

А. КАРИМХУЖАЕВ, А. Ш. ЛАТИПОВ

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА МАСАЛАЛАРДА

Тошкент
«Университет»
1992

Узв. 2
530.145
5-26

Маъмур ўқув қўлланма университетларнинг "Назарий механика" курсининг дастурига мос равишда тузилгандир. Қўлланма асосан физика куллиётларининг қўлланма ва кечки бўлим талабалари учун мўлжаллангандир.

Ечми берилган масалалар ва машқлар ҳафталик ўқув дастурига мосдир. Муаллифлар бу қўлланма талабаларга мустақил сабоқ олишда, синон ишлари вариантларини тузишда асқотали, деган умиддалар. Қўлланмани тузишда маъмур курс бўйича мавжуд адабиётлардан кенг қўлланма фойдаланилди.

Маъмур қўлланмадан амалий машғулотларни олиб борувчи ёш ўқитувчилар, аспирантлар, сиртки бўлим талабалари ҳам фойдаланиши мумкин.

Маъмур муҳаррир : проф. М.М. Мусахонов

Муҳаррир: О.М. Бобоев

Босилган руҳият эгилли. 25.09.92. Когоз № 2. Бичими 60x84 16. Оператив босма усулида босилди. Шарҳи босма тобоги 5,2. Нашриёт ҳисоб тобоги 5,6. Бууртма № 921. Адрес 300 нуска. Баҳоси 10000. "Университет" нашриёти. Тошкент, 700095. Талабалар шахарчаси, ТошД бос бичоси.

"Университет" нашриёти босмаҳонасида босилди.

© "Университет" - 1992

I. ҲАРАКАТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Механик система ҳолатини аниқ белгилаш учун зарур бўлган мустақил катталиклар сони система эркинлик даражаси дейилади. Масалан : n та моддий нуктадан иборат системанинг эркинлик даражаси $3n$ га тенгдир. Мустақил катталиклар албатта нукталарнинг декарт координатлари бўлиши шарт эмас.

Эркинлик даражаси n бўлган система ҳолатини тўла характерловчи n та исталган $q_1, q_2, \dots, q_n$ катталиклар шу системанинг умумлашган координатлари деб, $q_i = q_i(t)$ ҳосилалар эса унинг умумлашган тезликлари деб аталади.

Тезланишлар $\ddot{q}_i$ ни координаталар q_i ва тезликлар $\dot{q}_i$ билан боғловчи муносабатлар ҳаракат тенгламалари дейилади. Механик системалар ҳаракат қонунининг энг умумий ифодаси энг кичик таъсир принципи (еки Гамильтон принципи) деб аталувчи принцип орқали берилади. Бу принципга қўра ҳар бир механик система Лагранж функцияси деб аталувчи

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = L(q, \dot{q}, t) \quad (1.1)$$

функция билан характерланади. Ҳаракат тенгламаси эса таъсир (таъсир интеграл, таъсир функцияси) деб аталувчи қуйидаги ифоданинг

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.2)$$

ҳаракат давомийда минимал (экстремум) қийматга эришиши шартидан топилади ($\delta S = 0$) ва Лагранж тенгламалари деб аталади :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3)$$

Лагранж функцияси L маълум аниқликда топилади. Бу аниқлик координата ва вақтнинг ихтиёрий функциясида олинган тўла ҳосил

$$\text{лага тенг : } L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (1.4)$$

$$L = T - U \quad (1.5), \quad T - \text{кинетик энергия, } U - \text{потенциал энергия}$$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.7), \quad i - \text{координатага мос умумлашган импульс}$$

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (1.8), \quad i - \text{координатага мос умумлашган куч}$$

§ 1.1 Берилган Лагранж функциясида ҳаракат тенгламаларини топим

1 - масала. $L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} q^2$.

Ечилиши. Масалани ечишда Лагранж тенгламасининг (1.3) кўринишидан фойдаланилади. Масаланинг берилишига асосан:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -q; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} (\dot{q}) = \ddot{q}. \quad \text{Демак, Лагранж тенгла-}$$

масига кўра $q = -q$.

2 - масала. $L = \frac{1}{2} \dot{q}^2$.

Ечилиши. Лагранж функцияси вақтга ошқора боғлиқ ҳолда берилгандир.

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} (\dot{q}) = \ddot{q} = q + t \cdot q.$$

Демак, $q + t \cdot q = 0$, $q = -q/t$.

3 - масала. $L = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2}{2} - \cos \theta$.

Ечилиши. Лагранж функциясининг берилишидан системанинг эркинлик даражаси $N = 2$ га тенгдир. q_1 ва q_2 ларга эса θ ва φ лар мос келади. Лагранж тенгламаси (1) эса ҳар иккала координатага мос равишда 2 та тенгламадан иборат бўлади:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

Лагранж функциясининг кўринишидан

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \sin \theta, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} (\dot{\theta}) = \ddot{\theta}.$$

$$\text{Демак, } \ddot{\theta} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta + \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \sin^2 \theta) = \sin^2 \theta \cdot \ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}; \quad \ddot{\varphi} = -2\dot{\varphi} \cot \theta.$$

1.1 - Масалалар.

Қуйилган Лагранж функциялари билан ҳарактерланувчи системаларнинг теълавишларини топим:

$$1. \quad L = \frac{(1+q^2)\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2} \quad 2. \quad L = -\sqrt{1-\dot{q}^2} + q$$

$$3. \quad L = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{r} \dot{\theta}$$

$$4. \quad L = \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{u^2}$$

$$5. \quad L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + xy - yx, \quad \theta. \quad L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (x^2 y^2 + xy)$$

$$7. \quad L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$8. \quad L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} (m \dot{\varphi}^2 + m g r \varphi^2), \quad \theta \quad L = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{k}{2} (r_2 - r_1)^2$$

$$10. \quad L = m \dot{\omega}^2 (\omega + \varphi)^2 + 2\omega (\omega + \varphi) \cos \varphi / 2$$

$$11. \quad L = \frac{m}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) + m (\xi_1^2 - \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2)$$

$$12. \quad L = (m_1 \dot{\xi}_1^2 + m_2 \dot{\xi}_2^2 + m \dot{\xi}_2^2 + m \xi_2^2 - \xi_1^2) / 2$$

§ 1.2 Эквивалент Лагранж функциялари

Бир-бирларидан доимийга ва координата ва вақтнинг ихтиёрий функциясида олинган тула ҳосилга фарқлангандан, ҳамда ихтиёрий доимийга кўпайтириш натижасида ҳосил бўладиган Лагранж функция-лари бир хил ҳаракат тенгламасига олиб келади.

Тула ҳосилани ташлаб юбориш йўли орқали эквивалент Лагранж функциясини тузишга масалалар кўрайлик:

1 - Масала. $L = x \sin t$.

Ечилиши. Берилган ифодага $x \cdot \cos t$ ни қўшиб ва айниб ёзиш натижасида қуйидаги ифодани оламиз:

$$L = x \sin t + x \cos t - x \cos t = \frac{d}{dt} (x \sin t) - x \cos t =$$

$$= L + \frac{d}{dt} (x \cos t), \quad L = -x \cos t, \quad L \text{ ҳам, } L' \text{ ҳам бир хил}$$

ҳаракат тенгламасига келтиришни кўрайлик:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} (\sin t) = \cos t, \quad \cos t = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\cos t, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \cos t = 0.$$

2 - Масала. Декарт координаталари билан қуйидагича боғланишда бўлган координата системасида моддий нуқтанинг Лагранж функцияси

Эвклид: $x = \frac{p - \theta}{2}, y = \sqrt{p\theta}$.

Ечилиши. Мавлукки, моддий нуктанинг Лагранж функцияси қуйидагича аниқланади: $L = T - U = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - U(q) = \frac{m}{2} \frac{ds^2}{dt^2} - U(q)$. Бу ерда ds^2 — мазкур координатасистемасидаги узунлик элементининг квадрати. $U(q)$ — Ҳақатина координатага боғлиқ потенциал энергия. T — кинетик энергия. Декарт координата системасида:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{ва} \quad L = \frac{m}{2} (x^2 + y^2 + z^2) - U(x, y, z).$$

Қўридаги боғланишдан: $x = \frac{p - \theta}{2}, y = \frac{p\theta + \theta^2}{2(p\theta)^{1/2}}$ ва

$$L = \frac{m}{\theta} \left(p^2 \left(1 + \frac{\theta}{p} \right) + \theta^2 \left(1 - \frac{p}{\theta} \right) \right) - U(p, \theta).$$

1.2 — Машқлар. Тўла ҳосилани ташлаб юбориш йўли билан эквивалент Лагранж функцияси тузинг:

1. $L' = \frac{1}{2} (cq + t^2).$ 7. $L' = \frac{m}{2} (a^2 x^2 + a^2 t^2).$

2. $L' = \frac{1}{2} (cq + q^2).$ 8. $L' = \frac{m}{2} \dot{p}^2 + mlp \sin p - p(t).$

3. $L' = xy - yx.$ 9. $L' = p \sin pt \cos p + \sin^2 pt/2.$

4. $L' = txx.$ 10. $L' = p \sin p \sin pt + \cos^2 pt.$

5. $L' = p \cos t.$ 11. $L' = ap e^{ap} \sin pt.$

6. $L' = \frac{1}{2} (q^2 - \omega^2 q^2).$ 12. $L' = \frac{m}{2} \dot{p}^2 + p e^{\omega t} \cos p + \frac{m e^{2\omega t}}{2}.$

Моддий нуктанинг Лагранж функциясини ёзинг:

13. Сферик координатасистемасида 14. Қутб координатасистемасида 15. Цилиндрик координатасистемасида 16. Декарт координаталари билан қуйидаги боғланишда бўлган координаталарда:

а) $x = R(p + \sin p), y = R(1 - \cos p).$ б) $x = p + \theta, y = \frac{p}{\theta}.$

в) $x = U\theta, y = \theta - U, z = Z.$ г) $x = \frac{U}{\theta}, y = U\theta, z = Z.$

д) $x = p/\theta, y = \theta - \theta, z = Z.$ е) $x = \sqrt{U\theta}, y = U/\theta, z = z.$

ж) $x = x, y = \sqrt{y/\theta}, z = U\theta.$

17. $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2}$ Лагранж функциясида

$x = q \sinh t + t \cosh t, t = q \sinh t + t \cosh t$ алмаштириш бажариб, q ва t лар орқали Лагранж функциясининг ифодаси топилисин.

§1.3 Механик системанинг эркинлик даражасини топиш

1- масала. Бирор бир чизик бўйича ҳаракат қилаётган моддий нуктанинг эркинлик даражаси топилисин.

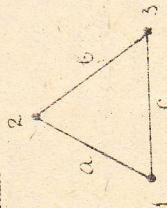
Ечилиши. Аниқланишига кура, механик системанинг эркинлик даражаси шу системани характерлайдиган, ўзаро боғлиқ бўлмаган катталиклар сонидир. Чизик бўйича ҳаракатланаётган моддий нуктанинг вазияти бор-йўғи битта координата билан аниқланади. Масалан, шу чизикдаги нусбайн нуктагача бўлган масофа оидан. Шунинг учун чизик бўйлаб ҳаракатланаётган моддий нуктанинг эркинлик даражаси бирга тенг. Бу натижага моддий нукталар системасининг декарт координат сис- темасида эркинлик даражаси 3м га тенг деган таърифдан ҳам келиш мумкин. Бизнинг ҳол учун $n = 1$ га тенг, чунки битта моддий нукта. Ҳаракат эса бир улчамлидир, яъни чизик бўйлаб. Демак, декарт координата системасини характерловчи коэффициент 3 ўрнида 1 бўлади.

2- масала. Ҳаёда ҳаракатланаётган икки моддий нуктадан иборат системанинг эркинлик даражаси топилисин.

Ечилиши. Ҳаёда эркин ҳаракатланаётган ҳар бир моддий нуктанинг эркинлик даражаси таърифта биноан 3м $\Rightarrow$ 3 га тенг. Икки моддий нуктанинг эркинлик даражаси $S = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3 \cdot 2 = 6$ га тенг.

3- масала. Ҳаёда бир-биридан ўзгармас масофаларда жойлашган учта моддий нуктадан иборат система- нинг эркинлик даражаси топилисин.

Ечилиши.



1.1 - расм

3 та моддий нуктанинг эркинлик даража- си $S = 3 \cdot 3 = 9$ га тенг. Аммо, бу сис- теманинг ҳаракати 3 та (масофалар) чек- ланиш (боғланиш) билан чегараланган- лиги сабабли

$$S = 9 - 3 = 6 \text{ га тенг.}$$

Демак, координаталарро ҳар бир боғланиш (тенглама) эркинлик даражасини биттага камайтиради.

1.3 — машқлар.

1. Чизик бўйлаб ҳаракатланаётган қуйидаги системаларнинг эр- кинлик даражаси топилисин:

а) 2 та бир-бири билан боғланган моддий нукталарнинг:

мак. $L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U$, яъни Лагранж функцияси худди x, y, z координатасидаги кўринишга эга. Бу Галилейнинг нисбийлик принциpidан маълумдир.

2 - масала. Бир жинсли оғирлик майдонида жойлашган горизонтал чизиқда ҳаракатланувчи m_1 ва вертикал чизиқда ҳаракатланувчи m_2 зарраларнинг Лагранж функцияси ёзилсин (1.2-расм). Уларнинг орасидаги масофа ўзгармас ва a га тенг. Ечилиши. Маълумки, тула Лагранж функцияси Лагранж функциялари йиғиндисидан иборат: $L = L_1 + L_2$.



1.2 - расм

Ҳаракат текисликда содир бўлаётгани учун ҳар бир зарранинг эркинлик даражаси 2 га тенг. Ҳаракатни тасвирлаш учун масалан, X ўқини горизонтал бўйлаб танлаб олайлик (чизмага қаранг). Координата бошини эса m_1 нуқтадан r масофада жойлайлик ва a кесма билан горизонтал чизиқ орасидаги бурчакни φ ҳарфи билан белгилайлик. У ҳолда x_1, y_1, x_2, y_2 координаталарнинг ўзгариши: $\dot{x}_1 = a \sin \varphi$, $\dot{y}_1 = a \cos \varphi$, $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + a \cos \varphi$, $\dot{y}_2 = a \sin \varphi$.

Биринчи зарранинг Лагранж функцияси

$$L_1 = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) - U_1 \longrightarrow \frac{m_1}{2} \dot{\varphi}^2 - U_1.$$

Ҳаракат давомида 1 - зарранинг потенциал энергияси ўзгармай қолгани сабабли, уни кейинчалик тушириб қолдирсак ҳам бўлади (Лагранж функциясининг хоссаларига асосан). 2 - зарра учун эса,

$$L_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - U_2 \longrightarrow \frac{m_2}{2} ((\dot{x}_1 + a \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y}_1 + a \dot{\varphi} \cos \varphi)^2) - U_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + 2a \dot{\varphi} \sin \varphi) - U_2. \quad U_2 = m_2 g a \sin \varphi.$$

Шундай қилиб, тула Лагранж функцияси:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2} a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi - 2a \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g a \sin \varphi.$$

- б) 9 та моддий нуқталардан иборат занжирнинг;
в) n та моддий нуқтадан иборат занжир.

2. Текисликда ҳаракатланаётган системаларнинг эркинлик даражаси топилсин:

- а) битта моддий нуқта, б) 2 та моддий нуқта;
в) 3 та ўзаро боғланган моддий нуқталар;
г) 3 та кетма-кет боғланган моддий нуқталар;
д) 2 та ўзаро боғланган моддий нуқталарни бири текисликда, иккинчиси эса чизиқ устида ҳаракатланади;
е) иккита ўзаро боғланган моддий нуқталарнинг ҳар бири текисликда ҳаракатлана олади.

3. Фазада ҳаракатланаётган системаларнинг эркинлик даражаси топилсин:

- а) 2 та бир-бири билан боғланган моддий нуқталар;
б) 3 та кетма-кет боғланган моддий нуқталар;
в) илгариланма ҳаракатланаётган бир-бири билан ўзаро боғланган моддий нуқталар;
г) айланма ҳаракатланаётган ўзаро боғланган моддий нуқталар;
д) 2 та ўзаро боғланган - бири текисликда, иккинчиси эса фазада ҳаракатланаётган моддий нуқталар.

§ 1.4 Механик системанинг Лагранж функциясини тузиш

1- масала. Бир текис ҳаракатланаётган санок системасидаги моддий нуқтанинг Лагранж функцияси ёзилсин.

Ечилиши. Координаталари x, y, z бўлган санок системасига нисбатан бир текис ҳаракатланаётган санок системасининг координаталари x, y, z бўлсин. Ҳаракат X ўқи бўйича θ тезлик билан содир бўлаётган бўлса, Галилей алмаштиришлари қуйидагича ёзилади:

$$(t = 0 \text{ да координаталар боши бир нуқтада бўлган дейлик,}$$

$$x = x' + \theta t, \quad y = y', \quad z = z').$$

Бундан $x = x' + \theta, \quad y = y', \quad z = z'$. Лагранж функцияси эса,

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - U;$$

$(\dot{x} = \dot{x}' + \dot{\theta})$ ни $(\dot{x} = \dot{x}' + \dot{\theta})$ функциядан тула ҳосила бўлгани учун Лагранж функцияси ифодасидан тушириб қолдиришимиз мумкин. Де-

- б) 9 та модлий нукталардан иборат занжирнинг;
 в) 11 та модлий нуктадан иборат занжир.
 2. Текисликда ҳаракатланаётган системаларнинг эркинлик даражаси топилин:

- а) битта модлий нукта, б) 2 та модлий нукта;
 в) 3 та ўзаро боғланган модлий нукталар;
 г) 3 та кетма-кет боғланган модлий нукталар;
 д) 2 та ўзаро боғланган модлий нукталарни бири текисликда, иккинчиси эса чирик устида ҳаракатланади;
 е) иккита ўзаро боғланган модлий нукталарнинг ҳар бири текисликда ҳаракатлана олади.

3. Фазада ҳаракатланаётган системаларнинг эркинлик даражаси топилин:

- а) 2 та бир-бири билан боғланган модлий нукталар,
 б) 3 та кетма-кет боғланган модлий нукталар,
 в) илгариланма ҳаракатланаётган бир-бири билан ўзаро боғланган модлий нукталар,
 г) айланма ҳаракатланаётган ўзаро боғланган модлий нукталар,
 д) 2 та ўзаро боғланган — бири текисликда, иккинчиси эса фазада ҳаракатланаётган модлий нукталар.

§ 1.4 Механик системанинг Лагранж функциясини тузиш

1- масала. Бир текис ҳаракатланаётган санок системасидаги модлий нуктанинг Лагранж функцияси ёзилсин.
 Ечилиши. Координаталари x, y, z бўлган санок системасига нисбатан бир текис ҳаракатланаётган санок системасининг координаталари x, y, z бўлсин. Ҳаракат X ўқи бўйича θ тезлик билан содир бўлаётган бўлса, Галилей айлантиришлари қуйидагича ёзилади:

$$(t = 0 \text{ да координаталар боши бир нуктада бўлган дейлик,}$$

$$x = x' + \theta t, \quad y = y', \quad z = z').$$

Бундан $x = x' + \theta, \quad y = y', \quad z = z'.$ Лагранж функцияси эса,

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - U;$$

$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$ ни $(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$ функциядан тўла ҳосила бўлгани учун Лагранж функцияси ифодасидан тушириб қолдиришимиз мумкин. Де-

мак. $L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U$, яъни Лагранж функцияси худди x, y, z координатасидаги кўринишга эга. Бу Галилейнинг нисбийлик принциpidан далолатдир.

2- масала. Бир жинсли оғирлик майдонида жойлашган горизонтал чирикда ҳаракатланувчи m_1 ва вертикал чирикда ҳаракатланувчи m_2 зарраларнинг Лагранж функцияси ёзилсин (1.2-расм). Уларнинг орасидаги масофа ўзгармас ва a га тенг. Ечилиши. Маълумки, тўла Лагранж функцияси Лагранж функциялари йигиндисидан иборат: $L = L_1 + L_2$.



1.2 - расм

Ҳаракат текисликда содир бўлаётгани учун ҳар бир зарранинг эркинлик даражаси 2 га тенг. Ҳаракатни тасвирлаш учун масалан, X ўқини горизонтал бўйлаб танлаб олайлик (чизмага қаранг). Координата бошини эса m_1 нуктадан r масофада жойлайлик ва a кесма билан горизонтал чирик орасидаги бурчакни φ ҳарфи билан белгилайлик. U ҳолда x_1, y_1, x_2, y_2 координаталарнинг ўзгариши, $\dot{x}_1 = \dot{x}$ ва $\dot{y}_1 = \dot{y}$ билан боғланади. Чизмадан кўриниб туридики,

$$x_1 = x, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = r + a \cos \varphi, \quad y_2 = a \sin \varphi.$$

Биринчи зарранинг Лагранж функцияси

$$L_1 = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) - U_1 \longrightarrow \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 - U_1.$$

Ҳаракат давомида 1- зарранинг потенциал энергияси ўзгармай қолгани сабабли, уни кейинчалик тушириб қолдирсак ҳам бўлади. Лагранж функциясининг хоссаларига асосан), 2- зарра учун эса,

$$L_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - U_2 \longrightarrow \frac{m_2}{2} (r^2 - ar \sin \varphi)^2 + (a \cos \varphi)^2 - U_2 = \frac{m_2}{2} (r^2 + a^2 \varphi^2 - 2ar \varphi \sin \varphi) - U_2, \quad U_2 = m_2 g a \sin \varphi.$$

Шундай қилиб, тўла Лагранж функцияси:

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (r^2 + a^2 \varphi^2 - 2ar \varphi \sin \varphi) - m_2 g a \sin \varphi.$$

A diagram of a rhombus with vertices labeled m_1 (top), m_2 (right), m_3 (bottom), and m_4 (left). The side lengths are labeled a on each of the four edges. A horizontal line passes through the vertices m_4 and m_2 .

1.3 - расм

Ечилиши. Вертикал ўқ билан а кесма орасидаги бурчакни ϕ билан белгилайлик. Вертикал ўқ атрафида системанинг бурилиш бурчагини эса θ дейлик. У ҳолда берилган бурчак тезлик $\omega = \dot{\theta}$ дир. Координата бошини А нуктада танлайлик.

$$L = L_1 + L_2, \quad L_1 = 2CT_1 - U_1, \quad L_2 = T_2 - U_2.$$

Ҳар икки хил зарбанинг кинетик энергияси T ни тоғайлик : Ҳар иккала m_1 зарра учун қўшим элементи (ушунлиқ элементи) квадрати

$$2SP^2 + 2(Cdp) = 2(Cdp) + 2(Cdp) + 2(Cdp)$$

Демак,

$$T_1 = \frac{1}{2} (a^2 \dot{\varphi}^2 + a^2 \sin^2 \varphi \dot{\omega}^2)$$

Иккинчи зарра эса . фақат вертикал ўқ бўйича ҳаракатланади. Масалан, A нуқтадан m_2 гача бўлган масофа $y_2 = 2a \cos \varphi$ га

$$T_2 = \frac{\pi^2}{2} y_2^2 = \frac{m^2}{2} (-2\varphi \sin \varphi)^2 = 2m^2 \varphi^2 \sin^2 \varphi$$

Ҳар икки тур зарранинг потенциал энергияси эса,

$$U_1 = -m_1 g a \csc \varphi, \quad U_2 = -2m_2 g a \csc \varphi \text{ на } \text{ТЭГ}.$$

Шундай қилиб,

$$L = m_1 c^2 \dot{\varphi}^2 + a^2 \sin^2 \varphi \dot{\omega}^2 + 2 m_2 a^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi} \dot{\omega} + 2 g a^2 (m_1 + m_2) \cos \varphi.$$

4 - масала. Массалари m_1 ва m_2 бўлган қарама-қарши зарядли икки зарга ҳосил қилган диполь бир жинсли электр майдон E таъсирида турибди. Лагранж функцияси топилсин.

Ечилиши. Аввал-икки зарфа ҳаракатини инерция марказининг илгариланма ҳаракати ва заираларнинг бир-бирига нисбатан ҳаракати (агар-да оралиқ масофа фиксирланган бўлса, айланма ҳаракатдан иборат) га келтириб олайлик. Унинг учун қуйидаги ўзгаришларни кийинтайдик:

$$\begin{array}{c} \uparrow L_2 \\ m_2 \\ + \\ \uparrow L_1 \\ m_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow L_2 \\ m_2 \\ + \\ \uparrow L_1 \\ m_1 \end{array}$$

Ҳар бир зарранинг радиус векторини бу янги ўзгарувчилар орқали

$\Gamma_1 = R + \frac{m_2}{m_1 + m_2}$
 $\Gamma_2 = R - \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

Бу икки заррадан иборат системанинг лагранж функцияси esa

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} = \text{UGR}$$

$$m_1 + m_2 \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1^2}{R^2} + \frac{m_2^2}{R^2} + m_1 + m_2 = 10.$$

$$m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = m \quad (m - \text{кетирилган масса}) \quad \text{бегиллашлар киритсак:}$$

$$L = \frac{M}{R^2} + \frac{m}{R^2} - U(r).$$

Демак, бу системанинг Лагранж функцияси янги ҳаракат $\dot{q}$ га ва нисбий ҳаракат $\dot{q}'$ ларга мос қисмларга ажралди, потенциал энергия эса Ҳақатгина нисбий ҳойлашувга боғлиқ. Энди беришган масалага қайтсак, Ҳақатгина потенциал энергияни аниқмасак етарли. Диполь моменти деганда қуйидаги вектор тушунилади:

бу ерда е -- зарралар заряди.

Бир жинсли электр майдон 6 таварлида турган жиполнинг потенциал

$U = CE \cdot I_0 = Ed \cos \theta$ дан ишораи.

Нисбий ҳаракат (айланма) га мос лагранж функцияси ва сферик координат системасида ёзилган булсақ ва диполинг узунлиги r булсақ:

$$L = \frac{m}{2} \dot{r}^2 \Rightarrow \frac{m}{2} \dot{r}^2 = \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \dot{\theta}^2$$

$$L = \frac{M}{2} \dot{R}^2 + \frac{m^2}{2} (\dot{\rho}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - Ed \cos \theta$$

$$L = \frac{1}{\pi^2} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{(\pi^2 + \sin \pi)}{2}$$

1.4. - 1918 г.

- 1.4. - машқар,
1. Қуйидаги ҳоллар учун заррамарнинг Лагранж функциясини ёзинг;

а) текис тээлэнувчэн харахат ниймэл шалбарал

б) бир текис айланатган саноқ системасын ээинг :

2. Зарралар системасининг Лагранж функциясини сопи.

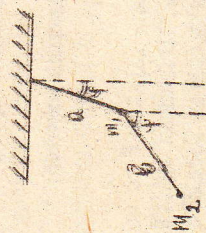
а) шар сиртида ҳаракатланган бир зинсли оғирлик майдони

б) конус сирт устида ҳаракатланаётган m массали зарра учун.

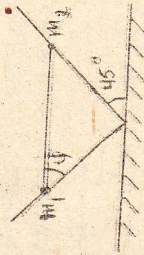
Конус учининг бурчаги -2α га тенг дейилсин, потенциал энергия эса, конус учидан бўлган масофага тескари пропорционал дейилсин;
в) Бир жинсли огирлик майдонида жойлашган қўш ясси маятник учун (1.4 - расм);

г) 1.5 - расмда кўрсатилган бир жинсли огирлик майдонида жойлашган m_1 ва m_2 зарралар системаси учун. Зарралар кўрсатилган чизиқлар бўйлаб ҳаракатланали;

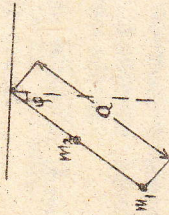
д) Бир жинсли огирлик майдонида жойлашган ясси маятник учун (1.6 - расм). Стержень бўйлаб эса, m_2 зарра доимий θ тезлик билан ҳаракатланади;



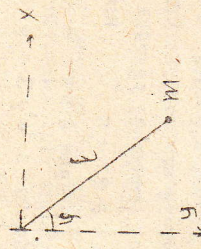
1.4 - расм



1.5 - расм



1.6 - расм



1.7 - расм

е) Өсилиш нүктаси $y = a \sin \omega t$ қонун бўйича вертикал тебранадиган ясси маятник учун (1.7 - расм);

ж) Шў система $x = a \sin \omega t$ қонун бўйича горизонтал тебранган ҳол учун.

3. Массаси m бўлган ядро ва n та массаси m га тенг электронлардан ташкил топган атомнинг Лагранж функцияси ёзилсин. Инерция маркази ҳаракати инобага олинмасин ва масалани n та зарра ҳаракати ҳолига келтирилсин.

§1.5 Энергия ва тўхташ нүкталарини топиш

1 - масала. Агар Лагранж функцияси қуйидагича кўринишда бўлса, энергия топилисин: $L = T(q, \dot{q}) + A(q)$.

Бу ерда A , T мар мос равишда q нинг чизиқли ва квадратик функцияларидир.

Ечилиши. (1.6) формулага асосан

$$E = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n - L = \sum_n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n + \sum_n \frac{\partial A}{\partial q_n} q_n -$$

$- T(q, \dot{q}) + A(q)$. Лекин, бир жинсли функциялар учун

$$\text{Эйлер теоремасига кўра } \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T, \quad \sum_n \frac{\partial A}{\partial q_n} q_n = A.$$

Шунинг учун $E = T + U$.

2 - масала. Лагранж функцияси қуйидаги бошланғич шартларни қаноатлантирувчи моддий нүқта ҳаракатининг тўхташ нүктаси топилисин.

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \sin x, \quad x_0 = 0 \text{ да } \dot{x}_0 = 1.$$

Ечилиши: Кинетик энергия нолга тенг бўладиган нүкталар

($E = U$) ни қаноатлантирган, ёки $x = 0$ бўлган) тўхташ нүкталари дейилади. Энергиянинг сақланиш қонунидан фойдаланамиз:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \sin x. \text{ Бошланғич шартларга асосан:}$$

$$E_0 = \frac{\dot{x}_0^2}{2} + \sin x_0 = \frac{1}{2} \text{ га тенг. Зарра тўхтаганда } \dot{x} = 0 \text{ бўлади,}$$

$$\text{яъни } E = U = E_0. \text{ Демак, } \sin x = \frac{1}{2} \text{ дир.}$$

Бу ердан $x = \frac{\pi}{6}$ тўхташ нүктаси эканлигини толамиз.

3 - масала. Лагранж функцияси қуйидагича бўлган системанинг энергияси топилисин: $L = \frac{m \dot{\varphi}^2}{2} \left(\varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 + \varphi \right) + 3\varphi \cos \varphi$.

$$\text{Ечилиши } E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m \dot{\varphi}^2}{2} \left(\cos \varphi + \varphi \right) + \varphi \left(\varphi + \frac{1}{2} \varphi^2 + \varphi \right) - \frac{m \dot{\varphi}^2}{2} \left(\varphi^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 + \varphi \right) - 3\varphi \cos \varphi =$$

$$= \frac{m^2}{2} (\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi} \dot{\theta}) - 2gl \cos \varphi.$$

1.5 - машқлар.

1. Қуйдаги Лагранж функцияга мос энергия топилин:

а) $L = -\sqrt{1 - \dot{\theta}^2} + A\theta - \varphi$. А. φ лар фақатгина φ_x ларнинг функцияси;

б) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$,

в) $L = \dot{x}^2 - (e^x - 1)^2$,

г) $L = \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} (\dot{\varphi}^2 - 2\dot{\varphi} \sin \varphi) - m_2 \sin \varphi$,

2. 1.1 - машқларда берилган Лагранж функцияси билан характерланувчи системаларнинг энергиясини топинг.

3. Лагранж функцияси қуйдаги бошланғич шартларга мос система-ларнинг тўхташ нүкталарини топинг:

а) $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + x$, $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = \frac{1}{2}$.

б) $L = \frac{\dot{x}^2 - x^2 + x}{x}$, $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 1$.

в) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \cos x$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{m}}$.

г) $L = \frac{\dot{x}^2 + x\dot{x} - 1}{x^2}$, $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = \sqrt{3}$.

д) $L = \dot{x}^2 - \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = \sqrt{3}$.

е) $L = \dot{x}^2 + l\dot{\varphi}x$, $x_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 2$.

ж) $L = \dot{x}^2 - e^x$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 2$.

з) $L = \frac{\dot{x}^2 + x^2 + 1}{x}$, $x_0 = 3$, $\dot{x}_0 = 1$.

и) $L = \dot{x}^2 - \ln x$, $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = \ln e$.

к) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$, $\dot{x}_0 = \frac{2}{\sqrt{m}}$.

II. ҲАРАКАТ ТЕНГЛАМАЛАРИНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

§2.1 Бир ўлчовли ҳаракат тенгламаларини интеграллаш.

Бир ўлчовли ҳаракатни ифодаловчи Лагранж функцияси:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \quad (2.1)$$

Унга мос келувчи Лагранж тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

(2.1) функцияни (2.2) тенгламага қўйсак

$$m\dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама бўлгани учун унинг ечимида иккита ўзгармас катталик бўлади. Ҳаракат тенгламаси ечимини аниқлашнинг юқорида-тига қараганда соддароқ ва қўл ҳолларда жуда қўлай бўлган йўли қуйдагича: аввал моддий нүқта энергияси аниқланади ва Лагранж функцияси вақтга ошқор боғлиқ бўлмаганлиги сабабли энергия сақланувчи катталик бўлишини ҳисобга олган ҳолда, координатанинг вақтга боғлиқлигини топамиз:

$$E = x \frac{\partial L}{\partial x} - L. \quad (2.4)$$

Бу ифодага (2.1) функцияни қўйиб, энергия ифодасини топамиз:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const}. \quad (2.5)$$

Бундан, $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}$.

Оуирги ифода ўзгарувчилари ажратувчи биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама бўлгани учун,

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}} + C, \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}} + C. \quad (2.6)$$

Натижада (2.6) ифоданинг ўнг томонидаги интеграл ечилиб, вақт ва координата орасидаги боғланиш аниқланади. Ечимдаги иккита ўзгармас катталик E ва C ларни аниқлашда бошланғич шартлардан фойдаланилади. Берилган бошланғич шартлардан фойдаланиб, ҳаракат тенгламаларини ечим!

1 - масала. $L = \dot{x}^2 + t\dot{\varphi}x$, $t = 0$ да, $x = 0$, $\dot{x} = 2$.
Ечилиши. Қўриниб турибдики, Лагранж функцияси вақтга ошқора

боғлиқ эмас, демек, энергия-сақланувчи катталик.

Энергия ифодасини толамиз:

$$E = x \cdot \frac{dL}{dx} - L = 2x^2 - x^2 - t^2 x^2 = x^2 - t^2 x^2.$$

Бирор вақт моменти учун энергия ифодасини топсак, у бошқа вақт моментларида ҳам ўзгармайди:

$$t = 0 \text{ да } E = 4 - 0 = 4.$$

$$\text{Демак, } 4 = x^2 - t^2 x^2.$$

$$\frac{dx}{dt} = x = \sqrt{4 + t^2 x^2}.$$

Бу тенгламани ечимиз:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{4 + t^2 x^2}} + C = \int \frac{dx}{\sqrt{4 + \sin^2 x / \cos^2 x}} + C =$$

$$= \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4 \cos^2 x + \sin^2 x}} + C = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{4(1 - \sin^2 x) + \sin^2 x}} + C =$$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{4 - 3 \sin^2 x}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) + C.$$

$$t = 0 \text{ да } x = 0 \text{ дан } C = 0 \text{ эканлиги келиб чиқади.}$$

$$\text{Демак, } t = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right), \quad x = \arcsin \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3} t \right).$$

$$2 - \text{масала. } L = x^2 - \frac{1}{x}, \quad t = 0 \text{ да } x = 1, \quad x = 0.$$

Ечилиши. Бу ҳолда ҳам тўла энергияни толамиз:

$$E = x^2 + \frac{1}{x}, \quad t = 0 \text{ да } E = 0 + 1/1 = 1, \quad 1 = x^2 + 1/x.$$

Охириги тенгламадан тезлиكنи толамиз: $\frac{dx}{dt} = x = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

$$\text{Бундан } t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} + C = \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x(x-1)}} + \ln \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + C.$$

Ечимдан кўришиб турибдиги, $x > 0$ ва $x - 1 > 0$. Демак, $x < 1$ бўлиши мумкин эмас экан. $t = 0$ да $x = 1$ лигидан $C = 0$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, ечим қуйидагича бўлар экан:

$$t = \sqrt{x(x-1)} + \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}).$$

$$3 - \text{масала. } L = \frac{x^2}{x} + x + \frac{1}{x}, \quad t = 0 \text{ да } E = -3, \quad x = 3.$$

Ечилиши. Бу масалада аввалтиларидан фарқи равишда $t = 0$ да x_0 берилмаган. лекин тўла энергиянинг қиймати маълум бўлганлиги учун масала ечилиши мумкин. Ҳудди аввалги масалалардгидек,

энергиянинг ифодасини толамиз:

$$E = x \cdot \frac{dL}{dx} - L. \text{ Эди, } \frac{dL}{dx} = \frac{2x}{x} \text{ дан}$$

$$E = \frac{x^2}{x} x - \frac{x^2}{x} - x - \frac{1}{x}, \quad E = \frac{x^2}{x} - x - \frac{1}{x} = -3.$$

$$\text{Бундан } x \text{ ни толамиз: } \frac{dx}{dt} = x = \sqrt{x^2 - 3x + 1},$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 1}} + C. \text{ Бу интеграл осон ечилади.}$$

$$t = \operatorname{arcsch} \frac{2x-3}{\sqrt{5}} + C, \quad t = 0 \text{ да } x = 3 \text{ дан } C = -\operatorname{arcsch} \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Демак, оёрилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечим

$$\text{қуйидагича: } t = \operatorname{arcsch} \frac{2x-3}{\sqrt{5}} - \operatorname{arcsch} \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

$$4 - \text{масала. } L = -\sqrt{1-x^2} + x, \quad t = 0 \text{ да } x = 2, \quad x = 0.$$

Ечилиши. Бу ҳолда энергия ифодасини ҳисоблашдан бошқа йўл йўқ (яъни, аввалги мисоллардагидек потенциал энергия ифодаси ишорасини ўзгартириб қўя қилиш имконияти йўқ).

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Буни энергия ифодасига қўямиз.}$$

$$E = x \cdot \frac{dL}{dx} - L = x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - (-\sqrt{1-x^2} + x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x.$$

Демак, энергия ифодаси:

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x = \frac{1}{\sqrt{1-0}} - 2 = -1.$$

Бундан тезлиكنи толаск:

$$\frac{dx}{dt} = x = \sqrt{1 - \frac{1}{(x-1)^2}}, \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{(x-1)^2}}} + C.$$

Бу интеграл осон ечилади:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{cx - 1} \sqrt{cx - 1}^2 - 1} + C = \int \frac{cx - 1 \sqrt{cx}}{\sqrt{x^2 - 2x}} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{4cx^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x}} + C = \int \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x}} + C. \text{ Бошланғич шартлардан}$$

Фойдаланиб, С ни топамиз : $t = 0$ да $x_0 = 2$ эди. $0 = \sqrt{4 - 1} + C$.

$$C = 0, \quad t = \sqrt{x^2 - 2x}, \quad \text{эки} \quad x = 1 + \sqrt{1 + t^2}.$$

2.1 - масшлар.

$$1. \quad L = x^2 - \frac{1}{x^2}, \quad t = 0 \text{ да } x = 1, \quad x = 0.$$

$$2. \quad L = x^2 + e^x, \quad t = 0 \text{ да } x = 0, \quad x = 2.$$

$$3. \quad L = x^2/x - x, \quad t = 0 \text{ да } x = 1, \quad x = 1.$$

$$4. \quad L = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x^2}, \quad t = 0 \text{ да } x = 1, \quad x = 0.$$

$$5. \quad L = mx^2/2 + ax^4, \quad t = 0 \text{ да } E = 0, \quad x = 0.$$

§2.2 Ҳаракат финитлик шартини ва тебраниш даврини энергияга боғлиқ ҳолда аниқлаш

Ҳар икки томондан чегараланувчи ҳаракат финит ҳаракат дейилади. Тула энергия $E = T + U$ бўлганлигидан $T = 0$ ҳолда $E = U(x)$ тенгламадан ҳаракат чегараларини аниқлаб, қайси ҳолларда ҳаракат финит бўлишини, финитлик шартини ва тебраниш даврини энергияга боғлаишини кўрайлик:

$$1 - \text{масала.} \quad L = x^2 - x^2.$$

Ечилиши. Ҳаракат давомида $E > U$, яъни $T > 0$. Лекин, тўхташ нуқталарида $T = 0$ бўлиб, $E = U(x)$ лигидан финитлик шартини топамиз. Аввал энергияни топайлик : $E = x^2 + x^2 = T + U$. Тўхташ нуқталарида $T = 0$, демак, $x = 0$, яъни тўхташ нуқталари тезлик нолга тенг бўлган ҳолатлардир: $x^2 = E$, $x = \pm \sqrt{E}$, $x_1 = -\sqrt{E}$, $x_2 = \sqrt{E}$. Бундан кўрииб турибдики, $E < 0$ бўлиши мумкин эмас. Агар $E = 0$ бўлса, тўхташ нуқтаси битта (ҳаракат бир томонданига чекланган) ва ҳаракат финит бўла олмайди. Шунинг учун, $E > 0$.

Энди ҳаракат тенгламасини интеграллайлик ва бунда тебраниш даври бир тўхташ нуқтасидан иккинчи тўхташ нуқтасигача ҳаракат учун кетган вақтнинг иккилангани эканлигини ҳисобга олайлик, яъни

$$\frac{dx}{dt} = x = \sqrt{E - x^2}, \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{E - x^2}} + C.$$

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x \sqrt{E - x^2}} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\frac{1}{x} dx}{\sqrt{E - x^2}} = 2 \arcsin(x/\sqrt{E}) \Big|_{x_1}^{x_2} = 2\pi.$$

Демак, $E > 0$ да ҳаракат финит ва тебраниш даври $T = 2\pi$ га тенг.

$$2 - \text{масала.} \quad L = x^2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Ечилиши. Энергиянинг ифодасини топайлик : $E = x^2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Тўхташ нуқталарида $x = 0$ эди, $E = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Бу тенгламани ечимиз :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + E}}{E}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + E}}{E}$$

Кўрииб турибдики, $-1 < E < 0$ да ҳаракат финит бўлади, $E < -1$ да ечимлар йўқ, $E \geq 0$ да эса ҳаракат инфинитдир. Финитлик ҳолида тула энергиянинг ишораси манфийлигини ҳисобга олган ҳолда E ни $(-E)$ билан белгилаб олсак,

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - E}}{E}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - E}}{E}.$$

Энди ҳаракат тенгламасини интеграллаймиз:

$$\frac{dx}{dt} = x = \sqrt{E + 2/x - 1/x^2}, \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{E + 2/x - 1/x^2}} + C,$$

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x \sqrt{-E + 2/x - 1/x^2}} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{xdx}{x_1 \sqrt{-Ex^2 + 2x - 1}}$$

$$= 2t - \frac{1}{2E} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d(2x - Ex^2 - 1)}{x_1 \sqrt{-1 + 1/E - (Ex^2 - 2x + 1)/E}} =$$

$$= -2 \sqrt{2x - Ex^2 - 1} \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{2}{(E)^{3/2}} \arcsin \frac{x_2 - 1}{\sqrt{1 - E}} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{2\pi}{E^{3/2}}.$$

Демак, ҳаракат $0 < E < 1$ да финит ва даври $T = 2\pi/E^{3/2}$ га тенг. Бунда тула энергия манфийлигини ҳисобига E ни $(-E)$ билан алмаштирилганини унутманг.

$$3 - \text{масала.} \quad L = x^2 - tg^2 x.$$

Ечилиши. $E = x^2 + tg^2 x$, $tg^2 x = E$, $tg x_1 = -\sqrt{E}$, $tg x_2 = \sqrt{E}$.

Харакат фонишлиги учун $E > 0$ шартни кифоя.

$$x = \sqrt{E - t^2} x, \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{E - t^2} x} + C.$$

$$T = 2 \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{E - t^2} x} = 2 \int \frac{x^2 dx}{x^4 \sqrt{E - t^2} x} = \frac{2}{\sqrt{E - t^2} x} \arcsin \left(\sqrt{\frac{1+E}{E}} \sin x \right) + C.$$

Бу интегрални ечиш 1- параграфнинг 1- масаласидикига ўхшаш. Тўташ нуқталарининг ҳисобланган қийматлари кўринишини бироз ўзгартирсак,

$$\sin x_1 = -\sqrt{\frac{E}{1+E}}, \quad \sin x_2 = \sqrt{\frac{E}{1+E}}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+E}}.$$

ларни оламиз. Демак, $E > 0$, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+E}}$.

2.2 - машқлар.

a) $L = x^2/x - x - 1/x$, б) $L = x^2 - (e^x - 1)^2$,

в) $L = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2}$, г) $L = x^2 - t^2 x$.

§2.3 Циклик координата тушунчасидан фойдаланиб, ҳаракат тенгламаларини интеграллаш

Лагранж функцияси ошқор боғлиқ бўлмаган координата циклик координата дейилади ва импульсининг шу координатага мос ташкил этувчиси сақланувчи катталиқ бўлади. Чунки,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad P_x = \frac{\partial L}{\partial x} = \text{Const.}$$

Бу ҳилдаги масалаларнинг икки типини кўраимиз: бошланғич шартлар берилган масалалар ва бошланғич шартлар берилмаган масалалар.

1 - масала. $L = \frac{t^2 x^2}{2}$, $t = 1$ да $x = 0$, $\dot{x} = 1$.

Ечилиши. Масаланинг берилишидан кўришиб турибдики, бошланғич шартлар берилган: $P_x = \frac{\partial L}{\partial x} = t^2 x = \text{Const.}$

Бошланғич шартларга асосан $t = 1$ да $P_x = 1 \cdot 1 = 1$, $t^2 x = 1$.

$$\frac{dx}{dt} = x = \frac{1}{t^2}, \quad dx = \frac{dt}{t^2}, \quad x = \int \frac{dt}{t^2} + C = -1/t + C.$$

Яна бошланғич шартларга биноан $C = 1$. Демак, $x = 1 - 1/t$.

$$2 - \text{масала. } L = \sqrt{t + x^2}, \quad t = 3 \text{ да } x = 0, \quad \dot{x} = 1.$$

Ечилиши: $P_x = \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{t + x^2}} = \frac{1}{2}$, бошланғич шартларга

$$\text{асосан. Бундан } x = \frac{1}{2} t^{1/2}, \quad \dot{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int t^{1/2} dt + C =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}} t^{3/2} + C, \rightarrow C = 2. \text{ Демак, } x = 2\sqrt{\frac{1}{3}} t^{3/2} + 1.$$

$$3 - \text{масала. } L = \frac{x^2 + yz}{x}.$$

Ечилиши. Масаланинг берилишидан кўришиб турибдики, бошланғич шартлар берилмаган, лекин у ва z координаталар циклик экан. Шунинг учун, P_y ва P_z сақланиши кераклигидан фойдаланамиз.

$$P_y = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{z}{x} = \text{Const.}, \quad P_z = \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{y}{x} = \text{Const.}$$

Буларни энергия ифодасига қўйлик:

$$E = x \frac{\partial L}{\partial x} + y \frac{\partial L}{\partial y} + z \frac{\partial L}{\partial z} - L = \frac{x^2 + yz}{x}, \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{E - P_y P_z x^2}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{E - P_y P_z x^2}} + t_0 = \frac{1}{\sqrt{P_y P_z}} \arcsin \frac{2\sqrt{P_y P_z} x - E}{E} + t_0.$$

$$x = \frac{E}{2\sqrt{P_y P_z}} (\sin(\sqrt{P_y P_z} (t - t_0)) + 1).$$

Энди унинг вақтта боғлиқлигини топайлик: $y = P_z x$.

$$y = \int P_z x dt = \int \frac{P_z x dx}{\sqrt{E - P_y P_z x^2}}. \text{ Бунда } dt = \frac{dx}{\sqrt{E - P_y P_z x^2}}$$

эканлигини ҳисобга олдик. Интегрални ҳисобласак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$y = \sqrt{\frac{P_y}{P_z}} \left(\sqrt{\frac{E}{P_y P_z}} x - x^2 \right) + \frac{E}{2P_y P_z} \arcsin \frac{2\sqrt{P_y P_z} x - E}{E}$$

Ва ҳудди шунга ўйлаш,

$$z = \sqrt{\frac{P_z}{P_y}} \left(\sqrt{\frac{E}{P_y P_z}} x - x^2 \right) + \frac{E}{2P_y P_z} \arcsin \frac{2\sqrt{P_y P_z} x - E}{E}$$

Шуни эътиборга олиш керакки, ҳаракат уч ўлчовли бўлгани учун, ечимлардаги учта доимий катталиқ ролини сақланувчи катталиқлар $-E, P_y, P_z$ лар ўйнашди.

$$4 - \text{масала. } L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2x} + 2xy$$

Ечилиши. Бу ерда y координата циклик бўлгани учун $P_y = \dot{y}/x + 1 = \text{const}$. Бунинг энергия ифодасига қўямиз:

$$E = x \frac{\partial L}{\partial x} + y \frac{\partial L}{\partial y} - L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2x}$$

$$E = \frac{\dot{x}^2 + x^2(P_y - 1)^2}{2x}, \quad \dot{x} = \sqrt{2Ex - x^2(P_y - 1)^2}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{2Ex - x^2(P_y - 1)^2}} = \frac{1}{P_y - 1} \arcsin \frac{x(P_y - 1) - E}{E} + t_0$$

ёки

$$x = \frac{E}{P_y - 1} [\sin(P_y - 1)(t - t_0) + 1]$$

$$\dot{y} = (P_y - 1)x \quad \text{ва} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{2Ex - x^2(P_y - 1)^2}}$$

Экранингни ҳисобга

$$\text{олсак, } y = \int x(P_y - 1)dt = \int \frac{x(P_y - 1)dx}{\sqrt{2Ex - x^2(P_y - 1)^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2Ex - x^2(P_y - 1)^2}{P_y - 1}} + \frac{E}{P_y - 1} \arcsin \frac{(P_y - 1)x - E}{E}$$

2.3 - масаллар.

$$1. L = \dot{x}^2/2 + tx, \quad t = 0, x = 0, x = 1.$$

$$2. L = \dot{x}^2/2 + \cos t, \quad t = 0, x = 0, x = 1.$$

$$3. L = \dot{x}^2/2 + \cos^2 t, \quad t = 0, x = 0, x = 1.$$

$$4. L = \sqrt{\dot{t}^2 + \dot{x}^2}, \quad t = 3, x = 0, x = 1.$$

$$5. L = C\dot{x}^2 + x\dot{x} - 1/\dot{x}^2, \quad t = 0, x = 1, x = 0.$$

$$6. L = \dot{x}^2/x + x\dot{x}^2 + x, \quad L = \frac{\dot{x}^2 + 2x\dot{x} + \dot{x}^2}{2}$$

$$7. L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + x, \quad E, L = C\dot{x}^2 + \dot{y}^2/2.$$

§2.4 Марказий майдондаги ҳаракат тенгламаларини интеграллаш

Майдон марказий симметрияга эга бўлса, координата бошини майдон марказига жойлаштирилади ва фазо изотроп бўлганлиги

учун импульс моменти вектори $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ 1 сақланувчи бўлади.

Радиус вектори $\vec{r} \perp \vec{M}$ бўлгани учун марказий майдондаги ҳаракат текисликда содир бўлади ва шунинг учун моддий нуқта

Лагранж функциясини қуйидагича кўринишда ёзамиз:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (2.7)$$

$$\text{Энергия эса, } E = r \frac{\partial L}{\partial r} + \varphi \frac{\partial L}{\partial \varphi} = L - \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m\dot{\varphi}^2}{2} + U(r).$$

(2.8)

$$M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\text{Экранингдан фойдалансак, } E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \quad (2.9)$$

Энергия ифодасидаги иккинчи ҳад кинетик энергияга тегишли эди, лекин импульс моменти M сақланувчи бўлгани учун уни энди потенциал энергияга тааллуқли дейиш керак. Демак,

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{эф}}, \quad U_{\text{эф}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \quad (2.10)$$

ва тўхташ нуқталари координаталарини топишда $E = U_{\text{эф}}(r)$

тенглама ечилади. Бу нуқталарда $\dot{r} = 0$ бўлса ҳам, $\dot{\varphi} = 0$

бўлмаслиги мумкин. Шунинг учун баъзан бурилиш нуқталари ҳам

дейилади. Ҳаракат тенгламаларини (бу ҳолда координата иккита

экранингини назарда тутишимиз керак) интеграллаш аввалги

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{эф}}(r))} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r) - \frac{M^2}{m r^2})}$$

(2.11)

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2(E - U(r) - \frac{M^2}{m r^2})}}$$

$$t = \int \frac{dr}{\frac{2}{m} (E - U(r)) - M^2 / r^2} + C_1 \quad (2.12)$$

$$(2.8) \text{ дан } \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{M}{mr^2}, \quad d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt \quad \text{эканглигини ва}$$

(2.10) ни ҳисобга олсак,

$$\varphi = \int \frac{M/r^2 dr}{2m(E - U(r)) - M^2/r^2} + C_2 \quad (2.13)$$

ҳосил бўлади. (2.12) ва (2.13) лар қийририлган ечимлардир.

Лагранж тенгламаси ҳар бир координата учун иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама бўлгани ва масала икки ўлчовли бўлгани учун ҳаракат тенгламалари ечимларида тургта ўзгармас катталиқ бўлиши керак эди. Ҳақиқатан ҳам (2.12) ва (2.13) да E, M, C_1, C_2 лар ўзгармас катталиқлардир.

Марказга энг яқин ва энг узоқ нүкталар координаталарини энергия ва импульс моментига боғлиқ ҳолда аниқлаш

$$1 - \text{масала. } U = a/r^2, \quad a > 0$$

Ечилиши. Ифоридаги (2.10) ифодадан фойдаланиб, марказга энг яқин ва марказдан энг узоқ нүкталар координаталарини аниқлаш учун қуйидаги тенгламани ёзамиз:

$$E = U_{\text{эфф}} \Rightarrow \frac{M}{2mr^2} + \frac{a}{r^2} = E.$$

$$\text{Қўриниб турибдики, } r = \pm \sqrt{\frac{M^2 + 2ma}{2mE}},$$

r манфий бўлиши мумкин бўлмаганлиги учун ҳаракат бир томонлама чекланган:

$$r = \sqrt{\frac{M^2 + 2ma}{2mE}}$$

$$2 - \text{масала. } U = \frac{1}{2} \left(1/r^2 - 1/r \right), \quad m = 1.$$

Ечилиши. Яна (2.10) ифодадан фойдалансак:

$$\frac{M^2}{2r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \right) = E, \quad 2Er^2 + r - M^2 + 1 = 0,$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8EM^2 + 12}}{4E}.$$

Агар $E > 0$ бўлса, каср суратидаги илдиш бирдан катта бўлгани учун тенгламанинг ечими битта ва ҳаракат инфинитидир. $E < 0$ бўлса, $1 + 8EM^2 + 12 > 0$ бўлиши керак.

Демак, $-\frac{1}{8EM^2 + 12} < E < 0$ да ҳаракат финит бўлади.

3 - масала. Қуйидаги потенциал энергия билан ҳаракатланувчи марказий майдондаги ҳаракат тенгламалари ечимларини топинг:

$$U = \frac{1}{2r^2}, \quad m = 1.$$

Ечилиши. Буни (2.12) га қўйсак, $t = \int \frac{dr}{\sqrt{2E - 1/r^2 - M^2/r^2}} + t_0 =$

$$= \int \frac{r dr}{\sqrt{2Er^2 - CM^2 + 12}} + t_0 = \frac{1}{\sqrt{2E}} \sqrt{2Er^2 - CM^2 + 12} + t_0.$$

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{2E}} \sqrt{2Er^2 - CM^2 + 12}.$$

Потенциал энергия ифодасини (2.13) га қўйсак,

$$\varphi = \int \frac{M/r^2 dr}{\sqrt{2E - 1/r^2 - M^2/r^2}} + \varphi_0 = - \int \frac{M \arccos \frac{M}{\sqrt{2E - CM^2 + 12}} / r^2} + \varphi_0 =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{1 + M^2}} \arccos \frac{\sqrt{M^2 + 1}}{\sqrt{2E} r} + \varphi_0,$$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{1 + M^2}} \arccos \frac{\sqrt{M^2 + 1}}{\sqrt{2E} r}.$$

$$4 - \text{масала. } U = \frac{1}{2} \left(r^2 + \frac{1}{r^2} \right), \quad m = 1.$$

Ечилиши. Бу ифодани (2.12) га қўямиз.

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{2E - r^2 - 1/r^2 - M^2/r^2}} + t_0 = \int \frac{r dr}{\sqrt{2Er^2 - r^4 - CM^2 + 12}} + t_0 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{dr^2}{\sqrt{E^2 - (M^2 + 1) - (r^2 - E)^2}} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{r^2 - E}{\sqrt{E^2 - (M^2 + 1)}} + t_0$$

$$r = \sqrt{E + \sqrt{E^2 - (M^2 + 1)} \cdot \sin \alpha(t - t_0)}$$

Потенциал энергияни (2.13) га қўйсак, қуйидагича бўлади:

$$p = \int \frac{M/r^2 dr}{\sqrt{2E - r^2 - 1/r^2 - M^2/r^2}} + p_0 = \int \frac{M/r^2 dr}{\sqrt{2E/r^2 - 1 - (M^2 + 1)/r^2}} +$$

$$+ p_0 = -\frac{M}{2} \int \frac{d(1/r^2)}{\sqrt{2E/r^2 - 1 - (M^2 + 1)/r^2}} + p_0 =$$

$$= \frac{M}{2\sqrt{M^2 + 1}} \arccos \frac{(M^2 + 1)/r^2 - E}{\sqrt{E^2 - M^2 - 1}} + p_0$$

$$r = \sqrt{\frac{M^2 + 1}{E + \sqrt{E^2 - M^2 - 1} \cos \left[2\sqrt{M^2 + 1} (p - p_0)/M \right]}}$$

2.4 - машқлар.

1. Марказга энг яқин ва энг узоқ нуқталар координатаси топилин:

а) $U = a/r$; б) $U = 1/r^4$,

в) $U = (r^2 + 1/r^2)/2$, $m = 1$.

2. Ҳаракат тенгласи интеграллансин:

а) $U = -1/2r^2$, $m = 1$

б) $U = (1/r^2 - 1/r)/2$, $m = 1$.

Ш. КИЧИК ТЕБРАНИШЛАР

Механик системанинг барқарор (турғун) мувозанат ҳолати яқиндаги ҳаракатини одатда кичик тебранишлар деб номланади. Бундай ҳаракатларнинг энг соддаси — эркинлик ларзаси бирга тенг бўлган ҳоли (бир ўлчовли эркин ҳаракат) қуйидаги Лагранж функцияси билан

$$\text{характерланади: } L = \frac{mv^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \quad (3.1)$$

Бу Лагранж функциясига мос ҳаракат тенгласи эса,

$$x + \omega^2 x = 0 \quad (3.2)$$

Бу тенгламадан кўринадики, система барқарор мувозанат ҳолати яқинида гармоник тебралана ҳаракат қилади (гармоник осциллятор):

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (3.3), \quad x = a \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.3')$$

a — тебранишлар амплитудаси, $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$,

$$\alpha$$
 — бошланғич фаза, $\tan \alpha = -\frac{C_2}{C_1}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — частота

$$(\text{циклик частота}). \text{ Системанинг энергияси } E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \quad (3.4)$$

тебраниш амплитудаси a нинг квадратига пропорционалди.

Кўпинча (3.3) га мос боғланишни қуйидаги

$$x = \operatorname{Re} \{ A e^{-i\omega t} \}, \quad A = a e^{-i\alpha} \quad (3.5)$$

комплекс ифоданинг ҳақиқий қисми шифатида олиш қулай бўлади.

Ани комплекс амплитуда дейилади.

Механик системанинг ташқи майдон таъсиридаги тебранишлари мажбурий тебранишлар дейилади. Бу ҳолдаги тебранишлар кичик бўлганлиги сабабли, ташқи майдон кучсиз деб фараз қилинади, акс ҳолда ташқи майдон катта силжишларга олиб келиши мумкин. Бир ўлчамли мажбурий ҳаракат учун:

$$L = \frac{mx^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + x f(t) \quad (3.6)$$

б

$$\text{ва тенглама } \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} f(t) \quad (3.7)$$

дан иборат бўлади. Мажбурий тебранишлар координатасининг ўзгариши эса

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t + \beta \quad (3.8)$$

ифода билан аниқланади. Бу ерда γ — мажбурий этувчи куч

$$F = f \cos \gamma t + \beta \text{ нинг частотаси. Резонанс ҳолида } \omega \sim \gamma$$

кичик тебранишлар учун

$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta)$ (3.9)
Эркинлик даражаси қўп (s га тенг дейлик) бўлган системанинг тебраниши қуйидагича характерланади:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} c_{ik} x_i x_k - k_{ik} x_i x_k, \quad (3.10)$$

$$\sum_k c_{ik} x_k + k_{ik} x_k = 0 \quad (3.11)$$

Булар ўзгармас коэффициентли S та чизикли бир жинсли тенгламалар системасидан иборатдир. Бу ерда x_i — барқарор мувозанат ҳолатидан кичик огишлар (силжилар).

Бундай тенгламаларни ечишнинг умумий қоиласига асосан (3.11) тенгламалар қуйидаги

$$\sum_k (-\omega_{ik}^2 + k_{ik}) A_k = 0 \quad (3.12)$$

алгебраик тенгламалар системасига келтириб олинади. Бу система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун унинг аниқловчиси (характеристик тенглама)

$$|k_{ik} - \omega_{ik}^2 m_{ik}| = 0 \quad (3.13)$$

бўлиши керак. Умумий ҳолда бу тенглама S та ҳақиқий мусбат ω_{ik}^2 $\alpha = 1, 2, \dots, S$ илдизга эга (хусусий частоталар). Умумий ҳолда (3.11) нинг ечими

$$x_k = \sum_{\alpha} A_{k\alpha} C_{\alpha}^{i\omega_{\alpha}} t = \sum_{\alpha} A_{k\alpha} \theta_{\alpha}, \quad \theta_{\alpha} = \text{Re}(C_{\alpha}^{i\omega_{\alpha}} t) \quad (3.14)$$

кўринишда бўлади. Бу ерда $A_{k\alpha}$ — (3.13) аниқловчининг ω_{α} га мос минори. Шундай қилиб, система координаталаридан ҳар бирининг вақт бўйича ўзгариши ихтиёрий амплитуда ва фазали, лекин аниқ частотали s та $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ оддий даврий тебранишларнинг қўшилишдан иборат экан. Ҳар бири фақат биргина оддий тебранишда бўла олувчи умумлашган координаталар нормал координаталар дейилади. Оддий даврий тебранишларни эса нормал тебранишлар дейилади. Таърифга биноан нормал тебранишлар учун:

$$\theta_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 \theta_{\alpha} = 0 \quad (3.15)$$

Сўнувчи тебранишлар тенгламаси:

$$x + 2\lambda x + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.16)$$

λ — сўниш коэффициенти (λt — сўнишнинг логарифмик декременти), ω_0 — ишқаланиш бўлмагандаги эркин тебранишлар частотаси. (3.16) тенгламанинг ечими қуйидагичадир:

$$x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\lambda^* t}, \quad \lambda_{1,2} = -\lambda \pm i \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad (3.17)$$

Бу ерда уч ҳол бўлиши мумкин:

$$1) \lambda < \omega_0, \quad x = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (3.18)$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ — "частотами" сўнувчи тебранишлар.

$$2) \lambda > \omega_0, \quad x = C_1 e^{-\lambda t} - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} + C_2 e^{-\lambda t} + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t \quad (3.19)$$

$$3) \lambda = \omega_0, \quad x = (C_1 + C_2 t) e^{-\lambda t} \quad (3.20)$$

Охириги икки ҳалда, яъни сўниш коэффициентни етарли равишда катта бўлганда ҳаракат нодаврий сўнувчи ҳаракатдан иборат бўлади. Сўнувчи ҳаракатни характерловчи умумлашган ишқаланиш кучлари теъликнинг квадратига пропорционал бўлган диссипатив функциялар — F орқали аниқланадилар: F , ишқ $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ (3.21)

Бу кучлар Лагранж тенгламасининг ўнг томонида иштирок этишлари керак:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (3.22)$$

Ишқаланиш кучлари таъсирида энергиянинг ўзгариши (ажраллиши, диссипацияси) диссипатив функция орқали қуйидагича аниқланади:

$$\frac{dF}{dt} = E = -2F. \quad (3.23)$$

§3.1 Берилган Лагранж функциясига оид эркин тебралар ҳаракатининг барқарор мувозанат ҳолати ва час отасини топиш

1 — масала. Лагранж функцияси $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \sin x$ дан иборат системанинг кичик тебранишлар частотасини топиш. Ечилиши. Бу масалани ечишдан олдин бир ўлчамли ҳаракатта мос частотани топишнинг умумий методини кўрсатайлик. Айтайлик.

$$L = \frac{f(q) \dot{q}^2}{2} - U(q) \quad (3.24)$$

бўлсин. $q = q_0$ нукта барқарор мувозанат нуктаси бўлсин. У

ҳолда $U'(q)|_{q_0} = 0$ бўлади, лекин $U''(q)|_{q_0} > 0$ бўлиши керак.

Натижада, барқарор мувозанат атрофида Лагранж функцияси

$$L = \frac{f(q_0) \dot{q}^2}{2} - \frac{U''(q_0)}{2} q^2 \quad (3.25)$$

кўринишга келади. Ҳаракат

тенгласи эса $f(x_0)q + U'(x_0)q = 0$ кўринишда ёзилади.

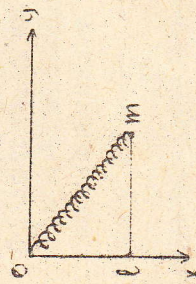
Эркин тебранишнинг частотаси $\omega = \sqrt{\frac{U'(x_0)}{f(x_0)}}$ (3.23) га тенг бўлади. Бизнинг ҳол учун $U = -\sin x$, демак,

$$U' = -\cos x = 0, \text{ бу ердан } x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad U'' = \sin x \Rightarrow$$

$\Rightarrow U''(x_0) = 1 > 0$ га тенг. (3.24) ифодага биноан $f(x_0) = 1$

га тенг, яъни $f(x_0) = 1$. Демак, $\omega = \sqrt{U'(x_0)/f(x_0)} = 1$.

3 - масала



3.1-расм

Бир этаган ҳолдаги узунлиги a , бикрлиги k деб олинсин. Ҳисоб қилиш. Координата системасини 3.1-расмда кўрсатилгандек тан-

лаб олсак, зарранинг кинетик ва потенциал энергиялари қуйидагича

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad U = \frac{k}{2} (\sqrt{l^2 + y^2} - a)^2 \text{ бўлади.}$$

Барқарор мувозанат ҳолатини топиш учун U дан олинган биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни ёзайлик:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = k (\sqrt{l^2 + y^2} - a), \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{k}{\sqrt{l^2 + y^2}} \left(\frac{y^2}{\sqrt{l^2 + y^2}} + (\sqrt{l^2 + y^2} - a) \frac{l^2}{l^2 + y^2} \right).$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ эканлигидан урта мувозанат ҳолатини топамиз:}$$

$$y_{\text{мув}} = 0, \quad U_{\text{мув}} = \pm \sqrt{a^2 - l^2} \quad (a > 0).$$

Ҳар бир мувозанат ҳолатининг барқарорлик шартини текшириб чиқайлик. Маълум элики, барқарор (турғун) мувозанат ҳолида

иккинчи тартибли ҳосила $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y_{\text{мув}}} > 0$ бўлиши керак. Биринчи

ҳолат барқарор ҳолат $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y_{\text{мув}}} = \frac{k}{l} (l - a) > 0$

бўлади, агарда $l > a$ бўлса.

Қолган икки ҳолат $a > l$ дагина мавжуд бўлиб, барқарор ҳолатлар дир, чунки $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y_{\text{мув}}} = \frac{k}{a} (a^2 - l^2) > 0$.

Демак, система $l > a$ да $U_{\text{мув}} = 0$ нукта, $a > l$ да эса

$U_{\text{мув}} = \pm \sqrt{a^2 - l^2}$ нукта атрофида тебранима ҳаракат қилади.

$$3 - \text{масала. } L = \frac{x^2 - x^2 - 1}{2x}$$

га мос частота топилисин. Ҳисоб қилиш. Бу ифодани қуйидагича ёзиб олайлик, $L = \frac{x^2}{2x} - \frac{1}{2x}$.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad U(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}; \quad U'(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2} = 0.$$

Бу ердан $x_0 = 1$ нукта барқарор мувозанат нуктаси бўлади:

$$U''(x_0) = \frac{1}{x^3}, \quad U''(x_0 = 1) = 1, \quad f(x_0) = \frac{1}{x} \text{ дир, } f(x_0 = 1) = 1.$$

$$\text{Демак, } \omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{f(x_0)}} = 1$$

4 - масала. Қуйидаги қонун бўйича

$$U = -\frac{1}{r^2}$$

узaro таъсирлашадиган икки зарра айланма ҳаракатининг тебраниш частотасини топинг (зарранинг массаси m га тенг).

Ҳисоб қилиш. Масалани қутб координат системасида қарайлик. Бу системанинг келтирилган массаси $\frac{m}{2}$ га тенг. U ҳолда системанинг тула

$$\text{энергияси } E = T + U = \frac{m}{4} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{r^2}.$$

Масаланинг қуйилишдан аёнки, циклик координата φ га мос умумлашган импульс $P_\varphi = \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}$ доимийдир (сақланувчи). Тула

$$\text{энергияни қайта ёзиб олайлик: } E = \frac{m \dot{r}^2}{4} + \frac{P_\varphi^2}{m r^2} - \frac{1}{r^2}.$$

Бу ифоданинг иккинчи ҳади потенциал энергия ролини уйнайди.

$$U(r) = \frac{P_\varphi^2}{m r^2} - \frac{1}{r^2}, \quad \text{бу ердан } U'(r) = \frac{2}{r^3} \left(P_\varphi^2 - \frac{1}{2} \right),$$

барқарор мувозанат нуктаси эса, $U'(r) = 0$ дан топилади:

$$r_0 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{\rho} \quad U'(r_0) = 2e \frac{r_0^2}{\rho} > 0.$$

Кинетик энергиянинг ифодасидан $\epsilon(r_0) = \frac{m}{2}$.

$$\text{Демак, } \omega = \sqrt{\frac{U''(r_0)}{\epsilon(r_0)}} = \frac{2}{\sqrt{m}} \exp\left(1 - \frac{r_0^2}{m}\right).$$

Б - масала. 3.2-расмда кўрсатилган зарранинг бўлама ҳаракатининг частотасини топинг. Пружинининг бикрлиги k ва ℓ га тенг. Ечилиши. Бикрлиги k ва ℓ га тенг пружиналарнинг потенциал энергиялари

мос равишда $\frac{kx^2}{2}$ ва $\frac{\ell x^2}{2}$ га тенг.

Бу ерда x - зарранинг барқарор мувозанат нуктасидан оғиш масофаси. Чизмадаги системанинг Лагранж функциясини тузайлик:

$$L = \frac{mx^2}{2} - \frac{ck + \ell x^2}{2} = T - U. \quad \text{Бу ердан } \omega = \sqrt{\frac{k + \ell}{m}}.$$

3.1. - машқлар.

1. Берилган Лагранж функциясига мос кичик эркин тебранишларнинг частотасини топинг.

- а) $L = \dot{x}^2 - x^2 \cdot e^x$, б) $L = \dot{x}^2 \cos^2 x - 1$, в) $L = \dot{x}^2/2 - x \ln x$,
 г) $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$, д) $L = m\dot{x}^2/2 - c \cos x - F \cdot x$,
 е) $L = m\dot{x}^2/2 - c k x^2/2 - F \cos x$, $F = \text{const}$.

2. Турли изотоп атомларидан таркиб топган иккита атомли молекула тебраниш частоталари ω ва ω' нинг нисбатини топинг, атомлар массаси мос равишда m_1, m_2 ва m'_1, m'_2 га тенг.

3. 3.1-расмда берилган системанинг частотаси топилин.

4. Тўғри чизик бўйича ҳаракатлана олувчи ва бир учи А нуктада бўлган пружинанинг иккинчи учига бириктирилган m массали нукта-нинг (3.3-расм) тебраниш частотаси ва барқарор мувозанат ҳолати аниқлансин. Пружинанинг узунлиги ℓ га тенг бўлиб, F куч таъсирида тортилади ($x \ll \ell$ деб қарансин).

5. 3.4-расмда кўрсатилган системанинг барқарор мувозанат ҳолати ва частотаси топилин. Мувозанат ҳолатида пружинага F куч таъсир этади, ва унинг узунлиги ℓ га тенг. Кўрсатма:

$$\delta \epsilon = \sqrt{(\epsilon g + \epsilon) - \dot{r}^2} - \epsilon \quad \text{деб олинсин ва } \epsilon \text{ бурчак киритилсин}$$

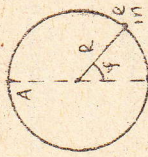


3.3 - расм

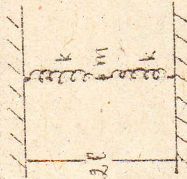
6. Нотўғун мувозанат нуктаси атропоида зарра координатасининг боғлиқлигини топинг. Лагранж функциясини тузинг.

7. Массаси m зарради e бўлган зарра радиуси R бўлган вертикал вазиятдаги айлана бўйлаб оғирлик кучи таъсирида ҳаракатланади. Айлананинг энг қуйи нуктасида зарради e га тенг бўлган айнан шундай зарра турибди. Мувозанат ҳолати ва тебраниш частотаси топилин (3.5-расм).

8. 3.6-расмда кўрсатилган системанинг оғирлик кучи таъсиридаги эркин тебраниши топилин. Лагранж функциясини тузайлин. Мувозанат нуктаси, частотаси топилин.



3.5 - расм



3.6 - расм

3.2. Маъмурий тебранишлар

1 - масала. Кичик доимий ташқи куч F_0 таъсирида мувозанат ҳолатининг ($x_0 = 0$) силжишини топинг. Уни масса ва частота орқали ифодаланг.

Ечилиши. Система мувозанат нуктаси ($x_0 = 0$) атропоида кичик тебранишлар бўлгани учун унинг потенциал энергияси ташқи куч таъсир этгунча қуйидаги кўринишда бўлади:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Мажмуд ташқи куч таъсирида потенциал энергия ўзгаради:

$$U(x) = \frac{m\omega^2 x}{2} - F_0 x.$$

Мувозанат нуктаси x_0 эса шу потенциал энергиядан олинган ҳосиланинг нолга тенглигидан топилади.

$$U'(\cos \omega = m\omega^2 x'_0 - F_0 = 0, \text{ яъни } x'_0 = \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Демак, ўзгармас куч тебранишнинг мувозанат ҳолатини силжитади. 2 - масала. Бошланғич $t = 0$ моментда система мувозанат ҳолатида ($x = 0$) тинч турган ($\dot{x} = 0$) деб олиб, $F(t) = F_0 \cos \omega t$ куч таъсирида системанинг мажбурий тебранишини аниқланг. Эркин тебраниш частотаси ω га тенг.

Ечилиши. Системанинг ташқи куч таъсиридаги мажбурий тебраниши (3.7) тенгламага мос равишда кечади: $x + \omega^2 x = \frac{1}{m} F_0 \cos \omega t$. Бу тенглама бир жинсли бўлмаган олдий 2 - тартибли дифференциал тенгламадир. Унинг умумий ечими шу тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг (3.2) умумий ечими x_0 ва шу тенгламанинг бирор хусусий x_1 ечилири йиғиндисидан иборатдир: $x = x_0 + x_1$. Маълумки, (3.2) ифодага мос равишда $x_0 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. Хусусий ечим x_1 ни эса ташқи кучга мос равишда $x_1 = B \cos \omega t$ ҳолда қилирайлик. Бу ифодани юқоридаги тенгламага олиб бориб қўйиб ва қисқартиришлар натижасида $B = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \alpha^2)}$ га эга бўламиз. Яъни, $x = x_0 + x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \cos \omega t$.

C_1 ва C_2 коэффициентларни бошланғич шартлардан ($t=0, x=0, \dot{x}=0$) фойдаланиб толамиз. $t = 0$ да $x = 0$ дан $C_1 = -\frac{F_0}{m(\omega^2 - \alpha^2)}$.

$t = 0$ да $\dot{x} = 0$ дан эса $C_2 = 0$ келиб чиқади. Натижада

$$x = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \alpha^2)} (\cos \omega t - \cos \alpha t) \text{ га тенг бўлади.}$$

3 - масала. Ташқи куч $F = F_0 \cos(\omega + \Delta t)$ ($\omega \gg \Delta$) таъсирида тебраниш амплитудасининг вақтга боғлиқ равишда ўзгаришини толинг, ω - эркин тебраниш частотаси, $t = 0$ да $x = 0, \dot{x} = 0$. Ечилиши. 2 - масаланинг ечимидан фойдалансак:

$$x = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \alpha^2)} (\cos(\omega + \Delta t) - \cos \omega t).$$

$$\text{Лекин } \omega \gg \Delta \text{ эканлигидан } \omega^2 - (\omega + \Delta)^2 \approx -2\omega\Delta, \\ x = \frac{F_0}{2m\omega\Delta} (\cos \omega t - \cos(\omega + \Delta t)).$$

Урта қавс ичидаги ифодани тригонометрик алмаштиришлар натижасида синуслар қўлайтмасига келтириб ёзиб оلسак бўлади. Натижада

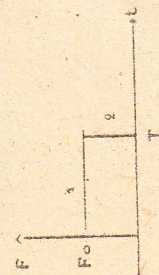
$$x = \frac{F_0}{m\omega\Delta} \sin \frac{\Delta t}{2} \cdot \sin(\omega + \frac{\Delta}{2}) t.$$

Демак, тебраниш амплитудаси вақт ўтиши билан частотаси $\frac{\Delta}{2}$ (тебраниш даври $\frac{4\pi}{\Delta}$) га тенг бўлган ҳолда даврий ўзгаради.

Унинг максимал қиймати эса

$$A_{\max} = \frac{F_0}{m\omega\Delta}$$

4 - масала. Система тебранишининг ташқи F куч таъсиридаги кейинги амплитудаси топилсин. Система $t = 0$ моменттача мувозанат ҳолатида тинч турган ($x = 0, \dot{x} = 0$), F куч эса, қуйидаги қонун бўйича ўзгаради: $t < 0$ ва $t > T$ да $F = 0$, $0 < t < T$ да $F = F_0$.



Ечилиши: $t < T$ вақтдаги, яъни $F = F_0$ куч таъсир этиб турган вақтдаги (3.7) тенгламанинг хусусий ечимини $x_1 = \frac{F_0}{m\omega^2}$ шаклида қилирамиз. Умумий ечим

$$x^{(1)} = x_0^{(1)} + x_1^{(1)} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{m\omega^2} \text{ бошланғич шартлар}$$

асосида қуйидагича ёзиб олинади:

$$x^{(1)} = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

куч таъсир этмаганда ($t > T$ да) эса, тебраниш эркин

$$x^{(2)} = C_3 \cos \omega t - T + C_4 \sin \omega t - T$$

бу икки ечим (тебраниш) $t = T$ моментда (чагарала) бир-бирига тенг бўлиши керак:

$$x^{(1)}(T) = x^{(2)}(T) \text{ ва } \dot{x}^{(1)}(T) = \dot{x}^{(2)}(T). \text{ Бу}$$

$$\text{"чагаравий" шартлардан } C_3 = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega T), C_4 = \frac{F_0 \sin \omega T}{m\omega^2}.$$

Системанинг куч таъсиридан кейинги амплитудаси

$$A = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} = \frac{2F_0}{m\omega^2} \sin \frac{\omega T}{2}$$

5 - масала. Олдинги масала $t = 0$ дан $T = 2\pi/\omega$ гача $F(t) = F_0 \cos \omega t$ қонун билан ўзгарувчи куч учун ечилсин (3.8 - расм). Ечилиши. Бу масалани ҳам ҳудди олдинги ҳолатгадек ечиш мумкин. Лекин биз ҳозир (3.7) га мос ечимнинг бошқача қўринишидан фойдаланамиз. Одатда уни

$$\xi = e^{i\omega t} \left(\int f(\tau) d\tau + e^{-i\omega t} \right) \quad (3.8')$$

$\xi = x + i\omega x$, $\xi_0 = \xi(t=0)$ ҳолда ёзиб олинади. Тебраниш $x(t)$ эса (3.8') ифоданинг маъхум қисмини $i\omega$ га бўлиш натижасида топилади. Амплитуда эса $|\xi|^2 = \omega^2 a^2$ дан аниқланади.

$f(\tau) = F_0 \cos \omega \tau = F_0/2 (e^{i\omega \tau} + e^{-i\omega \tau})$ ни (3.8')га олиб бориб қўйсак, ва интегралласак ($t > T$ да система $x = 0$ атрофида эркин тебранади):

$$\xi = \frac{F_0}{2m} e^{i\omega t} \left(\int_0^t e^{-i\omega \tau} (e^{i\omega \tau} + e^{-i\omega \tau}) d\tau \right) =$$

$$\frac{F_0}{2m} e^{i\omega t} \int_0^t (1 + e^{-2i\omega \tau}) d\tau = \frac{F_0}{2m} e^{i\omega t} \left(t + \frac{1}{2i\omega} (1 - e^{-2i\omega t}) \right).$$

Бу ердан $|\xi|^2 = \frac{F_0^2}{16m^2 \omega^2} (4\omega^2 t^2 + 4\sin^2 \omega t).$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ эканини ҳисобга олсак, $a = \frac{F_0}{m\omega^2}$ га тенг.

θ — масала. Ҳар қандай $\ell = 2$, массаси $m = 1$ бўлган маятник сўнувчи тебранишнинг частотаси ва сўниш коэффициентни топишсин. Ишқаланиш натижасида энергиянинг ятилиши бурчак тезлиги квадратининг иккиланганига тенгдир. (Оғирлик кучи тезланиши $a = 1$ деб олинсин, 3.9-расм.)

Ечилиши. Эркин тебранаётган маятникнинг Лагранж функциясини тузайлик: $L = T - U$, $T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$.



3.8 - расм

3.9 - расм

Қўё қордината системасида: $x = \ell \sin \varphi$, $y = \ell \cos \varphi$.

$$T = \frac{m\ell^2}{2} (\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) = \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2 \ell^2.$$

Чизмадан кўриниб турибдики, потенциал энергия $U = mg\ell(1 - \cos \varphi)$ га

тенг. Бу ифодадан кўриниб турибдики, $\varphi_{\text{нуб}} = 0$ кичик тебранишларнинг барқарор мувозанат нуқтасидир. Бу нуқта атрофида потенциал функцияни қаторга ёйиш натижасида $U = mg\ell \varphi^2/2$ ни олаемиз (3.24 га қаралсин). Демак, эркин тебранаётган маятникнинг Лагранж функцияси қуйидагичадир:

$$L = \frac{m\ell^2}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{mg\ell}{2} \varphi^2.$$

Аммо масаланинг шартига кўра ишқаланиш натижасида энергиянинг ятилиши $E = -2\varphi^2$ га тенг. Демак, (3.22) ифодага асосан диссипатив функция $F = -\varphi^2$ га тенг.

Шундай қилиб, (3.22) га асосан ҳаракат тенгламасини тузаямиз.

$$\ddot{\varphi} + 2 \frac{\varphi}{m\ell^2} + g\varphi/\ell = 0.$$

Масаланинг берилишига кўра $m = 1$, $\ell = 2$, $g = 1$ десак,

$$\ddot{\varphi} + 2 \frac{1}{4} \varphi + \frac{1}{2} \varphi = 0.$$

Бу тенгламани (3.16) тенглама билан солиштирсак, $\lambda = 1/4$ ва $\omega_0^2 = 1/2$ ни топиамиз. Демак, сўнувчи тебранишларнинг биринчи ҳолини олаемиз, яъни $\lambda < \omega_0$. Сўнувчи тебранишларнинг "частотаси"

эса $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ га тенгдир.

7 - масала. Сўнувчан тебранаётган зааранинг бошланғич шартлар $t = 0$ да $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ асосидаги ҳаракатни аниқланг. Сўниш коэффициентини λ ишқаланиш бўлмагандаги частотадан ω_0 кичик деб олинг. Ечилиши. Ҳаракат тенгламаси (3.16) га биноан

$$\ddot{x} = 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Бу тенгламанинг ечими (3.17) га асосан қуйидагичадир:

$$x = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}, \quad \gamma_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Бизнинг ҳол $\lambda < \omega_0$ учун $\gamma_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ ғ.

Ва $x = e^{-\lambda t} (C_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t)$

Бу ердан эса $\theta = x = -\lambda x + e^{-\lambda t} \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} (-C_1 \sin \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + C_2 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t)$.

Энди бошлангич шартлардан номълум коэффициентлар C_1 ва C_2 ни

топамиз: $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{\theta + \lambda x_0}{\sqrt{\frac{g}{\omega_0^2} - \lambda^2}}$ демак,

$$x = e^{-\lambda t} \left(x_0 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \cdot t + \frac{\theta + \lambda x_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \cdot \sin \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \cdot t \right).$$

3.2 - масълар.

1. Бошлангич $t = 0$ моментда система мувозанат ҳолатида ($x=0$) тинч турибди ($\dot{x} = 0$) деб. қуйидаги $F(t)$ кучлар таъсирида системанинг мажбурий тебранишини аниқланг. Эркин тебраниш частотаси ω га тенг.

а) $F(t) = F_0$, б) $F(t) = F_0 \sin \omega t$,

в) $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$, г) $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$,

д) $F(t) = F_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t$, е) $F(t) = F_0 e^{-\alpha t} \sin \omega t$.

2. Қуйидаги ташқи кучлар $F(t)$ таъсирида тебраниш амплитудасининг вақтга боғлиқ равишда ўзгариши топилсин. Эркин тебраниш частотаси ω , $t = 0$ да $x = 0$, $\dot{x} = 0$.

а) $F(t) = a \cos \omega t$, б) $F(t) = a \sin \omega t$, в) $F(t) = a \sin \omega t + \Delta t$.

3. $t = 0$ моментда мувозанат ҳолатида тинч турган ($x = 0$, $\dot{x} = 0$) система тебранишининг $F(t)$ куч таъсиридаги кейинги амплитудаси топилсин. $F(t)$ кучларнинг ўзгариши қуйидагичадир:

а) $t < 0$ да $F = 0$, $0 < t < T$ да $F = \frac{t}{T} \cdot F_0$, $t > T$ да $F = F_0$;

б) $t < 0$ да $F = 0$, $0 < t < T$ да $F = F_0 t$, $t > T$ да $F = 0$;

в) $t < 0$ да $F = 0$, $0 < t < T$ да $F = F_0$, $t > T$ да $F = -\frac{F_0}{T}$;

г) $F = F_0 \sin \omega t$, $0 < t < \frac{2\pi}{\omega}$ да, ва $F = 0$, $t < \infty$ да.

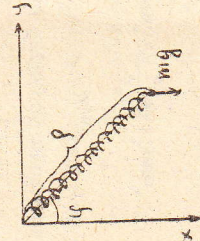
4. Б - масълани, $\ddot{x} = -4\epsilon \omega^2 x$ ҳоли учун ечинг.

5. 3.2 - қизмада кўрсатилган системанинг сўниш коэффициентни ва частотасини $k = B$, $e = 4$ ва ҳар бир пружинада энергия йўқотилиши теълиқ квадратининг иккиланганига тенг бўлган ҳолда топинг.

6. 7 - масълани а) $\lambda > \omega_0$, б) $\lambda = \omega_0$ ҳоллар учун ечинг.

§3.3. Қўл эркинлик даражасига эга системанинг тебраниши

1 - масала.



3.10 - расм

Ечилиши. Координата системасини з.в - расидагидек танлаб оламиз, мустақил координаталар сифатида қўбо координаталари ρ ва φ ни олайлик. У ҳолда системанинг потенциал энергияси:

$$U = -mg\rho \cos \varphi + k/2 (\rho - a)^2.$$

Барқарор мувозанат ҳолатини топшш учун потенциал энергиядан олинган ҳосилаларини толайлик:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -mg \cos \varphi + k(\rho - a), \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = mg \rho \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mg \rho \cos \varphi, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi} = mg \sin \varphi.$$

Биринчи тартибли ҳосилаларни нолга тенглаш натижасида

$$\rho_{\text{мув}} = a \pm mg/k, \quad \varphi_{\text{мув}} = \{0, \pi\} \text{ ни топамиз.}$$

Булардан $\rho_{\text{мув}} = a + mg/k$, $\varphi = 0$ барқарор мувозанат нуқталари бўлади. Чунки, иккинчи тартибли ҳосилалар

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \right)_{\text{мув}} = k > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_{\text{мув}} = mg \rho_{\text{мув}} > 0.$$

$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi} \right)_{\text{мув}} = 0$ қуйидаги тенгсизликни қаноатлантиради:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \right)_{\text{мув}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_{\text{мув}} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \varphi} \right)_{\text{мув}}^2 > 0. \quad (3.20)$$

Охириги тенгсизлик потенциал энергиянинг шу ҳолатда минимуми борлигини аниқлатади. Мувозанат ҳолатининг бошқалари

$$\rho_{\text{мув}} = a - \frac{mg}{k}, \quad \varphi_{\text{мув}} = \pi \text{ барқарормас (нотўғун) мувозанат ҳолатлари эканлигини ҳам шу тенгсизликдан кўрса бўлади.}$$

2 - масала. Қуйидаги Лагранж функцияси ёрдамида аниқланган системанинг хусусий частотаси топилин:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \left(\frac{1}{xy} + x + y \right)$$

Ечилми. Потенциал энергиянинг кўринишидан барқарор мувозанат ҳолатини топилик:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 - 1/y^2 x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 1 - 1/x^2 y, \quad x_{\text{мув}} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 1 - 1/y^2 x, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 1; \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{\text{мув}} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{\text{мув}} = 2.$$

Демак, $x_{\text{мув}} = y_{\text{мув}} = 1$ ҳолатлар системанинг барқарор мувозанат ҳолати экан (3.17 га қаранг). Энди берилган

Лагранж функциясини (3.10) га мувофиқ равишда ёзиб олайлик. Аввал кинетик энергиянинг координаталар орқали ёзилган ифодасини мувозанат ҳолатидан оғиш $\xi_1 = x - 1$, $\xi_2 = y - 1$ лар орқали ёзиб олайлик. Бунинг учун кинетик энергия ифодасида

$x = 1$, $y = 1$ ва $x = \xi_1$, $y = \xi_2$ алмаштиришлар бажариш етарлидир.

Энди потенциал энергия ифодасини ҳам шу кўринишга келтирайлик. Бунинг учун потенциал энергия ифодасини мувозанат ҳолати ($x = 1$, $y = 1$) атрофида қаторга ёйиб, таърифта биноан иккинчи тартибли ҳалларини сақлаб қолсак етарли. Ўзгармасдан иборат бўлган қисмини, Лагранж функциясининг хусусиятларига биноан, ҳисобга олмасак бўлади.

$$U'_{\text{мув}} = 3, \quad U'_{\text{х}} / \text{мув} = 0, \quad U'_{\text{хх}} / \text{мув} = U'_{\text{yy}} / \text{мув} = 2, \quad U'_{\text{ху}} / \text{мув} = U'_{\text{уу}} / \text{мув} = 1.$$

Демак,

$$U(\xi_1, \xi_2) = 2t(x-1)^2 + (y-1)^2/2 + (1+x-1)(y-1)/2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1 \xi_2.$$

Шундай қилиб, Лагранж функциясини қуйидаги ҳолга келтириб оламиз:

$$L = (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2)/2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1 \xi_2)$$

Ҳаракат тенгламалари (1.3) га биноан қуйидагича

$$\ddot{\xi}_1 + 2\dot{\xi}_1 + \xi_2 = 0, \quad \ddot{\xi}_2 + 2\dot{\xi}_2 + \xi_1 = 0.$$

Бу тенгламаларнинг ечимини $\xi_1 = C_1 e^{\lambda t}$, $\xi_2 = C_2 e^{\lambda t}$ ҳолда

қиларамиз. Буларни тенгламага қўйсак:

$$C_1(2 - \omega^2) + C_2 = 0, \quad C_1 + C_2(2 - \omega^2) = 0 \quad \text{ни оламиз.}$$

(3.13) га биноан охириги тенгламадаги коэффициентлардан тузилган детерминант нолга тенг бўлиши керак:

$$\begin{vmatrix} 2 - \omega^2 & 1 \\ 1 & 2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (2 - \omega^2)^2 - 1 = (1 - \omega^2)(3 - \omega^2) = 0.$$

Бу ердан тебранишларнинг хусусий частотаси $\omega_1 = \sqrt{1}$, $\omega_2 = \sqrt{3}$ эканлиги келиб чиқади.

3 - масала. Қуйидаги Лагранж функцияси билан

$$L = C \dot{x}^2 + xy + y^2/2 - (x^2 - xy + y^2)/2$$

аниқланган системанинг нормал тебраниши ва частотасини топиш. Ечилми. Ҳаракат тенгламаларини (1.3) га асосланиб тузамиз.

$$x + y/2 + x - y/2 = 0, \quad y + x/2 + y - x/2 = 0.$$

Бу тенгламаларнинг ечимини $x = c_1 e^{i\omega t}$, $y = c_2 e^{i\omega t}$ ҳолда қиларамиз. Бу ифодаларни юқоридаги тенгламаларга олиб бориб қўйсак:

$$c_1(1 - \omega^2) - c_2(1 + \omega^2)/2 = 0,$$

$$-c_1(1 + \omega^2)/2 + c_2(1 - \omega^2) = 0 \quad (3.27)$$

Назарияга биноан, (3.13) га мос детерминант нолга тенг бўлгандагина нолдан фарқли ечим топилади:

$$\begin{vmatrix} c_1(1 - \omega^2) & -(c_1 + \omega^2)/2 \\ -(c_1 + \omega^2)/2 & c_1(1 - \omega^2) \end{vmatrix} = c_1^2(1 - \omega^2)^2 - 1/4(1 + \omega^2)^2 = 0$$

$$= 1/4(1 - 3\omega^2)(3 - \omega^2) = 0$$

Бу ердан хусусий частоталар $\omega_1 = \sqrt{3}$, $\omega_2 = 1/\sqrt{3}$ га тенглигини топамиз. Шундай қилиб, нормал тебранишлар (3.14) га биноан

$$Q_1 = \text{Re}(c_1 e^{i\sqrt{3}t}), \quad Q_2 = \text{Re}(c_2 e^{i/\sqrt{3}t})$$

Маълумки, (3.14) га биноан

$$x = c_{11} Q_1 + c_{12} Q_2, \quad y = c_{21} Q_1 + c_{22} Q_2.$$

Бу коэффициентларни топиш учун (3.27) тенгламага аввал $\omega_1^2 = 3$ ни, кейин $\omega_2^2 = 1/3$ ни қўямиз. Натижада

$$\omega = \omega_1 \quad \text{да} \quad c_{11} = -c_{21} \quad \text{ва} \quad \omega = \omega_2 \quad \text{да} \quad c_{12} = c_{22} \quad \text{ни топамиз.}$$

Бу билан биз x ва y ларни нормал координаталар Q_1 ва Q_2 лар орқали ёзиб олишимиз мумкин. Лекин c_{11} ва c_{22} коэффициентларни шундай танлаш керакки, нормал координаталар орқали ёзилган Лагранж

Функцияси таърифага биноан гармоник осцилляторниқига ўхшаш бўлиши

керак: $L = \dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2/2 - \omega_1^2 Q_1^2 + \omega_2^2 Q_2^2/2$ (3.28)

Ўқоридагиларга биноан: $x = c_{11} Q_1 + c_{22} Q_2$, $y = -c_{11} Q_1 + c_{22} Q_2$.

Буларни берилган Лагранж функциясидаги кинетик ва потенциал энергия ифодаларига қўйиб, (3.28) қўринишини талаб қилсак:

$$c_{11} = -c_{22} = 1, \quad c_{12} = c_{21} = 1/\sqrt{3} \quad \text{ларни оламиз.}$$

Шуни кўрсатайлик. Кинетик энергия ифодасига $x = c_{11} Q_1$,

$$y = -c_{11} Q_1 = c_{21} Q_1 \quad \text{ларни олиб бориб қўйсак, } c_{11}^2 Q_1^2/2 \quad \text{қўриниши-}$$

даги ифодани оламиз. Лекин $c_{11}^2 = 1$ бўлиши керак, яъни $c_{11} = c_{21} = 1$

экан. Ҳудди юқоридагидек $x = c_{22} Q_2$, $y = c_{12} Q_2 = c_{22} Q_2$ ларни

кинетик энергия ифодасига олиб бориб қўйиш натижасида

$$3c_{22}^2 Q_2^2/2 \quad \text{ифодани оламиз, яъни } c_{22}^2 = 1/3 \quad \text{бўлиши керак.}$$

Демак, $c_{22} = c_{12} = 1/\sqrt{3}$ экан.

Шундай қилиб, нормал тебранишлар қўйидагича аниқланар экан:

$$x = c Q_1 + Q_2/\sqrt{3}, \quad y = c - Q_1 + Q_2/\sqrt{3}.$$

4 - масала

Массалари m_1 ва m_2 га тенг ва бир-бири билан бикрлиги k га, узунлиги a га тенг бўлган пружина билан боғланган системанинг тебраниши топилисин (икки атомли молекула модели).

3.11 - расм

Ечилиши. Декарт координаталарининг ОХ ўқини пружина бўйлаб жойлаб, системанинг Лагранж функциясини ёзишимиз мумкин:

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} (x_2 - x_1 - a)^2.$$

Потенциал энергиянинг ифодасидан қўриниб турибдики, унинг минимал қиймати фақатгина $x_{1\text{мув}} = x_{2\text{мув}} = a$ да эмас, балки $x_2 - x_1 = a$ ни қаноатлантирган ҳамма нукталарда мавжуд бўлади. Шунинг учун бу барқарор мувозанат нуктасини четлантирилган деб бўлмайди. Шунга қарамасдан, масалани ечишда юқорида ишлатилган методдан фойдалана-верамиз. Мувозанат ҳолатидан оғиш масофасини киритайлик:

$$\xi_1 = x_1 - x_{1\text{мув}}, \quad \xi_2 = x_2 - x_{2\text{мув}}.$$

Лагранж функциясини булар орқали ёзиб олайлик:

$$L = m_1 \dot{\xi}_1^2/2 + m_2 \dot{\xi}_2^2/2 - k (\xi_2 - \xi_1)^2/2.$$

Ҳаракат тенгламаси бундай бўлади:

$$\xi_1 + k/m_1 \cdot \xi_1 - k/m_2 \cdot \xi_2 = 0, \quad \xi_2 - k/m_2 \cdot \xi_1 + k/m_2 \cdot \xi_2 = 0.$$

$\xi_1 = c_1 e^{i\omega t}$ ва $\xi_2 = c_2 e^{i\omega t}$ ни тенгламага қўйиш натижасида

$$(-\omega^2 + k/m_1)c_1 - k/m_2 c_2 = 0; \quad -k/m_2 c_1 + (-\omega^2 + k/m_2)c_2 = 0.$$

Кoeffициентлардан тузилган детерминант эса,

$$\begin{vmatrix} c_1(-\omega^2 + k/m_1) & -k/m_2 \\ -k/m_2 & c_2(-\omega^2 + k/m_2) \end{vmatrix} = (-\omega^2 + k/m_1)(-\omega^2 + k/m_2) - \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0$$

$$= \omega^4 - \omega^2(k/m_1 + k/m_2) + k^2/m_2 = \omega^2(\omega^2 - k/\mu) = 0 \quad \text{бўлиши керак.}$$

Бу ерда $\mu = (1/m_1 + 1/m_2)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — келтирилган масса.

Натижада частоталарни топиамиз: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{k/\mu}$.

Энди ω_1 ва ω_2 ларни характеристик тенгламага олиб бориб қўямиз

ва $c_{11} = c_{21}$, $c_{12} = -(m_2/m_1)c_{22}$ ни топиамиз.

Нормал тебранишлар эса,

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} (c Q_1 + \sqrt{m_2/m_1} Q_2), \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} (c Q_1 - \sqrt{m_1/m_2} Q_2)$$

қўринишида бўлади. x_1 ва x_2 координаталарга ўтсак,

$$-x_1 = x_{1\text{мув}} + \frac{1}{\sqrt{m}} (c Q_1 + \sqrt{m_2/m_1} Q_2), \quad x_2 = x_{2\text{мув}} + \frac{1}{\sqrt{m}} (c Q_1 - \sqrt{m_1/m_2} Q_2).$$

3 - масала. Берилган Лагранж ва диссипатив функцияларига мос сўзувчи ҳаракатнинг сўниш коэффициенти топилисин:

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2}, \quad F = \frac{x^2 + y^2 + xy}{2}.$$

Ечилиши: Ҳаракат тенгламасини (3.22) га мос равишда тузамиз.

$$x + x + y/2 = 0, \quad y + y + x/2 = 0$$

Ҳаракат тенгламаларидан қўриниб турибдики, сўзувчи ҳаракат нодаврий. Ечимни $x = c_1 e^{rt}$ ва $y = c_2 e^{rt}$ қўринишида қилдирсак:

$$c_1(1+r) + c_2/2 = 0, \quad c_1/2 + c_2(1+r) = 0 \quad \text{ни оламиз.}$$

Бу ердан Γ ни топидиш учун юқоридаги тенгламалар системасининг детерминанти нолга тенг бўлиши керак.

$$\begin{vmatrix} 1 + \Gamma & 1/2 \\ 1/2 & 1 + \Gamma \end{vmatrix} = (1 + \Gamma)^2 - 1/4 = (1/2 + \Gamma)(3/2 + \Gamma) = 0.$$

Демак, $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = -3/2$ га тенг экан. Бу коэффициентлар аслида ҳаракат тезлигининг сўниш коэффициентларидир, чунки бу ҳаракат подалвий ҳаракатдир (гармоник функцияларга боғлиқлиги йўқ).

3.3 - машқлар.

1. Қуйидаги Лагранж функцияси ёрдамида аниқланган системанинг барқарор мувозанат ҳолати ва хусусий частотасини топиди:

а) $L = (x^2 + xy + y^2)/2 - (x^3 - y^3 + 3xy)$,

б) $L = (x^2 + y^2 + xy)/2 - (x \ln xy) + 1/x + 1/y$.

2. Қуйидаги Лагранж функцияси билан аниқланган системанинг нормал тебраниши ва частотасини топиди:

а) $L = (x^2 + 2xy + y^2)/2 - (3x^2 + 2y^2)/2$,

б) $L = (x^2 + 2xy + y^2 + z^2)/2 - (x^2 + y^2 + 2yz + z^2)/2$,

в) $L = (x^2 + xy + y^2 + z^2)/2 - (x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + yz)/2$,

г) $L = \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{\omega_0^2 x^2 + \omega_0^2 y^2}{2} + \alpha xy$.

3. (3.10) расмдаги системанинг тебранишини топиди.

4. Қуйидаги ҳолларда n та агардан иборат системанинг тебранма ҳаракатининг эркинлик даражаси ва характери топилиши:

а) фазодаги, б) текисликдаги, в) чизиқ бўйича.

5. Қуйидаги Лагранж ва диссипатив функцияларига мос сўниш коэффициенти, топиди:

$L = \frac{x^2 + xy + y^2}{2}$, $F = \frac{x^2 + 2y^2}{2}$

6. Ҳаракат тенгламасини тузинг:

а) $L = (x^2 + 2y^2)/2 - (3x^2 + 5y^2)/2$, $F = (x^2 - 3xy + 2y^2)/2$

б) $L = (4x^2 + 3xy + y^2)/2$, $F = (x^2 + 3y^2)/2$

в) $L = (x^2 + y^2)/2 - (1/xy + x + y)/2$, $F = (x^2/x + y^2/y)/2$

IV. КАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАР

Механик система ҳолатини умумлашган координата ва тезликлар орқали аниқлаш «Лагранж формализми» бундай системаларни ериштиришнинг ягона усули эмас. Баъзи механик системалар ҳолатини умумлашган координата q_i ва умумлашган импульслар p_i орқали ифодалаш қўлайроқ бўлади «Гамильтон формализми». Бу усулда механик системанинг ҳолати Гамильтон функцияси

$$H(p, q) = \sum p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (4.1)$$

билан характерланади. Ҳаракат тенгламаси эса $-S \leq S$ — эркинлик даражаси та биринчи тартибли тенгламалар системасидан иборатдир:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.2)$$

Бу тенгламалар — Гамильтон тенгламалари эки каноник тенгламалар деб аталади. (4.1) муносабатдан кўриниб турибдики, Гамильтон функцияси H Лагранж функцияси олган орттирма $L = L_0 + L'$ га тескари ишорали орттирма олади «бу ҳолда p, q ва q, p лар ўзгармас деб ҳисобланади»:

$$\{H'\}_{p, q} = -\{L'\}_{q, p} \quad (4.3)$$

Динамик катталиклар — умумлашган координата, импульс. ҳамда вақтнинг ихтиёрий функцияси $f(q, p, t)$ нинг вақт давомида ўзгариши қуйидагича аниқланади:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \quad (4.4)$$

Бу ерда

$$\{H, f\} = \sum_k \left[\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right] \quad (4.5)$$

Пуассон қавслари деб аталади. Агарда $f(q, p, t)$ ҳаракат интеграл с ҳаракат давомида сақланувчи катталик бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 \quad (4.6)$$

Шу жумладан, вақтга ошқора боғлиқ бўлмаса

$$\{H, f\} = 0 \quad (4.7)$$

Гамильтон тенгламалари Пуассон қавслари орқали жуда ҳам симметрик равишда ифодаланади $p_i = \{H, p_i\}$, $q_i = \{H, q_i\}$ (4.8)

Динамик катталикларнинг функцияси бўлган учта ихтиёрий f, g, h ларнинг Пуассон қавслари орасида Якоби айтияги ўринлидир:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (4.9)$$

§4.1. Берилган Гамильтон функцияларига мос Гамильтон тенгламаларини тузиш.

1 - масала. Ушбу Гамильтон функциясига мос Гамильтон тенгламасини тузинг:

$$H = \sqrt{1 + p^2} + r$$

Ечилиши. (4.2) ифодадаги тенгламага бинোন $(q \rightarrow r, p \rightarrow p)$:

$$r = \partial H / \partial p = (1/2)(1 + p^2)^{-1/2} \quad 2p = p / \sqrt{1 + p^2}$$

$$p = -\partial H / \partial r = -1 \quad \text{Демак, } r = p / \sqrt{1 + p^2}, \quad p = -1.$$

2 - масала.

Ечилиши. (4.2) ифодадан фойдаланамиз, лекин эркинлик даражаси иккига тенглигини назарга олиш керак $(q \rightarrow r, p \rightarrow p)$:

$$r = \partial H / \partial p = p, \quad p = -\partial H / \partial r = p^2 / (r^2 \sin^2 \theta)$$

$$\theta = \partial H / \partial p = p / (r^2 \sin^2 \theta), \quad p = -\partial H / \partial \theta = p^2 \cos \theta / (r^2 \sin^3 \theta) - \cos \theta$$

3 - масала. $H = p_r^2 / r^2 + p_\theta^2 / r^2 + p_\phi^2 / (r^2 \sin^2 \theta) + U(r, \theta, \phi)$

Ечилиши. Бу гаг эркинлик даражаси 3 га тенг, демак, уч жуфт тенглама топилди:

$$r = 2p_r, \quad p_r = 2p_\theta^2 + p_\phi^2 / \sin^2 \theta / r^3 - \partial U / \partial r$$

$$\theta = 2p_\theta / r^2, \quad p_\theta = 2p_\phi^2 \cos \theta / (r^2 \sin^3 \theta) - \partial U / \partial \theta$$

$$\phi = 2p_\phi / (r^2 \sin^2 \theta), \quad p_\phi = -\partial U / \partial \phi$$

4.1 - машқлар.

Ушбу Гамильтон функцияларидан Гамильтон тенгламаларини тузинг:

1. $H = (p^2 - r^2)/2$. 2. $H = p_x p_y / (1 + x^2 y)$.
3. $H = (p_x^2 + p_y^2) / (1 + x^2 + y^2) + u$. 4. 4.2 - машқларнинг 3 - пунктида берилган Гамильтон функцияларига мос.

§4.2. Лагранж ва Гамильтон функциялари орасидаги боғланиш.

1 - масала. Ушбу Лагранж функциясига мос Гамильтон функция-

$$\text{сини топинг: } L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Ечилиши. (4.1) ифодага асосан $H = p v - U(v)$, бу ерда

$$p = \partial L / \partial v = m v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Охирги ифодада тезлик, v ни импульс p орқали ифодалаб, Гамиль-

тон функциясининг формуласига олиб бориб қўямиз:

$$v = p c / \sqrt{p^2 + m^2 c^2}, \quad \sqrt{1 - v^2/c^2} = m c / \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

$$\text{Демак, } H = p v - L = p^2 c / \sqrt{p^2 + m^2 c^2} + m c^2 \sqrt{p^2 + m^2 c^2} = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

2 - масала. Берилган $L = p^2 c^2 / 2 + p \phi / 2 + 3 \phi \cos \phi$, дан Гамильтон функциясини тузинг.

Ечилиши. Бу Лагранж функцияси эркинлик даражаси иккига тенг механик системани характерлайди $q_1 \rightarrow \phi, \theta, \dot{q}_1 \rightarrow \dot{\phi}, \dot{\theta}$. Иеланаётган Гамильтон функцияси қуйидагича бўлиши керак:

$$H(p_\phi, p_\theta, \phi, \theta) = \sum p_i \dot{q}_i - L(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta})$$

Аввал умумлашган импульсларни топиб олайлик:

$$p_\phi = \partial L / \partial \dot{\phi} = p^2 c^2 \dot{\phi} + \phi, \quad p_\theta = \partial L / \partial \dot{\theta} = p^2 c^2 \dot{\theta}$$

$$\text{Бу ифодалардан } \dot{\phi} = (p_\phi - \phi) / p^2 c^2, \quad \dot{\theta} = p_\theta / p^2 c^2$$

Буларни Гамильтон функциясининг ифодасига олиб бориб қўйсак:

$$H = p_\phi \dot{\phi} + p_\theta \dot{\theta} - L(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = p_\phi (p_\phi - \phi) / p^2 c^2 + p_\theta p_\theta / p^2 c^2 - p^2 c^2 / 2 - \phi - (p_\phi - \phi) p_\theta / p^2 c^2 - 3 \phi \cos \phi =$$

$$= (p_\phi^2 / 2 + p_\theta^2 / 2 - p_\phi p_\theta) / p^2 c^2 - 3 \phi \cos \phi$$

3 - масала. Массаси m га тенг заррачанинг сферик координат системасидаги Гамильтон функциясини ёзинг.

Ечилиши. Маълумки, битта заррачанинг сферик координат системасидаги Лагранж функцияси қуйидаги кўринишдадир:

$$L = m \dot{r}^2 / 2 + r^2 \dot{\theta}^2 / 2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 / 2 - U(r, \theta, \phi)$$

Ҳар бир умумлашган координатага мос импульсларни ҳисоблаб олайлик: $p_r = m \dot{r}$, $p_\theta = m r^2 \dot{\theta}$, $p_\phi = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$.

Биз бу ифодалар орқали яна юқоридаги масалаларни ечгандек Гамильтон функциясини топишимиз мумкин. Ҳозир эса бошқача усул ишлатамиз. Механик системанинг энергиясини Лагранж функцияси орқали ифодасини эслайлик:

$$E = \sum \dot{q}_i \partial L / \partial \dot{q}_i - L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + U(r, \theta, \phi)$$

Гамильтон функциясини топиш учун эса, энергияни импульслар орқали

ёзиш кифоядир: $H = m\dot{r}^2/2 + r^2\dot{\theta}^2/2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2/2 + m\dot{\varphi}^2/2 + m\dot{\theta}^2/2 + m\dot{\varphi}^2/2$
 Демак, $H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + m\dot{\varphi}^2/2$

4 - масала. Ушбу Гамильтон функциясига мос Лагранж функция-
 сини топиш: $H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + m\dot{\varphi}^2/2$
 Ечилиши. Юқоридаги (4.1) ва (4.2) ифодадан $L = \sum p_i \dot{q}_i - H =$
 $= \sum p_i \dot{q}_i - H$, лекин ун томонда ҳамма умумлашган импульс-
 ларни теъликлар орқали ифодалаб олиш керак. Бизнинг ҳол учун
 (4.2) ифодадан теъликларни топамиз: $\dot{r} = p_r/\partial_r$, $\dot{\theta} = p_\theta/(r\sin\theta)$,
 Буларни Лагранж функциясининг ифодасига олиб бориб қўямиз:

$$L = \sum p_i \dot{q}_i - H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + m\dot{\varphi}^2/2 -$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + m\dot{\varphi}^2/2 - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + m\dot{\varphi}^2/2$$

$$+ m\dot{\varphi}^2/2 = r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2/2 - r$$

$$\text{Демак, } L = \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2/2 - r$$

5 - масала. $H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ Лагранж функцияси топилисин.

Ечилиши. $\dot{x} = p_x/\partial_x$, $\dot{y} = p_y/\partial_y$, $\dot{z} = p_z/\partial_z$ яъни $p_x = \dot{x}$, $p_y = \dot{y}$, $p_z = \dot{z}$.

$$L = \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

4.2 - масалар.

1. Қуйидаги ҳолларда массаси m га тенг зарранинг Гамильтон
 функцияси тузилсин: а) цилиндрик координат системасида;
 б) декарт координат системасида; в) гармоник осциллятор учун
 с) бикрлиги k ; г) математик маятник учун с узунлиги l .

2. Қуйида берилган L га мос Гамильтон функцияларини топиш:

$$а) L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{m}{2}\dot{z}^2 - U,$$

$$б) L = \dot{x}^2/2 + \dot{y}^2/2 + \dot{z}^2/2, \quad \text{г) } L = \dot{x}^2/2 + \dot{y}^2/2 + \dot{z}^2/2$$

$$д) L = \dot{x}\dot{y} + \dot{y}\dot{z} + \dot{z}\dot{x}, \quad \text{е) } L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 1/r$$

$$ж) L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{z}, \quad \text{з) } L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - mgr\cos\theta$$

$$и) L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}\dot{\varphi}^2 - mgr\cos\theta$$

$$к) L = \dot{x}^2/2 + \dot{y}^2/2 + \dot{z}^2/2 - \alpha x^2 + \beta y^2, \quad \text{д) } L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - ep + \sum x_i A_i e$$

$$\beta = \dot{x}/c = v/c, \quad \text{м) } L = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\omega}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\omega}^2\cos^2\theta) +$$

$$+ 3\dot{\omega}^2(1-\dot{\omega}\sin^2\theta\sin^2\varphi)/2$$

3. Қуйидаги Гамильтон функцияларига мос Лагранж функцияларини

топиш:

$$а) H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

$$б) H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

$$в) H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

$$д) H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

$$ж) H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

$$и) H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

§ 4.3 Пуассон қавслари

1 - масала. Молдий нуқта импульси билан моментининг декарт
 компоненталаридан тузилган Пуассон қавсларини ҳисобланг.

Ечилиши. (4.5) ифодлага асосан:

$$\{M_x, p_y\} = \sum \left(\frac{\partial M_x}{\partial p_i} \frac{\partial p_y}{\partial q_i} - \frac{\partial p_y}{\partial p_i} \frac{\partial M_x}{\partial q_i} \right)$$

Бизнинг ҳол учун

$$q_i = x, y, z; \quad p_i = p_x, p_y, p_z$$

$$\text{яъни, } p_x = m\dot{x}, \quad M_x = y p_z - z p_y; \quad p_y = m\dot{y}, \quad M_y = z p_x - x p_z,$$

$$p_z = m\dot{z}, \quad M_z = x p_y - y p_x$$

$$\{M_x, p_y\} = \frac{\partial M_x}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial x} - \frac{\partial p_y}{\partial p_y} \frac{\partial M_x}{\partial x} = \frac{\partial M_x}{\partial x} = y$$

$$\{M_y, p_x\} = \frac{\partial M_y}{\partial p_x} \frac{\partial p_x}{\partial y} - \frac{\partial p_x}{\partial p_x} \frac{\partial M_y}{\partial y} = \frac{\partial M_y}{\partial y} = -z$$

$$\{M_z, p_y\} = \frac{\partial M_z}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial z} - \frac{\partial p_y}{\partial p_y} \frac{\partial M_z}{\partial z} = \frac{\partial M_z}{\partial z} = x$$

$$\{M_x, p_z\} = \frac{\partial M_x}{\partial p_z} \frac{\partial p_z}{\partial x} - \frac{\partial p_z}{\partial p_z} \frac{\partial M_x}{\partial x} = \frac{\partial M_x}{\partial x} = y$$

$$\{M_y, p_z\} = \frac{\partial M_y}{\partial p_z} \frac{\partial p_z}{\partial y} - \frac{\partial p_z}{\partial p_z} \frac{\partial M_y}{\partial y} = \frac{\partial M_y}{\partial y} = -z$$

Қолган қавслар шу ифодаларда x, y, z ларни циклик алмаштириш на-
 тижасида ҳосил бўлади. Бу ифодаларни бутунлай антисимметрик
 тензор орқали ёзиб олишимиз мумкин: $\{M_i, p_j\} = -\epsilon_{ijk} p_k$

2 - масала. Молдий нуқтанинг импульс моментлари декарт
 компоненталаридан тузилган Пуассон қавслари ҳисоблансин.

Ечилиши: $\{M_x, M_y\} = \frac{\partial M_x}{\partial p_y} \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial p_x} \frac{\partial M_x}{\partial y} = \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{\partial M_x}{\partial y}$

bed

$$+ \frac{\partial M_x}{\partial p_z} \frac{\partial M_y}{\partial z} - \frac{\partial M_x}{\partial z} \frac{\partial M_y}{\partial p_z} = y p_x - x p_y = -M_z$$

Демак, $\langle M_x, M_y \rangle = -M_z$.

Худди шунингдек, $\langle M_y, M_z \rangle = -M_x$, $\langle M_z, M_x \rangle = -M_y$.

Бир хил компоненталарнинг Пуассон қавслари нолга айланиб кетади, чунки ҳар бир айилувчи ҳаллар бир-бирига тенгдир:

$$\langle M_x, M_x \rangle = \langle M_y, M_y \rangle = \langle M_z, M_z \rangle = 0.$$

Эки, $\langle M_i, M_j \rangle = -\epsilon_{ijk} M_k$.

Э — масала, $\langle M_i, M^2 \rangle$ ҳисоблансин.

Ечилиши:

$$\begin{aligned} \langle M_x, M^2 \rangle &= 0 + \frac{\partial M_x}{\partial p_y} \frac{\partial M^2}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial M^2}{\partial p_y} + \frac{\partial M_x}{\partial p_z} \frac{\partial M^2}{\partial z} - \frac{\partial M_x}{\partial z} \frac{\partial M^2}{\partial p_z} = \\ &= (-z) \frac{\partial}{\partial y} (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2) - p_z \frac{\partial}{\partial p_y} (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2) + y \frac{\partial}{\partial z} (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2) - \\ &= (-p_y) \frac{\partial}{\partial p_z} (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2) - p_z \frac{\partial}{\partial p_y} (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2) + \frac{\partial}{\partial z} (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2) = \\ &= 2 M_z M_y + 2 M_y (-M_z) = 0. \end{aligned}$$

Худди шунингдек, $\langle M_y, M^2 \rangle = \langle M_z, M^2 \rangle = 0$. Демак, $\langle M_i, M^2 \rangle = 0$.

Буни бoshqача ҳам келтириб чиқариш мумкин:

$$\begin{aligned} \langle M_i, M^2 \rangle &= \langle M_i, \sum_k M_k M_k \rangle = \sum_k \langle M_i, M_k M_k \rangle = \sum_k (\langle M_i, M_k \rangle M_k + \\ &+ \langle M_i, M_k \rangle M_k) = 2 \sum_k \langle M_i, M_k \rangle M_k = 2 \langle M_i, M^2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

4 — масала. $\langle \vec{a}, \vec{r} \rangle, \langle \vec{b}, \vec{r} \rangle$ ҳисоблансин.

Ечилиши. Бу ифодани ҳисоблашдан олдин импульс ва радиус вектор декарт компоненталари орасидаги Пуассон қавсларини топайлик:

$$\begin{aligned} \langle p_k, q_j \rangle &= \sum_i \left(\frac{\partial p_k}{\partial p_i} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} \right) = \sum_i \frac{\partial p_k}{\partial p_i} \delta_{ij} = \delta_{kj} \\ \langle \langle \vec{a}, \vec{r} \rangle, \langle \vec{b}, \vec{r} \rangle \rangle &= \left\langle \sum_i a_i p_i, \sum_k b_k q_k \right\rangle = \sum_{i,k} a_i b_k \langle p_i, q_k \rangle = \\ &= \sum_{i,k} a_i b_k \delta_{ik} = \sum_i a_i b_i = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\langle \langle \vec{a}, \vec{r} \rangle, \langle \vec{b}, \vec{r} \rangle \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

4.4 — машқлар.

Қуйидаги Пуассон қавсларини ҳисобланг:

1. $\langle M_x, x_j \rangle$, 2. $\langle \langle \vec{b}, \vec{M} \rangle, \langle \vec{a}, \vec{r} \rangle \rangle$, 3. $\langle \langle \vec{a}, \vec{M} \rangle, \langle \vec{b}, \vec{M} \rangle \rangle$,
4. $\langle \vec{M}, \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle \rangle$, 5. $\langle \vec{r}, r^2 \rangle$, 6. $\langle \vec{r}, \langle \vec{a}, \vec{r} \rangle^2 \rangle$,
7. $\langle x_i, M^2 \rangle$, 8. $\langle p_i, M^2 \rangle$, 9. $\langle p_i, p^2 \rangle$.

§4.4. Каноник алмаштиришлар

Гамильтон тенгламаларини инвариант қолдирадиган алмаштиришларни каноник алмаштиришлар дейилади.

Янги ўзгарувчилар орқали ёзилган Гамильтон тенгламалари қуйидагичадир, янги n q, p учун:

$$Q_i = \partial n / \partial p_i, \quad P_i = -\partial n / \partial q_i \quad (4.11)$$

Ҳар қандай каноник алмаштиришлар §4.3 ўзининг ҳосил қилувчи функцияси — F орқали характерланади. Маълумки, Гамильтон тенгламалари энг кичик таъсир принципига кўра қуйидаги тенгламалар ҳам келтириб чиқарилади:

$$\delta \int \sum p_i dq_i - n(p, q, t) dt = 0, \quad (4.12)$$

Гамильтон тенгламалари ўз кўринишини сақлаб қолиши учун §4.12 ифода янги ўзгарувчилар §4.10 ва янги Гамильтон функцияси $n(p, q, t)$ учун ҳам ўринли бўлиши, ҳамда §4.12 даги интеграл остидаги ифода бир-бирдан ихтиёрий F функциянинг тула ҳосиласига фарқланishi керак:

$$\delta F = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i \delta q_i + \delta n - n \delta t. \quad (4.13)$$

Бу ердан

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad p_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad n = n + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.14)$$

Шуни таъкидлаш лозимки, эски каноник ўзгарувчилардан янги p, q ларга ўтказувчи ҳосил қилувчи функция аслида ҳам янги, ҳам эски ўзгарувчиларнинг функцияси бўлиши керак: $F = F(q, p, t)$. Яъни, $4n$ та ўзгарувчига боғлиқ, t вақтдан ташқари. Аммо, янги ва эски ўзгарувчилар §4.10 га асосан $2n$ та тенглама билан ўзаро боғлангандир, шунинг учун ўзаро бир-бири билан боғланмаган ўзгарувчиларнинг сони $4n - 2n = 2n$ тадир. Демак, ҳосил қилувчи

ганлиги учун $n = n'$ ва (4.16) тенгламалардан $F_2 = q^2 e^P$ га мос каноник алмаштиришларни топамиз:

$$P = \partial F_2 / \partial q = 2q e^P, \quad Q = \partial F_2 / \partial p = q^2 e^P.$$

Масаланинг қўйилишига биноан шундай F_2 сир. қў ҳосил қилувчи функцияни топиш керакки, унга мос каноник алмаштиришлар ҳам айнан юқоридаги ифодага тенг бўлсин. Бу ҳосил қилувчи функцияга мос каноник алмаштиришлар (4.17) ифода билан аниқланади:

$$q = -\partial F_2 / \partial p, \quad P = -\partial F_2 / \partial Q.$$

Бу ифодаларнинг чап томонларини юқоридаги тенгликлардан аниқлаб, сўнгра интеграллаб, F_2 сир. қў функцияни топамиз:

$$q = 2Q/P = -\partial F_2 / \partial p, \quad F_2(P, Q) = -2Q \ln P + C(Q)$$

$$P = P^2/4Q, \quad P = 4\sqrt{C(Q)/4Q} = -\partial F_2 / \partial Q;$$

$$4\sqrt{C(Q)/4Q} = 2 \ln P = -\partial C(Q)/\partial Q, \quad \partial C(Q)/\partial Q = 4\sqrt{C(Q)}$$

Бу ердан бўлаклаб интеграллаб, қўйилганини оламиз

$$C(Q) = Q \sqrt{4C(Q) - 1}, \quad C(Q) = Q(1 + 4\sqrt{C(Q)/4Q})$$

демак, $F_2(P, Q) = -2Q \ln P + Q \sqrt{4C(Q) - 1} = Q(1 + 4\sqrt{C(Q)/4Q})$

Шундай қилиб, $F_2(q, P) = q^2 e^P$ ва $F_2(P, Q) = Q(1 + 4\sqrt{C(Q)/4Q})$ ҳосил қилувчи функциялар айнан бир хил каноник алмаштиришларга олиб келади: $P = 4\sqrt{C(Q)/4Q}$, $Q = qP/2$

3 - масала. Ушбу ҳосил қилувчи функция $F_2(q, Q) = \max^2 \sin Q / 2$ ердамида содир бўладиган каноник алмаштиришлар топилисин. m ва ω доимий катталик деб, гармоник осциллятор учун ҳаракат тенгламаси ечилисин.

Ечилиши. Бу ҳосил қилувчи функция учун (4.14) тенгламаларга асосан: $P = \partial F_2 / \partial q = \max \sin Q$, $P = -\partial F_2 / \partial Q = \max^2 \sin^2 Q$

Бу ердан албатта янги P, Q ларни эски p, q лар орқали ифодалаш мумкин, лекин ҳозир эски q, P ларни янги Q, P лар орқали ифодалаб, масалани езишимиз қулайроқ.

$$\text{Охириги ифодалан} \quad q = \sqrt{2P/\max} \sin Q$$

Буни биринчисига олиб бориб қўйсак, $P = \sqrt{2\max P} \cos Q$ ни оламиз. Ҳосил қилувчи функция F_1 вақтга ошкора боғлиқ бўлмаганлиги учун $n' = n$ яъни, янги Гамильтон функцияси n' эски Гамильтон функциясидан q, P ларни юқоридаги боғланишларга

функциялар фақатгина қуйидаги тўрт кўринишда бўлиши мумкин:

$$F_1(q, Q, t), F_2(q, P, t), F_3(q, Q, t), F_4(p, P, t) \quad (4.15)$$

Бу ҳосил қилувчи функциялар бир-бирлари билан Лежандр алмашишлари орқали боғлангандирлар:

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum P_i Q_i$$

$$P_i = \partial F_2 / \partial q_i, \quad Q_i = \partial F_2 / \partial P_i, \quad n' = n + \partial F_2 / \partial t. \quad (4.16)$$

$$F_3(p, Q, t) = F_1(q, Q, t) - \sum P_i Q_i$$

$$q_i = -\partial F_3 / \partial p_i, \quad P_i = -\partial F_3 / \partial Q_i, \quad n' = n + \partial F_3 / \partial t. \quad (4.17)$$

$$F_4(p, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum P_i Q_i - \sum P_i q_i$$

$$q_i = -\partial F_4 / \partial p_i, \quad Q_i = \partial F_4 / \partial P_i, \quad n' = n + \partial F_4 / \partial t. \quad (4.18)$$

Биз бундан буён вақт t инвариант қолади деб ҳисоблаймиз. Каноник алмаштиришлар Пуассон қавсларини ҳам инвариант қолдиради

$$\{f, g\}_{P, q} = \{f, g\}_{P, Q} \quad (4.19)$$

1 - масала. $F_1 = \sum q_i Q_i$ ҳосил қилувчи функция ердамида содир бўладиган каноник алмаштиришларни топиш. Ечилиши: (4.14) ифодага асосан:

$$P_i = \partial F_1 / \partial q_i = Q_i, \quad P_i = -\partial F_1 / \partial Q_i = -q_i, \quad n' = n$$

Шундай қилиб, $P_i = -q_i$, $Q_i = P_i$ алмаштиришлар, ҳақиқатдан ҳам Гамильтон тенгламасининг кўринишини ўзгартирмаслиги яққол кўриниб турибди, чунки $n' = n$ ва юқоридаги алмаштиришларни Гамильтон тенгламасига олиб бориб қўйсак, бас. Бу алмаштиришлар Гамильтон тенгламасига олиб бориб қўйсак, маштради сынги координата ва импульснинг ўринларини ал-эски координатага мос. Бу мисол Гамильтон тенгламаларида координата ва импульснинг тутган ўрни бир хил эканлигининг тасдиқидир. Буларнинг орасидаги фарқ фақатгина номиладир, ҳолос. Шунинг учун ҳам биз уларнинг координата ва импульс деган номларини шартли равишда эканлигини назарда тутмоғимиз лозим. Кўпинча уларни каноник-қўшма катталиклар дейилади.

2 - масала. $F_2(q, P) = q^2 e^P$ ҳосил қилувчи функция ердамида содир бўладиган каноник алмаштиришларга олиб келадиган ҳосил қилувчи функция $F_3(P, Q)$ топилисин.

Ечилиши. Ҳосил қилувчи функциялар вақтга ошкора боғлиқ бўлма-

мәс. Q, P орқали ифодаласак етарли. Мәълүмки, гармоник осцилляторнинг Гамильтон функцияси масса m ва частота ω орқали куйлагича ифодаланали:

$$H = m\dot{q}^2/2 + kq^2/2 = p^2/2m + m\omega^2 q^2/2$$

Янги ўзгартуучиларга ўтсак,

$$H = \omega p \cos^2 Q + \omega p \sin^2 Q = \omega p \quad \text{Демак, } H = \omega p$$

Бу Гамильтон функциясида Q циклик координатага айланиб қолганлиги учун, унга мөс умумлашган импульс P сақланувчи катталик бўлади. Каноник алмаштиришларни қўллашнинг афзаллиги худди шундандир. Базми масалаларда ҳамма координаталарни циклик координаталарга айлантириш мумкин. Гамильтон функцияси вақтта ошқора боғлиқ бўлмагани учун $P = E/\omega$ доимий катталиклдир, E — энергия. Умумлашган координата Q ни аниқловчи ҳаракат тенгламаси эса жуда содда кўринишга эга

$$Q = \partial H / \partial P = \omega, \quad \dot{Q} = \omega t + \alpha$$

Бу ерда α — бошланғич шартлардан аниқланувчи интеграллаш доимий-сидир. Эски координата учун эса охириги ифодадан куйидагини оламиз:

$$q = \sqrt{2E/\omega^2} \sin \omega t + \alpha$$

4 — масала. $F_2(q, p) = q \ln p$ ҳосил қилувчи функция ердамида солир бўладиган каноник алмаштиришлар топилсин.

Ечилиши. $H' = H$, чунки ҳосил қилувчи функция вақтта боғлиқ эмас. Демак, $p = \partial F_2 / \partial q = \ln p, \quad Q = \partial F_2 / \partial P = q/P, \quad Q = qe^{-P}, \quad P = e^P$

5 — масала. Бир жинсли оғирлик майдонида ҳаракатланаётган зарранинг Гамильтон функцияси $H = p^2/2m - mgx$

ҳосил қилувчи функция $F_2(x, p, t) = xp' + mgxt$ га мөс каноник алмаштиришлар натижасида қандай кўринишни олади?

Ечилиши. Бу ерда эски (x, p) ларга янги (x', p') лар мөс келади деб ҳисоблаймиз: $p = \partial F_2 / \partial x = p' + mgt, \quad p = p' + mgt$

$x' = \partial F_2 / \partial p' = x, \quad x = x', \quad H' = H + \partial F_2 / \partial t = (p' + mgt)^2/2m$

6 — масала. Лагранж тенгламасининг нуқтавий алмаштиришлар натижасида $q_1 = q_1(q_2, q_3, \dots, q_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n$

Ечилиши: Аввал $S = 1$ ҳолда кўрсатайлик $q = q(q_2, q_3, \dots, q_n, t)$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial q_1}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \dots + \frac{\partial q_1}{\partial q_n} \dot{q}_n$$

Демак, $\dot{q}_1 = \frac{\partial q_1}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial q_1}{\partial q_k} \dot{q}_k$

Янги ўзгартуучилар бўйича Лагранж тенгламасини тузайлик

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

Шундай қилиб, Лагранж тенгламаси эски ўзгартуучиларга нисбатан қандай кўринишга эга бўлса, янги ўзгартуучилар ҳам шундай кўринишга эга экан, кўп эркинлик даражаси учун

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

7 — масала. $F_2(q, p) = \sum_k f_k(q, t) p_k$ ҳосил қилувчи функция ердамида солир бўладиган алмаштиришлар каноник алмаштиришлар эканлигини исботланг.

Ечилиши. (4.1) формулаларга асосан $P_i = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial q_i} p_k, \quad Q_i = f_i(q, t), \quad H' = H + \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial t} p_i$

Бу ифодалардан кўриниб турибдики, мазкур ҳосил қилувчи функция нуқтавий алмаштиришларга олиб келар экан. Демак, ҳар қандай нуқтавий алмаштиришлар каноник алмаштиришлар экан. Бу алмаштиришларнинг каноник эканлигини туғридан-туғри ҳисоблаб кўрсатайлик, соддароқ бўлиши учун $i = 1$ бўлган ҳолни кўрайлик:

$$F_2 = f(q, t) p \Rightarrow p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = f(q, t), \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} p$$

$$p = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) = p \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$+ Q = \frac{\partial H}{\partial Q} - P \frac{\partial f}{\partial q}$$

Бу ифодадан $P + \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot C + \frac{\partial H}{\partial Q}$ келиб чиқади.

Ҳудди шунингдек,

$$Q = \frac{\partial f}{\partial q} q + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial H}{\partial P} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial P} \left(\frac{\partial f}{\partial q} q + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial H}{\partial P} \left(P + \frac{\partial H}{\partial q} \right) = \frac{\partial H}{\partial P} \cdot C$$

Бу ифодадан $Q = \frac{\partial H}{\partial P} \left(C + \frac{\partial H}{\partial q} \right)$ келиб чиқади.
Яъни, Гамильтон тенгламалари янги каноник ўзгаришларга нисбатан ҳам маъкур кўринишга эга экан.

4.4 - машқлар.

1. Ортогонал алмаштиришлар $Q_i = \sum a_{ik} q_k$ каноник алмаштиришлар эканлигини кўрсатинг.
2. $F_2 = \sum q_i P_i$ га мос алмаштиришлар қандай алмаштиришлардир?
3. Ушбу нуқтавий алмаштиришлар $q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ $i = 1, 2, \dots, n$ Гамильтон тенгламаларининг кўринишини сақлаб қолишини ҳисоблаб кўрсатинг.
4. Ушбу алмаштиришлар $q_i = f_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ натижасида энергия ва умумлашган импульсларнинг ўзгариш қонунчалари топилсин.
5. $Q = \ln \sin p/q$, $P = q \operatorname{ctg} p$ алмаштиришлар каноник эканлигини кўрсатинг.

6. Ушбу каноник алмаштиришларга $Q = \ln(1 + \sqrt{1 - \cos p})$, $P = 2(1 + \sqrt{1 - \cos p}) \sin p$ мос ҳосил қилувчи функция $F_2(P, Q)$ топилсин.
7. Ушбу алмаштиришлар α ва β нинг қандай қийматларида каноник димр? Ҳосил қилувчи функцияни $F_2(P, Q)$ топинг.
 $Q = q^2 \cos \beta p$, $P = q^2 \sin \beta p$

8. а) $F_1 = \sum q_i Q_i$, б) $F_1 = \sum P_i P_i$, в) $F_2 = - \sum P_i Q_i$ ҳосил қилувчи функцияларга мос алмаштиришлар тўғрисида нима дейиш мумкин?
9. Пуассон қавслари каноник алмаштиришларга нисбатан инвариант эканлигини исботланг.

10. Берилган ҳосил қилувчи функцияга мос каноник алмаштиришлар топилсин: а) частотаси ω бўлган гармоник осциллятор учун
 Q ва P ўзгаришларда ҳаракат тенгламалари топилсин:

$$F_1(q, Q, t) = m \omega^2 q^2 \operatorname{ctg} Q / 2$$

- б) Ташқи $F_2(Q)$ қуч таъсиридаги гармоник осциллятор учун
 Q ва P ўзгаришларда ҳаракат тенгламалари топилсин.

$$F_1(q, Q, t) = m \omega^2 (q - f \cos \omega t)^2 \operatorname{ctg} Q / 2$$

11. Қуйидаги алмаштиришларнинг каноник эканлигини исботланг:

$$x = C \sqrt{\frac{2P}{m}} \sin Q_1 + P_2, \quad y = \sqrt{\frac{m}{2P}} \frac{P_1}{\sin Q_1} - Q_2 / 2$$

$$P_1 = \sqrt{\frac{m}{2P}} \left(C \sqrt{\frac{2P}{m}} \cos Q_1 - Q_2 \right) / 2$$

$$y = C \sqrt{\frac{2P}{m}} \cos Q_1 + Q_2 / 2 + \sqrt{\frac{m}{2P}}$$

$$P_2 = \sqrt{\frac{m}{2P}} \left(C - \sqrt{\frac{2P}{m}} \sin Q_1 + P_2 \right) / 2$$

Агар вектор потенциали $A = C - y n / 2, \quad \phi = 0$

бўлса, магнит майдонидаги заарра учун янги ўзгаришларда Гамильтон тенгламалари топилсин. Бу ерда $\omega = e \hbar / m c$

12. $F_2(q, P) = \alpha q P$ ҳосил қилувчи функция билан берилган каноник алмаштиришлар қандай маънога эга?

13. Қуйидаги ҳосил қилувчи функцияларга мос каноник алмаштиришлар топилсин:

$$a) F_2(q, P) = P \ln q, \quad b) F_2(q, P) = P q^2 / 2$$

$$в) F_2(q, P) = q \sqrt{2P}, \quad г) F_2(q, P, t) = x p - y p' t + m x y$$

14. Гармоник осцилляторнинг Гамильтон функцияси $H(q, p) = p^2 / 2m + m \omega^2 q^2 / 2$ қуйидаги ҳосил қилувчи функцияларга мос равишда қандай ўзгаради? Каноник алмаштиришларни топинг.

$$a) F_2(q, P) = C (p^2 - m \omega^2 q^2 + 2 \sqrt{2 m \omega} q P) / 2$$

$$б) F_1(q, Q) = - m \omega^2 q^2 \operatorname{ctg} Q / 2, \quad в) F_1(q, Q) = - m \omega^2 q^2 \operatorname{ctg} Q + \omega t / 2$$

15. $H = p^2 / 2m$ Гамильтон функцияси қуйидаги ҳосил қилувчи функцияларга мос алмаштиришлар натижасида қандай ўзгаришни топинг:

$$a) F_1(x, x', t) = m (\dot{x} - x')^2 / 2, \quad б) F_2(x, p', t) = x p' - p'^2 t / 2m$$

§4.5. Гамильтон - Якоби методи

Маълумки, таъсир функциясини юқори чегара координатасининг функцияси деб қаралганда қуйидаги боғланишларни олиш мумкин:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad dS = \sum p_i dq_i - H dt \quad (4.20)$$

Юқоридаги боғланишлардан фойдаланиб, Гамильтон функциясидаги импульсларни $\partial S / \partial q_i$ лар билан алмаштириб, қуйидаги ифода

Одиш мумкин:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0. \quad (4.21)$$

Бу тенглама хусусий ҳосилаларининг биринчи тартибли тенглама бўлиб, Гамильтон - Якоби тенгламаси деб аталади. Лагранж ва Гамильтон тенгламалари қатори Гамильтон-Якоби тенгламаси ҳам ҳаракат тенгламаларини интеграллашнинг асосларидан бири ҳисобланади. Гамильтон - Якоби тенгламасининг тўла интеграл қўйиладигачадир:

$$S = f(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t) + A. \quad (4.22)$$

Бу ерда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ва A лар ихтиёрий доимийлардир. Энди Гамильтон-Якоби тенгламасининг тўла интеграл билан ҳаракат тенгламаларининг ечимлари орасидаги боғланишни топайлик. Бунинг учун каноник алмаштиришлар орқали q ва p ўзгарувчилардан янги ўзгарувчиларга ўтайлик. Ҳосил қилувчи функция сифатида (4.22) даги $f(q, \alpha, t)$ функцияни танладик дейлик, унда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ катталиклар янги импульслар ролини ўйнайди. Янги координаталарни $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ лар орқали белгилаб олайлик. Ҳосил қилувчи функция эски координаталар ва янги импульсларга боғлиқ бўлганлиги учун $f(q, p, t) \Rightarrow f(q, \alpha, t)$ ва (4.16) тенгламалардан фойдаланамиз.

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad q_i = \beta_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad n' = n + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (4.23)$$

Лекин $f(q, \alpha, t)$ функция Гамильтон-Якоби тенгламасини қаноатландиргани учун янги Гамильтон функцияси n' нолга айнан тенглашади:

$$n' = n + \frac{\partial f}{\partial t} = n + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (4.24)$$

Шунинг учун, янги ўзгарувчилар α_i, β_i учун Гамильтон тенгламаси қўйидаги кўринишга келади:

$$p_i = \alpha_i = 0, \quad q_i = \beta_i = 0, \quad \alpha_i = \text{const.}, \quad \beta_i = \text{const.} \quad (4.25)$$

Иккинчи томондан эса, n та $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ тенгламалар, n та координата q_i ларни $2n$ та α_i ва β_i доимийлар орқали ифода-лашга имкон беради. Шундай қилиб, биз ҳаракат тенгламасининг умумий интегралини топамиз. Демак, механик система ҳаракатини Гамильтон-Якоби методи билан ечиш учун (4.22) ифода билан аниқланган тўлаинтеграл топилади, сўнгра уни α_i бўйича дифференциал-лашди, натижада n та алгебраик тенгламалар $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ ҳосил бўлади. Импульсларнинг вақтга боғлиқлиги эса $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ тенглама билан аниқланади.

Агарда Гамильтон функцияси $H(q, p, t)$ вақтга ошқора боғлиқ бўлмаса, Гамильтон-Якоби тенгламаси анча содда кўринишга келади.

Бу ҳолда таъсир функцияси қўйидаги ҳолга келади:

$$S = S_0(q) - Et. \quad (4.26)$$

бу ерда $S_0 = \int \sum p_i dq_i$ - қисқартирилган таъсир функцияси.

Бу функция учун Гамильтон-Якоби тенгламаси эса қўйидагичадир:

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_n}, t) = E. \quad (4.27)$$

1 - масала. Массаси m га тенг эркин моддий нуқта ҳаракати Гамильтон-Якоби методи билан ечилсин.

Ечилиши. Эркин зарранинг Гамильтон функцияси

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) / 2m$$

Гамильтон-Якоби тенгламаси эса қўйидагича (4.21) дан

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) / 2m = 0$$

Юқоридаги Гамильтон функцияси вақтга ошқор боғлиқ бўлмаганлиги учун $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$ бўлади ва энергия сақланади. Демак, (4.26) га асосан S нинг вақтга боғлиқлиги - E кўринишда бўлади. Яна $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$ тенгламага асосан, циклик координата z нинг ифода-сида p_z кўринишида иштирак этилиши мумкин. Бизнинг ҳолда $E = \text{const}$ ва x, y, z координаталар цикликдир. Шунинг учун таъсир функцияси $S = p_x x + p_y y + p_z z - Et$ кўринишга эга. Бу ифодани Гамильтон-Якоби тенгламасига олиб бориб қўйсак:

$$E = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) / 2m, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = p_x, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = p_z$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_x} = x = x_0, \quad \frac{\partial S}{\partial p_y} = y = y_0, \quad \frac{\partial S}{\partial p_z} = z = z_0$$

Бу ердан $x = x_0 + p_x t/m, y = y_0 + p_y t/m, z = z_0 + p_z t/m$ ларни топамиз. Демак, эркин зарра физикли ҳаракат қилади.

2 - масала. Лагранж функцияси $L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \dot{x}^2$ бўлган гармоник осциллятор масаласи Гамильтон-Якоби методи билан ечилсин. Ечилиши. Аввал Гамильтон функциясини топиб олайлик:

$$H = p^2/2 + x^2/2$$

Гамильтон-Якоби тенгламаси эса:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} (p^2 + x^2) = 0$$

Бу ерда ҳаракат бир ўлчовли ва x - координата циклик эмас. Лекин Гамильтон функцияси вақтга ошқора боғлиқ эмас, яъни $E = \text{const}$.

Демак, (4.26) дан $S = -Et + f(x)$. Бунинг Гамильтон-Якоби

тенгласига қўйсак,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + x^2/2 = E, \quad \left(\frac{df}{dx} \right)^2 = 2E - x^2.$$

$$f(x) = \int \sqrt{2E - x^2} dx = x \sqrt{2E - x^2} / 2 + E \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}}.$$

Бу катталикни S нинг ифодасига қўйсак,

$$S = x \sqrt{2E - x^2} / 2 + E \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}} - Et \quad \text{ни оламиз.}$$

Юқоридаги ифодани ягона доимий E , бўйича дифференциаллаб,

уни t_0 га тенглаштирсак:

$$t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = x / (2 \sqrt{2E - x^2}) + E \sqrt{E} \times (-E^{-3/2} / 2) / \sqrt{2E - x^2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}} - t_0; \quad t_0 = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}}. \quad x = \sqrt{2E} \sin(t_0).$$

Демак, частотаси $\omega = 1$ га тенг гармоник тебранишлар экан.

3 - масала. Массаси $m = 1$ бўлган зарранинг $U = 1/r$ марказий майдондаги ҳаракати интеграллансин.

Ечилиши. Зарранинг сферик координат системасидаги Гамильтон функциясини ёзайлик:

$$H = \frac{1}{2} (p_r^2 + p_\theta^2 + p_\phi^2 / r^2) + p_\phi^2 / (2r^2 \sin^2 \theta) / 2 + 1/r.$$

Бу ердан

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 / 2 + 1/r = 0.$$

Бу ифодалардан қўриниб турибдики, фақат ϕ циклик координата. Шунинг учун, S ни

$$S = -Et + p_\phi \phi + f(r) + F(\theta)$$

қўринишда қилирамиз: $C = E = \text{const.}, \quad p_\phi = \text{const.}$

Буни Гамильтон-Якоби тенгласига қўйсак:

$$2Er^2 - 2r - r^2 \left(\frac{df}{dr} \right)^2 = p_\phi^2 / \sin^2 \theta + \left(\frac{dF}{d\theta} \right)^2$$

Маъкур тенгламанинг чап томони фақат r га, ўнг томони эса фақат θ га боғлиқ, демак, ҳар иккала томон оитта доимийга тенгдир:

$$2Er^2 - 2r - r^2 \left(\frac{df}{dr} \right)^2 = \alpha \quad \text{ва} \quad p_\phi^2 / \sin^2 \theta + \left(\frac{dF}{d\theta} \right)^2 = \alpha.$$

Натижада

$$f = \int \sqrt{2E - 2/r - \alpha/r^2} dr, \quad F = \int \sqrt{\alpha - p_\phi^2 / \sin^2 \theta} d\theta.$$

Буларни интеграллаб, S нинг ифодасига қўйсак:

$$S = -Et + p_\phi \phi + \int \sqrt{2E r^2 - 2r - \alpha} - \sqrt{\alpha} \arccos \frac{\alpha - r}{r \sqrt{2E\alpha + 1}} - \frac{1}{\sqrt{2E}} \text{Arch} \frac{2Er - 1}{\sqrt{2E\alpha + 1}} + \sqrt{\alpha} \arccos \frac{\sqrt{\alpha} \cos \theta}{\sqrt{\alpha - p_\phi^2}}.$$

$$+ \frac{p_\phi^2}{2} \arcsin \frac{\alpha - p_\phi^2}{p_\phi^2 - (C\alpha^2 + p_\phi^2)}$$

Бу ифодаларни E, p_ϕ, α лар бўйича дифференциаллаб ва уларни доимийларга тенглаштириб, ҳаракат траекториясини олишимиз мумкин.

4.5 - машқлар.

1. Қўйидаги Лагранж функцияларига мос Гамильтон-Якоби тенгласи ёзилсин: а) $L = \frac{1}{2} [(1 - v^2) \dot{u}^2 + (1 - u^2) \dot{v}^2]$,

$$б) L = -mc\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad в) L = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \dot{u}^2 + \dot{v}^2 - (u + v)^2,$$

$$г) L = m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) / 2 - 1/r, \quad д) L = \frac{x^2}{x} + xy^2 + x.$$

2. Агарда Гамильтон-Якоби тенгламалари қўйидаги қўринишда бўлса, Лагранж тенгламаси тўзилсин:

$$а) \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{1}{v} \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{u} \left(\frac{\partial S}{\partial v} \right)^2 \right) / 2 = 0,$$

$$б) \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{1}{u} \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial S}{\partial v} \right)^2 \right) / 2 = 0.$$

$$в) \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial x} + ay \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - ax \right)^2 / 2m = 0,$$

$$г) \frac{\partial S}{\partial t} + 2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} - 1/\sqrt{xy} = 0, \quad д) \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 / 2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} + y \frac{\partial S}{\partial x} - x \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) = 0.$$

3. Массаси бирга тенг зарранинг қўйидаги майдонларидаги ҳаракати Гамильтон-Якоби методи билан интеграллансин:

а) қучланганлиги бирга тенг бир жинсли майдонда,

б) $U = 1/r$ майдонда, текисликда,

в) аксиал симметрияга эга $U = 1/r$ майдонда,

г) Массаси m га тенг зарранинг эркин тушиши масаласи Гамильтон-Якоби методи билан ечилсин.

У. ЗАРРАЛАРНИНГ ТУҚНАШУВИ

Импульс ва энергиянинг сақланиш қонуналарини ҳисобга олишнинг ўзингина механик жараёнларнинг муҳим хусусиятларини очиб беради. Бундай жараёнлар туркумига парчаланиш семиртилиш, зарраларнинг эластик туқнашуви, сочилиш муаммолари қиради.

§5.1 Ҳз-ўзидан парчаланиш семиртилиш

Ҳз-ўзидан парчаланаётган зарра сўяни, ташқи куч таъсирисиз, иккита заррачага парчаланган ҳолни қўрайлик. Ана шундай жараёнларни еритишда ушбу икки хил санок системаси кенг қўлланилади: лаборатория системаси S L - система ва инерция маркази системаси S C - система.

C - системага тегишли катталиқларни "0" индекси билан белгилаймиз. Парчаланишни C - системада қараш қўлайроқ, яъни парчалангунга қадар парчаланувчи зарра тинч турибди десак $CP = 0$, у ҳолда парчаланиш натижасида ҳосил бўлган зарралар қарама-қарши томонга сочилишлар:

$$\vec{P}_{10} = -\vec{P}_{20} \quad |\vec{P}_{10}| = |\vec{P}_{20}| = |\vec{P}_0| \quad (5.1)$$

Парчаланиш содир бўлиши учун парчаланиш энергияси ϵ нрлан катта бўлиши керак:

$$\epsilon = E_1 + E_2$$

бу ерда "и" индекси "ички энергияни" англатади. Энергиянинг сақланиш қонунидан:

$$\epsilon = \frac{P_0^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{P_0^2}{2m} \quad (5.2)$$

бу ерда m_1, m_2 - мос равишда биринчи ва иккинчи зарраларнинг массалари, m - келтирилган масса. Ҳар бир зарранинг тезликлари эса:

$$v_{10} = P_0/m_1, \quad v_{20} = P_0/m_2$$

Агар зарра парчалангунга қадар $\vec{V}$ тезлик билан ҳаракатланаётган бўлса, қуйдаги тезликларни қўшиш формуласи орқали

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_0 \quad (5.3)$$

L - системага ўтилади:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_0$$

бу ерда $\vec{V}_0, \vec{V}_0$ - семиртилгандан сўнг ҳосил бўлган зарралардан биринини L - ва C - системадаги тезликлари

$$v^2 + v^2 - 2vv \cos \theta = v_0^2 \quad (5.4)$$

бу ерда θ - шу зарранинг V тезлик йўналишидан оғиш бурчаги. Бу муносабатлар L - ва C - системадаги зарраларнинг тезликларини аниқлаб беради. Зарраларнинг сочилиб чиқиш манзараси икки

хил бўлиши мумкин! $v < v_0$ ва $v > v_0$ биринчи ҳолда учиб чиқиш бурчаги оғиш бурчидан кичик бўлса, иккинчи ҳолда асосан илгарига қараб учиб чиқилади. Бу оғиш бурчагининг максимал қиймати:

$$\sin \theta_{\max} = v_0/v \quad (5.5)$$

L - ва C - системадаги оғиш бурчаклари θ ва θ_0 лар орасидаги боғланиш:

$$\tan \theta = \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0 + v} \quad (5.6)$$

$$\cos \theta_0 = -\frac{v}{v_0} \sin^2 \theta + \cos \theta \sqrt{1 - v^2/v_0^2 \sin^2 \theta} \quad (5.7)$$

Агарда $v > v_0$ бўлса, боғланиш бир қийматли ва фақат мусбат ишора ҳисобга олинади. $v < v_0$ да иккала ишора ҳам ҳисобга олинмиш зарур. Учиб чиқиш тақсимооти фақатгина тезлик учун бўлмай, балки учиб чиқиш бурчаги энергияси бўйича ҳам бўлиши мумкин. Масалан, C - системада парчаланган зарралар бурчак бўйича изотроп тақсимлангани учун, ҳамда фазовий бурчак $d\Omega_0 = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0$ ни ҳисобга олган ҳолда бурчак тақсимооти қуйидагичадир:

$$\frac{1}{2} \sin \theta_0 d\theta_0 \quad (5.8)$$

L - системадаги тақсимот эса бу йфодани (5.6) дан фойдаланиб ўзгартирилишидан топилади. Масалан, L - системадаги энергетик тақсимот

$$dE \propto 2m_1 v_0 v \quad (5.9)$$

дан иборат, бу ерда m_1, v_1 - сортли зарранинг массаси, T - кинетик энергияси. Агарда массаси m га тенг зарра иккитадан кўп зарраларга парчаланаётганлиги десак, ихтиёр m_1 массали зарра учун энергетик тақсимотда максимал қиймат мавжуддир C - системада:

$$(T)_{\max} = \frac{m - m_1}{m} \epsilon \quad (5.10)$$

Шуни таъкидлаш лозимки, (5.10) йфодадан $\epsilon > 0$ дагина парчаланиш содир бўлишини ҳисобга олсак, ҳамда парчаланаётган зарра тинч турибди десак,

$$E_1 > E_1 + E_2 \rightarrow m_1 > m_1 + m_2 \quad (5.11)$$

1- масала. Иккита заррача парчаланиш жараёнида учиб чиққан зарраларнинг L - системада оғиш бурчаклари θ_1 ва θ_2 орасидаги боғланиш топилисин.

Ҳисобини C - системада иккала зарранинг оғиш бурчаклари орасидаги муносабат $\theta_1 = \pi - \theta_2$ дор θ_1 ни θ_2 деб белгиллаб, (5.6) формуласини ҳар иккала зарра учун қўллаб,

қуйидагиларни оламиз:

$$V + v_{10} \cos \theta_0 = v_{10} \sin \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_1,$$

$$V - v_{20} \cos \theta_0 = v_{20} \sin \theta_0 \operatorname{ctg} \theta_2.$$

Бу икки муносабатдан θ_0 ни йўқотсак, θ_1 ва θ_2 орасидаги боғланишни топпан бўламиз. Унинг учун $\cos \theta_0$ ва $\sin \theta_0$ ни аниқлаб, $\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 = 1$ тенгламага қўямиз:

$$\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0 = 1 = \frac{(v_{10} + v_{20})^2 \sin^2 \theta_1 + v_{10}^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_1 - v_{20}^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_2}{v_{10}^2 \sin^2 \theta_1 + v_{20}^2 \sin^2 \theta_2}.$$

бўеран

$$\frac{v_{10}^2}{\sin^2 \theta_1} + \frac{v_{20}^2}{\sin^2 \theta_2} - \frac{2v_{10}v_{20} \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} = \frac{v_{10}^2 \sin^2 \theta_1 + v_{20}^2 \sin^2 \theta_2}{v_{10}^2 \sin^2 \theta_1 + v_{20}^2 \sin^2 \theta_2}.$$

Ўқоридаги (5.3) ва (5.4) ифодалардан

$$\frac{v_{10}}{v_{20}} = \frac{m_2}{m_1}, \quad P_0 = m_1 v_{10} = m_2 v_{20}, \quad e = \frac{P_0^2 (m_1 + m_2)}{2m_1 m_2}.$$

Эканлигини ҳисобга олсак:

$$\frac{m_2}{m_1} \sin^2 \theta_1 + \frac{m_1}{m_2} \sin^2 \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{2e}{(m_1 + m_2) v^2} \sin^2(\theta_1 + \theta_2).$$

2-масала. Парчаланиш бўлаклари бўлган зарраларнинг учиб чиқиш бурчаги соғиш бурчагир бўйича тақсимоти L - системада топилисин. Ечилиши. Маълумки, C - системада учиб чиқиш бурчаги бўйича тақсимот (5.10) ифода орқали топилади. C - ва L - системасидаги соғиш бурчаклари θ_0 ва θ орасидаги боғланиш эса (5.3) формула орқали ифодаланади. L - системадаги бурчак тақсимотини топиш учун (5.3) ифоданинг иккала томонини дифференциаллаш ва (5.10) ифода билан солиштириш етарли, лекин маъкур боғланишнинг икки қийматли эканлигининутмасдик керак. Хусусан, $v_0 < v$ бўлганда (5.3) да радикал олдидаги мусбат, $v_0 < v$ да эса ҳар иккала ишора ҳисобга олинади:

$$a) \quad v_0 < v \quad \text{да}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \text{ҳамда} \quad (5.3) \text{ ни иккала томонини дифференциалласак:}$$

$$-\sin \theta_0 d\theta_0 = -\frac{v}{v_0} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta - \sin \theta d\theta \left[1 - \frac{v^2}{v_0^2} \sin^2 \theta \right]$$

$$-\frac{v^2 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta}{v_0^2 \left[1 - \frac{v^2}{v_0^2} \sin^2 \theta \right]}$$

$$\frac{1}{2} \sin \theta_0 d\theta_0 = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \left[2 \frac{v}{v_0} \cos \theta + \frac{1 + \frac{v^2}{v_0^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}} \right],$$

демак, бу ҳол учун бурчак тақсимоти қуйидагича:

$$\frac{1}{2} \sin \theta_0 d\theta_0 \left[2 \frac{v}{v_0} \cos \theta + \frac{1 + \frac{v^2}{v_0^2} \cos 2\theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}} \right],$$

$v_0 < v$ да $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$ (5.3) ning иккала томонини дифференциаллаб ва икки қийматлигини, ҳамда θ оғанда унга мос θ_0 ning биттаси ортими ва иккинчиси қанайинини ҳисобга олсак (яъни, иккаласининг йиғиндисини ўрнига айирмаси олинади):

$$\frac{1}{2} \sin \theta_0 d\theta_0 = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \left[2 \frac{v}{v_0} \cos \theta + \frac{1 + \frac{v^2}{v_0^2} \cos 2\theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}} \right]$$

$$\rightarrow \sin \theta d\theta \left[\frac{1 + \frac{v^2}{v_0^2} \cos 2\theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}} \right]$$

3-масала. Антипротонлар- $\bar{p}$ дейтерий- d билан тўқнашиб ятади ва қуйидаги реакция спарчаланиш содир бўлади: $\bar{p} + d = n + \pi^0$ деб π^0 - мезоннинг тўла энергияси ҳисоблансин. Бу ердаги зарраларнинг массалари қуйидагича $c=1$ деб олинган: $m_n = 939.5$ МэВ, $m_{\bar{p}} = m_p = 938.2$ МэВ, $m_d = 1875.5$ МэВ, $m_{\pi^0} = 135.0$ МэВ.

Ечилиши. Тўрт векторларнинг қуйидаги синатурасини назарда тутамиз стўрт-импульс, P эса, энергия, E ва импульс $\vec{P}$ ни ўз ичига олади:

$$A = (A_0, \vec{A}), \quad A^2 = A_0^2 - \vec{A}^2, \quad AB = A_0 B_0 - \vec{A} \vec{B},$$

$$P^2 = (P_0, \vec{P}) = (E, \vec{P}), \quad P^2 = P_0^2 - \vec{P}^2 = E^2 - \vec{P}^2, \quad \rightarrow P_1^2 = P_1^2,$$

5.1 - машқлар.

$$= p^d + p^n + p^u.$$
$$P = P_p^- + P_d$$

Ц-системада содир булайтибди ($\mathbb{P} = 0$) десак ,

$$P = (P_0, \vec{P}) = (E, \vec{P}) \longrightarrow (m_p + m_d, \vec{0}) = (M, \vec{0}), \quad M = m_p + m_d,$$

чулки, тинч турган C^{12} системанинг энергияси ташкил этувчиларнинг массалари йиғиндисидан иборат. Тўрт- импульс сақланишидан нейтроннинг импульсини аниқлаб олиб, уни квадратга оширсак:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10
 11
 12
 13
 14
 15
 16
 17
 18
 19
 20
 21
 22
 23
 24
 25
 26
 27
 28
 29
 30
 31
 32
 33
 34
 35
 36
 37
 38
 39
 40
 41
 42
 43
 44
 45
 46
 47
 48
 49
 50
 51
 52
 53
 54
 55
 56
 57
 58
 59
 60
 61
 62
 63
 64
 65
 66
 67
 68
 69
 70
 71
 72
 73
 74
 75
 76
 77
 78
 79
 80
 81
 82
 83
 84
 85
 86
 87
 88
 89
 90
 91
 92
 93
 94
 95
 96
 97
 98
 99
 100
 101
 102
 103
 104
 105
 106
 107
 108
 109
 110
 111
 112
 113
 114
 115
 116
 117
 118
 119
 120
 121
 122
 123
 124
 125
 126
 127
 128
 129
 130
 131
 132
 133
 134
 135
 136
 137
 138
 139
 140
 141
 142
 143
 144
 145
 146
 147
 148
 149
 150
 151
 152
 153
 154
 155
 156
 157
 158
 159
 160
 161
 162
 163
 164
 165
 166
 167
 168
 169
 170
 171
 172
 173
 174
 175
 176
 177
 178
 179
 180
 181
 182
 183
 184
 185
 186
 187
 188
 189
 190
 191
 192
 193
 194
 195
 196
 197
 198
 199
 200
 201
 202
 203
 204
 205
 206
 207
 208
 209
 210
 211
 212
 213
 214
 215
 216
 217
 218
 219
 220
 221
 222
 223
 224
 225
 226
 227
 228
 229
 230
 231
 232
 233
 234
 235
 236
 237
 238
 239
 240
 241
 242
 243
 244
 245
 246
 247
 248
 249
 250
 251
 252
 253
 254
 255
 256
 257
 258
 259
 260
 261
 262
 263
 264
 265
 266
 267
 268
 269
 270
 271
 272
 273
 274
 275
 276
 277
 278
 279
 280
 281
 282
 283
 284
 285
 286
 287
 288
 289
 290
 291
 292
 293
 294
 295
 296
 297
 298
 299
 300
 301
 302
 303
 304
 305
 306
 307
 308
 309
 310
 311
 312
 313
 314
 315
 316
 317
 318
 319
 320
 321
 322
 323
 324
 325
 326
 327
 328
 329
 330
 331
 332
 333
 334
 335
 336
 337
 338
 339
 340
 341
 342
 343
 344
 345
 346
 347
 348
 349
 350
 351
 352
 353
 354
 355
 356
 357
 358
 359
 360
 361
 362
 363
 364
 365
 366
 367
 368
 369
 370
 371
 372
 373
 374
 375
 376
 377
 378
 379
 380
 381
 382
 383
 384
 385
 386
 387
 388
 389
 390
 391
 392
 393
 394
 395
 396
 397
 398
 399
 400
 401
 402
 403
 404
 405
 406
 407
 408
 409
 410
 411
 412
 413
 414
 415
 416
 417
 418
 419
 420
 421
 422
 423
 424
 425
 426
 427
 428
 429
 430
 431
 432
 433
 434
 435
 436
 437
 438
 439
 440
 441
 442
 443
 444
 445
 446
 447
 448
 449
 450
 451
 452
 453
 454
 455
 456
 457
 458
 459
 460
 461
 462
 463
 464
 465
 466
 467
 468
 469
 470
 471
 472
 473
 474
 475
 476
 477
 478
 479
 480
 481
 482
 483
 484
 485
 486
 487
 488
 489
 490
 491
 492
 493
 494
 495
 496
 497
 498
 499
 500
 501
 502
 503
 504
 505
 506
 507
 508
 509
 510
 511
 512
 513
 514
 515
 516
 517
 518
 519
 520
 521
 522
 523
 524
 525

$$m^c = p^c = (p - p_n)^2 = p^2 - 2pp_n + p_n^2 = p^2 - 2p_{0n}p_n + p_n^2 =$$

$$= p_n^2 - 2p_n^0 p_n^0 + p_n^2 = M_n^2 - 2ME_n + m_n^2$$

Демак.

$$E_p = \frac{M^2 + m^2}{2M} - m^2 = 1.24 \text{ MeV}$$

4 - масала Энергия $\epsilon_0 = 1.13$ МэВ булганлагина

${}^4\text{He} + {}^{14}\text{O} = {}^{17}\text{O} + {}^1\text{H}$ реакция солир бўла бошлайди. Δ - системада туқнашувага қадар азотнинг ядроси тинч турибди. Ушбу реакция солир бўлиши учун α - зарранинг минимал энергияси топилисин. Ечилиши. Шартга кўра α - зарра ва азот ядроси тегишганда

Нисбий ҳаракати энергияси ϵ_0 зарра ва азот ядролари

$$\frac{\mu^2}{2} \geq \varepsilon_0 \cdot \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot m_1 m_2 - \alpha - \text{зарра ва азот ядросининг}$$

массалари. $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ — шу зарраларнинг нисбий тезлиги.

Излазеттан энергия Е қуйдагича булиши керек:

$$E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} \geq \frac{m_1}{\mu} \epsilon_0 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \epsilon_0 \approx 1.45 M_B$$

бу энергиянинг қиймати. инерция маркази системасида ёзиб оласак.

$$E^2 = \frac{1}{2} E^2 + \frac{m^2}{2} E^2 = \frac{m^2}{2} E^2 + \frac{m^2}{2} E^2$$

Шу энергиянинг бир қисми $m \cdot E_{\text{ш}} \cdot M$ реакцияда иштирок этмай, α зарра ва азот ядросидан ташкил топган системанинг ялли ҳаракати энергиясига айланишини яққол куриш мумкин. Бу энергия парчаланган бۇтақларнинг кинетик энергиясига айланади.

$$\vec{v}'_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_0, \quad \vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_0 \quad (5.14)$$

Л - системада эса, инерция маркази тезлиги $\vec{v}$ ни қўшиб қўйсак етади:

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_0 + \frac{m_1 \vec{v} + m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_0 + \frac{m_1 \vec{v} + m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2} \quad (5.15)$$

II - системадаги биринчи зарранинг оғиш бурчаги - ϵ бўриши, сочилиш χ билан, Л - системадаги ҳар бир зарранинг биринчи зарра йўналишидан оғиш бурчаклари θ_1 ва θ_2 орасидаги боғланиш қўйидагича ϵ бурчак тақсимо:

$$\tan \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \quad (5.16)$$

$\theta = \theta_1 + \theta_2$ зарраларнинг тўқнашидан кейинги бир-бирига нисбатан оғиш бурчаги: Агарда Л - системада m_1 зарра m_2 га эластик уриляпти десак:

$$m_1 > m_2 \quad \text{да} \quad \theta = \theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2},$$

$$m_1 < m_2 \quad \text{да} \quad \theta = \theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}.$$

Энди ҳар бир зарранинг тўқнашувдан кейинги тезликларининг қиймати χ бурчак орқали ёзайлик:

$$v'_1 = \frac{m_2 + m_2 + 2m_1 \cos \chi}{m_1 + m_2} v, \quad v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \chi / 2. \quad (5.18)$$

Урилишчи зарра m_1 ва Л - системада тинч турган m_2 зарранинг массаларига қараб m_1 зарранинг тўқнашувдан кейинги йўналиши ҳар хил бўлиши мумкин:

а) исталган йўналиш агарда $m_1 < m_2$ бўлса.

б) $\sin \theta_{\max} = m_1 / m_2$ ни қаноатлантирган $\theta_{\max}$ дан катта бурчакка оға олмайди, агарда $m_1 > m_2$ бўлса.

Агарда $m_1 = m_2$ бўлса.

$$\theta_1 = \chi / 2, \quad \theta_2 = \pi - \chi / 2,$$

$$v'_1 = v \cos(\chi / 2), \quad v'_2 = v \sin(\chi / 2) \quad (5.19)$$

"Пеш зарра" $\chi = \pi$ ҳолида

$$\vec{v}'_1 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}, \quad \vec{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \quad (5.20)$$

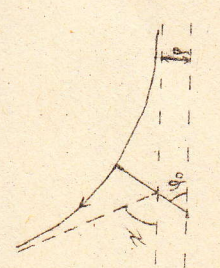
Бу ҳолдаги $\vec{v}'_2$ нинг қиймати - эришиш мумкин бўлган энг

катта қийматдир ва

$$E_{\max} = \frac{m_2 v_{2\max}^2}{2} = \frac{4 m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} E \quad (5.21)$$

$$E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \text{уриляётган } m_1 \text{ зарранинг бошланғич энергияси.}$$

Одатда, икки зарра тўқнашуви масаласининг тўла ёритилиши ϵ бурчакни топиш зарралар ўзаро таъсирининг тўла ёритилиши ҳисобга олган ҳолда ҳаракат тенгламаларини ечишни талаб этади. Лекин икки зарра тўқнашуви масаласи бир зарранинг $U(r)$ майдондаги оғиш масаласига келтирилиши мумкин: (5.1. расм)



$$\chi = |\pi - 2\varphi| \quad (5.22)$$

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{M v_0^2 dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - (M v_0^2)^2}} \quad (5.23)$$

5.1. - расм

Бу интегралнинг аниқланиши

2.1. - пунктда батафсил ёритилган.

(5.23) да энергия ва импульс моментини чексиздаги тезлик - v_0 ва мўлжал масофаси - ρ орқали ёзиб оласак:

$$E = \frac{m v_0^2}{2}, \quad M = m v_0 \rho \quad (5.24)$$

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(\rho/r)^2 dr}{\sqrt{1 - (\rho^2/r^2) - 2U(r)/v_0^2}} \quad (5.25)$$

Зарралар дастасининг сочилишини характерлайдиган эффектив сочилиш кесини қўйидагича аниқланади:

$$d\theta = -dn/n \quad (5.26)$$

n - даста қўндаланг кесимининг бирлик масасидан вақт бирлиги ичида ўтадиган зарралар сони.

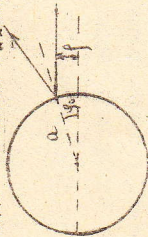
$dn = \chi + d\chi$ бурчак оралиғида сочиладиган зарралар сони. Бу катталикларнинг ρ ва χ лар орқали ифодаси қўйидагича:

$$d\theta = 2\pi \rho d\rho, \quad d\theta = 2\pi \rho \chi \left| \frac{d\varphi(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \quad (5.27)$$

Эффектив кесинини Л - системада сочилиш бурчаги θ га боғлиқлигини топиш учун (5.2.3) даги χ ни (5.1.3) формулалар

бўйича θ орқали ифодалаш лозим.

1 - масала. Зарраларнинг a радиусли абсолют қаттиқ шарчада сочилиш эффектив кесими топилиш (расм 5.2):



5.2-расм

$$U(r) = \begin{cases} \omega, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Ечилиши. Шарчадан ташқарида зарра эркин ҳаракатлангани ва шарчанинг ичига ҳеч қачон кира олмаслиги туфайли, зарранинг ҳаракати тўқнашиш нуқтасига тортилган, шарчанинг радиусига нисбатан симметрик бўлган троектория бўйича содир бўлади. Сурагдан кўриниб турибдики:

$$p = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos(\chi/2)$$

бу ерда, χ - Π - системадаги оғиш бурчаги, p - мўлжал масофаси. Эффектив кесими (5.2.3) формуладан аниқласа бўлади:

$$d\sigma = 2\pi p(\chi) \frac{dp(\chi)}{d\chi} d\chi \rightarrow p a \cos(\chi/2) | -\sin \chi/2 | d\chi =$$

$$= p a^2 \sin \chi/2 = a^2 d\theta/4, \quad d\theta = 2\pi \sin \chi/2$$

Бундан кўриниб турибдики, Π - системада сочилиш - изотроп. Эффектив кесим $d\sigma$ ни бурчак бўйича интеграллаб тула кесимни топиамиз:

$$d\sigma = a^2 d\theta/4 = \pi a^2$$

Демак, зарра умуман тўқнашиши мумкин бўлган яза доиранинг ясаидан иборат экан. Π - системада эффектив кесимни сочилиш бурчаги θ , орқали ифодалаш учун (5.16) формуладан χ ни θ , орқали ифодаласак етарлидир сочилувчи зарранинг массаси m_1 "тинч" турган шарчаникини эса, m_2 дейлик. χ ни θ , орқали аниқлаш худди 5.1. пунктдаги 2 - масалагагидек бўлгани учун охириги жавобни ёзсак етарли, чунки (5.16) ва (5.8) формулалар бир-бирига жуда ҳам ўхшаш:

а) агарда $m_1 < m_2$ бўлса,

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} \left[2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta}{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta} \right] d\theta,$$

б) агарда $m_1 > m_2$ бўлса,

$$d\sigma_1 = 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1$$

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2} \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \sin^2 \theta_1} d\theta_1,$$

в) $m_1 = m_2$ бўлса, юқоридаги формулалардан

$$d\sigma_1 = a^2 |\cos \theta_1| d\theta_1$$

ни оламиз. Бу ерда модул белгисини тўғри ишорани олиш учун атайлаб қолдирдик (5.2.3) га қаранг. Шу натижани $d\sigma = a^2 d\theta/4$ ифодада $\chi = 2\theta_1$ эканини ҳисобга олиб ҳам топиш мумкин (5.16) га қаранг): $d\sigma_1 = a^2 2\pi \sin \chi/4 \rightarrow \pi a^2 \sin 2\theta_1 d\theta_1 =$

$$= a^2 \pi 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta_1 = a^2 |\cos \theta_1| d\theta_1$$

Тўқнашувга қалар тинч турган шарчалар учун $\chi = \pi - 2\theta_1$ боғланишдан фойдалансак:

$$d\sigma_2 = a^2 d\theta/4 \rightarrow a^2 2\pi \sin(\pi - 2\theta_2) d\theta_2/4 =$$

$$= a^2 \cos 2\theta_2 d\theta_2, \quad d\theta_2 = 2\pi \sin 2\theta_2 d\theta_2$$

2 - масала. Массаси m га тенг зарранинг $U = 1/cg^2$ марказий майдондаги оғиш бурчаги ва эффектив кесими топилисин. Ечилиши. Маълумки, (5.2.3) ифода ҳаракатланувчи зарранинг кутб бурчагининг чексизликдан марказга энг яқин масофага яқинлаш-гунча ўзгаришини аниқлайди. Зарранинг ўз йўналишидан оғиш бурчаги эса (5.2.3) га асосан $\chi = \pi - 2\varphi_0$. Дастлаб (5.2.3) дан φ_0 ни топилиш ($m = 1$):

$$E = M^2 / (cg^2) + 1/cg^2 \quad \text{дан} \quad r_{min} \text{ нинг қийматини топиамиз}$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{1 + M^2}{2E}} \quad \varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{M / r^2 dr}{\sqrt{2E - M^2/r^2 - 1/r^2}}$$

$$= \frac{M}{\sqrt{1 + M^2}} \arccos \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{1 + M^2}{2E}} \right) \Big|_{r_{min}}^{\infty} =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{1 + M^2}} [\arccos 0 - \arccos 1] = \frac{\pi M}{\sqrt{1 + M^2}}$$

$$\text{Демак,} \quad \chi = \pi - 2\varphi_0 = \pi - \frac{\pi M}{\sqrt{1 + M^2}} = \pi \frac{\sqrt{1 + M^2} - M}{\sqrt{1 + M^2}}$$

$$\rightarrow \pi \frac{\sqrt{1 + m^2 p^2 v_\infty^2 - m^2 p^2 v_\infty^2}}{\sqrt{1 + m^2 p^2 v_\infty^2}}$$

Бу ифода оғиш бурчаги χ ни мўлжал масофаси ρ билан боғлайди.

$$\frac{1}{\pi} = 1 - \frac{m \rho v_\infty}{\sqrt{1 + m^2 p^2 v_\infty^2}} \rightarrow \rho^2 = \frac{1}{m^2 v_\infty^2} \frac{\chi - \pi^2}{\pi^2 - \chi - \pi^2}$$

$$\text{Бу ердан} \quad d\sigma = 2\pi \rho d\rho = \frac{\pi}{m^2 v_\infty^2} \left\{ \frac{2\chi - \pi^2 - (\chi - \pi^2)^2}{[\pi^2 - (\chi - \pi^2)^2]^2} \right\} dx =$$

$$= \frac{2\pi}{m^2 v_\infty^2} \frac{\pi^2 (\chi - \pi^2) dx}{[\pi^2 - (\chi - \pi^2)^2]^2}$$

$$\text{ёки} \quad d\sigma = \frac{\pi^2 (\chi - \pi^2) d\chi}{m^2 v_\infty^2 \chi^2 (\pi^2 - \chi^2)^2 \sin \chi}, \quad d\chi = 2\pi \sin \chi dx$$

Бу Π - системадаги эффектив кесимининг ифодасидир.

Σ - масала. Иккита массалари m га тенг бир хил зарра $u = 1/\sqrt{2}$ қонуният билан ўзаро таъсирлашаётган деб, зарраларнинг бири тинч турган системада эффектив кесим топилади. Бу Ечилиши. Юқоридаги Σ - масаланинг ечилишдан фойдаланамиз. Бу ҳолда икки зарранинг ўзаро муносабати келтирилган массаси $m/2$ тенг зарранинг $u = 1/\sqrt{2}$ майдондаги ҳаракати масаласига келтириб олинади. Яъни, олдинги масаланинг натижасида $m + m/2$ деб олишимиз керак:

$$d\sigma' = \frac{\pi^2 (\chi - \pi^2) d\chi}{m^2 v_\infty^2 \chi^2 (\pi^2 - \chi^2)^2}$$

Π - системада ҳаракатда бўлган зарра сурилувчи учун $\theta_1 = \chi/2$ (сб.19) га қарангс деб

$$d\sigma'_1 = \frac{\pi^2 (2\theta_1 - \pi) d\theta_1}{m^2 v_\infty^2 \theta_1^2 (\pi - \theta_1)^2} = \frac{\pi^2 (2\theta_1 - \pi) d\theta_1}{2m^2 v_\infty^2 \theta_1^2 (\pi - \theta_1)^2 \sin \theta_1}$$

Тўқнашидан олдин "тинч" турган зарра учун $\theta_2 = (\pi - \chi)/2$

$$d\sigma'_2 = \frac{\pi^2 \theta_2 d\theta_2}{m^2 v_\infty^2 (\pi^2 - 4\theta_2^2)^2} = \frac{16 \pi^2 \theta_2^2 d\theta_2}{m^2 v_\infty^2 (\pi^2 - 4\theta_2^2)^2 \sin \theta_2}$$

4 - масала. Зарралардан бири тўқнашувгача тинч турган

ҳолатда эди. Нишон тинч турган системада зарраларнинг кинетик энергияси ва сочилиш бурчаклари Π - системадаги сочилиш бурчаги χ орқали топилади.

Ечилиши. Фараз қилайликки $\vec{v}_2 = 0$ бўлсин, у ҳолда

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1, \quad |\vec{v}| = |\vec{v}_1| \quad \text{ва}$$

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v} + \mu \vec{v} \rightarrow m_1 \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} + \mu \vec{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_1$$

$$\vec{p}_2 = m_2 \vec{v} - \mu \vec{v} \rightarrow \mu \vec{v}_1 - \mu \vec{v}_1$$

Бу ифодалардан ҳар бир зарранинг тўқнашувдан кейинги кинетик энергиясини топиш мумкин:

$$T_1 = p_1^2 / 2m_1 = (m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 v_1^2 \cos \chi + m_2^2 m_2^2 v_1^2) / (m_1 + m_2)^2$$

$$= T_1 (m_1^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi + m_2^2) / (m_1 + m_2)^2$$

$$T_1 = p_1^2 / 2m_1 = \mu^2 v_1^2 (2 - 2\cos \chi) / 2m_2 = 4\mu^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} / (m_1 + m_2)$$

$$T_2 = m_2 v_1^2 / 2 - \text{биринчи зарранинг кинетик энергияси}$$

Сочилиш бурчаклари θ_1 ва θ_2 лар (сб.1.5) формула орқали ёзилиши мумкин:

$$\tan \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}, \quad \text{ёки}$$

$$\tan \theta_2 = \tan \frac{\pi - \chi}{2} = \frac{\sin(\pi - \chi)}{1 + \cos(\pi - \chi)} = \frac{\sin \chi}{1 - \cos \chi}$$

Охириги ифодалардан:

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \tan \theta_1 + \tan \theta_2 = (1/\tan \theta_1 + \tan \theta_2) / (1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2) =$$

$$= (1/\tan \theta_1 + \tan \theta_2) \sin \chi / (1/\tan \theta_1 + m_2 \cos \chi) (1 - \cos \chi) = m_2 \sin \chi /$$

$$= (1/\tan \theta_1 + m_2) \sin \chi / (1/\tan \theta_1 + m_2 \cos \chi) (1 - \cos \chi) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \cot \theta_2$$

Охириги натижадан кўришиб турибдики, $m_1 = m_2$ да $\theta_{12} = \pi/2$.

Бу ифодалар тўқнашётган зарраларнинг бир-бирдан оғиш бурчаги θ_{12} нинг Π - системадаги сочилиш бурчаги χ билан боғланишини беради.

5 - масала. Ушбу катталикнинг Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариант эканлиги кўрсатилсин ва унинг Π - системадаги қиймати топилисин: $S = c T_1 + T_2 - (c^2 p_1^2 + p_2^2) / (2c(m_1 + m_2))$

Бу ерда, $T_1 = m_1 v_1^2 / 2$ - кинетик энергия.

Ечилиши. Галилей алмаштиришларининг $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}$ тезликлар учун ифодасидан фойдалансак:

Механикада ҳаракат давомида ораларидаги масофалар ўзгармай -

диган моддий нукталар системасын каттиқ жисм дейилади. Каттиқ жисмни моддий нукталар системасы деб кўриш баян масалаларни ечиши оsonлаштиради. Каттиқ жисмни туташ мухит деб қараш ҳам мумкин. Бу икки хил қараш бир-бирига эйд бўлмасдан, балки бирдан иккинчисига оsonгина ўтиши мумкин. Хусусан, каттиқ жисмни моддий нукталар системасы деган мулохазадан туташ мухит деган мулохазага ўтиш учун, каттиқ жисм массасыни моддий нукталар массалари йиғиндиси дейишдан ρ зичликдан ρV бўйича интегралга ўтиш кифоя. Каттиқ жисм ҳаракатини ифодалаш учун "қуғалмас" x, y, z ва ҳаракатланувчи x', x'', x''' саноқ системалардан фойдаланамиз. Ҳаракатлаган координаталар системасы бошини инерция марказида деб ҳисоблаш қўлай. Каттиқ жисмнинг ихтиёрий нуктаси тезлигини $\vec{v} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ деб ҳисоблаш мумкин. Бунда $\dot{\vec{r}}$ инерция маркази тезлиги, $\vec{\omega}$ - нукта координатаси, $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}'' + \vec{r}'''$ эса бурчак тезлик. Каттиқ жисм кинетик энергияси: $T = \sum m v^2 / 2$ йиғинди каттиқ жисм таркибидagi ҳамма моддий нукталар бўйича олинади. Бу ифодага тезлик ифодасыни қўйсак

$$T = \mu V^2/2 + \frac{1}{2} \sum_m \langle \vec{\Omega}_m^2 - (\vec{\Omega}_m^T)^2 \rangle = \mu V^2/2 + \frac{1}{2} \sum_k I_{ik} \Omega_k^2 \quad (6.12)$$

хосил бўлади. Бунда n — қаттиқ жисм массаси, I — инерция моменти. Бу ифодадати биринчи ҳад қаттиқ жисмининг илгариланма ҳаракат энергияси. Иккинчи ҳад айланма ҳаракат энергияси бўлиб, уни ҳужайдагича тасаввур қилиш мумкин:

$$\Gamma_{\text{айл}} = \frac{1}{2} \sum_{ik} \Omega_{ik}^2, \quad I_{ik} = \sum_m (\omega_{ik}^2 \delta_{ik} - \omega_{ik} \omega_{ik}^2) \quad (6.2)$$

Қааттық жисм Лагранж функциясы эса қуйыдагы кўриништа келлади:

$$L = \mu v^2/2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathbf{u}_i^T \mathbf{I}_{ij} \mathbf{u}_j^k - U$$

J - потенциал энергия бўлиб, умуман олти ўзгаришчига боғлиқ бўлади. T_{ik} - инерция моментлари тензори эки инерция тензори дейилади:

$$I_{ik} = \begin{bmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & - \sum mxy & - \sum mxz \\ - \sum myx & \sum m(x^2 + z^2) & - \sum myz \\ - \sum mzx & - \sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

Сўриниб турибдики, у симметрик тензор. Агар қаттиқ жисмни туташ

$$I_{ik} = \int \rho x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k^2 \delta_{ik} dv$$

Инерция тензорини диагонал кўринишга келтириш мумкин. Бу ҳолга

$$S = (m_1 \dot{V}_1^2 / 2 + m_2 \dot{V}_2^2 / 2) - (m_1 \dot{V}_1 + m_2 \dot{V}_2)^2 / (2(m_1 + m_2)) =$$

$$= (m_1 (\dot{V}_1^2 / 2 + \dot{V}_2^2 / 2 + m_2 (\dot{V}_1^2 + \dot{V}_2^2) / 2) - (m_1 (\dot{V}_1 + \dot{V}_2) + m_2 (\dot{V}_1 + \dot{V}_2)^2 / 2) - (m_1 \dot{V}_1^2 +$$

$$+ \dot{V}_2^2)^2 / (2(m_1 + m_2))) = (m_1 \dot{V}_1^2 / 2 + m_2 \dot{V}_2^2 / 2) - (m_1 \dot{V}_1^2 +$$

$$+ m_2 \dot{V}_2^2) / (2(m_1 + m_2)) = (\dot{V}_1^2 + \dot{V}_2^2) / (2(m_1 + m_2))$$

Демак, у каталік сагданувачі экан. Ц - системада (с.13) ларга

сосан: $S = (m_1 \dot{V}_1^2 / 2 + m_2 \dot{V}_2^2 / 2) - (m_1 \dot{V}_1 + m_2 \dot{V}_2)^2 / (2(m_1 + m_2)) =$

$$= \frac{m_1}{2} (\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{V})^2 + \frac{m_2}{2} (\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{V})^2 - 0 = \frac{\mu \dot{V}^2}{2}$$

1. II - системада зарбаларнинг туқнашувгача бўлган тезлиги $\vec{v}_{12}$ ва сочилиш бурчаги χ маълум. Бу зарбаларнинг туқнашувдан кейинги тезлик ва импульсларини топиш. Инерция марказининг тезлиги $\vec{O}$, нисбий тезлик $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ га тенг.

2. Тўқнашиш процессида иккала зарранинг бир-биридан оғиш бурчаги $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$ нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларининг интервалини аниқланг. Кўрсатма: Дастлаб бурчакларнинг тангенсларини топиб оlib, экстремумга текшириш қулай.

$$1 = -2m(T_1^2 - T_2^2) + (\dot{p}_1^2 - \dot{p}_2^2)$$

Галилей алмаширишдагига нисбатан инвариант қолишни кўрсатинг.
ва унинг II - системадаги қўйматини топинг.

4. Массаси м. бўлган зарранинг қўйидаги марказий майдонлардан
оғиш бурчагини топинг:

$$\delta U = C 1/r^2 + 1/r \ln 2$$

Б. Қуйдаги майдонлар учун зарранинг марказга түшиш эффектив
кесиньини топинг:

$$\partial U = -\alpha r^n \quad (n > 2)$$

$$U = \beta/r^2$$

6. Зарранинг абсолют қаттиқ шарчадан сочилишидаги эффектив кесими зарранинг йўқотаётган энергияси ϵ орқали ёзинг.

мос келувчи ўқлар x_1, x_2, x_3 инерция бош ўқлари. I эса, тензорнинг диагональ элементлари дейилади. Каттик жисм импульси компоненталари қуйидагича аниқланади: $m_i = \sum I_{ik} \dot{x}_k$ (6.4)

Каттик жисм олти эркинлик даражасига эга бўлганини учун унинг ҳаракат тенгламалари сони ҳам олтига тенг бўлиши керак.

Булар: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}$ (6.5)

Бу ердаги $\vec{p}$ - каттик жисм импульси, $\vec{F}$ - каттик жисмга таъсир этаятган куч, $\vec{M}$ - каттик жисм импульс моменти, $\vec{K} = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$ - каттик жисм қисмларининг куч моментлари йиғиндиси. Биз шу вақт-гача инерциал санок системаларидаги ҳаракат ҳақида мулоҳаза юритдик. Агар илгариланма ҳаракат синерция маркази тезлиги вақтга боғлиқ ҳолда ўзгарувчи бўлса, Лагранж функцияси ва тенгламаси мос равишда қуйидагича бўлади:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} - U, \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Бунда $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ - илгариланма ҳаракат тезлиши. Агар илгариланма ҳаракат тезлиги билан бирга бурчак тезлик ҳам вақтга боғлиқ бўлса, мос равишда:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\omega})^2 - m \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} - U$$

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m \dot{\vec{r}} \times \vec{\omega} + 2m (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\omega}) \vec{\omega} + m (\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega}) \times \vec{r}$ бўлади. Кейинги ифодадаги 4-ҳад Кориолис кучи, охириги ҳад эса марказдан қочма кучдир.

1-масала. Ушбу системанинг бош инерция моментларини топинг.

Ечилиши. Моддий нуқталар бир тўғри чизиқ бўлиб жойлашгани учун инерция марказини шу ўқ бўйича координатасини толамиз.

Дастлаб координата бошини 1-нуқтага қўййлик. Унда $x_1' = 0$, $x_2' = 2$, $x_3' = 3$. Координата бошини инерция марказига қўйирсак:

$$\frac{x_1' + x_2' + 2x_3'}{1+1+2} = x_0$$

Инерция маркази координатаси $x_0 = 2$ экан. Энди моддий нуқталарнинг инерция марказига нисбатан координаталарини ёзсак:

$x_1' = -2$, $x_2' = 0$, $x_3' = 1$. Бош инерция моментлари эса:

$$I_{11} = \sum m_i y_i^2 + z_i^2 = 0, \quad I_{22} = \sum m_i x_i^2 + z_i^2 = 6, \quad I_{33} = \sum m_i x_i^2 + y_i^2 = 6,$$

2-масала. Ушбу системанинг бош инерция моментларини топинг.

Ечилиши. Бу гап нуқталарнинг инерция марказига нисбатан координаталарини тўғридан-тўғри топайлик. Бунинг учун x ўқи учбурчак асоси, y ўқи учбурчак баландлиги бўлиб йўналган координата системаси инерция марказида жойлашган дейлик. U ҳолда ушбу тенгликлар

$$\text{ўриндилар: } \vec{R} = \sum m_i \vec{r}_i = 0 \rightarrow \sum m_i x_i = \sum m_i y_i = \sum m_i z_i = 0$$

Чизмадан эса: $x_2 = x_3 = 1$, $x_1 = x_4 = 1$, $y_1 = y_2 = y_4 = y_3 = 3$.

Бу тенгликларни ечиб, нуқталарнинг инерция марказига нисбатан координаталарини толамиз:

$x_1 = 0$, $y_1 = 2$, $z_1 = 0$, $x_2 = -1$, $y_2 = -1$, $z_2 = 0$, $x_3 = 1$, $y_3 = -1$, $z_3 = 0$. Булардан фойдаланиб, бош инерция моментларини ҳисоблаб толамиз

$$I_{11} = 6, \quad I_{22} = 2, \quad I_{33} = 8.$$

3-масала. Қирралари a, b, c бўлган бир жинсли параллелепипел бош инерция моментлари аниқлансин.

Ечилиши. Параллелепипел бир-жинсли бўлгани учун инерция маркази геометрик марказ билан мос келади ва шунинг учун $\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$, $\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}$, $\frac{c}{2} < z < \frac{c}{2}$. Координата бошини инерция марказига ва координата ўқларини параллелепипел қирраларига параллел қилиб олсак, инерция тензори диагональ ҳолатга келади.

$$I_{11} = \int \rho (y^2 + z^2) dv = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} (y^2 + z^2) dz dy dx = \frac{\rho}{12} (b^2 + c^2)$$

$$I_{22} = \frac{\rho}{12} (a^2 + c^2), \quad I_{33} = \frac{\rho}{12} (a^2 + b^2).$$

$\mu = \int \rho dv$ - параллелепипел массаси.

4-масала. Радиуси R , баландлиги h бўлган цилиндрнинг бош инерция моментларини аниқланг.

Ечилиши. Координата бошини инерция марказига жойлаштирсак ва цилиндр координаталар системасидан фойдалансак: $x = r \cos \varphi$,

$y = r \sin \varphi$, $z = z$, $0 < r < R$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$.

$$I_{11} = \int \rho (y^2 + z^2) dv = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} r^2 \sin^2 \varphi + z^2 dz d\varphi dr = \frac{\rho}{4} (R^2 + \frac{h^2}{3}).$$

$$I_{zz} = \frac{M}{4} (R^2 + \frac{h^2}{3}), \quad I_{yz} = \frac{M}{2} R^2.$$

б - машқлар.

1. Ушбу системалар бош инерция моментларини аниқланг:



2. Узунлиги l бўлган ингичка стержень бош инерция моментларини толинг.

3. R радиусли шарнинг бош инерция моментларини толинг.

4. Ичида r радиусли шар шаклида бўшлиғи бўлган R радиусли шар бош инерция моментларини толинг.

5. Баландлиги h ва асос радиуси R бўлган доиравий конус бош инерция моментларини толинг.

Машқларнинг жавоблари:

1.1 - машқлар.

1. $\dot{q} = -(q^2 + q)/(1 + q^2)$ 2. $\dot{q} = (1 - q^2)^{3/2}$ 3. $\dot{r} = r\theta^2 - 1/r^2$.

$\theta = -(2r\theta)/r$ 4. $U = -1/U\theta \cdot \sqrt{U/\theta}$; $\theta = -1/U\theta \cdot \sqrt{\theta/U}$.

5. $\dot{x} = 2y$; $\dot{y} = -2x$ 6. $\dot{x} + 2x + y = 0$; $\dot{y} + 2y + x = 0$.

7. $\dot{x} + y/2 + x - y/2 = 0$; $\dot{y} + x/2 + y - x/2 = 0$ 8. $m\dot{x} + x\dot{x} = 0$.

9. $\dot{\xi}_1 + k/m_1(\xi_1 - \xi_2) = 0$; $\dot{\xi}_2 + k/m_2(\xi_2 - \xi_1) = 0$.

10. $\dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$ 11. $\dot{\xi}_1 = \omega^2 \xi_2 - 2\omega^2 \xi_1$; $\dot{\xi}_2 = \omega^2 \xi_1 - 2\omega^2 \xi_2$.

$\omega^2 = \kappa/m$ 12. $\dot{\xi}_1 = \kappa/m_1(\xi_2 - \xi_1)$; $\dot{\xi}_2 = \kappa/m_2(\xi_1 - \xi_2)$.

1.2 - машқлар.

1. $L = \dot{q}^2/2 - q$ 2. $L = (q^2 + q^2)/2$ 3. $L = 2xy$, $L = -2yx$.

4. $L = -\dot{x}^2/2$ 5. $L = -\dot{\varphi} \sin \varphi$ 6. $L = -(\dot{q}q - \omega^2 q^2)/2$.

7. $L = -\max$ 8. $L = m\dot{\varphi}^2/2 + \varphi^2 + m\alpha l^2 \sin^2 \varphi - \gamma(\varphi)$.

9. $L = -\gamma \sin \varphi \cos \varphi$ 10. $L = \gamma \cos \varphi \cos \varphi$.

11. $L = \gamma e^{i\varphi} \cos \gamma t$ 12. $L = m \dot{\varphi}^2/2 - \omega e \sin \varphi$.

16. а) $L = mR^2 \dot{\varphi}^2 (1 + \cos \varphi) - U(R, \varphi)$.

б) $L = m (\dot{\varphi}^2 c_1 / \theta^2 + 1) + 2\dot{\varphi} c_1 - \dot{\varphi} / \theta^3 + \dot{\varphi}^2 c_1 + \dot{\varphi}^2 / \theta^3$ 1/2.

в) $L = m (\dot{U}^2 \theta^2 + 1) + \dot{\theta}^2 U^2 + 1) + 2U\theta c_1 - 1) + \dot{z}^2 / 2$.

г) $L = m \dot{\theta}^4 (\dot{U}^2 c_1 + \theta^4) + 2U\theta \dot{\theta} c_1 - 1) + \dot{\theta}^2 U^2 c_1 + 1) + \dot{z}^2$.

17. $L = \sqrt{1 - (cdq/dt)^2}$.

1.3 - машқлар.

1. а) 1, б) 1, в) 1, 2. а) 2, б) 4, в) 3, г) 4, д) 2.

е) 3. 3. а) 5, б) 7, в) 3 та координата ўқларига мос

равешла, г) 3 та айланма ҳаракатни аниқлайдиган 3 та бурилиш бурчакларига мос равешла. Агарда нуқталар системаси туғри чиқиқни ташкил этса - 2 та, д) 4.

1.4 - машқлар.

1. а) $\dot{x} = \dot{x}' + \omega t$, $\dot{y} = \dot{y}'$, $\dot{z} = \dot{z}'$, $L = m (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) / 2 - \max' - U$, б) цилиндрик координата системасида z ўқи айланиш ўқи деб қарамсин, $r = r'$, $z = z'$, $\varphi = \varphi' + \omega t$, $L = m (\dot{r}'^2 + \dot{z}'^2 + r'^2 \dot{\varphi}'^2) / 2 - U(r', z', \varphi')$.

2. а) йаттиқнинг осилиш нуқтаси сфера устида деб, z ўқининг йўналиши пастга қаратиб олинсин: $L = m (r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) / 2 - mgr \cdot \cos \theta$, б) $L = m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) / 2 - a/r$, в) $L = (m_1 + m_2) m^2 / 2$.

а) $\dot{\varphi}^2 + m^2 \dot{\theta}^2 + 2ab \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) / 2 + (m_1 + m_2) a g \cos \varphi + m_2 b \cos \theta$,

г) $L = a^2 \dot{\varphi}^2 (m_1 \sin^2 \varphi + m_2 \cos^2 \varphi) / 2 - a g \sqrt{2} \cdot (m_1 \sin \varphi + m_2 \sin \theta)$,

д) $r = r_0 + \theta t$, $t = \theta$, иккинчи зарра учун $L = m_1 a^2 \dot{\varphi}^2 / 2 +$

$m_2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 (r_0 + \theta t)^2) / 2 + m_1 g a \cos \varphi + m_2 g (r_0 + \theta t) \cos \theta$,

е) $L = m^2 \dot{\varphi}^2 / 2 + m \dot{\omega}^2 \sin \omega t \cdot \cos \varphi + m g (\dot{\omega} \cos \varphi + a \sin \omega t)$,

ж) $L = m^2 \dot{\varphi}^2 / 2 + m \dot{\omega}^2 \sin \omega t \sin \varphi + m g \dot{\omega} \cos \varphi$.

3. $L = m \cdot \sum_{i,j} \dot{r}_{ij}^2 / 2 - m^2 / 2 M \cdot (\sum_{i,j} \dot{r}_{ij}^2)^2 - \sum_{i,j} 1 / |r_{ij}|$.

1.5 - машқлар.

1. а) $E = 1 / \sqrt{1 - \dot{\theta}^2} + \varphi$, б) $E = m \dot{x}^2 / 2 + k x^2 / 2$, в) $E = \dot{x}^2 +$

$(e^x - 1)^2$, г) $E = (m_1 + m_2) \dot{r}^2 / 2 + m_2 (\dot{\varphi}^2 - 2\dot{\varphi} \sin \varphi) / 2 + m_2 \sin \varphi$.

2. 1) $E = \dot{q}^2 / 2 \cdot (1 + q^2) + q^2 / 2$, 2) $E = 1 / \sqrt{1 - \dot{q}^2} - q$.

3) $E = \dot{r}^2 / 2 + r^2 / 2 \cdot \dot{\theta}^2 - 1/r$, 4) $E = U\theta / 2 - 1 / \sqrt{U\theta}$, 5) $E =$

$= (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) / 2 - (xy - yx)$, 10) $E = m a^2 (\dot{\varphi}^2 - 2\omega^2 (1 + \cos \varphi)) / 2$.

$$11) E = m(\xi_1^2 + \xi_2^2)/2 - m(\xi_1^2 - \xi_1\xi_2 + \xi_2^2). \quad 12) E = m\xi_1^2/2 + m\xi_2^2/2 - m(\xi_1^2 - \xi_1\xi_2 + \xi_2^2)/2.$$

$$3. a) x = 2 - 2\sqrt{3}, \quad \delta) x = (1 \pm \sqrt{5})/2, \quad b) x = \pi/3, \quad \gamma) x = 1/4, \quad \lambda) x = 1/3, \quad e) x = \arctg(-4), \quad \kappa) x = \ln 5, \quad 3) x = (3 \pm \sqrt{5})/2.$$

2.1 - машқлар.

$$1. t = \sqrt{x^2 - 1}, \quad 2. t = 2/\sqrt{3} (1 - \operatorname{Arctg} e^{-x}\sqrt{3} + \operatorname{Arctg} \sqrt{3}).$$

$$3. t = \operatorname{Arctg} \sinh(x - 1), \quad 4. t = \operatorname{Arctg} x.$$

2.2 - машқлар.

$$1. E > 2, \quad T = 2\operatorname{Arctg} \sinh(2x - E)/\sqrt{E^2 - 1} \Big|_{x_1}^{x_2} = 2\pi.$$

$$2. E < 1, \quad T = 2/\sqrt{1 - E} \operatorname{arccos} e^{-x}(1 - E)^{-1}/\sqrt{E^2 - 1} \Big|_{x_1}^{x_2} = 2\pi/\sqrt{1 - E}.$$

$$3. -1 < E < 0, \quad T = 2/\sqrt{E} \operatorname{arcsinh}(xE - 1)/\sqrt{1 - E} \Big|_{x_1}^{x_2} = 2\pi/\sqrt{E}.$$

$$4. 0 < E < 1, \quad T = 2/\sqrt{1 - E} \operatorname{arcsin}(\sqrt{1 - E}/E) \cdot \operatorname{Sh} x \Big|_{x_1}^{x_2} = 2\pi/\sqrt{1 - E}.$$

2.3 - машқлар.

$$1. x = t - t_0/3, \quad 2. x = \ln(1 - \operatorname{tg} t/2)/(1 + \operatorname{tg} t/2), \quad 3. x = \operatorname{tg} t.$$

$$4. x = t^2/6, \quad 5. t = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|, \quad 6. x = 1/2 \sqrt{P_y^2 + E^2}.$$

$$\operatorname{Ch}(t - t_0) - E/2, \quad y = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{P_y^2 + E^2} e^{t-t_0}) - E/P_y + y_0.$$

$$7. t = (1/2) \sqrt{2E - P_y^2} \cdot (x \sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arcsinh} x) - x^2/2, \quad y = P_y/(2\sqrt{2E - P_y^2}) \cdot (x \sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arcsinh} x) - x^2/2.$$

$$8. x = -E \pm \sqrt{(t - t_0)^2 + (1 + P_y^2)}, \quad y = P_y \operatorname{Arctg}(E + x)/\sqrt{1 + P_y^2}.$$

$$9. x = 4E/P_y \cdot \cos^2(P_y(t - t_0)/4), \quad y = E/P_y \cdot (t - t_0) + 2E/P_y \cdot \sinh(P_y(t - t_0)/2) + y_0.$$

2.4 - машқлар.

$$1. a) \dot{r} = (ma \pm \sqrt{m^2 a^2 + 2mE^2})/E,$$

$$6) r = \pm \sqrt{(M^2 + \sqrt{M^4 + 16m^2 E^2})/4mE}, \quad b) r = \sqrt{E^2 + (M^2 + 1)},$$

$$2. a) 1/r = \sqrt{2E/(1 + M^2)} \cos(\sqrt{1 + M^2}/M (\varphi - \varphi_0)),$$

$$6) 1/r = 1/(2\sqrt{M^2 + 1}) (1 + \sqrt{BE(M^2 + 1) + 1}) \cos \sqrt{M^2 + 1}/M (\varphi - \varphi_0).$$

3.1 - машқлар.

$$1) a) \omega = 1, \quad \delta) \omega = 1/\sqrt{2}, \quad b) \omega = 1/\sqrt{2}, \quad \gamma) \omega = \sqrt{k/m},$$

$$\lambda) \omega^2 = v_0^2 \sqrt{1 - (F/v_0)^2}/m, \quad e) \omega = \sqrt{k/m}.$$

$$2) \omega'/\omega = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m_1' m_2' (m_1 + m_2)}}, \quad 3) \omega = \sqrt{k(l - a)/m}, \quad l > a.$$

$$\omega = \sqrt{k(a^2 - l^2)/ma^2}, \quad a > l, \quad 4) \omega = \sqrt{F/m l}, \quad x = 0.$$

$$5) \omega = \sqrt{F(l + b)/l m}, \quad p = 0, \quad \delta) L = mk^2/2 + kx^2/2,$$

$$x = C_1 \exp(\sqrt{k/m} t) + C_2 \exp(-\sqrt{k/m} t)$$

$$7) x_0 = \sqrt{e^2/8mR^2} < 1, \quad \sin \varphi_0/2 = x_0, \quad x_0 > 1 \text{ да А нукта бар-} \\ \text{қарор мувозанат нуктасидир, } x_0 < 1 \text{ да эса, нотурғун.}$$

$$8) L = m\dot{y}^2/2 - kcy - l - mg/2k^2 + \operatorname{Const}, \quad y_0 = l + mg/2k, \quad \omega^2 = 2k/m, \quad y = y_0 + A \cos(\omega t + \varphi).$$

3.2 - машқлар.

$$1. a) x = \frac{F_0}{m\omega^2}, \quad \delta) x = \frac{F_0}{m(\omega^2 - a^2)} (\sin \omega t - \frac{a}{\omega} \sin at),$$

$$b) x = \frac{F_0}{m\omega^2} (t - \frac{\sin \omega t}{\omega}), \quad \gamma) x = \frac{F_0}{m(\omega^2 + a^2)} e^{-at} - \cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t, \quad \lambda) x = \frac{F_0 e^{-at}}{[(\omega^2 + a^2 - \beta^2)^2 + 4a^2 \beta^2]} [(\omega^2 + a^2 -$$

$$- \beta^2)(\cos \beta t - \cos \omega t) + 2a\beta(\beta \omega \sin \omega t - \sin \beta t)],$$

$$e) x = \frac{F_0 e^{-at}}{(\omega^2 + a^2 - \beta^2)^2 + 4a^2 \beta^2} [2a\beta \cos \beta t - \cos \omega t] + (\omega^2 + a^2 - \beta^2)(\sin \beta t - \beta \omega \sin \omega t).$$

$$2. a) x = \frac{2l}{2m\omega} \sin \omega t, \quad 3. a) a = \frac{2 \cdot F_0}{m l \omega} \sin \frac{\omega l}{2},$$

$$6) a = \frac{F_0}{m\omega^2} \sqrt{\omega^2 l^2 - 2 l \sin \omega l + 2(1 - \cos \omega l)}, \quad \gamma) a = \frac{F_0}{m\omega^2},$$

$$4. \text{ Тебраниш ноларийдир, } \lambda_{1,2} = (-4 \pm \sqrt{7})/2.$$

$$5. F = 2k^2, \quad \lambda = 2, \quad \omega = \sqrt{5}.$$

$$6. a) C_1 = (x_0^2 + x_0^2 \lambda + \lambda^2 - \omega_0^2) / 2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2},$$

$$C_2 = (-x_0^2 + x_0^2 \lambda + \lambda^2 - \omega_0^2) / 2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

$$6) C_1 = x_0, \quad C_2 = x_0 + \lambda x_0.$$

3.3 - машқлар.

$$1. a) x_0^2 = 1, y_0^2 = -1, \omega_1^2 = \omega_2^2 = 6; \quad 6) x_0^2 = y_0^2 = 1, \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 2/3$$

$$2. a) \omega_1^2 = 6, \omega_2^2 = 1, x = \sqrt{1/5} \cdot (-2Q_1 + Q_2); y = \sqrt{1/5} \cdot (3Q_1 + Q_2);$$

$$6) \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 3/4, \omega_3^2 = 3/4; \quad B) \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = \frac{9 + \sqrt{57}}{6}.$$

$$\omega_3^2 = \frac{9 - \sqrt{57}}{6}, \quad \Gamma) \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} [(\omega_0^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\alpha^2}]$$

$$x = Q_1 \cos \varphi - Q_2 \sin \varphi, \quad y = Q_1 \sin \varphi + Q_2 \cos \varphi.$$

$$3. \quad \xi_1 = \rho - \rho_{\text{МУВ}}, \quad \xi_2 = \varphi, \quad \Gamma = \frac{m}{2} (\xi_1^2 + \rho_{\text{МУВ}}^2 \xi_2^2).$$

$$U = \frac{1}{2} (ck\xi_1^2 + mg\rho_{\text{МУВ}}^2 \xi_2^2), \quad \omega_1^2 = k/m, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\rho_{\text{МУВ}}}.$$

$$4. \quad a) 3n - 6, \quad 6) 3n - 6 = (2n - 3) + (n - 3), \quad B) 3n - 6 = (n - 1) + (2n - 4).$$

$$5. \quad \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

$$6) a) x' + x - 3y/2 + 3x = 0, \quad 2y' - 3x + 2y + 5y = 0;$$

$$6) 4x' + 3y/2 + x = 0, \quad y' + 3x/2 + 3y = 0;$$

$$B) x' + x/x + 1 - 1/x^2 y = 0, \quad y' + y/y + 1 - 1/xy^2 = 0.$$

4.1 - машқлар.

$$1. \quad r = (p - r^2), \quad p = 2r(p - r^2), \quad 2. \quad x = p_y / (tx^2 y),$$

$$p_x = 2p_x p_y / (tx^2 y), \quad y = p_x / (tx^2 y), \quad p_y = p_x p_y / (tx^2 y^2)$$

$$3. \quad u = p_u / (u^2 + v^2), \quad p_u = u(p_u^2 + p_v^2) / (u^2 + v^2)^2 - 1, \quad v = p_v / (u^2 + v^2)$$

$$p_v = p(p_u^2 + p_v^2) / (u^2 + v^2)^2.$$

4.2 - машқлар.

$$2. a) H = p_y^2 / (2\alpha x) + 4p_x x, \quad 6) H = (\sum p_0^2) / 2m + (\sum p_0^2)^2 / 2m + U,$$

$$B) H = -p_x^2 / 4 + p_y^2 / 4x - x, \quad \Gamma) H = xp_x + x p_x p_y$$

$$x) H = (p_x^2 + p_y^2) / 2 + (p_x y - x p_y) + (x^2 + y^2) / 2,$$

$$K) H = p^2 / (2\alpha(1 + 2\alpha x)) + (\omega^2 x^2) / 2 + \alpha x^2,$$

$$p) H = c \sqrt{m^2 c^2 + (p^2 - eA/c)^2} + e\varphi, \quad M) H = p_\theta^2 / 2I + p_y^2 / 2I_3 +$$

$$+ (p_\varphi - p_y \cos \theta)^2 / (2I \sin^2 \theta) - 3Q^2 (I - I_3) \sin^2 \theta \sin^2 \theta - \Omega p_\varphi.$$

$$3. a) L = mc(x-1) + y^2 / 2 + 1; \quad \Gamma) L = -\sqrt{1-r^2} - r;$$

$$p) L = k y t x^2 y - x y^2, \quad 6) L = p \theta / 2 - 1 / \sqrt{r \theta}.$$

4.3 - машқлар.

$$1. \quad -\sum \varepsilon_{ijk} x_k, \quad 2. \quad -(B \hat{a} \hat{1} \hat{r}), \quad 3. \quad -(\hat{c} \hat{b} \hat{1} \hat{r})$$

$$4. \quad 0, \quad 5. \quad n^2 r^{(n-2)}, \quad 6. \quad 2 \hat{a} (\hat{a} \hat{r}^2).$$

4.4 - машқлар.

$$6. \quad F_y = -e^2 e^0 - 1)^2 \operatorname{tg} \varphi, \quad 8. \quad a) \hat{6}) \text{ координата ва импульс бир-бирига алмашди, } \hat{B}) \text{ айнан алмаштирилган.}$$

$$10. \quad a) q = \sqrt{2P/m\omega} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q,$$

$$Q = \omega + \omega \sin 2Q / 2\omega, \quad p = p_0 \cos 2Q / \omega, \quad \text{бу ерда}$$

$$P \text{ ва } Q \text{ тавсир-бурчак узгарувчилари,}$$

$$6) q = F / (m \omega^2) + \sqrt{2P/m\omega} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \sin Q,$$

$$Q = + F \sqrt{m\omega/2P} \cos Q, \quad p = F \sqrt{2m\omega P} \sin Q$$

$$11. \quad \text{Гамильтон функцияси } H' = \omega P_1, \text{ ҳаракат тенгламалари}$$

$$\dot{P}_1 = P_2 = Q_2 = 0, \quad \dot{Q}_1 = \omega.$$

$$12. \quad \text{Бу алмаштиришлар } p = \alpha P, \quad r = Q/\alpha \text{ ўхшашлик алмаштиришдир.}$$

$$13. \quad a) Q = q e^P, \quad E = e^P, \quad 6) q = e^Q, \quad p = P e^{-Q}, \quad B) p = \sqrt{2P},$$

$$q = \sqrt{2P} Q, \quad \Gamma) \dot{r} = \dot{r}' + \dot{\varphi} t, \quad \dot{p} = \dot{p}' + m\dot{\varphi}, \quad H' = H - \dot{\varphi} P.$$

$$14. a) q = 1/\sqrt{2m\omega} (Q - iP), \quad p = -i\sqrt{m\omega/2} (Q + iP), \quad H' = -i\omega P Q,$$

$$6) q = \sqrt{2P/m\omega} \cos Q, \quad p = -\sqrt{2m\omega P} \sin Q, \quad H' = \omega P,$$

$$B) q = \sqrt{2P/m\omega} \cos \omega t + Q, \quad p = -\sqrt{2m\omega P} \sin \omega t + Q, \quad H' = 0,$$

$$15. \quad \dot{x} = \dot{x}' + \dot{r}' t / \eta, \quad \dot{p} = \dot{p}', \quad H(x', p', t) = 0.$$

4.5 - машқлар.

$$1. \quad a) \frac{\partial S}{\partial t} + (\frac{1}{1 - v^2} (\frac{\partial S}{\partial u})^2 + \frac{1}{1 - u^2} (\frac{\partial S}{\partial v})^2)^{1/2} = 0,$$

$$6) (\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2 + (\frac{\partial S}{\partial z})^2 - \frac{1}{2} (\frac{\partial S}{\partial t})^2 + m^2 c^2 = 0,$$

$$b) \frac{\partial S}{\partial t} + \left(c \frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 + \left(c \frac{\partial S}{\partial v} \right)^2 / (2(u^2 + v^2)) + (u + v)^2 = 0,$$

$$r) \frac{\partial S}{\partial t} + \left(c \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(c \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(c \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 / (2m + 1/r) = 0$$

$$2. a) \quad v \dot{u} + u \dot{v} = v^2/2, \quad u \dot{v} + v \dot{u} = u^2/2, \quad \text{б) } u \dot{u} + u^2/2, \\ v \dot{v} + v^2/2, \quad \text{в) } m \dot{x} = 2ay, \quad m \dot{y} = -2ax, \quad \text{г) } \dot{x} \dot{y} / xy^3 = 1, \\ m \dot{x} = 2ay, \quad \text{д) } \dot{x} = 2y, \quad m \dot{y} = -2x.$$

$$3. a) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \left(c \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(c \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(c \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 / 2 - x = 0$$

$$x = x_0 + p_{0x} t + t^2/2, \quad x_0 = (p_{0x}^2 + p_y^2 + p_z^2) / 2 - E - \text{больш-}$$

$$\text{лангич холат, } \partial S / \partial E = p_x = \text{const.}, \quad y = y_0 + p_y \sqrt{2E - p_y^2 - p_z^2} + 2x.$$

$$\text{б) курсатма: } \frac{\partial S}{\partial t} + \left(c \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(c \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 / 2 + 1/r = 0$$

$$S = -Et + p_\phi \varphi + f(r),$$

$$\text{в) курсатма: } S = -Et + p_\phi \varphi + p_z z + f(r),$$

$$\text{г) } H = p^2/2m - mgy, \quad y = gt^2/2, \quad p = mgt.$$

5.1 - машқлар.

$$3. \quad E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}.$$

$$4. \quad T_\mu = 4 \text{ МэВ}, \quad T_\nu = 29,8 \text{ МэВ}.$$

5.2 - машқлар.

$$1. \quad \vec{v}'_1 = \vec{v} + m_2 \vec{v} \vec{n} / (m_1 + m_2), \quad \vec{v}'_2 = \vec{v} - m_1 \vec{v} \vec{n} / (m_1 + m_2)$$

$$\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v} + \mu \vec{v} \vec{n}, \quad \vec{p}'_2 = m_2 \vec{v} - \mu \vec{v} \vec{n} \quad 3. \quad t = 4\mu^2 \sin^2(\chi/2)$$

$$5. a) \quad \sigma = 2\pi\alpha/mv_\omega^2, \quad \text{б) } \sigma = \pi n(n-2) \alpha^2 m / n \quad (\alpha/mv_\omega^2)^{2/n},$$

$$b) \quad \sigma = \begin{cases} \pi c \beta/E^2 - \alpha/(4E^2), & E > \alpha^2/2\beta \\ 0, & E < \alpha^2/2\beta, \end{cases}$$

$$r) \quad \sigma = \begin{cases} \pi c \beta/E^2 - \alpha/(4E^2), & E > \beta^2/4\gamma \\ 0, & E < \beta^2/4\gamma. \end{cases}$$

$$8. \quad \varphi\sigma = \pi a^2 d\sigma / e_{\max}$$

6-машқлар.

$$1. a) \quad I_{11} = 5, \quad I_{22} = 5/6, \quad I_{33} = 4/6 \text{ б) } I_{11} = 19/3, \quad I_{22} = 19/3, \quad I_{33} = 2$$

$$2. \quad I_{11} = I_{22} = \mu l^2 / 12, \quad I_{33} = 0, \quad 3. \quad I_{11} = I_{22} = I_{33} = 2\mu R^3/5.$$

$$8. \quad I_{11} = I_{22} = \frac{3}{20} \mu (R^2 + \frac{1}{4} l^2), \quad I_{33} = \frac{3}{10} \mu R^2.$$