. Faqat giroskopik kuchlar ta’sir etadigan hol

Dastavval sistemaga faqat giroskopik kuchlar ta’sir etadi va uning toyilgan harakatining tenglamasi

$$\ddot{\mathbf{z}} + G\dot{\mathbf{z}} = 0 \qquad (7.5.1)$$

ko‘rinishga keltirilgan deb faraz qilamiz.

Bu hol uchun D.R. Merkin tomonidan yaratilgan teoremalarni keltiramiz [61].

1- teorema. *Agar sistemaga faqat giroskopik kuchlar ta’sir etsa, u vaqtda uning* $\mathbf{z} = 0$ *va* $\dot{\mathbf{z}} = 0$ *toyilmagan harakati tezliklarga nisbatan doim turg‘un bo‘ladi.*

Isbot. (7.5.1) tenglamaning ikkala tarafini o‘ng tomondan $\dot{z}$ matritsaga ko‘paytiramiz:

$$\ddot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} + G\dot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = 0. \qquad (7.5.1')$$

G qiyshiq simmetrik matritsa uchun $G\dot{z} \cdot \dot{z} = 0$ bo‘lishini hisobga olib, (7.5.1′) tenglamadan

$$\ddot{z} \cdot \dot{z} = 0$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallab,

$$\frac{1}{2}\dot{z} \cdot \dot{z} = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + .. + \dot{z}_s^2) = h \qquad (7.5.2)$$

ni olamiz, bu yerda h–o‘zgarmas son. $V = \frac{1}{2}\dot{z} \cdot \dot{z}$ funksiya turg‘unlik haqidagi Lyapunov teoremasining hamma shartlarini qanoatlantiradi, chunki u aniq-musbat ishorali va undan vaqt bo‘yicha (7.5.1) toyilgan harakat tenglamalariga nisbatan olingan to‘liq hosilasi $\dot{V}$ aynan nolga teng.

Teorema chiziqli avtonom sistema uchun yaratilgan edi. V.V. Rumyansev giroskopik kuch G vaqtga oshkora ravishda bog'liq bo'lganda chiziqli noavtonom sistemalar uchun ham 1- teorema o'z kuchini saqlashini ko'rsatgan (teoremaning isboti $G\dot{z}\cdot\dot{z}=0$ tenglikka suyangan). Bu tenglik vaqtdan oshkora ravishda bog'liq bo'lgan istalgan G qiyshiq simmetrik matritsa uchun bajariladi [80].

Harakat turg'unligi faqat tezliklar turg'unligi bilangina emas, balki koordinatalar turg'unligi bilan ham aniqlanadi. Quyidagi teoremada koordinata va tezliklar majmuasiga nisbatan (7.5.1) sistema harakati turg'unligining zarur va etarli sharti keltirilgan.

2- teorema. *Faqatgina giroskopik kuchlar ta'siri ostida bo'lgan chiziqli avtonom sistemaning toyilmagan harakati koordinatalar bo'yicha turg'un bo'lishi uchun giroskopik kuchlar matritsasining determinanti nolga teng bo'lmasligi yetarli va zarur.*

Isbot. Dastlab, agar $\det G\neq 0$ bo'lsa, u vaqtda $\mathbf{z}=0,\ \dot{\mathbf{z}}=0$ toyilmagan harakat z koordinata bo'yicha turg'un bo'lishini ko'rsatamiz (oldingi teoremada $\det G$ ning har qanday qiymatida sistema tezliklarga nisbatan turg'unligini isbot qilgan edik).

(7.5.1) tenglamani vaqt bo'yicha bir marta integrallaymiz:

$$\dot{\mathbf{z}}+G\mathbf{z}=\mathbf{D} \tag{7.5.3}$$

bu yerda

$$\mathbf{D}=\mathbf{z}_0+G\mathbf{z}_0. \tag{7.5.4}$$

Yangi y o'zgaruvchili matritsaga quyidagi

$$\mathbf{z}=\mathbf{y}+\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D} \tag{7.5.5}$$

formula orqali o'tamiz (shart bo'yicha $\mathbf{G}$ xosmas matritsa, shuning uchun ham $\mathbf{G}^{-1}$ mavjud bo'ladi). (7.5.5) formulani (7.5.3) tenglamaga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz

$$\dot{\mathbf{y}}+G\mathbf{y}+G\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}=\mathbf{D}$$

bunda $G\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}=\mathbf{E}\mathbf{D}=\mathbf{D}$ ayniyatni hisobga olib,

$$\dot{\mathbf{y}}+G\mathbf{y}=0 \tag{7.5.6}$$

tenglamaga keltiramiz.

1- teoremaga asosan harakat $\dot{\mathbf{z}}$ tezliklarga nisbatan turg'un. (7.5.1) va (7.5.6) tenglamalar ko'rinishi bo'yicha bir xil bo'lganligi uchun harakat $\mathbf{y}$ ga nisbatan ham turg'un bo'ladi. (7.5.4) va (7.5.5) tengliklarga asosan harakat $\dot{\mathbf{z}}$ koordinataga nisbatan turg'un degan xulosaga kelamiz. ($\mathbf{z}_0$ va $\dot{\mathbf{z}}_0$ larning modul bo'yicha yetarli kichik qiymatlari uchun $\mathbf{D}$ matritsaning elementlari ham kichik bo'ladi).

Endi teoremaning zaruriy shartini isbot qilamiz. Buning uchun $\det G = 0$ bo'lganda sistemaning noturg'unligini ko'rsatish kifoya. (7.5.1) differensial tenglamaning xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$\Delta = \det(E\lambda^2 + G\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 & g_{12}\lambda & \cdots & g_{1s}\lambda \\ g_{21}\lambda & \lambda^2 & \cdots & g_{2s}\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{s1}\lambda & g_{s2}\lambda & \cdots & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.5.7)$$

Har bir satrdan umumiy ko'paytuvchi λ ni chiqarib, hosil bo'lgan

$$\Delta = \lambda^s \begin{vmatrix} \lambda & g_{12} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & \lambda & \cdots & g_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{s1} & g_{s2} & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

determinantni λ darajalari bo'yicha yoyamiz:

$$\Delta = \lambda^s(\lambda^s + \ldots + a_s).$$

Ravshanki,

$$a_s = \begin{vmatrix} 0 & g_{12} & \cdots & g_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{s1} & g_{s2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \det G.$$

$\det G = 0$ munosabatdan va keyingi ikki tenglikdan (7.5.7) xarakteristik tenglamaning kamida $(s+1)$ ta nolinchi ildizlari borligi kelib chiqadi. Endi

$$\begin{Vmatrix} \lambda^2 & g_{12}\lambda. & \cdots & g_{1s}\lambda \\ g_{21}\lambda & \lambda^2 & \cdots & g_{2s}\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{s1}\lambda & g_{s2}\lambda & \cdots & \lambda^2 \end{Vmatrix} = 0$$

xarakteristik matritsaning elementar bo'luvchilarini tadqiq etishga o'tamiz.

Asosiy tadqiqotni davom ettirishdan oldin **matritsaning elementar bo'luvchisi, eng katta umumiy bo'luvchisi va invariant ko'paytuvchisi** degan tushunchalarga aniqlik kiritaylik.

Elementlari biror λ parametrning $f_{ij}(\lambda)$ ko'phadi bo'lgan kvadrat matritsani ko'raylik:

$$F(\lambda) = \begin{Vmatrix} f_{11}(\lambda) & \cdots & f_{1n}(\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(\lambda) & \cdots & f_{nn}(\lambda) \end{Vmatrix} \qquad (7.5.8)$$

Bunday matritsalar λ - **matritsalar** deb aytiladi.

$D_k(\lambda)$ $(k = 1, 2.., n)$ orqali (7.5.8) matritsaning barcha k tartibli minorlarining **eng katta umumiy bo'luvchisini** belgilaymiz, uning bosh hadi oldidagi koeffitsiyentini birga teng deb tanlab olamiz. $D_k(\lambda)$ ko'phadning $D_{k-1}(\lambda)$ ko'phadga bo'linishini osongina ko'rsatish mumkin. Eng katta umumiy bo'luvchi $D_k(\lambda)$ni topishda quyidagi qoidaga rioya qilish foydali:

agar biror k tartibli minor o'zgarmas miqdorga teng bo'lsa, u vaqtda $D_k = D_{k-1} = ... = D_1 = 1$ (chunki bu minor D_k ga bo'linishi kerak, D_k esa D_{k-1}, $D_{k-2}, ..., D_1$ larga bo'linadi). Ushbu

$$\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)} = E_k(\lambda) \quad (k = \overline{1, n},\ D_0 = 1) \qquad (7.5.9)$$

ko'phad (7.5.8) matritsaning **invariant ko'paytuvchisi** deb aytiladi. Ravshanki,

$$D_k(\lambda) = E_1(\lambda) \cdot E_2(\lambda) \cdots E_k(\lambda)$$

va u o'zgarmas ko'paytuvchigacha aniqlikda $\det F_n(\lambda)$ ga teng bo'ladi:

$$D_n(\lambda) = k \det F(\lambda) = E_1(\lambda) \cdot E_2(\lambda) \cdots E_n(\lambda). \qquad (7.5.10)$$

Har bir $E_k(\lambda)$ invariant ko'paytuvchini ko'paytuvchilarga yoyamiz:

$$E_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{kr}} (\lambda - \lambda_2)^{e_{kr}} ... (\lambda - \lambda_p)^{e_{kr}},$$

bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ lar

$$\det F(\lambda) = 0 \qquad (7.5.11)$$

tenglamaning har xil ildizlari. Ravshanki,

$$e_{kr} \geq 0 \ (k = \overline{1, n};\ r = \overline{1, p}).$$

Bundan tashqari, $e_{kj} \leq e\ell_{k^1 j}$, agar $k < k^1$ bo'lsa (chunki E_{k^1} invariant ko'paytuvchi E_k ga bo'linadi).

$E_k(\lambda)$ ifodasiga ko'paytuvchi bo'lib kirgan va o'zgarmas sondan farq qiluvchi $(\lambda - \lambda_r)^{e_{k_r}}$ had **λ-matritsaning elementar bo'luvchisi** deb aytiladi. Ularning umumiy sonini m va bo'luvchilarning o'zini $(\lambda - \lambda_1)^{e_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_m)^{e_m}$ bilan belgilaymiz.

λ_i sonlarning orasida bir-biriga tenglari ham bo'lishi mumkin ($(\lambda - \lambda_i)^{e_i}$ ko'paytuvchilar har xil E_k invariant ko'paytuvchilarning ifodasiga kirishi mumkin).

Quyidagi misolda yuqorida bayon etilganlarni tushuntiramiz. Ushbu

$$F(\lambda) = \begin{Vmatrix} (\lambda+1)^3 & (\lambda+1)^2 \\ \lambda+1 & \lambda+1 \end{Vmatrix} \tag{7.5.12}$$

matritsa uchun to'rtta birinchi tartibli minorni yozish mumkin:

$$(\lambda+1)^3, \quad (\lambda+1)^2, \quad (\lambda+1), \quad \lambda+1.$$

Ularning eng katta umumiy bo'luvchisi

$$D_1 = \lambda + 1$$

bo'ladi. (7.5.12) matritsa uchun bitta ikkinchi tartibli minor mavjud:

$$\begin{vmatrix} (\lambda+1)^3 & (\lambda+1)^2 \\ \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)^3.$$

Bu minorning eng katta umumiy bo'luvchisi $D_2 = \lambda(\lambda+1)^3$.

(7.5.9) formuladan foydalanib, invariant ko'paytuvchilarni topamiz:

$$E_1 = D_1 = (\lambda + 1),$$

$$E_2 = \frac{D_2}{D_1} = \lambda(\lambda+1)^2.$$

(7.5.12) matritsaning elementar bo'linuvchilarini topamiz:

$$\lambda + 1, \qquad \lambda, \qquad (\lambda+1)^2.$$

Ularning ildizlari

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = \lambda_4 = -1$$

bo'ladi. Bu ildizlar, albatta,

$$\det F(\lambda) = 0$$

tenglamaning ildizlari ham bo'ladi.

$\lambda = -1$ ildiz $\det F(\lambda) = 0$ tenglamaning uch karrali ildizidir. Shu ildizning o'zi bitta elementar bo'luvchi uchun oddiy va boshqasi uchun ikki karrali ildiz bo'ladi. Ushbu

$$\begin{Vmatrix} E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_n \end{Vmatrix}$$

matritsa ($E_1, E_2, \dots, E_n$ – (7.5.8) matritsaning invariant ko'paytuvchilari) (7.5.8) matritsaning *normal diagonal formasi* deb aytiladi. Masalan, (7.5.12) uchun

$$\begin{Vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{Vmatrix}$$

normal diagonal forma bo'ladi. Har qanday λ-matritsani chekli sondagi elementar almashtirishlar orqali normal diagonal forma ko'rinishiga keltirish mumkin.

Endi asosiy tadqiqotimizga qaytamiz. Xarakteristik matritsa barcha minorlarining eng katta umumiy bo'linuvchisini D_k bilan belgilaymiz. Aniqki, $D_1 = \lambda$, D_2 umumiy bo'linuvchi λ^2 ga bo'linadi, D_3 umumiy bo'linuvchi λ^3 ga bo'linadi va h.k. (chunki bu matritsaning barcha elementi umumiy λ ko'paytuvchiga ega). Shuning uchun barcha

$$E_k = \frac{D_k}{D_{k-1}} \quad (k = \overline{1, s}; \quad D_0 = 1)$$

invariant ko'paytuvchilar λ ga bo'linadi, ya'ni har bir $E_k(\lambda)$ invariant ko'paytuvchi hech bo'lmaganda bitta nol ildizga ega bo'ladi. (7.5.10) formuladan foydalanib, quyidagini yozamiz:

$$k \det F(\lambda) = E_1(\lambda) \cdot E_2(\lambda) \dots E_s(\lambda).$$

Bu tenglamaning chap tarafi kamida $s+1$ ta nol ildizga ega, o'ng tarafida turgan s ta invariant ko'paytuvchining hech bo'lmaganda bittasi karrasi birdan katta nol ildizga ega bo'ladi.

Bu hol sistemaning noturg'unligini isbotlaydi, chunki hech bo'lmaganda bitta haqiqiy qismi nolga teng ildiz mos elementar bo'luvchining karrali ildizi bo'lsa ($e_k > 1$), u vaqtda toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi.

1- izoh. *Agar sistemaga faqat giroskopik kuchlar ta'sir etib, u toq sondagi koordinatalarga ega bo'lsa, u vaqtda bunday sistemaning toyilmagan harakati doimo noturg'un bo'ladi (agar s toq son bo'lsa, u holda* $\det G \equiv 0$.)

2- izoh. $\det G$ *ning istalgan qiymatida toyilmagan harakat tezliklarga nisbatan turg'un bo'lganligi uchun sistema noturg'unligining isbotidan* $\det G \equiv 0$ *bo'lganda sistema faqat koordinata bo'yicha turg'unlikni yo'qotishi kelib chiqadi.*

3- izoh. *Agar* $\det G \neq 0$ *bo'lsa, sistemaning xarakteristik determinanti s ta nol ildizga ega bo'ladi. Sistema turg'unligidan elementar bo'luvchilar uchun bu ildizlarning oddiyligi kelib chiqadi.*

4- izoh. *(7.5.1) tenglama ko'p hollarda nochiziqli sistemaning giroskopik kuchlar ta'siri ostidagi birinchi yaqinlashish tenglamasini ifoda etadi. Albatta,* $\det G \neq 0$ *bo'lgan holda birinchi yaqinlashish tenglamalari orqali aniqlangan sistemaning turg'unligidan dastlabki nochiziqli sistemaning turg'unligi kelib chiqadi.*

5.2. Giroskopik va dissipativ kuchlar

Dissipativ kuchlarning sistemaga ta'sirini o'rganishdan oldin determinantlar nazariyasining biz uchun zarur bo'ladigan bir natijasini keltiramiz.

s tartibli ikkita B_0 va G kvadrat matritsa berilgan bo'lsin.

Bunda B_0 aniq ishorali diagonal va G qiyshiq simmetrik matritsa deb olamiz. $\Delta = B_0 + G$ matritsaning determinantini tuzamiz:

$$\Delta = \det (B_0 + G) .$$

U vaqtda quyidagi tasdiqlar o'rinlidir:

1. $B_0 + G$ matritsa xosmas matritsadir, ya'ni

$$\Delta = \det (B_0 + G) \neq 0 . \qquad (7.5.13)$$

2. Agar B_0 matritsa aniq-manfiy ishorali bo'lsa, u holda

$$\Delta = \det (B_0 + G) > 0 . \qquad (7.5.14)$$

3. Agar B_0 matritsa aniq-musbat ishorali bo'lsa, u vaqtda

$$s \text{ juft bo'lganda } \Delta = \det (B_0 + G) > 0 , \qquad (7.5.15)$$

$$s \text{ toq bo'lganda } \Delta = \det (B_0 + G) < 0 . \qquad (7.5.16)$$

Endi dissipativ kuchlarning ta'sirini o'rganamiz.

3- teorema. *Agar sistemaga giroskopik kuchlardan tashqari to'liq disspatsiyali dissipativ kuchlar ham ta'sir etsa, u vaqtda toyilmagan harakat tezliklarga nisbatan asimptotik turg'un va koordinatalarga nisbatan turg'un bo'ladi.*

Isbot. Teoremaning shartiga asosan faqat giroskopik va to'liq dissipatsiyali kuchlar mavjudligini hisobga olib, toyilgan harakat differensial tenglamalarini (7.1.17) ko'rinishga keltiramiz:

$$\ddot{\mathbf{z}} + B_0\dot{\mathbf{z}} + G\mathbf{z} = 0. \qquad (7.5.17)$$

Bu tenglamada B_0 – aniq-musbat ishorali diagonal matritsa, G – qiyshiq simmetrik matritsa. Bu tenglamaning ikkala tarafini ham o'ng tomondan $\dot{\mathbf{z}}$ matritsaga ko'paytiramiz:

$$\ddot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} + B_0\dot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} + G\dot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = 0$$

so'ngra birinchi qo'shiluvchini o'zgartirib va $G\dot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = 0$ ekanligini hisobga olib, uni

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}}) = -B_0\dot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamani skalar ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{z}_1^2 + ... + \dot{z}_s^2) = -(b_1\dot{z}_1^2 + ... + b_s\dot{z}_s^2).$$

$V = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{z}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}(\dot{z}_1^2 + ... + \dot{z}_s^2)$ funksiya asimptotik turg'unlik haqidagi Lyapunov teoremasining shartlarini qanoatlantiradi – u $\dot{z}$ tezliklarga nisbatan aniq-musbat ishorali hamda vaqt bo'yicha (7.5.17) tenglamalarga nisbatan olingan to'liq hosilasi $\dot{z}$ tezliklarning aniq-manfiy ishorali funksiyasidir (teorema shartiga asosan dissipatsiya to'liq va, demak, barcha $b_k > 0$). Shunday qilib, harakat z tezliklarga nisbatan asimptotik turg'un bo'ladi.

Teoremaning ikkinchi qismini isbotlashga o'tamiz. (7.5.17) tenglamani bir marta vaqt bo'yicha integrallaymiz:

$$\dot{\mathbf{z}} + (B_0 + G)\mathbf{z} = \mathbf{D}, \qquad (7.5.18)$$

bu erda o'zgarmas matritsa $\mathbf{D}$ quyidagi tenglik bilan aniqlanadi

$$\mathbf{D} = \dot{\mathbf{z}}_0 + (B_0 + G)\mathbf{z}_0. \qquad (7.5.19)$$

(7.5.13) munosabatga asosan $B_0 + G$ matritsa xosmas, demak, teskari matritsa $(B_0 + G)^{-1}$ mavjud. Ushbu

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} + (\mathrm{B}_0 + \mathrm{G})^{-1}\mathbf{D} \qquad (7.5.20)$$

tenglik bilan aniqlanadigan yangi $\mathbf{y}$ o'zgaruvchi matritsa kiritamiz, u holda (7.5.18) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\dot{\mathbf{y}} + (B_0 + G)\mathbf{y} + (B_0 + G)^{-1}(B_0 + G)\mathbf{D} = \mathbf{D},$$

so'ngra $(B_0 + G)^{-1}(B_0 + G)\mathbf{D} = \mathbf{D}$ ekanligini hisoga olib,

$$\dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{B}_0 + \mathbf{G})\,\mathbf{y} = 0 \qquad (7.5.21)$$

ni hosil qilamiz.

Teoremaning birinchi qismiga asosan $\dot{\mathbf{z}}$ tezliklarga nisbatan harakat asimptotik turg'un. (7.5.17) va (7.5.21) tenglamalar bir xil ko'rinishda ekanligidan harakatning $\mathbf{u}$ ga nisbatan asimptotik turg'unligi kelib chiqadi. (7.5.20) va (7.5.19) tengliklarga asosan harakat $\mathbf{z}$ ga nisbatan turg'un (asimptotik turg'un emas) degan xulosaga kelamiz.

Izoh. V.M. Matrosov 1959-yilda ushbu teorema nochiziqli sistemalar uchun ham o'z kuchini saqlashini isbot qildi [59].

M i s o l. O'zgarmas magnit maydonida elektron harakatning turg'unligini tadqiq etish

$\mathbf{H} = \text{const}$ bo'lganda elektron harakatning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mathbf{e}}{C}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}). \qquad (7.5.22)$$

Bu yerda $\mathbf{V}$ –elektron tezligining vektori, m –elektron massasi, e – uning zaryadi, C –yorug'lik tezligiga teng bo'lgan elektrodinamik o'zgarmas son ($C = 3 \cdot 10^{10}$ см/с), $\mathbf{H}$ –magnit maydonining kuchlanganligi [90].

Qo'zg'almas koordinatalar sistemasining o'qlari bo'yicha bu tenglamaning proektsiyalarini yozamiz:

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \frac{\mathbf{e}}{C}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = 0.$$

Bu yerdan

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} - \frac{e}{c}H_z\dot{y} + \frac{e}{c}H_y\dot{z} = 0, \\ m\ddot{y} + \frac{e}{c}H_z\dot{x} - \frac{e}{c}H_x\dot{z} = 0, \\ m\ddot{z} - \frac{e}{c}H_y\dot{x} + \frac{e}{c}H_x\dot{y} = 0 \end{aligned}\right| \qquad (7.5.23)$$

ni hosil qilamiz. Bu tengliklarda $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ tezliklarga nisbatan chiziqli bog'langan kuchlar matritsasi

$$G=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{e}{c}H_z & \frac{e}{c}H_y \\ \frac{e}{c}H_z & 0 & -\frac{e}{c}H_x \\ -\frac{e}{c}H_y & \frac{e}{c}H_x & 0 \end{pmatrix}$$

qiyshiq simmetrikdir. Demak, bu kuchlar giroskopik kuchlardir. Boshqa kuchlar mavjud emas. Demak, 1- teoremaga asosan elektronning toyilmagan harakati $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ tezliklarga nisbatan turg'un bo'ladi va 2- teoremaning izohiga asosan elektronning toyilmagan harakati x, y, z koordinatalar bo'yicha noturg'un bo'ladi (koordinatalar soni 3 ta (toq son) bo'lganligi uchun).

Agar z o'qini H vektorga parallel qilib o'tkazsak, u holda $H_x = 0$, $H_y = 0$, $H_z = H$ va (5.23) tenglamalar quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} - \frac{e}{c}H\dot{y} = 0, \\ m\ddot{y} + \frac{e}{c}H\dot{x} = 0, \\ m\ddot{z} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Birinchi va ikkinchi tenglamalar uchinchisiga bog'liq emas. Shuning uchun ularni alohida ko'ramiz. Bu tenglamalar uchun giroskopik koeffitsiyentlar matritsasining determinanti

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{e}{c}H \\ \frac{e}{c}H & 0 \end{vmatrix} = \frac{e^2}{c^2}H^2$$

noldan farq qiladi. Shuning uchun ham 2- teoremaga asosan elektronning harakati x va y koordinatalarga nisbatan turg'un bo'ladi. Uchinchi tenglamadan $z = \dot{z}_0 t + z_0$ kelib chiqadi va bu yerdan z koordinata bo'yicha harakatning noturg'unligi kelib chiqadi.

6- §. Harakatning turg'unligiga nokonservativ kuchlarning ta'siri

6.1. Faqat nokonservativ kuchlar ta'siridagi harakat

Dastlab sistemaning harakati faqat nokonservativ kuchlar ta'siri ostida sodir bo'ladi deb faraz qilamiz, bu holda koordinatalarga nisbatan chiziqli bog'langan nokonservativ **Pz** kuchlarning **P** matritsasi simmetrik bo'ladi.

1- teorema. *Birgina nokonservativ kuchlar ta'siri ostidagi sistemaning* $\mathbf{z} = 0, \dot{\mathbf{z}} = 0$ *toyilmagan harakati, nochiziqli hadlarning qanday bo'lishidan qat'iy nazar, noturg'un bo'ladi.*

Isbot. Teoremaning shartlari bo'yicha toyilmagan harakat tenglamasini (7.1.16) ko'rinishga keltirish mumkin ($B = G = C_0 = 0$):

$$\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{P}\,\mathbf{z} = \mathbf{Z} \tag{7.6.1}$$

Bu yerda ***P***– qiyshiq simmetrik matritsa, **Z**– elementlari z_k va $\dot{z}_k$ larning birinchidan yuqori darajalaridan iborat ustun-matritsa va $\mathbf{Z}(0,\ldots 0;\ 0,\ldots 0) \equiv 0$.

Endi

$$\Delta(\lambda) = \det(E\lambda^2 + P) = 0 \tag{7.6.2}$$

xarakteristik tenglamani ko'ramiz. (7.5.1) ($\ddot{\mathbf{z}} + G\,\mathbf{z} = 0$) sistemaning tezliklarga nisbatan turg'unligidan

$$\det(E\lambda^2 + G\lambda) = \lambda^s \det(E\lambda + G) = 0$$

tenglamaning ((7.5.7) tenglama) nolga teng bo'lmagan ildizlari sof mavhum sonlardir. Bu

$$\Delta(\lambda) = \det(E\lambda + G) = 0 \tag{7.6.3}$$

tenglamaning noldan farqli ildizlari $\lambda = \pm a i$ ko'rinishida bo'ladi, demakdir, bu yerda a– musbat haqiqiy son. $\Delta(-\lambda) = (-1)^s \Delta(\lambda)$ ekanligini osongina ko'rsatish mumkin. Demak, agar λ son $\Delta(\lambda) = 0$ ning ildizi bo'lsa, u holda $-\lambda$ ham bu tenglamaning ildizi bo'ladi. Shuning uchun ham, agar haqiqiy qismi noldan farqli ildiz mavjud bo'lsa, u vaqtda haqiqiy qismi musbat bo'lgan ildiz mavjud bo'lishi kerak. Bu harakatning noturg'unligini ko'rsatadi.

(7.6.2) tenglama (7.6.3) tenglamadan λ ni λ^2 ga (P matritsa xuddi G matritsa singari qiyshiq simmetrik matritsadir) almashtirish natijasida hosil bo'ladi. Shuning uchun (7.6.2) tenglamaning λ^2 ga nisbatan nolga teng bo'lmagan ildizlari

$$\lambda^2 = \pm a\, i$$

ko'rinishdadir. Bu yerdan

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{2a}}{2}(1 \pm i)$$

ni topamiz.

Shunday qilib, (7.6.2) xarakteristik tenglamaning ildizlari orasida haqiqiy qismi musbat bo'lgan ildizlar mavjud.

Demak, $\mathbf{z} = 0$, $\dot{\mathbf{z}} = 0$ toyilmagan harakat noturg'undir.

6.2. Nokonservativ va potensial kuchlar ta'siridagi harakat

Endi sistemaga bir vaqtda potentsial va nokonservativ kuchlar ta'sir etayotgan holni ko'rib o'taylik. Toyilmagan harakat tenglamasini (7.1.16) ko'rinishda olamiz:

$$\ddot{\mathbf{z}} + C_0\mathbf{z} + \mathbf{P}\mathbf{z} = 0,$$

bu yerda C_0 – diagonal, P – qiyshiq simmetrik matritsalar. Xarakteristik tenglama

$$\det(E\lambda^2 + C_0 + P) = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. λ bu tenglamada kvadrati bilan qatnashayotganligidan determinantning yoyilmasi

$$\lambda^{2s} + a_2\lambda^{2s-2} + a_4\lambda^{2s-4} + \ldots + a_{2s-2}\lambda^2 + a_{2s} = 0 \qquad (7.6.4)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglamada

$$a_2 = c_1 + c_2 + \ldots + c_s,\ a_{2s} = \det(C_0 + P). \qquad (7.6.5)$$

(7.6.4) tenglamaning chap tarafi λni $-\lambda$ ga almashtirish bilan o'zgarmaydi. Shuning uchun bu tenglamaning λ ga nisbatan barcha ildizlari sof mavhum va λ^2ga nisbatan haqiqiy manfiy son bo'lishlari zarur.

Bu paragrafning 1- teoremasiga asosan sistema konservativ kuchlarsiz ($C_0 = 0$) noturg'un. Shuning uchun turg'un potensial sistemaga nokonservativ kuchlarni qo'shish bilan ayrim hollarda turg'unlikni buzish mumkin degan fikrga borish mumkin. Nokonservativ kuchlar potensial sistemaning turg'unligini buzish bilan bir qatorda noturg'un potensial sistemani stabillashtirishi ham mumkinligini misolda ko'rsatamiz.

Ikki erkinlik darajasiga ega bo'lgan sistemani ko'rib o'taylik. Toyilgan harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishga keltirilgan bo'lsin:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + c_1 x - p y &= 0, \\ \ddot{y} + c_2 y + p x &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.6.6)$$

Bu tenglamalarni

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + c_1 x = 0, \\ \ddot{y} + c_2 y = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.6.7}$$

potensial sistemaga nokonservativ kuch $-p\,y$ va

$$\begin{Vmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{Vmatrix}$$

qiyshiq simmetrik matritsali $p\,x$ kuchni qo'shish natijasida hosil bo'lgan deb qarash mumkin.

(7.6.6) sistemaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$\lambda^4 + (c_1 + c_2)\lambda^2 + c_1 c_2 + p^2 = 0. \tag{7.6.8}$$

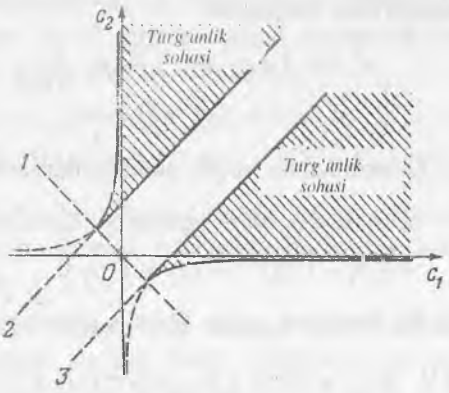
Agar ikkala ildiz ham λ^2 ga nisbatan haqiqiy va manfiy bo'lsa, u holda sistema turg'un bo'ladi. Buning uchun (7.6.8) tenglamalarning koeffitsiyentlari va diskrimananti noldan katta bo'lishini talab qilish zarur:

$$c_1 + c_2 > 0,\ c_1 c_2 + p^2 > 0,\ (c_1 + c_2)^2 - 4(c_1 c_2 + p^2 > 0.$$

Keyingi tengsizlikni soddalashtirib, turg'unlik shartlarini quyidagi holga keltiramiz:

$$c_1 + c_2 > 0,\ c_1 c_2 > -p^2,\ |c_1 - c_2| > 2p. \tag{7.6.9}$$

$p = 0$ bo'lganda, ya'ni nokonservativ kuchlar qatnashmaganda, bu shartlar $c_1 > 0,\ c_2 > 0$ larga aylanadi. Bu tengsizliklarni bevosita (7.6.7) tenglamalardan ham hosil qilish mumkin. c_1 va c_2 parametrlar tekisligida potentsial sistemaning turg'unlik sohasi to'liq birinchi kvadrantni egallaydi. $p \neq 0$ bo'lgandagi turg'unlik sohasi 7.3- shaklda ko'rsatilgan. Turg'unlik sohasining chegarasi (*1*) to'g'ri chiziq, $c_1 c_2 = -p^2$ giperbolaning tarmoqlari hamda giperbolaning uchlariga urinib o'tadigan (*2*) va (*3*) ($c_1 - c_2 = \pm 2p$) to'g'ri chiziqlardan iborat. Rasmdan ko'rinib turibdiki, potensial sistema turg'unlik sohasining ancha qismi nokonservativ kuchlarni qo'shganimizdan keyin noturg'unlik sohasiga ((*2*) va (*3*) to'g'ri chiziqlar orasidagi soha) aylanadi. Rasmdan yana ko'rinyaptiki, qaralayotgan (7.6.6) sistema turg'unlik sohasining bir qismi ikkinchi va to'rtinchi kvadrantlarda joylashgan, u yerda potensial (7.6.7) sistema noturg'un. Shunday qilib, nokonservativ kuchlar potensial sistema turg'unligini buzishi mumkin va ayrim hollarda ular potensial sistemani stabillashtirishi ham mumkin.



7.3- shakl.

Ikki erkinlik darajasiga ega bo'lgan bu misoldan ko'rinadiki, agar Puankare koeffitsiyentlari c_1 va c_2 lar teng bo'lsa ($c_1 = c_2$), u vaqtda har qanday qo'shilgan $-p\,y$ va $p\,x$ nokonservativ kuchlar potensial sistemaning turg'unligini buzadi. **Ixtiyoriy erkinlik darajasida va barcha $c_1, \ldots, c_s$ Puankare koeffitsiyentlarining tengligi $c_1 = c_2 = \ldots \ldots = c_s$ da har qanday nokonservativ kuchlarning qo'shilishi potensial sistema turg'unligini buzishini ko'rsatish mumkin.** Eslatib o'tamiz, turg'un potensial sistema uchun Puankarening turg'unlik koeffitsiyentlari $c_1 = c_2 = \ldots = c_s$ sistema xususiy tebranishlar chastotasining kvadratiga teng bo'ladi. Shuning uchun xususiy chastotalari teng bo'lgan turg'un potensial sistemaga nokonservativ kuchlar qo'shilganda sistemaning turg'unligi buziladi. Turg'unlikning buzilish sababi xarakteristik tenglama ildizlari orasida haqiqiy qismi musbat bo'lgan ildizlarning paydo bo'lishidir. Shuning uchun turg'unlikni hatto nochiziqli kuchlar yordami bilan ham tiklash mumkin emas.

6.3. Nokonservativ, potensial va dissipativ kuchlar ta'siridagi harakat

Endi potensial va nokonservativ kuchlar ta'sir etayotgan sistemaga dissipativ kuchlarni qo'shganimizda turg'unlikning o'zgarishini ko'rib o'taylik. Buning uchun (7.6.6) sistemaga $b_1 \dot{x}$ va $b_2 \dot{y}$ kuchlarni qo'shamiz, bu yerda b_1 va b_2 – musbat sonlar:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + b_1 \dot{x} + c_1 x - p\,y = 0, \\ \ddot{y} + b_2 \dot{y} + c_2 y + p\,x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.6.10)$$

Sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + b_1\lambda + c_1 & -p \\ p & \lambda^2 + b_2\lambda + c_2 \end{vmatrix} = 0$$

ko'rinishga ega. Determinantni yoyib, soddalashtirganimizdan keyin

$$\lambda^4 + (b_1 + b_2)\ \lambda^3 + (c_1 + c_2 + b_1 b_2)\ \lambda^2 +$$
$$+ (c_1 b_2 + c_2 b_1)\ \lambda + c_1 c_2 + p^2 = 0$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglama uchun Gurvits kriteriysini yozamiz:

$$b_1 + b_2 > 0, \quad c_1 + c_2 + b_1 b_2 > 0, \quad c_1 b_2 + c_2 b_1 > 0, \quad c_1 c_2 + p^2 > 0,$$
$$\Delta_3 = (b_1 + b_2)(c_1 + c_2 + b_1 b_2)(c_1 b_2 + c_2 b_1) -$$
$$- (b_1 + b_2)^2 (c_1 c_2 + p^2) - (c_1 b_2 + c_2 b_1)^2 > 0. \tag{7.6.11}$$

Oxirgi tengsizlikni

$$\Delta_3 = b_1 b_2 (b_1 + b_2)(b_1 c_2 + b_2 c_1) +$$
$$+ b_1 b_2 (c_2 - c_1)^2 - (b_1 + b_2)^2 p^2 > 0 \tag{7.6.12}$$

ko'rinishga keltiramiz.

Dissipativ kuchlar ba'zi shartlar bajarilganda noturg'un (7.6.6) sistemani stabillashtirishi mumkinligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $c_1 = c_2 = c$ bo'lganda Gurvits kriteriysi (7.6.11)

$$b_1 + b_2 > 0, \quad 2c + b_1 b_2 > 0, \quad (b_1 + b_2)c > 0,$$
$$c^2 + p^2 > 0, \quad \Delta_3 = (b_1 + b_2)^2 (b_1 b_2 c - p^2) > 0$$

ko'rinishda bo'ladi.

Farazimiz bo'yicha $c > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$. Shuning uchun birinchi to'rtta tengsizlik o'z-o'zidan bajariladi, oxirgi tengsizlik esa dissipativ kuchlar

$$b_1 b_2 > \frac{p^2}{c} \tag{7.6.13}$$

shartni qanoatlantirganda bajariladi.

Shunday qilib, potensial va nokonservativ kuchlar ta'siri ostidagi noturg'un sistemani ($c_1 = c_2$, $p \neq 0$, $b_1 = b_2 = 0$ bo'lganda harakat doimo noturg'un, 7.6- shaklga qarang) dissipativ kuchlar orqali stabillashtirish mumkin.

Dissipativ koeffitsiyentlar $b_1 = b_2 = b$ bo'lganda (7.6.6) turg'un sistema har qanday $b > 0$ qiymat uchun asimptotik turg'un bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda Gurvits kriteriysi,

$$2b > 0, \quad c_1 + c_2 + b^2 > 0, \quad b(c_1 + c_2) > 0, \quad c_1 c_2 + p^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = b^2[2b^2(c_1 + c_2) + (c_2 - c_1)^2 - 4p^2] > 0.$$

(7.6.6) sistema turg'un bo'lishining sharti (7.6.9) ga asosan, o'z-o'zidan bajariladi. Bu natija sistema nochiziqli bo'lganda ham o'z kuchini saqlaydi (chunki $R_e \lambda_k < 0$).

Endi potensial va nokoservativ kuchlar ta'siri ostidagi sistemaning turg'unligini dissipativ kuchlar buzib yuborishini ko'ramiz. Haqiqatan ham, (7.6.9) turg'unlik sharti bajarilsin. $b_2 = 0$ va $b_1 = b > 0$ deb faraz qilamiz. U holda (7.6.12) shart

$$\Delta_3 = -b^2 p^2 < 0$$

ko'rinishga keladi, demak, sistema noturg'undir. $b_2 = 0$, $b_1 > 0$ hol to'liqsiz dissipatsiyaga mos keladi. Ammo, olingan natija to'liq dissipatsiya bo'lgan hol uchun ham o'z kuchini saqlaydi.

6.4. Umumiy hol

Umumiy holni ko'rishga o'tamiz, ya'ni sistemaga birdaniga **potensial, giroskopik, dissipativ, nokonservativ tezlatuvchi** va **nochiziqli kuchlar** ta'sir etadi deb faraz qilamiz.

Harakat tenglamasini (7.1.17) ko'rinishda olamiz:

$$\ddot{\mathbf{z}} + B_0 \dot{\mathbf{z}} + G\dot{\mathbf{z}} + C\mathbf{z} + P\mathbf{z} = \mathbf{Z}. \qquad (7.6.14)$$

(7.6.14) ning xarakteristik tenglamasini topamiz:

$$\Delta = \det(E\lambda^2 + B_0 \lambda + G\lambda + C + P) = 0, \qquad (7.6.15)$$

uni yoyib yozsak,

$$\lambda^{2s} + \alpha_1, \ \lambda^{2s-1} + \ldots + \alpha_{2s} = 0$$

ko'rinishga keladi. ε, μ va ν parametrlarni kiritamiz va quyidagi yordamchi tenglamani qaraymiz:

$$\Delta(\varepsilon, \mu, \gamma) = \det(E\lambda^2 + B_0 \varepsilon \lambda + G\mu\lambda + (C + \mathbf{P})\nu^2) = 0. \qquad (7.6.16)$$

(7.6.15) tenglama (7.6.16) tenglamadan $\nu = \mu = \varepsilon = 1$ bo'lganda hosil bo'ladi, ya'ni $\Delta(1,1,1) = \Delta$.

(7.6.16) determinantni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\Delta(\varepsilon,\ \mu,\ \nu)=$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda^2+\varepsilon b_1\lambda+\nu^2c_{11} & g_{12}\mu\lambda+\nu^2(c_{12}+p_{12}) & \cdots & g_{1s}\mu\lambda+\nu^2(c_{1s}+p_{1s}) \\ g_{21}\mu\lambda+\nu^2(c_{21}+p_{21}) & \lambda^2+\varepsilon b_2\lambda+\nu^2c_{22} & \cdots & g_{2s}\mu\lambda+\nu^2(c_{2s}+p_{2s}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ g_{s1}\mu\lambda+\nu^2(c_{s1}+p_{s1}) & g_{s2}\mu\lambda+\nu^2(c_{s2}+p_{s2}) & \cdots & \lambda^2+\varepsilon b_s\lambda+\nu^2c_{ss} \end{vmatrix}=0. \tag{7.6.17}$$

bu yerda $c_{kj}=c_{jk}$, $g_{kj}=-g_{jk}$, $p_{kj}=-p_{jk}$ yoki matritsa formasida

$$c=c',\quad G=-G',\quad P=-P', \tag{7.6.18}$$

bu yerda shtrix transponirlash belgisini bildiradi. (7.6.17) determinantni ochib, λ darajasi bo'yicha guruhlab chiqamiz:

$$\lambda^{2s}+a_1\lambda^{2s-1}+a_2\lambda^{2s-2}+\cdots+a_{2s-1}\lambda+a_{2s}=0. \tag{7.6.19}$$

a_k koeffitsiyentlar ε, μ, ν parametrlarning butun rasional funksiyalari va $a_k(1,\ 1,\ 1)=\alpha_k$. (7.6.17) determinant ε, μ, ν parametrlarga nisbatan bir jinsli, shuning uchun ham a_k da ε, μ va ν larning daraja ko'rsatkichlari yig'indisi k ga teng bo'lishi kerak. (7.6.19) xarakteristik tenglama koeffitsiyentlari [61]

$$\left.\begin{aligned} a_1&=a_1'\varepsilon, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2s-1}&=(a_{2s-1}'\mu+a_{2s-1}''\varepsilon)\ (\nu^2)^{s-1}, \\ a_{2s}&=a_{2s}'\nu^{2s}, \end{aligned}\right\} \tag{7.6.20}$$

ko'rinishga ega,

bu yerda a_{2s-1}' va a_{2s-1}'' ifodalar $-g_{kj}$ va p_{kj} larning funksiyalari va ularning ifodalarida ε, μ va ν parametrlar qatnashmaydi:

$$\left.\begin{aligned} a_1'&=b_1+b_2+\cdots+b_s=\alpha_1, \\ a_{2s}'&=\det(C+P)=\alpha_{2s}. \end{aligned}\right\} \tag{7.6.21}$$

Bu tengliklardan foydalanib, harakat turg'unligining **zaruriy** shartlarini ifodalaydigan teoremalarni osongina isbotlash mumkin [61].

2- teorema. *Nochiziqli hadlar mavjud bo'lmaganda (Z=0), dissipativ kuch-larsiz sistema asimptotik turg'un bo'la olmaydi.*

Isbot. Teorema shartlari bo'yicha $a_1 = b_1 + \cdots + b_s \le 0$ (b_k koeffitsiyentlari nafaqat dissipativ kuchlarni, balki tezlatuvchi kuchlarni ham xarakterlaydi va tezlatuvchi kuchlar uchun $b_k < 0$). Demak, Gurvits shartlari bajarilmaydi va sistema asimptotik turg'un bo'lmaydi.

3- teorema. *Agar* $\det(C+P) < 0$ *(koordinataga chiziqli bog'langan kuchlarning koeffitsiyentlaridan tuzilgan determinant manfiy) bo'lsa, u holda sistema har qanday giroskopik, dissipativ, tezlatuvchi va nochiziqli kuchlar ta'sirida noturg'un bo'ladi.*

Isbot. Bu holda $a_{2s} = a'_{2s} = \det(C+P)$ ga teng bo'lgan (7.6.15) tenglamaning ozod hadi manfiy bo'ladi ($a_{2s} < 0$) va, demak, xarakteristik tenglama ildizlari orasida hech bo'lmaganda bitta ildizning haqiqiy qismi musbat bo'ladi. Shuning uchun noturg'unlik haqidagi Lyapunov teoremasiga asosan sistema noturg'un bo'ladi.

1- izoh. $\det(C+P)$ *ning ishorasini (7.1.5) tenglama orqali aniqlash osonroq bo'ladi.*

2- izoh. *Tomson va Tetning 1-teoremasi ushbu teoremaning natijasi bo'ladi. Haqiqatan ham, agar noturg'un konservativ sistema* ($P=0$) *toq darajaga ega bo'lsa, u vaqtda* $\det(C+P) = \det C < 0$ *bo'ladi.*

4- teorema. *Agar sistemaga konservativ va nochiziqli kuchlar ta'sir etmasa* ($C = 0$, $\mathbf{Z} = 0$), *u vaqtda*

1) *koordinatalar soni toq bo'lgan holda hech qanday giroskopik, dissipativ, tezlatuvchi va nokonservativ kuchlar ta'siri bilan sistemani asimptotik turg'un qilish mumkin emas;*
2) *koordinatalar soni juft bo'lgan holda sistemani asimptotik turg'un qilish uchun dissipativ kuchlardan tashqari giroskopik kuchlarni ham qo'shish zarur.*

Isbot. Agar konservativ kuchlar yo'q ($C = 0$) va koordinatalar soni toq bo'lsa, u holda $\det(C+P) = \det P = 0$ (toq tartibli qiyshiq simmetrik matritsaning determinanti bo'lganligi uchun). (7.6.21) ning oxirgi tengligiga asosan (7.6.19) xarakteristik tenglamaning ozod hadi nolga teng bo'ladi va, demak, asimptotik turg'unlik uchun zarur bo'lgan Gurvits kriteriysi bajarilmaydi. Shunday qilib, sistema asimptotik turg'un bo'lmaydi.

Teoremaning ikkinchi qismini isbot qilishdan oldin shuni ta'kidlaymizki, 2- teoremaga asosan dissipativ kuchlarni qo'shish zarur. Giroskopik kuchlar qo'shilmaganda ($G = 0$) asimptotik turg'unlik bo'lmasligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, bu holda (7.6.16) tenglama va (7.6.21) dagi a_{2s-1} koeffitsiyent (μ=0 deb faraz qilamiz):

$$\left.\begin{aligned} &\Delta(\varepsilon,\nu^2)=\det(E\lambda^2+B_0\varepsilon\lambda+\nu^2P)=0,\\ &a_{2s-1}=a''_{2s-1}\varepsilon(\nu^2)^{s-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.6.22)$$

ko'rinishda bo'ladi.

$\Delta(\varepsilon,-\nu^2)$ determinantda satrlarni ustunlarga almashtiramiz (bundan determinantning qiymati o'zgarmaydi):

$$\Delta(\varepsilon,-\nu^2)=\det(E\lambda^2+B_0\varepsilon\lambda-\nu^2P)=\det(E'\lambda^2+B'_0\varepsilon\lambda-\nu^2P'). \qquad (7.6.23)$$

$E'=E$, $B'_0=B_0$, $P'=-\mathbf{P}$ larni hisobga olib,

$$\Delta(\varepsilon,-\nu^2)=\det(E\lambda^2+B_0\varepsilon\lambda+\nu^2\mathbf{P})$$

hosil qilamiz, ya'ni $\Delta(\varepsilon,-\nu^2)=\Delta(\varepsilon,\nu^2)$. Demak, ν^2 son (7.6.22) tenglamalarda juft darajasi bilan qatnashadi. Bunga asoslanib shunday xulosaga kelamiz: s juft son bo'lganda a_{2s-1} koeffitsiyent va u bilan birga α_{2s-1} ham nolga teng bo'ladi, demak, Gurvits kriteriysi bajarilmaydi va sistema harakati asimptotik turg'un bo'lmaydi.

Demak, harakatni asimptotik turg'un qilish uchun dissipativ kuchlar bilan birgalikda giroskopik kuchlar ham sistemaga ta'sir qilishi kerak.

5- teorema. *Agar toyilgan harakatning potensial energiyasi maksimumga ega bo'lsa, u vaqtda*

1) koordinatalar soni toq bo'lgan holda, sistemaga ta'sir etayotgan nochiziqli kuchlar qanday bo'lishidan qat'iy nazar, sistema harakatini hech qanday giroskopik, dissipativ, tezlatuvchi va nokonservativ kuchlar bilan stabillashtirish mumkin emas;

2) koordinatalar soni juft va sistema to'liq dissipatsiyali kuchlar ta'sirida bo'lganda uni stabillashtirish uchun nochiziqli kuchlar qanday bo'lishidan qat'iy nazar bir vaqtda giroskopik va nokonservativ kuchlarni qo'shish zarur.

Isbot. Toyilgan harakat tenglamasini (7.1.18) ko'rinishda olamiz:

$$A\ddot{\mathbf{z}}+B_0\dot{\mathbf{z}}+G\dot{\mathbf{z}}+C_0\mathbf{z}+P\mathbf{z}=\mathbf{Z}. \qquad (7.6.24)$$

(7.6.24) tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$\Delta=\det(A\lambda^2+B_0\lambda+G\lambda+C_0+P)=0. \qquad (7.6.25)$$

Determinantni yoyib, λ ning darajalari bo'yicha guruhlab chiqamiz:

$$a_0\lambda^{2s}+a_1\lambda^{2s-1}+\cdots+a_{2s-1}\lambda+a_{2s}=0. \qquad (7.6.26)$$

(7.6.26) tenglamaning a_{2s} ozod hadini ((7.6.25) da $\lambda=0$ deb olib topamiz:

$$a_{2s} = \det(C_0 + P).$$

Teoremaning shartiga asosan C_0 diagonal matritsaning barcha elementlari manfiy (potensial energiya maksimumga ega) va P qiyshiq simmetrik matritsa.

Agar G qiyshiq simmetrik matritsa va B_0 aniq-musbat ishorali matritsa bo'lsa, u vaqtda

s juft bo'lganda $\Delta = \det(B_0 + G) > 0$,

s toq bo'lganda $\Delta = \det(B_0 + G) < 0$

bo'lishini oldin ko'rgan edik.

Shunga asosan, toq sonli koordinatalar uchun $a_{2s} = \det(C_0 + P) < 0$. Demak, xarakteristik tenglama ildizlari orasida hech bo'lmaganda haqiqiy qismi musbat bo'lgan bitta ildiz mavjud. Nokonservativ, dissipativ va tezlatuvchi kuchlarning ozod had a_{2s} ishorasiga ta'siri yo'qligidan ular vositasida sistema harakatini stabillashtirish mumkin emasligi kelib chiqadi, ya'ni teoremaning birinchi qismi isbotlanadi.

Teoremaning ikkinchi qismini isbotlashga o'tamiz. Agar potensial energiya maksimumga ega va sistema to'liq dissipatsiyali dissipativ kuchlar ta'siri ostida bo'lganda faqat giroskopik kuchlarni qo'shganimizda Tomson va Tetning to'rtinchi teoremasiga asosan harakati noturg'un bo'ladi. Shu sababli ham teoremani isbot qilish uchun potensial energiya maksimumga ega va to'liq dissipatsiyali kuchlar ta'siri ostidagi sistemaga faqat nokonservativ kuchlarni qo'shganimizda sistema yana noturg'un bo'lishini ko'rsatish kifoya.

Potensial energiyasi maksimal bo'lgan va to'liq dissipatsiyali kuchlar ta'siri ostidagi sistemaga nokonservativ kuchlarni qo'shaylik. U vaqtda (7.6.25) xarakteristik tenglama quyidagicha

$$\Delta = \det(A\lambda^2 + B_0\lambda + C_0 + P) = 0$$

ko'rinishni yoki keyinchalik birga tenglashtiriladigan ikkita μ va ν parametrlarni kiritganimizdan keyin

$$\Delta(\mu,\nu) = \det(A\lambda^2 + B_0\lambda + C_0\nu + P\mu) = 0 \qquad (7.6.27)$$

ko'rinishni oladi. $\Delta(\mu,\nu)$ determinantni ochiqroq yozamiz:

$$\Delta(\mu,\nu) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_1\lambda + c_1\nu & a_{12}\lambda^2 + p_{12}\mu & \cdots & a_{1s}\lambda^2 + p_{1s}\mu \\ a_{21}\lambda^2 + p_{21}\mu & a_{22}\lambda^2 + b_2\lambda + c_2\nu & \cdots & a_{2s}\lambda^2 + p_{2s}\mu \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{s1}\lambda^2 + p_{s1}\mu & a_{s2}\lambda^2 + p_{s2}\mu & \cdots & a_{ss}\lambda^2 + b_s\lambda + c_s\nu \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.6.28)$$

$$\Delta(-\mu,\nu)=\det(A\lambda^2+B_0\lambda+C_0\nu-P\mu)$$

determinantning satrlarini ustunlarga almashtiramiz:

$$\Delta(-\mu,\nu)=\det(A'\lambda^2+B_0'\lambda+C_0'\nu-P'\mu).$$

A, B_0 va C_0 matritsalarning simmetrik va P ning qiyshiq simmetrik ekanliklarini hisobga olib, $A'=A$, $B_0'=B_0$, $C_0'=C_0$, $P'=-P$ tengliklarni yozamiz. Shuning uchun

$$\Delta(-\mu,\nu)=\det(A\lambda^2+B_0\lambda+C_0\nu+P\mu)=\Delta(\mu,\nu).$$

Demak, (7.6.28) determinant ifodasida μ parametr faqat juft darajalarda qatnashadi. Δ ning (7.6.28) ifodasidan foydalanib, a_{2s-1} koeffitsiyentni (7.6.26) dan topamiz. (7.6.28) determinantda λ son bosh diagonalda turgan b_k koeffitsiyentning ko'paytuvchisi bo'lib qatnashadi. Shuning uchun Δ determinantning yoyilgan ifodasida λ ning birinchi darajasi oldidagi a_{2s-1} koeffitsiyentning ifodasi $\sum b_kD_k$ ko'rinishda bo'ladi, bu erda D_k ning ifodasi c_j, P_{ij}, ν va μ larga bog'liq. Kiritilgan ν va μ parametrlarni hisobga olib, a_{2s-1} koeffitsiyentni ν darajalari bo'yicha joylashgan ko'phad sifatida ifodalash mumkin:

$$a_{2s-1}=e_0\nu^{s-1}+e_2\nu^{s-3}\mu^2+\cdots+e_{s-2}\nu\,\mu^{s-2}. \qquad (7.6.29)$$

Bu yerda μ faqat juft darajada qatnashishi hisobga olingan. e_0 oldida ko'paytuvchi sifatida faqat ν parametr turibdi. Shuning uchun e_0 bosh diagonalda turgan hadlardan tashkil topadi:

$$e_0=\sum_{k=1}^{s}b_kc_1c_2\cdots c_{k-1}c_{k+1}\cdots c_s. \qquad (7.6.30)$$

Qolgan e_2, e_4, $\cdots$, e_{s-2} koeffitsiyentlarning tuzilishi quyidagicha bo'ladi (m – juft son):

$$e_m=\sum b_{\alpha_1}c_{\alpha_2}\cdots c_{\alpha_{s-m}}\Delta_\alpha, \qquad (7.6.31)$$

bu yerda $\sum$ α_k ning barcha 1, 2, ..., s sonlardan iborat birlashmasiga tarqatilgan, Δ_α esa P matritsaning diagonal minorlari (matritsadan α_1, α_2, ..., α_{s-m} indeksli satr va ustunlarni o'chirish yo'li bilan

hosil qilinadi). (7.6.31) va (7.6.30) yig'indilar ifodasidagi har bir had bitta musbat b_{α_i} ko'paytuvchi (dissipatsiya to'liq), toq sonli manfiy c_{α_k} ko'paytuvchi (s va m sonlar juft va $\max \Pi$ mavjud) va manfiy bo'lmagan Δ_α ko'paytuvchiga (qiyshiq simmetrik determinant bo'lganligi uchun) ega bo'ladi. Shuning uchun barcha $e_m \le 0$ $(m = 2, 4, \ldots, s)$ va $e_0 < 0$, chunki $c_i < 0$ va $s-1$ – toq son. Shart bo'yicha $\mu = \nu = 1$. Demak,

$$a_{2s-1} = e_0 + e_2 + \cdots + e_{s-2} < 0$$

va (7.6.26) xarakteristik tenglamaning hech bo'lmaganda bitta ildizining haqiqiy qismi musbat ishorali bo'ladi.

Shunday qilib, agar juft koordinatali potensial sistemaning potensial energiyasi maksimum ($\max \Pi$) va to'liq dissipatsiyali dissipativ kuchlarga ega bo'lsa, u vaqtda faqat nokonservativ kuchlarni qo'shganimizda $\mathbf{z} = 0$, $\dot{\mathbf{z}} = 0$ toyilmagan harakat noturg'un bo'ladi. Bu teorema ikkinchi qismining isbotidir.

1- misol. Ushbu

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + g_1\dot{x}_2 + g_2\dot{x}_3 + p_1x_2 + p_2x_3 - c_1x_1 = X_1,\\
&\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 - g_1\dot{x}_1 + g_2\dot{x}_3 - p_1x_1 + p_3x_3 - c_2x_2 = X_2,\\
&\ddot{x}_3 + b_3\dot{x}_3 - g_2\dot{x}_1 - g_3\dot{x}_2 - p_2x_1 - p_3x_2 - c_3x_3 = X_3,\\
&c_k > 0 \quad (k = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

sistema g_k, p_k, b_k va X_k larning har qanday qiymatlarida ham noturg'un, chunki bu yerda $\Pi = -\frac{1}{2}\left(c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2\right)$ potensial energiya $c_k > 0$ qiymatlarda koordinata boshida maksimumga ega va koordinatalar soni toqdir.

2- misol. Ushbu

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 - c_1x_1 = 0,\\
&\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 - c_2x_2 = 0, \quad (b_k > 0,\ c_k > 0)
\end{aligned}$$

sistemani bir vaqtda giroskopik va nokonservativ kuchlarni muvofiq ravishda qo'shish yo'li bilan stabillashtirish mumkin, chunki $\Pi = -\frac{1}{2}\left(c_1x_1^2 + c_2x_2^2\right)$ potensial energiya $c_k > 0$ va koordinatalar soni juft bo'lganda koordinata boshida maksimumga ega va dissipatsiya to'liq.

7- §. Nokonservativ kuchlar ta'siri ostidagi sistema harakatining turg'unligini tadqiq etishga doir misol

Qiziqarli va texnikada juda ham zarur bo'ladigan nokonservativ kuchlar ta'siri ostidagi sistema turg'unligi haqidagi masalalar elastiklik nazariyasida ko'plab uchraydi. Bu yerda bunday masalalarning uch turini ko'rsatish mumkin. **Birinchi tur masalalalr** kuzatuvchi kuchlar deb ataladigan kuchlar ta'siridagi elastik sistemalar bilan bog'langan.

Kuzatuvchi kuch (moment) – ta'sir chizig'i sterjen elastik o'qining urinmasiga mos keluvchi kuch (moment). Bunday kuchlar, qisman, reaktiv qurilmalarda yonuvchi mahsulotlarning ajralib chiqishida paydo bo'ladi. Bunday sistemalarni tadqiq etishni birinchi bo'lib 1928-yilda E.L. Nikolai boshlagan.

Ikkinchi tur masalalar aylanuvchi vallar turg'unligi va **uchinchi tur masalalar** moddiy muhitda harakat qiluvchi elastik jismlarning turg'unligi masalalariga oiddir. Birinchi tur masalalarni tadqiq etish usullari va olingan natijalar sharhi G. Xermanning [111] kitobida va 2–3 tur masalalarni yechish usullari va olingan natijalar qisman V.V. Bolotinning [15] kitobida berilgan.

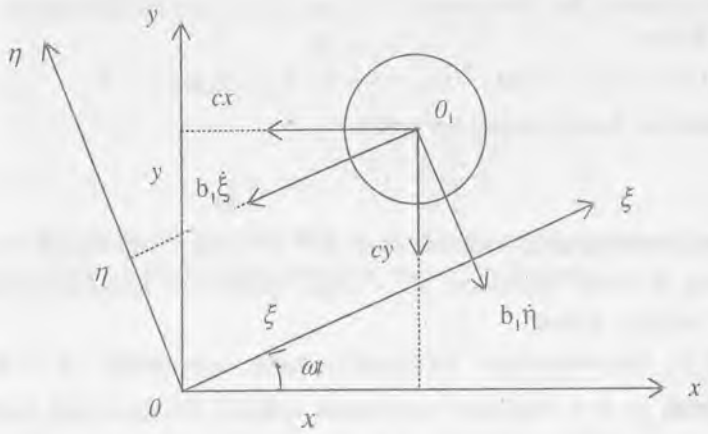
Elastik jismlardan iborat sistemalardan tashqari, shunday qurilmalar, xususan, giroskopik sistemalar mavjudki, ularda nokonservativ kuchlarni maxsus asboblar orqali vujudga keltiriladi (o'tuvchi jarayonlarni tezlatish maqsadida qilinadi).

Bu paragrafda oddiyroq bir masalani ko'rib o'tamiz.

1- m i s o l. Ichki ishqalanish kuchi ta'siri ostida aylanayotgan val noturg'unligi

1- misolda aylanayotgan valning noturg'unligiga tashqi ishqalanish kuchlari sababchi ekanligini ko'rsatgan edik. Bu misolda aylanayotgan valning noturg'unligiga ichki ishqalanish kuchlari (val materialida gisterezis borligi, val bilan unga mahkam o'rnatilgan disk orasidagi ishqalanish tufayli hosil bo'ladigan kuchlar) ham sababchi bo'lishi mumkin. Masalani oddiy model uchun yechamiz [60]. Keng ma'noda qo'yilgan masalani V.V. Bolotin [15] va F.M. Dimentberg [24] kitoblaridan o'qishni tavsiya etamiz.

7.4- shaklda o'zgarmas ω burchak tezlik bilan aylanayotgan va massasi M ga teng bo'lgan val ifodalangan.



7.4- shakl.

Oddiylik uchun valga rotor siljishsiz va qiyshaytirilmasdan o'rnatilgan deb faraz qilamiz. Oxy koordinata sistemasi qo'zg'almas, $O\xi\eta$ sistema ω burchak tezligi bilan aylanadi. Dastlab faqat ichki ishqalanish kuchlarini hisobga olamiz. Rotor O_1 o'qining muvozanat holati O dan siljishi natijasida quyidagi kuchlar hosil bo'ladi (7.10- shaklda bu kuchlarning komponentalari ko'rsatilgan):

1. **F** kuch – valning elastiklik kuchi, proektsiyalari $-cx$ va $-cy$, bu yerda c – valning egilish bo'yicha qattiqlik koeffitsiyenti;
2. Ichki ishqalanish kuchi **F**. Bu kuch val siljishining nisbiy tezligiga bog'liq bo'ladi va uning proeksiyalari $-b_1\dot{\xi}$ va $-b_1\dot{\eta}$.

Toyilgan harakat tenglamasi

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x} &= -cx - b_1\dot{\xi}\cos\omega t + b_1\dot{\eta}\sin\omega t, \\ M\ddot{y} &= -cy - b_1\dot{\xi}\sin\omega t - b_1\dot{\eta}\sin\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (7.7.1)$$

da quyidagi

$$\xi = x\cos\omega t + y\sin\omega t,$$
$$\eta = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

almashtirishni kiritamiz. Bu yerdan

$$\dot{\xi} = \dot{x}\cos\omega t + \dot{y}\sin\omega t - x\omega\sin\omega t + y\omega\cos\omega t,$$
$$\dot{\eta} = -\dot{x}\sin\omega t + \dot{y}\cos\omega t - x\omega\cos\omega t - y\omega\sin\omega t$$

ni hosil qilamiz. Bu ifodalarni (7.7.1) ga qo'yib, ayrim soddalashtirishlardan keyin

$$\ddot{x} + b_i \dot{x} + k^2 x + b_i \omega y = 0, \quad \ddot{y} + b_i \dot{y} + k^2 y - b_i \omega x = 0 \Big\} \tag{7.7.2}$$

tenglamalarni hosil qilamiz, bu yerda

$$b_i = \frac{b_1}{M}, \qquad k^2 = \frac{c}{M}. \tag{7.7.3}$$

Koeffitsiyentlarning fizik ma'nosi: k^2 – valning yon elastik tebranishining doiraviy chastotasi, b_i – ichki ishqalanish koeffitsiyentining massa birligiga nisbati.

(7.7.2) tenglamalardan ko'rinadiki, rotor aylanishida $b_i \dot{x}$ ichki ishqalanish va $b_i \dot{y}$ dissipativ kuchlardan tashqari nokonservativ kuchlar ham yuzaga keladi. Nokonservativ kuchlar koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$\begin{Vmatrix} 0 & b_i\omega \\ -b_i\omega & 0 \end{Vmatrix}$$

matritsa qiyshiq simmetrik bo'ladi.

Asimptotik turg'unlik sharti (7.6.13) dan foydalanib, biz ko'rayotgan misol uchun asimptotik turg'unlik shartini topamiz (bu holda $b_1 = b_2 = b_i$, $c_1 = c_2 = k^2$, $p = bi\omega$):

$$b_i^2 > \frac{b_i^2 \omega^2}{k^2}.$$

Bu yerdan

$$\omega < k. \tag{7.7.4}$$

Shunday qilib, aylanayotgan rotor o'qining turg'unligi uchun uning aylanish burchak tezligi ω elastik tebranishlar doiraviy chastotasi k dan kichik bo'lishi kerak. Agar $\omega > k$ bo'lsa, u vaqtda ichki ishqalanish kuchi ta'siri ostida rotor o'qining harakati noturg'un bo'ladi.

Endi tashqi kuchlar qarshiligini (muhit qovushqoq deb hisoblaymiz) hisobga olamiz. U vaqtda toyilgan harakat tenglamasi (7.7.2) quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + (b_e + b_i)\dot{x} + k^2 x + b_i \omega y = 0, \\ \ddot{y} + (b_e + b_i)\dot{y} + k^2 y - b_i \omega x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.7.5}$$

Bu tenglamalarda b_e – tashqi qovushqoq ishqalanish koeffitsiyentining massa birligiga nisbati. Asimptotik turg'unlik sharti (7.6.13) bu hol uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$(b_e + b_i)^2 > \frac{b_i^2 \omega^2}{k^2}$$

yoki

$$\omega < \left(1 + \frac{b_e}{b_i}\right) k . \qquad (7.7.6)$$

Agar aylanish burchak tezligi ω o‘ng tarafdagi ifodadan katta bo‘lsa, u holda rotor o‘qining harakati noturg‘un bo‘ladi.

VIII BOB. NOGOLONOM SISTEMALAR TURG'UNLIGI

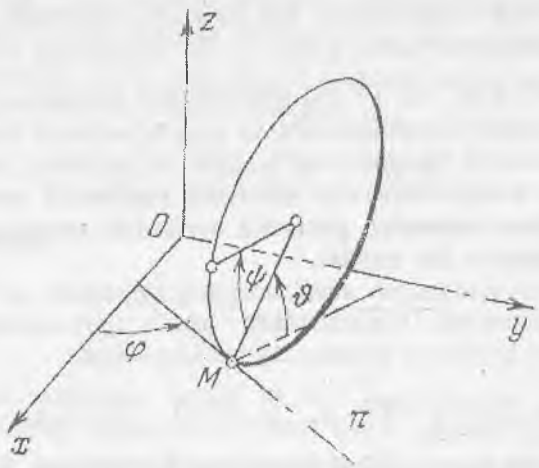
1- §. Nogolonom sistemalar haqida umumiy tushunchalar

«Golonom sistema» va «nogolonom sistema» degan atamalarni (tushunchalarni) 1894-yilda G. Gerts o'zining vafotidan keyin nashr etilgan mashhur kitobida taklif etgan edi [110].

Ko'p hollarda sistemaning tuzilishi uning ayrim qismlarini ixtiyoriy ravishda harakat qilishiga yo'l bermaydi, ularning harakati va holati qandaydir o'zaro bog'langan bir qator shartlarga bo'ysundirilgan bo'ladi. Bu hollarda mexanikada sistemaga **bog'lanishlar qo'yilgan** deb aytiladi. Bu bog'lanishlarning muayyan ko'rinishi har xil bo'ladi. Bog'lanishlar sistemaning ayrim qismlarining mumkin bo'lgan geometrik joylashishini chegaralaydi. Bunday bog'lanishlarni **geometrik bog'lanishlar** deb aytamiz. Ayrim bog'lanishlar sistemaning kinematik mumkin bo'lgan harakatini, ya'ni sistemaning ayrim qismlari tezliklarini chegaralab qo'yadi. Bunday bog'lanishlar **kinematik bog'lanishlar** deb aytiladi. Aniqi, har qanday geometrik bog'lanish qandaydir kinematik bog'lanishni ifodalaydi, ammo aksi bo'lmasligi mumkin, ya'ni sistemaning ayrim qismlarining mumkin bo'lgan tezliklari orasidagi bog'lanish uning mumkin bo'lgan holatlarini (koordinatalarini) chegaralab qo'ymasligi mumkin.

Misol sifatida tekislik bo'yicha sirpanmay dumalayotgan diskni ko'rib o'taylik.

Koordinata sistemasi Oxy joylashgan π tekisligida dumalayotgan disk holatini $x, y, \psi, \varphi, \theta$ umumlashgan koordinatalar bilan aniqlaymiz (8.1- shakl). Bu yerda x, y – diskning tekislik bilan M urinish nuqtasi koordinatalari, ψ – fiksatsiyalangan (mixlangan) disk obodining nuqtasidan M urinish nuqtasigacha bo'lgan burchak (aylanish burchagi), φ – OX o'qi bilan diskka M nuqta orqali o'tkazilgan urinma orasidagi burchak, θ – disk tekisligi bilan π tekisligi orasidagi burchak (diskning π ga nisbatan og'ish burchagi).



8.1- shakl.

Diskning π tekisligi bo'yicha sirpanmay dumalashidan har bir momentda diskning π tekisligiga urinadigan nuqtaning tezligi nolga teng bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni M nuqtaning tezligi $\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{R} = 0$, bu yerda $\omega = \dot{\psi}$, R – diskning radiusi. Diskning ixtiyoriy kichik siljishi x, y, ψ, φ, θ koordinatalarning o'zgarishi bilan tavsiflanadi. Biz ularni dx, dy, $d\psi$, $d\varphi$, $d\theta$ bilan belgilaymiz. Radiusi R ga teng bo'lgan disk sirpanishsiz dumalayotganligi uchun diskning holatini aniqlovchi beshta koordinataning o'zgarishi ixtiyoriy bo'lmaydi va doimo ikkita shartni qanoatlantirishi kerak:

$$\left.\begin{aligned} dx &= R\cos\varphi\, d\psi, \\ dy &= R\sin\varphi\, d\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (8.1.1)$$

Shunday qilib, sirpanishsiz dumalashning sharti (8.1.1) tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadigan kinematik bog'lanishlardan iborat ekan. (8.1.1) tenglamalarni dt ga bo'lganimizda

$$\dot{x} = R\dot{\psi}\cos\varphi, \qquad \dot{y} = R\dot{\psi}\sin\varphi \qquad (8.1.2)$$

ni hosil qilamiz. (8.1.2) kinematik bog'lanishlar x, y, ψ, φ, θ koordinatalarning mumkin bo'lgan qiymatlarini chegaralamaydi.

Shunday qilib,

$$f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0 \qquad (\alpha = \overline{1,m}) \qquad (8.1.3)$$

tenglamalar bilan ifodalanadigan bog'lanishlarni **geometrik** va

$$f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) = 0 \qquad (\alpha = \overline{1,m}) \qquad (8.1.4)$$

tenglamalar bilan ifodalanadigan bog'lanishlarni **kinematik** bog'lanishlar deb aytamiz, bu yerda $q_1, q_2, ..., q_n$ lar sistemaning umumlashgan koordinatalari, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ lar esa umumlashgan tezliklari. (8.1.4) kinematik bog'lanishlar integrallanuvchi va integrallanmovchi bo'lishi mumkin. Integrallanuvchi kinematik bog'lanishlar bu geometrik bog'lanishlarning o'zidir. **Integrallanmovchi kinematik bog'lanishli mexanik sistemalar nogolonom sistemalar, geometrik bog'lanishli mexanik sistemalar golonom sistemalar deb aytiladi.**

Mexanikada uchraydigan nogolonom bog'lanishlarni, ya'ni integrallanmovchi kinematik bog'lanishlarni odatda quyidagicha yoziladi (umumlashgan tezliklarga nisbatan chiziqli bog'langan):

$$A_i(q_1, q_2, ..., q_n, t)\,\dot{q}_i + B(q_1, q_2, ..., q_n, t) = 0 \qquad (i = \overline{1, m}). \qquad (8.1.5)$$

Bunday bog'lanishlarni **chiziqli nogolonom bog'lanishlar** deb aytamiz. $B \equiv 0$ bo'lganda ular **bir jinsli bog'lanishlar** deb aytiladi. Agar A_i va B larning ifodalariga t ochiq ko'rinishida kirmasa, ular t vaqtga bog'liq emas deb aytamiz.

π tekisligi bo'yicha sirpanmasdan dumalayotgan disk chiziqli bir jinsli, vaqtga bog'liq bo'lmagan, integrallanmovchi kinematik bog'lanishli nogolonom sistemaga misol bo'la oladi.

Nogolonom sistemalar analitik mexanikasini yaratish faqat XIX asrning oxirlarida boshlandi. Hozirgi vaqtda nogolonom sistemalar harakatining turli ko'rinishdagi tenglamalari mavjud. Ulardan ayrimlarini keltiramiz.

Dalamber–Lagranj tenglamasi

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k\right)\delta q_k = 0 \qquad (8.1.6)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin, bu yerda T– sistemaning kinetik energiyasi, Q_k – umumlashgan kuchlar. Sistemada faqat potensial kuchlar mavjud bo'lsa, ya'ni $Q_k = \dfrac{\partial U}{\partial q_k}$ bo'lsa, (8.1.6) ni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\delta q_k = 0, \qquad (8.1.7)$$

bu yerda $L = T + U$ – Lagranj funksiyasi. Shuni ta'kidlaymizki, faqat δq_k variatsiyalar bog'lanmagan bo'lganda (bu faqat golonom sistemalar uchun mumkin), (8.1.6) yoki (8.1.7) munosabatlardan bizga ma'lum Lagranj tenglamalarini hosil qilish mumkin:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad (k = \overline{1,n}) \qquad (8.1.8)$$

yoki mos ravishda

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = \overline{1,n}). \qquad (8.1.9)$$

Nogolonom sistemalar uchun (8.1.6) munosabatdan harakatning Lagranj formasidagi tenglamalarini hosil qilish mumkin emas, chunki istalgan $q_1, q_2, ..., q_n$ umumlashgan koordinatalar uchun $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n$ variatsiyalar bog'langan bo'ladi.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\dot{q}_k + a_{i0} = 0 \qquad (i = \overline{1,n-m}) \qquad (8.1.10)$$

nogolonom bog'lanishlar uchun umumlashgan koordinatalar variatsiyasi $(n-m)$ ta

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\delta q_k = 0 \qquad (i = \overline{1,n-m}) \qquad (8.1.11)$$

chiziqli bir jinsli tenglamani qanoatlantiradi. (8.1.6) munosabatdan harakatning differensial tenglamalariga o'tish uchun yoki aniqmas ko'paytuvchilar usulidan (Lagranj ko'paytuvchilari), yoki bog'langan variatsiyalardan qutilish, ya'ni ularni qandaydir m ta bog'lanmagan variatsiya orqali ifodalashdan foydalanish kerak. Birinchi holda biz n ta differensial tenglama sistemasiga kelamiz. Bu sistema izlanayotgan $q_1, q_2, ..., q_n$ funksiyalardan tashqari yana $n-m$ ta noma'lum ko'paytuvchilarni o'z ichiga oladi. (8.1.10) bilan birgalikda bu tenglamalar $2n-m$ ta noma'lumlar uchun $2n-m$ ta to'liq tenglama sistemasini tashkil qiladi. Ikkinchi holda biz m ta tenglamaga ega bo'lamiz va ular (8.1.10) bilan birgalikda to'liq sistemani tashkil qiladilar. Bu differensial tenglamalarni integrallash ko'rilayotgan mexanik sistemaning boshlang'ich holatidan boshlanadigan harakatini topishga imkon beradi. Bundan tashqari, birinchi holda bir vaqtda sistemaga qo'yilgan bog'lanishlarning reaksiya kuchlarini ham topamiz.

Endi (8.1.11) tenglamalarning har birini, umuman aytganda, noldan farq qiluvchi qandaydir λ_i miqdorga ko'paytirib, hosil qilingan barcha ifodalarni qo'shamiz. (8.1.6) Dalamber–Lagranj tenglamalariga nolga teng bo'lgan

$$\sum_{i=1}^{n-m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_i a_{ik}\delta q_k \qquad (8.1.12)$$

yig'indini qo'shib, (8.1.6) ga ekvivalent

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k-\sum_{i=1}^{n-m}\lambda_i a_{ik}\right)\delta q_k=0 \qquad (8.1.13)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada λ_i Lagranj ko'paytuvchilari yangi qo'shimcha o'zgaruvchilar bo'ladi. (8.1.11) tenglamalar chiziqli bog'lanmagan, ya'ni $\|a_{ik}\|$ matritsaning rangi $n-m$ ga tengligi uchun, uning minorlaridan aqalli bittasi noldan farq qiladi.

Aniqlik uchun

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,\,n-m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-m,1} & a_{n-m,2} & \cdots\cdots & a_{n-m,\,n-m} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (8.1.14)$$

deylik.

Umumlashgan koordinatalarning $\delta q_{n-m+1}, \cdots, \delta q_n$ variatsiyalarini ixtiyoriy deb qarash mumkin, chunki (8.1.11) tenglamalar sistemasi bu variatsiyalarning istalgan qiymatlari va qolgan $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{n-m}$ variatsiyalarning aniq qiymatlari uchun bajariladi.

Endi λ_i Lagranj ko'paytuvchilarini shunday tanlab olamizki, (8.1.13) munosabatdagi bog'langan $\delta q_1, \ldots, \delta q_{n-m}$ variatsiyalar oldidagi qavs ichida turgan ifodalar nolga teng bo'lsin. λ_i ni bunday tanlash mumkin, chunki $n-m$ ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k-\sum_{i=1}^{n-m}\lambda_i a_{ik}=0 \qquad (k=\overline{1,n-m})$$

λ_i ga nisbatan ((8.1.14) munosabatga asosan) yechiluvchidir. Ammo, tanlab olingan λ_i lar uchun (8.1.13) tenglama quyidagi ifodaga aylanadi:

$$\sum_{k=n-m+1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k-\sum_{i=1}^{n-m}\lambda_i a_{ik}\right)\delta q_k=0,$$

bu yerda $\delta q_{n-m+1}, \cdots, \delta q_n$ variatsiyalar bog'lanmagan variatsiyalardir. Shuning uchun barcha qavslar nolga teng bo'lishi kerak.

Shunday qilib, biz harakatning Lagranj ko'paytuvchili tenglamasiga keldik:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k+\sum_{i=1}^{n-m}\lambda_i a_{ik} \qquad (k=\overline{1,n}). \qquad (8.1.15)$$

Bu tenglamalar (8.1.10) bog'lanishlar tenglamalari bilan birgalikda $2n-m$ ta noma'lum q_k va λ_i funksiyalarga nisbatan $n+(n-m)=$ $=2n-m$ ta to'liq tenglamalar sistemasini tashkil qiladi. $\sum_{i=1}^{n-m}\lambda_i a_{ik}$ ifoda oddiy mexanik ma'noga ega – bular nogolonom bog'lanishlarning umumlashgan reaksiya kuchlaridir. Haqiqatan ham, R_k – umumlashgan reaksiya kuchlari bo'lsa, u holda nogolonom sistemaning harakati xuddi $q_1, q_2, \ldots, q_n$ umumlashgan koordinatalar. T kinetik energiyasi va Q_k+R_k umumlashgan kuchlari bo'lgan golonom sistemaning harakatidek bo'ladi, ya'ni nogolonom sistemaning harakat tenglamasini

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k+R_k \qquad (k=\overline{1,n})$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglamalarni (8.1.15) tenglamalar bilan solishtirsak,

$$R_k=\sum_{i=1}^{n-m}\lambda_i a_{ik} \qquad (8.1.16)$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

E.T. Uitteker nogolonom sistemalar uchun (8.1.15) ko'rinishdagi tenglamalarni birinchi bo'lib Ferrer tuzgan deb aytadi [114]. E.J. Raus ham shu turdagi tenglamalardan foydalangan [82,115–117].

1899-yilda P. Appel (P.Appell) golonom va nogolonom sistemalar harakat tenglamalarining yangi ko'rinishini tavsiya etdi [107]. U Lagranj tenglamalaridagi T kinetik energiyaga o'xshaydigan yangi S funksiya kiritdi. Bu funksiyani keyinchalik tezlanish funksiyasi deb atadilar. Golonom sistemalarda T kinetik energiya qanday sistemaning dinamikasini xarakterlasa, S funksiya nogolonom sistema dinamikasini xuddi shunday to'liq xarakterlaydi. O'zining ko'rinishi bilan Appel tenglamalari sodda

bo‘lsa ham muayyan masalalarni ko‘rishda S funksiyasini tuzish T kinetik energiyani topishga nisbatan og‘irroqdir.

Nogolonom sistemaga quyidagi chiziqli bog‘lanishlar qo‘yilgan bo‘lsin:

$$\dot{q}_\alpha = \sum_{i=1}^{n-m} b_{\alpha i}(q_i t)\,\dot{q}_i + b_\alpha(q,t) \qquad (\alpha = \overline{n-m+1,\ n}). \qquad (8.1.17)$$

Bu tenglama (8.1.10) yoki (8.1.5) larni $\dot{q}_\alpha$ nisbatan yechish yo‘li bilan hosil qilinadi va ularga ekvivalentdir.

Appel tenglamasi

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i^*, \qquad Q_i^* = Q_i + \sum_{\alpha=n-m+1}^{n} Q_\alpha b_{\alpha i} \qquad (i = \overline{1, n-m}) \qquad (8.1.18)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda $S = S(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_s, t)$ – tezlanish energiyasi. (8.1.18) tenglamalar bog‘lanishlarning (8.1.17) tenglamalari bilan birgalikda $n-m$ ta ikkinchi tartibli tenglama va m ta birinchi tartibli tenglamaning to‘liq sistemasini tashkil qiladi va n ta noma’lum q_s o‘zgaruvchilarni topishga imkoniyat yaratadi.

S.A. Chapligin ko‘rsatdiki, ko‘pgina konservativ nogolonom sistemalarda $q_1, q_2, \ldots, q_m, q_{m+1}, \ldots, q_n$ umumlashgan koordinatalarni m ta birinchi koordinatalar variatsiyalarini bog‘lanmagan deb qabul qilib, shunday tanlab olish mumkinki, qolgan $n-m$ ta koordinatalar $q_{m+1}, \ldots, q_n$ kinematik integrallanmaydigan

$$\dot{q}_{m+\kappa} = \sum_{s=1}^{m} b_{s,m+k}\dot{q}_s, \qquad (k = \overline{1, n-m}) \qquad (8.1.19)$$

bog‘lanishlarning $b_{s,m+k}$ koeffitsiyentlar ifodalariga ham, (8.1.19) bog‘lanishlarni hisobga olmay tuzilgan L Lagranj funksiyasining ifodasiga ham kirmaydi. Bunday sistemalarni Chapligin sistemalari deb ataladi va shunisi yaxshiki, ular uchun harakatning dinamik tenglamalarini integrallanmaydigan kinematik bog‘lanishlardan ajratib olish mumkin.

S.A. Chapligin tenglamalari quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T^*}{\partial q_s} + \sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+k}}\left[\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial b_{r,m+k}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{s,m+k}}{\partial q_r}\right)\dot{q}_r\right] = Q_s, \quad (s = \overline{1,m}). \qquad (8.1.20)$$

Bu yerda yulduzcha bilan ifodasidan (8.1.19) bog‘lanish tenglamalaridan foydalanib bog‘langan deb qaralayotgan umumlashgan $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_n$ tezliklar chiqarib tashlangan ifodalarni tushunamiz (masalan, T^* ning ifodasida $\dot{q}_{m+1}, \dot{q}_{m+2}, \ldots, \dot{q}_n$ umumlashgan tezliklar qatnash-

maydi). Bu ilmiy natijani S.A. Chapligin 1895-yili tabiatshunoslar jamiyatida ma'ruza qilib berdi va mazkur jamiyatning jurnalida 1897-yili nashr etgan [105].

1901-yilda P.V. Vorones

$$\dot{q}_{m+y} = a_{yi}\dot{q}_i, \quad (i = \overline{1,m};\ y = \overline{1,k}) \tag{8.1.21}$$

integrallanmaydigan kinematik bog'lanishlar bilan bog'langan nogolonom sistemalar harakatining tenglamalarini tavsiya etdi [18]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_i} + \sum_{y=1}^{k}\frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_{m+y}}\alpha_{yi} + \sum_{y=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+y}}\beta_{ij}^{y}\dot{q}_i. \tag{8.1.22}$$

Bu yerda

$$\beta_{ij}^{y} = \frac{\partial \alpha_{yi}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial \alpha_{yi}}{\partial q_{m+\mu}} - \frac{\partial \alpha_{yi}}{\partial q_i} - \sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial \alpha_{yi}}{\partial q_{m+\mu}}\alpha_{\mu i}, \tag{8.1.23}$$

$$T(t, q_1, \ldots, q_{m+k}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{m+k}) = Q(t, q_1, \ldots, q_{m+k}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m),$$

ya'ni T ifodasiga $\dot{q}_{m+y}$ lar o'rniga ifodasini (8.1.21) dan keltirib qo'yganimizda Θ funksiya hosil bo'ladi.

Xususiy holda, agar chiqarib tashlangan umumlashgan tezliklarga mos keluvchi $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_{m+k} = q_n$ kinematik energiya, potensial energiya $\Pi = -U$ va nogolonom bog'lanishlar ifodalariga kirmasa, u vaqtda koordinatalar (8.1.22) Vorones tenglamalari S.A. Chapligin (8.1.20) tenglamalari bilan mos keladi. Agar sistemaga ta'sir etayotgan kuchlar potensial kuchlar bo'lmasa, u vaqtda (8.1.22) Vorones tenglamalari quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \theta}{\partial q_i} - \sum_{y=1}^{k}\frac{\partial \theta}{\partial q_{m+y}}\alpha_{yi} - \sum_{y=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{m+y}}\beta_{ij}^{y}\dot{q}_j = Q_i + \sum_{y=1}^{k}Q_{m+y}\alpha_{yi}, \quad (i = \overline{1,m}). \tag{8.1.24}$$

P.V. Vorones (8.1.22) tenglamalarni Gamilton–Ostrogradskiy variatsion prinsipidan foydalanib topgan. U bu prinsipni umumlashtirdi va nogolonom sistemalarga qo'llashni ko'rsatdi. Keyingi ishlarida u nogolonom sistemalar harakatining tenglamalarini kvazikoordinatalarda yaratdi.

Umuman aytganda, nogolonom sistemalar harakatining tenglamalarini qaysi formada olishimizdan qat'iy nazar (Chapligin sistemasidan tashqari) to'liq sistemani tuzish uchun harakat tenglamalariga nogolonom bog'lanishlar tenglamalarini qo'shish zarur. Ana shu xarakteri bilan nogolonom sistemalar bog'lanmagan koordinatali golonom sistemalardan farq qiladi. Bu holat nogolonom sistemalar harakatining turg'unligini tadqiq etish masalasini boshqacha qo'yishni taqozo qiladi.

Nogolonom sistemalar harakati tenglamalarining boshqa formalari G. Madji, V. Volterra, G.Y. Neymark, N. Fufayev va boshqa ko'pgina olimlar tomonidan ham yaratilgan [69,71]. Bu bilan qizi-quvchilarga Y.I. Neymark va N.A. Fufayevning [71] kitobiga hamda V.V. Rumyansev va A.V. Karapetyanning [82, 83] ilmiy maqolalariga murojaat qilishlarini tavsiya etamiz.

Shuni ta'kidlaymizki, nogolonom sistemalar harakatining nazariyasi g'ildirakli ekipajlar harakatining nazariyasi [43] va elektromexanik sistemalar nazariyalari bilan chambarchas bog'langan. Bu masalalar Y.I. Neymark va N.A. Fufayevning [71] kitobida va Y.I. Neymarkning [69] maqolasida batafsil keltirilgan.

XX asrning o'rtalarigacha elastik pnevmatikali g'ildirakning sirpanishsiz dumalashi natijasida hosil bo'ladigan nogolonom bog'lanishlar nogolonom sistemalar dinamikasiga bog'lanmasdan o'rganilardi. Avtomobil, mototsikl, samolyot shassilari va temir yo'l vagonlariga doir bo'lgan dolzarb turg'unlik masalalari real g'ildirak dumalashining shartlarini va tayanch tekislik tomonidan unga ta'sir etadigan reaksiya kuchlarini o'rganish va tadqiq etish masalasini kun tartibiga qo'ydi.

Y.I. Neymark va N.A. Fufayev g'ildirakning dumalashida unga qo'yiladigan bog'lanishlar (M.V. Keldish tomonidan yaratilgan) ideal bog'lanishlar ekanligini va shunday bog'lanishga ega bo'lgan sistemalarga nogolonom sistemalar harakat tenglamalarini qo'llash mumkinligini ko'rsatdilar [70]. Ular m ta ballonli g'ildirakka ega bo'lgan ekipajning o'zgarmas tezlik bilan to'g'ri chiziqli harakatining differensial tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega ekanligini ko'rsatdilar:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial \chi_i}\frac{\partial \chi_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i}\frac{\partial \theta_i}{\partial q_j}\right),$$

$$\dot{x}_i + \dot{\xi}_i + V\theta_i + V\varphi_i = 0,$$

$$\dot{\theta}_i + \dot{\varphi}_i - \alpha_i V\xi_i + \beta_i V\varphi_i + \gamma_i V\chi_i = 0, \qquad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\ m < n),$$

bu yerda $T = T(q, \dot{q}, t)$ ekipajning kinetik energiyasi,

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(a_i\xi_i^2 + b_i\varphi_i^2 + 2\sigma_i N_i\xi_i\chi_i + \rho_i N_i\chi_i^2\right)$$

pnevmatik shinalar deformatsiyasining potensial energiyasi, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ lar i raqamli shinaning kinematik parametrlari, $a_i, b_i, \sigma_i, \rho_i$ lar i raqamli shinaning elastiklik koeffitsiyentlari. Keyinchalik, bu tenglamalarni ekipajning egri chiziqli harakatiga tatbiq etdilar.

2- §. Nogolonom sistemalar muvozanat holatining turg'unligi

Nogolonom sistemalarga bag'ishlangan ko'p ilmiy ishlarga qaramasdan ularning turg'unligiga taalluqli ishlar juda ozdir. Nogolonom sistemalarning kichik tebranishlari va turg'unligi masalalari bilan E. Uitteker, O. Bottema, M.A. Ayzerman va F.R. Gantmaxer, A.N. Obmorshev, N.A. Fufayev, Y.I. Neymark, V.V. Rumyantsev, N.G. Chetayev, I.V. Nikolenko, A.V. Karapetyan, G.N. Knyazev, A.YA. Krasinskiy, I.S. Emelyanova va boshqalar shug'ullanganlar. Ammo ularning ishlaridagi turg'unlikni tadqiq etish usullari bir-biri bilan mos kelmas edi. Ma'lumki, muvozanat holati atrofida potensial energiya umumlashgan koordinatalarning bir jinsli kvadratik formasi bo'ladi deb faraz qilib, Uitteker chiziqli nogolonom bog'lanishlarni integralladi. Buning natijasida Uitteker nogolonom sistemalar muvozanat holatining turg'unligini tekshirish masalasini bog'lanmagan umumlashgan koordinatalari nogolonom bog'lanishlar soniga kamaytirilgan golonom sistemalar masalasiga aylantiradi [114]. Bottema [109] birinchi bo'lib Uitteker mulohazalarining mantiqqa zidligini payqadi. U aniq misolda nogolonom sistemalar differensial tenglamalarining xarakteristik determinanti umumiy holda nosimmetrik ekanligini va xarakteristik tenglamasi nogolonom bog'lanishlar sonidan kam bo'lmagan nol ildizlarga ega ekanligini ko'rsatdi. Shu sababli Bottema bu yerda turg'unlik nazariyasining kritik holi mavjud deb aytadi. Shuning uchun ham Bottema nogolonom sistemalar muvozanat holatining turg'unlik masalasi hozircha ochiq qoladi degan xulosaga keldi, chunki ungacha ixtiyoriy sonda nol ildizga ega bo'lgan xarakteristik tenglamali sistemalar uchun turg'unlik shartlari ishlab chiqilmagan edi.

Keyinchalik A.I. Kuxtenko [82], A.N. Obmorshev [76], I.V. Nikolenko [74] ishlarida nogolonom sistemalar toyilgan harakatining chiziqlashtirilgan differensial tenglamalari va ularga mos xarakteristik determinantlari keltirilgan va bu determinantlar umumiy holda simmetrik emasligi ko'rsatilgan.

M.A. Ayzerman va F.R. Gantmaxer Bottema tadqiq etgan masalani oxirigacha yechish mumkin ekanligini ko'rsatdilar. Ular bu masalani A.M. Lyapunov va I.G. Malkin to'liq tadqiq etgan turg'unlikning maxsus holiga kelishini ko'rsatdilar. Ular nogolonom sistemalar uchun ushbu teoremani isbot etdilar [108].

Teorema. *Agar toyilgan harakat xarakteristik tenglamasining, nolga teng bo'lgan ildizlaridan tashqari, nogolonom bog'lanishlar soniga teng bo'lgan muvozanat holatlari atrofidagi barcha ildizlari chap yarim tekislikda yotsa, u holda sistemaning muvozanat holati turg'un (ammo asimptotik turg'un emas) bo'ladi. Shu bilan toyilmagan harakatga yetarli yaqin bo'lgan har qanday toyilgan harakat* $t \to \infty$ *da ko'pxillik muvozanat holatlarining birtasiga intiladi.*

Bu natijaga asoslanib, G.N. Knyazev [44] nogolonom bog'lanishlar sonidan xarakteristik tenglamaning nolga teng bo'lgan ildizlarining soni katta bo'lgan holni faqat kritik hol deb atashni tavsiya etadi. O'zining ishida u xarakteristik tenglamaning nolga teng bo'lgan ildizlarining soni nogolonom bog'lanishlar sonidan bittaga ortiq bo'lgan holni tadqiq etdi. A.N. Obmorshev umumiy holda nogolonom sistemalar kichik tebranishlarining muvozanat holati atrofida chiziqlashtirilgan differensial tenglamalarini va Chapligin sistemasi uchun statsionar harakatga nisbatan tebranishlar tenglamasini tuzdi. Nolga teng bo'lgan ildizlar masalasi haqida u Bottema nogolonom bog'lanishlarning chiziqlashtirilgan tenglamalarini integrallanmaganligi natijasida xarakteristik tenglamaning nolga teng bo'lgan ildizlarini olgan degan mulohazani bildirdi.

Keltirilgan adabiyotlar obzoridan ko'rinib turibdiki, nogolonom sistemalar muvozanat holatining turg'unligini tadqiq etishda nafaqat yagona yondashish yo'qligi, balki tadqiq etish usullari ham bir-biriga zid ekanligi ma'lum bo'lyapti. Haqiqatan ham, agar Uitteker chiziqlashtirilgan nogolonom bog'lanishlarni integrallab to'g'ri ish qilgan bo'lsa, u vaqtda bu ishni qilmagan va natijada nolinchi ildizlarga ega bo'lgan Bottema nohaq. Agar Bottema haq bo'lsa. u holda Uitteker nogolonom sistemalar muvozanat holatining turg'unligini tadqiq etishda prinsipial xatoga yo'l qo'ygan. Ammo u vaqtda nolga teng bo'lgan ildizlar tabiatini tushuntirishda noaniqlik paydo bo'ladi: Bottema, Ayzerman va Gantmaxer nolga teng bo'lgan ildizlarning paydo bo'lishini Lyapunov ma'nosidagi kritik hol bilan bog'layaptilar. Knyazev bu holatni kritik hol deb hisoblamayapti, Obmorshev bo'lsa, nolga teng bo'lgan ildizlarning paydo bo'lishini tushunmaslik sifatida ifodalaydi. Agar chiziqlashtirilgan nogolonom bog'lanishlarni integrallaganda, ular paydo bo'lmasdi deb tushuntiradi.

1965–1967 yillar davomida Y.I. Neymark va N.A. Fufayev [71, 72,73] **nogolonom** sistemalar muvozanat holatini tadqiq etish masalasi golonom sistemalarning muvozanat holatini tadqiq etish masalasidan butunlay farq qiladigan va o'ziga xos hususiyatga ega masala ekanligini ko'rsatdilar. Nogolonom sistemada muvozanat holati yakkalangan holda bo'lmasligini (golonom sistemada yakkalangan holda bo'ladi) va ular o'lchami nogolonom bog'lanishlar soniga teng bo'lgan ko'pxillikni tashkil qilishini ko'rsatdilar. Nogolonom sistemaning bu xususiyati xarakteristik tenglamada nolga teng bo'lgan ildizlarning paydo bo'lishiga sababdir.

Golonom va nogolonom sistemalarning statsionar harakatini tadqiq etishda xuddi ana shunday holatga duch kelamiz. Biz kelgusi bandlarda Y.I. Neymark va N.A. Fufayev erishgan natijalarni bayon etamiz [69,71–73].

2.1. Kichik tebranishlar tenglamasini tuzish. Koeffitsiyentlar matritsasining xususiyati. Umumiy nazariyani tatbiq etish mumkinligi. Olinadigan natijalarning ma'nosi

Nogolonom sistemalarning muvozanat holati atrofidagi kichik tebranishlarini o'rganishda kichik tebranishlar nazariyasidagi odatiy yondoshishdan foydalanish mumkin. Bu yondoshish nogolonom sistemalarga xos bo'lgan xususiyatlarni ochishga imkoniyat yaratadi.

Konfiguratsiyasi $q_1, q_2, ..., q_n$ umumlashgan koordinatalar bilan aniqlanadigan sistemaning harakati

$$\omega_{ik}(q_1, q_2, ..., q_n)\dot{q}_k = 0, \quad (i = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}) \tag{8.2.1}$$

m ($m < n$) ta nogolonom bog'lanishga bo'ysungan deb faraz qilamiz. Potensial va F dissipativ kuchlar ta'sir etayotgan nogolonom sistema harakatini ifodalovchi tenglamalarni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\lambda_i \omega_{ij} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}, \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}); \tag{8.2.2}$$

bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – noma'lum Lagranj ko'paytuvchilari.

(8.2.1) va (8.2.2) tenglamalar $n + m$ ta $q_1, q_2, ..., q_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ noma'lum o'zgaruvchini vaqt funksiyasi sifatida aniqlashga imkon yaratadi. $q_1 = q_2 = ... = q_n = 0$ nuqta sistemaning muvozanat holati deb faraz qilaylik. (8.2.1) va (8.2.2) tenglamalardan ko'rinib turibdiki, muvozanat holatida

$$\frac{\partial V(0,...,0)}{\partial q_j} + \lambda_i \omega_{ij}(0,...,0) = 0 \tag{8.2.3}$$

munosabat bajariladi, bu yerda $V(q_1, q_2, ..., q_n)$ – sistemaning potensial energiyasi. (8.2.3) ga asosan nogolonom sistemalar muvozanat holatida $\frac{\partial V}{\partial q_k}$ miqdor, umuman, nolga teng emas (golonom sistemalarda nolga teng). Demak, $V(q_1, q_2, ..., q_n)$ funksiyaning muvozanat holati atrofidagi qator yoyilmasida chiziqli hadlar ham mavjud bo'ladi:

$$V = V(0,...,0) + \sum_{k=1}^{n} c_k q_k + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} q_i q_j + ..., \tag{8.2.4}$$

bu yerda

$$c_k = \left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_0, \quad c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0.$$

T va F funksiyalar $q_1,...,q_n,\dot{q}_1,...,\dot{q}_n$ larning kichik miqdorlari uchun xuddi golonom sistemalardagidek umumlashgan $\dot{q}_1,...,\dot{q}_n$ tezliklarning o'zgarmas koeffitsiyentli kvadratik formasi bo'ladi:

$$2T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \qquad 2F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \tag{8.2.5}$$

bu yerda

$$a_{ik} = a_{ki} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0, \qquad b_{ik} = b_{ki} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0.$$

$\lambda_i\omega_{ij}$ hadlarni chiziqlashtirganimizda

$$\lambda_i\omega_{ij} = (\lambda_i^0 + \lambda_i')(\omega_{ij}^0 + \omega_{ik}^k q_k + ...) = \lambda_i^0\omega_{ij}^0 + \lambda_i^0\omega_{ij}^k q_k + \lambda_i'\omega_{ij}^0 + ...$$

hosil bo'ladi, bu yerda

$$\omega_{ij}^0 = \omega_{ij}(0,0,...,0), \qquad \omega_{ij}^k = \left(\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial q_k}\right)_0. \tag{8.2.6}$$

λ_i^0 – aniqmas λ_i ko'paytuvchilarning sistemaning muvozanat holatidagi qiymatlari. (8.2.4)–(8.2.6) ifodalarni (8.2.2) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k + c_j = -\lambda_i^0\omega_{ij}^0 - \lambda_i^0\omega_{ij}^k q_k - \lambda_i'\omega_{ij}^0. \tag{8.2.7}$$

(8.2.3) ga asosan $c_j = -\lambda_i^0\omega_{ij}^0$. Bu ifodani (8.2.7) ga qo'yganimizda

$$a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + (c_{jk} + \lambda_i^0\omega_{ij}^k)q_k + \lambda_i'\omega_{ij}^0 = 0 \tag{8.2.8}$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamalarga chiziqlashtirilgan nogolonom

$$\omega_{ij}^0\dot{q}_k = 0 \tag{8.2.9}$$

bog'lanishlarni qo'shish kerak.

(8.2.8) va (8.2.9) tenglamalar nogolonom sistemalarning $q_1 = q_2 = ... = q_n = 0$ **muvozanat holat atrofidagi kichik tebranishlar tenglamalari** deb ataladi. Bular aniqmas $n+m$ ta $q_1, q_2,..., q_n$, $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m$ o'zgaruvchilarga nisbatan $n+m$ ta o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamani tashkil qiladi.

Bu tenglamalarga

$$q_k = c_k e^{pt}, \qquad \lambda_i' = d_i e^{pt}$$

ko'rinishdagi yechimlarni qo'yganimizda

$$pm\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} & \omega_{11}^0 & \omega_{21}^0 & \dots & \omega_{m1}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} & \omega_{1n}^0 & \omega_{2n}^0 & \dots & \omega_{mn}^0 \\ \omega_{11}^0 & \omega_{12}^0 & \dots & \omega_{1n}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m1}^0 & \omega_{m2}^0 & \dots & \omega_{mn}^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.2.10)$$

xarakteristik tenglamaga kelamiz, bu yerda

$$P_{jk} = a_{jk}p^2 + b_{jk}p + c_{jk} + \lambda_i^0 \omega_{ij}^k.$$

(8.2.10) xarakteristik tenglamaning ko'rinishidan quyidagilar kelib chiqadi:

1) xarakteristik tenglamaning kamida m ta ildizi nolga teng;

2) (8.2.10) tenglama koeffitsiyentlarining matritsasi simmetrik emas (golonom sistemalarda simmetrik bo'ladi).

Bottema tomonidan birinchi bo'lib aniqlangan xarakteristik tenglamaning bu hususiyatlari nogolonom sistemaning o'ziga xos xususiyatlaridan biridir.

Nogolonom sistema kichik tebranishlarini (8.2.8) va (8.2.9) chiziqli differensial tenglamalarga asoslanib tadqiq etish golonom sistema chiziqli differensial tenglamalarini tadqiq etishdan deyarli hech farq qilmaydi. Xuddi golonom sistemalardagi singari vaqt bo'yicha o'sadigan yechimlar mavjud bo'lganda tadqiqotning natijalari faqat chekli vaqt oralig'ida to'g'ri bo'ladi.

Bu ma'noda kichik tebranishlar nazariyasining qoidalari nogolonom sistemalarga butunlayicha yoyiladi. (8.2.8) va (8.2.9) chiziqlashtirilgan tenglamalarning dastlabki nogolonom sistema bilan aloqasi masalasiga kelganimizda, bu yerda faqat nogolonom sistemaga taalluqli o'ziga xos xususiyat borligini ko'ramiz.

Bu o'ziga xos xususiyat nolga teng bo'lgan ildizlarning mavjudligi va xarakteristik tenglama koeffitsiyentlari matritsasining simmetrik emasligida namoyon bo'ladi (konservativ sistema bo'lganda). Bu yerda har doimgi kichik tebranishlar nazariyasi pozitsiyasi bilan yondoshish turg'unlik masalasiga to'liq javob bermaydi va nolga teng bo'lgan ildizlarning tabiatini ochishga imkoniyat yaratmaydi. Bu masalalar bir-biri bilan chambarchas bog'langanligini ko'ramiz. Nogolonom sistemalar turg'unligi va kichik tebranishlarini batafsil ko'rganimizda nol ildizlarning nafaqat tabiatini tushunishni va balki nogolonom sistemalarning faqat o'ziga xos yana bitta xususiyatini: muvozanat holatlari ko'pxilligi va statsionar harakatlarning ko'pxilligi mavjud ekanligini aniqlaymiz.

2.2. Nogolonom sistemaning muvozanat holatlari ko'pxilligi yaqinidagi kichik tebranishlar tenglamalari. Muvozanat holatlari ko'pxilligining turg'unligi

Harakati

$$\omega_{\alpha\beta}(q_1,...,q_n)\dot{q}_\beta = 0, \quad (\alpha = \overline{1,m}, \beta = \overline{1,n}) \tag{8.2.11}$$

nogolonom bog'lanishlarga bo'ysundirilgan $L = L(q_1,...,q_n;\dot{q}_1,...,\dot{q}_n)$ Lagranj funksiyali va $Q_\beta(q_1,...,q_n;\dot{q}_1,...,\dot{q}_n)$, $(\beta = \overline{1,n})$ umumlashgan kuchlarga ega bo'lgan sistema berilgan bo'lsin. Sistemaning harakat tenglamalarini tuzamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial L}{\partial q_\beta} = Q_\beta + \lambda_\alpha \omega_{\alpha\beta}. \tag{8.2.12}$$

(8.2.11) va (8.2.12) tenglamalar sistemasi $q_1, q_2,..., q_n$, $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m$ miqdorlarni boshlang'ich shartlar va vaqtning funksiyalari sifatida aniqlashga imkoniyat yaratadi. (8.2.11) va (8.2.12) tenglamalardan nogolonom sistemaning muvozanat holatlarini aniqlovchi tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\beta} + Q_\beta + \lambda_\alpha \omega_{\alpha\beta} = 0, \tag{8.2.13}$$

bu yerda

$$\frac{\partial L}{\partial q_\beta} = \frac{\partial L(q_1,...,q_n;0,...,0)}{\partial q_\beta},$$

$$Q_\beta = Q_\beta(q_1,...,q_n;0,...,0), \omega_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}(q_1,...,q_n).$$

(8.2.13) da tenglamalar soni n va aniqmas o'zgaruvchilar $q_1,..., q_n, \lambda_1,..., \lambda_m$ soni $n+m$, ya'ni m ta miqdor ixtiyoriy qiymat qabul qilishlari mumkin. Shu sababli umumiy holda nogolonom sistemaning muvozanat holatlari ko'pxilligiga ega bo'lamiz. Muvozanat holatlari ko'pxilligi n o'lchamli konfiguratsiyalar fazosida m o'lchamli O_m sirtni tashkil qiladi.

Haqiqatan ham, (8.2.13) tenglamalar sistemasidan foydalanib $q_1, q_2,..., q_n$ umumlashgan koordinatalarni $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m$ aniqmas Lagranj ko'paytuvchilari orqali ifodalab, O_m sirtning parametrik tenglamasini topamiz:

$$q_\beta^0 = q_\beta^0(\lambda_1,..., \lambda_m) \quad (\beta = \overline{1,n}). \tag{8.2.14}$$

Shuni ta'kidlaymizki, muayyan masalalarda (8.2.13) tenglamalarning barchasi ham bog'lanmagan bo'lmasligi mumkin. Bu hollarda O_m o'lchami m dan katta bo'ladi. O_m sirtning mavjudligi nogolonom sistemaning yakkalangan muvozanat holatining turg'unligi haqida gap yuritish mantiqsiz ekanligini bildiradi, chunki nogolonom sistema yakkalangan muvozanat holatga ega emas. Shu sababli nogolonom sistemalar kichik tebranishlari haqida masala qo'yilishining o'zi o'zgarishi kerak.

Nogolonom sistemalar kichik tebranishlarini yakkalangan muvozanat holati atrofida o'rganmasdan, balki O_m sirt atrofida tadqiq etishga oid masala korrekt (to'g'ri) qo'yilgan deb hisoblash lozim. Demak, nogolonom sistema turg'unligi haqidagi masalani faqat O_m sirtga nisbatan qo'yish kerak. Yakkalangan muvozanat holatiga nisbatan nogolonom sistemalar turg'unligini o'rganish, masalani nokorrekt qo'yilganini bildiradi.

Yuqorida bayon etilganlarga asoslanib, nogolonom sistema kichik tebranishlarining tenglamalarini O_m muvozanat holatlari sirti atrofida tuzamiz.

(8.1.12) tenglamalardan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ aniqmas ko'paytuvchilarni chiqarib, nogolonom sistema differensial tenglamalarini normal formada yozamiz:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_{2n-m}), \quad (i = \overline{1, 2n-m}), \tag{8.2.15}$$

bu yerda x_i orqali $q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_{n-m}$ fazaviy o'zgaruvchilar belgilangan. $\Phi(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_{n-m})$ fazaviy fazoda O_m sirt

$$x_i^0 = x_i^0(u_1, u_2, ..., u_m)$$

tenglamalar bilan aniqlangan bo'lsin, bu yerda $u_1, u_2, ..., u_m$ o'zgaruvchilar O_m sirtning joriy parametrlari bo'ladi. $u_1, u_2, ..., u_m$ o'zgaruvchilar qatori yangi $v_1, v_2, ..., v_{2(n-m)}$ o'zgaruvchilarni

$$x_i = x_i^0(u_1, u_2, ..., u_m) + \gamma_{ij}(u_1, u_2, ..., u_m)v_j$$

munosabat orqali kiritamiz, bu yerda $\gamma_{ij}(u_1, u_2, ..., u_m)$ lar $u_1, u_2, ..., u_m$ o'zgaruvchilarning qandaydir funksiyalari. Yangi u, v o'zgaruvchilar orqali (8.2.15) tenglamalarni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{du_i}{dt} = G_i(u, v), \quad \frac{dv_j}{dt} = H_j(u, v). \tag{8.2.16}$$

(8.2.16) harakat tenglamalarini O_m muvozanat holatlari sirti atrofida chiziqlashtiramiz. Buning uchun (8.2.16) tenglamalarning o'ng tarafidagi

funksiyalarni $v_1, v_2, ..., v_{2(n-m)}$ miqdorlarning kichik qiymatlari bo'yicha qatorga yoyib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{du_i}{dt} = a_i(u_1, ..., u_m) + a_{ij}(u_1, ..., u_m)v_j + O(\|v\|^2),$$
$$\frac{dv_j}{dt} = b_j(u_1, ..., u_m) + b_{jk}(u_1, ..., u_m)v_k + O(\|v\|^2), \qquad (8.2.17)$$

bu yerda

$$\|v\| = (v_1^2 + v_2^2 + ... + v_{2(n-m)}^2)^{\frac{1}{2}},$$

$O(\|v\|^2$ lar esa $\|v\|$ nisbatan ikkinchi tartiblidan kam bo'lmagan hadlar. O_m sirtda $v_1, v_2, ..., v_{2(n-m)}$, $\dot{v}_1, \dot{v}_2, ..., \dot{v}_{2(n-m)}$, $\dot{u}_1, ..., \dot{u}_m$ miqdorlar nolga aylanishi sababli (8.2.17) tenglamalardagi a_i, b_i koeffitsiyentlar nolga teng bo'ladi.

Shunday qilib, O_m sirtning kichik atrofida $v_1, v_2, ..., v_{2(n-m)}$ larga nisbatan chiziqlashtirilgan (8.2.17) tenglamalar sistemasi

$$\frac{du_i}{dt} = a_{ij}(u_1, ..., u_m)v_j,$$
$$\frac{dv_j}{dt} = b_{jk}(u_1, ..., u_m)v_k, \qquad (i = \overline{1, m};\ k = \overline{1, 2(n-m)}) \qquad (8.1.18)$$

ko'rinishga keladi. Hosil qilingan tenglamalar O_m muvozanat holatlar sirtining kichik atrofidagi nogolonom sistema kichik tebranishlarining tenglamalaridir. (8.2.18) tenglamalar sistemasiga asosan va $v_1, v_2, ..., v_{2(n-m)}$ lar kichik miqdorlar bo'lganligi uchun $u_1, u_2, ..., u_m$ lar vaqtning sekin o'zgaruvchi funksiyalari bo'ladi. (8.2.18) sistemaning yechimini ketmaket yaqinlashish usulini qo'llab izlash mumkin.

Bu yerda nolinchi yaqinlashishda u_i qiymati sifatida o'zgarmas $u_i = u_i^0$ miqdorlar olinadi. Bu qiymatlarni (8.2.18) sistemaning o'ng tarafiga qo'yib, v_j ning taqribiy qiymatlarini topish uchun

$$\frac{dv_j}{dt} = b_{jk}(u_1^0, ..., u_m^0)v_k \qquad (8.2.19)$$

tenglamalarga ega bo'lamiz. (8.2.19) tenglamalarning yechimini topishda

$$\Delta = \mathrm{Det}\left\|\delta_{jk} p - b_{jk}\right\| = 0 \qquad (8.2.20)$$

xarakteristik tenglamaga kelamiz. $p_1, p_2, \ldots, p_{2(n-m)}$ lar (8.2.20) tenglamaning ildizlari bo'lsin va soddalik uchun ularni har xil va noldan farq qiluvchi deb hisoblaymiz. U vaqtda v_j uchun yechim

$$v_j = c_k \Delta_j(p_k) e^{P_k t} \qquad (8.2.21)$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda s_k – boshlang'ich shartlardan topiladigan o'zgarmas sonlar, $\Delta_j(p_k)$ lar Δ determinantning minorlari ($\Delta_j(p_k)$ miqdorni topish uchun p_k ildizni Δ ning j ustun va oxirgi satrini o'chirish natijasida hosil qilingan minorga qo'yiladi). Topilgan (8.2.21) yechimni (8.2.18) tenglamalar sistemasining birinchi tenglamalar guruhiga qo'yib, $u_i(t)$ funksiyani aniqlovchi tenglamalarga ega bo'lamiz. Bu tenglamalarni integrallab,

$$u_i = \frac{1}{p_k} c_k \Delta_j(p_k) e^{P_k t} + d_i \qquad (8.2.22)$$

yechimni topamiz, bu yerda d_i lar boshlang'ich shartlardan aniqlanadigan ixtiyoriy o'zgarmas sonlar. Keyin (8.2.22) ifodalarni (8.2.18) sistemaning o'ng tarafiga qo'yib, kelgusi yaqinlashishni aniqlaydigan tenglamalarga ega bo'lamiz. Bu tenglamalar yana ikki guruhga bo'linadi. v_k ni aniqlovchi tenglamalar eksponensial koeffitsiyentli $2(n-m)$ ta chiziqli differensial tenglama sistemasidan iborat bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib, (8.2.18) sistemaning istalgan zaruriy aniqlikdagi yechimini topish mumkin.

Agar bizni faqat O_m sirtning turg'unligi qiziqtirsa, u vaqtda (8.2.18) tenglamalar sistemasining aniq yechimini topishga zaruriyat qolmaydi. Buning uchun $v_i(t)$ funksiyaning O_m ning kichik atrofidagi xulqini o'rganish kifoyadir. Birinchi yaqinlashishda bu funksiyalarning xulqi (8.2.20) xarakteristik tenglamaning ildizlari orqali aniqlanadi. *Agar barcha* p_k $(k = \overline{1, 2(n-m)})$ *ildizlarning haqiqiy qismlari manfiy bo'lsa, u holda* $v_j(t)$ *funksiyalar yoki eksponensial so'nishni, yoki kamayuvchi amplitudali tebranish jarayonini ifodalaydi. Shuning uchun* O_m *sirtning kichik atrofida bo'lgan tasvirlovchi nuqta* $t \to \infty$ *da* O_m *sirtga intiladi. Bu holda* O_m *muvozanat holatlari sirtini asimptotik turg'un deb aytamiz. Agar* p_k *ildizlar orasida hech bo'lmaganda birorta ildizining haqiqiy qismi musbat bo'lsa, u vaqtda* O_m *muvozanat holatlari sirti noturg'un bo'ladi.*

Ildizlari O_m sirtning turg'unligini aniqlaydigan (8.2.20) xarakteristik tenglamani topish uchun u_i, v_i o'zgaruvchilarga o'tishning hojati yo'q, xarakteristik tenglamalarning nolga teng bo'lgan ildizlarining mohiyatini aniqlash maqsadida yangi o'zgaruvchilarga o'tgan edik. (8.2.20) xarakteristik tenglama (8.2.10) xarakteristik tenglamadan nolga teng bo'lgan ildizlarni tashlab yuborish yo'li bilan hosil qilinganligini osongina ko'rish mumkin. Nolga teng bo'lgan ildizlar soni, odatda, kamida nogolonom bog'lanishlar soniga teng bo'ladi, ya'ni O_m sirtning o'lchoviga teng bo'ladi.

Izoh. *Xarakteristik tenglama nolga teng bo'lgan ildizlarining soni O_m sirtning o'lchovidan katta bo'lgan holni kritik hol deb qarash kerak.*

(8.2.18) sistemadan ko'rinib turibdiki, xarakteristik tenglamaning nol ildizlari kichik tebranishlar nazariyasining kritik holiga hech qanday bog'liqligi yo'q. Ular m o'lchamli O_m sirtning mavjudligiga bog'liqdir. Shuning uchun O_m sirtning turg'unligini tekshirish uchun nolga teng bo'lgan ildizlarni oddiygina tashlab yuborish kerak. Natijada (8.2.20) xarakteristik tenglama hosil bo'ladi va unga nisbatan turg'unlikni tekshiruvchi barcha kriteriylarni ishlatish mumkin, masalan, Raus-Gurvits, Mixaylov, Naykvist kriteriylarini, D- bo'laklash usulini va h.k. Topilgan turg'unlik shartlari, O_m sirtda turg'unlik sohasini ajratishga va turg'unlik sohasining chegarasini sistema konstruktiv parametrlarining o'zgarishiga qarab o'zgarishini tadqiq etishga sharoit yaratadi.

Shuni ta'kidlaymizki, O_m sirtning birorta $(u_1^0,..., u_m^0)$ nuqtasi atrofida nogolonom sistema harakat tenglamalarini chiziqlashtirish jarayoni shu paragrafning 1- bandida bayon etilgan chiziqlashtirish jarayoni bilan to'liq mos keladi. Ammo bu yerda olinadigan tenglamalarning 1- bandda olingan tenglamalardan muhim farqi shundan iboratki, u_i^0 nuqta endi O_m sirtning istalgan nuqtasi bo'lishi mumkin. Shuning uchun ham (8.2.18) tenglamalarning a_{ij} va b_{ij} koeffitsiyentlardagi $u_1^0, u_2^0,..., u_m^0$ miqdorlarni sistemaning fizik parametrlari qatori qo'shimcha parametrlar deb qarash kerak.

Shunday qilib, olinadigan chiziqlashtirilgan tenglamalar muvozanat holatlari sirtining har bir nuqtasi turg'unligini tekshirishga va O_m sirtda turg'unlik sohasini yasashga imkoniyat yaratadi. 1- banddagi chiziqlashtirilgan tenglamalar faqat bitta (0,0,...,0) nuqtaning turg'unligini tekshirishga yaraydi.

Bu paragrafda bayon etilgan nazariyaning tatbiqini bir misolda ko'rib o'taylik.

3- §. Nogolonom sistemalarning muvozanat holati atrofidagi turg'unligini va kichik tebranishlarini tadqiq etishga doir misol.

Chapligin chanasining qiya tekislikdagi harakatining turg'unligi [71,105].

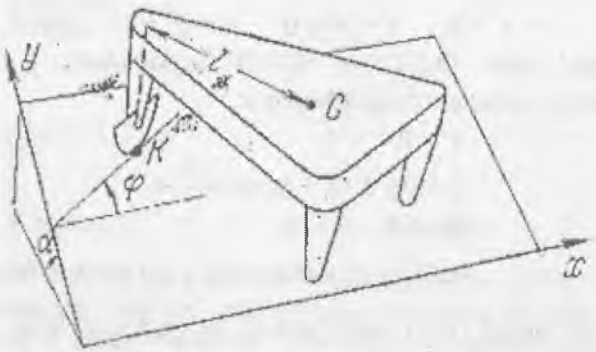
Qattiq jismning qiya tekislikka parallel harakatini ko'ramiz. Jism qiya tekislikka uchta oyoq bilan tayansin. Bu oyoqlardan ikkitasi absolut silliq, uchinchisi bo'lsa yarim doiraviy tig' bilan ta'minlangan bo'lsin. Buning natijasida uchinchi oyoq tig' tekisligiga perpendikulyar bo'lgan yo'nalishda harakat qilolmaydi. Jism og'irlik markazi C ning qiya tekislikdagi proeksiyasi tig' perpendikular bo'lgan va tig' tekislikka uringan K nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqda yotgan holni ko'rib o'taylik (8.2-shakl).

Sistemaning umumlashgan koordinatalari sifatida K nuqtaning x, y koordinatalariniva jismning qiya tekislikka perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq atrofida aylanish burchagi φ ni olamiz. U holda Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$L = \frac{m}{2}\left[(\dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (\dot{y} + l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + k^2\dot{\varphi}^2\right] - mg\sin\alpha(y - \ell\cos\varphi),$$

bu yerda m–jismning massasi, k–inersiya radiusi, α–tekislikning qiyalik burchagi, ℓ–massa markazining qiya tekislikdagi proeksiyasidan K nuqtagacha bo'lgan masofa (8.2- shaklga qarang), g–og'irlik kuchining tezlanishi. Dissipatsiya funksiyasini

$$F = \frac{m}{2}\left[h(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + h_1\dot{\varphi}^2\right]$$



8.2- shakl.

ko'rinishda olamiz, bu yerda $h \geq 0$, $h_1 \geq 0$ – sirpanish va aylanishga nisbatan dempfer koeffitsiyentlari. Nogolonom bog'lanish quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\dot{y} - \dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0. \tag{8.3.1}$$

Jismning harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\dot{x} + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi) + h\dot{x} + \lambda\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0,\\
&\frac{d}{dt}(\dot{y} + \ell\dot{\varphi}\sin\varphi) + h\dot{y} + g\sin\alpha - \lambda = 0,\\
&\frac{d}{dt}\left[\ell(\dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi) + (\ell^2 + k^2)\dot{\varphi}\right] + h_1\dot{\varphi} + g\ell\sin\alpha\sin\varphi = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.3.2}$$

(8.3.1) va (8.3.2) harakat tenglamalaridan $\dot{x} = \dot{y} = \dot{\varphi} = 0$ bo'lganda muvozanat holatining tenglamalari kelib chiqadi:

$$\lambda\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0, \quad \lambda = g\sin\alpha, \quad \sin\varphi = 0. \tag{8.3.3}$$

(8.3.3) ga asosan ko'rilayotgan nogolonom sistemaning muvozanat holatlari (x, y, φ) konfiguratsiya fazosida ikkita $\varphi = 0$ va $\varphi = \pi$ tekislikni hosil qiladi. Nogolonom bog'lanishlar soni bitta bo'lishiga qaramasdan, (8.3.1) muvozanat holatlari sirti O_m ning o'lchovi ikkiga teng, ya'ni ikki o'lchovli O_2 sirtga ega bo'lamiz. O'lchov bir birlikka oshganligining sababi (nogolonom bog'lanishlar soniga nisbatan) (8.3.3) tenglamalarning birinchisi bilan uchinchisi bir-biriga bog'langanligidadir. $x^0, y^0, \varphi^0, \lambda^0$ lar (8.1.25) tenglamalarni qanoatlantiruvchi muvozanat qiymatlari, $\xi, \eta, \varsigma, \theta$ lar esa yetarlicha kichik miqdorlar bo'lsin. U holda

$$x = x^0 + \xi, \quad y = y^0 + \eta, \quad \varphi = \varphi^0 + \varsigma, \quad \lambda = \lambda^0 + \theta$$

deb qabul qilib, (8.3.1) va (8.3.2) tenglamalarni $\xi, \eta, \varsigma, \theta$ kichik miqdorlarga nisbatan chiziqlashtiramiz:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\eta} = 0,\\
&\ddot{\xi} + h\dot{\xi} \pm \ell\ddot{\varsigma} + \varsigma g\sin\alpha = 0,\\
&\ddot{\eta} + h\dot{\eta} - \theta = 0,\\
&\pm\ell\ddot{\xi} + (\ell^2 + k^2)\ddot{\varsigma} + h_1\dot{\varsigma} \pm \varsigma g\ell\sin\alpha = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.3.4}$$

Bu yerda yuqori («+») belgi $\varphi = 0$ va quyi «–» belgi $\varphi = \pi$ tekislikka mos ravishda olinadi. Tenglamalarning xarakteristik tenglamasi

$$p^2\left\{k^2p^3 + \left[h(\ell^2 + k^2) + h_1\right]p^2 + h_1hp \pm hg\ell\sin\alpha = 0\right. \tag{8.3.5}$$

ko'rinishda bo'ladi. Muvozanat holatlari sirti ikki o'lchovli bo'lganligi uchun (8.3.5) xarakteristik tenglama ikkita nolga teng bo'lgan ildizga ega (nazariyada nolga teng bo'lgan ildizlar soni kamida O_m sirtning o'lchoviga teng bo'lishi kerak degan edik).

O_2 sirtning ($\varphi = 0$ va $\varphi = \pi$ tekisliklarning) turg'unligi

$$k^2 p^3 + \left[h(\ell^2 + k^2) + h_1\right] p^2 + h_1 hp \pm hg\ell \sin\alpha = 0 \qquad (8.3.6)$$

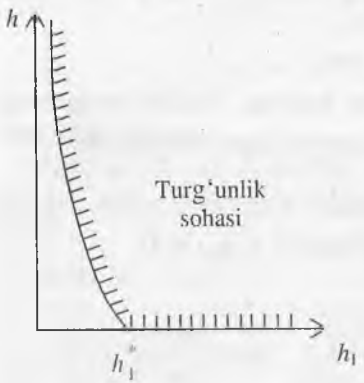
xarakteristik tenglama ildizlarining xarakteri bilan aniqlanadi. $\varphi = \pi$ tekislik uchun (8.3.6) tenglamaning ozod hadi manfiy ishorali bo'lganligi uchun u doimo noturg'un bo'ladi. $\varphi = 0$ tekislik Raus–Gurvits kriteriysiga asosan

$$(\ell^2 + k^2)h > \frac{k^2 g\ell \sin\alpha}{h_1} - h_1 \qquad (8.3.7)$$

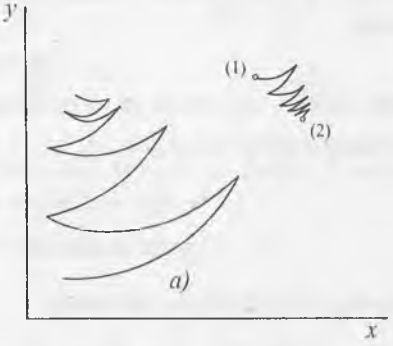
tengsizlik bajarilgandagina turg'un bo'ladi. (h, h_1) parametrlar tekisligida turg'unlik sohasi va uning chegarasi 8.3- shaklda ko'rsatilgandek bo'ladi, bu yerda h_1^* miqdor

$$h_1^* = k\sqrt{g\ell \sin\alpha}$$

tenglik bilan aniqlanadi (8.3- shakl).



8.3-shakl.



8.4-shakl

Shunday qilib, h va h_1 parametrlarning qiymatiga qarab $\varphi = 0$ tekisligi yoki butunlay turg'un, yoki butunlay noturg'un bo'ladi. Agar noturg'un bo'lsa, u holda tekislikdan toydirilgan tasvirlovchi nuqta bu tekislikka boshqa qaytib kelmaydi yoki uning atrofida o'suvchi amplituda bilan tebranma harakat qiladi. Oxirgi holda K nuqtaning trayektoriyasi xuddi 8.4- shakl, *a*) da ko'rsatilganday bo'ladi.

Agar $\varphi = 0$ tekislik turg'un bo'lsa, u holda K ning trayektoriyasi 8.4- shakl, *b*) da ifodalangandek bo'ladi.

Muvozanat holatlari sirtining asimptotik turg'unligi haqidagi teoremaga asosan (kelgusi punktda ko'ramiz) turg'un muvozanat holatlari sirtidan toydirilgan tasvirlovchi nuqta yana shu sirtga, ammo, umuman aytganda, uning boshqa nuqtasiga qaytadi (8.4- shakl, *b*)): 8.4- shakl, *b*) dagi (*1*) nuqtadan toydirilgan tasvirlovchi nuqta yangi muvozanat holatiga, masalan, 8.4-shakl, *b*) dagi (*2*) nuqtaga qaytadi.

(3.6) dan ko'rinadiki, $\ell = 0$ bo'lganda (3.6) xarakteristik tenglamada bitta nolga teng bo'lgan ildiz paydo bo'ladi. Natijada nolga teng bo'lgan ildizlar soni uchga teng va u muvozanat holatlar sirtining o'lchovidan bittaga ziyod bo'ladi. Demak, $\ell = 0$ bo'lganda biz kritik holga kelamiz.

Turg'unlikni tadqiq etish uchun harakat tenglamasidagi nochiziqli hadlarni hisobga olishga to'g'ri keladi ($\ell = 0$):

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} + h\dot{x} - \lambda \operatorname{tg}\varphi = 0, \quad \ddot{y} + h\dot{y} + \lambda + g\sin\alpha = 0,\\ &k^2\ddot{\varphi} + h_1\dot{\varphi} = 0, \quad \dot{y} - \dot{x}\operatorname{tg}\varphi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.3.8}$$

$h_1 = 0$ bo'lgan holda tenglamalar sistemasini osongina tekshirish mumkin. Bu holni ko'rib o'taylik.

***h*₁ = 0 hol.** (8.3.8) tenglamalarning uchinchisidan $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$, demak,

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

kelib chiqadi. Bu yerda φ_0 – boshlang'ich burchak. Ikkinchi va to'rtinchi tenglamalardan foydalanib, λ va y o'zgaruvchilarni chiqaramiz:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \dot{x}[h + \omega \operatorname{tg}(\omega t + \varphi_0)] + \\ &+ g\sin\alpha\sin(\omega t + \varphi_0)\cos(\omega t + \varphi_0) = 0. \end{aligned} \tag{8.3.9}$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$u = \dot{x}, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0, \quad a = \frac{h}{\omega}, \quad b = \frac{g\sin\alpha}{\omega}.$$

U holda (8.3.9) tenglamani quyidagicha yozish mumkin,

$$\frac{dU}{d\varphi} + (a + \operatorname{tg}\varphi)U + b\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Bu tenglamaning yechimi

$$u = ce^{-a\varphi}\cos\varphi + \frac{b}{a^2+1}(\cos^2\varphi - a\sin\varphi\cos\varphi)$$

ko'rinishga ega, bu yerda c – boshlang'ich shartlardan topiladigan ixtiyoriy o'zgarmas son. (8.3.8) tenglamalarning oxirgisidan foydalanib, x o'zgaruvchiga qaytamiz:

$$\left.\begin{aligned}\omega\frac{dx}{dt}&=ce^{-a\varphi}\cos\varphi+\frac{b}{a^2+1}(\cos^2\varphi-\alpha\sin\varphi\cos\varphi),\\ \omega\frac{dy}{dt}&=ce^{-a\varphi}\sin\varphi+\frac{b}{a^2+1}(\sin\varphi\cos\varphi-\alpha\sin^2\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{8.3.10}$$

Bu tenglamalarni integrallaganimizdan keyin K nuqta trayektoriyasining parametrik tenglamasiga kelamiz:

$$\left.\begin{aligned}\omega x&=c_1+\frac{ce^{-a\varphi}}{a^2+1}(\sin\varphi-\alpha\cos\varphi)+\frac{b}{a^2+1}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi+\frac{a}{4}\cos 2\varphi\right),\\ \omega y&=c_2-\frac{ce^{-a\varphi}}{a^2+1}(\cos\varphi+\alpha\sin\varphi)-\frac{b}{a^2+1}\left(\frac{a}{2}\varphi+\frac{1}{4}\cos 2\varphi-\frac{a}{4}\sin 2\varphi\right).\end{aligned}\right\} \tag{8.3.11}$$

Boshlang'ich shartlardan c, c_1, c_2 o'zgarmas sonlarni topamiz: $t = 0$ bo'lganda $\varphi = x = y = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{\varphi} = \omega$. Bu miqdorlarni (8.3.10) va (8.3.11) larga qo'yib,

$$c=\dot{x}_0-\frac{b}{a^2+1},\quad c_1=\frac{a}{(a^2+1)^2}\left[\dot{x}_0(a^2+1)-b\right]-\frac{ab}{4(a^2+1)},$$

$$c_1=\frac{1}{(a^2+1)^2}\left[\dot{x}_0(a^2+1)-b\right]+\frac{b}{4(a^2+1)}$$

larni hosil qilamiz.

Agar $\zeta = x + iy$ kompleks o'zgaruvchi kiritsak, u holda K nuqta harakati ushbu qonunga bo'ysunadi:

$$\zeta=\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3,$$

bu yerda

$$\zeta_1=\frac{b(1-ai)}{2(a^2+1)}t,\quad \zeta_2=\frac{\left(\dot{x}_0-\dfrac{b}{a^2+1}\right)(a+i)}{\omega(a^2+1)}\left[1-e^{(i\omega-b)t}\right],\quad \zeta_3=\frac{b(i-a)}{4\omega(a^2+1)}\left[1-e^{2i\omega t}\right].$$

Bu harakatning trayektoriyasini grafik usulda hosil qilish mumkin. Buning uchun ζ_1, ζ_2 va ζ_3 vektorlarni qo'shish kerak.

Shunday qilib, $h_1 = 0$ holatda (8.3.8) tenglamalarni integrallash shuni ko'rsatyaptiki, $\varphi_0 \neq 0$ bo'lmagan har qanday boshlang'ich shartlarda jism boshlang'ich holatidan istalgan uzoqlikka ketadi. Bu holda jismning harakati quyidagilardan iborat:

1) gorizontal yo'nalish bilan $\delta = -\operatorname{arctg}\dfrac{h}{\omega}$ burchak tashkil qiladigan to'g'ri chiziq bo'yicha o'zgarmas tezlikdagi siljishdan;

2) ω burchak tezlikli so'nuvchi aylanishdan;

3) 2ω burchak tezlik bilan aylanishdan.

Demak, $h_1 = 0$ holda muvozanat holat doimo noturg'un.

$h_1 \neq 0$ hol. Bu holda (8.3.8) tenglamalarning uchinchisidan φ burchakning o'zgarish qonunini topamiz:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega k^2}{h_1}\left(1 - e^{-\frac{h_1}{k^2}t}\right),$$

bu yerda φ_0, ω lar φ va $\dot{\varphi}$ ning boshlang'ich qiymatlari. $\lim_{t\to\infty}\varphi = \varphi_0 + \dfrac{\omega k^2}{h_1}$ bo'lganligi uchun φ har qanday qiymatga ega bo'lishi mumkin. Jism faqat $\varphi = 0$ bo'lgandagina turg'un muvozanat holatda bo'ladi. Demak, $h_1 \neq 0$ bo'lganda, $\varphi = 0$ muvozanat holati noturg'undir.

4- §. Nogolonom sistemalar muvozanat holatlari sirtining asimptotik turg'unligi haqidagi teorema

Nogolonom sistemalar muvozanat holatining turg'unligini O_m sirtdan yetarlicha kichik toyilishga nisbatan tadqiq etilgandagina ma'noga ega bo'lishini aniqlab oldik. $u_1, u_2, ..., u_m$ o'zgaruvchilarni vaqtincha parametrlar sifatida qarab, (8.2.18) sistemaning ikkinchi guruh tenglamalarini birinchi guruh tenglamalariga bog'lamasdan qarash tabiiydir. Bu yordamchi sistemaning xarakteristik tenglamasi (8.2.20) ifoda bilan aniqlanadi.

$u_1^0, ..., u_m^0$ parametrlarning biror G sohasida

$$\frac{dv_j}{dt} = b_{jk}(u_1^0, ..., u_m^0)v_k \tag{8.4.1}$$

tenglamalar sistemasining $v_1 = v_2 = ... = v_{2(n-m)} = 0$ muvozanat holati asimptotik turg'un bo'lsin, ya'ni

$$\|v\| < M\|v^0\|e^{-\sigma t}, \tag{8.4.2}$$

bu yerda $\sigma > 0, 0 < M < \infty$, v_j^0 esa v_j o'zgaruvchilarning boshlang'ich qiymatlari. U vaqtda nogolonom sistema muvozanat holatlari sirtining

asimptotik turg'unligi to'g'risidagi Y.I. Neymark va N.A. Fufayevning quyidagi teoremasi o'rinli bo'ladi [71].

Teorema. *$u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0, v_1^0, v_2^0, \ldots, v_{2(n-m)}^0$ boshlang'ich qiymatlar shunday tanlab olingan bo'lsinki, $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0$ miqdorlar (8.4.1) tenglamalarning G asimptotik turg'unlik sohasining ichida yotsin, $v_1^0, v_2^0, \ldots, v_{2(n-m)}^0$ qiymatlar yetarlicha kichik bo'lsin. U vaqtda nogolonom sistemaning*

$$\frac{du_i}{dt} = G_i(u, v), \qquad \frac{dv_j}{dt} = H_j(u, v) \tag{8.4.3}$$

harakat tenglamalariga asosan

$$\lim_{t\to\infty} v_j(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} u_i(t) = u_i^*$$

limitik munosabatlar bajariladi, bu yerda $u_i^* \in O_m$, ammo, umuman aytganda, $u_i^* \neq u_i^0$. Shu bilan birga $v_j(t)$ o'zgaruvchilar uchun

$$\|v(t)\| < M' \|v^0\| e^{-\sigma' t} \tag{8.4.4}$$

baholash o'rinli bo'ladi, bu yerda $0 < \sigma' < \sigma$, $0 < M' < +\infty$.

Isbot. (8.4.3) tenglamalarni faqat

$$\|u - u^0\| < \delta, \ \|v\| < \delta(\varepsilon) \tag{8.4.5}$$

tengsizliklar (δ – yetarlicha kichik son) va $|\Delta a_{ij}| < \varepsilon$ bajarilganda,

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \{a_{ij}(u_1, \ldots u_m) + \Delta a_{ij}\} v_j, \\ \frac{dv_j}{dt} &= \{b_{jk}(u_1, \ldots u_m) + \Delta b_{jk}\} v_k \end{aligned}\right\} \tag{8.4.6}$$

ko'rinishda yozamiz. Agar (8.4.5) munosabatlar $\delta \le \delta^*$ uchun bajarilsa, u vaqtda (8.4.6) tenglamalarning yechimi uchun

$$\|v(t)\| < M' \|v^0\| e^{-\sigma t} \tag{8.4.7}$$

ko'rinishdagi baholashni ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham, [67] ga asosan (8.4.1) tenglamalar sistemasi uchun shunday aniq-musbat ishorali $v = c_{kj} v_k v_j$ kvadratik forma mavjud bo'ladiki,

$$\alpha \|v\|^2 < v < \beta \|v\|^2 \qquad (\alpha, \beta > 0) \tag{8.4.8}$$

munosabat bajariladi va bunda b_{jk} ning har qanday yetarlicha kichik o'zgarishlari uchun quyidagi tengsizlik o'rinlidir:

$$\frac{dv}{dt} < -\gamma\|v\|^2 < -\frac{\gamma}{\alpha}v\,. \tag{8.4.9}$$

(8.4.8) va (8.4.9) lardan quyidagini hosil qilamiz:

$$v < (v)_{t=0}e^{-\frac{\gamma}{\alpha}t}$$

va, demak,

$$\alpha\|v\|^2 < \beta\|v_0\|^2 e^{-\frac{\gamma}{\alpha}t} \quad \text{ёки} \quad \|v\| < \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\|v_0\|e^{-\frac{\gamma}{2\alpha}t}.$$

Shunday qilib, (8.4.7) kabi baholash to'g'ridir. (8.4.7) tengsizlikdan

$$\|\dot{u}\| < N\|v_0\|e^{-\sigma t}$$

munosabat kelib chiqadi, shuning uchun

$$\|u(t) - u_0\| < \frac{N}{\sigma}\|v_0\|. \tag{8.4.10}$$

Dastlabki paytda (8.4.5) shart $\left(\delta = \frac{\delta^*}{2}\right)$ va quyidagi tengsizlik

$$\|v_0\| < \min\left(\frac{\delta^*}{2M}, \frac{\delta^*\sigma}{2N}, \frac{\delta^*}{2}\right) \tag{8.4.11}$$

bajarilsin. Yechim vaqtga nisbatan tekis uzluksiz bo'lganligi uchun (8.4.5) shart $\delta = \delta^*$ uchun qandaydir $\Delta t_0 > \tau > 0$ oraliqda bajariladi. Shu Δt_0 vaqt oralig'ida (8.4.7) va (8.4.8) baholashlar o'rinli bo'ladi. (8.4.7), (8.4.10) va (8.4.11) larga asosan $V(t_0)$ miqdor (8.4.5) tengsizlikni $\delta = \frac{\delta^*}{2}$ uchun qanoatlantiradi. Bu mulohazani davom ettirib, shunday xulosaga kelamiz; bu tengsizliklar $\Delta t_0 + \Delta t_1 + \ldots + \Delta t_S > (S+1)\tau$ vaqt oralig'ida, ya'ni hamma t lar uchun ham bajariladi va teorema shu bilan isbot bo'ladi.

5- §. Doimo ta'sir etuvchi kichik kuchlarga (toydiruvchilarga) nisbatan turg'unlik

Nogolonom sistema muvozanat holatlari sirti O_m asimptotik turg'un bo'lsin. Sistemaga kichik miqdordagi toydiruvchi kuchlar doimo ta'sir etganda, O_m sirtning asimptotik turg'unligi saqlanadimi yoki u noturg'un bo'ladimi? – degan savolga quyidagi teorema javob beradi [71].

Teorema. *Muvozanat holatlar asimptotik turg'unlik sohasi G da istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ ko'rsatish mumkinki, δ dan kichik har qanday doimo ta'sir etuvchi kuchlarning u komponenti G sohada turg'uncha fazaviy nuqta muvozanat holatlari to'plamining ε-atrofidan tashqariga chiqmaydi va hamma vaqt shunday doimiy ta'sir etuvchi istalgancha kichik kuchlar topiladiki, fazaviy nuqta muvozanat holatlari sirti bo'ylab G sohada har qanday oldindan berilgan egri chiziq bo'yicha siljiydi.*

Bu teoremadan ushbu fikr kelib chiqadi.

Agar muvozanat holatlari to'plami bog'lamli tarmog'i hamma nuqtalari asimptotik turg'un bo'lsa, u holda doimo ta'sir etuvchi yetarlicha kichik toydiruvchi kuchlarga nisbatan u turg'un, agar bu bog'lamli tarmoqda noturg'un nuqtalar mavjud bo'lsa, u noturg'un bo'ladi.

Isbot. Doimiy ta'sir etuvchi toydiruvchi kuchlar mavjudligida harakat tenglamasi O_m sirt atrofida quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= a_{ij}(u_1,\ldots,u_m)v_j + O(\|v\|^2) + \omega_i(t), \\ \frac{dv_j}{dt} &= b_{jk}(u_1,\ldots,u_m)v_k + O(\|v\|^2) + \delta_j(t). \end{aligned} \tag{8.5.1}$$

Teoremaning birinchi tasdig'ini isbotlash uchun Lyapunov funksiyasidan foydalanamiz. Bu funksiyani (8.5.1) tenglamalar sistemasining ikkinchi guruh tenglamalari uchun tuzamiz, bu yerda $u_1,\ldots,u_m$ lar parametr sifatida qaraladi. Asimptotik turg'unlik sohasi G da koeffitsiyentlari $u_1,\ldots,u_m$ larga bog'liq shunday musbat kvadratik forma v mavjudki, ba'zi $0 < \alpha < \beta < +\infty$ lar uchun

$$\alpha\|v\|^2 < v < \beta\|v\|^2$$

tengsizlik bajariladi va (8.4.1) ga asosan

$$\frac{dv}{dt} = -\|v\|^2, \quad \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial v}{\partial u_k}\right| < a\|v\|^2 \quad (a < +\infty).$$

$v_1 = v_2 = \ldots = v_{2(n-m)} = 0$ bo'lganda, ya'ni muvozanat holatlari sirtida $V=0$ va (8.5.1) tenglamalar sistemasiga asosan

$$\frac{dv}{dt} \le -\|v\|^2 + A\|v\|^3 + B\delta\|v\| \qquad (8.5.2)$$

bo‘ladi, bu yerda A va B – ba’zi o‘zgarmas sonlar va $\delta = \sup\{|\omega_i(t)|, |\delta_j(t)|\}$. Agar $2B\delta < \|v\| < \frac{1}{2A}$ bo‘lsa, (8.5.2) munosabatdan

$$\frac{dv}{dt} < 0$$

kelib chiqadi. Demak, δ ning yetarlicha kichik qiymatlarida harakati (8.5.1) tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadigan $(u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_{2(n-m)})$ fazaviy nuqta $u_1, ..., u_m$ o‘zgaruvchilar G asimptotik turg‘unlik sohasining elementi bo‘lib turgan paytda muvozanat holatlari sirtining $2\delta B$ radiusli atrofidan chiqmaydi. Bu tasdiq teorema birinchi qismining isbotidir.

Teoremaning ikkinchi qismini isbot qilish uchun quyidagini aniqlash kerak: har qanday kichik toydiruvchi kuchlar uchun u_1 miqdor har doim o‘sishini va qolgan $u_2, u_3, ..., u_m$ o‘zgaruvchilarning qiymati o‘zgarmasdan qolishini isbotlash kerak. $\delta_j(t) = 0$, $(j = \overline{1,2(n-m)})$, $\dot{U}_i = 0$, $(i = \overline{2,m})$ ва $\dot{U}_1 = \omega_1 > 0$ bo‘lsin. U holda (8.5.1) sistemaning ikkinchi guruh tenglamalaridan

$$\|v\| < M\|v^0\|e^{-\sigma t}$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi va birinchi m ta tenglamalardan talab etiladigan $\omega_1(t)$ va $\omega_j(t)$ toydiruvchilarni topamiz:

$$\omega_1(t) = \omega_1 - a_{1j}V_j - O(\|V\|^2),\ \omega_j(t) = -a_{jk}V_k - O(\|V\|^2)\ .$$

6-§. Kerkgoven – Vitgof masalasi [71]

Bu masalani Uitteker o‘zining «Analiticheskaya dinamika» kitobida quyidagi holda ko‘rgan: yarim sfera ko‘rinishidagi og‘ir bir jinsli jism o‘zining qavariq tomoni bilan pastga qaratilgan holda g‘adir-budurli gorizontal tekislikda muvozanatda turibdi. Bu yarim sferaning yuqori tekisligiga ikkinchi yarim sfera qo‘yilgan. Ikkinchi yarim sferaning birinchi yarim sferaning yuqori tekisligi bilan uringan nuqtasi birinchi yarim sferaning markaziga mos keladi. Masala quyidagicha qo‘yiladi: kichik tebranishlarni va sistemaning muvozanat holati atrofidagi turg‘unlik shartlarini aniqlash.

Harakat tenglamalarini muvozanat holati (yakkalangan muvozanat holat deb qaralgan) atrofida chiziqlashtirib, Uitteker sistemaning konservativ turg'unlik shartini quyidagi tengsizlik sifatida topadi:

$$9Rm < 40R_1m_1, \qquad (8.6.1)$$

bu yerda R va m lar quyi yarim sferaning radiusi va massasi, R_1, m_1 lar yuqori yarim sferaning radiusi va massasi. Quyida ushbu masalani nogolonom sistemalar muvozanat holatining turg'unlik nazariyasi nuqtai nazaridan qarab chiqamiz. Bu yerda, qisman, quyidagilar ko'rsatiladi:

1) ko'rilayotgan sistema olti o'lchovli muvozanat holatlari sirtiga ega;

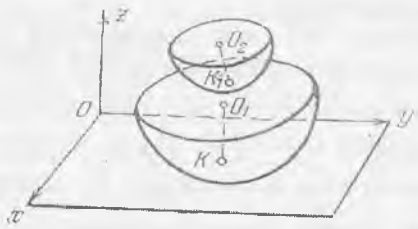
2) energiyaning dissipatsiya bo'lishini hisobga olmaganda, xarakteristik tenglamaning nolga teng bo'lgan ildizlari soni muvozanat holatlari sirtining o'lchovidan ikki birlikka katta bo'ladi.

Shunday qilib, yuqorida ifodalangan ikki yarim shardan iborat sistemani ko'rib o'tamiz. Uchta koordinata sistemasini kiritamiz (8.5- shakl):

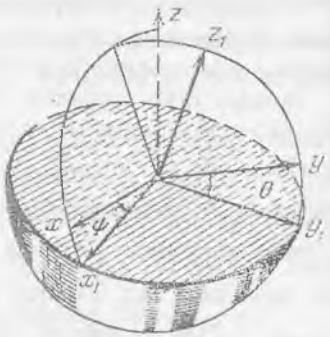
$Oxyz$ – qo'zg'almas $\sum$ sistemasi, z=0 tekisligi quyi yarim sfera dumalanadigan notekis gorizontal tekislikka mos keladi; $O_1x_1y_1z_1$ –koordinata boshi quyi yarim sferaning markazi bilan mos keladigan $\sum_1$ sistema. Bu sistemaning O_1z_1 o'qi quyi yarim sferaning diametral tekisligiga perpendikular bo'lib yo'nalgan, O_1x_1 o'qi bo'lsa, xOz tekisligiga parallel bo'lgan vertikal tekislikda yotadi; $O_2x_2y_2z_2$ – $\sum_1$ sistemaga o'xshash ammo, yuqori yarim sferaga ta'lluqli qo'zg'aluvchi $\sum_2$ sistema. Yarim sharlar konfiguratsiyasini o'nta umumlashgan koordinata aniqlaydi (8.6-shakl): x, y – yarim sfera gorizontal tekislik bilan uringan K nuqtaning koordinatalari; θ, φ – $\sum_1$ o'qlarining holatini belgilovchi Rezal burchaklari (8.6-shaklga qarang); φ–quyi yarim sharning O_1z_1 o'qi atrofidagi aylanish burchagi; x_1, y_1 – yarim sharlar uringan K_1 nuqtaning koordinatalari (8.5-shaklga qarang); θ_1, ψ_1 – $\sum_2$ o'qlarining holatini $\sum$ sistemaga nisbatan belgilovchi Rezal burchaklari; φ_1 – yuqori yarim sharlarning O_2z_2 o'qi atrofida aylanish burchagi. $\sum$, $\sum_1$ va $\sum_2$ koordinata sistemalari orasidagi burchaklar kosinuslari quyidagi jadvallar bilan aniqlanadi:

8.2-jadval

	x_1	y_1	z_1		x_2	y_2	z_2
x	$\cos\psi$	$\sin\theta\ \sin\psi$	$\cos\theta\ \sin\psi$	x	$\cos\psi_1$	$\sin\theta_1 \sin\psi_1$	$\cos\theta_1 \sin\psi_1$
y	0	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	y	0	$\cos\theta_1$	$-\sin\theta_1$
z	$-\sin\psi$	$\sin\theta\cos\psi$	$\cos\theta\cos\psi$	z	$-\sin\psi_1$	$\sin\theta_1\cos\psi_1$	$\cos\theta_1\cos\psi_1$



8.5- shakl.



8.6- shakl.

8.3-jadval

	x_1	y_1	z_1
x_1	$\cos(\psi_1 - \psi)$	$\sin\theta_1 \sin(\psi_1 - \psi)$	$\cos\ \theta_1 \sin(\psi_1 - \psi)$
y_1	$-\sin\theta\ \sin(\psi_1 - \psi)$	$\sin\theta\ \sin\theta_1 \cos(\psi_1 - \psi) +$ $+\cos\ \theta\cos\ \theta_1$	$\sin\theta\ \cos\theta_1 \cos(\psi_1 - \psi) -$ $-\cos\ \theta\sin\ \theta_1$
z_1	$-\cos\theta\sin(\psi_1 - \psi)$	$\cos\theta\ \sin\theta_1 \cos(\psi_1 - \psi) -$ $-\sin\ \theta\cos\ \theta_1$	$\cos\theta\ \cos\theta_1 \cos(\psi_1 - \psi) +$ $-\sin\ \theta\sin\ \theta_1$

Quyi yarim sferaning gorizontal tekislikdagi sirpanishsiz dumalanishining sharti

$$\bar{V}_{0_1} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{0_1 k} = 0 \qquad (8.6.2)$$

bo'ladi, bu yerda $\overline{V}_{0_1} - 0_1$ nuqtaning tezligi, $\overline{\omega}$ – quyi yarim sferaning oniy burchak tezligi. $\overline{V}_{0_1}$ va $\overline{\omega}$ vektorlarning $\sum$ sistemadagi komponentlarini topamiz;

$$\overline{V}_{0_1}\{\dot{x}, \dot{y}, 0\}_{\sum}, \qquad \overline{r}_{0_1 k}\{0,0,-R\}_{\sum},$$

$$\overline{\omega}\left\{\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\cos\theta\sin\psi, \dot{\psi} - \dot{\varphi}\sin\theta, \dot{\varphi}\cos\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\varphi\right\}_{\sum}.$$

Bu ifodalarni (8.6.2)ga qo'yib, quyi yarim sferaning gorizontal tekislikda sirpanishsiz dumalanish shartini ifodalaydigan nogolonom bog'lanishlarni topamiz:

$$\dot{x} - R\dot{\psi} + R\dot{\varphi}\sin\theta = 0, \quad \dot{y} + R\dot{\theta}\cos\psi + R\dot{\varphi}\cos\theta\sin\psi = 0. \qquad (8.6.3)$$

Yuqori yarim sferaning quyi yarim sfera diametral tekisligi bo'yicha sirpanmasdan dumalanish sharti

$$\overline{V}_{0_2} + \overline{\omega}_1 \times \overline{r}_{0_2 k} = \overline{V}_{0_1} + \overline{\omega} \times \overline{r}_{0_1 k_1} \qquad (8.6.4)$$

ifoda bilan aniqlanadi, bu yerda $\overline{V}_{0_2} - O_2$ nuqtaning tezligi, ω_1–yuqori yarim sferaning oniy burchak tezligi. (8.6.4) munosabatga

$$\overline{V}_{0_2} = \overline{V}_{0_1} + \overline{r}_{0_1 0_2}, \overline{r}_{0_1 k_1} = \overline{r}_{0_1 0_2} + \overline{r}_{0_2 k_1}$$

ifodalarni qo'yib,

$$\overline{\dot{r}}_{0_1 0_2} + (\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}) \times \overline{r}_{0_1 0_2} - \omega\ \overline{r}_{0_1 0_2} = 0$$

ni yoki $\sum_1$ koordinata sistemasida

$$\tilde{\overline{r}}_{0_1 0_2} + (\overline{\omega'} - \overline{\omega}) \times \overline{r}_{0_1 0_2} + (\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}) \times \overline{r}_{0_1 k_1} = 0 \qquad (8.6.5)$$

hosil qilamiz, bu yerda $\tilde{\overline{r}}_{0_1 0_2}$ shu $r_{0_1 0_2}$ vektorning $\overline{\omega'}$ oniy burchak tezligi bilan aylanayotgan $\sum_1$ koordinata sistemasiga nisbatan hosilasi.

(8.6.5) formulaga

$$\tilde{\overline{r}}_{0_1 0_2}\{\dot{x}_1, \dot{y}_1, 0\}_{\sum_1}, \quad \overline{\omega}\left\{\dot{\theta}, \psi\cos\theta, \dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\right\}_{\sum_1}, \quad (\overline{\omega'} - \overline{\omega})\{0_1, 0, -\dot{\varphi}\}_{\sum_1},$$

$$\begin{aligned}
&(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega})\{\dot{\theta}\cos(\psi_1 - \psi) + \dot{\varphi}\cos\theta_1\sin(\psi_1 - \psi) - \dot{\theta},\\
&- \dot{\theta}_1\sin\theta\sin(\psi_1 - \psi) + \psi_1\cos\theta +\\
&+ \dot{\varphi}_1[\sin\theta\cos\theta_1\cos(\psi_1 - \psi - \cos\theta\sin\theta_1] - \dot{\psi}\cos\theta, \qquad (8.6.6)\\
&- \dot{\theta}_1\cos\theta\sin(\psi_1 - \psi) - \psi_1\sin\theta +\\
&+ \dot{\varphi}_1[\cos\theta\cos\theta_1\cos(\psi_1 - \psi) + \sin\theta\sin\theta_1] - \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\}_{\sum_1}
\end{aligned}$$

ifodalarni qo'yib, yuqori yarim sferaning quyi yarim sfera diametral tekisligi bo'yicha sirpanmay dumalashini ifodalovchi yana ikkita nogolonom bog'lanishlar tenglamalarini hosil qilamiz:

$$\dot{x}_1 + y_1\dot{\varphi} + R_1\dot{\psi}\cos\theta + R_1\dot{\theta}_1\sin\theta\sin(\psi_1-\psi) - R_1\psi_1\cos\theta -$$
$$- R_1\dot{\varphi}_1[\sin\theta\cos\theta_1\cos(\psi_1-\psi) - \cos\theta\sin\theta_1] = 0, \qquad (8.6.7)$$
$$\dot{y}_1 - x_1\dot{\varphi} - R_1\dot{\theta} + R_1\dot{\theta}\cos(\psi_1-\psi) + R_1\dot{\varphi}_1\cos\theta_1\sin(\psi_1-\psi) = 0.$$

Lagranj funksiyasining ifodasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + m\ell[\dot{x}(\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta - \dot{\psi}\cos\varphi\cos\theta) +$$
$$+ \dot{y}\dot{\theta}\cos\theta] + \frac{1}{2}(A+m\ell^2)(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\cos^2\theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\sin\theta)^2 +$$
$$+ \frac{m_1}{2}(V_x^2+V_y^2+V_z^2) + \frac{1}{2}A_1(\dot{\theta}_1^2+\dot{\psi}_1^2\cos^2\theta_1) +$$
$$+ \frac{1}{2}C_1(\dot{\varphi}_1-\dot{\psi}_1\sin\theta_1)^2 + mg\ell\cos\theta\cos\psi + m_1g(x_1\sin\psi -$$
$$- y_1\sin\theta\cos\psi - R_1\cos\theta\cos\psi + \ell_1\cos\theta_1\cos\psi_1).$$

Bu yerda m va m_1 – mos ravishda quyi va yuqori yarim sferalarning massasi, C, C_1 – aylanish o'qlari bo'yicha inertsiya momentlari, ℓ, ℓ_1 – massa markazlaridan yarim sferalardan har bir ekvatorial tekisliklarigacha bo'lgan masofa, R, R_1 – sferik sirtlarning radiuslari,

$$V_x = \dot{x} + \dot{x}_1\cos\psi + \dot{y}_1\sin\theta\sin\psi + \dot{\psi}(-x_1\sin\psi + y_1\sin\theta\cos\psi +$$
$$+ R_1\cos\theta\cos\psi) + \dot{\theta}(y_1\cos\theta\sin\psi - R_1\sin\theta\sin\psi) +$$
$$+ \ell_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\sin\psi_1 - \ell_1\dot{\psi}_1\cos\theta_1\cos\psi_1,$$
$$V_y = \dot{y} + \dot{y}_1\cos\theta - \dot{\theta}(y_1\sin\theta + R_1\cos\theta) + \ell_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1,$$
$$V_z = -\dot{x}_1\sin\psi + \dot{y}_1\sin\theta\cos\psi - \dot{\psi}(x_1\cos\psi + y_1\sin\theta\sin\psi +$$
$$+ R_1\cos\theta\sin\psi) + \dot{\theta}(y_1\cos\theta\cos\psi - R_1\sin\theta\cos\psi) +$$
$$+ \ell_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\cos\psi_1 + \ell_1\dot{\psi}_1\cos\theta_1\sin\psi_1.$$

Dissipatsiya funksiyasini quyidagi ko'rinishda kiritamiz:

$$F = \frac{1}{2}[h(\omega_x^2+\omega_y^2+\tilde{\omega}_{x_1}^2+\tilde{\omega}_{y_1}^2) + h_1(\omega_z^2+\tilde{\omega}_{z_1}^2)],$$

bu yerda h, h_1 – dumalanish va aylanishlar bo'yicha dempfer koeffitsiyentlari, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ lar $\bar{\omega}$ vektorning Σ koordinata sistemasi o'qlariga

nisbatan proeksiyalari, $\tilde{\omega}_{x_1}, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z - \overline{\omega}_1$ lar $\overline{\omega}$ vektorning $\sum_1$ koordinata sistemasi o'qlariga nisbatan proeksiyalari. Bu proeksiyalarni umumlashgan koordinata va tezliklar bilan ifodalab hamda (8.6.3), (8.6.6) va (8.6.7) formulalardan foydalanib F ning

$$F = \frac{1}{2}\frac{h}{R^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\frac{h}{R_1^2}[(\dot{x}_1 + y_1\dot{\varphi})^2 + (\dot{y}_1 - x_1\dot{\varphi})^2] +$$

$$+ \frac{1}{2}h_1(\dot{\varphi}\cos\psi\cos\theta - \dot{\theta}\sin\psi)^2 + \frac{1}{2}h_1\{\dot{\theta}_1\cos\theta\sin(\psi_1 - \psi) + \tag{8.6.8}$$

$$+ \dot{\psi}_1\sin\theta - \dot{\varphi}_1[\cos\theta\cos\theta_1\cos(\psi_1 - \psi) + \sin\theta\sin\theta_1] + \dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\}^2$$

ifodasini topamiz.

Aniqmas ko'paytuvchili harakat tenglamalarini yozamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \lambda_i a_{ik} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k = \overline{1,10}), \tag{8.6.9}$$

bu yerda

$$q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = x_1, q_4 = y_1,\ q_5 = \theta,$$
$$q_6 = \psi,\ q_7 = \varphi,\ q_8 = \theta_1, q_9 = \psi_1,\ q_{10} = \varphi_1.$$

(8.6.9) tenglamalardan aniqmas λ_i ko'paytuvchilarni chiqarib tashlab va

$$\varepsilon_q \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}$$

almashtirishni kiritib, hosil qilingan harakat tenglamalarini ushbu ko'rinishda yozamiz:

$$\varepsilon_\theta - \varepsilon_y R\cos\psi + \varepsilon_{y_1} R_1 + (m\ell\sin\theta + m_1 y_1\cos\theta)g\cos\psi = 0,$$

$$\varepsilon_\psi + \varepsilon_x R - \varepsilon_{x_1} R_1\cos\theta + [m\ell\cos\theta\sin\psi - m_1(x_1\cos\psi + y_1\sin\theta\sin\psi)]g = 0$$

$$\varepsilon_{\theta_1} - \varepsilon_{x_1} R_1\sin\theta\sin(\psi_1 - \psi) - \varepsilon_{y_1} R_1\cos(\psi_1 - \psi) + (\ell_1\sin\theta_1 - R_1\sin\theta)m_1 g\cos\psi_1 = 0,$$

$$\varepsilon_{\psi_1} + \varepsilon_{x_1} R_1\cos\theta + (\ell_1\cos\theta_1\sin\psi_1 - R_1\cos\theta\sin\psi)m_1 g = 0,$$

$$\varepsilon_\varphi - \varepsilon_x R\sin\theta - \varepsilon_y R\cos\theta\sin\psi - y_1\varepsilon_{x_1} + x_1\varepsilon_{y_1} + (y_1\sin\psi + x_1\sin\theta\cos\psi)m_1 g = 0,$$

$$\varepsilon_{\varphi_1} + \varepsilon_{x_1} R_1[\sin\theta\cos\theta_1\cos(\psi_1 - \psi) - \cos\theta\ \sin\ \theta_1] -$$

$$- \varepsilon_{y_1} R_1\cos\theta_1\sin(\psi_1 - \psi) - (\sin\theta\cos\theta_1\sin\psi_1 - \cos\theta\sin\theta_1\sin\psi)m_1 g R = 0 = 0. \tag{8.6.10}$$

(8.6.10) sistemadagi keyingi ikkita tenglamani yangi tenglamalar bilan almashtiramiz. Yangi tenglamalar shu ikkita tenglama bilan (8.6.10) ning qolgan tenglamalari kombinatsiyasidan iborat. Buning uchun (8.6.10) sistemaning birinchi tenglamasini $\cos\theta \sin\psi$ ga, ikkinchisini $-\sin\theta\cos\psi$ ga va oxirgidan oldingisini $\cos\psi$ ga ko'paytiramiz va hosil bo'lgan ifodalarni qo'shamiz. Xuddi shu tarzda (8.6.10) ning uchinchi tenglamasini $\cos\theta_1 \sin\psi_1$ ga, to'rtinchisini $\sin\theta_1 \cos\psi_1$ ga, oxirgisini $\cos\psi_1$ ga ko'paytiramiz va hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shamiz. Natijada quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$-\varepsilon_\theta^o \cos\theta \sin\psi + \varepsilon_\psi^o \sin\theta \cos\psi + \varepsilon_\varphi^o \cos\psi = 0,$$

$$-\varepsilon_{\theta_1}^o \cos\theta_1 \sin\psi_1 + \varepsilon_{\psi_1}^o \sin\theta_1 \cos\psi_1 + \varepsilon_{\varphi_1}^o \cos\psi_1 = 0,$$

bu yerda

$$\varepsilon_\theta^o = \varepsilon_\theta - \varepsilon_y R\cos\psi + \varepsilon_{y_1} R_1,\ \varepsilon_\psi^o = \varepsilon_\psi + \varepsilon_x R - \varepsilon_{x_1} R_1 \cos\theta,$$

$$\varepsilon_{\theta_1}^o = \varepsilon_{\theta_1} - \varepsilon_{x_1} R_1 \sin\theta \sin(\psi_1 - \psi) - \varepsilon_{y_1} R_1 \cos(\psi_1 - \psi),$$

$$\varepsilon_{\psi_1}^o = \varepsilon_{\psi_1} + \varepsilon_{x_1} R_1 \cos\theta,$$

$$\varepsilon_\varphi^o = \varepsilon_\varphi - \varepsilon_x R\sin\theta - \varepsilon_y R\cos\theta\sin\psi - y_1 \varepsilon_{x_1} + x_1 \varepsilon_{y_1},$$

$$\varepsilon_{\varphi_1}^o = \varepsilon_\varphi + \varepsilon_{x_1} R_1 [\sin\theta\cos\theta_1\cos(\psi_1 - \psi) - \cos\theta \sin\theta_1] -$$

$$- \varepsilon_{y_1} R_1 \cos\theta_1 \sin(\psi_1 - \psi).$$

Shunday qilib, qaralayotgan sistemaning harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_\theta^o + (m\ell\sin\theta + m_1 y_1 \cos\theta) g\cos\psi = 0,\\
&\varepsilon_\psi^o + [m\ell\cos\theta\sin\psi - m_1(x_1\cos\psi + y_1\sin\theta\sin\psi)] g = 0,\\
&\varepsilon_{\theta_1}^o + (\ell_1\sin\theta_1 - R_1\sin\theta) m_1 g\cos\psi_1 = 0,\\
&\varepsilon_{\psi_1}^o + (\ell_1\cos\theta_1\sin\psi_1 - R_1\cos\theta\sin\psi) m_1 g = 0,\\
&-\varepsilon_\theta^o\cos\theta\sin\psi + \varepsilon_\psi^o\sin\theta\cos\psi + \varepsilon_\varphi^o\cos\psi = 0,\\
&-\varepsilon_{\theta_1}^o\cos\theta_1\sin\psi_1 + \varepsilon_{\psi_1}^o\sin\theta_1\cos\psi_1 + \varepsilon_{\varphi_1}^o\cos\psi_1 = 0,\\
&\dot{x} - R\dot{\psi} + R\dot{\varphi}\sin\theta = 0,\\
&\dot{y} + R\dot{\theta}\cos\dot{\psi} + R\dot{\varphi}\cos\theta\sin\psi = 0,\\
&\dot{x}_1 + y_1\dot{\varphi} + R_1\dot{\psi}\cos\theta + R_1\dot{\theta}_1\sin\theta\sin(\psi_1 - \psi) - R_1\dot{\psi}_1\cos\theta -\\
&- R_1\dot{\varphi}_1[\sin\theta\cos\theta_1\cos(\psi_1 - \psi) - \cos\theta\sin\theta_1] = 0.\\
&y_1 - x_1\dot{\varphi} - R_1\dot{\theta} + R_1\dot{\theta}_1\cos(\psi_1 - \psi) + R_1\dot{\varphi}_1\cos\theta_1\sin(\psi_1 - \psi) = 0.
\end{aligned} \tag{8.6.11}$$

Bu tenglamalar o‘nta $x, y, x_1, y_1, \theta, \psi, \theta_1, \psi_1, \varphi, \varphi_1$ miqdorni vaqt funksiyasi sifatida aniqlashga imkoniyat yaratadigan to‘liq sistemadir. (8.6.11) tenglamalarda barcha vaqt bo‘yicha olingan hosilalarni nolga tenglashtirib, muvozanat holatlarini aniqlaydigan va bir-biriga bog‘lanmagan to‘rtta tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\left.\begin{aligned} & m\ell\sin\theta + m_1 y_1 \cos\theta = 0, \\ & m\ell\cos\theta\sin\psi - m_1 (x_1 \cos\psi + y_1 \sin\theta \sin\psi) = 0, \\ & \ell_1 \sin\theta_1 - R_1 \sin\theta = 0, \\ & \ell_1 \cos\theta_1 \sin\psi_1 - R_1 \cos\theta \sin\psi = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.6.12)$$

Bu tenglamalardan ko‘rinib turibdiki, qaralayotgan sistemaning o‘n olti o‘lchovli fazaviy fazosida muvozanat holatlari olti o‘lchamli sirtni tashkil qiladi.

Muvozanat holatlari sirti O_6 ning turg‘unlik shartlarini aniqlash uchun sistemaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz. Hisoblashni qisqartirish uchun $x, y, x_1, y_1, \varphi, \varphi_1, h, h_1$ larni yetarlicha kichik miqdorlar deb hisoblab, O_6 sirt $x = y = x_1 = y_1 = \varphi = \varphi_1 = 0$ nuqtasining kichik atrofini qarab, shu atrofida (8.6.11) harakat tenglamalarini chiziqlashtiramiz. Chiziqlashtirish paytida tenglama koeffitsiyentlarining ifodasidagi kichik miqdorlar ko‘paytmasini tashlab ketamiz. Umumlashgan koordinatalarni muvozanat holatidagi miqdorlaridan toyilganini shtrix bilan belgilab, chiziqlashtirilgan harakat tenglamalarini yozamiz:

$$a_0 \ddot{x}' + \frac{h}{R}\dot{x}' + m_1 R \ddot{x}_1' - \frac{h}{R_1}\dot{x}_1' - m_1 g x_1' + a_1 \ddot{\psi}' - m g \ell \psi' - m_1 \ell_1 R \ddot{\psi}_1' - C\theta\ddot{\varphi}' = 0,$$

$$-a_0 \ddot{y}' - \frac{h}{R}\dot{y}' - m_1 R \ddot{y}_1' + \frac{h}{R_1}\dot{y}_1' + m_1 g y_1' + a_1 \ddot{\theta}' + m g \ell \theta' - m_1 \ell_1 R \ddot{\theta}_1' = 0,$$

$$a_2 \ddot{x}' + a_2 \ddot{x}_1' + \frac{h}{R_1}\dot{x}_1' + a_2 R_1 \ddot{\psi}' - g m_1 R_1 \psi' + a_3 \ddot{\psi}_1' + g m_1 \ell_1 \psi_1' - C_1 \theta_1 \ddot{\varphi}_1' = 0,$$

$$-a_2 \ddot{y}' - a_2 \ddot{y}_1' - \frac{h}{R_1}\dot{y}_1' + a_2 R_1 \ddot{\theta}' - g m_1 R_1 \theta' + a_3 \ddot{\theta}_1' + g m_1 \ell_1 \theta_1' = 0,$$

$$-m_1 y_1 \ddot{x}_1' + m_1 x_1 \ddot{y}_1' + (a_4 - C)\theta\ddot{\psi}' + m_1 \ell_1 y_1 \ddot{\psi}_1' - a_4 \psi \ddot{\theta}' +$$

$$+ m_1 \ell_1 x_1 \ddot{\theta}_1' + C\ddot{\varphi}' + 2h_1 \dot{\varphi}' - h_1 \varphi_1' = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} & (A - C)\theta_1 \ddot{\psi}_1' - A_1 \psi \ddot{\theta}_1' - h_1 \dot{\varphi}' + C_1 \ddot{\varphi}_1' + h_1 \dot{\varphi}_1' = 0, \\ & \dot{x}' - R\dot{\psi}' + R\theta\dot{\varphi}' = 0, \\ & \dot{y}' + R\dot{\theta}' + R\psi\dot{\varphi}' = 0, \\ & \dot{x}_1' + y_1 \dot{\varphi}' + R_1 \dot{\psi}' - R_1 \psi_1' + R_1 (\theta_1 - \theta)\dot{\varphi}_1' = 0, \\ & \dot{y}_1' - x_1 \dot{\varphi}' - R_1 \dot{\theta}' + R_1 \dot{\theta}_1' + R_1 (\psi_1 - \psi)\dot{\varphi}_1' = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (8.6.13)$$

bu yerda

$$a_0 = m(R-\ell) + m_1 R,\quad a_1 = A + m_1 R_1 R - m\ell(R-\ell),$$

$$a_2 = m_1(R_1 - \ell_1),\quad a_3 = A_1 + m_1 \ell_1 (R_1 - \ell_1),\quad a_4 = A + m\ell^2 + m\ell R_1$$

(8.6.3) tenglamalar sistemasiga $x^1 = x_0^1 e^{\lambda t}$, $x_1^1 = x_{10}^1 e^{pt}$, ..., $\varphi_1^1 = \varphi_{10}^1 e^{pt}$ yechimlarni qo'yib, xarakteristik tenglamaning quyidagi ko'rinishiga kelamiz:

$$\begin{vmatrix}
Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_5 & Q_6 & \cdots & -C\theta p^2 & \cdots \\
Q_3 & Q_4 & \cdots & Q_7 & Q_8 & \cdots & \cdots & -C_1\theta_1 p^2 \\
\cdots & \cdots & -Q_1 \; -Q_2 & \cdots & \cdots & Q_5 \; Q_6 & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & -Q_3 \; -Q_4 & \cdots & \cdots & Q_7 \; Q_8 & \cdots & \cdots \\
-m_1 y_1 p & \cdots & m_1 x_1 p & (a_1 - c)\theta p & m_1 \ell_1 x_1 p & -a_2 \psi p & m_1 \ell_1 x_1 p \; Cp + 2h_1 & -h_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & (A - C)\theta_1 p & \cdots & -A_1 \psi_1 p & -h_1 & C_1 p + h_1 \\
1 & \cdots & \cdots & -R & \cdots & \cdots & R\theta & \cdots \\
\cdots & 1 & \cdots & R_1 & -R_1 & \cdots & y_1 & R_1(\theta_1 - \theta) \\
\cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & R & R\psi & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & -R_1 \; R_1 & -y_1 & R_1(\psi_1 - \psi)
\end{vmatrix} = 0 \qquad (8.6.14)$$

Bu yerda quyidagi belgilashlar kiritilgan:

$$Q_1 = a_0 p^2 + \frac{h}{R} p, \qquad Q_2 = m_1 R p^2 - \frac{h}{R_1} p - m_1 g,$$

$$Q_3 = a_2 p^2, \qquad Q_4 = a_2 p^2 + \frac{h}{R_1} p, \qquad Q_5 = a_1 p^2 + mg\ell,$$

$$Q_6 = -m_1 \ell_1 R p^2, \qquad Q_7 = a_2 R_1 p^2 - g m_1 R_1, \qquad Q_8 = a_3 p^2 + g m_1 \ell.$$

(8.6.14) dan ko'rinib turibdiki, xarakteristik tenglama oltita nol ildizga ega. Buning sababi muvozanatlar holatining sirti O_6 olti o'lchovli ekanligidadir. (8.6.14) ning qolgan ildizlari O_6 sirtning turg'unligini aniqlaydilar. O_6 sirtning $x = y = \cdots = \varphi_1 = 0$ nuqtasining yetarlicha kichik atrofida bu tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\left[b_0 p^4 + b_1 p^2 + b_2 + hp(b_3 p^2 + b_4)\right]^2 \cdot \left[CC_1 p^2 + (C + 2C_1) h_1 p + h_1^2\right] = 0. \qquad (8.6.15)$$

Bu yerda b_i koeffitsiyentlar sistemaning fizik parametrlari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= BB_1 + m_1 A_1 R^2,\\
b_1 &= g\left[B_1(m\ell + m_1 R_1) + m_1\ell_1(B + m_1 R^2) + 2m_1^2 R R_1(R_1 - \ell_1)\right],\\
b_2 &= m_1 g^2\left[m\ell\ell_1 - m_1 R_1(R_1 - \ell_1)\right],\\
b_3 &= B + 2B_1 + m_1 R^2 + 2m_1 R(R_1 - \ell_1),\\
b_4 &= g\left[m\ell + m_1(2\ell_1 - R_1)\right],\\
B &= A + m(R - \ell)^2, \qquad B_1 = A_1 + m_1(R_1 - \ell_1)^2. .
\end{aligned}
\tag{8.6.16}
$$

Bu koeffitsiyentlar sistemaning umumlashgan koordinatalariga bog'liq emas. Agar (8.6.15) da $h = h_2 = 0$ deb olsak, u vaqtda E. Uitteker tadqiq etgan holga kelamiz. Bu holda xarakteristik tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$p^2(b_0 p^4 + b_1 p + b_2) = 0. \tag{8.6.17}$$

Bu tenglama qo'shimcha yana ikkita nolga teng bo'lgan ildizga ega va shuning uchun turg'unlik nazariyasining kritik holiga kelamiz. Agar p^2 ko'paytuvchini tashlab yuborsak, u holda hosil bo'ladigan

$$b_0 p^4 + b_1 p + b_2 = 0 \tag{8.6.18}$$

tenglama, Uitteker tenglamasi bilan mos keladi [114, 253- bet], bu yerda b_0, b_1, b_2 koeffitsiyentlar bir jinsli yarim sharlar uchun hisoblangan. (8.6.18) tenglamaga asosan ikkita bir jinsli yarim sharlar uchun konservativ turg'unlik sharti

$$b_2 > 0 \tag{8.6.19}$$

tengsizlikning bajarilishiga keltiriladi. (8.6.1) bilan (8.6.19) tengsizliklarni solishtirganimizda (8.6.19) ning ishorasi (8.6.1) ning ishorasiga qarama-qarshi ekanligini ko'ramiz. Uittekerning (8.6.1) munosabatidagi ishoraning teskari bo'lgani Y.I. Neymark va N.A. Fufayevning fikri bo'yicha tipografiyaning xatosi bo'lishi mumkin. Ammo (8.6.17) munosabatdagi ikkita nolga teng bo'lgan ildizni hisobga olmaslik umuman noto'g'ridir.

(8.6.15) munosabatda $h \neq 0$ va $h_1 \neq 0$ bo'lsin. Agar

$$
\left.
\begin{aligned}
CC_1 p^2 + (C + 2C_1) h_1 p + h_1^2 = 0,\\
b_0 p^4 + h b_3 p^3 + b_1 p^2 + h b_4 p + b_2 = 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{8.6.20}
$$

tenglamalar sistemasi barcha ildizlarining haqiqiy qismi manfiy ishorali bo'lsa, u vaqtda (8.6.15) ga asosan O_6 sirtning $x = y = \cdots \quad \cdots = \varphi_1 = 0$

muvozanat nuqtasi asimptotik turg'un bo'ladi. Buning uchun quyidagi tengsizliklarning bajarilishi zarurdir ((8.6.16) ga asosan doimo $b_0 > 0$):

$$h_1 > 0, \quad hb_3 > 0, \quad b_1 > 0, \quad hb_4 > 0, \quad \cdots$$
$$b_2 > 0, \quad b_1 b_3 b_4 - b_0 b_4^2 - b_2 b_3^2 > 0. \tag{8.6.21}$$

$R_1 > \ell_1$ bo'lganda (bir jinsli yarim shar uchun bu doimo bajariladi) $b_1 > 0$, $b_3 > 0$ bo'ladi. Bundan tashqari, $b_2 > 0$ dan $b_4 > 0$ kelib chiqadi.

Shuning uchun asimptotik turg'unlik sharti

$$h > 0, \qquad h_1 > 0, \qquad b_2 > 0,$$
$$b_1 b_3 b_4 - b_0 b_4^2 - b_2 b_3^2 > 0 \tag{8.6.22}$$

tengsizliklarning bajarilishiga keltiriladi. Keyingi tengsizlik $R \to \infty$ yoki $R \to 0$ va $m \to 0$ bo'lganida bajariladi. (8.6.22) shartlarning oxirgisi bajarilsa, u vaqtda qovushqoq ishqalanish kuchini ($h > 0$, $h_1 > 0$) kiritish konservativ turg'un sistemani asimptotik turg'un sistemaga aylantirish uchun yetarlidir.

7-§. Lagranj teoremasini nogolonom sistemalarga qo'llash

Y.I. Neymark va N.A. Fufayev 1965-yilda nogolonom sistemalar turg'unligini faqat muvozanat holatlarining O_m sirtiga nisbatan qo'yish mumkinligini isbotlab bergan edilar. Yakkalangan muvozanat holati atrofida nogolonom sistemaning turg'unligini tadqiq etish masalani nokorrekt qo'yilganini bildiradi, chunki nogolonom tizimlarda yakkalangan muvozanat holat mavjud emas [71,72].

Bu ilmiy natijaga V.V. Rumyansev va uning shogirdlari boshqacha qaraydilar [82,83]. Ularning fikricha, turg'unlik umumiy nazariyasi bo'yicha alohida olingan muvozanat holatining turg'unligini ham, (yakkalangan muvozanat holatlari bo'lmasa ham) muvozanat holatlari sirtining turg'unligini ham tadqiq etish mumkin. Muvozanat holatlari sirtining ayrim nuqtalari turg'un va boshqalari noturg'un bo'lishlari mumkin.

Demak, hozirgi paytda nogolonom sistemalar muvozanat holatlarini tadqiq etish masalasida bir-biridan farqli ikkita erkin fikr (g'oya) mavjud. Oldingi paragraflarda Y.I. Neymark va N.A. Fufayevning ilmiy natijalari bayon etilgan edi. Bu paragrafda V.V. Rumyansev maktabining ilmiy natijalari sharhlov tariqasida bayon etiladi.

Lagranj teoremasini va uning teskarisini nogolonom sistemalarga tatbiq qilish masalasini 1967-yilda, bizningcha, birinchi bo'lib V.V. Rumyansev qo'ydi [84]. U nogolonom sistemalar muvozanat holatining turg'unligi va noturg'unligining yetarli shartlarini topdi hamda dissipativ kuchlarning turg'unlikka ta'sirini o'rgandi [85].

$q_1,...,q_n$ umumlashgan koordinatalarga ega bo'lgan nogolonom mexanik sistemani ko'ramiz. Bu sistemaning $\dot{q}_1,...,\dot{q}_n$ umumlashgan tezliklari $n-\ell$ ta

$$\sum_{n=1}^{n} B_{\sigma n}(q)\,\dot{q}_n = 0 \qquad (\sigma = \overline{1, n-\ell}) \tag{8.7.1}$$

integrallanmaydigan kinematik bog'lanish bilan chegaralangan bo'lsin, bu yerda $\operatorname{rank}(B_{\sigma n}) = n-\ell$. Sistemaga potentsial kuchlardan tashqari

$$\sum_{n=1}^{n} Q_n(q,\dot{q})\cdot\dot{q}_n \le 0$$

xususiyatga ega $Q_n(q,\dot{q})$ dissipativ kuchlar ham ta'sir etsin. Xususan, dissipativ kuchlar $Q_n = -\partial F/\partial\dot{q}_n$ bo'lishi mumkin, bu yerda F Reley funksiyasi va u quyidagicha aniqlanadi:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} f_{n\nu}(q)\,\dot{q}_n\dot{q}_\nu \ge 0.$$

Agar (8.7.1) nogolonom bog'lanishlar tenglamalarini $n-\ell$ ta umumlashgan tezliklarga nisbatan echsak ($\operatorname{rank}(B_{\sigma n}) = n-\ell$ bo'lgani uchun buni amalga oshirish mumkin), u holda bu tenglama (8.7.1) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\dot{q}_k = \sum_{r=1}^{\ell} b_{\eta r}(q)\,\dot{q}_r \qquad (\eta = \ell+1,....n). \tag{8.7.2}$$

Nogolonom sistemaning harakat tenglamalarini Vorones tenglamalari ko'rinishida yozamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}_r} = \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_r} + \sum_{\eta=\ell+1}^{n}\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_\eta}b_{\eta r} + \sum_{\eta=\ell+1}^{n}\Theta_\eta\sum_{s=1}^{\ell}v_{\eta rs}\dot{q}_s - \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_r}, \tag{8.7.3}$$

bu yerda

$$v_{\eta rs} = \frac{\partial b_{\eta r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\eta s}}{\partial q_r} - \sum_{\eta'=\ell+1}^{n}\left(b_{\eta' s}\frac{\partial b_{\eta r}}{\partial q_{\eta'}} - b_{\eta' r}\frac{\partial b_{\eta s}}{\partial q_{\eta'}}\right),$$

2Θ, Θ_η va Φ lar (8.7.2) munosabat orqali mos ravishda $2T$, $\partial T/\partial\dot{q}_\eta$ va $2F$ larning ifodalaridan $\dot{q}_\eta$ $(\eta = \overline{\ell+1, n})$ larni chiqarib tashlash natijasida hosil qilinadi:

$$2\Theta = \sum_{r=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\tau_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s, \qquad \Theta_\eta = \sum_{p=1}^{\ell}\theta_{\eta p}(q)\,\dot{q}_p,$$

$$2\Phi = \sum_{r=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\varphi_{rs}(q)\,\dot{q}_r\dot{q}_s,$$

$$\tau_{rs} = A_{rs} + \sum_{\eta=\ell+1}^{n}(A_{r\eta}b_{\eta s} + A_{\eta s}b_{\eta r}) + \sum_{\eta=\ell+1}^{n}\sum_{\eta'=\ell+1}^{n}A_{\eta\eta'}b_{\eta r}b_{\eta' s}$$

$$\Theta_{\eta p} = A_{\eta s} + \sum_{\eta'=\ell+1}^{n}A_{\eta\eta'}b_{\eta' p},$$

$$\varphi_{rs} = f_{rs} + \sum_{\eta=\ell+1}^{n}(f_{r\eta}b_{\eta s} + f_{\eta s}b_{\eta r}) + \sum_{\eta,\eta'=\ell+1}^{n}f_{\eta\eta'}b_{\eta r}b_{\eta' s}.$$

(8.7.3) va (8.7.2) lar $(n+\ell)$ ta q_η, $\dot{q}_r$ o'zgaruvchilarga nisbatan $n+\ell$ tartibli tenglamalar sistemasi bo'lib,

$$\frac{d}{dt}(\Theta - U) = -2\Phi$$

energiya tenglamasi va dissipativ kuchlar ta'sir etmaganda

$$\Theta - U = \text{const}$$

energiya integraliga ega bo'ladi.

Agar kinetik energiya, dissipativ va U kuch funksiyasi hamda (8.7.2) nogolonom bog'lanishlarning koeffitsiyentlari oxirgi $n-\ell$ ta umumlashgan koordinataga bog'liq bo'lmasa, u holda (8.7.3) tenglamalarni (8.7.2) nogolonom bog'lanishlar tenglamalarisiz ko'rish mumkin. Bunday holda nogolonom sistemalarni Chapligin sistemalari deb, quyidagi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}_r} = \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_r} + \sum_{\eta=\ell+1}^{n}\Theta_\eta\sum_{s=1}^{\ell}\mu_{\eta r s}\dot{q}_s - \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_r} \qquad (r=\overline{1,\ell}) \qquad (8.7.4)$$

$$\mu_{\eta rs} = \frac{\partial b_{\eta r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\eta s}}{\partial q_r}$$

tenglamalarni esa Chapligin tenglamalari deb aytaydilar (Y.I. Neymark va N.A. Fufayev ta'rifi).

Koordinata boshini muvozanat holati deb qabul qilaylik va bu nuqtada bog'lanishlarning koeffitsiyentlari hamda U kuch funksiyasi ($U=-\Pi$, bu erda Π–potensial energiya) nolga teng bo'lsin. Quyidagi teorema mavjud.

7.1–teorema (V.V. Rumyansev [84]). *Agar muvozanat holati atrofida potensial energiya aniq-musbat ishorali bo'lsa (U kuch funksiyasi aniq-manfiy ishorali bo'lsa), u vaqtda dissipativ kuchlar ta'sir etsa-etmasa muvozanat holati turg'un bo'ladi.*

Bu teoremaning isboti turg'unlik haqidagi Lyapunov teoremasidan kelib chiqadi. Lyapunov funksiyasi sifatida $V = \Theta - U$ olinadi. (8.7.2) va (8.7.3) larga nisbatan olingan dV/dt yoki nolga teng (dissipativ kuchlar yo'q), yoki $-2F$ teng va musbat emas (dissipativ kuchlar ta'sir etadi) bo'ladi.

7.1-teorema ni (dissipativ kuchlar ta'siri yo'g'ida) Lagranj teoremasining nogolonom sistemalarga tatbiq etilishi sifatida qarash mumkin va uni umumlashtirish mumkin.

7.2–teorema (V.V.Rumyansev [84]). *Agar muvozanat holatining yetarli kichik atrofida U kuch funksiyasi musbat qiymat qabul qila olsa va*

$$\Theta - U < 0, \qquad \sum_{r=1}^{\ell} \dot{q}_r \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_r} > 0 \tag{8.7.5}$$

sohada

$$\sum_{r=1}^{\ell} q_r \left(\frac{\partial U}{\partial q_r} + \sum_{\eta=\ell+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_\eta} b_{\eta r} \right) \tag{8.7.6}$$

ifoda q_r $(r = \overline{1,\ell})$ *o'zgaruvchilarning aniq-musbat funksiyasi bo'lsa, u vaqtda muvozanat holati noturg'undir.*

Bu teoremaning isboti Chetayevning noturg'unlik haqidagi teoremasidan kelib chiqadi. Buning uchun Chetayev funksiyasini

$$V = -(\Theta - U) \sum_{r=1}^{\ell} \dot{q}_r \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_r}$$

ko'rinishida olish kerak.

7.3–teorema (V.V. Rumyansev [84,85]). *Agar muvozanat holatda* grad *U=0 hamda muvozanat holatning yetarlicha kichik atrofida U funksiyaning kvadratik qismi va (8.7.6) ifoda* $q_r (r = \overline{1,\ell})$ *o'zgaruvchilarga nisbatan aniq-manfiy ishorali bo'lsa, u vaqtda umumlashgan tezliklarga nisbatan to'liq dissipatsiyali kuchlar ta'siri ostidagi sistemaning muvozanat holati* q_r, $\dot{q}_r$ *o'zgaruvchilarga nisbatan asimptotik turg'un bo'ladi.*

Teoremaning isboti [80, 86] da berilgan.

Yuqorida bayon etilgan natijalarning rivoji A.V. Karapetyanning [36–38] ishlarida berilgan. U Lyapunov-Malkin, Ayzerman–Gantmaxer teoremalari va Lyapunovning birinchi yaqinlashish usulidagi noturg'unlik

haqidagi teoremalaridan foydalanib, nogolonom sistemalar muvozanat holatining turg'unligini tadqiq etishni koordinatalari nogolonom bog'lanishlar soniga kamaytirilgan va nopotensial pozitsion kuchlar (dastlabki ta'sir etayotgan kuchlardan tashqari) ta'siri ostidagi golonom sistema muvozanat holatining turg'unligini tadqiq etish masalasiga keltiradi.

7.1-lemma (A.V. Karapetyan [36]). *Nogolonom sistemaning nolinchi*

$$q_r = q_{r0}, \quad \dot{q}_r = 0 \quad (r = \overline{1,\ell}), \qquad q_\eta = q_{\eta 0} \qquad (\eta = \overline{\ell+1, n}) \tag{8.7.7}$$

muvozanat holati (koordinata boshi) asimptotik turg'un (eksponensial noturg'un) bo'lsa, uning

$$\sum_{s=1}^{\ell} a_{rs}\ddot{y}_s + \sum_{s=1}^{\ell} d_{rs}\dot{y}_s + \sum_{s=1}^{\ell}(c_{rs} - e_{rs})\, y_s = 0 \qquad (r = \overline{1,\ell}) \tag{8.7.8}$$

muvozanat holati ham turg'un (noturg'un)dir. Bundan tashqari, birinchi holatda, har qanday toyilmagan harakatga yetarli yaqin bo'lgan toydirilgan harakat $t \to \infty$ da

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} + \sum_{\eta=\ell+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_\eta} b_{\eta r} = 0 \qquad (r = \overline{1,\ell}) \tag{8.7.9}$$

muvozanat holatlar sirtining birorta muvozanat holatiga intiladi.

Shu lemma orqali Karapetyan nogolonom sistema muvozanat holatining turg'unligini tekshirish masalasini yuqorida aks ettirilgan golonom sistema muvozanat holatining turg'unligini tekshirishga keltirgan.

(8.7.8) sistemada qo'shimcha nopotensial

$$E_r = \sum_{s=1}^{\ell} e_{rs} y_s \qquad (r = \overline{1,\ell})$$

kuchlar mavjud (keltirilgan kuchlar deb aytiladi).

Agar

$$\left\{ \sum_{\eta=\ell+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_\eta} \left[\left(\frac{\partial b_{\eta r}}{\partial q_s} - \frac{\partial b_{\eta s}}{\partial q_r} \right) + \sum_{\eta'=\ell+1}^{n} \left(b_{\eta' s} \frac{\partial b_{\eta r}}{\partial q_{\eta'}} - b_{\eta' r} \frac{\partial b_{\eta s}}{\partial q_{\eta'}} \right) \right] \right\} = 0 \qquad (r, s = \overline{1,\ell}) \tag{8.7.10}$$

shart bajarilsa, u vaqtda $E_r = 0$.

Ushbu lemmadan foydalanib, quyidagi teoremalarni isbot qilish mumkin.

7.4–teorema (A.V. Karapetyan [36]). *Agar* (c_{rs}) $(r, s = \overline{1,\ell})$ *matritsaning barcha xoc (xarakteristik) qiymatlari musbat bo'lsa, u vaqtda (8.4.10) shart bajarilganda konservativ nogolonom sistemaning (8.4.7) muvozanat holati birinchi yaqinlashishda turg'un bo'ladi va bu muvozanat holat sistemaga yetarlicha kichik qiymatli to'liq dissipatsiyali kuchlarni qo'shish bilan Lyapunov bo'yicha turg'un bo'ladi.*

7.5-teorema. *Agar* (c_{rs}) *matritsa hech bo'lmaganda bitta manfiy ishorali xos (xarakteristik) qiymatga ega bo'lsa, u vaqtda (8.7.10) shart bajarilganda dissipativ kuchlar sistemaga ta'sir etsa-etmasa ham nogolonom sistemaning (8.7.7) muvozanat holati noturg'un bo'ladi.*

Izoh. *Agar muvozanat holatda* grad $U=0$ *yoki barcha* $\partial b_{\eta r}/\partial q$ *lar nolga aylansa, u vaqtda (8.7.10) shartlar bajariladi. Bu shartlar bajarilgan vaqtda* (c_{rs}) *matritsa manfiy ishorali xos qiymatlar ega bo'lgan holda nogolonom sistema muvozanat holatining noturg'unligini oldin V.V. Rumyansev isbot qilgan edi* [84].

Bu teoremalarning isboti $\ell_{rs}=0 \quad (r,s=1,...,\ell)$ hollar uchun Tomson–Chetayevning [102] (8.7.8) formadagi sistemalar muvozanat holatining turg'unligiga dissipativ kuchlarning ta'siri haqidagi teoremalaridan kelib chiqadi.

7.6–teorema (A.V. Karapetyan [36]). *Agar quyidagi:*

1) $SP(c_{rs})<0$,

2) $\det(c_{rs}-e_{rs})<0$,

3) c_{rs} *matritsaning barcha xos qiymatlari manfiy degan shartlarning birortasi bajarilsa, konservativ nogolonom sistemaning (8.7.7) muvozanat holati noturg'un bo'ladi.*

(2) yoki (3) shart bajarilganda muvozanat holatini hech qanday dissipativ kuchlar orqali stabillashtirish mumkin emas.

E.M. Krasinskaya-Tyumeneva va A.Y. Krasinskiyning [45] ilmiy ishida nopotensial pozitsion kuchlarning muvozanat holatiga ta'siri tadqiq etilgan.

8- §. Nogolonom sistemalarning siklik koordinatalari. Masalaning qo'yilishi

Konservativ nogolonom sistemalar statsionar harakatlarini tadqiq etishda Lagranj koordinatalarida tuzilgan harakat tenglamalaridan ham, kvazikoordinatalarda tuzilgan harakat tenglamalaridan ham foydalanish mumkin. Biz bu paragrafda Lagranj koordinatalarida tuzilgan ushbu harakat tenglamalaridan foydalanamiz:

$$\sum_{u=1}^{n} B_{\sigma u}(q)\,\dot{q}_u = 0 \qquad (\sigma = \overline{1,n-\ell}), \tag{8.8.1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} = \frac{\partial L}{\partial q_u} + \sum_{\sigma=1}^{n-\ell} \lambda_\sigma B_{\sigma u} \qquad (u = \overline{1,n}). \tag{8.8.2}$$

Bu yerda $\operatorname{rank}(B_{\sigma u}) = n - \ell$, $L = T + U$ – Lagranj funksiyasi, T– tizimning kinetik energiyasi, U – kuch funksiyasi ($U = -\Pi$, Π– potensial energiya).

Lagranj koordinatalaridagi harakat tenglamalaridan foydalanganda, statsionar harakat sifatida shunday harakatni tushunamiz: bu harakatda pozitsion koordinatalar, siklik koordinatalarning tezliklari dastlabki qiymatlarini saqlaydi, siklik koordinatalarning o'zi esa vaqt bo'yicha chiziqli ravishda o'zgaradi [114].

Golonom sistemalarda Lagranj funksiyasining ifodasiga oshkora ravishda kirmagan koordinatalarni **siklik koordinatalar** va qolganlarini **pozitsion koordinatalar** deb aytiladi. Siklik koordinatalarga mos kelgan umumlashgan kuchlar nolga teng bo'ladi.

Nogolonom sistemalar uchun siklik koordinatalarning bir necha xil ta'riflari mavjud. Ularni shartli ravishda uch guruhga bo'lish mumkin.

Birinchi guruhga siklik integrallarning mavjudligini ta'minlaydigan ta'riflarni kiritamiz. Ulardan eng umumiyrog'i quyidagidir.

1- ta'rif (A.S. Sumbatov [89]). *Agar q_ρ koordinatalarning tezligi $\dot{q}_\rho$ bog'lanishlar tenglamasiga kirmasa va Lagranj funksiyasidan bu koordinata bo'yicha olingan xususiy hosilaning bog'lanishlarni hisobga olib topilgan qiymati nolga teng bo'lsa, u vaqtda q_ρ nogolonom sistemaning siklik koordinatasi deb aytiladi.*

Demak, q_ρ siklik koordinata bo'lganda,

$$B_{\sigma\rho} = 0 \qquad (\sigma = \overline{1, n-\ell}); \qquad \left\{\frac{\partial L}{\partial q_\rho}\right\} = 0. \tag{8.8.3}$$

Bu yerda va bundan keyin ifodalar katta (figurali) qavsga olingan bo'lsa, bu ifoda (8.8.1) ni inobatga olib hisoblanganligini bildiradi.

(8.8.3) shartlar bajarilsa, (8.8.1) va (8.8.2) harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishdagi siklik integralga ega bo'ladi:

$$\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho}\right\} = c_\rho = \text{const}. \tag{8.8.4}$$

Bu yerda siklik koordinatalar (8.8.4) tenglamalar ifodasiga oshkora ravishda kirishi mumkin (masalan, bu koordinataga bog'liq bo'lishi mumkin bo'lgan bog'lanishlar koeffitsiyentlari orqali). 1-ta'rif oldin kiritilgan ushbu ta'rifni umumlashtiradi.

2- ta'rif (L.N. Semyonova [87]). *Agar*

$$B_{\sigma\rho} = 0 \qquad (\sigma = \overline{1, n-\ell}), \qquad \frac{\partial L}{\partial q_\rho} = 0 \tag{8.8.5}$$

bajarilsa, u vaqtda q_ρ *ni tsiklik koordinata deb aytamiz.*

(8.8.5) tenglamalar

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = c_\rho = \text{const} \tag{8.8.6}$$

ko'rinishdagi integralga ega bo'ladi. Bu tenglamalar ifodasiga ham q_ρ siklik koordinata oshkora ravishda qatnashishi mumkin.

Agar $2n-\ell$ ta o'zgarmas q_{r_0}, $\dot{q}_{s_0}$, λ_{σ_0} miqdorlar ushbu n ta tenglama sistemasi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial q_r} + \sum_{\sigma=1}^{n-\ell} \lambda_\sigma B_{\sigma r} = 0 \qquad (r = \overline{1, p}), \\ &\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = c_\rho \quad (\rho = \overline{p+1, n}) \end{aligned} \tag{8.8.7}$$

ni qanoatlantirsa, u vaqtda 2- ta'rif ma'nosidagi q_ρ siklik koordinata $(\rho = \overline{p+1, n})$ uchun (8.8.1) va (8.8.2) harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishli yechimga ega bo'ladi:

$$\begin{gathered} q_r = q_{r_0}, \quad \dot{q}_r = 0 \quad (r = \overline{1, p}), \quad \dot{q}_\rho = \dot{q}_{\rho_0} \quad (\rho = \overline{p+1, n}), \\ \lambda_\sigma = \lambda_{\sigma_0} \quad (\sigma = \overline{1, n-\ell}). \end{gathered} \tag{8.8.8}$$

(8.8.6) va (8.8.7) ifodalardagi $n-p$ ta o'zgarmas c_ρ ixtiyoriy (erkin) bo'lganliklari uchun bu holda statsionar harakatlar $2n-\ell-p$ dan kam bo'lmagan o'lchovga ega bo'lgan sirtni tashkil qiladi. $n-p$ ta siklik koordinata va $n-\ell$ ta nogolonom bog'lanish yig'indisi $2n-\ell-p$ sonini beradi. Demak, statsionar harakatlar sirtining o'lchami siklik koordinatalar va nogolonom bog'lanishlar sonlarining yig'indisidan kam bo'lmasligi kerak.

Ikkinchi guruhga statsionar harakatlar mavjudligini ta'minlaydigan siklik koordinatalar ta'riflarini kiritamiz. Bulardan eng umumiyrog'i quyidagi I.E. Emelyanova va N.A. Fufayev bergan ta'rifdir.

3-ta'rif (I.E. Emelyanova va N.A. Fufayev [29,30]). *Agar nogolonom bog'lanishlarni hisobga olib tuzilgan harakat tenglamalarining ifodalariga*

q_ρ koordinataning o'zi oshkor ravishda kirmasdan faqat uning tezlanishi va, mumkin, tezligi kirsa, u vaqtda q_ρ siklik koordinata deb aytiladi.

Bu ta'rif avvalgi hamma ta'riflarni, shu jumladan, 1- va 2- ta'riflarni ham umumlashtiradi.

4- ta'rif (Y.I. Neymark va N.A. Fufayev [71,73]). *Agar*

$$\frac{\partial B_{\sigma s}}{\partial q_\rho} = 0 \qquad (\sigma = \overline{1, n-\ell}; \quad s = \overline{1, n}), \quad \frac{\partial L}{\partial q_\rho} = 0 \tag{8.8.9}$$

bajarilsa, u vaqtda q_ρ siklik koordinata deb ataladi.

3- va 4- ta'riflar ma'nosidagi siklik koordinatalar mavjudligida harakat tenglamalarining siklik integrallari bo'lmasligi mumkin. Masalan, (8.8.9) shartlar bajarilganda

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = \sum_{\sigma=1}^{n-1} \lambda_\sigma B_{\sigma\rho} \neq 0$$

va (8.8.8) ko'rinishdagi statsionar harakatlar bo'ladi. (8.8.9) shartlarda (8.8.8)dagi $2n-\ell$ q_{r_0}, $\dot{q}_{\rho_0}$, λ_{σ_0} o'zgarmaslar quyidagi $2n-\ell$ ta tenglama sistemasini qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial q_r} + \sum_{\sigma=1}^{n-\ell} \lambda_\sigma B_{\sigma r} = 0 \qquad (r = \overline{1, p}),\\
&\sum_{\sigma=1}^{n-\ell} \lambda_\sigma B_{\sigma\rho} = 0 \quad (\rho = \overline{p+1, n}),\\
&\sum_{\rho=p+1}^{n} B_{\sigma\rho}\dot{q}_\rho = 0 \qquad (\sigma = \overline{1, n-\ell}).
\end{aligned} \tag{8.8.10}$$

(8.8.10) tenglamalar sistemasining $\dot{q}_\rho$ nisbatan nolga teng bo'lmagan yechimi mavjud bo'lganda, statsionar harakatlar o'lchovi birdan kam bo'lmagan sirtni tashkil qiladi [71,73], chunki (8.8.10) sistemaning oxirgi $2n-\ell-p$ ta tenglama $\dot{q}_\rho \neq 0$ holda bir-biriga bog'langan bo'ladi.

1- va 2- ta'riflar bo'yicha harakat tenglamalarining siklik koordinatalarga bog'liqligi hamda 3- va 4- ta'riflarga asosan siklik integrallarning mavjud emasligiga qaramasdan har ikki holda ham Raus bo'yicha siklik o'zgaruvchilar inkor etilmaydi.

Agar M.F. Shulgin va A.V. Karapetyan bergan ushbu ta'rifni qabul qilsak, u vaqtda Raus bo'yicha siklik o'zgaruvchilarni inkor etish mumkin.

5- ta'rif (M.F. Shulgin, A.V. Karapetyan [38,106]). *Agar*

$$\frac{\partial L}{\partial q_\rho} = 0, \quad B_{\sigma\rho} = 0, \quad \frac{\partial B_{\sigma s}}{\partial q_\rho} = 0 \qquad (\sigma = \overline{1, n-\ell}, \quad s = \overline{1, n}) \tag{8.8.11}$$

shartlar bajarilsa, u vaqtda q_ρ *siklik koordinata deb ataladi.*

$\rho = p+1, \ldots, n$ - koordinatalar uchun (8.8.11) shartlar bajarilganda harakat tenglamalari ifodasida siklik koordinatalar oshkora ravishda qatnashmaydi va harakat tenglamalari (8.8.6) ko'rinishdagi siklik integralga ega bo'ladi. Ushbu

$$R = L - \sum_{\rho=p+1}^{n} \dot{q}_\rho c_\rho$$

munosabat orqali Raus funksiyasini kiritamiz (o'ng tarafidagi $\dot{q}_\rho (\rho = \overline{p+1, n})$ siklik tezliklar (8.8.6) formulalar orqali funksiya ifodasidan chiqarilgan). U vaqtda (8.8.1) va (8.8.2) nogolonom sistemalar harakat tenglamalarini quyidagi ko'rinishga keltirsa bo'ladi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial R}{\partial q_r} + \sum_{\sigma=1}^{n-\ell} \lambda_\sigma B_{\sigma r} \qquad (r = \overline{1, p}), \tag{8.8.12}$$

$$\sum_{r=1}^{p} B_{\sigma r}\dot{q}_r = 0 \qquad (\sigma = \overline{1, n-\ell}), \tag{8.8.13}$$

$$\dot{q}_\rho = -\frac{\partial R}{\partial c_\rho} \qquad (\rho = \overline{p+1, n}). \tag{8.8.14}$$

(8.8.12) va (8.8.13) tenglamalarni (8.8.14) tenglamalarga bog'lamasdan alohida ko'rish mumkin.

Ularni $q_1, \ldots, q_p$ umumlashgan koordinatali va $n-\ell$ ta integrallanmaydigan kinematik bog'lanishlar bilan bog'langan **keltirilgan nogolonom sistemalar** harakatining aniqmas ko'paytuvchilar qatnashgan Lagranj tenglamalari sifatida qarash mumkin. Sistemaning dinamik xususiyatini R Raus funksiyasi aniqlaydi. Bu yerda **dastlabki sistemaning** ((8.8.1) va (8.8.2)) **statsionar harakatlariga keltirilgan sistemaning muvozanat holatlari mos keladi.** Muvozanat holatlarining turg'unligini oldingi paragraflarda bayon etilgan usullar bilan tadqiq etish mumkin.

Shuni ta'kidlaymizki, 1-,3- va 4- ta'riflar ma'nosidagi siklik koordinatali nogolonom sistemalar statsionar harakatlarining turg'unligi umumiy holda tadqiq etilgan emas.

9- §. Golonom va nogolonom sistemalar statsionar harakatlarining turg'unligi [71,73]

Golonom va nogolonom sistemalarning statsionar harakatlari fazaviy fazoda va konfiguratsiya fazosida qandaydir o'lchovli sirtni tashkil qiladi. Shuning uchun ham statsionar harakatlar turg'unligini tekshirishda nogolonom sistemalar muvozanat holatlarini tadqiq etishdagi holatga (situatsiyaga) kelamiz.

Avval golonom sistemalar statsionar harakatlarini ko'rib o'taylik.

$$L = L(q_1, q_2, ..., q_m, \ \dot{q}_1, ..., \dot{q}_m, \ \dot{q}_{m+1}, ..., \dot{q}_n)$$

Lagranj funksyasiga ega bo'lgan $q_1, q_2, ..., q_n$ umumlashgan koordinatali golonom sistema berilgan bo'lsin. Bu yerda $m < n$, n–umumlashgan koordinatalar soni, $n-m$ ta oxirgi koordinata siklik koordinatalar bo'lsin. Sistemaga to'liqmas dissipativ

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{m} h_{ij}(q_1, ..., q_m)\dot{q}_i\,\dot{q}_j$$

kuchlar ta'sir etsin. Bu kuchlarning ifodasida siklik tezliklar mavjud bo'lmasin. Bunday sistemaning harakat tenglamalari

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \qquad (j = \overline{1,m}) \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{m+k}} = 0 \qquad (k = \overline{1,n-m}) \end{aligned}\right\} \tag{8.9.1}$$

ko'rinishda bo'ladi. $\omega_k = \dot{q}_{m+k}$ almashtirish kiritib, (8.9.1) sistemani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_k} = 0. \tag{8.9.2}$$

Bu tenglamalar tasvirlovchi nuqtaning harakatini $n+m$ o'lchovli F fazaviy fazoda ifodalaydi. Fazoning koordinata o'qlari bo'yicha $q_1, ..., q_m, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_m, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-m}$ miqdorlar yo'nalgan. Ta'rif bo'yicha statsionar harakat deb shunday harakatga aytamizki, unda nosiklik (pozitsion) koordinatalar va siklik koordinatalarga mos kelgan tezliklar o'zgarmas (dastlabki) qiymatni saqlaydi. Demak, statsionar harakatda

$q_1 = \text{const}, ..., \ q_m = \text{const}, \ \dot{q}_1 = 0, ..., \ \dot{q}_m = 0, \ \omega_1 = \text{const}, ..., \ \omega_{n-m} = \text{const}$

munosabatlarga ega bo'lamiz, ya'ni statsionar harakat F fazaviy fazoga muvozanat holati bo'lib akslanadi. Shunday qilib, statsionar harakatlar

turg'unligi masalasi F fazaviy fazodagi muvozanat holatlarining turg'unlik masalasiga aylanadi. Muvozanat tenglamasi

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = \overline{1,m})$$

n ta $q_1^0,...,q_m^0,\ \omega_1^0,...,\omega_{n-m}^0$ noma'lum o'zgaruvchilarga nisbatan m ta tenglama sistemasini ifodalaydi. Bu yerdan bevosita umumiy holda $n-m$ o'lchovli statsionar harakatlar sirtini (F fazoda $n-m$ o'lchovli muvozanat holatlari sirtini) hosil qilamiz. Shuning uchun ham 2- § dagi natijalarga asosan sistemaning xarakteristik tenglamasi $n-m$ ta nol ildizga ega bo'ladi va statsionar harakatlar sirtining turg'unligini xarakteristik tenglamaning qolgan $2m$ ta ildizlarining xarakteri aniqlaydi. Haqiqatan ham, $q_i = q_i^0 + \xi_i,\quad \omega_k = \omega_k^0 + \eta_k$ almashtirishlarni kiritib, $q_i^0,\ \omega_k^0$ statsionar qiymatlardan yetarlicha kichik miqdordagi $\xi_i,\ \eta_k$ toyilishlarga nisbatan harakat tenglamasini tuzamiz:

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i\,\partial \dot q_j}\right)_0 \ddot\xi_j + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \dot q_i\,\partial \dot q_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i\,\partial \dot q_j} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i\,\partial q_j}\right)_0 \dot\xi_j -$$

$$-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i\,\partial q_j}\right)_0 \xi_j + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i\,\partial \omega_k}\right)_0 \dot\eta_k - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_i\,\partial \omega_k}\right)_0 \eta_k = 0, \qquad (8.9.3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i\,\partial \omega_k}\right)_0 \ddot\xi_i + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i\,\partial \omega_k}\right)_0 \dot\xi_i + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \omega_i\,\partial \omega_k}\right)_0 \dot\eta_i = 0.$$

Bu yerdan sistemaning xarakteristik tenglamasi $n-m$ ta nol ildizga ega ekanligi ko'rinib turibdi, Qolgan $2m$ ildizning haqiqiy qismlari manfiy bo'lishining shartlari statsionar harakatlar sirtining asimptotik turg'unlik sohalarini aniqlashga va asimptotik turg'unlik sohasi chegarasining sistema konstruktiv parametrlarining o'zgarishiga qanday bog'liqligini aniqlab beradi.

Endi nogolonom sistema statsionar harakatining turg'unligini ko'rib o'tamiz. Lagranj funksiyasi va dissipatsiya funksiyasining ifodalarida $q_1, q_2,..., q_n$ umumlashgan koordinatalarning oxirgi ℓ tasi mavjud bo'lmasin deb faraz qilamiz. Sistemaning Lagranj funksiyasi

$$L = L(q_1, q_2,..., q_{n-\ell},\ \dot q_1, \dot q_2,..., \dot q_n),$$

bu yerda $\ell < n$, ℓ – Lagranj funksiyasi ifodasiga kirmagan koordinatalar soni. Bu koordinatalarni siklik koordinatalar deb ataymiz. Nogolonom bog'lanishlar

$$a_{ij}(q_1,\ldots,q_{n-\ell})\,\dot{q}_j = 0 \qquad (i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}) \tag{8.9.4}$$

munosabatlar bilan ifodalansin, bu yerda $m<n$. Dissipatsiya funksiyasi

$$F=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-\ell}\sum_{k=1}^{n-\ell}h_{sk}(q_1,\ldots,q_{n-\ell})\,\dot{q}_s\,\dot{q}_k \tag{8.9.5}$$

ko'rinishda bo'lsin. Uning ifodasida siklik koordinatalarga mos kelgan tezliklar qatnashmaydi. U vaqtda bunday sistemaning harakat tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_i a_{ik}-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k=\overline{1,n-\ell}), \tag{8.9.6}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{n-\ell+r}}=\lambda_i a_{i,n-\ell+r} \qquad (r=\overline{n-\ell}). \tag{8.9.7}$$

$\omega_r=\dot{q}_{n-\ell+r}$ belgilashni kiritib va (8.9.7) dan foydalanib, (8.9.6), (8.9.7) va (8.9.4) harakat tenglamalarini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}+h_{sk}(q_1,\ldots,q_{n-\ell})\,\dot{q}_s-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_i a_{ik} \qquad (i=\overline{1,m};\ s,k=\overline{1,n-\ell}), \tag{8.9.8}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_r}=\lambda_i a_{i,n-\ell+r} \qquad (r=\overline{1,\ell}), \tag{8.9.9}$$

$$a_{ik}\dot{q}_k+a_{i,n-\ell+r}\omega_r=0 \qquad (i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,n-\ell}), \tag{8.9.10}$$

bu yerda $L=L(q_1,\ldots,q_{n-\ell},\ \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_{n-\ell},\ \omega_1,\ldots,\omega_\ell)$.

Hosil qilingan tenglamalar $(n+m)$ ta tenglama sistemasini tashkil etadi. Bu sistemadan $(n+m)$ ta $q_1,\ldots,q_{n-\ell}$, $\omega_1,\ldots,\omega_\ell$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ miqdorlar vaqt funksiyasi sifatida topiladi. Statsionar harakatda $q_k=q_k^0=\text{const}$, $\dot{q}_k=0$, $\omega_r=\omega_r^0=\text{const}$. Bularni (8.9.8) – (8.9.10) tenglamalarga qo'yib, nogolonom sistemalarning quyidagi statsionar harakatlari tenglamalarini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}+\lambda_i^0 a_{ik}=0, \tag{8.9.11}$$

$$\lambda_i^0 a_{i,n-\ell+r}=0, \tag{8.9.12}$$

$$a_{i,n-\ell+r}\omega_r^0 = 0 \quad (i=\overline{1,m},\ \ k=\overline{1,n-\ell},\ \ r=\overline{1,\ell}). \qquad (8.9.13)$$

(8.9.11) – (8.9.13) tenglamalar $(n+m)$ tenglama sistemasini tashkil qiladi. Bu sistemadan $(n+m)$ ta $q_1^0,...,q_{n-\ell}^0,\ \omega_1^0,...,\omega_\ell^0,\ \lambda_1^0,...,\lambda_m^0$ miqdorlarni aniqlaymiz. Agar (8.9.11) – (8.9.13) sistemani tashkil etayotgan tenglamalarning hammasi ham bog'lanmagan bo'lmasa (ya'ni ayrimlari bir-biriga bog'langan bo'lsa), u vaqtda aniqlanishi lozim bo'lgan miqdorlarning soni tenglamalar sonidan katta bo'ladi. Bu holda oldingi natijalarga asosan statsionar harakatlar sirtiga ega bo'lamiz. Ko'rsatish mumkinki, (8.9.11) – (8.9.13) tenglamalar sistemasining hech bo'lmaganda bitta tenglamasi bog'lanmagan emas. Haqiqatan ham, agar (8.9.12) tenglamalarning har birini mos ravishda ω_r^0 $(r=\overline{1,\ell})$ ga ko'paytirib, barchasini qo'shsak, u holda (8.9.13)ga asosan aynan nolni hosil qilamiz.

Demak, (8.9.11) – (8.9.13) tenglamalar sistemasining bog'lanmagan (erkin) tenglamalar soni barcha tenglamalar sonidan hech bo'lmaganda bittaga kam bo'ladi.

Shuning uchun ham nogolonom sistemalar statsionar harakatlari hech bo'lmaganda bir o'lchamli sirtni tashkil qiladi.

Shunday qilib, nogolonom sistemalar statsionar harakatlari holatini tekshirishda nogolonom sistemalar muvozanat holatlarini tekshirishdagi holatga monand holatga kelamiz. Demak, ikkinchi paragrafda bayon etilgan nazariyani bu yerda ham tatbiq etish mumkin.

Kelgusi paragrafda muayyan golonom va nogolonom sistemalar statsionar harakatlarining turg'unligini ushbu pragrafda bayon etilgan nazariya asosida tekshiramiz.

10- §. Muayyan golonom va nogolonom sistemalar statsionar harakatlarining turg'unligini tadqiq etish

Ushbu paragrafda Y.I. Neymark va N.A. Fufayev tomonidan muayyan golonom va nogolonom sistemalar statsionar harakatlarini o'rganish uchun o'tkazgan tadqiqot natijalarini keltiramiz [71,73].

1- m i s ol. Notekis gorizontal tekislikdagi disk harakatining turg'unligi

Radiusi a, massasi m ga teng bo'lgan disk sirpanmasdan notekis gorizontal tekislikda dumalab harakat qilsin. Disk konfiguratsiyasini (holatini) beshta umumlashgan koordinata aniqlaydi: x, y – tekislik bilan disk uringan nuqtaning dekart koordinatalari va uchta θ, ψ, φ – Eyler burchaklari (8.7- shakl). Diskning tekislik bo'yicha sirpanishsiz dumalashi ikkita nogolonom bog'lanishga olib keladi:

$$\dot{x} = a\dot{\varphi}\cos\psi, \qquad \dot{y} = a\dot{\varphi}\sin\psi. \tag{8.10.1}$$

L Lagranj funksiyasini (8.10.1) nogolonom bog'lanishlar tenglamalarini hisobga olmasdan tuzamiz:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + ma\left[\dot{y}\left(\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\psi\right) - \dot{x}\left(\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \dot{\psi}\sin\theta\cos\psi\right)\right] + \frac{1}{2}\left(A + ma^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(A\cos^2\theta + ma^2\sin^2\theta\right)\dot{\psi}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}C\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\right)^2 - mga\cos\theta.$$

Ko'rilayotgan sistemaga to'liqmas dissipatsiyali F kuch ta'sir etsin va uning ko'rinishi

$$F = \frac{1}{2}h\dot{\theta}^2$$

kabi bo'lsin, bu yerda h – qovushqoq ishqalanish koeffitsiyenti.

Disk harakatining tenglamalarini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{d}{dt}\left[m\dot{x} + ma\left(\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\psi\right)\right] = \lambda_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left[m\dot{y} + ma\left(\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\psi\right)\right] = \lambda_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left[ma\left(\dot{y}\cos\theta\cos\psi - \dot{x}\cos\theta\sin\psi\right) + \left(A + ma^2\right)\dot{\theta}\right] + ma\left[\dot{y}\left(\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \dot{\psi}\cos\theta\sin\psi\right) - \dot{x}\left(\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi - \dot{\psi}\cos\theta\cos\psi\right)\right] + h\dot{\theta} + \dot{\psi}^2\left(A + ma^2\right)\sin\theta\cos\theta +$$

$$+ C\dot{\psi}\cos\theta\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\right) - mga\sin\theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(A\cos^2\theta + ma^2\sin^2\theta\right)\dot{\psi} - ma\left(\dot{y}\sin\theta\sin\psi + \dot{x}\sin\theta\cos\psi\right) - \right.$$

$$\left. - C\sin\theta\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\right)\right] + ma\left[\dot{y}\left(\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + \dot{\psi}\sin\theta\cos\psi\right) + \right. \tag{8.10.2}$$

$$\left. + \dot{x}\left(\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\psi\right)\right] = 0,$$

$$C\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta\right) + a\lambda_1\cos\psi + a\lambda_2\sin\psi = 0.$$

(8.10.1) va (8.10.2) tenglamalar sistemasidan $\dot{x}$, $\dot{y}$, λ_1, λ_2 larni chiqarib va

$$\Omega = \dot{\psi}, \qquad \omega = \dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta$$

belgilashlarni kiritib, diskning quyidagi harakat tenglamasini hosil qilamiz:

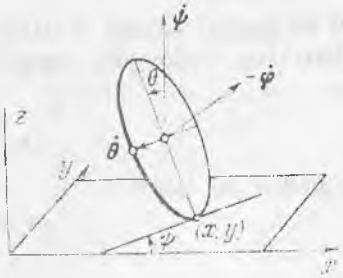
$$\left(A + ma^2\right)\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \left(C + ma^2\right)\Omega\omega\cos\theta + A\Omega^2\sin\theta\cos\theta - mga\sin\theta = 0,$$

$$\left[2A\Omega\sin\theta + C\omega\right]\dot{\theta} - A\Omega\cos\theta = 0, \tag{8.10.3}$$

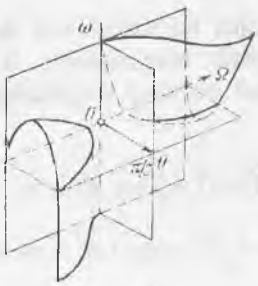
$$\left(C + ma^2\right)\dot{\omega} - ma^2\Omega\dot{\theta}\cos\theta = 0.$$

(8.10.3) tenglamalar (θ, Ω, ω) fazoda tasvirlovchi nuqtaning harakatini ifodalaydi. Diskning statsionar harakati bu fazoga muvozanat holati bo'lib akslanadi. (8.10.3) sistemadan ikki o'lchovli statsionar harakat sirtini ifodalaydigan muvozanat holatlarining tenglamasini topamiz:

$$(C + ma^2)\Omega\omega + A\Omega^2 \sin\theta - mg\,\mathrm{atg}\,\theta = 0. \qquad (8.10.4)$$



8.7- shakl.



8.8- shakl.

$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ intervalda (8.10.4) sirt 8.8- shaklda ko'rsatilgandek bo'ladi. Bu sirtda $\theta = \Omega = 0$ to'g'ri chiziqning nuqtalari diskning to'g'ri chiziq bo'ylab dumalanishiga mos keladi (disk tekisligi vertikal holatda). $\theta = \omega = 0$ to'g'ri chiziqning nuqtalari diskning qo'zg'almas vertikal diametr atrofidagi aylanishiga mos keladi. (8.10.4) sirtning qolgan barcha nuqtalari diskning shunday aylanma harakatlariga mos keladiki. diskning gorizontal tekislik bilan uringan nuqtasi aylana chizadi va θ, Ω, ω miqdorlar (8.10.4) ni qanoatlantiradigan o'zgarmas qiymatlarini saqlaydi.

(8.10.4) statsionar harakatlar sirtining asimptotik turg'unlik shartlarini topamiz. Buning uchun

$$\theta = \theta_0 + \theta', \qquad \Omega = \Omega_0 + \Omega', \qquad \omega = \omega_0 + \omega'$$

deb olib, (8.10.3) harakat tenglamalarini θ', Ω', ω' yetarlicha kichik miqdorlarga nisbatan chiziqlashtiramiz. Ω_0, ω_0, θ_0 lardan nol indekslarni tashlab,

$$\begin{aligned}
&(A + ma^2)\ddot{\theta}' + h\dot{\theta}' - [(C + ma^2)\Omega\omega\sin\theta - A\Omega^2\cos 2\theta + mga\cos\theta]\theta' + \\
&+ [(C + ma^2)\omega\cos\theta + A\Omega\sin 2\theta]\Omega' + (C + ma^2)\Omega\cos\theta\omega' = 0, \qquad (8.10.5)\\
&(2A\Omega\sin\theta + C\omega)\dot{\theta}' - A\dot{\Omega}'\cos\theta = 0,\\
&(C + ma^2)\dot{\omega}' - ma^2\Omega\dot{\theta}'\cos\theta = 0
\end{aligned}$$

ni hosil qilamiz. (8.10.5) sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$p^2(p^2 + a_1 p + a_2) = 0 \qquad (8.10.6)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda

$$a_1 = \frac{h}{A + ma^2}, \qquad a_2 = \frac{1}{A + ma^2}\left\{\Omega^2[A(1 + 2\sin^2\theta) + ma^2\cos^2\theta] + \right.$$

$$\left. + \Omega\omega(3C + ma^2)\sin\theta + \frac{C}{A}(C + ma^2)\omega^2 - mga\cos\theta\right\}.$$

Statsionar harakatlar sirti ikki o'lchovli bo'lganligi sababli (8.10.6) xarakteristik tenglamaning ikkita nol ildizi bor. Asimptotik turg'unlik shartlari quyidagi tengsizliklardan iborat:

$$h > 0\,, \qquad (8.10.7)$$

$$\Omega^2[A(1 + 2\sin^2\theta) + ma^2\cos^2\theta] + \Omega\omega(3C + ma^2)\sin\theta +$$

$$+ \frac{C}{A}(C + ma^2)\omega^2 > mga\cos\theta. \qquad (8.10.8)$$

(8.10.7) munosabatga asosan qovushqoq ishqalanish koeffitsiyenti h musbat bo'lishi kerak. (8.10.8) tengsizlik turg'unlik sohasining chegarasini topishga imkon beradi:

$$\Omega^2\frac{A(1 + 2\sin^2\theta) + ma^2\cos^2\theta}{mga\cos\theta} + \Omega\omega\frac{(3C + ma^2)\sin\theta}{mga\cos\theta} + \frac{C(C + ma^2)}{Amga\cos\theta}\omega^2 = 1. \qquad (8.10.9)$$

Tayinlangan θ qiymat uchun Ω, ω parametrlar bo'yicha ellips hosil qilamiz. Bu ellipsning yarim o'qlari $\theta \to \frac{\pi}{2}$ da nolga intiladi. $\theta = 0$ bo'lganda

$$\frac{A + ma^2}{mga}\Omega^2 + \frac{C(C + ma^2)}{Amga}\omega^2 = 1$$

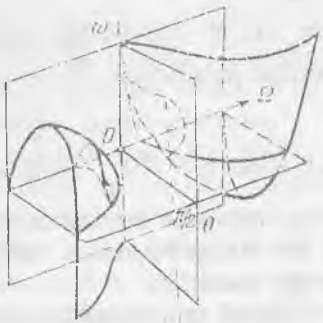
ni olamiz. Bu yerdan diskning to'g'ri chiziqli harakati $(\theta = \Omega = 0)$ faqat

$$\omega^2 > \omega_{kp}^2 = \frac{mgaA}{C(C + ma^2)} \qquad (8.10.10)$$

qiymatlarda, diskning qo'zg'almas vertikal diametr atrofida aylanish harakati esa

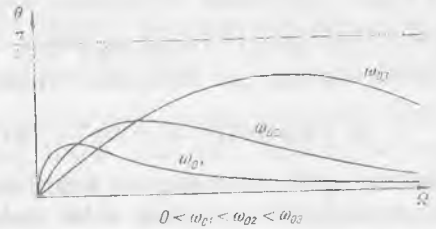
$$\Omega^2 > \Omega_{kp}^2 = \frac{mga}{A + ma^2} \qquad (8.10.11)$$

tengsizlik bajarilganda turg'un bo'lishi kelib chiqadi. (8.10.9) sirtning (8.10.4) statsionar harakatlar sirti bilan kesishishi (8.10.4) sirtda turg'unlik sohasining chegarasini aniqlaydi. Bu chegara 8.9- shaklda ko'rsatilgan.



Turg'unlik sohasining chegarasi

8.9-shakl.



8.10-shakl.

Statsionar harakatlar sirti asimptotik turg'unligining ma'nosi quyidagidan iborat: asimptotik turg'un statsionar harakat toyilganda sistemada so'nuvchi tebranishlar (yoki eksponensial so'nuvchi jarayon) vujudga keladi. Natijada, umuman aytganda, avvalgidan farq qiladigan statsionar harakat tiklanadi. Masalan, diskning to'g'ri chiziqli dumalanishi toyilganda umumiy holda shunday statsionar harakat tiklanadiki, diskning gorizontal tekislik bilan uringan nuqtasi radiusi $R \neq \infty$ bo'lgan biror aylana bo'yicha harakat qiladi.

$\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$ **holi**. Diskning o'z o'qi bo'yicha aylanishining burchak tezligi $\dot{\varphi}$ doimo o'zgarmas bo'lsin deb faraz qilamiz. U vaqtda nogolonom bog'lanishlar tenglamasining va L Lagranj funksiyasining ifodalariga kiruvchi $\dot{\varphi} = \omega$ miqdor endi koordinata bo'lmay, balki sistemaning boshqa fizik parametrlari qatori parametr bo'ladi. Diskning harakat tenglamasi (8.10.1) tenglamalar sistemasidan va oxirgi tenglamasiz (8.10.2) sistemadan iborat bo'ladi. Bu tenglamalardan $\dot{x}$, $\dot{y}$ miqdorlarni chiqarib va $\Omega = \omega$ deb belgilasak, diskning harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$(A + ma^2)\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + (C + ma^2)\omega\Omega\cos\theta -$$
$$- (C + ma^2 - A)\Omega^2 \sin\theta\, co\, s\theta - mga\sin\theta = 0, \qquad (8.10.12)$$
$$\frac{d}{dt}\{[(C + ma^2)\sin^2\theta + A\cos^2\theta]\Omega - C\omega\sin\theta\} = 0.$$

(8.10.12) tenglamalar tasvirlovchi nuqtaning (Ω, θ) tekislikdagi harakatini ifodalaydi. (8.10.12) ga asosan muvozanat holatlari (Ω, θ) tekislikning quyidagi egri chizig'ida joylashgan:

$$(C + ma^2)\omega\Omega - (C + ma^2 - A)\Omega^2 \sin\theta - mga\,\mathrm{tg}\,\theta = 0. \qquad (8.10.13)$$

Shunday qilib, ko'rilayotgan holda diskning statsionar harakatlari bir o'lchovli sirtni hosil qiladi. 8.10- shaklda $\omega > 0$ning bir nechta tayinlangan qiymatlari uchun (8.10.13) egri chiziqlar chizilgan.

ω ning manfiy qiymatlari uchun 8.10- shakldagi egri chiziqlarni mos ravishda Ω o'qiga nisbatan ko'zgudagi aksini olish kerak.

(8.10.13) statsionar harakatlar sirtining asimptotik turg'unlik shartlarini topamiz. Buning uchun (8.10.12) tenglamalar sistemasini Ω, θ lardan yetarlicha kichik miqdorga toyilgan Ω', θ' miqdorlarga nisbatan chiziqlashtiramiz:

$$(A + ma^2)\ddot{\theta}' + h\dot{\theta}' - [(C + ma^2)\omega\Omega\sin\theta + (C + ma^2 - A)\Omega^2\cos 2\theta +$$
$$+ mga\cos\theta]\theta' + [(C + ma^2)\omega\cos\theta - (C + ma^2 - A)\Omega\sin 2\theta]\Omega' = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\{[(C + ma^2 - A)\Omega\sin 2\theta - C\omega\cos\theta]\theta' + [(C + ma^2)\sin^2\theta + A\cos^2\theta]\Omega'\} = 0. \qquad (8.10.14)$$

Bu sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$p(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) = 0$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda

$$a_0 = (A + ma^2)[(C + ma^2)\sin^2\theta + A\cos^2\theta] > 0,$$
$$a_1 = h[(C + ma^2)\sin^2\theta + A\cos^2\theta] > 0,$$
$$a_2 = [(C + ma^2 - A)\Omega\sin 2\theta - C\omega\cos\theta][(C + ma^2 - A)\Omega\sin 2\theta -$$
$$- (C + ma^2)\omega\cos\theta] - [(C + ma^2)\sin^2\theta + A\cos^2\theta][(C + ma^2)\omega\Omega\sin\theta +$$
$$+ (C + ma^2 - A)\Omega^2\cos 2\theta + mga\cos\theta].$$

Asimptotik turg'unlik shartlari

$$h > 0, \qquad a_2 > 0 \tag{8.10.15}$$

dan iborat. Bu yerdan $\theta = \Omega = 0$ to‘g‘ri chiziqli harakatning turg‘un bo‘lishi uchun

$$\omega^2 > \omega_{kp}^2 = \frac{mgAa}{C(C + ma^2)}$$

tengsizlik bajarilishi lozimligi kelib chiqadi. Bu oxirgi disk dumalanishining turg‘unlik sharti (8.10.10) bilan bir xildir. (8.10.10) shartda ω miqdor tayinlangan emas.

$h = 0$ holi. Bu holda disk konservativ sistemani tashkil qiladi. (8.10.9) xarakteristik tenglamaning ikkita ildizi (nol ildizlarni hisobga olmasdan) yoki haqiqiy (va u vaqtda disk harakati noturg‘un), yoki qo‘shma sof mavhum bo‘ladi. Oxirgi holda sistema odatda konservativ turg‘un deb hisoblanadi. Ammo birinchi yaqinlashish bo‘yicha turg‘unlik nazariyasi nuqtayi nazaridan oxirgi hol Lyapunovning maxsus holiga kiradi va shuning uchun uni alohida tekshirishga to‘g‘ri keladi.

АДАБИЁТЛАР

1. **Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.**. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959. 915 с.
2. **Андронов А.А., Вознесенский И.Н.**. О работах Дж.К.Максвелла, И.А.Вышнеградского и В.Стодолы в области теории регулирования машин, Собрание трудов А.А.Андронова. М., Изд. АН СССР, 1956, С.490–522.
3. **Айзерман М.А.**. Теория автоматического регулирования двигателей, Уравнения движения и устойчивость, М., Наука, 1966.
4. **Айзерман М.А.**. Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем, Успехи матем. Наук, Т.IV, вып.4, 1949.
5. **Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.**. Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд. АН СССР, 1963.

5,а. **Атажанов Б., Красинская Э.М.**. О стабилизации стационарных механических систем, Прикладная математика и механика, Т.52, Вып.6, 1988, С.902–908.

5,б. **Атажанов Б., Красинская Э.М.**. К устойчивости стационарных движений неголономных систем //Изв. АН УзССР, Сер. техн.наук,1985, № 1, С.41-46.

5,в. **Атажанов Б., Красинская Э.М.**. К устойчивости стационарных движений неголономных систем //Изв. АН УзССР, Сер. техн.наук,1985, № 6, С.39–43.

6. **Артемьев Н.А.**. Осуществимые движения, Изв. АН СССР, Сер. матем., № 3, 1939.
7. **Андреев В.Д.**. Теория инерциальных навигаций. Автономные системы, М., «Наука», 1966.
8. **Барбашин Е.А.**. Введение в теорию устойчивости, М., «Наука», 1967.
9. **Барбашин Е.А.**. О построении периодических движений, ПММ, Т.25, вып.2, 1961; Программное регулирование систем со случайными параметрами, ПММ, Т.25, вып.5, 1961.
10. **Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.**. Об устойчивости движения в целом, ДАН СССР, Т.86, вып.3, 1952.
11. **Барбашин Е.А.**. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка, ПММ, Т.16, вып.5, 1952.
12. **Баутин Н.Н.**. Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости, М., Гостехиздат, 1949.

13. **Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А..** Введение в теорию нелинейных колебаний, М., «Наука», 1976.
14. **Бутенин Н.В..** Автоколебания стенда с автопилотом, Труды ЛВВА, Т.3, 1943.
15. **Болотин В.В..** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, Физматгиз, Москва, 1961.
16. **Ведров В.С..** Об устойчивости движения, Труды ЦАГИ, вып. 327, 1937.
17. **Вышнеградский И.А..** О регуляторах прямого действия (1876), Сб. «Теория автоматичесокго регулирования», Изд. АН СССР, 1949.
18. **Воронец В.П..** Об уравнениях движения для неголономных систем, Матем.сб., 1901, Том 22, вып. 4.
19. **Вкроч И..** Интегральная устойчивость, Чехосл. Мат. Жур., Т.9, № 1, 1959.
20. **Гантмахер Ф.Р..** Теория матриц, М.: -«Наука»,1967.
21. **Гермаидзе В.Е., Красовский Н.Н..** Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ПММ, Т.21, вып.6, 1957.
22. **Горшин С.И..** Об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях. Критические случаи, Изв. АН Казахской ССР, № 56, сер.мат. и мех. Вып.2, 1948.
23. **Горшин С.И..** Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями, Изв. АН Казахской ССР, № 58, 1948.
24. **Диментберг Ф.М..** Изгибные колебания вращающихся валов, Изд.АН СССР, Москва, 1959.
25. **Дубошин Г.Н..** К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений, Труды ГАИШ, Т.XIV, вып.1, 1940.
26. **Дубошин Г.Н..** Основы теории устойчивости движения, М.,Изд.МГУ, 1952.
27. **Еругин Н.П..** Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования, ПММ, Т.XVI, вып.5, 1952.
28. **Еругин Н.П..** Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений, ПММ, Т.14, вып. 5, 1950; О некоторых вопросах теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений, ПММ, Т.14, вып.6, 1950.
29. **Емельянова И.С., Фуфаев Н.А..** Об устойчивости стационарных движений, В сб.: Теория колебаний, Прикл.мат и киберн., Горький, 1974, С.3–9.

30. **Емельянова И.С..** К определению циклических координат и стационарных движений механических систем, В сб.: Динамика систем, Вып.3, Горький, 1974, С.117–130.
31. **Емельянова И.С..** Об устойчивости стационарных движений и состояний равновесия неголономных механических систем, В сб.: Вопр.прикл.мат. и мех., Вып.4, Чебоксары, 1975, С.149–158.
32. **Жуковский Н.Е..** О прочности движения, Ученые зап. МГУ, отдел физ.-мат., вып.4, 1882; Собрание сочинений, Т.1., Гостехиздат,1948.
33. **Зубов В.И..** Методы А.М.Ляпунова и их применение, Изд. ЛГУ, 1957.
34. **Кай И.Я..** Красовский Н.Н., Об устойчивости систем со случайными параметрами, ПММ, Т.24, вып.5, 1960.
35. **Капица П.Л..** Устойчивость и переход через критические обороты быстровращающихся роторов при наличии трения, ШТФ, IX, вып.2., 1939.
36. **Карапетян А.В..** Об устойчивости равновесия неголономных систем, Прикл.мат и мех., 1975, **39**, № 6, С.1135–1140.
37. **Карапетян А.В..** О распространении теоремы Лагранжа на неголономные системы Чаплыгина, Теория и приложения механики, 1979, **10**, № 2, С.11-16.
38. **Карапетян А.В..** Некоторые задачи устойчивости движения неголономных систем, В сб.: Теория устойчивости и ее приложения, Новосибирск, 1979, С.184–190.
39. **Красовский Н.Н..** Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., Физматгиз, 1959.
40. **Красовский Н.Н..** Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений, ПММ, Т.17, вып.6, 1953; Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях, ПММ, 18, вып.1, 1954.
41. **Красинский А.Я., Ронжин В.В..** К стабилизации установившихся движений механических систем с циклическими координатами. Прикладная математика и механика, Том.52, вып.4, 1988, С.542-548.

41,а. **Красинский А.Я., Ронжин В.В..** Об оптимальной стабилизации установившихся движений голономных систем. //Всесоюзн.науч.конф. «Метод функций А.М.Ляпунова в современной математике», Тез.докл.,Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1986. С.95.

41,б. **Красинский А.Я..** О математическом моделировании в задачах оптимальной стабилизации установившихся движений. //Всесоюз. Школа-семинар «Математическое моделирование в науке и технике». Тез.докл.,Пермь: УНЦ АН СССР, 1986, С.184–185.

41,в. **Красинский А.Я..** К стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами. Прикладная математика и механика, Том.56, вып.6, 1992, С.939–950.

41,г. **Красинский А.Я..** Об устойчивости и стабилизации положений равновесия неголономных систем, Прикладная математика и механика, Том.52, вып.2, 1988, С.194–202.

42. **Крылов А.Н..** О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета, Собрание трудов, Т.IV, Изд. АН СССР, 1937.

43. **Келдыш М.В..** Шимми переднего колеса трехколесного шасси, Труды ЦАГИ, № 564, 1945.

44. **Князев Г.Н..** Об устойчивости неголономных систем в критических случаях, Вопросы аналитической и прикладной механики, Сб.статей, Оборонгиз, 1963.

45. **Красинская-Тюменева Э.М., Красинский А.Я..** О влиянии структуры сил на устойчивость равновесия неголономных систем, В сб.: Вопросы вычислительной и прикладной математики, вып.45, Ташкент, 1977, С.172-185.

45,а. **Красинская Э.М..** К стабилизации стационарных движений механических систем, Прикладная математика и механика, Т.47, вып.2, 1983, С.302–309.

45,б. **Красинская Э.М., Ронжин В.В..** К стабилизации стационарных движений голономных механических систем, //Изв.АН УзССР, Сер.техн.наук, 1983, Вып.1, С.33–36.

46. **Крейн М.Г., Наймарк М.А..** Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений, Харьков, 1936.

47. **Летов А.М..** Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования, М., Гостехиздат, 1955.

48. **Лурье А.И..** Об устойчивости одного класса регулируемых систем, ПММ, Т.XV, вып.5, 1951.; О характере границ области устойчивости регулируемых систем, ПММ, Т.XV, вып.2, 1951.

49. **Лурье А.И..** Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.

30. **Емельянова И.С..** К определению циклических координат и стационарных движений механических систем, В сб.: Динамика систем, Вып.3, Горький, 1974, С.117–130.
31. **Емельянова И.С..** Об устойчивости стационарных движений и состояний равновесия неголономных механических систем, В сб.: Вопр.прикл.мат. и мех., Вып.4, Чебоксары, 1975, С.149–158.
32. **Жуковский Н.Е..** О прочности движения, Ученые зап. МГУ, отдел физ.-мат., вып.4, 1882; Собрание сочинений, Т.1., Гостехиздат,1948.
33. **Зубов В.И..** Методы А.М.Ляпунова и их применение, Изд. ЛГУ, 1957.
34. **Кай И.Я..** Красовский Н.Н., Об устойчивости систем со случайными параметрами, ПММ, Т.24, вып.5, 1960.
35. **Капица П.Л..** Устойчивость и переход через критические обороты быстровращающихся роторов при наличии трения, ШТФ, IX, вып.2., 1939.
36. **Карапетян А.В..** Об устойчивости равновесия неголономных систем, Прикл.мат и мех., 1975, **39**, № 6, С.1135–1140.
37. **Карапетян А.В..** О распространении теоремы Лагранжа на неголономные системы Чаплыгина, Теория и приложения механики, 1979, **10**, № 2, С.11-16.
38. **Карапетян А.В..** Некоторые задачи устойчивости движения неголономных систем, В сб.: Теория устойчивости и ее приложения, Новосибирск, 1979, С.184–190.
39. **Красовский Н.Н..** Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., Физматгиз, 1959.
40. **Красовский Н.Н..** Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений, ПММ, Т.17, вып.6, 1953; Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях, ПММ, 18, вып.1, 1954.
41. **Красинский А.Я., Ронжин В.В..** К стабилизации установившихся движений механических систем с циклическими координатами. Прикладная математика и механика, Том.52, вып.4, 1988, С.542-548.

41,а. **Красинский А.Я., Ронжин В.В..** Об оптимальной стабилизации установившихся движений голономных систем. //Всесоюзн.науч.конф. «Метод функций А.М.Ляпунова в современной математике», Тез.докл.,Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1986. С.95.

41,б. **Красинский А.Я..** О математическом моделировании в задачах оптимальной стабилизации установившихся движений. //Всесоюз. Школа-семинар «Математическое моделирование в науке и технике». Тез.докл.,Пермь: УНЦ АН СССР, 1986, С.184–185.

41,в. **Красинский А.Я..** К стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами. Прикладная математика и механика, Том.56, вып.6, 1992, С.939–950.

41,г. **Красинский А.Я..** Об устойчивости и стабилизации положений равновесия неголономных систем, Прикладная математика и механика, Том.52, вып.2, 1988, С.194–202.

42. **Крылов А.Н..** О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета, Собрание трудов, Т.IV, Изд. АН СССР, 1937.

43. **Келдыш М.В..** Шимми переднего колеса трехколесного шасси, Труды ЦАГИ, № 564, 1945.

44. **Князев Г.Н..** Об устойчивости неголономных систем в критических случаях, Вопросы аналитической и прикладной механики, Сб.статей, Оборонгиз, 1963.

45. **Красинская-Тюменева Э.М., Красинский А.Я..** О влиянии структуры сил на устойчивость равновесия неголономных систем, В сб.: Вопросы вычислительной и прикладной математики, вып.45, Ташкент, 1977, С.172-185.

45,а. **Красинская Э.М..** К стабилизации стационарных движений механических систем, Прикладная математика и механика, Т.47, вып.2, 1983, С.302–309.

45,б. **Красинская Э.М., Ронжин В.В..** К стабилизации стационарных движений голономных механических систем, //Изв.АН УзССР, Сер.техн.наук, 1983, Вып.1, С.33–36.

46. **Крейн М.Г., Наймарк М.А..** Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений, Харьков, 1936.

47. **Летов А.М..** Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования, М., Гостехиздат, 1955.

48. **Лурье А.И..** Об устойчивости одного класса регулируемых систем, ПММ, Т.XV, вып.5, 1951.; О характере границ области устойчивости регулируемых систем, ПММ, Т.XV, вып.2, 1951.

49. **Лурье А.И..** Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.

50. **Лурье А.И., Постников В.Н..** К теории устойчивости регулируемых систем, МПП, 8, вып.3, 1944.
51. **Лагранж Ж..** Аналитическая механика, Т.1-2, М.-Л., Гостехиздат, 1950; Lagrange J.L., Mecanique analitique. Paris, 1788.
52. **Ляпунов А.М..** Общая задача об устойчивости движения, М.: - Гостехиздат,1950.
53. **Малкин И.Г..** Теория устойчивости движения, М., «Наука», 1966, 530 с.
54. **Малкин И.Г..** Проблема существования функций Ляпунова, Изв. Казанского физ. мат. об-ва, Т.IV (1929-1930), Т.V (1931); Об устойчивости движения в смысле Ляпунова, Матем.сб. Т.3, вып.1, 1938.
55. **Малкин И.Г..** Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ПММ, Т.VIII, № 3, 1944.; Об устойчивости систем автоматического регулирования, ПММ, Т.16, вып.4, 1952.
56. **Малкин И.Г..** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., Гостехиздат, 1956.
57. **Матросов В.М..** Об устойчивости движения, ПММ, Т.XXVI, вып.5, 1962.
58. **Максвелл Дж.К..** О регуляторах, (1868), Сборник «Теория автоматического регулирования», Изд. АН СССР, 1949.
59. **Матросов В.М..** К вопросу устойчивости гироскопических систем с диссипацией, Труды Казанского авиац. Института, вып.45, 1959.
60. **Меркин Д.Р..** Введение в теорию устойчивости движения, М., «Наука», 1971, 312 с.
61. **Меркин Д.Р..** Гироскопические системы, М., Гостехиздат, 1956.
62. **Михайлов А.В..** Автоматика и телемеханика, Т.3, 1938.; Журнал технической физики, № 6, 1938.
63. **Неймарк Ю.И..** Динамические системы и управляемые процесссы, М., «Наука», 1978, 336 с.
64. **Неймарк Ю.И..** Об условиях самовозбуждения и стабилизации, Горький, Ученые зап. ГГУ, вып.28, сер.ф.-м.наук, 1955.
65. **Неймарк Ю.И..** Устойчивость линеаризованных систем, Ленинград, Изд. ЛВВКА, 1949.
66. **Неймарк Ю.И..** О допустимости линеаризации при исследовании устойчивости, ДАН СССР, Т.127, № 5, 1959.

67. **Неймарк Ю.И..** О некоторых общих свойствах функции Ляпунова, Горький, Изв. Вузов Радиофизика, Т.4, вып.2, 1961.
68. **Неймарк Ю.И..** Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.
69. **Неймарк Ю.И.** Динамика неголономных систем, В сб. «Механика в СССР за 50 лет», Том 1, Москва, Наука, 1968, 171–178 с.
70. **Неймарк Ю.И, Фуфаев Н.А..** К вопросу о путевой устойчивости экипажей на баллонных колесах, ДАН СССР, 1966, Том 170, № 3, С.533–536.
71. **Неймарк Ю.И, Фуфаев Н.А..** Динамика неголономных систем, М., Наука, 1967.
72. **Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А..** Устойчивость состояний равновесия неголономных систем, Прикладная математика и механика, 1965, **29**, № 1, 46-53; Об устойчивости состояний равновесия неголономных систем, ДАН СССР, 1965, **160**, № 4, С.781–784.
73. **Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А..** Об устойчивости стационарных движений голономных и неголономных систем, Прикл.мат.и мех., 1966, **30**, № 2, С.236–242.
74. **Николенко И.В..** Об устойчивости установившихся движений неголономных систем П.В. Воронца, Прикл.мех., 1968, **4**, № 4, С.84–89.
75. **Николаи Е.Л..** Теоретическая механика, ч.3., ГОНТИ, 1939.
76. **Обморшев А.Н..** Колебания и устойчивость неголономных систем, В сб.: Механика, Москва, 1955, С.75-96; Колебания линейных неголономных систем около состояния установившегося движения, Изв.АН СССР, Отд.тех.наук, Мех.и машиностроение, 1961, № 5, С.84–89.
77. **Плисс В.А..** Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом, Изд. ЛГУ, 1958.
78. **Понтрягин Л.С..** Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: -Наука, 1965, 332 с.
79. **Пуанкаре А..** О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Москва, Гостехиздат, 1947.
80. **Румянцев В.В..** Об устойчивости движения по отношению к части переменных, Вестник МГУ, № 4, 1957.
81. **Румянцев В.В..** Об устойчивости стационарных движений спутников, Математические методы в динамике космических аппаратов, вып. 4, Изд. ВЦ АН СССР, 1969.

82. **Румянцев В.В..** Карапетян А.В., Устойчивость движений неголономных систем, /Итоги науки и техники, Общая механика, Том 3, вып.7, М., ВИНИТИ, 1977.
83. **Румянцев В.В., Карапетян А.В..** Устойчивость консервативных и диссипативных систем /Итоги науки и техники, Общая механика, Том 6, М., ВИНИТИ, 1983.
84. **Румянцев В.В..** Об устойчивости движения неголономных систем, Прикл.мат. и мех., 1967, **31**, № 2, С.260–271.
85. **Румянцев В.В..** Метод функции Ляпунова в теории устойчивости движения, В сб. «Механика в СССР за 50 лет», Том 1, Москва, «Наука», 1968, С. 7–66.
86. **Румянцев В.В..** Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных, Прикл.мат и мех., 1971, **35**, № 1, С.138–143.
87. **Семенова Л.Н..** О теореме Рауса для неголономных систем, Прикл.мат и мех., 1965, **29**, № 1, С.156-157.
88. **Султанов Р.М..** Некоторые свойства матриц с элементами из некоммутативного кольца, Баку, Труды сектора матем. АН Аз ССР, 2, 1946, С.11–17.
89. **Сумбатов А.С..** О линейных интегралах неголономных систем, Вестник МГУ, Мат., Мех. 1972, № 6, С.77–83.
90. **Тамм И.Е..** Основы теории электричества, Изд. 5-е, Гостехиздат, М., 1954.
91. **Тураев Х.Т., Фуфаев Н.А., Мусарский Р.А..** Теория движения систем с качением, Ташкент, «ФАН», 1987, 158 с.
92. **Тураев Х.Т..** Моделирование и исследование динамики колесных транспортных машин с деформируемыми шинами, Ташкент, «ФАН», 1995, 168 с.
93. **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Программа «Автоматизация исследования устойчивости движения колесно-транспортных машин», Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ, № DGU 00305, ГКНТ РУз, Государственное патентное ведомство, 28.02.2000.
94. **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Программно-инструментальная система «AVTO» для автоматизации исследования устойчивости движения колесных транспортных машин, Доклады Международной конференции «Проблемы управления и информатики», Бишкек, 19–22 сентября, 2000, С.285–290.

95. **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Алгоритм развертывания определителя *n*-го порядка с полиномиальными элементами, Материалы Международной конференции The third international workshop on computer algebra in scientific computing CASC-2000, Samarkand, Uzbekistan, October 5-9, 2000, С.93–96.
96. **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Алгоритм определения рациональной области устойчивости и рациональных значений конструктивных параметров колесных транспортных машин. International scientific and practical conference «INNOVATION-2000», The scientific articles, Bukhara, September 5-7, 2000, С.296–298.
97. **Урунбаев Э..** Программа нахождения рациональной области устойчивости движения и рациональных значений конструктивных параметров динамических систем, Сведетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ, № DGU 00475, ГКНТ РУз, Государственное патентное ведомство, 15.11.2001; Программа исследования области устойчивости движения систем с качением. Сведетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ, № DGU 00476, ГКНТ РУз, Государственное патентное ведомство, 15.11.2001; Программа раскрытия определителя *n*-го порядка, Сведетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ, № DGU 00477, ГКНТ РУз, Государственное патентное ведомство, 15.11.2001.
98. **Хуа Ло-ген, Розенфельд Б.А..** Геометрия прямоугольных матриц и ее применения к вещественной проективной и неевклидной геометрии, Изв.высших уч.зав. СССР, Математика, 1, 1957, С.233–246.
99. **Циммерман Г.К..** Разложение нормы матрицы по произведениям норм её строк, Научные записки Николаевского Гос.пед. института, №4,1953,130–135 с.
100. **Четаев Н.Г..** Об устойчивых траекториях динамики, Ученые записки Казанского гос. Ун-та, кн. 4, Вып.1, 1936.
101. **Четаев Н.Г..** Одна теорема о неустойчивости, ДАН СССР, Т.1, № 9, 1934.
102. **Четаев Н.Г..** Устойчивость движения, Гостехиздат, 1956; Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., Изд. АН СССР, 1962.
103. **Четаев Н.Г..** К вопросу об обращении теоремы Лагранжа, Сб. научн. Трудов Казанск. Авиационного ин-та, № 2, 1934.
104. **Четаев Н.Г..** Об устойчивости вращательных движений снаряда, ПММ, Т.X, вып.1, 1946.

105. **Чаплыгин С.А..** О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости, Тр.отд. физ.наук Обществе любителей естествознания, 1897, 9; Собр.соч., Том 1, М. –Л., Гостехиздат, 1948; Т.4, М. –Л., Гостехиздат, 1949.
106. **Шульгин М.Ф..** О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании, Труды САГУ, 1958, **144**, С.183.
107. **Appell P..** Sur une forme generale des equations de la dynamique, C.r. Acad. Sei., 1899, **129**, 423-427; - Перевод: Аппель П., Теоретическая механика, Т.2, Москва, Физматгиз, 1960.
108. **Aiserman M.A., Gantmacher F.R..** Stabilität der Gleichgewichtsiage in einem nichtholonomen System., Z. angew. Math. Und Mech., 1957, **37**, № ½, 74–75.
109. **Bottema O..** On the small vibrations of nonholonomic systems. Proc. Kon. Ned. akad. wet., 1949, **52**, № 8, С. 848–850.
110. **Hertz H..** Die Prinzipen der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Leipzig, 1894. – Перевод: Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, М., Изд. АН СССР, 1959.
111. **Herrman G..** Stability of Equilibrium of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces. Applied Mechanics Reviews, **20**, № 2, 1967.
112. **Thomson W., Tait P..** Treatise on Natural Philosophy, Т.1, 1879.
113. **Cahen G..** Elements de calcul matriciel, Paris, 1955.
114. **Whittaker E.T..** Atreatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge, Univ., Press, 1904. – Перевод: Уиттекер Е.Т., Аналитическая динамика, М. –Л., ОНТИ, 1937.
115. **Routh E.J.** An elementary treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. Cambridge, 1860.
116. **Routh E.J..** The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London, 1884.
117. **Routh E.J..** A treatise on the stability of a given state of motion. London: McMilland and Co., 1877.
118. **Раус Э. Дж..** Динамика системы твердых тел: Пер. с англ. Т.1., М.: «Наука», 1983, 463 с.
119. **Lejeune-Dirichlet G..** Über die Stabilität der Gleichgewichtslagen. J. Reine und angew. Math., 1846, **32**, 85-88. Перевод: Лежен Дирихле Г. Об устойчивости равновесия. В кн.: Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т.1, М.: Гостехиздат, 1950, С.537–540 (Доп.II).

120 **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Математические модели движения автомобиля в случае больших величин кинематических параметров шин и теории увода. ДАН РУз, № 11, «ФАН», Ташкент, 1999, 37–40 с.

121 **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Математические модели движения автомобиля в случае достаточно больших скоростей движения и гипотезы увода. ДАН РУз, №9, ФАН, Ташкент, 1999, 28–33 с.

122 **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Автоматизация моделирования и исследования устойчивости движения автомобиля. Материалы Международной научной конференции, посвященной 1200-летию Ахмада ибн Мухаммада ал-Фергани. 28–30 сентября 1998г. Ташкент, ТГТУ, 1999, С.146–150.

123 **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Математическая модель движения автомобиля с учетом упругости и деформируемости пневматика. Материалы Международной научной конференции, посвященной 1200-летию Ахмада ибн Мухаммада ал-Фергани. 28-30 сентября 1998г. Ташкент, ТГТУ, 1999, С.150–155.

124 **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Теория качения деформируемого колеса. Вестник СамГУ, № 1,Самарканд,1999,С.21–29.

125 **Тураев Х.Т..** О работе Горьковской школы А.А.Андронова по теории устойчивости систем с качением. Тезисы докладов V-Международной конференции "Нелинейные колебания механических систем", Нижний Новгород, 13-16 сентября 1999 г.

126 **Тураев Х.Т..** Математические модели и устойчивость движения автомобиля. Тезисы докладов V- Международной конференции "Нелинейные колебания механических систем", Нижний Новгород, 13–16 сентября 1999 г.

127 **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Программно-инструментальная система «AVTO» для автоматизации исследования устойчивости движения колесных транспортных машин. Доклады Международной конференции «Проблемы управления и информатики», Бишкек, 19–22 сентября, 2000, С.285–290.

128 **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** К вопросу о влиянии конструктивных параметров на устойчивость прямолинейного движения автомобиля. Материалы Международной научно-технической конференции «Развитие и эффективность автомобильно-дорожного комплекса в Центрально-азиатском регионе», Ташкент, 1-3 ноября, 2000, Часть-1, С.108–114.

130 **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Алгоритм определения рациональной области устойчивости и рациональных значений конструктивных параметров колесных транспортных машин. International scientific and practical conference «INNOVATION-2000», The scientific articles, Bukhara, September 5-7, 2000, С.296–298.

131 **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Программа «Автоматизация исследования устойчивости движения колесно-транспортных машин». Свидетельство об официальной регистрации программмы для ЭВМ, №DGU 00305, ГКНТ РУз, Государственное патентное ведомство, 28.02.2000.

132 **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Уравнения колебаний кузова движущегося четырехколесного экипажа по горизонтальной и наклонной плоскости. ДАН РУз, №4,Ташкент.-«ФАН», 2002.

133 **Тураев Х.Т., Урунбаев Э..** Уравнения колебаний кузова экипажа с учётом бокового увода колёс. ДАН РУз, №6, Ташкент.-«ФАН». 2002.

134 **Б.Атаджанов, А.Красинский, Х.Тураев, Ф. Муродов, Э.Урунбоев.** Математическая модель криволинейного движения автомобиля с учетом упругости и деформируемости шин. 1.Кинематика системы. Сборник научн.статей. Междун. научн. конф. "Инновация-2001."Ташкент, 2002, С.158–161 .

135 **Б.Атаджанов, А.Красинский, Х.Тураев, Э.Урунбоев..** Динамика автомобиля на балонных колесах. Доклады научной конференции "Современные проблемы алгоритмизации и программирования", Ташкент, 5-7 сентября, 2001, С.76–80.

136 **Б.Атаджанов, А.Красинский, Х.Тураев..** Стабилизация установившихся движений механических систем с дифференциальными связями. Доклады научной конференции «Современные проблемы алгоритмизации и программирование», Ташкент, 5-7 сентября, 2001, С.80–82.

MUNDARIJA

SO'ZBOSHI 3
KIRISH 5

I BOB. **UMUMIY TUSHUNCHALAR VA TA'RIFLAR**..... 10
1-§. Harakatning turg'unlik nazariyasi predmeti haqida..... 10
2-§. Turg'un harakat. Toyilgan harakatning differensial tenglamasi..... 11
2.1. Turg'un harakatning ta'riflanishi..... 11
2.2. Toyilgan harakatning differensial tenglamalari..... 14
3-§. Toyilgan harakatning tenglamalarini tuzishga doir misollar..... 15
1-misol. Matematik mayatnik toyilgan harakatining tenglamasi..... 15
2-misol. Qo'zg'almas nuqta atrofida inersiya bo'yicha aylanayotgan qattiq jism toyilgan harakatining tenglamasi..... 16
3-misol. Konik (konussimon) mayatnik toyilgan harakatining differensial tenglamalari..... 17
4-misol. Yer sun'iy yo'ldoshi massasi markazi toyilgan harakatining differensial tenglamalari..... 19
4-§. Barqaror (statsionar) va barqarormas (nostatsionar) harakatlar..... 23
5-§. Uzluksiz ta'sir etadigan toydiruvchi kuchlar ta'siridagi harakatning turg'unligi haqida..... 24
6-§. Turg'unlik masalasini yechishning usullari haqida..... 28

II BOB. **BARQAROR HARAKATLAR UCHUN LYAPUNOVNING IKKINCHI USULI**..... 32
1-§. Lyapunov funksiyalari. Aniq ishorali va o'zgaruvchan ishorali funksiyalarning alomatlari..... 32
1.1. Lyapunov funksiyalari..... 32
1.2. Funksiyalarning aniq ishoralilik va o'zgaruvchan ishoralilik alomatlari..... 33
2-§. Harakat turg'unligi haqidagi Lyapunovning birinchi teoremasi..... 39
3-§. Harakatning asimptotik turg'unligi haqidagi Lyapunov teoremasi..... 45
4-§. Harakatning batamom asimptotik turg'unligi haqidagi Barbashin – Krasovskiylar teoremalari..... 49
5-§. Turg'unlik haqidagi teoremalarning geometrik talqini..... 51

6-§. Harakatning noturg'unligi haqidagi Lyapunovning birinchi teoremasi..... 52
7-§. Harakatning noturg'unligi haqidagi Lyapunovning ikkinchi teoremasi..... 54
8-§. Teorema D ning geometrik talqini. N.G.Chetayev teoremasi..... 55
9-§. Integrallar bog'lanmasi vositasida Lyapunov funksiyasini tuzish..... 59
10-§. Hosilasi o'zgarmas ishorali bo'lgan Lyapunov funktsiyalariga asoslangan kriteriyalar..... 60
11-§. Lyapunovning harakat turg'unligi haqidagi teoremasining tatbiqiga doir misollar..... 62
1-misol. Konik (konussimon) mayatnik harakatining turg'unligi..... 62
2-misol. Er sun'iy yo'ldoshi statsionar harakatining turg'unligi..... 65
12-§. Asimptotik turg'unlik haqidagi teoremaning tatbig'iga doir misollar..... 69
1-misol. Lampali generatorning turg'unlik sharti..... 69
2-misol. Avtomatik rostlash sistemasining turg'unligi nazariyasining bitta masalasi haqida..... 73

III BOB. **KONSERVATIV SISTEMALAR MUVOZANAT HOLATI VA STATSIONAR HARAKATLARINING TURG'UNLIGI**..... 78
1-§. Muvozanat holatining turg'unligi haqidagi Lagranj teoremasi..... 78
2-§. Lagranj – Dirixle teoremasining tatbiqiga doir misollar..... 81
3-§. Siklik koordinatalar. Raus almashtirishi 82
4-§. Statsionar (barqaror) harakatlar turg'unligi..... 86
5-§. Raus teoremasining tatbiqiga doir misollar..... 89
1-misol. Konussimon mayatnik statsionar harakatining turg'unligi..... 89

IV BOB. **BARQAROR HARAKATLAR UCHUN BIRINCHI YAQINLASHISH USULI BO'YICHA TURG'UNLIK KRITERIYALARI**..... 92
1-§. Birinchi yaqinlashish tenglamalari..... 92
2-§. Ba'zi yordamchi mulohazalar..... 99
3-§. O'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Lyapunov funksiyasini tuzish..... 103

4-§. Birinchi yaqinlashish bo'yicha turg'unlik haqidagi Lyapunov teoremalari..... 106
5-§. Teoremalarning tatbiqiga doir misollar..... 109
1-misol. Qo'zg'almas nuqta atrofida inersiya bo'yicha aylanayotgan qattiq jism harakatining turg'unligi..... 109
2-misol. Snaryadning aylanma harakati turg'unligining zaruriy sharti..... 111

V BOB. **BARQAROR HARAKATLAR UCHUN KRITIK HOLLARNI TADQIQ ETISH** 113

1-§. Xarakteristik tenglama. Bitta nol ildizga ega bo'lgan hol. Differensial tenglamalarni maxsus ko'rinishga keltirish..... 113
2-§. Birinchi tartibli sistema uchun masalani tadqiq etish..... 115
3-§. $(n+1)$ - tartibli sistema uchun masalani xususiy holda tadqiq etish..... 117
4-§. $(n+1)$ - tartibli sistema uchun masalani umumiy holda tadqiq etish..... 120
5-§. Misollar..... 122
6-§. Maxsus holda turg'unlik masalasini tadqiq etish..... 129
7-§. Juft sof mavhum ildizlar holi. Toyilgan harakat tenglamalarini maxsus ko'rinishga keltirish..... 132
8-§. Ikkinchi tartibli sistema. Masalani yechishning birinchi usuli..... 134
9-§. Ikkinchi tartibli sistema. Lyapunov funksiyasini tuzish usuli bilan masalani yechish..... 142
10-§. Ikkinchi tartibli sistema. Masalani yechishning uchinchi usuli..... 150
11-§. $(n+2)$ - tartibli sistemani xususiy holda tadqiq etish..... 159
12-§. $(n+2)$ - tartibli sistemani umumiy holda tadqiq etish..... 167
13-§. $(n+2)$ - tartibli sistemani maxsus holda tadqiq etish..... 176
14-§. Turg'unlik sohasining «xavfli» va «xavfsiz» chegaralari..... 182

VI BOB. **RAUS – GURVITS MUAMMOSI** 190
1-§. Raus-Gurvits muammosi paydo bo'lishining tarixi 190
2-§. Koshi indeksi va Shturm teoremasi 191
3-§. Raus algoritmi. Maxsus hollar. Misollar 195
4-§. Raus-Gurvits teoremasi 202
5-§. Orlando formulasi. Raus-Gurvits teoremasidagi maxsus hollar 208
6-§. Lenar va Shiparning turg'unlik kriteriyasi 211
7-§. Turg'unlik va noturg'unlik hodisalarini tekshirishga fizik yondashuv 212
8-§. Chiziqlashtirilgan tizimlarda noturg'unlikning paydo bo'lishiga doir misollar 222
9-§. Turg'unlik sohalarini yasash. Y.I.Neymarkning D-bo'laklash usuli 225
10-§. Bir kompleks parametr tekisligida turg'unlik sohasini yasash 228
11-§. D-bo'laklash usuli bilan ikki haqiqiy parametr tekisligida turg'unlik sohasini yasash 237
12-§. Mixaylov kriteriyasi 246
13-§. Yopiq tizim va ochiq tizim harakatlari o'rtasidagi bog'lanish. Dinamik tizimlarni operator orqali ifodalashda qo'zg'almas nuqta prinsipi 249
14-§. Naykvist kriteriyasi 254
15-§. Turg'unlik kriteriyalari va algoritmlari. τ- va ν- o'tish. Mavhum o'qning chap va o'ng tarafida yotgan ildizlar sonini topish algoritmi 257
16-§. Ko'phad ildizlari haqiqiy qismining manfiy va musbat ishoralilari sonini topishning determinantli kriteriylari 263

VII BOB. **HARAKAT TURG'UNLIGIGA KUCHLAR TARKIBINING TA'SIRI** 267
1-§. Matematik tarkibiga qarab kuchlarni sinflarga ajratish 267
2-§. Faqat potensial kuchlar ta'siri ostidagi tizim harakatining turg'unligi. Turg'unlik koeffitsiyentlari 274
3-§. Potensial tizim harakatining turg'unligiga dissipativ va giroskopik kuchlarning ta'siri 277
4-§. Tomson va Tet teoremalarining tatbiqiga doir misollar 283
5-§. Faqat giroskopik va dissipativ kuchlar ta'siri ostidagi harakatning turg'unligi 288

5.1. Faqat giroskopik kuchlar ta'sir etadigan hol..... 288
5.2. Giroskopik va dissipativ kuchlar..... 294
6-§. Harakatning turg'unligiga nokonservativ kuchlarning ta'siri..... 298
6.1. Faqat nokonservativ kuchlar ta'siridagi harakat..... 298
6.2. Nokonservativ va potensial kuchlar ta'siridagi harakat..... 299
6.3. Nokonservativ, potensial va dissipativ kuchlar ta'siridagi harakat..... 301
6.4. Umumiy hol..... 303
7-§. Nokonservativ kuchlar ta'siri ostidagi tizim harakatining turg'unligini tadqiq etishga doir misollar..... 310

VIII BOB. **NOGOLONOM TIZIMLAR TURG'UNLIGI**..... 314

1-§. Nogolonom tizimlar haqida umumiy tushunchalar..... 314
2-§. Nogolonom tizimlar muvozanat holatining turg'unligi..... 323
2.1. Kichik tebranishlar tenglamasini tuzish. Koeffitsiyentlar matritsasining xususiyati. Umumiy nazariyani tatbiq etish mumkinligi. Olinadigan natijalarning ma'nosi..... 325
2.2. Nogolonom tizimning muvozanat holatlari ko'p xilligi yaqinidagi kichik tebranishlar tenglamalari. Muvozanat holatlari kyp xilligining turg'unligi..... 328
3-§. Nogolonom tizimlarning muvozanat holati atrofidagi turg'unligini va kichik tebranishlarini tadqiq etishga doir misollar..... 333
4-§. Nogolonom tizimlar muvozanat holatlari sirtining assimptotik turg'unligi haqidagi teorema..... 338
5-§. Doimo ta'sir etuvchi kichik kuchlarga (toydiruvchilarga) nisbatan turg'unlik..... 341
6-§. Kerkgoven-Vitgof masalasi..... 342
7-§. Lagranj teoremasini nogolonom tizimlarga qo'llash..... 352
8-§. Nogolonom tizimlarning siklik koordinatalari. Masalaning qo'yilishi 357
9-§. Golonom va nogolonom tizimlar statsionar harakatlarining turg'unligi..... 362
10-§. Muayyan golonom va nogolonom tizimlar statsionar harakatlarining turg'unligini tadqiq etish..... 365
ADABIYOTLAR..... 372

VI

HOTAM TO‘RAEV

HARAKATNING TURG‘UNLIK NAZARIYASI

Muharrir Hasanov O‘

Bosishga ruxsat etildi 27.06.2006 y. Bichimi 60x84 1/16. «Times U
harfida terildi. Nashr tabog‘i – 26,675. Bosma tabog‘i – 24,25.
Adadi 1000. Buyurtma №351.
Shartnoma 33-05

VII

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti «ALOQACHI» nashriy
matbaa markazida chop etildi.
Toshkent sh., Amir Temur ko‘chasi, 108-uy