

3-bob. HAKAKAT TENGLAMALARINI INTEGRALLASH

3.1. Bir o'ldhamli harakat tenglamasi

Eyler—Lagranj tenglamalari fizikaga aloqasi bo'lgan deyarli hamma hollarda noxiziqli differensial tenglamalar sistemasini tashkil qiladi. Bunday tenglamalarni integrallashning birdan bir usuli tenglamalarning (demak, sistemaning erkinlik darajasining) soniga teng bo'lgan harakat integrallarini topishdir. Har bir harakat integrali bitta tenglamaning darajasini bittaga pasaytirib beradi, birinchi tartibli oddiy hosilali tenglamani esa, odatda, integrallash mumkin bo'lib chiqadi.

Bir o'ldhamli harakat tenglamasini integrallashdan boshlaylik. Lagranj funksiyasi bu holda

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \quad (3.1)$$

ko'rinishga ega. Bu yerda $U(x)$ — berilgan tashqi maydon (potensial). Harakat tenglamasi

$$m\ddot{x} = -U'(x) \quad (3.2)$$

ko'rinishni oladi. Tashqi potensial $U(x)$ murakkab ko'rinishga ega bo'lishi mumkin, ammo masalada bitta harakat integralining mavjudligi bizning ishimizni darrov yengillashtiradi. Lagranj funksiyasi (3.1) vaqtga bog'liq emas, demak, energiya saqlanuvchi kattalik (o'zgarmas son). Uning ifodasi

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \quad (3.3)$$

dan darhol quyidagi ifodani hosil qilish mumkin:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}. \quad (3.4)$$

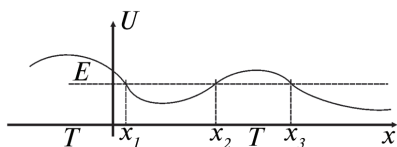
Olingan tenglama oson integrallanadi:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const.} \quad (3.5)$$

Bu integralni hisoblash natijasida koordinata x va vaqt t orasidagi bogʻlanish topiladi. Javobni integral orqali ifodalash, odatda, **kvadraturaga keltirish** deyiladi. (3.5) formula bir oʻlchamli harakat masalasini eng umumiy holda yechadi. Bu yechimga ikkita oʻzgarmas kirgan — E va const. Ular masalaning boshlangʻich shartlaridan topiladi. $E - U$ kinetik energiyaga teng boʻlgani uchun hamma vaqt

$$E - U \geq 0 \quad (3.6)$$

boʻlishi kerak. $E - U = 0$ nuqtada esa jismning tezligi nolga teng boʻladi. Bunday nuqtalar **toʻxtash nuqtalari** deyiladi. Bir oʻlchamli harakatning asosiy xossalarini oʻz ichiga olgan 3.1-rasmni koʻraylik. Rasmdan koʻrinib turibdiki, tashqi maydonning koʻrinishi va energiya-ning son qiymatiga qarab toʻxtash nuqtalar bir necha boʻlishi mumkin. 3.1-rasmda toʻxtash nuqtalari x_1, x_2, x_3 . Agar harakat ikki tomondan toʻxtash nuqtalari bilan chegaralangan boʻlsa, bunday harakat **finit harakat** deyiladi. Rasmda bu soha $x_1 \leq x \leq x_2$. Odatda, bu formadagi sohalar **potensial oʻra** deyiladi. Rasmdagi $x_3 < x$ soha — **infiniit** harakat sohasidir, bunday sohalarida jism harakati yoki bir tomonlama chegaralangan boʻladi, yoki umuman chegaralanmagam boʻladi. Koʻrinib turibdiki, bunday sohadagi jism vaqt oʻtishi bilan cheksizlikka intiladi.



3.1-rasm. Potensial maydondagi harakat.

Rasmdagi T harfi bilan belgilangan sohalar — taqiqlangan sohalaridir, bunday sohalarida (3.6) tengsizlik bajarilmaydi. Jism bunday sohaga oʻta olmaydi.

3.1.1-misol. $U = x$ potensial maydonda toʻxtash nuqtalarini toping va harakatni integrallang. Boshlangʻich shartlar — $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1$. Jismning massasini bir deb oling.

Boshlang'ich shartlardan foydalanib, energiyaning qiymati topiladi:

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + x = 1. \text{ To'xtash nuqtasi } x = 1. \text{ (3.5) bo'yicha}$$

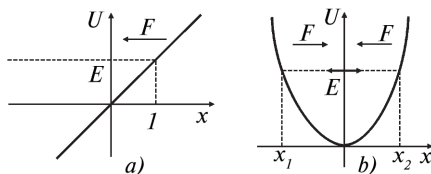
$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \text{const} = -\sqrt{2(1-x)} + \text{const}.$$

Boshlang'ich shart $\text{const}=0$ ga olib keladi. Demak,

$$x = 1 - \frac{1}{2} t^2.$$

Shu holga mos keladigan harakat tenglamasi $\ddot{x} = -1$ ni yechib yana shu natijaga kelishimizni tekshirib ko'rish qiyin emas.

Bu potentsialdagi harakat 3.2-rasmning birinchisida ko'rsatilgan. Jismga ta'sir qilayotgan kuchning yo'nalishi ham ko'rsatilgan.



3.2-rasm. (3.1.1) va (3.1.2) misollarga oid.

3.1.2-misol. $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$ potentsial maydondagi harakat qonuni aniqlansin.

(3.5) formulaga potentsialni qo'yamiz:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{1}{2} kx^2}} + \text{const} = -\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left(x(t) \sqrt{\frac{k}{2E}} \right) + \text{const}. \quad (3.7)$$

$$\text{Demak, } x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} + \alpha \right), \quad (3.8)$$

bunda α — boshlang'ich shartdan topiladigan konstanta. Masalan, $t = 0$ vaqt momentida $x(0) = 0$ bo'lsin desak $\alpha = \pi/2$ bo'lishi kerak.

3.2. Ikki jism masalasi

Ko'p o'lchamli mexanik harakatlar ichida aniq integrallanadiganlari kam. Ularning ichida markaziy maydon orqali o'zaro ta'sir qiluvchi **ikki jism masalasi** eng e'tiborga sazovardir. Bu masalani ko'rib o'rganish **keltirilgan massa** tushunchasidan boshlanadi.

3.2.1. Keltirilgan massa

Massalari m_1 va m_2 bo'lgan ikki jism berilgan bo'lsin. Ular orasidagi o'zaro ta'sir faqat o'zaro masofagagina bog'liq bo'lishi mumkin, bu degani, potensial energiyaning ko'rinishi $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ bo'lishi kerak. Sistemaning Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

Inersiya markazi sistemasiga o'taylik:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0 \quad (3.10)$$

va o'zaro masofa vektori kiritaylik:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (3.11)$$

Bu ikki tenglamani yechib

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (3.12)$$

lar olinadi. Rasmdan ko'rinib turibdiki, $\mathbf{r}$ vektori ikkinchi jismdan birinchi jismga qaratilgan. Agar quyidagi munosabat orqali

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.13)$$

keltirilgan massa tushunchasi kiritilsa, Lagranj funksiyasi quyidagi sodda ko'rinishga keladi:

$$L = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(r). \quad (3.14)$$

Natijada ikkita moddiy nuqtaning o'zaro ta'siri masalasi bitta moddiy nuqtaning $U(r)$ ko'rinishli tashqi maydondagi harakati masalasiga

keltirildi. Har bir jismning trayektoriyasi esa (3.12) formulalar orqali topilishi mumkin.

Keltirilgan massani yaxshiroq tasavvur qilish uchun ikki chegaraviy hollarni ko'raylik.

Birinchi hol: $m_1 \gg m_2$, ya'ni, birinchi jismning massasi ikkinchikidan ko'p marta katta bo'lsin (ko'z oldimizga Quyosh va Yerni keltirish mumkin). Bu holda $m_1 \approx m_2$ va $\mathbf{r} \approx -\mathbf{r}_2$ bo'ladi. Sistemaning inersiya markazi massasi katta moddiy nuqtaning yaqinida joyo'lashgan bo'ladi, massasi kichik jism uning atrofida $\approx r$ masofada aylanayotgan bo'ladi.

Ikkinchi hol: $m_1 = m_2$. Bu holda $m = \frac{1}{2}m_1 = \frac{1}{2}m_2$ va inersiya markazi ikki jismning qoq o'rtasida joyo'lashgan bo'ladi. Ikkala jism shu markaz atrofida aylanadi.

3.2.2. Markaziy maydon

(3.14) Lagranj funksiyasi bilan ifodalanadigan masalani yechishga o'tamiz. Potensial energiya faqatgina markazgacha bo'lgan masofaga bog'liq bo'lgani uchun bunday maydon **markaziy maydon** deyiladi, ko'rilayotgan masala esa markaziy maydondagi harakat masalasi deyiladi.

Eyler—Lagranj tenglamalari bu holda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.15)$$

O'ng tomondagi kuch radius-vektor bo'yicha yo'nalgandir:

$$-\frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3.16)$$

Uning son qiymati markazgacha bo'lgan masofa r ning funksiyasidir. (3.15) tenglamalar sistemasi uchta nochiziqli tenglamadan iborat bo'lgan sistema bo'lib, uning yechimlarini topish uchun harakat integrallari qo'llanilishi kerak.

Masala sferik simmetriyaga ega bo'lgani uchun (3.14) Lagranj funksiyasini sferik koordinat sistemasida ochib chiqamiz:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - U(r). \quad (3.17)$$

Bu ifoda hali murakkabdir. Saqlanuvchi kattaliklarni aniqlaylik. Ularning ichida birinchisi – impuls momenti. Uning saqlanuvchan kattalik ekanligini oddiy yo‘l bilan isbot qilishi mumkin:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = m \frac{d}{dt} [\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] = m[\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}] + m[\mathbf{r}\ddot{\mathbf{r}}] = -\frac{dU(r)}{dr} [\mathbf{r}\mathbf{r}] = 0. \quad (3.18)$$

Bu isbotda (3.15), (3.16) formulalardan va ixtiyoriy vektorning o‘z-o‘ziga vektor ko‘paytmasi nolga tengligidan foydalanildi.

Harakat miqdori momenti

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] \quad (3.19)$$

jismning radius-vektoriga doimo perpendikulardir, uning o‘zgarmasligi jism radiusining doimo bir tekislikda yotishini ya’ni, harakat bir tekislikdagina ro‘y berishini bildiradi. Shu tekislik sifatida $\theta = \pi/2$ tekislik olinadi. Bu degani biz z -o‘qini harakat miqdori momenti bo‘yicha yo‘naltirdik deganimizdir.

Lagranj funksiyasi uchun ifodani bir pog‘onaga soddalashtirishga erishildi:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r). \quad (3.20)$$

Ko‘rinib turibdiki, Lagranj funksiyasi ϕ – kordinataga bog‘liq emas. Bunday koordinatlarni siklik koordinata deyilgan edi. Siklik koordinataga mos keluvchi umumlashgan impuls saqlanuvchi kattalik bo‘ladi:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}. \quad (3.21)$$

Bizning holda siklik ϕ kordinataga mos keluvchi umumlashgan impuls

$$p_\phi = mr^2 \dot{\phi} = \text{const} \quad (3.22)$$

harakat miqdori momentining z komponentasidir ((2.51) ga qarang):

$$M_z = [\mathbf{r}\mathbf{p}]_z = mr^2 \dot{\phi}. \quad (3.23)$$

Ammo z o‘qi $\mathbf{M}$ bo‘yicha yo‘naltirilgan, demak, $M_z = M$. Bu tahlildan $\dot{\phi}$ ni topib (3.20) Lagranj funksiyasini

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{M^2}{m^2 r^2} \right) - U(r) \quad (3.24)$$

ko‘rinishga keltiramiz. O‘z navbatida bu energiya uchun

$$E = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{M^2}{m^2 r^2} \right) + U(r) \quad (3.25)$$

formulani beradi. Uni

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \quad (3.26)$$

ko‘rinishga keltirib, darhol quyidagini ifoda olinadi:

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} = t. \quad (3.27)$$

Integral hisoblansa radiusni vaqtning funksiyasi sifatida topgan bo‘lamiz — $r = r(t)$. Trayektoriyani to‘liq topish uchun burchakning ham vaqtga bog‘liqligini topish kerak. Buning uchun (3.23) dan foydalanish yetarlidir:

$$\varphi = \int \frac{M}{mr^2} dt = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2m}{M^2} (E - U(r)) - \frac{1}{r^2}}}. \quad (3.28)$$

Ikkita oxirgi integral r, φ va t o‘zgaruvchilar orasidagi ikki munosabatni berib trayektoriyani to‘liq aniqlab beradi.

Agar (3.25) formulada radial tezlik nolga tenglashtirilsa: $\dot{r} = 0$ quyidagini olamiz:

$$E = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (3.29)$$

Ta’rif bo‘yicha bu radial yo‘nalishdagi to‘xtash nuqtalari uchun tenglama. Tenglamani r ga nisbatan yechib mana shu «to‘xtash nuqtalari» r_{0i} (ularning soni tenglamaning tartibiga bog‘liq) topiladi. Bu nuqtalarda jism o‘zining markazdan uzoqlashishini ($\dot{r} > 0$) unga yaqinlashishga ($\dot{r} < 0$) o‘zgartiradi va aksincha. Burchak tezlik $\dot{\varphi}$ ning ishorasi esa, (3.22) dan ko‘rinib turibdiki, hech qachon o‘zgarmaydi

va nolga teng bo'lmaydi. Demak, markaziy maydonda jism markaz atrofidagi aylanish yo'nalishini hech qachon o'zgartirmas ekan. Radial harakat esa murakkabroq tabiatga ega. Agar

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (3.30)$$

belgilash kiritilsa (3.25) formulani

$$E = \frac{mr^2}{2} + U_{\text{eff}}(r) \quad (3.31)$$

ko'rinishga keltirib olish mumkin. Bu formulaga bir o'lchamli harakat formulasi sifatida qaralsa markaziy maydondagi radial harakat (3.30) munosabat orqali aniqlanadigan **effektiv potensialdagi** harakat bo'lib chiqadi. Agar Lagranj tenglamasida $-\partial U/\partial q_i$ ifoda (umumlashgan) kuchning ifodalashi eslansa effektiv potensialdagi qo'shimcha had

$$-\frac{\partial}{\partial r} \frac{M^2}{2mr^2} = \frac{M^2}{mr^3} \quad (3.32)$$

ko'rinishga ega bo'lgan markazdan tashqariga yo'nalgan qo'shimcha kuchga olib keladi. Bu kuch **markazdan qochirish kuchi** deb ataladi. Harakat miqdori momenti bilan bog'liq bo'lgan bu kuchning paydo bo'lishi ma'lum oqibatlarga olib keladi.

Birinchidan, markaziy maydonda harakat qilayotgan jism maydon markaziga tusha oladimi yo'qmi degan savolga javob shu qo'shimcha kuchga bog'liqdir. Hattoki, maydon tortish maydoni bo'lganda ham markazga tushish $r \rightarrow 0$ uchun (3.32) kuchni yengish kerak. Buning uchun esa $r \rightarrow 0$ limitda

$$-\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{M^2}{mr^3} < 0, \quad (3.33)$$

yoki bu munosabat integrallansa $r \rightarrow 0$ limitda

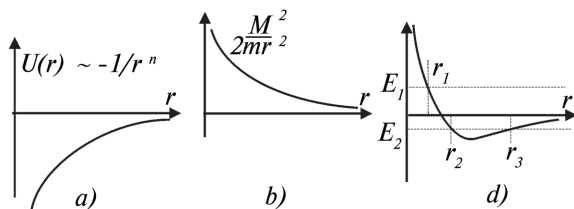
$$r^2 U(r) < -\frac{M^2}{2m} \quad (3.34)$$

bo'lishi kerakligi topiladi. Albatta, hamma maydonlar ham bu tengsizlikni qanoatlantirmaydi. Bu tengsizlik bajarilishi uchun potensial

$U(r)$ yoki $-1/r^n$, $n>2$ ko'rinishga ega bo'lishi kerak, yoki $-\alpha/r^2$ ko'rinishga ega bo'lganda ham $-\alpha > M^2/2m$ bo'lishi kerak.

Ikkinchidan, ma'lum vaziyatlarda potensial energiyadagi bu qo'shimcha had tortish maydoni bo'lgan potensial maydonda ham finit harakatning mumkin emasligiga olib kelishi mumkin. Buni ko'rish uchun tortish maydoni $\partial U/\partial r > 0$ ning umumiy grafisini chizaylik (albatta, har xil maydonlar uchun grafikning og'ishi va nuqtama-nuqta son qiymatlari har xil bo'ladi, ammo $\partial U/\partial r > 0$ shartga bo'ysunadigan funksiyaning eng umumiy ko'rinishi shu grafikka mos keladi). Endi bu grafikga M^2/r^2 funksiyasining grafigi ustma-ust qo'yilsa (3.3-rasmga qarang). Natijaviy grafikda potensial o'ra bormi-yo'qmi? Potensial o'ra bo'lishi uchun M^2 ning qiymati yetarli darajada kichik bo'lishi kerak (uning son qiymati konkret maydonga bog'liq bo'ladi).

Demak, jismning harakat miqdori momenti ma'lum chegaradan oshib ketsa, finit harakat bo'lmasligi ham mumkin ekan.



3.3- rasm. Effektiv potensialning hosil bo'lishi.

Harakat chegaralarini energiya E ning son qiymati aniqlab beradi (u, o'z navbatida, boshlang'ich shartlar orqali aniqlanadi). Bu tasdiqni 3.3-rasmga qarab tushunish qiyin emas.

Agar energiyaning qiymati shunday bo'lsaki, harakat faqat bir tomondan chegaralangan $r \geq r_1 = r_{\min}$ bo'lsa (3.3-d rasmdagi E_1 hol) bunday harakat infinit harakat bo'ladi — jism cheksizlikdan keladi va cheksizlikka qaytib ketadi. Agar harakat ikki tomondan chegaralangan bo'lsa $r_{\min} = r_1 \leq r \leq r_3 = r_{\max}$ (3.3-d rasmdagi E_2 hol) u finit harakat bo'ladi. Harakat finit bo'lishi uchun effektiv potensial «o'raga» ega bo'lishi kerak.

Finit harakatga mos keluvchi trayektoriya hamma hollarda ham yopiq bo'lavermaydi. Oddiy matematik mulohazadan kelib chiqadiki, (3.28) integralning $r_{\min}$ dan $r_{\max}$ gacha qiymati shu integralning $r_{\max}$ dan

r_{min} gacha qiymatiga tengdir. Demak, jism markazga eng yaqin nuqtadan chiqib yana shu nuqtaga qaytib kelguncha φ burchakning o'zgarishi

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} \quad (3.35)$$

ga teng bo'ladi. Trayektoriya yopiq bo'lishi uchun $\Delta\varphi = 2\pi m/n$ bo'lishi kerak, bu yerda m va n – butun sonlar, bu holda jism n marta aylangandan keyin yana boshlang'ich nuqtaga qaytib keladi.

3.3. Kepler masalasi

Kepler masalasi deb jismning

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (3.36)$$

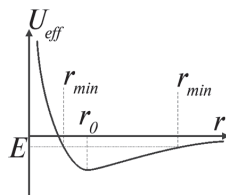
ko'rinishdagi maydondagi harakatini o'rganishni aytiladi. Bu ko'rinishdagi maydon fizikada eng muhim rol o'ynaydigan gravitatsion maydon va kulon maydonlariga to'g'ri keladi. Gravitatsion maydon faqat tortishish tabiatiga ega ($\alpha > 0$), kulon maydoni ham tortishish, ham itarish ($\alpha < 0$) tabiatiga egadir. Effektiv potensial ($(\alpha > 0)$ hol uchun)

$$U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (3.37)$$

(3.4) rasmda korsatilgan.

Effektiv potensialda o'ra bor, demak, (3.36) maydonda finit harakat mavjud ekan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, buning uchun jism energiyasi manfiy bo'lishi kerak: $E < 0$.

Bu hol uchun markazga eng yaqin va eng uzoq nuqtalar $E = U_{eff}(r)$ tenglamadan topiladi:



3.4- rasm. Effektiv potensial.

$$r_{1,2} = -\frac{\alpha}{2E} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} + \frac{M^2}{2mE}} = \frac{\alpha}{2|E|} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2|E|M^2}{m\alpha^2}} \right).$$

Yuqori ishora r_{max} ga va quyi ishora r_{min} ga to'g'ri keladi. Albatta, agar $E > 0$ bo'lsa

$$r_{min} = -\frac{\alpha}{2E} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E^2} + \frac{M^2}{2mE}} \quad (3.38)$$

ga teng bo'ladi, r_{max} esa mavjud bo'lmaydi.

Effektiv potensial $r_0 = \frac{M^2}{m\alpha}$ nuqtada minimumga erishadi:

$$(U_{eff})_{min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}.$$

Hech qanday jismning energiyasi bundan kichik bo'lishi mumkin emas. Musbat energiyali va energiyasi nolga teng jismlar infinit harakat qiladi – ular cheksizlikdan kelib cheksizlikka ketadi.

Kepler masalasidagi integrallar oson hisoblanadi. Burchak φ ni topaylik (c-integrallash konstantasi):

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} + c = -M \int \frac{d(1/r)}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} + c = \\ &= \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + c. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Integrallash konstantasi shunday tanlab olinadiki, $\varphi = 0$ nuqta $r = r_{min}$ ga to'g'ri kelsin.

Buning uchun $const = 0$ bo'lishi kerak.

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \quad (3.40)$$

belgilashlar kiritilsa olingan formula

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (3.41)$$

ko‘rinishga keltiriladi. Orbita konus kesimi formulasiga keltirildi, P – **orbita parametri** va e – uning **ekscentrisiteti** deyiladi. $\varphi=0$ va $\varphi=\pi$ nuqtalar orbitaning markazga eng yaqin (**perigeliy**) va eng uzoq (**apogeliy**) nuqtalariga to‘g‘ri keladi. $E<0$ holda $e<1$ bo‘ladi, orbita ellips ko‘rinishiga ega. Ellipsning fokuslarining birida jismlarning biri joylashgan bo‘ladi, chunki fokusdan ellipsning eng yaqin nuqtasigacha masofa geometriyaning ma‘lum formulasi bo‘yicha $P/(1+e)$ ga teng, bu esa r_{min} ning o‘zidir. Tabiiyki, shu fokusdan eng uzoq masofa $P/(1-e)$ avval aniqlangan r_{max} ga tengdir. Bundan harakat davomida jismlarning biri ellipsning bitta markazida turadigan bo‘lib chiqadi.

Agar $E=(U_{eff})_{min}$ bo‘lsa $e=0$ ga aylanadi, orbita aylanma ko‘rinishini oladi, markazgacha masofa o‘zgarmas $r=p=M^2/m\alpha$ ga teng bo‘ladi.

$E=0$ bo‘lgan holda $e=1$ bo‘ladi, ya’ni, orbita parabola ko‘rinishiga ega bo‘ladi. Bu holda harakat infinitligi aytilgan edi.

Energiyasi musbat jism esa gravitatsion (kulon) maydonida giperbola bo‘yicha harakat qiladi – bu holda $e>1$.

3.3.1-misol. Ko‘rilayotgan $U(r) = -\alpha/r$ maydonda yana bitta harakat integrali bor, u ham bo‘lsa

$$\mathbf{A} = [\mathbf{vM}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r} \quad (3.42)$$

ekanligini ko‘rsating.

Yechish.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}] - \frac{\alpha \dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^3} \quad (3.43)$$

Bunda $\mathbf{M} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}]$ va harakat tenglamasi $m\ddot{\mathbf{r}} = \alpha \mathbf{r}/r^3$ larni qo‘ysak $\dot{\mathbf{A}} = 0$ ekanligini darhol ko‘ramiz. Vektor $\mathbf{A}$ orbita tekisligida yotadi – bu uning ta’rifidan ko‘rinib turibdi. $\mathbf{A}$ vektor markazdan perigeliyga qarab yo‘nalgan (bobning oxiridagi masalalarni qarang).

3.3.2-misol. Kepler masalasini $\mathbf{A}$ harakat integrali yordamida yeching.

Yechish: $\mathbf{A}$ ni $\mathbf{r}$ ga skalar ko‘paytiraylik:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = -\alpha r + \frac{M^2}{m}. \quad (3.44)$$

Agar $\mathbf{A}$ va $\mathbf{r}$ orasidagi burchakni φ deb belgilansa va $e=A/\alpha$, $p=M^2/(m\alpha)$ belgilshlar kiritilsa, o‘zimizga ma‘lum bo‘lgan (3.41) formula hosil bo‘ladi:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (3.45)$$

3.5. Markaziy maydonda sochilish jarayonlari

3.5.1. Sochilish kesimi

Shu paytgacha markaziy maydonlardagi asosan finit harakatni o'rganildi. Tashqi maydonlardagi infinit harakatlar ham katta ahamiyatga ega. Cheksiz uzoqdan tushayotgan jism maydon markaziga yaqinlashganida maydon bilan o'zaro ta'sir natijasida o'z trayektoriyasini o'zgartirishi turgan gapdir.

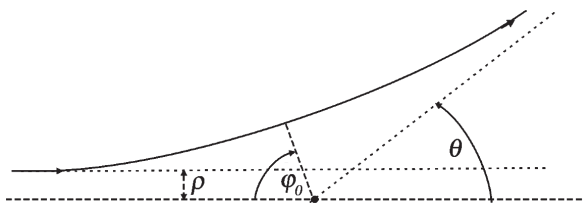
Shu jumladan, u markazga tushishi, boshqa jism bilan to'qnashishi mumkin. Fizik jarayonlar o'rganganda ularga adekvat bo'lgan (ya'ni, mos keluvchi) tushunchalardan foydalanishi kerak. To'qnashish va sochilish jarayonlarini sochilish kesimi tushunchasi yaxshi ifodalaydi. U quyidagicha kiritiladi.

Tajribada zarrachalar oqimi nishonga tushadi. Oqimning zichligi j – birlik vaqt ichida birlik sirt orqali o'tgan zarralar sonini bildiradi. Uning o'lchamligi $[j] = \text{sm}^{-2}\text{sek}^{-1}$. Nishon (nishonni tashkil qilgan zarrachalarning maydonlari) bilan o'zaro ta'sir natijasida oqimni tashkil qilgan zarralar sochiladi (sochiladi deganda hamma mumkin bo'lgan jarayonlar ko'zda tutiladi – shu jumladan, markazga tushish, markazda tutilish va h.k. Ya'ni, sochilish deganda zarrachaning o'z boshlang'ich trayektoriyasini o'zgartirishi ko'zda tutiladi). Agar 3.5-rasmda ko'rsatilganidek, jismning og'ish burchagi θ deb belgilaylik. Kuzatuvchi bir sekundda qancha zarracha ($\theta, \theta + d\theta$) burchak orasida tarqalganini sanaydi. Mana shu son $dn(\theta)$ deb belgilanadi. Uning o'lchamligi $[dn] = \text{sek}^{-1}$. Agar uning tushayotgan oqim zichligiga nisbati olinsa bir sekundda birlik yuzadan o'tib nishonga tushgan zarrachalarning qanday qismi ($\theta, \theta + d\theta$) burchak ichida tarqalgani topiladi. ***Sochilishning differensial kesimi***, yoki, ko'pincha soddalik uchun qisqartirilib aytiladigan sochilish kesimi,

$$d\sigma = \frac{dn}{j} \quad (3.46)$$

formula orqali ta'riflanadi. Differensial kesimning o'lchamligi yuza o'lchamligiga teng.

3.5-rasm sochilish jarayonida ishlatiladigan ba'zibir kattaliklarni kiritishga tegishli. Chap tomondan bir jism tushayotgan bo'lsin, θ – sochilish burchagi (laboratoriya sistemada, e-sistemada), ρ – ***nishon parametri***. Nishon parametri – agar tushayotgan zarra va markaz



3.5- rasm. Bir jismning sochilishini ta'riflashga oid.

orasida hech qanday o'zaro ta'sir kuchi bo'lmaganda shu zarraning markazdan qanday masofada o'tib ketishini bildiradi.

Ko'rinib turibdiki

$$2\varphi_0 + \theta = \pi. \quad (3.47)$$

Sochilash jarayonini laboratoriya (l -sistema) va inersiya markazi (m -sistema) larda ko'rib chiqishi mumkin. m -sistema – sochilish jarayonida ishtirok etayotgan zarrachalarning to'liq impulsi nolga teng bo'lgan sistema. Markaziy maydonda sochilish jarayonlari m -sistemada ko'riladi, l -sistemaga o'tish formulalari 3.5.2-paragrafda berilgan.

Tushayotgan zarracha nishon bilan o'zaro ta'sir natijasida markazdan θ burchak ostida sochildi. Agar nishon parametri ρ boshqacha bo'lsa, zarraning sochilish burchagi θ ham boshqacha bo'ladi. Boshqa so'z bilan aytganimizda, $\rho \rightarrow \rho + d\rho$ o'zgarishiga $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ o'zgarishi mos keladi. $d\rho$ va $d\theta$ larning ishoralari orasidagi bog'lanishni aniqlaylik. Odatda, ρ kamaysa θ oshishi kerak (chunki bu holda zarra markazga yaqinroq keladi va, natijada, ular orasidagi o'zaro ta'sir kuchayadi) va aksincha. Demak, odatda, (ko'pincha shunday, ba'zi-bir hollardagina bunday emas) $d\rho$ va $d\theta$ larning ishoralari har xil ekan.

φ_0 – burchakka o'taylik. Fizikada eng qiziq bo'lgan markaziy maydonda sochilish jarayonini o'rganamiz, shuning uchun φ_0 sifatida (3.28) formula bo'yicha aniqlanadigan burchakni olamiz:

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}}, \quad (3.48)$$

bunda r_{min} – trayektoriyaning markazga eng yaqin nuqtasigacha masofa.

Ko‘rilayotgan masalada zarracha cheksizlikdan nishonga tushmoqda. Uning saqlanuvchan energiyasi va impuls momentlarini boshlang‘ich kattaliklar orqali ifodalab olish maqsadga muvofiqdir:

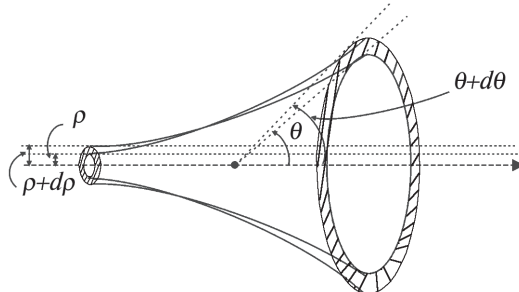
$$E = \frac{mv_{\infty}^2}{2}, \quad M = mv_{\infty}\rho, \quad (3.49)$$

bunda v_{∞} – zarrachaning boshlang‘ich (cheksiz uzoq masofadagi) tezligi. Natijada og‘ish burchagi uchun integral

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \, dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_{\infty}^2}}} \quad (3.50)$$

ko‘rinishni oladi.

3.6-rasmda ko‘rsatilganidek, boshlang‘ich oqimda $(\rho, \rho+d\rho)$ nishon masofasida bo‘lgan zarralar $(\theta, \theta+d\theta)$ burchak ichiga sochilgan bo‘ladi. Ichki va tashqi radiusi $(\rho, \rho+d\rho)$ bo‘lgan halqaning yuzasi $2\pi\rho d\rho$, uni oqim jichligi j ga ko‘paytirilsa shu yuzadan bir sekunda o‘tgan zarralar soni kelib chiqadi. Demak, $dn = 2\pi\rho dj$ ekan, bu esa



3.6- rasm. Sochilish.

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho \quad (3.51)$$

formulaga olib keladi. Burchak o‘zgaruvchisiga o‘taylik:

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta) \left| \frac{d\rho(\theta)}{d\theta} \right| d\theta. \quad (3.52)$$

Absolut qiymat paydo bo‘lganining sababi yuqorida aytilganidek deyarli hamma vaqt $d\rho/d\theta < 0$ ekanligidir, sochilish kesimi esa o‘zining ma’nosi bo‘yicha musbat bo‘lishi kerak.

Agar fazoviy burchak $d\sigma = 2\pi \sin\theta d\theta$ ga o'tilsa, differensial kesim uchun formula

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta} \left| \frac{d\rho(\theta)}{d\theta} \right| d\theta \quad (3.53)$$

ko'rinishga keladi.

3.5.2. To'qnashish jarayonlari

To'qnashish jarayonida jismlarning impuls-lari va energiyalari o'zga-radi. Demak, bir jismdan ikkinchisiga uzatilgan energiya va impuls-larning hisoblash masalasi qarab chiqilishi kerak. Energiya, impuls va tezliklarning qiymatlarini saqlanish qonunlari orqali topishi mumkin. Bu ish bir necha misollarda ko'rsatiladi.

3.51-misol. Boshlang'ich tezligi $\mathbf{V}$ bo'lgan zarracha ikki qismga parcha-landi. Parchalanish natijasida hosil bo'lgan zarrachalarning chiqish burchagini toping.

Zarrachalarning bittasini olaylik. Uning tezligi l va m sistemalarda $\mathbf{v}$ va $\mathbf{v}_0$ bo'lsin. $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$ munosabatni $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$ ko'rinishda olib kvadratga ko'tarilsa

$$v^2 + V^2 - 2vV \cos\theta = v_0^2 \quad (3.54)$$

formula olinadi. Bunda $\theta - \mathbf{v}$ va $\mathbf{V}$ vektorlar orasidagi (l - sistemadagi) burchak. Bu tenglama v ga nisbatan yechilsa

$$v_{1,2} = V \cos\theta \pm \sqrt{v_0^2 - V^2 \sin^2\theta} \quad (3.55)$$

formulaga kelinadi. Agar $v_0 \geq V$ bo'lsa θ burchak ixtiyoriy qiymatni qabul qilishi mumkin ya'ni, parchalanish natijasida hosil bo'lgan zarracha ixtiyoriy yo'nalishda uchib ketishi mumkin. Ammo $v_0 < V$ bo'lsa θ burchak chega-ralangan bo'ladi:

$$|\sin\theta| \leq \frac{v_0}{V}. \quad (3.56)$$

Birinchi holda parchalanish mahsuloti $\mathbf{V}$ ga nisbatan ixtiyoriy yo'na-lishda harakat qilishi mumkin (shu jumladan, teskari yo'nalishda ham). Ikkinchi holda esa u $\mathbf{V}$ ga nisbatan faqat oldinga qarab uchib chiqadi, bunda uchib chiqish burchagining maksimal qiymati quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\sin\theta_{\max} = \frac{v_0}{V}. \quad (3.57)$$

Agar $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0$ va $\mathbf{v} - \mathbf{V} = \mathbf{v}_0$ munosabatlarni kvadratga ko'tarib ulardan V^2 ni topib bir-biriga tenglashtirilsa

$$v \cos \theta = v_0 \cos \theta_0 + V \quad (3.58)$$

formula topiladi. Bu yerdan olingan V^2 ni $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ ning kvadrati bilan tenglashtirilsa

$$v \sin \theta = v_0 \sin \theta_0 \quad (3.59)$$

ekanligi topiladi. Demak, l va m . sistemalardagi uchib chiqish burchaklari (θ va θ_0) quyidagicha bog'langan ekan:

$$\theta = \frac{v_0 \sin \theta_0}{V + v_0 \cos \theta_0}. \quad (3.60)$$

Bu formulani θ_0 ga nisbatan yechib, burchaklar orasidagi teskari bog'lanishni ham topish qiyin emas:

$$\cos \theta_0 = -\frac{V}{v_0} \pm \cos \theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2} \sin^2 \theta}. \quad (3.61)$$

Bu yerdagi $\pm$ ishora yana v_0 va V tezliklar orasidagi munosabatga bog'liq.

3.5.2-misol. Ikki zarrachaning elastik to'qnashishi natijasida biridan ikkinchisiga uzatilgan energiya va impulsni toping.

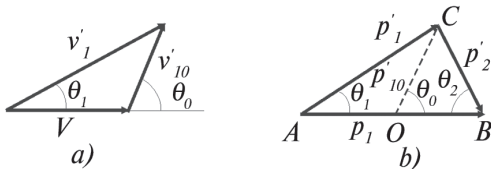
Zarrachalarning l sistemadagi to'qnashishgacha impulslarini $\mathbf{p}_1$ va $\mathbf{p}_2$, to'qnashishdan keyingi impulslarini $\mathbf{p}'_1$ va $\mathbf{p}'_2$ deb olaylik. Impulsning saqlanish qonuni bo'yicha

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2. \quad (3.62)$$

To'qnashuv elastik, demak, to'qnashuv natijasida zarrachalarning ichki holatlari o'zgarmaydi. m -sistemada to'liq impuls hamma vaqt nolga teng:

$\mathbf{p}_{01} + \mathbf{p}_{02} = \mathbf{p}'_{01} + \mathbf{p}'_{02} = 0$, bu degani, to'qnashishdan oldin va keyin zarrachalarning impulsleri son jihatdan o'zaro teng va qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi (3.8-rasmga qarang):

$$|\mathbf{p}_{01}| = |\mathbf{p}_{02}|, |\mathbf{p}'_{01}| = |\mathbf{p}'_{02}|.$$



3.7- rasm. Sochilish jarayoni: tezliklar va impulslar.

Bu esa o'z navbatida, ularning energiyalari ham o'zgarmasligini bildiradi. Demak, m -sistemada to'qnashish bor-yo'g'i zarrachalarning yo'nalishlarining o'zgarishiga olib keladi. 3.8-rasmda ko'rsatilganidek m – sistemada zarrachalarning to'qnashish natijasidagi og'ish burchagini θ_0 deb belgilaylik. Bu burchakni topish masalasini alohida ko'rib chiqdik (-ga qarang).

Ikki jism uchun inersiya markazi sistemasiga o'tish formulalarini eslaylik:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (3.63)$$

Bunda $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – zarrachalarining m – sistemadagi koordinatlari. Bu formulalardan vaqt bo'yicha hosila olinsa

$$m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_{20}. \quad (3.64)$$

Ikkinchi munosabatni $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ deb ham yozib olish mumkin (m -sistemaning l -sistemaga nisbatan tezligini $\mathbf{V}$ deb olinsa $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i0} + \mathbf{V}$ bo'ladi). (3.64) formuladan

$$\mathbf{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} = \frac{m}{m_1} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} = -\frac{m}{m_2} \mathbf{v} \quad (3.65)$$

ekanligi kelib chiqadi, bu yerda $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – keltirilgan massa.

Zarrachalardan birini (m_2 massalisini) to'qnashishdan oldin qo'zg'almasdan turibdi deb olaylik (shu zarracha qo'zg'olmasdan turgan sistema l -sistema deb qaraladi). Yani, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$. Impulslarga o'tilsa

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$$

bo'ladi. Undan tashqari $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_{10} + \mathbf{V}$ va

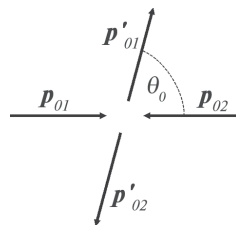
$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}'_{20} + \mathbf{V}$ formulalarning birinchisini m_1 ga

va ikkinchisini m_2 ga ko'paytirilsa $\mathbf{p}'_{10} = -\mathbf{p}'_{20}$ ni hisobga olgan holda

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_{10} + \frac{m}{m_2} \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_{10} + \frac{m}{m_1} \mathbf{p}_2 \quad (3.66)$$

formulalarga kelinadi. Ularni 3.9-rasm bilan solishtirilsa $\overline{OB} = \frac{m}{m_1} \mathbf{p}_1$

ekanligini topamiz. Ikkinchi tomondan (3.91) formulalarning birinchisidan



3.8- rasm. m -sistemada zarrachalarning impulslari.

$\mathbf{p}_{10} = \frac{m}{m_1} \mathbf{p}_1$ ekanligi kelib chiqadi. $|\mathbf{p}_{10}| = |\mathbf{p}'_{10}|$ va $\overline{OC} = \mathbf{p}'_{10}$ munosabatlar

qo'llanilsa darhol $OB = OC$ ekanligi topiladi. Bu $\theta_2 = (\pi - \theta_0)/2$ ekanligini beradi.

Impulslar va tezliklar orasidagi munosabatlarni (3.8-rasmdan ko'rish mumkin. Bu yerda θ_1 – birinchi zarrachaning to'qnashish natijasidagi og'ish burchagi, m – sistemada unga θ_0 – burchak mos keladi. Shu rasmdan ko'rish qiyin emaski

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{v'_{10} \sin \theta_0}{v'_{10} \cos \theta_0 + V}. \quad (3.67)$$

Birinchi tomondan, yuqorida aytilganidek, $|\mathbf{v}'_{10}| = |\mathbf{v}_{10}|$, yoki, $v'_{10} = v_{10}$,

ikkinchi tomondan $v_{10} = \frac{m}{m_1} v$, uchinchi tomondan

$$\mathbf{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 = \frac{m}{m_2} \mathbf{v}_1 = \frac{m}{m_2} \mathbf{v} \quad (\text{chunki } \mathbf{v}_2 = 0). \quad \text{Burchaklar orasidagi}$$

hamma olingan natijalarni bir joyga yig'ilsa

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 + \frac{m_1}{m_2}}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \theta_0}{2} \quad (3.68)$$

formulalarga kelinadi.

$m_2 > m_1$ holda birinchi jismning e -sistemadagi sochilish burchagi ixtiyoriy bo'lishi mumkin. Agar $m_2 \gg m_1$ bo'lsa $\theta_1 \approx \theta_0$ bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda ikkinchi jism qo'zg'almasdan turgan markaz rolini o'ynaydi deyish ham mumkin.

Agar $m_1 \gg m_2$ bo'lsa, birinchi zarrachaning sochilish burchagi quyidagi maksimal qiymat bilan chegaralangan bo'ladi:

$$\sin \theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (3.69)$$

Birinchi zarrachadan ikkinchisiga uzatilgan energiyani topaylik. Buning uchun (3.66) formulaning birinchisi kvadratga ko'tariladi va topiladi:

$$p_1'^2 = p_1^2 \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta_0}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (3.70)$$

Bu munosabatni tezliklar tilida ham yozib olishi mumkin:

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos \theta_0}}{m_1 + m_2} v. \quad (3.71)$$

(3.66) formulaning ikkinchisini kvadratga ko'tarib

$$v_2' = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\theta_0}{2} \quad (3.72)$$

ni ham topish mumkin. Demak,

$$\Delta E_1 = E_1' - E_1 = \frac{p_1'^2 - p_1^2}{2m_1} = -\frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} E_1. \quad (3.73)$$

Ko'rinib turibdiki, hamma vaqt $\Delta E < 0$ – birinchi zarracha energiya yo'qotadi, (boshida qo'zg'olmay turgan) ikkinchi zarracha esa energiya oladi. Bunday energiya uzatilishi $\theta = \pi$ bo'lganda maksimal qiymatga ega bo'ladi. $\theta = \pi$ esa to'qnashish natijasida birinchi zarrachaning yo'nalishi tesakarisiga almashgan holga mos keladi. Ikkinchi zarrachaning energiyasi boshida nolga teng edi, uning to'qnashish natijasida olgan energiyasi birinchi zarracha yo'qotgan energiyaga teng bo'ladi:

$$E_2' = -\Delta E_1. \quad (3.74)$$

$m_1 = m_2$ holga alohida to'xtalib o'taylik. Bu holda $\Delta E_1 = -\sin^2 \frac{\theta_0}{2} E_1$

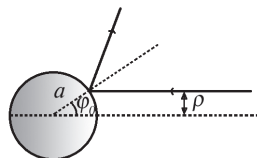
bo'ladi. Ko'rib turibmizki, agar $\theta = \pi$ bo'lsa $\Delta E_1 = -E_1$ bo'ladi: nishonga tushayotgan birinchi zarracha hamma energiyasini boshida qo'zg'olmasdan turgan ikkinchi zarrachaga beradi va o'zi to'xtab qoladi, ikkinchi zarracha esa birinchi zarrachaning boshlang'ich yo'nalishida uning tezligi bilan harakat qilib ketadi.

3.5.3. Sochilish jarayonlariga misollar

3.5.3-misol. Kichik zarracha radiusi a bo'lgan qattiq sharda sochilyapti. Sochilish kesimini toping. Sharning potentsialini ifodalab olaylik:

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r < a; \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (3.75)$$

Agar tushayotgan zarrachaning nishon masofasi a dan katta bo'lsa u shar bilan ta'sirga kirmaydi. 3.9-rasmdan ko'rinib turibdiki



3.9- rasm. Qattiq sharda sochilish.

$$\rho = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \theta}{2} = a \cos \frac{\theta}{2}. \quad (3.76)$$

Buni (3.52) formulaga olib borib qo'yamiz:

$$d\sigma = \frac{1}{2} \pi a^2 \sin \theta d\theta. \quad (3.77)$$

To'liq kesim

$$\sigma = \int d\sigma = \pi a^2 \quad (3.78)$$

shar ekvatorial kesimining yuzasiga teng. Sochilish kesimi nima uchun shunday deyilishini shu misolda tushunish mumkin – misoldagi sharda sochilish uchun zarracha shar ekvatorial kesimiga teng bo'lgan πa^2 maydonga tushishi kerak, aks holda sochilish umuman ro'y bermaydi.

3.5.4-misol. Kulon maydonida sochilish kesimini toping (**Rezerford formulasi**).

Kulon maydoni

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} \quad (3.79)$$

potensial bilan aniqlanadi. (3.50) formulaga shu potensialni qo'yib integral-lansa

$$\varphi_0 = -\rho \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv_{\infty}^2 r}}} = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2 \rho}\right)^2}} \quad (3.80)$$

ekanligi topiladi (r_{min} uchun (3.38) formulani bu punktda qo'llanilgan terminlarda yozib olish kerak). Bu yerdan ρ ni topish qiyin emas (ikkinchi tenglikka o'tishda (3.73) dan foydalandik):

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2}\right)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (3.81)$$

Kesim (3.52) bo'yicha topiladi:

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2}\right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (3.82)$$

Bu formulani fazoviy burchak tilida ham ifodalab olaylik:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{d\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (3.83)$$

Olingan formula **Rezerford formulasi** deyiladi.

3.5.5-misol. Cheksizlikda tezligi v bo'lgan elektron qo'zg'olmasdan turgan ikkinchi elektronga ρ nishon masofasi bilan tushdi. Ikkala elektronning to'qnashishdan keyingi tezliklarini toping.

(3.71) va (3.72) formulalar bo'yicha $m_1 = m_2 = m$ holda

$$v'_1 = \cos \frac{\theta_0}{2} v, \quad v'_2 = \sin \frac{\theta_0}{2} v \quad (3.84)$$

bo'ladi. (3.68) bo'yicha esa

$$\theta_1 = \frac{\theta_0}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \theta_0}{2}$$

ga ega bo'linadi. Ko'rinib turibdiki, zarrachalar orasidagi uchib ketish burchagi (l -sistemada) $\pi/2$ ga teng.

Burchak θ_0 bilan masalaning parametrlari (3.81) formula orqali bog'linadi:

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta_0}{2} = \frac{4E^2 \rho^2}{\alpha^2}. \quad (3.85)$$

l -sistemadagi burchaklar uchun esa quyidagilarni topish qiyin emas:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\alpha}{2E\rho}. \quad (3.86)$$

To'qnashishdan keyingi tezliklar quyidagicha aniqlanadi:

$$v'_1 = \frac{2E\rho v}{\sqrt{\alpha^2 + 4E^2 \rho^2}}, \quad v'_2 = \frac{\alpha v}{\sqrt{\alpha^2 + 4E^2 \rho^2}}. \quad (3.87)$$

Agar $E'_1 = mv_1'^2/2$ va $E'_2 = mv_2'^2/2$ larni hisoblab ularning yig'indisini olinsa bo'lishi kerak bo'lgan munosabat topiladi:

$$E'_1 + E'_2 = \frac{mv^2}{2} = E. \quad (3.88)$$

3.5.6-misol. $U = \frac{\beta}{r^2}, \beta > 0$ maydonda sochilish kesimini toping.

Berilgan potensialni yana (3.50) formulaga qo'yiladi va natijada quyidagi topiladi:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{2\beta}{mv_\infty^2}}} = \frac{\pi - \theta}{2}. \quad (3.89)$$

ρ ni θ orqali ifodalab, differensial kesim darhol topiladi:

$$d\sigma = 4\pi^3 \frac{\beta}{mv_\infty^2} \frac{\theta - \pi}{\theta^2(\theta - 2\pi)} d\theta. \quad (3.90)$$

3.5.7-misol. $U = -\frac{\beta}{r^2}, \beta > 0$ maydonda markazga tushish kesimini toping.

Markazga tushish uchun (3.34) shart bajarilishi kerak. Bizning holimizda

$$\beta > \frac{M^2}{2m}, \quad \text{yoki}, \quad \beta > \frac{mv_\infty^2}{2} \rho^2$$

bo'lishi kerak. Boshlang'ich tezligi berilgan bo'lganda nishon masofasi

$$\rho_{max} = \sqrt{\frac{2\beta}{mv_\infty^2}}$$

dan oshmagan zarrachagina markazga tushishi mumkin. Markazga tushish to'liq kesimi

$$\sigma = \pi \rho_{max}^2 = \frac{2\pi\beta}{mv_\infty^2} \quad (3.91)$$

ga teng bo'ldi. Shu yerda kesimning ma'nosiga yana bir qaytaylik: markaz atrofidagi ρ_{max} radiusli yuzani nishonga ololgan zarracha markazga tushadi, shu yuzali maydonchaga tushmagam zarracha markazga tushmaydi.

3.5.8-misol. Radiusi R va nassasi M bo'lgan sharning ustiga massasi $m \ll M$ bo'lgan va shu jism bilan Nyuton qonuni bo'yicha o'zaro ta'sir qiladigan zarrachaning tushish kesimini toping.

Ikkala jism orasidagi potensial

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

ko'rinishga ega. Ikkinchi jism birinchi jismning ustiga shunda tushgan bo'ladiki, qachonki $r_{min} < R$ bo'lsa, bu yerda r_{min} — kichik zarracha trayektoriyasi va katta jismning markazi orasidagi minimal masofa. r_{min} ni topish sharti o'sha eskicha: $E = U_{eff}(r_{min})$. Bu yerdan topilgan r_{min} ni R ga tenglash-tirishi kerak, ρ_{max} ni beradi:

$$r_{min} = R = -\frac{GM}{v_{\infty}^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{v_{\infty}^4} + \rho_{max}^2} \Rightarrow \rho_{max}^2 = R^2 + \frac{2RGM}{v_{\infty}^2}. \quad (3.92)$$

Shu bilan R radiusli tortish maydoni bor sharning ustiga tushish effektiv kesimi

$$\sigma = \pi \rho_{max}^2 = \pi R^2 \left(1 + \frac{2GM}{Rv_{\infty}^2} \right) \quad (3.93)$$

bo'lib chiqdi. 3.10-rasmda bu formulaga illustratsiya keltirilgan — R — radiusli massiv sharga tushish effektiv kesimi shar kesimidan bir oz kattadir.

Masalan, Yer shari uchun $2GM_{\oplus}/R_{\oplus} \approx 1,25 \cdot 10^8$,

Quyosh uchun $2GM_{\odot}/R_{\odot} \approx 3,8 \cdot 10^{11}$. Agar v_{∞} sifatida

quyidagi tezlikni olinsa $v_{\infty} \approx 10 \text{ km/sek} = 1 \cdot 10^6 \text{ cm/sek}$. Quyoshga tushish effektiv kesimi Quyosh kesimidan 38% katta bo'ladi. Yer shariga tushish effektiv kesimi esa Yer sharining kesimidan bor-yo'g'i $1,25 \cdot 10^{-4}\%$ ga katta bo'ladi.

3.5.9-misol.

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2} \quad (3.94)$$

maydonning markaziga tushish effektiv kesimini toping.

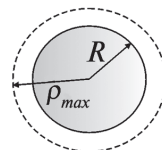
$\alpha, \beta > 0$ holdan boshlaylik. Effektiv potensialni topaylik:

$$U_{eff}(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2} + \frac{mv_{\infty}^2}{2} \frac{\rho^2}{r^2} = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta - E\rho^2}{r^2}. \quad (3.95)$$

Agar $\beta > E\rho^2$ bo'lsa, effektiv potensialning grafigi $r_0 = \frac{2(\beta - E\rho^2)}{\alpha}$ nuqtada musbat maksimumga ega bo'ladi (3.11-a rasimga qarang):

$$(U_{eff})_{max} = \frac{\alpha^2}{4(\beta - E\rho^2)}. \quad (3.96)$$

Markazga tushish uchun zarrachaning energiyasi shu maksimal qiymatdan katta bo'lishi kerak:



3.10- rasm.
**Radiusli sharga
tushish effektiv
kesimi.**

$$E > \frac{\alpha^2}{4(\beta - E\rho^2)}.$$

Bundan nishon masofasining maksimal qiymatini topish mumkin:

$$\rho_{max}^2 = \frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2}.$$

Aks holda zarracha maydon markaziga yaqinlasha olmaydi. Effektiv kesimni topdik:

$$\sigma = \pi\rho_{max}^2 = \pi\left(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2}\right). \quad (3.97)$$

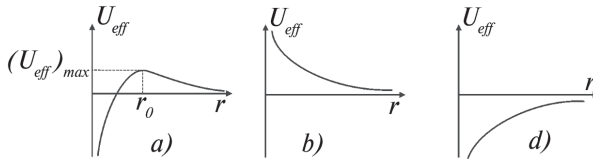
Kesim o'zining ta'rifi bo'yicha musbat son bo'lishi kerak. Buning uchun

$$E > \frac{\alpha^2}{4\beta} \quad (3.98)$$

bo'lishi kerak. Bu shart bajarilmasa $\sigma = 0$ bo'ladi.

Agar $\alpha > 0$, $\beta < 0$ bo'lsa, effektiv potensial faqat itarish kuchiga olib keladi — markazga tushish ro'y bera olmaydi (3.12-b rasmga qarang).

$0 < \beta < E\rho^2$ bo'lib $\alpha < 0$ bo'lsa, markazga tushish ro'y bera olmaydi — bu holda effektiv potensial r_0 nuqtada minimumga ega (bu holga 3.4-rasm mos keladi). Agar $0 < \beta > E\rho^2$, $\alpha < 0$ bo'lsa ixtiyoriy energiyali zarracha markazga tushadi (3.11-rasmga qarang).



3.12- rasm. (3.94)-potensialga oid.

3-bobga mashq va savollar

1. Quyidagi Lagranj funksiyali sistemalar uchun to'xtash nuqtalarini toping:

a) $L = \dot{x}^2 - \frac{1}{x^2}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{8};$

b) $L = \frac{\dot{x}^2 - x^2 + x}{x}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1;$

$$\text{c) } L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \cos x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{\sqrt{m}};$$

$$\text{d) } L = \dot{x}^2 - e^x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 2;$$

$$\text{e) } L = \dot{x}^2 - \ln x, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \ln e;$$

$$\text{f) } L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U_0 e^{x/a}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \geq \sqrt{\frac{2U_0}{m}};$$

$$\text{g) } L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{x}, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = \frac{2}{\sqrt{m}};$$

$$\text{h) } L = \dot{x}^2 - tg^2x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 2;$$

$$\text{k) } L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U_0 ch^{-2}kx, \quad E = -E_0 < 0.$$

2. Quyidagi Lagranj funksiyalari va boshlang'ich shartlar berilganda bir o'lchamli harakat tenglamalarini integrallang:

$$\text{a) } L = \dot{x}^2 - \frac{1}{x^2}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0;$$

$$\text{b) } L = \dot{x}^2 + e^x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1;$$

$$\text{c) } L = \frac{\dot{x}^2}{x} - x, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1;$$

$$\text{d) } L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + ax^4, \quad a > 0, \quad t = 0 \text{ da } E = 0.$$

3. Quyidagi potentsiallar uchun markazga eng yaqin va eng uzoq nuqtalarni toping:

$$\text{a) } U(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0; \quad \text{b) } U(r) = \frac{1}{r^4}; \quad \text{c) } U(r) = \frac{1}{2} \left(r^2 + \frac{1}{r^2} \right);$$

$$\text{d) } U(r) = -U_0 \left(1 + \frac{r^2}{c^2} \right)^{-1}.$$

4. Quyidagi potentsial maydonlardagi harakat integrallansin:

$$\text{a) } U(r) = -\frac{1}{2r^2}, \quad m=1; \quad \text{b) } U = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \right), \quad m=1.$$

5. Kulon (Nyuton) maydonida quyidagi saqlanuvchan kattaliklar borligi ko'rsatildi: energiya E , impuls momenti $\mathbf{M}$ va 3.3.1-misolda kiritilgan $\mathbf{A}$ vektori. Ular mustaqil emas balki ular orasida quyidagi ikkita munosabat borligini ko'rsating:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A}^2 = \frac{2E}{m} \mathbf{M}^2 + \alpha^2.$$

6. Oldingi misoldagi $\mathbf{A}$ vektor markazdan perigeliyga qarab yo'nalgan ekanligini ko'rsating.

7. $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$, $\alpha, \beta > 0$ maydonda harakat qilayotgan zarracha-ning markazga tushish vaqtini toping. Boshlang'ich masofa — R . Zarrachamiz markaz atrofida necha marta aylanishga ulguradi?

8. $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$, $\alpha, \beta > 0$ maydonda statik muvozanat nuqtasini toping.

Bu nuqta barqaror muvozanat nuqtasi bo'ladimi?

9. Quyidagi maydonlar berilgan:

$$\text{a) } U(r) = -\alpha e^{-kr}/r; \quad \text{b) } U(r) = -Ve^{-k^2 r^2}.$$

Impuls momenti M ning qanday qiymatlarida bu maydonlarda finit harakat qilish mumkin?

10. $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ maydonda harakat tenglamalarini qutb sistemasida yozing va ularni integrallang.

11. $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ maydonda m massali zarracha r_0 radiusli aylana orbita bo'yicha harakat qilmoqda. $n < 2$ bo'lganda bu orbita kichik tebranishlarga nisbatan barqaror bo'lishini ko'rsating. Javobni 8-masala bilan taqqoslang.

12. $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ maydonda R masofadan markazga tushish vaqtini toping. Zarrachaning boshlang'ich tezligi nolga teng.

13. Cheksizlikdan v tezlik va p nishon parametri bilan m_1 massali zarracha m_2 massali qo'zg'olmasdan turgan zarrachaga tushmoqda. Ular

orasidagi o'zaro ta'sir potentsiali $U(r) = \alpha/r^n, \alpha > 0$. Zarrachalar orasidagi eng kichik masofani toping.

14. Boshida qo'zg'olmasdan turgan m massali zarrachaga huddi shunday massali zarracha cheksizlikdan v tezlik bilan tushmoqda. Zarrachalarning o'zaro potentsiali $U = \alpha/r^n$, to'qnashish — markaziy. Tushayotgan zarra-
chaning to'xtash nuqtasini toping.

15. $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}, \alpha, \beta > 0$ maydonda zarrachaning trayektoriyasini

toping. Perigeliyni ($r = r_{\min}$ nuqtami) ketma-ket o'tilgandagi burchak farqi $\Delta\varphi$ ni toping. Radial tebranishlar davri T_r va to'liq aylanish davri T_0 ni toping. Trayektoriya yopiq bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?