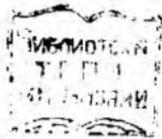


Дарсликда статика, кинематика, нуқта ва система динамикаси, қаттиқ жисм динамикаси, аналитик механика элементлари ва кичик тебранишлар назарияси баён этилган.

Китобда механиканинг асосий тушунчалари ва қонунилари билан бирга инженерлик ихтисослигида учрайдиган бошқа масалалар ҳам ёритилган. Яси фермаларни ҳисоблаш, ўзгарувчан массали жисмлар механикаси, Эйлернинг динамик тенгламалари, Гамильон—Остроградский принципи, динамиканинг каноник тенгламалари, устувор мувозанат ва устувор ҳаракат назариясининг асосий элементлари, механик системанинг кичик тебранишлари ана шулар жумласидандир.

Дарсликда 130 дан ортиқ тирик масалалар батафсил ечиб кўрсатилган.

Мазкур китоб олий техника ўқув юр்தларининг студентлари учун мўлжалланган, шундан университетларнинг амалий математика ихтисосликлари студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.



© «Ўқитувчи» нэприсети, 1990

Р 1603020000 - 142
353 (04) 90 инф. письмо

ISBN

СЎЗ БОШИ

Ўзбек тилида назарий механикадан тўлиқ дарслик илк бор ЎзССР ФАнинг академиги М. Т. Ўрозбоев томонидан ёзилган ва охириги нашри 1966 йилда чоп этилган. Ўтган давр ичида назарий механиканинг қўлланиш соҳалари янада кенгайди. Шу муносабат билан ўзбек тилида ҳозирги замон талабларига жавоб берадиган ва янги программага мос келадиган дарслик ёзиш эҳтиёжи тугилди.

Ушбу китобга муаллифларнинг олий ўқув юрталарида ўқиган лекциялари асос қилиб олинди.

Дарсликни профессор Т. Рашидов ва доцент Ш. Шозиётов ёзишган. Кинематика бўлимидаги 8.1—8.5, 9.2, 9.5, 10.9, 11.1, 11.6, 11.8, 12.1-параграфлар ҳамда 8.3, 8.7, 8.9—8.11, 9.1—9.3, 10.2, 10.3, 10.5, 11.1—11.3-масалаларнинг ечимини Қ. Б. Мўминов ёзган.

Муаллифлар китоб қўлёзмасини сиришклар ўқиб чиқиб, фойдали маслаҳатлари учун физика-математика фанлари доктори, профессор А. Ғ. Азизов, техника фанлари докторлари профессорлар Г. И. Болдинский, Т. Мавлонов, профессор Т. Ш. Ширинкуловларга ҳамда қўлёзманни таҳрир қилиб босмага тайёрлаш жараёнида жонкуярлик кўрсатган махсус редактор Э. В. Эргашев ва нашриёт редактори А. Аҳмедовга чуқур миннатдорчилик билдирадилар.

Дарслик сифатини оширишга қаратилган барча танқидий фикр-мулоҳазаларни миннатдорчилик билан қабул қиламиз.

Муаллифлар

КИРИШ

*«Қим ҳаракат қонунлари билан табиқат
бўлмас, у табиқатни ўрчима олмайди».*

Г. Галилей

Ҳаракат материянинг мавжудлик формаларидан бири бўлиб, унинг энг муҳим характери хусусиятини ифодалайди. Материя ва ҳаракат тушунчаларининг муфассал таърифи марксизм-ленинизм классиклари томонидан ифодалаб берилган. «Материя, — деб ёзган эди В. И. Ленин, объектив реалликни ифодалайдиган философик категория бўлиб, бу объектив реалликни инсон ўз сезгалари билан идрок қилади, бу объектив реаллик бизнинг сезгаларимизга боғлиқ бўлмаган ҳолда мавжуддир, бизнинг сезгаларимиз ундан ҳошия олади, сураг олади ва уни аке эгтиради»*.

Материя ҳаракати деганда жисмларнинг оддий кўчишидан тортиб, иссиқлик, химиявий, электромагнит, биологик ва бошқа ўзгаришларда содир бўладиган мураккаб процесслар тушунилади. «Сўзнинг энг умумий маъносиде қараладиган, яъни материянинг яшаш усули сифатида, материяга индан ҳош арибут сифатида тушуниладиган ҳаракат оддий жой алмашишдан тортиб то тафаккурғача қонотда содир бўладиган ҳамма ўзгаришлар ва процессларни ўз ичига олади»**.

Ҳаракатнинг оддий турларидан бири механик ҳаракатдир. Вақт ўтиши билан моддий жисмларнинг бир-бирларига нисбатан кўчишига *механик ҳаракат* дейилади.

Моддий жисмларнинг ўзаро таъсири ва механик ҳаракати ўрганиладиган бир қатор фанлар механика номи билан боғлиқдир. Машина ва механизмлар ҳаракати ўрганиладиган амалий механика, суюқликлар ва уларга боғирилган жисмларнинг ҳаракати ўрганиладиган гидромеханика, газсимон жисмларнинг ҳаракати ва қаттиқ жисмларнинг газсимон муҳитдаги ҳаракати ўрганиладиган аэромеханика, тирик организмларнинг механик хоссалари ва уларда содир бўладиган механик ҳодисалар ўрганиладиган биомеханика каби фанлар ана шулар жумласидандир. Турли нишоотлар, машина ва механизм қисмларини гадиқ қилиш ҳамда лойиҳалашнинг умумий усуллари ўрганиладиган техника фанлари материаллар қаршилиги (қурилиш механикаси, машина деталлари) ҳам механикага тааллуқлидир.

Назарий механика моддий жисмларнинг бир-бирига таъсири ва механик ҳаракатнинг умумий қонунлари ҳақидаги фандир.

* Ленин В. И. Материализм ва эмпириокритицизм. — Тўла асарлар тўплами, 18-т., 146-бет.

** Энгельс Ф. Табиат диалектикаси. —Т., «Ўзбекистон», 1983, 50-бет.

Механикада моддий жисмлар ўзаро таъсирнинг миқдорий ўлчовига куч дейилади. Яқин вақтгача назарий механикада асосан планеталарнинг ўзаро тортилиш кучи, муҳит (тулроқ, ҳаво ёки сув)нинг қаршилик кучи, суяқтик ёки газнинг босими, жисмларнинг бир-бирига тегиб турадиган сиртида ҳосил бўладиган кучлар каби механик табиатга эга бўлган кучлар таъсиридаги ҳаракатлар текширилар эди. Ҳозир ядро энергетикаси, космонавтика ва электрониканинг ривожланиши натижасида механикада турлича физик табиатга хос: электромагнит, инерциялик, ўрungaик ва химиявий хусусиятларга эга бўлган кучлар таъсиридаги системаларнинг ҳаракатини ўрганишга оид масалалар қўйилмоқда. Масалан, электр двигатели якорининг ҳаракатини ўрганишда унга электр майдонининг таъсир кучини эътиборга олиш керак; товушдан тез учувчи самолётларнинг ҳаракати текширилаётганда, аэродинамик кучлардан ташқари, ҳаво билан самолёт қисмлари орасида инерциялик алманиши натижасида ҳосил бўладиган газлар молекулаларининг диссоциация кучларини ҳам ҳисобга олиш керак; Ер суяғий йўлдошларининг ҳаракати ўрганилаётганда Ернинг тортиш кучи ва аэродинамик кучлардан ташқари, Ер магнит майдонининг таъсир кучи ва йўлдош билан космосдаги зарядланган зарраларнинг ўзаро таъсир кучларини ҳисобга олиш керак; реактив двигателнинг тортиш кучини ҳисоблашда ёпиш процессида вужудга келадиган химиявий ва термодинамик ҳодисаларни эътиборга олиш керак. Механикада мазкур кучларнинг миқдорий ўзгаришининга асосий аҳамиятга эга бўлиб, уларнинг физик табиати ўрганилмайди.

Шундай қилиб, ҳозирги замон механикаси физика, математика, агрономия, химия, биология каби фанлар билан чамбарчас боғланган ҳолда ривожланмоқда. Шунингдек, техниканинг барча соҳаларида, айниқса, машинасозлик, асбобсозлик, қурилиш, автоматика, кибернетика ва космонавтиканинг ривожланишида назарий механика алоҳида ўрнини эгаллайди.

Жисмнинг барча хоссаларини ҳисобга олган ҳолда содир бўладиган механик ҳодисаларни назарий ва амалий жиҳатдан текшириш анча мураккабдир. Шу сабабли масаланинг қандай қўйилишига қариб, механикада жисмнинг айрым хусусиятлари эътиборга олинмайди. Масалан, жисмнинг деформацияланишини эътиборга олмай, абсолют қаттиқ жисм тушуниб қаринилади. Худди шунингдек, моддий нуқта, идеал суяқтик каби тушунмалар ҳам соддалаштирилган моделга таълуқлидир. Механикада бундай абстракт усулдан кенг фойдаланилади.

Диалектик материализмнинг билиш назарияси ленинча инъикос назариясига асосланади. Бу назарияга кўра, «... бизнинг ташқарида нарса-лар мавжуддир. Бизнинг идрок ва тасаввурларимиз бу нарса-ларнинг образларидир. Бу образларни текшириш, уларнинг чинларини сохталаридан ажратини практика орқали қилинади»*.

* Ленин В. И. Материализм ва эмпириокритиқ изм. — Тўла асарлар тўплами, 18-т., 121-бет.

Назарий механиканинг асосий қонунилари ҳам кузатиш ва практика натижаларига асосланади.

Ҳозирги замон техникаси кўпгина проблемаларни майдонга ташилади. Сувда катта (100 м/с ва ундан катта) тезликда ҳаракат қиладиган жисмларга қаршилик кучини камайтириш; катта босим ва температуралар таъсиридаги материаллар хусусиятини аниқлаш; зилзилага бардош берадиган иншоотлар қуриш, Ернинг суғий йўлдошларини, планеталараро космик кемаларни учирish каби проблемалар ана шулар жумласидандир. Бу проблемаларни ечишда техника фанлари қаторида назарий механика ҳам муносиб ўрнини эгаллайди.

Биз ўрганадиган назарий механика Галилей — Ньютон қонуналарига асосланган бўлиб, одатда, *классик механика* деб аталади. Классик механикада вақт ва фазо жисмларнинг ҳаракатига боғлиқ эмас деб қаралади. Шунингдек, жисмнинг массаси унинг тезлигига боғлиқ бўлмаган ўзгармас миқдор деб қаралади.

XIX асрнинг охири ва XX асрнинг бошида физикада ўтказилган тадқиқотлар классик механика қонуналарини ёруғлик тезлиги (300000 км/с) га яқин тезлик билан ҳаракатланувчи микрозардалар ва жисмлар учун қўллаш мумкин эмаслигини кўрсатди. XX аср бошида А. Эйнштейннинг (1879 — 1955) нисбийлик назариясига асосланган релятивистик механика бунёдга келди. Нисбийлик назарияси ёрдамида фазо билан вақт ҳамда масса билан энергия орасидаги қонуний боғланишлар ойдинлаштирилди ва классик механика қонуналари ўрнили бўладиган чегара аниқланади. Ҳозирги замон техникасида кўпчилик ҳолларда учрайдиган тезликлар ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлгани учун классик механика қонуналаридан ҳаётда учрайдиган реал масалаларни ҳал қилишда самарали фойдаланиш мумкин.

Механика тарихига оид қисқача тарихий маълумотларни келтирамиз. Механикага доир дастлабки илмий асарларни қадимги юнон олимлари ёзганлар. Жумладан, эраміздан илгари 287 — 212 йилларда яшаган Архимед жисмларнинг мувозанати ва оғирлик марказини аниқлаш, шунингдек, сувда сузадиган жисмларнинг мувозанатига оид назарияларни ишлаб чиққан.

1-11) Механиканинг ривожланишида Шарқ олимлари олиб борган илмий ишлар алоҳида ўрнини эгаллайди. Абу Райҳон Беруний (973 — 1048), Абу Али ибн Сино (980 — 1037), Улуғбек Муҳаммад Тарағай (1394 — 1449) каби мутафаккирлар ана шулар жумласидандир*. Улар математика ва астрономия бўйича қатор илмий ишларнинг муаллифлари бўлишлари билан бирга механикага ҳам муносиб ҳиссаларини қўшганлар. Беруний ва Ибн Сино асарларида умуман ҳаракат (шу жумладан, механик ҳаракат) ҳамда планеталарнинг ҳаракати ҳақида ажойиб фикрлар баён этилган. Ибн Сино таърифига кўра, жисм ҳолатининг ўзгариш бориши ҳаракатни ифода-лайди; жисмларнинг фазодаги ҳаракати (механик ҳаракат) эса бу ҳаракатнинг хусусий ҳолидир. Улуғбек планеталар ҳаракатини,

* Григорьев А.Т. Механика от античности до наших дней. 2-изд., — М., Наука, 1974.

жумладан, Қуёш ва Ойнинг ҳаракатини катта аниқликда ҳисоблай олган.

Механика фанининг ривожланишида поляк астрономи Н. Коперник (1473 — 1543) томонидан кашф қилинган гелиоцентрик система алоҳида аҳамиятга эга. Коперник ўз системасида Ер ҳам бошқа сайёралардек Қуёш атрофида ва ўз ўқи атрофида айланади, деган фикрини иллари сурган.

Италиялик олим Галилео Галилей (1564 — 1642) инерция қонунини кашф этган. Бундан ташқари, Галилей ўзи ўтказган тажрибалар асосида жисмнинг оғма текисликдаги ҳаракати, горизонтга маълум бурчак остида отилган жисмнинг ҳаракати, эркин тушиш ҳақидаги қонунларини кашф қилган.

Механиканинг асосий қонуналарини машҳур инглиз олими Исаак Ньютон (1643 — 1727) 1687 йилда кашф қилган. Ньютоннинг бутун олам тортилиш қонуни механикада алоҳида ўрин эгаллайди. Ньютон қонуллари ҳозирги кунда ҳам ўз актуаллигини йўқотмаган.

Рус академиги Л. Эйлернинг (1707 — 1783) механикага оид кашфиёtlари 1736 йили босмадан чиққан яқини томлик «Аналитик механика» китобида баён қилинган.

Француз олими Ж. Даламбернинг (1717 — 1783) 1743 йилда нашр қилинган «Динамика бўйича трактат» асарида боғланишдаги механик системалар ҳаракати ҳақидаги масалаларни унинг номи билан аталувчи принцип асосида ениш методикаси кўрсатилган.

Француз олими Ж.Л. Лагранжнинг (1736 — 1813) «Аналитик механика» асари (1788) назарий механика тараққиётида алоҳида ўрин эгаллайди. Бу асарда механика масалаларига мумкин бўлган кўчани принципини қўлаш баён этилган.

М. В. Ломоносов (1711 — 1765) физика-математика фанлари, жумладан, механика фани соҳасида олиб борган ажойиб текширишлари билан машҳурдир. Ломоносов материя бўлмаса, ҳаракат ҳам бўлмаслигини таъкидлаб, материя ва ҳаракатнинг сақланиш қонунини кашф этган.

Механика фанининг ривожланишига катта ҳисса қўшган рус олимларидан М. В. Остроградский (1801 — 1862) аналитик механика соҳасидаги илмий ишлари билан шуҳрат қозонган; П. Л. Чебишев (1821 — 1891) машина ва механизмлар назариясига асос солган; С. В. Ковалевская (1850 — 1891) қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи қаттиқ жисм тенгламаларини интеграллаш соҳасидаги илмий ишлари билан ном чиқарган; Н. Е. Жуковский (1847 — 1921) аэродинамиканинг ривожланишида муҳим аҳамиятга эга бўлган қатор асарларнинг муаллифи, «рус авиациясининг отасидир» (В. И. Ленин); К. Э. Циолковский (1857 — 1935) ракета назарияси ва суяқ ёниткида ишлайдиган ракета двигатели назариясига асос солган; И. В. Мещерский (1859 — 1935) асарлари ўзгарувчан массали жисмларнинг ҳаракати, реактив техника ва осмон механикасининг қатор проблемаларини ҳал қилишда илмий асос бўлди; С. А. Чаплигин (1869 — 1942) аэрогидродинамика ҳамда боғланишдаги механик системаларнинг ҳаракатини текшириш соҳасидаги илмий ишлари билан машҳурдир; А. Н. Крылов (1863 — 1945) кемаларнинг устувор ҳаракати

ва ташқи баллистикага оид муҳим илмий ишлари билан танилган; С. П. Королев (1906 — 1966) раҳбарлигида баллистик ва геофизик ракетаalar, Ернинг сунъий йўлдошлари, «Восток», «Восход» космик кемалари яратилган; М. В. Келдишнинг (1911 — 1978) аэрогидродинамика, тебранишлар назарияси ва космоавтика соҳаларидаги тадқиқотлари алоҳида аҳамиятга эга; А. А. Ильюшин (1911 йилда туғилган) эластиклик ва пластиклик назарияси, аэрогидродинамика, полимерлар механикаси ва узоқ муддатли мустаҳкамлик назариясига оид илмий ишлари билан машҳурдир; А. Ю. Ишлинский (1913 йилда туғилган) деформацияланувчи муҳит механикаси ва гироскопик асбоблар тўғрисида бир неча назария яратди.

(3) Механика фанининг ривожланишига улкан ҳисса қўнган ўзбек олимларидан М. Т. Ғрозбсев (1906 — 1971) ни механикаси ва иншоотларнинг сейсмик мустаҳкамлиги назариясига оид қатор илмий ишларининг муаллифидир; Х. А. Раҳматуллин (1909 — 1988) иншоотлар заминини ҳисоблашда ва уларни лоғичлашда, кема зирҳи мустаҳкамлигини аниқлашда қўлланиладиган «Раҳматуллин тулақнилагин» номини олган тулақнилар назариясини кашф қилди; В. Қ. Қобулоевнинг (1921 йилда туғилган) туташ муҳитлар механикаси масалаларини алгоритмлаш, автоматик бошқариш системаларини яратиш соҳасидаги илмий ишлари муҳим амалий аҳамиятга эга.

Ҳозирги даврда механиканинг кўнгина масалалари электрон ҳисоблаш машиналаридан фойдаланиб ҳал этилмоқда. Механика соҳасига оид илмий текширишлар СССР ва иттифоқдош республикалар Фанлар академиялари қошидаги механика институтларида ҳамда олий ўқув юртларида олиб бориламоқда.

Механика фанининг ривожланишида совет олимларининг хизмати ниҳоятда катта. Уларнинг илмий ишларини бир-бири саҳифада баён этиш мушкуллигида, механика тарихи билан қизиқувчиларни бошқа манбаларга мурожаат қилишларини тавсия этамиз*.

Назарий механика курси статика, кинематика ва динамикадан иборат уч қисмга бўлинади.

Статикада жисмларнинг мувозанати, уларга қўйилган кучларни содда ҳолга келтириш кўли масалалар билан шугулланилади.

Кинематикада жисмларнинг ҳаракати геометрик нуқтан назардан, яъни ҳаракатли вужудга келтирувчи сабабга боғламай ўрганилади.

Динамикада мўддий жисмларнинг ҳаракати унга таъсир этувчи кучларга беғлиқ равишда текширилади.

СССРда 1980 йил 1 январдан бошлаб Ўзбекистонда Ёрдан Кенгаши стандарти бўйича СИ СЭЗ 1952 — 78 га асосан Халқаро бирликлар системаси (СИ)га ўтилган. Ушбу дарсликда барча катталиклар СИ бирликлар системасида берилган. Қитоб охирида илова қилинган жадвалда асосий геометрик, статик, кинематик ва динамик катталикларнинг ўлчов бирликлари келтирилган.

* 1. Развитие механики в СССР, — М., «Наука», 1967.

2. Гринберг А. Г., Фрадкин Б. П. Механика в СССР, — М., «Наука», 1977.

I ҚИСМ. ҚАТТИҚ ЖИСМ СТАТИКАСИ

«Ҳар қандай мувозанат фақат нисбий ва вақтинчадир».

Ф. Энгельс.

1-БОБ. СТАТИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ ВА АКСИОМАЛАРИ

1.1-§. Статиканинг асосий тушунчалари

Қадимги юнон олими Архимед статиканинг асосчиларидан бири ҳисобланади. У параллел кучлар таъсиридаги рычагнинг мувозанати, жисмларнинг оғирлик марказини аниқлаш назариясини яратиш билан бирга гидростатикага ҳам асос солган. Геометрик статиканинг ривожланишига француз олимлари П. Вариньон (1654—1722) ва Л. Пуансо (1777—1859) катта ҳисса қўшдилар.

Аналитик статиканинг асосчиси Ж. Лагранж ҳисобланади. Статиканинг аксиоматик методларини ривожлантиришда рус олимлари Н. Е. Жуковский ва С. А. Чаплигинларнинг роли каттадир.

Статиканинг асосий тушунчаларидан бири қаттиқ жисмдир. Кучлар таъсирида бўлган жисмнинг ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги масофа ўзгармаса, бундай жисмга *абсолют қаттиқ жисм* дейилади. Бошқача айтганда, абсолют қаттиқ жисмнинг геометрик шакли ўзгармайди (деформацияланмайди). Келгусида қаттиқ жисм (ёки жисм) деганда абсолют қаттиқ жисм тушунилади.

Назарий механикада ўлчамлари эътиборга олинмайдиган даражада кичик бўлган жисмга *моддий нуқта* дейилади. Берилган жисмни тасвирловчи моддий нуқта геометрик нуқтадан фарқли равишда берилган жисмнинг массасига тенг массага ҳамда бошқа жисмларга ўзаро таъсир этиш хусусиятига эга бўлади*.

Ҳар қандай жисмни моддий нуқталар тўпламидан ташкил топган деб қараш мумкин. Мазкур нуқталар орасидаги боғланиш жисмнинг хусусиятларига боғлиқ бўлади.

Кучнинг жисмга таъсири куч қўйилган нуқта, унинг йўналиши ва миқдори билан аниқланади. *Кучнинг йўналиши* деганда тинч ҳолатда турган эркин жисмнинг мазкур куч таъсиридан олган ҳаракат йўналиши тушунилади. *Кучнинг миқдорини* (модулин) аниқлаш учун уни куч бирлиги сифатида қабул қилинган бирор катталик билан солиштирилади.

Куч — вектор катталик бўлиб, уни чизмада узунлиги маълум масштабда куч миқдорини, стрелканинг йўналиши куч йўналишини ифодаловчи вектор кесма тарзида тасвирланади. Жисмнинг *A* нуқта-

* Чизмада моддий нуқтани геометрик нуқта тарзида тасвирлаймиз.



1.1-расм.

сига \vec{F} куч қўйилган бўлсин (1.1-расм). Куч вектори йўналтирилган BC тўғри чизиққа *кучнинг таъсир чизиғи* дейилади.

Агар жисмга бир нечта $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсир этса, бундай кучлар тўпламига *кучлар системаси* дейилади ва $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ деб белгиланади.

Таъсир этаётган $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системасини бошқа бирор $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m)$ кучлар системаси билан алмаштиришда жисм ҳолати ўзгармаса, бундай кучлар системасига *эквивалент кучлар системаси* дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \approx (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m).$$

Агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системаси битта \vec{R} кучга эквивалент, яъни

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \approx \vec{R}$$

бўлса, бундай кучга берилган кучлар системасининг *тенг таъсир этувчиси* дейилади.

Кучлар системаси таъсиридаги жисм тинч ҳолатда қолса ёки инерцион ҳаракатда бўлса (масалан, жисмнинг барча нуқталари ўзгармас ва бир хил тезлик билан ҳаракатланса), жисмнинг бундай ҳолати *мувозанат ҳолат* дейилади. Кучлар системаси таъсиридаги жисм мувозанат ҳолатида бўлса, бундай кучлар системасига *мувозанатлашган кучлар системаси* ёки *нолга эквивалент система* дейилади:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \approx 0.$$

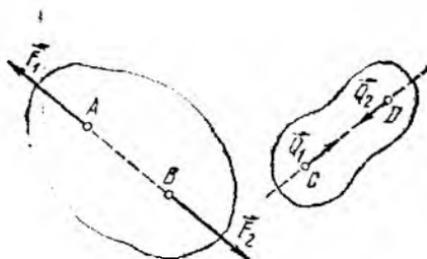
Статика бўлимида жисмнинг мувозанати деганда унинг тинч ҳолати тушунилади.

1.2- §. Статика аксиомалари

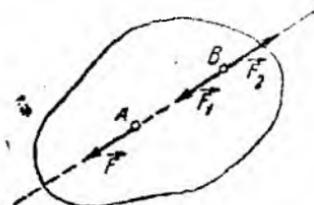
Статикада жисмга (ёки ўзаро таъсир этувчи жисмларга) қўйилган кучлар ҳақидаги умумий қонушлар тажриба ва кузатишлар ёрдамида аниқланган қуйидаги аксиомалар тарзида берилади.

1-аксиома. *Абсолют қаттиқ жисмга қўйилган иккита куч мувозанатлашиши учун бу кучлар миқдор жаҳатдан тенг, йўналиши эса кучлар қўйилган нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ бўйича қарама-қарши томонга йўналган бўлиши зарур ва етарлидир.*

1.2-расмда $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \approx 0$ ва $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \approx 0$ шартларни қаноатлантирувчи иккита кучлар системаси тасвирланган. Бундай кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлади.



1.2- расм.



1.3- расм.

1- аксиома энг содда мувозанатлашган кучлар системасини ифода-
далайди, чунки тажрибаларнинг кўрсатишича битта куч таъсиридаги
эркин жисм мувозанатда бўла олмайди.

2- аксиома. Берилган кучлар системасининг абсолют қаттиқ
жисмга таъсирини ўзгартирмай, бу кучлар системаси қаторига
мувозанатлашган кучлар системасини қўйиши ёки ундан айириши
мумкин.

Бу аксиомага кўра, агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системасига
 $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \in 0$ системани қўшсак, у ҳолда

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \in (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$$

муносабат ўринли бўлади. Худди шунингдек, $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$
 \vec{Q}_2 кучлар системасида $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \in 0$ бўлса,

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \in (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_l)$$

ҳам ўринлидир.

Натижа. Кучни унинг таъсир чизиғи бўйлаб жисмнинг ихти-
ёрий нуқтасига қўчириши билан кучнинг жисмга таъсири ўзгар-
майди.

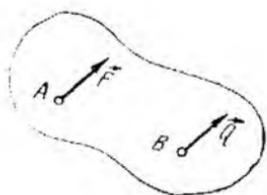
Исбот. Жисмнинг A нуқтасига қўйилган \vec{F} кучнинг таъсир чи-
зиғида ихтиёрий B нуқтани олиб, шу нуқтага миқдорлари $F =$
 $= F_1 = F_2$ бўлган ҳамда шу чизиқда ётувчи $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \in 0$ системани
қўямиз (1.3- расм). У ҳолда 2-аксиомага асосан

$$\vec{F} \in (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2).$$

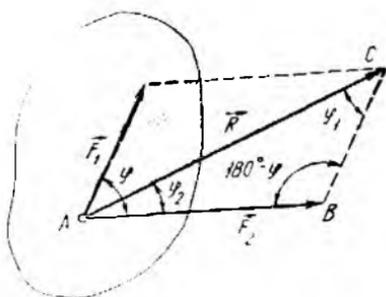
1-аксиомага асосан $(\vec{F}, \vec{F}_2) \in 0$ бўлганидан уни ташлаб юборсақ,
 A нуқтага қўйилган \vec{F} куч ўрнига шу кучнинг таъсир чизиғидаги
 B нуқтада ётувчи $\vec{F}_1 = \vec{F}$ кучни олаемиз. ■*

Исботланган натижадан кўрамизки, абсолют қаттиқ жисмга қў-
йилган куч сирпанувчи векторни ифодалайди.

*■ белгиси «исбот тугади» деган иборани ифодалайди.



1.4- расм.



1.5- расм.

Бу натижага кўра иккита \vec{F} ва \vec{Q} кучлар ўзаро эквивалент бўлиши учун $\vec{F} = \vec{Q}$ шарт етарли бўлмай, бу шартдан ташқари мазкур кучларнинг таъсир чизиқлари ҳам устма-уст тушиши керак. 1.4-расмда ўзаро тенг, лекин эквивалент бўлмаган кучлар кўрсатилган.

3-аксиома (параллелограмм аксиомаси). Жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган, бир тўғри чизиқда ётмаган икки кучнинг тенг таъсир этувчиси миқдор ва йўналиши жиҳатидан шу кучларга қурилган параллелограммнинг кучлар қўйилган нуқтадан ўтувчи диагонали билан ifodalанади.

Жисмнинг бирор A нуқтасига бир-бири билан φ бурчак ташкил этувчи \vec{F}_1 ва \vec{F}_2 кучлар қўйилган бўлсин (1.5-расм). Бу кучларнинг тенг таъсир этувчисини \vec{R} билан белгиласак, аксиомага кўра,

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

ABC учбурчакдан косинуслар теоремасига асосан тенг таъсир этувчисининг модулини аниқлаймиз:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \varphi)}$$

ёки

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi}. \quad (1.2)$$

\vec{R} ning \vec{F}_1 ва \vec{F}_2 билан ташкил қилган бурчаклари φ_1 ва φ_2 ни аниқлаш учун синуслар теоремасидан фойдаланамиз:

$$\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \varphi)},$$

бундан

$$\sin \varphi_1 = \frac{F_2}{R} \sin \varphi, \quad \sin \varphi_2 = \frac{F_1}{R} \sin \varphi. \quad (1.3)$$

4-аксиома (*Ньютоннинг учинчи қонуни.*) *Иккита жисм бир-бирига миқдор жиҳатдан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган кучлар билан ўзаро таъсир этади.*

Масалан, Қуёшнинг Ерни тортувчи кучини \bar{T} билан белгиласак, Ернинг Қуёшни тортувчи кучи — \bar{T} га тенг бўлади, яъни улар миқдор жиҳатдан бир-бирига тенг бўлиб, бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган.

5-аксиома (*қотиш принципи*). *Агар деформацияланадиган жисм мувозанат ҳолатида абсолют қаттиқ жисмга айланса, унинг мувозанати ўзгармайди.*

Масалан, эгиловчан сим мувозанат ҳолатида абсолют қаттиқ стерженга айланса, унинг мувозанати ўзгармайди.

5-аксиомадан фойдаланиб, кучлар системаси таъсирдаги абсолют қаттиқ жисмнинг мувозанат шартларини деформацияланадиган жисмлар учун ҳам татбиқ этиш мумкин. Лекин бу шартлар деформацияланувчи жисмлар учун фақат зарурий шартларнинггина ифода қилади. Ҳақиқатан ҳам, 1-аксиомани учларига кучлар қўйилган абсолют қаттиқ стержень ҳамда эгиловчан ва чўзилмайдиган сим мувозанатли учун татбиқ қилсак, ҳар иккала ҳолда бу кучлар миқдорларининг тенг бўлиши ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналиши зарурий шартни ифода қилади, лекин бу шартлар симнинг мувозанати учун етарли бўлмайди. Эгиловчан ва чўзилмайдиган сим мувозанатда бўлиши учун юқоридаги шартларнинг, симга унинг қўйилишига интилувчи кучлар таъсир этади, деган қўшимча шарт билан тўлдирishi керак.

1.3-§. Боғланиш ва боғланиш реакциялари

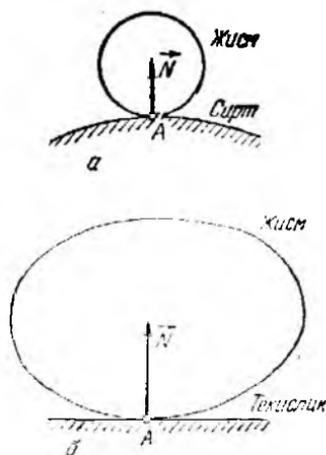
Берилган жисмнинг кўчинини бошқа жисмлар билан чекланган бўлса, у *боғланишдаги жисм* дейилади. Берилган жисмнинг кўчинини чекловчи жисмга *боғланиш* дейилади. Машина ёки механизм қисмларининг ҳаракати олдиндан чекланган бўлади. Масалан, ички ёнув двигатели цилиндр ичида ҳаракатланаётган поршень тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилади. Бунда поршень боғланишдаги жисмдир. Цилиндр ва шатуи эса боғланиш вазифасини бажаради.

Боғланишнинг жисмга кўрсатадиган таъсирини *боғланиш реакция кучи* дейилади. Боғланишдаги жисмларнинг ҳаракати қайси йўналишда чекланган бўлса, боғланиш реакция кучи шу йўналишга тескари йўналади.

Ҳаракати боғланишлар билан чекланмаган жисм *эркин жисм* дейилади. Масалан, ҳавода учаётган самолётни эркин жисм деб қараш мумкин.

Статикада эркин жисмнинг мувозанат шартлари чиқарилади. Бу шартларни боғланишдаги жисмга татбиқ этиш учун боғланишлар аксиомасидан фойдаланилади.

Боғланишлар аксиомаси (*боғланишдан бўйинатиш принципи*). *Боғланишларнинг берилган жисмга таъсирини реакция кучи билан алмаштириб, ҳар қандай боғланишдаги жисмни эркин жисм деб қараш мумкин.*



1.6-расм.

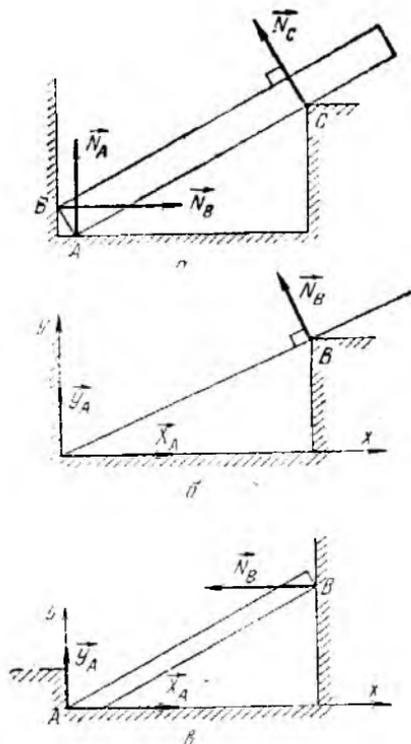
Боғланишдаги жисмларнинг бир-бирига тегиб турган қисмидаги ишқаланиш кучини ҳисобга олмай, боғланишларни қуйидаги учта гуруҳга ажратиб мумкин.

1. Силлиқ сирт воёта-сида боғланишлар. а) Жисм силлиқ сиртга A нуқтада таянади (1.6-расм, а). Силлиқ сирт

жисмнинг шу сиртга ўтказилган нормал бўйича ҳаракатини чеклайди. Шу сабабли силлиқ сиртнинг реакция кучи \vec{N} сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналади. Бу кучга *нормал реакция кучи* дейилади. Хусусан, *силлиқ текисликнинг реакция кучи* текисликка перпендикуляр йўналади (1.6-расм, б).

б) Балка A нуқтада полга, B нуқтада вертикал деворга ва C нуқтада икки ёқли бурчак қиррасига таянади (1.7-расм, а). Полнинг ва вертикал деворнинг \vec{N}_A , \vec{N}_B реакция кучлари A ва B нуқталарда мос равишда пол ва деворга ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади. Икки ёқли бурчакдан ташкил топган қирранинг реакция кучи \vec{N}_C эса C нуқтада балкага ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади.

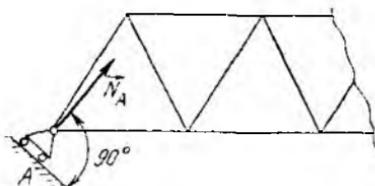
Агар балканинг қўндаланг ўлчамлари ҳисобга олинмаса, уни битта A нуқтага таянган деб қараш мумкин (1.7-расм, б). Бу ҳолда реакция кучи A нуқтадан ўтади, лекин қайси томонга йўналгани маълум эмас. Масала ечилишда бундай реакция кучини танлаб олинган координата ўқлари бўйича йўналган \vec{X}_A , \vec{Y}_A ташкил этувчиларга ажратиб, жисмнинг мувозанат шартларидан аниқланади. A



1.7-расм.

тўсиқнинг реакция кучи ҳам ташкил этувчиларга ажратилиб, шунга ўхшаш аниқланади (1.7-расм, в).

в) Жисм қўзғалмас текисликка галтаклар воситасида таяниб турса (1.8-расм), A нуқтадаги реакция кучи \vec{N}_A шу текисликка перпендикуляр йўналади. Шундай қилиб, қўзғалувчи таянчнинг реакция кучи таянч текислигига перпендикуляр йўналади.



1.8-расм.

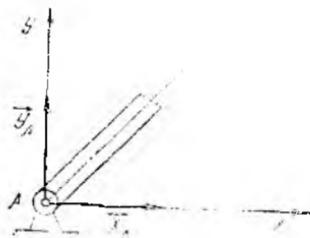
II. Шарнирли боғланишлар. Умумий ўқ ёки нуқта атрофида айлана оладиган иккита жисм орасидаги боғланишга шарнир дейилади.

г) Цилиндрик шарнир. Қўзғалмас асосга ўрнатилган *цилиндрик шарнирнинг реакция кучи* \vec{R}_A айлананиш ўқиغا перпендикуляр равишда йўналади. Масала ечишда бундай реакция кучини айлананиш ўқиغا перпендикуляр текисликда ётувчи x ва y ўқларга параллел йўналган ташкил этувчиларга ажратиб, жисмнинг мувозанат шартидан топилади (1.9-расм).

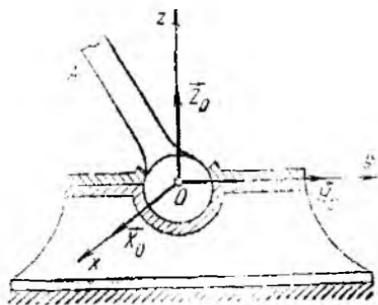
д) Сферик шарнир. AO стержень O нуқтада сферик шарнир воситасида боғланган бўлса, бу стержень O нуқтадан ўтувчи ҳар қандай ўқ атрофида фақат айлана олади (1.10-расм). Сферик шарнирнинг \vec{R}_O реакция кучи O нуқтадан ўтади, лекин қайси томонга йўналишини олдиндан айтиб бўлмайди. Сферик шарнирнинг реакция кучини танилаб олинган координата ўқларига параллел йўналган ташкил этувчиларга ажратиб, уларни жисмнинг мувозанат шартларидан аниқлаш мумкин.

е) Вазисиз стержень воситасида шарнирли боғланиш. Жисм учлари шарнирли бириктирилган илгичка (вазисиз деб қараладиган) стерженлар воситасида боғланган бўлсин (1.11-расм). Ўз оғирлиги ҳисобга олинмайдиган, учларидан бошқа нуқталарига ҳеч қандай куч қўйилмаган стерженларга *вазисиз стерженлар* дейилади.

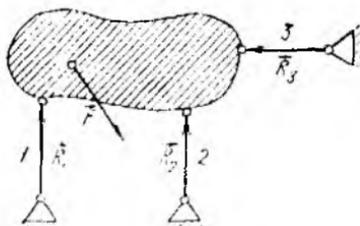
I-аксомага кўра, стерженларнинг ҳар бири мувозанатда бўлиши учун унга қўйилган кучлар миқдор жиҳатдан тенг, стержень бўй-



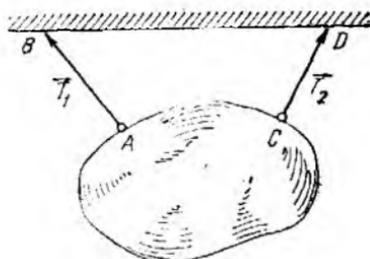
1.9-расм.



1.10-расм.



1.11- расм.



1.12- расм.

лаб қарама-қарин томонга йўналган бўлиши керак. Бинобарин, бундай стерженьлар фақат сиқилади ёки чўзилади ҳамда реакция кучлари 1.11-расмдагидек стерженьлар бўйлаб йўвалади.

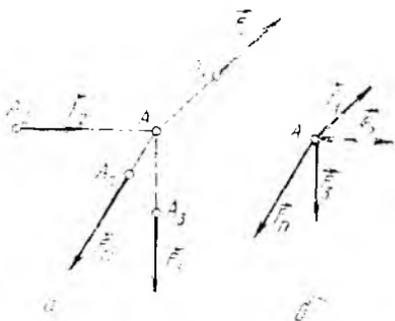
III. Ип, занжир ва қайишлар воситасидаги боғланишлар. ж) Жием AB, CD иллар воситасида осилган бўлсин (1.12-расм). Ипларда ҳосил бўладиган реакция кучларига *таранглик кучлари* дейилади ва улар ип бўйлаб йўвалади.

Боғланишларнинг бошқа турлари кейинчалик конкрет масалаларни ешида кўрилади.

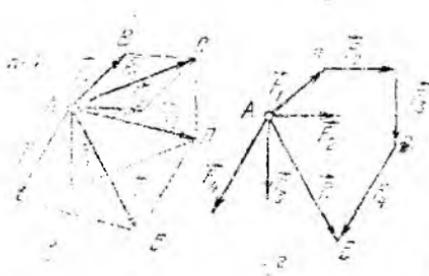
2-БОБ. КЕСИШУВЧИ ҚУЧЛАР СИСТЕМАСИ

Таъсир чизиқлари бир нуқтада учрашадиган кучлар системасинга *кесишувчи кучлар системаси* дейилади.

Кучларни уларнинг таъсир чизиқлари бўйлаб кўчириш мумкин бўлгани туфайли, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кесишувчи кучлар системаси (2.1-расм, а) кучларнинг таъсир чизиқлари кесилган A нуқтага қўйилган кучлар системасига эквивалент бўлади (2.1-расм, б).



2.1-§. Кесишувчи кучларни геометрик қўишиш



2.1- расм

Бир нуқтага қўйилган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ кучлар берилган. Бу кучларни қўишиш учун параллелограмм қондиладиган кетма-кет фойдаланиш мумкин (2.1-расм, в). \vec{F}_1 ва \vec{F}_2 кучларини қўишиб, \vec{R}_1 кучини аниқлаймиз:

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

\vec{R}_1 ни \vec{F}_3 куч билан қўшиб,

$$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

ни ҳосил қиламиз. Ниҳоят, \vec{R}_2 билан \vec{F}_4 куч векторлари асосида параллелограмм қуриб, берилган ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$) кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси \vec{R} учун қўйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\vec{R} = \vec{R}_2 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

Бунда тенг таъсир этувчи \vec{R} нинг таъсир чизиғи A нуқтадан ўтади.

Кесинувчи кучларни қўйиши учун ҳар гал параллелограмм ясаш ўрнига \vec{F}_1 кучининг учига \vec{F}_2 кучни ўзига параллел равишда келтирамиз; сўнгра \vec{F}_2 кучининг C учига \vec{F}_3 кучни ўзига параллел равишда келтирамиз ва ҳоказо (2.1-расм, a). A нуқтани \vec{F}_1 кучининг учи билан туташтириб, тенг таъсир этувчи \vec{R} ни аниқлаймиз. Тенг таъсир этувчини бу усулда аниқлашга *қўнбурчак қондаси* дейилади. $ABCDE$ синиқ чизиққа *куч қўнбурчаги* дейилади.

Худди шунингдек, агар берилган кесинувчи кучлар системаси n та кучлардан иборат бўлса, уларнинг тенг таъсир этувчиси

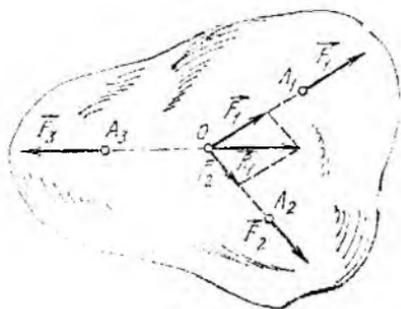
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{\nu=1}^n \vec{F}_\nu \quad (2.1)$$

формуладан аниқланади. Шундай қилиб, *кесинувчи кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси ташкил этувчи кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг ва шу кучлар таъсир чизиқларининг кесинган нуқтасига қўйилган бўлади.*

2.2-§. Уч кучнинг мувозанати ҳақидаги теорема

Теорема. *Бир текисликда ётувчи ва ўзаро параллел бўлмаган учта куч мувозанатланса, уларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтага кесинишади.*

Исбот. Мувозанатдаги жисмнинг A_1, A_2, A_3 нуқталарига бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$) кучлар системаси қўйилган бўлсин (2.2-расм). Кучлардан иккитасини, масалан, \vec{F}_1 ва \vec{F}_2 ни уларнинг таъсир чизиқлари кесинган O нуқтага келтириб, параллелограмм қондаси асосида қўйишимиз:



2.2-расм.

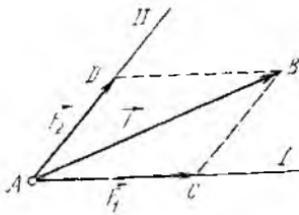


$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

У ҳолда $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ кучлар системаси ўрнига унга эквивалент иккита кучдан иборат системага эга бўламиз: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \Leftrightarrow (\vec{R}_1, \vec{F}_3) \Leftrightarrow \Leftrightarrow 0$. 1-аксиомага асосан, \vec{R}_1 ва \vec{F}_3 кучларнинг миқдорлари тенг, йўналиши эса бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналгандагина улар мувозанатлашади. Бинобарин, \vec{F}_3 кучининг таъсир чизиғи ҳам O нуқтадан ўтади.

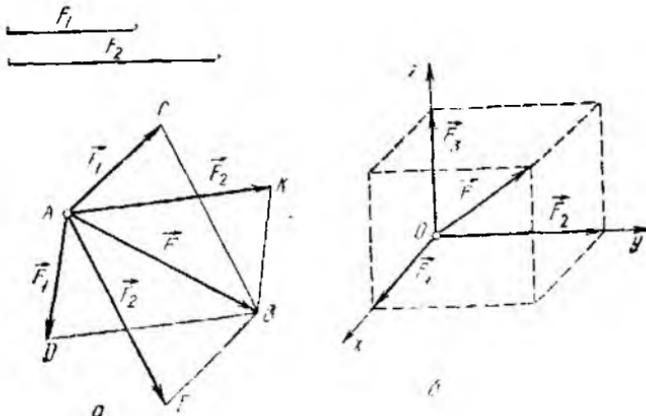
2.3-§. Кучни таркил этувчиларга ажратиш

Қуйидаги учта ҳолини кўрамиз: 1) \vec{F} кучни шу куч билан бир текисликда ётувчи берилган иккита йўналиши бўйича таркил этувчиларга ажратиши. Бунинг учун

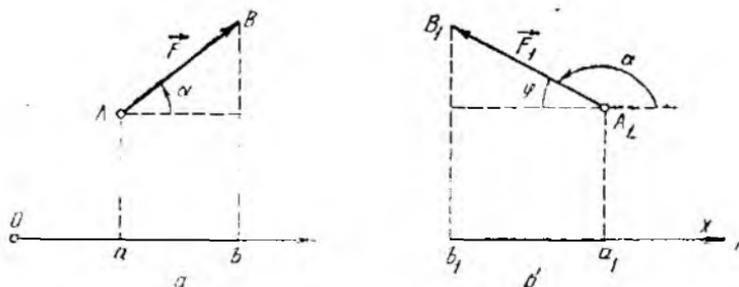


\vec{F} кучининг B учидан берилган I ва II тўғри чизиқларга параллел бўлган ва улар билан C ва D нуқталарда кесилган BC , BD кесмаларни ўтказамиз (2.3-расм). $\vec{AC} = \vec{F}_1$ ва $\vec{AD} = \vec{F}_2$ векторлар \vec{F} кучининг изланаётган таркил этувчиларини ифодалайди.

2) \vec{F} кучни шу куч билан бир текисликда ётувчи ва сон қийматлари берилган иккита таркил этувчига ажратиши. \vec{F} кучининг боши A ва учидagi B нуқталарини марказ қилиб, радиуси берилган масштабда таянлаб олинган \vec{F}_1 ва \vec{F}_2 га тенг ёйларни чизамиз (2.4-расм, а). Бу ёйлар C ва D нуқталарда кесилсади. ACB ва ADB учбурчакларни диагонали AB га тенг параллелограммлар би-



2.4-расм.



2.5- расм.

лап тўлдирамиз. У ҳолда AC ва AE ёки AD ва AK векторлари \vec{F} кучнинг изланаётган ташкил этувчиларини ифодалайди.

3) \vec{F} кучни бир-бирига перпендикуляр учта координата ўқлари бўйича йўналган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ташкил этувчиларга ажратини. Бунинг учун параллелелик қоидадан фойдаланиб, диагонали \vec{F} кучга тенг, қирралари берилган йўналишларга мос келувчи параллелелик қоида қуриш ки.фойдир (2.4-расм, б).

2.4- §. Кучнинг текисликдаги ва ўқдаги проекцияси

Куч билан ўқ бир текисликда ётган ҳолда \vec{F} кучнинг Ox ўқдаги проекциясини аниқлаш учун кучнинг боши A ва учидаги B нуқталардан берилган ўққа перпендикуляр (Aa) ва (Bb) чизиқларни ўтказамиз (2.5-расм). У ҳолда мос ишора билан олинган ab кесма \vec{F} кучнинг Ox ўқдаги проекциясини ифодалайди. Агар a нуқтадан b нуқтага кўчиш Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан устма-уст тунса—мусбат ишора, унга тескари йўналса—манфий ишора олинади. \vec{F} кучнинг Ox ўқдаги проекцияси F_x ёки X билан белгиланади:

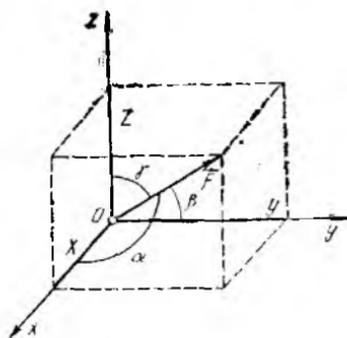
$$F_x = X = F \cos \alpha, \quad (2.2)$$

2.5-расм, б даги \vec{F}_1 кучнинг x ўқдаги проекцияси ҳам шу тарзда аниқланади: $X_1 = F_1 \cos \alpha$ ёки $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$ бўлгани учун

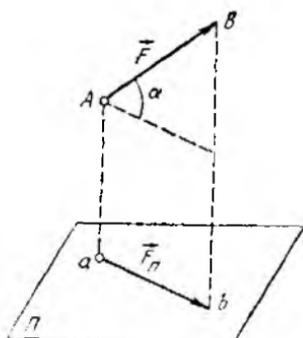
$$X_1 = F_1 \cos \alpha = -F_1 \cos \varphi.$$

Шундай қилиб, кучнинг бирор ўқдаги проекцияси скаляр миқдор бўлиб, куч модули билан кучнинг шу ўқ мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчаги косинусига кўпайтмасига тенг. Бу таърифга кўра $\alpha = \pi/2$ ёки $\alpha = 3\pi/2$ да $X = 0$; $\alpha = \pi$ да $X = -F$ бўлади.

\vec{F} кучнинг $Oxyz$ координата ўқлари системаси билан ташкил қилган бурчакларини α, β, γ билан белгилайлик (2.6-расм). У ҳолда



2.6- расм.



2.7- расм.

диагонали F га тенг бўлган параллелепипед (мос ишора билан олинган) томонларининг узунлиги (2.2) га асосан \vec{F} кучининг координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди:

$$X = F \cos \alpha, \quad Y = F \cos \beta, \quad Z = F \cos \gamma. \quad (2.3)$$

Кучининг модули параллелепипеднинг диагоналига тенг:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (2.4)$$

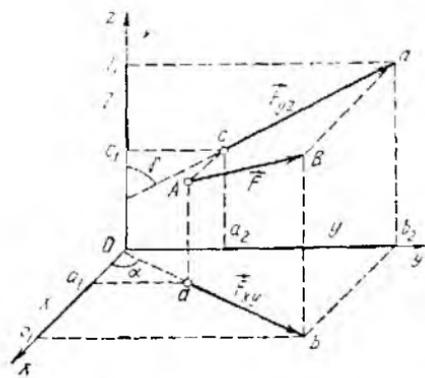
\vec{F} кучининг йўналишини топиш учун йўналтирувчи косинусларни (2.3) дан аниқлаймиз:

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}. \quad (2.5)$$

\vec{F} кучининг бирор Π текисликдаги проекциясини аниқлаш учун шу текисликка Aa ва Bb перпендикулярларни туширамиз (2.7-расм); у ҳолда \vec{ab} вектор \vec{F} кучининг Π текисликдаги проекциясини ифода

далайди ва қуйидагича белгиланади: $\vec{ab} = \vec{F}_{\Pi}$. \vec{F} кучининг Π текислик билан ташкил қилган бурчагини α билан белгиласак, кучининг текисликдаги проекциясининг модули $F_{\Pi} = F \cos \alpha$ формула ёрдамида аниқланади.

2.8-расмда кучининг координата ўқларидаги проекцияларини бошқача усулда топиш тасвирланган; дастлаб кучининг координата текисликларидаги проекциялари (масалан, $\vec{F}_{xy} = \vec{ab}$, $\vec{F}_{yz} = \vec{cd}$) аниқла-



2.8- расм.

нади, сўнгра бу проекция координата текислигида ётувчи ўқларга проекцияланади:

$$\left. \begin{aligned} X &= F_{xy} \cos \alpha, \\ Y &= F_{xy} \cos (\pi/2 - \alpha) = F_{xy} \sin \alpha, \\ Z &= F_{yz} \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

2.5-§. Тенг таъсир этувчини аналитик усулда аниқлаш

Кучни унинг координата ўқларидаги проекциялари ва қўйилган нуқтасининг координаталари орқали топиш усулига *аналитик усулда аниқлаш* дейилади.

($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси (2.1) га кўра шу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг. (2.1) ни координата ўқларига проекциялаб, тенг таъсир этувчининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$R_x = \sum_{v=1}^n X_v, \quad R_y = \sum_{v=1}^n Y_v, \quad R_z = \sum_{v=1}^n Z_v.$$

бунда X_v, Y_v, Z_v билан \vec{F}_v кучнинг координата ўқларидаги проекциялари белгиланган.

Тенг таъсир этувчининг модули (2.4) га асосан қуйидагича аниқланади:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{v=1}^n X_v\right)^2 + \left(\sum_{v=1}^n Y_v\right)^2 + \left(\sum_{v=1}^n Z_v\right)^2}. \quad (2.7)$$

йўналиши эса (2.5) га асосан топилади:

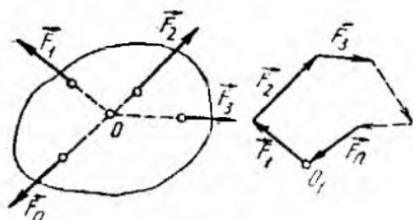
$$\cos(\vec{R}, \widehat{x}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \widehat{y}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \widehat{z}) = \frac{R_z}{R}.$$

2.6-§. Кесишувчи кучлар системасининг мувозанати

Агар кесишувчи ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси \vec{R} нолга тенг бўлса, у ҳолда бундай кучлар системаси мувозанатда бўлади, аксинча, кучлар системаси мувозанатда бўлса, тенг таъсир этувчи нолга тенг бўлади: $\vec{R} = 0$. Бу ҳолда (2.1) қуйидагича ёзилади:

$$\sum_{v=1}^n \vec{F}_v = 0. \quad (2.8)$$

Винобарин, бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун мазкур кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.



• 2.9- расм.

(2.8) тенгламанинг геометрик маъноси қуйидагичадир: жисмга $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кесишувчи кучлар системаси таъсир этсн (2.9-расм). Бу кучлар учун куч қўпбурчаги ясалса, у ёпиқ бўлади, яъни мазкур қўпбурчақда биринчи кучнинг боши билан охириги кучнинг учи устма-уст тушади. Куч қўпбурчаги ёпиқ бўлса, $\vec{R} = 0$ бўлади.

Демак, бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси мувозанатлашиши учун бу кучларга қурилган куч қўпбурчаги ёпиқ бўлиши зарур ва етарлидир.

Тенг таъсир этувчи куч $\vec{R} = 0$ бўлса, (2.7) ни эътиборга олсак,

$$R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0$$

ёки

$$\sum_{v=1}^n X_v = 0, \sum_{v=1}^n Y_v = 0, \sum_{v=1}^n Z_v = 0. \quad (2.9)$$

Бу тенгликлар кесишувчи кучлар системаси мувозанат шартининг аналитик ифодасидир. Демак, кесишувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг ҳар бир координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндисн нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Ёзувни қисқартириш мақсадида (2.9) ни келгусида

$$\sum X_v = 0, \sum Y_v = 0, \sum Z_v = 0 \quad (2.10)$$

кўринишда ёзамиз.

Кесишувчи кучлар бир текисликда, масалан, Oxy текислигида ётса, (3.10) нинг учинчи тенгламаси айиниятга айланади. Шу сабабли Oxy текислигида ётувчи кесишувчи кучлар системасининг мувозанат шартлари қуйидагича бўлади:

$$\sum X_v = 0, \sum Y_v = 0. \quad (2.11)$$

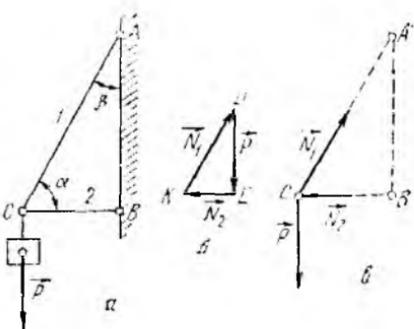
Статикада жисмнинг мувозанатига онд масалалар қуйидаги тартибда езилади:

1. Мувозанати текшириладиган жисм аниқланади.
2. Координаталар системаси танлаб олинади.
3. Жисмга таъсир этаётган берилган кучлар кўрсатилади ва боғланншларни реакция кучлари билан алмаштирилади.
4. Таъсир этаётган кучлар қандай кучлар системасини таниқил этишига қараб, уларга мос мувозанат тенгламалари тузилади.
5. Тенгламаларни ечиб номаялум кучлар аниқланади, топилган реакция кучи ишорасининг мусбат бўлиши танлаб олинган йўналишининг тўғри эканлигини, манфий бўлиши реакциянинг танлаб олинган йўналишга тесқари йўналганлигини кўрсатади.

Er

2.1- масала. AC ва BC стерженлар ўзаро ва вертикал девор билан шарнирлар воситасида бириктирилган (2.10-рasm, а). C шарнирға оғирлиги $P = 1000$ Н бўлган юк осилган. Агар стерженлар орасидаги бурчак $\alpha = 60^\circ$ ва AC стержень билан девор орасидаги бурчак $\beta = 30^\circ$ бўлса, стерженларнинг оғирлигини ҳисобга олмай уларда ҳосил бўладиган зўриқишлар аниқлаёмиз.

Изоҳ. Стержень бўйлаб йўналган чўзувчи ёки сиқувчи куч *стерженьдаги зўриқиш* деб аталади. Чўзувчи кучдан фарқ қилиш учун сиқувчи кучни манфий соғ билан ифодалаймиз. Стерженьдаги зўриқиш миқдор жиҳатидан шу стерженнинг реакция кучи N га тенг бўлади.



2.10- рasm.

Ечиш. C шарнирни моддий нуқта *дево* (рasm, а)нинг мувозанатини текшираёмиз.

C нуқтага $P = 1000$ Н бўлган вертикал оғирлик ва йўналган оғирлик кучи қўйилган. AC ва BC стерженларнинг реакция кучлари шу стерженлар бўйлаб йўналган бўлиб, уларни мос равишда \vec{N}_1 ва \vec{N}_2 билан белгилаймиз. Натижада P , \vec{N}_1 , \vec{N}_2 кучлар C нуқтада кесилувчи кучлар системасини ташкил этади. \vec{N}_1 ва \vec{N}_2 ни аниқлаш учун кесилувчи кучлар системаси мувозанатининг геометрик шартидан фойдаланамиз.

(2.8) га қўра (P , \vec{N}_1 , \vec{N}_2) кесилувчи кучлар системаси таъсирдаги C нуқта мувозанатда бўлиши учун уларнинг геометрик йиғиндисини нолга тенг бўлиши керак:

$$\vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0,$$

яъни \vec{P} , \vec{N}_1 , \vec{N}_2 кучларга қурилган куч учбурчаги ёпиқ бўлиши керак. Куч учбурчагини чизиш учун бирор масштабда ихтиёрий D нуқтада \vec{P} кучни ўзига параллел равишда ўтказамиз (2.10- рasm, б). \vec{P} кучнинг боши D ва учидаги E нуқталардан AC ва BC стерженларга параллел чизиқлар ўтказамиз. Бу чизиқларнинг кесилган нуқтасини K билан белгиласак, ҳосил бўлган DEK учбурчак изланаётган ёпиқ куч учбурчагини ифодалайди. Бунда KD ва EK векторлар мос равишда \vec{N}_1 ва \vec{N}_2 реакция кучларини ифодалайди. DEK учбурчакнинг KD ва KE томонларини берилган масштаб бирлигида ўлчаб, \vec{N}_1 ва \vec{N}_2 кучларининг модулларини аниқлаймиз.

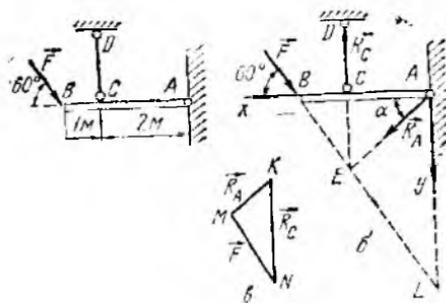
\vec{N}_1 ва \vec{N}_2 ларни DEK учбурчакдан тригонометрик йўл билан ҳам аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, ясашга кўра $AB \parallel DE$, $AC \parallel DK$ ва $BC \parallel EK$ бўлгани учун $\widehat{KDE} = \beta = 30^\circ$ ва $\widehat{EKD} = \alpha = 60^\circ$, бинобарин, $\triangle DEK$ тўғри бурчакли учбурчакдан

$$N_1 = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{1000}{\sin 60^\circ} = \frac{1000}{\sqrt{3}/2} = 1154 \text{ Н},$$

$$N_2 = P \operatorname{ctg} \alpha = 1000 \sqrt{3}/3 = 577 \text{ Н}$$

муносабатларни оламиз.

\vec{N}_1 ва \vec{N}_2 лар AC ва CB стерженларининг C шарнирға таъсир кучини, яъни мазкур стерженларнинг реакция кучларини ифодалайди. Стерженлардаги зўриқишнинг топиш учун стерженларнинг сиқилиши ёки чўзилишини аниқлаймиз. Агар реакция кучи C шарнирдан стержень бўйлаб йўналса, стержень чўзилади; реак-



2.11- расм.

ния кучи C шарнирغا йўналса, стержень сиқилади. Буни назарда тутиб, топилган кучларни C шарнирغا қўйсақ (2.10-расм, в), AC стержень чўялиши ва CB стержень сиқилишини кўрамиз. Шу сабабли $S_1 = N_1 = 1154 \text{ Н}$, $S_2 = -N_2 = 577 \text{ Н}$.

2.2- масала. 2.11- расмда тасвирланган AB балка CD стержень воситасида горизонтал ҳолатда турилади. Балка учига горизонтга $\alpha = 60^\circ$ бурчак остида $F = 30 \text{ кН}$ куч таъсир этади. Ўлчамларни расмдан олиб, CD стерженьдаги зўриқиш S ва балканинг деворга кўрсатадиган босими Q аниқлайсин. A, C

ва D нуқталарга стержень ва балка шарнирлар воситасида бириктирилган. Стержень ва балкаларнинг оғирлиги ҳисобга олинмасин.

Ечиш. AB балканинг мувозанатини текшираемиз. Ваззисиз CD стерженьнинг AB балкага таъсирини C нуқтадан D нуқтага қараб йўналган \vec{R}_C реакция кучи билан алмаштираемиз. A шарнирнинг реакция кучини \vec{R}_A билан белгилаб, \vec{R}_A нинг йўналишини аниқлаш учун бир текисликда ётувчи ва ўзаро параллел бўлмаган учта кучнинг мувозанати ҳақидаги теоремадан фойдаланамиз. Бу теоремага асосан \vec{F} , \vec{R}_C ва \vec{R}_A кучлар таъсиридаги балка мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишиши керак. Бинобарин, \vec{R}_A кучининг таъсир чизиги ҳам \vec{F} ва \vec{R}_C кучларнинг таъсир чизиқлари кесишадиган E нуқтадан ўтади (2.11- расм, б). Шундай қилиб, \vec{R}_A нинг таъсир чизиги AE билан устма-уст тушади.

x ўқи AB бўйлаб йўналтириб, AE билан x ўқ орасидаги бурчакни α билан белгилаймиз. Кесишувчи кучлар системаси мувозанатининг геометрик ва аналитик шаршларидан фойдаланамиз.

1. Геометрик усул. Бу усулга кўра \vec{F} , \vec{R}_C , \vec{R}_A кучларга қурилган куч учбурчани ёпиқ бўлиши керак. Куч учбурчагини чизиш учун бирор масштабда ихтиёрий M нуқтада \vec{F} кучини ўзига параллел равишда ўтказамиз (2.11-расм, в). \vec{F} кучининг боши M ва учидаги N нуқталардан мос равишда AE ва \vec{R}_C ларга параллел чизиқлар ўтказиб, уларнинг кесишган нуқтасини K билан белгилаймиз. MNK изланаётган ёпиқ куч учбурчагини ифодалайди. Бунда NK ва KM лар мос равишда \vec{R}_C ва \vec{R}_A реакция кучларни ифодалайди. MNK куч учбурчагининг NK ва KM томонларини берилган масштабда ўлчаб, \vec{R}_C ва \vec{R}_A кучларнинг модуллари аниқлаймиз. Ясашга кўра қурилган куч учбурчагининг бурчаклари қуйидагича бўлади:

$$\widehat{MKN} = \widehat{ELA} = 30^\circ,$$

$$\widehat{NKM} = \widehat{LAE} = 90^\circ - \alpha.$$

Бинобарин, $\widehat{KMN} = 60^\circ + \alpha$.

\vec{R}_A ва \vec{R}_C ларни аниқлаш учун синуслар теоремасидан фойдаланамиз:

$$\frac{F}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{R_A}{\sin 30^\circ} = \frac{R_C}{\sin(60^\circ + \alpha)}$$

2.11-расм, б дан: $CE = BC \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$; $AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = \sqrt{7}$,

$$\sin \alpha = \frac{CE}{AE} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \quad \cos \alpha = \frac{AC}{A} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Бўлгани учун

$$R_A = \frac{F \sin 30^\circ}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{F \sin 30^\circ}{\cos \alpha} = \frac{30 \cdot 1/2}{2\sqrt{7}} = 19,84 \text{ кН}$$

$$R_C = \frac{F \sin(60^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{F(\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha)}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{30 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} \right)}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 38,97 \text{ кН.}$$

2. Аналитик усул. Масалани аналитик усулда ечиш учун (2.11) тенгламаларни гузамиз:

$$\sum X_v = 0; \quad -F \cos 60^\circ + R_A \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; \quad F \cos 30^\circ - R_C + R_A \sin \alpha = 0.$$

(1) ни эътиборга олиб, бу тенгламалардан R_A ва R_C ларни аниқлаймиз:

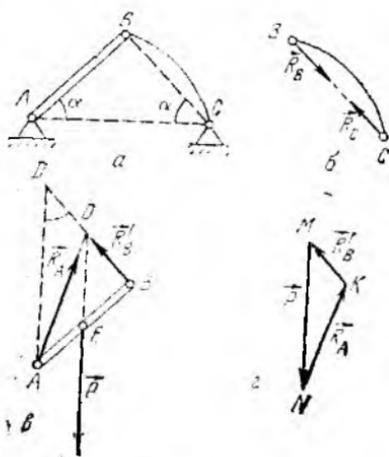
$$R_A = \frac{F \cos 60^\circ}{\cos \alpha} = \frac{30 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 19,84 \text{ кН,}$$

$$R_C = F \cos 30^\circ + R_A \sin \alpha = 30 \frac{\sqrt{3}}{2} + 19,84 \frac{\sqrt{21}}{7} = 38,97 \text{ кН.}$$

Балканинг деворга кўрсатилган Со-сим кучи \vec{Q} миқдор жиҳатидан R_A га тенг. Йўналиши эса унга қарама-қарини бўлади. CD стерженьдаги зўриқишни аниқлаш учун \vec{R}_C ни C нуктага қўйсак, у S шарнирдан стержень бўйлаб йўналади, демак, CD стержень чўзилади.

Шундай қилиб, $Q = R_A = 19,84$ кН
 $S = R_C = 38,97$ кН.

2.3-масала. B нуктада шарнир ёлсимда ўзаро бииктирилган тўғри чизиқда бир жинсли AB брус билан ўқи ихтиёрли эгри чизиқ шаклида бўлган BC стерженьлар битта горизонталда ёгувчи A ва C таянчларга ҳам шарнир воситасида маҳкамланган. AB ва BC тўғри чизиқлар AC тўғри чизиқ билан $\alpha = 45^\circ$ бурчак ҳосил қилади. AB бруснинг оғирлиги P . BC стержень оғирлигини ҳисобга олмай, A ва C таянчларнинг реакциялари аниқлансин (2.12-расм, а).



2.11 расм.

Ечиш. Дастлаб BC стерженининг мувозанатини текшираимиз. Унга берилган кучлар таъсир этмайди. Боғланишдан бўлатиш ҳақидаги аксиомага асосан B ва C шарнирларини боғланиш реакция кучлари \vec{R}_B ва \vec{R}_C билан алмаштирамиз. BC стержень \vec{R}_B ва \vec{R}_C кучлар таъсирида мувозанатда бўлади. 1-аксиомага кўра бу кучлар миқдор жиҳатидан тенг ва бир тўғри чизик бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган бўлиши керак. \vec{R}_B куч B нуқтага \vec{R}_C куч C нуқтага қўйилгани туфайли бу кучларнинг таъсир чизиги BC да ётади (2.12-расм, б).

Энди AB бруснинг мувозанатини текшираимиз. A ва B нуқталардаги шарнирларнинг таъсирини реакция кучлари билан алмаштирамиз. 4-аксиомага кўра AB брус ва BC стерженлар миқдор жиҳатидан тенг ва бир тўғри чизик бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган \vec{R}_B ва \vec{R}'_B кучлар билан бири иккинчисига таъсир этади. Шу сабабли $\vec{R}_B = -\vec{R}'_B$.

\vec{R}_A кучнинг йўналишини уч куч теоремасидан фойдаланиб аниқлаймиз. Теоремага асосан, ўзаро параллел бўлмаган \vec{P} , \vec{R}'_B ва \vec{R}_A кучлар таъсиридаги AB брус мувозанатда бўлгани учун \vec{R}_A нинг таъсир чизиги \vec{P} ва \vec{R}'_B ларнинг таъсир чизиқлари кесилган O нуқтадан ўтиши керак (2.12-расм, в). Бундан ташқари AB брус мувозанатда бўлиши учун унга таъсир этувчиси \vec{P} , \vec{R}'_B ва \vec{R}_A кучларга қурилган куч учбурчаги ёпиқ бўлиши керак. Ихтиёрий M нуқтада миқдор ва йўналиши аниқ \vec{P} кучни маълум масштабда ўзига параллел равишда тасвирлаймиз (2.12-расм, г). M нуқтадан \vec{R}'_B нинг таъсир чизиги BC га, N нуқтадан эса \vec{R}_A нинг таъсир чизиги AO га параллел чизиқлар ўтказамиз. Уларнинг кесилган нуқтасини K билан белгилаймиз. MNK куч учбурчагини периметри бўлича \vec{P} куч йўналишида шундай айланиб ўтамизки, натижада куч учбурчаги M нуқтада ёвдирсин. NK ва KM векторлари мос равишда \vec{R}_A ва \vec{R}'_B кучларини ифодалайди. NK ва KM ни берилган масштаб бирлигида ўлчаб, \vec{R} ва \vec{R}'_B кучларнинг миқдорини аниқлаймиз.

\vec{R}_A ва \vec{R}'_B ларнинг миқдорини MNK куч учбурчагининг DAO геометрик учбурчакка ўхшашлигидан фойдаланиб ҳам аниқлаш мумкин. Бу учбурчакларнинг мос томонлари пропорционал бўлади:

$$\frac{R_A}{AO} = \frac{R'_B}{DO} = \frac{P}{AD}. \quad (1)$$

2.12-расм, в да AE кесманинг узунлигини a билан белгиласак, $DO = a$, $AB = DB = 2a$, $AD = \sqrt{(AB)^2 + (DB)^2} = 2a\sqrt{2}$, $AO = \sqrt{(AB)^2 + (BO)^2} = a\sqrt{5}$ тенгликлар ўринли бўлади. Натижада (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин.

бундан
$$\frac{R_A}{\sqrt{5}} = \frac{R'_B}{a} = \frac{P}{2a\sqrt{2}},$$

$$R_A = \frac{P\sqrt{10}}{4}; \quad R'_B = \frac{P\sqrt{2}}{4}.$$

Юқорида кўрганيمиздек, $R'_B = R_B = R_C$ бўлгани учун

$$R_C = \frac{P\sqrt{2}}{4}$$

2.4-масала. A, B, C нуқталарда шарнирли бириктирилган AB ва AC вазисиз стерженлар AD ип воситасида ушлаб турилади. A нуқтага горизонтал текисликда ётувчи ва yz текислиги билан $\gamma = 60^\circ$ бурчак ташкил ётувчи

$F = 20$ кН куч таъсир этади. Агар $\widehat{ABC} =$

$= \widehat{ACB} = \beta = 45^\circ$, $\widehat{AOE} = \alpha = 30^\circ$ бўлса, стерженлардаги зўриқиш ва ипнинг таранглик кучи аниқлансин (2.13-расм. а).

Ечиш. A нуқтанинг мувозанатини текшираемиз. A нуқта AD ип ҳамда AB ва AC вазисиз стерженлар воситасида ушлаб турилади.

Координаталар бошини A нуқтада олиб, z ўқини вертикал юқорига йўналтираемиз. xy текислиги учун \vec{F} куч ётган горизонтал текислигини оламиз.

A нуқтага таъсир ётувчи кучларни кўрсатамиз (2.13-расм. б). A нуқтага горизонтал текисликда ётувчи берилган \vec{F} куч қўйилган. Боғланишдан бўлганидан бўлганидан C ўнатиши ҳақидаги аксиомага кўра AD ипнинг A нуқтага таъсири таранглик кучи \vec{T} ҳамда AB ва AC стерженларнинг таъсирини \vec{N}_1, \vec{N}_2 реакция кучлари билан алмаштириш мумкин. AB ва AC стерженларни чўзилади деб қараб, \vec{N}_1 ва \vec{N}_2 ларни A нуқтада мос равишда AB ва AC бўйлаб йўналтираемиз. Агар масалани ечганда N_1 ёки N_2 манфий ишорали бўлса, уларга мос стержень сиқилади.

A нуқтага $(\vec{F}, \vec{T}, \vec{N}_1, \vec{N}_2)$ кесинувчи кучлар системаси таъсир этади. A нуқта учун (2.10) мувозанат тенгламаларини тулаемиз:

$$\sum X_v = 0; F \sin \gamma - N_1 \cos \beta + N_2 \cos \beta = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; F \cos \gamma - N_1 \sin \beta \cos \alpha - N_2 \sin \beta \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Z_v = 0; -N_1 \sin \beta \sin \alpha - N_2 \sin \beta \sin \alpha + T = 0.$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, номълумларни аниқлаймиз:

$$N_1 = \frac{F}{2} \left(\frac{\cos \gamma}{\sin \beta \cos \alpha} + \frac{\sin \gamma}{\cos \beta} \right) = 20,41 \text{ кН},$$

$$N_2 = N_1 - F \frac{\sin \gamma}{\cos \beta} = -4,09 \text{ кН},$$

$$T = F \cos \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha = 5,77 \text{ кН}.$$

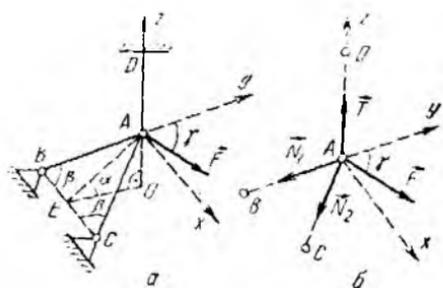
N_2 нинг манфий ишорали бўлиши AC стержень биз фараз қилгандек чўзиладмай, балки аслида сиқилишини кўрсатади.

3-боб. ТЕКИСЛИКДАГИ ПАРАЛЛЕЛ КУЧЛАР ВА ЖУФТЛАР НАЗАРИЯСИ

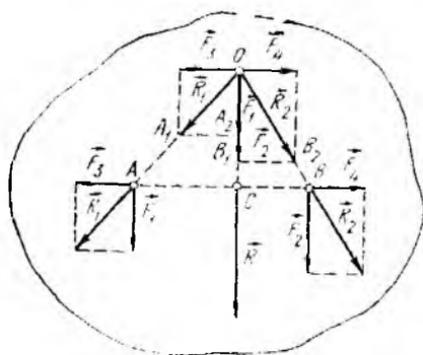
3.1-§. Иккита параллел кучларни қўйиш

Таъсир чизиқлари ўзаро параллел бўлган кучлар системасига *параллел кучлар системаси* дейилади.

Жисмнинг A ва B нуқталарига қўйилган ва бир томонга йўналган параллел \vec{F}_1, \vec{F}_2 кучлар берилган бўлсин (3.1-расм). Бу кучлар-



2.13-рasm.



3.1- расм.

кучларни қўчириб, \vec{R}_1 ни \vec{F}_1, \vec{F}_3 кучларга, \vec{R}_2 ни \vec{F}_2, \vec{F}_4 кучларга ажратамиз. O нуқтага қўйилган $(\vec{F}_3, \vec{F}_4) \in O$ бўлгани учун A ва B нуқталарга қўйилган \vec{F}_1 ва \vec{F}_2 кучлар ўрнига O нуқтага қўйилган, OC бўйлаб йўналган \vec{F}_1 ва \vec{F}_2 кучларни оламиз. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси уларнинг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$R = F_1 + F_2. \quad (3.1)$$

\vec{R} ни таъсир чизиғи бўйлаб C нуқтага қўчираемиз. Расмдан OAC ва OA_1A_2 ҳамда OCB ва OB_1B_2 учбурчаклар ўхшашлигидан қуйидаги пропорцияларни тузамиз: $\frac{AC}{F_3} = \frac{OC}{F_1}, \frac{CB}{F_4} = \frac{OC}{F_2}$. Бунда $F_3 = F_4$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{AC} \quad (3.2)$$

ҳосил бўлади. Пропорциянинг хоссасига кўра,

$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}, \quad (3.3)$$

(3.1) ва (3.3) дан қуйидаги натижа келиб чиқади: *бир томонга йўналган икки параллел кучнинг тенг таъсир этувчиси шу кучларнинг алгебраик йиғиндисига тенг ва шу кучлар билан бир томонга йўналади. Тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи эса кучлар қўйилган нуқталар орасидаги масофани ички равишда шу кучларга тескари пропорционал бўлакларга бўлади.*

Миқдорлари тенг бўлмаган ($F_1 > F_2$) параллел ва бир-бирига тескари йўналган иккита кучни қўшни учун (3.1) ва (3.2) формулалардан фойдаланиб, \vec{F}_1 кучни шу куч билан бир хил йўналган \vec{F}_2 ва \vec{R} кучларга ажратамиз. Бунда \vec{F}_2 кучни B нуқтага қўйилган ва

$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ деб қараймиз (3.2- расм). Шундай қилиб, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \in (\vec{R}, \vec{G}_1, \vec{F}_2)$. Бунда $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \in 0$ бўлгани учун 2- аксиомага кўра уни ташлаб юбориш мумкин. Бинобарин, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \in \vec{R}$. (3.1) ва (3.2) га асосан тенг таъсир этувчи куч \vec{R} қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$R + G_2 = G_1, \quad \frac{R}{AB} = \frac{G_2}{AC} \quad (3.4)$$

ёки $G_2 = G_1$ бўлганидан

$$R = F_1 - F_2. \quad (3.5)$$

(3.5) ни (3.4) нинг иккинчи формуласига қўйиб соддалаштирсак,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC} \quad (3.6)$$

муносабатни оламиз.

(3.5) ва (3.6) дан кўрамизки, миқдорлари тенг бўлмаган ва бир-бирига тесқари йўналган иккита параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси миқдор жиҳатидан уларнинг айирмасига тенг. Тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи эса AB кесманинг қатти куч қўйилган давомида ётиб, шу кесмани ташқи равишда мазкур кучларга тесқари пропорционал бўлакларга бўлади.

(3.4) ва (3.5) дан фойдаланиб, тенг таъсир этувчи куч қўйилган C нуқтани товамиз:

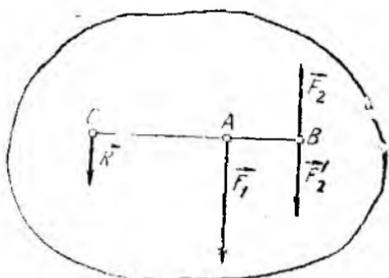
$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB. \quad (3.7)$$

3.2- §. Жуфт куч ҳақида тушунча

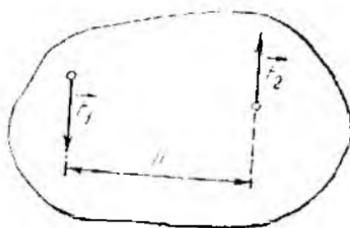
Бир-бирига тесқари йўналган, миқдор жиҳатидан тенг иккита параллел кучлар системаси *жуфт куч* (қисқача *жуфт*) деб аталади.

Жуфт куч (\vec{F}_1, \vec{F}_2) билан белгиланади (3.3- расм). Жуфт ташкил этувчи кучларнинг таъсир чизиқлари орасидаги энг қисқа масофага *жуфтнинг елкаси* дейилади ва h билан белгиланади. Жуфт ётган текисликка *жуфтнинг текислиги* дейилади.

Модуллари тенг бўлмаган ($F_1 > F_2$) иккита бир-бирига тесқари йўналган параллел кучларни қўшишда \vec{F}_2 кучнинг модули муттаасил орта бориб, \vec{F}_1



3.2- расм.



3.3- расм.

нинг модулига яқинлаша боради деб қарасак, (\vec{F}_1, \vec{F}_2) кучлар система-си лимит ҳолатида жуфт кучни ташкил этади ҳамда (3.5) ва (3.7) га асосан кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга интилади; тенг таъсир этувчи қўйилган нуқта эса, кучларнинг таъсир чизигидан чексизликка узоқлаша боради. Бундан кўрамызки, жуфт куч учун тенг таъсир этувчи куч тушунчаси маънога эга эмас.

Шундай қилиб, жуфт кучни битта куч билан алмаштириб бўлмайди. Жуфт куч, бамисоли кучдек, статиканинг мустақил элементи ҳисобланади.

3.3- §. Куч моментининг алгебраик қиймати

Жисмининг қўзғалмас нуқта (ёки ўқ) атропоидаги айланма ҳаракатини аниқлаш кучининг моменти тушунчасига боғлиқ. Шакл текислигига перпендикуляр ўқ атропоида айлана оладиган жисмга шу текисликда ётувчи \vec{F} куч таъсир этснн. Ўқнинг шакл текислиги билан кеснишган нуқтасини O билан белгилайлик (3.4- расм).

O нуқтадан \vec{F} кучининг таъсир чизигига перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикулярнинг узунлиги h берилган \vec{F} кучнинг O нуқтага нисбатан елкаси дейилади. Куч моменти ҳисобланадиган нуқтага момент маркази дейилади.

\vec{F} кучнинг O нуқтага нисбатан моменти деб, мос шиора билан олинган куч модули F ни куч елкаси h га кўпайтмасига тенг катталиқка айтилади. Куч моментининг алгебраик қиймати $M_O(\vec{F})$ билан белгиланади ва у қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (3.8)$$

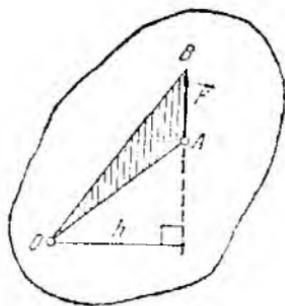
Агар \vec{F} куч жисмин 3.4- расмдагидек O нуқта атропоида соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда айлантиришга интилса, куч моменти мусбат, акс ҳолда манфий ҳисобланади.

Кучнинг нуқтага нисбатан моменти қуйидаги ҳоссаларга эга:

1. Кучнинг миқдори ва йўналишининг ўзгартирмай таъсир чизиги бўйлаб исгалган нуқтага кўчирилса, куч моменти ўзгармайди (чунки куч елкаси ўзгармай қолади).

2. Агар кучнинг таъсир чизиги момент марказидан ўтса, унинг шу нуқтага нисбатан моменти нолга тенг бўлади (чунки куч елкаси нолга тенг бўлади).

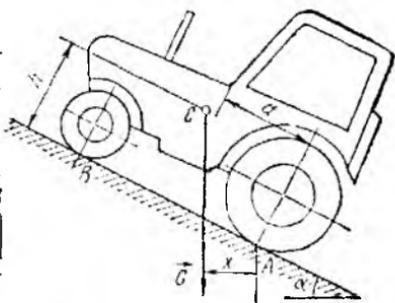
3.4- расмдан кўрамызки, кучнинг нуқтага нисбатан моментининг абсолют қиймати (3.8) га асосан кучнинг боши ва учини момент маркази билан туташтиришдан ҳосил бўлган AOB учбурчак юзининг иккиланганига тенг:



3.4- расм.

$$|M_o(\vec{F})| = 2S_{\Delta AOB} \quad (3.9)$$

Кучнинг нуқтага нисбатан моменти тушунчасидан фойдаланиб, иккита параллел кучнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқтани қуйидагича талқин қилиш мумкин. (3.2) пропорцияни $F_1 \cdot AC = F_2 \cdot CB$ кўринишда ёки $|M_c(\vec{F}_1)| = |M_c(\vec{F}_2)|$ кўринишда ёза оламиз. Куч моментининг ишорасини ҳисобга олсак, охириги тенглик қуйидагича ёзилади:



3.5- расм.

$$M_c(\vec{F}_1) + M_c(\vec{F}_2) = 0.$$

Шундай қилиб, иккита параллел кучнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта шу нуқтага нисбатан мазкур кучлар моментларининг йнғиндиси нолга тенглик шартидан аниқланади:

3.1- масала. Агар трактор оғирлик марказининг координаталари $h = 731$ мм, $a = 813$ мм бўлса, трактор А нуқта атрофида ағдарилиб кетмайдиган бўйлама устуворлигини қансатлантирувчи α бурчак аниқлансин (3.5- расм).

Ениш. Трактор А нуқта атрофида ағдарилиши олдида унинг оғирлик кучи \vec{G} нинг А нуқтага нисбатан моменти ҳамда В нуқтадаги реакция кучи нолга тенг бўлади:

$$M_A(\vec{G}) = G \cdot x = 0 \quad (1); \quad R_A = 0.$$

Бунда x билан G кучининг А нуқтага нисбатан елкаси белгиланган. (3.5) расмдан x учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$x = a \cos \alpha - h \sin \alpha \quad (2)$$

(1) да $G \neq 0$ бўлгани учун $x = 0$ ёки $a \cos \alpha - h \sin \alpha = 0$.

Бундан $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{h} = \frac{813}{731} = 1,102$ ҳамда $\alpha = 48^\circ 45'$ ёлиниши аниқланади.

Шундай қилиб, $\alpha < 48^\circ$ бўлса, трактор А нуқта атрофида ағдарилиб кетмайди.

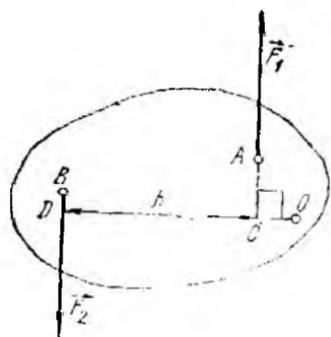
3.4- §. Жуфт кучнинг моменти

Жуфтнинг моменти деб, мос ишора билан олинган жуфт ташкил этувчиларидан бирининг миқдорини жуфт елкасига кўпайтмасига тенг катталikka айтилади. Жуфт моменти M билан белгиланади:

$$M = \pm F_1 \cdot h = \pm F_2 \cdot h.$$

Жуфт жисмини соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда айлантиришга интилса, унинг моменти мусбат, соат стрелкаси ҳаракати бўйича айлантиришга интилса, маъфий ишора билан олинади.

Теорема. Жуфт ташкил этувчи кучларнинг жуфт текислигидаги ихтиёрый нуқтага нисбатан моментларининг алгебраик йнғиндиси жуфт моментига тенг.



3.6- расм.

Исбот. (\vec{F}_1, \vec{F}_2) жуфт текисликда ихтиёрый O нуқтави олиб, ундан жуфт тузувчи кучларнинг таъсир чизиқларига перпендикуляр OD чизиқни ўтказамиз (3.6- расм). $CD=h$, $F_1=F_2$ эканлигини эътиборга олиб қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$M_O(\vec{F}_1) + M_O(\vec{F}_2) = -F_1 \cdot OC + F_2 \cdot OD = -F_1 \cdot OC + F_1(h + OC) = F_1 \cdot h = M.$$

Момент маркази учун A ёки B нуқтави олаёк,

$$M = M_A(\vec{F}_2) = M_B(\vec{F}_1), \quad (3.10)$$

яъни жуфт momenti, жуфт таъсир этувчи кучлардан бирининг иккинчиси қўйилган нуқтага нисбатан momentига тенглиги келиб чиқади.

3.5- §. Эквивалент жуфтлар ҳақидаги теорема

Жуфтнинг асосий хоссаларини ифодалайдиган қуйидаги теоремани исботлаймиз.

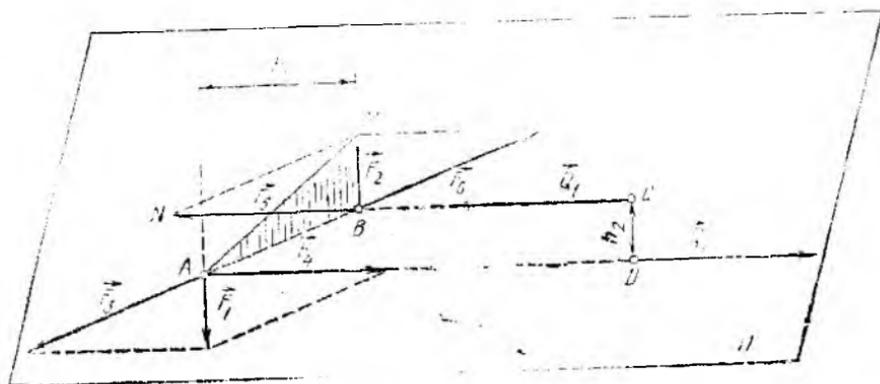
Теорема. *Бир текисликда ётувчи, momentлари тенг ва айланмиш йўналишлари бир хил бўлган икки жуфт ўзаро эквивалент бўлади.*

Исбот. Бир текисликда ётувчи (\vec{F}_1, \vec{F}_2) ва (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) жуфт кучларнинг momentлари тенг:

$$F_1 h_1 = Q_1 h_2 \quad (3.11)$$

ва айланмиш йўналишлари бир хил бўлсин. Қуйидаги икки ҳолни алоҳида кўрамиз:

а) П текисликда ётувчи (\vec{F}_1, \vec{F}_2) ва (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) жуфтларнинг ташкил этувчилари параллел бўлмасин (3.7- расм). \vec{F}_1 кучини таъсир



3.7- расм.

чизиқлари AB ва AD да ётувчи \vec{F}_3 ва \vec{F}_4 ташкил этувчиларга, F_2 кучни таъсир чизиқлари BC ва AD да ётувчи \vec{F}_5 ва \vec{F}_6 ташкил этувчиларга ажратамиз: $\vec{F}_1 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$, $\vec{F}_2 = \vec{F}_5 + \vec{F}_6$. Натижада $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6)$ ҳосил бўлади. Яъни шунга кўра $(\vec{F}_3, \vec{F}_4) \propto 0$ бўлгани учун

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{F}_3, \vec{F}_4). \quad (3.12)$$

Энди $F_3 = Q_1$ эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун (\vec{F}_1, \vec{F}_2) жуфтнинг momenti (\vec{F}_1, \vec{I}_3) жуфтнинг momentига тенглигини исботлаймиз. (\vec{F}_1, \vec{F}_2) жуфтнинг momenti $I_2 \cdot h_1$ га ёки расмда штрихланган ABM учбурчак юзасининг иккиланганига тенг; (\vec{F}_1, \vec{I}_3) жуфтнинг momenti эса $F_3 \cdot h_2$ ёки ABN учбурчак юзасининг иккиланганига тенг. Бу учбурчаклар умумий AB асосга эга ва баландликлари тенг бўлганидан уларнинг юзалари ўзаро тенг. Бинобарин, $F_3 \cdot h_1 = I_2 \cdot h_2$. Бу тенгликни (3.11) билан солиштирсак, $F_3 \cdot h_2 = Q_1 \cdot h_2$ ёки $F_3 = Q_1$ келиб чиқади. Шундай қилиб, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (Q_1, Q_2)$. (3.12) га асосан $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (Q_1, Q_2)$, яъни (а) ҳолда теорема исботланди.

б) (\vec{F}_1, \vec{F}_2) ва (Q_1, Q_2) жуфтларнинг ташкил этувчилари параллел ва уларнинг momentлари тенг бўлсин (3.8-расм):

$$F_1 \cdot AB = Q_1 \cdot CD. \quad (3.13)$$

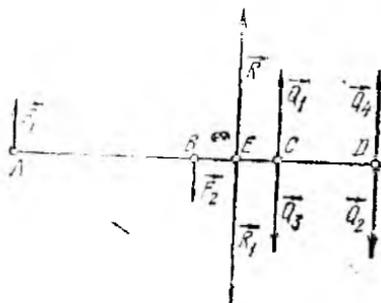
Бу ҳолда мазкур жуфтларнинг эквивалент бўлишини исботлаш учун C ва D нуқталарга фақат $(Q_1, Q_3) \neq 0$ ва $(Q_2, Q_4) \neq 0$ мувозанатлашган кучлар системаси қўйилган деб қарайлик. \vec{F}_1 ва \vec{Q}_4 параллел кучларни қўшиб, E нуқтага қўйилган \vec{R} кучни оламиз. Бунда

$$R = F_1 + Q_4, \quad F_1 \cdot AE = Q_4 \cdot ED$$

бўлади. $Q_4 = Q_1$ бўлишини назарда тутиб охириги тенгликдан (3.13) ни айирсак.

$$F_1(AE - AB) = Q_1(ED - CD) \quad \text{ёки} \quad F_1 \cdot BE = Q_1 \cdot EC. \quad (3.14)$$

Худди шунингдек, \vec{I}_2 ва \vec{Q}_3 кучларни қўшиб, \vec{R}_1 кучни оламиз. (3.14) да $F_1 = F_2$ ва $Q_1 = Q_3$ бўлишини эътиборга олсак, $I_2 \cdot BE = Q_3 \cdot EC$ тенглик ўринли бўлади ҳамда $R_1 = I_2 + Q_3 = F_1 + Q_4 = R$. Шундай қилиб, \vec{R}_1 куч ҳам E нуқтага қўйилади ва \vec{R} га қарама-қарши йўналгани учун $(R, R_1) \propto 0$ ва (\vec{F}_1, \vec{F}_2) жуфт куч ўрнига (Q_1, Q_2) жуфтнинг оламиз.



3.8-расм.

Шундай қилиб,

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \in (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \vec{Q}_4) \in (\vec{R}, \vec{R}_1, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \in (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2),$$

яъни (6) ҳолда ҳам теорема исботланди. \square

Исботланган теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1) жуфтни ўз текисликда ихтиёрй равишда кўчирсак, жуфтнинг жисмга таъсири ўзгармайди; 2) жуфтнинг моменти ва айланиш йўналишини ўзгартирмай унинг ташкил этувчилари ва елкаси ўзгартирилса, жуфтнинг жисмга таъсири ўзгармайди.

3(23)

3.9- §. Бир текисликда ётувчи жуфтларни қўшиш. Текисликдаги жуфтларнинг мувозанат шартлари

Теорема. Бир текисликда ётувчи жуфтлар системаси битта жуфтга эквивалент бўлиб, унинг моменти берилган жуфтлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

Исбот. Жисмга бир текисликда ётувчи ва моментлари M_1, M_2, M_3 га тенг жуфтлар таъсир этсин. Шартли равишда жуфт кучларни ёйсимон стрелкалар билан тасвирлаш мумкин (3.9- расм). Эквивалент жуфтлар ҳақидаги теоремага асосан, берилган учта жуфтни моментларини ўзгартирмай умумий h елкага эга бўлган, ташкил этувчилари A ва B нуқталарга қўйилган $(\vec{F}_1, \vec{F}_2), (\vec{F}_3, \vec{F}_4), (\vec{F}_5, \vec{F}_6)$ учта жуфтлар системасига келтирамиз. Бунда $F_1 \cdot h = M_1, F_3 \cdot h = M_2, F_5 \cdot h = -M_3, A$ ва B нуқталарга қўйилган кучларни алоҳида-алоҳида қўшиб, A нуқтада \vec{R}_1 ва B нуқтада \vec{R}_2 кучларни оламиз. Бунда $R_1 = F_1 - F_3 + F_5, R_2 = F_2 - F_4 + F_6$. Натижада берилган жуфтлар системаси тенг таъсир этувчи жуфт деб аталадиган (\vec{R}_1, \vec{R}_2) жуфтга келтирилади ва унинг моменти

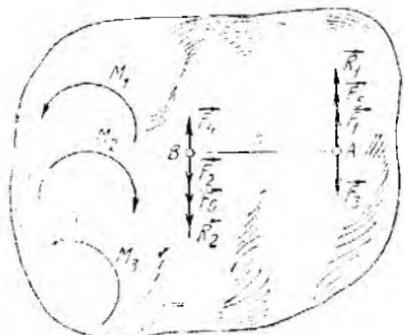
$$M = R_1 \cdot h = F_1 \cdot h - F_3 \cdot h + F_5 \cdot h = M_1 + M_2 + M_3$$

формуладан аниқланади.

Учта жуфт учун теорема исботланди. Худди шунингдек, бир текисликда ётувчи ва моментлари M_1, M_2, \dots, M_n га тенг бўлган n та жуфтлар системасини қўшиш натижасида битта тенг таъсир этувчи жуфтнинг олиш мумкин ҳамда бу жуфтнинг моменти

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{v=1}^n M_v. \quad (3.15)$$

Исботланган теоремадан кўрамизки, текисликдаги жуфтлар системаси мувозанатда бўлиши учун берилган жуфтлар моментлари-



3.9- расм.

нинг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етар-
лидир:

$$\sum_{v=1}^n M_v = 0. \quad (3.16)$$

✓ 3.2- масала. Мувозанатлашган учта жуфт бир текисликда ётади. Бу жуфт-
ларни ташкил этувчи кучларнинг миқдорлари мос равишда 2 Н, 3 Н ва 5 Н;
елкалари 3 м, x м ва 6 м; биринчи ва учинчи жуфтларнинг моменти мусбат,
иккинчи жуфтнинг моменти манфий қиймагга эга. Иккинчи жуфт елкаси x то-
пилсин.

Ечиш. Жуфтларнинг моментлари қуйидагига тенг:

$$M_1 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ Нм}; M_2 = -3x \text{ Нм}; M_3 = 5 \cdot 6 = 30 \text{ Нм}.$$

Жуфт кучлар мувозанатда бўлгани учун $M_1 + M_2 + M_3 = 0$ ёки $6 - 3x + 30 = 0$.
Бундан $x = 12$ м келиб чиқади.

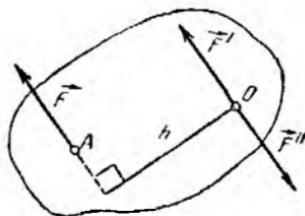
4- боб. ТЕКИСЛИКДАГИ КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

4.1- §. Кучни ўзига параллел кўчиришга оид лемма

Агар жисмга таъсир этувчи кучлар бир текисликда ётса, унга
текисликдаги кучлар системаси дейилади.

Кучнинг жисмга таъсирини ўзгартирмай, уни ўзига параллел
равишда бир нуқтадан келтириши маркази деб аталадиган иккинчи
нуқтага кўчириш масаласи 1804 йилда фран-
цуз олими Л. Пуансо томонидан исботлан-
ган қуйидаги лемма билан ифодаланади:

Лемма. Жисмнинг бирор нуқтасига
қўйилган куч, жисмда олинган ихтиёрый
келтириши марказига қўйилган худди шун-
дай кучга ва моменти берилган кучнинг
келтириши марказига нисбатан моменти-
га тенг жуфтга эквивалент бўлади.



4.1- расм.

Исбот. Жисмнинг A нуқтасига \vec{F} куч қўйилган бўлсин (4.1-
расм). Жисмнинг ихтиёрый O нуқтасига таъсир қизиги \vec{F} га парал-
лел $(\vec{F}', \vec{F}'') \in 0$ системани қўямиз. Бу ноллик системанинг ташкил
этувчилари $|\vec{F}'| = |\vec{F}''| = |\vec{F}|$ бўлсин. Натижада $\vec{F} \in (\vec{F}', \vec{F}'')$, ле-
кин (\vec{F}', \vec{F}'') кучлар системаси O нуқтага қўйилган \vec{F}' кучга ва
 (\vec{F}', \vec{F}'') жуфтга эквивалент бўлади. (\vec{F}', \vec{F}'') жуфтнинг моменти \vec{F} куч-
нинг O нуқтага нисбатан моментига тенглиги жуфтлар назариясидан
маълум: $M = M_O(\vec{F})$.

Шундай қилиб, A нуқтага қўйилган \vec{F} куч, келтириши маркази
 O га қўйилган $\vec{F}' = \vec{F}$ кучга ва моменти $M = M_O(\vec{F})$ бўлган (\vec{F}', \vec{F}'')
жуфтга эквивалент бўлиши исботланди. ■

Кучни ўзига параллел равишда кўчиришда ҳосил бўлган жуфтга
қўйилган жуфт дейилади.

4.2-§. Текисликдаги кучлар системасининг бош вектори ва бош моменти

Жисмнинг A_1, A_2, \dots, A_n нуқталарига бир текисликда ётувчи $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсир этсин (4.2-расм; аниқлик учун расмда $n=3$ ҳолини кўрамиз). Пуансо леммасига кўра, кучларни O марказга келтириш натижасида берилган кучлар системаси O нуқтага қўйилган $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n$ кучлар системаси ва моментлари

$$M_1 = M_O(\vec{F}_1), M_2 = M_O(\vec{F}_2), \dots, M_n = M_O(\vec{F}_n) \quad (4.1)$$

бўлган қўшилган жуфтлар системаси $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$ га эквивалент бўлади.

O марказга қўйилган $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ кучларни геометрик қўшиб, кучлар системасининг бош вектори деб аталадиган битта \vec{R}' кучни оламиз: $R' = \sum_{v=1}^n \vec{F}'_v$ ёки

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}_v. \quad (4.2)$$

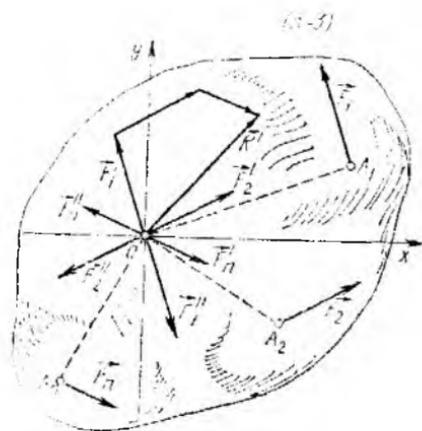
Бинобарин, кучлар системасининг бош вектори берилган (4.2) кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.

Бир текисликда ётувчи $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$ жуфтларини қўшиб, моменти M_O га тенг битта жуфтни оламиз. Бу жуфтнинг моменти (3.15) га асосан мазкур жуфтлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг: $M_O = \sum M_v$ ёки (4.1) га асосан

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}_v). \quad (4.3)$$

M_O га текисликдаги кучлар системасининг бош моменти дейлади. Демак, текисликдаги кучлар системасининг бирор марказга nisbatan бош моменти ташкил этувчи кучларнинг шу марказга nisbatan моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди: текисликдаги кучлар системасини бирор O марказга келтириш натижасида бу кучлар системаси келтириш марказига қўйилган бош вектор \vec{R}' га тенг битта куч



4.2-расм.

ҳамда моменти бош момент M_0 га тенг битта жуфтга эквивалент бўлади.

Бу усулга текисликдаги кучлар системасини Пуансо усули билан берилган марказга келтириш дейилади.

Умумий ҳолда текисликдаги кучлар системаси фақат \vec{R}' га эквивалент бўлмагани туфайли, \vec{R}' тенг таъсир этувчини ифодаламайди. Бош вектор берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлиб, келтириш марказига боғлиқ бўлмайди. Келтириш марказини ўзгартириш натижасида куч елкаси, демак бош момент ўзгаради.

Бош вектор \vec{R}' нинг миқдор ва йўналишини аналитик усулда аниқлаш учун келтириш марказида, кучлар ётган текисликда Ox ва Oy ўқларини ўтказамиз (4.2-расм). \vec{F}_v кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини X_v , Y_v ; \vec{R}' нинг проекцияларини R'_x ва R'_y билан белгилаймиз. Y ҳолда (4.2) ни координата ўқларига проекциялаб, R'_x ва R'_y ни аниқлаймиз:

$$R'_x = \sum X_v, \quad R'_y = \sum Y_v.$$

Бош векторнинг модули ва йўналишини қуйидагича аниқланади:

$$R' = \sqrt{(\sum X_v)^2 + (\sum Y_v)^2}, \quad (4.4)$$

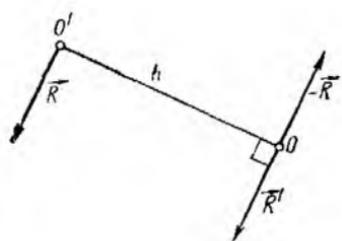
$$\cos(\vec{R}', x) = \frac{R'_x}{R'}, \quad \cos(\vec{R}', y) = \frac{R'_y}{R'}. \quad (4.5)$$

Агар бош вектор $R' = 0$, яъни берилган кучларга қўрилган куч кўйбурчаги ёниқ ҳамда бош момент $M_0 \neq 0$ бўлса, текисликдаги кучлар системасини моменти M_0 га тенг битта жуфт кучга келтирилади. Бу ҳолда келтириш марказини ўзгартирган билан бош момент ўзгармайди.

4.3-§. Текисликдаги кучлар системасини тенг таъсир этувчига келтириш. Вариньон теоремаси

Жисмга бир текисликда ёғувчи ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_v$) кучлар системаси таъсир этсин. Бу кучлар системасини ихтиёрий O марказга келтириб, O нуқтага қўйилган $\vec{R}' = \sum \vec{F}_v$ бош векторга тенг битта кучни ва моменти $M_0 = \sum M_0(\vec{F}_v)$ га тенг битта жуфт кучни оламиз. Қуйидаги икки ҳолни кўрамиз:

1. Танлаб олинган келтириш маркази O нуқта учун бош момент $M_0 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда текисликдаги кучлар системаси O нуқтага қўйилган битта \vec{R}' кучга эквивалент бўлади, яъни кўрилаёт-



4.3- расм.

ган ҳолда бош вектор тенг таъсир этувчи кучни ифодалайди: $\vec{R}' = \vec{R}$ ҳамда $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \propto \vec{R}$.

Шундай қилиб, берилган кучлар системасининг O нуқтага нисбатан бош momenti нолга тенг бўлса, бундай кучлар системаси таъсир чизиғи O нуқтадан ўтувчи тенг таъсир этувчи куч \vec{R} га келтирилади:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_v.$$

2. Умумий ҳолда текисликдаги кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини аниқлаш учун momenti M_O га тенг жуфтнинг ташкил этувчилардан бири $(-\vec{R})$ ни шундай танлаймизки, у миқдор жиҳатдан \vec{R}' га тенг ва йўналиши унга қарама-қарши бўлсин. Натижада 4.3-расмда тасвирланган $(\vec{R}, -\vec{R})$ жуфт кучни оламиз. Бу жуфтнинг momenti

$$M_O = R \cdot h$$

формула билан аниқлангани учун унинг елкаси

$$h = \frac{M_O}{R} = \frac{M_O}{R'} \quad (4.6)$$

тегисликдан топилади. Шундай қилиб, текисликдаги берилган кучлар системаси \vec{R}' кучга ва айланиш йўналиши M_O га мос бўлган $(\vec{R}', -\vec{R}')$ жуфтга эквивалент бўлади, лекин $(\vec{R}', -\vec{R}') \propto 0$ бўлгани учун берилган кучлар системаси O нуқтадан $OO' = h$ масофада ўтувчи O' нуқтага қўйилган битта $\vec{R} = \vec{R}' = \sum \vec{F}_v$ кучга эквивалент бўлади. Бинобарин, $\vec{R}' \neq 0$, $M_O \neq 0$ бўлган ҳолда текисликдаги кучлар системаси \vec{R} тенг таъсир этувчига келтирилади.

Вариньон теоремаси. Текисликдаги кучлар системаси тенг таъсир этувчисининг шу текисликдаги ихтиёрый нуқтага нисбатан momenti, ташкил этувчи кучлардан мазкур нуқтага нисбатан олинган momentларнинг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни

$$M_O(\vec{R}) = \sum M_O(\vec{F}_v). \quad (4.7)$$

Исбот. 4.3-расмдан кўраимизки, \vec{R} тенг таъсир этувчининг O нуқтага нисбатан momenti $M_O(\vec{R}) = R \cdot h$. (4.6) ни эътиборга олсак,

*)бунда $M_O > 0$ деб фараз қилдик; агар $M_O < 0$ бўлса, $M_O = -R \cdot h$, $h = \frac{|M_O|}{R}$ формула ўринли бўлади.

$M_O(\vec{R}) = M_O$. Ўз навбатида (4.3) га кўра M_O бош момент қўйидагича аниқланади: $M_O = \sum M_O(\vec{F}_v)$. Охириги иккита тенгликларни солиштириб, (4.7) ўрилли бўлишини кўрамыз. ■

4.4-§. Текисликдаги кучлар системасининг мувозанат шартлари

Юқорида кўрганимиздек, текисликдаги кучлар системасини бир нуқтага келтириш натижасида бундай кучлар системаси $\vec{R}' \neq 0$ бўлса, тенг таъсир этувчи кучга; $\vec{R}' = 0$, $M_O \neq 0$ бўлса, битта жуфтга эквивалент бўлади. Лекин текисликдаги кучлар системасини шу текисликдаги ихтиёрий O нуқтага келтириш натижасида бир вақтнинг ўзида бош вектор \vec{R}' ҳам, бош момент M_O ҳам нолга тенг бўлиши мумкин, яъни

$$\vec{R}' = 0, \quad M_O = 0, \quad (4.8)$$

ёки

$$\sum \vec{F}_v = 0, \quad \sum M_O(\vec{F}_v) = 0. \quad (4.8')$$

(4.8) ёки (4.8') тенгламалар текисликдаги кучлар системаси мувозанатининг зарур ва старли шартини ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам (4.8) даги шартнинг бирорчаси бажарилмаса, масалан, $\vec{R}' \neq 0$ бўлса, текисликдаги кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилади ёки $M_O \neq 0$ бўлса, кучлар системаси жуфтга келтирилади. Натижада ҳар иккала ҳолда ҳам кучлар системаси мувозанатда бўла олмайди. (4.8) нинг старлилиги шундан иборатки, $\vec{R}' = 0$ бўлса, текисликдаги кучлар системаси momenti M_O га тенг жуфтга келтирилади, лекин $M_O = 0$ бўлгани учун бу кучлар системаси мувозанатда бўлади.

(4.4) ни эътиборга олсак, (4.8) ёки (4.8') ўрнига текисликдаги кучлар системаси мувозанати шартларининг аналитик ифодаси учун қўйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\sum X_v = 0, \quad \sum Y_v = 0, \quad \sum M_O(\vec{F}_v) = 0. \quad (4.9)$$

Демак, текисликдаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучларнинг шу текисликда ётувчи иккита координата ўқларига проекцияларининг йиғиндилари алоҳида-алоҳида нолга тенг ва шу текисликдаги ихтиёрий нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва старлидир.

Текисликдаги кучлар системаси мувозанатининг яна қўйидаги шартларини келтирамыз.

1. Текисликдаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун барча кучларнинг шу текисликда ётувчи ихтиёрий икки нуқта-нинг ҳар бирига нисбатан моментларининг йиғиндиси алоҳида-

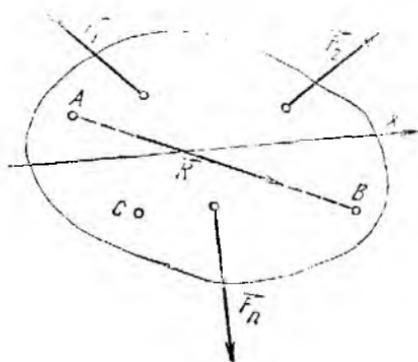
алоҳида нолга тенг ва мажкур нуқталардан ўтувчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлмаган ўқдаги проекцияларининг йиғиндисини нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир:

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum X_v = 0. \quad (4.10)$$

Кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу шартларнинг бажарилиши зарурлиги бевосита (4.8) дан келиб чиқади. Чунки (4.10) дан бирортаси бажарилмаса ёки $M_A \neq 0$ ($M_B \neq 0$), ёки $\vec{R}' \neq 0$ бўлиб, бундай кучлар системаси мувозанатлашмайди. (4.10) даги шартлар система мувозанатда бўлиши учун етарли эканлигини исботлаймиз. (4.10) даги шартлардан биринчи тенгликнинг бажарилиши A нуқтага нисбатан бош моментнинг нолга тенглигини ифодалайди: $M_A = 0$. Бу ҳолда текисликдаги кучлар системаси A нуқтадан ўтувчи тенг таъсир этувчига келтирилиши мумкин (4.4-расм). (4.10) нинг иккинчиси ва Вариньон теоремасига асосан $M_B(\vec{R}) = \sum M_B(\vec{F}_v) = 0$ тенглик бажарилади. Бинобарин, $\vec{R} = 0$ ёки $\vec{R} \neq 0$ бўлиб, \vec{R} нинг таъсир чизиғи B нуқтадан ҳам ўтади; яъни унинг таъсир чизиғи AB да ётади. (4.10) нинг учинчи шартига кўра $R_x = \sum X_v = 0$. x ўқ AB га перпендикуляр бўлмагани учун охириги тенглик фақат $\vec{R} = 0$ бўлгандагина бажарилади, яъни кучлар системаси мувозанатда бўлади.

2. Текисликда ўтувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун барча кучларнинг шу текисликдаги бир тўғри чизиққа ётмайдиغان учта нуқтанинг ҳар бирига нисбатан моментларининг йиғиндисини алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир:

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_C(\vec{F}_v) = 0. \quad (4.11)$$



4.1-расм.

Бу шартларнинг зарурлиги худди олдинги ҳолдагидек исботланади. (4.11) шартлар система мувозанатда бўлиши учун етарли эканлиги тескарисини фараз қилиш билан исботланади. (4.11) шартлар бажарилишига қарамай, кучлар системаси мувозанатда бўлмагани учун берилган система бир вақтнинг ўзида A , B , C нуқталардан ўтувчи тенг таъсир этувчига келтирилиши керак (4.4-расм). Бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки A , B , C нуқталар бир тўғри чи-

зиқда ётмайди. Бинобарин, (4.11) шартлар бажарилса, кучлар системаси мувозанатда бўлади.

4.5-§. Текисликдаги параллел кучларнинг мувозанат шартлари

Бир текисликда ётувчи ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) параллел кучлар системаси берилган бўлсин. Оу ўқни кучларнинг таъсир чизигига параллел йўналтирамиз (4.5-расм). Барча кучлар Ox ўққа перпендикуляр бўлгани учун ҳар бирининг Ox ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлади. Натижада (4.9) нинг биринчи тенгламаси айниятга айланади ва текисликдаги параллел кучларнинг мувозанат шартлари қуйидагича ёзилади:

$$\sum Y_v = 0, \quad \sum M_O(\vec{F}_v) = 0. \quad (4.12)$$

(4.12) дан кўрамизки, текисликдаги параллел кучлар мувозанатда бўлиши учун ташкил этувчи кучларнинг алгебраик йиғиндисини ва шу текисликдаги ихтиёрий нуқтага нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисини алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

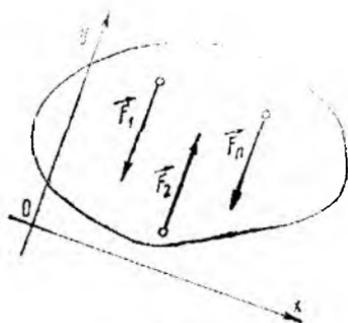
Агар бу кучлар системаси учун (4.10) ёки (4.11) ни татбиқ этсак, (4.12) ўрнига қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_v) = 0.$$

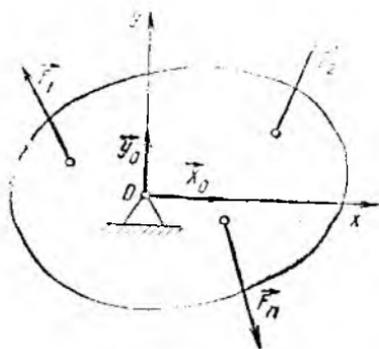
4.6-§. Ричагнинг мувозанати

О нуқтадан Oxy текисликка перпендикуляр ўтган ўқ атрофида шу текисликда ётувчи $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсирида айлана оладиган қаттиқ жисмга ричаг дейилади (4.6-расм).

Берилган кучлар қаторига O нуқта боғланиш реакция кучининг ташкил этувчилари \vec{X}_0 ва \vec{Y}_0 ларни қўшамиз. У ҳолда (4.9) тенгламалар қуйидагича ёзилади:



4.5-расм.



4.6-расм.

$$X_0 + \sum X_v = 0; Y_0 + \sum Y_v = 0; \sum M_0(\vec{F}_v) = 0. \quad (4.13)$$

(4.13) нинг биринчи иккита тенгламасидан O нуқтанинг реакцияси X_0, Y_0 аниқланади:

$$X_0 = -\sum X_v, Y_0 = -\sum Y_v$$

(4.13) нинг учинчи тенгламаси

$$\sum M_0(\vec{F}_v) = 0$$

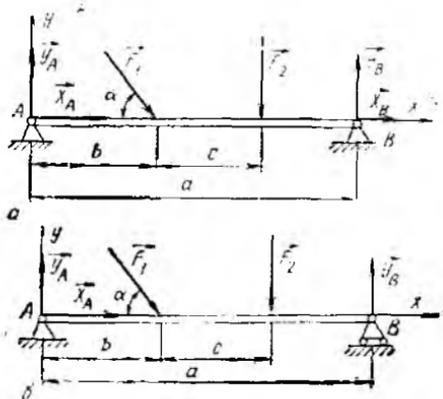
да O нуқтанинг реакция кучлари қатнашмайди. Шу сабабли бу тенглама *ричагнинг мувозанат шартини* ифодалайди. Бу тенгламадан кўрамизки, *ричаг мувозанатда бўлиши учун унга қўйилган барча кўчларнинг таянч нуқтасига нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

4.7-§. Статик аниқ ва статик ноаниқ масалалар

Берилган масалада номаълумлар сони мувозанат тенгламалари сонига тенг бўлса, бундай масалага *статик аниқ масала*, аксинча номаълумлар сони мувозанат тенгламалари сонидан ортиқ бўлса, *статик ноаниқ масала* дейилади.

Иккала учи қўзғалмас цилиндрик шарнирли таянчга бириктирилган AB балкага \vec{F}_1 ва \vec{F}_2 кўчлар таъсир этсин (4.7-расм, а). Ўлчовлар расмда кўрсатилган. Балкага таъсир этувчи берилган \vec{F}_1 ва \vec{F}_2 кўчлар қаторига A ва B таянчлар реакция кўчларининг ташкил этувчилари $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ и қўшиб, уни эркин жисм деб қараймиз. Бу кўчлар текисликдаги кўчлар системасини ташкил этади. Бинобарин, балка учун учга мувозанат тенгламасини тузиш мумкин. Бу мувозанат тенгламаларида X_A, Y_A, X_B, Y_B тўртта номаълум реакция кўчлари қатнашади. Шу сабабли бу учта тенгламалар воситасида номаълумларни аниқлаш мумкин эмас, яъни статик ноаниқ масаладир.

Бу масала статик аниқ бўлиши учун таянчлардан бирини (масалан, B таянчини) қўзғалувчан шарнирли таянч билан алмаштириш мумкин (4.7-расм, б). У ҳолда B нуқтада вертикал юқорига йўналган битта \vec{Y}_B кўчга эга бўламиз ҳамда номаълумлар ва тенгламалар сони ўзаро тенг бўлади. Энди у статик аниқ масалага айланди; номаълумларни мувозанат тенгламалари асосида топиш мумкин.



4.7-расм.

Назарий механикада статик аниқ масалалар ечилади. Статик воаниқ масалаларни ешил усуллари материаллар қаршилиги ва қурилиш механикаси курсида ўрганилади.

4.8- §. Тақсимланган кучлар

Техникада турли ишшоотларнинг мувозанатини аниқлашда уларнинг айрим нуқталарига қўйилган кучлар билан бирга ҳажм, сирт ёки чизиқ кесмалари бўйича маълум қонун асосида тақсимланган кучларни ҳисобга олишга тўғри келади. Бундай кучлар ҳажм, сирт ёки чизиқ бирлигига тўғри келадиган катталиқ — тақсимланган кучларнинг интенсивлиги билан характерланади.

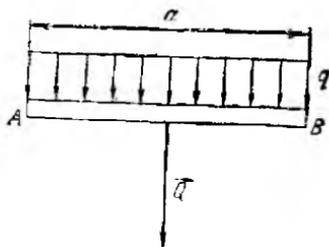
Жисмларга, асосан, параллел ёки бир нуқтада кесишувчи тақсимланган кучлар таъсир этади. Масалан, жисм зарраларининг оғирлик кучи ҳажм бўйича, сувнинг тўғон сиртига босим кучи сирт бўйича тақсимланган параллел кучларни ифодалайди. Бир текисликда жойлашган берилган чизиқ бўйича тақсимланган кучларнинг айрим турлари устида батафсил тўхталамиз. Бундай кучларнинг интенсивлиги H/m да ўлчанади.

1. Тўғри чизиқ кесмаси бўйича текис тақсимланган кучлар (4.8- расм). Бундай кучларнинг интенсивлиги q ўзгармас катталиқ бўлади. AB кесма бўйича текис тақсимланган кучларни AB нинг ўртасига қўйилган.

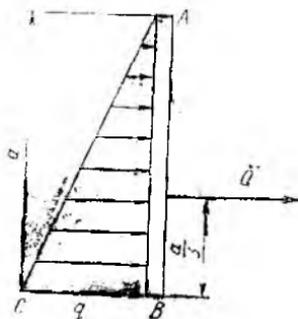
$$Q = aq \quad (4.14)$$

тег таъсир этувчи куч билан алмаштириш мумкин.

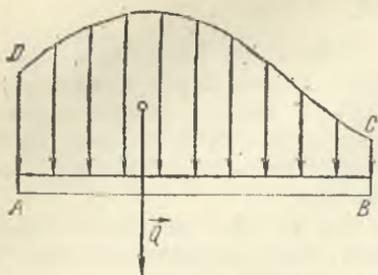
2. Тўғри чизиқ кесмаси бўйича чизиқли қонун бўйича тақсимланган кучлар (4.9- расм). Узунлиги a га тенг AB стерженга чизиқли қонун бўйича тақсимланган кучлар таъсир этсин. Бундай кучларга мисол тариқасида сув босим кучининг тўғон баландлиги бўйича тақсимланишини олиш мумкин. Бундай кучларнинг интенсивлиги q ўзгарувчан бўлиб, полдан то максимал қиймати q_{max} гача ўзгаради. Қўрилаётган ҳолда тақсимланган кучларнинг тенг таъсир этувчиси ABC учбурчакнинг BC томонидан $a/3$ масофага қўйилган ҳамда



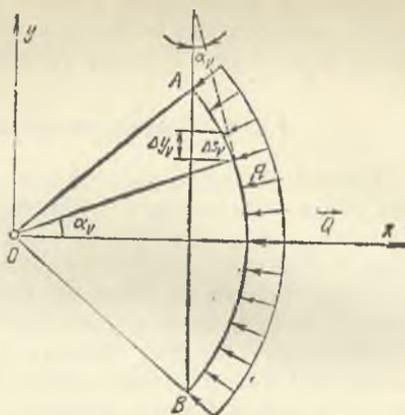
4.8- расм.



4.9- расм.



4.10- расм,



4.11- расм.

$$Q = \frac{1}{2} a q_{max} \quad (4.15)$$

бўлади.

3. Тўғри чизиқ кесмаси бўйича ихтиёрий қонун асосида тақсимланган кучлар. Бундай кучларнинг тенг таъсир этувчиси \vec{Q} миқдор жиҳатдан мос масштабда ўлчанган ABCD шакл юзасига тенг бўлади ҳамда берилган юзанинг оғирлик марказига қўйилади (юзанинг оғирлик маркази 7.2- § да аниқланади) (4.10-расм). Бу ҳолга метро ва бошқа ерости иншоотларига тупроқнинг таъсир кучи мисол бўла олади.

4. Айлана ёйи бўйича текис тақсимланган радиал кучлар (4.11-расм). Ox ўқни айлана ёйи AB нинг симметрия ўқи бўйлаб йўналтирсак, радиал кучларнинг Oy ўқидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади. Шу сабабли бундай кучларнинг тенг таъсир этувчиси \vec{Q} Ox ўқ бўйича йўналади ва унинг миқдори мазкур кучларнинг Ox ўқидаги проекцияларининг йиғиндисига тенг бўлади:

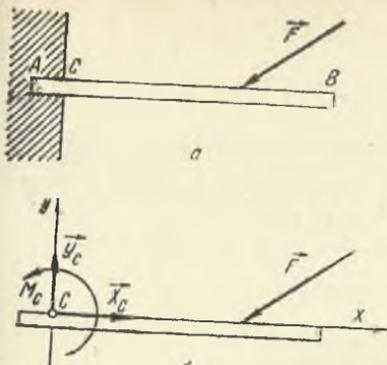
$$Q = |Q_x| = \sum q \Delta s_v \cos \alpha_v,$$

бунда $q \Delta s_v$ — узунлиги Δs_v га тенг ёй бўлакчасига таъсир этувчи куч; α_v — бу куч билан Ox ўқ орасидаги бурчак, 4.11-расмдан кўра миқдори, $\Delta s_v \cos \alpha_v = \Delta y_v$ бўлгани учун

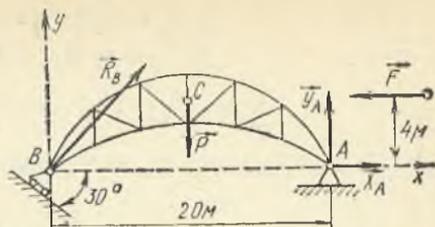
$$Q = \sum q \Delta y_v = q \sum \Delta y_v = q \cdot AB. \quad (4.16)$$

Бунда AB билан AB ёйни тортиб турувчи ватар белгиланган.

Шундай қилиб, айлана ёйи бўйича текис тақсимланган радиал кучларнинг тенг таъсир этувчиси \vec{Q} — AB ёйни тортиб турувчи AB ватар узунлигининг тақсимланган кучлар интенсивлиги q га кўпайтмасига тенг.



4.12- расм.



4.13- расм.

5. Деворга қисиб маҳкамланган балкага таъсир этувчи тақсимланган кучлар. AB балканинг AC қисми деворга қисиб маҳкамланган бўлсин

(4.12- расм). Бино балконларининг асоси деворга худди шундай бириктирилади.

Агар балканинг AC қисмини боғланишдан бўшатиб, деворнинг унга таъсирини тақсимланган кучлар билан алмаштирсак, бу кучларни C нуқтага келтириш натижасида тақсимланган кучларнинг бош векторига тенг \vec{R}_C кучни ва моменти тақсимланган кучларнинг бош моменти M_C га тенг жуфтни оламиз. M_C реакция жуфтнининг моменти дейилади. \vec{R}_C нинг йўналиши аниқ бўлмагани учун уни худди қўзғалмас шарнир реакцияси каби x ва y ўқларнинг мусбат йўналиши бўйича йўналган ташкил этувчилардан иборат деб қараймиз. Шундай қилиб, деворга қисиб маҳкамланган балканинг деворга қисилган қисмидаги реакция кучи, шарнирли боғланишдан фарқли ўлароқ номаълум \vec{R}_C реакция кучидан ташқари моменти номаълум реакция жуфтнининг моменти га тенг жуфтга эквивалент бўлади. X_C , Y_C ва M_C лар балканинг мувозанат тенгламаларидан аниқланади.

4.1- масала. Арка шаклидаги ферманинг A нуқтаси қўзғалмас шарнирли таянчда ва B нуқтаси горизонт билан 30° бурчак ташкил қилган силлиқ текисликдаги қўзғалувчан шарнирли таянчда туради. Ораліқ $AB = 20$ м. Ферманинг сөнрлігн $P = 100$ кН. Шамол босимининг тенг таъсир этувчиси $P = 20$ кН бўлиб, унинг таъсир чизиги AB га параллел ҳолда ундан 4 м баландикдан ўтади. Таянч реакциялари топилисн (4.13- расм).

Ечиш. 1. Ферманинг мувозанатини текшираимиз.

2. Координата ўқларини 4.13- расмдагидек танлаб оламиз.

3. Фермага таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз. Фермага C нуқтага қўйилган $P = 100$ кН ва AB га параллел $P = 20$ кН кучлар таъсир этади. B нуқтадаги қўзғалувчан таянч реакция кучи таянч текислигига перпендикуляр йўналади; қўзғалмас шарнирли A таянчнинг реакция кучини \vec{X}_A ва \vec{Y}_A ташкил этувчиларга ажратамиз.

4. Фермага таъсир этув \vec{P} , \vec{F} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{R}_B кучлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.13- расмдан фойдаланиб, мувозанат тенгламалари (4.9) ни тузамиз:

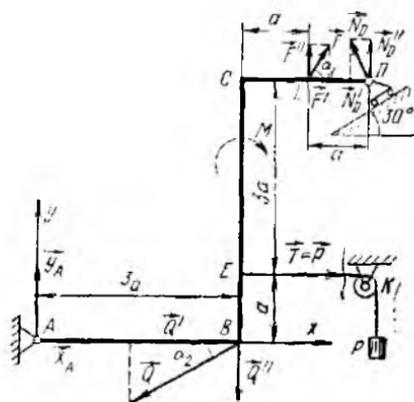
$$\begin{aligned}\sum X_v &= 0; R_B \cos 60^\circ + X_A - F = 0, \\ \sum Y_v &= 0; R_B \cos 30^\circ - P + Y_A = 0, \\ \sum M_B(\vec{F}_v) &= 0; -P \cdot 10 + Y_A \cdot 20 + F \cdot 4 = 0.\end{aligned}$$

Бу тенгламалардан R_B , X_A ва Y_A нomaълумларни аниқлаймиз:

$$Y_A = \frac{P \cdot 10 - F \cdot 4}{20} = 46 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{P - Y_A}{\cos 30^\circ} = 62,36 \text{ кН},$$

$$X_A = F - R_B \cos 60^\circ = -11,18 \text{ кН}.$$



4.14-расм.

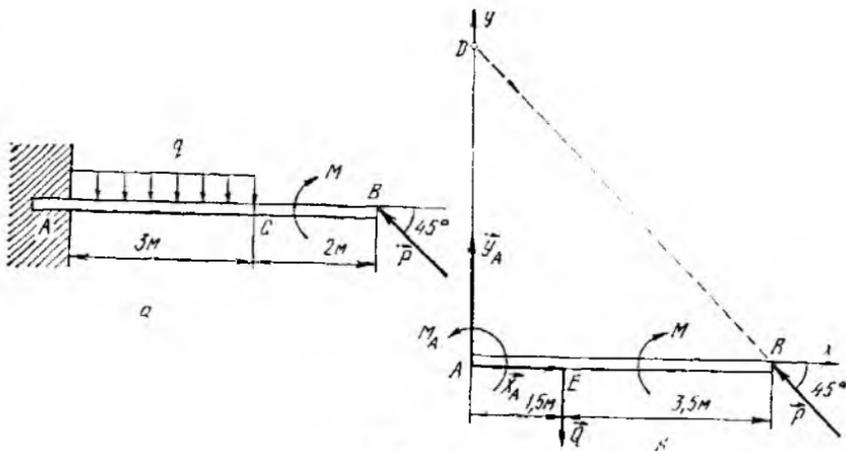
4.2-масала. Бир-бирига бирикмаган стерженлардан ташкил топган $ABCD$ рама A нуқтада қўзғалмас шарнирли таянчга бириктирилган, B нуқтада эса горизонт билан 30° бурчак ташкил этувчи силлиқ текисликдаги қўзғалувчан таянчда туради. E нуқтага K блокдан ўтган ва $P = 25$ кН юк осилган трос боғланган. Рамага momenti $M = 60$ кНм бўлган жуфт куч, L нуқтада горизонт билан $\alpha_1 = 60^\circ$ бурчак ташкил этувчи $P = 10$ кН ва E нуқтада горизонтга $\alpha_2 = 30^\circ$ бурчак остида $Q = 30$ кН кучлар таъсир этади. K блокдаги ишқаланиш кучини эътиборга олмай, мазкур кучлар таъсирида A ва E таянчларда ҳосил бўладиган реакция кучлари аниқлансин. Ҷламлар 4.14-расмда кўрсатилган бўлиб, $\alpha = 0,5$ м.

Ечиш. 1. $ABCD$ раманинг мувозанатини текшираимиз.

2. Координата ўқларини 4.14-расмдагидек йўналтирамиз.

3. $ABCD$ рамага momenti $M = 60$ кНм жуфт куч, L нуқтада $\alpha_1 = 60^\circ$ бурчак остида $F = 10$ кН, B нуқтада $\alpha_2 = 30^\circ$ бурчак остида $Q = 30$ кН ва E нуқтада троснинг таранглик кучи \vec{T} (миқдори жиҳатидан $T = P$) таъсир этади. A шарнирнинг реакция кучини \vec{X}_A , \vec{Y}_A ташкил этувчилардан иборат деб қараймиз. Текислик силлиқ бўлгани учун D таянчдаги реакция кучи \vec{N}_D мазкур текисликка перпендикуляр йўналади.

4. $ABCD$ рамага таъсир этувчи momenti M га тенг жуфт ва \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Q} , \vec{T} , \vec{F} , \vec{N}_D кучлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.14-расмдан фойдаланиб, (4.8) мувозанат тенгламаларини тузамиз. Бунда \vec{F} , \vec{Q} , \vec{N}_D кучларнинг A нуқтага нисбатан моментларини ҳисоблаш учун Вариньон теоремасидан фойдаланамиз, яъни \vec{F} , \vec{Q} ва \vec{N}_D кучларни \vec{F}' , \vec{F}'' , \vec{Q}' , \vec{Q}'' , \vec{N}_D' , \vec{N}_D'' ($F' = F \cos 60^\circ$, $F'' = F \sin 60^\circ$, $Q' = Q \cos 30^\circ$, $Q'' = Q \sin 30^\circ$, $N_D' = N_D \cos 60^\circ$, $N_D'' = N_D \sin 60^\circ$) ташкил этувчиларга ажратиб, $M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}') + M_A(\vec{F}'')$, $M_A(\vec{Q}) = M_A(\vec{Q}') + M_A(\vec{Q}'')$, $M_A(\vec{N}_D) = M_A(\vec{N}_D') + M_A(\vec{N}_D'')$



4.15- расм.

эқанлигини назарда тутамиз. Y ҳолда

$$\sum X_v = 0; X_A - Q \cos 30^\circ + T + F \cos 60^\circ - N_D \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; Y_A - Q \sin 30^\circ + F \sin 60^\circ + N_D \sin 60^\circ = 0,$$

$$\sum M_A (\vec{F}_v) = 0; -3a Q \sin 30^\circ - aT - M - 4a F \cos 60^\circ + 4a F \sin 60^\circ + \\ + 5a N_D \sin 60^\circ + 4a N_D \cos 60^\circ = 0.$$

Бу тенгламаларга берилган катталикларни қўйиб, таянчлардаги реакция кучларини аниқлаймиз:

$$N_D = 27,7 \text{ кН}; X_A = 9,83 \text{ кН}; Y_A = -17,648 \text{ кН}.$$

Y_A нинг манфий қийматга эга бўлиши, унинг ҳақиқатда вертикал настига йўналишини ифодалайди.

4.3- масала. AB балка A нуқтада деворга қисиб маҳкамланган (4.15- расм, a). Агар $P = 4 \text{ кН}$, $M = 2 \text{ кНм}$, $q = 1,5 \text{ кН/м}$ бўлса, A таянчдаги реакция кучларини аниқлансин.

Ечиш. Биринчи усул. 1. AB балканинг мувозанатини текшираемиз. Балка A нуқтада деворга қисиб маҳкамланган.

2. Координата ўқларини 4.15- расм, b дагидек танлаб оламиз.

3. AB балкага таъсир этувчи кучларни кўрсатаемиз. Балкага B нуқтага қўйилган $P = 4 \text{ кН}$ куч, momenti $M = 2 \text{ кНм}$ жуфт куч таъсир этади. AC оралиқдаги текис тақсимланган кучларни AC нинг ўртасидаги E нуқтага қўйилган $Q = q \cdot AC = 4,5 \text{ кН}$ вертикал настига йўналган куч билан алмаштираемиз, A нуқтадаги боғланиш шу нуқта кўчишини чеклаши билан бирга балканинг вертикал текисликда мазкур нуқта атрофида айланишига ҳам тўсқинлик қилади. Шу сабабли балка қисилган жойдаги боғланишини \vec{X}_A , \vec{Y}_A реакция кучлари ва momenti M_A га тенг реакция жуфт momenti билан алмаштираемиз (4.15- расм, b).

4. AB балкага таъсир этаётган \vec{P} , \vec{Q} кучлар, \vec{X}_A ҳамда \vec{Y}_A реакция кучлари ва M , M_A momentli жуфтлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.15- расм, b дан фойдаланиб, мувозанат тенгламалари (4.9) ни тузамиз:

$$\sum X_v = 0; X_A - P \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y_v = 0; Y_A - Q + P \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum M_A (\vec{F}_v) = 0; M_A - AE \cdot Q - M + P \cdot AB \cos 45^\circ = 0.$$

Бу тенгламалардан X_A , Y_A , M_A номаълумларни аниқлаймиз:

$$M_A = -5,39 \text{ кНм}, X_A = 2,828 \text{ кН}, Y_A = 1,672 \text{ кН}.$$

M_A шунг манфий қийматга эга бўлиши, ҳақиқатда реакция моменти соат стрелкаси бўйича йўналганлигини кўрсатади.

Иккинчи усул. Бу усулда ҳам масаланинг боши худди биринчи усулдек ечиллади. \vec{P} ва \vec{Y}_A кучларнинг таъсир чизиқлари кесилган нуқтани D билан белгилаймиз (4.15-расм, б) ҳамда $CL = AB = 5$ м эканлигини назарда тутиб, AB балка учун (4.10) мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; M_A - AE \cdot Q - M + P \cdot AB \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum M_B(\vec{F}_v) = 0; -M + EB \cdot Q - AB \cdot Y_A + M_A = 0;$$

$$\sum M_D(\vec{F}_v) = 0; M_A + AD \cdot X_A - AE \cdot Q - M = 0.$$

Бу тенгламалардан M_A , X_A , Y_A номаълумларни аниқлаймиз:

$$M_A = -5,39 \text{ кНм}, X_A = 2,828 \text{ кН}, Y_A = 1,672 \text{ кН}.$$

4.9-§. Бир текисликда ётувчи бир неча жисмдан ташкил топган системанинг мувозанати

Бир текисликда ётувчи, бир-бири билан боғланган бир неча жисмдан ташкил топган системанинг мувозанатини аниқлаш учун системага таъсир этувчи кучларни икки гурпулага: ташқи ва ички кучларга ажратамиз. Система таркибига кирмайдиган жисмларнинг берилган системага таъсир кучлари (масалан, оғирлик кучи, ташқи боғланган реакция кучлари) *ташқи кучлар* дейилади. Система таркибига кирувчи жисмларнинг бир-бирига ўзаро таъсир кучларига *ички кучлар* дейилади. Ньютоннинг учинчи қонунига кўра ички кучлар жуфт-жуфт равишда миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади.

Бир текисликда ётувчи n та жисмдан ташкил топган система мувозанатда бўлса, бундай система учун текисликдаги кучлар системасининг учта мувозанат тенгламалари ўринли бўлади ва бу тенгламаларда ички кучлар қатнашмайди. Лекин барча номаълумларни аниқлаш учун бу шарглар етарли бўлмайди. Бундай масалани ечиш учун $n - 1$ та жисмни алоҳида ажратиб олиб, уларнинг ҳар бири учун учтадан мувозанат тенгламаларини тузиш мумкин. Натижада $3 \cdot (n - 1) = 3n - 3$ та мувозанат тенгламаларини оламиз. Системадан ажратиб олинган бирор жисмнинг мувозанати текшириляётганда бу жисмга системани ташкил этувчи бошқа жисмларнинг таъсири кучлар билан алмаштирилади. Бу кучлар система учун ички кучлар ҳисобланади, ammo ажратиб олинган жисм учун ташқи кучлар қаторига киради.

Бундай масалаларни яна қуйидаги усулда ечиш мумкин. n та жисмдан ташкил топган системанинг мувозанатини аниқлаш мақсадда ҳар бир жисмни худди юқоридагидек ажратиб оламиз ва улар учун учтадан мувозанат тенгламаларини тузамиз. Натижада яна $3n$ та мувозанат тенгламаларини оламиз.

Системани ташкил этувчи жисмлар ўзаро эркин таянч, шарнир ёки эгилувчан ва чўзилмайдиган ип (вазнсиз стержень) воситасида боғланган бўлиши мумкин.

4.4-масала. Тўғри бурчак шаклида эгилган AEC балка ва CB доирaviй арка C нуқтада шарнир воситасида бириктирилган (4.16-расм). AEC балка A нуқтада ерга қоқиб маҳкамланган. B нуқтада горизонтга шарнирли бириктирилган вертикал стерженга CB арка шарнир воситасида маҳкамланган. CB аркага таъсир этувчи жуфт стрелка билан кўрсатилган. Қўйилган кучлар ва ўлчовлар 4.16-расмда белгиланган. Берилган кучлар таъсирида A ва B таянчда ҳосил бўладиган реакция кучлари ҳамда жисмларни туташтирувчи C шарнирдаги реакция кучи аниқлансин.

Ечиш. 1. AEC балка ва CB аркадан ташкил толган системанинг мувозанатини текшираемиз.

2. Координата ўқларини 4.17-расмдагидек йўналтирамиз.

3. Системага таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз (4.17-расм). AEC балканинг EC бўлагига горизонт билан $\alpha = 60^\circ$ бурчак ташкил этувчи $F = 150$ кН куч қўйилган. Балканинг AE бўлагига таъсир этувчи чизикли қопуи бўйича тақсимланган кучларни A нуқтадан $AQ = \frac{1}{3} \times$

$\times AE = \frac{4}{3}$ м масофада Q нуқтага қўйилган, (4.15) га асосан топиладиган

$$Q_1 = \frac{1}{2} AE \cdot q_{max} = 80 \text{ кН}$$

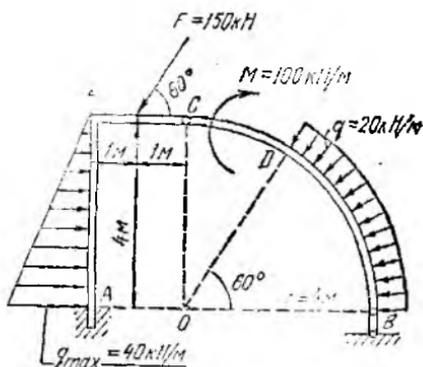
горизонтал ўннга йўналган куч билан алмаштирамиз. CB ёй бўйича текис тақсимланган радиал кучларни унинг ўртасига қўйилган ва (4.16) га асосан DB ватарининг узунлиги билан тақсимланган кучларнинг интенсивлиги кўпайтмасига тенг

$$Q_2 = |DB| \cdot q = 80 \text{ кН}$$

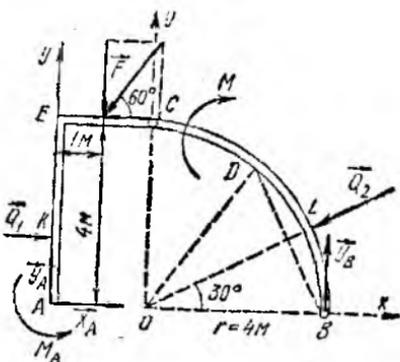
куч билан алмаштирамиз. \vec{Q}_2 куч радиус бўйлаб O марказга йўналади.

B нуқтадаги реакция кучи \vec{Y}_B ни стержень бўйлаб вертикал юқорига йўналтирамиз. A нуқтадаги боғланиш шу нуқтанинг кўчишини чеклаши билан бирга стерженьнинг вертикал текисликда маъкур нуқта атрофида айланишига ҳам тўсқинлик қилади. Шу сабабли стержень ерга қоқилган жойдаги боғланишни \vec{X}_A , \vec{Y}_A реакция кучлари ва моменти M_A га тенг реакция жуфт моменти билан алмаштирамиз.

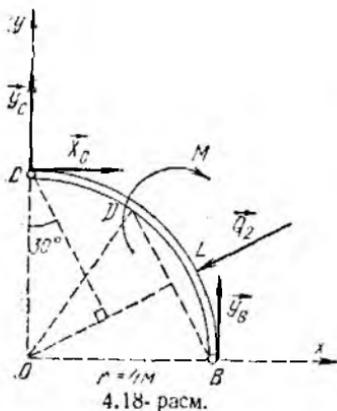
4. Системага таъсир этувчи \vec{F} , \vec{Q}_1 , \vec{Q}_2 , \vec{Y}_B , \vec{X}_A , \vec{Y}_A кучлар ва M_A , M моменти жуфтлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.17-расмдан



4.16-расм.



4.17-расм.



4.18-расм.

фойдаланиб, учта мувозанат тенгламаларини тузамиз. Бунда \vec{F} кучнинг A нуқтага нисбатан моментини аниқлаш учун унинг x ва y ўқларига параллел ташкил этувчиларидан A нуқтага нисбатан момент олиш мумкин. Худди шунингдек, \vec{Q}_2 ни таъсир чизиги бўйлаб O нуқтага кўчъриб, унинг x ва y ўқларидаги ташкил этувчиларидан A нуқтага нисбатан момент олиш мумкин. Патижада (4.9) ни қуйидагича ёзиш мумкин;

$$\sum X_v = 0; X_A + Q_1 - F \cos 60^\circ - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_v = 0; Y_A - F \cos 30^\circ - Q_2 \cos 60^\circ + Y_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; M_A - Q_1 \cdot \frac{4}{3} + F(-\cos 30^\circ + 4 \cos 60^\circ) - M - Q_2 \cdot 2 \cos 60^\circ + Y_B \cdot 6 = 0. \quad (3)$$

Бу тенгламаларда тўртта номаълум реакция кучлари: X_A, Y_A, M_A, Y_B лар қатнашади. Шу сабабли системани алоҳида жиесларга ажратиб бирортаси учун мувозанат тенгламаларини тузиш мумкин. Масалан, CB аркани алоҳида ажратиб, унга AEC балканинг таъсирини \vec{X}_C, \vec{Y}_C кучлар билан алмаштирамиз ва 4.18-расмдан фойдаланиб учта мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum X_v = 0; X_C - Q_2 \cos 30^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_v = 0; Y_C - Q_2 \cos 60^\circ + Y_B = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_v) = 0; -M - Q_2 \cdot r \cos 30^\circ + Y_B \cdot r = 0. \quad (6)$$

(1), (4) ва (6) тенгламалардан X_A, X_C ва Y_B ларни аниқлаймиз

$$X_A = -Q_1 + F \cos 60^\circ + Q_2 \cos 30^\circ = 64,28 \text{ кН},$$

$$X_C = Q_2 \cos 30^\circ = 69,28 \text{ кН},$$

$$Y_B = \frac{M + Q_2 \cdot r \cos 30^\circ}{r} = 94,28 \text{ кН}.$$

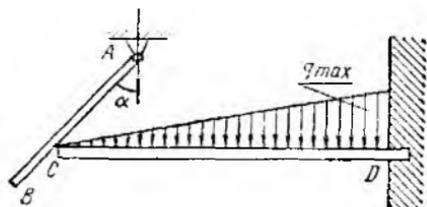
Y_B нинг бу қиёматларини (5), (2) ва (3) га қўйиб, Y_C, Y_A ва M_A ларни аниқлаймиз:

$$Y_C = Q_2 \cos 60^\circ - Y_B = -44,28 \text{ кН},$$

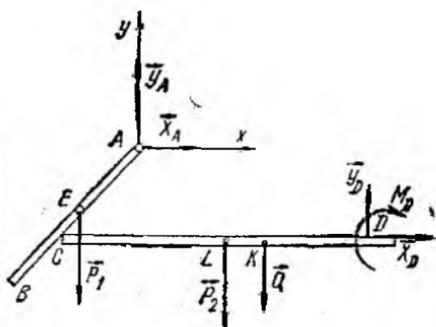
$$Y_A = F \cos 30^\circ + Q_2 \cos 60^\circ - Y_B = 75,62 \text{ кН},$$

$$M_A = Q_1 \cdot \frac{4}{3} + F(-\cos 30^\circ + 4 \cos 60^\circ) + M + Q_2 \cdot 2 \cos 60^\circ - Y_B \cdot 6 = -147,61 \text{ кН}.$$

4.5-масала. Оғирлиги $P_1 = 180 \text{ Н}$ бўлган бир жипсли AB стержень A шарнир билан ишига маҳкамланган бўлиб, у оғирлиги $P_2 = 108 \text{ Н}$ бўлган бир жипсли CD стерженьнинг C учига эркин тиралиб туради (4.19-расм). AB стержень вертикал билан $\alpha = 45^\circ$ бурчак ташкил этади ҳамда $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$. Узунлиги $1,5 \text{ м}$ га тенг CD стержень D учи билан деворга қисиб маҳкамлаган. CD стерженьга чизиқли учбурчак қонуни бўйича тақсимланган кучлар қўйилган ва бу кучлар-



4.19- расм.



4.20- расм.

нинг максимал интенсивлиги $q_{max} = 120 \text{ Н/м}$. A ва D нуқтасининг реакция кучлари ҳамда стерженларнинг бир-бирига кўрсатадиган босим кучи аниқлансин.

Ечиш. 1. AB ва CD стержендан ташкил топган системанинг мувозанатини текшираемиз.

2. Координата ўқларини 4.20- расмдагидек йўналтирамиз.

3. Системага таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз. AB ва CD стерженларга уларнинг ўртасига қўйилган $P_1 = 180 \text{ Н}$ ва $P_2 = 108 \text{ Н}$ оғирлик кучлари таъсир этади. CD стерженга таъсир этувчи чизиқли қонун бўйича тақсимланган кучларни D нуқтадан $DK = \frac{CD}{3}$ масофада қўйилган, (4.15) га асосан топиладиган

$$Q = \frac{CD \cdot q_{max}}{2} = 90 \text{ Н}$$

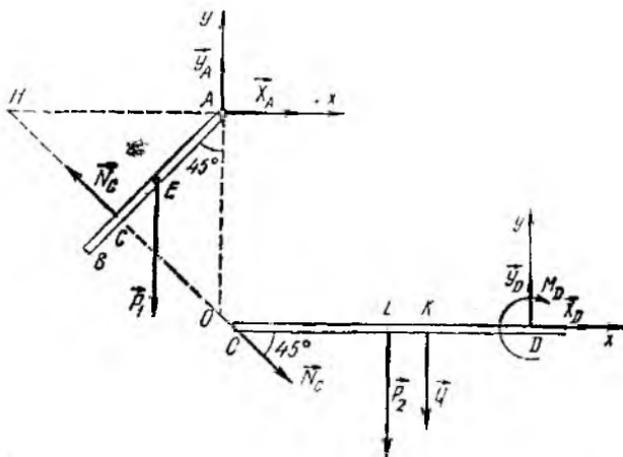
вертикал пастга йўналган куч билан алмаштирамиз.

A шарнирнинг реакция кучини \vec{X}_A, \vec{Y}_A ташкил этувчилардан иборат деб қараймиз. Стержень қисилган D нуқтадаги боғланишни \vec{X}_D, \vec{Y}_D реакция кучлари ва momenti M_D га тенг жуфт билан алмаштирамиз.

Шундай қилиб, системага бир текисликда жойлашган $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_D, \vec{Y}_D$ кучлар ва M_D моментли жуфт таъсир этади. Бундай система учун: учта мувозанат тенгламаларини тузсак, унда бешта номанъум реакция кучлари қатнашади. Шу сабабли системани иккита жисмга ажратиб, уларнинг ҳар бири учун алоҳида мувозанат тенгламаларини тузиш қулай бўлади (4.21- расм). AB стержень C нуқтада эркин таянгани учун CD стерженнинг унга таъсирини C нуқтада AB га перпендикуляр юқорига йўналган \vec{N}_C реакция кучи билан алмаштирамиз. Худди шунингдек, AB стерженнинг CD стерженга таъсирини C нуқтада AB га перпендикуляр равишда (ёки CD га 45° бурчак остида) пастга йўналган \vec{N}_C реакция кучи билан алмаштирамиз. \vec{N}_C куч система учун ички кучни, AB ва CD стержень учун ташқи кучни ҳисоблайди.

4. AB стерженга таъсир этувчи $\vec{P}_1, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_C$ кучлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. \vec{N}_C ва \vec{X}_A нинг кесишган нуқтасини H ; \vec{N}_C ва \vec{Y}_A нинг кесишган нуқтасини O билан белгилаймиз ва 4.21- расмдан фойдаланиб (4.11) мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0, \quad P_1 \cdot AE \cos 45^\circ - N_C \cdot AO = 0, \quad (I)$$



4.21-расм.

$$\sum M_H(\vec{F}_v) = 0; \quad -P_1(HC + AC - AE) \cos 45^\circ + Y_A \cdot HA = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_O(\vec{F}_v) = 0; \quad P_1 \cdot AE \cos 45^\circ - X_A \cdot OA = 0. \quad (3)$$

Бу тенгламаларда $AE = \frac{AB}{2}$, $HC = AC = \frac{2}{3} AB$, $HA = OA = \sqrt{2} AC = \frac{2\sqrt{2}}{3} AB$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ эканлигини назарда тутиб, уларни AB га қисқартирамиз ва N_C , Y_A , X_A номаълумларни аниқлаймиз.

$$N_C = 95,46 \text{ Н}, \quad Y_A = 112,5 \text{ Н}, \quad X_A = 67,5 \text{ Н}.$$

(4.11) тенгламаларни AB стержень учун қўллашнинг афзаллиги шундан иборатки, AB стержень учун тузилган (1), (2) ва (3) тенгламаларда фақат биттадан номаълумлар қатнашади.

CD стерженга таъсир этувчи \vec{P}_2 , \vec{Q} , \vec{N}_C , \vec{X}_D , \vec{Y}_D кучлар ва M_D моментли жуфт, текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.21-расмдан фойдаланиб, CD стерженнинг мувозанат тенгламаларини (4.9) кўринишида ёзамиз.

$$\sum X_v = 0; \quad X_D - N_C \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; \quad Y_D - Q - P_2 - N_C \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum M_D(\vec{F}_v) = 0; \quad -M_D + Q \cdot DK + P_2 \cdot DL + N_C \cdot CD \cos 45^\circ = 0.$$

Бу тенгламаларда $DK = \frac{1}{3} CD$, $DL = \frac{1}{2} CD$ эканлигини назарда тутиб, номаълумларни аниқлаймиз:

$$X_D = N_C \cos 45^\circ = 67,5 \text{ Н},$$

$$Y_D = Q + P_2 + N_C \cos 45^\circ = 265,5 \text{ Н},$$

$$M_D = \left(\frac{Q}{3} + \frac{P_2}{2} + N_C \cos 45^\circ \right) \cdot CD = 227,25 \text{ Нм}.$$

AB ва CD стерженларнинг бир-бирига кўрсатадиган босим кучи \vec{R}_A миқдор жиҳатидан шу нуқтада ҳосил бўладиган системанинг ички реакция кучи \vec{N}_C га тенг, яъни

$$R_C = N_C = 95,46 \text{ Н.}$$

Йўналиши эса унга қарама-қаршидир.

4. 10-§. Ишқаланиш. Сирланишдаги ишқаланиш

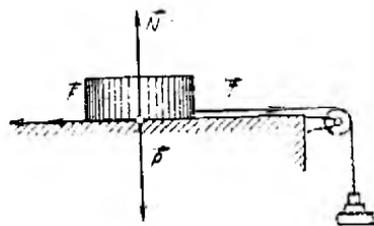
1. 3-§ да боғланишдаги jismlar абсолют қаттиқ jismdan иборат ва уларнинг бир-бирига тегиб турган сирти идеал силлиқ ҳамда боғланиш реакция кучлари фақат нормал ташкил этувчидан иборат деб фараз қилинган эди. Лекин ҳар қандай jisм оз бўлса-да, деформацияланади ва уларнинг сирти абсолют силлиқ бўлмайди. Шу сабабли реал боғланишларнинг реакция кучи jismlar тегиб турган юзада нормал реакция кучига перпендикуляр йўналган яна битта ташкил этувчига эга бўлади. Реакция кучининг бу ташкил этувчисига *ишқаланиш кучи* дейилади.

Техникада ишқаланиш кучини ҳисобга олиш муҳим аҳамиятга эга. Масалан, трамвай ёки автомобилнинг етакчи гилдираги рельсга ёки йўлга ишқалангани туфайли улар ҳаракатланади. Тасмали ва фрикцион узатмаларда, тормозларда ишқаланишдан кенг фойдаланилади.

Бир jisмнинг иккинчи jisм устида сирланиши натижасида ҳосил бўладиган ишқаланишга *сирланишдаги ишқаланиш кучи* дейилади.

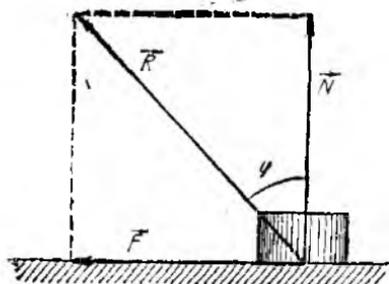
Оғирлиги P га тенг jisм горизонтал сиртга қўйилган бўлсин (4.22-расм). Jisمنى блок орқали ўтказилган ишга боғлаймиз. Агар сирт идеал силлиқ бўлса, jisм оғирлик кучи \vec{P} ва сиртнинг нормал реакция кучи \vec{N} таъсирида мувозанатда бўлади. Бу кучлар вертикал кучлардан иборат бўлгани учун ишнинг иккинчи учига жуда кичик тош қўйсақ, jisм ҳаракатланиши керак. Лекин ишнинг иккинчи учига маълум миқдорда тош қўймагунча jisм ҳаракатланмайди. Чунки горизонтал сирт билан jisмнинг юзаси абсолют силлиқ бўлмагани туфайли ишнинг тортилиш кучи \vec{T} га миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган \vec{F} ишқаланиш кучи ҳосил бўлади. \vec{F} куч *сирланишдаги ишқаланиш кучи* дейилади.

Агар ишнинг иккинчи учига тош қўя борсак, унга мос равишда \vec{T} куч, сирланишдаги ишқаланиш кучи \vec{F} ортади ва jisм ҳаракатланиши олдида ишқаланиш кучи $F = F_{max}$ максимал қийматга эришади. Шундай қилиб, сирланишдаги ишқаланиш кучи F нисбий мувозанат ҳолатида нолдан то максимал миқдоргача ўзгаради:



4.22- расм.

$$0 \leq F \leq F_{\max} \quad (4.17)$$



4.23- расм.

Жисмнинг тинч ҳолатида ҳосил бўладиган ишқаланиш кучига *статик ишқаланиш кучи* дейилади. Сирпанишдаги ишқаланиш кучи жисмларнинг бир-бирига тегиб турган юзаси орқали ўтувчи уринма текисликда ётади. Шундай қилиб, ғадир-будир сиртнинг тўлиқ реакция кучи миқдор ва йўналиши жиҳатдан нормал реакция кучи ва ишқаланиш кучларига қурилган тўғри тўртбурчакнинг диагонали билан ифодаланади (4.23- расм):

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{N}.$$

Тажрибаларнинг кўрсатишича, сирпанишдаги ишқаланиш қуйидаги Амонтон — Кулон қонуни билан ифодаланади.

Тинч ҳолатдаги максимал ишқаланиш кучи жисмнинг таянч текислигига кўрсатадиган нормал босимига пропорционалдир.

$$F_{\max} = f N. \quad (4.18)$$

Бундаги f сирпанишдаги ишқаланиш коэффициентини ифодалайди ҳамда ишқаланувчи жисмларнинг материалига ва ҳолатига (намлик, температура, жисмлар сиртларининг ишланишига) боғлиқ бўлади.

Бир жисм иккинчиси устида ҳаракатланганда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучи ҳам нормал босимга пропорционал бўлади: $F = f' N$. Бунда f' — жисм *ҳаракатлангандаги ишқаланиш коэффициентини* бўлиб, у жисмнинг тинч ҳолатидаги ишқаланиш коэффициенти f дан кичик бўлади: $f' < f$.

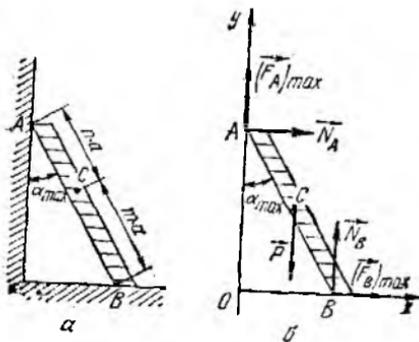
Агар бирор сиртга таяниб турган жисм сирпаниш олдида (мувозанат чегарасида) бўлса, ишқаланиш кучи максимал қийматга эришади (4.24- расм) ҳамда

$$\vec{R}_{\max} = \vec{N} + \vec{F}_{\max}. \quad (4.19)$$

Максимал тўлиқ реакция кучи \vec{R}_{\max} нинг нормал реакция кучи \vec{N} билан ташкил қилган бурчаги φ_{\max} *ишқаланиш бурчаги* дейилади. 4.24- расм ва (4.18) га асосан

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = \frac{F_{\max}}{N} = f. \quad (4.20)$$

Жисмни силжитувчи актив кучлар турли йўналишда таъсир этиши мумкин. Турли йўналишдаги силжитувчи кучларга мос бўлган барча \vec{R}_{\max} тўлиқ реакция кучларининг геометрик ўрни конус сиртидан иборат бўлади. Бу конус *ишқаланиш конуси* деб аталади.



4.27- расм.

брусга таъсир этувчи кучларнинг мувозанатини қарайлик (4.26-расм). Брус мувозанат ҳолатида бўлганда A ва B нуқталарининг реакция кучлари \vec{R}_A ва \vec{R}_B лар мос ишқаланиш конуслари ичида ётади. A ва B нуқталарда текисликларнинг нормалларига φ_{1max} ва φ_{2max} бурчаклар остида AA_1 , AA_2 ҳамда BB_1 , BB_2 чизиқларни ўтказиб, ишқаланиш конусларининг чегараларини оламиз. Бу чизиқлар билан чегараланган $C_1C_2C_3C_4$ тўртбурчак ишқаланиш соҳасини ифодалайди.

4.6- масала. Пастки учи билан горизонтал полга тиралган AB нарвон вертикал деворга қўйилган (4.27- расм, a). Нарвоннинг вертикал девор билан ишқаланиш коэффициентини f_1 , пол билан ишқаланиш коэффициентини f_2 . Нарвон билан унинг устидаги кишининг оғирлиги P га тенг бўлиб, нарвон узунлигини $m:n$ нисбатда бўлувчи C нуқтага қўйилган. Мувозанат ҳолатида нарвон билан девор орасидаги энг катта α_{max} бурчак ва шу ҳолат учун девордаги \vec{N}_A ва полдаги \vec{N}_B нормал реакциялар топилсин.

Ечиш. 1. Нарвоннинг мувозанатини текшираемиз.

2. Координаталар системасини 4. 27- расм, b дагидек танлаб оламиз.

3. Нарвон ҳаракатлангани олдида унга нарвон билан унинг устидаги кишининг оғирлик кучи \vec{P} вертикал деворда ҳосил бўладиган $(\vec{F}_A)_{max}$ ишқаланиш кучи ва \vec{N}_A нормал реакция кучи ҳамда горизонтал полнинг $(\vec{F}_B)_{max}$ ишқаланиш кучи билан \vec{N}_B нормал реакция кучи таъсир этади (4.27- расм, b). Кулон қонунига кўра

$$(F_A)_{max} \leq f_1 N_A, (F_B)_{max} \leq f_2 N_B. \quad (1)$$

4. Нарвонга таъсир этувчи кучлар \vec{P} , $(\vec{F}_A)_{max}$, \vec{N}_A , $(\vec{F}_B)_{max}$, \vec{N}_B текисликдаги ихтиёрый кучлар системасини ташкил этади. 4.27- расмдаги фойдаланиб, текисликдаги кучлар системасининг мувозанат шартлари (4.9) ни тузимиз:

$$\begin{aligned} \sum X_v &= 0, & N_A - (F_B)_{max} &= 0, \\ \sum Y_v &= 0, & (F_A)_{max} - P + N_B &= 0, \\ \sum M_O(F_v) &= 0, & -N_A \cdot AB \cos \alpha_{max} - P \cdot AC \sin \alpha_{max} + N_B \cdot AB \sin \alpha_{max} &= 0. \end{aligned}$$

Бунда нарвон ҳаракатлангани олдида (1) да тенглик ишораси олинганини ва $AC = na$, $CB = ma$, $AB = (m+n)a$ эканлигини эътиборга олсак

$$\begin{aligned} N_A - f_2 N_B &= 0, \\ f_1 N_A - P + N_B &= 0, \end{aligned}$$

$$-N_A(m+n)a \cdot \cos \alpha_{max} - P \cdot na \sin \alpha_{max} + N_B(m+n)a \cdot \sin \alpha_{max} = 0.$$

Бундан

$$N_A = f_2 N_B, \quad (2)$$

$$N_B = P - f_1 N_A, \quad (3)$$

$$[N_B(m+n) - Pn] \sin \alpha_{max} - N_A(m+n) \cos \alpha_{max} = 0, (4)$$

(2) ни (3) га қўйсак,

$$N_B = P - f_1 f_2 N_B.$$

Бундан

$$N_B = \frac{P}{1+f_1 f_2}. (5)$$

(5) ни (2) га қўйиб N_A ни аниқлаймиз:

$$N_A = \frac{f_2 P}{1+f_1 f_2}. (6)$$

(4) ни $\cos \alpha_{max}$ га бўлсак

$$\operatorname{tg} \alpha_{max} = \frac{N_A(m+n)}{N_B(m+n) - Pn}$$

ёки (5) ва (6) ни эътиборга олсак

$$\operatorname{tg} \alpha_{max} = \frac{(m+n) f_2}{m-n f_1 f_2}.$$

$0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ бўлганда нарвон мувозанатда бўлади.

4.7-масала. Оғирлиги $Q = 100$ Н бўлган B юк ғадир-будир CD горизонтал йўналтирувчи етержень бўйлаб сираниши мумкин. Юкка силлиқ A тирқиш орқали ўтган ва учига $P = 50$ Н юк осылган трос болганган (4.28-расм). Юк билан йўналтирувчи CD етержень орасидаги ишқаланиш коэффициенти $f = 0,1$. Агар CD йўналтирувчи билан тирқиш орасидаги масофа $OA = 15$ см бўлса, B юк мувозанат соҳасининг чегараси (мувозанатда қолмаган ҳолатларнинг геометрияси) аниқлансин.

Ечиш. 1. B юк ҳаракатланishi олдидаги мувозанатини текширамиз.

2. Координаталар системасини 4.28-расмдагидек таълаб оламиз.

3. Юк ҳаракатланishi олдида унга оғирлик кучи \vec{Q} , максимал ишқаланиш кучи \vec{F}_{max} , нормал реакция кучи \vec{N} ва троснинг таранглик кучи \vec{T} (миқдор жиҳатидан $T = P$) таъсир этади.

4. Юкка таъсир этувчи \vec{Q} , \vec{F}_{max} , \vec{N} ва \vec{T} кучлар бир нуқтада кесинувчи кучлар системасини ташкил этади. 4.28-расмдан фойдаланиб, кесинувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари (2.11) ни тузамиз:

$$\sum X_v = 0; \quad -F_{max} + T \cos \alpha_{max} = 0, (1)$$

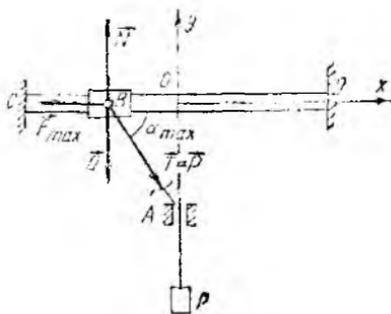
$$\sum Y_v = 0; \quad N - Q - T \sin \alpha_{max} = 0. (2)$$

Бунда α_{max} юк ҳаракатланishi олдида X ўқ билан \vec{T} орасидаги бурчакни билдиради.

(2) дан $N = Q + T \sin \alpha_{max}$ ни аниқлаб, N нинг бу қийматини Кулон қонуни $F_{max} = f \cdot N$ га қўйсак,

$$F_{max} = f \cdot Q + f \cdot T \sin \alpha_{max}. (3)$$

(3) га ассан (1) ни қўйидагича ёзамиз:



4.28-расм.

$$-fQ - fT \sin \alpha_{max} + T \cos \alpha_{max} = 0.$$

Берилган катталикларни ўрнига қўйсак ($T = P$),

$$-0,1 \cdot 100 - 0,1 \cdot 50 \sin \alpha_{max} + 50 \cos \alpha_{max} = 0$$

ёки

$$-2 - \sin \alpha_{max} + 10 \cos \alpha_{max} = 0.$$

Бунда $\cos \alpha_{max} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{max}}$ эканлигини назарда тутсак,

$$10 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{max}} = 2 + \sin \alpha_{max}.$$

Квадратга ошириб, ихчамласак,

$$101 \sin^2 \alpha_{max} + 4 \sin \alpha_{max} - 96 = 0,$$

$$(\sin \alpha_{max})_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{196,977}}{202}.$$

Бундан $\sin \alpha_{max} = 0,9553$ ни аниқлаймиз. Синуснинг иккинчи қиймати манфий бўлгани учун уни эътиборга олмаймиз. Шундай қилиб, В юк мувозанатда бўлиши учун $\alpha_{max} = 84^\circ 12'$ бўлиши керак. 4.28-расмдан изланаётган мувозанат соҳасининг chegarасини аниқлаймиз.

$$|BO| = OA \operatorname{ctg} \alpha_{max} = 0,15 \cdot 0,3096 = 0,0464 \text{ м.}$$

Бинобарин, В юк мувозанат соҳасининг chegarаси $x = \mp 0,0464$ м га тенг бўлади.

4.11-§. Думалашдаги ишқаланиш

Жисмларнинг думалашдаги ишқаланишни абсолют қаттиқ жисм доирасида изоҳлаб бўлмайди. Шу сабабли бу ҳақда қисқа маълумотларнинггина келтирамиз.

Оғирлиги P ва радиуси R га тенг цилиндр горизонтал текисликда ётган бўлсин (4.29-расм). Цилиндрга горизонтал T куч қўйилган. Цилиндр ва текисликнинг деформацияланиши натижасида ишқаланиш битта нуқтада ҳосил бўлмай, икки жисмнинг бир-бирига тегиб турган эзилган юзасида ҳосил бўлади ва N нормал реакция кучи ҳамда F ишқаланиш кучи O нуқтадан ўтувчи вертикалдан δ масофада ўтувчи C нуқтага қўйилади.

(4.9) дан фойдаланиб, цилиндрнинг мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum X_v = 0; \quad T - F = 0,$$

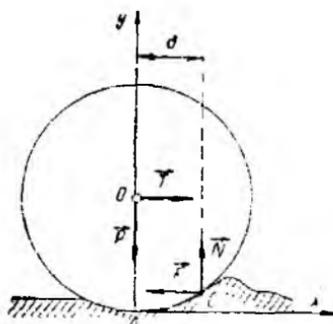
$$\sum Y_v = 0; \quad N - P = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; \quad N \cdot \delta - T \cdot R = 0.$$

Бундан

$$F = T, \quad N = P, \quad N \cdot \delta = T \cdot R \quad (4.22)$$

муносабатларни оламиз. Шундай қилиб, цилиндр думалаш олдида унга



4.29- расм.

моментлари тенг ва айланиш йўналиши қарама-қарши бўлган (\vec{T}, \vec{F}) ва (\vec{P}, \vec{N}) жуфтлар таъсир этади. Цилиндрнинг думалашига қаршиллик кўрсатувчи (\vec{P}, \vec{N}) жуфтга думалашдаги ишқаланиш жуфти, бу жуфтнинг моментига думалашдаги ишқаланиш momenti дейилади. Тажрибаларнинг кўрсатишича, думалашдаги ишқаланиш моментининг максимал қиймати нормал босимга пропорционал бўлади:

$$M_{max} = \delta \cdot N,$$

бунда δ — думалашдаги ишқаланиш коэффициентини бўлиб, узунлик бирлигида ўлчанади.

(4.22) нинг учинчисидан

$$T = \frac{\delta}{R} \cdot N. \quad (4.23)$$

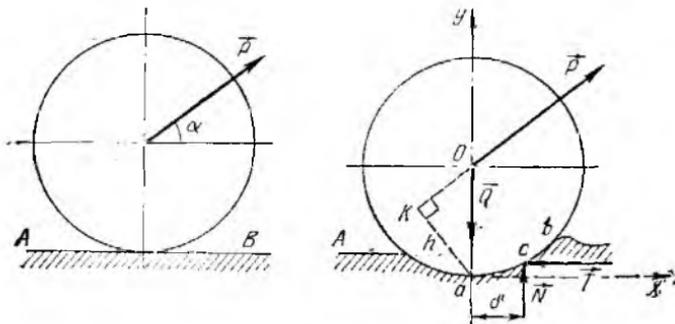
Бу формуладаги $\frac{\delta}{R}$ катталик кўнчилик материаллар учун сирпанишдаги ишқаланиш коэффициентини f дан анча кичик бўлади. Шунинг учун бундай жисملарни сирпантиришдан кўра думалатиш учун кам куч сарфланади.

4.8- масала. Оғирлиги $Q = 1085$ кН, диаметри $d = 1$ м бўлган гилдиракнинг горизонтал текисликда текис думалаш учун керак бўлган \vec{P} куч, шунингдек текисликнинг реакция кучи аниқлансин; думалашдаги ишқаланиш коэффициентини $\delta = 0,2$ см, \vec{P} кучнинг горизонтал текислик билан ҳосил қилган бурчаги $\alpha = 30^\circ$ (4.30- расм).

Ечили. 1. Гилдиракнинг горизонтал текислик бўйлаб текис думалашда таъсир этувчи кучларнинг мувозанатини текшираемиз.

2. Координаталар бошини a нуқтада олиб, координата ўқларини 4.20- расмдагидек йўналтираемиз.

3. Гилдиракка унинг оғирлик марказига қўйилган оғирлик кучи \vec{Q} ва актив куч \vec{P} таъсир этади (шакл аниқроқ ва яққол бўлиши учун гилдиракнинг текисликка ботиши, яъни горизонтал текисликнинг деформацияси шаклда каттароқ қилиб кўрсатилган). Бундан ташқари, гилдиракка горизонтал ва вертикал реакция кучлари \vec{N} ва \vec{T} таъсир этади, уларнинг таъсир нуқтаси Oa ўқдан δ масофада бўлади.



4.30- расм.

4. Гилдиракка таъсир этувчи \vec{Q} , \vec{P} , \vec{N} , \vec{T} кучлар текисликдаги кучлар системасини ташкил этади. 4.30-расмдан фойдаланиб кучларнинг мувозанат тенгламасини (4.9) кўришишида тузамиз:

$$\sum X_v = 0; \quad P \cos \alpha - T = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_v = 0; \quad -Q + P \sin \alpha + N = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_a(\vec{F}_v) = 0; \quad N \cdot \delta - P \cdot h = 0. \quad (3)$$

(3) тенгламада \vec{T} кучнинг momenti қатнашмайди, чунки a ва b нуқта гори-вонталлари орасидаги масофа жуда кичик бўлгани учун уни эътиборга олмадик.

aOK учбурчакдан \vec{P} кучнинг елкаси аниқланади: $h = r \cos \alpha$, бунда r билан гилдиракнинг радиуси белгиланган, h нинг қийматини (3) га қўйиб, N ни аниқлаймиз:

$$N = \frac{r}{\delta} \cdot P \cos \alpha. \quad (4)$$

N нинг бу қийматини (2) га қўйсик,

$$-Q + P \sin \alpha + \frac{r}{\delta} P \cos \alpha = 0$$

ёки

$$P \left(\sin \alpha + \frac{r}{\delta} \cdot \cos \alpha \right) = Q.$$

Бундан

$$P = \frac{Q}{\sin \alpha + \frac{r}{\delta} \cos \alpha} \approx 5 \text{ кН.}$$

(1) дан ишқаланиш кучи T ни аниқлаймиз: $T = P \cos \alpha = 4,33 \text{ кН}$.

(4) ёрдамда нормал реакция кучи топилади: $N = 1082,5 \text{ кН}$. ✓

5-боб. ФЕРМАЛАРНИ ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ

5.1*-§. Ферма ҳақида тушунча

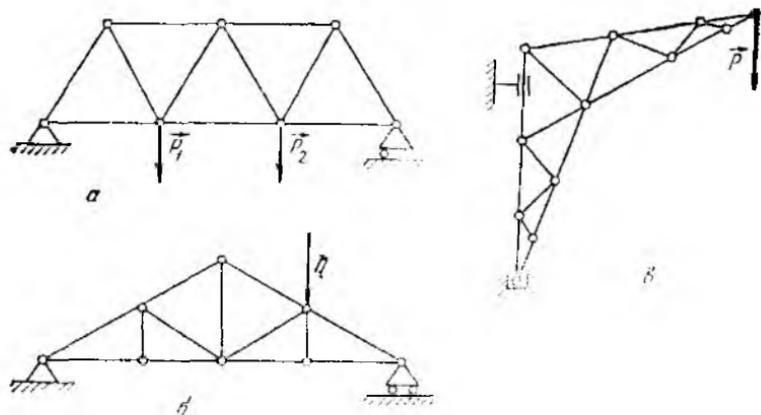
Шарнирлар воситасида геометрик ўзгармас қилиб туташтирилган стерженлардан ҳосил бўлган конструкция *ферма* деб аталади. Стерженларнинг учларини туташтирувчи нуқта *туғун* дейилади.

Фермалар қандай ишшоотда қўлланишига қараб турлича ном билан аталади. Масалан, кўприк қурилишида фойдаланиладиган *к/п-риқ фермалари* (5.1-расм, а), ишшоотларнинг томини ушлаб турадиган *стропила фермалари* (5.1-расм, б), кўтарини қурилмаларида фойдаланиладиган *кран фермалари* (5.1-расм, в) ва ҳ. к.

Одатда, кўприк ва стропила фермалари бир томондан қўзғалмас, иккинчи томондан қўзғалувчи таянчларга ўрнатилади. Кран фермалари таянч подшпникка (подъёмникка) таяниши ва цилиндрик шарнир воситасида ушлаб турилиши мумкин.

Стерженлари бир текисликда ётувчи ферма *ясси ферма* дейилади.* Ясси фермаларни ҳисоблашда уларга қўйилган актив кучлар таъсирида

* Фазовий фермаларни ҳисоблаш қурилиш механикасида кўрилади.



5.1- расм.

таянч реакциялари ҳамда стерженларда ҳосил бўладиган ички кучларни (зўриқишни) аниқлаш асосий масала ҳисобланади. Бу масалани ечишда:

1) ферма стерженлари абсолют қаттиқ, тўғри чиқиқли деб қара-
либ, уларнинг оғирлиги эътиборга олинмайди;

2) шарнирлардаги илқаланиш ҳисобга олинмайди;

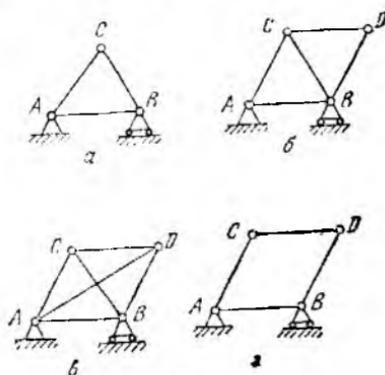
3) ясси фермага таъсир этувчи кучлар унинг текислигида ётади
ва фақат тугунларга қўйилади деб фараз қилинади.

У ҳолда ферма стерженларига фақат бўйлама (чўзувчи ёки си-
қувчи) кучлар таъсир этади (1.3-§).

Реал фермаларнинг стерженлари шарнирлар ёрдамида эмас, бал-
ки пайвандаб ёки парчи миҳлар воситасида бириктирилади. Шу
сабабли ферма стерженларига бўйлама кучлардан ташқари эгувчи
кучлар ҳам таъсир этади. Академик Е. О. Патон олиб борган тад-
қиқотларга кўра эгилишда ҳосил бўладиган зўриқиш унча катта
бўлмай, биринчи яқинлашишда уни эътиборга олмаслик мумкин.

Шундай қилиб, юқориди қабул қилинган соддаштиришлар на-
тижасида ферма стерженларидаги зўриқишлар биринчи яқинлашишда
аниқланади. Стерженлардаги зўри-
қишларни аниқлашга ўтишдан олдин
ферма структураси билан таниша-
миз.

n та тугундан ташкил топган
ферма геометрик ўзгармас бўлиши
(яъни стерженлари бир-бирига ил-
батан кўча олмаслиги) учун бун-
дай ферма камда нечта стержен-
дан ташкил тоишнинг кўриб чиқа-
миз. Биринчи учта тугунни гео-
метрик ўзгармас қилиб туташтириш



5.2- расм.

учун учта стержень олиш керак (5.2-расм, а). Бундай учбурчакли ABC фермага яна битта D тугун қўшилиши натижасида ҳосил бўлган ферма геометрик ўзгармас бўлиши учун D тугунни мазкур учбурчакли фермага камида иккита стержень воситасида бириктириш керак (5.2-расм, б). Худди шу тарзда ABC учбурчакли фермага қолган $n-3$ та тугунларнинг ҳар бирини иккитадан стерженлар воситасида бириктириш натижасида n та тугундан ташкил топган ферма геометрик ўзгармас бўлиши учун у камида

$$N = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3 \quad (5.1)$$

та стержендан ташкил топишига ишонч ҳосил қиламиз.

(5.1) шартни қаноатлантирадиган ферма *ортиқча стерженга эга бўлмаган ясси ферма* дейилади (5.1-расм).

Агар $N > 2n - 3$ бўлса, бундай ферма *ортиқча стерженга эга бўлган ясси ферма* дейилади (5.2-расм, в).

Агар $N < 2n - 3$ бўлса, бундай конструкция геометрик ўзгарувчан бўлади ва фермани ифодаламайди (5.2-расм, д). n та тугундан ташкил топган ортиқча стерженга эга бўлмаган ферманинг ҳар бир тугунини боғланишдан бўшатиб, бир текисликда ётувчи кесишувчи кучлар системаси таъсиридаги нуқта деб қарасак, бу нуқталарнинг ҳар бири учун иккитадан мувозанат тенгламалари ўринли бўлади. Натижада ферма учун $2n$ та мувозанат тенгламаларини оламиз. Бу тенгламаларга таянч нуқталаридаги учта номаълум реакция кучлари ҳам киради.

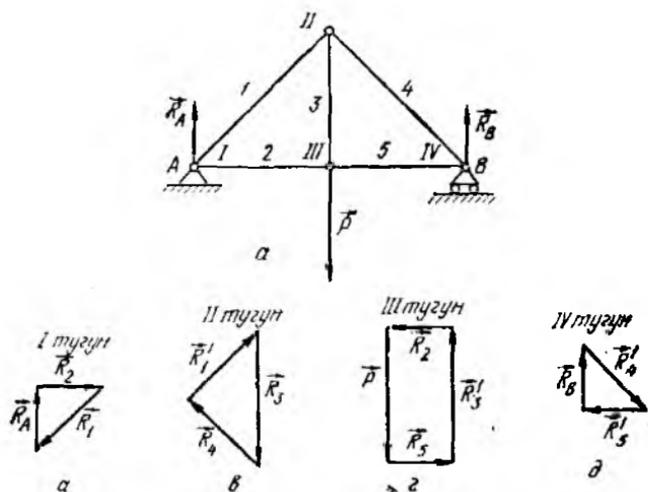
Бинобарин, $2n$ та мувозанат тенгламаларидан $2n - 3$ та стержендаги зўриқишлар ва таянч нуқталаридаги учта номаълум реакция кучлари аниқланади. Шу сабабли ортиқча стерженга эга бўлмаган ферма *статик аниқ ферма*, ортиқча стерженга эга бўлган ферма эса *статик ноаниқ ферма* деб ҳам аталади.

5.2*- §. Ферма стерженларидаги зўриқишларни тугунларни кесиш усули билан аниқлаш

Юқорида кўрганимиздек, тугун кесиш усулининг моҳияти шундан иборатки, ферма тугунларини фикран кетма-кет кеса борамиз ва тугунга қўйилган кучлар мувозанатини текшираемиз; бундай кучлар қаторига стерженларнинг реакция кучлари, тугунларга қўйилган берилган кучлар ва таянч реакция кучлари киради. Кесилган тугун мувозанатда бўлиши учун унга қўйилган кучларга қурилган куч кўпбурчаги ёпиқ бўлиши керак. Ҳар бир тугун учун ёпиқ куч кўпбурчагини ёсаб, ферма стерженларидаги реакция кучларини график усулда аниқлаш мумкин.

Тугун кесиш усулида масалани аналитик ечиш учун ҳар бир тугунга қўйилган кучларнинг мувозанат шартларини (2.11) кўринишида тузиб, бу тенгламалардан номаълум кучларни аниқлаш мумкин.

Мисол тариқасида 5.3-расм, а да тасвирланган ферма стерженларидаги зўриқишларни тугунни кесиш усулидан фойдаланиб толамиз. Ферма A нуқтада шарнирли қўзғалмас таянчга, B нуқтада шар-



5.3- расм.

нирли қўзғалувчан таянчга ўрнатилган. Фермага III тугунга қўйилган вертикал пастга йўналган \vec{P} куч таъсир этади.

Масала ечишни таянч реакция кучларини аниқлашдан бошлаймиз. Фермага унинг ўртасига қўйилган битта вертикал пастга йўналган куч таъсир этади. Шу сабабли A ва B нуқталарининг реакция кучи вертикал юқорига йўналади ва ўзаро тенг бўлади: $R_A = R_B = \frac{P}{2}$.

Стерженлардаги зўриқишни аниқлашдан аввал берилган ферма статик аниқ ферма эканлигини текшириб кўрамиз. Берилган ферманинг тугунлар сони $n = 4$, стерженлар сони $N = 5$. Буларни (5.1) га қўйсак, $5 = 2 \cdot 4 - 3$, яъни берилган ферма статик аниқ фермадир.

Тугунларни рим рақамлари, стерженларни араб рақамлари билан номерлаймиз.

Кесишни шундай тугундан бошлаш керакки, бу тугунда зўриқишни аниқлашадиган стерженлар иккитадан ортиқ бўлмасин, чунки бир текисликда ётувчи кесишувчи кучлар системасининг мувозанат шартларидан фойдаланиб фақат иккита номаълум катталиқни аниқлаш мумкин. Шу сабабли кўриляётган фермада кесишни I ёки IV тугундан бошлаш керак. I тугунни кесамиз. I тугунга маълум \vec{R}_A куч ҳамда 1 ва 2 стерженларининг реакция кучлари \vec{R}_1 ва \vec{R}_2 қўйилган. Бу кучларининг таъсир чизиқлари маълум (улар тегишли стерженъ бўйлаб йўналган) бўлиб, уларнинг миқдорини аниқлаш керак. Бунинг учун \vec{R}_A , \vec{R}_1 ва \vec{R}_2 кучлардан таниқил тошган куч учбурчагини тузамиз: ихтиёрний нуқтадан \vec{R}_A куч векторини, бу кучнинг боши ва учидан эса 1 ва 2 стерженларга параллел чизиқлар ўтказамиз; бу чизиқларнинг кесишган нуқтаси куч учбурчагининг учинчи учини ифо-

далайди, унинг 1 ва 2 стерженларга параллел бўлган томонлари мос равишда \vec{R}_1 ва \vec{R}_2 нинг миқдорига тенг бўлади (5.3-рasm, б). \vec{R}_1 ва \vec{R}_2 нинг йўналишини аниқлаш учун куч учбурчагини унинг периметри бўйича маълум \vec{R}_A куч йўналишида айланиб ўтиш керак. Куч учбурчагидаги \vec{R}_1 ва \vec{R}_2 кучлар мос равишда 1 ва 2 стерженларнинг тугунга қўрсатган реакциясидир. \vec{R}_1 ни куч учбурчагидан 1 стерженга кўчирсак, \vec{R}_1 1 тугунга қараб йўналганлигини кўрамыз. 1 тугун томонидан 1 стерженга \vec{R}_1 га қарама-қарши йўналган ва миқдор жиҳатдан тенг сиқувчи куч таъсир этади, яъни 1 стержень сиқилади. \vec{R}_2 ни куч учбурчагидан 2 стерженга кўчирсак, \vec{R}_2 1 тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналади. 1 тугун томонидан 2 стерженга \vec{R}_2 га қарама-қарши йўналган ва миқдор жиҳатдан унга тенг чўзувчи куч таъсир этади, яъни 2 стержень чўзилади.

Шундай қилиб, *стержень реакцияси тугунга қараб йўналса, стержень сиқилади; акс ҳолда, яъни стержень реакцияси тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналган бўлса, стержень чўзилади.*

II тугунни кесамиз. Бу тугунга 1, 3 ва 4 стерженларнинг реакция кучлари қўйилган. Бунда II тугунга қўйилган 1 стерженнинг реакция кучи \vec{R}'_1 миқдор жиҳатдан \vec{R}_1 га тенг ва унга қарама-қарши йўналганлигини эътиборга олиш керак. Шу сабабли $\vec{R}'_1 = -\vec{R}_1$, яъни *иккита тугунни туташтирувчи ҳар бир стерженнинг учларига қўйилган реакция кучлари миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қаршидир.* II тугун учун куч учбурчагини ясашда ихтиёрий нуқтадан \vec{R}'_1 векторини, унинг боши ва учидан эса 3 ва 4 стерженларга параллел чизиқлар ўтказамиз (5.3-рasm, в). Ҳосил қилинган ёпиқ куч учбурчагининг 3 ва 4 стерженларга параллел бўлган томонлари мос равишда \vec{R}_3 ва \vec{R}_4 реакция кучларининг миқдорига тенг бўлади. \vec{R}_3 ва \vec{R}_4 нинг йўналишини аниқлаш учун куч учбурчагини маълум \vec{R}'_1 куч йўналишида айланиб ўтиш керак.

\vec{R}_3 вектори II тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналгани учун 3 стержень чўзилади; \vec{R}_4 II тугунга йўналгани сабабли 4 стержень сиқилади.



5.4-рasm.

Энди III тугунни кесамиз. Бу тугунга берилган \vec{P} куч ҳамда 2, 3 ва 5 стерженларнинг реакция кучлари қўйилган. Куч кўпбурчагини қуришда 2 ва 3 стерженларнинг реакция кучлари \vec{R}'_2 ва \vec{R}'_3 I ва II тугунларга қўйилган \vec{R}_2 ва \vec{R}_3 реакция кучларига миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши эканлигини эътиборга олиш керак. III тугун учун куч кўпбурчаги 5.3-расм, *г* да тасвирланган. \vec{R}_3 III тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналгани учун δ стержень чўзилади.

III тугунни кесиш ўрнига IV тугунни кесиш ҳам мумкин. IV тугун учун куч кўпбурчаги 5.3-расм, *д* да тасвирланган.

Шундай қилиб берилган ферманинг барча стерженларидаги зўриқишлар аниқланади.

Масалалар ечганда учрайдиган қуйидаги хусусий ҳолларни кўрамиз:

1. Ферманинг икки стерженли тугунига куч таъсир этмаса (5.4-расм, *а*), ҳар қайси стержендаги зўриқишлар нолга тенг бўлади.

2. Ферманинг икки стерженли тугунига стерженлардан бирининг ўқи бўйлаб йўналган \vec{P} куч таъсир этса (5.4-расм, *б*), бу стерженнинг реакция кучи миқдор жиҳатдан таъсир этувчи кучга тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлади: $\vec{R}_1 = -\vec{P}$, $R_2 = 0$.

3. Ферманинг икки стерженли тугунига стержень ўқлари бўйлаб йўналган \vec{P}_1 ва \vec{P}_2 кучлар таъсир этса (5.4-расм, *в*), ҳар бир стерженнинг реакция кучи миқдор жиҳатдан мос равишда шу кучга тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлади: $\vec{R}_1 = -\vec{P}_1$, $\vec{R}_2 = -\vec{P}_2$.

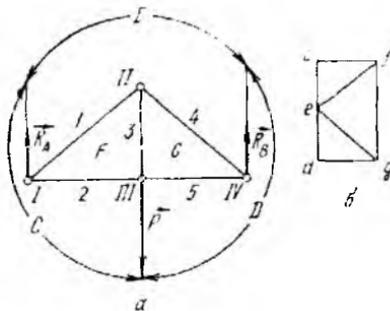
4. Ферманинг уч стерженли тугунига икки стерженнинг ўқи бир тўғри чизик бўйлаб йўналса ва тугунга 3 стержень ўқи бўйлаб куч таъсир этса (5.4-расм, *г*), 3 стерженнинг реакция кучи миқдор жиҳатдан \vec{P} кучга тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлади: $\vec{R}_3 = -\vec{P}$; қолган икки стерженнинг реакция кучи миқдор жиҳатдан тенг (улар нолга тенг бўлиши ҳам мумкин).

5 (1)

5.3* - §. Максвелл — Кремон диаграммаси

Тугун кесиш усулида ҳар бир стерженнинг реакция кучини куч кўпбурчақларида икки мартадан тасвирлашга тўғри келади. Бу камчилик инглиз физик олими Д. К. Максвелл (1831 — 1879) ва италиялик олим Л. Кремон (1830 — 1903) томонидан кашф қилинган ва улар номи билан аталадиган *Максвелл — Кремон диаграммаси*да бар-тараф қилинади. Бу диаграммани ясаш учун яна юқоридаги ферма-ни оламиз (5.5-расм, *а*).

Тугунларга таъсир этувчи кучни ферма контурининг ташқарси-да тасвирлаймиз ва бу кучлар билан чегараланган соҳаларни *C*, *D*, *E*; ферма стерженлари билан чегараланган ички соҳаларни *F*, *G* билан белгилаймиз. Куч кўпбурчагини қуришда фермани ёки тугунни



5.5-расм.

кўпбурчакларида кучларнинг учига стрелка қўймасак ҳам бўлади, чунки соҳаларни соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айланиб ўтиш қондаси кучнинг боши ва учини бир қийматли аниқлайди. Ташқи кучларни уларнинг йўналишига мос равишда маълум масштабда фермани соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айланиб ўтишда учрайдиган тартибда қўя борамиз ва $cdec$ ни оламиз; ташқи кучлар параллел бўлгани учун кучлар кўпбурчаги бир чизикда ётади (5.5-расм, б). Бу кучлар таъсиридаги ферма мувозанатда бўлгани учун мазкур кўпбурчак ҳам ёпиқ бўлади.

Энди тугун кесини усулидан фойдаланамиз. I тугунни маълум куч \vec{ec} дан бошлаб соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айланиб ўтамиз. ec куч шаклда тасвирланган, шу сабабли куч кўпбурчагида I тугунга таъсир этувчиси \vec{cf} ва \vec{fe} кучларни қуриш кифоя. Бунинг учун e нуқтадан I стерженга ва c нуқтадан 2 стерженга параллел чизиклар ўтказамиз; бу чизикларнинг кесинган нуқтаси f нуқтани ифодалайди. \vec{cf} куч I тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналган, шу сабабли 2 стержень чўзилади; \vec{fe} куч I тугун томон йўналган, шу сабабли 1 стержень сиқилади.

II тугунни $EFGE$ тартибда соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айланиб ўтамиз. Бунда илгари тасвирланган e, f нуқталардан фойдаланамиз. f нуқтада 3 стерженга параллел, e нуқтада 4 стерженга параллел чизиклар ўтказамиз; уларнинг кесинган нуқтаси g нуқтани ифодалайди; \vec{fg} куч II тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналгани учун 3 стержень чўзилади; \vec{ge} куч II тугунга йўналгани туфайли 4 стержень сиқилади.

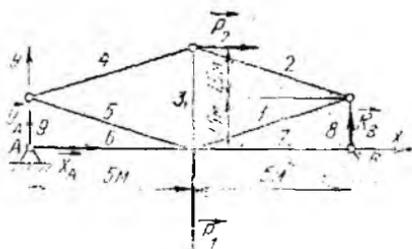
III тугунни $CDGFC$ тартибда айланиб ўтиб, 5 стерженга мос \vec{dg} реакция кучини аниқлаймиз. Бунинг учун d ва g нуқталарни бирлаштириш кифоя. \vec{dg} куч III тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналгани учун 5 стержень чўзилади.

Шу тартибда ясалган 5.5-расм, б даги фигурага **Максвелл—Кремон диаграммаси** дейилади. Ферманинг ҳар бир тугунига диаграмманинг бирор кўпбурчаги мос келади. Аксинча диаграмманинг ҳар

соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда айланиб ўтиш қондасини қабул қиламиз. Бундай айланиб ўтишда кучнинг боши ва учини куч чегаралаб турган соҳаларга мос кичик ҳарфлар билан белгилаймиз. Масалан, \vec{P}_A кучни \vec{cd} , \vec{R}_B ни \vec{de} , \vec{R}_A ни \vec{ec} ; III тугунга қўйилган кучларни \vec{cd} , \vec{dg} , \vec{gf} ва \vec{fc} билан белгилаймиз ва ҳоказо.

Дастлаб ташқи кучлар кўпбурчагини тузамиз. Қуриладиган куч

бир учига ферма текислигининг бирор соҳаси мос келади. Шундай қилиб, бир фигуранинг учига бошқа фигуранинг кўпбурчаги мос келади; бундай фигуралар бир-бирига монанд фигуралар дейилади. 5.5-расм, б ни 5.3-расм, б, в, г, д билан солиштириб, кўриладики ферма учун исалган Максвелл—Кремон диаграммаси 5.3-расмда қурилган куч кўпбурчакларидан ташкил топганлигини яққол кўриш мумкин.



5.6-расм.

Куч учун қабул қилинган масштабдан фойдаланиб, стерженларнинг реакция кучини топиш мумкин.

5.1-масала. 5.6-расмда тасвирланган фермага $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 2$ кН кучлар таъсир этади. Ушбулар расмда кўрсатилган. А ва В таянчларининг реакция кучлари ва ферма стерженларидаги зўриқишлар аниқлансин.

Ечиш. Дастлаб А ва В нуқталарининг реакция кучларини аниқлаймиз. Ферманинг мувозанат тенгламаларини тузиш учун x ва y ўқларини 5.6-расмдагидек йўналтирамиз.

Фермага таъсир этувчи $P_1 = 4$ кН куч вертикал паства, $P_2 = 2$ кН куч esa горизонтал йўналган. А шарнирнинг реакция кучини \vec{X}_A ва \vec{Y}_A ташкил этувчилардан иборат деб қараймиз. Қўзғалувчан шарнир В нинг реакция кучи \vec{R}_B вертикал юқорига йўналади.

Шундай қилиб, фермага \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{R}_B бир текисликда этувчи кучлар таъсир этади. Бундай кучларнинг мувозанат тенгламаларини (4.10) кўринишида тузамиз:

$$\sum X_v = 0; X_A + P_2 = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_v) = 0; -P_1 \cdot 5 - P_2 \cdot 3 + R_B \cdot 10 = 0,$$

$$\sum M_B(\vec{F}_v) = 0; -P_2 \cdot 3 + P_1 \cdot 5 - Y_A \cdot 10 = 0.$$

Бу тенгламаларни ечиб, номаълумларни аниқлаймиз:

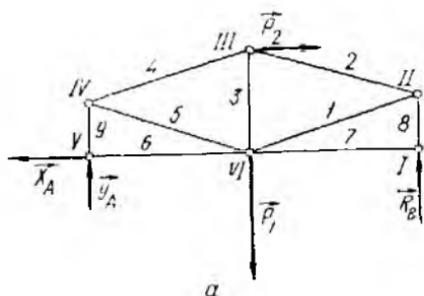
$$X_A = -P_2 = -2 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{P_1 \cdot 5 + P_2 \cdot 3}{10} = 2,6 \text{ кН},$$

$$Y_A = \frac{-P_2 \cdot 3 + P_1 \cdot 5}{10} = 1,4 \text{ кН}.$$

X_A манфий ишорали бўлгани учун \vec{X}_A чапга йўналади (5.7-расм, а).

Стерженлардаги зўриқишларни аниқлашдан аввал берилган ферма статик аниқ ферма эканлигини текшириб кўрамиз. Берилган ферманинг туғунлар сони $l = 5$; стерженлар сони $N = 9$. Булар (5.1) тенгликни қаноатлантиради, $9 = 2 \cdot 5 - 1$. Демак, берилган ферма статик алиқдир. Куч масштабини маълум узунлиги бирлигида танлаб оламиз ва стерженларни номерлаймиз (5.7-расм, а).



5.7- расм.

Ферма стерженларидаги зўриқишни тугун кесиш усули ва Максвелл—Кремон диаграммаси воситасида аниқлаймиз.

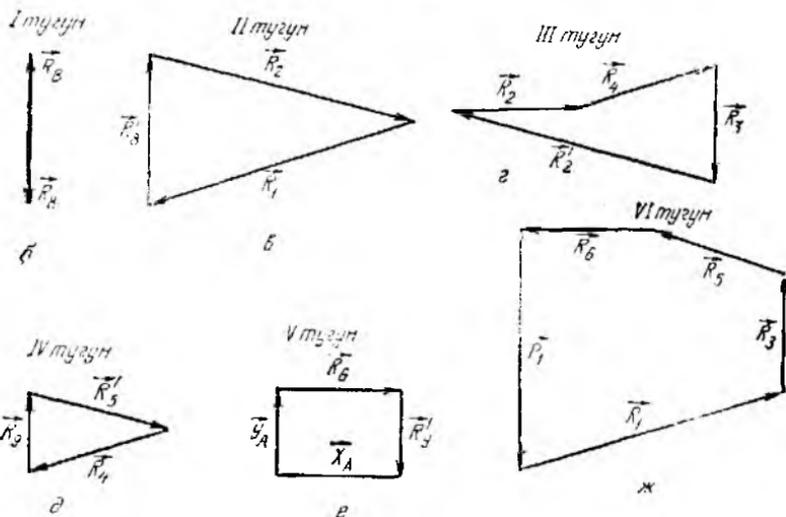
I. Тугун кесиш усули. I тугунни кесамиз. Дастлаб вертикал юқорига йўналган \vec{R}_B кучни тасвирлаймиз (5.7-расм, б). Унинг учидан 8 стерженга параллел вертикал чизик ўтказсак, куч кўпбурчаги бир тўғри чизикда жойлашади ва I тугун мувозанатда бўлиши учун \vec{R}_8 нинг учи \vec{R}_B нинг боши билан устма-уст тушиши керак. Бундан $R_8 = R_B = 2,6$ кН. Бинобарин, 7 стержендаги зўриқиш полга тенг. R_8

I тугунга қараб йўналгани учун 8 стержень сиқилади.

II тугунни кесамиз. Бу тугунга 8, 2 ва 1 стерженларнинг реакция кучлари қўйилган, 8 стерженнинг реакция кучи маълум. Бунда II тугунга қўйилган стерженнинг реакция кучи \vec{R}'_8 миқдор жиҳатдан \vec{R}_8 га тенг ва унга қарама-қарши йўналганини эътиборга олиш керак. II тугун куч учбурчагини ясаш учун ихтиёрий нуқтада \vec{R}'_8 векторини тасвирлаймиз ҳамда унинг боши ва учидан мос равишда 1 ва 2 стерженларга параллел чизиклар ўтказиб, куч кўпбурчагини оламиз (5.7-расм, в).

II тугун мувозанатда бўлиши учун бу куч учбурчаги ёпиқ бўлиши керак. \vec{R}_1 ва \vec{R}_2 нинг йўналишини аниқлаш учун куч учбурчагини ушшг периметри бўйича R'_8 йўналиши бўйича айланиб ўтиш керак. Куч учбурчагининг мос томонларини берилган масштабда ўлчаб, 1 ва 2 стерженларнинг реакция кучлари аниқланади: $R_1 = 4,5$ кН, $R_2 = 4,5$ кН. \vec{R}_1 II тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналгани учун 1 стержень чўзилади; \vec{R}_2 II тугунга йўналгани сабабли 2 стержень сиқилади.

III тугунни кесамиз. III тугунга \vec{P}_2 ва $|\vec{R}_2| = |\vec{R}'_2|$ маълум кучлар таъсир этгач, 2 стержень сиқилгани туфайли \vec{R}'_2 III тугунга, яъни \vec{R}_2 га қарама-қарши



йўналади. \vec{P}_2 ва \vec{R}_2' кучларни ўзига параллел равишда шундай кўчирामизки, \vec{R}_1' нинг учи \vec{P}_2 нинг боши билан устма-уст тушсин (5.7-расм, а). \vec{P}_2 нинг учидан 4 стерженга, \vec{R}_2' нинг бошидан 3 стерженга параллел чизиқлар ўтказамиз. III тугун мувозанатда бўлиши учун ясалган куч кўпбурчаги ёпиқ бўлиши керак. Бу шартдан фойдаланиб, \vec{R}_4 ва \vec{R}_3 нинг йўналишларини аниқлаймиз. \vec{R}_4 III тугунга йўналгани учун 4 стержень сиқилади, \vec{R}_3 III тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналганидан 3 стержень чўзилади. Куч кўпбурчагидан $R_4 = 2,4$ кН, $R_3 = 2$ кН бўлишини аниқлаймиз.

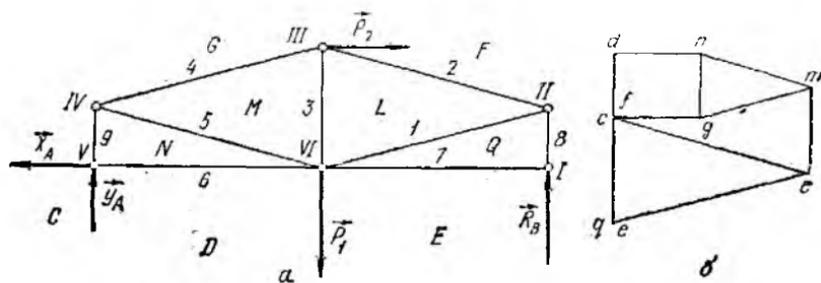
Худди шунингдек, IV, V ва VI тугунларни кесиб, уларга мос куч кўпбурчақларини ясаймиз (5.7-расм, д, е, ж).

Бу усул билан аниқланган \vec{R}_i ва \vec{R}_i' ($i = 1, 9$) лар битта номерли стерженьнинг реакция кучлари бўлиб, мазкур стержень учларига қўйилади ҳамда миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади. Стерженьдаги зўриқиш миқдор жиҳатдан ундаги реакция кучига тенг бўлади; сиқиладиган стерженьдаги зўриқиш кучи шартли равишда манфий ишора билан олинади. Олинган натижалар қуйидаги жадвалда келтирилган:

Стержень номери	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зўриқиш, кН ҳисобда	4,5	-4,5	2	-2,4	2,4	2	0	-2,6	-1,4

2. Максвелл — Крeмон диаграммаси. Фермага таъсир этувчи \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{P}_1 , \vec{R}_B , \vec{P}_2 кучларни ферма контуридан ташқарида тасвирлаймиз (5.8-расм, а). Бу кучлар билан чегараланган соҳаларни C, D, E, F, G, ферма стерженьлари билан чегараланган ички соҳаларни Q, L, M, N орқали белгилаймиз.

Дастлаб ташқи кучлар кўпбурчагини тузамиз. Ташқи кучларни танланган масштабда уларнинг йўналишига мос равишда ферmani соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда учрайдиган тартибда қўя борамиз ва cdefgc ни оламиз (5.8-расм, б). Сўнгра тугун кесиш усулидан фойдаланамиз. I тугунни $\vec{R}_B = \vec{ef}$ дан бошлаб соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда айланиб ўтамиз. \vec{ef} куч шаклда тасвирланган, шу сабабли куч кўпбурчагиди I тугунга таъсир этувчи \vec{fg} ва \vec{ge} кучларни қуриш кифоя. Бунинг учун f нуқтадан g стерженга параллел ва e нуқтадан g стерженга параллел чизиқлар ўтказиб, улар кесинишидан q нуқтани



5.8- расм.

тонамиз. Расмдан кўриниб турибдики, q нуқта e билан устма-уст тушади, яъни 7 стержендаги зўриқиш нолга тенг бўлади. 8 стерженнинг реакция кучи fg I тугунга йўналади. Шу сабабли 8 стержень сиқилади. fg ни таълашган масштабда ўлчаб, $R_8 = 2,6$ кН бўлишини аниқлаймиз. Стержень сиқилгани туфайли $S_8 = -2,6$ кН бўлади.

II тугунини QFL тартибда соат стрелкаси айлашишига тескари йўналишда айлашиб ўтамиз. Бунда илгари тасвирланган q ва f нуқталардан фойдаланамиз. q нуқтада I стерженга параллел, f нуқтада 2 стерженга параллел чизиқлар ўтказамиз; улар кесишган жойда l нуқтани оламиз. fl II тугунга йўналгани учун 2 стержень сиқилади. eg II тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналгани учун I стержень чўзилади. Расмдан fl ва lg ни таълашган масштабда ўлчаб, $R_2 = R_1 = 4,5$ кН эканлигини аниқлаймиз. Уларга мос зўриқишлар $S_1 = 4,5$ кН, $S_2 = -4,5$ кН бўлади.

Худди шунингдек, қолган III, IV ва V тугунларни кесиб, 5,8-расм, б да тасвирланган Максвелл—Кремон диаграммасини оламиз ва ундан қолган стерженлардаги зўриқишни аниқлаймиз.

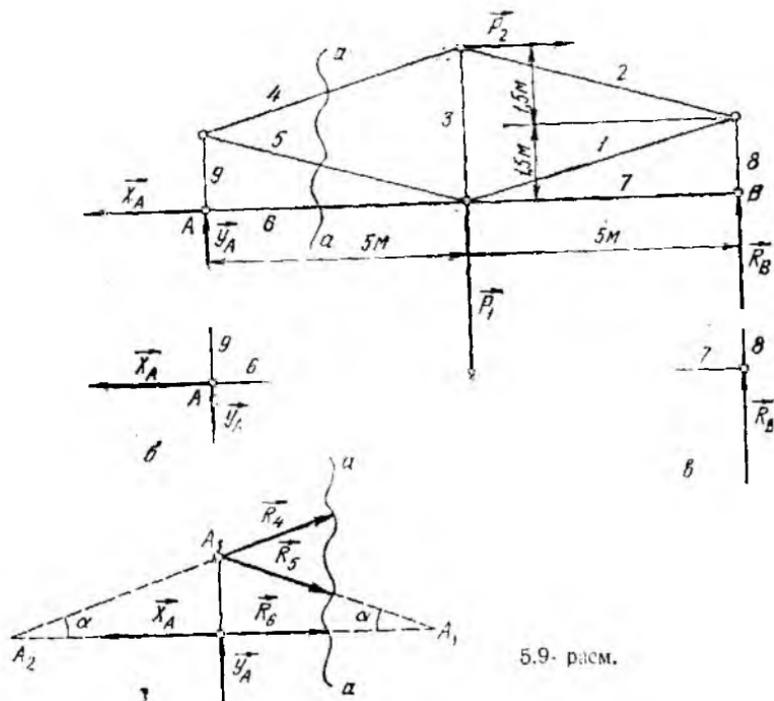
Олинган натижаларни юқоридегидек жадвалда келтирамиз. ✓

5) 2

5.4*-§. Риттер усули

Агар ясси ферманинг барча стерженларидаги зўриқишларни аниқлаш зарур бўлса, Максвелл—Кремон усулидан фойдаланиш энг қулай ҳисобланади. Лекин ферманинг айрим стерженларидаги зўриқишларни аниқлаш лозим бўлса, у ҳолда Риттер (1826—1906) томонидан кашф қилинган ва унинг номи билан аталадиган аналитик усулдан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу усулда ҳам дастлаб ферманинг таянч реакциялари аниқланади.

Риттер усулининг моҳияти шундан иборатки, фермани бирор a — a контур билан фикран қирқиб икки қисмга ажратилади ва ажратилган бирор қисмининг мувозанати текширилади. Текисликда жойлашган кучлар системасининг мувозанат тенгламалари воситасида учта номаълум катталиқни аниқлаш мумкин. Шу сабабли фермани шундай контур билан кесиш керакки, реакция кучлари номаълум бўлган стерженлар сони учтадан ошмаслиги ҳамда бир нуқтада кесиладиган стерженлар сони иккитадан ошмаслиги шарт. Ферманинг кесилган бир қисмини фикран ташлаб юбориб, унинг фермани иккинчи қисмига кўрсатадиган таъсирини стерженлар бўйлаб ташлаб юборилган томонга йўналган кучлар билан алмаштирамиз, яъни барча кесилган стерженларни чўзилади деб фараз қиламиз. Масала ечилганда бирор та стерженнинг реакция кучи манфий инпорали чиқса, унинг йўналиши қабул қилинган йўналишига қарама-қарши бўлиб, мазкур стержень аслида сиқилади. Ферманинг ажратилган қисми учун текисликдаги кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилиб, стерженларнинг номаълум реакция кучлари аниқланади. Тенгламалар тузишда шунга ҳаракат қилиш керакки, имкони бўлса ҳар бир тенгламада номаълумлар сони биттадан ошмасин. Шу нуқтан назардан қараганда (4.11) ёки (4.10) кўринишдаги мувозанат тенгламаларидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. (4.11) тенгламаларни тузишда момент маркази учун иккита номаълум реакция кучларининг таъсир чизиқлари кесиладиган нуқтани олиш тавсия этилади. Бундай нуқталар *Риттер нуқталари* деб аталади. Агар реакция кучлари номаълум



5.9- расм.

Бўлган стерженлардан икkitаси ўзаро параллел бўлса, (4.10) тенгламалардан фойдаланиш қўлай, бунда кучлар проекцияланадиган x ўқ учун параллел стерженларга перпендикуляр ўқ, момент марказлари учун Риттер нуқталари олинади.

14 Риттер усули билан 5.1-масалала берилган ферманинг 4, 5, 6, 7, 8 ва 9 стерженларидаги зўриқишларни аниқлабмиз. Юқоридики кўрганымиздек, $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 2$ кН кучлар таъсир этади ва таянч реакциялари $X_A = 2$ кН, $Y_A = 1,4$ кН, $R_B = 2,6$ кН га тенг (5.9-расм, а).

Ферманинг А ва В таянчларидаги тугунлари 5.2-§ да қаралган 3 ва 2 хусусий ҳолларга мос келади (5.9-расм, б, в). Бинобарин, \vec{R}_9 ва \vec{R}_8 реакция кучлари мос равишда А ва В тугунга йўналади, яъни 9 ва 8 стерженлар сиқилади ҳамда бу стерженлардаги зўриқишлар қуйидагича аниқланади: $S_9 = -R_9 = -Y_A = -1,4$ кН, $S_8 = -R_8 = -R_B = -2,6$ кН.

R_6 реакция кучининг йўналиши X_A га қарама-қаршидир, яъни А тугундан стержень ўқи бўйлаб йўналяди, 6 стержень чўзилади ва $S_6 = R_6 = 2$ кН. 7 стержендаги зўриқиш эса нолга тенг бўлади: $S_7 = 0$.

4 ва 5 стерженлардаги зўриқишни топиш учун ферманинг 4, 5 ва 6 стерженларини $a-a$ контур билан фикран кесамиз ҳамда ферманинг ташлаб юборилдиган ўнг қисмининг таъсирини мос стерженлар бўйлаб йўналган R_4, R_5 ва $R_6 = 2$ кН реакция кучлари билан алмаштирамиз (5.9-расм, г).

Риттер нуқталари A_1 ва A_2 га нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз:

$$\sum M_{A_1}(\vec{F}_v) = 0; \quad -Y_A \cdot 5 - R_4 \cdot 10 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$\sum M_{Az}(\vec{F}_v) = 0; Y_A \cdot 5 - R_5 \cdot 10 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Бу тенгламаларда $\sin \alpha = \frac{1,5}{\sqrt{(1,5)^2 + 5^2}} = 0,2874$ эканлигини эътиборга олсак,

$$R_4 = S_4 = -\frac{Y_A \cdot 5}{10 \cdot \sin \alpha} = -2,4356 \text{ кН},$$

$$R_5 = S_5 = \frac{Y_A \cdot 5}{10 \cdot \sin \alpha} = 3,4356 \text{ кН}.$$

Демак, 4 стержень сиқилади, 5 стержень чўзилади.

Олинган натижани 5.1-масаланинг жавобида келтирилган жадвал билан солиштирсак, Риттер усулида ҳисобланган ферма стерженларидаги зуриқишлар қиймати аниқроқ бўлишини кураиш.

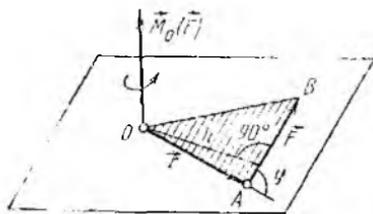
6-боб. ФАЗОДАГИ ҚУЧЛАР СИСТЕМАСИ

6.1-§. Кучнинг нуқтага нисбатан момент-вектори

Таъсир чизиқлари фазода ихтиёрий жойлашган кучлар система-сига *фазодаги кучлар системаси* дейилади.

Фазодаги кучларнинг нуқтага нисбатан моменти қуйидаги учта фактор: 1) кучнинг модулини унинг елкасига кўпайтмаси $F \cdot h$ га тенг момент модули; 2) кучнинг таъсир чизиги ва момент маркази орқали ўтувчи OAB айланниш текислиги; 3) мазкур текисликдаги айланниш йўналиши билан аниқланади (6.1-расм). Агар барча кучлар бир текисликда ётса, ҳар гал OAB айланниш текислигини аниқлашга эҳтиёж қолмайди ҳамда кучнинг нуқтага нисбатан моментини $\pm F \cdot h$ га тенг скаляр катталиқ билан аниқлаш мумкин. Бунда кўпайтма олдидаги ишора 3.3-§ да кўрганамиздек айланниш йўналишини ифодалайди.

Ҳисобга фазода ихтиёрий жойлашган кучлар таъсир этса, ҳар бир кучнинг айланниш текислигини алоҳида аниқлашга тўғри келади. Айланниш текислигининг фазодаги ҳолатини ва айланниш йўналишини мазкур текисликка перпендикуляр вектор билан аниқлаш мумкин. Агар текислиكنинг ҳолатини белгиловчи векторнинг модулини кучнинг моменти модулига тенг ва унинг йўналишини кучнинг айланниш йўналишини ифодалайдиган тарзда танлаб олсак, бундай вектор ёрдамида кучнинг O нуқтага нисбатан моментини характерловчи учала факторини аниқлаш мумкин.



6.1-расм.

Шу сабабли \vec{F} кучнинг O нуқтага нисбатан момент-векторини O марказга қўйилган ва бу марказ ҳамда кучнинг таъсир чизиги орқали ўтган текисликка перпендикуляр йўналган $\vec{M}_O(\vec{F})$ вектор билан тасвирлаймиз. $\vec{M}_O(\vec{F})$ векторининг йўналишини шундай танлаймизки, унинг учидан қараганимизда куч жисмини O нуқта атрофида соат

стрелкаси айланишига тескари йўналишда айлантиришга интилсин.

Агар \vec{F} куч қўйилиш нуқтасининг O марказга нисбатан радиус-векторини \vec{r} билан белгиласак (6.1-расм),

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.1)$$

муносабаг ўринли бўлишни кўрсатамиз.

Векторлар алгебрасида маълумки, $\vec{r} \times \vec{F}$ вектори \vec{r} ва \vec{F} ётган текисликка перпендикуляр йўналган бўлиб, унинг учидан қараганда векторлар фикран бир нуқтага қўчирилганда \vec{r} ни \vec{F} вектори устига тушириш учун соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда энг қисқа бурчакка буриш керак. Бу векторнинг модули

$|\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \sin(\widehat{r, F})$. Расмдан $h = r \sin(\widehat{r, F})$ бўлгани учун

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = F \cdot h = |\vec{M}_O(\vec{F})|. \quad (6.2)$$

$\vec{r} \times \vec{F}$ векторининг йўналиши кучнинг нуқтага нисбатан момент вектори $\vec{M}_O(\vec{F})$ йўналиши билан бир хил бўлади. Шундай қилиб, $\vec{r} \times \vec{F}$ ва $\vec{M}_O(\vec{F})$ векторлари миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши устма-уст тушади, яъни бу векторлар ўзаро тенг. Бинобарин, (6.1) ўринли бўлади.

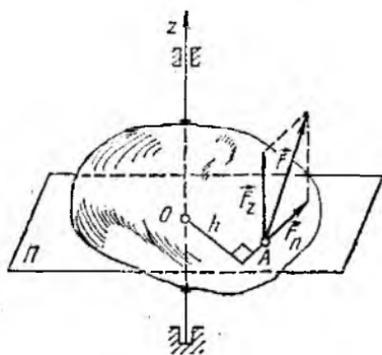
Демак, *кучнинг нуқтага нисбатан моменти вектор катталик бўлиб, куч қўйилган нуқтанинг момент марказига нисбатан радиус-вектори билан шу кучнинг вектор кўпайтмасига тенг.*

6.2 - §. Кучнинг ўққа нисбатан моменти

Фазодаги кучлар системасининг жисмга таъсирини ўрғанишда кучнинг нуқтага нисбатан моменти билан бирга кучнинг ўққа нисбатан моменти тушунчаси ҳам киритилади.

z ўқ атрофида айлана оладиган жисмнинг A нуқтасига \vec{F} куч таъсир этсин (6.2-расм). A нуқтадан жисмнинг айланиш ўқига перпендикуляр Π текислиكنи ўтказамиз. z ўқнинг мазкур текислик билан кесишган нуқтасини O , \vec{F} кучнинг Π текисликдаги проекциясини \vec{F}_Π билан белгилаймиз.

\vec{F} кучни \vec{F}_Π ва z ўққа параллел бўлган \vec{F}_z ташкил этувчиларга ажратамиз. \vec{F}_z куч жисмни z ўқ атрофида айлантира олмайди. Бу



6.2-расм.

куч жисмини z ўқ бўйича силжитишга интилади. Бинобарин, \vec{F} кучнинг z ўқ атрофида айлантириш эффекти шу ўқ атрофида \vec{F}_Π кучнинг айлантириш эффекти билан бир хил бўлади.

Кучнинг бирор ўққа нисбатан моменти деб, унинг шу ўққа перпендикуляр текисликдаги проекциясининг ўқ билан мазкур текислик кесилишган нуқтасига нисбатан моментига айтилади.

\vec{F} кучнинг z ўққа нисбатан моменти $M_z(\vec{F})$ билан белгиланади; таърифга кўра

$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_\Pi). \quad (6.3)$$

(3.8) га асосан $M_O(\vec{F}_\Pi) = \pm F_\Pi \cdot h$ бўлгани учун

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_\Pi \cdot h. \quad (6.4)$$

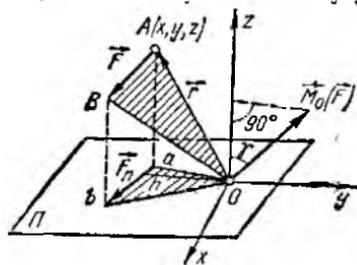
Кучнинг ўққа нисбатан моменти скаляр миқдор бўлиб, ўқнинг мусбат йўналишидан қараганда кучнинг ўққа перпендикуляр текисликдаги проекцияси жисмини соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда айлантиришга интилса, куч моменти мусбат, акс ҳолда манфий ишора билан олинади. 6.2-расмдаги \vec{F} кучнинг z ўққа нисбатан моменти мусбат қийматга эга.

Агар \vec{F} кучнинг таъсир чизиғи z ўққа параллел бўлса, $\vec{F}_\Pi = 0$, шунингдек, кучнинг таъсир чизиғи ўқни кесиб ўтса, $h = 0$ бўлиб, ҳар иккала ҳолда (6.4) га асосан кучнинг ўққа нисбатан моменти нолга тенг бўлади.

6.3-§. Кучнинг ўққа нисбатан моменти билан шу ўқдаги нуқтага нисбатан моменти орасидаги боғланиш

Лемма. Кучнинг бирор ўққа нисбатан моменти унинг шу ўқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан момент-векторининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.

Исбот. \vec{F} кучнинг O нуқтага нисбатан момент-вектори (3.9) га асосан миқдор жиҳатдан OAB учбурчак юзасининг иккиланганига



6.3- расм.

тенг: $|M_O(\vec{F})| = 2S_{\triangle OAB}$ ҳамда OAB учбурчак текислигига перпендикуляр йўналади (6.3-расм). Унинг z ўқ билан ташкил қилган бурчагини γ билан белгиласак, $\vec{M}_O(\vec{F})$ момент-векторининг z ўқдаги проекцияси қуйидагича ифодаланади.

$$[\vec{M}_O(\vec{F})]_z = |M_O(\vec{F})| \cdot \cos \gamma = 2S_{\Delta AOB} \cdot \cos \gamma. \quad (6.5)$$

OAB ва Oab учбурчакларнинг текисликлари орасидаги бурчак бу текисликларга перпендикуляр йўналган $M_O(\vec{F})$ вектор ва Oz ўқ орасидаги γ бурчакка тенг. OAB учбурчакнинг Π текисликдаги проекцияси Oab га тенг бўлгани учун

$$S_{\Delta OAB} \cdot \cos \gamma = \pm S_{\Delta Oab}^*.$$

Натижада (6.5) ни қуйидагича ёзамиз:

$$[\vec{M}_O(\vec{F})]_z = \pm 2S_{\Delta Oab}. \quad (6.6)$$

6.3 - расмда $F_{\Pi} \cdot h = 2S_{\Delta Oab}$ бўлгани учун (6.4) га асосан

$$M_z(\vec{F}) = \pm 2S_{\Delta Oab}. \quad (6.7)$$

(6.6) ва (6.7) ни солиштириб, исботланиши зарур бўлган тенгликни оламиз:

$$M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_z. \quad \blacksquare$$

Худди шунингдек, кучнинг қолган иккита координата ўқларига нисбатан моментлари ҳисобланади. Натижада

$$M_x(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_x, \quad M_y(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_y, \quad M_z(\vec{F}) = [\vec{M}_O(\vec{F})]_z \quad (6.8)$$

формула ўринли бўлади.

(6.1) ва исботланган леммадан фойдаланиб, кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларининг аналитик ифодасини аниқлаймиз. Бунинг учун координаталар бошини O нуқтада олиб, Ox , Oy , Oz ўқларининг бирлик векторларини \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ; \vec{F} кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини X , Y , Z ; A нуқта радиус-вектори \vec{r} нинг координата ўқларидаги проекцияларини x , y , z билан белгилаймиз (6.3 - расм). У ҳолда (6.1) га асосан

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

(6.8) ни назарда тутиб, охириги ифодани Ox , Oy , Oz ўқларга проекцияласак,

$$M_x(\vec{F}) = yZ - zY, \quad M_y(\vec{F}) = zX - xZ, \quad M_z(\vec{F}) = xY - yX. \quad (6.9)$$

(6.9) формулалар кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларининг аналитик ифодасидир. (6.8) ва (6.9) ни эътиборга олиб, кучнинг нуқтага нисбатан моментининг модули аниқланадиган қуйидаги формулага эга бўламиз:

* бу тенгликда γ ўтмас бурчак бўлганда манфий ишора олинади.

$$\begin{aligned}
 |\vec{M}_O(\vec{F})| &= \sqrt{[\vec{M}_O(\vec{F})]_x^2 + [\vec{M}_O(\vec{F})]_y^2 + [\vec{M}_O(\vec{F})]_z^2} = \\
 &= \sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2} = \\
 &= \sqrt{(yZ - zY)^2 + (zX - xZ)^2 + (xY - yX)^2}. \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

Агар кучнинг нуқтага нисбатан момент-векторининг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α , β , γ билан белгиласак, бу векторнинг йўналтирувчи косинуслари қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{M_x(\vec{F})}{\sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2}}, \\
 \cos \beta &= \frac{M_y(\vec{F})}{\sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2}}, \\
 \cos \gamma &= \frac{M_z(\vec{F})}{\sqrt{[M_x(\vec{F})]^2 + [M_y(\vec{F})]^2 + [M_z(\vec{F})]^2}}.
 \end{aligned}$$

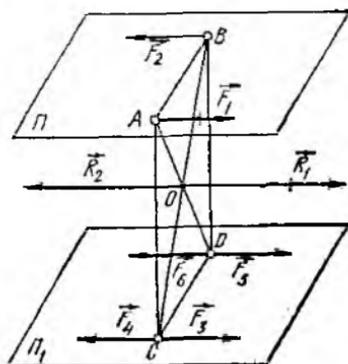
6.4-§. Жуфтни параллел текисликка кўчириш ҳақидаги теорема

Теорема. *Параллел текисликларда ётувчи, моментларининг абсолют қиймати тенг ва бир хил айланиш йўналишига эга бўлган иккита жуфт куч ўзаро эквивалентдир.*

Исбот. II текисликда ётувчи ва елкаси $|AB|$ га тенг (\vec{F}_1, \vec{F}_2) жуфт куч берилган (6.4-расм). II текисликка параллел Π_1 текисликда $[AB]$ га параллел ва тенг CD кесмани оламиз. C ва D нуқталарга миқдорлари (\vec{F}_3, \vec{F}_4) жуфтнинг ташкил этувчиларига тенг $(F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_1)$, таъсир чизиқлари (\vec{F}_1, \vec{F}_2) жуфт ташкил этувчиларига параллел $(\vec{F}_3, \vec{F}_4) \propto 0$ ва $(\vec{F}_5, \vec{F}_6) \propto 0$ мувозанатлашган кучларни қўямиз. У ҳолда

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6) \quad (6.11)$$

бўлади. $[AB]$ ва $[CD]$ ларга параллелограмм қуриб, унинг $[AD]$ ва $[BC]$ диагоналлارини ўтказамиз. \vec{F}_1 ва \vec{F}_6 параллел кучларни қўшиб, уларга параллел ва $[AD]$ нинг ўртаси O нуқтага қўйилган



6.4- расм.

\vec{R}_1 кучга эга бўламиз: $R_1 = F_1 + F_5 = 2F_1$. Худди шунингдек, \vec{F}_2 ва \vec{F}_4 параллел кучларни қўшиб, уларга параллел ва $[BC]$ нинг ўртаси O нуқтага қўйилган $R_2 = F_2 + F_4 = 2F_1$ кучни оламиз. \vec{R}_1 ва \vec{R}_2 кучларнинг миқдорлари тенг, йўналиши бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналгани учун $(\vec{F}_1, \vec{F}_5, \vec{F}_2, \vec{F}_4) \approx (\vec{R}_1, \vec{R}_2) \approx 0$. Бинобарин,

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6) \approx (\vec{F}_3, \vec{F}_6). \quad (6.12)$$

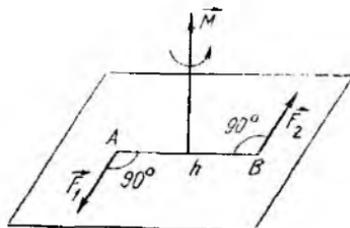
(6.11) ва (6.12) ларни солиштириб, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \approx (\vec{F}_3, \vec{F}_6)$ пайвжани оламиз. 3.5-§ да исботланган теоремага кўра Π_1 текисликда ётувчи (\vec{F}_3, \vec{F}_6) жуфтни моменти шу жуфтнинг моментига тенг ва айланниш йўналиши у билан бир хил бўлган ихтиёрий жуфт куч билан алмаштириш мумкин бўлгани учун Π текисликда ётувчи (\vec{F}_1, \vec{F}_2) жуфтни унга параллел Π_1 текисликда ётувчи ва моменти берилган жуфтнинг моментига тенг ҳамда айланниш йўналиши у билан бир хил бўлган ихтиёрий жуфт куч билан алмаштириши мумкин деган хулосага келамиз.

6.5-§. Жуфтнинг момент-вектори

Жуфт кучнинг жисмга таъсири (худди фазодаги кучнинг нуқтага исбатан моменти каби) қуйидаги учта фактор: жуфт моментининг модули, жуфтнинг таъсир текислиги ва айланниш йўналиши билан характерланади. Қайд этилган учта факторни аниқлаш учун жуфт моменти у ётган текисликка перпендикуляр йўналган ва модул жиҳатдан жуфт моментанинг абсолют қиймати $|\vec{M}| = F_1 \cdot h = \Gamma_2 \cdot h$ га тенг \vec{M} вектори билан ифодаланади. \vec{M} векторини ўнг винг қондаси бўйича, яъни унинг мусбат йўналишидан қаралганда жуфт жисмни соат стрелкаси ҳаракатига тескари айлантиришга интиладиган қилиб йўналтирамиз (6.5-расм).

Жуфтнинг жисмга таъсирини ўзгартирмай ўзининг таъсир текислигида (3.5-§) ёки унга параллел текисликда ихтиёрий ҳолатга кўчириш мумкин бўлганидан (3.6-§), жуфт моменти векторини жисмнинг ихтиёрий нуқтасига ўзига параллел равишда кўчириш мумкин. Бинобарин, *жуфт моменти вектори эркин вектор бўлади.*

(3.10) га биноан, $M = M_A(\vec{F}_2) = M_B(\vec{F}_1)$; 6.4-расмдан кўрамизки, \vec{M} , $\vec{M}_A(\vec{F}_2)$, $\vec{M}_B(\vec{F}_1)$ векторларнинг йўналиши бир хил бўлади. Шу сабабли



6.5-расм.

$$\vec{M} = \vec{M}_A(\vec{F}_2) = \vec{M}_B(\vec{F}_1) \quad (6.13)$$

тенглик ўриналидир.

Шундай қилиб, ҳар бир жуфтга битта жуфт момент-вектори мос келади, бироқ бирор жуфт момент-векторга параллел текисликларда ётувчи сон-саноксиз эквивалент жуфтлар мос келади.

6.6- §. Фазодаги жуфтларни қўшиш

Теорема. Кесилувчи текисликларда ётувчи иккита жуфт куч моментини берилган жуфтлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг битта жуфтга эквивалентдир.

Исбот. Кесилувчи Π_1 ва Π_2 текисликларда ётувчи, моментлари мос равишда \vec{M}_1 ва \vec{M}_2 га тенг жуфтлар берилган бўлсин (6.6-расм). Π_1 ва Π_2 текисликларнинг кесилган чизиғида бирор $AB = d$ кесмани олиб, берилган жуфтларни ўз текислигида умумий d елкага келтирамиз. Натижада 6.6-расмда тасвирланганидек, Π_1 текисликда ётувчи (\vec{F}_1, \vec{F}_2) ва Π_2 текисликда ётувчи (\vec{F}_3, \vec{F}_4) жуфт кучларни оламиз. Бу жуфтлар моментларининг модули қуйидагича аниқланади:

$$M_1 = F_1 \cdot d, \quad M_2 = F_3 \cdot d. \quad (6.14)$$

A ва B нуқталарга қўйилган \vec{F}_1, \vec{F}_3 ва \vec{F}_2, \vec{F}_4 кучларни қўшамиз:

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_1 &= \vec{F}_1 + \vec{F}_3, \\ \vec{R}_2 &= \vec{F}_2 + \vec{F}_4. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

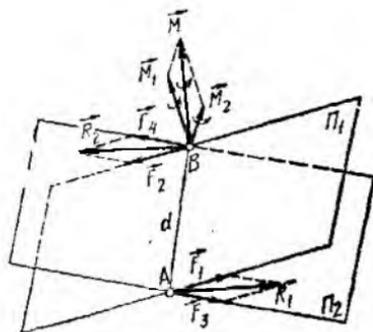
Натижада (\vec{F}_1, \vec{F}_2) ва (\vec{F}_3, \vec{F}_4) жуфт кучлар битта (\vec{R}_1, \vec{R}_2) жуфтга эквивалент бўлади. (6.13), (6.15) ва (6.1) га асосан бу жуфтнинг момент-вектори қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_A(\vec{R}_2) = \vec{AB} \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_4) = \vec{AB} \times \vec{F}_2 + \vec{AB} \times \vec{F}_4 = \\ &= \vec{M}_A(\vec{F}_2) + \vec{M}_A(\vec{F}_4) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

\vec{M}_1 ва \vec{M}_2 момент-векторларига қурилган параллелограмм моментлар параллелограмми дейилади. Бу параллелограммнинг диагонали миқдор ва йўналиш жиҳатдан (\vec{F}_1, \vec{F}_2) ва (\vec{F}_3, \vec{F}_4) жуфтларни қўшиш натижасида олинган (\vec{R}_1, \vec{R}_2) тенг таъсир этувчи жуфтнинг моментини ифодалайди. Чунки моментлар па-



6.6- расм.

параллелограммининг томонлари \vec{F}_1, \vec{F}_3 ва \vec{F}_2, \vec{F}_4 кучларга қурилган параллелограммининг томонларига перпендикуляр бўлгани учун моментлар параллелограммининг диагонали (\vec{R}_1, \vec{R}_2) тенг таъсир этувчи жуфт текислигига перпендикуляр йўналида ва модули $M = R_1 \cdot d$ бўлади. ■

Агар фазода параллел бўлмаган текисликларда ётувчи ва моментлари $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ га тенг жуфтлар системаси берилса, исботланган теоремага асосан жуфтларни кетма-кет қўшиб, битта тенг таъсир этувчи жуфтни оламиз. Бу жуфтнинг momenti берилган жуфтлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n,$$

ёки

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_v. \quad (6.17)$$

Бир неча кучларнинг тенг таъсир этувчиси куч кўпбурчаги усулида тошилгани каби (2.1-§) тенг таъсир этувчи жуфтнинг моментини ҳам кўпбурчак усулида аниқлаш мумкин: тенг таъсир этувчи жуфтнинг momenti берилган жуфтларнинг момент-векторларига қурилган кўпбурчакда биринчи жуфт момент-векторининг бошини n -жуфтнинг момент-вектори учи билан туташтирувчи ётувчи томони билан характерланади.

Агар жуфт кучлар параллел текисликларда ётса, бундай жуфтларни 6.4-§ да исботланган теоремага асосан битта текисликка кўчириш мумкин. Маълумки (3.6-§), бундай жуфтлар системаси битта жуфтга эквивалент бўлиб, унинг momenti берилган жуфтлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади.

(6.17) дан фойдаланиб, фазодаги жуфтлар системасининг мувозанат шартларини келтириб чиқариш мумкин. Фазодаги жуфтлар системаси битта тенг таъсир этувчи жуфтга эквивалент ва унинг momenti (6.17) дан аниқлангани учун жуфтлар мувозанатда бўлганда $\vec{M} = 0$ ёки

$$\sum \vec{M}_v = 0 \quad (6.18)$$

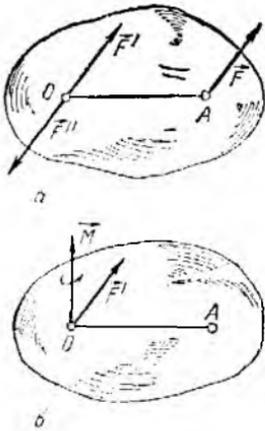
шарт бажарилиши керак. Бинобарин, фазодаги жуфтлар моментларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлса, бундай жуфтлар системаси мувозанатда бўлади.

Жуфтлар системаси мувозанатининг аналитик ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$\sum M_{vx} = 0, \quad \sum M_{vy} = 0, \quad \sum M_{vz} = 0. \quad (6.19)$$

Шундай қилиб, фазодаги жуфтлар моментларининг ҳар бир координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, бундай жуфтлар системаси мувозанатда бўлади.

6.7-§. Фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасини бир нуқтага келтириш



6.7- расм.

Фазодаги кучлар системасини бир нуқтага келтириш учун (худди текисликдаги кучлар системаси каби, 4.2-§) Пуансо усулидан фойдаланиш мумкин. A нуқтага қўйилган \vec{F} кучни ихтиёрий O нуқтага кўчириш учун O нуқтага $\vec{F}' = \vec{F}$ ва $\vec{F}'' = -\vec{F}$ кучларни қўямиз (6.7-расм, а). Натижада A нуқтага қўйилган \vec{F} куч O нуқтага қўйилган $\vec{F}' = \vec{F}$ кучга ва momenti \vec{M} га тенг (\vec{F}, \vec{F}'') қўшилган жуфтга эквивалент бўлади ҳамда

$$\vec{M} = \vec{M}_O(\vec{F}). \quad (6.20)$$

Бу ҳол 6.7-расм, б да тасвирланган.

Жисмнинг A_1, A_2, \dots, A_n нуқталарига фазода ихтиёрий йўналган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсир этсин (6.8-расм, а).

Келтириш маркази учун ихтиёрий O нуқтани танлаб, барча кучларни шу марказга қўшилган жуфтлари билан келтираемиз. Натижада келтириш маркази O нуқтага қўйилган

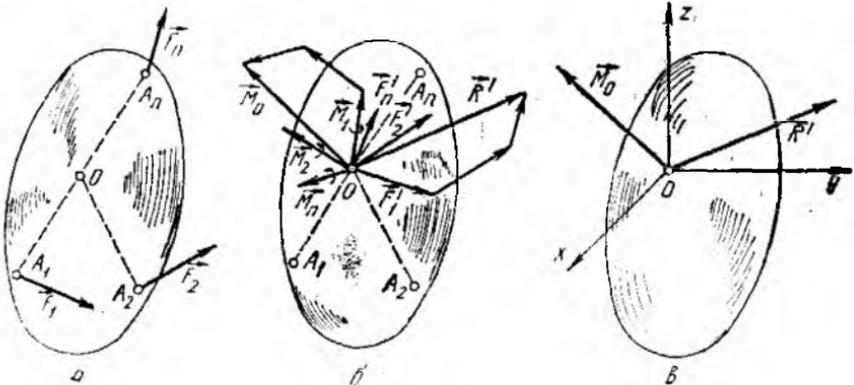
$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \vec{F}'_n = \vec{F}_n \quad (6.21)$$

кучлар системаси ва моментлари

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O(\vec{F}_1), \vec{M}_2 = \vec{M}_O(\vec{F}_2), \dots, \vec{M}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_n) \quad (6.22)$$

бўлган $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$ қўшилган жуфтлар системаси ҳосил бўлади (6.8-расм, б); аниқлик учун расмда $n = 3$ ҳоли кўрилган.

$n=3$.



6.8- расм.

О нуқтага қўйилган $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ кучларни геометрик қўшиб, битта \vec{R}' кучни оламиз: $\vec{R}' = \sum \vec{F}'_v$ ёки (6.21) га асосан

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}'_v. \quad (6.23)$$

Худди текисликдаги кучлар системаси каби барча кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлган \vec{R}' катталikka фазодаги кучлар системасининг бош вектори дейилади.

$(\vec{F}'_1, \vec{F}'_1''), (\vec{F}'_2, \vec{F}'_2''), \dots, (\vec{F}'_n, \vec{F}'_n'')$ фазовий жуфтларни қўшиб, моменти \vec{M}_O га тенг битта жуфтни оламиз. Бу жуфтнинг моменти (6.17) га асосан қуйидагича аниқланади. $\vec{M}_O = \sum \vec{M}'_v$ ёки (6.22) ни эътиборга олсак,

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}'_v(\vec{F}'_v). \quad (6.24)$$

\vec{M}_O га $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ кучлар системасининг келтириш марказига нисбатан бош моменти дейилади. Бинобарин, фазодаги кучлар системасининг бирор марказга нисбатан бош моменти ташкил этувчи кучларнинг шу марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди: фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасини бирор O марказга келтириш натижасида бу кучлар системаси келтириш марказига қўйилган бош вектор \vec{R}' га тенг битта куч билан моменти \vec{M}_O га тенг битта жуфтга эквивалент бўлади (6.8-расм, в).

6.8-расмда моменти бош моментга тенг битта жуфт куч тасвирланмаган. Бунга сабаб, 6.5-§ да таъкидланганидек, жуфт моменти векторига параллел текисликларда ётувчи сон-саноқсиз жуфтлар мос келади.

6.8-§. Фазодаги кучлар системаси бош вектори ва бош моментининг аналитик ифодалари

Бош вектор ва бош моментнинг миқдор ҳамда йўналишини аналитик усулда аниқлаш учун координата бошини келтириш маркази O нуқтада оламиз (6.8-расм, в). \vec{F}'_v куч қўйилган нуқтанинг координаталарини x_v, y_v, z_v ҳамда \vec{F}'_v кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини X_v, Y_v, Z_v билан белгилаймиз. (6.23) ни координата ўқларига проекциялаб, бош вектор \vec{R}' нинг Ox, Oy, Oz ўқларидаги проекцияларини оламиз:

$$R'_x = \sum X_v, R'_y = \sum Y_v, R'_z = \sum Z_v. \quad (6.25)$$

Бош векторнинг модули

$$R' = \sqrt{(\sum X_v)^2 + (\sum Y_v)^2 + (\sum Z_v)^2} \quad (6.26)$$

формула ёрдамида, бош векторнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчак косинуслари эса

$$\cos(\widehat{\vec{R}'}, x) = \frac{R'_x}{R'}, \quad \cos(\widehat{\vec{R}'}, y) = \frac{R'_y}{R'}, \quad \cos(\widehat{\vec{R}'}, z) = \frac{R'_z}{R'} \quad (6.27)$$

формулалар билан аниқланади.

(6.24) ни координата ўқларига проекциялаб, кучнинг ўққа нисбатан моменти билан шу ўқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан моменти орасидаги (6.8) муносабатни эътиборга олсак,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_v)]_x = \sum M_x(\vec{F}_v), \\ M_y &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_v)]_y = \sum M_y(\vec{F}_v), \\ M_z &= \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_v)]_z = \sum M_z(\vec{F}_v) \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

ёки кучнинг ўққа нисбатан моментини (6.9) орқали ифодаласак,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \sum (y_v Z_v - z_v Y_v), \\ M_y &= \sum (z_v X_v - x_v Z_v), \\ M_z &= \sum (x_v Y_v - y_v X_v) \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

формулалар ўринли бўлади. (6.10) муносабатга кўра бош моментнинг модули қуйидагича аниқланади:

$$M_O = \sqrt{[M_x(\vec{F}_v)]^2 + [M_y(\vec{F}_v)]^2 + [M_z(\vec{F}_v)]^2}. \quad (6.30)$$

Координата ўқлари билан ташкил қилган бурчак косинуслари эса

$$\cos(\widehat{\vec{M}_O}, x) = \frac{M_x}{M_O}, \quad \cos(\widehat{\vec{M}_O}, y) = \frac{M_y}{M_O}, \quad \cos(\widehat{\vec{M}_O}, z) = \frac{M_z}{M_O} \quad (6.31)$$

формулалардан топилади.

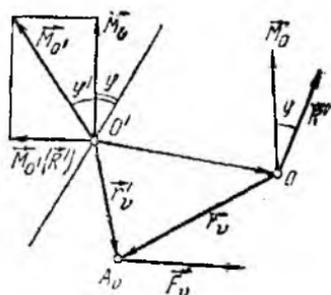
6.9-§. Фазодаги кучлар системасининг инвариантлари

Берилган кучлар системасини унга эквивалент бўлган система билан алмаштиришда ўзгармай қоладиган вектор ёки скаляр катталик *кучлар системасининг инварианти* дейилади.

Худди текисликдаги кучлар системаси каби фазодаги кучлар системасининг бош вектори ҳам берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади ва келтириш марказига боғлиқ бўлмайди. Яъни, кучлар системасининг бош вектори келтириш марказига нисбатан инвариант бўлади. Бош вектор \vec{R}' *кучлар системасининг векторли инварианти* дейилади.

Келтириш марказини ўзгартириш натижасида бош момент қандай ўзгаришини кўрамиз. Фазодаги $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар систе-

масини O марказга келтирганда унинг бош вектори \vec{R}' ва бош моменти \vec{M}_O га тенг бўлсин (6.9-расм). Келтириш маркази учун бошқа O' нуқтани олиб, бу нуқтага нисбатан ҳисобланган бош моментни $\vec{M}_{O'}$ билан белгилайлик. Агар A_v ($v = \overline{1, n}$) нуқтага қўйилган кучнинг O' нуқтага нисбатан радиус-векторини \vec{r}'_v билан белгиласак, у ҳолда (6.24) га биноан



6.9- расм.

$$\vec{M}_{O'} = \sum \vec{M}_{O'}(\vec{F}_v) = \sum \vec{r}'_v \times \vec{F}_v.$$

6.9-расмдан $\vec{r}'_v = \vec{O'O} + \vec{r}_v$ бўлгани учун

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum (\vec{O'O} + \vec{r}_v) \times \vec{F}_v = \sum \vec{O'O} \times \vec{F}_v + \sum \vec{r}_v \times \vec{F}_v = \\ &= \vec{O'O} \times \sum \vec{F}_v + \sum \vec{r}_v \times \vec{F}_v = \vec{O'O} \times \vec{R}' + \vec{M}_O. \end{aligned} \quad (6.32)$$

(6.3) га асосан $\vec{O'O} \times \vec{R}' = \vec{M}_O(\vec{R}')$ бош векторнинг O' нуқтага нисбатан моментини ифодалайди. Буни назарда тутиб (6.32) ни қуйидагича ёзиш мумкин

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O(\vec{R}') + \vec{M}_O \quad (6.32)$$

ёки

$$\vec{M}_{O'} - \vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R}'),$$

яъни келтириш марказини ўзгартириш натижасида бош моментнинг ўзгариши, аввалги келтириш маркази O га қўйилган кучлар системаси бош вектори \vec{R}' нинг янги келтириш маркази O' га нисбатан моментига тенг.

(6.33) да $\vec{M}_{O'}(\vec{R}') \perp \vec{R}'$ эканлигини назарда тутиб, бу тенгликни бош вектор \vec{R}' га скаляр кўпайтирамиз:

$$\vec{R}' \cdot \vec{M}_{O'} = \vec{R}' \cdot \vec{M}_O \quad (6.34)$$

ёки

$$M_{O'} \cos \varphi' = M_O \cos \varphi, \quad (6.35)$$

бунда $\varphi' = \widehat{\vec{R}', \vec{M}_{O'}}$ ва $\varphi = \widehat{\vec{R}', \vec{M}_O}$.

Бипобарин, кучлар системаси бош векторининг бош моментга скаляр кўпайтмаси ёки бош моментнинг бош вектордаги проекция-

си, келтириш марказига боғлиқ бўлмаган ўзгармас катталикдир. Бу катталик *фазодаги кучлар системасининг скаляр инварианти* дейилади.

(6) 3 . 6.10-§. Фазодаги кучлар системаси битта жуфтга ёки тенг таъсир этувчига келтириладиган ҳоллар. Вариньон теоремаси

Юқорида кўрганмиздек (6.7-§) жисмга таъсир этувчи фазода ихтиёрий жойлашган ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кучлар системасини O марказга келтириш натижасида бу кучлар системаси бош вектор \vec{R}' га тенг битта куч билан momenti бош момент \vec{M}_O га тенг битта жуфт кучга эквивалент бўлади.

Агар кучлар системасининг бош вектори $\vec{R}' = 0$, яъни берилган кучларга қурилган куч кўпбурчаги ёлиқ ҳамда бош momenti $\vec{M}_O \neq 0$ бўлса, бундай кучлар системаси momenti бош момент \vec{M}_O га тенг битта тенг таъсир этувчи жуфтга келтирилади. Бу ҳолда (6.33) га асосан келтириш марказини O' га ўзгартирган билан жуфт momenti ўзгармайди:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O.$$

Тенг таъсир этувчи жуфтнинг momenti \vec{M}_O эркин вектор бўлгани учун уни жисмнинг ихтиёрий нуқтасига қўйиш мумкин. Тенг таъсир этувчи жуфтнинг ташкил этувчилари эса, момент-вектори \vec{M}_O га перпендикуляр ихтиёрий текисликда ётиши мумкин.

Қуйидаги икки ҳолда фазодаги кучлар системаси тенг таъсир этувчи кучга келтирилади:

1. Агар келтириш маркази деб танланган O нуқта учун

$$\vec{R}' \neq 0, \quad \vec{M}_O = 0$$

бўлса, у ҳолда фазодаги кучлар системаси берилган кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг ва O нуқтага қўйилган битта кучга, яъни тенг таъсир этувчи \vec{R} га эквивалент бўлади:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \propto \vec{R}$$

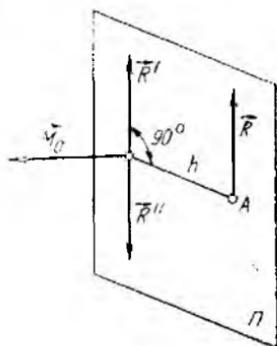
ҳамда

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

2. Агар келтириш маркази O нуқта учун

$$\vec{R}' \neq 0, \quad \vec{M}_O \neq 0$$

ҳамда бош момент \vec{M}_O бош вектор \vec{R}' га перпендикуляр бўлса, у ҳолда фазодаги кучлар системасининг скаляр инварианти $\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$ бўлиб, бундай кучлар система-си тенг таъсир этувчига келтирилишнинг ис-ботлаймиз. Бош вектор \vec{R}' орқали бош мо-мент \vec{M}_O га перпендикуляр Π текислиқни ўтказамиз (6.10-расм). Моменти \vec{M}_O га тенг бўлган (\vec{R}', \vec{R}'') жуфтнинг ташкил этувчи-ларидан бири \vec{R}'' ни шундай танлаймизки, у миқдор жиҳатдан бош вектор \vec{R}' га тенг, йўналиши эса унга қарама-қарши бўлсин. У ҳолда (\vec{R}', \vec{R}'') жуфт-нинг momenti



6.10- расм.

$$M_O = R' \cdot h = R \cdot h$$

формуладан аниқлангани учун жуфтнинг елкаси

$$h = \frac{M_O}{R'}$$

тенгликдан топилади. (\vec{R}, \vec{R}'') жуфтнинг иккинчи ташкил этувчиси \vec{R}'' O нуқтадан \vec{M}_O , \vec{R}' лар ётган текисликка ўтказилган h перпендикулярнинг учига шундай қўйилганки, \vec{M}_O векторнинг учидан қараганимизда \vec{R} куч жисмини O нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракатига тесқари йўналишда айлантиришга интилади. O нуқтага қўйилган \vec{R}' ва \vec{R}'' кучлар мувозанатлашган кучлар системасини ташкил этади: $(\vec{R}', \vec{R}'') \in O$. Шу сабабли берилган кучлар система-си O' нуқтага қўйилган биргина \vec{R} кучга эквивалент бўлади: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \in \vec{R}$. Буида \vec{R} куч берилган кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини ифодалайди.

Демак, бирор O нуқтада бош вектор \vec{R}' бош момент \vec{M}_O га перпендикуляр йўналган бўлса, кучлар системаси бош вектор \vec{R}' га параллел йўналган ва келтириш маркази O дан $OA = h = \frac{M_O}{R'}$ масофада (\vec{M}_O йўналишига мос равишда) A нуқтага қўйилган тенг таъсир этувчи \vec{R} кучга келтирилади.

Фазодаги кучлар тенг таъсир этувчисининг моментига онд қуйидаги *Вариньон теоремасини* исботлаймиз (текисликдаги кучлар системаси учун бу теорема 4.3-§ да исботланган):

Агар фазодаги кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилса, бу тенг таъсир этувчининг ихтиёрий нуқтага нисбатан моменти барча кучларнинг мазкур нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Исбот. Фазодаги $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ кучлар системаси A нуқтага қўйилган \vec{R} тенг таъсир этувчига келтирилади деб қарайлик. Ихтиёрий O нуқтани оламыз ва келтириш марказини ўзгартириш натижасида бош моментнинг ўзгаришини ифодаловчи (6.33) тенгликка асосан система барча кучларининг O нуқтага нисбатан бош моменти учун қуйидаги ифодани ёзамиз:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{M}_A.$$

Берилган кучлар системаси A нуқтада тенг таъсир этувчига келтирилгани туфайли бош момент $\vec{M}_A = 0$ бўлади, бинобарин

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{R}),$$

(6.24) формулага асосан бош момент \vec{M}_O система барча кучларининг O нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_\nu).$$

Охирги иккита тенгликни солиштириб, қуйидаги натижани оламыз:

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_\nu). \quad (6.36)$$

(6.36) тенгликни O нуқтадан ўтувчи бирор Oz ўққа проекциялаймиз:

$$[\vec{M}_O(\vec{R})]_z = \sum [\vec{M}_O(\vec{F}_\nu)]_z.$$

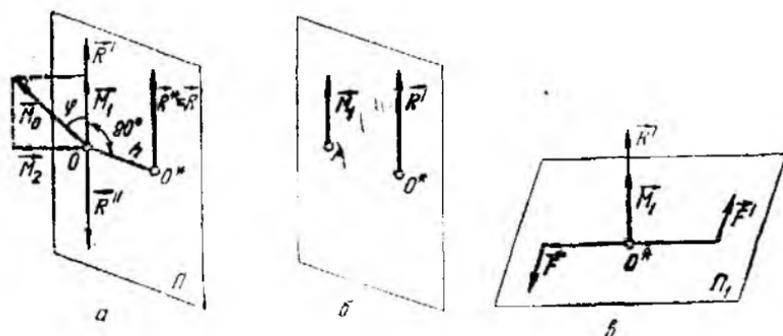
(6.8) тенгликка асосан охирги ифода қуйидагича ёзилади:

$$M_z(\vec{R}) = \sum M_z(\vec{F}_\nu). \quad (6.37)$$

Демак, фазодаги кучлар системаси тенг таъсир этувчисининг ихтиёрий ўққа нисбатан моменти мазкур кучларнинг ушбу ўққа нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

6.11-§. Фазодаги кучлар системасини динамик винтга келтириш

Кучлар системасини содда ҳолга келтириш билан шуғулланамиз. Берилган кучлар системасини O марказга келтириш натижасида бош вектор \vec{R}' билан бош момент \vec{M}_O орасидаги бурчак $\varphi \neq 90^\circ$ ҳолни текширамыз (6.11-расм).



6.11- расм.

Бош момент \vec{M}_O ни бош вектор \vec{R}' бўйлаб йўналган \vec{M}_1 ва унга перпендикуляр йўналган \vec{M}_2 ташкил этувчиларга ажратамиз (6.11-расм, а):

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= |M_0 \cos \varphi| = \frac{R' M_0 |\cos \varphi|}{R'} = \frac{|\vec{R}' \cdot \vec{M}_O|}{R'} \\ M_2 &= |M_0 \sin \varphi|. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

$\vec{M}_2 \perp \vec{R}'$ бўлгани учун, юқорида кўрганимиздек, моменти \vec{M}_2 га тенг жуфт ва \vec{R}' бош векторни, O нуқтадан \vec{M}_2 га перпендикуляр ўтказилган Π текисликдаги

$$OO^* = \frac{M_2}{R'} = \frac{M_0 |\sin \varphi|}{R'} \quad (6.39)$$

масофада, O^* нуқтага қўйилган $\vec{R}^* = \vec{R}'$ куч билан алмаштириш мумкин (6.11-расм, б).

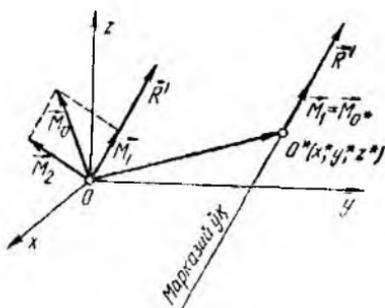
Берилган кучлар системаси учун \vec{M}_1 вектори ўзгармас бўлиб, келтириш марказига боғлиқ бўлмайди, шу сабабли уни ўзига параллел равишда O^* нуқтага келтираемиз (6.11-расм, в). Натижада берилган кучлар системаси O^* нуқтага қўйилган $\vec{R}^* = \vec{R}'$ кучга ва шу куч бўйлаб йўналган \vec{M}_1 моментли (F, \vec{I}') жуфтга келтирилади. Бу жуфт \vec{M}_1 га перпендикуляр Π_1 текисликда ётади.

Битта куч ва шу кучга перпендикуляр текисликда ётувчи жуфтдан ташкил топган система *динамик винт* дейилади.

Шундай қилиб, бош вектор нолдан фарқли ва бош моментга перпендикуляр бўлмаган ҳолда, яъни фазодаги кучлар системасининг скаляр инварианти $\vec{R}' \cdot \vec{M}_O \neq 0$ ҳолда кучлар системаси динамик винтга келтирилади. Тинч ҳолатдаги эркин жисмга куч таъсир этса, жисм илгариларама ҳаракат қилади; жуфт куч эса жисмни ай-

ланма ҳаракатга келтиради. Динамик винт таъсиридаги жисм илгариллама ва айланма ҳаракатда (яъни винт ҳаракатиде) бўлади.

Фазодаги кучлар системаси динамик винтга келтириладиган O^* нуқта ягона эмас. Ҳақиқатан ҳам, \vec{M}_1 вектори эркин вектор ҳамда $\vec{R}^* = \vec{R}'$ кучни таъсир чизиги бўйлаб кўчириш мумкин бўлгани туфайли $\vec{R}^* = \vec{R}'$ векторнинг таъсир чизигида ётувчи ихтиёрый нуқтада кучлар системаси динамик винтга келтирилади.



6.12- расм.

6.12- §. Марказий ўқ тенгламаси

Фазода O^* нуқтани шундай танлаш керакки, берилган кучлар системаси шу нуқтада динамик винтни ташкил этсин, яъни бош вектор \vec{R}' билан бош момент \vec{M}_{O^*} бир тўғри чизик бўйлаб йўнаلسин. Бу тўғри чизик берилган кучлар системасининг марказий ўқи дейилади.

Марказий ўқ тенгламасини аниқлаш учун \vec{M}_{O^*} ва \vec{R}' векторларнинг коллинеарлик шартидан фойдаланамиз (6.12- расм), яъни

$$\frac{\vec{M}_{O^*}}{\vec{R}'} = p = \frac{|\vec{R}' \cdot \vec{M}_O|}{(R')^2}, \quad (6.40)$$

бунда p узунлик бирлигида ўлчанадиган ўзгармас катталик бўлиб, винт параметри дейилади. (6.32) га асосан O^* нуқтага nisbataи бош момент учун

$$\vec{M}_{O^*} = O^*O \times \vec{R}' + \vec{M}_O = \vec{M}_O - OO^* \times \vec{R}'$$

бўлганидан (6.40) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\vec{M}_O - OO^* \times \vec{R}'}{\vec{R}'} = p. \quad (6.41)$$

(6.41) марказий ўқ тенгламасининг векторли ифодасидир.

Марказий ўқ тенгламасининг аналитик ифодасини ёзиш учун ихтиёрый O нуқтада x , y , z координата ўқларини ўтказамиз.

O нуқтага кучларни келтириш натижасида бош вектор \vec{R}' ва бош момент $\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ га (бунда $\vec{M}_1 \perp \vec{M}_2$, $\vec{M}_1 = \vec{M}_{O^*}$) эга бўлайлик. Агар \vec{M}_O , \vec{R}' , OO^* векторларнинг проекцияларини мос равишда

$$\vec{M}_O(M_x, M_y, M_z), \vec{R}'(R'_x, R'_y, R'_z), O\vec{O}^*(x^*, y^*, z^*)$$

билан белгиласак, (6.38) ва (6.40) га асосан марказий ўқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан ҳисобланган динамик винт бош моментининг аналитик ифодаси

$$M_1 = \frac{|R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z|}{\sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2}}, \quad (6.42)$$

винт параметри

$$p = \frac{|R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z|}{\sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2}}, \quad (6.43)$$

марказий ўқ тенгламаси

$$\begin{aligned} \frac{M_x - (y^* R'_z - z^* R'_y)}{R'_x} &= \frac{M_y - (z^* R'_x - x^* R'_z)}{R'_y} = \\ &= \frac{M_z - (x^* R'_y - y^* R'_x)}{R'_z} \end{aligned} \quad (6.44)$$

формуларалар ёрдамида аниқланади.

6.12-расмда $M_{O^*} < M_O$ ёки $M_1 < M_O$ тенгсизлик ўринли бўлгани учун марказий ўқда ётувчи барча нуқталарда бош момент минимум қийматга эришади ва (6.38) нинг биринчисидан аниқланади.

Қуйидаги жадвалда фазодаги кучлар системасини бир нуқтага келтириш ҳоллари кўрсатилган (4-ҳўлнинг ўринли эканлиги 6.14-§ да берилган)

№№	$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O$	\vec{R}'	\vec{M}_O	Келтириш ҳоллари
1	$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O \neq 0$	$\vec{R}' \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	Динамик винт
2	$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$	$\vec{R}' \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$ $\vec{M}_O = 0$	Тенг таъсир ётувчи куч
3	$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$	$\vec{R}' = 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	Жуфт куч
4	$\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$	$\vec{R}' = 0$	$\vec{M}_O = 0$	Кучлар системаси мувозанатда бўлади

Агар кучлар системаси бир текисликда (масалан, Oxy текислигида) ётса, у ҳолда бош векторнинг z ўқдаги проекцияси ва бош моментнинг x ва y ўқлардаги проекциялари нолга тенг бўлади:

$$R'_z = 0, M_x = 0, M_y = 0.$$

Бу қийматларни

$$\vec{R}' \cdot \vec{M}_0 = R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z$$

га қўйсак, $\vec{R}' \cdot \vec{M}_0 = 0$ бўлишини кўрамиз. Шундай қилиб, текисликдаги кучлар системаси жадвалдаги 2,3 ва 4-қолларга мос келади.

Худди шунингдек, агар фазодаги кучлар системаси z ўққа параллел бўлса, уларнинг x ва y ўқлардаги проекциялари ҳамда z ўққа нисбатан моментлари нолга тенг бўлади, яъни

$$R'_x = 0, R'_y = 0, M_z = 0.$$

Бинобарин, бу ҳолда ҳам кучларнинг скаляр инварианти

$$\vec{R}' \cdot \vec{M}_0 = R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z = 0$$

бўлиб, фазодаги кучлар системасини бир нуқтага келтириш жадвалдаги 2,3 ва 4-қолларга мос келади ва текисликдаги кучлар системаси ёки фазодаги параллел кучлар системаси динамик винтга келтирилмайди.

Фазодаги кучларни содда (каноник) ҳолга келтиришга онд қуйидаги масалани ечамиз.

6.1- масала. Кубнинг иккита қирраси бўйича \vec{P} куч қўйилган (6.13- расм). Шу кучлар системаси содда ҳолга келтирилсин.

Ечиш. Бу хилдаги масалалар қуйидаги тартибда ечилади:

1. Координаталар бошини кучлар келтириладиган нуқтада оламиз. Берилган масалада координата ўқларини 6.13- расмдагидек йўналитирамиз.

2. (6.25—6.27) га асосан бонг вектор \vec{R}' ning миқдор ва йўналишини аниқлаймиз:

$$R'_x = \sum X_v = P, R'_y = \sum Y_v = 0, R'_z = \sum Z_v = P,$$

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2} = P\sqrt{2},$$

$$\cos(\vec{R}', \hat{x}) = \frac{R'_x}{R'} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \vec{R}', \hat{x} = 45^\circ,$$

$$\cos(\vec{R}', \hat{y}) = \frac{R'_y}{R'} = 0, \quad \vec{R}', \hat{y} = 90^\circ,$$

$$\cos(\vec{R}', \hat{z}) = \frac{R'_z}{R'} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \vec{R}', \hat{z} = 45^\circ.$$

(6.28) га асосан:

$$M_x = \sum M_x(\vec{F}_v) = 0, M_y = \sum M_y(\vec{F}_v) = 0,$$

$$M_z = \sum M_z(\vec{F}_v) = -aP.$$

3. Динамик винт бош моментини (6.42) га асосан аниқлаймиз:

$$M_1 = \frac{|R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z|}{\sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2}} = Pa \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Марказий ўқ тенгмасини тузамиз. Бош вектор ва бош моментнинг координата ўқларидаги аниқланган проекцияларини назарда тутиб, (6.44) тенгламадан қуйидаги муносабатни оламиз

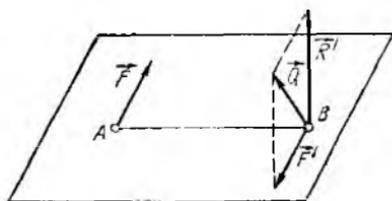
$$\frac{0 - (y^* P - z^* \cdot 0)}{P} = \frac{0 - (z^* P - x^* P)}{0} = \frac{-aP - (x^* \cdot 0 - y^* \cdot P)}{P}$$

Бунда $z^* = z_1 = 0$ деб қараб, марказий ўқнинг *Oxy* текислиги билан кесишган *A* ($x_1, y_1, 0$) нуқтанинг координаталарини аниқлаймиз: $x_1 = 0, y_1 = \frac{a}{2}$.

Марказий ўқнинг йўналиши бош вектор \vec{R}^t йўналиши билан бир хил бўлгани учун марказий ўқ 6.13-расмдагидек, $A(0, \frac{a}{2}, 0)$ нуқта ва кубнинг маркази орқали ўтади. ✓

6.13-§. Фазодаги кучлар системасини иккита ўзаро кесишмайдиган кучларга келтириш

Фазодаги кучлар системаси динамик винтга келтирилган деб қарайлик. Динамик винтни бош вектор \vec{R}^t га тенг куч ҳамда ташкил этувчилари \vec{F} ва \vec{F}' га тенг жуфтда иборат деб қараш мумкин (6.14-расм). *B* нуқтага қўйилган жуфт ташкил этувчи кучлардан бири \vec{F}' ни \vec{R} билан геометрик қўшиб, уларнинг йиғиндисини \vec{Q} билан белгилаймиз. Натижада берилган кучлар системаси фазодаги параллел бўлмаган ва кесишмайдиган иккита кучлар: *A* нуқтага қўйилган \vec{F} ва *B* нуқтага қўйилган \vec{Q} га эквивалент бўлади.



6.14-расм.

6.14-§. Фазодаги кучлар системасининг мувозанат шартлари

Теорема. Фазодаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун

$$\vec{R}^t = 0, \vec{M}_O = 0 \quad (6.45)$$

тенгликларнинг бажарилиши, яъни кучлар системасининг бош вектори ва ихтиёрий келтириши марказига нисбатан бош моменти нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Зарурлиги. Агар \vec{R}' ва \vec{M}'_O нолдан фарқли бўлса, бундай кучлар системаси мувозанатда бўла олмайди, чунки жуфт кучни битта куч билан мувозанатлаш мумкин эмас. Агар $\vec{R}' = 0$, $\vec{M}'_O \neq 0$ бўлса, кучлар системаси битта жуфтга келтирилади ёки $\vec{M}'_O = 0$, $\vec{R}' \neq 0$ бўлган ҳолда кучлар системаси келтириш марказига қўйилган битта тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади. Ҳар иккала ҳолда ҳам кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун (6.45) нинг бажариллиши зарурий шарт ҳисобланади.

Етарлилиги. (6.45) шартлар бажарилса, келтириш маркази O га қўйрилган барча кучлар ҳам, қўйилган жуфтлар системаси ҳам нолга эквивалент бўлади. Яъни берилган кучлар системаси мувозанатлашган кучлар системасини ташкил этади.

(6.45) шартлар фазодаги кучлар системаси мувозанатининг векторли ифодасидир. (6.45) нинг геометрик маъноси қуйидагича: фазодаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун кучлар қўп-бурчак ва берилган кучларнинг исталган келтириш марказига нисбатан момент векторларига қурилган қўпбурчак ёпиқ бўлиши керак.

(6.26) ва (6.30) ни назарда тутиб, (6.45) ўрнига қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_v = 0, \quad \sum Y_v = 0, \quad \sum Z_v = 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_z(\vec{F}_v) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

Бу тенгламалар фазодаги кучлар системаси мувозанатининг аналитик шартларини ифодалайди: фазодаги кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун барча кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларининг ва кучларнинг учта координата ўқларига нисбатан моментларининг йиғиндиси алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Кучлар системаси мувозанатининг қуйидаги учта хусусий ҳолини алоҳида кўрамиз:

1. Бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси. Агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ бир нуқтада кесувчи кучлар системасини ташкил этса, келтирилиш маркази учун кучларнинг таъсир чизиқлари кесишган нуқтани оламиз. Натижада барча кучларнинг таъсир чизиқлари учала координата ўқларини кесиб ўтади ва кучларнинг мазкур ўқларга нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Бинобарин, (6.46) даги охириги учта тенглама айниятга айланади.

Шундай қилиб, бир нуқтада кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламаларини аввал келтириб чиқарилган (2.10) кўрinishида оламиз:

$$\sum X_v = 0, \quad \sum Y_v = 0, \quad \sum Z_v = 0.$$

* Кучларнинг ўққа нисбатан моментларини ҳисоблашда (6.29) дан ҳам фойдаланиш мумкин.

2. Текисликдаги кучлар системаси. Агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ бир текисликда ётувчи кучлар системасини ташкил этса, кучлар ётган текислик учун Oxy текислигини оламиз. Кучлар z ўққа перпендикуляр текисликда жойлашгани туфйли уларнинг z ўқдаги проекциялари нолга тенг. Кучларнинг таъсир чизиқлари Ox ва Oy ўқларига параллел ёки кесиб ўтгани учун ҳар иккала ҳолда ҳам кучларнинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Натижада (6.46) ининг учинчи, тўртинчи ва бешинчи тенгламалари айниятга айланади. Барча кучлар Oxy текислигида ётганлиги сабабли уларнинг z ўқига нисбатан моментлари координаталар боши O га нисбатан кучлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади. Шу сабабли текисликдаги кучларнинг мувозанат тенгламаларини илғари чиқарилган (4.9) кўринишида ёзиш мумкин:

$$\sum X_v = 0, \sum Y_v = 0, \sum M_o(\vec{F}_v) = 0.$$

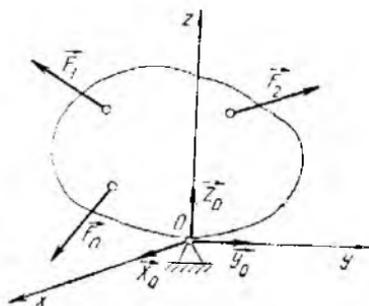
3. Фазодаги параллел кучлар системаси. Агар $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ фазодаги параллел кучлар системасидан иборат бўлса, z ўқни кучларга параллел йўналтирамиз. Кучларнинг таъсир чизиқлари Oxy текислигига перпендикуляр бўлгани учун уларнинг Ox ва Oy ўқлардаги проекциялари нолга тенг бўлади. Кучлар z ўққа параллел бўлгани учун кучларнинг z ўққа нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Натижада (6.46) даги биринчи, иккинчи ва олтинчи тенгламалар айниятга айланади ва фазодаги параллел кучларнинг мувозанат шартлари қуйидагича ёзилади:

$$\sum Z_v = 0, \sum M_x(\vec{F}_v) = 0, \sum M_y(\vec{F}_v) = 0. \quad (6.47)$$

6.15-§. Бир нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисмнинг мувозанат шартлари

Юқорида чиқарилган (6.46) кўринишидаги мувозанат тенгламалари эркин қаттиқ жисмга қўйилган кучлар системаси учун ўринли бўлади. Боғланишдаги жисмларнинг мувозанатнинг аниқлашда боғланишдан бўшатилш ҳақидаги аксиомадан фойдаланамиз.

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсиридаги жисм O нуқтада сферик шарнир воситасида маҳкамланган бўлсин (6.15-расм). Қўзғалмас нуқтани координаталар боши учун қабул қиламиз. Берилган кучлар қаторига сферик шарнир реакция кучининг ташкил этувчилари \vec{X}_0, \vec{Y}_0 ва \vec{Z}_0 ларни қўшиб, (6.46) га асосан мувозанат тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:



6.15- расм.

$$\left. \begin{aligned} \sum X_v + X_0 = 0, \quad \sum Y_v + Y_0 = 0, \quad \sum Z_v + Z_0 = 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_v) = 0, \quad \sum M_z(\vec{F}_v) = 0. \end{aligned} \right\} (6.48)$$

Охириг учта тенгламада номаълум реакция кучлари қатнашмайди ва бу тенгламалар мувозанат шартларини ифодалайди. Бу шартларнинг векторли ифодасини

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_v) = 0 \quad (6.49)$$

шаклида ёзиш мумкин.

(6.49) дан кўрамизки, агар актив кучларнинг қўзғалмас нуқтага нисбатан момент-векторларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлса, битта нуқтаси билан маҳкамланган жисм мувозанатда бўлади. Бошқача айтганда, битта нуқтаси билан маҳкамланган жисм мувозанатда бўлиши учун берилган кучлар системаси қўзғалмас нуқтадан ўтувчи

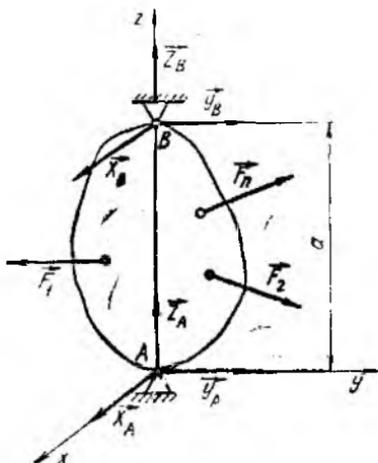
$$\vec{R} = -\vec{R}_0 \quad (6.50)$$

тенг таъсир этувчига келтирилиши керак. (6.48) нинг биринчи учта тенгласидан қўзғалмас нуқтадаги реакция кучи \vec{R}_0 нинг координата ўқларидаги проекциялари аниқланади:

$$X_0 = -\sum X_v, \quad Y_0 = -\sum Y_v, \quad Z_0 = -\sum Z_v.$$

Бу тенгламалар (6.50) векторли тенгламанинг координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди.

6.16-§. Иккита нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисмнинг мувозанат шартлари



6.16- расм.

Иккита A ва B нуқталари сферик шарнир билан маҳкамланган жисм $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсирида мазкур нуқталар орқали ўтувчи ўқ атрофида айланиши мумкин. Координаталар бошини A нуқтада олиб, z ўқни A ва B нуқталар орқали ўтказамиз (6.16- расм). Қўзғалмас нуқталарнинг реакция кучларини координата ўқларининг мусбат йўналиши бўйича йўналган $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ ва \vec{Z}_B таъсир этувчиларга ажратамиз. Жисм мувозанатда бўлиши учун унга қўйилган $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B$ кучлар мувозанат шартлари (6.46) ни қаноатлантириши керак:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_v + X_A + X_B &= 0, \\ \sum Y_v + Y_A + Y_B &= 0, \\ \sum Z_v + Z_A + Z_B &= 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v) - Y_B \cdot a &= 0, \\ \sum M_y(\vec{F}_v) + X_B \cdot a &= 0, \\ \sum M_z(\vec{F}_v) &= 0, \end{aligned} \right\} (6.51)$$

бунда a билан A ва B нуқталар орасидаги масофа белгиланган. Охириги тенгламада реакция кучлари қатнашмайди, шу сабабли бу тенглама иккита нуқтаси маҳкамланган қаттиқ жисмнинг мувозанат шартини ифодалайди: *иккита нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисм мувозанатда бўлиши учун актив кучларнинг қўғалмас нуқталардан ўтувчи ўққа нисбатан моментларининг йиғиндисини нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Тўртинчи ва бешинчи тенгламалардан топилган

$$Y_B = \frac{1}{a} \sum M_x(\vec{F}_v), \quad X_B = -\frac{1}{a} \sum M_y(\vec{F}_v)$$

қийматларни биринчи ва иккинчи тенгламаларга қўйиб X_A ва Y_A ларни аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{1}{a} \sum M_y(\vec{F}_v) - \sum X_v, \\ Y_A &= -\frac{1}{a} \sum M_x(\vec{F}_v) - \sum Y_v. \end{aligned}$$

(6.51) нинг учинчисидан реакция кучларининг z ўқи бўйлаб йўналган ташкил этувчиларининг йиғиндисини аниқлаш мумкин

$$Z_A + Z_B = -\sum Z_v, \quad (6.52)$$

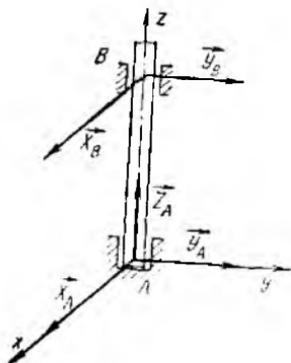
яъни масала статик аниқмасдир. Техникада бу аниқмасликни ҳал қилиш учун A нуқтада таянч подшипник, B нуқтада цилиндрик подшипник ўрнатиш мумкин (6.17-расм). Бу ҳолда $Z_B = 0$ бўлади.

6.2-масала. Оғирлиги $P = 20$ кН бўлган бир жинсли тўғри бурчакли плита A сферик шарнир ва B цилиндрик шарнир воситасида деворга бириктирилган бўлиб, уни CE арқон горизонтал ҳолда ушлаб туради; $\widehat{ECA} = \widehat{BAC} = 30^\circ$ (6.18-расм). Плитага унинг текислигида ётувчи ва momenti $M = 5$ кНм га тенг жуфт куч ҳамда DC томоннинг ўртасидаги K нуқтага yz текислигига перпендикуляр текисликда ётувчи ва DC га 60° бурчак остида таъсир этувчи $Q = 8\sqrt{3}$ кН куч қўйилган. $AB = 1$ м. Арқондаги тортишни кучи ва таянч реакциялари аниқлансин.

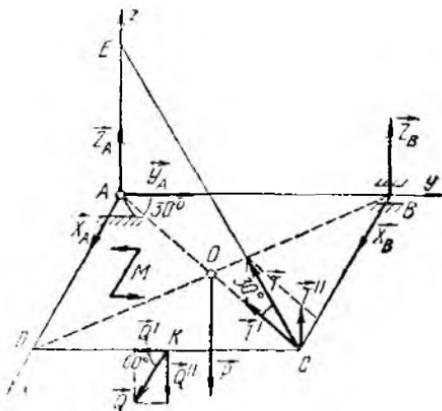
Ечиш. 1. Мувозанатни текширилётган жисм $ABCD$ тўғри бурчакли плитадан иборат. Плитани иккита нуқтаси билан маҳкамланган жисм деб қараш мумкин.

2. Координата ўқларини 6.18-расмдагидек таълаб оламиз.

3. Плитага таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз. Плитага оғирлик маркази O нуқтага қўйилган $P = 20$ кН оғирлик кучи; momenti $M = 5$ кНм га тенг жуфт куч; K нуқтага қўйилган ва DC билан 60° бурчак ташкил этувчи $Q = 8\sqrt{3}$ кН куч; CE нининг тарағлик кучи \vec{T} ҳамда A



6.17- расм.



6.18- расм.

сферик шарнир ва B цилиндрик шарнир реакциялари таъсир этади. A сферик шарнирнинг реакция кучини координата ўқларининг мусбат йўналишидаги $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ ташкил этувчиларга, B цилиндрик шарнирнинг реакция кучларини цилиндр ўқига перпендикуляр йўналган \vec{X}_B, \vec{Z}_B ташкил этувчиларга ажратамиз.

4. 6.18- расмдан фойдаланиб, мувозанат тенгламалари (6.46) ни тузамиз. Бунда \vec{T} ва \vec{Q} кучларнинг x, y, z ўқларига nisbatan моментларини ҳисоблаш учун (6.37) кўринишидаги Вариньон теоремасидан фойдаланамиз, яъни \vec{T} ва \vec{Q} кучларни $\vec{T}', \vec{T}'', \vec{Q}', \vec{Q}''$ ($T' = T \cos 30^\circ$, $T'' = T \cos 60^\circ$, $Q' = Q \cos 60^\circ$, $Q'' = Q \cos 30^\circ$) ташкил этувчиларга ажратиб, уларнинг мазкур ўқларга nisbatan моментларининг йиғиндисини аниқлаймиз. \forall ҳолда

$$\sum X_v = 0; X_A + X_B - T \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Y_v = 0; Y_A - T \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - Q \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum Z_v = 0; Z_A + Z_B - P - Q \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum M_x(\vec{F}_v) = 0; -P \cdot \frac{AB}{2} + Z_B \cdot AB + T \cdot AB \cos 60^\circ - Q \cos 30^\circ \cdot DK = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_v) = 0; P \cdot \frac{AD}{2} - T \cdot AD \cos 60^\circ + Q \cos 30^\circ \cdot AD = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_v) = 0; X_B \cdot AB + M - Q \cdot \cos 60^\circ \cdot AD = 0,$$

бунда $AD = AB \operatorname{tg} 30^\circ$, $DK = \frac{AB}{2}$.

5. Тенгламалар системасини ечиб, номаълумларни аниқлаймиз:

$$X_B = \frac{M}{AB} - Q \cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 1 \text{ кН}, \quad T = \frac{1}{\cos 60^\circ} \left(\frac{P}{2} - Q \cos 30^\circ \right) = 8 \text{ кН},$$

$$X_A = -X_B + T \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = 2,46 \text{ кН},$$

$$Y_A = T \cos^2 30^\circ + Q \cos 60^\circ = 12,93 \text{ кН},$$

$$Z_B = \frac{P}{2} - T \cos 60^\circ + \frac{Q}{2} \cos 30^\circ = 12 \text{ кН},$$

$$Z_A = -Z_B + P + Q \cos 30^\circ - T \cos 60^\circ = 16 \text{ кН}.$$



7-БОБ. ПА РАЛЛЕЛ КУЧЛАР МАРҚАЗИ ВА ОФИРЛИК МАРҚАЗИ

*«Меня тягачи нуқтасини берингилар,
Ерни ўз ўрнидан силжитаман!»*

Архамед

7.1-§. Параллел кучларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлаш. Параллел кучлар маркази

Бу бобда тенг таъсир этувчига келтириладиган параллел кучлар системаси қаралади. 6.9-§ да кўрганимиздек, фазодаги параллел кучлар учун скаляр инвариант $\vec{R}' \cdot \vec{M}_O = 0$ бўлиб, бундай кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилиши учун

$$\vec{R}' \neq 0 \quad (7.1)$$

тенгсизлик бажариллиши керак.

Жисмга (7.1) тенгсизликни қаноатлантирувчи $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ параллел кучлар системаси таъсир этсин. Кучларнинг қўйилган нуқталарини мос равишда A_1, A_2, \dots, A_n ва Ox_1z координаталар системасига нисбатан бу нуқталарнинг радиус-векторларини $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ билан белгилаймиз (7.1-расм). Мазкур кучларнинг тенг таъсир этувчисини ва унинг қўйилган нуқтасини аниқлаймиз.

Агар берилган кучларнинг таъсир чизиқларига параллел бўлган бирлик векторни \vec{e} билан белгиласак, у ҳолда ихтиёрий \vec{F}_v кучни

$$\vec{F}_v = F_v^* \vec{e} \quad (7.2)$$

кўринишида ёзиш мумкин. Бунда \vec{F}_v куч \vec{e} вектор йўналиши билан

бир хил бўлса, $F_v^* = F_v$; \vec{F}_v

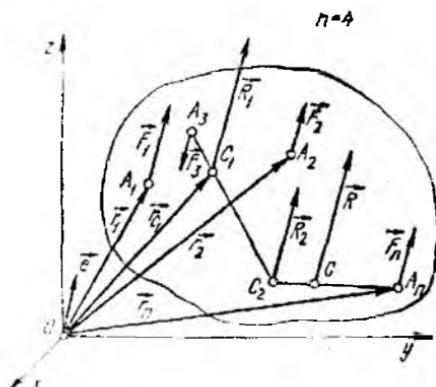
ва \vec{e} бир-бирига қарама-қарши йўналса, $F_v^* = -F_v$.

Аввало \vec{F}_1 ва \vec{F}_2 кучларни қўшимиз ва уларнинг тенг таъсир этувчисини \vec{R}_1 билан белгилаймиз. (3.1) га асосан

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (7.3)$$

Бунда \vec{R}_1 билан \vec{e} бир хил йўналгани учун $R_1^* = R_1$.

(3.2) га асосан F_1^* ва F_2^* орасида қуйидаги муносабат ўринли:



$$\frac{F_1^*}{C_1 A_2} = \frac{F_2^*}{A_1 C_1} \quad \text{ёки} \quad \frac{\vec{A}_1 \vec{C}_1}{F_2^*} = \frac{\vec{C}_1 \vec{A}_2}{F_1^*}. \quad (7.4)$$

Агар \vec{R}_1 қўйилган C_1 нуқтанинг радиус-векторини r_{C_1} билан белгиласак, у ҳолда 7.1-расмдан қуйидагини оламиз:

$$\vec{A}_1 \vec{C}_1 = \vec{r}_{C_1} - \vec{r}_1, \quad \vec{C}_1 \vec{A}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{C_1}. \quad (7.5)$$

(7.5) ни (7.4) га қўйиб, r_{C_1} ни аниқлаймиз:

$$\vec{r}_{C_1} = \frac{F_1^* \vec{r}_1 + F_2^* \vec{r}_2}{F_1^* + F_2^*}. \quad (7.6)$$

(7.3) тенгликни ва $F_3^* = -F_3$ эканлигини назарда тутиб, \vec{R}_1 ва \vec{F}_3 кучларни қўшамиз. (3.5) га асосан

$$R_2^* = R_1 - F_3 = F_1^* + F_2^* + F_3^* = \sum_{v=1}^3 F_v^*,$$

$$\vec{r}_{C_2} = \frac{R_1^* \vec{r}_{C_1} + F_3^* \vec{r}_3}{R_1^* + F_3^*} = \frac{F_1^* \vec{r}_1 + F_2^* \vec{r}_2 + F_3^* \vec{r}_3}{F_1^* + F_2^* + F_3^*} = \frac{\sum_{v=1}^3 F_v^* \vec{r}_v}{\sum_{v=1}^3 F_v^*}.$$

Худди шунингдек, n та параллел кучларни қўшиш натижасида C нуқтага қўйилган битта тенг таъсир этувчи \vec{R} кучни оламиз (аниқлик учун расмда $n = 4$ ҳоли кўрсатилган):

$$R^* = \sum_{v=1}^n F_v^*, \quad (7.7)$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{v=1}^n F_v^* \vec{r}_v}{\sum_{v=1}^n F_v^*}. \quad (7.8)$$

Бунда \vec{R} куч \vec{e} бирлик вектор билан бир хил йўналса, $R^* = R$; \vec{R} ва \vec{e} бир-биринга қарама-қарши йўналса, $R^* = -R$ бўлади.

Агар параллел кучлар бир томонга йўналса, \vec{e} ни шу кучлар йўналишида олиб, (7.7) ва (7.8) да (*) ишорасини тушириб ёзиш мумкин.

(7.8) формула ёрдамида аниқланадиган C нуқта *параллел кучлар маркази* дейилади.

Параллел кучлар марказининг координаталарини x_C, y_C, z_C ; \vec{F}_v куч қўйилган нуқтанинг координаталарини x_v, y_v, z_v билан белгиласак, (7.8) дан параллел кучлар марказининг координаталари аниқланадиган қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$x_c = \frac{\sum_{v=1}^n F_v^* x_v}{\sum_{v=1}^n F_v^*}, \quad y_c = \frac{\sum_{v=1}^n F_v^* y_v}{\sum_{v=1}^n F_v^*}, \quad z_c = \frac{\sum_{v=1}^n F_v^* z_v}{\sum_{v=1}^n F_v^*}. \quad (7.9)$$

(7.8) ва (7.9) формулалардан кўриниб турибдики, фазодаги параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси қўйилган C нуқтанинг ҳолати кучларнинг йўналишига боғлиқ бўлмай, уларнинг миқдори ва қўйилган нуқталарининг координаталарига боғлиқдир. Шу сабабли кучларнинг қўйилган нуқталарини ўзгартирмай, барча кучларни бирор α бурчакка бурсак, кучларнинг тенг таъсир этувчиси ҳам мос равишда α бурчакка бурилади ва қўйилган нуқтасининг ҳолати ўзгармайди.

(7.8) даги $\sum F_v^* \vec{r}_v$ катталиқ берилган кучлар системасининг C марказга нисбатан статик моменти дейилади.

(7.9) даги $\sum F_v^* x_v$, $\sum F_v^* y_v$, $\sum F_v^* z_v$ катталиқлар берилган кучлар системасининг мос равишда yOz , xOz ва xOy текисликларга нисбатан статик моментлари дейилади.

Агар координаталар бошини параллел кучлар марказида олесак, $x_c = y_c = z_c = 0$ бўлади ва берилган кучлар системасининг параллел кучлар марказига нисбатан статик моментлари нолга тенг бўлади.

7.2-§. Жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш

Исталган қаттиқ жисмни жуда кичик заррачалардан ташкил топган деб қараш мумкин. Бундай заррачаларнинг ҳар бирига вертикал настига йўналган $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ Ерга тортишни кучлари (оғирлик кучи) таъсир этади. Статика бўлимида ўрғаниладиган жисмларнинг ўлчовлари Ернинг радиусига нисбатан жуда кичик бўлгани учун жисм айрим зарраларининг оғирлик кучини параллел кучлар деб қараш мумкин. Жисм барча зарралари оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчиси $P = \sum P_v$ жисмнинг оғирлик кучи дейилади ҳамда бу параллел кучларнинг маркази мазкур жисмнинг оғирлик маркази дейилади.

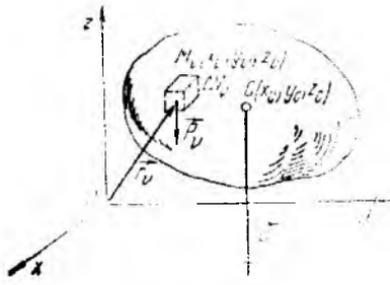
Жисм оғирлик марказининг радиус-вектори (7.8), координаталари (7.9) формулалар асосида аниқланади:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum P_v \vec{r}_v}{P},$$

$$x_c = \frac{\sum P_v x_v}{P}, \quad y_c = \frac{\sum P_v y_v}{P}, \quad z_c = \frac{\sum P_v z_v}{P}. \quad (7.10)$$

Бунда $\vec{r}_v(x_v, y_v, z_v)$ v —заррачанинг радиус-вектори; $\vec{r}_c(x_c, y_c, z_c)$ жисм оғирлик марказининг радиус-вектори (7.2-расм).

Жисмнинг оғирлик маркази геометрик нуқтадан иборат бўлиб, баъзида бу нуқта жисмга тааллуқли бўлмаслиги ҳам мумкин. Ма-



7.2-расм.

Агар жисм бир жинсли бўлса, огирлик маркази унинг қандай материалдан ташкил топганига боғлиқ бўлмай, фақат геометрик шаклига боғлиқ бўлади. Келгусида асосан бир жинсли жисملарнинг огирлик марказини аниқлаймиз.

Огирлиги P га тенг жисм V ҳажмга эга бўлсин (7.2-расм). Агар бирлик ҳажмга тўғри келган огирликни γ билан белгиласак, бир жинсли жисм учун $\gamma = \text{const}$ бўлади ҳамда жисм γ бўлакчасининг огирлиги

$$P_v = \gamma \Delta V_v. \quad (7.11)$$

(7.11) ни (7.10) га қўйиб, ҳажмга эга бўлган жисм огирлик марказининг радиус-вектори ва координатларини аниқлаймиз:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum \gamma \Delta V_v \vec{r}_v}{\sum \gamma \Delta V_v} = \frac{\sum \Delta V_v \vec{r}_v}{V}. \quad (7.12)$$

$$x_c = \frac{\sum \Delta V_v x_v}{V}, \quad y_c = \frac{\sum \Delta V_v y_v}{V}, \quad z_c = \frac{\sum \Delta V_v z_v}{V}, \quad (7.13)$$

бунда $V = \sum \Delta V_v$ бутун жисм ҳажмининг ифодалайди.

Жисмнинг бўлаклар сонини орттира бориб, (7.12) ва (7.13) даги йиғиндиларда $n \rightarrow \infty$, $\Delta V_v \rightarrow 0$ бўлганда лимитга ўтсак, ҳажмга эга бўлган жисм огирлик маркази учун қуйидаги интегралли ифодаларини олаемиз:

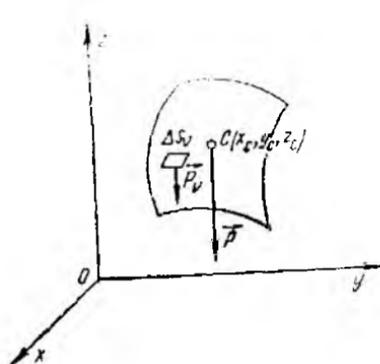
$$\vec{r}_c = \frac{\int (V) \vec{r} dV}{V}, \quad (7.14)$$

$$x_c = \frac{\int (V) x dV}{V}, \quad y_c = \frac{\int (V) y dV}{V}, \quad z_c = \frac{\int (V) z dV}{V}. \quad (7.15)$$

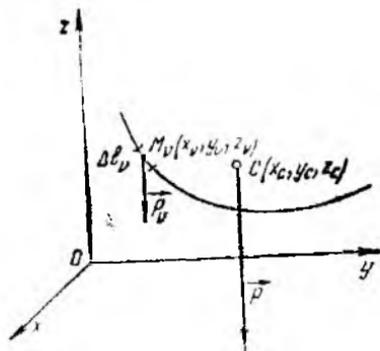
Худди шунингдек, ихтиёрый сирга эга бўлган пластинканинг огирлик марказини аниқлаш учун қуйидаги формулалар ўришли бўлади (7.3-расм).

салап, R_1 ва R_2 радиусли цилиндрлар билан чегараланган чамбаракнинг огирлик маркази цилиндрлар марказида ётади ва чамбаракка тааллуқли эмас.

Жисмнинг огирлик маркази аниқ ҳолатга эга бўлиб, қаттиқ жисмни бирор бурчакка айлантирганда унинг огирлик маркази шу жисмга nisbatan ўзгармайди. Чунки олдинги параграфда кўрганимиздек, параллел кучларни маълум α бурчакка бурганда уларнинг маркази ўзгармайди.



7.3- расм.



7.4- расм.

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \Delta S_v \vec{r}_v}{S}. \quad (7.16)$$

$$x_C = \frac{\sum \Delta S_v x_v}{S}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta S_v y_v}{S}, \quad z_C = \frac{\sum \Delta S_v z_v}{S} \quad (7.17)$$

ёки

$$\vec{r}_C = \frac{\int x dS}{(S)}, \quad (7.18)$$

$$x_C = \frac{\int x dS}{(S)}, \quad y_C = \frac{\int y dS}{(S)}, \quad z_C = \frac{\int z dS}{(S)}. \quad (7.19)$$

Бунда S — пластинка сиртининг юзаси, x , y , z эса dS элементар юзанинг координаталари.

Чизиқнинг оғирлик маркази қуйидагича аниқланади (7.4-расм):

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \Delta l_v \vec{r}_v}{l}, \quad (7.20)$$

$$x_C = \frac{\sum \Delta l_v x_v}{l}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta l_v y_v}{l}, \quad z_C = \frac{\sum \Delta l_v z_v}{l} \quad (7.21)$$

ёки

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dl}{l}, \quad (7.22)$$

$$x_C = \frac{\int x dl}{l}, \quad y_C = \frac{\int y dl}{l}, \quad z_C = \frac{\int z dl}{l}, \quad (7.23)$$

бунда l — чизиқнинг узунлиги; x , y , z эса dl бўлакча координаталари.

(7.12), (7.14), (7.16), (7.18), (7.20) ва (7.22) формулаларда каср суратидаги векторли катталиклар мос равишда ҳажм, юза ёки чи-
зиқнинг нуқтага нисбатан статик моменти ни ифодалайди.

(7.13), (7.15), (7.17), (7.19), (7.21) ва (7.23) формулаларда —
каср суратидаги скаляр катталиклар ҳақ ҳажм, юза ёки чи-
зиқнинг мос координата текисликларига нисбатан статик момен-
тини ифодалайди.

Хусусан xOy текислигида жойлашган юзанинг Ox ва Oy ўқла-
рига нисбатан статик моменти

$$\left. \begin{aligned} \int x dS &= x_c \cdot S, \\ \int y dS &= y_c \cdot S \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

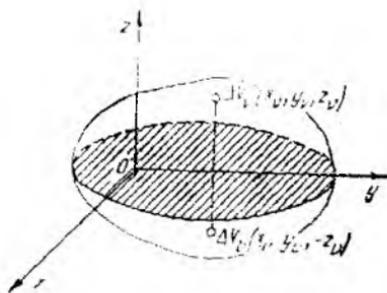
7.3-§. Оғирлик марказини аниқлаш усуллари

Жисмнинг оғирлик марказини топишнинг қуйидаги усуллари ни қўрамиз.

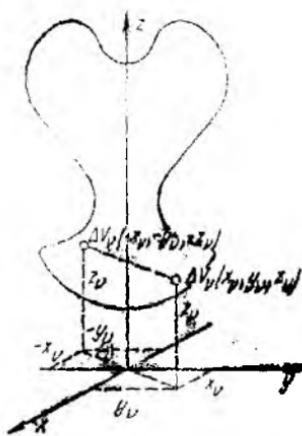
1. Симметрия усули. Агар бир жинсли жисм симметрия текис-
лигига эга бўлса, оғирлик марказини топиш бирмунча соддалаша-
ди. xOy текислигини симметрия текислигида олаемиз (7.5-расм). У
ҳолда ҳар бир x_v, y_v, z_v координаталар билан аниқланадиган ΔV_v
ҳажмли бўлакчага координаталари $x_v, y_v, -z_v$ бўлган ΔV_v ҳажмли
бўлакча мос келади. Шу сабабли (7.13) да $z_v \Delta V_v$ кўпайтмаларнинг
йиғиндисини жуфт-жуфт равишда нолга тенг бўлади. Бинобарин,

$$z_c = \frac{\sum z_v \Delta V_v}{V} = 0.$$

Шундай қилиб, симметрия те-
кислигига эга бўлган бир жинсли
жисмнинг оғирлик маркази сим-
метрия текислигида ётади.



7.5- расм.



7.6- расм.

Агар жисм z симметрия ўқига эга бўлса (7.6-расм), у ҳолда ҳар бир x_v, y_v, z_v координаталар билан аниқланадиган ΔV_v ҳажмли бўлакчага координаталари $-x_v, -y_v, z_v$ бўлган ΔV_v ҳажмли бўлакча мос келади. Шу туфайли (7.13) да $x_v \Delta V_v, y_v \Delta V_v$ кўпайтмаларининг йиғиндиси жуфт-жуфт равишда нолга тенг бўлади. Демак,

$$x_c = \frac{\sum x_v \Delta V_v}{V} = 0, \quad y_c = \frac{\sum y_v \Delta V_v}{V} = 0.$$

Бинобарин, *симметрия ўқига эга бўлган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази симметрия ўқида ётади.*

Худди шунингдек, симметрия нуқтасига эга бўлган бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази шу нуқта билан устма-уст туширилиш имконияти мумкин. Масалан, бир жинсли доира ёки шарнинг оғирлик маркази унинг симметрия нуқтаси — геометрик маркази билан устма-уст тушади.

2. Бўлакларга ажратиш усули. Баъзида жисмни фикран шундай бўлакларга бўлиш мумкинки, бу бўлакларнинг оғирлиги ва оғирлик маркази олдиндан маълум бўлади. Бундай жисмларнинг оғирлик маркази (7.10) формулалар ёрдамида аниқланади. Хусусан, яси жисм учун бу формулаларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{S} \sum \vec{r}_v S_v, \quad (7.25)$$

$$x_c = \frac{1}{S} \sum x_v S_v, \quad y_c = \frac{1}{S} \sum y_v S_v, \quad (7.26)$$

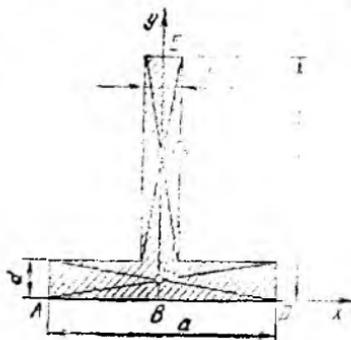
бунда S_v — яси жисм бирор бўлагининг юзаси, \vec{r}_v — шу бўлакнинг радиус-вектори, S — яси жисм юзаси.

(7.12) ва (7.13) га асосан ҳажмга эга бўлган жисм ёки чизиқнинг оғирлик маркази аниқланадиган қуйидаги формулалар ўринли бўлади:

$$x_c = \frac{1}{V} \sum x_v V_v, \quad y_c = \frac{1}{V} \sum y_v V_v, \quad z_c = \frac{1}{V} \sum z_v V_v, \quad (7.13')$$

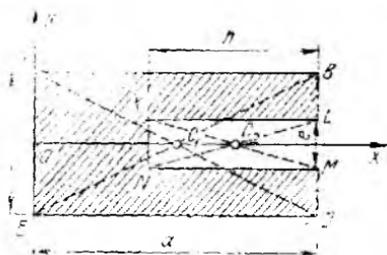
$$x_c = \frac{1}{l} \sum x_v l_v, \quad y_c = \frac{1}{l} \sum y_v l_v, \quad z_c = \frac{1}{l} \sum z_v l_v, \quad (7.21')$$

бунда V_v — жисм бирор бўлагининг ҳажми, l_v — берилган чизиқ бирор бўлагининг узунлиги; x_v, y_v, z_v лар эса мазкур бўлаклар оғирлик марказининг координаталаридир, V — жисмнинг ҳажми, l — чизиқнинг узунлигини ифодалайди.



7.7- расм.

7.1- масала. Таврли кесимнинг оғирлик марказидан AD томонга бўлган масофа топилсин; тавр баъадлини h лезорининг қатлиги b , токчасининг кенлиги $AD = a$, қатлиги d га тенг (7.7-расм).



7.8- расм.

Ечиш. Қўрилаётган кесим, AD томонининг ўртасидан ўтувчи Bu симметрия ўқига эга. Шу сабабдан унинг оғирлик маркази Bu ўқда ётади. Кесим юзасини фикран иккига тўғри тўртбурчакдан иборат юзга ажратамиз. Ажратилган тўртбурчакларнинг юзаси $S_1 = ad$, $S_2 = b(h-d)$; оғирлик марказининг ординатлари мос равишда $y_1 = \frac{d}{2}$, $y_2 = d + \frac{h-d}{2} = \frac{h+d}{2}$ бўлгани учун берилган кесимнинг оғирлик марказини (7.26) га асосан аниқлаймиз:

$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{d}{2} \cdot ad + \frac{h+d}{2} \cdot b \cdot (h-d)}{ad + b(h-d)} = \frac{ad^2 + bh^2 - bd^2}{2(ad + bh - bd)} \quad \checkmark$$

3. Манфий юза усули. Агар ясон жисмининг маълум қисмлари қирқиб ташланган бўлса, бундай жисмининг оғирлик марказини аниқлашда манфий юза қўшиш усулидан фойдаланилади. Бу усул бўлақларга бўлини усулининг хусусий ҳоли бўлиб, унинг моҳияти шундан иборатки, жисмин қирқилмаган яхши жисм ва қирқилган жисмлардан иборат деб қаралади; бунда қирқилган бўлақларнинг юзаси шароити равишда манфий деб олинади ҳамда оғирлик марказини аниқлашда (7.26) формулалардан фойдаланилади.

7.2-масала. Эни b ва бўйи a га тенг тўғри тўртбурчак шаклидаги $ABDE$ тохтани эни e ва бўйи h га тенг $KLMV$ тўғри тўртбурчак шаклидаги қисм кесиб олинган. KL ва MV кесимлар $ABDE$ тўғри тўртбурчак томонларига мос равишда параллел. Тохта қолган қисмининг оғирлик маркази KN да ётиши учун h ни қандай усулдан қандай бўлиши керак (7.8-расм).

Ечиш. Ox ўқи тохтанинг симметрия ўқи бўлиб йўналитирамиз. U ҳолда тохтанин оғирлик маркази x ўқда ётади ва $y_C = 0$.

Манфий юза усулидан фойдаланиб, берилган фигурани $ABDE$ яхши тўртбурчак юзасидан ва оқибат манфий $KLMV$ тўртбурчакдан иборат деб қараймиз.

3-ҳолда $x_1 = \frac{a}{2}$, $S_1 = ab$, $x_2 = a - \frac{h}{2}$, $S_2 = -eh$ эканлигини назарда тутиб, (7.26) формуладан (7.26) га қўямиз:

$$y_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{1}{2} a^2 b - eh \left(a - \frac{h}{2} \right)}{2(ab - eh)} = \frac{a^2 b - 2aeh + eh^2}{2(ab - eh)}$$

Маълумки, шароити қўри тохта қолган қисмининг оғирлик маркази KN да ётиши учун $y_C = 0$ бўлиши керак.

y_C нинг иккига қийمатини бир-бирига тенглаб қуйидагини оламиз.

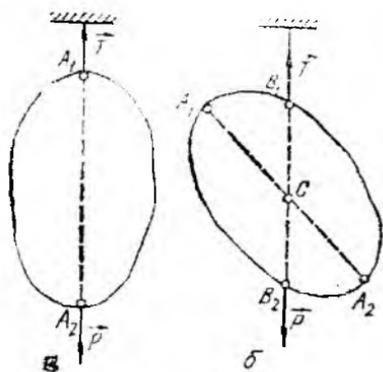
$$a - h = \frac{a^2 b - 2aeh + eh^2}{2(ab - eh)}$$

Бундан h ни аниқлаш ушбу квадрат тенгламани ечишга келтирилади:

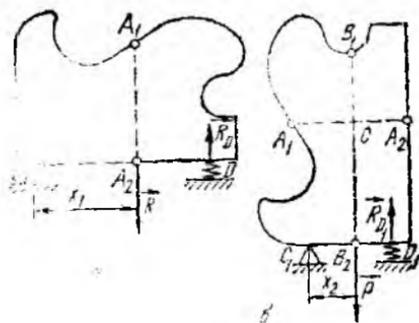
$$eh^2 - 2abh + a^2 b = 0.$$

Шундай қилиб,

$$h = \frac{ab - \sqrt{a^2 b^2 - a^2 b e}}{e} = \frac{a}{1} [b - \sqrt{b(b - e)}].$$



7.9- расм.



7.10- расм.

Квадрат илдиз оллида мусбат ишора олинса, масала ечимга эга эмас. Чунки $b > e$ бўлгани учун квадрат илдиз оллида мусбат ишора олинганда $h > a \frac{b}{e} > a$; бунинг бўлиши мумкин эмас.

4. Тажриба усули. Бир жинсли бўлмаган ёки мураккаб шаклли ясси жисмларнинг огирлик марказини аниқлашда қуйидаги тажриба усулларидан ҳам фойдаланилади.

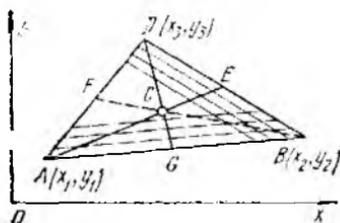
4.1. Илга осииш усули. Ясси жисмнинг илтирий A_1 нуқтасидан илга осамиз. Жисм илнинг реакция кучи ва огирлик кучи таъсирида мувозанатда бўлади (7.9- расм, а). Огирлик кучи \vec{P} вертикал пасга йўналган туфайли илнинг реакция кучи \vec{T} вертикал юқорига йўналади. Илнинг йўналишини давом эттириб, расмда огирлик кучининг таъсир чизигини A_1A_2 билан белгилаймиз. Шу тарзда жисмни B нуқтасидан осиб, огирлик кучининг таъсир чизиги B_1B_2 ни аниқлаймиз (7.9- расм, б). Натижани A_1A_2 ва B_1B_2 чизикларнинг кесилиш нуқтаси C берилган ясси жисмнинг огирлик марказини ифодалайди.

4.2. Тарозинда тортиш усули. Ясси жисмни тарозига қўйиб, унинг огирлиги P ни аниқлаймиз. Сўنгра ясси жисмни C ва D нуқталарда иккита таянчга қўямиз. D нуқталари таянчга тарози қўямиз (7.10- расм, а). У ҳолда D нуқтанинг реакция кучи \vec{R}_D миқдор жиҳатдан D нуқталари тарози кўрсатган огирлик кучига тенг бўлади. Жисм таянч нуқталарининг реакция кучи ва огирлик кучи таъсирида мувозанатда бўлади. Жисмнинг огирлик кучи \vec{P} ва D нуқтанинг реакция кучи маълум бўлгани учун C нуқтага нисбатан моментлар тенгламасини тузиб, бу тенгламадан огирлик кучининг таъсир чизигигача бўлган x_1 масофани аниқлаймиз. Расмда огирлик кучининг таъсир чизиги A_1A_2 билан белгилашам.

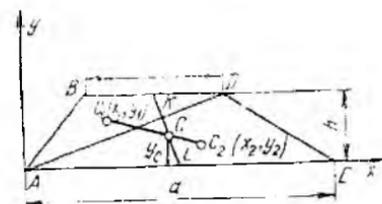
Худди шунингдек, жисмни 90° бурчакка айлантириб, C_1 ва D_1 таянчларга қўямиз. D_1 нуқтанинг реакция кучи миқдор жиҳатдан D_1 нуқталари тарози кўрсатган огирлик кучига тенг бўлади. \vec{P} ва \vec{R}_{D_1} маълум бўлгани учун C_1 нуқтага нисбатан моментлар тенгламасини тузиб, бу тенгламалардан огирлик кучининг таъсир чизиги B_1B_2 гача бўлган x_2 масофани аниқлаймиз. A_1A_2 ва B_1B_2 ларнинг кесилиш нуқтаси C жисмнинг огирлик марказини ифодалайди.

(7) 2. 7.4- §. Оддий шаклли баъзи бир жинсли жисмларнинг огирлик марказини аниқлаш

1. Учбурчак юзасининг огирлик маркази. ABD учбурчакни AB томонга параллел бўлган кичик бўлақларга ажратамиз (7.11- расм). Бу бўлақлар ҳар бирининг огирлик маркази унинг ўртасида ётади,



7.11- расм.



7.12- расм.

яъни учбурчакнинг оғирлик маркази DG медианада ётади. Шу тарзда учбурчак юзасини DB томига параллел бўлакларга ажратсак, уларнинг оғирлик маркази AE медианада ётади. Бинобарин, учбурчак юзасининг оғирлик маркази унинг медианалари кесинган C нуқтада ётади.

Учбурчак ётган текисликда xOy текислигини ўтказиб, учбурчак учларининг координаталарини (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) билан белгиласак, аналитик геометрияда чиқарилган

$$x_C = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), y_C = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)^* \quad (7.29)$$

формулаларга биноан C нуқтанинг координаталари аниқланади. Маълумки, $CG = \frac{1}{3} DG$.

2. Трапециянинг оғирлик маркази. Асослари a ва b баландлиги h га тенг $ABDE$ трапеция юзасининг оғирлик марказини аниқлаш учун трапецияни AE асосга параллел бўлакларга ажратамиз (7.12- расм). Бу бўлақларнинг оғирлик маркази BD ва AE асосларининг ўрталарини туташтирувчи KL чизикда ётади. Бинобарин, трапециянинг оғирлик маркази ҳам шу чизикда ётади. Трапеция оғирлик марказини аналитик усулда аниқлаш учун C нуқтанинг битта координатасини, масалан y_C ни топиш кифоя. y_C ни топиш учун трапецияни ABD ва ADE учбурчакларга ажратамиз. Бу учбурчакларнинг оғирлик марказини $C_1(x_1, y_1)$ ва $C_2(x_2, y_2)$ билан белгиласак, KL нинг C_1C_2 билан кесинган нуқтаси C трапециянинг оғирлик марказини ифodalайди. Бу учбурчаклар учун

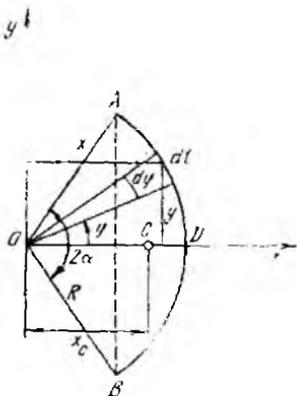
$$y_1 = \frac{2}{3}h, \quad S_1 = \frac{b \cdot h}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{3}h, \quad S_2 = \frac{ah}{2}$$

эканлигини эътиборга олиб, (7.26) га асосан қуйидагини ёзамиз.

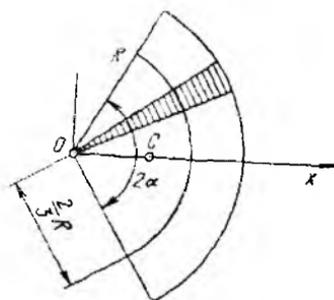
$$y_C = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{2}{3}h \cdot \frac{bh}{2} + \frac{1}{3}h \cdot \frac{ah}{2}}{\frac{bh}{2} + \frac{ah}{2}} = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$$

3. Айлана ёйининг оғирлик маркази. Радиуси R , марказий бурчаги 2α га тенг ADB айлана ёйининг оғирлик марказини аниқлаймиз. Координаталар бошини айлананинг маркази O нуқтада олиб, x ўқини AB ватарга перпендикуляр йўналтирамиз.

* Ефимов Н. В. Аналитик геометрия қисқа курси. Т. Ёнгинувчи, 1966, 2-60б, 7-§.



7.13- расм.



7.14- расм.

Айланининг ёни x ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун унинг оғирлик маркази x ўқда ётади ($y_C = 0$). 7.13- расмда $x = R \cos \varphi$, $dl = R d\varphi$, $l = 2R\alpha$ эканлигини эътиборга олиб, (7.23) нинг 1-формуласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x_C = \frac{\int_0^l x dl}{l} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \varphi d\varphi}{2R\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (7.30)$$

Хусусий ҳолда ярим айлана учун (7.30) да $\alpha = \frac{\pi}{2}$ эканлигини эътиборга олсак,

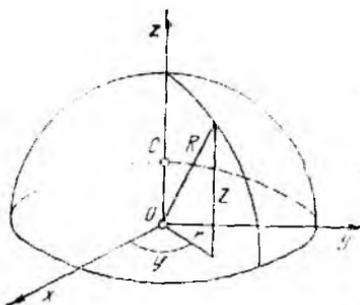
$$x_C = \frac{2R}{\pi} = 0,637 R. \quad (7.31)$$

4. Доира сектори юзасининг оғирлик маркази. Радиуси R , марказий бурчиги 2α га тенг доира сектори юзасининг оғирлик марказини аниқлаш учун x ўқни сектор юзасининг симметрия ўқи бўйлаб йўналтирамиз. 7.14- расмда кўрсатилганидек сектор юзасини бир қанча элементар секторлардан ташкил топган деб қараймиз. Ҳар бир элементар секторни баландлиги R га тенг учбурчак деб қарасак, унинг оғирлик маркази O нуқтадан $\frac{2}{3} R$ масофада ётади. Ёнабарин, доира секторининг оғирлик маркази, радиуси $\frac{2}{3} R$ га тенг айлана ёнининг оғирлик маркази билан устма-уст тушади. (7.30) га асосан

$$x_C = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (7.32)$$

Ярим доира учун (7.32) да $\alpha = \frac{\pi}{2}$ эканлигини назарда тутсак,

$$x_C = \frac{4}{3\pi} R = 0,424 R. \quad (7.33)$$



7.15-расм.

5. Ярим шар ҳажмининг оғирлик маркази. Радиуси R га тенг ярим шар ҳажмининг оғирлик марказини аниқлаш учун z ўқни симметрия ўқи бўйлаб йўналтирамиз, V ҳолда $x_c = y_c = 0$ (7.15-расм). (7.15) га кўра

$$z_c = \frac{1}{V} \int_V z dV,$$

бунда $V = \frac{2}{3} \pi R^3$.

$z = \sqrt{R^2 - r^2}$ эканлигини назарда тутиб, r, φ, z цилиндрик координаталарга ўтамиз ва ярим шар ҳажми V бўйича уч қаррали интегрални ҳисоблаймиз*):

$$\begin{aligned} \int_V z dV &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} z dz = 2\pi \int_0^R \frac{1}{2} (R^2 - r^2) r dr = \\ &= \pi \left[R^2 \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{1}{4} \pi R^4. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, ярим шарнинг оғирлик маркази

$$z_c = \frac{3}{2\pi R^3} \cdot \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{3}{8} R. \quad (7.34)$$

формуладан аниқланади.

6. Доирaviй конус ҳажмининг оғирлик маркази. Асосининг радиуси R ва баландлиги H га тенг конуснинг оғирлик марказини аниқлаш учун z ўқни конуснинг симметрия ўқи бўйлаб йўналтирамиз. 7.16-расмда кўрсатилганидек, конусни асосига параллел кесимлар билан чегараланган, ҳажми dV га тенг элементар бўлақлардан ташкил топган деб қараши мумкин. V ҳолда

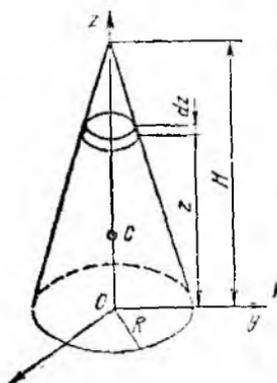
$$dV = \frac{\pi(H-z)^2}{H^2} R^2 dz, \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

бўлгани учун (7.15) га асосан

$$z_c = \frac{\int_V z dV}{V} = \frac{\int_0^H z \frac{\pi(H-z)^2}{H^2} R^2 dz}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} = \frac{1}{4} H. \quad (7.35)$$

Шундай қилиб, доирaviй конус ҳажмининг оғирлик маркази унинг асосидан баландликнинг $\frac{1}{4}$ қисмича масофада ётади.

Бу натижани ихтиёрлий конус учун ҳам умумлаштириш мумкин.



7.16-расм.

*) Пискунов Н. С. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. Ўқитувчи Т., 1974, II т., 13-§. 215-бет.

7.5- §. Гюльден теоремалари

Швед астрономи Г. Гюльден (1841—1896) ишотлаган қуйдаги теоремалар чизик ва юзанинг оғирлик марказини аниқлашга тааллуқлидир.

1- теорема. *Ясси эгри чизикни унинг текислигида ётувчи ва уни кесиб ўтмайдиган ўқ атрофида айлантириши натижасида олинган жисмнинг сиртин мазкур чизикнинг узунлиги билан бу чизик оғирлик маркази чизган айлана узунлисининг кўпайтмасига тенг.*

Исбот. xOy текислигида ётувчи, Oy ўқни кесмайдиган ва узунлиги l га тенг AB эгри чизик кесмаси берилган бўлсин (7.17- расм). AB эгри чизикни жуда кичик dl бўлақларга бўламиз. dl кесмани Oy ўқ атрофида айлантириши натижасида ҳосил бўлган сиртининг юзасини иккинчи тартибли чексиз кичик миқдоргача аниқлик билан цилиндрлик сиртга тенг деб олиш мумкин:

$$dS = 2\pi x dl.$$

AB эгри чизикнинг айлананишдан ҳосил бўлган сиртини топиш учун охириги ифодани интеграллаймиз:

$$S = 2\pi \int_{(b)} x dl.$$

(7.23) га кўра $\int_{(b)} x dl = x_C l$, бунда x_C билан AB эгри чизик кесмаси оғирлик марказининг координатаси белгиланган.

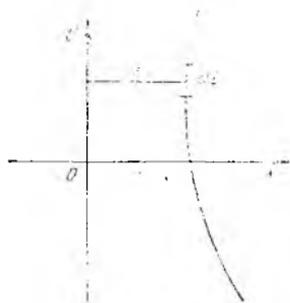
Шундай қилиб,

$$S = 2\pi x_C l. \quad (7.36)$$

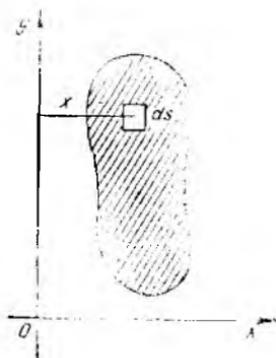
(7.36) дан берилган ясси эгри чизик оғирлик марказининг координатасини аниқлаш мумкин:

$$x_C = \frac{S}{2\pi l}.$$

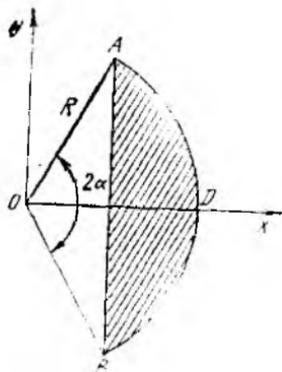
2- теорема. *Ясси фигурани унинг текислигида ётувчи ва уни кесиб ўтмайдиган ўқ атрофида айлантириши натижасида олинган жисмнинг ҳажми, мазкур фигура юзаси билан бу фигура*



7.17- расм.



7.18- расм.



7.19- рasm.

юзани Oy ўқ атрофида айланттириш натижасида олинган жисмининг ҳажми

$$V = 2\pi \int_{(S)} x dS$$

формуладан аниқланади. (7.19) га биноан, $\int x dS = x_C S$. Бунда x_C билан ясси фигура оғирлик марказининг координатаси белгиланган. Шундай қилиб,

$$V = 2\pi x_C \cdot S. \quad (7.37)$$

(7.37) дан берилган ясси фигура оғирлик марказининг координатасини аниқлаш мумкин:

$$x_C = \frac{V}{2\pi S}.$$

7.3- масала. Радиуси R ва марказий бурчаги 2α га тенг COB ва AOB айлани ёйини Oy ўқ атрофида айланттириш натижасида олинган сиртининг юзаси ҳамда штрихланган сегментни Oy ўқ атрофида айланттириш натижасида ҳосил бўлган жисмининг ҳажми аниқлансин (7.19- рasm).

Ечиш. (7.30) га кўра айлана ёйинини координатаси $x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$, айлана ёйининг узунлиги $l = 2R\alpha$.

x_C ва l нинг қийматини (7.36) га қўйиб, қузланаётган сирт юзасини аниқлаймиз:

$$S = 4\pi R^2 \sin \alpha.$$

Сегментни айланттириш натижасида ҳосил бўладиган жисмининг ҳажми V ни тегилини учун дастлаб сегментнинг оғирлик марказини аниқлаймиз. Шу мақсадда манфий юза усулидан фойдаланамиз. Берилган сегментни юзаси $S_1 = R^2 \alpha$ га тенг доиравий сектордан ва $S_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2R \sin \alpha \cdot R \cos \alpha = -R^2 \sin \alpha \cos \alpha$ манфий юзали OAB учбурчакдан иборат деб қараймиз. (7.26) га асосан

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}, \quad (1)$$

бунда $x_1 = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$ — доиравий сектор оғирлик марказининг коор-

динатаси; $x_2 = \frac{2}{3} R \cos \alpha$ — OAB учбурчак юзасининг оғирлик маркази.

S_1, S_2 ва x_1, x_2 ларнинг қийматини (1) га қўйсак,

$$x_C = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha - \frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{R^2 \alpha - R^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Сегмент юзаси $S = S_1 - S_2 = R^2 (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$.

(7.37) га асосан изланаётган V ҳажмини аниқлайми :

$$V = 2\pi x_C \cdot S = \frac{4}{3} \pi R^3 \sin^3 \alpha. \quad \checkmark$$

II қисм. КИНЕМАТИКА

8-боб. НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

8.1-§. Асосий тушунчалар

Назарий механиканинг кинематика бўлимида нуқта ва абсолют қаттиқ жисмнинг механик ҳаракати фақат геометрик нуқтани назардан, яъни уларнинг массалари ва таъсир этувчи кучларга боғлиқсиз равишда ўрганилади.

Ҳаракат тушунчаси ҳаракатланувчи жисм (объект), вақт ва фазо тушунчалари билан ҳамбарчас боғлиқдир.

Фазо (макон) бир вақтда мавжуд бўлган объектларнинг жойлашини тартибини ифодалайди. Ф. Энгельс бундай деган эди: «Ҳар қандай борлиқнинг асосий формалари макон ва вақтдир»^{*}. Классик механикада моддий жисмларнинг ҳаракати уч ўлчовли Евклид фазосига нисбатан текширилади ҳамда фазо абсолют қўзғалмас деб қаралади.

Жисмнинг механик ҳаракати бошқа бирор жисм билан бириктирилган ва *саноқ системаси* деб аталувчи координаталар системасига нисбатан текширилади. Саноқ системасини шартли равишда қўзғалмас деб олиш ёки ҳаракатдаги жисмга бириктирилган деб қараш мумкин.

Моддий нуқтанинг саноқ системасига нисбатан ҳаракатини ўрганиш учун унинг координаталарини вақтнинг функцияси сифатида аниқлаш керак. Жисмнинг саноқ системасига нисбатан ҳаракатини ўрганишда эса мазкур жисм нуқталарининг координаталари билан бирга бурчак координаталарини ҳам киритишга тўғри келади.

Назарий механикада узунлик бирлиги сифатида СИ системасида метр (м), бурчак координаталари бирлиги учун радиан (рад) қабул қилинган.

Агар жисм барча нуқталарининг координаталари танлаб олинган саноқ системасига нисбатан доимо ўзгармасдан қолса, у ҳолда жисм мазкур системага нисбатан тинч ҳолатда бўлади. Агар вақтнинг ўтиши билан жисм нуқталарининг координаталари танланган саноқ системасига нисбатан ўзгара борса, жисм шу системага нисбатан ҳаракатда бўлади. Жисм бирор саноқ системасига нисбатан ҳаракатда бўлса,

^{*} Энгельс Ф. Анти Дюринг. Т., Ўзбекистон, 1957 й, 65-бет

Иккинчи санок системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлиши мумкин. Шу нуқтани назардан ҳазмат қилувчи аниқ шисбий хариактерга эга.

Вақт объектив борлиқда рўй берувчи ҳодисаларнинг қанча давом этишини ифодалади. Назарий механикада вақт барча санок системалари учун бир хилда ўтади ва бир системанинг иккинчи системага нисбатан ҳаракатига боғлиқ эмас деб ҳисобланади, яъни вақт абсолют деб қаралади. Вақтни ўлчаш учун табиатда учрайдиган ва даврий такрорланувчи ҳодисалардан (масалан, Ернинг ўз ўқи атрофидаги айланишидан) ёки сувъий усулда ҳосил қилинадиган даврий такрорланувчи процесслардан (масалан, соат маятникнинг тебранма ҳаракатидан) фойдаланилади.

Дастлаб вақтнинг энг кичик бирлиги учун бир йилдаги ўртача Куёш суткасининг $\frac{1}{24 \cdot 3600}$ бўлагига тенг вақт—секунд қабул қилинган эди. Кузатишлар натижаси Ернинг ўз ўқи атрофида суткалик айланиш вақти ўзгариб бордини аниқланди. Сўнгра СИ системасида вақт бирлиги бир секунд (1с) учун 1900 тропик йилнинг $\frac{1}{31556925,9747}$ бўлагига тенг катталиқ олинган. Вақт одатда t билан белгиланади. Вақтни ўлчаш бошланғич найтдан (масалан, $t=0$ дан) бошлаб ҳисобланади. Вақт икки маънода: берилган он (пайт, масалан, соат 5) ва маълум вақт оралиғи (масалан, 4 соат давомиди) таъзида ишлатилади. Вақт бир ўлчамли ва у орқага қайтмайди, яъни вақт ўтмишидан келажакка қараб ривожланади деб ҳисоблаймиз.

Ҳаракати ўрганилаётган жисмин бир қанча нуқталар тўпламидан иборат деб қарани мумкин. Шу сабабли кинематикада аввало айрим нуқтанинг ҳаракати ўрганилади.

Танлаб олинган санок системасига нисбатан нуқтанинг ҳаракати-ни ўрганиш унинг шу системага нисбатан бирор вақт оралиғидаги траекториясини ва ҳар-ондаги тезлик ҳамда тезланишини аниқлаш масаласидан иборат. / Нуқта ҳаракатланганда унинг берилган санок системасига нисбатан чизган узлуксиз чизиги *нуқтанинг траекто-рияси* дейилади. / Агар нуқта траекторияси тўғри чизиқдан иборат бўлса, унинг ҳаракати *тўғри чизиқли ҳаракат*, траекторияси эгри чизиқ бўлса, *эгри чизиқли ҳаракат* дейилади.

Нуқта ҳаракати ўрганилаётганда унинг кўчиши тушунчасига дуч келинади. Нуқтанинг ҳаракати ва кўчиши тушунчаларини бир-биридан фарқ қилиш керак. Нуқтанинг кўчиши унинг бошланғич ва охириги ҳолатлари ҳамда вақт оралиғи билан аниқланади, бунда нуқтанинг аввалги ҳолатдан кейинги ҳолатга қандай усул билан ўтиши эътиборга олинмайди. Ҳаракат тушунчасида эса нуқтанинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга вақтга боғлиқ равишда қандай усул билан ўтгани, яъни бошланғич ва охириги пайтлар орасидаги исталган вақт учун фазодаги ўрин ҳисобга олинади.

Нуқта кинематикасида қуйидаги икки асосий масала кўрилади: 1) берилган санок системасига нисбатан нуқтанинг ҳаракатини математик усулда аниқлаш; 2) нуқтанинг берилган ҳаракат қонушига

қўра мазкур ҳаракатнинг барча кинематик характеристикалари (траектория, тезлик, тезланиш ва ҳоказолар) ни аниқлаш.

Кинематика бўлимини ўрганишни векторнинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласини аниқлашдан бошлаймиз.

8.2- §. Векторнинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласи

Скаляр аргумент t нинг функциясидан иборат бўлган ҳамда миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгарувчи \vec{a} вектор берилган бўлсин:

$$\vec{a} = \vec{a}(t), \quad (8.1)$$

бунда \vec{a} векторни t аргументнинг узлуксиз ва бир қийматли функцияси деб қараймиз.

Аргументнинг t_1, t_2, t_3, \dots қийматларида \vec{a} вектор мос равишда $\vec{a}_1 = \vec{a}(t_1), \vec{a}_2 = \vec{a}(t_2), \vec{a}_3 = \vec{a}(t_3), \dots$ катталикларга эга бўлсин. Агар бу ўзгарувчи векторларнинг бошини бирор қўзғалмас O нуқтада олсак, уларнинг учи фазода векторнинг годографи деб аталувчи A_1, A_2, A_3, \dots чизиқни чизади (8.1-расм).

Вектор годографи тенгламасини Декарт координаталар системаси орқали ифодалаш учун O нуқтада Декарт координата ўқларини ўтказиб, (8.1) ни бу ўқларга проекциялаймиз (8.2-расм):

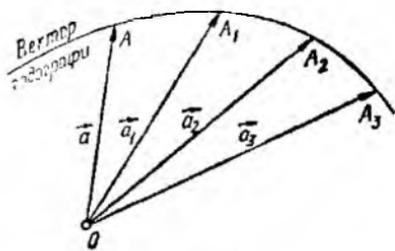
$$\left. \begin{aligned} x &= a_x(t), \\ y &= a_y(t), \\ z &= a_z(t). \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

(8.2) тенгламалар системаси *радиус-вектор осогорафининг параметрик тенгламалари* дейилади. (8.2) дан t параметрни йўқотиб, годограф тенгламасини икки цилиндрик сиртнинг кесилишган чизиғи тарзида ифодалаш мумкин. Масалан, (8.2) нинг учинчи тенгламасини вақтга инебатан ечиб,

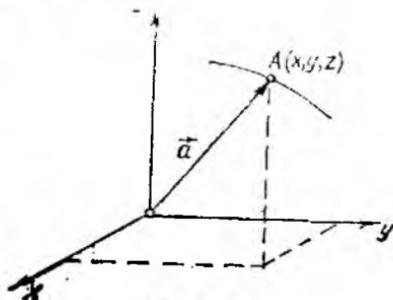
$$t = \varphi(z)$$

муносабатни олайлик. Буни (8.2) нинг биринчи иккита тенгламасига қўйиб:

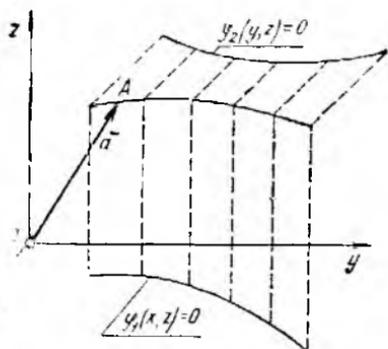
$$x = f_1(z), \quad y = f_2(z)$$



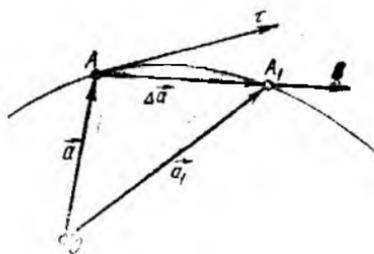
8.1- расм.



8.2- расм.



8.3- расм.



8.4- расм.

ёки

$$\varphi_1(x, z) = 0, \varphi_2(y, z) = 0 \quad (8.3)$$

системани оламиз. (8.3) нинг биринчиси годографнинг Oxz текисликдаги, иккинчиси Oyz текисликдаги проекциясини ифодалайди (8.3- расм). Шундай қилиб, годографни ясовчилари Ox ва Oz ўқларга параллел ва асослари (8.3) тенгламалар билан ифодаланадиган цилиндрик сиртларнинг кесинган чизиғи деб қараш мумкин.

Ўзгарувчи \vec{a} вектор аргументининг бир-бирига яқин t ва $t + \Delta t$ га мос келувчи қийматларини $\vec{a} = \vec{a}(t)$ ва $\vec{a}_1 = \vec{a}(t + \Delta t)$ билан белгилайлик (8.4- расм). \vec{a} ва \vec{a}_1 векторларнинг учларини туташтириб, қуйидаги муносабатни ёзимиз:

$$\vec{a}_1 = \vec{a} + \Delta \vec{a}$$

ёки

$$\Delta \vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}.$$

Бунда $\Delta \vec{a}$ вектор \vec{a} векторнинг аргумент Δt га ўзгаргандаги орттирмасини ифодалайди.

$\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}$ нисбатнинг Δt нолга интилгандаги limiti \vec{a} векторнинг t скаляр аргумент бўйича ҳосиласи дейилади. Шундай қилиб,

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}. \quad (8.4)$$

$\frac{d\vec{a}}{dt}$ векторнинг йўналишини аниқлаймиз. Δt мусбат скаляр ғат-талиқ бўлгани учун $\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}$ вектори $\Delta \vec{a}$ бўйича, яъни годографнинг AB кесувчиси бўйлаб йўналади. Δt нолга интилган лимит ҳолатида ке-

сувчи A нуқтада географияга ўтказилган $A\tau$ уринма бўйлаб йўналиди.

Демак, векторнинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласи мазкур векторнинг географияга ўтказилган уринма бўйича йўналган вектор билан ифодаланади.

(8.4) га асосан, векторнинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласи қуйидаги ҳоссаларга эга:

1. Агар \vec{a} вектор миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас ($\vec{a} = \text{const}$) бўлса, у ҳолда $\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$.

2. Векторлар йиғиндисининг ҳосиласи векторлар ҳосилаларининг йиғиндисига тенг:

$$\frac{d(\vec{a} + \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

3. Векторларнинг скаляр ва векторли кўпайтмалари ҳосиласи учун

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}, \\ \frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) &= \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \end{aligned}$$

муносабатлар ўринли бўлади.

4. Агар $\lambda = \text{const}$ бўлса,

$$\frac{d(\lambda \vec{a})}{dt} = \lambda \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

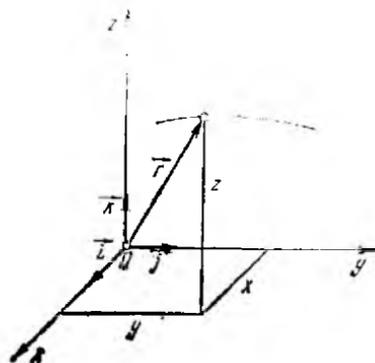
8.3-§. Нуқта ҳаракатини аниқлаш усуллари

Нуқтанинг бирор саноқ системасига нисбатан исталган вақтдаги ҳолатини аниқлаш усули маълум бўлса, унинг ҳаракати аниқланган ёки берилган дейилади; нуқтанинг ҳаракатини аниқловчи ифода унинг ҳаракат тенгламаси ёки ҳаракат қонуни дейилади.

Нуқтанинг ҳаракати асосан қуйидаги уч усулда аниқланади:

1) вектор усули; 2) координаталар усули; 3) табиий усул.

1. Вектор усули. M нуқта қуввалмас $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатда бўлсин. O ва M нуқталарни туташтириб, M нуқтанинг $\vec{r} = \vec{OM}$ радиус-векторини ҳосил қиламиз (8.5-расм). M нуқта ҳаракатлашганда радиус-векторини



8.5- расм.

билан унинг радиус-вектори \vec{r} миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгара боради. Агар нуқтанинг радиус-вектори вақт функцияси сифатида аниқланган ёки берилган бўлса, яъни

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (8.5)$$

маълум бўлса, нуқтанинг фазодаги ҳолати иситалган пайтда аниқ бўлади. Бунда кўриладиган масалалар учун $\vec{r}(t)$ функция бир қийматли, узлуксиз ва камида иккинчи тартибли ҳосилга эга деб қараймиз. (8.5) нуқта ҳаракатининг вектор кўринишидаги кинематик тенгламаси дейилади. У нуқта траекториясининг векторли тенгламаси бўлиб, нуқтанинг ҳаракат қонуimini ифодалайди. Нуқта ҳаракатининг шу тарзда аниқланиши (берилиши) унинг вектор усулда ифодаланиши дейилади.

\vec{r} радиус-вектор учидagi M нуқтанинг геометрик ўрни унинг траекториясини, радиус-векторнинг эса географияни ифодалайди.

Агар $\vec{r} = \cos t$ бўлса, M нуқта олинган саноқ системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлади.

2. Координаталар усули. Дастлаб нуқтанинг ҳолатини тўғри бурчакли Декарт координаталар системасига нисбатан аниқлаймиз. Ҳаракатдаги M нуқтанинг координаталарини x, y, z билан белгилаймиз (8.5-расм). Нуқта ҳаракатланганда вақт ўтиши билан унинг координаталари ўзгара боради, яъни x, y, z координаталар вақтнинг бир қийматли функциясидан иборат бўлади:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Агар (8.6) тенгламалар берилган бўлса, нуқтанинг иситалган пайтдаги ҳолатини аниқлаш мумкин. (8.6) функционал муносабатлар воситасида нуқтанинг ҳаракатини аниқлаш уни координаталар усулида ифодалани дейилади. (8.6) ифодалар нуқта ҳаракатининг Декарт координаталаридаги кинематик тенгламаларини ифодалайди.

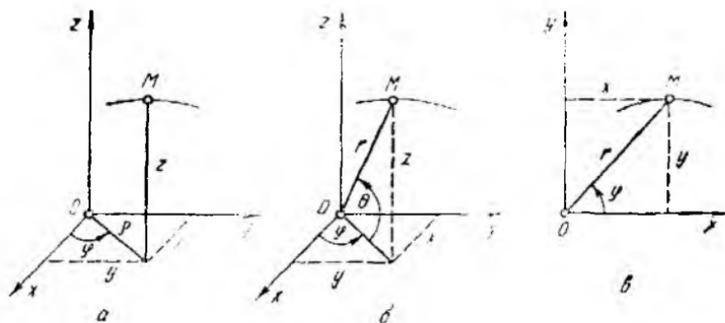
(8.6) тенгламалар нуқта траекториясининг параметрик тенгламаларини ифодалайди. Бунда параметр сифатида t вақт олинган.

(8.6) дан t вақтни йўқотиб, нуқта траекториясининг тенгламасини олиш мумкин.

M нуқтанинг O координаталар бошига нисбатан радиус-векторини \vec{r} , координаталар ўқларининг бирлик йўнаштирувчи векторларини $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ билан белгиласак,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (8.7)$$

ўрикли бўлади. (8.7) тенглик ҳаракатнинг векторли ва Декарт координаталари орқали аниқлаш усуллари орасидаги боғлиқлигини ифодалайди.



8.6- расм

Агар M нуқта Oxy текислигида ҳаракатланса, унинг ҳаракати

$$x=x(t), y=y(t) \quad (8.6, a)$$

тенгламалар билан аниқланади.

Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатини битта

$$x=x(t) \quad (8.6, б)$$

координата билан аниқлани мумкин.

Ҳаракатни Декарт координаталаридан тапқари цилиндрик ёки сферик координаталар системасида ҳам аниқлаш мумкин. Агар нуқта бир текисликда ҳаракатланса, қутб координаталар системасидан фойдаланиш мумкин.

Цилиндрик координаталар системасида нуқтанинг ҳолати ρ радиус, φ бурчак (кенглик) ва z аппликата билан аниқланади (8.6-расм, а). Агар

$$\rho=\rho(t), \varphi=\varphi(t), z=z(t) \quad (8.8)$$

берилган бўлса, нуқтанинг ҳаракати цилиндрик координаталарда аниқланган бўлади.

Сферик координаталар системасида нуқтанинг ҳолати қутб радиуси r , кенглик бурчаги φ ва қутб бурчаги θ билан аниқланади (8.6-расм, б). Агар

$$\vec{r} = r(t), \varphi=\varphi(t), \theta=\theta(t) \quad (8.9)$$

берилган бўлса, нуқтанинг ҳаракатини сферик координаталарда аниқлаш мумкин.

Ҳаракат қутб координаталарида аниқланиши учун қутб радиуси r ва қутб бурчаги φ вақтнинг функцияси сифатида берилиши керак (8.6-расм, в).

$$r=r(t), \varphi=\varphi(t). \quad (8.10)$$

Декарт координаталарини цилиндрик ва сферик координаталар орқали мос равишда ушбу формулалар ёрдамида ифодалаш мумкин:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z; \quad (8.11)$$

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta. \quad (8.12)$$

Декарт ва қутб координаталари бир-бири билан

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (8.13)$$

тенгламалар воситасида боғланган.

3. Табиий усул. O_1xyz координаталар системасига нисбатан эгри чизиқли ҳаракатдаги нукта траекториясининг тенгламасини

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0 \quad (8.14)$$

сиртларнинг кесилган чизиғи деб қараш мумкин (8.7- расм, а). (8.14) траектория тенгламасини ифодалайди, бу тенгламалар ёрдамида нуктанинг ҳаракатини аниқлаб бўлмайди. Чунки вақтнинг ўтиши билан мазкур траектория бўйича нукта турлича қонунга кўра ҳаракат қилиши мумкин. Бошқача айтганда, эгри чизиқда санок бўлиши учун олинган қўзғалмас O нуктага нисбатан ҳисобланган M нуктанинг ёй координатаси s вақтнинг ўтиши билан турлича ўзгариши мумкин (8.7- расм, б). Нуктанинг траекториядаги ҳолатини бир қийматан аниқлаш учун ёй координатасининг мусбат ва манфий йўналишларини (чизмада «+» ва «-» ишора билан) оламиз.

Агар траектория тенгламаси ҳамда нукта ёй координатасининг вақт ўтиши билан ўзгаришини ифодалайдиган

$$s = s(t) \quad (8.15)$$

муносабат маълум бўлса, нуктанинг ҳаракатини тўлиқ аниқлаш мумкин. Бунда $s(t)$ вақтнинг бир қийматли, узлуксиз ва дифференциалланувчи функциясидан иборат.

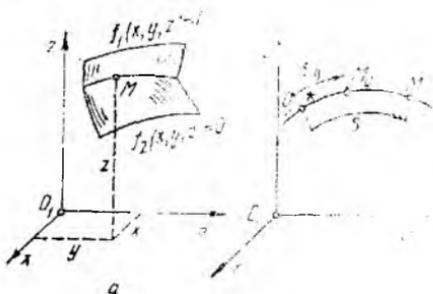
(8.15) тенглама нуктанинг траектория бўйлаб ҳаракат қонушини ифодалайди.

(t, s) текислигида $s = s(t)$ муносабатни ифодловчи эгри чизиқ *нуктанинг ҳаракат графиги* дейилади.

Нуктанинг ҳаракатини (8.14) ва (8.15) тенгламалар воситасида аниқлаш унинг *табиий усулда аниқланиши* дейилади.

Шундай қилиб, *нуктанинг ҳаракатини табиий усулда аниқлаш учун*: 1) танланган координаталар системасига нисбатан траектория тенгламаси (8.14); 2) траекторияда санок бўлиши учун олинган қўзғалмас O нукта ҳамда ёй координатасининг мусбат ва манфий йўналиши; 3) нуктанинг траектория бўйлаб ҳаракат қонунини ифодловчи (8.15) тенглама берилган бўлиши керак.

Нуктанинг ёй координатаси s билан траектория бўйлаб ўтган йўли σ доимо бир хил бўлавермайди. Агар $s = s(t)$ функция t вақтнинг монотон функциясидан иборат бўлса, яъни



8.7- расм.

нуқта доимо бир йўналишда ҳаракатланса, ёй координатаси билан ўтилган йўл устма-уст тушади. Нуқта бошланғич t_0 вақтда M_0 ҳолатини, t_1 вақтда M ҳолатини эгалласин (8.7- расм, б). $t_1 - t_0$ вақт ичида ўтилган йўлни топшиш учун уни жуда кичик Δt_v ($v=1, 2, \dots, n$) шундай вақт оралиқларига бўламизки, ҳар бир оралиққа нуқтанинг фақат бир хил йўналишини мос келсин. Δt_v га мос келган ёй координатасининг орттирмасини Δs_v билан белгилаймиз. Нуқтанинг ўтган йўли σ мусбат катталик бўлиб

$$\sigma = \sum_{v=1}^n \left| \Delta s_v \right| \quad (8.16)$$

қобилияти ёрдамида аниқланади. Йўл узунлигини ҳисоблашда интеграллаш йўлида ҳам мавжуд. Уни кейинроқ келтираемиз.

8.1- масала. M нуқта

$$x=5 \sin 10t, \quad y=3 \cos 10t \quad (1)$$

қонуни (бунда x, y лар метрда, t —секундда ўлчанади) асосида ҳаракатланади. Нуқтанинг траекторияси ва бошланғич пайтдаги ҳолати аниқлансин.

Ечилиш. Нуқта траекториясининг тенгламасини топиш учун (1) дан вақт t ни йўқотамиз. Бунинг учун (1) ни

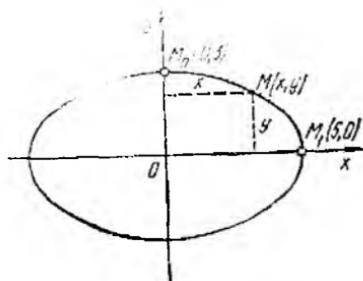
$$\frac{x}{5} = \sin 10t, \quad \frac{y}{3} = \cos 10t$$

шаклида ёзамиз. Бу тенгламаларнинг иккала томонини квадратга ошириб, бири-бири билан қўшамиз. Натижада

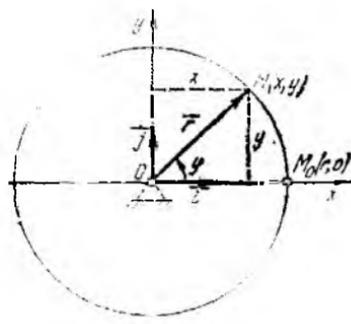
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

кўринишдаги траектория тенгламасини оламиз. Бинобарин, нуқта ярим ўқлари 5 ва 3 га тенг эллипс бўйлаб ҳаракатланади (8.8- расм). Нуқтанинг бошланғич пайтдаги ҳолатини аниқлаш учун (1) га $t=0$ қийматини қўйсак, $x_0=0$, $y_0=3$ бўлади. Шундан қилиб, нуқта бошланғич пайтда Oy ўқда $M_0(0; 3)$ ҳолатини эгаллайди.

8.2- масала. Радиуси r га тенг ғилдирак расм текислигига перпендикуляр бўлган ва ғилдирак марказидаги O нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида $\varphi = \omega t$ (бунда $\omega = \text{const}$) қонуни бўйича айланади. Ғилдирак Ғардишидаги M нуқтанинг Декарт координаталаридаги ва вектор кўринишидаги ҳаракат тенгламасини аниқлансин (8.9- расм).



8.8- расм.



8.9- расм.

Екинч. Координаталар босқини айланан ўқидagi O нуқтага олиб, координата ўқларини расмда кўрсатилгандек йўналтирамиз. Нуқтанинг босқинга ҳолатини M_0 вақтидгий вақтдаги ҳолатини M билан белгиләймиз.

$\vec{OM} = r$ векторининг ҳолатини Ox ўқдан мувофиқ (сезат) стрелкаси айланганига тескари йўналишда алоқланидан φ бурчак билан аниқлаемиз. M нуқтанинг координаталарини x, y билан белгиләймиз.

M нуқтанинг ҳаракат тенгламасини аниқлаш учун шу x, y ни вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш керак. Расмдан:

$$x = OM \cos \varphi, \quad y = OM \sin \varphi.$$

Бунда $OM = r$, $\varphi = \omega t$ бўлгани учун нуқтанинг изланаётган ҳаракат тенгламаларини қуйидагича ёзамиз:

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t. \quad (1)$$

(1)нинг ҳар иккаласини квадратга ошириб, уларни қўшсак, нуқта траекториясининг $x^2 + y^2 = r^2$ тенгламасини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, гилдирак тўғи-нида ётган нуқтанинг траекторияси радиуси r га тенг ва маркази O нуқтада ётувчи айлананин ифода қилади.

Нуқта ҳаракат тенгламасининг векторли ифодасини чиқариш учун (8.7) дан фойдаланамиз:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = r(\cos \omega t \cdot \vec{i} + \sin \omega t \cdot \vec{j}).$$

8.3-мәсала. Тўғри бурчакли қилиб ёзилган BCD стержень шундай ҳаракатланадики, унинг B нуқтеси вертикал чизик бўлиши сирпанали, CD қисми доимо A қўзғалмас нуқтадан ўтади. φ бурчак эса (8.10-расм) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ оралиқда $\varphi = kt$ қонунига кўра ўзгариши. $BC = OA = a$ деб олиб, C нуқтанинг ҳаракати ва траекторияси тенгламаси аниқлаемиз.

Екинч. C нуқта ҳаракатини Ox координаталар системасида аниқлаш учун унинг координаталарини $x = OL$ ва $y = CL$ нар вақт ўтими билан қандай ўзгаришини текширамиз. Берилган расмдан $x = BC \cos \varphi$ ёки $x = a \cos kt$ эканлигини толамиз.

$\widehat{BCD} = 90^\circ$ эканлигидан $\widehat{LCA} = \varphi$. ALC учбурчакдан $CL = AL \operatorname{ctg} \varphi$. Расмдан $AL = OA - OL = a(1 - \cos \varphi)$, шунинг учун $y = a(1 - \cos \varphi) \operatorname{ctg} \varphi$ ёки $y = a(1 - \cos kt) \operatorname{ctg} kt$. (1)

Маълумки, $1 - \cos kt = 2 \sin^2 \frac{kt}{2}$. Буни назарда тутиб, (1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$y = a \cdot 2 \sin^2 \frac{kt}{2} \cdot \frac{\cos kt}{\sin kt} = 2a \sin^2 \frac{kt}{2} \cdot \frac{\cos kt}{2 \sin \frac{kt}{2} \cdot \cos \frac{kt}{2}}$$

ёки

$$y = a \cos kt \cdot \operatorname{tg} \frac{kt}{2}.$$

Шундай қилиб, C нуқтанинг таплаб олинган Декарт системасидаги ҳаракати

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos kt, \\ y &= a \cos kt \cdot \operatorname{tg} \frac{kt}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

тенгламалар билан аниқланади.

Нуқта траекторияси тенгласини ҳосил қилш учун (2) дан t ни йўқотиш зарур. $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ да

$$\operatorname{tg} \frac{kt}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos kt}{1 + \cos kt}}$$

ўринли эканлигини эътиборга олиб, (2) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos kt, \\ y &= a \cos kt \sqrt{\frac{1 - \cos kt}{1 + \cos kt}} \end{aligned} \right\}$$

Бу тенгламаларнинг биринчисини иккинчисига қўйсак,

$$y = x \sqrt{\frac{1 - \frac{x}{a}}{1 + \frac{x}{a}}}$$

ёки

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{a-x}{a+x}, \quad (0 < x \leq a). \quad (3)$$

Шундай қилиб, C нуқтанинг траекторияси (3) тенглама билан аниқланади ва расмда тасвирланган C_1CC_2A строфоида ёйидан иборат бўлади.

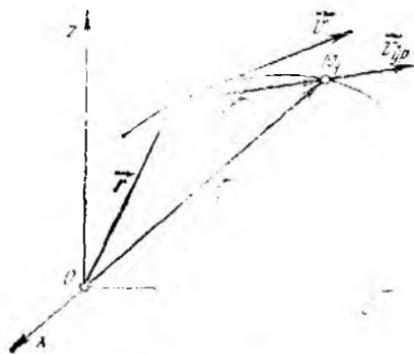
8.4- §. Нуқтанинг тезлиги

1. Ҳаракати вектор усулида берилган нуқтанинг тезлиги.

Нуқтанинг ҳаракати вектор усулда $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тенглама билан берилган бўлсин. Нуқтанинг бирор t пайтдаги траекторияда эгаллаган ҳолатини M , радиус-векторини \vec{r} , $t_1 + \Delta t$ пайтдаги ҳолатини M_1 радиус-векторини \vec{r}_1 билан белгилайлик (8.11- расм). Нуқтанинг M ва M_1 ҳолатларини туташтирувчи $\overline{MM_1} = \Delta \vec{r}$ вектор нуқтанинг $\Delta t = t_1 - t$ вақт оралиғидаги *кўчиш вектори* дейилади. Расмдан кўришиб турибдики, $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}$. Бундан нуқтанинг Δt вақт ичидаги *кўчиш (радиус-вектор ортирма-си)* ни топиш мумкин:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}.$$

Кўчиш вектори $\Delta \vec{r}$ нинг шу кўчиш содир бўладиган Δt вақтга нисбати *нуқтанинг* мазкур вақт оралиғидаги *ўртача тезлик вектори* дейилади ва $\vec{v}_{\text{ор}}$ билан белгиланади:



8.11- расм.

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Бундан Δt мусбат скаляр миқдор бўлгани учун ўртача тезлик вектори $\Delta \vec{r} = M_0 M_1$ вектор бўйича, яъни M нуқтанинг ҳаракат йўналишида $M_0 M_1$ кесувчи бўйлаб йўналади.

Нуқта ўртача тезлик векторининг Δt нолга интилгандаги limiti нуқтанинг берилган оindaги тезлик вектори дейилади ва \vec{v} билан белгиланади.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Сана

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (8.17)$$

яъни нуқтанинг тезлик вектори ундо радиус-векторидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилга тенг.

Юқорида кўрганимиздек, вектор функциянинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласи мазкур вектор географияга уринма бўйича йўналади; M нуқтанинг траекторияси ва \vec{r} радиус-вектор география устма-уст тушади. Шу сабабли берилган пайтдаги тезлик вектори нуқта траекториясига ҳаракат йўналиши бўйича ўтказилган уринма бўйлаб йўналади.

Нуқта тезлигининг модулини $|\vec{v}|$ ёки v билан белгилаймиз. Умумий ҳолда нуқтанинг берилган оindaги тезлик вектори \vec{v} радиус-вектор \vec{r} ning модулидан олинган $\frac{d|\vec{r}|}{dt}$ ҳосилга тенг бўлмайди.

Ҳақиқатан ҳам, агар нуқта радиуси r га тенг айлана (ёки сфера) бўйлаб ҳаракатланса, унинг айлана марказига nisbatan радиус-вектори \vec{r} фақат йўналиш жиҳатдан ўзгаради. Шу сабабли нуқта айлана бўйлаб ҳаракатланганда $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0$, лекин айлана учун

$|\vec{r}| = \text{const}$ бўлганидан $\frac{d|\vec{r}|}{dt} = 0$. Бинобарин,

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \neq \frac{d|\vec{r}|}{dt}.$$

(8.17) га асосан тезликнинг ўлчов бирлигини аниқлаймиз:

$$[v] = \frac{[\text{uzinlik}]}{[\text{vaqt}]} = \frac{L}{T}.$$

СИ бирликлар системасида тезлик ўлчов бирлиги м/с дан иборат.

2. Ҳаракати координаталар усулида берилган нуқтанинг тезлиги.

Нуқтанинг ҳаракати Декарт координаталарида (8.6) тенгламалар орқали берилган бўлсин. Нуқта тезлиги векторининг координата ўқларидаги проекцияларини v_x, v_y, v_z билан белгиласак, у ҳолда қуйидаги тенглак ўринли бўлади:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (8.18)$$

бунда $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ қўзғалмас координата ўқларининг бирлик йўналтирувчи векторлари миқдор ва йўналиш жиҳатидан ўзгармас бўлади. (8.17) га кўра (8.7) дан вақт бўйича ҳосилла олсак, тезлик вектори учун яна қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}.$$

Бу тенглакни (8.18) билан солиштириб, тезликнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқловчи ушбу формулаларга эга бўламиз:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (8.19)$$

Шундай қилиб, нуқта тезлигининг бирор қўзғалмас Декарт координата ўқларидаги проекцияси ҳаракатланувчи нуқтанинг шу ўққа мос координатасидан вақт бўйича олинган биринчи ҳосиллага тенг.

Нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, унинг модули

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (8.20)$$

формуладан, йўналиши эса

$$\cos(\vec{v}, x) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v}, y) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\vec{v}, z) = \frac{v_z}{v} \quad (8.21)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

Агар нуқта Oxy текисликда ҳаракатланса, (8.19)—(8.21) формулаларда $v_z = 0$ деб қаралади.

Агарда нуқта тўғри чизиқни ҳаракатда бўлса, бу ҳаракатни битта (8.6, б) тенглама билан аниқлаш мумкин. Бу ҳолда (8.18)—(8.20) формулаларда $y = z = 0$ бўлиб, тезлик вектори Ox ўқ бўйича йўналиши ва унинг бу ўқдаги проекцияси

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

формуладан аниқланади.

Агар $\dot{x} > 0$ бўлса, нуқта тезлик вектори \vec{v} нинг йўналиши Ox ўқнинг мусбат, $\dot{x} < 0$ да ўқнинг манфий йўналишига мос тушади.

Нуқта бир текисликда ҳаракатланганида унинг ҳаракати ва тезлигини қутб координаталар системасида ҳам аниқлаш мумкин. Агар \vec{r} радиус-векторнинг бирлик векторини \vec{r}^0 билан белгиласак,

$$\vec{r} = r \cdot \vec{r}^0$$

муносабат ўринли бўлади (8.12-расм).

Нуқта ҳаракатланганда унинг радиус-вектори миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгаради. Шу сабаб

ли r ва \vec{r}^0 лар вақтнинг функциясида иборат бўлади. Бунни назарда тутиб, (8.17) дан вақт бўйича ҳосилла олсак, нуқтанинг тезлиги учун

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r \cdot \vec{r}^0) = \frac{dr}{dt} \vec{r}^0 + r \frac{d\vec{r}^0}{dt} \quad (8.22)$$

муносабат келиб чиқади. $\frac{d\vec{r}^0}{dt}$ ни аниқлаш учун Oxy текисликда \vec{r}^0 векторга перпендикуляр бўлган ва φ бурчак ортадиган томонга йўналган $\vec{\rho}^0$ бирлик векторни киритамиз. \vec{r}^0 ва $\vec{\rho}^0$ векторларини Декарт координаталарининг бирлик йўналтирувчи векторлари \vec{i} , \vec{j} ҳамда φ бурчак орқали қуйидагича ifodalash мумкин (8.12-расм).

$$\vec{r}^0 = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j},$$

$$\vec{\rho}^0 = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{i} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j} = -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}.$$

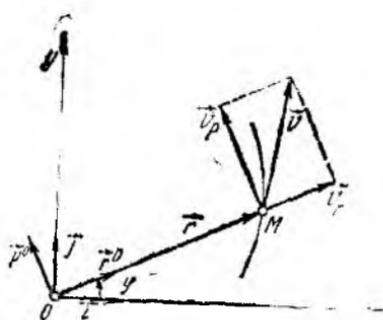
Бу муносабатларни назарда тутиб, \vec{r}^0 ва $\vec{\rho}^0$ нинг вақт бўйича ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{r}^0}{dt} &= (-\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{\rho}^0, \\ \frac{d\vec{\rho}^0}{dt} &= -(\cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}) \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{r}^0. \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

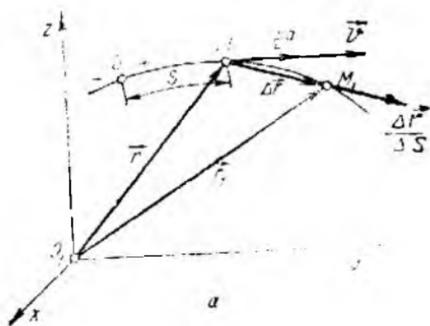
Бу тенгликларнинг биринчисига кўра (8.22) ни

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{r}^0 + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{\rho}^0 = \dot{r} \vec{r}^0 + r \dot{\varphi} \vec{\rho}^0 \quad (8.24)$$

кўринишида ёзимиз. (8.24) формула ёрдамида нуқтанинг тезлик векторини ўзаро перпендикуляр бўлган \vec{r}^0 ва $\vec{\rho}^0$ векторлар йўналишидаги иккита $\vec{v}_r = \dot{r} \vec{r}^0$ ва $\vec{v}_\varphi = r \dot{\varphi} \vec{\rho}^0$ ташкил этувчиларга ажратиш



8.12-расм.



мумкин. \vec{v}_r тезликнинг радиал таъкил этувчиси, \vec{v}_n эса кўндаланг таъкил этувчиси дейилади. \vec{v} ни \vec{r} ва \vec{r}' йўналишларга проекциялаб, радиал ва кўндаланг тезликларнинг алгебраик қиймати аниқланадиган

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\rho = r\dot{\varphi} \quad (8.25)$$

ифодаларни оламиз. $\vec{v}_r \perp \vec{v}_\rho$ бўлгани учун тезликнинг модулини

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\rho^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2} \quad (8.26)$$

формуладан аниқлаймиз. Шундай қилиб, ҳаракати қутб координаталар системасида берилган нуқтанинг тезлиги (8.24) ва (8.26) формулалар воситасида аниқланади.

3. Ҳаракати табиий усулда ифодаланган нуқтанинг тезлиги.

M нуқта берилган траектория бўйлаб $s=s(t)$ қонуни асосида ҳаракатлансин (8.13-расм).

Нуқтанинг ўртача тезлиги учун қуйидаги ифодани ёзиш мумкин:

$$\vec{v}_{\text{ор}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

бунда Δs билан MM_1 ёйнинг узунлиги белгиланган. У ҳолда M нуқтанинг берилган ондаги тезлиги

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

формуладан аниқланади. Агар $\Delta s > 0$ бўлса, $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ вектори $\Delta \vec{r}$ билан

бир хил (8.13-расм, а), $\Delta s < 0$ да $\Delta \vec{r}$ га қарама-қарши йўналади

(8.13-расм, б). Шу сабабли $\Delta \vec{r} \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ векторининг йўналиши

M нуқтада ёй координатаси ортадиган йўналишида траекторияга ўтказилган уриинмага интилади. Бу векторнинг модули лимит ҳолатида бирга тенг бўлади:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1.$$

Шундай қилиб, $\frac{d\vec{r}}{ds}$ вектори миқдор жиҳатдан бирга тенг, йўна-

лиши эса нуқта траекториясига M нуқтада ёй координатаси ортадиган йўналишда ўтказилган уринманнинг йўналиши билан устма-уст тушади. Бинобарин, $\frac{d\vec{r}}{ds}$ вектори ёй координатасининг мусбат йўналиши бўйича йўналган уринманнинг бирлик вектори $\vec{\tau}^0$ ни ифода қилади:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}^0.$$

Натижада ҳаракати табиий усулда берилган нуқтанинг тезлиги учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}^0. \quad (8.27)$$

(8.27) да $\frac{ds}{dt}$ ҳосила \vec{v} тезлигининг уринмадаги проекцияси v_{τ} ни ифода қилади ва тезликнинг алгебраик қиймати дейилади:

$$v_{\tau} = \frac{ds}{dt}. \quad (8.28)$$

v_{τ} нинг абсолют қиймати тезлигининг модулига тенг бўлади:

$$v = |v_{\tau}| = \left| \frac{ds}{dt} \right|.$$

Бинобарин, нуқта тезлигининг модули ёй координатасидан вақт бўйича олинган ҳосиланинг абсолют қийматига тенг.

(8.28) га асосан (8.27) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{v} = v_{\tau} \cdot \vec{\tau}^0. \quad (8.27, a)$$

Юқорида кўрганимиздек, уринманнинг бирлик вектори $\vec{\tau}^0$ доимо ёй координатасининг мусбат йўналиши бўйича йўналади. Агар бирор пайтда $\frac{ds}{dt} > 0$ бўлса, ёй координатаси орта боради ва нуқта тезлиги \vec{v} нинг йўналиши $\vec{\tau}^0$ билан устма-уст тушади ҳамда $v = v_{\tau}$ ва $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}^0$ бўлади. Агар $\frac{ds}{dt} < 0$ бўлса, шу пайтда ёй координатаси s камая боради ва \vec{v} тезлик вектори $\vec{\tau}^0$ га қарама-қарши йўналади ҳамда $v = -v_{\tau}$ ва $\vec{v} = -v \vec{\tau}^0$ муносабат ўрнили бўлади (8.13-расмда $\frac{ds}{dt} > 0$ бўлган ҳол кўрсатилган).

Нуқтанинг ўтган йўли доимо мусбат бўлгани учун dt вақт ичида ўтилган йўл $d\sigma = |ds|$ формуладан аниқланади. Шу сабабли тезликнинг модули учун яна қуйидаги формулани оламиз:

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (8.29)$$

Агар нуқта тезлигининг модули вақтинг функцияси бўлса $v = v(t)$, (8.29) дан фойдаланиб, нуқтанинг исталган пайтда ўтган йўлини аниқлаш мумкин. Бунинг учун (8.29.) ни dt га кўпайтира-
 миз:

$$d\sigma = v \cdot dt.$$

Бошланғич пайтда $t=0$ ва $\sigma=0$ деб танлаб олиб, охириг тенг-
 ламани вақт ва ўтилган йўл бўйича интеграллаймиз:

$$\int_0^{\sigma} d\sigma = \int_0^t v(t) dt.$$

Шундай қилиб, бирор вақт оралиғида траектория бўйлаб ўтил-
 ган йўл узунлиги учун

$$\sigma = \int_0^t v(t) dt \quad (8.30)$$

муносабатни оламиз.

Бу муносабат Декарт координаталарида

$$\sigma = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (8.31)$$

қутб координаталарида эса

$$\sigma = \int_0^t \sqrt{r^2 + (r\dot{\varphi})^2} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \quad (8.32)$$

формулалар билан ифодаланadi. (8.32) да φ_0 ва φ билан бошланғич
 ва охириг пайтдаги қутб бурчаклари белгилашган.

Агар ҳаракат давомида нуқта тезлигининг модули доимо ўзгар-
 масдан қолса, яъни $v(t) = v_0 = \text{const}$ бўлса, бундай ҳаракат *эгри*
чиқиқли текис ҳаракат дейилади. (8.30) га кўра эгри чиқиқли тек-
 кис ҳаракатда йўл узунлиги учун

$$\sigma = v_0 t$$

формула ҳисил бўлади.

✓ 8.4-масала. Нуқтанинг ҳаракати

$$x = v_0 t \cos \alpha_0, \quad y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

тенгламалар билан берилган; бу ерда Ox ўқ горизонтал, Oy вертикал юқорига
 йўналган, v_0 , g ва $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ — ўзгармас миқдорлардир; 1) нуқтанинг траекто-
 рияси; 2) унинг энг юқори ҳолатидаги координаталари; 3) нуқта Ox ўқда бўл-
 ган вақтидаги тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари топилсин.

Ечили. 1. Ҳаракат тенгламалари (1) дан вақт t ни йўқотиб, нуқтанинг тра-
 екториясини аниқлаймиз. Бунинг учун (1) нинг биринчи тенгламасидан t ни аниқ-
 лаб, иккинчисига қўчамиз:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2.$$

Бу ифода параболанинг тенгламасидир. Нуқтанинг траекторияси мазкур параболанинг $x \geq 0$ шартни қаноатлантирувчи қисмидан иборат (8.14-рasm).

2. (8.19) га биноан тезликнинг координата ўқларидagi проекциялари учун ушбу ифодаларни оламиз:

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt. \quad (2)$$

Нуқта энг юқори ҳолатни эгаллаганда унинг тезлиги x ўққа параллел бўлади. Шу сабабли $v_y = 0$ ёки $v_0 \sin \alpha_0 - gt_1 = 0$ бўлади, бунда t_1 билан нуқта энг юқори ҳолатга кўтарилгунча ўтган вақт белгиланган. Охириги тенгликдан

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Вақт t_1 нинг бу қийматини (1) га қўйиб, нуқта энг юқори ҳолатининг координаталарини аниқлаймиз:

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha_0, \quad y = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha_0.$$

3. Нуқта Ox ўқда ётган вақтда $y = 0$ ёки $v_0 T \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g T^2 = 0$ бўлади, бунда T билан нуқта Ox ўқда бўлган вақт белгиланган.

Охириги тенгликдан $T_1 = 0, T_2 = \frac{2 v_0 \sin \alpha_0}{g}$ вақтларни аниқлаймиз. $T_1 = 0$ вақт нуқтанинг бошланғич ҳолатига мос келади. T_1 ва T_2 нинг қийматини (2) га қўйиб, нуқта Ox ўқда бўлган вақтдаги тезликнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_y = \pm v_0 \sin \alpha_0.$$

Бунда мусбат ишора нуқтанинг бошланғич ҳолатига мос келади.

8.5-масала. Симдан қилинган $0,1$ м радиусли халқача M ҳалқача кийгизилган бўлиб, ҳалқача ҳамда ҳалқачанинг O нуқтасидан OA стержень ўтади. Стержень O нуқта атрофида текис айланади (8.15-рasm). Стержень бошланғич пайтда OA_0 ҳолатни эгаллайди. Стерженьнинг O нуқта атрофидаги айланиш бурчаги φ вақтга пропорционал бўлиб, у 5 с ичида тўғри бурчакка бурилади. Ҳалқачанинг тезлиги аниқлансин.

Ечиш. M нуқтанинг ҳаракат қонуини табиий усулда аниқлаймиз. Масаланинг шартига

кўра $A_0 \widehat{OA} = \varphi$ ни вақтнинг функцияси сифатида аниқлаймиз: $\varphi = kt$, бунда $k = const$ бўлиб, пропорционаллик коэффициентини ифо

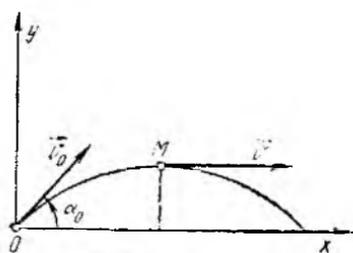
далайди: $t = 5$ с да $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун $k =$

$$= \frac{\pi}{10}. \quad \text{Бинобарин, } \varphi = \frac{\pi}{10} t.$$

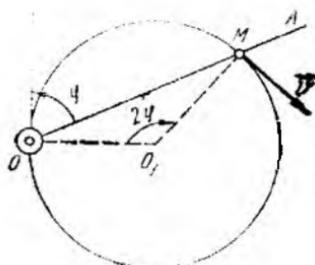
M ҳалқачанинг ҳаракат қонуни қуйидаги муносабатлар ёрдамида аниқланади:

$$\widehat{OO_1M} = 2\varphi, \quad \widehat{OM} = s = 2r\varphi = 0,02\pi t.$$

(8.28) га асосан тезликнинг алгебраик қийматини ҳисоблаймиз:



8.14- рasm.



8.15- рasm.

$$v_t = \frac{ds}{dt} = 0,02 \text{ м/с.}$$

Ҳаракат давомида $\frac{ds}{dt} = 0,02 \text{ м} > 0$ бўлгани учун тезликнинг модули

$$v = v_t = 0,02 \text{ м/с.}$$

8.5-§. Нуқтанинг тезланиши

1. Ҳаракати вектор усулида берилган нуқтанинг тезланишини аниқлаш. Нуқта ҳаракати (8.5) тенглама билан ифодаланган бўлсин. M нуқтанинг t пайтдаги тезлигини \vec{v} , $t_1 = t + \Delta t$ пайтдаги ҳолатини M_1 ва тезлигини \vec{v}_1 билан белгилайлик (8.16-расм). \vec{v}_1 тезлик векторини ўзига параллел равишда M нуқтага қўчирамиз ва тезлик векторининг Δt вақт оралиғидаги орттирмаси $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ ни топамиз.

Тезлик вектори орттирмаси $\Delta \vec{v}$ нинг Δt вақт оралиғига нисбати нуқтанинг мазкур вақт оралиғидаги ўртача тезланиш вектори дейилади ва $\vec{\omega}_{\text{ўр}}$ билан белгиланади:

$$\vec{\omega}_{\text{ўр}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Бунда Δt мусбат скаляр миқдор бўлгани учун тезланиш вектори $\Delta \vec{v}$ бўйлаб йўналади.

Ўртача тезланиш векторининг Δt нолга интилгандаги limiti нуқтанинг берилган ондаги тезланиш вектори дейилади ва $\vec{\omega}$ билан белгиланади:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

ёки

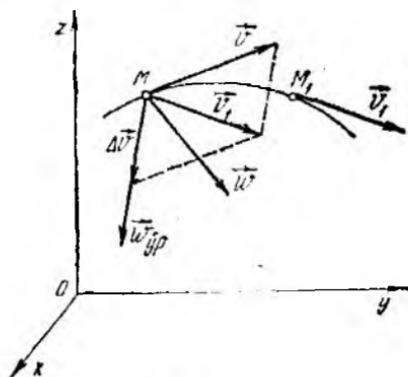
$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (8.33)$$

(8.17) ни эътиборга олсак,

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (8.33, a)$$

муносабат ўринли бўлади.

Демак, нуқтанинг тезланиш вектори унинг тезлик векторидан вақт бўйича олинган биринчи ҳосиллага ёки радиус-векторидан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосиллага тенг.



8.16- расм.

М нуқта ҳаракатланганда унинг ҳар ондаги тезлик векторини фазонинг бирор қўзғалмас O_1 нуқтасига муттасил қўя борсак, тезлик векторининг учи *тезлик годографи* деб аталадиган эгри чизиқни чизади (8.17-расм). Тезлик годографини чизувчи A нуқтанинг тезлиги.

$$\vec{v}^* = \vec{\omega} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

яъни траектория бўйлаб ҳаракатланувчи нуқтанинг тезланишига тенг бўлади.

(8.33.а) га асосан тезланишнинг ўлчам бирлигини аниқлаймиз:

$$[\omega] = \frac{[\text{узунлик}]}{[\text{вақт}]^2} = \frac{L}{T^2}.$$

СИ бирликлар системасида тезланиш м/с^2 да ўлчанади.

2. Ҳаракати координаталар усулида берилган нуқтанинг тезланиши. Нуқтанинг ҳаракати (8.6) тенгламалар билан берилган бўлсин. Тезланиш векторини $Oxyz$ Декарт координата ўқларининг бирлик векторлари орқали ифодаланган ташкил этувчиларга қуйидагича ажратиш мумкин:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, \quad (8.34)$$

бунда $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ билан тезланишнинг координата ўқларидаги проекциялари белгиланган. Нуқтанинг тезлигини (8.18) кўринишда ёзиш мумкин бўлгани учун (8.33) га асосан

$$\vec{\omega} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

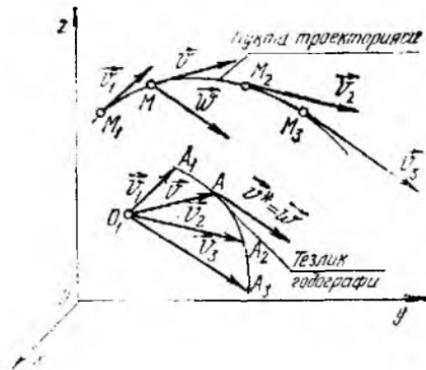
келиб чиқади. Бу тенгликни (8.34) билан солиштириб, тезланишнинг координата ўқларидаги проекцияларини ифодаловчи формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\omega_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad \omega_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \omega_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (8.35)$$

(8.19) га асосан (8.35) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\omega_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad \omega_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad \omega_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (8.36)$$

Демак, нуқта тезланишининг бирор ўқдаги проекцияси нуқта тезлигининг мазкур ўқдаги проекциясидан вақт бўйича олинган биринчи ҳосиллага ёки шу ўққа мос координатасидан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосиллага тенг.



8.17- расм.

Тезланиш модули

$$\omega = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (8.37)$$

йўналиши

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{x}) = \frac{v_x}{\omega}, \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{y}) = \frac{v_y}{\omega}, \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{z}) = \frac{v_z}{\omega} \quad (8.38)$$

формулалардан аниқланади.

Агар нуқта Oxy текислигида ҳаракатланса, $v_z = \dot{z} = 0$ бўлиб, (8.37) ва (8.38) формулалар

$$\omega = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{x}) = \frac{v_x}{\omega}, \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{y}) = \frac{v_y}{\omega}$$

кўринишда ёзилади.

Нуқта Ox ўқ бўйича тўғри чизиqli ҳаракат қилганда $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$ бўлиб, тезланиш вектори Ox ўқ бўйича йўналади, (8.36), (8.37) формулаларга кўра унинг бу ўқдаги проекцияси ва модули $v_x = \dot{x}$, $\omega = |\dot{x}|$ тенгликлардан аниқланади. Агар $\dot{x} > 0$ бўлса, нуқтанинг $\vec{\omega}$ тезланиш вектори Ox ўқининг мусбат йўналиши бўйича, $\dot{x} < 0$ да эса манфий йўналиши бўйича йўналади.

Агар \vec{v} тезлик вектори билан $\vec{\omega}$ тезланиш векторининг йўналиши ҳар доим устма-уст тушса, нуқтанинг бундай ҳаракати *тўғри чизиqli тезланувчан ҳаракат*, қарама-қарши йўналса, *тўғри чизиqli секинланувчан ҳаракат* дейилади.

Нуқтанинг ҳаракати қутб координаталарида $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ тенгламалар билан ифодаланган бўлса, унинг тезлиги (8.24) муносабат билан аниқланиши маълум. Шунинг учун (8.33) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{\omega} = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{r}^0 + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{r}^0}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{p}^0 + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{p}^0 + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{p}^0}{dt}$$

Агар (8.23) ни ҳисобга олсак,

$$\vec{\omega} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{r}^0 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{p}^0$$

муносабат ўринли бўлади. Бу тенгликни ўзаро перпендикуляр \vec{r}^0 ва \vec{p}^0 йўналишларга проекциялаб, *радиал* ва *кўндаланг тезланишларни* ифодаловчи ушбу муносабатларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} \omega_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \\ \omega_p &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

Бу ҳолда нуқта тезланишининг модули

$$\omega = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_p^2}, \quad (8.40)$$

йўналиши

$$\cos(\vec{r}^0, \vec{\omega}) = \frac{\omega_r}{\omega}, \quad \cos(\vec{p}^0, \vec{\omega}) = \frac{\omega_p}{\omega} \quad (8.41)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

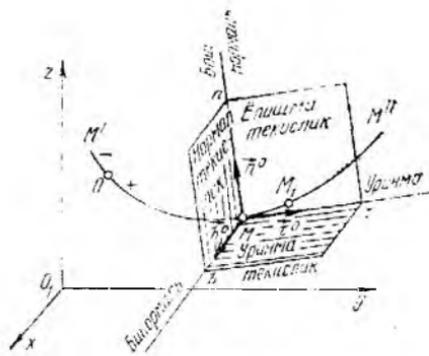
3. Ҳаракати табиий усулда берилган нуқтанинг тезланиши: а) *Табиий координата ўқлари. Эгрилик вектори.* Аввал нуқта тезланишини аниқлаш учун зарур бўлган дифференциал геометриянинг айрим тушунчалари билан танишиб чиқамиз.

Оқмуз координаталар системасида берилган $M'M''$ эгри чизиқда M нуқта олиб, шу нуқтада мазкур чизиққа ўтказилган M_1 уринманинг бирлик векторини $\vec{\tau}^0$ билан белгилайлик (8.18-расм). $\vec{\tau}^0$ векторини s ёй координатасининг ўсиши томон йўналтирамиз. $M'M''$ эгри чизиқда M нуқтага яқин бўлган M_1 нуқта олиб, $\vec{\tau}^0$ вектори ва M_1 нуқта орқали текислик ўтказайлик; M_2 нуқта берилган чизиқ бўйлаб M нуқтага интилганда мазкур текислиكنинг эгаллаган лимий ҳолати M нуқтадаги *ёпишма текислик* (ёки *эгрилик текислиги*) дейилади. Агар $M'M''$ текисликда ётувчи эгри чизиқдан иборат бўлса, ёпишма текислик мазкур чизиқ ётган текислик билан устма-уст тушади ва эгри чизиқнинг ҳамма нуқталари учун умумий бўлади. $M'M''$ эгри чизиқ бир текисликда ётмаса, M нуқта чизиқ бўйлаб силжиганда, ёпишма текислик ўз ҳолатини ўзгартириб боради.

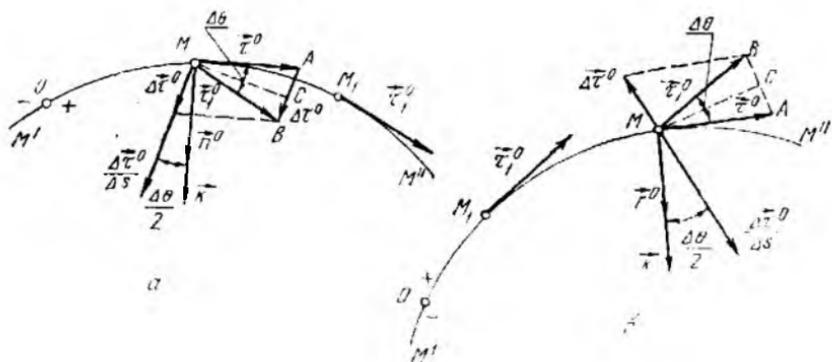
M нуқтада $\vec{\tau}^0$ уринмага перпендикуляр равишда ўтказилган текислик *нормал текислик* дейилади. Ёпишма ва нормал текисликларнинг Mn кесилиш чизиги M нуқтадаги *бош нормални* ифодалайди. Бош нормалнинг йўналиши M нуқтадан эгри чизиқнинг ботиқ томонига йўналган \vec{n}^0 бирлик вектор билан аниқланади.

Ёпишма ва нормал текисликлар ўзаро перпендикуляр жойлашади. Бу иккала текислиكنинг ҳар бирига перпендикуляр қилиб M нуқтада ўтказилган (яъни Mn бош нормалга перпендикуляр бўлган) текислик *уринма текислик* дейилади. Нормал ва уринма текисликларнинг Mb кесилиш чизиги M нуқтадаги *бинормални* ифодалайди. Бинормал йўналиши \vec{b}^0 бирлик вектор билан аниқланиб, \vec{b}^0 вектор $\vec{\tau}^0$, \vec{n}^0 билан ўнг системани ташкил этадиган қилиб олинади.

Нормал, ёпишма ва уринма текисликлардан ташкил топган учёқлик *табиий учёқлик* дейилади.



8.18- расм.



8.19-расм.

$\vec{\tau}^0$, \vec{n}^0 ва b^0 орқали ўтказилган ўқлар M нуқтадаги *табиий координата ўқлари* дейилади.

$M'M''$ эгри чизиқда бир-бирига яқин M ва M_1 нуқталарда ёй координатасининг ўсиши томон йўналган $\vec{\tau}^0$ ва $\vec{\tau}_1^0$ бирлик уринма векторларини ўтказайлик (8.19-расм, а).

$\Delta s = MM_1$ оралиқдаги $\vec{\tau}^0$ векторнинг орттирмаси $\Delta \vec{\tau}^0$ учун $\Delta \vec{\tau}^0 = \vec{\tau}_1^0 - \vec{\tau}^0$ тенглик ўринали бўлади.

Ёй координатаси $M'M''$ мусбат бўлганда, яъни $\Delta s > 0$ да $\Delta \vec{\tau}^0$ вектори эгри чизиқнинг ботиқлик томонига, $\Delta s < 0$ ҳолида $\Delta \vec{\tau}^0$ вектори $M'M''$ эгри чизиқнинг қавариқ томонига (8.19-расм, б) йўналади.

○ MM_1 оралиқда $\vec{\tau}^0$ бирлик векторининг M атрофида бурилишини ифodalovchi $\frac{\Delta \vec{\tau}^0}{\Delta s}$ вектор эгри чизиқнинг мазкур оралиқдаги ўртача эгрилик вектори дейилади ва $\vec{k}_{\text{эгр}}$ билан белгиланади. Ўртача эгрилик вектори $\Delta \vec{\tau}^0$ билан бир чизиқда ётади. Агар $\Delta s > 0$ бўлса, $\vec{k}_{\text{эгр}}$ вектори $\Delta \vec{\tau}^0$ билан бир хил, $\Delta s < 0$ да $\Delta \vec{\tau}^0$ йўналишига қарама-қарши йўналишда бўлади. Ёнисбарин, $\frac{\Delta \vec{\tau}^0}{\Delta s}$ вектори донмо эгри чизиқнинг ботиқлик томонига йўналади.

Ўртача эгрилик векторининг Δs нолга интилгандаги limiti эгри чизиқнинг M нуқтадаги эгрилик вектори дейилади ва \vec{k} билан белгиланади:

$$\vec{k} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}^0}{\Delta s} \quad (8.42)$$

$\vec{\tau}^0$ бирлик уринма вектори йўналиши нуқтанинг эгри чизиқдаги ҳо-

латига боғлиқ бўлганидан, у s ёй координатасининг функциясидан иборат: $\vec{\tau}^0 = \vec{\tau}^0(s)$.

Бишобарини, (8.42) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{k} = \frac{d\vec{\tau}^0}{ds} \quad (8.43)$$

Демак, эгри чизиқнинг бирор нуқтадаги эгрилик вектори шу нуқтадаги уринманинг бирлик векторидан ёй координатаси бўйича олинган биринчи ҳосиллага тенг.

Δs ораликда $\vec{\tau}^0$ вектори йўналишининг ўзгариш бурчагини, яъни тенг ёнли ВМА учбурчакда ВМА бурчакни $\Delta\theta$ билан белгилайлик. У ҳолда Δs нинг шорасига қараб

$$\left(\frac{\Delta \vec{\tau}^0}{\Delta s}, \vec{\tau}^0 \right) = 90^\circ \pm \frac{\Delta\theta}{2}$$

бўлади (8.19-рasm, а, б). Δs полга интилганда $\Delta\theta$ ҳам нолга интилиб, \vec{k}_{yp} ва $\vec{\tau}^0$ орасидаги бурчак 90° га интилади. Шунинг учун \vec{k} вектор йўналиши бош нормаль бирлик вектори \vec{n}^0 билан бир хил бўлади ва ёнишма текисликда ётади. Эгрилик векторининг модулини k билан белгиласак, (8.43) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{k} = \frac{d\vec{\tau}^0}{ds} = k \cdot \vec{n}^0, \quad \text{бунда } k = \left| \frac{d\vec{\tau}^0}{ds} \right|. \quad (8.44)$$

Эгрилик векторининг модулини ҳисоблаймиз: $AB = |\Delta \vec{\tau}^0| = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}$ эканлигини эътиборга олсак,

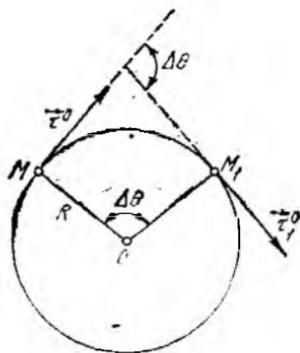
$$k = \left| \frac{d\vec{\tau}^0}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{\tau}^0}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} =$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

Бунда $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 1$

бўлгани учун

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$



8.20- расм.

Масалан, радиуси R га тенг айлананинг эгрилигини аниқлайлик (8.20-расм). Бир-бирига яқин M ва M_1 нуқталарда айланага ўтказилган уринманинг бирлик векторлари орасидаги бурчакни $\Delta\theta$ билан белгиласак, $\Delta s = \overset{\frown}{MM_1} = R \cdot \Delta\theta$. Бинобарин, айлана эгрилиги учун ушбу нфода келиб чиқади:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

яъни айлананинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилиги ўзгармас бўлиб, айлананинг радиусига тескари пропорционал бўлади.

Эгри чизик эгрилигининг тескари қиймати $\frac{1}{k}$ га *чизикнинг эгрилик радиуси* дейилади ва ρ билан белгиланади:

$$\rho = \frac{1}{k}. \quad (8.45)$$

Айлана учун $k = \frac{1}{R}$ бўлганидан унинг эгрилик радиуси $\rho_{\text{айл}} = R$ га тенг бўлади. (8.45) га кўра (8.44) қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d\vec{\tau}^0}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n}^0, \quad (8.46)$$

яъни эгри чизикнинг бирор нуқтадаги эгрилик вектори миқдор жиҳатдан унинг мазкур нуқтадаги эгрилик радиусининг тескари қиймати $\frac{1}{\rho}$ га тенг бўлиб, бош нормаль бўйича йўналади.

б) *Тезланишнинг табиий координата ўқларидаги проекциялари.* Ҳаракати табиий усулда берилган нуқтанинг тезлиги (8.27а) нфодасини (8.33) га қўйиб, нуқтанинг тезланиши формуласини оламиз:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau}^0 + v_{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau}^0 + v_{\tau} \frac{d\vec{\tau}^0}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

бунда $\frac{ds}{dt} = v_{\tau}$ ва $v_{\tau}^2 = v^2$ бўлгани учун

$$\vec{\omega} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau}^0 + v^2 \frac{d\vec{\tau}^0}{ds}.$$

(8.46) га кўра охириги нфода қуйидагича ёзилади:

$$\vec{\omega} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0. \quad (8.47)$$

(8.47) нфодада нуқта тезланиши табиий координата ўқларидаги ташкил этувчилари орқали берилган. Тезланишнинг уришма бўйлаб йўналган ташкил этувчиси

$$\vec{\omega}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau}^0 \quad (8.48)$$

нуқтанинг уринма (тангенциал) тезланиши, бош нормаль бўйича йўналган ташкил этувчиси

$$\vec{\omega}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0 \quad (8.49)$$

эса нуқтанинг нормал тезланиши дейилади.

Биномбарин, М нуқтанинг тезланиш вектори шу нуқта траекториясига ўтказилган ёпишма текисликда ётади ва биномбарин бўйича ташкил этувчиси нолга тенг: $\vec{\omega}_b = 0$.

(8.48) ва (8.49) га кўра (8.47) ифода қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\tau + \vec{\omega}_n, \quad (8.50)$$

яъни, эгри чизиqli ҳаракатдаги нуқтанинг тезланиши уринма ва нормал тезланишларнинг геометрик йириндисига тенг; шу сабабли тезланиш вектори $\vec{\omega}_\tau$ ва $\vec{\omega}_n$ ларга қурилган тўғри тўртбурчакнинг берилган нуқтадан ўтувчи диагонали билан ифодаланади (8.21-расм).

Тезланишнинг табиий координата ўқларидаги проекциялари

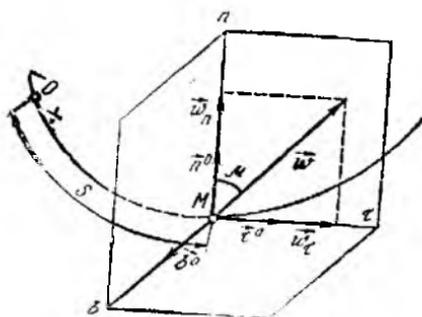
$$\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \omega_b = 0 \quad (8.51)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

(8.51) да $v_\tau = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$, $v^2 = v_\tau^2 = \dot{s}^2$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\omega_\tau = \ddot{s}, \quad \omega_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad \omega_b = 0. \quad (8.51, a)$$

Нуқта ҳаракатланганда $\frac{v^2}{\rho} \gg 0$ бўлгани учун нормал тезланиш доимо берилган нуқтада траекторияга ўтказилган бош нормаль бўйича траекториянинг ботиқ томонига йўналади, уринма тезланиш $\frac{dv_\tau}{dt}$ мусбат ёки манфий қийматга эга бўлиши мумкин. Агар $\omega_\tau > 0$ бўлса, уринма тезланишнинг йўналиши $\vec{\tau}^0$ билан бир хил бўлади; $\omega_\tau < 0$ да уринма тезланиш $\vec{\tau}^0$ га қарама-қарши йўналади. 8.21-расм $\omega_\tau > 0$ ҳоли учун чизилган.



8.21- расм.

Умумий ҳолда $\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| \neq \left| \frac{dv}{dt} \right|$, чунки $\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|$ тезланишнинг модулини, $\left| \frac{dv}{dt} \right|$ эса уринма ташкил этувчисининг модулини ифодалайди.

Шундай қилиб, тезланиш модули

$$\omega = \sqrt{\omega_{\tau}^2 + \omega_n^2} \quad (8.52)$$

ёки

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{dv_{\tau}}{dt} \right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}$$

формула ёрдамида аниқланади.

Тезланиш векторининг йўналишини унинг бош нормал билан ташкил қилган μ бурчак воситасида топиш мумкин:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\omega_{\tau}|}{\omega_n} = \frac{\rho}{v^2} \left| \frac{dv_{\tau}}{dt} \right|. \quad (8.53)$$

8.6-§. Нуқта ҳаракатининг хусусий ҳоллари

Нуқтанинг тезланишига қараб ҳаракат турларини аниқлаш (8.47) формулага асосланади.

1. **Тўғри чизиқли текис ҳаракат.** Нуқтанинг ҳаракати давомида ҳаминша $\vec{\omega}_{\tau} = 0$, $\vec{\omega}_n = 0$, яъни $\vec{\omega} = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (8.51) га асосан $\frac{dv_{\tau}}{dt} = 0$, $\frac{v^2}{\rho} = 0$ бўлиб, улардан $v = |v_{\tau}| = \text{const}$ ва $\rho = \infty$ эканлиги келиб чиқади. Демак, кўрилатган ҳолда нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракатда бўлади.

2. **Тўғри чизиқли ўзгарувчан ҳаракат.** Нуқта ҳаракати давомида $\vec{\omega}_{\tau} \neq 0$, $\vec{\omega}_n = 0$ бўлсин. Бунда $\omega_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = \ddot{s} \neq 0$ ва $\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ бўлиб, улардан $v = |v_{\tau}| = \left| \frac{ds}{dt} \right| \neq \text{const}$ ва $\rho = \infty$ эканлиги келиб чиқади. Демак, нуқтанинг тезлиги йўналиш жиҳатдан ўзгармай, фақат миқдор жиҳатдан ўзгаради ва нуқта тўғри чизиқли ўзгарувчан ҳаракатда бўлиб, тезланишининг модули

$$\omega = |\omega_{\tau}| = \left| \frac{dv_{\tau}}{dt} \right| = |\ddot{s}|$$

формуладан аниқланади. Бинобарин, *уринма тезланиш тезликнинг миқдор жиҳатдан ўзгаришини ифодалайди.*

Агар фақат бир онда $\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ бўлса, нуқта тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланмай, балки ўша онда нуқта эгри чизиқли траекто-

риянинг букилиш нуқтасидан ўтади (8.22-расм).

3. Эгри чизиқли текис ҳаракат. Бирор вақт оралиғи учун $\omega_x = 0$, $\vec{\omega}_n \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\omega_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{s} = 0, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0.$$

Бундан $v = |v_x| = |\dot{s}| = \text{const}$, $\rho \neq \infty$ келиб чиқади. $\rho \neq \infty$ шарт ҳаракат траекторияси эгри чизиқдан иборат бўлишини, $v = \text{const}$ шарт эса нуқта текис ҳаракат қилишини ифодалайди. Демак, бу ҳолда нуқта эгри чизиқли текис ҳаракат қилади. Агар тезликнинг уринидаги проекциясини v_0 билан белгиласак,

$v_x = v_0 = \frac{ds}{dt}$ ёки $ds = v_0 dt$ ҳосил бўлади. Бошланғич пайтда, яъни $t = 0$ да $s = s_0$ бўлсин. Шу шарт ҳамда $v_x = \text{const}$ эканлигини назарда тутиб, охириги тенгликни интегралласак,

$$s = s_0 + v_0 \cdot t \quad (8.54)$$

келиб чиқади. (8.54) тенглама нуқтанинг эгри чизиқли текис ҳаракат тенгламаси дейилади.

Кўрилатган ҳолда нуқтанинг тезланиш вектори $\vec{\omega}$ бош нормаль бўйлаб йўналади ва унинг модули

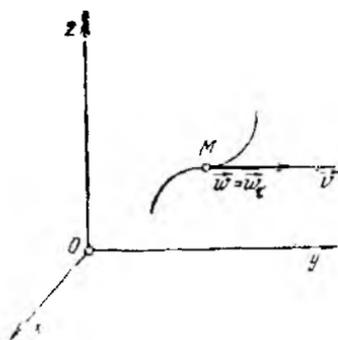
$$\omega = \omega_n = \frac{v^2}{\rho}$$

бўлади. Шундай қилиб, нормал тезланиш эгри чизиқли ҳаракатда вуқудда келади ва тезликнинг йўналиши ўзгаришини ифодалайди.

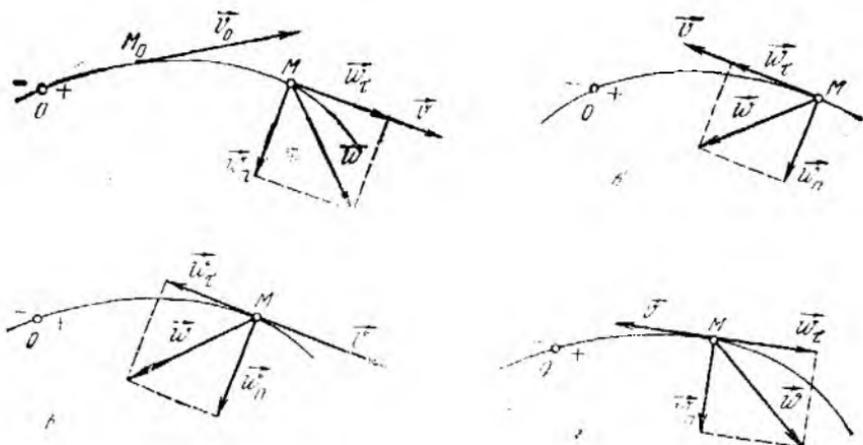
4. Эгри чизиқли ўзгарувчан ҳаракат. Бирор вақт оралиғи учун $\omega_x \neq 0$, $\omega_n \neq 0$ бўлсин. Бунда нуқтанинг тезлиги миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгаради, яъни нуқта эгри чизиқли ўзгарувчан ҳаракатда бўлади.

Агар $\omega_x = \text{const}$ бўлса, нуқта текис ўзгарувчан ҳаракатда дейилади. \vec{v} ва $\vec{\omega}_x$ векторларнинг йўналиши устма-уст тушса, нуқта эгри чизиқли тезланувчан ҳаракатда (8.23-расм, а, б), улар қарама-қарши йўналган бўлса, нуқта эгри чизиқли секинланувчан ҳаракатда (8.23-расм, в, г) бўлади.

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда ёй координатаси $\overline{OM}_0 = s_0$, тезлиги v_0 га тенг бўлган (8.23-расм, а) нуқтанинг текис ўзгарувчан ҳаракат тенгламасини чиқарамиз. (8.51) формулага кўра $\omega_x = \frac{dv_x}{dt} = \text{const}$ ёки $dv_x = \omega_x \cdot dt$ бўлади. Бу тенгламани M_0 ва M нуқталарга мос келувчи чегараларда интегралласак,



8.22-расм.



8.23- расм.

$$v_{\tau} = v_0 + \omega_{\tau} \cdot t \quad (8.55)$$

келиб чиқади.

$v_{\tau} = \frac{ds}{dt}$ эканлигини назарда тутиб, (8.55) ни M_0 ва M нуқталарга мос чегараларда интегралласак,

$$s = s_0 + v_0 t + \omega_{\tau} \frac{t^2}{2} \quad (8.56)$$

бўлади. (8.56) тенглама нуқта эгри чиқиқли текис ўзгарувчан ҳаракатининг тенгламасини ифодалайди.

Тўғри чиқиқли текис ўзгарувчан ҳаракат тезлиги ва ҳаракат тенгламаси учун ҳам (8.55) ва (8.56) формулалар ўриқли бўлади, фақат ёй координатаси s ўрнида нуқтанинڭ абсциссаси x қатнашади:

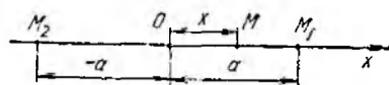
$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v_0 + \omega_x t, \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{\omega_x t^2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.57)$$

бунда $\omega_x = \text{const}$ бўлиб, нуқта тезлашишининг x ўқдаги проекциясини ифодалайди.

5. Гармоник тебранма ҳаракат. Координата боши O га нисбатан координатаси

$$x = a \sin \omega t \quad (8.58)$$

қонунга кўра (a ва ω — ўзгармас катталиқлар) ўзгарувчи M нуқтанинڭ тўғри чиқиқли ҳаракатини текшираёمиз (8.24- расм).



8.24- расм.

(8.58) ифодадаги $\sin \omega t$ $[-1, 1]$ ораллиқда ўзгаргани туфайли M нуқта $M_1(a)$ ва $M_2(-a)$ нуқталар ораллиғида тебранини маркази O нуқта атрофида тебранма ҳаракатда бўлади. Нуқтанинڭ тебранини

марказидан энг катта масофага четга чиқишини ифодаловчи катталик α тебраниш амплитудаси, ωt тебраниш фазаси, ω эса тебранишнинг доиравий частотаси дейилади.

(8.58) да бошлангич $t = 0$ пайтда $x = 0$ бўлгани учун нуқта тебраниш маркази O дан ўз ҳаракатини бошлайди. Синус функцияси даврий бўлганидан, бирор t вақтда нуқта эгаллаган M_1 вазиятига $t_1 = t + T$ вақт ўтгач яна қайтади. Нуқтанинг бир марта тўлиқ тебраниши учун кетган вақт оралиги T тебраниш даври дейилади. Тебраниш даврини

$$\sin \omega(t + T) = \sin \omega t \quad (8.59)$$

шартдан фойдаланиб аниқлаймиз. (8.59) тенглик

$$\omega \cdot T = 2\pi$$

бўлганда ўринли. Бинобарин,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8.60)$$

Тебраниш даврининг тескари қиймати

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (8.61)$$

тебраниш такрорини дейилади ва у 1 секунддаги тўла тебранишлар сонини ифодалайди.

Нуқтанинг тезлик ва тезланишини (8.58) дан мос равишда биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар олиб толамиз:

$$v = |v_x|, \quad \omega = |\omega_x|, \quad v_x = \dot{x} = a\omega \cos \omega t,$$

$$\omega_x = \ddot{x} = -a\omega^2 \sin \omega t.$$

Бу ифодалардан кўрамизки, тебраниш ҳаракатдаги нуқтанинг тезлиги ва тезланиши ҳам вақт ўтиши билан даврий равишда такрорланар экан. Нуқта тебраниш маркази O дан ўтаётганда $x = 0$, $\sin \omega t = 0$, $\cos \omega t = \pm 1$ бўлгани учун бу вақтда нуқта тезланиши нолага тенг бўлиб, тезлиги модуль бўйича энг катта қиймати $a\omega$ га эришади. Четки M_1 ва M_2 нуқталарда эса $x = \pm a$, $\sin \omega t = \pm 1$, $\cos \omega t = 0$ бўлиб, M нуқтанинг тезлиги нола, тезланишининг абсолют қиймати $a\omega^2$ га тенг бўлади.

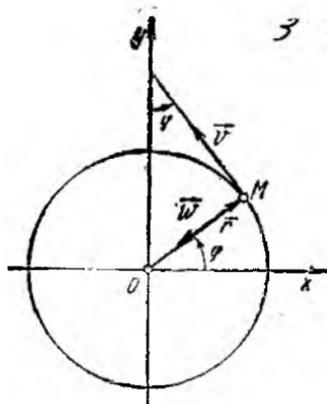
v_x ва ω_x ишораларига қараб, нуқта тебраниш маркази томон тезланувчан, тебраниш марказидан ташқарига секинланувчан ҳаракат қилишини кўриш мумкин.

Нуқта $x = a \cos \omega t$ қонун бўйича ҳаракатланганида ҳам гармоник тебранишлар содир бўлади, фақат бу ҳолда ҳаракат бошлангич $t = 0$ пайтда тебраниш марказидан эмас, балки $M_1(a)$ нуқтадан бошланади.

Нуқта $x = a \sin(\omega t + \alpha)$ ёки $x = a \cos(\omega t + \beta)$ қонунга кўра ҳаракатланганда ҳам юқорида кўрилган ҳоллардан гўбдан фарқ қилмайди, фақат $t = 0$ да нуқта тебраниш марказидан $x = a \sin \alpha$ ёки $x = a \cos \beta$ масофада бўлади. α ёки β тебранишининг бошлангич фазаси дейилади.

8.6-масала. Нуқтанинг ҳаракати қуйидаги тенгламалар билан берилган

$$\left. \begin{aligned} x &= 10 \cos 2\pi \frac{t}{5}, \\ y &= 10 \sin 2\pi \frac{t}{5}. \end{aligned} \right\} (1)$$



8.25- расм.

(x, y — сантиметрлар, t — секундлар ҳисобида). Нуқтанинг траекторияси, тезлиги ва тезланишининг миқдори ва йўналишлари аниқлансин.

Ечилиш. Нуқта траекториясининг тенгламасини аниқлаш учун (1) тенгламалардан вақт t ни йўқотамиз. Буниги учун (1) тенгламаларни иккала томонини квадратга ошириб, сўнгга қўшамиз:

$$x^2 + y^2 = 100.$$

Демак, нуқта траекториясининг тенгламаси радиуси $r = 10$ см = 0,1 м га тенг айланадан иборат (8.25- расм).

(8.19) га асосан нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= -4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5}, \\ v_y = \dot{y} &= 4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5}. \end{aligned}$$

(8.20) га қўра нуқта тезлигининг модули

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\left(-4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5}\right)^2 + \left(4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5}\right)^2} = 4\pi \text{ см/с} = 0,04\pi \text{ м/с га}$$

тенг бўлади.

M нуқта 1-чоракда бўлган ҳол учун (8.21) га асосан \vec{v} тезлик векторининг x ва y ўқлар билан ташкил қилган бурчак косинусларини толамиз:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{v}, \hat{x}) &= \frac{v_x}{v} = -\sin 2\pi \frac{t}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{t}{5}\right), \\ \cos(\vec{v}, \hat{y}) &= \frac{v_y}{v} = \cos 2\pi \frac{t}{5}. \end{aligned}$$

Бундан тезликнинг x ва y ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини аниқлаймиз:

$$\vec{v}, \hat{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \frac{t}{5} = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \vec{v}, \hat{y} = 2\pi \frac{t}{5} = \varphi.$$

M нуқтанинг радиуси x ўқ билан φ бурчак ташкил этгани туфайли \vec{v} тезлик вектори шу нуқтада айланага ўтказилган уринма бўйича Ox ўқдан Oy ўққа 90° га айланиб ўтиш томонига йўналган.

(8.36) ва (8.37) дан фойдаланиб, тезланишнинг координата ўқларидаги проекциялари ва модулини толамиз:

$$\omega_x = \ddot{x} = -\frac{8\pi^2}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5},$$

$$\omega_y = \ddot{y} = -\frac{8\pi^2}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5},$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{\left(-\frac{8\pi^2}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8\pi^2}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5}\right)^2} = \\ &= \frac{8\pi^2}{5} \text{ см/с}^2 = \frac{2\pi^2}{125} \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

(8.38) га кўра тезланишнинг йўналишувчи косинуслари

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{x}) = \frac{\omega_x}{\omega} = -\cos 2\pi \frac{t}{5} = -\cos \varphi = -\cos(\vec{r}, \hat{x}),$$

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{y}) = \frac{\omega_y}{\omega} = -\sin 2\pi \frac{t}{5} = -\sin \varphi = -\cos(\vec{r}, \hat{y})$$

бўлади.

Бу формулалардан тезланиш вектори айлананинг радиуси бўлаб унинг марказига йўналганлигини кўрамиз.

Бу масалада тезлик миқдор жиҳатдан ўзгармаса-да, унинг йўналиши ўзгаргани туфайли тезланиш мавжуддир.

8.7-масала. Поезд радиуси $R = 1$ км бўлган аylanма йўлда ҳаракат қилади. Унинг бошланғич тезлиги 54 км/соат бўлиб, биринчи 30 с да у 600 м йўл босди. Поезд ҳаракатини текис ўзгарувчан ҳаракат деб ҳисоблаб, унинг 30 секунд охиридаги тезлиги ва тезланиши аниқлансин.

Ечиш. Поезд радиуси $R = 1$ км = 1000 м айланма йўлда ҳаракатланаётгани учун унинг тезланишини (8.52) га асосан аниқлаш мумкин:

$$\omega = \sqrt{\omega_\tau^2 + \omega_n^2}. \quad (1)$$

Ҳаракат текис ўзгарувчан бўлгани учун поезднинг ҳаракати (8.56) формула

$$s = s_0 + v_0 t + \omega_\tau \frac{t^2}{2} \quad (2)$$

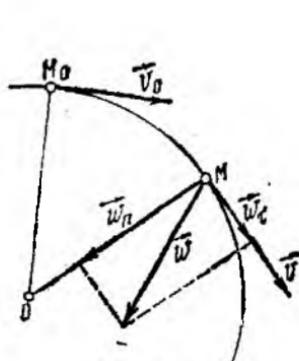
билан ифодаланади. Саноқ бошини шундай танлаймизки, бунда $s_0 = 0$ бўлсин.

(2) дан $\omega_\tau = 2 \frac{s - v_0 t}{t^2}$ ни оламиз. Бунда $s = 600$ м, $v_0 = 54$ км/соат = 15 м/с.

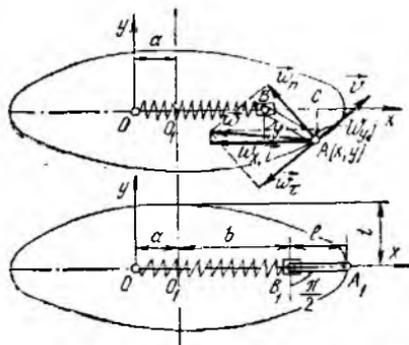
$t = 30$ с эканлигини эътиборга олсак,

$$\omega_\tau = \frac{1}{3} \text{ м/с}^2$$

бўлади.



8.26- расм.



8.27- расм.

(8.55) ва (8.51) дан фойдаланиб, поезднинг тезлиги ва нормал тезланишини аниқлаймиз:

$$v = v_0 + \omega_{\tau} t = 25 \text{ м/с,}$$

$$\omega_n = \frac{v^2}{R} = 0,625 \text{ м/с}^2.$$

ω_{τ} ва ω_n ларнинг қийматини (1) га қўйиб, поезднинг 30-секунд охиридаги тезланишини топамиз (8.26-расм):

$$\omega = \sqrt{\omega_{\tau}^2 + \omega_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (0,625)^2} = 0,708 \text{ м/с}^2.$$

8.6-масала. Узунлиги $AB = l$ бўлган стержень B нуқта атрофида $\varphi = \omega t$ қонунга кўра, B ползун эса $s = a + b \sin \omega t$ қонунга кўра ҳаракатланади (8.27-расм, а). A нуқтанинг траекторияси ва $t = 1$ с пайтдаги тезлиги, тезланиши ва траекториясининг эгрилик радиуси аниқлансин. $a = 0,2$ м, $b = 0,6$ м, $l = 0,3$ м, $\omega = \frac{\pi}{3} \text{ с}^{-1}$ деб олинсин.

Ечиш. Дастлаб A нуқтанинг Oxy координаталар системасига нисбатан ҳаракатини аниқлаймиз.

$$x_A = x = OB + BC = s + l \sin \varphi,$$

$$y_A = y = -AC = -l \cos \varphi.$$

Демак,

$$\left. \begin{aligned} x &= a + (b + l) \sin \omega t, \\ y &= -l \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Нуқта траекториясини аниқлаш учун (1) системадан t ни йўқотини керак. (1) ни қўйидагича ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-a}{b+l} &= \sin \omega t, \\ \frac{y}{l} &= -\cos \omega t. \end{aligned} \right\}$$

Бу ифодаларни квадратга ошириб қўшсак

$$\frac{(x-a)^2}{(b+l)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1.$$

Бу тенглама маркази координата бошидан Ox координата ўқи бўйича a масофага силжиган ҳамда ярим ўқлари $b+l$ ва l га тенг эллипсдан иборат. Хусусан $\varphi = \omega t = \frac{\pi}{2}$ га тенг бўлса, AB кесма A_1B_1 ҳолатни эгаллайди (8.27-расм, б).

(1) да $b+l = d$ белгилаш киритсак,

$$x = a + d \sin \omega t,$$

$$y = -l \cos \omega t$$

бўлади.

(8.19) формулага кўра тезликнинг x, y ўқлардаги проекцияларини топамиз:

$$\left. \begin{aligned} v_x = \dot{x} &= d \cdot \omega \cos \omega t, \\ v_y = \dot{y} &= l \omega \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(8.20) формуладан тезлик модулини аниқлаймиз:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega \sqrt{d^2 \cos^2 \omega t + l^2 \sin^2 \omega t}$$

$$v = \frac{\pi}{3} \sqrt{0,81 \cos^2 \frac{\pi}{3} t + 0,09 \sin^2 \frac{\pi}{3} t} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \sqrt{0,81 - 0,72 \sin^2 \frac{\pi}{3} t}$$

$t = 1$ с бўлганда (2) ва (3) дан

$$v_x = 0,15 \pi = 0,471 \text{ м/с,}$$

$$v_y = 0,087 \pi = 0,272 \text{ м/с,}$$

$$v = 0,173 \pi = 0,543 \text{ м/с}$$

Булишини аниқлаймиз. (8.21) га кўра

$$\cos(\vec{v}, \hat{x}) = \frac{v_x}{v} = \frac{0,471}{0,543} = 0,866,$$

$$\cos(\vec{v}, \hat{y}) = \frac{v_y}{v} = \frac{0,272}{0,543} = 0,5.$$

Шундай қилиб, $(\vec{v}, \hat{x}) = 30^\circ$; $(\vec{v}, \hat{y}) = 60^\circ$ (8.27-расм). Нуқта тезланишининг координата ўқларидаги проекциялари (8.36) дан топилади:

$$\omega_x = \ddot{x} = -d \omega^2 \sin \omega t,$$

$$\omega_y = \ddot{y} = l \omega^2 \cos \omega t.$$

(8.37) дан фойдаланиб, тезланиш модули учун

$$\omega = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2 \sqrt{d^2 \sin^2 \omega t + l^2 \cos^2 \omega t}$$

ифодани оламиз.

$t = 1$ с да берилганларни қўйсак, $\omega_x = -0,854 \text{ м/с}^2$; $\omega_y = 0,164 \text{ м/с}^2$, $\omega = 0,87 \text{ м/с}^2$ қийматларни оламиз.

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{x}) = \frac{\omega_x}{\omega} = -0,9816, \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{y}) = \frac{\omega_y}{\omega} = 0,1885.$$

Демак, $(\vec{\omega}, \hat{x}) = 169^\circ$, $(\vec{\omega}, \hat{y}) = 79^\circ$, яъни кўриляётган вақтда тезланиш вектори Ox ўқининг мусбат йўналиши билан 169° , Oy билан 79° бурчак ҳосил қилади (8.27-расм, а).

Энди $t = 1$ с бўлганда нуқта траекториясининг эгрилик радиусини аниқлаймиз. (8.51) нинг биринчисига кўра:

$$\omega_r = \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{3} \frac{d}{dt} \sqrt{0,81 - 0,72 \sin^2 \frac{\pi}{3} t} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \frac{0,36 \sin \frac{2\pi}{3} t}{\sqrt{0,81 - 0,72 \sin^2 \frac{\pi}{3} t}}$$

$t = 1$ с да $\omega_r = -0,628 \text{ м/с}^2$ бўлади.

А нуқтанинг уринма тезланиши 8.27-расмда кўрсатилганидек, эллипсга ўтказилган уринма бўйича йумалади.

(8.52) формуладан нормал тезланишни аниқлаймиз:

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 - \omega_\tau^2} = \sqrt{0,7569 - 0,3944} \approx 0,61 \text{ м/с}^2.$$

(8.51) нинг иккинчисига асосан $t = 1$ с бўлганда А нукта траекториясининг эгрилик радиуси

$$\rho = \frac{v^2}{\omega_n} = 0,485 \text{ м}$$

бўлади.

8.9- масала. $H = 500$ км баландликда суъый йўлдош Ер атрофида доиравий орбита бўйлаб текис ҳаракатланади. Унинг марказга интилма тезланиши эркин тушувчи jismining тезланишига тенг. Йўлдошнинг тезлиги за бир марта айланиш вақти аниқлашсин. Берилган баландликда $g = 8,5 \text{ м/с}^2$; Ернинг радиуси $R = 6370 \text{ км}$ (8.28- расм).

Ечиш. Суъый йўлдош орбитасининг радиусини r билан белгиласак, у $r = R + H = 6870 \text{ км}$ га тенг бўлади. (8.51) формуланинг иккинчисидан фойдаланиб, суъый йўлдош тезлигини аниқлаймиз:

$$v = \sqrt{\omega_n \cdot \rho}$$

Бунда $\rho = r = 6870 \text{ км}$, $\omega_n = \omega = g = 8,5 \text{ м/с}^2 = 0,0085 \text{ км/с}^2$ экалигини эътиборга олесак,

$$v = \sqrt{0,0085 \cdot 6870} = 7,64 \text{ км/с}.$$

Суъый йўлдош орбитада бир марта айланиши учун кетган вақтни T билан белгиласак, мазкур вақт ичида унинг ўтган йўли $v \cdot T$ га тенг. Худди шу йўл радиуси r га тенг айлана узунлигига тенг, яъни $v \cdot T = 2\pi r$, бундан

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6870}{7,64 \cdot 3600} = 1,568 \text{ соат}.$$

Жавоб: $v = 7,64 \text{ км/с}$, $T = 1,568 \text{ соат}$.

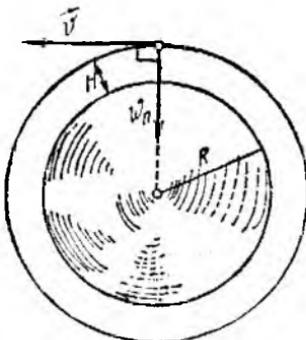
8.10- масала. Нукта текисликда логарифмик спираль бўйича $r = a e^{k\varphi}$ қопун асосида ҳаракатланади, бунда

$$\varphi = \omega t, \quad (\omega = \text{const}, \quad 1 > k = \text{const}).$$

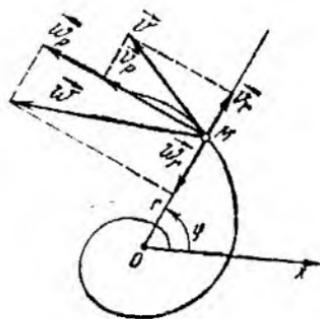
Нуктанинг тезлик ва тезланиши r нинг функцияси сифатида аниқлансин (8.29- расм).

Ечиш. Нуктанинг ҳаракати қутб координаталарида берилган:

$$\left. \begin{aligned} r &= a e^{k\omega t}, \\ \varphi &= \omega t. \end{aligned} \right\}$$



8.28- расм.



8.29- расм.

Нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун (8.25) формулага кўра унинг радиал ва кўндаланг тақкил аъувчиларини аниқлаймиз:

$$v_r = \dot{r} = a k \omega e^{k\omega t},$$

$$v_p = \dot{\varphi} r = \omega \cdot r.$$

Нуқта тезлигининг модулини (8.26) воситасида аниқлаймиз:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \omega \cdot r \sqrt{k^2 + 1}.$$

(8.39) формуладан фойдаланиб, нуқтанинг радиал ва кўндаланг тезланишларини аниқлаймиз:

$$\omega_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = a k^2 \omega^2 e^{k\omega t} - r \omega^2 = k^2 \omega^2 r - r \omega^2 = r \omega^2 (k^2 - 1),$$

$k^2 - 1 < 0$ бўлгани учун ω_r йўналиши r координата ўсишига тескари бўлади.

$$\omega_p = r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} = 2 k \omega r \cdot \omega = 2 k \omega^2 r.$$

(8.40) дан нуқтанинг тезланиш модулини аниқлаймиз:

$$\omega = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_p^2} = r \omega^2 \sqrt{(k^2 - 1)^2 + 4k^2} = \omega^2 (k^2 + 1) r. \quad \checkmark$$

9-БОБ. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ИЛГАРИЛАМА ВА ҚЎЗГАЛМАС ЎҚ АТРОФИДАГИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТЛАРИ

Қаттиқ жисм кинематикасида асосан қуйидаги икки масала кўрилади:

1. Жисмнинг танланган координаталар системасига нисбатан ҳар ондаги ҳолатини аниқлаш.

2. Ҳаракат тенгламалари маълум бўлган жисмнинг ёки жисм ҳар бир нуқтасининг кинематик характеристикаларини топиш.

Дастлаб жисмнинг энг содда, хусусий ҳолдаги ҳаракатларини кўриб чиқамиз.

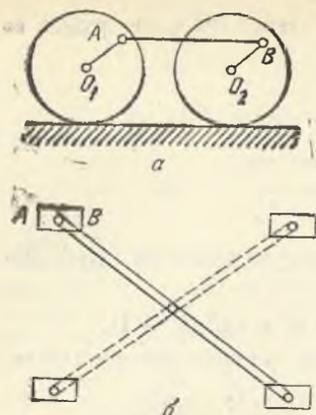
9.1-§. Жисмнинг илгариллама ҳаракати

Жисмда олинган ҳар қандай кесма ҳаракат давомида доимо ўзининг бошланғич ҳолатига параллел равишда ҳаракатланса, жисмнинг бундай ҳаракати *илгариллама ҳаракат* дейилади. Масалан, паровоз филдиракларини туташтирувчи AB спарник ёки велосипеднинг AB педаля (9.1-расм, a , b) илгариллама ҳаракатда бўлади. Бу мисоллардан кўрамизки, илгариллама ҳаракатдаги жисм нуқтасининг траекторияси умуман эгри чизикдан иборат бўлади.

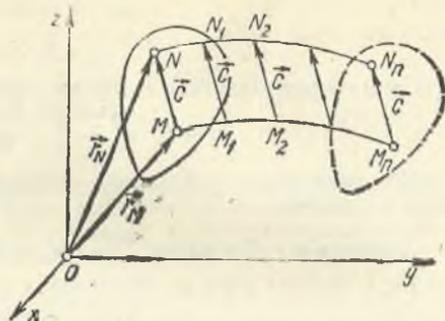
Жисм *Охуз* қўзғалмас координаталар системасига нисбатан илгариллама ҳаракатда бўлсин (9.2-расм). Бу ҳолда жисмнинг иккита

нуқтасини туташтирувчи \vec{MN} вектор миқдор ва йўналиши жиҳатдан ўзгармасдан қолади, чунки абсолют қаттиқ жисм таърифига кўра \vec{MN} кесма узунлиги ўзгармайди, илгариллама ҳаракат таърифига кўра

\vec{MN} вектор ўзига параллел равишда ҳаракатланади. Шу тўғрисида илгариллама ҳаракатдаги жисм учун бу вектор ўзгармас $\vec{MN} = \text{const} = \vec{c}$ векторини ифодалайди.



9.1- расм.



9.2- расм.

Жисмнинг илгарилама ҳаракатини ўрганиш қуйидаги теоремага асосланади:

Теорема. *Илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг ҳамма нуқталари бир хил траектория чизади ва ҳар онда бир хил тезлик ҳамда бир хил тезланишга эга бўлади.*

Исбот. Жисмда ихтиёрӣй M ва N нуқталарни олиб, уларнинг радиус-векторларини \vec{r}_M ва \vec{r}_N билан белгиласак,

$$\vec{r}_N = \vec{r}_M + \vec{MN} \quad (9.1)$$

ўринли бўлади.

Жисм илгарилама ҳаракатда бўлганда \vec{r}_M ва \vec{r}_N ўзгаради, лекин $\vec{MN} = \vec{c}$ вектор ўзгармайди. Агар \vec{MN} векторнинг t_1, t_2, \dots, t_n пайтдаги кетма-кет ҳолатларини мос равишда $\vec{M}_1N_1, \vec{M}_2N_2, \dots, \vec{M}_nN_n$ билан белгилаб, (9.1) га ассан, M нуқтанинг траекторияси $\cup MM_1M_2 \dots M_n$ ни $\vec{MN} = \vec{c}$ векторга силжитсак, у N нуқта-нинг траекторияси $\cup NN_1N_2 \dots N_n$ билан устма-уст тушади, яъни M ва N нуқталар бир хил траекториялар бўйлаб ҳаракатланади.

(9.1) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}_N}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} + \frac{d(\vec{MN})}{dt}$$

Бунда $\vec{MN} = \vec{c} = \text{const}$ бўлгани учун $\frac{d(\vec{MN})}{dt} = 0$.

Бинобарин, $\frac{d\vec{r}_N}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt}$ ёки (8.17) га асосан $\vec{v}_N = \vec{v}_M$ бўлади.

Бу тенглик илгарилама ҳаракатдаги жисм барча нуқталарининг ҳар ондаги тезликлари бир хил бўлишини ифодалайди.

Охириги тенгликдан вақт бўйича ҳосила олсак,

$$\frac{d\vec{v}_N}{dt} = \frac{d\vec{v}_M}{dt}$$

ёки (8.33) га асосан

$$\vec{\omega}_N = \vec{\omega}_M$$

бўлади. Бинобарин, илгарилама ҳаракатдаги жисм барча нуқталарининг ҳар ондаги тезланишлари бир хил бўлади. ■

Шундай қилиб, жисмнинг илгарилама ҳаракати унинг ихтиёрий нуқтаси ҳаракати билан аниқланади. Илгарилама ҳаракатдаги жисм нуқталарининг ҳар ондаги тезлиги ҳам, тезланиши ҳам бир хил бўлганидан, уларни мос равишда жисмнинг тезлиги ва тезланиши деб аташ мумкин.

Охуз координаталар системасига нисбатан илгарилама ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳаракат тенгламасини чиқариш учун жисмнинг ихтиёрий M нуқтасини олиб, унинг координаталарини x_M , y_M , z_M билан белгилаймиз. Жисм ҳаракатланганда бу координаталар вақтнинг функцияси сифатида ўзгаради:

$$x_M = f_1(t), \quad y_M = f_2(t), \quad z_M = f_3(t). \quad (9.2)$$

(9.2) тенглама M нуқтанинг ҳаракат тенгламаси бўлиб, жисмнинг илгарилама ҳаракат тенгламасини ҳам ифодалайди.

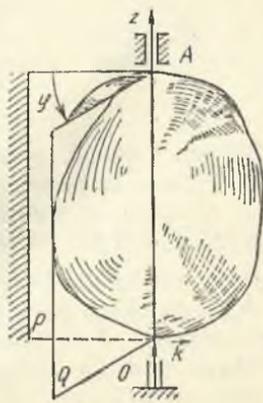
9.2- §. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат тенгламаси

Иккита нуқтаси доимо қўзғалмасдан қоладиган жисмнинг ҳаракати қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат дейилади. Қўзғалмас нуқталардан ўтувчи ўқ айланиш ўқи дейилади.

Турбиналар диски, генераторларнинг ротори, станокларнинг маховиги каби машина ва механизмларнинг ҳаракати қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмга мисол бўла олади.

Жисмнинг айланиш ўқида ўтувчи барча нуқталари қўзғалмас бўлади. Айланиш ўқида ётмайдиган нуқталарининг траекториялари айланиш ўқига перпендикуляр текисликларда ўтувчи айланалардан иборат бўлади.

Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатининг кинематик тенгламасини аниқлаш учун айланиш ўқига бириктирилган қўзғалмас P текислигини ҳамда жисмга бириктирилган ва u билан бирга айланувчи Q текислигини ўтказамиз (9.3-расм). Бу текисликлар орасидаги φ бурчак жисмнинг айланиш бурчаги дейилади. Оз айланиш



9.3- расм.

Ўқи бирлик теги k нинг учидан қараганда φ бурчакнинг ўзгариши соат стрелкаси ҳаракати йўналишига тескари бўлса, айланиш бурчагини мусбат, акс ҳолда манфий олинади. Айланиш бурчаги радианда ўлчанади. Агар жисмнинг айланиш сони N маълум бўлса, айланиш бурчаги $\varphi = 2\pi N$ формула ёрдамида аниқланади.

Айланиш бурчаги φ нинг миқдор ва йўналиши маълум бўлса, Q текисликнинг P текисликка нисбатан ҳолатини аниқлаш мумкин. Q текислик жисмга маҳкам бириктирилгани ва у билан биргаликда ҳаракатлангани учун қўзғалмас ўқ атрофидаги жисмнинг ҳолатини ҳам φ бурчак орқали аниқлаш мумкин.

Жисм Oz ўқ атрофида айланганда унинг айланиш бурчаги φ вақтнинг функцияси сифатида ўзгаради:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (9.3)$$

Бу тенглама жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатининг кинематик тенгламаси дейилади.

9.3-§. Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати бурчак тезлиги. Текис айланма ҳаракат

Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатининг t вақтдаги айланиш бурчагини φ , $t_1 = t + \Delta t$ вақтдаги айланиш бурчагини $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$ билан белгилайлик. $\Delta t = t_1 - t$ вақт ораллиғида жисм $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$ бурчакка бурилади.

$\Delta\varphi$ нинг Δt га нисбати жисмнинг Δt вақтдаги ўртача бурчак тезлиги дейилади:

$$(\omega_z)_{\text{ўр}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатининг берилган ондаги бурчак тезлигини топиш учун ўртача бурчак тезлигининг Δt нолга интилгандаги лимитини олаемиз:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

ёки

$$\omega_z = \dot{\varphi}. \quad (9.4)$$

Шундай қилиб, жисмнинг бурчак тезлиги айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг.

φ бурчакнинг ўзгариш қонунига мос равишда ω_z бурчак тезлиги мусбат ёки манфий қийматга эга бўлиши мумкин. Бурчак тезлигининг модулини ω билан белгилаймиз: $\omega = |\dot{\varphi}|$.

Қаттиқ жисм кинематикасида жисмнинг бурчак тезлигини вектор сифатида ифодалаш кўпгина қулайликлар яратади.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг бурчак тезлик векторини мазкур ўқ бўйлаб йўналган ва унинг мусбат йўналишидан қаралганда айланиш соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишида

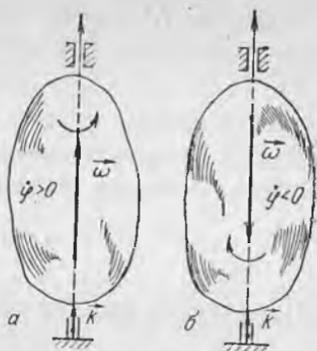
кўринадиган, айланиш ўқишнинг ихтиёр-ий нуқтасига қўйилган вектор билан ифодалаймиз (9.4-расм). Бурчак тез-лик векторининг модули

$$|\vec{\omega}| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = |\omega_z|$$

формула ёрдамида аниқланади.

Агар айланиш ўқи бирлик векто-рини \vec{k} билан белгиласак, бурчак тез-лик векторини

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k} = \omega_z \cdot \vec{k} \quad (9.5)$$



9.4- расм.

кўринишида ёзиш мумкин. (9.5) дан кўрамизки, $\dot{\varphi} > 0$ бўлса, $\vec{\omega}$ вектори \vec{k} йўналиши бўйича (9.4-расм, а), $\dot{\varphi} < 0$ да \vec{k} га қарама-қарши йўналади (9.4-расм, б).

Айланиш бурчаги радианда, вақт эса секунд (с) да ўлчангани-дан, бурчак тезликнинг ўлчов бирлиги $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$ ёки с^{-1} бўлади.

Жисм ҳаракати давомида унинг бурчак тезлиги $\omega_z = \omega_0$ ўзгар-май қолса, жисм *текис айланма ҳаракатда* дейилади. Бу ҳолда (9.4) га кўра $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 = \text{const}$ ёки $d\varphi = \omega_0 dt$ бўлади.

Вақт 0 дан t гача ўзгарганда айланиш бурчаги φ_0 дан φ гача ўзгаришини эътиборга олиб, охириги тенгликни интегралласак,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \quad (9.6)$$

бўлади. (9.6) ифода *жисм текис айланма ҳаракатининг тенгла-маси* дейилади.

Жисм текис айланма ҳаракатда бўлса, техникада кўпинча унинг бир минутдаги айланишлар сонидан фойдаланилади. Жисм бир мар-та тўла айланганда айланиш бурчаги $\varphi = 2\pi$ бўлади. Жисм бир минутда n марта айланса, текис айланма ҳаракат бурчак тезлиги қуйидагича аниқланади:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ с}^{-1}. \quad (9.7)$$

9.4-§. Жисмнинг бурчак тезланиши. Текис ўзгарувчан айланма ҳаракат

Умумий ҳолда жисмнинг бурчак тезлиги вақт функцияси сифа-тида ўзгаради. Жисмнинг бирор t вақтдаги Oz ўқ атрофидаги ай-ланиш бурчак тезлиги $\omega_z(t)$ га, $t_1 = t + \Delta t$ вақтдаги бурчак тез-лиги $\omega_z(t_1) = \omega_z(t) + \Delta\omega_z$ га тенг бўлсин. Бурчак тезликнинг Δt вақт ичидаги ортгирмаси $\Delta\omega_z = \omega_z(t_1) - \omega_z(t)$ га тенг бўлади.

$\Delta\omega_z$ нинг Δt вақтга нисбати жисмнинг шу вақтдаги ўртача бурчак тезланиши дейилади ва $(\epsilon_z)_{\text{ор}}$ билан белгиланади:

$$(\epsilon_z)_{\text{ор}} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}.$$

Ўртача бурчак тезланишнинг Δt нолга интилгандаги лимити жисмнинг берилган ондаги бурчак тезланиши дейилади:

$$\epsilon_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt}.$$

(9.4) тенгликни ҳисобга олсак, охириги ифода

$$\epsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi} \quad (9.8)$$

кўринишида ёзилади.

Бинобарин, берилган онда бирор қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисмнинг бурчак тезланиши бурчак тезликдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага ёки берилган ўқ атрофидаги айланма ҳаракат қонунидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосилага тенг бўлади.

Жисмнинг бурчак тезланишини (бурчак тезлик каби) айланиш ўқи бўйлаб йўналган $\vec{\epsilon}$ вектори тарзида ифодалаш мумкин. Бунда жисмнинг бурчак тезланиш вектори шу жисм бурчак тезлик векторидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг деб олинади (9.5-расм):

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} \vec{k} = \epsilon_z \vec{k}$$

ёки

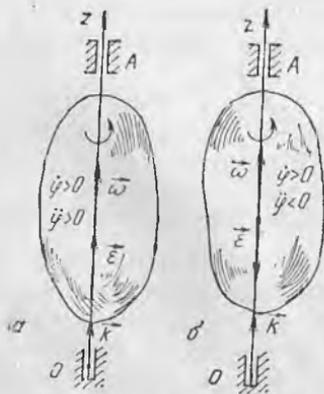
$$\vec{\epsilon} = \epsilon_z \vec{k} = \ddot{\varphi} \vec{k}. \quad (9.9)$$

Агар жисмнинг бурчак тезлиги модуль жиҳатдан орта борса, бундай ҳаракат тезланувчан айланма ҳаракат, камай борса, секинланувчан айланма ҳаракат дейилади. Текис айланма ҳаракатда $\omega = \text{const}$ бўлгани учун $\epsilon = 0$ бўлади.

Бинобарин, ω_z ва ϵ_z бир хил ишорали бўлса, ҳаракат тезланувчан (9.5-расм, а), турли ишорага эга бўлса, ҳаракат секинланувчан (9.5-расм, б) бўлади.

Жисм бурчак тезланишининг ўлчов бирлиги $\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ ёки с^{-2} бўлади.

Жисм ҳаракати давомида бурчак тезланиши ўзгармай қолса (яъни $\epsilon_z = \text{const}$), жисм текис ўзгарувчан айланма ҳаракатда дейилади. Бу ҳолда (9.8) га кўра $\frac{d\omega_z}{dt} = \epsilon_z = \text{const}$ ёки $d\omega_z = \epsilon_z dt$ бўлади. Бунини вақт 0 дан t гача ўзгарган-



9.5- расм.

да, бурчак тезлиги ω_0 дан ω_z гача ўзгаришини эътиборга олиб интеграллаймиз:

$$\omega_z = \omega_0 + \varepsilon_z t. \quad (9.10)$$

Бу тенглик ёрдамида текис ўзгарувчан айланма ҳаракат бурчак тезлиги аниқланади.

(9.4) ни ҳисобга олиб, (9.10) ни

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon_z t \text{ ёки } d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon_z t) dt$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламани 0 дан t гача бўлган вақт оралиғида айланиш бурчаги φ_0 дан φ гача ўзгаришини ҳисобга олиб интегралласак,

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_z \frac{t^2}{2}, \quad (9.11)$$

текис ўзгарувчан айланма ҳаракат тенгламаси келиб чиқади.

9.1- масала. Гирокмпасни ишга тушириш вақтида тинч ҳолатдаги роторнинг бурчак тезланиши вақтга тўғри пропорционал равишда ўзгаради ва биринчи 5 минут охирида роторнинг бурчак тезлиги 18000 $\frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ га тенг бўлади. Шу вақт ичида ротор неча марта айланади?

Ечиш. Масаланинг шартига кўра, $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varepsilon_z = at$, бунда a пропорционаллик коэффициентини. $t = 5 \text{ мин} = 300 \text{ с}$ да ротор $n = 18000 \frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ ёки $\omega =$

$$= \frac{\pi n}{30} = 600 \pi \text{ с}^{-1} \text{ бурчак тезлик билан айланади.}$$

Дастлаб пропорционаллик коэффициентини a ни аниқлаймиз. $\varepsilon_z = at$ ва (9.8) формулаларни солиштириб,

$$\frac{d\omega_z}{dt} = at \text{ ёки } d\omega_z = at \cdot dt$$

муносабатни оламиз. Бу тенгламани мос чегаравий шартларда интеграллаб, $\omega = \frac{a t^2}{2}$ ифодани оламиз. Бундан $a = \frac{2\omega_z}{t^2}$. $t = 300 \text{ с}$ да $\omega_z = 600 \text{ с}^{-1}$ бўлгани учун

$$a = \frac{2 \cdot 600 \pi}{90000} = \frac{\pi}{75}$$

Шунда қилиб, ротор бурчак тезлиги $\omega_z = \frac{\pi}{150} t^2$ қонунга кўра ўзгарар экан.

$$(9.4.) \text{ га кўра охириги ифодани } d\varphi = \frac{\pi}{150} t^2 dt \text{ кўринишда ёзиш мумкин.}$$

Бу дифференциал тенгламани $t = 0$ да $\varphi = 0$ бўлишини назарда тутиб интегралласак, роторнинг ҳаракат қонунини ифодаловчи $\varphi = \frac{\pi t^3}{450}$ тенгламани оламиз. $t = 300 \text{ с}$ давомидаги роторнинг айланиш сонини N билан белгиласак, $\varphi = 2\pi N$ бўлгани учун $2\pi N = \frac{\pi t^3}{450}$ тенглик ўринли бўлади. Бундан $N = \frac{t^3}{900} = 30000$.

Шундай қилиб, 5 минут давомида ротор 30000 марта айланар экан.

9.2- масала. Двигатель вали $\varepsilon = \pi \text{ с}^{-2}$ бурчак тезланиши билан текис тезлаувчан айланма ҳаракат қилиб, $t_2 - t_1 = 10 \text{ с}$ вақт оралиғида 100 марта айлана-

ди. Валининг t_1 ва t_2 пайтдаги бурчак тезликлари аниқлансин. Бошланғич пайтда вал тинч ҳолатда бўлган.

Ечиш. Вал бошланғич пайтда тинч ҳолатда бўлиб, текис тезланувчан айланма ҳаракат қилгани учун (9.11) ва (9.10) формулалар қуйидагича ёзилади:

$$\varphi = \frac{\varepsilon_z t^2}{2}, \quad (1)$$

$$\omega_z = \varepsilon_z t. \quad (2)$$

Масаланинг шартида t_1 ва t_2 пайтлар номаълум. Агар t_1, t_2 пайтларга мос келувчи айланиш бурчакларини мос равишда φ_1 ва φ_2 билан белгиласак, (1) га кўра қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon_z t_1^2}{2}; \quad \varphi_2 = \frac{\varepsilon_z t_2^2}{2}. \quad (3)$$

$t_2 - t_1$ вақт оралиғида вал 100 марта айлангани учун шу вақт оралиғидаги бурчак орттирмаси қуйидагича аниқланади:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \cdot 100 = 200\pi \text{ рад}$$

ёки (3) ни эътиборга олсак, $\frac{\varepsilon_z}{2} (t_2^2 - t_1^2) = 200\pi$ ҳосил бўлади.

Масаланинг шартига кўра $\varepsilon_z = \pi \text{ с}^{-2}$, $t_2 - t_1 = 10 \text{ с}$ ёки $t_2 = t_1 + 10$ эканлигини назарда тутсак,

$$\frac{\pi}{2} (t_1^2 + 20t_1 + 100 - t_1^2) = 200\pi$$

ёки $20t_1 = 300$ бўлади. Бундан $t_1 = 15 \text{ с}$ ҳамда $t_2 = t_1 + 10 = 25 \text{ с}$ эканлигини аниқлаймиз.

У ҳолда (2) дан $\omega_{z_1} = 15\pi \text{ с}^{-1}$, $\omega_{z_2} = 25\pi \text{ с}^{-1}$ ёки (9.7) га кўра

$$n_1 = \frac{60 \omega_{z_1}}{2} = 450 \frac{\text{айл}}{\text{мин}}, \quad n_2 = \frac{60 \omega_{z_2}}{2} = 750 \frac{\text{айл}}{\text{мин}}$$

бўлади.

9.5- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизиқли тезлиги

Қўзғалмас Oz ўқ атрофида ω_z бурчак тезлик билан айланувчи қаттиқ жисм ихтиёрий M нуқтасининг тезлигини аниқлаймиз. M нуқтадан айланиш ўқиғача бўлган масофани $O_1M = R$ билан белгилайлик (9.6- расм, а). Агар dt вақт оралиғида жисм $d\varphi$ бурчакка айланса, M нуқта айланиш ўқиға перпендикуляр текисликда айлана

бўйлаб ҳаракатланиб $ds = MM_1 = R d\varphi$ бўлган ёй координатасини ўтади ҳамда (8.28) га асосан M нуқта тезлигининг алгебраик қиймати қуйидагича аниқланади:

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \dot{\varphi}. \quad (9.12)$$

Тезликнинг модули эса

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| = R \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|$$

ёки (9.4) га кўра

$$v = R \cdot \omega \quad (9.13)$$

формуладан аниқланади. (9.13) воситасида аниқланидиган v тезлик қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизикли тезлиги деб аталади.

Демак, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг ҳар ондаги чизикли тезлиги миқдор жиҳатдан мазкур нуқтадан айланиш ўқиғача бўлган масофа билан жисмнинг шу ондаги бурчак тезлиги кўпайтмасига тенг.

Жисм барча нуқталарининг бурчак тезликлари ҳар онда ўзаро тенг бўлади. Шу сабабли қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқталарининг чизикли тезликлари мазкур нуқталардан айланиш ўқиғача бўлган масофаларга тўғри пропорционал бўлади (9.6-расм, б).

Нуқтанинг чизикли тезлиги v нуқта траекториясини ифодаловчи айланага ҳаракат йўналиши бўйича ўтказилган уринма бўйлаб йўналади (9.6-расм).

Координата бошини айланиш ўқидаги O нуқтада олиб, z ўқни айланиш ўқи бўйлаб йўналтирамиз.

M нуқтанинг O га нисбатан радиус-векторини \vec{r} билан белгилаймиз ва ω бурчак тезлик векторини ўтказамиз (9.6-расм, а).

$\omega \times \vec{r}$ вектор кўпайтмани M нуқтанинг тезлик вектори \vec{v} билан солиштирамиз. $\omega \times \vec{r}$ вектори, ω ва \vec{r} ётган текисликка перпендикуляр равишда жисмнинг айланиш йўналиши бўйича йўналади, яъни $\omega \times \vec{r}$ вектори билан \vec{v} тезликнинг йўналиши бир хил бўлади. Мазкур вектор кўпайтманинг модули

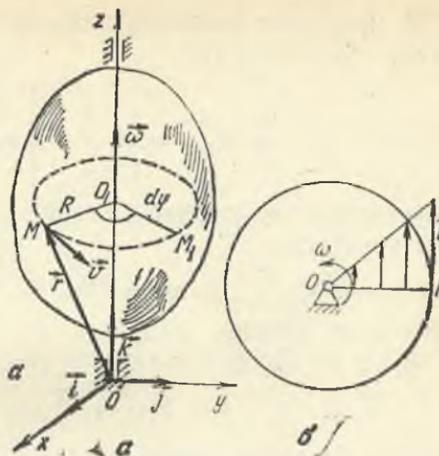
$$|\omega \times \vec{r}| = \omega \cdot r \sin(\widehat{\omega, \vec{r}}) = \omega \cdot R,$$

яъни \vec{v} тезликнинг модулига тенг бўлади. Шундай қилиб,

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r} \quad (9.14)$$

вектор тенглик исботланди.

Бинобарин, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизикли тезлик вектори жисмнинг бурчак тезлик вектори билан мазкур нуқтанинг айланиш ўқидаги ихтиёрий O нуқтага нисбатан радиус-векторининг вектор кўпайтмасига тенг.



9.6-расм.

M нуқтанинг координаталарини x, y, z билан белгиласак, $\vec{\omega} \times \vec{r}$ вектор кўнайта учун

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega_z \vec{i} + x\omega_z \vec{j}$$

муносабатни, тезликнинг Декарт координата ўқларидаги проекциялари учун эса

$$v_x = -y\omega_z, v_y = x\omega_z, v_z = 0 \quad (9.15)$$

ифодаларни оламиз.

(9.15) га асосан тезликнинг модулини

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |\omega_z| \sqrt{x^2 + y^2}$$

формула ёрдамида аниқлаш мумкин.]

9.6-§. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизиқли тезланиши

Қўзғалмас ўқ атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлик ва $\vec{\varepsilon}$ бурчак тезланиш билан айланувчи жисм ихтиёрий M нуқтасининг тезланишини (8.50) формулага асосан уринма ва нормал ташкил этувчилардан иборат деб қараш мумкин:

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n = \omega_\tau \vec{\tau}^\circ + \omega_n \vec{n}^\circ. \quad (9.16)$$

[M нуқтадан айланиш ўқиғача бўлган масофани R билан белгилайлик. (9.12) ва (9.13) ни (8.51) га қўйиб, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқталарининг уринма ва нормал тезланишлари учун ушбу ифодаларни оламиз:

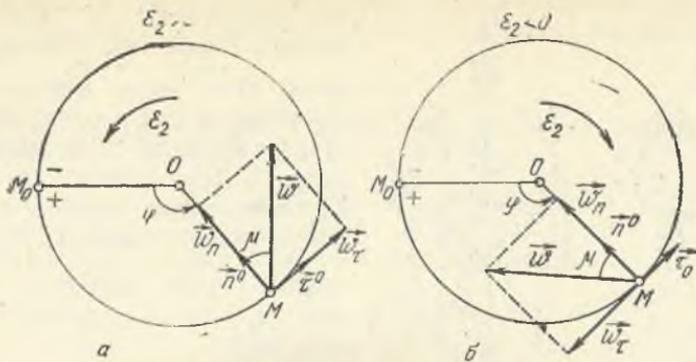
$$\omega_\tau = \frac{d\omega_\tau}{dt} = \ddot{s} = R \cdot \ddot{\varphi} = R \cdot \varepsilon_z, \quad (9.17)$$

$$\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R \cdot \omega^2. \quad (9.18)$$

(9.17) ва (9.18) ни эътиборга олиб, (9.16) га кўра нуқтанинг тезланиш векторини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\vec{w} = R \cdot \varepsilon_z \vec{\tau}^\circ + R\omega^2 \vec{n}^\circ. \quad (9.19)$$

Бу формуладаги $R\varepsilon_z \vec{\tau}^\circ$ вектор воситасида ифодаланадиган уринма тезланиш ε_z бурчак тезланишнинг мусбат ёки манфий қиймат қабул қилишига қараб, φ бурчакнинг мусбат ёки манфий йўналиши билан аниқланади ҳамда нуқтанинг айланма тезланиши дейилади (9.7-расм); $R\omega^2 \geq 0$ бўлгани учун нормал тезланиш доимо бош нормаль бўйича йўналади ва нуқтанинг марказга интилма тезланиши дейилади.



9.7- расм.

М нуқта тезланишининг модули

$$\omega = \sqrt{\omega_\tau^2 + \omega_n^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (9.20)$$

формуладан аниқланади. (9.19) ва (9.20) ёрдамида аниқланадиган тезланиш жисм нуқтасининг чизиқли тезланиши дейилади.

М нуқта чизиқли тезланишининг йўналишини аниқлаш учун бош нормаль билан $\vec{\omega}$ вектори орасидаги μ бурчакни аниқлаш кифоя:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\omega_\tau|}{\omega_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (9.21)$$

Жисмининг барча нуқталари учун ε ва ω бир хил бўлганидан қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисм нуқталарининг чизиқли тезланиши айлиниш ўқидан мазкур нуқталаргача бўлган масофага пропорционал равишда ўзгаради ҳамда берилган онда жисмининг барча нуқталари учун μ бурчак бир хил қийматга эга бўлади.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқталарининг чизиқли тезланишини (9.14) дан вақт бўйича ҳосил олиб ҳам аниқлаш мумкин:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Бунда $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ бўлгани учун

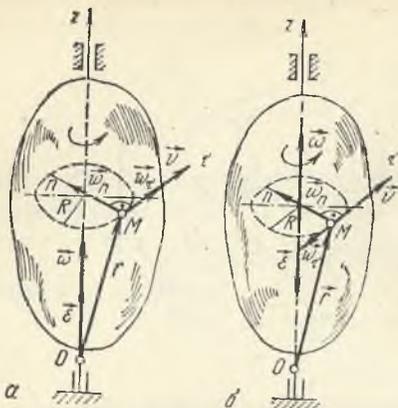
$$\vec{\omega} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (9.22)$$

Бу формулада

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{\omega}_\tau \quad (9.23)$$

уринма тезланишни ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам унинг миқдори

$\varepsilon r \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r})$ га тенг, йўналиши эса $\vec{\omega}$ ва $\vec{\varepsilon}$ векторлари бир томон-



9.8- расм.

га йўналганда M нуқтанинг тезлиги билан мос тушади (9.8-расм, а) ω ва ε қарама-қарши йўналган ҳолда тезлик вектори-га қарама-қарши йўналади (9.8-расм, б). Шу сабабли M нуқтада айланишнинг мусбат йўналиши бўйича ўтказилган M_τ уринманнинг бирлик векторини $\vec{\tau}^\circ$ билан белгиласак, уринма тезланиш учун

$$\vec{\omega}_\tau = R \cdot \varepsilon_z \cdot \vec{\tau}^\circ \quad (9.24)$$

тенглик ўринли бўлади.

(9.22) даги

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega}_n \quad (9.25)$$

қўшилувчи марказга интилма (ёки ўққа интилма) тезланишни ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам унинг миқдори ω ва v лар ўзаро перпендикуляр йўналгани учун ωv ёки $R\omega^2$ га тенг бўлади. $\vec{\omega} \times \vec{v}$ вектор кўпайтма айланма ҳаракат тезланувчан ёки секинланувчан бўлишидан қатъи назар, $\vec{\omega}$ ва \vec{v} векторларига перпендикуляр равишда доимо M нуқта траекториясининг маркази томон, яъни бош нормаль Mn бўйича йўналади. Бинобарин, марказга интилма тезланиш учун

$$\vec{\omega}_n = R \omega^2 \vec{n}^\circ \quad (9.26)$$

формула ўринли бўлади. Бунда \vec{n}° бош нормалнинг бирлик вектори.

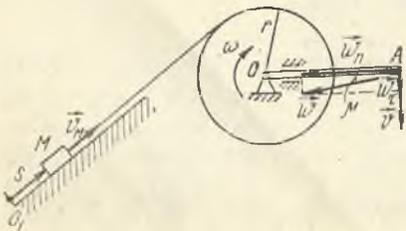
Шундай қилиб, (9.23 — 9.26) ларни назарда тутиб, (9.22) формуладаги векторли қўшилувчилар мос равишда (9.19) даги биринчи ва иккинчи қўшилувчилар билан ифодаланиши исботланди.

9.3- масала. Уzunлиги $OA = l = 54$ см га тенг даста радиуси $r = 27$ см бўлган барабан билан биргаликда айланади. Барабанга ип ўралиши натижасида M юк $s = 2\pi l^3$ см қонунга кўра қия текислик бўйлаб кўтарилади. OA даста бир марта тўла айланган пайтда даста учидagi A нуқтанинг тезлик ва тезланиши аниқлансин (9.9- расм).

Ечиш. M юк қия текислик бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Дастлаб ҳаракат қосунин берилган M нуқтанинг тезлигини (8.28) формулага биноан аниқлаймиз:

$$v_\tau = \dot{s} = 6\pi l^2.$$

Барабан ва OA даста O ўқ атрофида биргаликда айлангани туфайли уларнинг бурчак тезликлари бир хил бўлади. Барабан гардишидаги нуқтанинг чизиқли тезлиги миқдор жиҳатдан



9.9- расм.

M нуқта тезлигига тенг. Барабан айланма ҳаракатда бўлгани учун унинг гардишидаги нуқтанинг тезлигини (9.13) формула ёрдамида аниқлаш мумкин. Шу сабабли

$$6\pi t^2 = \omega \cdot r$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан барабан (ёки даста) нинг бурчак тезлигини аниқлаймиз:

$$\omega = \frac{6\pi t^2}{r} = \frac{2\pi t^2}{9} \text{ с}^{-1}.$$

(9.8) га кўра дастанинг бурчак тезлачишини ҳисоблаймиз:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{4\pi t}{9} \text{ с}^{-2}.$$

OA даста бир марта айланиши учун кетган вақтни t_1 билан белгиласак, $t = t_1$ да M юк қия текислик бўйлаб $s_1 = 2\pi r$ айлананинг узунлигига тенг масофага кўтарилади. Масаланинг шартига кўра $s_1 = 2\pi t_1^3$; бинобарин $2\pi t_1^3 = 2\pi r$ ёки $t_1 = 3$ с.

(9.13) дан фойдаланиб, A нуқта чизиқли тезлигининг модулини аниқлаймиз:

$$v = \omega \cdot OA = \frac{2\pi}{9} t^2 \cdot 54 = 12\pi t^2 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

$$t = t_1 = 3 \text{ с да } v = 108\pi \frac{\text{см}}{\text{с}} = 3,39 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

A нуқта тезлигининг йўналиши 9.7-расмда кўрсатилгандек OA айланиш радиусига перпендикуляр бўлади.

(9.17) га кўра

$$\omega_{\tau} = OA \cdot \varepsilon_z = \frac{4\pi t}{9} \cdot OA,$$

$$t = t_1 = 3 \text{ с да } \omega_{\tau} = \frac{4\pi}{3} \cdot 54 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} = 2,26 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$\varepsilon > 0$ бўлгани учун $\vec{\omega}_{\tau}$ вектор \vec{v}_A бўйича йўналади. (9.18) га асосан

$$\omega_n = OA \omega^2 = \frac{4\pi^2}{81} t^4 \cdot 54 = \frac{8\pi^2}{3} t^4 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

$$t = t_1 = 3 \text{ с да } \omega_n = 21,30 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

A нуқта чизиқли тезланишининг миқдорини (9.20) дан фойдаланиб аниқлаймиз:

$$\omega = \sqrt{\omega_{\tau}^2 + \omega_n^2} = 21,35 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$\vec{\omega}$ билан OA орасидаги бурчакни μ билан белгиласак, (9.21) формулага асосан

$$\mu = \arctg \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \arctg 0,106,$$

Бундан

$$\mu \approx 6^\circ.$$

10-боб. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ТЕКИС ПАРАЛЛЕЛ ҲАРАКАТИ

10.1-§. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини аниқлаш. Текис шаклнинг ҳаракат тенгламалари

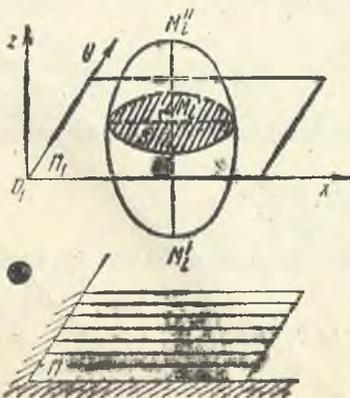
✓ Барча нуқталари берилган қўзғалмас текисликка параллел текисликларда ҳаракатланувчи жисмнинг ҳаракатига текис параллел ҳаракат дейилади.

Жисмнинг текис параллел ҳаракатига мисол тариқасида вагон гиддирагининг тўғри чизиқли изда думалашини ёки бир текисликда ҳаракатланувчи машина ва механизм қисмларининг ҳаракатини келтириш мумкин.

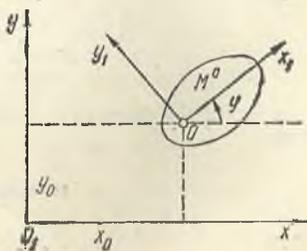
Жисмнинг текис параллел ҳаракатини аниқлаш учун берилган қўзғалмас текислиكنи Π билан белгилайлик (10.1-расм). Жисмни Π текисликка параллел бўлган Π_1 текислик билан фикран кесиш натижасида ҳосил бўлган кесимни S билан белгилаб, уни *текис шакл* деб атаймиз. Текис параллел ҳаракат таърифига кўра, жисмнинг ҳаракати давомида бу текис шакл доимо қўзғалмас Π текисликка параллел бўлган Π_1 текисликда ҳаракатланади. Агар Π_1 текислик учун $O_1x_1y_1$ текислигини олиб, жисмда бу текисликка перпендикуляр (ёки O_1z_1 ўққа параллел) $M'_1M''_1$ кесмани олсак, жисм ҳаракати давомида бу кесма доимо O_1z_1 ўққа параллел кўчади, яъни бу кесма илгариланган ҳаракатда бўлади. Демак, жисмнинг $M'_1M''_1$ кесмада ётувчи барча нуқталари бир хил траектория чизади ҳамда ҳар онда бир хил тезлик ва бир хил тезланишга эга бўлади.

Шундай қилиб, жисмнинг $M'_1M''_1$ чизиқда ётувчи нуқталарининг ҳаракатини ўрганиш ўрнига $M'_1M''_1$ кесманинг текис шаклга тааллуқли M_1 нуқтасининг ҳаракатини аниқлаш етарлидир. Бошқача айтганда, жисмнинг текис параллел ҳаракатини ўрганиш ўрнига жисмни қўзғалмас Π текисликка параллел Π_1 текислик билан кесиш натижасида олинган S текис шаклнинг ўз текислигидаги (яъни Π_1 текисликдаги) ҳаракатини аниқлаш етарли бўлади.

S юза ҳаракатланадиган Π_1 текислик текис шаклнинг ҳаракат



10.1- расм.



10.2- расм.

текислиги дейилади. Ҳаракат текислигидаги $O_1x_1y_1$ қўзғалмас координаталар системасига нисбатан текис шаклнинг ҳаракатини текшириш учун текис шаклда қутб деб аталадиган ихтиёрий O нуқтани олиб (10.2-расм), бу нуқтада текис шаклга бириктирилган Ox_1y_1 координаталар системасини ўтказамиз. Агар $O(x_0, y_0)$ нуқтанинг координаталари ва Ox_1 қўзғалувчи ўқ билан O_1x қўзғалмас ўқ орасидаги φ бурчак маълум бўлса, у ҳолда қўзғалувчи Ox_1y_1 нинг ҳолати, бинобарин, текис шаклнинг ҳаракат текислигидаги ҳолати маълум бўлади. Шу сабабли текис шаклнинг ҳаракат тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f_1(t), \\ y_0 &= f_2(t), \\ \varphi_0 &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

(10.1) тенгламалар текис шакл ҳаракатининг кинематик тенгламалари ёки жисм текис параллел ҳаракатининг тенгламалари дейилади.

(10.1) ифодадаги биринчи иккита тенглама қутбнинг ҳаракатини, учинчиси эса текис шаклнинг қутб атрофидаги айланиш қонунини ифодалайди.

Айланиш бурчаги φ дан вақт бўйича олинган ҳосила текис шаклнинг бурчак тезлиги дейилади ва ω_z билан белгиланади:

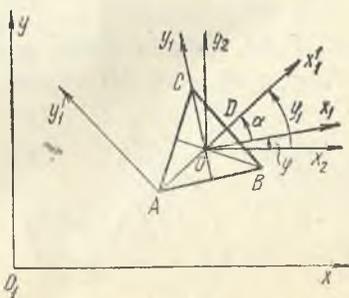
$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Текис шаклнинг бурчак тезлигидан вақт бўйича олинган ҳосила (ёки текис шакл айланиш бурчагидан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосила) текис шаклнинг бурчак тезланиши дейилади ва ε_z билан белгиланади:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Текис шаклнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши қутбнинг танлаб олиншига боғлиқ бўлмаслигини исботлаймиз. 10.3-расмда текис шакл сифатида тенг ёнли ABC учбурчак тасвирланган. Қутб учун медианалар кесишган O нуқтани оламиз. Жисмга бириктирилган ва у билан биргаликда ҳаракатланувчи Ox_1 ўқни AB томонга параллел, Oy_1 ўқни эса OC бўйича йўналтирамиз. У ҳолда айланиш бурчаги $\varphi = \angle x_2 Ox_1$ бўлади.

Агар қутб учун учбурчакнинг A учини олиб, жисмга бириктирилган ва у билан биргаликда ҳаракатланувчи Ax'_1 ўқни AD медиана бўйлаб, Ay'_1 ўқни AD га перпендикуляр йўналтирсак,



10.3- расм.

$$\varphi_1 = \varphi + \alpha \quad (10.2)$$

ифода ўринли бўлади. Бунда α бурчак ўзгармас эканлигини эътиборга олиб, (10.2) тенгликни икки марта дифференциалласак,

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_2, \quad \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon_2$$

исботланиши керак бўлган муносабатларни оламиз. Текис шакл ихтиёрий кўринишда бўлганда ҳам бу тенгликлар ўринли бўлишини исботлаш мумкин.

Алоҳида аҳамиятга молик бўлган қуйидаги икки ҳолни кўраемиз.

1. Агар $x_0 = const$, $y_0 = const$ бўлса, қутб қўзғалмай, вақтнинг ўтиши билан фақат φ бурчак ўзгаради. Бу ҳолда текис шакл ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда O нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида айланади. Бинобарин, қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати текис параллел ҳаракатнинг хусусий ҳоли ҳисобланади.

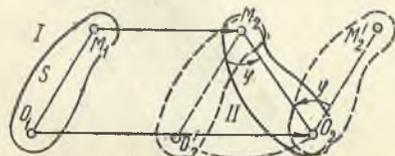
2. Агар $\varphi = const$ бўлса, фақат қутбнинг координаталари вақтнинг функцияси сифатида ўзгаради ҳамда қўзғалувчи координаталар системаси ўзининг бошланғич ҳолатига параллел равишда ҳаракатланади. Бунда текис шакл ҳамда қаттиқ жисм илгарилама ҳаракатда бўлади.

10.2- §. Текис шаклнинг кўчишига оид теорема

Теорема: текис шаклнинг ўз текислигидаги ҳар қандай кўчишини қутб билан биргалликдаги илгарилама кўчиши ҳамда қутб атрофидаги айланма кўчишдан ташкил топган деб қараши мумкин.

Исбот. Текис шакл OM кесмасининг t_1 ва t_2 ихтиёрий пайтдаги ҳолатларини мос равишда O_1M_1 ва O_2M_2 билан белгилайлик (10.4-расм). O нуқтани қутб учун қабул қилиб, текис шаклга шундай илгарилама кўчиш берамизки, натижада унинг O_1 нуқтаси O_2 билан устма-уст тушсин, M_1 нуқта M_2' ҳолатни эгалласин. Бу кўчишда O_1M_1 кесма O_2M_2' (текис шакл пунктир чизиқ билан кўрсатилган) ҳолатни эгаллайди. Текис шаклнинг илгарилама кўчиши O_1O_2 вектор билан аниқланади. Сўнгра текис шаклнинг ўз ҳаракат текислиги, да O_2 қутб атрофида $\varphi = \angle M_2'O_2M_2$ бурчакка айлантирсак, O_2M_2' кесма O_2M_2 ҳолатга ўтади ва текис шакл II ҳолатни эгаллайди.

Агар қутб учун M нуқтани олсак, текис шаклни I ҳолатдан II



10.4- расм.

ҳолатга кўчиришда илгарилама кўчиш M_1M_2 вектор билан ифодаланади. Текис шаклни M_2 атрофида $\angle O_2'M_2O_2$ га айлантирсак, текис шакл II ҳолатни эгаллайди. Расмдан кўраемизки, $O_1O_2 \neq$

$\vec{M}_1 M_2$, яъни илгарилама қўчиш қутбнинг танланишига боғлиқ бўлади. Илгарилама ҳаракат таърифига кўра $O_2 M_2' \parallel O_1 M_1$ ва $O_2' M_2 \parallel O_1 M_1$. Бинобарин, $O_2 M_2' \parallel O_2' M_2$ ва $\angle M_2' O_2 M_2 = \angle O_2' M_2 O_2 = \varphi$ бўлади. Шу билан бирга O_2 ва M_2 нуқталар атрофидаги айланиш йўналишлари бир хил бўлади. Демак, қутб атрофидаги айланиш бурчаги қутбни танлашга боғлиқ бўлмайди.

10.3-§. Текис шакл нуқталарининг тезликлари

Текис шакл нуқталарининг тезлигига онд қуйидаги иккита теоремани кўриб чиқамиз.

Теорема 1. *Текис шакл ихтиёрый M нуқтасининг тезлиги қутбнинг тезлиги билан M нуқтанинг қутб атрофида айланишидаги чизиқли тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Исбот. O ва M нуқталарининг қўзғалмас $O_1 x y$ координаталар системасига нисбатан радиус-векторлари мос равишда \vec{r}_O ва \vec{r} бўлсин (10.5-расм). M нуқтанинг O қутбга нисбатан радиус-векторини $\vec{\rho}$ билан белгилайлик (жисм абсолют қаттиқ бўлганидан $\vec{\rho}$ вектор миқдор жиҳатдан ўзгармайди). У ҳолда

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}. \quad (10.3)$$

(10.3) ифодадан вақт бўйича биринчи тартибли ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (10.4)$$

(10.4) да $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_M$ ва $\frac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{v}_O$ бўлиб, мос равишда M ва O нуқталарининг $O_1 x y$ координаталар системасига нисбатан тезликларидир. $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_{MO}$ эса M нуқтанинг O қутбдан ўтувчи ўқ атрофида айланишидаги чизиқли тезлигини ифодалайди. (9.14) га кўра

$$\vec{v}_{MO} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad v_{MO} = \omega \cdot \rho \quad (10.5)$$

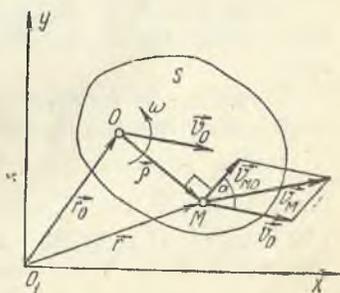
бўлади. \vec{v}_{MO} вектори айланиш йўналишига мос равишда MO кесмага ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади.

Шундай қилиб, (10.4) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

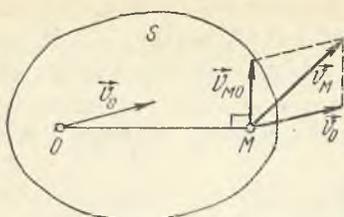
$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO} \quad (10.6)$$

ёки

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (10.7)$$



10.5-расм.



10.6- расм.

Текис шакл нуқтасининг тезлигини (10.6) формула воситасида аниқлашга қутб усулида аниқлаш дейилади.

Агарда \vec{v}_O ва \vec{v}_{MO} ва улар орасидаги бурчак α берилган бўлса, косинуслар теоремасидан фойдаланиб M нуқта тезлигининг миқдори топилади:

$$v_M = \sqrt{v_O^2 + v_{MO}^2 + 2v_O v_{MO} \cos \alpha}. \quad (10.8)$$

Теорема 2. *Текис шакл иккита нуқтаси тезликларининг шу нуқталардан ўтувчи ўқдаги проекциялари ўзаро тенг.*

Исбот. Текис шакл O ва M нуқталарининг тезлик векторлари \vec{v}_O ва \vec{v}_M берилган бўлсин (10.6-расм). O нуқтани қутб деб олсак, M нуқтанинг тезлигини (10.6) кўринишда ёзиш мумкин.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}.$$

Бу ифодани OM ўққа проекциялаймиз:

$$pr_{OM} \vec{v}_M = pr_{OM} \vec{v}_O + pr_{OM} \vec{v}_{MO}. \quad (10.8)$$

\vec{v}_{MO} вектор OM ўққа перпендикуляр бўлгани учун

$$pr_{OM} \vec{v}_{MO} = 0$$

бўлади. Натижада (10.8) дан исботланиши керак бўлган

$$pr_{OM} \vec{v}_M = pr_{OM} \vec{v}_O \quad (10.9)$$

тенгликни оламиз.

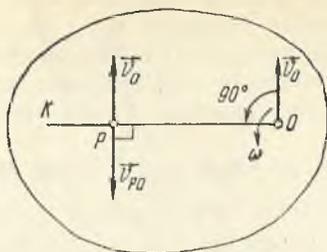
(10.9) ифода ёрдамида текис шакл нуқтасининг тезлигини аниқлашга проекция усули билан аниқлаш дейилади.

10.4-§. Тезликлар оний маркази

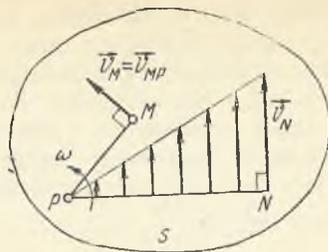
Текио шаклнинг берилган онда тезлиги нолга тенг бўлган нуқтаси тезликлар оний маркази ёки айланиш оний маркази дейилади.

Теорема. *Агар текис шаклнинг бурчак тезлиги нолдан фарқли бўлса, тезликлар оний маркази мавжуд бўлади.*

Исбот. Берилган онда бурчак тезлиги $\omega_z = \dot{\varphi}$ бўлган текио шакл ихтиёрий нуқтасининг тезлиги \vec{v}_O нолга тенг бўлмасин (10.7-расм). O нуқтани қутб деб оламиз ва бурчак тезликнинг ишорасига қараб текис шаклнинг қутб атрофидаги айланиш йўналишини аниқлаймиз. Агар $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$ бўлса, текис шакл O нуқта атрофида соат стрелкаси айланишига тесқари, $\omega_z < 0$ бўлса, соат



10.7- расм.



10.8- расм.

стрелкеси айланадиган йўналишда айланади. $\omega_z > 0$ деб қараб айланиш йўналиши бўйича \vec{v}_O тезлик векторини O атрофида тўғри бурчакка буриш билан олинган OK чизиқда ётувчи ва

$$PO = \frac{v_O}{\omega}$$

тенгликка бироан аниқланадиган P нуқтанинг тезлигини ҳисоблаймиз.

(10.6) га асосан $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO}$. \vec{v}_{PO} вектори OP га перпендикуляр бўлгани учун ва OP кесманинг танлаб олиншига кўра \vec{v}_O ва \vec{v}_{PO} векторлар қарама-қарши томонга йўналади. (10.5) га кўра \vec{v}_{PO} тезликнинг модули

$$v_{PO} = \omega \cdot PO = \frac{v_O}{\omega} \cdot \omega = v_O.$$

\vec{v}_O ва \vec{v}_{PO} тезлик векторлари миқдор жиҳатдан тенг, йўналишлари қарама-қарши бўлгани учун уларнинг йиғиндиси нолга тенг, яъни

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO} = 0.$$

Демак, тезлиги нолга тенг бўлган тезликлар оний маркази P мавжуд экан. ■

Агар тезликлар оний маркази текис шакл контуридан ташқарида ётса, тезликлар оний маркази учун текис шаклга маҳкам бириктирилган текисликнинг нуқтаси олинади.

Агар P нуқтани қутб деб олсак, $\vec{v}_P = 0$ бўлгани учун текис шакл M нуқтасининг тезлигини (10.6) формулага бироан қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{MP}.$$

Бунда $v_{MP} = \omega \cdot PM$ (10.8- расм) эканлигини назарда тутсак,

$$v_M = \omega \cdot PM \quad (10.10)$$

муносабат ўринли бўлишини кўраимиз. Шундай қилиб, текис шакл нуқталарининг тезликлар оний марказига нисбатан ҳар ондаги тезликлари қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқталарининг тезликлари каби тақсимланади. Бунда айланиш оний маркази орқали текис шакл текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи оний ўқ қўзғалмас ўқ вазифасини ўтайди.

Агар тезликларнинг оний маркази ва текис шакл бирор M нуқтасининг тезлиги \vec{v}_M маълум бўлса, текис шакл исталган нуқтасининг тезлигини аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам (10.10) дан фойдаланиб текис шаклнинг берилган ондаги бурчак тезлигини ҳамда ихтиёрий N нуқтаси тезлигининг миқдорини

$$\omega = \frac{v_M}{PM}, \quad v_N = \omega \cdot PN = v_M \frac{PN}{PM} \quad (10.11)$$

формулалар воситасида аниқлаймиз. \vec{v}_N вектори айланиш оний маркази атрофидаги айланишга мос равишда PN чизиққа ўтказилган перпендикуляр бўйича йўналади.

\vec{v}_N тезлик векторининг учини P нуқта билан туташтириб, PN кесмада ётувчи нуқталар тезликларининг тақсимланиш эпюрасини 10.8-расмдагидек тасвирлаш мумкин.

(10.11) ни яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{v_N}{v_M} = \frac{PN}{PM} \quad (10.12)$$

яъни *текис шакл нуқталарининг тезликлари шу нуқталардан тезликлар оний марказигача бўлган масофаларга тўғри пропорционал бўлади.*

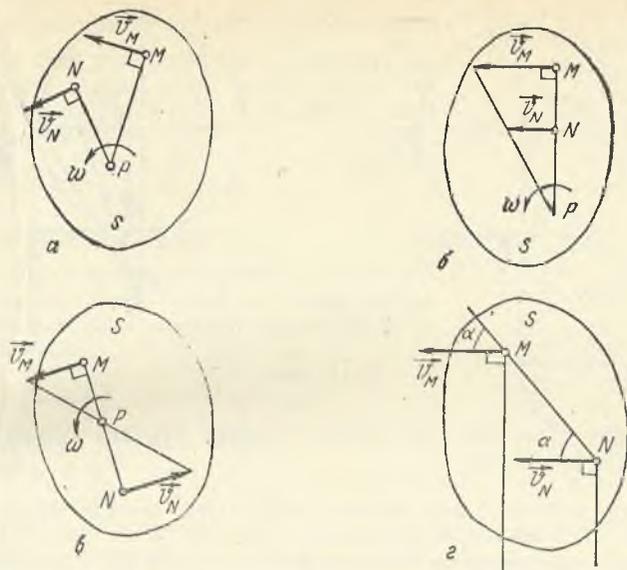
(10.10) ёки (10.12) формулалар воситасида *текис шакл нуқталарининг тезликларини аниқлашга тезликлар оний марказидан фойдаланиб аниқлаш дейилади.*

10.5- §. Тезликлар оний маркази аниқланадиган баъзи ҳоллар

Тезликлар оний марказининг асосий хусусиятларидан фойдаланиб, қуйидаги ҳолларни кўраимиз.

1. Текис шакл иккита M ва N нуқтаси тезликларининг йўналиши маълум бўлсин (10.9-расм, а). M ва N нуқталардан \vec{v}_M ва \vec{v}_N тезлик векторларига перпендикулярлар ўтказсак, уларнинг кесишган P нуқтаси тезликлар оний марказини ифодалайди.

2. Агар M ва N нуқталарининг тезлик векторлари ўзаро параллел ҳамда $\vec{v}_M \perp MN$ бўлса, тезликлар оний марказини аниқлаш учун текис шакл нуқталари тезликларининг миқдори шу нуқталардан айланиш оний марказигача бўлган масофага пропорционал бў.



10.9- расм.

лиши хусусиятидан фойдаланамиз. Бундай ҳолларда тезликлар оний марказини аниқлаш 10.9- расм, б ва в да кўрсатилган.

3. Агарда \vec{v}_M ва \vec{v}_N векторлари ўзаро параллел, лекин MM кесмага перпендикуляр бўлмаса, бу векторларга ўтказилган перпендикулярлар чексизликда кесишади ҳамда тезликлар оний маркази мавжуд бўлмайди (10.9- расм, г).

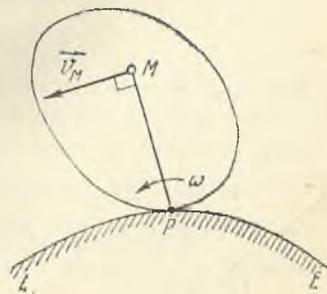
Ҳақиқатан ҳам (10.9) формулага биноан

$$v_M \cos \alpha = v_N \cos \alpha.$$

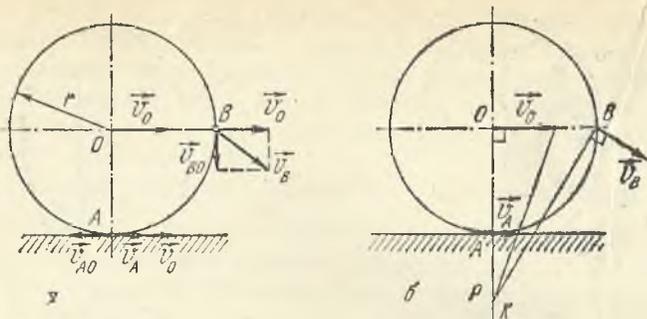
Бинобарин, $\vec{v}_M = \vec{v}_N$ ва (10.6), (10.5) муносабатларни инobatга

олсак, $\vec{\omega} \times \overrightarrow{MN} = 0$, яъни текис шаклнинг бурчак тезлиги берилган онда нолга тенг: $\omega = 0$. Демак, берилган онда текис шакл илгариланган ҳаракатда бўлади ҳамда тезликлар оний маркази мавжуд бўлмайди.

4. Текис шакл контури бирор қўзғалмас сирт устида сирванмасдан думаласа (10.10- расм), ҳар онда текис шакл билан LE чизиқнинг уриниш нуқтаси P нинг тезлиги нолга тенг бўлади. Чунки сирт қўзғалмас бўлгани учун ундаги ҳар бир нуқтанинг, жумладан уриниш нуқтасининг тезлиги нолга тенг бўлади. Уриниш нуқтаси ўз навбатида текис шаклга ҳам тааллуқлидир. Демак, текис шакл



10.10- расм.



10.11- расм.

контурининг қўзғалмас LE чизиққа уриниш нуқтаси тезликлар оний марказини ифодалайди.

6. $\sqrt{10.1}$ - масала. $r = 0,5$ м радиусли ғилдирак тўғри чизиқли йўлда сирпаниб ғилдирайди. Ғилдирак марказининг тезлиги ўзгармас бўлиб, $v_0 = 10$ м/с га тенг (10.11- расм, а). Ғилдиракнинг O нуқтадан шакл текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи горизонтал ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги $\omega = 12$ с⁻¹. Ғилдирак гардишидаги A ва B нуқталарнинг тезлиги аниқлансин.

Ечиш. Ғилдирак нуқталари ҳамиша расм текислигида ҳаракатлангани туфайли у текис параллел ҳаракатда бўлади. A ва B нуқталарнинг тезликларини икки усулда аниқлаймиз.

1. Қутб учун O нуқтани олсак, (10.6) формулага асосан A нуқтанинг тезлиги $\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_{AO}$ га тенг бўлади. Бунда \vec{v}_{AO} миқдор жиҳатдан

$$v_{AO} = r \cdot \omega = 0,5 \cdot 12 = 6 \text{ м/с}$$

бўлиб, A нуқтада ғилдирак айланишига мос равишда горизонтал бўйича чапга йўналади (10.11- расм, а). Қутбнинг тезлиги \vec{v}_0 ни A нуқтага кўчираемиз. \vec{v}_0 ва \vec{v}_{AO} векторлари бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналгани учун улар алгебраик қўшилади:

$$v_A = v_0 - v_{AO} = 4 \text{ м/с.}$$

$v_0 > v_{AO}$ бўлганидан \vec{v}_A вектори \vec{v}_0 вектори бўйлаб йўналади.

B нуқтанинг тезлигини

$$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{v}_{BO}$$

формула воситасида аниқлаймиз. Бунда \vec{v}_{BO} миқдор жиҳатдан $v_{BO} = r \cdot \omega = 6$ м/с бўлиб, B нуқтада ғилдирак айланишига мос равишда вертикал бўйича пастрга йўналади. Қутбнинг тезлиги \vec{v}_0 ни B нуқтага кўчириб, B нуқтага қўйилган ўзаро перпендикуляр \vec{v}_0 ва \vec{v}_{BO} векторларни қўшсак, уларнинг йиғиндиси тўғри тўртбурчак диагонали бўйлаб йўналади ҳамда \vec{v}_B нинг модули $v_B = \sqrt{v_0^2 + v_{BO}^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = 11,66$ м/с га тенг бўлади.

2. Масалани тезликлар оний марказини топиш усули билан ечиш учун O нуқтадан \vec{v}_O векторга ҳаракат йўналиши бўйича тўғри бурчак остида OK чизиқни ўтказамиз (10.11-рasm, б). P айланиш оний маркази O қутбдан

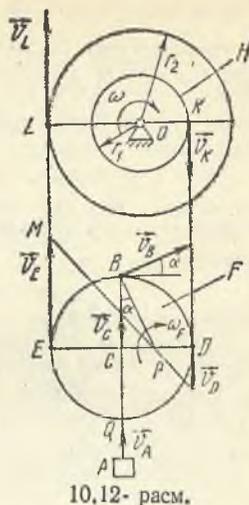
$$PO = \frac{v_O}{\omega} = \frac{5}{6} \text{ м}$$

масофада ётади.

\vec{v}_A ва \vec{v}_B векторлари мос равишда PA ва PB га перпендикуляр бўлиб, ғилдирак айланадиган томонга йўналади ҳамда уларнинг модули (10.10) га асосан аниқланади:

$$v_A = \omega \cdot PA = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4 \text{ м/с,}$$

$$v_B = \omega \cdot PB = 12 \sqrt{(0,5)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = 11,66 \text{ м/с,}$$



10.12-рasm.

10.2-масала. Радиуслари $r_1 = 20$ см, $r_2 = 40$ см бўлган икки поғонали H барабан O нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида $\omega = 3 \text{ с}^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади (10.12-рasm). H барабан поғоналарига чўзилмайдиган ип ўралган бўлиб, у маркази C бўлган F ғалтакни ҳам қамраб олган. Ипни барабан ва ғалтак сиртлари бўйича сирпанмайди деб қараб, ғалтакнинг бурчак тезлиги, рasmда кўрсатилган ҳолатда ғалтак ғардишидаги B нуқтанинг тезлиги ($BC \perp ED$) ҳамда ғалтак C нуқтасига осилган A юкнинг тезлиги аниқлансин.

Ечиш. F ғалтак доимо рasm текислигида ҳаракатланади, яъни у текис параллел ҳаракатда бўлади.

Ғалтак $KDQEL$ ипда сирпанмасдан думалагани учун

$$\vec{v}_D = \vec{v}_K, v_E = v_L.$$

K ва L нуқталар H барабан ғардишидаги нуқталар бўлганидан

$$v_K = \omega \cdot r_1 = 0,6 \text{ м/с,}$$

$$v_L = \omega \cdot r_2 = 1,2 \text{ м/с.}$$

Шундай қилиб, $v_D = 0,6 \text{ м/с}$, $v_E = 1,2 \text{ м/с}$ ҳамда $\vec{v}_E \parallel \vec{v}_D$, $\vec{v}_E \perp ED$. Бинобарин, \vec{v}_E ва \vec{v}_D векторлар учлари орқали MN тўғри чизиқ ўтказиб, бу чизиқнинг ED билан кесилган P нуқтаси ғалтакнинг тезликлар оний маркази бўлишини топамиз. (10.12) формулага кўра DP оралиқни аниқлаймиз:

$$\frac{v_E}{EP} = \frac{v_D}{DP} \quad \text{ёки} \quad \frac{v_E}{ED - DP} = \frac{v_D}{DP}.$$

Бу тенгликда $ED = r_1 + r_2 = 0,6 \text{ м}$ бўлгани учун

$$DP = \frac{v_D}{v_E + v_D} \cdot ED = 0,2 \text{ м.}$$

Шундай қилиб, $DP = 0,2 \text{ м}$, $PC = 0,1 \text{ м}$, $PE = 0,4 \text{ м}$.

Ғалтак бурчак тезлиги ω_P ни (10.10) тенгликка биноан аниқлаймиз.

$$\omega_P = \frac{v_D}{DP} = 3 \text{ с}^{-1}.$$

B ва P нуқталарни туташтириб галтак айланиши йўналишига мос равишда BP га перпендикуляр ўтказиб, B нуқта тезлигининг йўналишини топамиз. \vec{v}_B модули эса (10.10) формулага биноан топилади:

$$v_B = \omega_P \cdot BP = \omega_P \cdot \sqrt{(PC)^2 + (CB)^2} = 0,95 \text{ м/с.}$$

$$BCP \text{ учбурчакдан: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{PC}{BC}, \alpha = \operatorname{arctg} 0,3 = 18^\circ 30'. \text{ } AC \text{ стержень илга-}$$

рилама ҳаракатда бўлгани учун $\vec{v}_A = \vec{v}_C$. C нуқта F галтакка ҳам тегишли бўлганидан

$$v_C = \omega_P \cdot CP = 0,3 \text{ м/с.}$$

Демак, $v_A = 0,3 \text{ м/с.}$

10.3-масала. Планетар — кулиса механизмида OA кривошип O ўқ атрофида ω_0 бурчак тезлик билан айланиб, BF стерженга шарнирли боғланган D сателлитни ҳаракатга келтиради (10.13-рasm). BF стержень ўзининг ҳаракатида доимо қўзғалмас C нуқтадан ўтади. OA кривошип вертикал ҳолатни эгаллаган, $\varphi = 30^\circ$,

$\widehat{BAO} = 90^\circ$ бўлган пайтда BF стержень C нуқтасининг тезлиги аниқлансин. Қўзғалмас шестерня радиуси $2r$, қўзғалувчи шестерня радиуси r га тенг ҳамда $AB = r\sqrt{3}$.

Ечиш. BF стержень C нуқтасининг тезлиги A ва B нуқталар тезлигига боғлиқ бўлгани туфайли аввал A ва B нуқталар тезлигини аниқлаймиз.

A нуқта ω_0 бурчак тезлик билан айланувчи OA кривошипга тегишли бўлганидан $\vec{v}_A \perp OA$ ҳамда

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = 3r \cdot \omega_0.$$

D сателлит текис параллел ҳаракат қилади, бунда қўзғалувчи ва қўзғалмас шестерняларнинг P урниш нуқтаси сателлитнинг тезликлар оний маркази бўлади. Шунинг учун сателлит B нуқтасининг \vec{v}_B тезлиги P атрофида сателлитнинг айланиш йўналишига мос равишда PB кесмага перпендикуляр равишда йўналади. Тўри бурчакли PAB учбурчакда:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AP}{AB} = \frac{r}{\sqrt{3}r} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ яъни } \alpha = 30^\circ.$$

Проекция усулидан фойдаланиб B нуқта тезлигини аниқлаймиз:

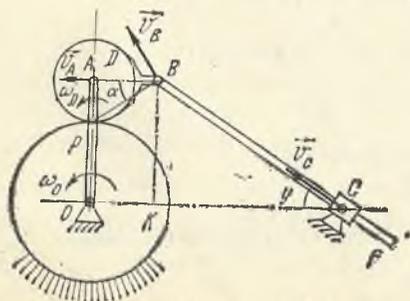
$$np_{BA} \vec{v}_B = np_{BA} \vec{v}_A.$$

Шунга кўра $v_B \cos 60^\circ = v_A$ ёки $v_B = \frac{v_A}{\cos 60^\circ} = 6r \omega_0.$

BF стержень ҳаракати ҳам текис параллел ҳаракатдан иборат. Стерженнинг C нуқтаси доимо қўзғалмас нуқтадан ўтгани учун унинг \vec{v}_C тезлиги B нуқта тезлигига мос равишда стержень бўйича йўналади ҳамда проекция усулига асосан v_C ва v_B ларнинг CB ўқдаги проекциялари ўзаро тенг бўлади:

$$np_{CB} \vec{v}_C = np_{CB} \vec{v}_B.$$

Бу формулага кўра $v_C = v_B \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}r \cdot \omega_0.$



10.13-рasm.

10.6 - §. Центроидалар

Умумий ҳолда тезликлар оний маркази вақтнинг ўтиши билан текис шаклнинг ҳаракат текислигида ўз ҳолатини ўзгартира боради. Агар тезликлар оний марказининг ҳар ондаги ҳолатини текис шаклда ва ҳаракат текислигида белгилаб борсак, уларнинг геометрик ўрни иккита чизиқни ифодалайди.

Тезликлар оний марказининг текис шаклнинг ҳаракат текислигидаги геометрик ўрни *қўзғалмас центроида* дейилади.

Тезликлар оний марказининг текис шаклга боғланган текисликдаги геометрик ўрни *қўзғалувчи центроида* дейилади.

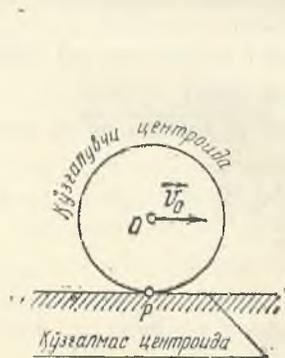
Масалан, қўзғалмас рельс устида сирпанмай думалаётган гилдирак учун қўзғалмас центроида тўғри чизиқ, қўзғалувчи центроида гилдирак гардишидаги айланадан иборат (10.14 - расм).

Ҳар онда қўзғалмас ва қўзғалувчи центроидалар тезликлар оний марказини ифодаловчи P нуқтада умумий уриниш нуқтасига эга бўлади. Шу сабабли қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини геометрик тарзда қўйидагича талқин қилиш мумкин: *текис шаклнинг ҳаракатини қўзғалувчи центроидани қўзғалмас центроида устида сирпантирмасдан думалатиши натижасида олиш мумкин.*

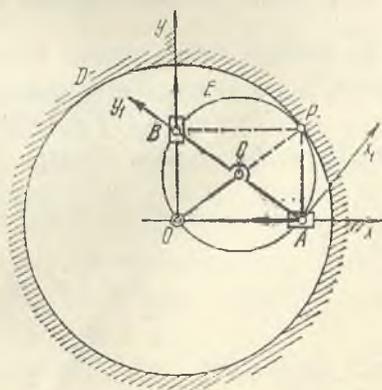
✓ 10.4 - масала. Узунлиги $2a$ га тенг бўлган эллипсограф AB линейкасининг A учи Ox ўқ, B учи Oy ўқ бўйлаб ҳаракат қилади. Эллипсограф линейкасининг ҳаракати учун центроидалар топилсин (10.15 - расм).

Ечиш. A ва B нуқтанинг тезлик векторлари Ox ва Oy ўқларда ётади. A ва B нуқталарда уларнинг тезликлари йўналишига перпендикуляр чизиқлар ўтказиб, кесилган нуқтасида ётувчи тезликлар оний маркази P нуқтани аниқлаймиз. AB нинг турли ҳолатига мос равишда P нинг ҳолатини аниқлаш мумкин. 10.15 - расмдан кўрамизки, $OP = AB = 2a$ ҳамيشа ўзгармас бўлади. Бинобарин, P нуқтанинг қўзғалмас Oxy координаталар системасига нисбатан геометрик ўрни радиуси $2a$, маркази O нуқтада бўлган айланадан иборат бўлади. Бу айланани D билан белгиласак, у қўзғалмас центроидани ифодалайди.

Агар AB нинг ўртасидаги нуқтани C билан белгиласак, ҳаракат давомида ҳамيشа $CP = \frac{1}{2} OP = a$ ўзгармас бўлишини кўрамиз. Бинобарин, P нуқтанинг



10.14 - расм.



10.15 - расм.

Шундай қилиб, (10.14) ифодани қўйидагича ёза оламиз:

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{MO}^{\tau} + \vec{\omega}_{MO}^n. \quad (10.17)$$

Бу формулада айланма тезланиш билан марказга интилма тезланишларнинг геометрик йиғиндиси M нуқтанинг O қутб атрофида айланишидаги тезланишни ифодалайди:

$$\vec{\omega}_{MO}^{\tau} \times \vec{\omega}_{MO}^n = \vec{\omega}_{MO}.$$

Натижада (10.17) ни қўйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{MO}. \quad (10.18)$$

(10.17) формулалаги $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$ айланма тезланиш вектори M нуқтани O қутб билан бирлаштирувчи OM чизиққа перпендикуляр равишда йўналади; бунда ω_z ва e_z бир хил ишорали бўлса, $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$ ва \vec{v}_{MO} векторлари бир йўналишда; турлича ишорали бўлса, $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$ нинг йўналиши \vec{v}_{MO} га қарама-қарши бўлади (10.16-расмда ω_z ва e_z бир хил ишорали бўлган ҳол тасвирланган). (10.17) даги $\vec{\omega}_{MO}^n$ марказга интилма тезланиш вектори ҳаминша M нуқтадан O қутб томон йўналади.

(9.17), (9.18) ва (9.20) формулаларга асосан $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$, $\vec{\omega}_{MO}^n$ ва $\vec{\omega}_{MO}$ ларнинг миқдори

$$\omega_{MO}^{\tau} = \varepsilon \cdot MO, \quad (10.19)$$

$$\omega_{MO}^n = \omega^2 MO, \quad (10.20)$$

$$\omega_{MO} = MO \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (10.21)$$

$\vec{\omega}_{MO}$ нинг йўналиши эса (9.21) га кўра

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (10.22)$$

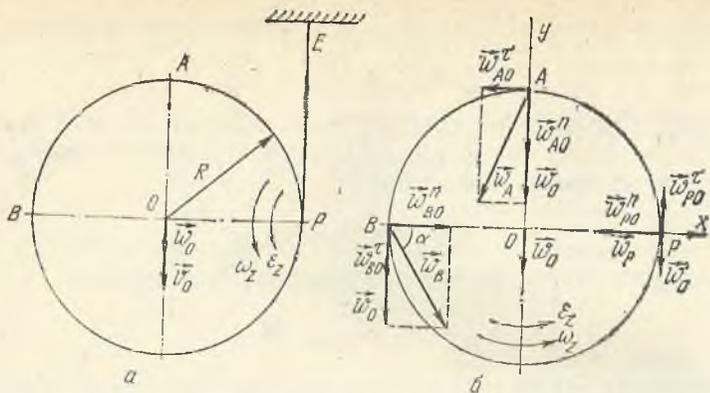
формулалар ёрдамида аниқланади.

10.8-§. Қутб усули билан текис шакл нуқталарининг тезланишларини аниқлашга оид масалалар

Текис параллел ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезланишини аниқлашга доир масалаларни асосан 4 хил гуруҳга бўлиш мумкин.

I хил масалалар. Текис шаклнинг бурчак тезлиги ω , бурчак тезланиши ε ҳамда бирор O нуқтасининг тезланиши $\vec{\omega}_O$ берилган ёки уларни аниқлаш мумкин бўлиб, текис шакл ихтиёрий M нуқтасининг тезланишини аниқлаш сўралади.

M нуқтанинг тезланишини (10.17) дан фойдаланиб, $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$ ва $\vec{\omega}_{MO}^n$ ларнинг миқдорларини эса (10.19), (10.20) формулалар ёрдами-



10.17- расм.

да аниқлаймиз. Сўнгра (10.17)ни ўзаро перпендикуляр иккита Mx ва My йўналишга проекциялаб $\vec{\omega}_M$ шинг миқдорини $\omega_M = \sqrt{\omega_{Mx}^2 + \omega_{My}^2}$ формула билан аниқлаш мақсадга мувофиқдир, $\vec{\omega}_M$ йўналиши эса йўналтирувчи косинуслар орқали топилади.

✓10.5-масала. Радиуси R га тенг ғалтакка E учи қўзғалмайдиган қилиб боғланган ингичка ип ўралган (10.17-расм, а). Ғалтак пастга тушишида унинг ўқи вертикал бўйича йўналган $v_0 = \frac{1}{2}gt$ тезлик билан ҳаракатланади. Ғалтак гардишидаги P, A, B нуқталарнинг тезланишлари аниқлансин; $PB \perp AO$.

Ечиш. Ғалтак текис параллел ҳаракат қилади. Ғалтак марказидаги O нуқтанинг вертикал бўйича тўғри чизиқли ҳаракати берилган. Бинобарин, O нуқтани қутб деб таълаш учун аввало унинг тезланишини аниқлаймиз:

$$\omega_0 = \frac{dv_0}{dt} = \frac{1}{2}g.$$

$\vec{\omega}_0$ вектори вертикал бўйича пастга йўналган.

Ип осилиб турган қисмининг тезлиги нолга тенг бўлганидан ғалтак P нуқтасининг тезлиги ҳам нолга тенг, яъни P нуқта ғалтакнинг тезликлар оний маркази бўлади. Шу сабабли ғалтакнинг бурчак тезлиги

$$\omega_z = \frac{v_0}{OP} = \frac{g}{2R}t$$

бўлади. \vec{v}_0 тезлик йўналишига кўра бурчак тезликни соат стрелкаси ҳаракати-га тескари йўналган ёй стрелкаси тарзида тасвирлаш мумкин.

Ғалтак бурчак тезлиги вақтнинг функцияси сифатида аниқланган. Бинобарин, ғалтакнинг бурчак тезланиши қуйидагича топилади:

$$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \frac{g}{2R}.$$

ω_z ва ε_z бир хил ишорали бўлгани учун ғалтакнинг бурчак тезланишини 10.17-расм, а да кўрсатилган ёй стрелкаси билан тасвирлаш мумкин.

O нуқтани қутб деб олсак, (10.17) формулага биноан тезликлар оний маркази P нуқтанинг тезланиши қуйидаги тенгламадан аниқланади:

$$\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{PO}^n + \vec{\omega}_{PO}^\tau. \quad (1)$$

(10.20) ва (10.19) га кўра

$$\omega_{PO}^n = \omega^2 \cdot PO = \frac{g^2}{4R} t^2, \quad (2)$$

$$\omega_{PO}^\tau = \varepsilon \cdot PO = \frac{1}{2} g \quad (3)$$

бўлиб, $\vec{\omega}_{PO}^n$ марказга интилма тезланиш вектори P дан O га қараб, $\vec{\omega}_{PO}^\tau$ — айланма тезланиш вектори эса OP га перпендикуляр равишда ε ёй стрелкаси йўналишига мослаб йўналтирилади. 10.17-рasm, б дан кўраимизки, $\vec{\omega}_{PO}^\tau$ ва $\vec{\omega}_O$ векторлари бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналган ҳамда $\vec{\omega}_O = -\vec{\omega}_{PO}^\tau$. Шундай қилиб, (1) ифодада $\vec{\omega}_O = -\vec{\omega}_{PO}^\tau$ бўлгани туфайли

$$\vec{\omega}_P = \vec{\omega}_{PO}^n \quad \text{ва} \quad \omega_P = \frac{g^2}{4R} t^2.$$

P нуқта тезланиши P дан O га қараб йўналган. A нуқта тезланишини аниқлашда яна O ни қутб деб оламиз:

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{AO}^n + \vec{\omega}_{AO}^\tau. \quad (4)$$

Бу ифодадаги $\vec{\omega}_{AO}^n$ вектори A дан O га қараб, яъни $\vec{\omega}_O$ билан бир томонга, $\vec{\omega}_{AO}^\tau$ эса Ox ўқнинг мусбат йўналишига тескари йўналган. $AO = OP = R$ бўлгани учун $\vec{\omega}_{AO}^n$ ва $\vec{\omega}_{AO}^\tau$ миқдорлари (2) ва (3) тенгликлар билан аниқланади.

(4) вектор тенгламани ўзаро перпендикуляр Ox ва Oy ўқларга проекциялаймиз:

$$\omega_{Ax} = -\omega_{AO}^\tau = -\frac{g}{2},$$

$$\omega_{Ay} = -\omega_O - \omega_{AO}^n = -\frac{g}{4R} (2R + gt^2).$$

Бинобарин, A нуқта тезланишининг модули

$$\omega_A = \sqrt{\omega_{Ax}^2 + \omega_{Ay}^2} = \frac{g}{2R} \sqrt{R^2 + \frac{(2R + gt^2)^2}{4}},$$

$\vec{\omega}_A$ нинг йўналиши эса

$$\cos(\vec{\omega}_A, x) = \frac{\omega_{Ax}}{\omega_A} = -\frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{(2R + gt^2)^2}{4}}},$$

$$\cos(\vec{\omega}_A, y) = \frac{\omega_{Ay}}{\omega_A} = -\frac{2R + gt^2}{2\sqrt{R^2 + \frac{(2R + gt^2)^2}{4}}}$$

формулалардан аниқланади.

B нуқта тезланиши ҳам аввалгига ўхшаш аниқланади:

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{BO}^n + \vec{\omega}_{BO}^\tau. \quad (5)$$

(5) тенгламада

$$\omega_{BO}^n = \omega^2 \cdot OB = \frac{g^2 l^2}{4R}, \quad \omega_{BO}^t = \varepsilon \cdot OB = \frac{g}{2}.$$

$\vec{\omega}_{BO}^n, \vec{\omega}_{BO}^t$ векторлари 10.17-расм, б да кўрсатилганидек йўналган.

(5) да $\vec{\omega}_O$ ва $\vec{\omega}_{BO}^t$ бир ил йўналишда, $\vec{\omega}_{BO}^n$ эса мазкур йўналишга перпендикуляр бўлгани учун

$$\omega_B = \sqrt{(\omega_{BO}^n)^2 + (\omega_O + \omega_{BO}^t)^2} = \frac{g}{2R} \sqrt{g^2 l^2 + 16R^2}.$$

В нуқта тезланишининг йўналишини α бурчак орқали аниқлаш мумкин:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_{BO}^t + \omega_O}{\omega_{BO}^n} = \frac{g}{\frac{g^2 l^2}{4R}} = \frac{4R}{gl^2}$$

ёки

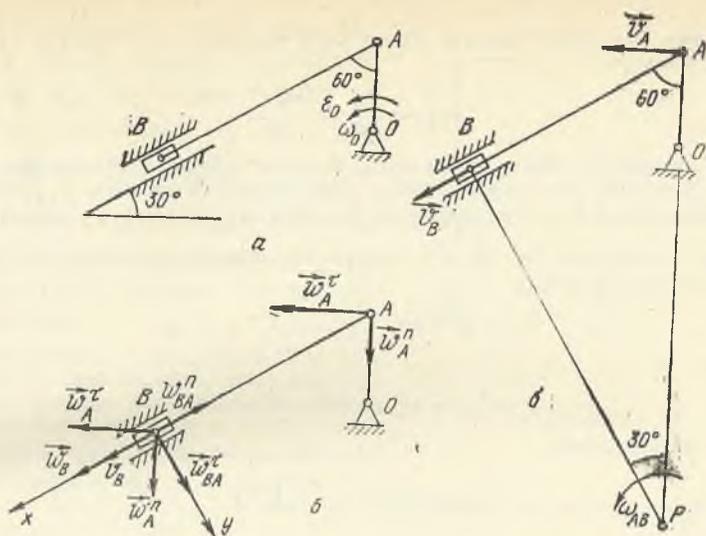
$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4R}{gl^2}.$$

II хил масалалар. Вақтнинг бирор пайти учун текис шакл O нуқтаси тезланишининг миқдор ва йўналиши, оний бурчак тезлик ва бошқа бирор M нуқтаси тезланишининг йўналган чизиги маълум. Текис шаклнинг шу пайтдаги бурчак тезланиши ва M нуқта-нинг тезланишини аниқлаш талаб этилади.

M нуқта тезланишини аниқлашда (10.17) формуладан фойдаланамиз.

Ундаги $\vec{\omega}_{MO}^n$ нинг миқдори (10.20) формула билан аниқланади. Бинобарин (10.17) тенгликнинг ўнг томонидаги $\vec{\omega}_O$ ва $\vec{\omega}_{MO}^n$ векторлар миқдор ва йўналиш жиҳатдан маълум. $\vec{\omega}_{MO}^t$ MO га перпендикуляр бўлиб, унинг йўналиши маълум эмас. Одатда $\vec{\omega}_{MO}^t$ ни йўналтиришда M нуқтанинг O атрофида айланиши тезланувчан деб қаралади. (10.17) тенгламани $\vec{\omega}_M$ га перпендикуляр йўналишга проекциялаш натижасида $\vec{\omega}_{MO}^t$ нинг миқдори аниқланадиган битта тенгламага эга бўламиз. Агар бу катталиқ манфий қийматга эга бўлса, $\vec{\omega}_{MO}^t$ нинг ҳақиқий йўналиши олинган йўналишга қарама-қарши, яъни M нинг O атрофида айланиши секинланувчан бўлади. $\vec{\omega}_{MO}^t$ ни билган ҳолда (10.19) га асосан ε ни аниқлаймиз. (10.17) ни $\vec{\omega}_M$ га перпендикуляр бўлмаган ўққа проекциялаб, $\vec{\omega}_M$ ни миқдор ва йўналиш жиҳатдан аниқлаймиз. Бунда ω_M нинг ишораси унинг йўналишини характерлайди.

✓ 10.6-масала. Кривошип-шатунли механизмнинг берилган ҳолати учун B нуқтанинг тезланиши аниқлансин (10.18-расм, а), Қуйидагилар берилган: $AB = l$, $OA = r$, $\omega_{OA} = \omega_0$, $\varepsilon_{OA} = \varepsilon_0$.



10.18- расм.

Ечиш. OA кривошип ω_0 бурчак тезлик ва ϵ_0 бурчак тезланиш билан айланма ҳаракатда бўлгани учун A нуқтанинг тезлик ва тезланишини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$[v_A = \omega_0 \cdot r, \quad (1)$$

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_A^\tau + \vec{\omega}_A^n, \quad (2)$$

бунда

$$\omega_A^\tau = \epsilon_0 \cdot r, \quad \omega_A^n = \omega_0^2 \cdot r. \quad (3)$$

Бу векторларнинг йўналиши 10.18-расм, б ва в дагидек йўналган.

A нуқтани қутб деб олиб, AB шатуш B нуқтасининг тезланишини (10.17) га биноан аниқлаймиз (10.18-расм, в):

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^\tau + \vec{\omega}_{BA}^n$$

ёки

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A^\tau + \vec{\omega}_A^n + \vec{\omega}_{BA}^\tau + \vec{\omega}_{BA}^n. \quad (4)$$

В нуқтанинг ҳаракатини тезланувчан деб қараб, $\vec{\omega}_B$ ни \vec{v}_B бўйича йўналтирамиз.

(4) ифодада

$$\omega_{BA}^\tau = \epsilon_{AB} \cdot AB = \epsilon_{AB} \cdot l, \quad \omega_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \omega_{AB}^2 \cdot l \quad (5)$$

бўлиб, ω_{AB} ва ϵ_{AB} лар мос равишда AB шатушнинг берилган пайтдаги оний бурчак тезланишини ифодалайди.

$\vec{\omega}_{BA}^n$ вектори B нуқтадан A қутбга йўналган; $\vec{\omega}_{BA}^\tau$ эса AB га перпендикуляр йўналган. B нуқтанинг A қутбга нисбатан айланишини тезланувчан деб фараз қилиб, AB шатушнинг P тезликлар оний маркази атрофида айланишидаги оний бурчак тезлик йўналишига мос равишда $\vec{\omega}_{BA}^\tau$ ни 10.18-расм, в дагидек йў-

валтираммиз. Шатуннинг берилган ҳолати учун тезликлар оний маркази P нуқтада бўлгани учун

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{\omega_0 r}{2l} \quad (6)$$

(6) формула ёрдамида механизмнинг берилган пайтдаги ҳолатига мос келувчи AB шатуннинг оний бурчак тезлиги аниқланади. Шу сабабли, ε_{AB} ни (6) ни дифференциаллаш йўли билан аниқлаб бўлмайди. ε_{AB} номаълум бўлгани учун ω_{BA}^T ни аниқлашда (4) ни $\vec{\omega}_B$ вектори йўналишига перпендикуляр бўлган V_B ўққа проскициялаймиз:

$$0 = \omega_A^n \cos 30^\circ - \omega_A^T \cos 60^\circ + \omega_{BA}^T.$$

Бундан

$$\omega_{BA}^T = \omega_A^T \cos 60^\circ - \omega_A^n \cos 30^\circ.$$

(3) ни назарда тутсак,

$$\omega_{BA}^T = \frac{r}{2} (\varepsilon_0 - \omega_0^2 \sqrt{3}). \quad (7)$$

(7) дан кўраммизки, $\varepsilon_0 > \omega_0^2 \sqrt{3}$ бўлса, $\omega_{BA}^T > 0$ ва B нуқтанинг A қутб атрофида оний айланиши тезланувчан бўлади ва $\vec{\omega}_{BA}^T$ йўналиши 10.18-рasm, a да кўрсатилганидек қолади; $\varepsilon_0 < \omega_0^2 \sqrt{3}$ ҳолида ω_{BA}^T нинг йўналиши мазкур rasm-дагига қарама-қарши бўлади.

(5) га кўра $\omega_{BA}^T = \varepsilon_{AB} \cdot l$ бўлгани учун

$$\varepsilon_{AB} = \frac{r}{2l} (-\omega_0^2 \sqrt{3} + \varepsilon_0).$$

(4) ни V_B ўққа проекцияласак,

$$\begin{aligned} \omega_{Bx} = -\omega_{BA}^n + \omega_A^T \cos 30^\circ + \omega_A^n \cos 60^\circ = -\omega_{AB}^2 l + \frac{\varepsilon_0 r \sqrt{3}}{2} + \\ + \frac{\omega_0^2 r}{2} = -\frac{\omega_0^2 r^2}{4l} + \frac{\varepsilon_0 r \sqrt{3}}{2} + \frac{\omega_0^2 r}{2} = \frac{r}{2} \left[\omega_0^2 \left(-\frac{r}{2l} + 1 \right) + \varepsilon_0 \sqrt{3} \right] \end{aligned}$$

Агар $\left[\omega_0^2 \left(-\frac{r}{2l} + 1 \right) + \varepsilon_0 \sqrt{3} \right] > 0$ бўлса, $\vec{\omega}_B$ нинг йўналиши V_B нинг мусбат, акс ҳолда манфий йўналишига мос тушади.

Шундай қилиб,

$$\omega_B = \frac{r}{2} \left| \omega_0^2 \left(-\frac{r}{2l} + 1 \right) + \varepsilon_0 \sqrt{3} \right|. \quad \checkmark$$

III хил масалалар. Вақтнинг бирор пайти учун текис шакл икки-та O ва M нуқталарининг тезланиши миқдор ва йўналиш жиҳатдан маълум бўлиб, текис шаклнинг шу пайтдаги бурчак тезлиги, бурчак тезланиши, шунингдек ихтиёрий нуқтасининг тезланишини аниқлаш сўралади.

Масалани ечиш учун тезланиши маълум бўлган нуқталардан бири, масалан O нуқтани қутб деб олиб, иккинчи нуқтасининг тезланиши учун (10.17) кўринишдаги тенгламани олиб, уни иккита бир-бирига перпендикуляр йўналишига (одатда OM ва унга тик бўл-

ган йўналишга) проекцияланади. Ҳосил бўлган иккита тенгламадан $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$ ва $\vec{\omega}_{MO}^n$ лар ҳамда (10.20) ва (10.19) воситасида ω ва ε лар аниқланади. Бунда $\vec{\omega}_{MO}^n$ M нуқтадан O га қараб йўналган. $\vec{\omega}_{MO}^{\tau}$

вектори $\vec{\omega}_{MO}^n$ га перпендикуляр равишда (10.17) тенглик асосида йўналтирилади.

✓ 10.7-масала. Узунлиги 0,12 м бўлган бир жинсли стержень текис параллел ҳаракат қилади. Стержень учларидаги нуқталарнинг тезланиши $\omega_A = 0,24$ м/с², $\omega_B = 0,12$ м/с² ҳамда AB га перпендикуляр равишда бир томонга йўналган. Стержень бурчак тезлиги, бурчак тезланиши ва C оғирлик марказининг тезланиши аниқлансин (10.19-рasm, a).

Ечиш. BA билан $\vec{\omega}_B - \vec{\omega}_A$ айирма орасидаги бурчак 90° га тенг бўлгани учун масала ечимга эга.

Қутб учун A нуқтани қабул қилсак, (10.17) га кўра C нуқтанинг тезланиши

$$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{CA}^{\tau} + \vec{\omega}_{CA}^n \quad (1)$$

формула ёрдамида аниқланади. (1) даги $\vec{\omega}_{CA}^{\tau}$ ва $\vec{\omega}_{CA}^n$ ларни аниқлаш учун дастлаб бурчак тезлик ω ва бурчак тезланиш ε ларнинг қийматини ҳисоблаш керак.

Бу катталикларни ҳисоблаш учун B ва A нуқталарининг тезланишлари орасидаги муносабатни ифодаловчи

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^{\tau} + \vec{\omega}_{BA}^n \quad (2)$$

тенгламадан фойдаланилади. (10.19) ва (10.20) га кўра (2) да

$$\omega_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB, \quad \omega_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB$$

ҳамда $\vec{\omega}_{BA}^n$ B дан A га қараб йўналади; $\vec{\omega}_{BA}^{\tau}$ ни йўналтиришда B нинг A қутбга нисбатан айланиши соат стрелкаси айланишига тескари деб оламиз.

(2) ни танлаб олинган x ва y ўқларга проекциялаб

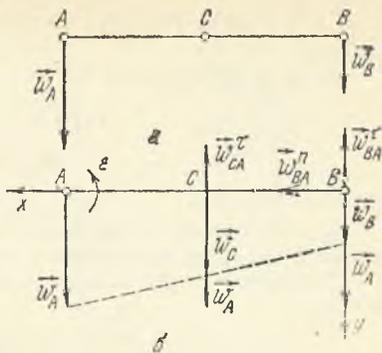
$$\left. \begin{aligned} 0 &= \omega_{BA}^n, \\ \omega_B &= \omega_A - \omega_{BA}^{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

тенгламаларни оламиз. Шундай қилиб,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{BA}^n &= 0, \\ \omega_{BA}^{\tau} &= \omega_A - \omega_B = 0,12 \text{ м/с}^2 \end{aligned} \right\}$$

Эки (10.20), (10.19) ларни эътиборга олсак,

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 0, \\ \varepsilon &= \frac{\omega_{BA}^{\tau}}{AB} = 1 \text{ с}^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



10.19-рasm.

$\varepsilon > 0$ бўлгани учун ω_{BA}^T 10.19-расм, б дагидек йўналганлигига ишонч ҳосил қиламиз.

(4) ни эътиборга олсак, (1) да

$$\omega_{CA}^T = \varepsilon \cdot AC = 0,06 \text{ м/с}^2,$$

$$\omega_{CA}^n = \omega^2 \cdot AC = 0$$

бўлишини кўрамиз.

ω_{CA}^T вектори AB га перпендикуляр равишда C нуқтанинг қутбга нисбатан айланishi йўналшига мослаб олиниши керак.

C нуқтанинг тезланишини аниқлаш учун (1) ни x ва y ўқларга проекциялаймиз:

$$\omega_{Cx} = 0,$$

$$\omega_{Cy} = \omega_A - \omega_{CA}^T = 0,24 - 0,06 = 0,18 \text{ м/с}^2.$$

Бинобарин, C нуқтанинг тезланиши миқдор жиҳатдан $\omega_C = 0,18 \text{ м/с}^2$ га тенг бўлиб, y Bu ўқнинг йўналиши бўйича, яъни $\vec{\omega}_A$ ва $\vec{\omega}_B$ ларга параллел равишда йўнalar экан. ✓

IV хил масалалар. Вақтнинг бирор пайти учун текис шаклнинг овий бурчак тезлиги ω ва O нуқтасининг тезланиши $\vec{\omega}_O$ миқдор ва йўналиш жиҳатдан берилган. Ушбу текис шаклнинг ихтиёрий M нуқтаси шакл текислигидаги бирор O_1 қўзғалмас ўқ атрофида ω_1 бурчак тезлик билан айланувчи жисмга ҳам тааллуқлидир. M нуқтанинг тезланишини, текис шакл, шунингдек, O_1 ўқ атрофида айланувчи жисмнинг бурчак тезланишини аниқлаш сўралади.

Бу хилдаги масалаларни ечишда бир томондан M нуқтани текис шаклга тегишли деб қараб, (10.17) тенгламани, иккинчи томондан O_1 ўқ атрофида айланувчи жисмга тааллуқли деб қараб, (9.16) га кўра

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_{MO_1}^T + \vec{\omega}_{MO_1}^n, \quad (a)$$

тенгламани ёзиш мумкин. (10.17) ва (a) тенгламаларни ўнг томонларини ўзаро тенглаштирак,

$$\omega_{MO_1}^T + \omega_{MO_1}^n = \vec{\omega}_O + \omega_{MO}^T + \omega_{MO}^n \quad (б)$$

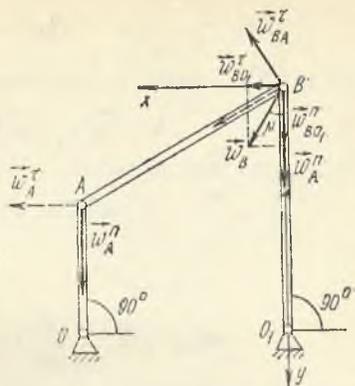
векторли тенглама оламиз. ω ва ω_1 берилган бўлгани учун (б) тенгламадаги $\vec{\omega}_{MO_1}^n$, $\vec{\omega}_O$, $\vec{\omega}_{MO}^n$ ларни ҳисоблаб топиш мумкин; $\vec{\omega}_{MO_1}^T$ ва $\vec{\omega}_{MO}^T$ векторларининг йўналиши M нуқтанинг мос равишда O_1 ва O ларга нисбатан айланиши тезланувчан деб тахмин қилиниб танланади. (б) ифодани икки хил йўналишга проекциялашдан ҳосил бўлган тенгламалардан $\omega_{MO_1}^T$ ва ω_{MO}^T аниқланади. Сўнгра M нуқта тезланиши модули (9.20) га асосан

$$\omega_M = \sqrt{(\omega_{MO_1}^T)^2 + (\omega_{MO_1}^n)^2},$$

бурчак тезланишлари эса (10.19) ва (9.17) га кўра аниқланади:

$$\varepsilon = \frac{\omega_{MO}^{\tau}}{MO}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\omega_{MO_1}^{\tau}}{MO_1}.$$

Бу ҳолда M нуқта тезланишининг йўналиши (9.22) тенгликдан фойдаланиб топилади.



10.20- расм.

✓ 10.8- масала. Шарнирли $OABO_1$ тўртъушбунга механизмида OA кривошип ўзгармас ω_0 бурчак тезлик билан ҳаракатланади. Агар $O_1B = AB = 2OA = 2a$ бўлса, механизмнинг 10.20-расмда кўрсатилган ҳолати учун AB стержень ва O_1B кривошипнинг бурчак тезлиги, бурчак тезланиши ва B нуқтасининг тезланиши аниқлансин.

Ечиш. B нуқта бир йўла AB кривошипка ва BO_1 шатунга тааллуқли бўлгани учун унинг тезланиши икки хил тенглама ёрдамида аниқланиши мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_B &= \vec{w}_A + \vec{w}_{BA}^{\tau} + \vec{w}_{BA}^n, \\ \vec{w}_B &= \vec{w}_{BO_1}^{\tau} + \vec{w}_{BO_1}^n. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Бунда

$$\vec{w}_A = \vec{w}_A^{\tau} + \vec{w}_A^n \quad (2)$$

ҳамда

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_A^{\tau} &= OA \cdot \varepsilon_0 = a \cdot 0 = 0, \\ \vec{w}_A^n &= OA \cdot \omega_0^2 = a \cdot \omega_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_{BA}^{\tau} &= AB \cdot \varepsilon_{AB} = 2a \varepsilon_{AB}, \\ \vec{w}_{BA}^n &= AB \cdot \omega_{AB}^2 = 2a \omega_{AB}^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\vec{w}_{BO_1}^n = \frac{v_B^2}{BO_1} = \frac{v_B^2}{2a}.$$

Бу формулаларда ω_{AB} , ε_{AB} лар мос равишда AB шатуннинг оний бурчак тезлиги ва оний бурчак тезланишини ифодалайди. $\vec{w}_A^{\tau} = 0$ бўлгани учун A нуқтанинг тезланиши $\vec{w}_A = \vec{w}_A^n$ фақат марказга интилма тезланишдан иборат бўлади ва A дан O га йўналади. \vec{w}_{BA}^{τ} тезланиш AB га перпендикуляр, $\vec{w}_{BO_1}^{\tau}$ эса BO_1 га перпендикуляр йўналади. B нуқтанинг A ва O_1 га нисбатан айланишини тезланувчан деб тахмин қилиб, \vec{w}_{BA}^{τ} ва $\vec{w}_{BO_1}^{\tau}$ векторларни 10.20-расмдагидек йўналтирамиз.

\vec{v}_A ва \vec{v}_B ўзаро параллел ва уларга ўтказилган перпендикуляр чизиклар ўзаро кесилмаганлиги туфайли AB шатуннинг берилган ондаги бурчак тезлиги $\omega_{AB} = 0$ бўлади. Шу сабабли $v_A = v_B$ ҳамда

$$\vec{w}_{BA}^n = 0, \quad (5)$$

$$\omega_{BO_1}^n = \frac{v_A^2}{2a} = \frac{a\omega_0^2}{2} \quad (6)$$

(2), (3) ва (5) га асосан (1) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{\omega}_{BO_1}^n + \vec{\omega}_{BO_1}^\tau = \vec{\omega}_A^n + \vec{\omega}_{BA}^\tau \quad (7)$$

(7) ни Bu ўққа проекциялаймиз:

$$\omega_{BO_1}^n = \omega_A^n - \omega_{BA}^\tau \cos 30^\circ,$$

бундан

$$\omega_{BA}^\tau = \frac{\omega_A^n - \omega_{BO_1}^n}{\cos 30^\circ} = \frac{a\omega_0^2 - \frac{a\omega_0^2}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\omega_0^2 \sqrt{3}}{3}$$

У ҳолда AB шатуннинг бурчак тезланиши

$$\epsilon_{AB} = \frac{\omega_{BA}^\tau}{AB} = \frac{a\omega_0^2 \sqrt{3}}{3 \cdot 2a} = \frac{\omega_0^2 \sqrt{3}}{6}$$

$\epsilon_{AB} > 0$ бўлгани учун $\vec{\omega}_{BA}^\tau$ ҳақиқатан ҳам 10.20-расмдагидек йўналганлигига ишонч ҳосил қиламиз.

(7) ифодани Bx ўққа проекцияласак, $\omega_{BO_1}^\tau = \omega_{BA}^\tau \cos 60^\circ$. Бундан $\omega_{BO_1}^\tau = \frac{a\omega_0^2 \sqrt{3}}{6}$. Шундай қилиб

$$\omega_B = \sqrt{(\omega_{BO_1}^\tau)^2 + (\omega_{BO_1}^n)^2} = \sqrt{\frac{a^2 \omega_0^4}{12} + \frac{a^2 \omega_0^4}{4}} = \frac{a\omega_0^2 \sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\omega_{BO_1}^\tau}{\omega_{BO_1}^n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ёки } \mu = 30^\circ.$$

O_1B кривошипнинг бурчак тезланиши

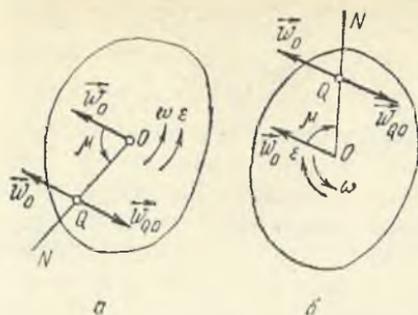
$$\epsilon_{O_1B} = \frac{\omega_{BO_1}^\tau}{O_1B} = \frac{\omega_0^2 \sqrt{3}}{12}$$

10.9-§. Тезланишлар оний маркази

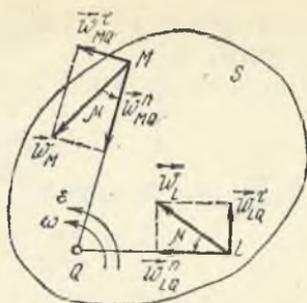
Тезланиши берилган онда нолга тенг бўлган текис шаклнинг (ёки текис шаклга маҳкам бириктирилган ва у билан биргалликда ҳаракатланувчи текисликнинг) нуқтаси *тезланишлар оний маркази* дейилади.

Теорема. *Илгарилама ҳаракатда бўлмаган текис шаклнинг ҳаракат текислигида ҳар онда тезланишлар оний маркази мавжуд бўлади.*

Исбот. Текис шаклнинг бурчак тезлиги ω , бурчак тезланиши ϵ ва айланиш йўналиши ҳамда O нуқтаси (қутб) нинг тезланиши $\vec{\omega}_O$ берилган бўлсин. Тезланишлар оний марказини Q билан белгилай-



10.21- расм.



10.22- расм.

лик. Q нуқтанинг ҳолатини аниқлаш учун (10.22) формуладан μ бурчакни топамиз: $\mu = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}$.

$\vec{\omega}_O$ вектори билан μ бурчак ташкил этувчи ON тўғри чизиқни ўтказамиз; агар текис шаклнинг айланиши тезланувчан бўлса, μ бурчак айланиш йўналиши бўйича, секинланувчан бўлса, айланишга тескари йўналишда қўйилади (10.21- расм, *a, б*). ON чизиқда O нуқтадан

$$OQ = \frac{\omega_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \quad (10.23)$$

масофада Q нуқтани олсак, бу нуқта тезланишлар оний маркази бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, O нуқтани қутб деб олиб, Q нуқтанинг тезланишини (10.18) га кўра ҳисоблайлик:

$$\vec{\omega}_Q = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{QO}. \quad (10.24)$$

(10.21) формулага асосан:

$$\omega_{QO} = OQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

(10.23) ни эътиборга олсак,

$$\omega_{QO} = \frac{\omega_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \omega_O.$$

тенглик келиб чиқади. $\vec{\omega}_{QO}$ вектори OQ билан μ бурчак ташкил этади, яъни $\vec{\omega}_{QO}$ вектори $\vec{\omega}_O$ га миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарма-қарши бўлади: $\vec{\omega}_{QO} = -\vec{\omega}_O$. Буни (10.24) га қўйиб, $\omega_Q = 0$ бўлишини кўрамиз. Шундай қилиб, Q нуқта тезланишлар оний маркази бўлади. ■

Тезланишлар оний маркази Q ҳамда текис шаклнинг оний бурчак тезлиги ω ва оний бурчак тезланиши ε маълум бўлса, текис

шакл ихтиёрий M нуқтасининг тезланиши қуйидагича аниқланади (10.22-расм).

Q нуқтаи қутб деб олсак, (10.17) га кўра

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_Q + \vec{\omega}_{MQ}^n + \vec{\omega}_{MQ}^r.$$

Бунда $\vec{\omega}_Q = 0$ бўлганидан

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_{MQ}^n + \vec{\omega}_{MQ}^r = \vec{\omega}_{MQ} \quad (10.25)$$

тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши шу нуқтанинг тезланишлар оний маркази атрофида айланишидаги тезланишига тенг бўлади.

(10.21) ва (10.22) га кўра қуйидаги формулалар ўринли бўлади.

$$\omega_M = MQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (10.26)$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (10.27)$$

Текис шакл бошқа бирор L нуқтаси тезланишининг миқдори (10.26) га асосан қуйидагича аниқланади:

$$\omega_L = LQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (10.26 \text{ а})$$

йўналиши учун (10.27) формула ўзгармай қолаверади, яъни текис шакл нуқталарининг тезланиши мазкур нуқталарни тезланишлар оний маркази билан туташтирувчи чизиқлар билан бир хил бурчак ташкил этади.

(10.26) ва (10.26, а) дан

$$\frac{\omega_M}{MQ} = \frac{\omega_L}{LQ} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (10.28)$$

муносабатни оламиз.

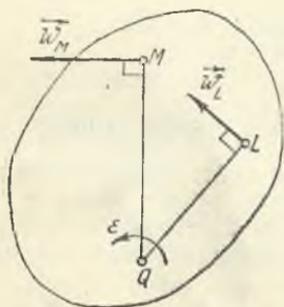
Демак, текис шакл нуқталарининг тезланишлари шу нуқталардан тезланишлар оний марказигача бўлган масофаларга тўғри пропорционал бўлади.

Қуйидаги хусусий ҳолларни кўрайлик.

1. Текис шаклнинг бурчак тезлиги нолга тенг, яъни $\omega = 0$ ва $\varepsilon \neq 0$ бўлсин (10.23-расм). У ҳолда (10.27) дан

$$\mu = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \infty = 90^\circ$$

бўлиб, текис шакл ихтиёрий нуқтасининг тезланиши шу нуқтани тезланишлар оний маркази билан туташтирувчи чизиққа перпендикуляр йўналади, яъни текио



10.23- расм.

шакл ихтиёрӣ нуқтасининг тезланиши фақат тезланишлар оний маркази атрофидаги айланма тезланишдан иборат бўлади:

$$\omega_M = \omega_{MQ}^T = MQ \cdot \varepsilon, \quad \omega_L = \omega_{LQ}^T = LQ \cdot \varepsilon.$$

Бу ҳолда текис шакл икки нуқтасининг тезланиш векторларига мазкур нуқталардан перпендикулярлар ўтказсак, уларнинг кесишган нуқтаси тезланишлар оний марказини ифодалайди.

2. $\omega \neq 0, \varepsilon = 0$ бўлсин. У ҳолда $\mu = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0$ бўлиб, текис шакл нуқта-

ларининг тезланишлари шу нуқталарни тезланишлар оний маркази билан туташтирувчи чизиқлар бўйича Q нуқта томон йўналади ҳамда $\omega_M = \omega_{MQ}^T = MQ \cdot \omega^2$ бўлади. Бинобарин, кўриладики ҳолда тезланишлар оний маркази текис шакл нуқталари тезланиш векторларининг кесишган нуқтасида ётади (10.24-расм).

3. $\omega = 0, \varepsilon = 0$ бўлса, берилган онда текис шакл барча нуқталарининг тезланиши геометрик тенг бўлади, чунки (10.17) га биноан текис шакл барча нуқталарининг тезланишлари қутбнинг тезланишига тенг бўлади:

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_L = \dots = \vec{\omega}_O$$

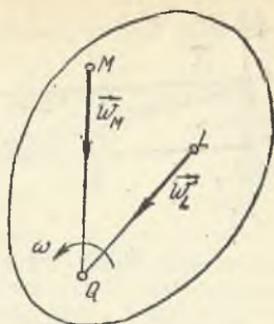
ҳамда

$$MQ = \frac{\omega_M}{0} = \infty.$$

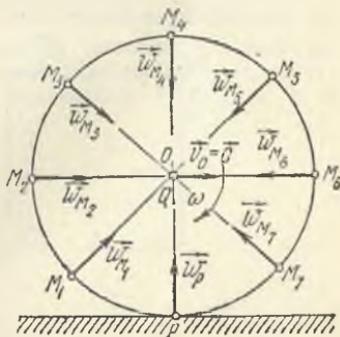
Умумий ҳолда тезликлар оний маркази ва тезланишлар оний маркази устма-уст тушмайди. Мисол тариқасида радиуси R га тенг ва маркази ўзгармас \vec{v}_O тезлик билан ҳаракатланувчи ғилдиракнинг тўғри чизиқли рельсда сирпанмасдан ғилдирашини кўрайлик (10.25-расм). Ғилдирак сирпанмасдан ҳаракатлангани учун тезликлар оний маркази ғилдиракнинг рельсга тегиб турган P нуқтасида ётади. Шу сабабли

$$v_O = PO \cdot \omega = R \cdot \omega.$$

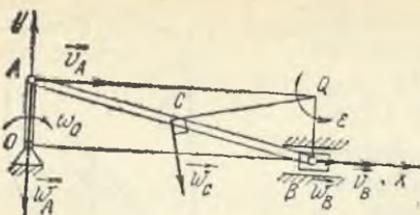
Ғилдирак $\omega = \frac{v_O}{R} = \text{const}$ бурчак тезлик билан ҳаракатланади. Унинг марказидаги O нуқта ўзгармас тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракатлангани учун $\vec{\omega}_O = 0$. Яъни тезланишларнинг оний маркази Q ғилдиракнинг маркази O нуқта билан устма-уст тушади ҳамда ғилдирак исталган нуқтасининг тезланиши унинг тезланишлар оний маркази атрофида айлан-



10.24- расм.



10.25- расм.



10.26- расм.

ма ҳаракатидаги марказга интилма тезланишдан иборат бўлади. Масалан, гилдирак тўғинидаги M_1, M_2, \dots, M_7, P нуқталарнинг тезланиши қуйидагича аниқланади:

$$\omega_{M_1} = \omega_{M_2} = \dots = \omega_{M_7} = \omega_P = R \cdot \omega^2 = \frac{v_0^2}{R}$$

Гилдирак исталган нуқтасининг тезланиши тезланишларнинг оний марказига йўналади.

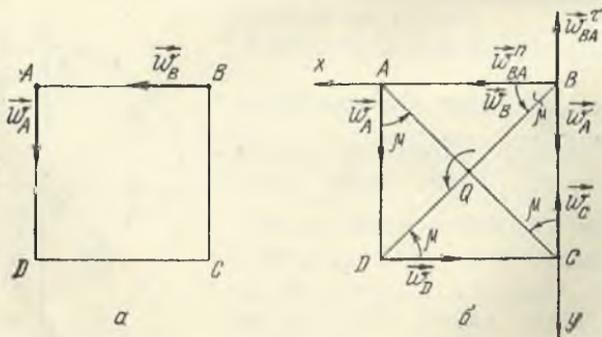
Юқорида кўрганимиздек, қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати текис параллел ҳаракатнинг хусусий ҳолидан иборат бўлади. Бундай ҳаракатдаги жисмнинг қўзғалмас ўқда ётувчи барча нуқталарининг тезлик ва тезланишлари нолга тенг бўлади. Бинобарин, бу ҳолда тезликларнинг оний маркази ва тезланишларнинг оний маркази устма-уст тушади ва айланиш ўқида ётади.

10.9- масала. OA кривошип Oy ўқда ётганда кривошип-шатушли механизм B ползунининг ва AB шатун ўртасидаги C нуқтасининг тезланишлари аниқлансин (10.26- расм).

OA кривошип O нуқта атрофида $\omega_0 = 15 \text{ с}^{-1}$ ўзгармас бурчак тезлик билан айланади. Кривошипнинг узунлиги $OA = 0,4 \text{ м}$, шатунининг узунлиги $AB = 2 \text{ м}$.

Ечш. Шатун A ва B нуқталарининг тезлиги \vec{v}_A ва \vec{v}_B ўзаро параллел ҳамда AB га перпендикуляр бўлмагани учун тезликлар оний маркази (\vec{v}_A ва \vec{v}_B га A ва B нуқталарда ўтказилган перпендикулярнинг кесишган нуқтаси) чексиз узоқлашган нуқтadan иборат бўлади, яъни берилган онда $\omega_{AB} = 0$ бўлади.

B нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлгани учун унинг тезланиши Ox ўқ бўйлаб йўналади; шатунининг A нуқтаси OA кривошипга ҳам тааллуқли бўлиб, OA кривошип текис айланма ҳаракат қилгани учун $\vec{\omega}_A$ тезланиш айланиш маркази O нуқтага йўналади, унинг қиймати $\omega_A = OA \cdot \omega_0^2 = 90 \text{ м/с}^2$ га тенг. $\omega_{AB} = 0$ бўлгани учун AB шатун тезланишларининг оний маркази A ва B нуқталарда $\vec{\omega}_A$ ва $\vec{\omega}_B$ тезланишларга перпендикуляр равишда ўтказилган чизиқларнинг кесишган Q нуқтасида бўлади.



10.27- расм.

$$\omega_{AB} = 0, \varepsilon_{AB} = \frac{\omega_A}{AQ} = \frac{90}{\sqrt{2^2 - 0,4^2}} = 45,92 \text{ с}^{-2} \text{ бўлгани учун } B \text{ ва } C \text{ нуқ-}$$

таларнинг тезланишлари фақат тезланишларнинг оний маркази Q нуқта атрофидаги айланма тезланишдан иборат бўлади:

$$\omega_B = BQ \cdot \varepsilon_{AB} = 0,4 \cdot 45,92 = 18,37 \text{ м/с}^2,$$

$$\omega_C = CQ \cdot \varepsilon_{AB} = 1 \cdot 45,92 = 45,92 \text{ м/с}^2.$$

C нуқтанинг тезланиши CQ га перпендикуляр йўналади.

10.10-масала. Томонлари $a = 0,1$ м бўлган $ABCD$ квадрат шакл текислигида ҳаракатланади. Агар берилган онда квадрат A ва B нуқталарининг тезланишлари квадрат томонлари бўйлаб йўналган ҳамда миқдор жиҳатдан $0,1 \text{ м/с}^2$ га тенг бўлса, тезланишларнинг оний маркази ҳамда C ва D нуқталарнинг тезланиши аниқлансин (10.27-рasm, а).

Ечиш. A нуқтани қутб деб қабул қилсак, (10.17) га асосан B нуқтанинг тезланиши

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{BA}^{\tau} + \vec{\omega}_{BA}^n, \quad (1)$$

$$(1) \text{ да } \left. \begin{aligned} \omega_{BA}^{\tau} &= \varepsilon \cdot AB, \\ \omega_{BA}^n &= \omega^2 \cdot AB. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(1) да $\vec{\omega}_{BA}^n$ вектори B дан A томон йўналган. $\vec{\omega}_{BA}^{\tau}$ вектори AB га перпендикуляр равишда (1) тенгликка риоя қилган ҳолда йўналтирилади (10.27-рasm, б). (1) ни расмда кўрсатилган Bx ва By ўқларга проекциялаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{BA}^n &= \omega_B, \\ \omega_{BA}^{\tau} &= \omega_A. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(2) ва (3) ни солиштириб, квадратнинг берилган ондаги бурчак тезлиги ва бурчак тезланишини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{\omega_B}{AB}} = \sqrt{\frac{0,1}{0,1}} = 1 \text{ с}^{-1}, \\ \varepsilon &= \frac{\omega_A}{AB} = \frac{0,1}{0,1} = 1 \text{ с}^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(10.27) га кўра $\text{tg } \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1$ ёки $\mu = 45^\circ$ бўлади.

A ва B нуқталарда $\vec{\omega}_A$ ва $\vec{\omega}_B$ векторларига соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда $\mu = 45^\circ$ бурчак остида тўғри чизиқлар ўтказсак, уларнинг кесишган нуқтаси Q квадрат диагоналлари кесишадиган нуқта билан устма-уст тушади ҳамда тезланишларнинг оний марказини ифодалайди. U ҳолда C ва D нуқталарнинг тезланиши миқдор жиҳатдан

$$\omega_C = QC \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{AC}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0,1 \text{ м/с}^2,$$

$$\omega_D = QD \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{BD}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0,1 \text{ м/с}^2$$

бўлади. C ва D нуқталарни Q билан туташтирсак, $\vec{\omega}_C$ ва $\vec{\omega}_D$ векторлари QC ва QD га соат стрелкаси айланишига йўналишга тескари 45° бурчак остида ўтказилган чизиқлар (квадратнинг CB ва DC томонлари) бўйича йўналади.

11-606. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҚЎЗҒАЛМАС НУҚТА АТРОФИДАГИ АЙЛАНМА ҲАРАКАТИ

11.1-§. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракат тенгламалари. Эйлер бурчаклари

Ҳаракат давомида битта нуқтаси ҳамиша қўзғалмасдан қоладиган қаттиқ жисмнинг ҳаракати қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракат ёки сферик ҳаракат дейилади.

Бундай ҳаракатда жисмнинг барча нуқталари умумий маркази қўзғалмас нуқта билан устма-уст тушувчи сфераларнинг сиртларида ҳаракатланади.

Таянч текислигидаги нуқтаси қўзғалмас бўлган пирилдоқнинг ҳаракати ёки биргина сферик шарнирли боғланиш қўйилган жисмнинг ҳаракати сферик ҳаракатга мисол бўла олади.

Қўзғалмас O нуқтага эга бўлган жисмнинг $O\xi\eta\xzeta$ қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳолатини аниқлаш учун жисмга бириктирилган ва у билан бирга ҳаракатланувчи ҳамда координаталар боши қўзғалмас O нуқта билан устма-уст тушувчи $Oxyz$ қўзғалувчи координаталар системасини ўтказамиз (11.1-расм).

Қўзғалувчи координаталар системасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳолатини Эйлер томонидан тавсия этилган ва *Эйлер бурчаклари* деб аталувчи учта бир-бирига боғлиқ бўлмаган бурчаклар воситасида аниқлаш мумкин. Эйлер бурчаклари қуйидагича белгиланади: $O\xi\eta$ қўзғалмас текисликнинг қўзғалувчи Oxy текислик билан кесишган чизиғи ON тугунлар чизиғи дейилади. Тугунлар чизиғи бир йўла Oz ва $O\xzeta$ га перпендикуляр бўлгани учун бу ўқлар орқали ўтувчи текисликка ҳам перпендикуляр бўлади.

$O\xi\eta$ қўзғалмас текисликда ётувчи, $O\xzeta$ ўқ билан ON тугунлар чизиғи орасидаги бурчак φ билан белгиланади ва *прецессия бурчаги* дейилади.

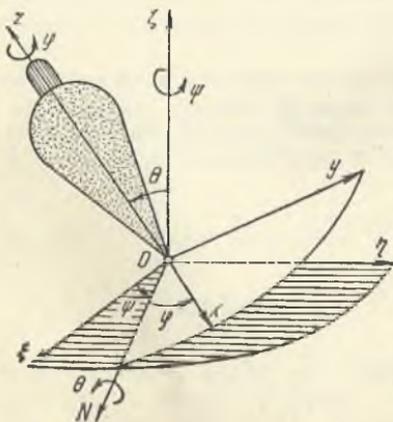
Тугунлар чизиғининг Ox қўзғалувчи ўқ билан ташкил қилган

бурчаги φ билан белгиланиб, *у соф айланиш бурчаги* дейилади. Қўзғалувчи Oz ўқ соф айланиш ўқи дейилади.

$O\xi\eta$ ва Oxy текисликлар орасидаги бурчак ёки $O\xzeta$ қўзғалмас ўқ билан Oz қўзғалувчи ўқ орасидаги бурчак θ билан белгиланади ва *нутация бурчаги* дейилади.

ψ , φ , θ бурчаклар *Эйлер бурчаклари* дейилади.

Эйлер бурчакларининг мусбат йўналиши учун $O\xzeta$, Oz ва ON ўқларнинг мусбат йўналишидан қараганда мос равишда шу ўқларга перпендикуляр текисликларда ўзга-



11.1- расм.

Рувчи ψ , φ , θ бурчакларнинг соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда орта борадиган йўналишларини қабул қиламиз.

Жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида кўчишига оид қуйидаги теоремани кўриб чиқамиз.

Эйлер теоремаси. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ихтиёрый кўчишини мазкур қўзғалмас нуқтадан ўтувчи учта ўқ атрофида кетма-кет учта айлантириши билан бажариши мумкин.

Исбот. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг чекли вақт ичида кўчгандаги ҳолати $Oxyz$ координаталар системаси билан берилган бўлсин.

Бошланғич пайтда қўзғалувчи координаталар системасини $O\xi\eta\zeta$ қўзғалмас координаталар системаси билан устма-уст тушган деб қарайлик. Мазкур қўзғалувчи координаталар системасини $O\xi$ ўқ атрофида I йўналишда ψ бурчакка айлантирсак, у $ON\eta_1\zeta$ ҳолатни эгаллайди (11.2-расм). Сўнгра $ON\eta_1\zeta$ координаталар системасини ON ўқ атрофида II йўналишда θ бурчакка айлантириб, $ON\eta_2z$ координаталар системасини оламиз. Ниҳоят, $ON\eta_2z$ ни Oz ўқ атрофида III йўналишда φ бурчакка буриш натижасида қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасини оламиз. ■

Шундай қилиб, бу теоремага кўра қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисмнинг исталган пайтдаги ҳолатини бир-бирига боғлиқ бўлмаган учта Эйлер бурчаклари воситасида аниқлаш мумкинлигини кўрамиз. Жисмнинг ҳаракати давомида бу бурчаклар вақтнинг узлуксиз функциясидан иборат бўлади:

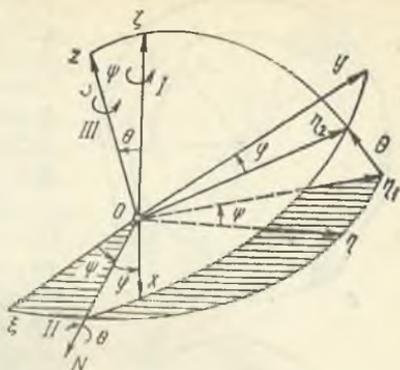
$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (11.1)$$

Бу функционал муносабатлар қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг кинематик тенгламалари ёки сферик ҳаракат тенгламалари дейилади.

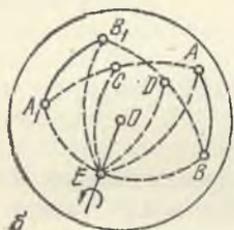
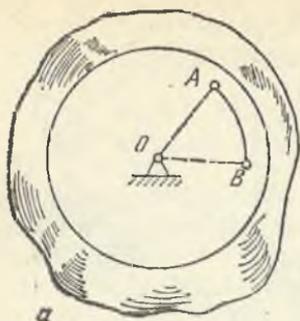
11.2-§. Эйлер-Даламбер теоремаси

Теорема. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган қаттиқ жисмнинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ҳар қандай кўчишини қўзғалмас нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида бир айлантириши билан амалга ошириши мумкин.

Исбот. Геометриядан маълумки, жисмнинг фазодаги вазиятини унинг бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтасининг ҳолати орқали аниқлаш мумкин. Сферик ҳаракатдаги жисмнинг ҳолати унинг қўзғалмас O нуқтаси билан бир тўғри чизиқда ётмайдиган яна иккита нуқтанинг ҳолати билан аниқланади. O нуқтани марказ қилиб



11.2- расм.



11.3. расм.

жисмни кесиб ўтувчи ихтиёрй радиусли сфера ўтказамиз (11.3-расм, а). Бу сфера сиртида жисмга тааллуқли иккита ихтиёрй A ва B нуқталарни оламиз. У ҳолда жисмнинг ҳолатини A ва B нуқталардан ўтувчи сфера катта айланасининг ёйи AB билан аниқлаш мумкин.

Айтайлик, қўзғалмас O нуқтага эга бўлган жисмнинг t вақтдаги ҳолати сфера катта айланасининг ёйи AB билан аниқлансин, $t + \Delta t$ вақтдан кейин мазкур ёй жисм билан биргаликда кўчиб A_1B_1 ҳолатни эгалласин (11.3-расм, б). Теоремани исботлаш учун A ва A_1 ҳамда B ва B_1 нуқталарни сфера катта айланасининг ёйлари билан туташтирамиз. AA_1 ва BB_1 ёйларнинг ўртасидаги C ва D нуқталардан сферик перпендикуляр ёйлар ўтказиб, уларнинг кесишган нуқтасини E билан белгилайлик. E нуқта A ва A_1 нуқталардан ҳамда B ва B_1 нуқталардан тенг узоқликда бўлгани туфайли

$\widehat{AE} = \widehat{A_1E}$ ва $\widehat{BE} = \widehat{B_1E}$. Жисм абсолют қаттиқ бўлганидан $\widehat{AB} = \widehat{A_1B_1}$. Бинобарин, AEB ва A_1EB сферик учбурчаклар ўзаро тенг бўлади. Бу учбурчакларни OE ўқ атрофида $\widehat{AEA_1} = \widehat{BEB} = \Delta\alpha$ бурчакка айлантирсак, AEB сферик учбурчак AEB_1 сферик учбурчак устига тушади, яъни AB сферик ёй A_1B_1 ҳолатни эгаллайди. ■

OE ўқ чекли айланиш ўқи дейилади, $\widehat{A_1EA_2} = \widehat{B_1EB_2} = \Delta\alpha$ бурчак эса чекли айланиш бурчаги дейилади.

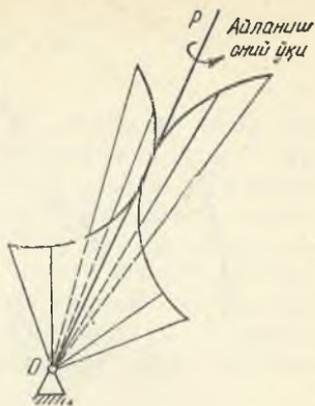
11.3-§. Оний айланиш ўқи. Аксоидлар

Эйлер-Даламбер теоремасига кўра жисмнинг t_1 пайтда эгаллаган I ҳолатидан t_2 пайтдаги II ҳолатга кўчишини жисмни OE ўқ атрофида бир айлантириш билан амалга ошириш мумкин.

Аmmo бундан жисмнинг $\Delta t = t_2 - t_1$ вақт ичидаги ҳақиқий ҳаракати айнан шундай айланма ҳаракатдан иборат бўлади деган хулоса келиб чиқмайди. Ҳақиқатда жисм I ҳолатдан II ҳолатга бошқа йўл билан ҳаракат қилиши натижасида ўтиши ҳам мумкин. Лекин Δt вақт оралиғи кичрая борган сари жисмнинг I ва II ҳолатлари бир-бирига тобора яқинлаша боради ҳамда чекли айланиш ўқи OE атрофидаги $\Delta\alpha$ бурчакка кўчиш жисмнинг ҳақиқий кўчишига яқинлаша боради. Агар Δt нолга интилса, у ҳолда OE ўқнинг йўналиши бирор OP

лимит ҳолатига яқинлашади. Δt нолга интилганда OE ўқининг лимит ҳолатини ифодаловчи OP ўқ айланиш оний ўқи дейилади.

Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатини кетма-кет узлуксиз элементар кўчишлардан ташкил топган деб қараш мумкин. Эйлер-Даламбер теоремасига биноан, бундай ҳар бир элементар кўчишни айланиш оний ўқи атрофидаги оний айланма ҳаракат тарзида амалга ошириш мумкин. Бинобарин, битта қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳар қандай ҳаракатини айланиш оний ўқлари атрофидаги кетма-кет узлуксиз оний айланма ҳаракатлар тўпламидан иборат деб тасаввур этиш мумкин.



11.4-расм.

Жисмнинг ҳаракати текширилаётган қўзғалмас координаталар системасига нисбатан айланиш оний ўқларининг геометрик ўрни қўзғалмас аксоид дейилади. Барча айланиш оний ўқлари жисмнинг қўзғалмас нуқтаси орқали ўтгани туфайли қўзғалмас аксоид, учи қўзғалмас нуқтада ётувчи конус сиртдан иборат бўлади.

Айланиш оний ўқларининг жисмга бириктирилган ва у билан биргаликда ҳаракатланувчи қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан геометрик ўрни конус сиртдан иборат бўлиб, қўзғалувчи аксоид дейилади.

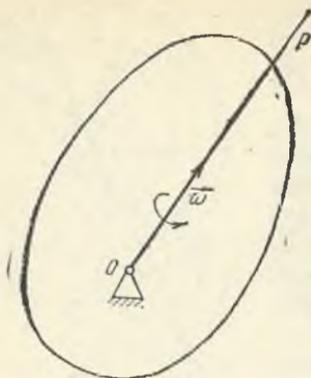
Қўзғалувчи ва қўзғалмас аксоидларни ёлғиз OP айланиш оний ўқининг кўчиши натижасида ҳосил қилинган туфайли бу конуслар ҳар онда бир-бирига умумий ясовчи OP орқали уринади (11.4-расм).

OP оний ўқда ётувчи нуқталарнинг тезликлари берилган онда нолга тенг бўлгани учун жисм ҳаракатланганда қўзғалувчи аксоид қўзғалмас аксоид устида сирганмай думалайди. Бинобарин, қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракатини қўзғалувчи аксоидни қўзғалмас аксоид устида сиргантирмай думалатиши натижасида амалга ошириш мумкин.

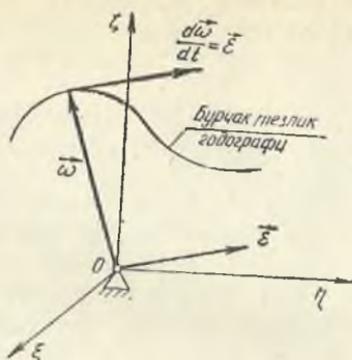
11.4-§. Қўзғалмас нуқта атрофида айланма ҳаракатдаги жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳар ондаги ҳаракатини айланиш оний ўқи атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин бўлгани туфайли бундай ҳаракатни характерлаш учун оний бурчак тезлик ва оний бурчак тезланиш тушунчаларини киритамиз. Оний бурчак тезликнинг миқдорини Δt вақт ичида элементар айланиш бурчаги $\Delta \alpha$ орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \alpha|}{\Delta t} \quad (11.2)$$



11.5- расм.



11.6- расм.

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода α бурчакдан t вақт бўйича олинган ҳосилага тенг бўлмаслигини алоҳида уқдириб ўтамиз, чунки қаттиқ жисм қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатланганда бундай бурчакнинг ўзи мавжуд бўлмайди. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракат қонуни маълум бўлганда ω бурчак тезликини ҳисоблаш хусусида кейинчалик (11.8-§ да) батафсил тўхталамиз.

Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатини ўрганишда оний бурчак тезликини вектор тарзида ифодалаш бундай ҳаракатнинг хусусиятларини ўрганишни соддалаштиради.

Келгусида қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг оний бурчак тезлигини қўзғалмас нуқтага қўйилган ва айланиш оний ўқи бўйлаб йўналган шундай $\vec{\omega}$ вектори тарзида ифодалаймизки, унинг мусбат йўналишидан қараганда кузатувчи жисмнинг айланишини соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда кўриши керак (11.5- расм).

Жисм қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатланганда айланиш оний ўқининг йўналиши ўзгара боради, шу сабабли оний бурчак тезлиги ҳам миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгара боради.

Оний бурчак тезлик векторидан вақт бўйича олинган ҳосила оний бурчак тезланиши дейилади, яъни

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (11.3)$$

Шундай қилиб, оний бурчак тезланиш векторини оний бурчак тезлиги вектори учининг тезлиги тарзида қараш мумкин экан. Шу сабабли оний бурчак тезланиш вектори $\vec{\varepsilon}$ оний бурчак тезлик вектори годографига ўтказилган уринма бўйича йўналади (11.6- расм). $\vec{\varepsilon}$ векторини ҳам қўзғалмас O нуқтага қўйилган деб қараймиз. Демак, умумий ҳолда битта қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг оний бурчак тезланиш вектори $\vec{\varepsilon}$ билан оний бурчак тезлик вектори $\vec{\omega}$ бир чизиқда ётмайди.

11.5-§. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги

Юқорида кўрганимиздек, қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисмнинг ҳар ондаги ҳаракатини мазкур қўзғалмас нуқтадан ўтувчи айланиш оний ўқи атрофидаги оний айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин ҳамда айланиш оний ўқида ётувчи жисм нуқталарининг берилган ондаги тезликлари нолга тенг бўлади. Агар айланиш оний ўқи ва жисмнинг оний бурчак тезлиги маълум бўлса, битта қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм ихтиёрий M нуқтасининг берилган ондаги тезлигини аниқлаш учун қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги аниқланадиган Эйлер формуласи (9.14) дан фойдаланиш мумкин:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (11.4)$$

бунда \vec{r} билан M нуқтанинг қўзғалмас нуқтага нисбатан радиус-вектори белгиланган (11.7-расм).

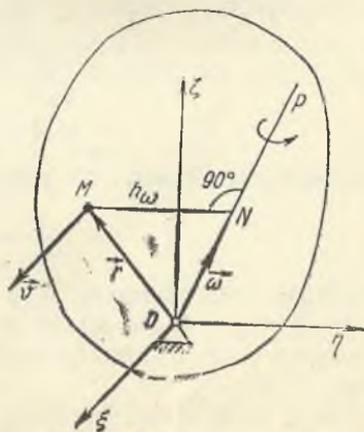
\vec{r} радиус-вектор миқдор жиҳатдан қаттиқ жисмнинг икки нуқтаси орасидаги масофани ифодалагани туфайли шу жисм ҳаракати давомида унинг фақат йўналиши ўзгаради. Бинобарин (11.4) формулани миқдор жиҳатдан ўзгармасдан, йўналиши жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлиги билан айланиши туфайли ўзгардиган векторнинг вақт бўйича ҳосиласини ҳисоблаш формуласи деб қараш мумкин.

(11.4) га биноан M нуқта тезлигининг миқдори қуйидагича аниқланади:

$$v = \omega \cdot r \sin(\widehat{\omega, r}) = \omega \cdot h_{\omega}, \quad (11.5)$$

бунда $h_{\omega} = r \sin(\widehat{\omega, r})$ бўлиб, M нуқтадан айланиш оний ўқи OP га эга бўлган MN масофани ифодалайди.

Шундай қилиб, **қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги миқдор жиҳатдан шу нуқтадан айланиш оний ўқиғача бўлган масофага пропорционал бўлади, йўналиши эса $\vec{\omega}$ ва \vec{r} векторларига (бинобарин MN га) перпендикуляр тарзда оний ўқ атрофидаги айланишга мос равишда йўналади.**



11.7-расм.

Агар айланиш оний ўқининг ҳолати ва жисм бирор нуқтасининг тезлиги \vec{v} маълум бўлса, (11.5) формуладан фойдаланиб жисмнинг оний бурчак тезлигини аниқлаш мумкин:

$$\omega = \frac{v}{h_\omega}. \quad (11.6)$$

Оний бурчак тезликнинг қўзғалувчи координата ўқларидаги проекцияларини мос равишда ω_x , ω_y , ω_z ҳамда M нуқтанинг координаталарини x , y , z билан белгиласак, (11.4) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k}.$$

Бу тенгликни қўзғалувчи x , y , z ўқларга проекциялаб, тезлик векторининг мазкур ўқлардаги v_x , v_y , v_z проекцияларини ҳисоблаймиз:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Худди шунингдек, тезликнинг қўзғалмас координата ўқларидаги v_ξ , v_η , v_ζ проекциялари ҳисобланади:

$$\left. \begin{aligned} v_\xi &= \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta, \\ v_\eta &= \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta, \\ v_\zeta &= \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi. \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

(11.7) ва (11.8) формулалар *Эйлер формулалари* дейилади.

Ҳар онда айланиш оний ўқи нуқталарининг тезлиги нолга тенглигини эътиборга олсак, v_x , v_y , v_z ларни нолга тенглаб (11.7) дан

$$\left. \begin{aligned} \omega_y z - \omega_z y &= 0, \\ \omega_z x - \omega_x z &= 0, \\ \omega_x y - \omega_y x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

тенгламаларни оламиз. Бу тенгламаларни

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \quad (11.9)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

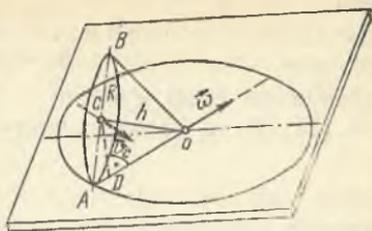
(11.9) формулалар айланиш оний ўқининг берилган пайт учун қўзғалувчи координаталар системасидаги тенгламаларини ифодалайди.

Худди шунингдек, айланиш оний ўқининг $O\xi\eta\zeta$ қўзғалмас координаталар системасига нисбатан тенгламаларини

$$\frac{\xi}{\omega_{\xi}} = \frac{\eta}{\omega_{\eta}} = \frac{\zeta}{\omega_{\zeta}} \quad (11.10)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

$\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta}$ лар вақт функцияси сифатида ўзгаришини назарда тутиб, (11.9) ва (11.10) ифодалардан вақт t ни йўқотиш орқали мос равишда қўзғалувчи ва қўзғалмас аксоид тенгламаларини олиш мумкин.



11.8- расм.

11.1- масала. Баландлиги $h = 4$ см, асосининг радиуси $R = 2$ см ва учи қўзғалмас O нуқтада бўлган конус горизонтал текисликда сирпанмасдан юмалайди (11.8- расм). Агар конус асоси марказининг тезлиги $v_C = 18$ см/с $= \text{const}$ бўлса, конуснинг бурчак тезлиги ҳамда қўзғалмас ва қўзғалувчи аксоидлар топилсин.

Ечиш. Конус текисликда сирпанмасдан юмалагани учун A нуқтанинг тезлиги нолга тенг. Масала шартига кўра O нуқта ҳам қўзғалмас. Бинобарин, OA тўғри чизиқ айланиш оний ўқи бўлади. Конус текисликда сирпанмасдан юмалаганида OA айланиш оний ўқининг қўзғалмас координата системасидаги геометрик ўрни шу горизонтал текисликдан иборат. Демак, қўзғалмас аксоид горизонтал текислик бўлади. OA айланиш ўқининг қўзғалувчи системадаги геометрик ўрнини кузатсак, қўзғалувчи аксоид учи O нуқтада ётувчи, асоси берилган конус асосидан иборат конуснинг ён сирти бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. Бу конуснинг учидagi бурчаги $\alpha = \widehat{AOB} = 2 \arctg \frac{1}{2} \approx 53^\circ$ га тенг бўлади.

Энди конус оний бурчак тезлигининг миқдор ва йўналишини аниқлаймиз. (11.4) формулага биноан $\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{OC}$ бўлади. Шунинг учун \vec{v}_C кузатувчи томонга йўналган ҳолда $\vec{\omega}$ вектори айланиш оний ўқи бўйича A нуқтадан O нуқтага қараб йўналади. (11.5) формулага асосан $v_C = \omega \cdot CD$ бўлади. Расмдан $CD = h \sin \frac{\alpha}{2}$. Бинобарин, $\omega = \frac{v_C}{h \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{18}{1,8} = 10$ с⁻¹.

11.6- §. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезланиши

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм M нуқтасининг тезланишини аниқлаш учун (11.4) ифодадан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (11.11)$$

Бунда

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

бўлгани учун (11.11) ни

$$\vec{\omega} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (11.12)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (11.12, a)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(11.12) да тезланишнинг

$$\vec{\omega}^e = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad (11.13)$$

ташкил этувчиси айланма тезланиш,

$$\vec{\omega}^\omega = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (11.14)$$

ташкил этувчиси эса ўққа интилма тезланиш дейилади.

Шундай қилиб

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^e + \vec{\omega}^\omega \quad (11.15)$$

(11.15) ифода Ривальс теоремасини ифодалайди: қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм ихтиёрий нуқтасининг тезланиши айланма ва ўққа интилма тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг.

(11.13) дан кўрамызки, қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг $\vec{\omega}^e$ айланма тезланиши ε ва r орқали ўтказилган текисликка перпендикуляр равишда шундай йўналадики, унинг учидан қараганда ε векторини r вектори устига тушириш учун энг кичик бурчакка буриш соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда кўриниши керак (11.9-расм).

Айланма тезланишнинг миқдори

$$\omega^e = \varepsilon \cdot r \cdot \sin(\widehat{\varepsilon, r}) = \varepsilon \cdot h_\varepsilon \quad (11.16)$$

тенгликдан аниқланади. Бу формулада h_ε билан M нуқтадан оний бурчак тезланиши вектори ётган чизиққа туширилган MK перпендикулярнинг узунлиги белгиланган.

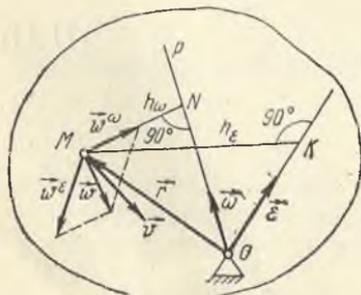
(11.14) тенгликка биноан $\vec{\omega}^\omega$ ўққа интилма тезланиш ω ва v векторларига перпендикуляр равишда, яъни M нуқтадан айланиш оний ўқи OP томонга MN бўйича йўналади.

Ўққа интилма тезланишнинг миқдори

$$\omega^\omega = \omega \cdot v \cdot \sin(\widehat{\omega, v}) = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot h_\omega \quad (11.17)$$

формуладан аниқланади. (11.17) да h_ω билан M нуқтадан айланиш оний ўқи-гача бўлган MN масофа белгиланган.

Агар айланма ва ўққа интилма тезланишлар ҳамда улар орасидаги бурчак маълум бўлса, қўзғалмас нуқ-



11.9- расм

та атрофида айланувчи жисм нуқтаси тезланишининг миқдорини, косинуслар теоремасидан фойдаланиб, қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$\omega = \sqrt{(\omega^\omega)^2 + (\omega^\varepsilon)^2 + 2\omega^\omega \omega^\varepsilon \cos(\widehat{\vec{\omega}^\omega, \vec{\omega}^\varepsilon})}. \quad (11.18)$$

Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезланиши аниқланадиган формулалар қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезланиши топиладиган формулаларга ўхшаса-да, умумий ҳолда улар бир-биридан тубдан фарқ қилади. Буни қуйидаги жадвалдан кўриш мумкин.

№№	Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм учун	Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм учун
1.	$h_\omega = h_\varepsilon = R$	$h_\omega \neq h_\varepsilon$
2.	$\widehat{(\vec{\omega}_\tau, \vec{\omega}_n)} = 90^\circ$	$\widehat{(\vec{\omega}^\varepsilon, \vec{\omega}^\omega)} \neq 90^\circ$
3.	$\vec{\omega}_\tau$ ва \vec{v} векторлари бир тўғри чизикда ётади.	$\vec{\omega}^\varepsilon$ ва \vec{v} векторлари бир тўғри чизикда ётмайди.
4.	$\vec{\omega}$ ва $\vec{\varepsilon}$ векторлари бир чизикда (айланиш ўқида) ётади: $\vec{\omega} \parallel \vec{\varepsilon}$	$\vec{\omega}$ ва $\vec{\varepsilon}$ векторлари бир чизикда ётмайди: $\vec{\omega} \neq \vec{\varepsilon}$

11.7-§. Оний бурчак тезланиш вектори

Агар қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм оний бурчак тезлик векторининг бирлик векторини $\vec{\omega}^0$ билан белгиласак, у ҳолда

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\omega}^0$$

муносабат ўринли бўлади. $\vec{\varepsilon}$ векторининг таърифига кўра

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{\omega}^0 + \omega \cdot \frac{d\vec{\omega}^0}{dt} \quad (11.19) \quad 8$$

ёки

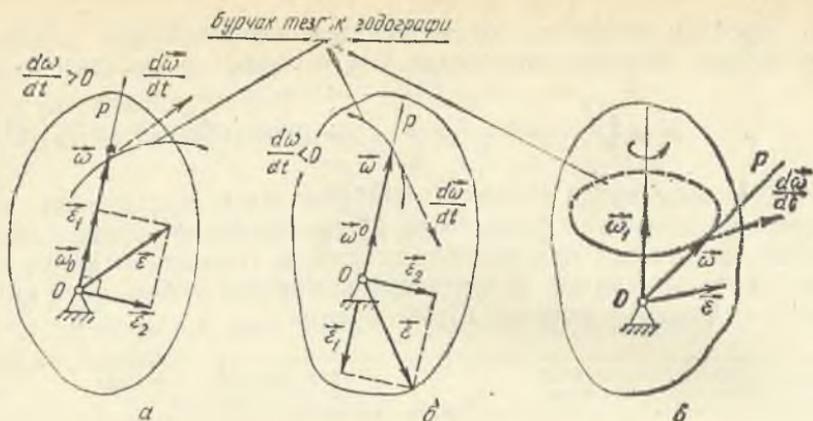
$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{\omega}^0, \quad \vec{\varepsilon}_2 = \omega \cdot \frac{d\vec{\omega}^0}{dt} \quad (11.20) \quad 9$$

белгилашларни киритсак,

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 \quad (11.21) \quad 10$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(11.21) да жисм оний бурчак тезланишининг $\vec{\varepsilon}_1$ ташкил этувчиси вақт ўтиши билан оний бурчак тезлигининг миқдор жиҳатдан ўзгаришини ифодалайди ва $\frac{d\omega}{dt} > 0$ бўлган ҳолда оний бурчак тез-



11.10- расм.

лик вектори бўйича (11.10- расм, а), $\frac{d\omega}{dt} < 0$ да эса унга қарама-қарши йўналади (11.10- расм, б).

Бирлик векторнинг вақт бўйича биринчи ҳосиласи дифференциалланаётган векторга перпендикуляр йўналгани туфайли оний бурчак тезланишининг $\vec{\varepsilon}_2$ ташкил этувчиси оний бурчак тезлик векторининг вақт ўтиши билан йўналиш жиҳатдан ўзгаришини ифодалайди ва оний бурчак тезлиги векторига ҳамيشа перпендикуляр бўлади (11.10- расм, а, б).

Алоҳида аҳамиятга эга бўлган қуйидаги икки хусусий ҳолни кўрамиз.

1. Жисмнинг оний бурчак тезлик вектори йўналиш жиҳатдан ўзгармай ($\frac{d\vec{\omega}^0}{dt} = 0$), фақат унинг миқдори ўзгарсин. Бу ҳолда (11.21) да $\vec{\varepsilon}_2 = 0$ бўлгани учун

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}^0$$

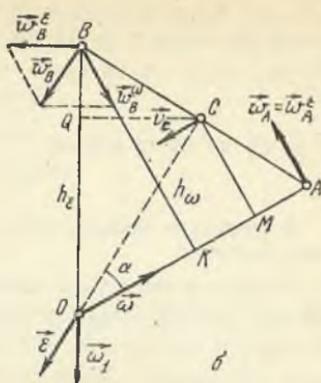
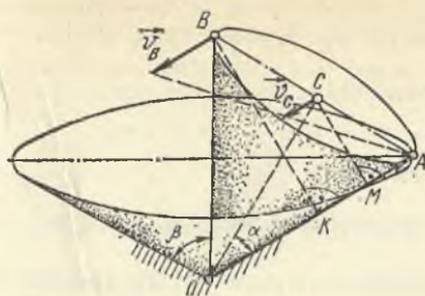
муносабат ўринли бўлади. Бинобарин, бу ҳолда жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракати қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракатга эквивалент бўлади.

2. Оний бурчак тезлигининг миқдори ўзгармай ($\omega = \text{const}$) фақат йўналиши ўзгарсин. У ҳолда $\vec{\varepsilon}_1 = 0$ бўлиб,

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_2 = \omega \frac{d\vec{\omega}^0}{dt} \quad (11.22)$$

муносабатни оламиз. Бунда бевосита бурчак тезланишнинг бурчак

тезлик орқали ифодаси $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ дан фойдаланамиз. Юқорида кўр-



11.11- расм.

ганимиздек, миқдор жиҳатдан ўзгармас бўлиб йўналиши жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида ω бурчак тезлиги билан айланиш туфайли ўзгарадиган векторнинг вақт бўйича ҳосиласини (11.4) формула билан ҳисоблаш мумкин.

Худди шунга ўхшаш ω ни миқдори ўзгармас бўлган радиус-вектор деб қарасак,

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} \quad (11.23) \quad 12$$

муносабат ўринли бўлади. (11.23) да ω_1 орқали ω вектор йўналган айланиш оний ўқининг бурчак тезлиги белгиланган (11.10- расм, в).

Бу ҳолда бурчак тезланиш векторининг миқдори

$$\epsilon = \omega_1 \cdot \omega \sin(\omega_1, \omega) \quad (11.24) \quad 13$$

формуладан аниқланади.

✓ 11.2- масала. Учидаги бурчаги $2\alpha = 60^\circ$ бўлган I доиравий конус, учидаги бурчаги $2\beta = 120^\circ$ бўлган қўзғалмас II конус ичида сирпанмасдан думалайди (11.11- расм, а). I конус асосининг маркази ўзгармас $v_C = 0,44$ м/с тезликка эга. I конус асосининг радиуси $r = 0,2$ м. I конуснинг оний бурчак тезлиги, оний бурчак тезланиши ва унинг A ҳамда B нуқталарининг тезлик, тезланишлари топилсин.

Ечиш. I конус II конус ичида сирпанмасдан думалаганда унинг учидаги O нуқта қўзғалмасдан қолади ҳамда I конуснинг II конусга тегиб турган OA ясовчисида ётувчи барча нуқталарнинг тезлиги нолга тенг бўлади, яъни OA чизиқ I конуснинг айланиш оний ўқини ифодалайди.

Агар C нуқтанинг тезлиги расм текислигидан кузатувчи томонга қараб йўналган деб олсак, оний бурчак тезлик вектори унга мос равишда 11.11- расм, а да кўрсатилгандек йўналади.

C нуқта тезлиги берилгани туфайли конус оний бурчак тезлигининг миқдорини (11.6) формуладан фойдаланиб аниқлаймиз:

$$\omega = \frac{v_C}{CM} = \frac{v_C}{r \sin 60^\circ} = 2,54 \text{ с}^{-1}. \quad (1)$$

A нуқта айланиш оний ўқ.да ётгани учун унинг тезлиги нолга тенг, яъни $v_A = 0$.

(11.5) га асосан B нуқтанинг тезлиги

$$v_B = \omega \cdot BK, \quad (2)$$

бунда BK билан B нуқтадан айланиш оний ўқигача бўлган масофа—оний айланиш радиуси белгиланган. AOB учбурчак тенг томонли бўлгани учун, OBK учбурчакдан

$$BK = 2r \sin 2\alpha = 0,35 \text{ м.} \quad (3)$$

(1) ва (3) ни (2) га қўйсак,

$$v_B = 0,89 \text{ м/с.}$$

B нуқтанинг тезлик вектори расм текислигига тик равишда кузатувчи томонига йўналган.

ω вектори миқдор жиҳатдан ўзгармас бўлгани учун (11.23) га асосан I копуснинг оний бурчак тезланиши

$$\epsilon = \omega_1 \times \omega \quad (4)$$

формула ёрдамида аниқланади. (4) да ω_1 билан OA оний ўқнинг OB ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги белгиланган. C нуқта тезлигини ω_1 орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$v_C = \omega_1 \cdot QC.$$

Биобарин,

$$\omega_1 = \frac{v_C}{QC} = \frac{v_C}{r \sin 60^\circ} = 2,54 \text{ с}^{-1},$$

ω_1 вектори v_C нинг йўналишига мос равишда 11.11-расм, б дагидек вертикал пастга йўналади.

$$(4) \text{ га кўра } \epsilon = \omega_1 \cdot \omega \cdot \sin 2\alpha = 5,59 \text{ с}^{-2}$$

Бўлиб, ϵ вектори OAB учбурчак текислигига перпендикуляр равишда v_C га параллел йўналади.

(11.15) га асосан A нуқтанинг тезланиши $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_A^e + \vec{\omega}_A^o$ тенгликдан топилди.

$\vec{\omega}_A^e = \epsilon \times \vec{OA}$ айланма тезланишни A нуқтага қўйилган ва ϵ, \vec{OA} векторлар ётган текисликка перпендикуляр ҳамда ϵ нинг йўналишига мос равишда йўналган вектор тарзида 11.11-расм, б дагидек тасвирлаш мумкин. $\vec{\omega}_A^o$ вектори OAB учбурчак текислигида ётади ва OA га перпендикуляр йўналади. (11.16) га кўра, у $\omega_A^e = \epsilon \cdot OA = \epsilon \cdot 2r = 2,24 \text{ м/с}$ га тенг.

A нуқта айланиш оний ўқида ётганлиги туфайли $h_o = 0$. (11.17) га биноан ўққа интилма тезланиш $\vec{\omega}_A^o$ нинг миқдори ҳам нолга тенг бўлади.

Шундай қилиб, A нуқтанинг тезланиши фақат айланма тезланишдан иборат бўлади: $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_A^e$, яъни $\omega_A = 2,24 \text{ м/с}^2$.

(11.15) га кўра B нуқтанинг тезланиши $\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_B^e + \vec{\omega}_B^o$ ифодадан топилди. $\vec{\omega}_B^e = \epsilon \times \vec{OB}$ айланма тезланиш вектори B нуқтага қўйилади ҳамда ϵ йўналишига мос равишда OB га перпендикуляр йўналади. Унинг миқдори $\omega_B^e = \epsilon \cdot OB = \epsilon \cdot 2r = 2,24 \text{ м/с}^2$ га тенг.

$\vec{\omega}_B^o = \omega \times v_B$ ўққа интилма тезланиш вектори OA айланиш оний ўқида перпендикуляр равишда BK бўйлаб йўналади ҳамда $\omega_B^o = \omega^2 \cdot BK = \omega^2 \cdot 2r \cdot \sin 60^\circ = (2,54)^2 \cdot 2 \cdot 0,2 \cdot 0,816 = 2,23 \text{ м/с}^2$.

$\vec{\omega}_B^{\varepsilon}$ ва $\vec{\omega}_B^{\omega}$ ларни геометрик қўшиб, $\vec{\omega}_B$ ни $\vec{\omega}_B^{\varepsilon}$ ва $\vec{\omega}_B^{\omega}$ ларга қурилган параллелограмм диагоналига тенг вектор сифатида аниқлаймиз (11.11-расм, б). (11.18) га асосан эса у қуйидагига тенг бўлади:

$$\omega_B = \sqrt{(\omega_B^{\varepsilon})^2 + (\omega_B^{\omega})^2 + 2\omega_B^{\varepsilon} \cdot \omega_B^{\omega} \cdot \cos(\widehat{\omega_B^{\varepsilon}, \omega_B^{\omega}})} = \\ = \sqrt{2,24^2 + 2,23^2 - 2 \cdot 2,24 \cdot 2,23 \cdot 0,5} = 2,24 \text{ м/с}^2.$$

11.3- масала. OA кривошипга эркин ўрнатилган ва O учидagi бурчаги 2α га тенг конуссимон тишли гилдирак I конуссимон тишли қўзғалмас асос II да думалайди. OA кривошипнинг OO_1 вертикал қўзғалмас ўқ атрофида айланиш бурчак тезлиги $\vec{\omega}_0$ ва бурчак тезланиши $\vec{\varepsilon}_0$ бўлса (11.12-расм), думаловчи гилдиракнинг оний бурчак тезлик вектори ва оний бурчак тезланиш вектори топилсин.

Ечиш. OA кривошип OO_1 ўқ атрофида ω_0 бурчак тезлиги билан айланма ҳаракатда бўлгани учун A нуқтанинг тезлиги қуйидагича аниқланади:

$$v_A = \omega_0 \cdot OA. \quad (1)$$

\vec{v}_A вектори OAC учбурчак текислигига тик равишда ўқувчи томонга йўналади. I гилдирак II гилдирак устида сирпанмай думалагани учун C нуқтанинг тезлиги $\vec{v}_C = 0$. O ва C нуқталарнинг тезликлари нолга тенг бўлгани туфайли OC ўқ I гилдирак учун айланиш оний ўқини ифодалайди. Шу сабабли гилдиракнинг оний бурчак тезлиги $\vec{\omega}$ OC бўлаб йўналади ҳамда A нуқтанинг тезлиги (11.5) формулага биноан топилади:

$$v_A = \omega \cdot AN = \omega \cdot OA \sin \alpha. \quad (2)$$

(1) ва (2) ни солиштириб, оний бурчак тезлик учун

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sin \alpha}$$

муносабатни оламиз. Шундай қилиб,

$$\vec{\omega} = \frac{\omega_0}{\sin \alpha} \vec{e}_1, \quad (3)$$

бунда \vec{e}_1 билан \vec{OC} нинг бирлик вектори белгиланган.

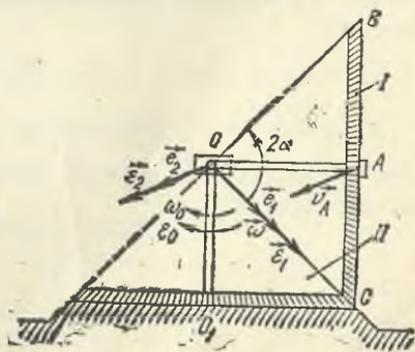
I гилдиракнинг оний бурчак тезланишини аниқлаш учун вақт ўтиши билан ω_0 ҳамда \vec{e}_1 нинг ўзгаришини эътиборга олиб, (3) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_0}{dt} \frac{\vec{e}_1}{\sin \alpha} + \frac{\omega_0}{\sin \alpha} \frac{d\vec{e}_1}{dt}, \quad (4)$$

бунда

$$\frac{d\omega_0}{dt} = \varepsilon_0$$

ҳамда (11.4) га кўра



11.12- расм.

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\omega}_0 \times \vec{e}_1. \quad (5)$$

(5) да $\frac{d\vec{e}_1}{dt}$ нинг модули

$$\left| \frac{d\vec{e}_1}{dt} \right| = \omega_0 \cdot e_1 \sin(90^\circ - \alpha) = \omega_0 \cos \alpha$$

бўлиб, $\frac{d\vec{e}_1}{dt}$ вектори расм текислигига перпендикуляр равишда ўқувчи томонга \vec{e}_2 бирлик вектор бўйлаб йўналади. Шу сабабли

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \omega_0 \cos \alpha \cdot \vec{e}_2 \quad (6)$$

деб ёзиш мумкин. Натижада (4) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\vec{e} = \frac{e_0}{\sin \alpha} \vec{e}_1 + \omega_0^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \vec{e}_2. \quad (7)$$

(7) ни (11.21) билан солиштирсак,

$$|\vec{e}_1| = \frac{e_0}{\sin \alpha}, \quad |\vec{e}_2| = \omega_0^2 \operatorname{ctg} \alpha$$

эканлигини кўрамиз.

Шундай қилиб, I гилдиракнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши, мос равишда, (3) ва (7) формулалар ёрдамида аниқланади.

11.8*-§. Эйлернинг кинематик тенгламалари

Агар жисм оний бурчак тезлигининг қўзғалувчи ёки қўзғалмас координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, (11.7) ва (11.8) формулалар ёрдамида жисм ихтиёрий нуқтаси тезлигининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш мумкин.

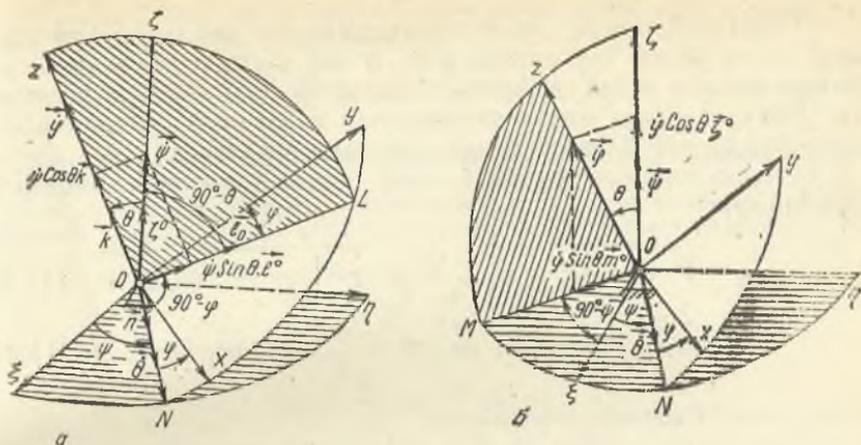
Жисм бурчак тезлигининг қўзғалувчи ва қўзғалмас координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш учун оний бурчак тезлик векторини $O\xi$, Oz , ON ўқлар бўйича йўналган ташкил этувчиларга ажратамиз:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\xi + \vec{\omega}_z + \vec{\omega}_N. \quad (11.25)$$

Агар $O\xi$, Oz , ON ўқларнинг бирлик йўналтирувчи векторларини мос равишда $\vec{\xi}^0$, \vec{k} , \vec{n} билан белгиласак (11.13-расм), (11.25) қуйидагича ёзилади.

$$\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{\xi}^0 + \omega_z \vec{k} + \omega_N \vec{n}. \quad (11.26)$$

11.1-§ да баён этилган Эйлер теоремасига кўра (11.26) даги ω_ξ , ω_z ва ω_N лар мос равишда ψ , φ ва θ бурчакларнинг вақт бирлиги ичида ўзгаришини ифодалайди:



11.13- расм.

$$\omega_x = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}, \quad \omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \omega_N = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}.$$

Бинобарин, (11.26) ни

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{\zeta}_0 + \dot{\varphi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{n} = \dot{\psi} + \dot{\varphi} + \dot{\theta} \quad (11.27)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Аввал бурчак тезлик векторининг қўзғалувчи Ox , Oy , Oz ўқ-лардаги проекцияларини аниқлаймиз. Бунинг учун $Oz\zeta$ ва Oxy текисликларнинг кесишган чизигини OL билан белгилаймиз (11.13-расм, а). ψ ни OL ва z ўқлар бўйича йўналган ташкил этувчиларга ажратамиз:

$$\vec{\psi} = \dot{\psi} \sin \theta \cdot \vec{l} + \dot{\psi} \cos \theta \vec{k}, \quad (11.28)$$

бунда \vec{l} билан OL ўқнинг бирлик вектори белгиланган. (11.28) ни назарда тутиб, (11.27) нинг иккала томонини Ox , Oy , Oz ўқларга проекциялаймиз:

$$\omega_x = (\dot{\psi} \cos \theta) \cdot \cos 90^\circ + (\dot{\psi} \sin \theta) \cos (90^\circ - \varphi) + \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\varphi} \cos 90^\circ,$$

$$\omega_y = (\dot{\psi} \cos \theta) \cdot \cos 90^\circ + (\dot{\psi} \sin \theta) \cos \varphi + \dot{\theta} \cos (90^\circ + \varphi) + \dot{\varphi} \cos 90^\circ,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\theta} \cos 90^\circ + \dot{\varphi}.$$

ёки соддалаштирсак, қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (11.29)$$

(11.29) тенгламалар Эйлернинг кинематик тенгламалари дейилади. Агар Эйлер бурчаклари ψ , θ , φ лар вақтнинг функцияси сифатида маълум бўлса, Эйлернинг кинематик тенгламалари воситасида қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм оний бурчак тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари аниқланади.

Бу проекцияларни ҳисоблаб, оний бурчак тезликнинг миқдор ва йўналишини

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}, \quad (11.30)$$

$$\cos(\omega, x) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos(\omega, y) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos(\omega, z) = \frac{\omega_z}{\omega} \quad (11.31)$$

формулалар ёрдамида аниқлаймиз.

Худди шунга ўхшаш, оний бурчак тезлик векторининг қўзғалмас координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаш мумкин. $\dot{\psi}$ ва $\dot{\theta}$ векторларининг $O\xi$, $O\eta$, $O\xi$ ўқларидаги проекциялари осонлик билан ҳисобланади. $\dot{\varphi}$ векторининг қўзғалмас ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаш учун бу векторни $O\xi z$ ва $O\eta\xi$ текисликларнинг кесишган чизиги OM ҳамда $O\xi$ ўқлари бўйлаб йўналган ташкил этувчиларга ажратамиз (11.13-расм, б):

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi} \sin\theta \cdot \vec{m}^o + \dot{\varphi} \cos\theta \vec{\xi}^o, \quad (11.32)$$

бунда \vec{m}^o билан OM ўқининг бирлик вектори белгиланган. (11.32) ни эътиборга олиб, (11.27) ни қўзғалмас ўқларга проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi, \\ \omega_\eta &= -\dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi, \\ \omega_\xi &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (11.33)$$

формулаларин оламиз.

(11.33) ни (11.29) билан солиштириб, оний бурчак тезликнинг модули

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\xi^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta},$$

ҳар иккала ҳолда ҳам айнан бир хил қийматга эга бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Бурчак тезлик векторининг қўзғалмас ўқлар билан ташкил қилган бурчаклари (11.31) формулалар каби формулалар билан аниқланади.

(11.29) ва (11.33) дан кўраимизки, Эйлернинг кинематик тенгламалари Эйлер бурчаклари ва уларнинг вақт бўйича ҳосилалари билан оний бурчак тезлик векторининг қўзғалувчи ва қўзғалмас ўқларидаги проекциялари орасидаги боғланишларни ифодалайди.

11.4-масала. Қўзғалмас O нуқта атрофида айланувчи жисмнинг ҳаракати қуйидаги Эйлер бурчаклари орқали берилган:

$$\psi = \frac{\pi}{2} t, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \pi t.$$

Жисм оний бурчак тезлиги, айланиш оний ўқи ҳамда қўзғалувчи ва қўзғалмас аксоидлар топилсин.

Ечиш. Эйлернинг кинематик формуллари (11.29) дан фойдаланиб бурчак тезлигининг қўзғалувчи координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаймиз:

$$\dot{\psi} = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = \pi. \quad (1)$$

(1) ни (11.29) га қўямиз:

$$\omega_x = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} \sin \pi t,$$

$$\omega_y = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} \cos \pi t,$$

$$\omega_z = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \pi.$$

Юқоридагиларни ихчамлаб қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$\omega_x = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi \sin \pi t, \quad \omega_y = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi \cos \pi t, \quad \omega_z = \frac{5}{4} \pi. \quad (2)$$

Бурчак тезлик векторининг қўзғалмас координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш учун (1) ни (11.33) га қўямиз:

$$\omega_{\xi} = \pi \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{2} t,$$

$$\omega_{\eta} = -\pi \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} t,$$

$$\omega_{\zeta} = \frac{\pi}{2} + \pi \cos \frac{\pi}{3}.$$

Бу тенгликларда $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ бўлишини эътиборга олсак, натижада ω_{ξ} , ω_{η} , ω_{ζ} лар учун ушбу муносабатларни оламиз:

$$\omega_{\xi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \sin \frac{\pi}{2} t, \quad \omega_{\eta} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pi \cos \frac{\pi}{2} t, \quad \omega_{\zeta} = \pi. \quad (3)$$

У ҳолда бурчак тезлигининг миқдори қуйидагича ҳисобланади:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_{\xi}^2 + \omega_{\eta}^2 + \omega_{\zeta}^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \pi c^{-1}. \quad (4)$$

(4) дан кўрамизки, бурчак тезлигининг миқдори вақт ўнishi билан ўзгармас экан.

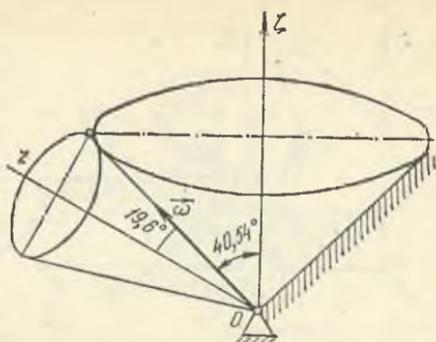
Бурчак тезлик векторининг қўзғалувчи ўқлар билан ташкил қилган бурчаклари (11.31) га кўра ҳисобланади:

$$\frac{2\xi}{\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{2} t} = \frac{2\eta}{-\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} t} = \zeta. \quad (8)$$

(7) ва (8) тенгламалардан вақт t ни йўқотиб, мос равишда қўзғалувчи ва қўзғалмас аксидлар тенгласини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2 + y^2}{3} - \frac{z^2}{5} = 0,$$

$$\frac{4}{3} (\xi^2 + \eta^2) - \zeta^2 = 0.$$



11.15- расм.

Бу тенгламалардан кўрамизки, қўзғалувчи ва қўзғалмас аксидлар доиравий конус сиртлардан иборат бўлади (11.15-расм).

12-б о б. ЭРКИН ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ҲАРАКАТИ

12.1-§. Эркин жисм ҳаракатининг кинематик тенгламалари

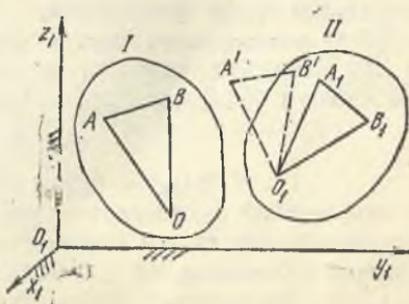
Эркин жисмнинг бирор $O_1x_1y_1z_1$ қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳолати унинг бир тўғри чизиқда ётмайдиган 3 та нуқтасининг ҳолати билан аниқланади. Бу нуқталарни ўзаро тўғри чизиқ кесмалари билан туташтирсак, учбурчак ҳосил бўлади. Жисмнинг ҳолатини аниқловчи мазкур учбурчакнинг ҳаракати қаттиқ жисмнинг фазодаги ҳаракатини батамом характерлайди.

Эркин жисмнинг кўчишига оид қуйидаги Шаль (1793 — 1880) теоремасини исботлаймиз.

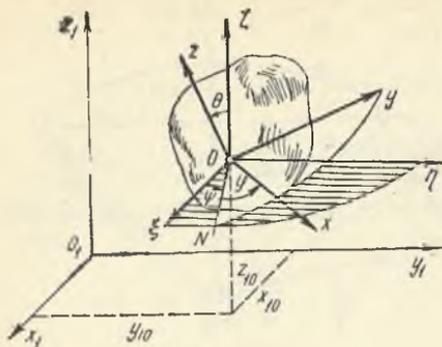
Теорема. Эркин жисмнинг фазодаги ҳар қандай кўчишини қутб деб олинган нуқтанинг бир илгарилама кўчиши ва қутбдан ўтувчи ўқ атрофидаги бир айланма кўчишдан ташкил топган деб қараш мумкин.

Исбот. Эркин жисмнинг t_1 пайтдаги I ҳолати OAB учбурчак ҳолати билан аниқлансин; t_2 пайтдаги II ҳолатда эса мазкур учбурчак $O_1A_1B_1$ учбурчак ҳолатини олган бўлсин (12.1-расм). Жисмнинг I ҳолатдан II ҳолатга ўтишини қуйидагича бажариш мумкин. Аввало жисмга шундай илгарилама кўчиш берамизки, унинг O нуқтаси O_1 билан устма-уст тушсин, у ҳолда A, B нуқталар A', B' ҳолатни эгаллайди.

Сўнгра Эйлер-Даламбер теоремасига кўра O_1 нуқтадан ўтувчи бирор ўқ атрофида бир айлантисак, жисм иккинчи ҳолатни эгаллайди.



12.1- расм.



12.2- расм.

даги илгарилама ҳаракат ҳамда қутб атрофидаги айланма ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин. Шу жумладан, қутб атрофидаги ҳаракатни мазкур нуқтадан ўтувчи оний ўқлар атрофидаги кетма-кет узлуксиз чексиз кичик айланишлардан ташкил топган деб тасаввур қилиш мумкин.

Жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун унинг бирор O нуқтасини қутб учун танлаб олампиз ҳамда қутб орқали $O_1x_1y_1z_1$ қўзғалмас координаталар системасига ҳамиша параллел равишда ҳаракатланувчи $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасини ва жисмга маҳкам бириктирилган $Oxuz$ координаталар системасини ўтказамиз (12.2-расм).

Қўзғалувчи $Oxuz$ координаталар системасининг қўзғалмас $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатини ўрганиш эркин жисмнинг $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатини ўрганишга эквивалентдир. $Oxuz$ қўзғалувчи координаталар системасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан исталган пайтдаги ҳолатини аниқлаш учун O қутбнинг координаталари x_{10}, y_{10}, z_{10} ни вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш керак. 11.1-§ да кўрганммиздек, $Oxuz$ координаталар системасининг $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳолати маълум бўлиши учун учта Эйлер бурчаклари ψ, θ, φ ни вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш керак. Бинобарин, эркин қаттиқ жисмнинг қўзғалмас $O_1x_1y_1z_1$ координаталар системасига нисбатан ҳолати олтига: $x_{10}, y_{10}, z_{10}, \varphi, \psi, \theta$ координаталар билан аниқланади;

Эркин қаттиқ жисм фазода ҳаракатланганда мазкур координаталар бир қийматли, узлуксиз ва камида вақт бўйича иккинчи ҳосиласи мавжуд функциялардан иборат бўлади, яъни:

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= f_1(t), & y_{10} &= f_2(t), & z_{10} &= f_3(t), \\ \psi &= f_4(t), & \theta &= f_5(t), & \varphi &= f_6(t). \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

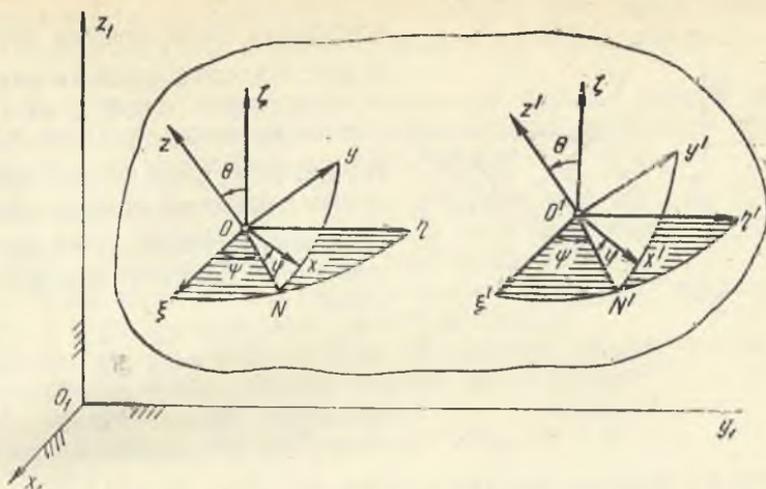
Бу тенгламалар эркин қаттиқ жисмнинг исталган пайтдаги ҳолатини аниқлайди ва эркин қаттиқ жисм умумий ҳаракатининг кинематик тенгламалари дейилади.

(12.1) тенгламаларнинг биринчи учтаси воситасида жисмнинг илгарилама ҳаракати аниқланади. Жисм турли нуқталарининг координаталарини

Албатта, жисмнинг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга кўчишини бундай икки ҳаракат йиғиндисидан иборат деб қараш унинг ҳақиқий ҳаракатини тасвирламайди.

Эркин жисмнинг ҳақиқий ҳаракати давомида бу икки ҳаракат бир вақтнинг ўзида содир бўлади.

Шу сабабли эркин қаттиқ жисмнинг ҳақиқий ҳаракатини қуйидагича тасвирлаш мумкин: эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини жисмда қутб учун танлаб олинган нуқта билан биргаликда



12.3- расм.

наталари турлича бўлгани туфайли бу тенгламалар қутбнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлади.

(12.1) тенгламаларнинг қолган учтаси эркин қаттиқ жисмнинг ҳар ондаги сферик ҳаракатини ифодалайди ва қутбнинг танланишига боғлиқ бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам жисмнинг O ва O' нуқталарида ўзаро параллел бўлган $Oxyz$ ҳамда $O'x'y'z'$ координаталар системасини ўтказсак, бу координаталар системасининг мос ўқлари жисм ҳаракати давомида бир-бирига параллеллигича қолади; O ва O' нуқталардаги Эйлер бурчаклари бир хил бўлади (12.3-расм).

Эркин қаттиқ жисмнинг бурчак тезлиги деганда унинг бирор нуқтасида олинган ва жисм билан биргаликда илгарилема ҳаракат қилувчи координаталар системасига нисбатан ҳисобланган бурчак тезлик тушунилади.

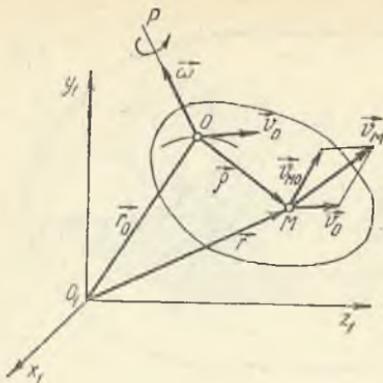
Эркин қаттиқ жисмнинг бурчак тезланиши тушунчаси ҳам худди шу усулда киритилади.

Эркин қаттиқ жисмнинг қутб атрофидаги ҳаракати қутбнинг танланишига боғлиқ бўлмагани учун эркин қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатидаги бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши ҳам қутбнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмайди, яъни O ёки O' нуқталарни қутб учун танлаб олсак, у ҳолда эркин қаттиқ жисмнинг мазкур қутблар атрофидаги айланма ҳаракат бурчак тезликлари $\vec{\omega}$ ва $\vec{\omega}'$, шунингдек, $\vec{\epsilon}$ ва $\vec{\epsilon}'$ бурчак тезланишлари мос равишда тенг бўлади.

12.2-§. Эркин жисм нуқтасининг тезлиги

Эркин қаттиқ жисм иккита нуқтасининг тезликлари орасидаги муносабатни ифодаловчи формулани келтириб чиқарамиз.

Агар эркин жисм бирор O нуқтасининг тезлиги маълум бўлса, шу нуқтани қутб учун қабул қиламиз. Қутбнинг қўзғалмас $O_1 x_1 y_1 z_1$



12.4- расм.

координаталар системасига нисбатан радиус-векторини \vec{r}_0 , жисм ихтиёрий M нуқтасининг мазкур координаталар системасига нисбатан радиус-векторини \vec{r} ҳамда M нуқтанинг O қутбга нисбатан радиус-векторини $\vec{\rho}$ билан белгиласак (12.4-расм), эркин жисм ҳаракати давомида ҳаминша

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho} \quad (12.2)$$

муносабат ўринли бўлади. Жисмнинг O ва M нуқталари орасидаги

масофа ўзгармасдан қолгани туфайли $\rho = const$ бўлади, яъни $\vec{\rho}$ вектори миқдор жиҳатдан ўзгармас бўлиб, ҳаракат давомида унинг фақат йўналиши ўзгаради.

M нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун (12.2) векторли тенгликдан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}, \quad (12.3)$$

бунда $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_M$ — M нуқтанинг тезлиги, $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_O$ — O қутбнинг тезлиги.

Эркин қаттиқ жисм ҳаракати давомида $\vec{\rho}$ векторнинг миқдори ўзгармай, фақат йўналиши ўзгаргани учун $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ ҳосила M нуқтанинг O қутб атрофидаги сферик ҳаракат тезлигини ёки O қутбдан ўтувчи айланиш оний ўқи атрофидаги айланма ҳаракат тезлиги \vec{v}_{MO} ни ифодалайди. (11.4) га биноан

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_{MO}. \quad (12.4)$$

Натижада (12.3) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (12.5)$$

ёки

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}. \quad (12.6)$$

Шундай қилиб, эркин қаттиқ жисм ихтиёрий M нуқтасининг тезлиги қутбнинг тезлигига тенг бўлган илгариланма ҳаракат тезлиги билан жисмнинг шу қутбдан ўтувчи айланиш оний ўқи атрофида айланишидаги мазкур нуқта тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг.

Текис параллел ҳаракатдаги каби (12.5) формуладан бевосита келиб чиқадиган ҳамда алоҳида аҳамиятга эга бўлган қуйидаги натижаларни келтираемиз:

1. Агар берилган онда эркин жисмнинг бурчак тезлиги нолга тенг бўлса, у ҳолда жисм барча нуқталарининг тезликлари тенг ва жисм шу онда илгарилама ҳаракатда бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $\vec{\omega} = 0$ бўлса, (12.5) га кўра $\vec{v}_O = \vec{v}_M$ бўлади. M жисмнинг ихтиёрий нуқтаси бўлгани учун жисм барча нуқталарининг тезлиги қутбнинг тезлигига тенг бўлади.

2. Эркин жисм иккита нуқтаси тезликларининг шу нуқталардан ўтувчи ўқдаги проекциялари ўзаро тенг бўлади.

Ҳақиқатан ҳам (12.5) ни O ва M нуқталар орқали ўтувчи OM ўққа проекцияласак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$n_{p_{OM}}(\vec{v}_O) = n_{p_{OM}}(\vec{v}_M) + n_{p_{OM}}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}).$$

Аммо $\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ вектори M нуқтанинг O нуқтага нисбатан радиус-вектори $\vec{\rho}$ га ёки OM ўққа перпендикуляр бўлгани учун унинг мазкур ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлади. Оқибатда

$$n_{p_{OM}}\vec{v}_O = n_{p_{OM}}\vec{v}_M$$

тенглик ўринли бўлади.

12.3-§. Эркин жисм нуқтасининг тезланиши

Эркин жисм ҳаракатининг умумий ҳолида унинг бирор M нуқтаси тезланишини аниқлаш учун мазкур нуқтанинг тезлигини ифодаловчи (12.5) формуладан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (12.7)$$

Бунда

$$\frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{\omega}_M, \quad \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \vec{\omega}_O, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

бўлгани туфайли (12.7) ни

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \quad (12.8)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (12.4) ни эътиборга олсак, (12.8) ифода

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{MO} \quad (12.8 \text{ а})$$

кўринишни олади.

Эркин қаттиқ жисмнинг тезланиши учун чиқарилган (12.8) ифодани (11.12) билан солиштирсак, $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ йиғинди M нуқта тезланишининг жисм O қутб атрофида оний айланма ҳаракат-

да бўлгандаги ташкил этувчисини ифодалашини кўрамиз. Тезланишнинг бу ташкил этувчисини $\vec{\omega}_{MO}$ билан белгиласак,

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}_O + \vec{\omega}_{MO}. \quad (12.9)$$

(12.9) дан кўрамизки, умумий ҳолда эркин қаттиқ жисм ихтиёрий M нуқтасининг тезланиши O қутбнинг тезланишига тенг бўлган илгарилама ҳаракат тезланиши билан жисмнинг O қутб атрофида айланишида M нуқта олган тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.

13-боб. НУҚТАНИНГ МУРАҚҚАБ ҲАРАКАТИ

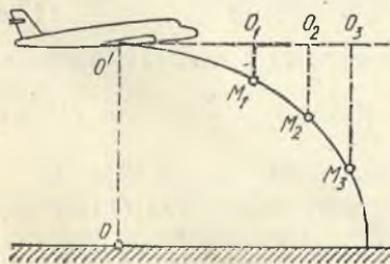
«Фанда кенг, тўппа-тўғри йўл йўқ ва унинг чақир тошли сўқмоқларидан ҳорини би май, тиришиб-тирмашиб чиқа олган кишигина унинг нурли чўққиларига етишади».

К. Маркс

13.1-§. Нуқтанинг нисбий, кўчирма ва абсолют ҳаракатлари

Шу пайтгача нуқтанинг ҳаракатини қўзғалмас координаталар системасига нисбатан текшириш билан шуғулландик. Лекин механика масалаларини ечишда кўпинча нуқтанинг ҳаракатини бир вақтнинг ўзида иккита координаталар системасига нисбатан текшириш мақсадга мувофиқ бўлади. Бу ҳолда координата системаларидан бирини қўзғалмас деб қабул қиламиз ва уни асосий координаталар системаси деб атаймиз.

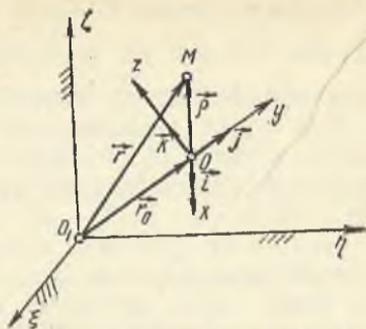
Масала, ўзгармас тезлик билан тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланаётган самолётдан бошланғич тезликсиз ташланган юкнинг ҳаракатини Ер билан боғланган асосий координаталар системасига ҳамда самолётга бириктирилган координаталар системасига нисбатан текшириш мумкин. Бунда ҳар бир координаталар системасига нисбатан нуқтанинг траекторияси турлича бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинмаса, самолётда ўтирган кузатувчига нисбатан юк тўғри чизиқли ҳаракат қилаётгандек туюлади. Ҳақиқатан ҳам самолётдаги кузатувчи O_1, O_2, O_3 ҳолатларни эгаллаганда юк мазкур нуқталар билан бир вертикал тўғри чизиқларда ётувчи M_1, M_2, M_3 ҳолатларни эгаллайди; Ерда турган кузатувчи эса, самолётдан ташланган юкнинг парабола бўйлаб ҳаракатланаётганлигининг шоҳиди бўлади (13.1-рasm).



13.1- рasm.

M нуқта бирор $Oxuz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатлансин. Ўз навбатида бу координаталар системаси қўзғалмас деб олинадиган $O_1 \xi \eta \zeta$ асосий координаталар системасига нисбатан ҳа-

ракатлансин (13.2-расм). Одатда ҳар иккала координаталар системаси ҳам маълум жисмларга бириктирилган деб қаралади. Аксарият ҳолларда қўзғалмас координаталар системаси Ерга боғлаб олинади. Қўзғалувчи координаталар системаси эса машина ва механизм қисмлари, кема, самолёт, поезд каби ҳаракатдаги объектлар билан боғланган деб қаралади.



13.2- расм.

✓ *Нуқтанинг қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан ҳаракати нисбий ҳаракат дейилади.*

М нуқтанинг қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан радиус-векторини ρ , координаталарини x, y, z ҳамда қўзғалувчи координата ўқларининг бирлик йўналтирувчи векторларини мос равишда $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ билан белгиласак,

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \checkmark \quad (13.1)$$

муносабат ўринли бўлади.

М нуқтанинг нисбий ҳаракат тенгламаларини Декарт координата ўқларидаги ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \right\} \quad \checkmark \quad (13.2)$$

Нуқтанинг нисбий ҳаракати қўзғалувчи координаталар системаси билан биргаликда ҳаракатланувчи кузатувчи томонидан қайд қилинади. Нуқтанинг қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан траекторияси *нисбий траектория* дейилади. Нуқтанинг бундай ҳаракатдаги тезлик ва тезланиши мос равишда *нисбий тезлик* ва *нисбий тезланиш* дейилади ҳамда \vec{v} ва \vec{w} билан белгиланади.

Қўзғалувчи координаталар системасининг ва у билан ўзгармас равишда боғланган фазо нуқталарининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати кўчирма ҳаракат дейилади. Кўчирма ҳаракат тушунчаси нисбий ҳаракатдаги нуқтага ҳам тааллуқли бўлиши мумкин.

Бундай *нуқтанинг* бирор ондаги *кўчирма ҳаракати* деганда худди шу онда қўзғалувчи координаталар системасининг берилган нуқта билан устма-уст тушувчи нуқтасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати тушунилади.

Нуқтанинг берилган ондаги кўчирма ҳаракатини талқин қилиш учун нуқтанинг шу ондаги нисбий ҳаракатини фикран эътиборга олмай, уни қўзғалувчи координаталар системаси билан биргаликда қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати қарълади.

Шу сабабли *нуқтанинг* берилган ондаги *кўчирма тезлиги* ва *кўчирма тезланиши* деганда худди шу онда қўзғалувчи координата-

талар системасининг берилган нуқта билан устма-уст тушувчи нуқтасининг тезлиги ва тезланиши тушунилади. Кўчирма тезлик \vec{v}_e , кўчирма тезланиш $\vec{\omega}_e$ билан белгиланади.

Қўзғалувчи координаталар системасининг турли нуқталари ҳар хил траектория бўйлаб ҳаракатлангани туфайли умумий ҳолда M нуқтанинг кўчирма ҳаракат траекторияси тушунчасини киритиш мумкин эмас.

Нуқтанинг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракати *абсолют ҳаракат* дейилади. Нуқта бир вақтнинг ўзидикики ёки ундан ортиқ ҳаракатда иштирок этса, бундай ҳаракат *мураккаб ҳаракат* дейилади. Нуқтанинг абсолют ҳаракати ўз навбатида нисбий ва кўчирма ҳаракатлардан ташкил топгани туфайли нуқтанинг абсолют ҳаракатини мураккаб ҳаракат деб аташ мумкин.

Абсолют ҳаракатдаги нуқтанинг тезлик ва тезланиши мос равишда *абсолют тезлик* ва *абсолют тезланиш* дейилади. Абсолют тезликни \vec{v}_a , абсолют тезланишни $\vec{\omega}_a$ билан белгилаймиз.

Нуқтанинг нисбий ва кўчирма ҳаракатини билган ҳолда унинг абсолют ҳаракатини, бинобарин, абсолют ҳаракат тезлиги ва тезланишини аниқлаш нуқта мураккаб ҳаракати кинематикасининг асосий масаласи ҳисобланади.

13.2-§. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезликларини қўшиш ҳақидаги теорема

Қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системаси $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ асосий координаталар системасига нисбатан ихтиёрий равишда ҳаракатлансин (13.2-расм). Юқоридики ўрганимиздек, M нуқтанинг ҳаракатини қўзғалувчи ва асосий координата системаларининг ҳар бирига нисбатан аниқлаш мумкин. Бу параграфда нуқтанинг танланган координата системаларига нисбатан тезликлари орасидаги муносабатни аниқлаймиз.

Агар M ва O нуқталарнинг қўзғалмас координата системасига нисбатан радиус-векторларини мос равишда \vec{r} ва \vec{r}_0 билан белгиласак, расмдан

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho} \quad (13.3)$$

муносабат ўринли бўлишини кўрамиз.¹
(13.1) ни назарда тутиб, (13.3) ни

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + xi + yj + zk \quad (13.4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар M нуқтанинг нисбий ва кўчирма ҳаракати маълум бўлса, яъни мазкур нуқтанинг нисбий координаталари x , y , z ва қўзғалувчи координаталар системаси бошининг радиус-вектори \vec{r}_0 вақтнинг функцияси сифатида ҳамда \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ларнинг вақт ўтиши билан

Йўналиш жиҳатдан ўзгариш қонуни берилган бўлса, нуқтанинг асосий координаталар системасига нисбатан ҳаракати ҳам берилган деб ҳисоблаш мумкин.

M нуқтанинг абсолют тезлигини аниқлаш учун (13.4) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (13.5)$$

Бу тенгликда $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_a$ — M нуқтанинг абсолют тезлигини, $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_0$ эса қўзғалувчи координаталар системаси бошидаги O нуқтанинг тезлигини ифодалайди.

(13.5) да қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\vec{v}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \quad (13.6)$$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (13.7)$$

(13.6) дан кўришиб турибдики, тезликнинг \vec{v}_r ташкил этувчисини ҳисоблашда нуқтанинг фақат нисбий координаталаригагина ўзгариб, $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторлар ўзгармас деб қаралади. Шу сабабли \vec{v}_r нуқтанинг нисбий тезлигини ифодалайди.

(13.7) да x, y, z қатнашмайди, яъни \vec{v}_e ни ҳисоблашда нуқтанинг нисбий ҳаракати эътиборга олинмайди. Шу сабабли \vec{v}_e M нуқтанинг кўчирма тезлигини ифодалайди.

Шундай қилиб, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \quad (13.8)$$

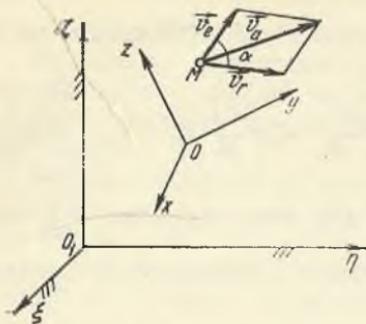
(13.8) тенглама мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезликларини қўйиши ҳақидаги теоремани ифодалайди; нуқтанинг абсолют тезлиги мазкур нуқта нисбий ва кўчирма тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Шундай қилиб, нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезликлари миқдор ва йўналиш жиҳатдан маълум бўлса, абсолют тезликнинг модули нисбий ва кўчирма тезликларга қурилган параллелограммнинг диагонали билан ифодаланади. Шу сабабли бу теоремага тезликларнинг параллелограмм қондаси дейилади.

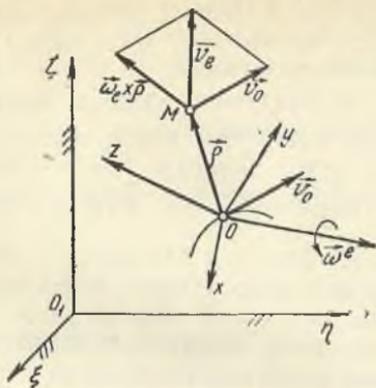
Абсолют тезликнинг модули косинуслар теоремасидан фойдаланиб аниқланади (13.3-расм).

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos \alpha}, \quad (13.9)$$

бунда $\alpha = \widehat{\vec{v}_r, \vec{v}_e}$ билан нисбий ва кўчирма тезлик векторлари орасидаги бурчак белгиланган.



13.3- расм.



13.4- расм.

Хусусан нисбий ва кўчирма тезлик векторлари ўзаро перпендикуляр бўлса, яъни $\alpha = 90^\circ$ бўлган ҳолда тезликларга қурилган параллелограмм тўғри тўртбурчакдан иборат бўлади. Шу сабабли бу ҳолда

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}. \quad (13.10)$$

Агар нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезликлари бир тўғри чизиқ бўйлаб бир томонга йўналса,

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e} = v_r + v_e, \quad (13.11)$$

қарама-қарши томонга йўналса,

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e} = |v_r - v_e| \quad (13.12)$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Нуқтанинг кўчирма тезлигини аниқлаш устида батафсил тўхта-ламиз. Агар қўзғалувчи координаталар системасининг берилган он-даги бурчак тезлиги $\vec{\omega}_e$ маълум бўлса, у ҳолда $\frac{d\vec{i}}{dt}$, $\frac{d\vec{j}}{dt}$, $\frac{d\vec{k}}{dt}$

катталикларни мос равишда \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} бирлик векторларнинг учлари-даги нуқталарнинг тезлигига тенг деб қараш мумкин. Шу сабабли Эйлер формуласига кўра ушбу

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k} \quad (13.13)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

(13.13) ни (13.7) га қўйиб, (13.1) ни эътиборга олсак,

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_e \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho} \quad (13.14)$$

формула ўринли бўлади (13.4- расм).

(13.14) ва (12.5) тенгликларни солиштириб, (13.14) берилган онда M нуқта $Oxyz$ координаталар системасида эгаллаган ҳолати билан устма-уст тушувчи нуқтанинг тезлигини ифодалашини кўраимиз.

Қуйидаги ҳолларда нуқтанинг кўчирма тезлигини ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

1. Агар кўчирма ҳаракат илгарилама ҳаракатдан иборат бўлса, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ бирлик векторлар ўзига параллел равишда кўчади. Бу ҳолда $\omega_e = 0$ бўлиб, (13.14) га кўра кўчирма тезлик учун ушбу муносабат ўринли бўлади:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_O.$$

2. Агар M нуқтанинг ҳаракати давомида қўзғалувчи координаталар системасининг боши қўзғалмасдан қолса, $\vec{v}_O = 0$ бўлиб, (13.14) га кўра M нуқтанинг кўчирма ҳаракат тезлиги худди сферик ҳаракатдаги жисм нуқтасининг тезлиги каби аниқланади:

$$\vec{v}_e = \omega_e \times \rho.$$

13.3-§. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезланишларини қўшиш ҳақидаги Кориолис теоремаси

M нуқтанинг абсолют тезланиши $\vec{\omega}_a$ мазкур нуқтанинг абсолют тезлиги \vec{v}_a дан вақт бўйича олинган ҳосиллага тенг бўлади:

$$\vec{\omega}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}.$$

(13.5) дан вақт бўйича ҳосила олсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_a = & \frac{d^2 \vec{r}_O}{dt^2} + \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k} + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} + \\ & + 2 \left(\dot{x} \frac{d \vec{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d \vec{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d \vec{k}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (13.15)$$

(13.15) да қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\vec{\omega}_r = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}, \quad (13.16)$$

$$\vec{\omega}_e = \frac{d^2 \vec{r}_O}{dt^2} + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2}, \quad (13.17)$$

$$\vec{\omega}_k = 2 \left(\dot{x} \frac{d \vec{i}}{dt} + \dot{y} \frac{d \vec{j}}{dt} + \dot{z} \frac{d \vec{k}}{dt} \right). \quad (13.18)$$

(13.16) дан кўриниб турибдики, тезланишнинг $\vec{\omega}_r$ ташкил этувчиси $\vec{r}_O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ларнинг ҳосилаларига боғлиқ эмас. $\vec{\omega}_r$ ни ҳисоб-

лашда $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ лар ўзгармас, фақат x, y, z ларгина вақтнинг функцияси сифатида ўзгаради деб қаралади. Шу сабабли $\vec{\omega}$, *нуқтанинг нисбий тезланишини* ифодалайди. Нуқтанинг нисбий тезланишини ҳисоблашда қўзғалувчи координаталар системасининг ҳаракати эътиборга олинмайди.

(13.17) да $\vec{\omega}_e$ ни ҳисоблашда M нуқта нисбий координаталарининг ўзгариши эътиборга олинмайди, яъни берилган онда

$$x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$$

деб қаралади. Бошқача айтганда $\vec{\omega}_e$ ни ҳисоблашда берилган онда нуқтани қўзғалувчи координаталар системасига нисбатан тинч ҳолатда деб қараб, унинг қўзғалувчи координаталар системаси билан биргаликда ҳаракатлангандаги тезланиши назарда тутилади. Шу сабабли $\vec{\omega}_e$ *нуқтанинг кўчирма тезланишини* ифодалайди.

(13.18) дан кўрамызки, тезланишнинг $\vec{\omega}_k$ ташкил этувчиси таркибига нуқта нисбий координаталарининг ҳосилалари x, y, z билан бир қаторда қўзғалувчи координаталар системасининг бирлик векторларидан олинган ҳосилалар $\frac{d\vec{i}}{dt}, \frac{d\vec{j}}{dt}, \frac{d\vec{k}}{dt}$ ҳам қатнашади. Шу

нуқтаи назардан қараганда $\vec{\omega}_k$ ни нисбий тезланиш таркибига ҳам, кўчирма тезланиш таркибига ҳам киритиб бўлмайди. $\vec{\omega}_k$ *Кориолис тезланиши* ёки қўшимча тезланиш дейилади.

Шундай қилиб, Нуқтанинг абсолют тезланиши учун қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_k. \quad (13.19)$$

(13.19) тенглик мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезланишларини қўшиш ҳақидаги *Г. Кориолис (1792—1843) теоремасини* ифодалайди: *мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг абсолют тезланиши унинг нисбий, кўчирма ва Кориолис (ёки қўшимча) тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Агар кўчирма ҳаракат илгарилама ҳаракатдан иборат бўлса, у ҳолда қўзғалувчи координаталар системасининг $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ бирлик векторлари ҳаракат давомида ҳаммisha ўзига параллел равишда кўчади.

(13.17) ва (13.18) да $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторлардан вақт бўйича олинган биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар нолга тенг бўлиб,

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0, \vec{\omega}_k = 0$$

муносабатлар ўриqli бўлади. Бинобарин, кўрилаётган ҳол учун (13.19) қуйидагича ёзилади:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e. \quad (13.20)$$

(13.20) тенглик кўчирма ҳаракати илгарилама ҳаракатдан иборат бўлган нуқтанинг тезланишларини қўйиши ҳақидаги теоремани ифодалайди: кўчирма ҳаракати илгарилама ҳаракатдан иборат бўлган нуқтанинг абсолют тезланиши унинг нисбий ва кўчирма тезланишлари геометрик йиғиндисига тенг.

Агар нуқтанинг нисбий ва кўчирма тезланишлари миқдор ва йўналиш жиҳатдан маълум бўлса, у ҳолда абсолют тезланишнинг модули нисбий ва кўчирма тезланишларга қурилган параллелограммнинг диагоналига тенг бўлади:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_r\omega_e \cos(\widehat{\omega_r, \omega_e})}. \quad (13.21)$$

Шу сабабли (13.20) тенглик тезланишларнинг параллелограмм қондаси дейилади.

13.4-§. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишлари

Нуқтанинг нисбий тезланишини бевосита (13.16) формула ёрдамида ёки қўзғалувчи координаталар системасини фикран қўзғалма деб қараб, 8.5-§ да чиқарилган формулалар ёрдамида аниқлаш мумкин.

Нуқтанинг кўчирма тезланиши (13.17) дан фойдаланиб ҳисобланади. Бу формулада $\frac{d^2 \vec{r}_O}{dt^2} = \vec{\omega}_0$ қўзғалувчи Охуз координаталар системаси бошининг тезланишини ифодалайди. (13.13) ни эътиборга олиб (13.17) ҳадларини қуйидагича ўзгартириш мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{i}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_e \times \vec{i}) = \frac{d \vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{i} + \vec{\omega}_e \times \\ &\times \frac{d \vec{i}}{dt} = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{i} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{i}), \end{aligned}$$

бу тенгликда $\vec{\varepsilon}_e = \frac{d \vec{\omega}_e}{dt}$ билан берилган ондаги кўчирма ҳаракат бурчак тезланиши белгиланган. Худди шу сингари $\frac{d^2 \vec{j}}{dt^2}$, $\frac{d^2 \vec{k}}{dt^2}$ ларни ҳисоблаш мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} &= \vec{\varepsilon}_e \times \vec{j} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{j}), \\ \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} &= \vec{\varepsilon}_e \times \vec{k} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{k}). \end{aligned}$$

Натижада

$$x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} = \vec{\varepsilon}_e \times (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) + \vec{\omega}_e \times$$

$$\times [\vec{\omega}_e \times (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})] = \vec{e}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho})$$

тенгликни оламир.

Шундай қилиб, кўчирма тезланиш учун қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0 + \vec{e}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}). \quad (13.22)$$

(13.22) ва (12.8) тенгликларни солиштириб, (13.22) тенглик Охуз координаталар системасининг берилган онда M нуқта эгаллаган ҳолати билан устма-уст тушувчи нуқтасининг тезланишини ифодалашини кўрамир.

Бинобарин, кўчирма ҳаракат тезланиши $\vec{\omega}_e$ қўзғалувчи координаталар системасининг бошидаги O нуқтанинг тезланиши $\vec{\omega}_0$ ҳамда айланма тезланиш $\vec{\omega}_e^a = \vec{e}_e \times \vec{\rho}$ билан ўққа интилма тезланиш $\vec{\omega}_e^o = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho})$ нинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади, яъни (13.5-расм):

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_e^a + \vec{\omega}_e^o. \quad (13.23)$$

(13.13) ни назарда тутиб, Кориолис тезланишини ифодаловчи (13.18) тенгликни қуйидагича ёза оламир:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_k &= 2 [x (\vec{\omega}_e \times \vec{i}) + y (\vec{\omega}_e \times \vec{j}) + z (\vec{\omega}_e \times \vec{k})] = \\ &= 2 [\vec{\omega}_e \times (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})]. \end{aligned}$$

Кориолис тезланишини ифодаловчи бу ифода (13.6) га кўра қуйидаги кўринишни олади:

$$\vec{\omega}_k = 2 (\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r). \quad (13.24)$$

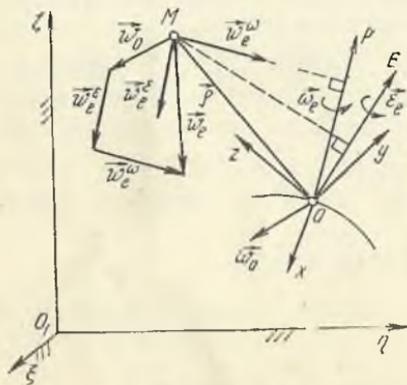
Демак, мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг Кориолис тезланиши қўзғалувчи Охуз координаталар системасининг берилган ондаги бурчак тезлиги билан нуқтанинг нисбий тезлиги векторли кўпайтмасининг иккиланганига тенг.

Кориолис тезланишининг модули (13.24) тенгликка биноан

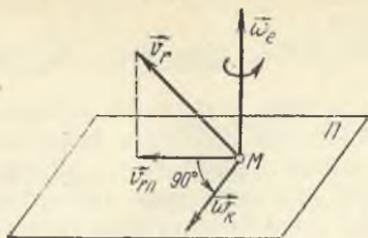
$$\omega_k = 2 \omega_e v_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}) \quad (13.25)$$

формула билан аниқланади.

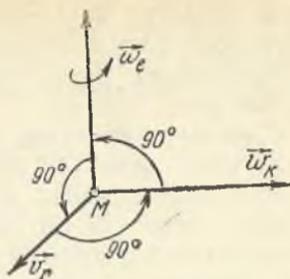
$\vec{\omega}_e$ векторни ўзига параллел гарзда фикран M нуқтага кўчирганда $\vec{\omega}_k$ Кориолис тезланиши вектори $\vec{\omega}_e$ ва \vec{v}_r векторлари ётган текисликка перпендикуляр равишда шундай йўналадики, унинг мус



13.5- расм.



13.6- расм.



13.7- расм.

бат учидан қараганда $\vec{\omega}_e$ ни кичик бурчакка буриб \vec{v}_r устига тушириш соат стрелкаси айланишига тескари йўналишда бўлиши керак.

$\vec{\omega}_k$ нинг йўналишини аниқлашда қуйидаги Жуковский қонидасидан ҳам фойдаланиш мумкин: Кориолис тезланишининг йўналишини аниқлаш учун M нуқтанинг нисбий тезлиги \vec{v}_r нинг берилган ондаги кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги $\vec{\omega}_e$ га перпендикуляр Π текисликдаги проекцияси $\vec{v}_{r\Pi}$ ни мазкур текисликда кўчирма ҳаракат йўналишида 90° бурчакка буриш керак (13.6- расм).

Хусусан, $\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$ бўлса, Кориолис тезланишининг йўналишини аниқлаш учун \vec{v}_r ни $\vec{\omega}_e$ атрофида кўчирма ҳаракат айланиши йўналишида 90° бурчакка буриш кифоя (13.7- расм).

Қуйидаги хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. Қўзғалувчи *Охуз* координаталар системаси илгарилама ҳаракатда (яъни $\omega_e = 0$ бўлса), (13.24) га биноан $\omega_k = 0$ бўлади.

2. Берилган онда нуқтанинг нисбий тезлиги нолга тенг бўлса, (13.24) га асосан $\omega_k = 0$ бўлади.

3. Берилган онда нисбий ҳаракат тезлиги кўчирма ҳаракат бурчак тезлигига параллел (яъни $\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r} = 0^\circ$ ёки $\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r} = 180^\circ$) бўлса, шу онда $\sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}) = 0$ бўлгани учун (13.25) га биноан $\omega_k = 0$ бўлади.

13.5- §. Нуқтанинг мураккаб ҳаракатига оид масалалар

Нуқтанинг мураккаб ҳаракатига оид масалаларни ечишда аввало қўзғалмас ва қўзғалувчи координата системалари танланиб, нуқтанинг абсолют ҳаракати нисбий ва кўчирма ҳаракатларга ажратилади.

Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезлигини топишда (13.8) формула билан ифодаланадиган тезликлар параллелограмми қонидасидан фойдаланилади.

Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезланишларини аниқлашга оид масалаларни 2 турга бўлиш мумкин:

1. Кўчирма ҳаракати илгарилама ҳаракат бўлган нуқтанинг тезланишларини аниқлаш.

2. Кўчирма ҳаракати илгарилама ҳаракатда иборат бўлмаган нуқтанинг тезланишларини аниқлаш.

Ҳар иккали турга онд масалаларни геометрик ёки аналитик усулда ечиш мумкин.

Масалани геометрик усулда ечганда нуқтанинг кўчирма ҳаракати турига қараб (13.19) ёки (13.20) тенгликлардан фойдаланилади.

Масалани аналитик усулда ечганда проекциялар усули қўлланилади, яъни (13.19) ёки (13.20) тенгламаларни танланган ўзаро перпендикуляр координата ўқларига проекциялаш йўли билан нуқтанинг тезланиши аниқланади.

✓ 13.1- масала. 8.8- масала шартда қайд этилган A нуқтанинг тезлик ва тезланиши тезликларини ва тезланишларини қўшиш теоремаларидан фойдаланиб аниқлансин (13.8- расм). Қўйидагилар берилган:

$$s = \left(0,2 + 0,6 \sin \frac{\pi}{3} t \right) \text{ м}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} t \text{ рад}, \quad AB = l = 0,3 \text{ м}, \quad t = 1 \text{ с}.$$

Ечиш. Қўзғалмас $O_1 \xi \eta$ ва қўзғалувчи Bxy координаталар системасини расмда кўрсатилгандек танлаб оламиз. A нуқтанинг қўзғалувчи Bxy координаталар системасига нисбатан l радиусли айлана ёйи бўйлаб $\varphi = \frac{\pi}{3} t$ рад. қонун асосидаги ҳаракати нисбий ҳаракатни ифодалайди. Bxy координаталар системасининг $O_1 \xi \eta$ координаталар системасига нисбатан $s = \left(0,2 + 0,6 \sin \frac{\pi}{3} t \right)$ м қонун асосида тўғри чизиқли ҳаракати кўчирма ҳаракатдан иборат. A нуқтанинг $O_1 \xi \eta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати мураккаб ҳаракатдир.

A нуқтанинг берилган ондаги ҳолатини аниқлаймиз. B ползуннинг $O_1 \xi \eta$ координаталар системасига нисбатан ҳолати s координата билан аниқланади. $t = 1$ с бўлганда

$$s = \left(0,2 + 0,6 \sin \frac{\pi}{3} \right) = 0,72 \text{ м}.$$

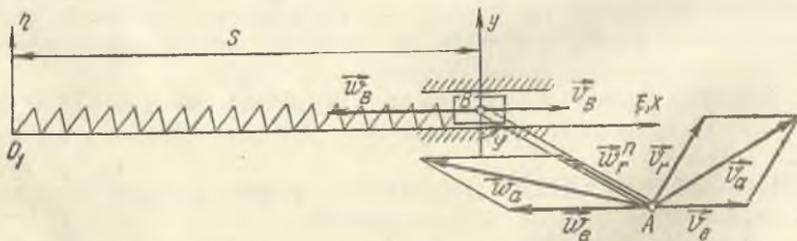
A нуқтанинг Bxy координаталар системасига нисбатан ҳолати φ бурчак билан аниқланади. $t = 1$ с бўлганда

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ рад}.$$

B ползун ва A нуқтанинг берилган ондаги ҳолати 13.8- расмда тасвирланган. A нуқтанинг абсолют тезлигини (13.8) формула воситасида аниқлаймиз.

Ушбу нуқта нисбий тезлигининг модули $v_r = \omega_r AB = \frac{d\varphi}{dt} l = \frac{\pi}{3} 0,3 = 0,314 \text{ м/с}$

га тенг бўлади. \vec{v}_r вектори φ бурчакнинг мусбат йўналишига мос равишда AB га перпендикуляр йўналади.



13.8- расм.

Кўчирма ҳаракат тўғри чизиқли ҳаракатдан иборат бўлгани учун $\vec{v}_e = \vec{v}_B$ тенглик ўринли бўлади. B нукта тезлигининг модули $v_B = |v_{Bx}|$ га тенг. Бунда v_{Bx} билан B нукта тезлигининг x ўқдаги проекцияси белгиланган:

$$v_{Bx} = \frac{ds}{dt} = 0,2 \pi \cos \frac{\pi}{3} t \text{ м/с.}$$

$t = 1$ с бўлганда

$$v_{Bx} = 0,1 \pi = 0,314 \text{ м/с.}$$

v_{Bx} мусбат қийматга эга бўлгани учун $t = 1$ с бўлган пайтда B нуктанинг тезлиги x ўқи бўйича йўналади.

Шундай қилиб, A нукта кўчирма тезлигининг модули $v_e = v_B = 0,314$ м/с га тенг бўлади. \vec{v}_e вектори \vec{v}_B га параллел йўналади.

Расмда $(\vec{v}_r, \vec{v}_e) = 60^\circ$ бўлгани учун A нуктанинг \vec{v}_a абсолют тезлиги \vec{v}_r ва \vec{v}_e ларга қурилган параллелограммнинг диагонали бўйлаб йўналади. Шу сабабли

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_e v_r \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_e)} = \sqrt{(0,314)^2 + (0,314)^2 + 2 \cdot 0,314 \cdot 0,314 \cos 60^\circ} = 0,543 \text{ м/с.}$$

$v_r = v_e$ бўлгани учун \vec{v}_a ва \vec{v}_e орасидаги бурчак 30° га тенг бўлади.

Кўчирма ҳаракат илгариланган тўғри чизиқли ҳаракатдан иборат ҳамда нисбий ҳаракат l радиусли айлана ёни бўйлаб содир бўлгани учун A нуктанинг тезланишини $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_r^n + \vec{\omega}_e$ формула ёрдамида аниқлаймиз.

Нисбий ҳаракат бурчак тезлиги $\omega_r = \frac{\pi}{3} \text{ с}^{-1}$ ўзгармас бўлгани учун нисбий уринма тезланиш модули

$$\omega_r^x = v_r \cdot AB = \frac{d\omega_r}{dt} l = 0$$

бўлади.

Нисбий нормал тезланиш модул жиҳатдан

$$\omega_r^n = l \omega_r^2 = 0,3 \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 = 0,329 \text{ м/с}^2$$

ўзгармас бўлиб, ҳамisha A дан B нуктага йўналади.

Кўчирма ҳаракат тўғри чизиқли ҳаракатдан иборат бўлгани учун кўчирма ҳаракат тезланиши $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_B$ га, B нукта тезланишининг модули эса $\omega_B = |\omega_{Bx}|$ га тенг бўлади.

Бунда ω_{Bx} B нукта тезланишининг x ўқдаги проекциясини ифодалайди.

$$\omega_{Bx} = \frac{dv_{Bx}}{dt} = -\frac{0,2 \pi^2}{3} \cos \frac{\pi}{3} t \text{ м/с}^2.$$

$t = 1$ с да $\omega_{Bx} = -0,569 \text{ м/с}^2$ бўлади. ω_{Bx} нинг манфий қийматга эга бўлиши $t = 1$ с да B нуктанинг тезланиши x ўққа қарама-қарши йўналганини ифодалайди.

Шундай қилиб, $t = 1$ с да кўчирма тезланишининг модули $\omega_e = |\omega_{Bx}| = 0,569 \text{ м/с}^2$ га тенг бўлади. $\vec{\omega}_e$ вектори A нуктада $\vec{\omega}_B$ га параллел равишда йўналади ҳамда $\vec{\omega}_r^n$ билан $\vec{\omega}_e$ орасидаги бурчак 30° га тенг бўлади.

А нуқтанинг абсолют тезланиши $\vec{\omega}_a$ вектори $\vec{\omega}_r^n$ ва $\vec{\omega}_e$ ларга қурилган параллелограмм диагонали бўйлаб йўналади, модули эса қуйидаги формуладан топилади:

$$\omega_a = \sqrt{(\omega_r^n)^2 + \omega_e^2 + 2\omega_r^n \cdot \omega_e \cos 30^\circ} = 0,87 \text{ м/с}^2.$$

Синуслар теоремасидан фойдаланиб, $\vec{\omega}_a$ ва $\vec{\omega}_e$ векторлари орасидаги бурчакни аниқлаймиз:

$$\frac{\omega_a}{\sin 150^\circ} = \frac{\omega_r^n}{\sin(\widehat{\omega_a, \omega_e})},$$

$$\sin(\widehat{\omega_a, \omega_e}) = 0,1891,$$

$$(\widehat{\omega_a, \omega_e}) = 11^\circ \text{ ёки } (\widehat{\omega_a, x}) = 169^\circ.$$

✓ 8.8- масала жавоби билан бу масалада олинган натижаларни солиштирсак, улар бир хил эканлигини кўраимиз.

13.2- масала. Диск O нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида соат стрелкаси ҳаракати йўналишида секинланувчан айланма ҳаракат қилади (13.9- расм, а). Дискнинг AB ватари бўйича P шарча 1,2 м/с тезлик билан ҳаракатланади. Шарчанинг диск марказига энг яқин масофада бўлган пайтдаги абсолют тезланиши аниқлансин. Шу пайтда $OP = 30$ см, дискнинг бурчак тезлиги 3 рад/с, бурчак секинланиши 8 рад/с² га тенг.

Ечиш. Қўзғалмас $O\xi\eta$ ва қўзғалувчи O_1xy координаталар системасини 13.9- расм, а дагидек танлаб оламиз. Берилган онда O_1 ва P нуқталар устма-уст тушади. P нуқтанинг O_1x ўқи бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракати нисбий ҳаракатдан, диск билан биргаликда O нуқта атрофидаги айлана ёйи бўйлаб ҳаракати эса кўчирма ҳаракатдан иборат. Кўчирма ҳаракатнинг берилган ондаги бурчак тезлиги $\omega_e = 3$ рад/с, бурчак секинланиши $\varepsilon_e = 8$ рад/с². P нуқтанинг $O\xi\eta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати мураккаб ҳаракатдан иборат.

P нуқта берилган онда $O\xi$ ўқда $OP = 0,3$ м масофада ётади (13.9- расм, а).

Кўчирма ҳаракат O нуқта атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат бўлгани учун (13.19) га кўра P нуқтанинг тезланиши нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_k$$

ёки

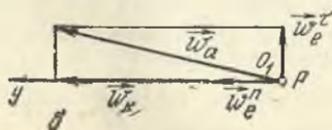
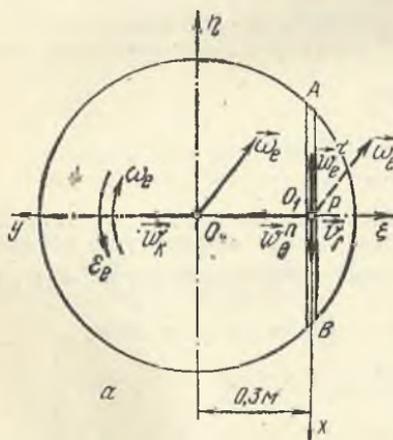
$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e^x + \vec{\omega}_e^n + \vec{\omega}_k.$$

P шарча x ўқи бўйлаб $v_r = 1,2$ м/с ўзгармас нисбий тезлик билан ҳаракатлангани туфайли нуқтанинг нисбий тезланиши $\omega_r = \frac{dv_r}{dt} = 0$ бўлади.

Шарчанинг кўчирма ҳаракатдаги уринма тезланиши модули

$$\omega_e^x = OP \cdot \varepsilon_e = 0,3 \cdot 8 = 2,4 \text{ м/с}^2 \text{ га тенг.}$$

Берилган онда кўчирма ҳаракат секинланувчан айланма ҳаракатдан иборат



13.9- расм.

бўлган учун $\vec{\omega}_e^v$ вектори e_e йўналишига мос равишда O_1x ўққа қарама-қарши йўналади.

Берилган онда шарчанинг кўчирма ҳаракатдаги нормал тезланиши модули $\omega_e^n = OP \cdot \omega_e^2 = 0,3 \cdot 3^2 = 2,7 \text{ м/с}^2$ га тенг бўлади. $\vec{\omega}_e^n$ вектори P нуқтадан диск маркази O га йўналади.

Кориолис тезланишининг модули (13.25) га асосан аниқланади. $\vec{\omega}_e$ вектори кузатувчидан расм текислигига перпендикуляр равишда йўналгани учун

$$\sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{v}_r}) = \sin 90^\circ = 1 \text{ бўлганлигида } \omega_k = 2 \cdot 3 \cdot 1,2 = 7,2 \text{ м/с}^2.$$

$\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$ бўлгани учун $\vec{\omega}_e$ нинг мусбат йўналишидан қараганда \vec{v}_r ни $\vec{\omega}_e$ атрофида соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда 90° бурчакка буриш натижасида Кориолис тезланишининг йўналишини оламиз. $\vec{\omega}_k$ вектори O_1y ўқ бўйича йўналади.

Шарча абсолют тезланишининг ташкил этувчилари: $\vec{\omega}_e^v$ билан $\vec{\omega}_e^n, \vec{\omega}_k$ лар орасидаги бурчак 90° дан иборат бўлгани учун $\vec{\omega}_a$ нинг модули қуйидагича аниқланади:

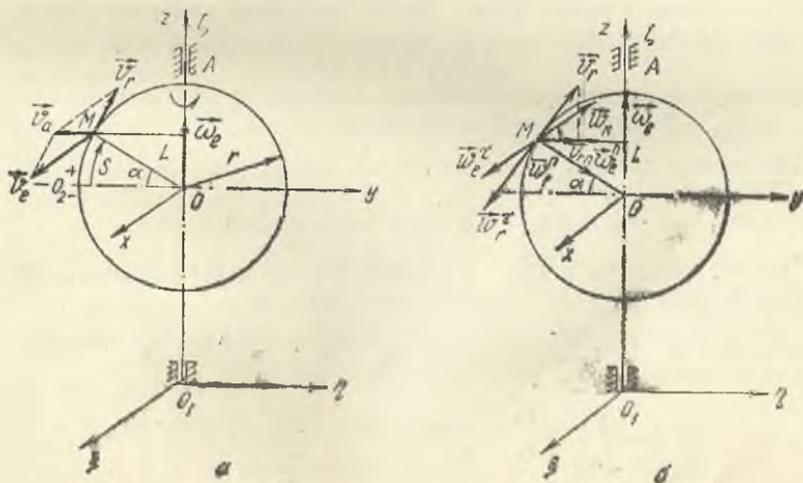
$$\omega_a = \sqrt{(\omega_e^v)^2 + (\omega_e^n + \omega_k)^2} = \sqrt{(2,4)^2 + (2,7 + 7,2)^2} = 10,18 \text{ м/с}^2.$$

11.9- расм, б дан кўрамаиқки,

$$\cos(\widehat{\vec{\omega}_a, O_1y}) = \frac{\omega_e^n + \omega_k}{\omega_a} = \frac{2,7 + 7,2}{10,18} = 0,9723,$$

$$(\widehat{\vec{\omega}_a, O_1y}) = 13^\circ 29'.$$

13.3. масала. Радиуси $r = 0,3 \text{ м}$ бўлган диск ўзининг вертикал диаметри атрофида $\varphi = (2t + 0,3t^2)$ рад қонунга биноан айланади (13.10- расм, а). M нуқта диск гардиши бўйлаб $O_2M = s = 0,1 \pi \sin \frac{\pi t}{4}$ м тенгламага мувофиқ ҳаракатланади. $t = t_1 = \frac{2}{3}$ с бўлган пайтда диск расм текислигида ётади. M нуқтанинг t_1 пайтдаги абсолют тезлиги ва абсолют тезланиши топилсин.



13.10- расм,

✓ Ечиш. Қўзғалмас $O_1 \xi \eta \zeta$ ва қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасини 13.10-расмдагидек танлаб оламиз. M нуқтанинг r радиусли айлана ёйи бўйлаб $Oxyz$ координаталар системасига nisbatan $s = 0,1 \pi \sin \frac{\pi t}{4}$ қонун бўйича ҳара кати nisбий ҳаракатдир.

Дискининг $\varphi = 2t + 0,3t^2$ қонунга биноан $O_1 \xi \eta \zeta$ ўқ атрофидаги айланма ҳаракати кўчирма ҳаракатни ifodalayди. M нуқтанинг $O_1 \xi \eta \zeta$ координаталар системасига nisbatan ҳаракати мураккаб ҳаракатдан иборат.

Дастлаб M нуқтанинг t_1 пайтдаги ҳолатини аниқлаймиз:

$$\overbrace{(O_2 M)}_{t=t_1} = s_{t=t_1} = 0,1 \pi \sin \frac{2\pi}{3.4} = 0,05 \pi \text{ м.}$$

$O_2 M$ ёй узунлиги ўзи тиралган марказий бурчак α билан ўлчанadi:

$$\overbrace{O_2 M} = r \cdot \alpha.$$

Бинобарин, t_1 пайтда M нуқтанинг радиуси OO_2 ўқ билан

$$\alpha = \frac{0,05 \pi}{r} = \frac{\pi}{6}$$

бурчак ташкил этади (13.10-расм, а).

M нуқтанинг абсолют тезлигини (13.8) формула воситасида аниқлаймиз:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Бу ifodaдаги nisбий тезлиқнинг алгебраик қийматини (8.28) га асосан аниқлаймиз:

$$v_{r\tau} = \frac{ds}{dt} = \frac{0,1 \pi^2}{4} \cos \frac{\pi t}{4}, \quad (1)$$

$t = t_1$ да $v_{r\tau} = 0,21 \text{ м/с} > 0$ бўлгани туфайли nisбий тезлиқ модули $v_r = 0,21 \text{ м/с}$, йўналиши эса $O_2 M$ ёй координатаси ортадиган йўналишда M нуқтада дисkning гардишига ўтказилган уринма бўйича йўналади.

M нуқта кўчирма тезлиқининг модули

$$v_e = \omega_e \cdot ML \quad (2)$$

формуладан топилади. (2) да ω_e билан кўчирма ҳаракат бурчак тезлиқининг модули белгиланган. Кўчирма ҳаракат бурчак тезлиқининг алгебраик қиймати (9.4) формулага кўра топилади:

$$\omega_{ez} = \dot{\varphi} = 2 + 0,6t, \quad (3)$$

$$t = t_1 \text{ да } \omega_{ez} = 2 + 0,6 \cdot \frac{2}{3} = 2,4 \text{ с}^{-1} > 0.$$

Демак, $\omega_e = 2,4 \text{ с}^{-1}$.

13.10-расм, б дан:

$$ML = r \cos \alpha = 0,3 \cdot 0,866 = 0,26 \text{ м.} \quad (4)$$

Шундай қилиб, (2) дан $v_e = 2,4 \cdot 0,26 = 0,62 \text{ м/с}$ келиб чиқади. \vec{v}_e вектори Ox ўққа параллел равишда кузатувчи томён йўналган.

$(\vec{v}_r, \vec{v}_e) = 90^\circ$ бўлгани учун $v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 0,654 \text{ м/с}$. \vec{v}_a вектори диск текислигига перпендикуляр текисликда жойлашади ҳамда

$$\cos(\vec{v}_a, \vec{v}_e) = \frac{v_e}{v_a} = 0,9480, \quad (\vec{v}_a, \vec{v}_e) = 18^\circ 30',$$

$$\cos(\vec{v}_a, \vec{v}_r) = \frac{v_r}{v_a} = 0,3211, \quad (\vec{v}_a, \vec{v}_r) = 71^\circ 30'.$$

Кўчирма ҳаракат Oz ўқ атрофида айланма ҳаракатдан иборат бўлгани учун M нуқтанинг абсолют тезланиши (13.19) тенглама воситасида аниқланади. Уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r^\tau + \vec{\omega}_r^n + \vec{\omega}_e^\tau + \vec{\omega}_e^n + \vec{\omega}_k. \quad (5)$$

M нуқта нисбий ҳаракатининг уринма ва нормал тезланишларини (8.51) формулага кўра аниқлаймиз:

$$\omega_r^\tau = \frac{d v_r^\tau}{dt} = -\frac{0,1}{16} \pi^3 \sin \frac{\pi t}{4},$$

$$t = t_1 \text{ да } \omega_r^\tau = -0,10 \text{ м/с}^2.$$

$\omega_r^\tau < 0$ бўлгани туфайли, $\vec{\omega}_r^\tau$ вектори \vec{v}_r йўналишига қарама-қарши йўналади (13.13-расм, б) ва $|\omega_r^\tau| = 0,10 \text{ м/с}^2$.

$$\omega_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{v_r^2}{r} = 0,15 \text{ м/с}^2,$$

$\vec{\omega}_r^n$ вектори MO чизиқ бўйича M дан O марказга қараб йўналади (13.10-расм, б).

M нуқтанинг кўчирма ҳаракатдаги уринма тезланиши модули

$$\omega_e^\tau = ML \cdot \varepsilon_e,$$

бунда $\varepsilon_e = |\varepsilon_{ez}|$ кўчирма ҳаракат бурчак тезланишининг модулини ифодалайди, у (3) дан вақт бўйича ҳосила олиб топилди:

$$\varepsilon_{ez} = \dot{\omega}_{ez} = 0,6 = \text{const} > 0.$$

Бинобарин, $\varepsilon_e = \varepsilon_{ez} = 0,6 \text{ с}^{-2}$ бўлиб, M нуқтанинг кўчирма ҳаракати тезланувчан бўлади.

Шундай қилиб, $t = t_1$ да

$$\omega_e^\tau = ML \cdot \varepsilon_e = 0,26 \cdot 0,6 = 0,16 \text{ м/с}^2.$$

$\varepsilon_{ez} > 0$ бўлгани туфайли $\vec{\omega}_e^\tau$ вектори Ox ўққа параллел равишда кузатувчи томон йўналади.

Берилган ойда M нуқтанинг кўчирма ҳаракатидаги нормал тезланиши модули $\omega_e^n = ML \cdot \omega_e^2 = 1,50 \text{ м/с}^2$ га тенг бўлади.

$\vec{\omega}_e^n$ вектори M нуқтадан Oz айланиш ўқиға перпендикуляр равишда ML бўйлаб йўналади (13.10-расм, б).

M нуқтанинг Қориолис тезланиши (13.25) га кўра аниқланади. Берилган пайтда $\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r = \alpha = \frac{\pi}{6}$ бўлганидан $\omega_k = 2 \omega_e v_r \sin \frac{\pi}{6} = 0,50 \text{ м/с}^2$ эканлиги келиб чиқади.

Жуковский қоида­сига кўра Қориолис тезланиши $\vec{\omega}_k$ M нуқтада кузатувчидан диск текислигига перпендикуляр равишда йўналади.

M нуқтанинг абсолют тезланишини про­с­к­ция­лаш усули билан аниқ­лай­ми­з. (5) ни x, y, z ўқ­ла­ри­га про­ек­ция­лай­ми­з:

$$\omega_{ax} = \omega_e^\tau - \omega_k = -0,34 \text{ м/с}^2,$$

$$\omega_{ay} = -|\omega_r^\tau| \cos 60^\circ + \omega_r^n \cos 30^\circ + \omega_e^n = 1,58 \text{ м/с}^2,$$

$$\omega_{az} = -|\omega_r^\tau| \cos 30^\circ - \omega_r^n \cos 60^\circ = -0,6 \text{ м/с}^2.$$

Бинобарин,

$$\omega_a = \sqrt{\omega_{ax}^2 + \omega_{ay}^2 + \omega_{az}^2} = \sqrt{2,98} \approx 1,73 \text{ м/с}^2.$$

М нуқта абсолют тезланишнинг йўналиши қуйидагича аниқланади:

$$\cos(\vec{\omega}_a, x) = \frac{\omega_{ax}}{\omega_a} = -0,1965, \quad (\vec{\omega}_a, x) = 101^\circ 20',$$

$$\cos(\vec{\omega}_a, y) = \frac{\omega_{ay}}{\omega_a} = 0,9133, \quad (\vec{\omega}_a, y) = 24^\circ,$$

$$\cos(\vec{\omega}_a, z) = \frac{\omega_{az}}{\omega_a} = -0,3468, \quad (\vec{\omega}_a, z) = 110^\circ 20'.$$

14-БОБ. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ МУРАККАБ ҲАРАКАТИ

14.1-§. Умумий мулоҳазалар

Техникада кўпинча қаттиқ жисмнинг ҳаракатини бир неча координаталар системасига нисбатан ўрганишга туғри келади. Одатда, берилган жисм билан боғланмаган координата системаларидан бири, масалан, $O_1\xi\eta\zeta$ ни қўзғалмас деб қабул қилинади. Шунингдек, берилган жисм билан боғланмаган ва ўз навбатида қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракатланувчи *Охуз* координаталар системаси олинади. Масалан, сунъий йўлдош ичидаги жисмнинг Ерга нисбатан ҳаракатини ўрганишда Ер билан боғланган $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасини қўзғалмас деб олинади; қўзғалувчи *Охуз* координаталар системаси учун сунъий йўлдошга маҳкам бириктирилган координаталар системаси олинади.

Жисмнинг қўзғалувчи *Охуз* координаталар системасига нисбатан ҳаракати *нисбий ҳаракат* дейилади.

Юқорида кўрганимиздек, қўзғалувчи *Охуз* координаталар системасининг қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати кўчирма ҳаракатни ифодалайди. Бунда қўзғалувчи координаталар системасининг ҳаракати деганда, у билан боғланган фазонинг қўзғалмас координаталар системаси билан боғланган фазога нисбатан ҳаракати тушунилади. *Қаттиқ жисмнинг* берилган ондаги *кўчирма ҳаракати* деганда, унинг шу ондаги фақат қўзғалувчи координаталар системаси билан биргаликда қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати назарда тутилади.

Жисмнинг қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракати *мураккаб ҳаракат* ёки *абсолют ҳаракат* дейилади. Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг абсолют ҳаракатини нисбий ва кўчирма ҳаракатлардан ташкил топган деб қараш мумкин.

Юқорида эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини унинг қутб нуқтаси билан биргаликдаги илгарилама ҳаракат ва қутб орқали ўтувчи оний ўқ атрофидаги оний айланма ҳаракатлардан ташкил топган мураккаб ҳаракат деб таҳлил қилиш мумкинлигини кўрган эдик. Бу бобда жисмнинг ҳаракатини бошқача нуқтаи назардан ўрганамиз.

Юқорида эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракати оддий ҳаракатларга ажратиш йўли билан ўрганилган бўлса, бу ерда жисмнинг мураккаб ҳаракатини оддий ҳаракатларни қўшиш натижасида содир бўлади деб қараймиз. Нисбий ва кўчирма ҳаракатларнинг қай тарзда содир бўлишига қараб, унга мос равишда қаттиқ жисм нуқталари оний тезликларининг ҳар онда қандай тақсимланишини ўрганамиз.

14.2-§. Жисмнинг илгарилама ҳаракатларини қўшиш ҳақидаги теорема

Қаттиқ жисм $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан \vec{v}_1 тезлик билан илгарилама ҳаракатда бўлсин. Ўз навбатида $Oxyz$ координаталар системаси ҳам қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан \vec{v}_2 тезлик билан илгарилама ҳаракат қилсин (14.1-расм). Жисмнинг $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатиши, яъни абсолют ҳаракатини аниқлаймиз.

Нисбий ҳаракат илгарилама ҳаракатдан иборат бўлгани учун жисмнинг барча нуқталари бирдек $\vec{v}_r = \vec{v}_1$ нисбий тезлик билан ҳаракатланади. Худди шунингдек, жисмнинг кўчирма ҳаракати ҳам илгарилама ҳаракатдан иборат бўлгани туфайли унинг барча нуқталари бир хил $\vec{v}_e = \vec{v}_2$ кўчирма тезлик билан ҳаракатланади.

Жисм бирор M нуқтасининг абсолют тезлигини аниқлаш учун тезликларни қўшиш теоремасини ифодаловчи

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (14.1)$$

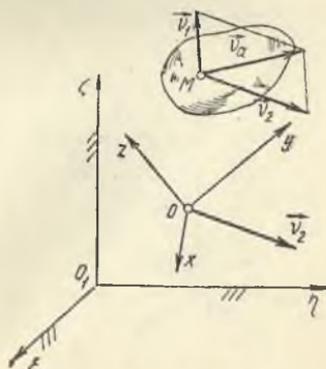
тенгликдан фойдаланамиз. Кўрилаётган ҳол учун бу формулани

$$\vec{v}_a = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (14.2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (14.2) дан кўрамызки, жисм барча нуқталарининг абсолют тезликлари бир хил, яъни жисмнинг абсолют ҳаракати илгарилама ҳаракатдан иборат бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди: агар жисмнинг нисбий ва кўчирма ҳаракатлари илгарилама ҳаракатдан иборат бўлса, жисмнинг абсолют ҳаракати ҳам илгарилама ҳаракатдан иборат бўлади ҳамда абсолют ҳаракат тезлиги нисбий ва кўчирма ҳаракат тезликларининг геометрик йиғиндисига тенгдир,

Агар жисм бир вақтнинг ўзига $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ тезликлар билан содир бўладиган n та илгарилама ҳаракатларда қатнашса, у ҳолда



14.1- расм.

дастлаб (14.2) га кўра биринчи иккита тезликни геометрик қўшамиз, сўнгра олинган тезликни учинчи тезлик билан геометрик қўшамиз ва ҳ. к. Шу тарзда илгарилама ҳаракат тезликларини геометрик қўша бориб, жисмнинг абсолют ҳаракати илгарилама ҳаракатдан иборат ва жисм ихтиёрий нуқтасининг абсолют тезлиги $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ илгарилама ҳаракат тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг, яъни

$$\vec{v}_a = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n = \sum_{v=1}^n \vec{v}_v \quad (14.3)$$

бўлишига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

14.3-§. Жисмнинг кесишувчи ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшиш

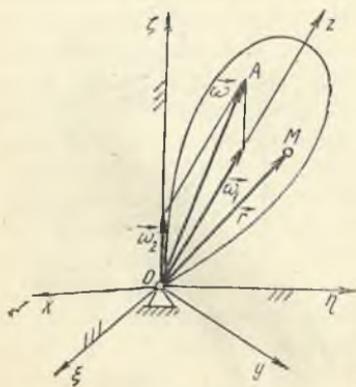
Жисм қўзғалувчи *Охуз* координаталар системасига нисбатан *Oz* ўқ атрофида ω_1 бурчак тезлик билан, *ўз* навбатида *Oz* ўқ қўзғалмас *Oξ* ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлсин (14.2-расм). Бошқача айтганда жисм қўзғалувчи *Oz* ўқ атрофида $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан нисбий ҳаракатда ҳамда қўзғалмас *Oξ* ўқ атрофида $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан кўчирма ҳаракатда иштирок этсин. *O* нуқта жисм ҳаракати давомида қўзғалмасдан қолгани сабабли жисмнинг қўзғалмас *Oξηζ* координатага нисбатан ҳаракати *O* нуқта атрофидаги сферик ҳаракатдан иборат бўлади. Жисм абсолют ҳаракатининг оний бурчак тезлиги қандай бўлишини кўриб чиқамиз.

Жисм ихтиёрий *M* нуқтасининг радиус-векторини \vec{r} билан белгилаб, бу нуқтанинг абсолют тезлиги \vec{v}_M ни аниқлаймиз. Кўрилаётган ҳол учун (14.1) да

$$\vec{v}_r = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}, \quad \vec{v}_e = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r} \quad \text{бўлади.}$$



14.2- расм.

M нуқтанинг абсолют ҳаракат тезлигини Эйлер формуласи ёрдамида ҳам аниқлаш мумкин:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (14.4)$$

Бунда $\vec{\omega}$ билан абсолют ҳаракат бурчак тезлиги белгиланган.

Охириги иккита тенгликни солиштириб, қуйидаги муносабатни оламиз:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}.$$

М нуқта ва унинг радиус-вектори \vec{r} ихтиёрий бўлгани учун

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \quad (14.5)$$

тенглик ўринли бўлади. Шундай қилиб, абсолют ҳаракат бурчак тезлиги $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ ларга қурилган параллелограммининг OA диагонали билан ифодаланади. (14.5) тенглик бурчак тезликларнинг параллелограмм қoidаси дейилади.

OA диагонал орқали ўтувчи ўқдаги жисм нуқталарининг радиус-вектори $\vec{\omega}$ билан бир тўғри чизиқда ётгани учун (14.4) га кўра бу нуқталарнинг тезлиги нолга тенг бўлади, яъни мазкур ўқ айланиш оний ўқидан иборат бўлади.

Натижада қуйидаги теорема исботланди: *агар жисм бир вақтда O нуқтада кесишувчи иккита ўқ атрофида айланма ҳаракатда иштирок этса, у ҳолда жисмнинг абсолют ҳаракати O нуқтадан ўтувчи айланиш оний ўқи атрофида оний айланма ҳаракатдан иборат бўлиб, абсолют ҳаракат оний бурчак тезлиги нисбий ва кўчирма ҳаракат бурчак тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Агар жисм бир вақтнинг ўзида O нуқтада кесишувчи n та ўқлар атрофида $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ бурчак тезликлар билан айланма ҳаракатда бўлса, у ҳолда жисмнинг абсолют ҳаракати O нуқтадан ўтувчи оний ўқ атрофидаги оний айланма ҳаракатдан иборат бўлиб, абсолют ҳаракат

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{\omega}_n = \sum_{v=1}^n \vec{\omega}_v$$

оний бурчак тезлик билан содир бўлади.

14.1-масала. Қўш дифференциал қўзғалмас ab ўқ атрофида айланма оладиган III кривошипдан иборат (14.3-расм). Кривошипга IV сателлит эркин ўрнатилган. Сателлит иккита бир-бирга маҳкам қилиб бириктирилган $r_1 = 5$ см ва $r_2 = 2$ см радиусли конус шаклидаги тишли ғилдиракдан иборат. Бу ғилдираклар ab ўқ атрофида айландиган, лекин кривошип билан боғланмаган конус шаклидаги тишли ғилдираклар I ва II билан қўшилган. I ва II ғилдиракларнинг радиуслари $R_1 = 10$ см ва $R_2 = 5$ см, бурчак тезликлари тегишлича $\omega_1 = 4,5 \text{ с}^{-1}$ ва $\omega_2 = 9 \text{ с}^{-1}$. Агар иккала ғилдирак бир томонга айланса, кривошипнинг бурчак тезлиги ω_3 ва сателлитнинг кривошипга нисбатан бурчак тезлиги ω_{13} аниқлансин.

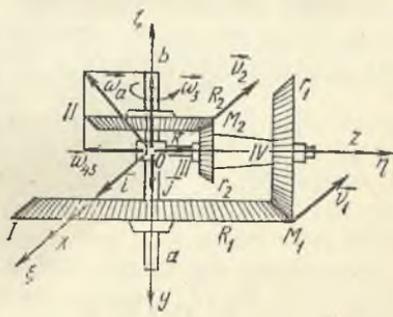
Ечиш. Оёғи қўзғалмас ва $Oxuz$ қўзғалувчи координаталар системасини 14.3-расмдагидек танлаб оламиз.

Сателлит қўзғалувчи Oz ўқ атрофида кривошипга нисбатан $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{13} = -\omega_{13} \vec{k}$ бурчак тезлик билан нисбий ҳаракатда ҳамда кривошип билан биргалликда қўзғалмас

Oz ўқ атрофида $\vec{\omega}_e = -\omega_3 \vec{i}$ бурчак тезлик билан кўчирма ҳаракатда бўлади, яъни сателлит бир вақтда O нуқтада кесишувчи иккита ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлади. Шу сабабли сателлит

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e = -\omega_{13} \vec{k} - \omega_3 \vec{i}$$

оний бурчак тезлик билан оний айланма ҳаракатда бўлади.



14.3-расм.

✓ M_1 ва M_2 нуқталарнинг абсолют тезликлари расмда кўрсатилганидек йўналади ва уларнинг модули $v_1 = R_1 \omega_1$, $v_2 = R_2 \omega_2$ га тенг бўлади.

\vec{v}_1 ва \vec{v}_2 тезликларни қўзғалувчи координата ўқларига проекциялаймиз:

$$\left. \begin{aligned} v_{1x} &= -R_1 \omega_1, & v_{1y} &= v_{1z} = 0, \\ v_{2x} &= -R_2 \omega_2, & v_{2y} &= v_{2z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

M_1 ва M_2 нуқталарнинг абсолют тезликларини бошқача усулда, Эйлер формуласидан фойдаланиб аниқлаш ҳам мумкин:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_a \times \vec{OM}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega_3 & -\omega_{43} \\ 0 & r_1 & R_1 \end{vmatrix},$$

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_a \times \vec{OM}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -\omega_3 & -\omega_{43} \\ 0 & -r_2 & R_2 \end{vmatrix}.$$

ёки қўзғалувчи координата ўқларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} v_{1x} &= -\omega_3 R_1 + \omega_{43} r_1, & v_{1y} &= v_{1z} = 0, \\ v_{2x} &= -\omega_3 R_2 - \omega_{43} r_2, & v_{2y} &= v_{2z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ларни ҳосил қиламиз.

(1) ва (2) тенгламалар системасини солиштириб, қуйидаги иккита тенгламалардан иборат системани оламиз:

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 R_1 - \omega_{43} r_1 &= R_1 \omega_1, \\ \omega_3 R_2 + \omega_{43} r_2 &= R_2 \omega_2. \end{aligned} \right\}$$

Бу тенгламаларни биргаликда ечиб, изланаётган номаълумларни аниқлаймиз:

$$\omega_3 = \frac{R_1 r_2 \omega_1 + r_1 R_2 \omega_2}{R_1 r_2 + R_2 r_1} = 7 \text{ с}^{-1},$$

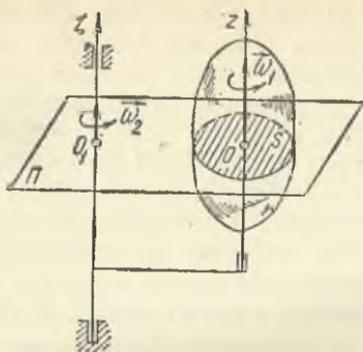
$$\omega_{43} = \frac{R_1 R_2 (\omega_2 - \omega_1)}{R_1 r_2 + R_2 r_1} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

14.4-§. Жисмнинг иккита параллел ўқ атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшиш

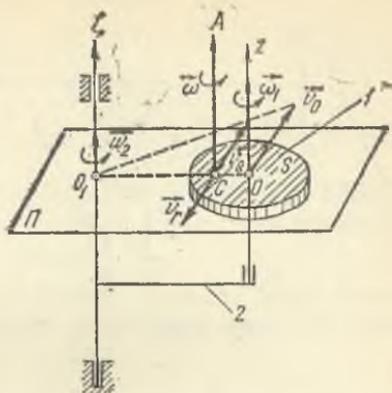
Жисмнинг нисбий ва кўчирма ҳаракатлари ўзаро параллел ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат бўлган ҳолларни кўрамиз.

Жисм қўзғалувчи z ўқ атрофида $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан нисбий ҳаракатда, ўз навбатида Oz ўқ ўзига параллел бўлган қўзғалмас $O_1\xi$ ўқ атрофида $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан кўчирма айланма ҳаракатда бўлсин (14.4-расм). Бу ҳолда жисм нуқталари нисбий ҳаракатда ҳам, кўчирма ҳаракатда ҳам Oz ва $O_1\xi$ ўқларига перпендикуляр текисликларда ҳаракатланади. Шу сабабли жисмнинг бундай ҳаракатини текис параллел ҳаракат деб қараш мумкин.

Бинобарин, бу ҳолда жисмнинг абсолют ҳаракатини ўрганиш жисмни Oz ва $O_1\xi$ ўқларга перпендикуляр бўлган Π текислик билан фикран кесиш натижасида ҳосил бўлган S юзанинг ҳаракатини ўрганишга келтирилади.



14.4- расм.



14.5- расм.

Айланма ҳаракатлар бир томонга ва қарама-қарши томонга йўналган ҳолларни алоҳида кўриб чиқамиз.

1. Нисбий ва кўчирма айланма ҳаракатлар бир томонга йўналган ҳол. Жисм (масалан, шкив 1) горизонтал текисликда ҳаракатланувчи кривошип 2 га маҳкамланган вертикал z ўқ атрофида $\vec{\omega}_r = \omega_1$ бурчак тезлик билан нисбий ҳаракатда, ўз навбатида кривошип z ўққа параллел бўлган қўзғалмас ξ ўқ атрофида $\vec{\omega}_e = \omega_2$ бурчак тезлик билан кўчирма айланма ҳаракатда бўлсин (14.5-расм). Айтайлик, нисбий ва кўчирма ҳаракатлар z ва ξ ўқларнинг мусбат йўналишидан қараганда соат стрелкаси айланадиган йўналишга тескари йўналишда содир бўлсин.

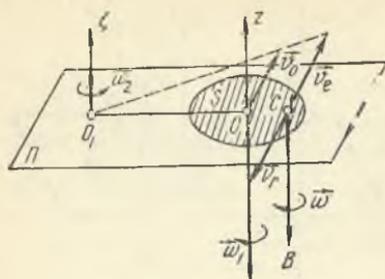
ω_1 ва ω_2 бурчак тезликларни расмда кўрсатилганидек тасвирлаймиз. Жисмнинг абсолют ҳаракати қандай бўлишини кўриб чиқамиз. Шкивнинг S юзаси орқали z ва ξ ўқларга перпендикуляр Π текисликни ўтказиб, ўқларнинг мазкур текислик билан кесишган нуқталарини мос равишда O ва O_1 билан белгилаймиз. S юзанинг O_1O чизикда ётувчи C нуқтасининг абсолют тезлиги унинг Oz ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдаги нисбий тезлиги \vec{v}_r ҳамда $O_1\xi$ ўқ атрофидаги \vec{v}_e кўчирма тезликларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади. Бу иккита тезлик O_1O га перпендикуляр равишда бири-бирига қарама-қарши йўналади. Шу сабабли

$$v_a = v_r - v_e = \omega_1 CO - \omega_2 O_1C.$$

S нуқтани шундай танлаймизки, бу нуқта учун $\omega_1 CO - \omega_2 O_1C = 0$ ёки

$$\frac{O_1C}{CO} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (14.6)$$

тенглик ўринли бўлсин. U ҳолда C нуқтанинг абсолют тезлиги нолга тенг бўлади. Худди шунингдек, C нуқта орқали ω_1 ва ω_2 ларга параллел бўлган CA ўқда ётувчи жисм нуқталарининг абсолют тезлиги ҳам нолга тенглигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бинобарин, CA ўқ абсолют ҳаракатдаги айланиш оний ўқини ифодалайди.



14.6- расм.

(14.6) дан кўрамизки, кўрилаган ҳолда CA айланиш оний ўқи O_1O кесмани ички томондан нисбий ва кўчирма ҳаракат бурчак тезликларига тескари пропорционал бўлакларга бўлади. CA ўқ атрофидаги абсолют ҳаракатнинг оний бурчак тезлигини аниқлаймиз. O нуқта $O_1\xi$ ўқ атрофида ω_2 бурчак тезлик билан айлангани, шунингдек, O нуқтанинг абсолют ҳаракати CA оний ўқ атрофида $\vec{\omega}$ оний бур-

чак тезлик билан содир бўлгани туфайли, қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$\begin{aligned} v_0 &= \omega_2 \cdot O_1O, \\ v_0 &= \omega \cdot CO. \end{aligned}$$

Бу тенгликларни солиштириб, абсолют ҳаракат оний бурчак тезлигини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} \omega \cdot CO &= \omega_2 \cdot O_1O, \\ \omega &= \omega_2 \cdot \frac{O_1O}{CO} = \omega_2 \cdot \frac{O_1C + CO}{CO} = \omega_2 \left(\frac{O_1C}{CO} + 1 \right) \end{aligned}$$

ёки (14.6) га асосан

$$\omega = \omega_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + 1 \right) = \omega_1 + \omega_2. \quad (14.7)$$

Шундай қилиб, агар $\vec{\omega}$ жисм бир вақтда иккита параллел ўқ атрофида мос равишда ω_1 ва ω_2 бурчак тезликлар билан бир томонга айланса, жисмнинг абсолют ҳаракати худди шу йўналишида $\omega = \omega_1 + \omega_2$ оний бурчак тезлик билан мазкур ўқларга параллел бўлган ва (14.6) тенглик воситасида аниқланадиган айланиш оний ўқи атрофидаги оний айланма ҳаракатдан иборат бўлади.

2. Нисбий ва кўчирма ҳаракат бурчак тезликлари миқдор жиҳатдан ҳар хил, йўналиши қарама-қарши бўлган ҳол. 14.4 ёки 14.5-расмларда тасвирланган S юзанинг Π текисликдаги ҳаракатини текширамиз (14.6-расм). Ўқнинг мусбат йўналишидан қараганда S юза Oz ўқ атрофида соат стрелкаси ҳаракати йўналишида ω_1 бурчак тезлик билан, O_1S ўқ атрофида эса унга қарама-қарши йўналишда ω_2 бурчак тезлик билан айлансин. Айтайлик, $\omega_1 > \omega_2$ бўлсин. Худди олдинги ҳолдагидек, O_1O кесманинг давомида ётувчи C нуқтанинг абсолют тезлигини аниқлаймиз:

$$v_c = v_r - v_e = \omega_1 \cdot OC - \omega_2 \cdot O_1C.$$

C нуқтани шундай танлаймизки,

$$\omega_1 \cdot OC = \omega_2 \cdot O_1C$$

ёки

$$\frac{O_1C}{OC} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (14.8)$$

бўлсин. У ҳолда $v_C = 0$ ҳамда $\vec{\omega}_1$ га параллел бўлган CB ўқ айланиш оний ўқидан иборат бўлади.

(14.8) дан кўрамизки, кўрилайётган ҳолда CB оний ўқ O_1O кесма-ни ташқи томондан нисбий ва кўчирма ҳаракат бурчак тезликларига тескари пропорционал бўлакларга бўлади.

CB ўқ атрофидаги абсолют ҳаракат бурчак тезлиги $\vec{\omega}$ ни аниқ-лаймиз. Бунинг учун худди юқоридагидек мулоҳаза юритиб, O нуқ-танинг тезлиги аниқланадиган

$$v_O = \omega_2 \cdot O_1O,$$

$$v_O = \omega \cdot OC$$

тенгликларни оламиз. Бу тенгликлардан фойдаланиб, абсолют ҳара-кат оний бурчак тезлигини аниқлаймиз:

$$\omega \cdot OC = \omega_2 \cdot O_1O,$$

$$\omega = \omega_2 \frac{O_1O}{OC} = \omega_2 \cdot \frac{O_1C - OC}{OC} = \omega_2 \left(\frac{O_1C}{OC} - 1 \right).$$

(14.8) ни эътиборга олсак,

$$\omega = \omega_2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 \right)$$

ёки

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad (14.9)$$

тенглик ҳосил бўлади.

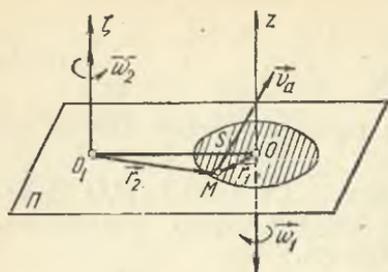
Шундай қилиб, агар жисм бир вақтда иккита параллел ўқ атрофида миқдор жиҳатдан бир-бирига тенг бўлмаган ω_1 ва ω_2 бурчак тезликлар билан ($\omega_1 > \omega_2$) қарама-қарши томонга айлан-са, жисмнинг абсолют ҳаракати катта бурчак тезлиги йўнали-шида $\omega = \omega_1 - \omega_2$ оний бурчак тезлик билан мазкур ўқларга па-раллел бўлган ва (14.8) тенглик воситасида аниқланадиган оний ўқ атрофидаги оний айланма ҳаракатдан иборат бўлади.

Айланиш оний ўқининг O_1E ўқига нисбатан ҳолатини аниқлаш учун (14.8) дан фойдаланиб, ҳосилавий пропорция тузамиз:

$$\frac{O_1C - OC}{OC} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}$$

ёки

$$\frac{O_1O}{OC} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}.$$



14.7- расм.

Бундан қуйидаги тенгликни оламиз:

$$OC = O_1O \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \quad (14.10)$$

3. Нисбий ва кўчирма бурчак тезликлари миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган ҳол. Агар қаттиқ жисм иккита параллел ўқ атрофида миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган бурчак тезликлар билан айланса, бундай ҳаракат *жуфт айланиш* дейилади.

14.4 ёки 14.5-расмларда тасвирланган S юза Π текисликдаги жуфт айланишда иштирок этсин (14.7-расм). U ҳолда S юза ихтиёрий M нуқтасининг абсолют тезлиги учун

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_1$$

муносабат ўринли бўлади. Бунда \vec{r}_1 билан M нуқтанинг O нуқтага нисбатан радиус-вектори белгиланган. Кўрилатган ҳолда $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1$ бўлгани учун:

$$\vec{v}_a = \vec{\omega}_1 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{\omega}_1 \times \vec{OO}_1 = \vec{O_1O} \times \vec{\omega}_1, \quad (14.11)$$

бунда

$$\vec{O_1O} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

(14.11) тенгликдан кўрамизки, M нуқтанинг абсолют тезлиги унинг ҳолатига боғлиқ бўлмасдан, берилган онда жисмнинг барча нуқталари миқдор ва йўналиш жиҳатдан бир хил бўлган абсолют тезлик билан ҳаракатланади, яъни жисмнинг абсолют ҳаракати илгарилама ҳаракатдан иборат бўлади.

$\vec{\omega}_1 \times \vec{O_1O}$ вектор кўнайтма $\vec{\omega}_1$ векторнинг O нуқтага нисбатан моментини ёки (ω_1, ω_2) жуфтнинг моментини ифодалайди. Шу сабабли

$$\vec{v}_a = \vec{M}_O(\omega_1)$$

муносабат ўринли бўлади. \vec{v}_a ни *жуфт айланиш моменти* деб ҳам аталади.

Бинобарин, жуфт айланишда иштирок этаётган M нуқтанинг абсолют тезлиги $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ лар ётган текисликка перпендикуляр равишда йўналади ҳамда миқдор жиҳатдан $\vec{v}_a = \omega_1 \cdot O_1O = \omega_1 \cdot h$ га тенг бўлади.

Бунда h билан $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ векторлари орасидаги энг қисқа масофа белгиланган бўлиб, бу масофа *жуфт айланиш елкаси* дейилади.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди: *жуфт айланиш илгарилама ҳаракатга эквивалент бўлиб, илгарилама ҳаракат тезлиги жуфт айланиш моментига тенг.*

✓ 14.2- масала. Ернинг сунъий йўлдоши доиравий орбита бўйлаб экватор текислигида ҳаракатланади ва Ер атрофини 1,5 соатда айланиб чиқади. Қуйидаги икки ҳолда: 1) сунъий йўлдош шарқдан ғарбга учаётганда, 2) ғарбдан шарққа учаётганда унинг Ерга нисбатан бурчак тезлиги ω_1 ҳисоблансин.

Ечиш. Ер ғарбдан шарққа қараб 24 соат ичида ўз ўқи атрофида бир марта айланади. Сунъий йўлдошнинг Ер билан биргаликдаги ҳаракатини кўчирма ҳаракат деб қарасак, кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги

$$\omega_e = \omega_2 = \frac{1}{24} \text{ айл/соат} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ рад/с} = 0,727 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$$

га тенг бўлади.

Сунъий йўлдошнинг абсолют ҳаракат бурчак тезлиги берилган:

$$\omega = \frac{1}{1,5} \text{ айл/соат} = \frac{2\pi}{1,5 \cdot 3600} \text{ рад/с} = 11,629 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

Ер ва унинг сунъий йўлдоши параллел ўқлар атрофида айланади. Сунъий йўлдош шарқдан ғарбга учаётганда унинг нисбий бурчак тезлиги ω_1 кўчирма ҳаракат бурчак тезлиги ω_2 га қарама-қарши йўналади. Шу сабабли (14.9) га кўра

$$\omega = \omega_1 - \omega_2,$$

бундан

$$\omega_1 = \omega + \omega_2 = \frac{1}{1,5} + \frac{1}{24} = 0,708 \text{ айл/соат} = 12,356 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

Сунъий йўлдош ғарбдан шарққа учаётганда ω_1 нинг йўналиши ω_2 билан бир хил бўлгани учун (14.7) га асосан

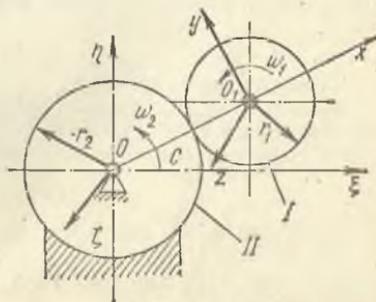
$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

бундан

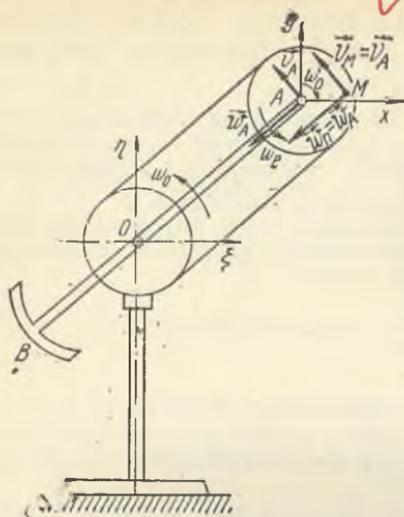
$$\omega_1 = \omega - \omega_2 = \frac{1}{1,5} - \frac{1}{24} = 0,624 \text{ айл/соат} = 10,902 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

14.3- масала. OO_1 кривошип I ва II тишли ғилдиракларнинг O ва O_1 ўқларини бирлаштиради, ғилдираклар ўзаро, 14.8-расмда кўрсатилгандек, ташқи тишлар билан илашади. II ғилдирак қўзғалмайди. OO_1 кривошип ω_2 бурчак тезлик билан айланади. Ғилдиракларнинг радиуслари r_1 ва r_2 бўлса, I ғилдиракнинг абсолют бурчак тезлиги ω ва унинг кривошипга нисбатан бурчак тезлиги ω_1 ҳисоблансин.

Ечиш. I ғилдирак бир вақтнинг ўзида O ва O_1 нуқталарда расм текислигига тик равишда ўтувчи ўзаро параллел O_1z ва $O\xi$ ўқлар атрофида айланма ҳаракатларда иштирок этади. I ғилдирак кривошип билан боғланган O_1xyz координаталар системасига нисбатан O_1z ўқ атрофида $\omega_r = \omega_1$ бурчак тезлик билан, $O\xi$ ўқ атрофида эса OO_1 кривошип билан биргаликда $\omega_e = \omega_2$ бурчак тезлик билан айланади. ω_1 ва ω_2 векторлари ўзаро параллел ва бир томонга йўналади.



14.8- расм.



14.9- расм.

диракнинг ўқи туради. Тишли ғилдиракларнинг ўлчамлари бир хил бўлиб, ўзаро занжир воситасида туташади. Агар кривошипнинг узунлиги $OA = l$ бўлса, қўзғалувчи тишли ғилдиракнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши, шунингдек, M нуқтасининг тезлиги ва тезланиши аниқлансин (14.9- расм).

Ечиш. A нуқтада кривошип билан маҳкам боғланган $Axuz$ қўзғалувчи ва O нуқтада қўзғалмас $O\xi\eta\xzeta$ координаталар системасини ўтказамиз. Айтайлик, қўзғалувчи тишли ғилдирак расм текислигига перпендикуляр Az ўқ атрофида $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1$ нисбий бурчак тезлик билан айлансин. Қўзғалувчи тишли ғилдирак қўзғалмас $O\xi$ ўқ атрофида кривошип билан биргаикда $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0$ кўчирма бурчак тезлик билан айланади. Бинобарин, қўзғалувчи тишли ғилдирак мураккаб ҳаракатда иштирок этади.

Занжирнинг берилган пайтда қўзғалмас тишли ғилдирак билан туташган нуқталарининг абсолют тезликлари нолга тенг бўлгани учун тезликларни қўшиш теоремасидан

$$\vec{v}_r + \vec{v}_e = 0 \text{ ёки } \vec{v}_r = -\vec{v}_e$$

ҳосил бўлади. Бунда \vec{v}_r занжир нуқталарининг кривошипга нисбатан нисбий тезлиги, \vec{v}_e эса занжир нуқталарининг кўчирма тезлигидан иборат: $\omega_e = \omega_0$ бўлгани учун $v_e = \omega_0 \cdot r$. Қўзғалувчи тишли ғилдиракнинг абсолют бурчак тезлигини ω билан белгиласак, унинг нисбий бурчак тезлиги $\omega - \omega_0$ га тенг бўлади:

$$\omega_r = \omega - \omega_0. \quad (1)$$

Бинобарин, $v_r = (\omega - \omega_0)r$.

Занжир қўзғалмас тишли ғилдиракка нисбатан сирпанмагани туфайли, уларнинг бир-бирга тегиб турган нуқталарининг кривошипга нисбатан тезликлари миқдор жиҳатдан тенг бўлади, яъни:

$$(\omega - \omega_0) r = -\omega_0 r.$$

Бу тенгликдан $\omega = 0$ келиб чиқади.

Шу сабабли (1) дан $\omega_r = -\omega_0$, яъни кўрилатган ҳолда жуфт айланиш содир бўлади. Исталган пайт учун $\omega = 0$ бўлгани туфайли абсолют ҳаракат бурчак тезланиши

Ғилдираклар илашган C нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлгани туфайли шу нуқтадан расм текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўқ айланиш оний ўқини ифодалайди. Шу сабабли (14.6) га кўра

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

ёки

$$\omega_1 = \omega_2 \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$

I ғилдиракнинг абсолют ҳаракатдаги бурчак тезлигини (14.7) га биноан аниқлаймиз:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \omega_2 \frac{r_1 + r_2}{r_1}.$$

14.4- масала. OA кривошип B посанги билан бирга қўзғалмас тишли ғилдиракнинг O ўқи атрофида $\omega_0 = \text{const}$ бурчак тезлиги билан айланади, унинг A учида бошқа тишли ғилдиракнинг M нуқтасининг тезлиги ва тезланиши аниқлансин.

Ечиш. A нуқтада кривошип билан маҳкам боғланган $Axuz$ қўзғалувчи ва O нуқтада қўзғалмас $O\xi\eta\xzeta$ координаталар системасини ўтказамиз. Айтайлик, қўзғалувчи тишли ғилдирак расм текислигига перпендикуляр Az ўқ атрофида $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1$ нисбий бурчак тезлик билан айлансин. Қўзғалувчи тишли ғилдирак қўзғалмас $O\xi$ ўқ атрофида кривошип билан биргаикда $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0$ кўчирма бурчак тезлик билан айланади. Бинобарин, қўзғалувчи тишли ғилдирак мураккаб ҳаракатда иштирок этади.

Занжирнинг берилган пайтда қўзғалмас тишли ғилдирак билан туташган нуқталарининг абсолют тезликлари нолга тенг бўлгани учун тезликларни қўшиш теоремасидан

$$\vec{v}_r + \vec{v}_e = 0 \text{ ёки } \vec{v}_r = -\vec{v}_e$$

ҳосил бўлади. Бунда \vec{v}_r занжир нуқталарининг кривошипга нисбатан нисбий тезлиги, \vec{v}_e эса занжир нуқталарининг кўчирма тезлигидан иборат: $\omega_e = \omega_0$ бўлгани учун $v_e = \omega_0 \cdot r$. Қўзғалувчи тишли ғилдиракнинг абсолют бурчак тезлигини ω билан белгиласак, унинг нисбий бурчак тезлиги $\omega - \omega_0$ га тенг бўлади:

$$\omega_r = \omega - \omega_0. \quad (1)$$

Бинобарин, $v_r = (\omega - \omega_0)r$.

Занжир қўзғалмас тишли ғилдиракка нисбатан сирпанмагани туфайли, уларнинг бир-бирга тегиб турган нуқталарининг кривошипга нисбатан тезликлари миқдор жиҳатдан тенг бўлади, яъни:

$$(\omega - \omega_0) r = -\omega_0 r.$$

Бу тенгликдан $\omega = 0$ келиб чиқади.

Шу сабабли (1) дан $\omega_r = -\omega_0$, яъни кўрилатган ҳолда жуфт айланиш содир бўлади. Исталган пайт учун $\omega = 0$ бўлгани туфайли абсолют ҳаракат бурчак тезланиши

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

$\omega = 0$, $\varepsilon = 0$ бўлиши қўзғалувчи тишли ғилдирак ҳаракати илгарилама ҳаракат бўлишини тасдиқлайди. Шу сабабли қўзғалувчи тишли ғилдирак ихтиёрий нуқта-тасининг тезлик ва тезланишлари мос равишда A нуқтанинг тезлик ва тезланиш-ларига тенг бўлади:

$$v_M = v_A = l \omega_0,$$

$$\omega_M = \omega_A = l \omega_0^2.$$

14.5- §. Цилиндрик тишли узатмалар

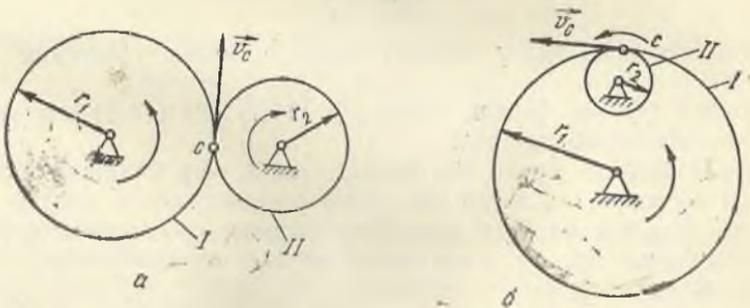
Цилиндрик тишли ғилдираклардан (шестернялардан) ташкил топган узатмаларни кинематик нуқтан назардан ҳисоблашда аввалги параграфдаги натижалардан фойдаланиш мумкин. Бирор валнинг айланма ҳаракатини унга параллел бўлган иккинчи валга узатишда тишли узатмалардан фойдаланилади. Тишли узатмалар ғилдиракларнинг ҳаракат турига қараб оддий, планетар ва дифференциал узатмаларга ажратилади.

Кетма-кет илашган тишли ғилдиракларнинг айланиш ўқлари қўзғалмасдан қолса, бундай узатма *оддий узатма* дейилади (14.10-расм, *a* ва *b*). Оддий узатмада ғилдираклардан бири, масалан, тишли ғилдирак I етакчи, қолганлари эса етакланувчи ҳисобланади. Етакчи ғилдирак бурчак тезлиги ω_1 нинг етакланувчи ғилдирак бурчак тезлиги ω_2 га нисбати *узатиш сони* дейилади. Узатиш сони $i_{1,2}$ билан белгиласак,

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} *$$

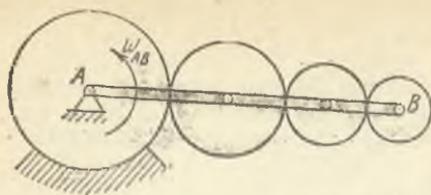
муносабат ўринли бўлади. Оддий узатма иккита тишли ғилдиракдан ташкил топган бўлса, ғилдираклар уринадиган C нуқтада уларнинг тезликлари тенг бўлади:

$$|\omega_1| r_1 = |\omega_2| r_2.$$



14.10- расм.

*— бу параграфда ω билан бурчак тезликининг алгебраик қиймати белгиланган.



14.11- расм.

сони учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{z_2}{z_1}. \quad (14.12)$$

Ички илашган ғилдираклар учун бу формулада мусбат ишора, ташқи илашган ғилдираклар учун эса манфий ишора олинади.

Кетма-кет илашган тишли ғилдираклардан бири қўзғалмас бўлиб, қолганлари мазкур ғилдирак ўқи атрофида айланувчи АВ кривошипга ўрнатилган бўлса, бундай узатма *планетар узатма* дейилади (14.11- расм).

Агар планетар узатмадаги қўзғалмас ғилдирак ҳам ўз ўқи атрофида АВ кривошипга дахлсиз равишда айлана олса, бундай узатма *дифференциал узатма* дейилади.

Планетар ёки дифференциал узатмаларнинг кинематик характеристикаларини аниқлашда қуйидаги усуллардан фойдаланиш мумкин.

1. Бурчак тезликларни қўшиш усули. Планетар ёки дифференциал узатмалардаги ғилдиракларнинг айланиш ўқлари параллел бўлса, у ҳолда (14.7) ёки (14.9) формулалар воситасида абсолют ҳаракат бурчак тезлиги аниқланади. Абсолют ҳаракатнинг бурчак тезлик вектори айланиш оний ўқи билан устма-уст тушади.

2. Тезликлар оний марказидан фойдаланиш усули. Планетар ва дифференциал узатмалардаги ғилдираклар текис параллел ҳаракатда иштирок этгани туфайли дастлаб берилган ғилдирак учун тезликларнинг оний марказини, сўнгра

$$\omega_a = \frac{v_a}{r}$$

формула ёрдамида унинг абсолют ҳаракат бурчак тезлигини аниқлаймиз.

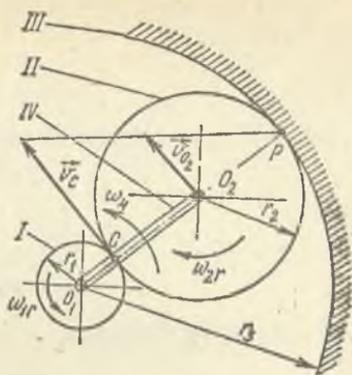
Нисбий ҳаракат бурчак тезлигини (14.7) ёки (14.9) формулалар воситасида аниқлаш мумкин.

3. «Тўхтатиш» усули ёки Виллис усули. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, планетар ёки дифференциал узатма оддий узатмага келтирилади ва унга мос бўлган кинематик муносабатлардан фойдаланилади. Бунинг учун планетар ёки дифференциал узатманинг кривошипи фикран тўхтатилади ва узатма таркибига кирувчи барча ғилдиракларга миқдор жиҳатдан кривошип бурчак тезлигига тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлган бурчак тезлик берилди. У ҳолда кривошипнинг бурчак тезлиги нолга, ғилдиракларнинг бурчак тезлиги эса, дастлабки бурчак тезлиги билан кривошип

бурчак тезликларининг айирмасига тенг бўлади.

Бу усулларни қўллашга оид қуйидаги масалаларни ечамиз.

✓ 14.5- масала. Чарх тошини тез айлан-тирувчи илашма қуйидагича тузилган: IV стержень махсус даста воситасида O_1 ўқ атрофида ω_4 бурчак тезлиги билан айлан-тирилади (14.12- расм). Стерженнинг O_2 учидagi бармоққа, r_2 радиусли II ғилдирак эркин кийгизилган. Даста айлан-тирилганда II ғилдирак қўзғалмас III ғилдирак ичида сирпанмасдан айланади. Бунда иш-қаланиш ҳисобига II ғилдирак чарх ўқи билан маҳкам боғланган I ғилдиракни сир-пантимасдан айлантиради. III ғилдирак-нинг радиуси r_3 берилган деб қараб, r_1 нинг шундай қиймати топилсинки, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 12$



14.12- расм.

бўлсин, яъни чарх уни ҳаракатга келтирувчи дастага қараганда 12 марта тезроқ айлансин.

Ечиш. 1. Масалани бурчак тезликларни қўшиш усулида ечиш учун ғилди-раклар абсолют бурчак тезликларининг қийматини мос равишда $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ($\omega_3=0$) билан белгилаймиз. Ғилдиракларнинг IV стерженга нисбатан бурчак тезликларини $\omega_{1r}, \omega_{2r}, \omega_{3r}$ билан белгиласак, (14.7) га биноан

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_4, \quad \omega_{2r} = \omega_2 - \omega_4, \quad \omega_{3r} = -\omega_4. \quad (1)$$

Бунда ω_4 билан O_1O_2 стерженнинг бурчак тезлиги белгиланган бўлиб, у кўчирма ҳаракат бурчак тезлигини ифодалайди.

I ва II ғилдираклар ташқи, II ва III ғилдираклар ички илашгани туфайли бу ғилдиракларнинг нисбий ҳаракат бурчак тезликлари орасида қуйидаги муно-сабатлар мавжуд бўлади:

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_{2r}}{\omega_{3r}} = \frac{r_3}{r_2}, \quad (2)$$

(1) ни (2) га қўйсак,

$$\frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_2 - \omega_4} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_2 - \omega_4}{-\omega_4} = \frac{r_3}{r_2}.$$

Бу тенгликларни ўзаро кўпайтирсак,

$$\frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_4} = \frac{r_3}{r_1}, \quad \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_4} - 1 = \frac{r_3}{r_1}$$

ёки $\frac{\omega_1}{\omega_4} = 12$ бўлгани учун $r_1 = \frac{1}{11} r_3$.

2. Масалани тезликлар оний марказини аниқлаш усули билан ечамиз. II ғилдирак III ғилдирак ичида сирпанмасдан думалагани сабабли бу ғилдираклар-нинг илашган P нуқтаси II ғилдирак учун тезликлар оний марказини ифода-лайди. II ғилдирак марказининг тезлигини

$$v_{O_2} = \omega_4 (r_1 + r_2) \quad (3)$$

формула ёрдамида аниқлаймиз.

Handwritten notes and a red checkmark with the number 241.

1 ва II ғилдиракларнинг илашган C нуқтаси иккала ғилдиракка ҳам тааллуқли бўлгани учун

$$v_C = 2 v_{O_2}, \quad (4)$$

$$v_C = \omega_1 r_1. \quad (5)$$

(3), (4) ва (5) дан фойдаланиб ушбу муносабатни оламиз:

$$2 \omega_4 (r_1 + r_2) = \omega_1 r_1,$$

бундан

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1}, \quad (6)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = 12 \text{ ни (6) га қўйсак,}$$

$$12 = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1}, \Rightarrow 10 r_1 = 2 r_2$$

ёки $2 r_2 = r_3 - r_1$ бўлгани учун $11 r_1 = r_3$.

Шундай қилиб,

$$r_1 = \frac{1}{11} r_3.$$

3. Масалани «тўхтатиш» усули билан ечиш учун IV стерженни фикран тўхтатамиз ва барча ғилдиракларга миқдор жиҳатдан IV стерженнинг бурчак тезлиги ω_4 га тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлган бурчак тезлик берамиз ҳамда мос бурчак тезликларни қуйидаги жадвалга ёзамиз.

	Етакчи IV стержень	Ғилдираклар		
		III	II	I
Тўхтатгунча бурчак тезлиги	ω_4	0	ω_2	ω_1
Тўхтатгандан кейинги бурчак тезлиги	0	$-\omega_4$	$\omega_2 - \omega_4$	$\omega_1 - \omega_4$
Илашмиш тури		ички		ташқи

III ва II ғилдираклар ички ҳамда II ва I ғилдираклар ташқи илашганлигини эътиборга олиб, (14.12) формулага асосан ушбу тенгликларни оламиз:

$$-\frac{\omega_4}{\omega_2 - \omega_4} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{\omega_2 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = -\frac{r_1}{r_2},$$

бундан

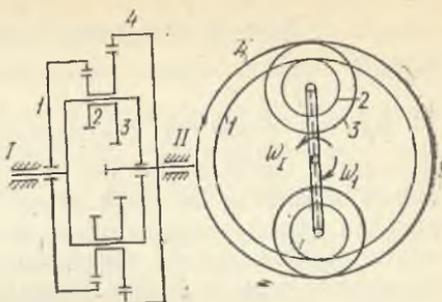
$$\frac{\omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = \frac{r_1}{r_3}$$

ёки $\frac{\omega_1}{\omega_4} = 12$ бўлгани учун

$$r_1 = \frac{1}{11} r_3.$$

14.6- масала. Дифференциал узатмали тезликлар редуктори тишли тўртта ғилдиракдан иборат; булардан биринчиси ички томондан илашган бўлиб, бир

минутда 160 марта айланади, тишларнинг сони $z_1 = 70$, иккинчи ва учинчи ғилдирақлар бир-бирига бириктирилган, уларнинг бурчак тезлиги $n_1 = 1200$ айл/мин бўлиб, етакловчи I валнинг атрофида вал билан бирга айланувчи ўққа ўрнатилган; тишларининг сони $z_2 = 20$, $z_3 = 30$, тўртинчи ғилдирақ учинчи ғилдирақ билан ички томондан илашган ва етакланувчи валга маҳкам ўрнатилган бўлиб, тишларининг сони $z_4 = 80$. Етакланувчи валнинг бир минутда неча марта айланиши топилсин, I вал ва I ғилдирақ қарама-қарши томонга айланади (14.13- расм).



14.13- расм.

Ечиш. Масалани Виллис усули билан ечиш учун I вални фикран тўхтатамиз

ва 1, 2, 3, 4 ғилдирақларга миқдор жиҳатдан I валнинг бурчак тезлиги ω_1 га тенг, йўналиши унга қарама-қарши бўлган бурчак тезликлар берамиз ва мос бурчак тезликларни ушбу жадвалга жойлаштирамиз.

	Етакловчи вал I	Ғилдирақ (ёки вал) лар		
		1	2,3	4,II
Тўхтатгунча бурчак тезлиги	ω_1	$-\omega_1$	$-\omega_{23}$	$-\omega_{II}$
Тўхтатгандан кейинги бурчак тезлиги	0	$-\omega_1 - \omega_1$	$-\omega_{23} - \omega_1$	$-\omega_{II} - \omega_1$

Илаиш тури

ички ички

I вал ва I ғилдирақ ҳамда унга илашган бошқа ғилдирақлар қарама-қарши томонга айлангани учун уларнинг бурчак тезликлари ҳар хил ишора билан олинган.

1 ва 2 ҳамда 3 ва 4 ғилдирақлар ички илашганини назарда тутиб, (14.12) га асосан қуйидаги тенгликларни ёзамиз:

$$\frac{-\omega_1 - \omega_1}{-\omega_{23} - \omega_1} = \frac{z_3}{z_1}, \quad \frac{-\omega_{23} - \omega_1}{-\omega_{II} - \omega_1} = \frac{z_4}{z_3}$$

Бу тенгликларни кўпайтирсак,

$$\frac{-\omega_1 - \omega_1}{-\omega_{II} - \omega_1} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3} \Rightarrow \frac{-\omega_1 - 1}{-\omega_{II} - 1} = \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$$

бунда $\frac{\omega_1}{\omega_1} = \frac{n_1}{n_1}$, $\frac{\omega_{II}}{\omega_1} = \frac{n_{II}}{n_1}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$n_{II} = n_1 \left[\frac{z_1 z_4}{z_2 z_3} \left(1 + \frac{n_1}{n_1} \right) - 1 \right] = 1200 \cdot \left[\frac{70 \cdot 30}{20 \cdot 80} \left(1 + \frac{160}{1200} \right) - 1 \right] = 585 \text{ айл./мин.}$$

14.6- §. Жисмнинг илгарилама ва айланма ҳаракатларини қўшиш

Қаттиқ жисм бир вақтнинг ўзида \vec{u} тезлик билан илгарилама ҳаракатда ҳамда бирор ўқ атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда иштирок этсин. Улардан қай бирини нисбий ҳаракат ёки кўчирма ҳаракат деб олиш аҳамиятга эга эмас. Чунки ҳар ондаги тезликларнинг тақсимланиши ташкил этувчи ҳаракатларнинг ўрин алмашишига боғлиқ бўлмайди. Қўйидаги учта ҳолни кўриб чиқамиз.

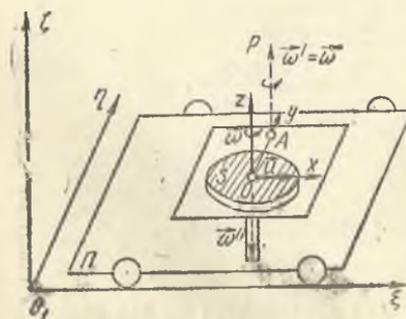
1. Илгарилама ҳаракат тезлиги айланиш ўқига перпендикуляр йўналган ҳол ($\vec{u} \perp \vec{\omega}$). Айтайлик, қаттиқ жисм қўзғалувчи *Охуз* координаталар системасига нисбатан $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан *Oz* ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлсин. Ўз навбатида *Охуз* координаталар системаси қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан $\vec{\omega}$ векторга перпендикуляр йўналишда \vec{u} тезлик билан (масалан, аравача билан биргаликда) илгарилама ҳаракатда иштирок этсин (14.14-расм). Бу ҳолда жисм z ўққа перпендикуляр Π текисликка нисбатан текис параллел ҳаракатда бўлади. Агар қутб учун *O* нуқтани олсак, у ҳолда жисмнинг ҳаракатини қутбнинг тезлигига тенг $\vec{v}_0 = \vec{u}$ тезлик билан илгарилама ҳаракат ҳамда қутб атрофидаги $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан содир бўладиган айланма ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин (10.3-§).

Жисмнинг абсолют ҳаракатини аниқлаш учун илгарилама ҳаракат тезлиги \vec{u} ни шундай ($\vec{\omega}'$, $\vec{\omega}''$) жуфт айланиш билан алмаштирамизки, жуфт айланишни ташкил этувчи бурчак тезликлар $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$ шартларни қаноатлантирсин. Бунда $OA = d$ масофа $\vec{u} = \vec{\omega}' \cdot d$ тенгликдан аниқланади:

$$d = \frac{u}{\omega'}$$

ёки $\omega' = \omega$ бўлгани учун

$$d = \frac{u}{\omega}. \quad (14.13)$$



14.14- расм.

$\vec{\omega}$ ва $\vec{\omega}''$ векторларнинг йнғиндисинолга тенг бўлади. Натижада кўрилаётган жисмнинг ҳаракатини *AP* ўқ атрофидаги $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ бурчак тезлик билан содир бўладиган оний айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин.

Шундай қилиб, қўйидаги теорема исботланди: *агар жисм бир*

вақтнинг ўзида Oz ўқ атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда ҳамда $\vec{\omega}$ бурчак тезликка перпендикуляр бўлган \vec{u} тезлик билан илгарилама ҳаракатда штирок этса, жисмнинг абсолют ҳаракати Oz ўққа параллел бўлган ва ундан $d = \frac{u}{\omega}$ масофада ётувчи ўқ атрофида миқдор ва йўналиш жиҳатдан берилган $\vec{\omega}$ бурчак тезликка тенг бўлган $\vec{\omega}'$ бурчак тезлик билан содир бўладиган оний айланма ҳаракатдан иборат бўлади.

2. Илгарилама ҳаракат тезлиги айланиш ўқиға параллел бўлган ҳол ($\vec{u} \parallel \vec{\omega}$). Винт ҳаракати. Агар жисмнинг абсолют ҳаракати Oz ўқ атрофида $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан содир бўладиган айланма ҳаракатдан (нисбий ҳаракатдан) ҳамда z ўққа параллел бўлган $\vec{v}_e = \vec{u}$ тезлик билан содир бўладиган илгарилама ҳаракатдан (кўчирма ҳаракатдан) ташкил топган бўлса, жисмнинг бундай ҳаракати *винт ҳаракати* дейилади (14.15-расм). Айланиш содир бўладиган Oz ўқ винт ўқи дейилади.

Винт ҳаракатида бўлган жисмнинг ихтиёрий M нуқтасидан винт ўқиғача бўлган r масофа ўзгармасдан қолади. Шу сабабли винт ҳаракатида жисмнинг M нуқтаси r радиусли доиравий цилиндр сиртида *винт чизиги* деб аталувчи траектория бўйлаб ҳаракатланади.

Агар $\vec{\omega}$ ва \vec{u} векторлари Oz ўқ бўйича бир томонга йўналса, *ўнг винт*, қарама-қарши томонга йўналса, *chap винт*ни ташкил этади.

Жисмнинг винт ўқи атрофидаги бир марта айланиш вақтини T билан белгилайлик. Агар берилган онда M нуқта цилиндрнинг AB ясовчисида ётса, бу нуқта

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

вақт ўтгандан кейин яна AB ясовчини кесиб ўтади ҳамда бу ясовчи бўйлаб

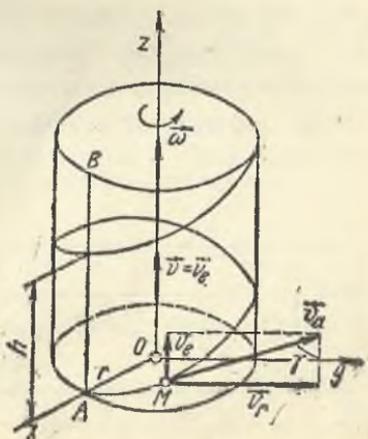
$$h = uT = \frac{2\pi u}{\omega} \quad (14.14)$$

масофага кўчади. h масофа *винт қадами* дейилади.

Илгарилама ҳаракат тезлиги u нинг айланма ҳаракат бурчак тезлиги ω га нисбати винт параметри дейилади ва у r билан белгиланади:

$$p = \frac{u}{\omega}. \quad (14.15)$$

(14.15) ни (14.14) га олиб бориб қўйсақ, винт қадами билан винт параметри орасидаги қуйидаги муносабатни оламиз:



14.15-расм.

$$h = 2\pi r.$$

M нуқта винт ўқи атрофида модули $v_r = \omega r$ га тенг нисбий тезлик ҳамда цилиндр ясовчиси бўйлаб $\vec{v}_e = \vec{u}$ кўчирма тезлик билан ҳаракатланади. Тезликларни қўшиш ҳақидаги теоремага кўра M нуқтанинг абсолют тезлиги қуйидагига тенг:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

ёки кўрилаётган ҳолда $\vec{v}_r \perp \vec{v}_e$ бўлгани учун абсолют тезликнинг модули

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{\omega^2 r^2 + u^2} = \omega \sqrt{\rho^2 + r^2} \quad (14.16)$$

формула ёрдамида аниқланади.

Абсолют тезликнинг цилиндр ясовчиси билан ташкил қилган бурчагини γ билан белгиласак, у ҳолда

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_r}{v_e} = \frac{r\omega}{u} = \frac{r}{\rho} \quad (14.17)$$

муносабат ўринли бўлади.

Агар ҳаракат давомида $\rho = \text{const}$ бўлса, у ҳолда (14.17) га биноан

$$\operatorname{tg} \gamma = \text{const}$$

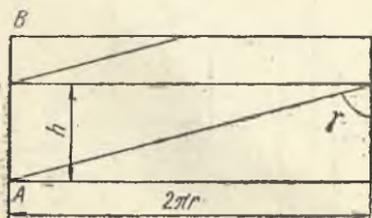
бўлади. Шу сабабли цилиндрни бирор ясовчиси бўйича кесиб, текисликка ёйсақ, у ҳолда винт чизиги бу текисликда цилиндр ясовчиси билан γ бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқлардан иборат бўлади (14.16-расм). Расмдан

$$h = 2\pi r \operatorname{ctg} \gamma$$

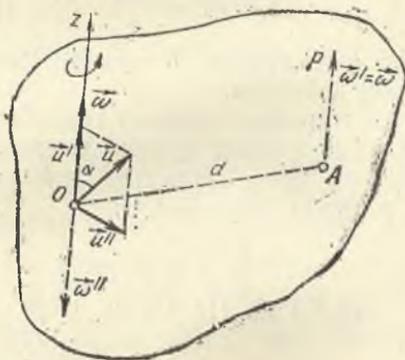
ифодани оламиз.

3. Илгарилема ҳаракат тезлиги айланиш ўқи билан ихтиёрий бурчак ташкил этган ҳол (14.17-расм). Оний винт ҳаракати. Бу ҳолда илгарилема ҳаракат тезлиги \vec{u} ни $\vec{\omega}$ бўйича йўналган \vec{u}' ва унга перпендикуляр йўналган \vec{u}'' ташкил этувчиларга ажратамиз:

$$u' = u \cos \alpha, \quad u'' = u \sin \alpha.$$



14.16- расм.



14.17- расм.

1-ҳолда кўрганимиздек, $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан содир бўладиган айланма ҳаракат ва \vec{u}'' тезлик билан содир бўладиган илгарилама ҳаракатларни қўшиш натижасида Oz га параллел бўлган AP ўқ атрофидаги оний айланма ҳаракатга эга бўламиз. Бунда Oz ва AP айланиш ўқлари орасидаги масофа (14.13) га кўра

$$OA = d - \frac{u''}{\omega} = \frac{u \sin \alpha}{\omega} \quad (14.18)$$

формуладан аниқланади. Натижада жисм AP ўқ атрофида $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ бурчак тезлик билан оний айланма ҳаракатда ҳамда $u' = u \cos \alpha$ тезлик билан илгарилама ҳаракатда иштирок этади. Шу сабабли жисм

нуқталарининг берилган ондаги тезлиги AP ўқ атрофида $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ бурчак тезлик ва илгарилама ҳаракати $u' = u \cos \alpha$ тезлик билан содир бўладиган винт ҳаракатидаги каби аниқланади. Жисм ҳаракатланганда AP ўқ ўз ҳолатини ўзгартира боради. Шу сабабли бундай ҳаракат *оний винт ҳаракати* дейилади.

Шундай қилиб, жисм бир вақтнинг ўзида $\vec{\omega}$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракатда ҳамда $\vec{\omega}'$ бурчак тезликка перпендикуляр бўлмаган \vec{u} тезлик билан илгарилама ҳаракатда иштирок этса, жисмининг абсолют ҳаракати $\vec{\omega}$ вектори йўналган Oz ўққа параллел равишда ундан (14.18) формула ёрдамида аниқланадиган d масофада ўтувчи AP ўқ атрофидаги оний винт ҳаракатидан иборат бўлади.

✓ 14.7-масала. Куб шаклидаги қаттиқ жисм берилган онда AB қирраси атрофида $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади ва AC диагональ бўйлаб

$u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ м/с тезлик билан илгарилама ҳаракат қилади. Агар кубнинг томони $a = 0,5$ м бўлса, берилган онда кубнинг абсолют ҳаракати аниқлансин (14.18-расм).

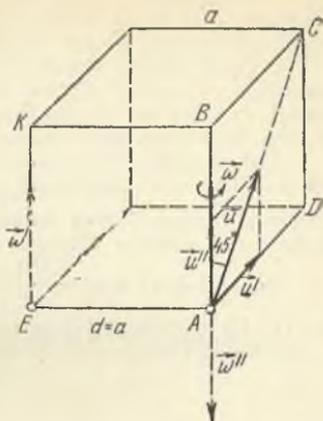
Ечиш. Илгарилама ҳаракат тезлиги \vec{u} ни $\vec{\omega}$ вектори йўналган кубнинг AB ҳамда унга перпендикуляр бўлган AD қирраларни бўйича \vec{u}'' ва \vec{u}' ташкил этувчиларга ажратамиз. Бу ташкил этувчиларнинг модули қуйидагича аниқланади:

$$u' = u \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,5 \text{ м/с}, \quad u'' = u \sin 45^\circ = 0,5 \text{ м/с}.$$

$u'' = 0,5$ м/с илгарилама ҳаракат тезлигини шундай $(\vec{\omega}', \vec{\omega}'')$ жуфт айланиш билан алмаштирамизки, $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ ва $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$ бўлсин.

3-ҳолда кўрганимиздек, кубнинг берилган ондаги ҳаракати AB ўқдан

$$d = \frac{u''}{\omega} = -\frac{0,5}{1} = -0,5 \text{ м} = a$$



14.18- расм.

масофада ётувчи, яъни кубнинг E учидан ўтувчи EK қирраси атрофидаги оний винт ҳаракатидан иборат бўлади.

Шундай қилиб, берилган онда кубнинг абсолют ҳаракати унинг EK қирраси атрофида $\omega' = 1 \text{ с}^{-1}$ бурчак тезлик билан содир бўладиган айланма ҳаракатдан ҳамда $u' = 0,5 \text{ м/с}$ тезлик билан содир бўладиган илгарилама ҳаракатдан ташкил топган оний винт ҳаракатидан иборат бўлади.

14.8- масала. Парма $n = 120$ айл/мин га тўғри келадиган бурчак тезлик ҳамда $u = 0,02 \text{ м/с}$ илгарилама ҳаракат тезлиги билан винт ҳаракатда бўлади. Агар айланма ҳаракат бурчак тезлиги ω ва илгарилама ҳаракат тезлиги u парма ўқи бўйлаб бир томонга йўналган бўлса, винт қадами ва винт параметри аниқлансин.

Ечиш. Парма $\omega = \frac{120 \pi}{30} = 4\pi \text{ с}^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади. (14.14)

ва (14.15) формулаларга асосан винт қадами ва винт параметрини аниқлаймиз:

$$h = \frac{2\pi u}{\omega} = 0,01 \text{ м,}$$

$$p = \frac{u}{\omega} = 0,0016 \text{ м.}$$



III ҚИСМ. ДИНАМИКА

15-боб. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ҚОНУНЛАРИ

15.1-§. Динамика предмети

Динамика юнонча «*dynamics*» — куч сўзидан олинган. Динамикада моддий нуқта, моддий нуқталар системаси ва абсолют қаттиқ жисмнинг ҳаракати шу ҳаракатни вужудга келтирувчи кучлар билан биргаликда ўрганилади.

Юқорида жисмларнинг бир-бирига ўзаро механик таъсири кучни ифодалашини кўрган эдик. Статикада асосан ўзгармас кучлар ўрганилган эди. Динамикада ўзгармас кучлар билан биргаликда миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгарувчи кучлар таъсири ҳам ўрганилади. Масалан, моддий нуқтанинг тебранма ҳаракатида унга таъсир этувчи даврий уйғотувчи куч вақтнинг функциясидан иборат бўлади; шунингдек, реактив двигателнинг тортиш кучи ёқилғининг ёниш вақтига боғлиқ; планеталарнинг тортишиш кучи ёки пружинанинг эластиклик кучи жисмларнинг ҳолатига боғлиқ; нуқтанинг ҳаракати га муҳитнинг кўрсатадиган қаршилик кучи нуқтанинг тезлигига боғлиқ бўлади.

Умумий ҳолда кучлар вақтга, куч қўйилган нуқтанинг координаталарига ва тезлигига боғлиқ бўлиши мумкин:

$$\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

ёки

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

Механикада кучларнинг табиати ўрганилмайди; бундай масала билан физиканинг электродинамика, қаттиқ жисм назарияси ва бошқа бўлимларида шуғулланилади,

Ишқаланиш кучи тушунчаси киритилганда кўрганимиздек, баъзан тинч турган жисмга куч таъсир этса ҳам у ҳаракатга келмайди. Ҳар қандай жисмнинг ҳаракати унга таъсир этувчи кучлардан ташқари, материянинг асосий хусусиятларидан бири ҳисобланган жисмнинг инертлиги ёки инерциясига боғлиқ бўлади. Куч таъсир этмаганда жисмнинг ўз ҳолатини ёки ҳаракатини сақлашида, куч таъсир этганида эса ўз ҳаракатини бирданига эмас, балки жисм ташкил топган модданинг миқдорига боғлиқ равишда аста-секин ўзгартиришида бу хусусият намоён бўлади.

Қаттиқ жисм ташкил топган модданинг миқдори билан характерланувчи ва жисмнинг инертлик ўлчовини ифодаловчи катталик *инерцион масса* дейилади.

Жисм ташкил топган модданинг миқдори жисмнинг оғирлигига боғлиқ бўлади. Маълумки, жисмнинг оғирлиги жисм турган жойнинг географик кенглиги ва денгиз сатҳидан баландлигига боғлиқ факторлар билан аниқланади, лекин жисмдаги моддаларнинг миқдори бу факторларга боғлиқ бўлмайди. Кузатишларнинг кўрсатишича, Ер сиртига яқин масофадаги жисмнинг оғирлигини унинг эркин тушиш тезланишига нисбати ўзгармас бўлиб, кузатиш жойига боғлиқ бўлмайди, яъни жисмнинг оғирлигини P , эркин тушиш тезланишини g билан белгиласак, у ҳолда берилган жисм учун

$$\frac{P}{g} = m = \text{const} \quad (15.1)$$

бўлади.

Жисмнинг физик хусусиятларига боғлиқ бўлган ва (15.1) формула ёрдамида аниқланадиган m катталikka *гравитацион масса* дейилади.

Одатдаги шароитда (жисмларнинг тезлиги ёруғлик тезлигидан анча кичик бўлганда ҳамда гравитацион майдони кучли бўлмаганда) кўплаб ўтказилган тажрибалар асосида олинган натижаларга кўра, гравитацион масса ва инерцион масса ўзаро тенг бўлиши исботланган. Бу ҳолат А. Эйнштейннинг нисбийлик назариясида муҳим ўринни эгаллайди ва «*эквивалентлик принципи*» деб юритилади.

Шундай қилиб, *масса жисм ташкил топган модданинг миқдорий ўлчови бўлиши билан бирга инерция ўлчовини ҳам ифодалайди*, бинобарин, динамикада жисмнинг моддийлик ва инерция хусусиятлари намоён бўлади.

Нисбийлик назариясида жисмнинг массаси m унинг тезлигига боғлиқ равишда ушбу

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

формула ёрдамида аниқланиши исботланади. Бунда m_0 — жисмнинг тинч ҳолатдаги массаси; v — жисмнинг тезлиги ва c — ёруғлик тезлиги. Классик механикада жисмларнинг тезлиги ёруғлик тезлигидан анча кичик деб қаралади. Шу сабабли $\frac{v^2}{c^2}$ катталик бирга нисбатан жуда кичик бўлгани учун уни эътиборга олмай жисмнинг массаси ўзгармас деб қаралади.

СИ бирликлар системасида масса килограмм (кг) билан ўлчанади.

Жисмнинг ҳаракати унга таъсир этувчи кучлардан ташқари жисмнинг шаклига, яъни жисм массасининг қандай тақсимланганига ҳам боғлиқ бўлади.

Динамикада дастлаб моддий нуқтанинг ҳаракати ўрганилади. Сўнгра олинган натижалар моддий нуқталар системаси ва қаттиқ жисмга татбиқ қилинади.

15.2-§. Классик механиканинг асосий қонунлари

Динамика асосида тажриба ва кузатишлар воситасида аниқланган қонунлар ёгади. Бу қонунлар XVII асрда Г. Галилей ва И.Ньютон томонидан кашф қилинган ҳамда Ньютоннинг «Натурал фалсафанинг математик асослари» асарида (1687 й.) баён қилинган.

Классик механиканинг биринчи қонуни Галилей томонидан кашф қилинган бўлиб, жисмларнинг инертлик хусусиятини ифодалайди ва *инерция қонуни* дейилади.

1-қонун (инерция қонуни). Ташқи таъсирдан танҳоланган моддий нукта куч таъсир этмагунча ўзининг тинч ҳолатини ёки тўғри чизиқли текис ҳаракатини сақлайди.

Инерция қонунига биноан моддий нуктанинг тўғри чизиқли текис ҳаракати *инерциал ҳаракат* ёки *инерция бўйича ҳаракат* дейилади.

Инерциал ҳаракатдаги нуктанинг тезлашиши нолга тенг бўлади ($w = 0$). 1-қонунга кўра, агар нукта тинч ҳолатда бўлса, у ўзича силжий олмайди ёки инерциал ҳаракатдаги нукта ўз-ўзича ҳаракат тезлигининг миқдор ва йўналишини ўзгартира олмайди. Моддий нуктанинг тезлигини ўзгартириш учун бирор ташқи таъсир бўлиши керак. Бошқа жисмларнинг берилган нуктага таъсири, яъни *куч* ана шундай таъсирни ифодалайди.

Кинематика бўлимида нуктанинг механик ҳаракати бошқа бирор жисм билан боғланган ва санақ системаси деб аталган координаталар системасига нисбатан ўрганилди. Агар танланган санақ системаси учун инерция қонуни ўрикли бўлса, бундай координаталар системаси *инерциал система* дейилади. Инерциал санақ системасига нисбатан текшириляётган ҳаракат абсолют ҳаракат деб қаралади.

Тажрибаларнинг кўрсатишича, координаталар боши Қуёш марказида олинган ва ўқлари учта «қўзғалмас» юлдузлар томонга йўналган гелиоцентрик системани инерциал система деб қараш мумкин. Техникада учрайдиган кўпгина масалаларни ечишда инерциал система учун Ер билан боғланган координаталар системаси олинади. Бунда Ернинг суткалик айланиши ҳамда Қуёш атрофидаги эгри чизиқли орбита бўйлаб ҳаракати эътиборга олинмайди.

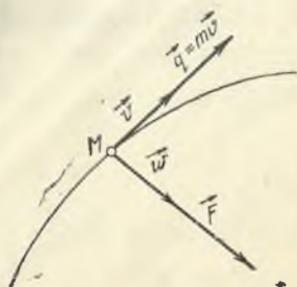
2-қонун (динамиканинг асосий қонуни). Моддий нукта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳаракатлантирувчи кучга пропорционал ва кучнинг таъсир чизиғи бўйича содир бўлади.

Моддий нуктанинг массасини унинг берилган ондаги тезлик векторига кўпайтмасига тенг q вектор *нуктанинг ҳаракат миқдори* дейилади:

$$\vec{q} = m\vec{v}. \quad (15.3)$$

M нуктанинг ҳаракат миқдори мазкур нуктага қўйилган \vec{q} вектор билан ифодаланади (15.1-расм).

Ньютон иккинчи қонунининг векторли ифодаси қуйидагича ёзилади:



15.1- расм.

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \quad (15.4)$$

Агар вақт ўтиши билан нуқтанинг массаси ўзгармасдан қолса, у ҳолда (15.4) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\vec{w} = \vec{F}, \quad (15.5)$$

бунда $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ нуқтанинг тезланишини ифодалайди.

Ньютоннинг 2-қонунини ифодаловчи (15.5) тенглама нуқта динамикасининг асосий тенгламаси дейилади. Бу тенгламадан кўра-мизки, моддий нуқтанинг инерциал системага нисбатан тезланиши нуқтага таъсир этувчи кучга пропорционал бўлиб, мазкур куч бўйича йўналади. Бинобарин, куч билан нуқта тезланишининг модуллари орасида $F = mw$ муносабат ўринли бўлади.

Бу тенгликдан кўра-мизки, таъсир этувчи куч миқдор жиҳатдан ўзгармас бўлганда нуқтанинг массаси қанча катта бўлса, унинг тезланиши шунча кичик бўлади, яъни масса моддий нуқта тезлигининг ўзгаришига монанд бўладиган қаршилликни (инертлигини) ифодалайди.

3-қонун (таъсир ва акс таъсир қонуни). Ҳар қандай таъсирга унги миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлган акс таъсир мос келади, яъни иккита моддий нуқтанинг ўзаро таъсири миқдор жиҳатдан тенг ва шу нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонга йўналади.

Масалан, A нуқта B нуқтага \vec{F}_B куч билан таъсир этсин; B нуқта эса A нуқтага \vec{F}_A куч билан таъсир этсин (15.2-расм). 3-қонунга кўра

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A \quad (15.6)$$

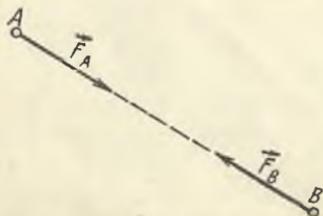
ёки

$$F_B = F_A$$

тенглик ўринли бўлади.

Кучлардан ихтиёрий биттаси «таъсир», иккинчиси эса «акс таъсир» деб аталади. Бундай иккита кучлар ўзаро мувозанатда бўлмайди, чунки улар моддий нуқталар деб тасаввур қилинадиган бошқа-бошқа жисмларга қўйилади.

4-қонун (кучлар таъсирининг ўзаро мустақиллик қонуни). Агар моддий нуқтага бир нечта куч таъсир этса, нуқтанинг тезланиши ҳар бир кучнинг алоҳида таъсиридан нуқта оладиган тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.



15.2- расм.

M моддий нуқта ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кучлар таъсирида бўлсин. Бу кучлар системаси таъсиридан нуқтанинг олган тезланишини $\vec{\omega}$, ҳар бир кучнинг алоҳида таъсиридан нуқтанинг оладиган тезланишларини $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{\omega}_n$ билан белгилайлик. У ҳолда 4-қонунга асосан

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \dots + \vec{\omega}_n. \quad (15.7)$$

Натижа. Нуқтага таъсир этувчи кучлар системаси шу кучлар системасининг тенг таъсир этувчисига динамик эквивалент бўлади.

Исбот. M моддий нуқтага ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кучлар таъсир этсин (15.3-рasm, аниқлик учун rasmда $n=3$ бўлган ҳол тасвирланган). (15.7) нинг ҳар икки томонини нуқтанинг массаси m га кўпайтирсак,

$$m\vec{\omega} = m\vec{\omega}_1 + m\vec{\omega}_2 + \dots + m\vec{\omega}_n \quad (15.8)$$

тенглик ҳосил бўлади.
2-қонунга кўра

$$m\vec{\omega}_1 = \vec{F}_1, \quad m\vec{\omega}_2 = \vec{F}_2, \quad \dots, \quad m\vec{\omega}_n = \vec{F}_n.$$

Шу сабабли (15.8) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\vec{\omega} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

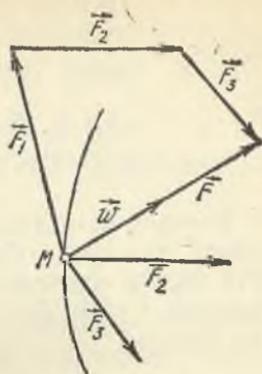
ёки

$$m\vec{\omega} = \sum \vec{F}_v \quad (15.9)$$

Бу векторли тенглама кучлар системаси таъсиридаги нуқта учун динамиканинг асосий тенгламасини ифодалайди. (15.9) ни (15.5) кўринишда ёзиш учун нуқтага таъсир этувчи $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучларни уларнинг геометрик йиғиндисига (яъни бош векторига) тенг бўлган \vec{F} тенг таъсир этувчи куч билан алмаштириш керак.

$$m\vec{\omega} = \vec{F} \quad (15.10)$$

($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) кучлар таъсиридан M нуқтанинг олган тезланиши $\vec{\omega}$ кучларнинг тенг таъсир этувчиси \vec{F} бўйлаб йўналади (15.3-рasm).



15.3- рasm.

16-боб. ЭРКИН МОДДИЙ НУҚТА ҲАРАКАТИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ ВА ДИНАМИКАНИНГ ИККИ АСОСИЙ МАСАЛАСИ

16.1-§. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Массаси m га тенг бўлган M эркин моддий нуқта $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсирида $Oxyz$ инерциал тўғри бурчакли Декарт координата ўқлари системасига нисбатан ҳаракатлансин. Юқорида кўрганмиздек [(15.9) ёки (15.10)] бу нуқта учун динамиканинг асосий тенгламаси

$$m\vec{\omega} = \sum \vec{F}_v$$

ёки

$$m\vec{\omega} = \vec{F}$$

кўринишда ёзилади. Бунда \vec{F} — нуқтага қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси, $\vec{\omega}$ — нуқтаниннг \vec{F} куч таъсир чизиғи бўйлаб йўналган тезланиши (16.1-расм).

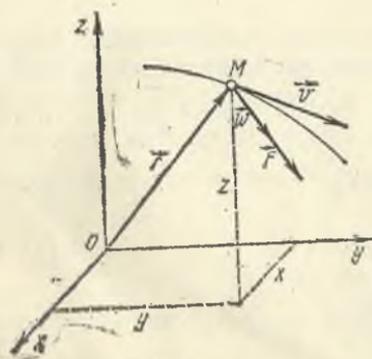
Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини турли формада ифодалаш мумкин. Шулардан айримларини келтирамыз.

1. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг вектор формадаги дифференциал тенгламаси. Нуқтаниннг тезланиш вектори $\vec{\omega}$ тезлик вектори \vec{v} дан вақт бўйича олинган биринчи ҳосиллага ёки нуқтаниннг радиус-вектори \vec{r} дан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосиллага тенг бўлгани учун охириги тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (16.1)$$

ёки

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (16.2)$$



16.1-расм.

(16.1) ёки (16.2) тенгламалар эркин моддий нуқта ҳаракатининг вектор формадаги дифференциал тенгламаси дейилади.

2. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг Декарт координата ўқларидаги дифференциал тенгламалари. (16.2) ни $Oxyz$ инерциал координата системаси ўқларига проекциялаб, ушбу тенгламаларни оламыз:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

ёки

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (16.3)$$

Бунда x, y, z ҳаракатланаётган M нуқтанинг координаталари;

$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$, $\frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$ — нуқта тезланиши \vec{w} нинг координата ўқла-

ридаги проекциялари; F_x, F_y, F_z тенг таъсир этувчи куч \vec{F} нинг проекциялари. Агар \vec{F}_v ($v = 1, 2, \dots, n$) кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларини X_v, Y_v, Z_v билан белгиласак, тенг таъсир этувчининг координата ўқларидаги проекциялари учун

$$F_x = \sum X_v, \quad F_y = \sum Y_v, \quad F_z = \sum Z_v$$

муносабатлар ўринли бўлади. Шу сабабли (16.3) ни

$$m\ddot{x} = \sum X_v, \quad m\ddot{y} = \sum Y_v, \quad m\ddot{z} = \sum Z_v \quad (16.4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(16.3) ёки (16.4) тенгламалар эркин моддий нуқта ҳаракатининг Декарт координата ўқларидаги дифференциал тенгламаларини ифодалайди.

Юқорида кўрганимиздек (15.1-§), умумий ҳолда нуқтага таъсир этувчи кучлар вақт t га, ҳаракатланувчи нуқтанинг координаталари x, y, z га ва нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекциялари $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ га боғлиқ бўлади. Шу сабабли умумий ҳолда (16.3) ни

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \quad (16.5)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

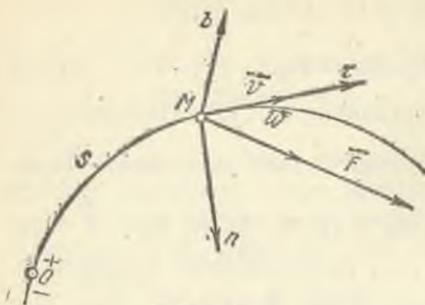
Агар моддий нуқта *Оху* текислигида ҳаракатланса, (16.3) нинг биринчи иккитаси ўринли бўлади:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y. \quad (16.6)$$

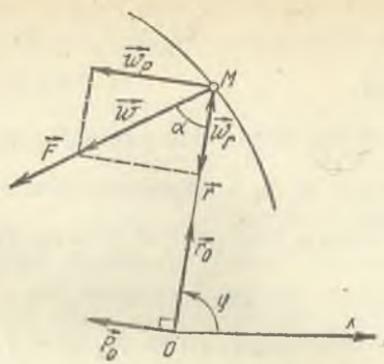
Агар нуқта тўғри чизиqli ҳаракатда бўлса, *Ох* ўқни ҳаракат траекторияси бўйлаб йўналтирамиз. Бу ҳолда нуқтанинг ҳаракати (16.3) нинг биринчи тенгламаси билан ифодаланади:

$$m\ddot{x} = F_x. \quad (16.7)$$

Бу тенгламага нуқта тўғри чизиqli ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади.



16.2- расм.



16.3- расм.

3. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг табиий координата ўқларидagi дифференциал тенгламалари. Агар M нуқтанинг ҳаракат траекторияси берилган бўлса, нуқтадан $M\tau$ — уринма, Mn — бош нормаль ва Mb бинормаллардан ташкил топган табиий координата ўқларини (8.5-§) ўтказамиз (16.2-расм). Кинематикадан маълумки [(8.51), (8.51, а) га асосан]:

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0,$$

бунда v_τ тезликнинг алгебраик қиймати (тезлик векторининг уринмадаги проекцияси), s — нуқтанинг ёй координатаси, ρ — траекториянинг M нуқтадаги эгрилик радиусидан иборат. Тенг таъсир этувчининг уринма, бош нормаль ва бинормалдаги проекцияларини мос равишда F_τ , F_n , F_b билан белгилаб, эркин моддий нуқта ҳаракатининг табиий координата ўқларидagi дифференциал тенгламаларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{s} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b. \quad (16.8)$$

(16.8) тенгламаларга эркин моддий нуқта ҳаракатининг табиий координата ўқларидagi динамик тенгламалари дейилади. Бу тенгламалар илк бор Л. Эйлер томонидан чиқарилган.

(16.8) нинг охириги тенгласидан кўрамизки, эркин нуқтага қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси \vec{F} (худди тезланиш вектори \vec{w} каби) M нуқтада траекторияга ўтказилган эгрилик текислигида ётади.

4. Эркин моддий нуқта ҳаракатининг қутб координаталаридagi дифференциал тенгламалари. Агар моддий нуқта $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар таъсирида бир текисликда ҳаракатланса, у ҳолда қутб координаталар системасини ўтказиб, (15.10) ни қутб радиуси ва унга перпендикуляр йўналишга проекциялаймиз (16.3-расм). Тенг таъсир

этувчи куч \vec{F} нинг бу ўқлардаги проекцияларини F_r , F_p билан белгиласак,

$$m\omega_r = F_r, \quad m\omega_p = F_p \quad (16.9)$$

ҳосил бўлади.

Бунда $\omega = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $\omega_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r}$ мос равишда радиал ва кўндаланг тезланишларни ифодалайди. Шундай қилиб, (16.9) ни қуйидагича ёзамиз:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r}) = F_p$$

ёки $r\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi})$ эканлигини эътиборга олсак,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = F_p. \quad (16.10)$$

(16.10) тенгламалар бир текисликда ҳаракатланувчи эркин моддий нуқта ҳаракатининг қутб координаталар системасидаги ҳаракат дифференциал тенгламаларини ифодалайди. Уларга эркин моддий нуқта ҳаракатининг қутб координаталаридаги динамик тенгламалари дейилади.

Динамикада ҳам боғланишдаги нуқтанинг ҳаракатини ўрганиш учун боғланишдан бўшатиш аксиомасидан фойдаланамиз, яъни нуқтани берилган кучлар ва боғланиш реакция кучлари таъсиридаги «эркин» нуқта деб қараймиз. Шу сабабли боғланишдаги нуқта учун чиқарилган динамик тенгламаларда боғланиш реакция кучлари ҳам қатнашади*.

16.2-§. Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласи (тўғри масала)

Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласи, нуқтанинг массаси ва кинематик ҳаракат тенгламалари берилганда шу ҳаракатни вужудга келтирувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлашдан иборат. Бу масалага нуқта динамикасининг тўғри масаласи дейилади.

Кучларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлаш учун моддий нуқтанинг кинематик ҳаракат тенгламалари қандай усулда берилишига қараб, нуқтанинг векторли, Декарт координата ўқларидаги, табний координата ўқларидаги ёки эгри чизикли координаталардаги динамик тенгламаларидан фойдаланамиз. Барча ҳолларда ҳам масалани ечиш нуқтанинг кинематик тенгламаларидан тезланишни аниқлашга келтирилади.

1. Агар массаси m га тенг моддий нуқтанинг ҳаракати

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

* Боғланишдаги нуқтанинг динамик тенгламалари 18-бобда батафсил ёритилган.

вектор усулида берилса, нуқтанинг радиус-векторидан вақт бўйича икки марта ҳосила олиб, нуқтанинг тезланишини, сўнгра (16.2) га асосан тенг таъсир этувчи кучни топамиз:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (16.11)$$

2. Агар массаси m га тенг моддий нуқта кинематик ҳаракат тенгламаларининг Декарт координата ўқларидаги ифодалари

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

маълум бўлса, улардан икки марта вақт бўйича ҳосила олиб, тезланишнинг координата ўқларидаги проекцияларини, сўнгра (16.3) га кўра тенг таъсир этувчи кучнинг проекцияларини аниқлаймиз:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}. \quad (16.12)$$

Натижада тенг таъсир этувчи кучнинг модулини

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (16.13)$$

йўналтирувчи косинусларини

$$\cos(\vec{F}, \hat{x}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\vec{F}, \hat{y}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\vec{F}, \hat{z}) = \frac{F_z}{F} \quad (16.14)$$

формулалар воситасида топамиз.

3. Агар массаси m га тенг моддий нуқтанинг ҳаракати табиий усулда берилса, у ҳолда тенг таъсир этувчи кучнинг табиий координата ўқларидаги проекцияларини (16.8) тенгламалардан аниқлаймиз. Тенг таъсир этувчи кучнинг модулини

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} \quad (16.15)$$

йўналишини

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{w_\tau}{w_n} \quad (16.16)$$

формулалар ёрдамида ҳисоблаймиз. Бунда μ орқали \vec{F} билан унинг нормал ташкил этувчиси \vec{F}_n орасидаги бурчак белгиланган.

4. Агар массаси m га тенг моддий нуқтанинг кинематик ҳаракат тенгламаси

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

қутб координаталарида берилган бўлса, (16.10) га асосан кучнинг берилган координата ўқларидаги проекцияларини, сўнгра тенг таъсир этувчи кучнинг модуль ва йўналишини

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\rho^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w_\rho}{w_r} \quad (16.17)$$

ифодалар орқали аниқлаймиз, бунда α билан \vec{w} ва \vec{w}_ρ лар орасидаги бурчак белгиланган.

Баъзида моддий нуқтага таъсир этувчи кучлардан бирортасини (масалан, номаълум реакция кучини) топиш талаб қилинадиган масалаларни ечишга тўғри келади. Масалан, массаси m га тенг нуқтага $\vec{F}(X, Y, Z)$ куч таъсир этади. Нуқтага \vec{F} куч билан биргаликда қандай $Q(Q_x, Q_y, Q_z)$ куч қўйилганда нуқта

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t) \quad (16.18)$$

қонун бўйича ҳаракат қилади?
(16.4) га асосан

$$m\ddot{x} = X + Q_x, \quad m\ddot{y} = Y + Q_y, \quad m\ddot{z} = Z + Q_z.$$

Бундан изланаётган кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$Q_x = m f_1''(t) - X, \quad Q_y = m f_2''(t) - Y, \quad Q_z = m f_3''(t) - Z.$$

16.3-§. Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласини ечишга доир масалалар

Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласи қуйидаги тартибда ечилади:

1. Моддий нуқтанинг ҳаракати қандай усулда берилишига қараб унга мос координаталар системасини танлаб оламиз.

2. Нуқтага таъсир этувчи берилган кучларни тасвирлаймиз. Агар нуқтага боғланишлар қўйилган бўлса, боғланишдан бўшатиш ҳақидаги аксиомани қўллаб, боғланиш реакция кучларини кўрсатамиз.

3. Берилган кинематик ҳаракат тенгламаларидан тезланишни ёки унинг танланган координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз.

4. Танланган координаталар системасига мос бўлган ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузамиз ва улардан изланаётган номаълум кучларни аниқлаймиз.

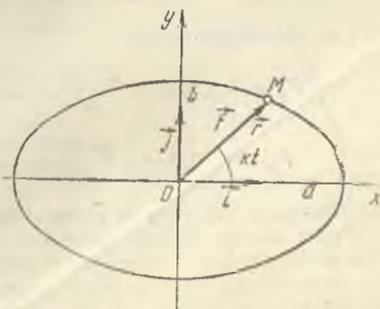
✓ 16.1- масала. Массаси m га тенг бўлган моддий нуқтанинг ҳаракати

$$\vec{r} = a \vec{i} \cos kt + b \vec{j} \sin kt \quad (1)$$

векторли тенглама билан берилган. Бунда a, b, k ўзгармас миқдорлар, \vec{i}, \vec{j} лар эса x ва y ўқларининг бирлик векторларини ифодалайди (16.4- расм). Нуқтага таъсир этувчи куч аниқлансин.

Ечиш. Координата ўқларини расмда кўрсатилганидек оламиз. (1) га кўра M нуқтанинг координаталари $x = a \cos kt$, $y = b \sin kt$ тенгламалар билан ифодалангани учун мазкур нуқта ярим ўқлари a ва b га тенг эллипс бўйлаб ҳаракатланади.

(1) дан вақт бўйича икки марта ҳосил оламиз:



16.4- расм.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -ak\vec{i} \sin kt + bk\vec{j} \cos kt,$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k^2(a\vec{i} \cos kt + b\vec{j} \sin kt). \quad (2)$$

(16.11) га асосан нуқтага таъсир этувчи куч

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mk^2(a\vec{i} \cos kt + b\vec{j} \sin kt)$$

ёки (1) ни эътиборга олсак,

$$\vec{F} = -mk^2\vec{r}$$

ифодадан топиллади.

Бинобарин, нуқтага доимо унинг радиус-вектори \vec{r} га тескари йўналган, яъни O марказга тортувчи куч таъсир этади. Бундай кучга *марказий куч* дейилади.

16.2-масала. Массаси 0,2 кг бўлган нуқтанинг ҳаракати

$$x = 3 \cos 2\pi t \text{ см}, \quad y = 4 \sin \pi t \text{ см} \quad (1)$$

тенгламалар билан ифодалананди; бу ерда t секундлар ҳисобида. Нуқтага таъсир этувчи кучнинг проекциялари унинг координаталари орқали ифодалансин.

Ечиш. Нуқтанинг кинематик ҳаракат тенгламалари Декарт координата ўқларида бе-

рилган. Координата ўқларини 16.5-расмдагидек йўналтирамиз.

(1) дан вақт бўйича икки марта ҳосила оламиз:

$$\dot{x} = -6\pi \sin 2\pi t, \quad \dot{y} = 4\pi \cos \pi t,$$

$$\ddot{x} = -12\pi^2 \cos 2\pi t, \quad \ddot{y} = -4\pi^2 \sin \pi t.$$

(16.12) га асосан \vec{F} кучининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз.

$$F_x = m \ddot{x} = -2,4\pi^2 \cos 2\pi t \frac{\text{кг см}}{\text{с}^2},$$

$$F_y = m \ddot{y} = -0,8\pi^2 \sin \pi t \frac{\text{кг см}}{\text{с}^2},$$

ёки (1) ни эътиборга олсак;

$$F_x = -0,8\pi^2 x \frac{\text{кг см}}{\text{с}^2} = -0,0789 x \frac{\text{кг м}}{\text{с}^2} = 0,0789 x \text{ Н.}$$

$$F_y = -0,2\pi^2 y \frac{\text{кг см}}{\text{с}^2} = -0,0197 y \frac{\text{кг м}}{\text{с}^2} = -0,0197 y \text{ Н.}$$

16.3-масала. Массаси m га тенг моддий нуқта қандай куч таъсирида радиуси r га тенг айлана бўйлаб ўзгармас тезлик билан ҳаракатланади?

Ечиш. Нуқтанинг траекторияси берилгани туфайли унинг ҳаракатини табиий усулда аниқлаймиз. Бунинг учун уринма, бош нормаль ва бинормални 16.6-расмда кўрсатилгандек ўтказамиз; бош нормални айлананинг радиуси бўйича унинг марказига, бинормални расм текислигига перпендикуляр равишда кузатувчи томонга йўналтирамиз.

Тезликнинг алгебраик қиймати ўзгармас бўлгани учун (16.8) да $\dot{s} = \frac{dv_\tau}{dt} = 0$ бўлишини эътиборга олсак, кучнинг табиий координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$F_\tau = 0, \quad F_n = \frac{mv^2}{\rho}, \quad F_b = 0.$$

Шундай қилиб, нуқтанинг берилган ҳаракати миқдор жиҳатдан ўзгармас ва айланиш маркази O га йўналган $\vec{F} = \vec{F}_n$ куч таъсирида содир бўлади.

16.4-масала. Уzunлиги l га тенг чўзилмай-диган ипга боғланган ва оғирлиги P га тенг M моддий нуқта O нуқта атрофида

$$\varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

қонун бўйича кичик тебранма ҳаракат қилади (16.7-расм); бунда φ_0 — бошланғич оғиш бурчаги. M нуқта энг пастки ҳолатдан ўтганда ипнинг реакция кучи аниқлансин.

Ечиш. M нуқтанинг ҳаракатини

$$r = l = \text{const}, \quad \varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

қутб координаталарида берилган деб қараш мумкин. Қутб ўқларини расмда кўрсатилгандек йўналтирамиз.

Моддий нуқтага вертикал пастга йўналган оғирлик кучи \vec{P} қўйилган. M нуқта учун ип боғланиш вазифасини ўтайди. Боғланишдан бўшатиш аксиомасига асосан ипнинг нуқтага таъсирини таранглик кучи \vec{T} билан алмаштирамиз.

M нуқта энг пастки ҳолатдан ўтган пайтда \vec{P} ва \vec{T} бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналади. Шу ҳолат учун (16.10) нинг биринчи тенгламасини тузамиз:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = P - T,$$

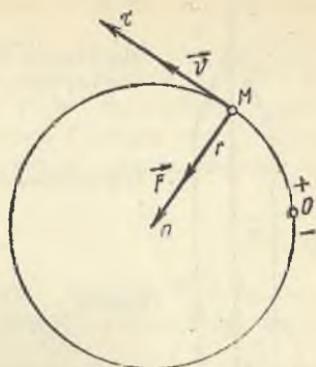
бунда $r = l$, $\ddot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{l}} \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t$ ҳамда нуқтанинг кўрилатган ҳо-

лати учун $\cos \sqrt{\frac{g}{l}} t = 1$ бўлгани сабабли

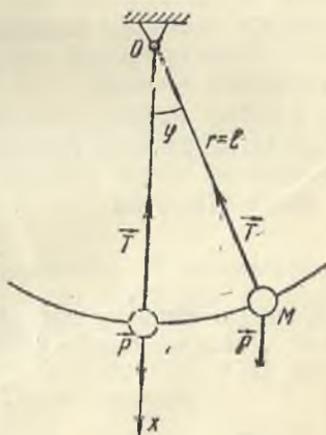
$$T = P + mg\varphi_0^2 = P(1 + \varphi_0^2).$$

16.5-масала. Ракета вертикал юқорига учирилганда миқдори $\omega = 8g$ га тенг тезланишга эга бўлади; бунда $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ эркин тушиш тезланиши. Оғирлиги $P = 600 \text{ Н}$ бўлган космонавтнинг ракета кабинаси тубига кўрсатадиган босим кучи аниқлансин (16.8-расм).

Ечиш. x ўқи вертикал юқорига йўналтириб, ракетанинг x ўқи бўйича тўғри чизиқли ҳаракатини текширамиз. Космонавтни схематик тарзда оғирлиги P га тенг моддий нуқта деб қараймиз. Космонавт учун кабина туби боғланиш вазифасини ўтайди. Боғланишдан бўшатиш аксиомасидан фойдаланиб, боғланиш реакцияси \vec{N} ни вертикал юқорига йўналтирамиз. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини (16.7) кўринишда тузамиз:



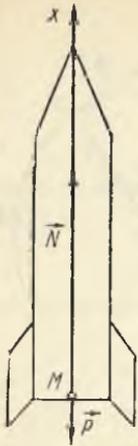
16.6-расм.



16.7-расм.

✓

$$m \ddot{x} = F_x = \sum X_v. \quad (1)$$



Масаланинг шартига кўра тезланиш $\ddot{x} = \omega = 8 g$ бўлиб, вертикал юқорига йўналади ҳамда

$$\sum X_v = N - P.$$

Шу сабабли (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{P}{g} \cdot 8 g = N - P,$$

бундан

$$N = 9 P = 5400 \text{ Н.}$$

Космонавтнинг кабина тубига босим кучи миқдор жиҳатдан N га тенг бўлади ва вертикал пастга йўналади. Шундай қилиб, р-кета старт ҳолатидан учирилганда космонавтнинг кабина тубига кўрсатадиган босим кучи унинг оғирлигига нисбатан 9 бара-
вар катта бўлар экан.

16.8- расм.

16.4-§. Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи (тескари масала)

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи, нуқта-нинг массаси ва унга таъсир этувчи кучлар берилганда нуқтанинг кинематик тенгламаларини аниқлашдан иборат. Бу масала *нуқта динамикасининг тескари масаласи* дейилади.

Иккинчи асосий масалани ечиш учун (16.2), (16.3), (16.8) ёки (16.10) кўринишдаги иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни интеграллаш керак. Нуқтага таъсир этувчи кучлар умумий ҳолда вақт, нуқтанинг ҳолати ва тезлигига боглиқ бўлгани учун бу дифференциал тенгламаларни умумий ҳолда интеграллаш мумкин эмас. Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи айрим хусусий ҳоллардагина аниқ ечимга эга. Шу сабабли техникада учрайдиган мураккаб масалалар интеграллашнинг сонли усули воситасида электрон ҳисоблаш машиналарини қўллаб тақрибан ечилади. Нуқтанинг ҳаракати қандай усулда аниқланишига қараб, иккинчи масала қуйидагича ечилади:

1. Агар нуқтага таъсир этувчи кучларнинг теги таъсир этувчи вақт, нуқтанинг радиус-вектори ва радиус-вектордан вақт бўйича олинган ҳосила (тезлик) нинг функцияси сифатида маълум бўлса, у ҳолда (16.2) ни

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (16.19)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу векторли иккинчи тартибли дифференциал тенгламани интеграллаб, унинг умумий ечимини топамиз:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2), \quad (16.20)$$

бунда \vec{C}_1 ва \vec{C}_2 билан векторли интеграллаш доимийлари кўрсатил-

ган. (16.20) дан кўраимизки, \vec{F} куч таъсирида нуқта сон-саноксиз қонунлар бўйича ҳаракатланиши мумкин, чунки ҳар гал \vec{C}_1 ва \vec{C}_2 ни ўзгартириб, янги ҳаракат қонунни оламиз. Шу сабабли (16.19) ни интеграллаш учун конкрет динамик масала учун бошланғич шартлар деб аталадиган қўшимча шартлар берилган бўлиши керак. Вақтнинг бошланғич пайтида, яъни $t = t_0$ да нуқта радиус-вектори ва тезлиги қабул қиладиган

$$\vec{r} = \vec{r}_0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 \quad (16.21)$$

қийматларга векторли кўринишдаги бошланғич шартлар дейилади. Худди шунингдек, бошланғич шартларни Декарт координаталарида

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0. \quad (16.22)$$

ва табиий координаталарда

$$s = s_0, \quad \dot{s} = \dot{s}_0 \quad (16.23)$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

(16.20) дан вақт бўйича ҳосила олиб, интеграллаш доимийлари-га боғлиқ

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2) \quad (16.24)$$

нуқтанинг тезлигини оламиз.

Ҳаракатнинг бошланғич шартлари (16.21) ни (16.20) ва (16.24) га қўйиб, интеграллаш доимийлари \vec{C}_1 ва \vec{C}_2 аниқланадиган

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{r}(t_0, \vec{C}_1, \vec{C}_2), \\ \vec{v}_0 &= \vec{v}(t_0, \vec{C}_1, \vec{C}_2) \end{aligned} \right\}$$

иккита векторли тенгламани оламиз. Бу тенгламаларни ечиб, $t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0$ нинг функциясида иборат интеграллаш доимийларини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \vec{C}_1 &= \vec{C}_1(t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0), \\ \vec{C}_2 &= \vec{C}_2(t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0). \end{aligned} \right\}$$

Буларни (16.19) тенгламанинг умумий интегралли (16.20) га қўйиб, (16.21) бошланғич шартларга мос бўлган хусусий интеграллини аниқлаймиз:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0).$$

Юқорида кўрганимиздек, нуқтанинг динамик тенгламаларини умумий ҳолда интеграллаш қийин. Лекин баъзи ҳолларда ҳаракатнинг умумий хусусиятларини характерлайдиган (16.19) дифференциал тенгламанинг биринчи интеграллини аниқлаш мумкин. $\vec{r}(t)$ нинг ҳар қандай қийматларида (16.19) ни қаноатлантирадиган

$$\Phi(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \vec{C}_1$$

муносабатга (16.19) дифференциал тенгламанинг биринчи интегралли дейилади.*

Агар (16.19) нинг бир-бирига боғлиқ бўлмаган иккита

$$\Phi_1(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \vec{C}_1,$$

$$\Phi_2(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \vec{C}_2$$

биринчи интеграллари маълум бўлса, бу векторли тенгламалардан $\dot{\vec{r}}$ тезликни йўқотиб,

$$Q(t, \vec{r}, \vec{C}_1, \vec{C}_2) = 0$$

муносабатни оламиз. Бундан нуқтанинг радиус-векторини аниқлаш мумкин:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, C_1, C_2).$$

Шундай қилиб, (16.19) нинг иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган биринчи интеграллари маълум бўлса, (16.19) нинг умумий интеграллини оддий алгебраик амаллар ёрдамида топиш мумкин.

Агар нуқтага боғланишлар қўйилган бўлса, (16.19) тенгламадаги кучларнинг тенг таъсир этувчиси \vec{F} нинг таркибига номаълум боғланиш реакция кучлари ҳам киради. Бу номаълумларни динамик тенгламалардан йўқотиш усули аналитик механика бўлимида кўрилади. Лекин баъзи содда ҳолларда мос координата ўқларини танлаб олиб, боғланиш реакция кучини скаляр кўринишдаги айрим тенгламалардан йўқотиш мумкин.

2. Агар \vec{F} тенг таъсир этувчи кучнинг координата ўқларидаги проекциялари F_x, F_y, F_z лар маълум бўлса, (16.5) кўринишдаги учта иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни интеграллаб, олти интеграллаш доимийлари $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ га боғлиқ,

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned} \right\} \quad (16.25)$$

кўринишдаги умумий ечимини топамиз.

Конкрет динамик масалани ечиш учун (16.25) га қўшимча равишда (16.22) кўринишдаги бошланғич шартлар берилиши керак.

(16.25) дан вақт бўйича ҳосила олсак, 6 та интеграллаш доимийларига боғлиқ қуйидаги учта функция ҳосил бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \right\} \quad (16.26)$$

*Айрим ҳолларда динамик тенгламаларнинг биринчи интеграллини топиш ҳақида 21-бобда алоҳида тўхтаб ўтилган.

(16.22) бошланғич шартларни (16.25) ва (16.26) га қўйиб, 6 та интеграллаш доимийлари қатнашадиган 6 та тенгламалар системасини оламиз. Бу тенгламалар системасини биргаликда ечиб, 6 та интеграллаш доимийларини аниқлаймиз:

$$C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \quad (i = 1, 6). \quad (16.27)$$

Интеграллаш доимийларининг топилган бу қийматларини (16.25) га қўйиб, (16.22) бошланғич шартларга мос бўлган нуқтанинг Декарт координаталаридаги кинематик тенгламаларини оламиз:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

3. Агар нуқтага қўйилган тенг таъсир этувчи кучнинг табиий координата ўқларидаги проекциялари ва (16.23) кўринишидаги бошланғич шартлар берилган бўлса, нуқта динамикасининг тескари масаласини ечиш учун (16.8) тенгламалардан фойдаланиш керак. (16.8) даги биринчи тенгламанинг умумий ечимини

$$s = s(t, C_1, C_2) \quad (16.27)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан вақт бўйича ҳосила олсак, интеграллаш доимийлари C_1 ва C_2 га боғлиқ

$$\dot{s} = \dot{s}(t, C_1, C_2) \quad (16.28)$$

нуқтанинг тезлигини аниқлаймиз. (16.27) ва (16.28) га ҳаракатнинг бошланғич шартлари (16.23) ни қўйиб, C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= C_1(t_0, s_0, \dot{s}_0), \\ C_2 &= C_2(t_0, s_0, \dot{s}_0). \end{aligned} \right\} \quad (16.29)$$

(16.29) ни (16.27) га қўйиб, нуқтанинг ёй координатасини вақтнинг функцияси сифатида ифодалаймиз:

$$s = s(t)$$

$v^2 = \dot{s}^2$ бўлишини назарда тутиб, ёй координатасининг бу қийматини (16.8) нинг иккинчисига қўйиш натижасида ҳаракатланувчи нуқта траекториясининг эгрилик радиуси ρ ни вақтнинг функцияси сифатида аниқлаш мумкин.

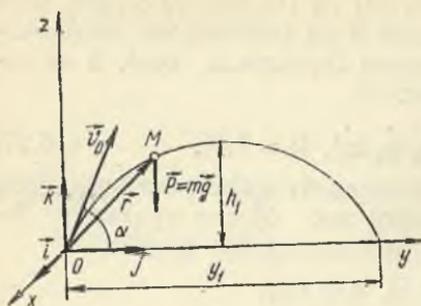
16.5-§. Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласини ечишга доир масалалар

Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи қуйидаги тартибда ечилади:

1. Моддий нуқтанинг ҳаракатини аниқлаш усулини танлаб, унга мос координаталар системасини ўтказамиз.

2. Нуқтага таъсир этувчи берилган кучлар ва боғланиш реакция кучларини тасвирлаймиз.

3. Динамик тенгламаларни тузамиз ва уларни интеграллаймиз.



16.9- расм.

4. Ҳаракатнинг бошланғич шартларини аниқлаймиз ва бу шартлардан фойдаланиб интеграллаш доимийларини топамиз.

5. Интеграллаш доимийларининг топилган қийматларини ўрнига қўйиб, моддий нуқтанинг кинематик тенгламаларини оламиз ва бу тенгламалардан изланаётган номаълумларни аниқлаймиз.

Эркин моддий нуқтанинг ҳаракати текшириляётганда Декарт

координаталаридан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Боғланишдаги нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракатини ўрганишда нуқтанинг ҳаракат траекторияси маълум бўлса, табиий координата ўқларида фойдаланиш мумкин.

Агар нуқта марказий куч таъсирида ҳаракатланса, қутб координаталаридан фойдаланиш тавсия этилади.

✓ 16.6-масала. Горизонтга α бурчак остида \vec{v}_0 бошланғич тезлик билан отилган, фақат $\vec{P} = m\vec{g}$ оғирлик кучи таъсирида бўлган моддий нуқтанинг ҳавосиз бўшлиқдаги ҳаракати аниқлансин.

Ечиш. Моддий нуқтанинг ҳаракатини вектор усулида аниқлаймиз. Координаталар боши O ни нуқтанинг бошланғич ҳолатида олиб, z ўқни вертикал юқорига йўналтирамиз; бошланғич тезлик \vec{v}_0 yOz текислигида ётади деб ҳисоблаймиз (16.9- расм).

Нуқтага фақат $\vec{P} = m\vec{g}$ ўзгармас оғирлик кучи таъсир этганидан моддий нуқтанинг динамик тенгласи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$$

ёки

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}.$$

\vec{g} миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлгани учун

$$\int d\vec{v} = \vec{g} \int dt$$

бўлади. Бинобарин, нуқтанинг тезлиги

$$\vec{v} = \vec{g}t + C_1, \quad (1)$$

(1) да $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{g}t dt + C_1 dt,$$

сўнги тенгламани интегралласак,

$$\vec{r} = \frac{g t^2}{2} + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2 \quad (2)$$

ҳосил бўлади.

Ҳаракатнинг бошланғич шарҳларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$t_0 = 0 \text{ да } \vec{r}_0 = 0, \vec{v}_0 = \vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha) \vec{j} + (v_0 \sin \alpha) \vec{k}, \quad (3)$$

(3) ни (1) ва (2) ларга қўйиб \vec{C}_1 ва \vec{C}_2 ларни аниқлаймиз:

$$\vec{C}_1 = (v_0 \cos \alpha) \vec{j} + (v_0 \sin \alpha) \vec{k}, \vec{C}_2 = 0. \quad (4)$$

(4) ни (2) га қўйиб, нуқтанинг векторли кинематик тенгламасини аниқлаймиз:

$$\vec{r} = \frac{g t^2}{2} + [(v_0 \cos \alpha) \vec{j} + (v_0 \sin \alpha) \vec{k}] t. \quad (5)$$

Нуқтанинг траекториясини аниқлаш учун (5) да $\vec{g} = -g \vec{k}$ эканлигини назарда тутиб, уни координата ўқларига проекциялаймиз:

$$x = 0, y = v_0 t \cos \alpha, z = -\frac{g t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha. \quad (6)$$

(6) дан вақт t ни йўқотиб, нуқтанинг траекториясини аниқлаймиз:

$$z = y \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} y^2. \quad (7)$$

Шундай қилиб, нуқтанинг траекторияси yOz текислигида ётувчи, координаталар бошидан ўтувчи ва қавариклиги юқорига қараган параболадан иборат.

Олинган тенгламалардан фойдаланиб, нуқтанинг қандай y_1 масофага бориб тушиши ва қандай h_1 баландликка кўтарилиши, шунингдек, бу масофа ва баландлик қандай ҳолда максимал қийматга эришишини аниқлаш мумкин.

y_1 ни аниқлаш учун (7) да $z = 0$ деб оламиз. У ҳолда

$$y_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (8)$$

(8) дан кўрамизки, моддий нуқтага муҳитнинг қаршилик кучи таъсир этмаса, y_1 максимал қийматга эришиши учун $\sin 2\alpha = 1$, яъни $\alpha = 45^\circ$ бўлиши керак. Шундай қилиб,

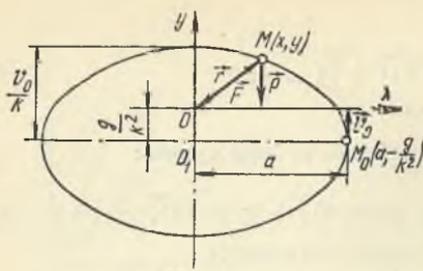
$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Нуқта кўтариладиган энг юқори h_1 баландлик параболанинг учида бўлади.

Бу нуқтада $z = h_1$, $y = \frac{y_1}{2}$ бўлгани учун

$$h_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (9)$$

(9) дан кўрамизки, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлганда, яъни моддий нуқта вертикал юқорига отилганда у максимал баландликка кўтарилди ҳамда



16.10-расм.

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

бўлади.

Моддий нуқта максимал узоқлик y_{\max} га тушганда унга мос кўтарилиш баландлиги максимал узоқлик y_{\max} нинг тўртдан бирига тенг бўлади, яъни:

$$h_{\alpha = 45^\circ} = \frac{v_0^2}{4g}$$

16.7-масала. Массаси m га тенг M моддий нуқта вертикал тикисликда шу нуқтадан қўзғалмас O марказгача бўлган масофага пропорционал $\vec{F} = -k^2 m \vec{r}$ марказий куч таъсирида ҳаракатланади, бунда \vec{r} — ҳаракатланувчи нуқтанинг радиус-вектори, k^2 — ўзгармас коэффициент. Агар бошланғич пайтда нуқта $M_0(a, -\frac{b}{k^2})$ ҳолатда вертикал юқорига йўналган бошланғич тезликка эга бўлса, нуқтанинг траекторияси аниқлансин (16.10-расм.)

Ечиш. M моддий нуқтанинг ҳаракатини Декарт координаталар системасига нисбатан текшираимиз. Координаталар бошини қўзғалмас O марказда оламиз ва x, y ўқларини 16.10-расмдагидек йўналтираимиз.

Нуқтага таъсир этувчи оғирлик кучи \vec{P} ва O марказга йўналган тортилиш кучи \vec{F} ни расмда тасвирлаймиз.

Нуқтанинг динамик тенгламасини (16.2) кўринишида тузамиз:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{F}$$

ёки $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}, \vec{P} = m \vec{g}, \vec{F} = -k^2 m \vec{r}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g} - k^2 \vec{r}.$$

Бу векторли тенгламани x ва y ўқларига проекциялаб, нуқтанинг Декарт координата ўқларидаги динамик тенгламаларини оламиз:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (1)$$

$$\ddot{y} + k^2 y = -g. \quad (2)$$

(1) тенглама иккинчи тартибли бир жинсли тенгламадир. Уни интеграллаш учун характеристик тенглама тузамиз: $\lambda^2 + k^2 = 0$; бундан $\lambda_{1,2} = \pm ki$. Бинобарин, (1) тенгламанинг умумий ечимини

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларидир.

(2) тенглама (1) дан фарқли ўлароқ бир жинсли бўлмаган тенгламадир. Шу сабабли унинг умумий ечимини

$$y = y_1 + y_2 \quad (4)$$

кўринишда оламиз, бунда y_2 — бир жинсли бўлмаган (2) тенгламанинг кусусий ечимидир; y_1 — эса

$$\ddot{y} + k^2 y = 0 \quad (5)$$

кўринишдаги бир жипсли тенгламанинг умумий ечимидир:

$$y_1 = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt, \quad (6)$$

(2) тенгламанинг ўнг томони ўзгармас миқдорга тенг бўлгани учун унинг хусусий ечимини $y_2 = A$ кўринишда ифодалаш мумкин; бунда A — ўзгармас катталиқ.

(2) тенгламада $y_2 = A$ алмаштириш киритсак,

$$y_2 = -\frac{g}{k^2} \quad (7)$$

бўлишини кўрамиз.

(6) ва (7) ни (4) га қўйиб, (2) тенгламанинг умумий ечими учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - \frac{g}{k^2}. \quad (8)$$

Масаланинг шартига кўра ҳаракатнинг бошланғич шартлари қуйидагича бўлади:

$$t_0 = 0 \text{ да } x_0 = a, y_0 = -\frac{g}{k^2}, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = v_0. \quad (9)$$

Интеграллаш доимийлари C_1, C_2, C_3, C_4 ларни аниқлаш учун (3) ва (8) дан ҳосила олиб,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt, \\ \dot{y} &= -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(9) ни (3), (8) ва (10) га қўямиз. Натижада

$$C_1 = a, C_2 = 0, C_3 = 0, C_4 = \frac{v_0}{k}. \quad (11)$$

(11) ни (3) ва (8) га қўйиб нуқтанинг Декарт координаталаридаги кинематик тенгламаларини оламиз.

$$\begin{aligned} x &= a \cos kt, \\ y &= \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{g}{k^2}. \end{aligned}$$

Бу тенгламалардан вақт t ни йўқотиб, нуқта траекториясининг тенгласини оламиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(y + \frac{g}{k^2}\right)^2}{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = 1. \quad (12)$$

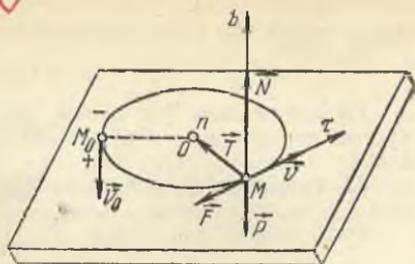
Шундай қилиб, нуқтанинг траекторияси маркази $O_1\left(0, -\frac{g}{k^2}\right)$ нуқтада ётувчи,

ярим ўқлари a ва $\frac{v_0}{k}$ га тенг эллипсдан иборат.

16.8-масала. Оғирлиги $P = 196$ Н бўлган M моддий нуқта горизонтал стол устида ётади. M нуқта узунлиги $l = 0,35$ м ип билан қўзғалмас O нуқтага боғланган. Таранг тортилган ипнинг йўналишига перпендикуляр йўналишда M нуқтага $v_0 = 4,9$ м/с бошланғич тезлик берилган, натижада M нуқта l радиусли ай-

лана ёйи бўйлаб ҳаракатланади (16.11-расм). Агар нуқтанинг столга ишқаланиш коэффициенти $f = 0,25$ га тенг бўлса, $t = 1$ с дан кейин нуқтанинг тезлиги ва ипнинг таранглик кучи аниқлансин.

Ечиш. M нуқтанинг траекторияси маълум бўлгани туфайли унинг ҳаракатини табиий усулда аниқлаймиз. M нуқтада а ланага ҳаракатнинг мусбат йўналиши бўйича $M\tau$ уринма, айлана радиуси бўйича O нуқтага йўналган Mn бош нормаль ҳамда стол текислигига перпендикуляр равишда юқорига йўналган Mb бинормалларни ўтказамиз:



16.11- расм.

M нуқтага қўйилган вертикал пастга йўналган оғирлик кучи \vec{P} , ип бўйлаб O нуқтага йўналган ипнинг таранглик кучи \vec{T} , столга перпендикуляр равишда вертикал юқорига йўналган нормал реакция кучи \vec{N} ва ҳаракат тезлигига қарама-қарши йўналган ишқаланиш кучи \vec{F} (бунда $F = fN$) ларни расмда тасвирлаймиз.

M нуқта учун (16.8) кўринишдаги Эйлер тенгламаларини тузамиз:

$$m \frac{dv}{dt} = -fN, \quad (1)$$

$$m \frac{v^2}{l} = T, \quad (2)$$

$$O = N - P. \quad (3)$$

(3) дан $N = P = mg$ бўлгани учун (1) ни

$$m \frac{dv}{dt} = -fmg$$

ёки

$$\frac{dv}{dt} = -fg$$

кўринишда ёзамиз ва сўнги тенгламани интеграллаймиз:

$$v = -fgt + C.$$

Бошланғич пайт $t_0 = 0$ да $v = v_0$ бўлгани учун $C = v_0$ бўлади. Шундай қилиб, $v = v_0 - fgt$; $t = 1$ с бўлганда $v = 4,9 - 0,25 \cdot 9,8 = 2,45$ м/с.

(2) дан ипнинг таранглик кучини топамиз:

$$T = m \frac{v^2}{l} = \frac{P v^2}{g l} = \frac{196 \cdot (2,45)^2}{9,8 \cdot 0,35} = 342,14 \text{ Н.}$$

16.9-масала. Ер сиртидаги M нуқтадан Ернинг радиусига перпендикуляр равишда v_0 бошланғич тезлик билан ракета учирилган. Ернинг тортиш кучи ракетадан Ер маркази O гача бўлган масофа квадратага тескари пропорционал равишда ўзгаради. Ер сиртидаги эркин тушиш тезланиши $g = 9,81$ м/с, Ернинг радиуси $R = 6370$ км га тенг. Ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмай, ракетани моддий нуқта деб қараб, унинг ҳаракат тенгламаси аниқлансин (16.12-расм).

Ечиш. Ракетанинг бошланғич пайтдаги тезлиги v_0 билан Ернинг тортиш кучи \vec{F} бир текисликда ётгани туфайли ракетанинг ҳаракати доимо шу текисликда содир бўлади. Ракетанинг ҳаракатини қутб координаталарида аниқлаймиз. Бошлан-

✓
ғич пайтда қутб ұқини OM_0 бүйича йўналтира-
миз. Ракетанинг ихтибрий M ҳолати учун бу
ўқнинг бирлик векторлари \vec{r}^0 расмда тасвирлан-
ган.

Ракетага доимо Ернинг маркази O нуқтага
йўналган тортиш кучи \vec{F} таъсир этади, яъни раке-
та *марказий куч* таъсирида ҳаракатланади. Ма-
саланинг шартига кўра бу куч O марказдан ра-
кетагача бўлган масофага тескари пропорционал
равишда ўзгаради:

$$F = \frac{km}{r^2}, \quad (1)$$

бунда m — ракетанинг массаси, k — аниқланиши
лозим бўлган пропорционаллик коэффициенти.

Ернинг сиртида $r = r_0 = R$ ва $F = P = mg$
эканлигини эътиборга олиб, r ва F нинг бу қий-
матларини (1) га қўйсақ, $k = gR^2$ муносабат ўринли бўлишини кўра-
миз. На-
тижада (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F = \frac{mgR^2}{r^2}. \quad (2)$$

Моддий нуқтанинг қутб координаталаридаги динамик тенгламалари (16.10) ни
тузамиз:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = F_\varphi. \quad (3)$$

\vec{F} куч r ўқ бүйича \vec{r}^0 га қарама-қарши йўналгани учун $F_r = -F$, $F_\varphi = 0$.
(2) ни эътиборга олсак, $F_r = -\frac{mgR^2}{r^2}$. У ҳолда (3) ни

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{gR^2}{r^2}, \quad \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = 0 \quad (4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(4) нинг иккинчи тенгламасини интегралласак,

$$r^2 \dot{\varphi} = C_1. \quad (5)$$

C_1 ни аниқлаш учун ҳаракатнинг бошланғич шартларидан фойдаланамиз, яъни

$$t_0 = 0 \text{ да } r_0 = R, \quad \varphi_0 = 0 \quad (6)$$

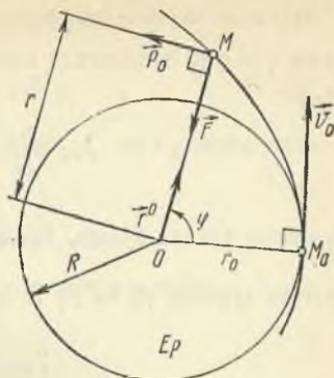
бўлганда ракета бошланғич пайтда M_0 ҳолатни эгаллайди; бундан ташқари бош-
ланғич пайтда \vec{v}_0 тезлик r_0 га перпендикуляр бўлгани учун

$$\dot{r}_0 = 0, \quad \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{R}. \quad (7)$$

(6) ва (7) ни эътиборга олиб, (5) дан C_1 ни аниқлаймиз: $C_1 = Rv_0$. Шундай
қилиб, (5) ни $r^2 \dot{\varphi} = Rv_0$ ёки

$$\dot{\varphi} = \frac{Rv_0}{r^2} \quad (8)$$

кўринишда ёзиш мумкин. ✓



16.12- расм.

(4) нинг биринчи дифференциал тенгламасини интеграллаш учун $r = r(\varphi)$, бунда $\varphi = \varphi(t)$ эканлигини назарда тутсак, $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}$. У ҳолда (8) га кўра

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{Rv_0}{r^2} = -Rv_0 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (9)$$

муносабат ўринли бўлади. Бундан ташқарин, $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \dot{\varphi}$ бўлгани туфайли (8) ва (9) га асосан \ddot{r} учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\ddot{r} = -\frac{R^2 v_0^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (10)$$

\ddot{r} ва $\dot{\varphi}$ ларнинг қийматини (10) ва (8) дан (4) нинг биринчисига қўйиб,

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{g}{v_0^2}$$

тенгламани ёки u белгилаш киритиб,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{g}{v_0^2} \quad (11)$$

тенгламани оламиз.

(11) ни интеграллаб, ракетанинг изланаётган ҳаракат траекториясини аниқ-лашмиз. Бу дифференциал тенгламанинг умумий ечимини

$$u = u_1 + u_2 \quad (12)$$

кўринишда излаймиз. Бунда u_1

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 0 \quad (13)$$

кўринишдаги бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини, u_2 эса бир жинсли бўлмаган (11) тенгламанинг хусусий ечимини ифодалайди. (13) нинг характеристик тенгламаси $\lambda^2 + 1 = 0$ кўринишда ёзилади, бундан $\lambda = \pm i$. Бинобарин,

$$u_1 = C_2 \cos \varphi + C_3 \sin \varphi,$$

(11) нинг хусусий ечимини

$$u_2 = \frac{g}{v_0^2}$$

кўринишда оламиз. Шундай қилиб,

$$u = C_2 \cos \varphi + C_3 \sin \varphi + \frac{g}{v_0^2}$$

ёки $u = \frac{1}{r}$ бўлгани учун

$$\frac{1}{r} = C_2 \cos \varphi + C_3 \sin \varphi + \frac{g}{v_0^2} \quad (14)$$

ечимга эга бўламиз.

C_2 ва C_3 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун (14) дан вақт бўйича ҳосил оламиз:

$$-\frac{1}{r^2} \dot{r} = -C_2 \dot{\varphi} \sin \varphi + C_3 \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (15)$$

(6), (7) бошланғич шартларни (14) ва (15) га қўйиб, C_2 ва C_3 ларни топамиз:

$$C_2 = \frac{v_0^2 - gR}{Rv_0^2}, \quad C_3 = 0.$$

C_2 ва C_3 ларнинг қийматларини (14) га қўйиб, уни r га нисбатан ечсак,

$$r = \frac{\rho}{1 + e \cos \varphi} \quad (16)$$

ҳосил бўлади, бунда $\rho = \frac{v_0^2}{g}$ эгри чизиқнинг параметрини,

$$e = \frac{v_0^2 - gR}{gR} \quad (17)$$

еса унинг эксцентриситетини ифодалайди.

Аналитик геометриядан маълумки, (16) тенглама иккинчи тартибли чизиқларнинг қутб координаталаридаги тенгламасини ифодалайди. Бу иккинчи тартибли чизиқ: а) $e = 0$ бўлса, айлана; б) $e < 1$ бўлса, эллипс; в) $e = 1$ бўлса, парабола; г) $e > 1$ бўлса, гиперболадан иборат бўлади. Бу ҳолларни алоҳида кўрамиз:

а) ракета айлана бўйлаб ҳаракатланса, $e = 0$ бўлиб, (17) га асосан

$$v_0 = \sqrt{gR} \quad (18)$$

тенглик ўринлидир.

Бунда $g = 9,81$ м/с², $R = 6370$ км $\approx 6,37 \cdot 10^6$ м эканлигини эътиборга олсак,

$$v_0 = 7910 \text{ м/с} \approx 7,9 \text{ км/с}. \quad (19)$$

Бу тезлик *биринчи космик тезлик* дейилади.

б) ракета эллипс бўйлаб ҳаракатланса, $e < 1$ бўлиб, (17) дан $v_0 < \sqrt{2gR}$, яъни

$$v_0 = 11\,179 \text{ м/с} \approx 11,2 \text{ км/с}. \quad (20)$$

Бу тезлик *иккинчи космик тезлик* дейилади.

Айлана эллипснинг лимит ҳолати бўлгани туфайли, ракета эллипс бўйлаб ҳаракатланиши учун бошланғич тезлик v_0 қуйидаги тенгсизликни қаноатлантириши керак:

$$\sqrt{gR} \leq v_0 < \sqrt{2gR} \text{ ёки } 7,9 \text{ км/с} \leq v_0 < 11,2 \text{ км/с}. \quad (21)$$

в) ракета парабола бўйлаб ҳаракатланса, $e = 1$ бўлиб, (17) га асосан бошланғич тезлик учун

$$v_0 = \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ км/с} \quad (22)$$

миқдорни оламиз.

г) ракета гипербола бўйлаб ҳаракатланса, $e > 1$ бўлади ва (17) дан

$$v_0 > \sqrt{2gR} \text{ ёки } v_0 > 11,2 \text{ км/с} \quad (23)$$

эканлигини аниқлаймиз.

Шундай қилиб, ракетанинг бошланғич тезлиги $7,9 \text{ км/с} \leq v_0 < 11,2 \text{ км/с}$ шартни қаноатлантирса, ракета айлана ёки эллипс бўйича ҳаракатланади ҳамда Ернинг сунъий йўлдошига айланади. Агар $v_0 \geq 11,2 \text{ км/с}$ бўлса, ракета парабола ёки гипербола бўйича ҳаракатланиб Ердан узоқлаша боради. $v_0 < 7,9 \text{ км/с}$ бўлса, ракета Ерга қулаб тушади.

16.6-§. Моддий нуқтанинг содда ҳоллардаги тўғри чизиқли ҳаракат дифференциал тенгламаларини интеграллаш

Эркин моддий нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлиши учун унга таъсир этувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси ўзгармав йўналишга эга бўлиши ва бошланғич тезлик эса тенг таъсир этувчи куч бўйича йўналиши ёки нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Ҳақиқатан ҳам эркин моддий нуқтанинг ҳаракат траекторияси x ўқ билан устма-уст тушса, ҳаракат давомида $y = z = 0$ ва $\dot{y} = \dot{z} = 0$ бўлади, яъни нуқтанинг тезлиги x ўқ бўйича йўналади ёки нолга тенг бўлади. Бундан ташқари $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$ бўлгани учун нуқтанинг Декарт координата ўқларидаги динамик тенгламалари (16.3) га асосан

$$F_y = 0, F_z = 0 \quad (16.30)$$

шартлар айнан бажарилади, яъни тенг таъсир этувчи куч x ўқи бўйича йўналади. Шундай қилиб, юқоридаги шартларнинг бажарилиши зарур эканлиги исботланди.

Агар координаталар бошини нуқтанинг бошланғич ҳолатида олиб, x ўқни нуқтанинг бошланғич тезлиги бўйича йўналтирсак, у ҳолда (16.30) шартлар бажарилади, бинобарин,

$$m\ddot{y} = 0, m\ddot{z} = 0$$

бўлади. Бу тенгламаларни икки марта интегралласак,

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= C_1, \dot{z} = C_2, \\ y &= C_1 t + C_3, z = C_2 t + C_4. \end{aligned} \right\} \quad (16.31)$$

x ўқнинг танлаб олиншига кўра бошланғич шартлар қуйидагича бўлади:

$$t_0 = 0 \text{ да } y_0 = 0, z_0 = 0, \dot{y}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0.$$

Бу шартларни (16.31) га қўйиб, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ бўлишини кўрамиз. Натижада

$$y = 0, z \equiv 0$$

бўлади, яъни нуқтанинг траекторияси x ўқи бўйича содир бўлади. Шундай қилиб, ҳаракат тўғри чизиқли бўлишининг етарли шarti ҳам исботланди.

Ёзиш қисқа бўлиши учун тўғри чизиқли ҳаракатдаги нуқта тезлигининг проекциясини v_x деб ёзиш ўрнига индексини тушириб v деб ёзамиз, яъни v билан тезликнинг алгебраик қийматини белгилаймиз.

(16.7) га асосан нуқта тўғри чизиқли ҳаракатининг дифференциал тенгламасини

$$m\ddot{x} = X(x, v, t) \quad (16.32)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда X — тенг таъсир этувчи кучнинг алгебраик қиймати, $v = \frac{dx}{dt}$ эса тезликнинг алгебраик қийматини ифодалайди. (16.32) тенгламанинг умумий ечимида иккита интеграллаш доимийси қатнашади:

$$x = x(t, C_1, C_2). \quad (16.33)$$

Бундан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2) \quad (16.34)$$

Ҳаракатнинг бошланғич шартлари қуйидагича бўлсин:

$$t = 0 \text{ да } x = x_0, v = v_0. \quad (16.35)$$

(16.35) ни (16.33) ва (16.34) га қўйсақ, C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз.

(16.32) тенгламани интеграллаш мумкин бўлган айрим содда ҳолларни кўраимиз.

1. Моддий нуқтага миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлган \vec{F} куч таъсир этсин. Нуқтанинг бошланғич тезлиги \vec{F} кучнинг таъсир чизиғида ётсин. x ўқни \vec{F} кучнинг таъсир чизиғи бўйлаб йўналтирамиз. У ҳолда (16.32) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\ddot{x} = F, \quad (16.36)$$

бунда F билан кучнинг алгебраик қиймати кўрсатилган. (16.36) да $\ddot{x} = \frac{dx}{dt}$ эканлигини эътиборга олиб, ўзгарувчиларни ажратиш йўли билан интеграллаймиз:

$$dx = \frac{F}{m} dt, \quad (16.37)$$

$$\dot{x} = \frac{F}{m} t + C_1. \quad (16.38)$$

(16.38) ни ҳам ўзгарувчиларни ажратиш усули билан интеграллаймиз:

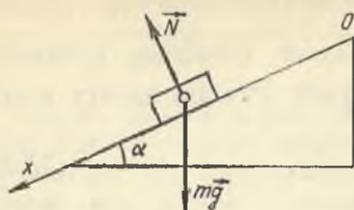
$$dx = \left(\frac{F}{m} t + C_1 \right) dt, \quad (16.39)$$

$$x = \frac{F}{m} t^2 + C_1 t + C_2. \quad (16.40)$$

(16.40) ифода (16.36) нинг умумий ечимидир.

Ҳаракатнинг бошланғич шартлари (16.35) кўринишда бўлсин. У ҳолда (16.35) ни (16.38) ва (16.40) га қўйиб интеграллаш доимийлари C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз: $C_1 = v_0$, $C_2 = x_0$. Бу қийматларни (16.38) га қўйиб, нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{F}{m} t^2. \quad (16.41)$$



16.13- расм.

(16.41) дан кўрамизки, нуқта ўзгармас куч таъсирида текис ўзгарувчан ҳаракатда бўлар экан. Бу натижани нуқта динамикасининг асосий тенгламаси (15.5) дан ҳам олиш мумкин: $\vec{F} = \text{const}$ бўлгани учун $\vec{w} = \text{const}$ бўлади.

Изоҳ. Ҳаракатнинг бошланғич шартларини назарда тутиб, (16.37) ва (16.39) дан аниқ интеграл олиш ҳам мумкин. Масалан, (16.37) ни (16.35) бошланғич шартларга кўра қуйидагича интеграллаш мумкин

$$\int_{v_0}^v dx = \frac{F}{m} \int_0^t t dt.$$

$$v = v_0 + \frac{F}{m} t.$$

Бунда $v = \frac{dx}{dt}$ эканлигини эътиборга олиб, ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dx = \left(v_0 + \frac{F}{m} t \right) dt.$$

Сўнгги тенгламани (16.35) бошланғич шартларда интегралласак,

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left(v_0 + \frac{F}{m} t \right) dt.$$

(16.41) тенгламани оламиз. Келгусида бу усулдан ҳам фойдаланамиз.

✓ 16.10- масала. Оғир жисм горизонтга $\alpha = 30^\circ$ бурчак остида оған силлиқ қия текислик бўйлаб пастга тушади. Агар жисмнинг тезлиги бошланғич пайтда 2 м/с га тенг бўлса, жисм 9,6 м йўлни қанча вақтда босиб ўтиши топилсин (16.13- расм).

Ечиш. Ох ўқни қия текислик бўйлаб йўналтирамиз. Жисмга вертикал пастга йўналган оғирлик кучи \vec{mg} ва қия текисликка перпендикуляр йўналган нормал реакция кучи \vec{N} таъсир этади. Оғирлик кучининг қия текисликка перпендикуляр йўналишдаги ташкил этувчиси нормал реакция кучи \vec{N} билан мувозанатлашади. (16.32) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha.$$

Ўзгарувчиларни ажратсак,

$$\dot{dx} = g \sin \alpha dt. \quad (1)$$

Ҳаракатнинг бошланғич шартлари қуйидагича берилган:

$$t_0 = 0 \text{ да } x = 0, \dot{x} = 2 \text{ м/с.} \quad (2)$$

(2) ни назарда тутиб, (1) ни интеграллаймиз:

$$\int_0^v dx = g \sin \alpha \int_0^t dt.$$

$$\dot{x} = 2 + gt \sin \alpha \text{ ёки } dx = (2 + gt \sin \alpha) dt.$$

Сўнги тенгламани берилган бошланғич шартларда интеграллаймиз:

$$\int_0^x dx = \int_0^t (2 + gt \sin \alpha) dt,$$

$$x = 2t + \frac{gt^2}{2} \sin \alpha.$$

Бунда $x = 9,6$ м, $g = 9,81$ м/с², $\alpha = 30^\circ$ эканлигини назарда тутиб, t ни аниқлаш учун қуйидаги тенгламани оламиз:

$$9,81 t^2 + 8t - 38,4 = 0.$$

$$t = \frac{-8 + \sqrt{64 - 4 \cdot 38,4 \cdot 9,81}}{2 \cdot 9,81} = 1,61 \text{ с.}$$

t ни аниқлашда квадрат илдиэ олдида манфий ишора олинмайди, чунки вақт мусбат қийматга эга.

2. Моддий нуқтага фақат вақтга боғлиқ куч таъсир этсин. ∇ ҳолда (16.32) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\ddot{m}x = X(t)$$

ёки тўғри чизиқли ҳаракатда $\dot{x} = v$, $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$ бўлгани учун

$$m \frac{dv}{dt} = X(t). \quad (16.42)$$

Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратсак,

$$mdv = X(t)dt. \quad (16.43)$$

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда нуқтанинг тезлиги v_0 га тенг бўлсин. (16.43) ни бу бошланғич шартларда интеграллаймиз:

$$mv - mv_0 = \int_0^t X(t)dt. \quad (16.44)$$

$X(t)$ маълум функция бўлгани учун охириги интегрални ҳисоблаб, вақтнинг функциясидан иборат бирор $f(t)$ функцияни оламиз, натижада (16.44) ни

$$mv - mv_0 = f(t) \quad (16.45)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (16.45) дан нуқтанинг тезлиги v ни аниқлаймиз:

$$v = v_0 + \frac{1}{m} f(t).$$

Бу тенгламада $v = \frac{dx}{dt}$ бўлгани учун

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} f(t)$$

ёки ўзгарувчиларни ажратсак,

$$dx = \left[v_0 + \frac{1}{m} f(t) \right] dt$$

ҳосил бўлади.

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда нуқтанинг абсциссаси x_0 га тенг дейлик. Бу бошланғич шартларда охириги тенгламани интеграллаймиз

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t f(t) dt$$

ёки

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t f(t) dt.$$

Бу тенглама вақтга боғлиқ функция тарзида берилган ўзгарувчан куч таъсиридаги нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат қонунини ифодалайди.

✓ 16.11- масала. Массаси m га тенг моддий нуқта $F = F_0 \cos \omega t$ (бу ерда F_0 ва ω — ўзгармас миқдорлар) қонунга мувофиқ ўзгарувчи куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Бошланғич пайтда жисмнинг тезлиги $\dot{x} = v_0$ бўлган. Нуқта ҳаракатининг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Бошланғич пайтдаги нуқтанинг ҳолатини координата боши учун қабул қилиб, x ўқни нуқтанинг ҳаракат траекторияси бўйича йўналтирамиз.

Нуқтага $F = F_0 \cos \omega t$ вақтнинг функциясида иборат куч таъсир этади. Нуқтанинг ҳаракат тенгламасини (16.42) кўринишда тузамиз:

$$m \frac{dv}{dt} = F_0 \cos \omega t$$

ўзгарувчиларни ажратиб,

$$m dv = F_0 \cos \omega t dt,$$

бошланғич $t = 0$ пайтда $x = v_0$ шартни эътиборга олган ҳолда бу тенгламани интеграллаймиз:

$$mv - mv_0 = \frac{F_0}{\omega} \sin \omega t$$

ёки

$$v = v_0 + \frac{F_0}{m \omega} \sin \omega t.$$

Бунда $v = \frac{dx}{dt}$ бўлгани учун

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{F_0}{m \omega} \sin \omega t$$

ёки ўзгарувчиларни ажратиб,

$$dx = \left(v_0 + \frac{F_0}{m \omega} \sin \omega t \right) dt$$

тенгламани оламиз.

$t_0 = 0$ пайтда $x_0 = 0$ бошланғич шартни эътиборга олиб, бу тенгламани интеграллаймиз:

$$x = v_0 t + \frac{F_0}{m \omega^2} - \frac{F_0}{m \omega^2} \cos \omega t.$$



Бу тенгламадан кўрамызки, нуқтанинг $F = F_0 \cos \omega t$ куч таъсиридаги тўғри чизиқли ҳаракатини $x_1 = v_0 t + \frac{F_0}{m \omega^2}$ қонун асосида содир бўладиган текис ҳаракат ва $x_2 = -\frac{F_0}{m \omega^2} \cos \omega t$ тебранма ҳаракатлардан ташкил топган деб қараш мумкин.

3. Моддий нуқтага фақат нуқтанинг ҳолатига боғлиқ куч таъсир этсин. У ҳолда (16.32) ни

$$m \frac{dv}{dt} = X(x) \quad (10.46)$$

ёки

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = X(x)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $\frac{dx}{dt} = v$ бўлгани учун

$$mv \frac{dv}{dx} = X(x). \quad (16.47)$$

Ўзгарувчиларни ажратсак,

$$mvdv = X(x) dx \quad (16.48)$$

тенглама ҳосил бўлади.

Нуқтанинг бошланғич $t_0 = 0$ пайтдаги абсциссаси x_0 , тезлиги v_0 га тенг бўлсин. Бу бошланғич шартларда (16.48) ни интеграллаймиз:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x X(x) dx. \quad (16.49)$$

(16.49) нинг ўнг томонидаги интегрални $f(x)$ билан белгилаймиз.

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = f(x).$$

Сўнги тенгламадан нуқтанинг тезлигини аниқлаймиз

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}$$

ёки $v = \frac{dx}{dt}$ бўлгани учун

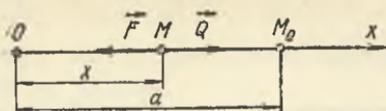
$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)},$$

ўзгарувчиларни ажратсак,

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}} = dt$$

бўлади.

* Илдиз олдидаги ишора нуқтанинг x ўқни мусбат ёки манфий йўналишида ҳаракатланишига қараб мос равишда танлаб олинади.



16.14- расм.

Нуқтанинг бошланғич $t_0 = 0$ пайтдаги абсциссаси x_0 га тенглигини эътиборга олиб, бу тенгламани интегралласак,

$$\pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}} = t$$

ҳосил бўлади.

Бу тенгламани чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, x ни вақтнинг функцияси сифатида аниқлаймиз.

✓ 16.12- масала. Массаси m га тенг нуқта $x_0 = a$ ҳолатдан бошланғич тезликсиз координаталар бошидан нуқтагача бўлган масофага пропорционал бўлган $F_x = -C_1 mx$ тортиш кучи ва масофа кубига пропорционал $Q_x = C_2 mx^3$ итариш кучи таъсирида тўғри чизикли ҳаракат қилади. C_1, C_2, a лар қандай мумосабатда бўлганда нуқта координата бошида тўхтайдми?

Ечиш. x ўқни нуқтанинг ҳаракат траекторияси бўйича йўналтирамиз. Нуқтанинг бошланғич ҳолатини расмда M_0 билан белгилаймиз (16.14- расм).

Нуқтанинг ихтиёрий ҳолатини M билан белгиласак, унга $F_x = -C_1 mx, Q_x = C_2 mx^3$ фақат нуқтанинг координаталарига боғлиқ кучлар таъсир этади.

Нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини (16.47) кўринишида тузамиз:

$$mv \frac{dv}{dx} = -C_1 mx + C_2 mx^3$$

ёки

$$v dv = (-C_1 x + C_2 x^3) dx.$$

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда $x_0 = a, v_0 = 0$ ҳамда координата бошида $x = 0, v = 0$ эканлигини эътиборга олиб, бу тенгламани интеграллаймиз:

$$\int_0^0 v dv = \int_a^0 (-C_1 x + C_2 x^3) dx$$

ёки

$$0 = \frac{C_1 a^2}{2} - \frac{C_2 a^4}{4}.$$

Бундан

$$C_1 = \frac{1}{2} C_2 a^2.$$

4. Моддий нуқтага таъсир этувчи куч фақат нуқтанинг тезлигига боғлиқ бўлсин. Бундай ҳоллар одатда қаршилик кучини ҳисобга олганда учрайди. $x = f(v)$ бўлган ҳолда нуқтанинг тўғри чизикли ҳаракат тенгламасини икки усулда интеграллаш мумкин:

1. Моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини

$$m \frac{dv}{dt} = f(v) \quad (16.50)$$

кўринишда олиб, ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{m dv}{f(v)} = dt.$$

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда $x = v_0$ эканлигини эътиборга олиб, бу тенгламани интеграллаймиз:

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = t. \quad (16.51)$$

(16.51) нинг чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, олинган ифода-ни v га нисбатан ечсак,

$$v = \frac{dx}{dt} = \varphi(t) \quad (16.52)$$

бўлади. Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда $x = x_0$ эканлигини эътиборга олган ҳолда бу тенгламани интеграллаб, нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз:

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi(t) dt.$$

II. Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$mv \frac{dv}{dx} = f(v).$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{mvdv}{f(v)} = dx.$$

Бу тенгламани юқоридаги бошланғич шартларда интегралласак,

$$\int_{v_0}^v \frac{mvdv}{f(v)} = x - x_0. \quad (16.53)$$

(16.53) нинг чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, олинган тенгламани v га нисбатан ечсак, тезликни масофанинг функцияси сифатида аниқлаймиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = \psi(x).$$

Бундан

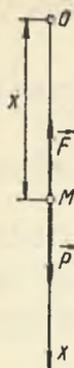
$$\frac{dx}{\psi(x)} = dt.$$

Бу тенгламани юқоридаги бошланғич шартларда интеграллаймиз:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\psi(x)} = t. \quad (16.54)$$

(16.54) нинг чап томонидаги интегрални ҳисоблаб, олинган тенгламани x га нисбатан ечсак, x ни вақтнинг функцияси сифатида ифода-далайт мумкин.

✓ 16.13-масала. Оғирлиги $P = mg$ бўлган моддий нуқта бошланғич тезликсиз вертикал бўйича пастга тушади: ҳавонинг қаршилиги нуқтанинг тезлигига пропорционал бўлиб, унга қарама-қарши йўналган, яъни $F_x = -k m v$; бунда k пропорционаллик коэффициенти, m — нуқтанинг массаси. Нуқтанинг тезлиги v ва ўтган йўли x вақтнинг функцияси сифатида аниқлансин.



Ечиш. Нуқтанинг бошланғич пайтдаги ҳолатини координаталар боши O учун қабул қилиб, x ўқни вертикал пастга йўналтирамиз (16.15-расм).

Нуқтага ўзгармас оғирлик кучи \vec{P} ва тезликка пропорционал $F_x = -k m v$ ҳавонинг қаршилик кучи таъсир этади.

Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини (16.50) кўринишида тузамиз:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kmv$$

ёки

$$\frac{dv}{dt} = g - kv.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз

16.15-расм.

$$\frac{dv}{g - kv} = dt. \quad (1)$$

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда $x_0 = 0$ эканлигини эътиборга олиб, (1) ни интеграллаймиз:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - kv} = t,$$

$$-\frac{1}{k} \ln \frac{g - kv}{g} = t.$$

Бу тенгламадан v ни аниқласак,

$$v = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (2)$$

ёки

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dx = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) dt. \quad (3)$$

Бошланғич $t_0 = 0$ пайтда $x_0 = 0$ эканлигини эътиборга олиб, (3) ни интегралласак,

$$x = \frac{g}{k} \left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} \right)$$

ҳосил бўлади.

(2) дан кўрамизки, $t \rightarrow \infty$ да нуқтанинг тезлиги ўзгармас қийматга эришади:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = -\frac{g}{k}.$$

17-боб. МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛИ ТЕБРАНМА ҲАРАКАТИ

17.1-§. Умумий мулоҳазалар

Бу бобда *моддий нуқтанинг* ҳаракат турларидан бири бўлган ва техникада алоҳида аҳамиятга эга бўлган *тебранма ҳаракат* устида тўхталамиз.

Тебранма ҳаракатлар турли табиатга эга бўлиши мумкин. Масалан, иншоотлар пойдеворининг тебраниши, машина ва механизм қисмларининг тебраниши, товуш тўлқинининг тарқалиши жараёнидаги тебранишлар механик ҳаракат натижасида содир бўлади; тебраниш контури, радиотўлқинлар каби тебранишлар электр ва магнит майдонлари кучланганлиги ўзгариши билан боғлиқ бўлади. Шунга қарамасдан тебранишлар бир хил қонуниятга бўйсунди. Масалан, маятник, пружинага осилган юк ва вагон кузовининг тебранишлари, электр контуридаги тебранишлар ёки сувдаги кеманинг чайқалиши бир хил дифференциал тенглама билан ифодаланиши мумкин.

Нуқтанинг тебранма ҳаракатини ўрганишда

- 1) ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузиш;
- 2) тебранма ҳаракат қонунини аниқлаш;
- 3) тебраниш даврини ҳамда мувозанат ҳолатидан энг катта оғишини ҳисоблаш каби масалалар билан шуғулланамиз.

Бу бобда қайтарувчи куч (масалан, пружинанинг эластиклик кучи), муҳитнинг қаршилик кучи, вақтнинг функциясидан иборат уйғотувчи кучлар таъсиридаги нуқтанинг тебранма ҳаракатини текшираемиз. Бундай кучлардан бирортаси ёки уларнинг маълум комбинацияси таъсиридаги нуқтанинг дифференциал тенгламаларидан электротехника ёки радиотехникада ҳам самарали фойдаланиш мумкин.

17.2-§. Моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати

Моддий нуқтани мувозанат ҳолатига қайтаришга интилувчи кучга *қайтарувчи куч* дейилади. Нуқтага унинг мувозанат ҳолатидан оғишига пропорционал бўлган чизиқли қайтарувчи куч таъсир этган ҳолни кўрамиз. x ўқни M нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат траекторияси бўйлаб йўналтираемиз. Координаталар боши O ни M нуқтанинг мувозанатда бўлиши мумкин бўлган ҳолатда оламиз (17.1-расм).

Агар нуқта мувозанат ҳолатидан x масофага оғдирилса, u ҳолда унга x ўқи бўйлаб ҳамиша O нуқтага йўналган қайтарувчи \vec{F} куч таъсир этади. Бу кучнинг x ўқдаги проекцияси қуйидагича аниқланади:

$$X = -cx, \quad (17.1)$$

бунда c пропорционаллик коэффициентини ифодалайди.

M нуқтанинг қайтарувчи \vec{F} куч



17.1- расм.

таъсиридаги тўғри чизиқли ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = -cx$$

ёки $\frac{c}{m} = k^2$ белгилаш киритсак,

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (17.2)$$

(17.2) тенглама нуқтанинг эркин тебранма ҳаракат дифференциал тенгламаси дейилади.

Шундай қилиб, моддий нуқтанинг қайтарувчи куч таъсиридаги ҳаракати иккинчи тартибли бир жинсли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама билан ифодаланади.

Бу дифференциал тенгламани интеграллаш учун унинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Бу тенглама $\lambda_1 = ik$, $\lambda_2 = -ik$ илдизларга эга бўлгани учун (17.2) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (17.3)$$

бунда C_1 ва C_2 билан интеграллаш доимийлари белгиланган.

(17.3) дан вақт бўйича ҳосила олиб, нуқтанинг тезлигини ифодаловчи

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \quad (17.4)$$

муносабатни оламиз.

C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун бошланғич шартлар берилган бўлиши керак. Айтайлик, бошланғич шартлар қуйидагича бўлсин:

$$t = 0 \text{ да } x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0. \quad (17.5)$$

(17.5) ни (17.3) ва (17.4) га қўйиб,

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$$

эканлигини келтириб чиқарамиз.

C_1 ва C_2 нинг бу қийматларини (17.3) га қўйиб, M нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \quad (17.6)$$

Нуқтанинг ҳаракатини яққолроқ тасаввур қилиш учун C_1 ва C_2 ўрнига

$$C_1 = a \sin \alpha, \quad C_2 = a \cos \alpha$$

тенгликлар воситасида аниқланадиган a ва α янги доимийларни кiritамиз. У ҳолда (17.3) ни

$$x = a \sin (kt + \alpha) \quad (17.7)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама нуқтанинг гармоник теб-ранма ҳаракатини ифодалайди (8.6-§ га қаралсин).

Шундай қилиб, моддий нуқтанинг чизиқли қайтарувчи куч таъ-сиридаги эркин тебранма ҳаракати гармоник тебранма ҳаракатдан иборат бўлади.

Нуқтанинг ҳаракат тезлигини аниқлаш учун (17.7) дан вақт бў-йича ҳосила оламиз:

$$\dot{x} = a k \cos (kt + \alpha). \quad (17.8)$$

a ва α ни ҳаракатнинг бошланғич шартларидан фойдаланиб аниқ-лаш мумкин. Айтайлик, ҳаракатнинг бошланғич шартлари (17.5) кў-ринишида берилган бўлсин. (17.5) ни (17.7) ва (17.8) га қўйсақ,

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad \dot{x}_0 = a k \cos \alpha$$

ҳосил бўлади.

Бундан a ва α лар аниқланадиган

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \quad (17.9)$$

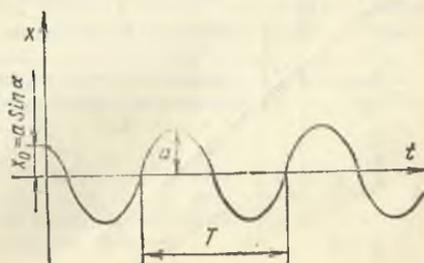
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}, \quad \sin \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}_0}{k \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}} \quad (17.10)$$

муносабатларни оламиз.

M нуқтанинг O тебраниш марказидан энг катта оғишига тенг бўлган a масофага тебраниш амплитудаси дейилади. M нуқтанинг берилган ондаги ҳолати ва ундан кейинги ҳаракат йўналишини ифо-даловчи $kt + \alpha$ аргумент теб-раниш фазаси дейилади. Бош-ланғич $t = 0$ пайтдаги фазанинг қиймати α тебранишларнинг бошланғич фазаси дейилади.

Нуқтанинг эркин тебранма ҳа-ракат графиги 17.2-расмда тас-вирланган; бунда $x_0 = a \sin \alpha$ нуқ-танинг бошланғич пайтдаги оғи-шини ифодалайди. Нуқта бир мар-та тўлиқ тебраниши учун кетган



17.2- расм.

T вақт тебраниш даври дейилади. Синуо функциясининг даври 2π га тенг бўлгани учун

$$k(t + T) + \alpha - (kt + \alpha) = 2\pi$$

ифодадан тебраниш даври аниқланадиган қўйидаги формулани оламиз:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (17.11)$$

Тебраниш даврининг тескари қийматига тенг бўлган ва нуқтанинг бир секунддаги тебранишлар сонини ифодаловчи

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi} \quad (17.12)$$

катталиққа тебранишлар частотаси дейилади.

(17.12) дан кўрамизки,

$$k = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (17.13)$$

катталиқ 2π секунд вақт ичида нуқтанинг тўлиқ тебранишлар сонини ифодалайди. Бу катталиқ тебранишларнинг доиравий частотаси дейилади.

Бу формулалардан кўрамизки, эркин тебранишлар частотаси ва тебраниш даври бошланғич шартларга боғлиқ бўлмай, фақат нуқтанинг массаси ва c коэффициентга боғлиқ бўлади.

17.1-масала. Массаси m га тенг бўлган M юк бикирлиги c га тенг пружинага осилган (17.3-расм). Пружинанинг чўзилмаган ҳолдаги узунлиги $AB = l_0$, унга осилган юк бошланғич тезликсиз қўйиб юборилган. Пружинанинг статик мувозанат ҳолатидаги чўзилиши λ_{cm} ни маълум деб қараб, юкнинг тебраниш ҳаракат қонуни, тебраниш даври ва пружина эластиклик кучининг энг катта қиймати аниқлансин.

Ечиш. Координаталар боши учун юкнинг оғирлик кучи \vec{mg} ва пружинанинг эластиклик кучи статик мувозанатлашган O нуқтани оламиз. O нуқтада

$$mg = c\lambda_{cm} \quad (1)$$

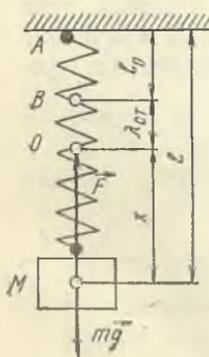
муносабат ўринли бўлади. Шундай қилиб, O координаталар боши B нуқтадан

$\lambda_{cm} = \frac{mg}{c}$ масофада ётади. Ох ўқни вертикал пастга йўналтирамиз. Юкнинг ихтиёрий ҳолатини M билан белгилаб, унга таъсир этувчи кучларни расмда кўрсатилганидек тасвирлаймиз. Юкка унинг оғирлик кучи mg ва пружинанинг эластиклик кучи \vec{F} таъсир этади.

Гук қонунига кўра пружинанинг эластиклик кучи унинг чўзилишига пропорционал бўлади, яъни $F = c\lambda$, бунда c — бикирлик коэффициентини, $\lambda = l - l_0 = \lambda_{cm} + x$ — юкнинг M ҳолатига мос бўлган пружинанинг чўзилиши. Шу сабабли пружина эластиклик кучининг x ўқдаги проекциясини $x = -c(\lambda_{cm} + x)$ формула ёрдамида аниқлаш мумкин.

Юкнинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = mg - c(\lambda_{cm} + x). \quad (2)$$



17.3-расм.

Статик мувозанат ҳолатида (1) тенглик ўринли бўлгани учун (2) ни қуйидагича ёзиш мумкин

ёки

$$mx = -cx$$

$$x + k^2 x = 0, \quad (3)$$

бунда $k^2 = \frac{c}{m}$. (3) тенглик эркин тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасидир. Бинобарин, пружина осилган юк гармоник тебранма ҳаракатда бўлади.

Қўрилаётган ҳолда тебраниш частотаси учун $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}}$, тебраниш даври учун эса (17.12) га асосан

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}} \quad (4)$$

муносабат ўринли бўлади.

(3) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини (17.3) кўринишда оламиз:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (5)$$

бундан

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (6)$$

Масаланинг шартига кўра бошланғич шартлар қуйидагича бўлади:

$$t = 0 \text{ да } x_0 = -\lambda_{cm}, \quad \dot{x}_0 = 0. \quad (7)$$

(7) ни (5) ва (6) га қўйиб, $C_1 = -\lambda_{cm}$, $C_2 = 0$ бўлишини аниқлаймиз. Шундай қилиб юк

$$x = -\lambda_{cm} \cos kt \quad (8)$$

қонунга кўра ҳаракатланади.

(8) дан кўрамизки, юкнинг тебраниш амплитудаси a пружинанинг статик чўзилиши λ_{cm} га тенг бўлади: $a = \lambda_{cm}$. Шу сабабли пружинанинг энг катта чўзилиши учун

$$\lambda_{max} = \lambda_{cm} + a = 2\lambda_{cm}$$

муносабат ўринли бўлади. Бинобарин, пружинанинг энг катта эластиклик кучи

$$F_{max} = c\lambda_{max} = 2c\lambda_{cm} = 2mg,$$

яъни F_{max} юкнинг оғирлиги mg дан икки баравар катта бўлади.

17.2-масала. Q юк $h = 1$ м баландликдан бошланғич тезликсиз тушиб, уларни маҳкамланган эластик горизонтал балканинг ўртасига урилади ва у билан бирга тебранади. Юкнинг балка билан биргаликдаги кейинги ҳаракат тенгламаси ёзилсин. Ҳаракат тенгламаси юкнинг балка устидаги статик мувозанат ҳолатидан вертикал пастга йўналган ўққа нисбатан тузилсин. Ўша юк таъсирида балканинг статик эгилиши 0,5 см га тенг, балка массаси ҳисобга олинмасин.

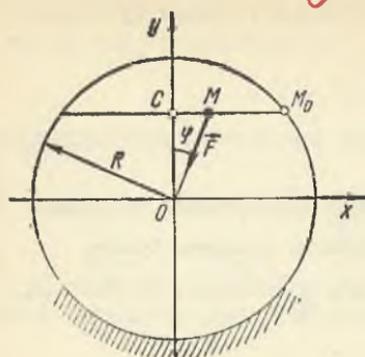
Ечиш. Координаталар бошини юкнинг статик мувозанат ҳолатида олиб, x ўқни вертикал пастга йўналтирамиз. U ҳолда ҳаракатнинг бошланғич шартлари қуйидагича бўлади:

$$t = 0 \text{ да } x = x_0 = -\lambda_{cm} = 0,005 \text{ м}, \quad \dot{x} = v_0 = \sqrt{2gh} = 4,43 \text{ м/с}, \quad (1)$$

бунда v_0 юкнинг балкага урилган пайтдаги тезлигини ифодалайди.

Юкнинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m\ddot{x} = mg - c(\lambda_{cm} + x). \quad (2)$$



17.4-расм.

Статик мувозанат ҳолатида $mg = c \lambda_{cm}$ муносабат ўринли бўлишини эътиборга олсак, (2) ни

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда $k =$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}} = 44,29 \text{ с}^{-1}.$$

Ҳаракатнинг бошланғич шартларини ифодаловчи (1) муносабатларни назарда тутиб, нуқтанинг тебранма ҳаракат қонунини (17.6) га асосан қуйидагича ифодалаймиз:

$$x = (0,005 \cos 44,29 t + 0,1 \sin 44,29 t) \text{ м.}$$

17.3-масала. Вертикал текисликда жойлашган доиранинг горизонтал ватари бўйлаб массаси 2 кг га тенг M моддий нуқта $OM = r$ масофага пропорционал ва ҳа-

миша O нуқтага йўналган \vec{F} куч таъсирида ҳаракатланади, пропорционаллик коэффициентини эса 98 Н/м га тенг (17.4-расм). Ишқаланиш кучи ҳисобга олинмайди, O марказдан ватаргача бўлган масофа $OC = 20 \text{ см}$, айлананинг радиуси эса $R = 40 \text{ см}$. Агар нуқта бошланғич пайтда ўнг томондаги энг четки ҳолатини эгалласа ва бошланғич тезликсиз қўйиб юборилса, у қандай қонун бўйича ҳаракатланади? Нуқта ватарнинг ўртасидан қандай тезлик билан ўтади?

Ечиш. Координаталар бошини доиранинг марказида олиб, ўқларни расмда кўрсатилганидек йўналтирамиз. M нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини

$$m \ddot{x} = X$$

кўринишда тузамиз. Бунда $m = 2 \text{ кг}$, $x = -F \sin \varphi = -98 r \sin \varphi = -98 x \text{ Н}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$2 \ddot{x} = -98 x$$

ёки

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (1)$$

тенглама ҳосил бўлади, бунда $k = \sqrt{\frac{98}{2}} = 7$.

(1) тенглама эркин тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини ифодалайди.

Шундай қилиб, M нуқта горизонтал ватар бўйлаб гармоник тебранма ҳаракатда бўлади.

(1) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини (17.3) кўринишида оламиз

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2)$$

бундан

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (3)$$

Масаланинг шартига кўра бошланғич шартлар қуйидагича бўлади:

$$t = 0 \text{ да } x_0 = CM_0 = \sqrt{R^2 - OC^2} = 0,346 \text{ м, } \dot{x} = 0. \quad (4)$$

(4) ни (2) ва (3) га қўйиб, $C_1 = 0,346$, $C_2 = 0$ бўлишини аниқлаймиз. Шундай қилиб, M нуқта

$$x = 0,346 \cos 7 t \quad (5)$$

қонун бўйича ҳаракатланади ва унинг тезлиги

$$\dot{x} = -2,422 \sin 7t \quad (6)$$

тенгламадан аниқланади.

M нуқта ватарнинг ўртасидан ўтганда $x = 0$ бўлади ва (6) га асосан

$$7t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n_1 \quad (7)$$

(7) ни (6) га қўйиб M нуқта ватарнинг ўртасидан ўтган пайтдаги тезлигини аниқлаймиз:

$$\dot{x} = \pm 2,422 \text{ м/с.}$$

17.3-§. Тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган қаршилик кучи таъсиридаги моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати

Юқорида нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати кўрилганда муҳитнинг қаршилиги (ишқаланиш, ҳавонинг қаршилиги ва ҳоказолар) эътиборга олинмаган эди, ваҳоланки, техникада учрайдиган реал масалаларни ечишда қаршилик кучини ҳисобга олишга тўғри келади. Қаршилик кучи тебранма ҳаракат характерида жиддий таъсир кўрсатади. Масалан, бир учи маҳкамланган ва эркин учига юк осилган пружинани чўзиб, сўнгра қўйиб юборсак, юк бир неча марта тебрангандан кейин ҳавонинг қаршилик кучи туфайли тўхтайд.

Ох ўқ бўйича ҳаракатланувчи M моддий нуқтага \vec{F} қайтарувчи кучдан ташқари нуқтанинг тезлиги \vec{v} га қарама-қарши йўналган \vec{R} қаршилик кучи таъсир этсин (17.5-расм). Нуқтанинг тезлиги унча катта бўлмаганда қаршилик кучини тезликнинг биринчи даражасига пропорционал деб қараш мумкин:

$$\vec{R} = -\mu \vec{v},$$

бунда μ қаршилик коэффициентини ифодалайди. \vec{R} қаршилик кучининг x ўқдаги проекцияси

$$R = -\mu \dot{x}.$$

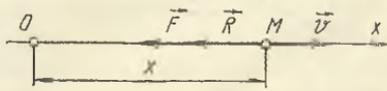
\vec{F} ва \vec{R} кучлар таъсиридаги нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m \ddot{x} = -c x - \mu \dot{x}.$$

Тенгламанинг иккала томонини m га бўлиб, барча ҳадларини бир томонга ўтказсак,

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0 \quad (17.14)$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз, бунда



17.5-расм.

$$\frac{c}{m} = k^2, \frac{\mu}{m} = 2n.$$

(17.14) тенглама қайтарувчи куч ва нуқта тезлигининг биринчи даражасига пропорционал бўлган қаршилик кучи таъсиридаги моддий нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини ифодалайди. Бу тенглама коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламадир. Унинг $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ характеристик тенгламаси $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ илдизларга эга.

Моддий нуқта ҳаракатининг характери бу илдизларнинг қабул қиладиган қийматларига боғлиқ бўлади. Агар $n < k$ (қаршилик унча катта бўлмаган ҳол) бўлса, характеристик тенгламанинг илдизлари қўшма комплекс сонлардан, $n \geq k$ (қаршилик катта бўлган ҳол) бўлса, ҳақиқий сонлардан иборат бўлади.

Бу ҳолларни алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз:

1. **Муҳитнинг қаршилиги унча катта бўлмаган ҳол ($n < k$).** Бу ҳолда $k^2 - n^2 = k_1^2$ белгилаш киритсак, характеристик тенгламанинг илдизлари $\lambda_{1,2} = -n \pm ik_1$ бўлиб, (17.14) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \quad (17.15)$$

Агар C_1 ва C_2 интеграллаш доимийлари ўрнига

$$C_1 = a \sin \alpha, \quad C_2 = a \cos \alpha$$

тенгликлар воситасида аниқланадиган a ва α ўзгармасларни киритсак, нуқтанинг ҳаракат қонуни

$$x = a e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) \quad (17.16)$$

тенглама билан ифодаланади.

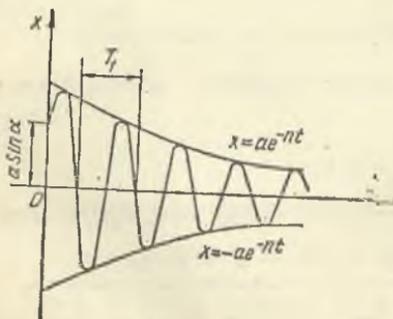
(17.16) тенглама нуқтанинг гармоник тебранма ҳаракат тенгламасидан e^{-nt} кўпайтувчиси билан фарқ қилади. Бу кўпайтувчи вақтнинг ўтиши билан нолга интилади, яъни $t \rightarrow \infty$ да $e^{-nt} \rightarrow 0$. Шу сабабли (17.16) қонун асосида содир бўладиган ҳаракат *сўнувчи тебранма ҳаракат* дейилади. Бундай ҳаракат частотаси k_1 нуқтанинг массаси m , пропорционаллик коэффициенти c билан бир қаторда муҳитнинг қаршилик коэффициенти μ га ҳам боғлиқ бўлади.

Сўнувчи тебранма ҳаракат графиги 17.6-расмда тасвирланган.

(17.16) да $|\sin(k_1 t + \alpha)| \leq 1$ бўлгани учун x координатанинг абсолют қиймати

$$|x| \leq |a e^{-nt}|$$

шартни қаноатлантиради. Бинобарин, сўнувчи тебранма ҳаракат графиги t ўққа нисбатан симметрик жойлашган



17.6- расм.

$$x = a e^{-nt} \text{ ва } x = -a e^{-nt}$$

чизиқларга галма-гал уринадиган синусоида билан ифодаланади.

a ва α интеграллаш доимийларини аниқлаш учун (17.16) дан вақт бўйича ҳосила олиб, нуқтанинг тезлигини топамиз:

$$\dot{x} = a k_1 e^{-nt} \cos(k_1 t + \alpha) - a n e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (17.17)$$

Агар бошланғич шартлар

$$t = 0 \text{ да } x = x_0, \dot{x} = v_0$$

кўринишда берилган бўлса, уларни (17.16) ва (17.17) га қўйиб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$x_0 = a \sin \alpha,$$

$$v_0 = a k_1 \cos \alpha - n x_0.$$

Бундан a ва α лар аниқланадиган

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + n x_0)^2}{k_1^2}}, \quad (17.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{x_0}{a}, \\ \cos \alpha &= \frac{v_0 + n x_0}{a k_1} \end{aligned} \right\} \quad (17.19)$$

муносабатларни оламиз.

Сўнувчи тебранма ҳаракат частотаси

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}, \quad (17.20)$$

ҳаракат даври эса

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} \quad (17.21)$$

формула ёрдамида аниқланади.

(17.21) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}, \quad (17.22)$$

бунда $T = \frac{2\pi}{k}$ билан нуқтанинг эркин тебранма ҳаракат даври белгиланган.

(17.22) дан кўрамызки, сўнувчи тебранма ҳаракат даври нуқтанинг эркин тебранма ҳаракат давридан бирмунча катта бўлади. Лекин қаршилиқ кичик бўлганда бу фарқ унча катта бўлмайди ва бунда $T_1 \approx T$ деб олиш мумкин. Бинобарин, унча катта бўлмаган муҳитнинг қаршилиги эркин тебраниш даврига деярли таъсир этмайди.

Моддий нуқтанинг мувозанат ҳолатидан у ёки бу томонга ҳар гал тебрангандаги максимал оғиши *сўнувчи тебранма ҳаракат амплитудаси* дейилади.

Агар бу амплитудаларнинг кетма-кет қийматларидан ташкил топган $a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots$ қаторни олсак, бу қаторнинг иккита кетма-кет a_i, a_{i+1} ҳадлари вақтнинг t_i ва $t_{i+1} = t_i + \frac{T_1}{2}$ пайтларига мос келади (17.7-расм). Яъни $t_{i+1} - t_i = \frac{T_1}{2}$ бўлиб, нуқта $a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots$ ларга оғандаги вақтлар айирмаси $\frac{T_1}{2}$ га тенг арифметик прогрессияни ташкил этади ҳамда

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{ae^{-n\left(t_i + \frac{T_1}{2}\right)}}{ae^{-nt_i}} = e^{-n\frac{T_1}{2}} \quad (17.23)$$

муносабат ўринли бўлади. $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ нисбат ўзгармас бўлгани туфайли амплитудаларнинг кетма-кет қийматлари, махражи $e^{-n\frac{T_1}{2}}$ га тенг камаювчи геометрик прогрессияни ташкил этади.

$e^{-n\frac{T_1}{2}}$ га тенг бўлган абстракт сон *тебраниш декременти* дейилади. Декрементнинг натурал логарифми модулига тенг катталик *логарифмик декремент* дейилади ва у D билан белгиланади:

$$D = \left| \ln e^{-n\frac{T_1}{2}} \right| = \frac{nT_1}{2} = \frac{\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (17.24)$$

Миқдори n га тенг бўлган коэффициент *сўниш коэффициенти* дейилади.

Шундай қилиб, унча катта бўлмаган қаршилиқнинг моддий нуқтани эркин тебранма ҳаракатига таъсири, вақтнинг ўтиши билан тебраниш амплитудасининг камайиши билан характерланади.

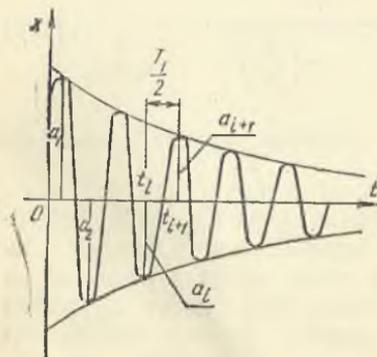
2. Аперидик ҳаракат ($n > k$).

Бу ҳолда $n^2 - k^2 = h^2$ белгилаш киритсак, характеристик тенгламанинг илдизлари

$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm h$ ҳақиқий, манфий ва турлича қийматларга эга бўлади. Шу сабабли (17.14) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ёзилади:

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{ht} + C_2 e^{-ht}). \quad (17.25)$$

Агар C_1 ва C_2 интеграллаш доимийлари ўрнига



17.7- расм.

$$C_1 = \frac{A+B}{2}, \quad C_2 = \frac{A-B}{2}$$

тенгликлар воситасида аниқланадиган янги A ва B доимийларни киритсак, (17.25) ни

$$x = e^{-nt} \left(A \frac{e^{ht} + e^{-ht}}{2} + B \frac{e^{ht} - e^{-ht}}{2} \right)$$

кўринишда ёза оламиз. Бу тенгламада

$$\frac{e^{ht} + e^{-ht}}{2} = \text{ch } ht, \quad \frac{e^{ht} - e^{-ht}}{2} = \text{sh } ht$$

гиперболик функцияларни киритиб, уни қуйидагича ифодалаймиз:

$$x = e^{-nt} (A \text{ ch } ht + B \text{ sh } ht). \quad (17.26)$$

Нуқтанинг ҳаракатини янада яққолроқ тасаввур қилиш учун A ва B ўзгармаслар ўрнига

$$A = a \text{ sh } \alpha, \quad B = a \text{ ch } \alpha$$

тенгликлар ёрдамида аниқланадиган a ва α ўзгармасларни кирита- миз. У ҳолда (17.26) ўрнига

$$x = a e^{-nt} \text{ sh } (ht + \alpha) \quad (17.27)$$

тенгламани оламиз.

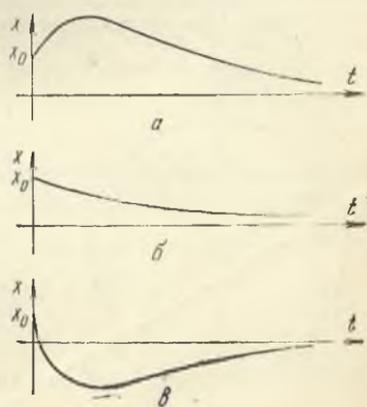
(17.27) дан кўрамизки, $n > k$ бўлган ҳолда нуқта тебранма ҳа- ракатда бўлмайди, чунки гиперболик синус функцияси даврий функ- ция эмас. Бу тенглама аperiодик ҳаракатни ифодалайди.

Бундай ҳаракат графиги бошланғич шартларнинг қандай бўли- шига қараб, 17.8-расмда тасвирланган графикларнинг бирортаси каби бўлади.

Агар нуқта бошланғич пайтда x ўқнинг мусбат йўналиши бўйи- ча йўналган бошланғич \vec{v}_0 тезликка эга бўлса, у ҳолда бу тезлик ҳисобига нуқта дастлаб мувозанат ҳолатидан узоқлаша боради, сўнгра қайтарувчи куч таъсирида му- возанат ҳолатига аста-секин яқинлаша боради (17.8-расм, а).

Агар нуқта бошланғич пайтда x ўққа қарама-қарши йўналган \vec{v}_0 бош- ланғич тезликка эга бўлса, ҳаракат графиги 17.8-расм, б, в дагидек бў- лади. Бу ҳолда нуқтанинг бошланғич тезлиги v_0 етарлича катта бўлса, нуқ- та мувозанат ҳолатидан бир марта ўтиб, сўнгра бу ҳолатга аста-секин яқинлаша боради (17.8-расм, в).

3. Чегаравий ҳолдаги аperiодик ҳаракат. Бу ҳолда характеристик тенг- ламанинг илдизлари ўзаро тенг; ҳақи- қий ва манфий қийматга эга бўлади:



17.8-расм.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n.$$

Бу (17.14) тенгламанинг умумий ечимини

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2) \quad (17.28)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ҳолда нуқтанинг тезлиги

$$\dot{x} = -n e^{-nt} (C_1 t + C_2) + e^{-nt} C_1 \quad (17.29)$$

формула ёрдамида аниқланади.

C_1 ва C_2 ни топиш учун ҳаракатнинг бошланғич шартларидан фойдаланамиз. Айтайлик, бошланғич $t = 0$ пайтда нуқта $x = x_0$ ҳолатни эгалласин ва $\dot{x} = v_0$ тезликка эга бўлсин. Бу шартларни (17.28) ва (17.29) га қўйсақ,

$$x_0 = C_2,$$

$$v_0 = -n C_2 + C_1 = -n x_0 + C_1,$$

бундан

$$C_1 = v_0 + n x_0$$

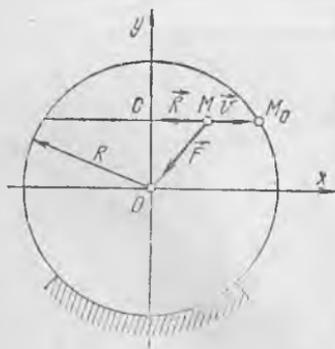
эканлиги топилади.

C_1 ва C_2 ларнинг қийматларини (17.28) га қўйиб, нуқтанинг ҳаракат қонунини қуйидагича ёза оламиз:

$$x = e^{-nt} [x_0 + (v_0 + n x_0) t].$$

Бу тенглама воситасида аниқланадиган ҳаракат ҳам сўнувчи аperiодик ҳаракатдан иборат бўлади.

17.4- масала. 17.3- масаладаги M нуқтага \vec{F} кучдан ташқари нуқтанинг тезлигига қарама-қарши йўналган ва тезлиكنинг биринчи даражасига пропорционал қаршилик кучи \vec{R} таъсир этганда нуқтанинг ҳаракат қонуни аниқлансин (17.9- расм). Пропорционаллик коэффициентини $\gamma = 10$ Н.с/м.



17.9- расм.

Ечиш. Қаршилик кучи \vec{R} нуқтанинг тезлиги v га қарама-қарши йўналганлигини назарда тутиб, нуқтанинг ҳаракат тенгласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m \ddot{x} = -X + R_x$$

ёки

$$2 \ddot{x} = 98 x - 10 \dot{x}.$$

Бу дифференциал тенгламани

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + kx = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда $2n = 5$, $k = 7$.

Характеристик тенглама тузиб, унинг илдизларини аниқлаймиз:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 49} = -2,5 \pm 6,144 \text{ t.}$$

Характеристик тенглама иккита мавҳум қўшма илдизга эга бўлгани учун M нуқтанинг ҳаракати тебранма ҳаракатдан иборат бўлади ҳамда (17.16) га кўра нуқтанинг ҳаракат қонунини

$$x = a e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Нуқта $t = 0$ да $x_0 = CM_0 = 0,346$ м, $\dot{x} = 0$ бошланғич шартларда ҳаракатланишини эътиборга олсак, (17.18) ва (17.19) га кўра

$$a = \sqrt{0,346^2 + \frac{(2,5 \cdot 0,346)^2}{6,144}} = 0,49 \text{ м,}$$

$$\sin \alpha = \frac{x_0}{a} = \frac{0,346}{0,49} = 0,7061$$

$$\alpha = 0,25 \pi.$$

Шундай қилиб, M нуқта

$$x = 0,49 e^{-2,5 t} \sin(6,144 t + 0,25 \pi) \text{ м}$$

қонунга кўра сўнувчи тебранма ҳаракатда бўлади.

17.4- §. Моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати

Моддий нуқтага қайтарувчи кучдан ташқари вақтнинг даврий функциясидан иборат бўлган уйғотувчи куч ҳам таъсир этса, у мажбурий тебранма ҳаракатда бўлади. Даврий куч манбаи ўз табиатига кўра турлича бўлиши мумкин. Ёқилғи ёниши натижасида ҳосил бўладиган газларнинг ички ёнув двигатели поршенига таъсир кучи, электромагнитларнинг ўзгарувчан тортиш кучлари, мувозанатланмаган валнинг айланиши натижасида ҳосил бўладиган марказда қочирма инерция кучи ана шулар жумласидандир.

Айтайлик, моддий нуқтага таъсир этувчи \vec{Q} уйғотувчи кучнинг x ўқдаги проекцияси $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ га тенг бўлсин; бу ерда H — уйғотувчи кучнинг амплитудаси, p — унинг доиравий частотаси, δ — бошланғич фаза.

\vec{F} қайтарувчи ва \vec{Q} уйғотувчи кучлар таъсиридаги моддий нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$m \ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \delta)$$

ёки

$$\ddot{x} + k^2 x = H_0 \sin(pt + \delta), \quad (17.30)$$

бунда $k^2 = \frac{c}{m}$, $H_0 = \frac{H}{m}$.

(17.30) тенглама моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракат тенгламаси дейилади. Бу тенглама коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламадан иборат. Унинг умумий ечими $\ddot{x} + k^2 x = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $x_1 = a \sin(kt + \alpha)$ ва (17.30) тенгламанинг хусусий ечими x_2 ларнинг йиғиндисига тенг:

$$x = x_1 + x_2. \quad (17.31)$$

Агар $p \neq k$ бўлса, (17.30) тенгламанинг хусусий ечимини қуйидаги қўринишда оламиз.

$$x_2 = A \sin(pt + \delta). \quad (17.32)$$

Бу тенгламадаги A доимий катталиқни аниқлаш учун (17.32) дан вақт бўйича икки марта ҳосила олиб,

$$\ddot{x}_2 = -A p^2 \sin(pt + \delta),$$

сўнгра x_2 ва \ddot{x}_2 ларнинг қийматини (17.30) тенгламага қўямиз:

$$-A p^2 \sin(pt + \delta) + A k^2 \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta)$$

ёки

$$A(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta). \quad (17.33)$$

Бу тенглик ўринли бўлиши учун чап ва ўнг томондаги $\sin(pt + \delta)$ олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг бўлиши керак:

$$A(k^2 - p^2) = H_0.$$

Бундан

$$A = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \quad (17.34)$$

муносабатни оламиз.

(17.34) ни (17.32) га қўйиб, хусусий ечим учун

$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$$

ифодага эга бўламиз.

Шундай қилиб, (17.30) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги қўринишда ёзилади:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (17.35)$$

Бинобарин, моддий нуқтага бир вақтнинг ўзида \vec{F} қайтарувчи ва \vec{Q} уйғотувчи кучлар таъсир этса, мажбурий нуқта k частота билан содир бўладиган эркин тебранма ҳаракат ҳамда уйғотувчи куч частотаси p билан содир бўладиган мажбурий

тебранма ҳаракатлардан ташкил топган мураккаб ҳаракатда шиттирок этади.

(17.35) даги a ва α доимийлар ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. Бу тенгламадаги нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракатини ифодаловчи охириги ҳадда интеграллаш натижасида ҳосил бўладиган доимийлар қатнашмайди. Бинобарин, *мажбурий тебранма ҳаракат, нуқта ҳаракатининг бошланғич шартларига боғлиқ бўлмайди.*

Нуқтанинг

$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad (17.36)$$

қонун асосида содир бўладиган мажбурий тебранма ҳаракатини батафсил текшираимиз.

Мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси

$$A_1 = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} \quad (17.37)$$

тенгликдан аниқланади.

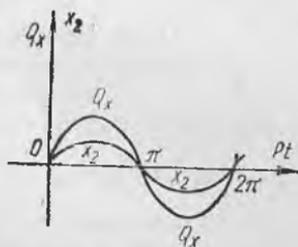
Мажбурий тебранма ҳаракат тенгламасини унинг амплитудаси орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$k > p \text{ бўлса, } x_2 = A_1 \sin(pt + \delta), \\ k < p \text{ бўлса, } x_2 = -A_1 \sin(pt + \delta) = A_1 \sin(pt + \delta - \pi).$$

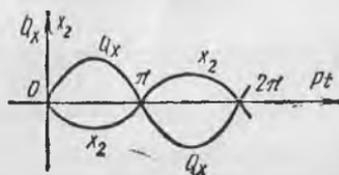
Охириги иккита тенгликдан кўраимизки, агар $k > p$ бўлса, мажбурий тебранма ҳаракат фазаен, $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ уйғотувчи куч фазаси билан устма-уст тушади (17.10- расм); агар $k < p$ бўлса, мажбурий тебранма ҳаракат ва уйғотувчи куч қарама-қарши фазага эга бўлади, яъни мажбурий тебранма ҳаракат фазаси уйғотувчи куч фазасидан π га орқада қолади (17.11- расм).

Мажбурий тебранма ҳаракат амплитудасини частоталар нисбати орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

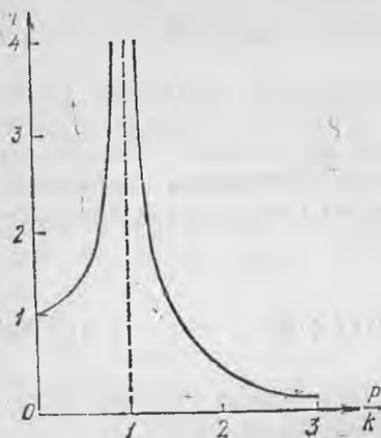
$$A_1 = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{H_0}{k^2 \left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|} = \frac{x_{cm}}{\left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|}, \quad (17.38)$$



17.10- расм.



17.11- расм.



17.12- расм.

17.12- расмда ифодаланган (17.39) ифоданинг графигидан кўра-
 мизки, $\frac{p}{k} \rightarrow 1$ да динамиклик коэффициенти жуда катта қийматга
 эришади.

17.5- §. Нуқтанинг тепкили тебранишлари

(17.30) тенгламанинг умумий ечимини яна қуйидаги кўринишда
 ёзиш мумкин:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (17.40)$$

C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун (17.40) дан
 вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{x} = -k C_1 \sin kt + k C_2 \cos kt + \frac{p H_0}{k^2 - p^2} \cos(pt + \delta). \quad (17.41)$$

Айтайлик, ҳаракатнинг бошланғич шартлари қуйидагича бўлсин:

$$t = 0 \text{ да } x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0. \quad (17.42)$$

(17.42) ни (17.40) ва (17.41) га қўйиб, C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз:

$$C_1 = x_0 - \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin \delta,$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{p}{k} \cdot \frac{H_0}{k^2 - p^2} \cos \delta.$$

C_1 ва C_2 нинг бу қийматларини (17.40) га қўйиб, тенгламанинг
 (17.42) бошланғич шартлардаги умумий ечимини оламиз:

бунда $x_{cm} = \frac{H_0}{k^2}$ билан нуқтага уй-
 ғотувчи кучнинг максимал қийма-
 тига тенг куч таъсир этганда унинг
 мувозанат ҳолатидан статик оғиши-
 ни ифодаловчи катталиқ белгилан-
 ган. Агар $\frac{A_1}{x_{cm}}$ нисбатни η орқали
 белгиласак,

$$\eta = \frac{A_1}{x_{cm}} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{p^2}{k^2} \right|}. \quad (17.39)$$

η катталиқ динамиклик коэф-
 фициенти дейилади; бу коэффи-
 циент мажбурий тебралма ҳаракат
 амплитудаси статик оғишидан неча
 марта ортиқ бўлишини ифодалайди.

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{H_0}{k^2 - p^2} (\sin \delta \cdot \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \cdot \sin kt) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (17.43)$$

(17.43) дан кўрамизки, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ бошлангич шартларда ҳам нуқтанинг уйғотувчи куч таъсирида

$$- \frac{H_0}{k^2 - p^2} (\sin \delta \cdot \cos kt + \frac{p}{k} \cos \delta \cdot \sin kt)$$

қонун асосида содир бўладиган тебранишлари эркин тебранишлар частотасига тенг частота билан тебранма ҳаракатда бўлади ҳамда бу тебранишлар амплитудаси бошлангич шартларга боғлиқ бўлмайди.

Мажбурий тебранма ҳаракат частотаси p эркин тебраниш частотаси k билан деярли устма-уст тушганда, бир хил амплитудали ва қарама-қарши фазали иккита бир-бирига яқин частотали ҳаракатларни қўшиш натижасида нуқтанинг тепкили тебраниш (биение) деб аталадиган ҳаракати содир рўлади.

Айтайлик, $\frac{p}{k} \approx 1$, лекин ($k^2 - p^2 \neq 0$) бўлсин, у ҳолда $x_0 = 0$,

$\dot{x}_0 = 0$ бошлангич шартларда (17.43) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$x \cong \frac{H_0}{k^2 - p^2} [\sin(pt + \delta) - \sin(kt + \delta)]$$

ёки $\frac{p+k}{2} \approx p$ деб қараб,

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

формулани қўллаб, умумий ечим учун

$$x = \frac{2 H_0}{k^2 - p^2} \sin \left(\frac{p-k}{2} t \right) \cos (pt + \delta) \quad (17.44)$$

ифодани оламиз.

Агар

$$A(t) = \frac{2 H_0}{k^2 - p^2} \sin \left(\frac{p-k}{2} t \right) \quad (17.45)$$

белгилаш киритсак, (17.44) ни

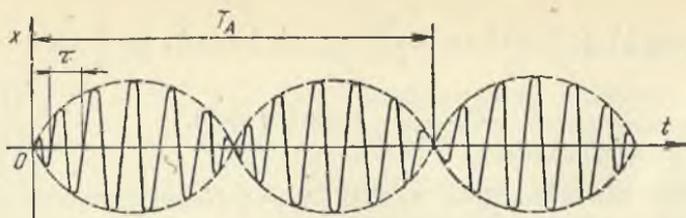
$$x = A(t) \cos (pt + \delta) \quad (17.46)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундай ҳаракат графиги 17.13-расмда тасвирланган.

(17.46) дан кўрамизки, тепкили тебранишни частотаси p , даври

$\tau = \frac{2\pi}{p}$ га тенг ҳамда амплитудаси вақтга боғлиқ (17.45) тенглик

билан ифодаланадиган даврий қонун асосида ўзгарадиган тебранма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин.



17.13- расм.

Бу ҳолда амплитуданинг ўзгариш даври

$$T_A = \frac{2\pi}{p-k} = \frac{4\pi}{p-k}$$

формула билан ифодаланади.

$p \approx k$ бўлгани учун амплитуданинг ўзгариш даври $\tau = \frac{2\pi}{p}$ га нисбатан анча катта бўлади.

17.6- §. Резонанс ҳодисаси

(17.33) дан кўрамизки, $p \approx k$ бўлганда (17.32) кўринишдаги хусусий ечим мавжуд бўлмайди. Бу ҳолда хусусий ечимни қуйидагича танлаб оламиз:

$$x_2^* = \frac{H_0}{k^2 - p^2} (\sin pt - \sin kt).$$

Бу ечимни (17.35) тенглик билан ифодаланадиган умумий ечимдан a , α ва δ катталиклар

$$a = -\frac{H_0}{k^2 - p^2}, \quad \alpha = 0, \quad \delta = 0$$

қийматларни қабул қилган ҳолда келтириб чиқариш мумкин. Агар $p = k$ бўлса, мазкур хусусий ечим $\frac{0}{0}$ кўринишидаги аниқмасликдан иборат бўлади. Бу аниқмасликни йўқотиш учун Лопиталь қондасидан фойдаланамиз:

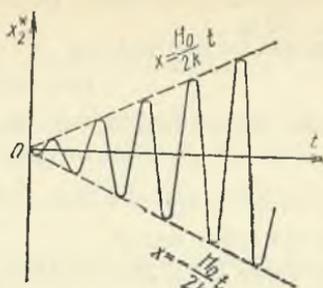
$$x_2^* = H_0 \left[\frac{\frac{d}{dp} (\sin pt - \sin kt)}{\frac{d}{dp} (k^2 - p^2)} \right]_{p=k} = -\frac{H_0 t}{2k} \cos kt. \quad (17.47)$$

Шундай қилиб, $p = k$ ҳолида (17.30) тенгламанинг умумий ечимини

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{H_0 t}{2k} \cos kt \quad (17.48)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

17.14-расмда x_2^* функциянинг графиги тасвирланган бўлиб, $p = k$ бўлганда вақтнинг ўтиши билан тебраниш амплитудаси вақтнинг чизиқли функцияси сифатида чексиз орта боради. Бу ҳодисага *резонанс* дейилади.



17.14- расм.

Резонанс ҳодисасини эътиборга олмаслик натижасида баъзида иншоотлар тўсатдан бузилиб кетиши мумкин. Масалан, осма кўприк устидан солдатлар бир хил қадам ташлаб ўтганда солдат қадамларининг частотаси кўприкнинг тебраниш частотаси билан устма-уст тушганда резонанс ҳодисаси рўй беради ва натижада кўприк бузилиб кетиши мумкин.

1850 йилда Анжер осма кўприги устидан 500 кишилик француз пиёда аскарлари батальони бир метърда қадам ташлаб ўтиб бораётганда бу кўприк бузилиб кетган ва натижада 226 киши ҳалок бўлган.

Акустика ва радиотехника ҳамда турли иншоотларнинг лойиҳасини динамик ҳисоблашда резонанс ҳодисаси алоҳида аҳамиятга эга.

✓ 17.5- масала. Бикирлиги $c = 19,6$ Н/м бўлган пружинага массаси 100 г бўлган магнит стержени осилган. Магнитнинг пастки учи $i = 20 \sin 8 \pi t$ А қонун билан ўзгарувчи ток оқадиган ғалтакда ўғади. $t = 0$ пайтдан бошлаб стержени соленоидга тортувчи ток ўта бошлайди; шу пайтга қадар магнит стержени пружинада қўзғалмай осилиб турган (17.15- расм). Магнит билан ғалтак орасидаги ўзаро таъсир кучи $F = 0,016 \pi i$ Н. Магнит стержени чўзилмаган пружинага осилиб, бошланғич тезликсиз қўйиб юборилганда у қандай қонун бўйича ҳаракат қилиши аниқлансин.

Ечиш. Магнит стержени тўғри чизиқли илгариллама ҳаракатда бўлади. Унга $P = mg$ оғирлик кучи; $F_1 = cx = 19,6x$ Н эластиклик кучи; $F = 0,016 \pi i$ Н $= 0,320 \pi \sin 8 \pi t$ Н — магнит стержени билан ғалтак орасидаги уйғотувчи куч таъсир этади.

Координаталар бошини магнит стерженининг статик мувозанат ҳолатида олиб, ҳаракат дифференциал тенгламасини қуйидагича ёза оламиз:

$$m\ddot{x} = -cx + 0,320 \pi \sin 8 \pi t$$

ёки

$$\ddot{x} + k^2 x = H_0 \sin p t. \quad (1)$$

Бунда $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{19,6}{0,1}} = 14$; $H_0 = \frac{0,320 \pi}{0,1} = 10,05 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}$; $p = 8 \pi$.

$p > k$ бўлгани учун резонанс ҳодисаси рўй бермайди.

(1) тенгламанинг умумий ечимини $x = x_1 + x_2$ кўринишда излаймиз. Бунда x_1 билан ўнг томони нолга тенг бўлган (1) тенгламанинг умумий ечими белгиланган. Маълумки, у қуйидагича бўлади:

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (2)$$

x_2 эса (1) нинг хусусий ечими бўлиб, магнит стерженининг мажбурий тебранма ҳаракатини ифодалайди.

(1) тенгламанинг хусусий ечимини

$$x_2 = A \sin pt \quad (3)$$

қўринишда оламиз. (3) дан вақт бўйича икки марта ҳосила олиб, сўнгра x_2 ва \dot{x}_2 ларнинг қийматини (1) тенгламага қўямиз. У ҳолда тенгламанинг ўнг ва чап томонидаги синуслар олдидаги коэффициентларни тенглаштирак, $A = \frac{H_0}{k^2 - p^2} = -0,023$ эканлиги келиб чиқади.

Демак, магнит стерженининг мажбурий тебраниши

$$x_2 = -0,023 \sin 8\pi t = 0,023 \sin(8\pi t - \pi)$$

қонун асосида содир бўлади. Бу тенгликдан кўрамаизки, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси уйғотувчи куч фазасига қарама-қарши бўлади.

Шундай қилиб, (1) тенгламанинг умумий ечими учун

$$x = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t - 0,023 \sin 8\pi t \quad (4)$$

ифодани оламиз.

C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун (4) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{x} = -14 C_1 \sin 14t + 14 C_2 \cos 14t - 0,578 \cdot \cos 8\pi t. \quad (5)$$

Масаланинг шартига кўра бошланғич $t=0$ пайтда магнит стержени $x_0 = -\lambda_{cm} = -\frac{mg}{c} = -0,05$ м ҳолатни эгаллайди ва $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$. Бу бошланғич шартларни (4) ва (5) га қўйиб, C_1 ва C_2 ни аниқлаймиз:

$$C_1 = -0,05, C_2 = 0,0413.$$

Шундай қилиб, магнит стержени

$x = (-0,05 \cos 14t + 0,0413 \sin 14t - 0,023 \sin 8\pi t)$ м қонун асосида ҳаракатланади.

17.7-§. Нуқтанинг мажбурий тебранишига муҳит қаршилигининг таъсири

Эркин тебранма ҳаракатдаги нуқтага тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган муҳитнинг қаршилик кучи таъсир этганда нуқта сўнувчи тебранма ҳаракатда бўлишини кўрган эдик. Энди мажбурий тебранма ҳаракатдаги нуқтага бундай қаршилик кучи қандай таъсир этишини кўраемиз.

Ох ўқ бўйича ҳаракатланувчи M нуқтага қайтарувчи куч \vec{F} , уйғотувчи куч \vec{Q} ва тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган $\vec{R} = -\mu \vec{v}$ қаршилик кучи таъсир этсин.

Координаталар бошини пружина деформацияланмаган ҳолатига мос келувчи нуқтанинг эгаллаган ҳолатида олиб, унинг ихтиёрий пайтдаги координатасини x билан белгилайлик. У ҳолда нуқтага таъсир этувчи кучларнинг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича ифодаланади:

$$F_x = -cx, Q_x = H \sin(pt + \delta) - \mu \dot{x}, R_x = -\mu \dot{x}.$$

Бундай кучлар таъсиридаги нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенглама сини

$$m\ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \delta) - \mu \dot{x}$$

кўринишда ёзиш мумкин. cx ва $\mu \dot{x}$ ҳадларни чап томонга ўтказиб, тенгламанинг иккала томонини m га бўлсак,

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{H}{m} \sin(pt + \delta)$$

ва $\frac{\mu}{m} = 2n$, $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{H}{m} = H_0$ белгилашларни киритсак,

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = H_0 \sin(pt + \delta) \quad (17.49)$$

дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

(17.49) тенглама ҳаракат тезлигига пропорционал бўлган қаршилик кучи таъсиридаги нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини ифодалайди. Бу тенглама коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламадан иборат бўлиб, унинг умумий ечими (17.14) бир жинсли тенгламанинг умумий ечими x_1 билан (17.49) тенгламанинг хусусий ечими x_2 ларнинг йиғиндисига тенг бўлади:

$$x = x_1 + x_2. \quad (17.50)$$

(17.14) тенгламанинг умумий ечимини n ва k ларнинг қандай қийматларни қабул қилишига қараб, мос равишда (17.15) ёки (17.16), (17.25) ёки (17.27) ҳамда (17.28) кўринишда олиш мумкин.

(17.49) тенгламанинг хусусий ечимини

$$x_2 = A \sin(p + \delta - \varepsilon) \quad (17.51)$$

шаклида оламыз. Бундаги A ва ε доимийларни аниқлаш учун \dot{x}_2 ва \ddot{x}_2 ларни ҳисоблаб,

$$\dot{x}_2 = Ap \cos(pt + \delta - \varepsilon),$$

$$\ddot{x}_2 = -Ap^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon),$$

сўнгра x_2 , \dot{x}_2 ва \ddot{x}_2 ларнинг қийматини (17.49) га қўямиз:

$$-Ap^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2nAp \cos(pt + \delta - \varepsilon) + Ak^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon) = H_0 \sin(pt + \delta). \quad (17.52)$$

Бу тенгламанинг ўнг томонидаги ифодани қуйидагича ёзиб:

$$H_0 \sin(pt + \delta) = H_0 \sin(pt + \delta - \varepsilon + \varepsilon) =$$

$$= H_0 \sin(pt + \delta - \varepsilon) \cdot \cos \varepsilon + H_0 \cos(pt + \delta - \varepsilon) \sin \varepsilon,$$

олинган натижани (17.52) га қўямиз:

$$A(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2npA \cos(pt + \delta - \varepsilon) = H_0 \cos \varepsilon \cdot \sin(pt + \delta - \varepsilon) + H_0 \sin \varepsilon \cdot \cos(pt + \delta - \varepsilon).$$

Бу тенглама t вақтининг ҳар қандай қийматида ўринли бўлиши учун $\sin(pt + \delta - \epsilon)$ ва $\cos(pt + \delta - \epsilon)$ олдидаги мос коэффициентлар ўзаро тенг бўлиши керак:

$$\left. \begin{aligned} A(k^2 - p^2) &= H_0 \cos \epsilon, \\ 2npA &= H_0 \sin \epsilon. \end{aligned} \right\} \quad (17.53)$$

(17.53) дан A ва ϵ лар аниқланадиган ушбу муносабатларни оламиз:

$$A = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad (17.54)$$

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (17.55)$$

ϵ ни (17.55) дан аниқлаш мумкинлигини назарда тутиб, мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси A нинг қийматини (17.51)га қўй-сак,

$$x_2 = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta - \epsilon) \quad (17.56)$$

тенгликни оламиз.

Шундай қилиб, k ва n лар орасидаги муносабат қандай бўлишига қараб, (17.49) тенгламанинг умумий ечимини

1) $n < k$ бўлганда ($k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ белгилаш киритиб)

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + A \sin(pt + \delta - \epsilon) \quad (17.57)$$

ёки

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) + A \sin(pt + \delta - \epsilon); \quad (17.57a)$$

2) $n > k$ муносабат ўринли бўлганда ($h = \sqrt{n^2 - k^2}$).

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{ht} + C_2 e^{-ht}) + A \sin(pt + \delta - \epsilon) \quad (17.58)$$

ёки

$$x = ae^{-nt} \operatorname{sh}(ht + \alpha) + A \sin(pt + \delta - \epsilon); \quad (17.58a)$$

3) $n = k$ ҳолида

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2) + A \sin(pt + \delta - \epsilon) \quad (17.59)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу тенгламаларда C_1 , C_2 ва a , α лар интеграллаш доимийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. Масалан, (17.57) даги C_1 ва C_2 ларни аниқлаш учун ундан вақт бўйича ҳосил оламиз ҳамда олинган тенгламага ва (17.57) га $t = 0$ да $x = x_0$

$\dot{x} = \dot{x}_0$ бошланғич шартларни қўямиз:

$$C_2 = \frac{1}{k_1} [x_0 + nx_0 - nA \sin(\delta - \epsilon) - Ap \cos(\delta - \epsilon)],$$

$$C_1 = x_0 = A \sin(\delta - \epsilon).$$

C_1 ва C_2 нинг бу қийматларини (17.57) га қўйиб, моддий нуқтанинг $n < k$ ҳолдаги ҳаракат қонунини оламиз:

$$x = e^{-nt} \left[\frac{x_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t + x_0 \cos k_1 t \right] - e^{-nt} \left\{ \frac{A}{k_1} [n \sin (\delta - \varepsilon) + p \cos (\delta - \varepsilon)] \sin k_1 t + A \sin (\delta - \varepsilon) \cdot \cos k_1 t \right\} + A \sin (pt + \delta - \varepsilon). \quad (17.60)$$

(17.60) дан кўрамизки, $n < k$ бўлганда моддий нуқтанинг ҳаракатини биринчи қўшилувчи билан ифодаланадиган ва бошланғич шартларга боғлиқ бўлган сўнувчи тебранма ҳаракат, иккинчи қўшилувчи билан ифодаланадиган ва уйғотувчи куч таъсирида k_1 частота билан содир бўладиган сўнувчи тебранма ҳаракат ҳамда учинчи қўшилувчи билан ифодаланадиган соф мажбурий тебранма ҳаракатлардан ташкил топган деб қараш мумкин.

(17.57 — 17.59) формулаларда қатнашувчи e^{-nt} кўпайтувчи вақтнинг ўтиши билан нолга интилади, яъни бу кўпайтувчи қатнашган ҳадлар сўнувчи тебранма ёки аperiодик ҳаракатни ифодалайди. Шу сабабли маълум вақт ўтгандан кейин нуқтанинг ҳаракати фақат

$$x = A \sin (pt + \delta - \varepsilon)$$

қонун билан ифодаланадиган мажбурий тебранишдан иборат бўлиб қолади ҳамда мажбурий тебранма ҳаракат қаршилик кучи таъсирида сўнмайди.

Мажбурий тебранишдан фарқли ўлароқ эркин тебранма ҳаракатда жуда кичик қаршилик мавжуд бўлганда ҳам ҳаракат сўнувчи бўлади.

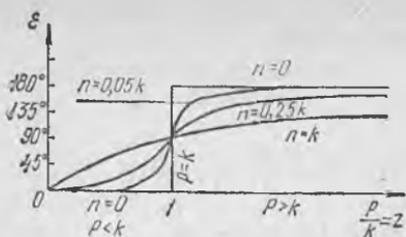
Қаршилик мавжуд бўлганда мажбурий тебранма ҳаракат частотаси p ва тебраниш даври $\tau = \frac{2\pi}{p}$ уйғотувчи куч частотаси ва даврига тенг бўлади ҳамда муҳитининг қаршилиги мажбурий тебранма ҳаракат частотаси ва даврига таъсир этмайди.

Қаршилик кучи мавжуд бўлганда мажбурий тебранма ҳаракат фазаси $(pt + \delta - \varepsilon)$ уйғотувчи куч фазаси $(pt + \delta)$ дан *фаза силжигини* деб аталадиган ва (17.55) формула ёрдамида аниқланадиган ε катталikka орқада қолади.

(17.53) дан кўрамизки, $\sin \varepsilon = \frac{2npA}{H_0} > 0$ бўлгани учун ε катталик $0 \leq \varepsilon \leq \pi$ сегментда ўзгаради. Шу сабабли ε ни (18.55) формула воситасида бир қийматли аниқлаш мумкин:

$$tg \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} \text{ ёки } tg \varepsilon = \frac{2 \frac{n}{k} \frac{p}{k}}{1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2} = \frac{2\beta z}{1 - z^2}.$$

Бу формулалардан кўрамизки, ε нинг қиймати уйғотувчи куч частотаси билан эркин тебраниш частотасининг нисбатига тенг бўл



17.16- расм.

ган $\frac{p}{k} = z$ катталikka ҳамда $\sin \epsilon$ ниш коэффициенти деб аталадиган $\frac{n}{k} = \beta$ нинг миқдорига боғлиқ бўлади. Бинобарин, β га маълум қийматларни бериб, ϵ билан z орасидаги муносабатни 17.16-расмдагидек тасвирлаш мумкин.

Қаршилик кучи таъсир этмаган ҳолда $n = 0$ ва $\operatorname{tg} \epsilon = 0$ бўлади.

Бу ҳолда кичик частота ($\frac{p}{k} < 1$) билан содир бўладиган мажбурий тебранма ҳаракат учун $\epsilon = 0$ бўлиб, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси билан уйғотувчи куч фазаси устма-уст тушади.

$p = k$ бўлса, яъни уйғотувчи куч частотаси эркин тебранишлар частотаси билан устма-уст тушса, сўниш коэффициенти β қандай қийматни қабул қилишидан қатъи назар,

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{2pz}{1-z^2} = \infty \quad \text{ва} \quad \epsilon = \frac{\pi}{2}$$

бўлади. Бинобарин, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси уйғотувчи куч фазасидан $\frac{\pi}{2}$ га орқада қолади.

Қатта частота ($\frac{p}{k} > 1$) билан содир бўладиган мажбурий тебранма ҳаракат учун $\epsilon = \pi$ бўлиб, мажбурий тебранма ҳаракат фазаси уйғотувчи куч фазасидан π га орқада қолади, яъни унга қарама-қарши бўлади.

k , p ва n ларнинг қийматлари маълум бўлса, 17.16-расмда тасвирланган графикдан силжиш фазаси ϵ ни бевосита аниқлаш мумкин.

Муҳитнинг қаршилик кучи мавжуд бўлганда мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси (17.54) формуладан аниқланади. Бу формуладаги касрнинг сурат ва махражини k^2 га бўлиб, мажбурий тебраниш амплитудаси учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$A = \frac{\frac{H_0}{k^2}}{\sqrt{[1 - (\frac{p}{k})]^2 + 4(\frac{n}{k})^2 (\frac{p}{k})^2}}$$

ёки

$$A = \frac{x_{cm}}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\beta^2 z^2}}, \quad (17.61)$$

бунда

$$z = \frac{p}{k}, \quad \beta = \frac{n}{k}, \quad x_{cm} = \frac{H_0}{k^2}$$

бўлиб, x_{cm} катталик уйғотувчи куч Q нинг максимал қийматига тенг бўлган ўзгармас H куч таъсирида нуқтанинг мувозанат ҳолатидан статик сил-юсишини ифодалайди.

(17.61) дан кўрамизки, сўниш коэф-фициенти β берилганда A мажбурий тебраниш амплитудаси z нинг функ-циясида иборат бўлади.

17.17-расмда тасвирланган эгри чи-зиқларнинг ҳар бири β нинг маълум қийматида A амплитуда билан z ора-сидаги муносабатни ифодалайди.

(17.61) дан кўрамизки,

$$(A)_{z=0} = x_{cm}; \quad (A)_{z=1} = \frac{x_{cm}}{2\beta} \quad (17.62)$$

ҳамда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A = 0,$$

яъни z ўқ 17.17-расмда тасвирланган эгри чизиқларнинг асимпто-тасини ифодалайди.

z қандай қийматни қабул қилганда A амплитуда максимал қийматга эга бўлишини аниқлаймиз. Бунинг учун (17.61) да илдиз остидаги ифодани $f(z)$ билан белгилаймиз, яъни

$$f(z) = (1 - z^2)^2 + 4\beta^2 z^2.$$

$f(z)$ нинг минимал қийматига A нинг максимал қиймати мос ке-лади.

$f(z)$ экстремал қийматларини аниқлаш учун унинг z бўйича би-ринчи ва иккинчи ҳосилаларини ҳисоблаймиз

$$\frac{df(z)}{dz} = -4z(1 - z^2) + 8\beta^2 z,$$

$$\frac{d^2f(z)}{dz^2} = -4 + 12z^2 + 8\beta^2.$$

$\frac{df(z)}{dz}$ ни нолга тенглаб, z нинг A амплитуда экстремал қий-матларга эришадиган ва бизни қизиқтирадиган $z \geq 0$ қийматларини аниқлаймиз:

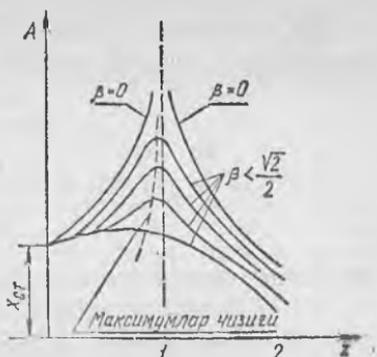
$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}.$$

Агар $\beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ бўлса, у ҳолда $z_1 = 0$ да $\frac{d^2f(z)}{dz^2} < 0$, яъни

$f(z)$ функция максимумга, A эса минимумга эришади.

$z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$ илдиз учун $\frac{d^2f(z)}{dz^2} = 8(1 - 2\beta^2) > 0$, яъни $z = z_2$

бўлганда $f(z)$ минимумга, A эса максимал қийматга эришади.



17.17- расм.

(17.61) формулага $z = \sqrt{1 - 2\beta^2}$ ни қўйиб, мажбурий тебраниш амплитудаси A нинг максимал қийматини аниқлаймиз:

$$A_{max} = \frac{2x_{cm}}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (17.63)$$

(17.63) ни (17.62) билан солиштириб,

$$A_{max} > (A)_{z=1}$$

бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

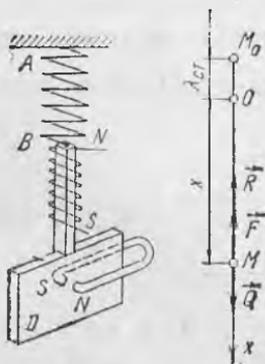
17.17-расмда пунктирли эгри чизиқ амплитуданинг максимал нуқталари орқали ўтади.

Бу расмдан кўрамизки, $z = 1$ га нисбатан z етарлича катта ёки кичик қийматларни қабул қилганда мажбурий тебранишлар амплитудаси муҳитнинг қаршилигига деярли боғлиқ бўлмайди. Аммо z катталиқ $z = 1$ га яқин қийматларни қабул қилганда муҳит қаршилигининг таъсири ниҳоятда катта бўлади.

Шундай қилиб, агар сўниш коэффициентини $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ шартни қамоатлантирса, у ҳолда $z = z_2 = \sqrt{1 - 2\beta^2}$ қийматга эришганда *резонанс* ҳодисаси рўй беради, яъни резонанс $z = \frac{p}{k}$ частоталар нисбати бирдан бирмунча кичик бўлганда содир бўлади. (17.63) га кўра $0 < \beta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ га мос бўлган резонанс пайтида мажбурий тебранма ҳаракат амплитудаси чекли бўлади.

Агар сўниш коэффициентини жуда кичик бўлса, у ҳолда $z = 1$ деб олиш мумкин. Бу ҳолда $p = k$ бўлганда, яъни уйғотувчи куч частотаси эркин тебраниш частотаси билан устма-уст тушганда резонанс содир бўлади.

17.17-расмда $\beta = 0$ га мос эгри чизиқ қаршилик мавжуд бўлмагандаги нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракатига мос келади. Агар $\beta = 0$, $p = k$ бўлса, (17.61) формулага биноан мажбурий тебраниш амплитудаси чексиз катта қийматга эга бўлади. Бу ҳолда тебранма ҳаракат қонуни (17.48) формула ёрдамида аниқланади.



17.18- расм.

✓ 17.6- масала. Бикирлиги $s = 19,6$ Н/м бўлган пружинага магнит стержени ва мис пластинка осилган, уларнинг массаси 50 г дан. Магнит стержень соленоиддан, мис пластинка магнит қутблари орасидан ўтади (17.18- расм). Соленоиддан $i = 20 \sin 8 \pi t$ қонун билан ўзгарувчи ток ўтади ва магнит стержени билан $0,016 \pi$ Н миқдорда ўзаро таъсир кучи ҳосил қилади. Мис пластинканинг уярма тоқлар туфайли ҳосил бўладиган тормозловчи кучи $k^* \sigma \Phi^2$ га тенг, бу ерда $k^* = 0,001$; $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб ва σ — пластинка тезлиги. Бошланғич пайтда магнит стерженини мис пластинка билан биргаликда чўзилмаган пружинага осилган ва унга вертикал

пистга йўналган $\dot{x}_0 = 5$ см/с бошланғич тезлик берилган. Пластинканинг ҳаракат тенгламаси аниқлансин.

Ечиш. Магнит стерженининг оғирлиги $m_1 g$ пластинканинг оғирлиги $m_2 g$ га тенг бўлгани учун пружинанинг статик чўзилиши

$$\lambda_{cm} = \frac{(m_1 + m_2) g}{c} = \frac{(0,05 + 0,05) \cdot 9,8}{19,6} = 0,05 \text{ м.}$$

Пластинка ва магнит стерженидан иборат система ва унинг инерция маркази тўғри чизиқли илгарилама ҳаракат қилади. Координаталар бошини система инерция марказининг статик мувозанат ҳолатида олиб, x ўқни вертикал пастга йўналтирамиз ҳамда кучлар схемасини тузамиз. Таъсир этувчи кучларнинг x ўқдаги проекцияси қуйидагича аниқланади:

$$F_x = -cx = -19,6x \text{ Н}, \quad R_x = -k \cdot v \Phi^2 = -0,5 \dot{x} \text{ Н}$$

$$Q_x = 0,32 \pi \sin 8 \pi t \text{ Н.}$$

Пластинканинг стержень билан биргаликдаги ҳаракат дифференциал тенгламасини

$$m \ddot{x} = -19,6x - 0,5 \dot{x} + 0,32 \pi \sin 8 \pi t$$

ёки ($m = 100$ г = 0,1 кг бўлгани учун)

$$\ddot{x} + 5 \dot{x} + 196x = 3,2 \pi \sin 8 \pi t$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламада

$$2n = 5, \quad k^2 = 196, \quad H_0 = 3,2 \pi \text{ ва } p = 8 \pi$$

Белгилашларни киритиб, уни

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = H_0 \sin pt \quad (1)$$

шаклида ёзамиз.

(1) тенгламанинг умумий ечимини қуйидагича оламиз:

$$x = x_1 + x_2. \quad (2)$$

Бу ерда x_1 билан $\ddot{x} + 2n \dot{x} + k^2 x = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечими, x_2 билан эса (1) тенгламанинг хусусий ечими белгиланган. x_1 ни аниқлаш учун ушбу ҳисоблашларни бажарамиз:

$$n = 2,5, \quad n^2 = 6,25, \quad k = \sqrt{196} = 14,$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{196 - 6,25} = 13,77.$$

$n < k$ бўлгани учун бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини (17.15) кўринишида оламиз:

$$x_1 = e^{-2,5t} (C_1 \cos 13,77t + C_2 \sin 13,77t) \quad (3)$$

(1) тенгламанинг хусусий ечимини

$$x_2 = A \sin (pt - \epsilon) \quad (4)$$

кўринишда излаймиз. (4) дан биринчи ва иккинчи ҳосилаларни топамиз:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= pA \cos (pt - \epsilon), \\ \ddot{x}_2 &= -p^2 A \sin (pt - \epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(4) ва (5) ни (1) га қўйиб, ушбу тенгламани оламиз:

$$-p^2 A \sin (pt - \epsilon) + 2n p A \cos (pt - \epsilon) + k^2 A \sin (pt - \epsilon) = H_0 \sin pt.$$

Бунда

$$H_0 \sin pt = H_0 \sin (pt - \epsilon + \epsilon) = H_0 \sin (pt - \epsilon) \cdot \cos \epsilon + H_0 \cos (pt - \epsilon) \cdot \sin \epsilon$$

тенглик ўринли бўлишини назарда тутиб, тенгламанинг чап ва ўнг томонларидаги $\sin(p t - \varepsilon)$ ва $\cos(p t - \varepsilon)$ лар олдидаги мос коэффициентларни тенглаштирсак,

$$\begin{aligned} A(k^2 - p^2) &= H_0 \cos \varepsilon \\ 2npA &= H_0 \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Бу тенглалардан A ва ε лар аниқланадиган

$$A = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}$$

муносабатларни олампиз.

Кўрилайтган ҳолда

$$\begin{aligned} A &= \frac{3,2 \pi}{\sqrt{(196 - 631,65)^2 + 4 \cdot 6,25 \cdot 631,65}} = 0,022 \text{ м}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 25,13}{196 - 631,65} = -0,2884. \end{aligned} \quad (6)$$

Шундай қилиб, $\operatorname{tg} \varepsilon < 0$, лекин $\sin \varepsilon > 0$ бўлгани учун ε бурчакши иккинчи чоракда олиш керак. Бинобарин, $\operatorname{tg}(\pi - \varepsilon) = 0,2884$, бундан $\pi - \varepsilon = 16^\circ 5'$ ҳамда

$$\varepsilon = \pi - \frac{16^\circ 5'}{180^\circ}, \quad \varepsilon = 0,91 \pi. \quad (7)$$

Демак, пластинка

$$x_2 = 0,22 \sin(8\pi t - 0,91\pi) \text{ м} \quad (8)$$

қонун асосида мажбурий тебранма ҳаракатда бўлади.

(3) ва (8) ни (2) га қўйиб, (1) тенгламанинг умумий ечимини қуйидагича ёза олампиз:

$$\begin{aligned} x &= -[e^{-2,5t} (C_1 \cos 13,77t + C_2 \sin 13,77t) + \\ &+ 0,022 \sin(8\pi t - 0,91\pi)] \text{ м}. \end{aligned} \quad (9)$$

C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаш учун \dot{x} ни ҳисоблаймпиз:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2,5 e^{-2,5t} (C_1 \cos 13,77 t + C_2 \sin 13,77 t) + \\ &+ e^{-2,5t} (-13,77 C_1 \sin 13,77 t + 13,77 C_2 \cos 13,77 t) + \\ &+ 0,55 \cos(8\pi t - 0,91\pi). \end{aligned} \quad (10)$$

(9) ва (10) тенглаларга $t=0$ да $x = -\lambda_{cm} = -0,05 \text{ м}$, $\dot{x} = 5 \text{ см/с} = 0,05 \text{ м/с}$ бошланғич шартларни қўйсак,

$$-0,05 = C_1 - 0,022 \sin 0,91 \pi,$$

$$0,05 = -2,5 C_1 + 13,77 C_2 + 0,55 \cos(-0,91 \pi).$$

Бу тенглалардан C_1 ва C_2 ларни аниқлаймпиз:

$$C_1 = -0,05 + 0,022 \sin 0,91 \pi = -0,05 + 0,022 \sin 163^\circ 48' = -0,0439;$$

$$C_2 = \frac{0,05 - 2,5 \cdot 0,0439 - 0,55 \cos(-163^\circ 48')}{13,77} = 0,0342.$$

C_1 ва C_2 ларнинг қиймагларини (9) га қўйиб, пластинканинг ҳаракат қонунини қуйидагича ифодалаймпиз:

$$\begin{aligned} x &= [e^{-2,5t} (-0,0439 \cos 13,77 t + 0,0342 \sin 13,77 t + \\ &+ 0,022 \sin(8\pi t - 0,91\pi))] \text{ м}. \end{aligned}$$

Пластинканинг ҳаракат тенгламасини (17.57a) кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бунинг учун C_1 ва C_2 ўзгармаслар ўрнига a ва α янги ўзгармасларни

$$C_1 = a \sin \alpha, \quad C_2 = a \cos \alpha$$

формулалар ёрдамида киритамиз. Бундан

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{0,0439^2 + 0,0342^2} = 0,0556 \text{ м,}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{-0,0439}{0,0342} = -1,2836.$$

Шундай қилиб, $\operatorname{tg} \alpha < 0$ бўлади, лекин $\sin \alpha < 0$ бўлгани учун α бурчакни тўртинчи чоракда олиш керак:

$$\alpha = -52^\circ 5' \text{ ёки } \alpha = 307^\circ 55' = 1,71 \pi = 5,372 \text{ рад.}$$

Натижада пластинканинг ҳаракат тенгламасини яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x = [0,0556 e^{-2,5 t} \sin (13,77 t + 1,71 \pi) + 0,022 \sin (8 \pi t - 0,91 \pi)] \text{ м.}$$

Бу тенгламада биринчи қўшилувчи тобралиш даври

$$T = \frac{2 \pi}{k_1} = \frac{2 \pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{6,28}{13,77} = 0,456 \text{ с}$$

бўлган эркин тобралишни, иккинчи қўшилувчи эса, частотаси уйғотувчи кучнинг частотасига тенг бўлган мажбурий тобралишни ифодалайди.

18-БОБ. БОҒЛАНИШДАГИ МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ҲАРАКАТИ

18.1-§. Боғланишдаги нуқта динамикасининг асосий тенгламаси

Агар нуқтанинг ҳаракати боғланишлар билан чекланган бўлса, бундай нуқта *боғланишдаги нуқта* дейилади.

Статика бўлимида кўрганимиздек, jismlar сирт, ип, занжир, стержень ёки шарнирлар воситасида ўзаро боғланган бўлиши мумкин. Аммо боғланишлар қандай предметлар воситасида амалга оширилишидан қатъи назар боғланишларни аналитик усулда ифодалаш мумкин.

Бу бобда актив кучлар таъсиридаги нуқтанинг қўзғалмас сирт устидаги ёки берилган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракати ўрганилади. Мазкур сирт ёки эгри чизиқнинг тенгламаси *боғланиш тенгламаси* дейилади.

Боғланишдаги нуқтанинг ҳаракатини ўрганишда статика бўлимида кўрилган боғланишдан бўшатиш принциpidан фойдаланилади. Бунинг учун боғланишнинг M нуқтага таъсирини боғланиш реакция кучи \vec{R} билан алмаштириб, мазкур нуқтани актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси \vec{F} ва боғланиш реакция кучи \vec{R} таъсиридаги «эркин нуқта» деб қараймиз. У ҳолда Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра боғланишдаги нуқта динамикасининг асосий қонуни

$$m \vec{w} = \vec{F} + \vec{R} \quad (18.1)$$

кўринишда ёзилади.

Агар моддий нуқта ҳаракатланадиган сирт ёки эгри чизиқ идеал

силлиқ бўлмаса, у ҳолда боғланиш реакция кучи \vec{R} ни нормал реакция кучи \vec{N} ва динамик ишқаланиш кучи $\vec{F}^{\text{ишқ}}$ дан ташкил топган деб қараш мумкин. Шу сабабли идеал силлиқ бўлмаган сирт ёки чизиқ бўйлаб ҳаракатланаётган нуқта учун (18.1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}^{\text{ишқ}}. \quad (18.2)$$

Динамик ишқаланиш кучи $\vec{F}^{\text{ишқ}}$ нуқтанинг тезлик вектори \vec{v} га қарама-қарши йўналади ва Кулон қонунига асосан

$$\vec{F}^{\text{ишқ}} = -f^{\text{ишқ}} N \vec{\tau}^{\circ}$$

муносабат ўринли бўлади. Бунда $f^{\text{ишқ}}$ — нуқта ҳаракатлангандаги ишқаланиш коэффициентини; N — нормал реакция кучининг модули; $\vec{\tau}^{\circ}$ нуқта траекториясига ҳаракатнинг мусбат йўналиши бўйича ўтказилган уринманинг бирлик вектори.

Агар моддий нуқта идеал силлиқ сирт ёки эгри чизиқ бўйича ҳаракатланса, динамик ишқаланиш кучи $\vec{F}^{\text{ишқ}}$ мавжуд бўлмайди ва бундай нуқта учун

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{N} \quad (18.3)$$

тенглама ўринли бўлади.

(18.2) ёки (18.3) тенгламалар воситасида нуқтанинг массаси, унга таъсир этувчи актив куч ва нуқта ҳаракатланадиган сирт ёки эгри чизиқнинг тенгламаси берилганда: а) нуқтанинг мазкур сирт ёки эгри чизиқ бўйича ҳаракат қонунини аниқлаш, шунингдек, б) нуқта ҳаракатланганда ҳосил бўладиган реакция кучи, яъни боғланишнинг динамик реакция кучини аниқлаш каби боғланишдаги нуқта динамикасининг асосий масалаларини ечиш мумкин.

18.2*-§. Қўзғалмас силлиқ сирт устидаги нуқтанинг ҳаракати. Лагранжнинг биринчи хил тенгламалари

Агар M нуқта бирор қўзғалмас силлиқ сирт устида ҳаракатланса, у ҳолда M нуқтанинг координаталари

$$f(x, y, z) = 0 \quad (18.4)$$

сиртнинг тенгламасини қаноатлантириши керак.

(18.3) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, қўзғалмас сирт устида ҳаракатланувчи нуқтанинг мазкур ўқларга нисбатан ҳаракат дифференциал тенгламаларини оламир:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N_x, \\ m\ddot{y} &= Y + N_y, \\ m\ddot{z} &= Z + N_z. \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

Бу ерда X, Y, Z билан \vec{F} кучининг, N_x, N_y, N_z билан нормал реакция кучи \vec{N} нинг x, y, z ўқлардаги проекциялари белгиланган.

f функциянинг градиенти сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналгани учун

$$\vec{N} \parallel \text{grad } f$$

бўлади. Бунда

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

бўлиб, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ хусусий ҳосилалар $\text{grad } f$ нинг координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди. Шу сабабли \vec{N} ва $\text{grad } f$ нинг коллинеарлик шартини

$$\vec{N} = \lambda \text{grad } f$$

ёки

$$N_x \vec{i} + N_y \vec{j} + N_z \vec{k} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (18.6)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда λ — пропорционаллик коэффициенти бўлиб, боғланиш қўнайтувчиси дейилади.

(18.6) дан N_x , N_y , N_z ларни аниқлаб, (18.5) га қўйсак,

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m \ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

тенгламаларни олампиз. Бу тенгламалар қўзғалмас сирт устида ҳаракатланувчи нуқта учун Лагранжнинг биринчи хил тенгламаларини ифодалайди.

(18.7) ва боғланиш тенгламаси (18.4) дан ташкил топган тўртта тенгламалар воситасида тўртта x , y , z , λ номаълумларни вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш мумкин.

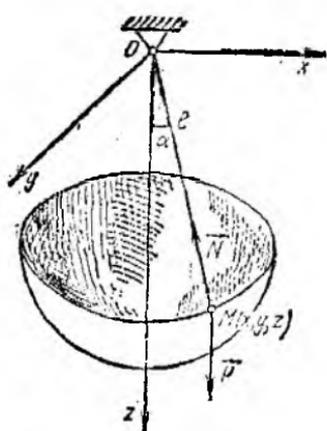
(18.6) га асосан боғланиш реакция кучининг нормалдаги проекцияси

$$N_n = \pm \lambda \text{grad } f = \pm \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \quad (18.8)$$

формуладан аниқланади.

Агар нормал реакция кучи \vec{N} нинг йўналиши M нуқтада сиртга ўтказилган ташқи нормаль бўйича йўналса, (18.6) формулада мусбат ишора; ташқи нормалга қарама-қарши йўналса, манфий ишора олинади. Бунда ташқи нормаль деганда $f(x, y, z) = 0$ сиртга ўтказилган ва $f(x, y, z) > 0$ соҳага йўналган нормаль тушунилади.

Ташқи нормалнинг қандай танлаб олиниши сирт тенгламаси қандай олинишига боғлиқ бўлади. Чунки (18.4) тенглама чап то-



18.1- расм.

монининг ишорасини ўзгартириш билан ташқи нормаль йўналишини қарама-қарши томонга ўзгартириш мумкин.

Шундай қилиб, боғланишдаги нуқтанинг ҳаракати фақат таъсир этувчи кучлар ва бошланғич шартларгагина эмас, балки мазкур нуқтага қўйилган боғланишларга ҳам боғлиқ бўлади. Шунингдек, бошланғич шартлар ихтиёрий бўлмай, балки боғланиш тенгламаларини қаноатлантириши керак.

18.1- масала. Оғирлиги $P = mg$ бўлган M молдий нуқта узунлиги l га тенг, чўзилмайдиган илга осилган бўлиб, ўзининг оғирлик кучи таъсирида сферик сирт ичида ҳаракатланади (18.1-расм). Иланинг оғирлигини эътиборга олмай, нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгласини тузишни ҳамда иланинг таранглик кучи аниқлаш

сини. Қандай бошланғич тезликда M нуқта боғланишнинг доимо қаноатлантиради? Бу масала сферик тебрангичнинг ҳаракати ҳақидаги масаладир.

Ечиш. Қўзғалмас координатага ўқларини 18.1-расмдагидек танлаб олиб, оғирлик кучи \vec{P} нинг бу ўқлардаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = P = mg.$$

M нуқта учун OM ил боғланишнинг вазифасини ўтайди. Ил чўзилмагани туфайли M нуқта мувозанат ҳолатидан оғдрилиб, унга \vec{r}_0 бошланғич тезлик берилганда мазкур нуқта радиуси l га тенг сферик сирт ичида ҳаракатланади. Агар нуқтанинг координаталарини x, y, z билан белгиласак, боғланиш тенгласини

$$f(x, y, z) = l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (1)$$

кўринишида ёза оламиз. Бундан

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z$$

ҳосилаларни ҳисоблаб, Лагранжнинг биринчи хил тенгламалари (18.7) ни тузамиз:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= -2\lambda x, \\ m \ddot{y} &= -2\lambda y, \\ m \ddot{z} &= -2\lambda z + mg. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Бу тенгламалар нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини ифодалайди. Нуқтанинг ҳаракатини аниқлаш учун (2) ва (1) тенгламаларни биргаликда ечиш керак.

(2) дан λ ни йўқотиш учун бу тенгламаларнинг биринчисини \dot{x} га, иккинчисини \dot{y} га ва учинчисини \dot{z} га кўпайтириб қўшамиз:

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} \right) = mg \dot{z} - \lambda \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2)$$

ёки $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ ҳамда (1) га кўра $x^2 + y^2 + z^2 = l^2 = \text{const}$ эканлигини эътиборга олиб интегралласак,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgz - mgz_0 \quad (3)$$

тенглик ўринли бўлади. Бунда v_0 билан нуқтанинг бошланғич тезлиги, z_0 билан нуқтанинг бошланғич пайтдаги амплитудаси белгиланган.

Кўрилатган ҳолда боғланиш реакция кучининг нормалдаги проекцияси

$$N_n = \lambda \operatorname{grad} f = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = 2\lambda l \quad (4)$$

формуладан аниқланади. Бу ерда сфера ичидаги соҳа учун $f(x, y, z) > 0$ бўлгани учун l нормаль l радиус бўйлаб O нуқтага йўналади. Боғланиш реакция кучи (инининг таранглик кучи) \vec{N} ҳам l нормаль бўйлаб йўналгани учун (4) да мусбат инсора олинади.

Боғланиш кўпайтувчиси λ ни (2) дан ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун (2) тенгламаларнинг биринчисини x га, иккинчисини y га, учинчисини z га кўпайтириб қўшамиз:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \right) - m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = mgz - 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

ёки боғланиш тенгламаси (1) ни эътиборга олсак,

$$2\lambda l = mgz - mv^2. \quad (5)$$

(5) ни назарда тутиб, (4) дан боғланиш реакция кучининг нормалдаги проекциясини аниқлаймиз:

$$N_n = \frac{mgz}{l} + \frac{mv^2}{l}$$

ёки (3) га кўра

$$N_n = \frac{3mgz}{l} + \frac{mv_0^2}{l} - 2mg \frac{z_0}{l}. \quad (6)$$

(6) тенгликдан фойдаланиб, нуқта ҳамини боғланишни қаноатлантириши учун бошланғич v_0 тезлик қандай шартин қаноатлантиришни топиш мумкин. Бунинг учун $z = -l$ бўлганда N_n минимум қийматга эга бўлишини ва z_0 нинг ҳар қандай қийматида $(N_n)_{\min} > 0$ бўлиши учун

$$(N_n)_{\min} = \frac{mv_0^2}{l} - mg \left(3 + \frac{2z_0}{l} \right) > 0$$

шарт бажарилишини назарда тутамиз. z_0 нинг энг катта қиймати l га тенг бўлгани учун нуқта боғланиш тенгламасини

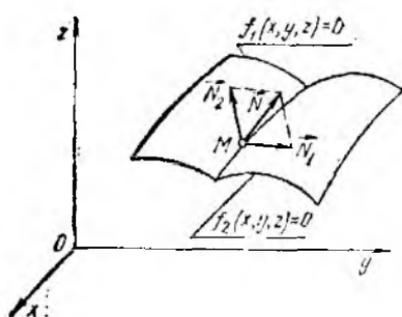
$$v_0 > \sqrt{5gl}$$

шарт бажарилгандагина қаноатлантиради.

18.3-§. Силлиқ эгри чизик бўйлаб ҳаракатланувчи нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари

Айтайлик, M нуқта $Oxuz$ координаталар системасига нисбатан қўзғалмас бўлган силлиқ эгри чизик бўйлаб ҳаракатлансин. Бу чизикни иккита

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (18.9)$$



18.2- расм.

сиртларнинг кесишган чизиғи деб қараш мумкин. Бу сиртларни идеал силлиқ деб қарасак, у ҳолда уларнинг ҳар бирини моддий нуқтага таъсирини мос равишда \vec{N}_1 ва \vec{N}_2 нормал реакция кучлари билан алмаштириш мумкин (18.2- расм). Бинобарин, силлиқ эгри чизиқнинг нормал реакция кучи \vec{N}_1 ва \vec{N}_2 ларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади:

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2.$$

Шу сабабли эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи нуқта учун (18.3) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\vec{\omega} = \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2. \quad (18.10)$$

(18.10) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, қўзғалмас эгри чизиқ бўйича ҳаракатланувчи нуқтанинг мазкур ўқларга нисбатан ҳаракат дифференциал тенгламаларини оламиз:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N_{1x} + N_{2x}, \\ m\ddot{y} &= Y + N_{1y} + N_{2y}, \\ m\ddot{z} &= Z + N_{1z} + N_{2z}. \end{aligned} \right\} \quad (18.11)$$

\vec{N}_1 ва \vec{N}_2 нормал реакция кучлари мос равишда $\text{grad } f_1$ ва $\text{grad } f_2$ га коллинеар бўлгани туфайли

$$\left. \begin{aligned} \vec{N}_1 &= \lambda_1 \text{grad } f_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \vec{k} \right), \\ \vec{N}_2 &= \lambda_2 \text{grad } f_2 = \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \vec{k} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

Бунда λ_1 ва λ_2 лар боғланиш кўпайтувчиларини ифодалайди.

(18.12) ни назарда тутиб, (18.11) ни

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(18.13) тенгламалар қўзғалмас силлиқ эгри чизиқ бўйича ҳаракатланувчи нуқта учун Лагранжнинг биринчи хил тенгламаларини ифодалайди.

(18.13) ва боғланиш тенгламалари (18.9) дан ташкил топган 5 та тенгламалар системаси воситасида номаълум x, y, z, λ_1 ва λ_2 ларни вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш мумкин.

(19.12) га асосан боғланиш реакция кучларининг n_1 ва n_2 нормаллардаги проекциялари

$$\left. \begin{aligned} N_{1n} &= \pm \lambda_1 |\text{grad } f_1| = \pm \lambda_1 \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2} \\ N_{2n} &= \pm \lambda_2 |\text{grad } f_2| = \pm \lambda_2 \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

Агар \vec{N}_1 ва \vec{N}_2 мос равишда $f_1(x, y, z) = 0$ ва $f_2(x, y, z) = 0$ сиртларга ўтказилган ташқи нормаль бўйича йўналса, (18.14) да мусбат ишора олинади.

18.4-§. Берилган эгри чизик бўйлаб ҳаракатланувчи нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг табиий координата ўқларидаги ифодаси

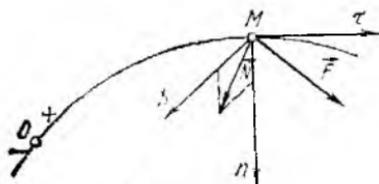
Нуқта қўзғалмас эгри чизик бўйлаб ҳаракатланганда унинг ҳаракатини табиий координата ўқларига нисбатан ўрганиш қулай бўлади. M нуқта актив куч \vec{F} таъсирида қўзғалмас силлиқ эгри чизик бўйлаб ҳаракатлانسин. Бу эгри чизикда бирор O нуқтани саноқ боши сифатида оламиз ва ёй координатасининг мусбат ва манфий йўналишини кўрсатамиз. M нуқтада уринма τ , бош нормаль n ва бинормаль b лардан ташкил топган табиий координата ўқларини (8.5-§) ўтказамиз (18.3-расм) ва M нуқтанин эгри чизик бўйлаб ҳаракатини ифодаловчи (18.3) тенгламани табиий координата ўқларига проекциялаймиз:

$$\left. \begin{aligned} m\omega_\tau &= F_\tau \\ m\omega_n &= F_n + N_n \\ m\omega_b &= F_b + N_b \end{aligned} \right\}$$

ёки тезланишнинг $\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \ddot{s}$, $\omega_n = \frac{v^2}{\rho}$, $\omega_b = 0$ проекцияларини эътиборга олсак,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s} &= F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n + N_n \\ 0 &= F_b + N_b \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

(18.15) тенгламалар қўзғалмас силлиқ эгри чизик бўйича ҳаракат-



18.5-рasm.

ланувчи нуқтанинг табиий координата ўқларидаги ҳаракат дифференциал тенгламалари дейилади.

Бу тенгламаларнинг (18.11) тенгламаларга нисбатан афзаллиги шундан иборатки, (18.15) тенгламалар воситасида нуқтанинг ҳаракат қонунини ва боғланиш реакция кучларини алоҳида-алоҳида аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (18.15) нинг биринчисида боғланиш реакция кучи қатнашмагани туфайли бу тенгламани интеграллаб нуқтанинг тезлигини ва берилган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракат қонунини аниқлаш мумкин; қолган иккита тенгламалар воситасида боғланиш реакция кучининг N_n ва N_b таъкил этувчиларини, бинобарин, боғланиш реакция кучини аниқлаш мумкин.

Айтайлик, моддий нуқта бир текисликда ётувчи силлиқ қўзғалма эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатлансин. Агар нуқтага эгри чизиқ текислигида ётувчи \vec{F} актив куч таъсир этса, у ҳолда $N_b = 0$ бўлиб, нуқтага бош нормаль бўйича йўналган боғланиш реакция кучи \vec{N} ҳам таъсир этади. Бинобарин, кўрилатган ҳолда (18.15) ни

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{s} &= F_{\tau} \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + N_n \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

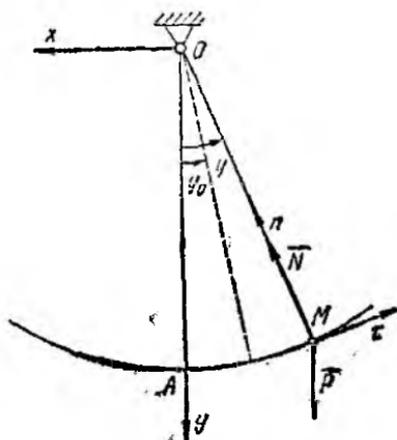
Агар нуқта силлиқ бўлмаган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланса, (18.15) ва (18.16) тенгламаларининг биринчисида динамик ишқаланиш кучи ($F_{\tau}^{\text{ишқ}} = -f^{\text{ишқ}} N$) ҳам қатнашади.

18.5-§. Математик тебрангич

Вертикал текисликда жойлашган силлиқ айлана бўйлаб оғирлик кучи таъсирида ҳаракатланувчи моддий нуқта *математик тебрангич* дейилади. Масалан, бир учи маҳкамлашган чўзилмайдиган ва оғирлиги ҳисобга олинмайдиган илга осилган M моддий нуқтани математик тебрангич деб қараш мумкин. M нуқтанинг ҳолатини илгнинг вертикал билан ташкил қилган φ бурчаги билан аниқлаймиз.

Айтайлик, нуқтанинг массаси m , илгнинг узунлиги l га тенг бўлсин. M нуқтага унинг оғирлик кучи \vec{P} ва илгнинг реакцияси \vec{N} таъсир этади (18.4-расм).

M нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш учун



18.4-расм.

$$v_{\tau} = \dot{s} = l \dot{\varphi}, \quad \rho = l,$$

$$F_{\tau} = P_{\tau} = -mg \sin \varphi, \quad F_n = P_n = mg \cos \varphi$$

бўлишини эътиборга оламиз. У ҳолда (18.10) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$ml \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi,$$

$$ml \dot{\varphi}^2 = -mg \cos \varphi + N_n.$$

Бу тенгламаларни

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (18.17)$$

$$N_n = ml \dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi \quad (18.18)$$

кўринишида ифодалани мумкин. (18.17) тенглама воситасида математик тебрангичнинг ҳаракат қонунини, (18.18) ёрдамида ипнинг реакция кучини аниқлаш мумкин.

(18.18) дан кўрамизки, ипнинг реакцияснни аниқлаш учун $\dot{\varphi}^2$ катталикини φ бурчакнинг функцияси сифатида ифодалаш керак. Бунинг учун

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}$$

муносабат ўринли бўлишини назарда тутиб, (18.17) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{1}{2} l d\dot{\varphi}^2 = -g \sin \varphi d\varphi.$$

Бу тенгламани $t = 0$ да $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ бошланғич шартларда интеграллаймиз:

$$\frac{1}{2} l \int_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi}^2 = -g \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi$$

ёки

$$l \dot{\varphi}^2 = 2g (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + l \dot{\varphi}_0^2. \quad (18.19)$$

(18.19) ни (18.18) га қўйиб, N_n ни аниқлаймиз:

$$N_n = ml \dot{\varphi}_0^2 + mg (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0).$$

Агар нуқтанинг бошланғич тезлиги $v_0 = l \dot{\varphi}_0$ бўлса, ипнинг реакцияси

$$N_n = \frac{m v_0^2}{l} + mg (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0) \quad (18.20)$$

формуладан аниқланади.

Шундай қилиб, ипнинг реакцияси тебрангичнинг бошланғич оғиш бурчаги φ_0 ва бошланғич тезлиги v_0 га боғлиқ бўлади.

(18.20) дан фойдаланиб, нуқта доимо боғланишни қаноатлантириши учун (яъни ип эгилмаслиги учун) бошланғич тезлик қандай қийматга эга бўлишини аниқлаш мумкин. Бунинг учун $\varphi = \pi$ бўлганда N_n минимум қийматга эришишини ва φ_0 нинг ҳар қандай қийматида $(N_n)_{min} \geq 0$ бўлиши учун

$$(N_n)_{min} = \frac{mv_0^2}{l} - mg(3 + 2 \cos \varphi_0) > 0$$

ёки

$$v_0^2 > (3 + 2 \cos \varphi_0) gl$$

шарт бажарилишини назарда тутамиз.

Хусусан, $\varphi_0 = 0$ бўлса,

$$v_0 > \sqrt{5gl} \quad (18.21)$$

шарт бажарилганда ип доимо эгилмайди (таранг ҳолда бўлади).

Дастлаб тебрангичнинг $\sin \varphi \approx \varphi$ шартни қаноатлантирувчи кичик тебранма ҳаракатини текшираемиз. Бу ҳолда тебрангичнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (18.22)$$

Бу эркин тебранма ҳаракатдаги нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасига ўхшашдир. (18.22) нинг умумий ечимини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\varphi = a \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right). \quad (18.23)$$

Бунда a бурчак амплитудасини, α бошланғич фазани ифодалайди ҳамда ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

Шундай қилиб, *математик тебрангичнинг кичик тебранишлари гармоник тебранма ҳаракатдан иборат бўлади.*

Тебрангичнинг кичик тебранишлар даври

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (18.24)$$

формуладан аниқланади. (18.24) дан кўрамизки, тебрангичнинг кичик тебранишлар даври бошланғич оғиш бурчаги φ_0 га боғлиқ бўлмайди.

φ бурчак ихтисрий қийматни қабул қилиши мумкин бўлган ҳолда тебрангичнинг ҳаракатини текшириш учун (18.19) ни $t = 0$ да $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$ бошланғич шартларда интеграллаймиз. У ҳолда (18.19) ни

$$\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Шу сабабли

$$\pm \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} \quad (18.25)$$

муносабат ўринли бўлади. Агар тебрангич φ бурчак ортадиган йўналишда ҳаракатланса, (18.25) да мусбат ишора, акс ҳолда манфий ишора олинади.

(18.25) да ўзгарувчиларни ажратиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\pm d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} dt.$$

Бу тенгламада косинусларни ярим бурчак синуслари

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

орқали алмаштирадик, ушбу тенглама ўринли бўлади:

$$\frac{\pm d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} dt. \quad (18.26)$$

(18.26) ни интеграллаш учун $\sin \frac{\varphi_0}{2}$ ни k билан белгилаб, φ ўрнига

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \alpha \quad (18.27)$$

тенглик ёрдамида аниқланадиган α бурчакни киритамиз. \forall ҳолда

$$\frac{d\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = k \cos \alpha d\alpha,$$

бундан

$$d\varphi = \frac{2k \cos \alpha d\alpha}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2k \cos \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Натижада (18.26) ни

$$\frac{\pm d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt \quad (18.28)$$

кўринишда ёзиш мумкин. $t = 0$ да $\varphi = \varphi_0$ бошлангич шартларни ҳисобга олиб, (18.27) дан $\alpha = \alpha_0$ бошлангич қиймат учун

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = k \sin \alpha_0$$

ёки

$$\sin \alpha_0 = 1, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$$

ифодани оламиз.

Шундай қилиб, (18.28) ни 0 дан t гача интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$t = \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad (18.29)$$

Бинобарин, t вақт билан α орасидаги боғланиш биринчи хил тўла эллиптик интеграл орқали ифодаланади.

(18.24) дан кўрамизки, φ^2 манфий қийматга эга бўлмагани учун $\cos \varphi \geq \cos \varphi_0$ ёки $|\varphi| \leq \varphi_0$, яъни φ бурчак $-\varphi_0$ дан $+\varphi_0$ гача ўзгаради. Шунингдек OA вертикалга nisbatan симметрик бўлган нуқталарда φ^2 бир хил қийматга эга бўлади ҳамда $\varphi = \pm \varphi_0$ да $\dot{\varphi}^2$ нолга тенг бўлади. Бинобарин, худди кичик тебранилар каби φ бурчак ихтиёрий қийматни қабул қилганда ҳам тебрангич φ_0 бурчак билан аниқланадиган чекка ҳолатлар орасида тебранма ҳаракатда бўлади.

Мазкур тебранилар даври T_1 ни аниқлаш учун (18.29) даги интегралнинг қуйи чегараси тебрангич $\varphi = \varphi_0$ га оғандаги чекка ҳолатига мос келишини эътиборга оламиз. Бу ҳолатдан тебрангич $\varphi = -\varphi_0$ чекка ҳолатгача ҳаракатланганда (18.29) да манфий шора олинади. Тебрангич чекка ҳолатдан энг pastки ҳолатигача кўчишида ўтган вақт тебранилишнинг чорак даврига тенг бўлишини эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} T_1 &= - \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \end{aligned} \quad (18.30)$$

ёки

$$T_1 = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K.$$

Бунда $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$ биринчи хил тўла эллиптик интегрални ифодалайди. K нинг қиймати бошлангич оғини бурчаги φ_0 га боғлиқ бўлиб, махсус функциялар жадвалидан аниқланади.

(18.30) даги интеграл остидаги ифодани қаторга ёйиб,

$$\frac{d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} = \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \alpha + \dots \right) d\alpha$$

ифодани оламиз. Бундан ташқари

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \alpha d\alpha = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2}$$

бўлишини эътиборга олиб, тебраниш даври учун

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right] \quad (18.31)$$

формулани оламиз.

(18.31) дав кўрамызми, бошланғич огиш бурчаги φ_0 катталашган сари тебраниш даври T_1 ҳам орта боради.

φ_0 нинг кичик қиймати учун $\sin \frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2}$ деб, (18.31) да фақат биринчи иккита ҳадни эътиборга олсак, тебраниш даврининг тақрибий қиймати қуйидагича ёзилади:

$$T_1 \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right). \quad (18.32)$$

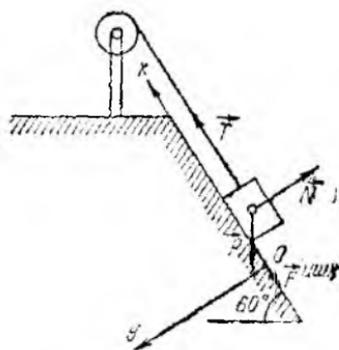
(18.24) ва (18.32) формулалардаги тебраниш даври бир-бирдан $\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right)$ га фарқ қилади. Бу фарқнинг қиймати φ_0 га боғлиқ бўлиб, қуйидаги жадвалдан аниқланади:

φ_0	10°	20°	40°	60°	90°
$1 + \frac{\varphi_0^2}{16}$	1,0019	1,0076	1,0304	1,0684	1,1539

18.2-масала. Массаси $m = 600$ кг бўлган юк радиуси $r = 0,2$ м га тенг чигиринққа ўраладиган трес воситасида горизонт билан 60° бурчак ташқил этувчи қия текислик бўйлаб кўтарилди (18.5-расм). Юкнинг қия текислик билан ишқаланиш коэффициенти $\mu_{ишқ} = 0,2$. Агар чигиринқ $\varphi = 0,4$ r^3 қонун асосида айланса, треснинг тарағлиқ кучи вақтнинг функцияси сифатида аниқлашми ҳамда кўтарини бошлангандан 2 секунд ўтгандаги тарағлиқ кучининг миқдори аниқлашми.

Ечили. Координата ўқларини 18.5-расмдагидек тавлаб оламиз. Координаталар бошми юкнинг бошланғич ҳолатида оламиз.

Юк x ўқ бўйлаб ҳаракатланганлиги туфайли боғланми тенгмасини $y = const$ кўри-



18.5- расм.

нишда ёзиш мумкин. Юк ихтиёрий ҳолатни эгаллаган пайтда унга таъсир этувчи кучларни кўрсатамиз. Қия текислик бўйлаб ҳаракатланувчи юкка унинг «гирлик кучи $\vec{P} = mg$ » тряс бўйлаб йўналган тряснинг таранглик кучи \vec{T} қия текислиكنинг нормал реакция кучи \vec{N} ва қия текислик бўйлаб пасга йўналган ишқаланиш кучи $\vec{f}^{\text{ишқ}}$ таъсир этади.

(18.2) га асосан

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{f}^{\text{ишқ}}$$

ёки

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + (-f^{\text{ишқ}} \cdot \vec{n}) \quad (1)$$

тенглама ўринди бўлади. Бунда \vec{n} билан x ўқнинг бирлик вектори белгиланган. (1) ни x ва y ўқларга проекциялаб, юкнинг қия текислик бўйлаб ҳаракат дифференциал тенгламаларини оламиз:

$$m\ddot{x} = -mg \cos 30^\circ + T - f^{\text{ишқ}} N, \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = -mg \cos 60^\circ + N. \quad (3)$$

$y = \text{const}$ бўлгани учун $\ddot{y} = 0$. Буни эътиборга олиб, (3) дан N ни аниқлаймиз:

$$N = mg \cos 60^\circ.$$

Юкнинг x ўқ бўйлаб тезланиши \ddot{x} чиғирик тўғрисидаги нуқтанинг урнма тезланишига тенг бўлгани учун

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi} = 0,2 \cdot 2,4 t = 0,48 t \text{ м.}$$

Натижада (2) дан тряснинг таранглик кучи T ни аниқлаш мумкин:

$$T = mg \cos 30^\circ + f^{\text{ишқ}} mg \cos 60^\circ + m\ddot{x} = 600 \cdot 9,8 \frac{\sqrt{3}}{2} + \\ + 0,2 \cdot 600 \cdot 9,8 \cdot \frac{1}{2} + 600 \cdot 0,48 t = (5680 + 288 t) \text{ Н} = (5,68 + 0,288 t) \text{ кН.}$$

$$t = 2 \text{ с да } T = 6,256 \text{ кН.}$$

19-боб. МОДДИЙ НУҚТАНИНГ НИСБИЙ ҲАРАКАТ ДИНАМИКАСИ

19.1-§. Моддий нуқтанинг нисбий ҳаракат дифференциал тенгламалари. Кў ирнма ва Қориолис инерция кучлари

Юқоридаги бобларда моддий нуқтанинг ҳаракати инерциал системага нисбатан ўрганилди. Лекин кўпинча нуқтанинг ҳаракатини ихтиёрий равишда ҳаракатланувчи объект билан боғланган координаталар системасига нисбатан текширишга тўғри келади. Масалан, нуқтанинг ҳаракатини тезланувчан ҳаракатдаги ракета, самолёт ёки космик кема билан боғланган координаталар системасига нисбатан ўрганишга эҳтиёж туғилади. Нуқтанинг инерциал бўлмаган бундай системага нисбатан ҳаракати унинг нисбий ҳаракатини ифодалайди.

Бу бобда массаси m бўлган ва берилган кучлар таъсиридаги M нуқтанинг қўзғалмас $O_1\xi\eta\zeta$ инерциал системага нисбатан маълум қонуни асосида ҳаракатланувчи қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатини текшираимиз (19.1-расм). Келгусида $O_1\xi\eta\zeta$ инерциал системани қўзғалмас деб қараймиз.

Боғланишдаги нуқта динамикасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан асосий тенгламасини

$$m\vec{\omega} = \vec{F} + \vec{R} \quad (19.1)$$

кўринишда ёзамиз. Бунда \vec{F} — актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси; \vec{R} — боғланиш реакция кучи.

Кориолис теоремасидан (13.3-§) фойдаланиб, нуқтанинг абсолют тезланишини унинг нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишлари орқали ифодалаймиз:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_k. \quad (19.2)$$

(19.2) ни (19.1) га қўйсак,

$$m\vec{\omega}_r + m\vec{\omega}_e + m\vec{\omega}_k = \vec{F} + \vec{R}$$

ёки $\vec{\omega}_e$ ва $\vec{\omega}_k$ қатнашган ҳадларни ўнг томонга ўтказсак,

$$m\vec{\omega}_r = \vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{\omega}_e) + (-m\vec{\omega}_k) \quad (19.3)$$

тенглама ўрнили бўлади.

(19.3) дан кўрамизки, нуқтанинг массасини унинг нисбий тезланишга кўлайтмасига тенг ва кўчирма тезланишга қарама-қарши йўналган $\vec{\Phi}_e$ вектори *кўчирма инерция кучи* дейилади.

Микдор жиҳатдан нуқтанинг массаси билан унинг Кориолис тезланишга кўлайтмасига тенг, йўналиши Кориолис тезланишга қарама-қарши бўлган $\vec{\Phi}_k$ вектори *Кориолис инерция кучи* дейилади.

Натижада (19.3) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{\omega}_e, \quad (19.4)$$

$$\vec{\Phi}_k = -m\vec{\omega}_k. \quad (19.5)$$

$$m\vec{\omega}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k. \quad (19.6)$$

(19.6) тенглама нуқтанинг инерциал бўлмаган системага nisbatan ҳаракат дифференциал тенгламасини ёки nisбий ҳаракат дифференциал тенгламасини ifodalaydi.

Demak, nisбий ҳаракат дифференциал тенгламаси (19.6) ni tuzish uchun nuқтага қўйилган актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси \vec{F} va bogʻlanish reaksiya kuchlari \vec{R} қаторига кўчирма инерция кучи $\vec{\Phi}_e$ va Кориолис инерция кучи $\vec{\Phi}_k$ ларни қўшиш керак.

Кўчирма va Кориолис инерция кучларини ҳисоблашда кинематика бўлимида чиқарилган кўчирма тезланишни ifodalovchi (13.22)

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0 + \vec{e}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) \quad (19.7)$$

ҳамда Кориолис тезланишни аниқланадиган (13.24)

$$\vec{\omega}_k = 2 \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r \quad (19.8)$$

формулалардан фойдаланамиз.

(19.4), (19.5), (19.7) va (19.8) формулалардан кўрамизки, кўчирма va Кориолис инерция кучлари нуқтанинг бошқа объектлар билан ўзаро таъсирга эмас, balki нуқтанинг massasi ҳамда nisбий va кўчирма ҳаракатигагина bogʻliқ бўлади. (19.6) ni қўзғалувчи координата ўқларига проекциялаб, nisбий ҳаракат дифференциал тенгламасини Декарт координата ўқларидаги ifodasini olishiz:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + R_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}, \\ m\ddot{y} &= F_y + R_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}, \\ m\ddot{z} &= F_z + R_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

19.2-§. Классик механиканинг nisбийлик принципи

Айтайлик, кўчирма ҳаракат $\vec{v}_0 = const$ ўзгармас тезлик билан содир бўладиган тўғри чизикли илгарилема ҳаракатдан иборат бўлсин, яъни Охўз қўзғалувчи координаталар системаси ҳам инерциал системадан иборат бўлсин. У ҳолда кўчирма ҳаракат тезланиши $\vec{\omega}_e = 0$ бўлади, шунингдек, кўчирма ҳаракат тўғри чизикли илгарилема ҳаракатдан иборат бўлгани учун $\vec{\omega}_e = 0$ va Кориолис тезланиш $\vec{\omega}_k = 0$ бўлади. Бишобария,

$$\vec{\Phi}_e = \vec{\Phi}_k = 0$$

бўлиб, nisбий ҳаракат дифференциал тенгламаси (19.6) ni

$$m\vec{\omega}_r = \vec{F} + \vec{R} \quad (19.10)$$

кўрinishда ёзиш мумкин. Бунда nisбий ҳаракат дифференциал тенгламаси билан абсолют ҳаракат дифференциал тенгламаси (19.1) бир хил кўрinishга эга бўлади.

Агар M нуқта $O_1 \xi \eta \zeta$ ва $Oxyz$ инерциал системаларга нисбатан ҳаракатланса ҳамда уларнинг иккинчиси биринчисига нисбатан \vec{v}_0 тезлик билан тўғри чизиқли илгарилама ҳаракатда бўлса, у ҳолда нуқтанинг мазкур системаларга нисбатан радиус-векторлари қуйидаги муносабат билан боғланади:

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{v}_0 t. \quad (19.11)$$

Бунда иккала система учун вақт бир хилда ўтади, яъни

$$t_1 = t \quad (19.12)$$

деб қараймиз. (19.11) ва (19.12) формулалар *Галилей алмаштириши* дейилади. Бирор инерциал системадан бошқа инерциал системага ўтишда динамика қонунлари бу алмаштиришга нисбатан инвариант бўлади. Бу натижа *классик механиканинг нисбийлик принципи* деб аталади. Бу принцинга кўра, барча инерциал системаларга нисбатан моддий нуқта бир хил қонун асосида ҳаракатланади.

19.3-§. Нуқтанинг нисбий мувозанати. Вазнсизлик

Агар моддий нуқта қўзғалувчи $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан тинч ҳолатда бўлса, у ҳолда унинг нисбий тезлиги \vec{v}_r , нисбий тезланиши \vec{w}_r ҳамда Корнолис тезланиши \vec{w}_k нолга тенг бўлади. Шу сабабли (19.6) дан қуйидаги кўринишдаги нисбий мувозанат тенгламасини оламиз:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi}_e = 0. \quad (19.13)$$

Бу тенгламадан кўрамизки, *нуқта нисбий мувозанатда бўлса, нуқтага қўйилган актив ва реакция кучлари кўчирма инерция кучи билан мувозанатланади.*

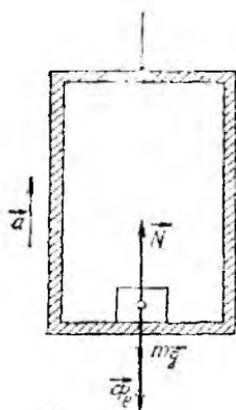
Олинган натижадан фойдаланиб, оғирлик кучи майдошида вертикал бўйлаб тезланувчан (ёки секинланувчан) ҳаракатланувчи жисм вазнининг ортиши ёки камайишини тушунтириш мумкин.

Жисмнинг уни тутиб турувчи горизонтал таянч текислигига кўрсатадиган босим кучига унинг *вазни* дейилади.

Масала, юкнинг тарози палласига кўрсатадиган босими юкнинг вазини нифодалайди.

Агар жисм қўйилган таглик вертикал бўйича тезланувчан ҳаракатда бўлса, у ҳолда мазкур жисмга таъсир этувчи Ернинг тортиш кучи (оғирлик кучи) $\vec{P} = m\vec{g}$ ва жисмнинг вазни бир-биридан фарқ қилишини қуйидаги мисол ёрдамида извоҳлаш мумкин.

Агар лифт кабинаси вертикал бўйича \vec{a} тезланиш билан юқорига қараб ҳаракатланса, бу тезланиш кўчирма тезланишидан ибрат бўлиб, кўчирма инерция кучи $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}$ мавжуд бўлади. Лифт кабинаси қолидаги жисмга вертикал йўналган унинг оғирлик



19.2- расм.

кучи ҳамда кабина полининг реакция кучи \vec{N} таъсир этади (19.2-расм). (19.13) га асосан бундай жисмнинг мувозанат тенгламаси

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e = 0 \quad (19.14)$$

кўринишда ёзилади. (19.14) ни лифт ҳаракатланаётган йўналишга проекцияласак,

$$-mg + N - ma = 0$$

муносабат ўринли бўлади. Бундан

$$N = m(g + a)$$

ифодани оламиз. Бинобарин, кўриляётган ҳолда юкнинг вазни ортади. Бу ҳодиса *ортиқча юкланиш* деб аталади.

Старт ҳолатидан вертикал юқорига тезланувчан ҳаракатланаётган космик кема ичидаги пассажирлар ортиқча юкланишга дучор бўлади.

Агар a тезланиш вертикал пастга йўналса, у ҳолда кўчирма инерция кучи $\vec{\Phi}_e$ ўз йўналишини ўзгартиради ҳамда

$$N = m(g - a)$$

бўлиб, юкнинг вазни камаяди. Хусусан, $a = g$ бўлса, *вазнсизлик ҳолатига* дуч келамиз.

Космик кемаларни уқиринида ортиқча юкланиш ва вазнсизликни ҳисоблаш алоҳида аҳамиятга эга.

19.4- §. Жисмларнинг мувозанати ва ҳаракатига Ер айланишининг таъсири

Ернинг ўз ўқи атрофида

$$\omega_e = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} 0,0000729 \text{ с}^{-1}$$

бурчак тезлик билан айланиши, Ер сиртига яқин жисмнинг мувозанати ва ҳаракатига қандай таъсир этишини қуйидаги икки ҳолда кўриб чиқамиз.

1. Ер сиртига яқин нуқтанинг нисбий мувозанати. Илга осилган ва массаси m га тенг M нуқтанинг Ер сиртига яқин тинч ҳолатини текширамиз (19.3- расм).

Қўзғалувчи координаталар системаси бошқини Ернинг марказидаги O нуқтада олиб, Oz ўқини шимолий қутбга, Oy ўқини M нуқтага тааллуқли меридианнинг экватор билан кесилган нуқтасига, Ox ўқини эса мазкур меридиан текислигига перпендикуляр йўналтирамиз.

M нуқтага Ернинг марказига йўналган \vec{F} ($\vec{F} = m\vec{g}_0$, \vec{g}_0 —гравитацион тезланиш) тортиш кучи ва иннинг таранглик кучи \vec{T} таъсир этади.

(19.14) формулага асосан, M нуқта нисбий мувозанатда бўлиши учун \vec{F} ва \vec{T} кучлар қаторига қўчирма инерция кучи $\vec{\Phi}_e$ ни қўшиш керак, яъни:

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{\Phi}_e = 0. \quad (19.15)$$

Ернинг суткалик айланиш бурчак тезлиги ўзгармас бўлгани туфайли $\vec{\Phi}_e$ куч фақат айланиш ўқига перпендикуляр йўналган $\vec{\Phi}_e^n$ нормал ташкил этувчидан (марказдан қочирма инерция кучидан) иборат бўлади ҳамда бу кучнинг модули қуйидагича аниқланади:

$$\Phi_e^n = m \omega_e^2 R_1 = m \omega_e^2 R \cos \theta,$$

бунда R_1 билан M нуқтага моо географик параллелнинг радиуси белгиланган. Натижада (19.15) ни

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{\Phi}_e^n = 0 \quad (19.16)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

\vec{T} кучининг миқдорини ўлчаш учун ипни динамометр билан алмаштириш мумкин. Динамометр ёрдамида

$$\vec{P} = m \vec{g} = -\vec{T} \quad (19.17)$$

нуқта оғирлик кучининг миқдорини аниқлаймиз. Буни назарда тутиб, (19.16) формуладан қуйидаги муносабатни оламиз:

$$\vec{P} = m \vec{g} = \vec{F} + \vec{\Phi}_e^n. \quad (19.18)$$

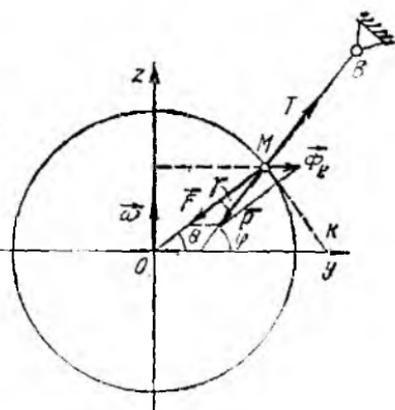
Шундай қилиб, *Ер сиртига яқин нуқтанинг оғирлик кучи Ернинг тортиши кучи билан марказдан қочирма инерция кучларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади.*

19.3-расмда геоцентрик кенглик θ билан белгиланган. M нуқта Ерга нисбатан тинч ҳолатда бўлганда ипнинг таранглик кучи \vec{T} йўналган чизик ҳақиқий вертикал деб аталадиган йўналишни ифодалайди. Бу йўналиш билан экватор текислиги орасидаги φ бурчак географик кенглик дейилади.

19.3-расмда кўрамизки, ҳақиқий вертикал билан Ер радиуси орасидаги бурчакни γ билан белгиласак,

$$\varphi = \theta + \gamma$$

муносабат ўринли бўлади.



19.3- расм:

(19.16) ни ипга перпендикуляр бўлган MK йўналишга проекциялаймиз:

$$-F \sin \gamma + \Phi_c^n \sin \varphi = 0.$$

Бунда $F = mg_0$, $\Phi_c^n = m \omega_c^2 R \cos \theta$ бўлгани учун

$$\sin \gamma = \frac{\omega_c^2 R}{g_0} \sin \varphi \cdot \cos \theta$$

муносабат ўринли бўлади.

Ернинг бурчак тезлиги $\omega_c = 0,0000729 \text{ с}^{-1}$, радиуси $R = 6\,350\,000 \text{ м}$ ва оғирлик кучининг тезланиши $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$ бўлишини эътиборга олсак,

$$\frac{\omega_c^2 R}{g_0} \approx 0,0034,$$

бинобарин, $\gamma = \varphi - \theta$ бурчак жуда кичик бўлади ҳамда тақрибан

$$\sin \gamma \approx \gamma \approx \frac{\omega_c^2 R}{2g_0} \sin 2\theta$$

деб ёзиш мумкин. $\theta = 45^\circ$ бўлганда γ максимал қийматга эришади.

(19.16) ни ипнинг йўналиши MB га проекциялаймиз:

$$T - F \cos \gamma + \Phi_c^n \cos \varphi = 0,$$

бунда $F = mg_0$, $\Phi_c^n = m \omega_c^2 R \cdot \cos \theta$ ва γ бурчак географик кенглик φ га нисбатан жуда кичик бўлганда $\cos \varphi \approx \cos \theta$ эканлигини эътиборга олиб, ипнинг таранглик кучи T ни аниқлаймиз:

$$T \approx mg_0 - m \omega_c^2 R \cos^2 \varphi = m (g_0 - \omega_c^2 R \cos^2 \varphi). \quad (19.19)$$

(19.17) ни назарда тутиб, (19.19) дан Ер сиртидаги оғирлик кучининг тезланишини аниқлаймиз

$$g = g_0 \left(1 - \frac{\omega_c^2 R}{g_0} \cos^2 \varphi\right).$$

Бинобарин, g катталиқ нуқтанинг географик кенглиги φ га боғлиқ равишда ўзгаради.

Қуйидаги жадвалда турли географик кенгликларга мос бўлган оғирлик кучи тезланиши g нинг қийматлари келтирилган.

φ	15°	30°	45°	60°	75°	90°
9,7803	9,7838	9,7932	9,8062	9,8191	9,8287	9,8322

2. Эркин тушаётган жисмнинг вертикалдан оғиши. Ҳавонинг қарийишларини ҳисобга олмай, Ер сиртига яқин масофада эркин тушаётган моддий нуқтанинг ҳаракатига Ернинг ўз ўқи атрофидаги айланувиш қандай таъсир этишини кўриб чиқамиз. Бунинг учун қўзғалувчи O, x, y, z координаталар системаси бошини M нуқтанинг бош-

$\vec{\omega}_e$ нинг координата ўқларидаги проекциялари

$$\omega_{ex} = \omega_e \cos \varphi, \quad \omega_{ey} = 0, \quad \omega_{ez} = \omega_e \sin \varphi$$

тенгликлар воситасида аниқланган сабабли

$$\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega_e \cos \varphi & 0 & \omega_e \sin \varphi \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

муносабат ўринли бўлади. Буни назарда тутиб, (19.21) ни x, y, z қўзғалувчи координата ўқларига проекциялаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2 \dot{y} \omega_e \sin \varphi, \\ \ddot{y} &= -2(x \dot{\omega}_e \sin \varphi + z \dot{\omega}_e \cos \varphi), \\ \ddot{z} &= -g + 2 \dot{y} \omega_e \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (19.22)$$

Нуқта ҳаракатини қуйидаги бошланғич шартларда текширамиз:

$$\left. \begin{aligned} t = 0 \text{ да } x = 0, y = 0, z = H; \\ x = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.23)$$

ω_e ва φ ўзгармас бўлгани учун (19.22) ни (19.23) бошланғич шартларда интеграллаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 2 y \omega_e \sin \varphi, \\ \dot{y} &= 2 \omega_e (z \cos \varphi + x \sin \varphi), \\ \dot{z} &= -gt + 2 \omega_e y \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (19.24)$$

Бунда интеграллаш доимийлари нолга тенг бўлишини осонгина исботлаш мумкин.

Ернинг бурчак тезлиги $\omega_e = 0,0000729 \text{ с}^{-1}$ миқдор жиҳатдан кичик бўлгани учун биринчи яқинлашишда (19.24) да ω_e қатнашган ҳадларни ҳисобга олмаймиз. У ҳолда

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = -gt.$$

Бу тенгламаларни (19.23) бошланғич шартларни эътиборга олиб интегралласак,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = H - \frac{1}{2} gt^2. \quad (19.25)$$

Бу тенглама Ернинг ўз ўқи атрофидаги суткалик айланишини эътиборга олмаган ҳолдаги нуқтанинг эркин тушиш қонунини ифодалайди. x, y, z ларнинг (19.25) воситасида аниқланадиган қийматларини (19.22) га қўямиз

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 2 \omega_e gt \cos \varphi, \quad \ddot{z} = -g$$

ва ҳосил бўлган тенгламаларни (19.23) бошланғич шартларда интеграллаб, иккинчи яқинлашишда эркин тушувчи нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз:

$$x = 0, y = \frac{1}{3} \omega_e g t^3 \cos \varphi, z = H - \frac{1}{2} g t^2. \quad (19.26)$$

(19.26) дан вақт t ни йўқотиб, нуқта траекториясининг тенгласмасини аниқлаймиз

$$y^2 = \frac{8}{9} \frac{\omega_e^2}{g} (H - z)^3 \cos^2 \varphi, \quad (19.27)$$

(19.26) дан кўрамизки, H баландликдан бошлангич тезликсиз тушаётган M нуқта Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши натижасида

$$y = \frac{1}{3} \omega_e g t^3 \cos \varphi$$

қонун асосида шарққа оғади. Нуқта Ерга тушган пайтдаги унинг вертикалдан оғиши $O_1 M_1$ ни y_1 билан белгиласак, шу пайтда $z = 0$ бўлгани учун (19.27) дан фойдаланиб y_1 ни аниқлаймиз:

$$y_1 = \frac{1}{3} \omega_e g \cos \varphi \cdot \left(\frac{2H}{g} \right)^{3/2}.$$

20-б о б. МЕХАНИК СИСТЕМА ДИНАМИКАСИГА КИРИШ

20.1-§. Механик система. Механик система нуқталарига таъсир этувчи кучларни классификация қилиш

Механик система (ёки қисқача *система*) деб шундай моддий нуқталар тўпламига айтиладики, унинг ҳар бир нуқтасининг ҳаракати ва ҳолати система таркибига кирувчи бошқа нуқталарнинг ҳаракати ва ҳолатига боғлиқ бўлади.

Механик системанинг қандай таппаб олиниши бизнинг ихтиёри-мизга боғлиқ; масалан, автомобилни механик система деб олиш мумкин ёки унинг моторини, тормозлаш системасини (ёхуд уларнинг айрим звеноларини) алоҳида-алоҳида механик система деб қараш мумкин. Шунингдек, исталган жисмни зарралар (нуқталар) тўпламидан иборат механик система деб тасаввур қилиш мумкин.

Агар жисмлар (нуқталар) бир-бирига ўзаро таъсир этмаса (масалан, сувдаги кема, учётган самолёт ва ҳаракатланаётган поездлар бир-бирига ўзаро таъсир этмайди), бундай жисмлар тўплами механик система бўлмайди.

Агар механик система нуқталари орасидаги масофалар ўзгармасдан қолса (масалан, абсолют қаттиқ жисм), бундай система *ўзгармас механик система* дейилади.

Механик система нуқталарига таъсир этувчи кучларни ички ва ташқи кучларга ажратилади. Механик системани ташкил этувчи нуқталар (ёки жисмлар) нинг ўзаро таъсир кучлари *ички кучлар* дейилади. Масалан, Қуёш системасидаги планеталарнинг ўзаро таъ-

сир кучлари ички кучлардан иборат. Механик система таркибига кирмайдиган нуқта ёки жисмларнинг берилган система нуқталарига таъсир кучлари *ташқи кучлар* дейилади. Масалан, кемани механик система деб қарасак, кема қисмларининг оғирлик кучи, сувнинг қаршилик кучи ташқи кучларни ифодалайди. Одатда, ташқи кучлар \vec{F}_v^i , ички кучлар \vec{F}_v^i билан белгиланади*.

Механик системанинг қандай танлаб олинишига қараб битта кучнинг ўзи ё ташқи, ё ички кучдан иборат бўлиши мумкин. Масалан, автомобиль моторида поршень, шатун ва тирсакли вални механик система деб қарасак, газларнинг поршеньга таъсир кучи ташқи кучлардан иборат бўлади, ваҳоланки, моторни механик система деб қарасак, бу кучлар ички кучлардан иборат бўлади.

Механик система нуқталарининг ҳаракати ички кучларга ҳам, ташқи кучларга ҳам боғлиқ бўлади.

Ньютоннинг учинчи қонунига кўра механик система нуқталарига таъсир этувчи ички кучлар жуфт-жуфт равишда миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қаршидир. Шундан келиб чиқиб, ички кучларнинг қуйидаги иккита муҳим хоссаларини оламиз.

1. Система барча ички кучларининг геометрик йиғиндиси (ички кучларнинг бош вектори) нолга тенг:

$$\sum_{v=1}^N \vec{F}_v^i = 0 \quad (20.1)$$

Бунда \vec{F}_v^i билан номери v га тенг нуқтага таъсир этувчи ички кучларнинг тенг таъсир этувчиси белгиланган; N — механик система таркибига кирувчи нуқталарнинг сони. Келгусида N та нуқта бўйича йиғинди олинганда йиғинди чегараларини тушириб ёзамиз.

2. Система барча ички кучларининг ихтиёрий нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндиси (ички кучларнинг бош momenti) нолга тенг:

$$\vec{M}_0^i = \sum M_0 (\vec{F}_v^i) = 0 \quad (20.2)$$

ёки

$$\vec{M}_0^i = \sum \vec{r}_v \times \vec{F}_v^i = 0 \quad (20.3)$$

Система иккита M_1 ва M_2 нуқталардан ташкил топса, бу хусусиятларни осонликча исботлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, M_1 ва M_2 нуқталар \vec{F}_1^i ва \vec{F}_2^i ички кучлар билан ўзаро таъсир этса, Ньютоннинг учинчи қонунига кўра $\vec{F}_2^i = -\vec{F}_1^i$ бўлгани учун $\vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i = 0$ тенглик бажарилади; O нуқтага нисбатан иккала кучнинг елкаси h га тенг бўлгани учун бу кучларнинг O нуқтага нисбатан моментлари ҳам миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади (20.1-расм); натижа

* Бунда v ва i индекслари французча *exterieur* — ташқи ва *interieur* — ички кўчаларнинг бош ҳарфларидан олинган.

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1^l) + \vec{M}_O(\vec{F}_2^l) = 0$$

тенглик ўрикли бўлади.

Механик система N та нуқтадан иборат бўлганда ички кучларнинг биринчи ва иккинчи хусусиятларини исботлаш учун ички кучлар система таркибига жуфт-жуфт бўлиб қатнашишини эътиборга олиш керак.

(20.1) ва (20.2) ни координата ўқларига проекциялаб қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\begin{aligned} \sum X_v^l &= 0, & \sum Y_v^l &= 0, & \sum Z_v^l &= 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v^l) &= 0, & \sum M_y(\vec{F}_v^l) &= 0, & \sum M_z(\vec{F}_v^l) &= 0. \end{aligned}$$

Бу тенгламалар фазодаги кучлар системасининг мувозанат тенгламалари (6.16) га ўхшаса-да, ички кучлар системаси мувозанатлашмайди, чунки ички кучлар системанинг турли нуқталарига қўйилган ва бу кучлар таъсиридан системанинг нуқталари бир-бирига нисбатан кўчиши мумкин.

20.2-§. Системанинг массалар маркази

Механик системанинг ҳаракатини ўрганишда мазкур система нуқталари массаларининг тақсимланишини характерловчи катталикларни аниқлаш керак бўлади. Бу катталиклар *массалар геометриясида* ўрганилади.

Механик система N та нуқтадан ташкил топган бўлиб, уларнинг массалари m_1, m_2, \dots, m_N га тенг бўлсин. Система нуқталари M_1, M_2, \dots, M_N нинг қўзғалмас *Охуз* координаталар системасига нисбатан радиус-векторларини $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$; координаталарини $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_N, y_N, z_N)$ билан белгилаймиз (20.2-расм). Система таркибига кирувчи нуқталарнинг массалари йиғиндисиغا тенг

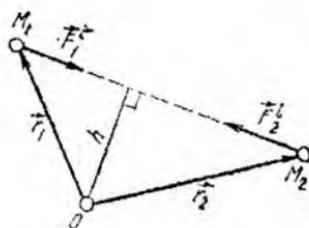
$$M = \sum m_v$$

катталиқка *системанинг массаси* дейилади.

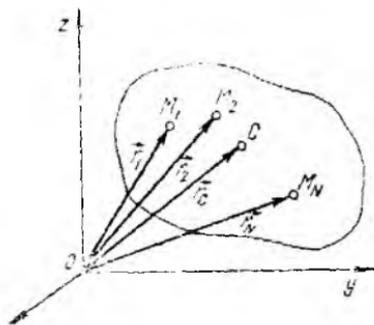
Радиус вектори

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_v \vec{r}_v}{M} \quad (20.4)$$

формула ёрдамида аниқланадиган геометрик C нуқтага *системанинг массалар маркази* дейилади.



20.1-расм.



20.2-расм.

(20.4) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, система массалар марказининг координаталари аниқланадиган

$$x_c = \frac{\sum m_v x_v}{M}, \quad y_c = \frac{\sum m_v y_v}{M}, \quad z_c = \frac{\sum m_v z_v}{M} \quad (20.5)$$

формулаларни оламиз.

Системанинг массалар маркази системанинг бирор нуқтаси билан устма-уст тушмаслиги ҳам мумкин. Масалан, бир жинсли ҳалқанинг массалар маркази унинг геометрик маркази билан устма-уст тушади ва ҳалқага тааллуқли бўлмайди.

(20.4) ва (20.5) формулалардан кўрамизки, берилган механик система массалар марказининг ҳолати унга таъсир этувчи кучларга эмас, система нуқталари массаларининг тақсимланишига боғлиқ бўлади.

(20.4) нинг ўнг томонидаги ифоданинг сурат ва махражини \vec{g} га кўлайтирсак,

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_v g \vec{r}_v}{Mg}$$

ёки

$$\vec{r}_c = \frac{\sum P_v \vec{r}_v}{P} \quad (20.6)$$

бўлади. Бунда $P_v = m_v g$ билан система нуқталарининг оғирлиги белгиланган.

7.2-§ да кўрганимиздек, (20.6) формула ёрдамида оғирлик кучи майдондаги қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази аниқланади. Бинобарин, қаттиқ жисмнинг ёки ўзгармас механик системанинг оғирлик маркази унинг массалар маркази билан устма-уст тушади.

Лекин бундан оғирлик маркази ва массалар маркази айнан бир хил тушунчани ифодалайди, деган хулоса келиб чиқмайди. Берилган ўзгармас механик система оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчиси қўйилган нуқта унинг оғирлик марказини ифодалайди. Бинобарин, оғирлик маркази тушунчасини фақат оғирлик кучи майдондаги ўзгармас механик система (хусусан, қаттиқ жисм) учун қўллаш мумкин. Массалар маркази эса қандай кучлар таъсир этишидан қатъи назар, исталган механик система (хусусан, деформацияланувчи жисм) учун маънога эга бўлади.

20.3-§. Инерция моментлари

Система массалар марказининг ҳолати система массаларининг тақсимланишини тўлиқ характерлай олмайди. Масалан, бир хил A ва B шарларнинг марказларидан айланмиш ўқи Oz га ҳақ бўлган h масофаларни баб-баравар орттирсак (20.3-расм), у ҳолда A ва B шарлардан ташкил топган системанинг массалар маркази ўзгармайди, бироқ системанинг массалари бошқача тақсимланади ва натижада системанинг ҳаракати ўзгаради (бошқа шартлар ўзгармаганда ай-

лашиш секинроқ содир бўлади). Шу сабабли механикада система массаларининг тақсимланишини ҳарактерлаш учун системанинг инерция моменти тушунчаси киритилади.

Моддий нуқтанинг массасини бирор l ўқчага бўлган масофа квадратига кўпайтмасига тенг катталikka нуқтанинг ўқча нисбатан инерция моменти дейилади.

Система нуқталарининг массаларини ўқчага (нуқта ёки текисликкача) бўлган масофалар квадратига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг скаляр катталик мос равишда системанинг ўқча (нуқта ёки текисликкача) нисбатан инерция моменти дейилади.

Нуқтага нисбатан инерция моменти кўпинча қутбга нисбатан инерция моменти деб ҳам аталади.

Агар l ўқча, O нуқтага ва Π текисликка нисбатан системанинг инерция моментларини I_l , I_O ва I_{Π} билан белгиласак, таърифга кўра

$$I_l = \sum m_v h_v^2, \quad I_O = \sum m_v r_v^2, \quad I_{\Pi} = \sum m_v d_v^2 \quad (20.7)$$

формулалар ўринли бўлади. Бунда m_v система M_v нуқтасининг массасини; h_v , r_v , d_v лар эса мос равишда M_v нуқтадан l ўқча, O нуқтага ва Π текисликкача бўлган масофаларни ифодалайди.

СИ бирликлар системасидаги инерция моментининг ўлчамлиги $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$ бўлади.

Агар механик система қаттиқ жисмдан иборат бўлса, бу жисмнинг инерция моментларини аниқлаш учун жисмнинг массалари Δm_v га тенг ($v = 1, 2, \dots, N$) бўлакчалар тўпламидан иборат деб қараймиз ва (20.7) формулаларда m_v лар ўрнига Δm_v ларни қўямиз. Сўнгра жисм ташкил топган бўлакчалар сонини орттира борамиз ва $N \rightarrow \infty$, $\Delta m_v \rightarrow 0$ да лимитга ўтамиз:

$$I_l = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta m_v \rightarrow 0}} \sum_{v=1}^N \Delta m_v h_v^2 = \int h^2 dm, \quad (20.8)$$

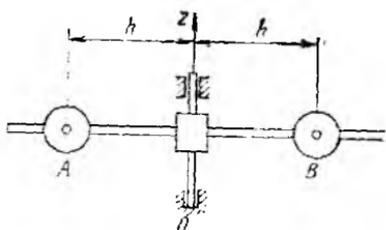
бунда интеграл бутун жисм массаси бўйича олинади.

Ҳажмга эга бўлган жисмнинг ўқча нисбатан инерция моментини аниқлаш учун (20.8) да $dm = \rho dv$ муносабат ўринли бўлишини эътиборга оламиз. Бу ерда dv жисм бўлакчасининг ҳажмини, ρ zichлигини билдиради.

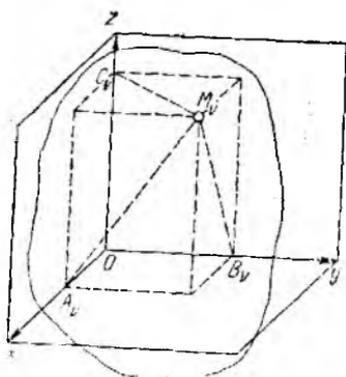
Бир жисмли жисм учун $\rho = \text{const}$ бўлишини эътиборга олсак, ўқча нисбатан инерция моменти учун яна қуйидаги ифодани оламиз:

$$I_l = \int (v) h^2 \rho dV = \rho \int (v) h^2 dV. \quad (20.9)$$

Бу интеграл бутун жисм ҳажми V бўйича олинади.



20.3- расм.



20.4- расм.

Агар жисм қалинлиги b га тенг ($b = \text{const}$) юққа сиртдан иборат бўлса, $dv = bds$ деб қараб (бунда ds сирт бўлакчасининг юзи), (20.9) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$I_l = \rho b \int_{(S)} h^2 ds = \rho_1 \int_{(S)} h^2 ds. \quad (20.10)$$

Мазкур интеграл бутун сирт S бўйича олинади ва $\rho_1 = \rho b$ сирт зичлигини (сирт бўлакчаси массасининг ушқир юзига нисбатини) ифодалайди.

Худди шунингдек, кўндаланг кесим юзаси S га тенг ($s = \text{const}$) ингичка стерженнинг ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблашда $dv = s dl$ (dl —

стержень бўлакчасининг узунлиги) бўлишини эътиборга оламиз:

$$I_l = \rho s \int_{(l)} h^2 dl = \rho_2 \int_{(l)} h^2 dl. \quad (20.11)$$

Қўйилган ҳолда интеграл стержень кесмаси (стержень ўқи) бўйича олинади ҳамда $\rho s = \rho_2$ стерженнинг зичлигини ифодалайди.

Механик системанинг, жумладан, қаттиқ жисмнинг $Oxyz$ Декарт координата ўқларига нисбатан инерция моментларини ҳисоблаймиз. Бунинг учун ихтиёрий O нуқтада координаталар бошини олиб, системанинг массаси m_v га тенг ихтиёрий M_v нуқтасининг координаталарини x_v, y_v, z_v билан белгиласак, мазкур нуқтадан координата ўқларигача бўлган масофалар квадрати мос равишда

$$\begin{aligned} (M_v A_v)^2 &= y_v^2 + z_v^2, \\ (M_v B_v)^2 &= x_v^2 + z_v^2, \\ (M_v C_v)^2 &= x_v^2 + y_v^2 \end{aligned}$$

формулалар ёрдамида аниқланади (20.4-расм). Координата ўқларига нисбатан инерция моментларини I_x, I_y, I_z билан белгиласак, у ҳолда улар учун

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \sum m_v (y_v^2 + z_v^2), \\ I_y &= \sum m_v (x_v^2 + z_v^2), \\ I_z &= \sum m_v (x_v^2 + y_v^2) \end{aligned} \right\} \quad (20.12)$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Координаталар бошига нисбатан системанинг инерция momenti қуйидагича аниқланади:

$$I_0 = \sum m_v r_v^2 = \sum m_v (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2). \quad (20.13)$$

Бу ерда r_v^2 билан массаси m_v га тенг M_v нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофа квадрати белгиланган.

Худди шунингдек, координата текисликларига нисбатан инерция моментлари I_{Ozx} , I_{Oyz} , I_{Oxy} учун ушбу формулалар ўришли бўлади:

$$I_{Ozx} = \sum m_v y_v^2, \quad I_{Oyz} = \sum m_v x_v^2, \quad I_{Oxy} = \sum m_v z_v^2. \quad (20.14)$$

(20.12), (20.13) ва (20.14) дан қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O, \quad (20.15)$$

$$I_{Oyz} + I_{Ozx} + I_{Oxy} = I_O, \quad (20.16)$$

$$I_x = I_{Ozx} + I_{Oxy}, \quad I_y = I_{Oxy} + I_{Oyz}, \quad I_z = I_{Ozx} + I_{Oyz}. \quad (20.17)$$

(20.15) системанинг учта Декарт координата ўқларига нисбатан инерция моментларининг йиғиндиси мазкур системанинг координаталар бошига нисбатан инерция моментининг иккиланганига тенглигини; (20.16) системанинг учта координата текисликларига нисбатан инерция моментларининг йиғиндиси мазкур системанинг координаталар бошига нисбатан инерция моментига тенглигини; (20.17) эса бирор ўққа нисбатан системанинг инерция momenti мазкур системанинг шу ўқ бўйича кесишувчи иккита ўзаро перпендикуляр текисликларга нисбатан инерция моментларининг йиғиндисига тенглигини ифодалайди.

Қўпинча системанинг ўққа нисбатан инерция моментини

$$I_z = Mr_u^2 \quad (20.18)$$

кўринишда ёзилади, бунда M — бутун системанинг массаси. Инерция momenti кг·м² ўлчамга эга бўлишини назарда тутсак, ρ_u узунлик бирлигида ўлчанишига ишонч ҳосил қиламиз. Бу узунлик *системанинг ўққа нисбатан инерция радиуси* дейилади. Агар системанинг ўққа нисбатан инерция momenti маълум бўлса, инерция радиуси

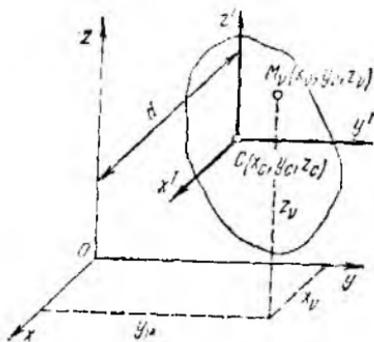
$$\rho_u = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \quad (20.19)$$

формула ёрдамида аниқланади.

(20.18) дан кўрамизки, инерция радиуси жисмнинг массаси муҳассамлашган нуқтадан z ўққача бўлган шундай масофаки, мазкур нуқтанинг z ўққа нисбатан инерция momenti шу ўққа нисбатан бутун жисмнинг инерция моментига тенг.

20.4-§. Жисмнинг параллел ўқларга нисбатан инерция моментлари ҳақидаги Гюйгенс-Штейнер теоремаси

Жисмнинг массалар маркази орқали ўтувчи ўққа параллел бўлган ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблашни кўриб чиқамиз. Алтайлик, ўзаро параллел бўлган $Oxyz$ ва $Sx'y'z'$ Декарт координат системаларини берилган бўлсин, бунда S нуқта системанинг массалар марказида жойлашган (20.5-рasm).



20.5- расм.

Ўққа нисбатан инерция моментининг таърифига кўра

$$\left. \begin{aligned} I_z &= \sum m_v (x_v^2 + y_v^2), \\ I_{z'} &= \sum m_v (x_v'^2 + y_v'^2), \end{aligned} \right\} \quad (20.20)$$

бунда m_v билан M_v нуқтанинг массаси; x_v, y_v, z_v ва x_v', y_v', z_v' билан мазкур нуқтанинг $Oxyz$ ва $Ox'y'z'$ координаталар системасига нисбатан координаталари белгиланган. Агар $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан массалар марказининг координаталарини x_c, y_c, z_c билан белгиласак, у ҳолда M_v

нуқтанинг координаталари $x_v = x_v' + x_c; y_v = y_v' + y_c; z_v = z_v' + z_c$ муносабатлар билан боғланган бўлади. Координаталарнинг бу қийматларини (20.20) га қўйиб, содалаштирсак,

$$I_z = \sum m_v \cdot (x_v'^2 + y_v'^2) + 2x_c \cdot \sum m_v x_v' + 2y_c \cdot \sum m_v y_v' + (x_c^2 + y_c^2) \cdot \sum m_v$$

ифода ҳосил бўлади.

Бу ифодада $\sum m_v (x_v'^2 + y_v'^2)$ жисмнинг массалар маркази орқали ўтувчи ўққа нисбатан инерция momenti: $\sum m_v = M$ — бутун жисм массаси; $\sum m_v x_v' = Mx_c' = 0$ ва $\sum m_v y_v' = My_c' = 0$, чунки системанинг массалар марказини ифодаловчи C нуқта $Sx'y'z'$ координаталар системасининг бошида олинган туфайли $x_c' = y_c' = 0$. Бундан ташқари $x_c^2 + y_c^2 = d^2$ (d — Oz ва Cz' ўқлар орасидаги масофа) эканлигини эътиборга олсак,

$$I_z = I_{z'} + Md^2 \quad (20.21)$$

формула ҳосил бўлади.

Бу формула *Гюйгенс-Штейнер теоремасини* ифодалайди: бирор ўққа нисбатан системанинг инерция momenti системанинг массалар маркази орқали шу ўққа параллел равишда ўтган ўққа нисбатан инерция momenti билан система массасини ўқлар орасидаги масофа квадратиغا кўпайтмасининг йиғиндисига тенг.

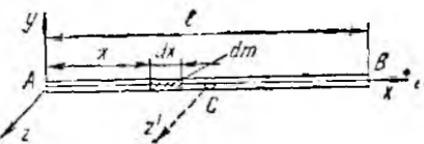
(20.21) формуладан кўрамизки, системанинг массалар маркази орқали ўтувчи ўққа нисбатан ҳисобланган инерция momenti унга параллел бўлган ўқларга нисбатан ҳисобланган инерция momentлари ичида энг кичик қийматга эга бўлади.

20.5- §. Бир жишли баъзи жисмларнинг инерция momentларини ҳисоблаш

Кўпинча мураккаб шаклга эга бўлган жисмни оддий шаклли жисмларга ажратиш усули билан унинг инерция momentини аниқлаш қулай бўлади. Бундай жисмнинг инерция momenti унинг бў-

лакларни инерция моментларининг йиғиндисидан иборат деб қараш мумкин.

Бир жинсли оддий шаклга эга бўлган баъзи jismlарнинг инерция моментларини ҳисоблашни кўриб чиқамиз.



20.6- расм.

1. Бир жинсли стерженнинг инерция моменти.

x ўқни узунлиги l га тенг ингичка AB стержень бўйлаб йўналтирамиз (20.6-расм). Стерженнинг A учидан ўтувчи ва унинг ўқига перпендикуляр йўналган z ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз.

Айтайлик, стерженнинг массаси M , зичлиги $\rho_2 = \frac{M}{l}$ га тенг бўлсин. U ҳолда стержень dx бўлакчасининг массаси $dm = \rho_2 dx$ эканлигини назарда тутиб, (20.11) га асосан қуйидагини оламиз:

$$I_{Az} = \rho_2 \int_0^l x^2 dx = \rho_2 \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} M l^2. \quad (20.22)$$

Ўққа параллел равида стерженнинг массалар маркази орқали ўтувчи Cz' ўққа нисбатан инерция моментини Гюйгенс-Штейнер теоремасига асосан аниқлаймиз:

$$I_{Az} = I_{Cz'} + M d^2, \text{ бунда } d^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}.$$

Бинобарин,

$$I_{Cz'} = I_{Az} - M \frac{l^2}{4} = M \frac{l^2}{3} - M \frac{l^2}{4} = M \frac{l^2}{12}. \quad (20.23)$$

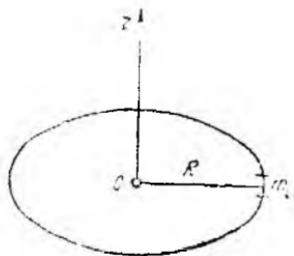
2. Ингичка доиравий ҳалқанинг инерция моменти. Массаси M ва радиуси R га тенг доиравий ҳалқанинг марказидан унинг текислигига перпендикуляр равида ўтувчи Cz ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз (20.7-расм). Ҳалқанинг барча нуқталари Cz ўқдан бир хил $h_v = R$ масофада жойлашгани туфайли (20.7) га асосан

$$I_z = \sum m_v h_v^2 = (\sum m_v) R^2 = M R^2 \quad (20.24)$$

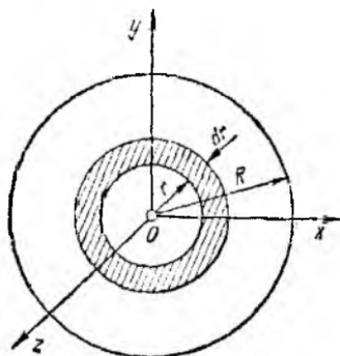
бўлади, бунда $\sum m_v = M$ ҳалқанинг массаси.

(20.24) формула массаси M , радиуси R га тенг юпқа қобиқли цилиндрнинг марказий бўйлама ўқига нисбатан инерция моментини топиш учун ҳам ўринли бўлади.

3. Бир жинсли доиравий дискнинг инерция моменти. Массаси M , радиуси R га тенг доиравий дискнинг O нуқтага нисбатан инерция моментини ҳисоблаймиз (20.8-расм). O қутбга нисбатан диск-



20.7- расм.



20.8- расм.

нинг инерция моменти шу нуқтадан диск текислигига перпендикуляр равида ўтувчи Oz ўққа нисбатан ҳисобланган инерция моментига тенг бўлади. Дискда радиуслари r ва $r + dr$ га тенг айланалар орасидаги доиравий ҳалқани ажратамиз. Бу ҳалқанинг массаси

$$dm = 2\pi r \rho_1 dr$$

га тенг. Бу ерда $\rho_1 = \frac{M}{\pi R^2}$ дискнинг zichligini ifodalaydi.

(20.8) га асосан

$$I_z = \int_{(M)} r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \rho_1 dr = 2\pi \rho_1 \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho_1 \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}. \quad (20.25)$$

Бу формула радиуси R га тенг доиравий цилиндрнинг марказий бўйлама ўқига нисбатан инерция моментини топиш учун ҳам ўришли бўлади.

Диск текислигидаги Ox ва Oy ўқларга нисбатан унинг нуқталари симметрик жойлашгани учун $I_x = I_y$, (20.15) га асосан $2I_O = I_x + I_y + I_z$, лекин $I_z = I_O$ бўлгани учун

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_O = \frac{MR^2}{4}. \quad (20.26)$$

4. Қувурнинг инерция моменти. Массаси M , ташқи радиуси R_1 ва ички радиуси R_2 га тенг қувурнинг марказий бўйлама ўқи Cz га нисбатан инерция моменти радиуслари R_1 ва R_2 га тенг доиравий цилиндрларнинг мазкур ўққа нисбатан инерция моментларининг айирмасига тенг бўлади (20.9- расм). Шундан келиб чиқиб, (20.25) га кўра қуйидагини оламиз:

$$I_{Cz} = M_1 \frac{R_1^2}{2} - M_2 \frac{R_2^2}{2}, \quad (20.27)$$

бунда M_1 ва M_2 билан радиуси R_1 ва R_2 га тенг цилиндрларнинг массаси белгиланган:

$$M_1 = \rho H \pi R_1^2, \quad M_2 = \rho H \pi R_2^2. \quad (20.28)$$

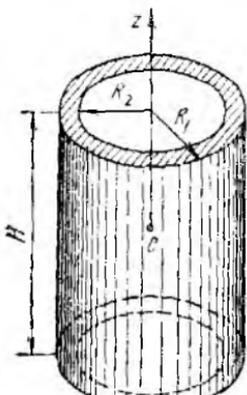
Бу ерда H — қувурнинг узунлиги. (20.28) ни (20.27) га қўйсақ,

$$I_{Cz} = \frac{1}{2} \rho \pi H (R_1^4 - R_2^4),$$

лекин қувурнинг массаси

$$M = M_1 - M_2 = \rho \pi H (R_1^2 - R_2^2)$$

га тенглигини эътиборга олсак, қувурнинг марказий бўйлама ўқи Cz га нисбатан инерция

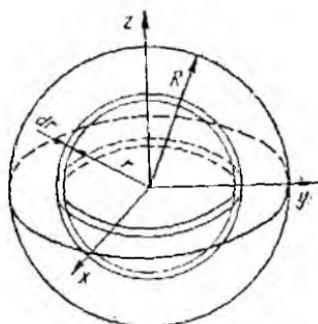


20.9- расм.

моменти учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$I_{Cz} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2). \quad (20.29)$$

5. Шарнинг инерция моменти. Массаси M , радиуси R га тенг шарнинг маркази ва шу марказдан ўтувчи координата ўқларига nisbatan инерция моментларини ҳисоблаймиз. Шар ичида радиуси r ва қалинлиги dr га тенг шар қобиғини фикран ажратамиз (20.10-расм). Унинг массаси $dm = \rho dv$ бўлиб, буида $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ энчиқкви; $dv = 4\pi r^2 dr$



20.10-расм.

ажратилган шар қобиғининг ҳажмини ифодалайди. Натижада

$$dm = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr$$

тенглик ўринли бўлади.

Шарнинг марказига nisbatan инерция моменти

$$I_O = \int_{(M)} r^2 dm = 4\pi\rho \int_0^R r^4 dr = 4\pi\rho \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} MR^2 \quad (20.30)$$

формуладан аниқланади.

Шарнинг марказидан ўтувчи координата ўқларига nisbatan инерция моментларини ҳисоблашда бу ўқларга nisbatan шар нуқталари симметрик жойлашганлигини назарда тутсак, $I_x = I_y = I_z$ муносабат ўринли бўлади. Лекин (20.15) га кўра $2I_O = I_x + I_y + I_z = 3I_x = 3I_y = 3I_z$. Бинобарин,

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} I_O = \frac{2}{5} MR^2. \quad (20.31)$$

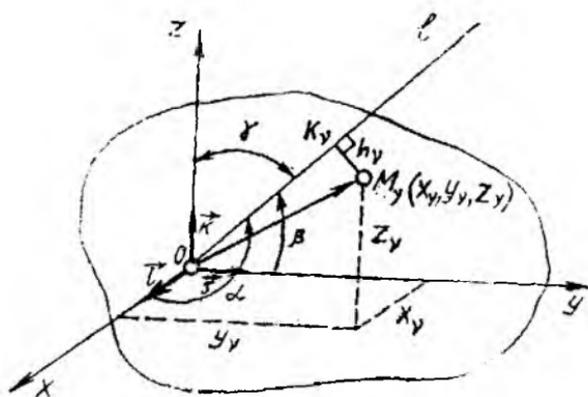
20.6-§*. Жисмнинг берилган нуқтадан ўтувчи ўқларга nisbatan инерция моментлари

Жисмнинг бирор O нуқтаси орқали x, y, z Декарт координата ўқларини ҳамда ихтиёрий l ўқни ўтказамиз; l ўқнинг x, y, z ўқлари билан таниқил қилган бурчакларини α, β, γ билан белгилаймиз (20.11-расм).

Жисмнинг l ўққа nisbatan инерция моментини ҳисоблаймиз. Бунинг учун жисмни $M_v(v = \overline{1, N})$ нуқталар тўпламидан иборат деб қараймиз. (20.7) га кўра жисмнинг l ўққа nisbatan инерция моменти

$$I_l = \sum m_v h_v^2 \quad (20.32)$$

формуладан аниқланади, бу ерда h_v — M_v нуқтадан l ўққача бўлган масофа.



20,11- расм.

$OK_v M_v$ тўғри бурчакли учбурчакдан

$$h_v^2 = r_v^2 - (OK_v)^2, \quad (20.33)$$

бунда $r_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$ бўлиб, x_v, y_v, z_v лар M_v нуқтанинг координатларини ифодалайди. OK_v кесма $\vec{r}_v = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$ радиус-векторнинг Ol ўқдаги проекциясини ифодалайди. \vec{r}_v векторнинг Ol ўқдаги проекциясини аниқлаш учун бу векторни мазкур ўқнинг бирлик вектори $\vec{l} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ га скаляр кўпайтира-мин:

$$OK_v = \vec{r}_v \cdot \vec{l} = (x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}) (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma) = x_v \cos \alpha + y_v \cos \beta + z_v \cos \gamma. \quad (20.34)$$

(20.33) да r_v^2 ни нуқтанинг координатлари орқали ифодалаб, уни $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ га кўпайтирсак, қуйидагини оламиз:

$$h_v^2 = (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_v \cos \alpha + y_v \cos \beta + z_v \cos \gamma)^2 = (y_v^2 + z_v^2) \cos^2 \alpha + (z_v^2 + x_v^2) \cos^2 \beta + (x_v^2 + y_v^2) \cos^2 \gamma - 2y_v z_v \cos \beta \cos \gamma - 2z_v x_v \cos \gamma \cos \alpha - 2x_v y_v \cos \alpha \cos \beta. \quad (20.35)$$

(20.35) ни (20.32) га қўйсак,

$$I_l = \cos^2 \alpha \sum m_v (y_v^2 + z_v^2) + \cos^2 \beta \sum m_v (z_v^2 + x_v^2) + \cos^2 \gamma \sum m_v (x_v^2 + y_v^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m_v y_v z_v - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum m_v z_v x_v - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \sum m_v x_v y_v.$$

Бу тенгликда (20.12) га кўра

$$\sum m_v (y_v^2 + z_v^2) = I_x, \quad \sum m_v (x_v^2 + z_v^2) = I_y, \quad \sum m_v (x_v^2 + y_v^2) = I_z$$

мос равишда x, y, z ўқларга нисбатан инерция моментлари,

$$\sum m_v y_v z_v = I_{yz}, \quad \sum m_v z_v x_v = I_{zx}, \quad \sum m_v x_v y_v = I_{xy} \quad (20.36)$$

лар эса марказдан қочирма инерция моментлари эканлигини эътиборга олсак, жисмнинг I ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг бўлади:

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2I_{yz} \cos \beta \cdot \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha - 2I_{xy} \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (20.37)$$

Жисмнинг I ўққа нисбатан инерция моменти аниқлаш учун α , β , γ бурчаклардан ташқари O нуқтадан ўтувчи x , y , z ўқларга нисбатан I_x , I_y , I_z , I_{yz} , I_{zx} , I_{xy} олти инерция моментларини ҳам биллиш керак. (20.37) да α , β , γ ларга турлича қийматлар бериб, O нуқтадан ўтувчи ўқлар дастасига нисбатан жисмнинг инерция моментларини аниқлаш мумкин.

20.7*-§. Инерция эллипсоиди

α , β , γ бурчакларга мос равишда жисмнинг I ўққа нисбатан инерция моменти қандай ўзгаришини аниқлаш учун мазкур ўқда O нуқтадан узунлиги

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_l}} \quad (20.38)$$

га тенг кесмани қўямиз (20.12-расм).

ON кесманинг йўналтирувчи косинуслари учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

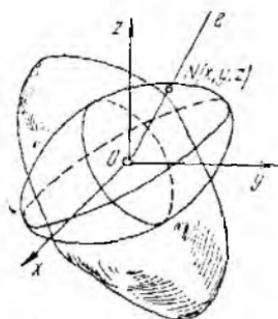
$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{ON} = x\sqrt{I_l}, \\ \cos \beta &= \frac{y}{ON} = y\sqrt{I_l}, \\ \cos \gamma &= \frac{z}{ON} = z\sqrt{I_l}. \end{aligned} \right\} \quad (20.39)$$

бунда x , y , z — N нуқтанинг координаталари. (20.39) ни (20.37) га қўйиб, I_l га қисқартирамиз:

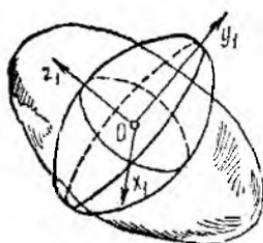
$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy = 1. \quad (20.40)$$

(20.40) тенглама α , β , γ бурчаклар ўзгарганда (20.38) шартни қаноатлантирувчи N нуқта кўчадиган сиртни ифодалайди. Бу сирт эллипсоиддан иборат бўлади, чунки $I_l \neq 0$ бўлгани учун (20.38) формула ёрдамида аниқланадиган ON масофа чекли бўлади. Бу эллипсоид инерция эллипсоиди дейилади.

Жисмнинг ҳар бир нуқтаси учун ўзига яраша инерция эллипсоиди мавжуд бўлади. Агар координата ўқларини сиртнинг O нуқтадан ўтувчи ўзаро перпендикуляр бош



20.12- расм.



20.13- расм.

диаметрлари*) бўйлаб йўналтирсак, эллипсоиднинг тенгламаси содалашади. Бундай ўқларга инерция бош ўқлари дейилади. Жисмнинг массалар марказига нисбатан ясалган инерция эллипсоиди *марказий инерция эллипсоиди* дейилади. Марказий инерция эллипсоидининг бош ўқлари *марказий инерция бош ўқлари* деб аталади.

Агар x_1, y_1, z_1 координата ўқлари учун инерция бош ўқларини олсак (20.13- расм), эллипсоид тенгламасида координаталарнинг кў-

пайтмалари қатнашмаслиги аналитик геометрия курсидан маълум:

$$I_{x_1} x_1^2 + I_{y_1} y_1^2 + I_{z_1} z_1^2 = 1. \quad (20.41)$$

Бунда $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{z_1}$ лар инерция бош моментларини ифодалайди.

Агар O нуқта орқали Ox_1, Oy_1, Oz_1 бош ўқлар билан мос равишда α, β, γ бурчак ташкил этувчи I ўқни ўтказсак, у ҳолда (20.37) га биноан бу ўққа нисбатан инерция моменти

$$I_l = I_{x_1} \cos^2 \alpha + I_{y_1} \cos^2 \beta + I_{z_1} \cos^2 \gamma \quad (20.42)$$

формула ёрдамида аниқланади.

Агар хусусий ҳолда иккита инерция бош моментлари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда инерция эллипсоиди айланма эллипсоиддан иборат бўлади. Учала инерция бош моментлари тенг бўлса, инерция эллипсоиди сферадан иборат бўлади.

20.8*- §. Инерция бош ўқларининг хусусиятлари

Инерция бош ўқларининг қуйидаги хусусиятларини кўриб чиқамиз:

1. *Берилган нуқта орқали ўтувчи Декарт координата ўқларидан бири ишбу нуқта учун инерция бош ўқидан иборат бўлиши учун шу ўққа мос координата қатнашадиган марказдан қочирма инерция моментлари нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Зарурлиги. Айтайлик, Oz ўқ O нуқта учун ясалган инерция эллипсоидининг бош ўқидан иборат ҳамда x ва y ўқлари ихтиёрий бўлсин, у ҳолда инерция эллипсоидининг ҳар бир $M(x, y, z)$ нуқтасига унга симметрик бўлган $M'(-x, -y, z)$ нуқта мос келади (20.14- расм).

(20.40) тенгламага дастлаб M , сўнгга M' нуқтанинг координаталарини қўйиб,

$$\begin{aligned} I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy &= 1, \\ I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + 2I_{yz} yz + 2I_{zx} zx - 2I_{xy} xy &= 1 \end{aligned}$$

*) сиртга ўтказилган нормаль билан устма-уст тушувчи диаметр бош диаметр дейилади.

тенгламаларни оламиз. Бу тенгламаларнинг иккинчисидан биринчисини айирсак,

$$4I_{yz}yz + 4I_{zx}zx = 0$$

ёки

$$z(I_{yz}y + I_{xz}x) = 0$$

тенглама ўринли бўлади. M нуқтанинг координаталари x, y, z нар полдан фарқли бўлгани учун охириги тенглама фақат

$$I_{yz} = 0, I_{xz} = 0 \quad (20.43)$$

бўлгандагина ўринли бўлади.

Етарлилиги. Агар (20.43) бажарилса, инерция эллипсоиди тенгламасини

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy = 1$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан кўрамизки, z ўқ инерция бош ўқидан иборат бўлади.

2. Агар бир жинсли жисм симметрия текислигига эга бўлса, инерция бош ўқларидан бири симметрия текислигига перпендикуляр бўлади ҳамда қолган иккити инерция бош ўқлари шу текисликда ётади.

Симметрия текислиги Π да жисмнинг ихтиёрий O нуқтасини олиб, Oz ўқини симметрия текислигига перпендикуляр йўналтирамиз (7.5-расмга қаранг). M ҳолда ҳар бир m_v массали $M'_v(x_v, y_v, z_v)$ нуқтага Π текисликка симметрик бўлган худди шундай массали $M''_v(x_v, y_v, -z_v)$ нуқта мос келади. M'_v ва M''_v нуқталарнинг координаталари фақат z_v координатасининг ишараси билан фарқ қилади.

Марказдан қочирма инерция моменти I_{yz} учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади

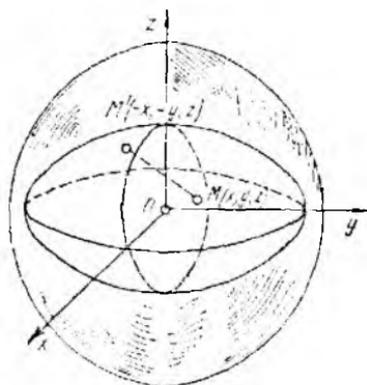
$$I_{yz} = \sum m_v y_v z_v = \sum_{(I)} m_v y_v z_v + \sum_{(II)} m_v y_v \cdot (-z_v) = 0,$$

чунки жисмнинг (I) қисмига мусбат z_v координата, (II) қисмига $-z_v$ манфий координата мос келади. Худди шунингдек,

$$I_{zx} = \sum m_v z_v x_v = \sum_{(I)} m_v z_v x_v + \sum_{(II)} m_v \cdot (-z_v) x_v = 0.$$

I_{yz} ва I_{zx} марказдан қочирма инерция моментлари полга тенг бўлгани учун Oz ўқ инерция бош ўқидан иборат бўлади. Қолган иккита Ox ва Oy ўқлари Oz га перпендикуляр бўлгани учун симметрия текислиги Π да ётади.

3. Агар бир жинсли жисм симметрия ўқига эга бўлса, бу ўқ марказий инерция бош ўқидан иборат бўлади.



20.14 расм

Агар жисмнинг симметрия ўқи учун z ўқни олсак, ҳар бир x_v, y_v, z_v мусбат координатали, m_v массали нуқтага худди шундай массали, лекин x ва y ўқларга мос координаталари манфий бўлган $-x_v, -y_v, z_v$ нуқтага мос келади (7.6-расмга қаранг) ҳамда

$$I_{zx} = \sum m_v z_v x_v = \sum_{(I)} m_v z_v x_v + \sum_{(II)} m_v z_v \cdot (-x_v) = 0,$$

чунки (I) ва (II) йиғиндилар фақат x_v олдидagi ишора билан бир-бирдан фарқ қилади.

Шунга ўхшаш $I_{yz} = 0$ бўлишини исботлаш мумкин.

Бинобарин, симметрия ўқи z инерция бош ўқидан иборат бўлади. Жисмнинг массалар маркази симметрия ўқида ётгани тўғрисида z ўқ марказий инерция бош ўқи билан устма-уст тушади.

4. Марказий инерция бош ўқи шу ўқда ётувчи барча нуқталар учун инерция бош ўқидан иборат бўлади.

Агар Cz ўқни марказий инерция бош ўқи сифатида олсак (20.15-расм),

$$I_{Czx} = \sum m_v z_v x_v = 0, \quad I_{Cyz} = \sum m_v y_v z_v = 0,$$

$$x_C = \frac{\sum m_v x_v}{M} = 0, \quad y_C = \frac{\sum m_v y_v}{M} = 0$$

бўлади. Бунда $M = \sum m_v$ бутун жисм массаси.

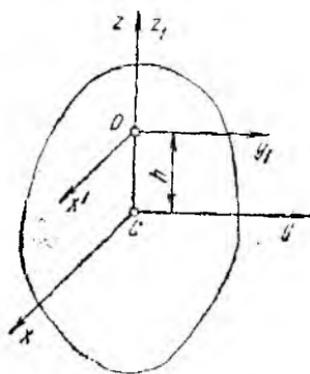
Cz ўқда ихтиёр O нуқтани олиб, бу нуқтада $Cxyz$ га параллел бўлган $Ox_1y_1z_1$ координаталар системасини ўтказамиз. У ҳолда $OC = h$ белгилан қиритиб (20.5) ни эътиборга олсак, $I_{z_1x_1}$ ва $I_{y_1z_1}$ марказдан қопирма инерция моментлари қуйидагича ҳисобланади:

$$I_{z_1x_1} = \sum m_v (z_v - h) x_v = \sum m_v z_v x_v - h M x_C = 0,$$

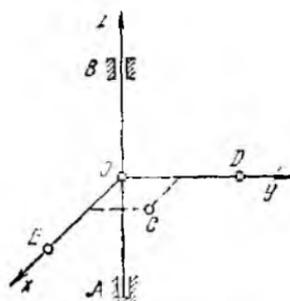
$$I_{y_1z_1} = \sum m_v (z_v - h) y_v = \sum m_v z_v y_v - h M y_C = 0.$$

Бинобарин, O_1z_1 ўқ ҳам инерция бош ўқидан иборат бўлади.

20.1-масала. AB вертикал валга ҳамда ўзаро перпендикуляр бўлган r узунликдаги OE ва OD стерженлар воситасида бир хил E ва D юклар бириктирилган (20.16-расм). Стерженлар ва валнинг массасини ҳисобга олмай ва юкларни мод-



20.15-расм.



20.16-расм.

дий нуқта деб қараб, системанинг массалар маркази C топилсин, шунингдек, I_{zx} , I_{yz} , I_{xy} марказдан қочирма инерция моментлари ҳисоблансин.

Ечиш. Координаталар бошини O нуқтада олиб, x ўқни OE стержень, y ўқни OD стержень бўйлаб, z ўқни эса AB вал бўйича йўналтирамиз. Агар юкларнинг массаларини m билан белгиласак, $E(r, 0, 0)$, $D(0, r, 0)$ бўлгани учун (20.5) га кўра E ва D нуқталардан ташкил топган система массалар марказининг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$x_C = \frac{\sum_{v=1}^2 m_v x_v}{\sum_{v=1}^2 m_v} = \frac{mr}{2m} = \frac{r}{2},$$

$$y_C = \frac{\sum_{v=1}^2 m_v y_v}{\sum_{v=1}^2 m_v} = \frac{mr}{2m} = \frac{r}{2},$$

$$z_C = \frac{\sum_{v=1}^2 m_v z_v}{\sum_{v=1}^2 m_v} = 0.$$

Бинобарин, системанинг массалар маркази $C \left(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r, 0 \right)$ нуқтада ётади.

z ўқ система нуқталари ётган xy текисликка перпендикуляр йўналгани учун y инерция бosh ўқидан иборат бўлади, шу сабабли I_{zx} ва I_{yz} марказдан қочирма инерция моментлари нолга тенг:

$$I_{zx} = 0, I_{yz} = 0.$$

Шунингдек, $E(r, 0, 0)$, $D(0, r, 0)$ бўлгани учун

$$I_{xy} = \sum_{v=1}^2 m_v x_v y_v = 0.$$

Шундай қилиб, $I_{zx} = I_{yz} = I_{xy} = 0$.

20.2-масала. Массаси M , томонлари a ва b га тенг тўғри тўртбурчакли бир жинсли пластинка диагоналларидан бири орқали ўтувчи z ўққа бириктирилган (20.17-расм). z ва y ўқлари расм текислигида ётади деб қараб, I_{zx} , I_{yz} , I_{xy} марказдан қочирма инерция моментлари аниқлансин.

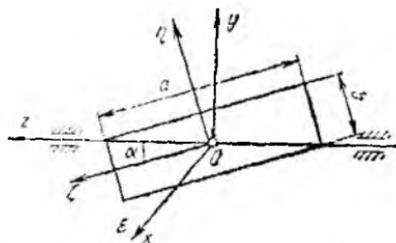
Ечиш. Координата ўқларини пластинканинг массалар марказидаги O нуқта орқали 20.17-расмдагидек йўналтирамиз. Бунда x ўқ пластинка текислигига перпендикуляр йўналгани ва унинг массалар маркази орқали ўтгани учун марказий инерция бosh ўқидан иборат бўлади. Шу сабабли

$$I_{zx} = I_{xy} = 0$$

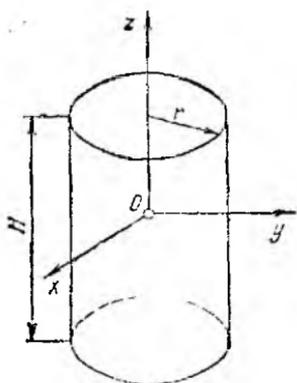
бўлади. I_{yz} марказдан қочирма инерция momenti (20.38) га кўра

$$I_{yz} = \sum m_v y_v z_v \quad \text{ёки} \quad I_{yz} = \int yz \, dm \quad (1)$$

формуладан аниқланади. I_{yz} ни ҳисоблаш учун $O\xi\eta\zeta$ янги координаталар системасига ўтамиз. Бунда ξ ўқ x билан уст-ма-уст тушади; η ўқ тўғри тўртбурчакнинг b томонига параллел; ζ ўқ унга перпендикуляр йўналади. Ox ва $O\xi$ уст-ма-



20.17-расм.



20.18- расм.

уст тушганлиги туфайли $O\xi\zeta$ ўқ марказий инерция бош ўқидан иборат бўлади. $O\eta$ ва $O\xi$ ўқлари пластинканинг массалар маркази O нуқта орқали ўтгани ва симметрия ўқларидан иборат бўлгани учун бу ўқлар ҳам марказий инерция бош ўқларидан иборат бўлади. Бинобарин, $O\xi\eta\xi$ координаталар системаси O нуқта учун ясалган инерция эллипсоидининг бош координата ўқларидан иборат бўлади. Oz ва $O\xi$ ўқлари орасидаги бурчак

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad (2)$$

формуладан аниқланади.

Аналитик геометриядаги координата ўқларини буриш формуласидан фойдаланиб, y ва z координаталарни η, ξ координаталар орқали ифodalaymиз:

$$\begin{cases} y = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \\ z = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

y, z ларнинг бу қийматларини (1) га қўйсак,

$$I_{yz} = \frac{\sin 2\alpha}{2} \left[\int_{(M)} \xi^2 dm - \int_{(M)} \eta^2 dm \right] + \cos 2\alpha \int_{(M)} \eta \xi dm. \quad (4)$$

$O\xi\eta\xi$ бош координата ўқларидан иборат бўлгани учун

$$\int_{(M)} \eta \xi dm = 0. \quad (5)$$

(4) даги $\int_{(M)} \xi^2 dm$ ва $\int_{(M)} \eta^2 dm$ каиталиклар мос равишда $O\xi\eta$ ва $O\xi\xi$ текисликларга нисбатан пластинканинг инерция моментларини ифodalayди ва қуйидагича аниқланади:

$$\int_{(M)} \xi^2 dm = \frac{M}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi^2 d\xi d\eta = \frac{Ma^2}{12} \quad (6)$$

$$\int_{(M)} \eta^2 dm = \frac{M}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \eta^2 d\eta d\xi = \frac{Mb^2}{12}. \quad (7)$$

(5), (6) ва (7) ни (4) га қўйсак,

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \frac{\sin 2\alpha}{2} \frac{M}{12} (a^2 - b^2) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{M}{12} (a^2 - b^2) = \\ &= \frac{Mab}{12} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

20.3- масала. Массаси m , баландлиги H , асосининг радиуси r га тенг доиравий цилиндрнинг оғирлик марказига нисбатан ясалган инерция эллипсоиди тенгламаси тузилсин. Координата ўқлари 20.18- расмда тасвирланган. Координаталар боши O цилиндрнинг оғирлик маркази билан устма-уст тушади.

Ечиш. О нўқтага нисбатан инерция эллипсоидининг тенгламасини (20.40) кўринишда ёзиш мумкин:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2 I_{yz} yz - 2 I_{zx} zx - 2 I_{xy} xy = 1. \quad (20.25) \text{ га кўра}$$

$$I_z = \frac{mr^2}{2}.$$

I_x ва I_y ларни ҳисоблаш учун (20.17) формулалардан фойдаланамиз:

$$I_x = I_{Ozx} + I_{Oxy}, \quad I_y = I_{Oxy} + I_{Oyz}.$$

Бунда

$$I_{Oxy} = \int_{(m)} z^2 dm = \rho \pi r^2 \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz = \rho \pi r^2 \frac{H^3}{12} = \frac{mH^2}{12}.$$

x ва y ўқларга нисбатан цилиндр бир хилда симметрик жойлашгани учун

$$I_{Ozx} = I_{Oyz}. \text{ Шу сабабли}$$

$$I_x = I_{Ozx} + I_{Oyz} = 2 I_{Ozx} = 2 I_{Oyz} = \frac{mr^2}{2}, \quad I_{Ozx} = I_{Oyz} = \frac{mr^2}{4}.$$

Натижада

$$I_x = I_{Ozx} + I_{Oxy} = \frac{m}{4} \left(r^2 + \frac{1}{3} H^2 \right),$$

$$I_y = I_{Oyz} + I_{Oxy} = \frac{m}{4} \left(r^2 + \frac{1}{3} H^2 \right).$$

x , y ўқлари марказий инерция бош ўқлари бўлгани учун

$$I_{zx} = I_{yz} = I_{xy} = 0.$$

Бинобарин, цилиндрнинг оғирлик марказига нисбатан ясалган инерция эллипсоидининг тенгламаси

$$\frac{m}{4} \left(r^2 + \frac{1}{3} H^2 \right) x^2 + \frac{m}{4} \left(r^2 + \frac{1}{3} H^2 \right) y^2 + \frac{mr^2}{2} z^2 = 1$$

кўринишда ёзилади.

Бу эллипсоиднинг ярим ўқлари

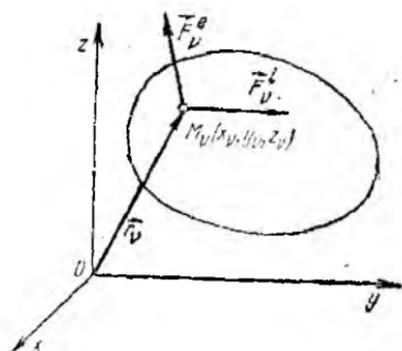
$$a = b = \frac{2}{\sqrt{m \left(r^2 + \frac{H^2}{3} \right)}}, \quad c = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{m}}$$

га тенг айланма эллипсоиддан иборат бўлади.

21-боб. ДИНАМИКАНИНГ УМУМИЙ ТЕОРЕМАЛАРИ

21.1-§. Механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари

Айтайлик, механик система M_1, M_2, \dots, M_N нуқталардан ташкил топган бўлсин. Массаси m_v бирор қўзғалмас *Охуз* координаталар



21.1-расм:

системасига нисбатан радиус-вектори \vec{r}_v га тенг система исталган M_v нуқтасига қўйилган ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисини \vec{F}_v^e барча ички кучларнинг тенг таъсир этувчисини \vec{F}_v^i билан белгиласак (21.1-расм), бундай нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг векторли ифодаси

$$m_v \frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i \quad (21.1)$$

кўринишда ёзилади. Бунда $\frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{\omega}_v$ мазкур нуқтанинг тезланиши. Системанинг ҳар бир нуқтаси учун (21.1) тенглама ўринли бўлади.

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \\ &\dots \dots \dots \\ m_N \frac{d^2 \vec{r}_N}{dt^2} &= \vec{F}_N^e + \vec{F}_N^i, \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Бу тенгламаларни қисқача қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m_v \frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i, \quad (v=1, 2, \dots, N). \quad (21.3)$$

(21.3) тенгламаларни қўзғалмас *Охуз* Декарт координата ўқларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} m_v \ddot{x}_v &= X_v^e + X_v^i, \\ m_v \ddot{y}_v &= Y_v^e + Y_v^i, \\ m_v \ddot{z}_v &= Z_v^e + Z_v^i, \end{aligned} \right\} \quad (v=1, 2, \dots, N) \quad (21.4)$$

бу ерда $\ddot{x}_v, \ddot{y}_v, \ddot{z}_v$ орқали $\frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = \vec{\omega}_v$ тезлашнинг координата ўқларидаги проекциялари; X_v^e, Y_v^e, Z_v^e билан нуқтага таъсир этувчи барча ташқи кучлар тенг таъсир этувчисининг проекциялари; X_v^i, Y_v^i, Z_v^i билан эса барча ички кучлар тенг таъсир этувчисининг маъкур ўқдаги проекциялари белгиланган.

(21.3) ёки (21.4) тенгламалар *механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари* дейилади. Умумий ҳолда система нуқталарига таъсир этувчи кучлар вақт, система нуқталарининг координаталари ва тезликларининг функциясида нобрат бўлган учун бу тенгламалар биргаликдаги тенгламалар системасини ташкил этади. Бинобарин, система нуқталарининг массалари ва уларга таъсир этувчи кучларни билган ҳолда берилган бошланғич шартларда механик системанинг ҳаракатини аниқлаш учун (21.3) кўринишдаги N та векторли тенгламалар системаси ёки $3N$ та иккинчи тартибли (21.4) скаляр тенгламалар системасини интеграллашга тўғри келади.

(21.4) тенгламалар системасини интеграллаш натижасида ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланадиган $6N$ та интеграллаш доимийлари ҳосил бўлади. Вақтнинг бирор найтидаги система нуқталарининг координаталари ва тезликларининг қиймати *механик система учун бошланғич шартларни* ифодалайди.

Умумий ҳолда (21.3) ёки (21.4) тенгламаларнинг аниқ ечимини аниқлаш ҳатто механик система битта нуқтадан ташкил топганла ҳам муаммодир. Агар механик система нуқталарига боғланишлар қўйилган бўлса, бундай механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини интеграллаш янада қийинлашади. Чунки бу ҳолда механик системанинг ҳаракатини аниқлашдан ташқари берилган кучлар ва боғланишлар асосида яна қўшимча номаълум боғланиш реакция кучларини ҳам аниқлашга тўғри келади.

Механик система нуқталарининг сони орта борган ери ҳаракат дифференциал тенгламаларини интеграллаш мураккаблаша боради. Одатда механик системанинг ҳаракатини аниқлашда боварига системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини интеграллаш билан шуғулланилмайди. Қўшимча система динамикасининг масалаларини ечишда механик системанинг айрим характеристикалар тўпламини аниқлаш етарли бўлади. Бундай характеристикалар тўплами (21.3) ёки (21.4) тенгламалардан келтириб чиқариладиган ва *динамиканинг умумий теоремалари* деб аталадиган теоремалар воситасида аниқланади. Ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема, кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теорема ва кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремалар ана шулар аумласидандир. Айрим ҳолларда бу теоремалардан фойдаланиб, системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси биринчи интегралларини (яъни координаталардан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосилла қўйиб қўйилмайдиган муносабатларини) олиш мумкин.

Агар ҳаракат дифференциал тенгламасининг айрим биринчи интеграллари маълум бўлса, бу биринчи интеграллар системанинг ҳа-

ракатини тўлиқ аниқламаса-да, бутун системанинг ҳаракатини характерларида муҳим аҳамиятга эга.

Баъзи ҳолларда динамиканинг умумий теоремаларидан фойдаланиб биринчи интегралларни топиш мумкин бўлмаса-да, системанинг ҳаракати ҳақида алоҳида аҳамиятга эга бўлган маълумотларни олиш мумкин. Бу теоремаларни алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз.

21.2-§. Моддий нуқтанинг ва системанинг ҳаракат миқдори. Куч импульси

Кинематика бўлимида тезлик нуқта ҳаракатининг асосий кўрсаткичларидан бири эканлигини кўрган эдик. Динамикада нуқта (ёки система нуқталари) нинг тезлиги билан бирга уларнинг массасини ҳам билиш зарур. Масалан, иккита бир хил шаклдаги пластмасса-дан ва металлдан ясалган гилдираклар айнан бир хил кучлар таъсирида турлича ҳаракатда бўлади.

Механикада моддий нуқта механик системанинг ҳаракат ўлчовларидан бири сифатида унинг ҳаракат миқдори олинади. (15.3) дан маълумки, нуқтанинг массаси m билан берилган ондаги тезлиги \vec{v} нинг кўпайтмасига тенг

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

вектор нуқтанинг ҳаракат миқдорини ифодалайди.

Нуқта ҳаракат миқдорининг Декарт координата ўқларидаги проекциялари кўйиндагича аниқланади:

$$q_x = m\dot{x} = m\dot{x}, \quad q_y = m\dot{y} = m\dot{y}, \quad q_z = m\dot{z} = m\dot{z}.$$

Механик система нуқталари ҳаракат миқдорларининг геометрик йиғиндисига тенг вектор

$$\vec{Q} = \sum m_v \vec{v}_v \quad (21.5)$$

системанинг ҳаракат миқдори (ёки ҳаракат миқдорининг бош вектори) дейилади.

$$(8.1) \text{ да } \vec{v}_v = \frac{d\vec{r}_v}{dt} \quad (\vec{r}_v - M_v \text{ нуқтанинг инерциал системага ине-}$$

баган радиус-вектори) ҳамда система нуқталарининг массалари ўзгармас бўлгани учун

$$\vec{Q} = \sum m_v \frac{d\vec{r}_v}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_v \vec{r}_v$$

(20.4) га асосан $\sum m_v \vec{r}_v = M\vec{r}_C$ (M —бутун системанинг массаси, \vec{r}_C —массалар марказининг радиус-вектори) муносабат ўришли бўлгани учун

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt} (M\vec{r}_C) = M \frac{d\vec{r}_C}{dt}$$

бунда $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ система массалар марказининг тезлигини ифодалайди. Демак,

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C \quad (21.6)$$

бўлиб, системанинг ҳаракат миқдори бутун система массаси билан система массалар маркази тезлигининг кўпайтмасига тенг.

(21.6) ни бошқача қўйидагича талқин қилиш ҳам мумкин: системанинг ҳаракат миқдори бутун системанинг массаси мужассамлашган деб қараладиган система массалар марказининг ҳаракат миқдорига тенг.

(21.5) ва (21.6) га кўра, система ҳаракат миқдорининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаш мумкин:

$$Q_x = \sum m_v v_{vx} = Mv_{Cx}$$

$$Q_y = \sum m_v v_{vy} = Mv_{Cy}$$

$$Q_z = \sum m_v v_{vz} = Mv_{Cz}$$

Системанинг ҳаракат миқдорини ҳисоблаш учун $Ox_1y_1z_1$ инерциал координаталар системаси билан бирга системанинг массалар маркази орқали ўтувчи ва унга параллел равишда ҳаракатлинувчи $Sx_1y_1z_1$ координаталар системасини киритамиз (21.2-расм). Натижада система нуқталарининг ҳаракатини $Sx_1y_1z_1$ билан бирликдаги кўчирма (илгариллама) ҳаракатдан ҳамда бу координата ўқларига нисбатан нисбий ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин. Шу сабабли системанинг ҳаракат миқдорини ҳам кўчирма ва нисбий ҳаракат миқдорларининг йиғиндисидан иборат деб оламиз:

$$\vec{Q} = \vec{Q}^e + \vec{Q}^r.$$

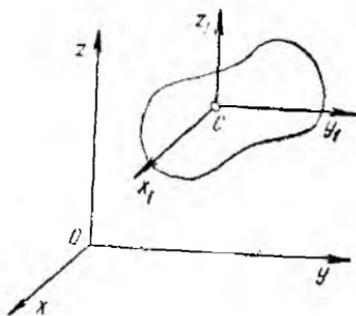
Ҳаракатдаги координаталар системасининг боши системанинг массалар маркази билан устма-уст тушгани сабабли нисбий ҳаракатда $\vec{v}_C^r = 0$ бўлади. Бинобарин, (21.4) га кўра $\vec{Q}^r = M\vec{v}_C^r = 0$. Натижада $\vec{Q} = \vec{Q}^e$ тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, системанинг ҳаракат миқдори унинг массалар маркази билан биргаликдаги илгариллама кўчирма ҳаракатини хarakterлайди.

Масалан, массалар маркази орқали ўтувчи қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг ҳаракат миқдор вектори

$$\vec{Q} = \vec{Q}^e = M\vec{v}_C = 0$$

бўлади, чунки массалар маркази қўзғалмас ўқда ётади ва унинг тезлиги $\vec{v}_C = 0$ бўлади. Лекин тўғри чизикли рельсда сирпанмай ҳаракатланувчи ёлдиракнинг ҳаракат миқдори



21.2-расм.

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c \neq 0$$

бўлади, чунки бу ҳолда билдирак массалар марказининг тезлиги $\vec{v}_c \neq 0$ бўлади.

Нуқтаининг ҳаракат миқдори вектори \vec{q} мазкур нуқтага, система-нинг ҳаракат миқдори вектори \vec{Q} эса системанинг массалар марказига қўйилган деб қаралади.

Механик ҳаракатнинг векторли ўлчови сифатида ҳаракат миқ-дори олинади.

Берилган нуқтага бошқа моддий объектларнинг ҳар ондаги меха-ник таъсирини характерловчи ўлчов сифатида куч олинади. Лекин куч таъсирининг эффекти унинг ҳар ондаги миқдор ва йўналишига-гина боғлиқ бўлмай, балки унинг таъсир вақтига ҳам боғлиқ бўлади.

Миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлган \vec{F} куч билан унинг таъсир вақти t нинг кўпайтмасига тенг

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot t \quad (21.7)$$

вектор *кўчининг импульси* дейилади.

Куч импульсининг йўналиши кучнинг йўналиши билан бир хил бўлади.

Куч импульси *ўзаро механик таъсирнинг векторли ўлчови* дейилади ва берилган вақт ичида моддий нуқта (ёки система) га бошқа моддий объектларнинг таъсирини ифодалайди.

СИ бирликлар системасида куч импульси Н.с билан ўлчанади.

Агар таъсир этувчи куч $\vec{F} = \vec{F}(t)$ вақтнинг функциясида ноб-рат бўлса, кучнинг dt вақт ичидаги таъсири *кўчининг элементар импульси* деб аталадиган

$$d\vec{S} = \vec{F} dt \quad (21.8)$$

катталик билан аниқланади.

Куч элементар импульсининг координата ўқларидаги проекциялари

$$dS_x = X dt, \quad dS_y = Y dt, \quad dS_z = Z dt \quad (21.8)$$

ифодалардан, чекли t вақт ичидаги куч импульси эса

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt \quad (21.9)$$

формуладан аниқланади.

Куч импульсининг координата ўқларидаги проекциялари қуйида-гича аниқланади:

$$S_x = \int_0^t X dt, \quad S_y = \int_0^t Y dt, \quad S_z = \int_0^t Z dt \quad (21.9')$$

21.1-масала. 21.3-расмда тасвирланган механикдаги қўзғалмас билдирак вилда ҳаракатланувчи билдиракнинг радиуси r , массаси M бўлиб, массалар мар-кази O нуқтада ётади; тўғри шиккли AB сферанинг массаси AM массалир мар-

қилиб C_1 нуктада ($AC_1 = C_1B$). OO_1 кривошини O ўқ атрофида ўзгармас ω бурчак тезлиги билан айланади.

Кривошини массасини ҳисобга олмай, системанинг ҳаракат миқдори ҳисоблансин.

Ечилиш. Берилган механизмни радиуси r га тенг гилдирак ва AB стержендан ташкил топган система деб қараймиз. У ҳолда системанинг ҳаракат миқдори $\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$ бўлади. Бунда Q_1 r радиусли гилдиракнинг; Q_2 эса AB стерженнинг ҳаракат миқдорини ифода қилади.

(21.6) формуласини ҳар бир жисм учун қўлласак,

$$\vec{Q} = M\vec{v}_{O_1} + kM\vec{v}_{C_1} \quad (1)$$

Бу ерда \vec{v}_{O_1} , \vec{v}_{C_1} лар мос равишда гилдирак марказининг O_1 ва AB стержень массалар маркази C_1 нукталарининг тезликларини ифода қилади.

O_1 нукта OO_1 кривошини билан айланма ҳаракатда иштирок этгани туфайли, тезлигининг модули

$$v_{O_1} = r\omega \quad (2)$$

бўлиб, OO_1 га перпендикуляр бўйлади.

AB стержень Oy ўқ бўйлаб тўғри чизиқли илгариллама ҳаракатини бўлгани учун унинг C_1 нуктасининг тезлиги A нуктасининг тезлигига тенг бўлади ва вертикал юқорига бўйлади: $\vec{v}_{C_1} = \vec{v}_A$. A нукта r радиусли гилдиракка таналлиқли бўлгани учун A нуктанинг тезлигини топишда гилдираклар тегиб турган C нукта тезликларининг оний марказидан иборат эканлигиндан фойдаланамиз:

$$\frac{v_A}{v_{O_1}} = \frac{AC}{O_1C} = \frac{2r \sin \varphi}{r} = 2 \sin \varphi,$$

бунда $\varphi = \omega t$ — кривошинининг айланиш бурчаги. Шундай қилиб,

$$v_{C_1} = v_A = v_{O_1} \cdot 2 \sin \varphi = 2r\omega \sin \omega t. \quad (3)$$

(2) ва (3) ни назарда тутиб, (1) дан ҳаракат миқдорининг координата ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

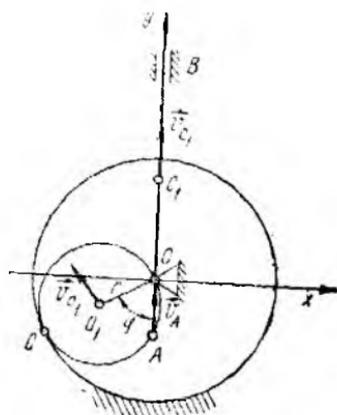
$$Q_x = -Mv_{O_1} \cos \varphi = -Mr\omega \cos \omega t,$$

$$Q_y = Mv_{O_1} \sin \varphi + kMv_{C_1} = Mr\omega (1 + 2k) \sin \omega t. \quad]$$

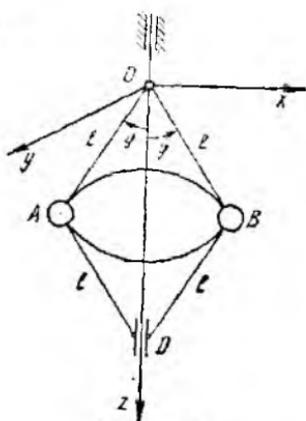
21.2-масала. Вертикал ўқ атрофида тезланувчан айланма ҳаракат қилувчи марказдан қочирма регуляторнинг ҳаракат миқдори ҳисоблансин. Бунда φ бурчак $\varphi = \varphi(t)$ қонуни асосида ўзгаради ва O_1 , OB стерженлар айланиш натижасида A ва B шарлар кўтирилади. Стерженларнинг узунлиги $OA = OB = AD = BD = l$. Массаси M_2 га тенг D муфтаининг массаси M_1 га тенг A ва B шарлар нукта деб қаралсин. Стерженларнинг массасини ҳисобга олинамиз (21.4-расм).

Ечилиш. Марказдан қочирма регуляторни A , B шарлар ва D муфтадан иборат учта моддий нуктадан ташкил топган система деб қараймиз. Шу сабабли

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3,$$



21.3-расм.



21.4-расм.

бунда $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3$ — мос равишда A, B шарлар ва D муфтанинг ҳаракат миқдори.
(15.3) ни системанинг ҳар бир нуқтаси учун қўлаймиз:

$$\vec{Q} = M_1 \vec{v}_A + M_1 \vec{v}_B + M_2 \vec{v}_D.$$

бунда $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_D$ лар мос равишда A, B, D нуқталарнинг тезлигини ифода-
лайди.

Система нуқталари z ўққа нисбатан симметрик жойлашгани туфайли система-
нинг массалар маркази шу ўқда ётади. Шу сабабли

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= M\dot{x}_C = 0, \\ Q_y &= M\dot{y}_C = 0, \\ Q_z &= M\dot{z}_C = M_1\dot{z}_A + M_1\dot{z}_B + M_2\dot{z}_D. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Агар етерженлар xz текислигида ётади десак, $z_A = l \cos \varphi, z_B = l \cos \varphi,$
 $z_D = 2l \cos \varphi$ тенгликларни оламиз. Шу сабабли

$$\dot{z}_A = \dot{z}_B = -l \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{z}_D = -2l \dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (2)$$

(2) ни (1) га қўйсак,

$$Q_z = -2(M_1 + M_2) l \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

21.3-§. Нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Ньютоининг иккинчи қонуни (15.4) кўринишда ёзиб,

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F},$$

уни dt га қўнайтсак,

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt \quad (21.10)$$

ёки (21.8) га кўра

$$d(m\vec{v}) = d\vec{S} \quad (21.11)$$

формула ўринли бўлади.

(21.10) ёки (21.11) тенглама нуқта ҳаракат миқдорининг ўзга-
риши ҳақидаги теореманинг дифференциал кўринишидир. У қуйи-
дагича ўқилади: нуқта ҳаракат миқдорининг дифференциали нуқ-
тага таъсир этувчи кучнинг элементар импульсига тенг.

(21.10) ни координата ўқларига проекциялаб,

$$d(mv_x) = Xdt, \quad d(mv_y) = Ydt, \quad d(mv_z) = Zdt \quad (21.12)$$

ёки

$$dq_x = dS_x, \quad dq_y = dS_y, \quad dq_z = dS_z \quad (21.13)$$

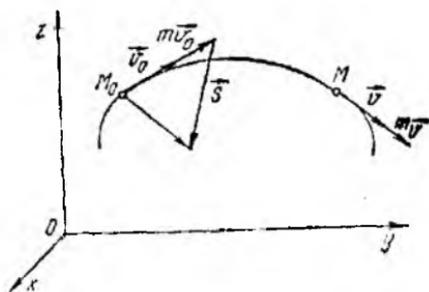
тенгликларни оламиз. Демак, нуқта ҳаракат миқдори бирор коор-
дината ўқидаги проекциясининг дифференциали нуқтага таъсир
этувчи куч элементар импульсининг мазкур ўқдаги проекциясига
тенг.

Чекли вақт ичида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгаришини аниқлаш учун (21.10) ни интеграллаймиз:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F} \cdot dt \quad (21.14)$$

ёки

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}, \quad (21.15)$$



21.5- расм.

бунда \vec{v}_0 орқали $t_0 = 0$ бошлан-

ғич пайтдаги тезлик, \vec{v} билан исталган t пайтдаги тезлик белгиланган (21.5- расм).

(21.14) ёки (21.15) тенгламалар нуқта ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичида ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: нуқта ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичида ўзгариши нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу вақт ичидаги импульсига тенг.

Агар t_0 ва t_1 вақтлардаги нуқтанинг ҳаракат миқдорлари $m\vec{v}_0$ ва $m\vec{v}$ маълум бўлса, $t_1 - t_0$ вақтдаги нуқтага таъсир этувчи кучнинг импульсини 21.5- расмдагидек тасвирлаш мумкин. Ақенича, чекли вақт ичидаги кучнинг импульси $\int_0^t \vec{F} dt$ ва нуқтанинг бошланғич тезлиги \vec{v}_0 маълум бўлса, исталган t пайтдаги нуқтанинг тезлиги

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{m} \int_0^t \vec{F} dt \quad (21.16)$$

формуладан аниқланади.

Нуқта ҳаракат миқдори ўзгаришининг координата ўқларидаги (скаляр) ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m v_x - m v_{0x} = S_x, \quad m v_y - m v_{0y} = S_y, \quad m v_z - m v_{0z} = S_z. \quad (21.17)$$

Демак, нуқта ҳаракат миқдорининг бирор координата ўқи бўйича чекли вақт ичида ўзгариши шу вақт ичидаги нуқтага таъсир этувчи куч импульсининг мизкур ўқдаги проекциясига тенг.

Юқорида исботланган (21.14), (21.15) ва (21.17) кўришишидаги ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремалар \vec{F} куч (агар нуқта $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар системаси таъсирида бўлса, \vec{F} куч учун кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ олинади) фақат вақтнинг функциясидан иборат ёки миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлган ҳолларда ўринли бўлади.

Қуйидаги ҳолларда ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари (16.1) ёки (16.3) нинг биринчи интегралларини аниқлаш мумкин:

Агар $\vec{F} = 0$ бўлса, яъни нуқтага ҳеч қандай кучлар таъсир этмаса (ёки таъсир этувчи кучлар нолга эквивалент бўлса), у ҳолда (21.10) га кўра

$$d(m\vec{v}) = 0,$$

бинобарин,

$$m\vec{v} = \vec{c} = \text{const} \quad (21.18)$$

ёки (21.14) га кўра

$$m\vec{v} = m\vec{v}_0 \quad (21.19)$$

тенглик ўринли бўлади.

(21.18) ёки (21.19) тенгликлар *ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини* билдиради ва нуқта ҳаракат дифференциал тенгلامаси (16.1) ning биринчи векторли интегралини ифодалайди.

(21.18) да масса ўзгармас бўлгани учун кўрилатган ҳолда $\vec{v} = \text{const}$ бўлади, яъни нуқта тўғри чизиqli текис ҳаракатда бўлади. Бу натижа Ньютоннинг биринчи қонуни (инерция қонуни) ни ифодалайди.

2) Агар кучнинг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса:

$$X = 0,$$

у ҳолда (21.17) га асосан

$$m v_x - m v_{0x} = 0,$$

бинобарин,

$$v_x = v_{0x} = C_1 \quad (21.20)$$

ёки

$$\dot{x} = C_1$$

кўринишдаги (16.3) тенгламанинг биринчи интегралини оламиз. (21.20) дин кўраимизки, таъсир этувчи кучнинг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, нуқта тезлигининг мазкур ўқдаги проекцияси ўзгармасдан қолади.

3) Агар таъсир этувчи куч ҳаминша ўз йўналишини сақласа, масалан, z ўққа параллел бўлса, у ҳолда $X = Y = 0$ бўлади ва 2-ҳолдагидек

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = C_2 \quad (21.21)$$

биринчи интеграллар мавжуд бўлади.

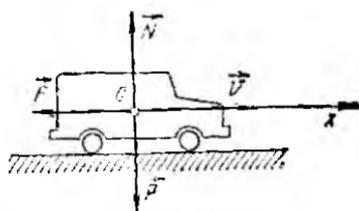
(21.21) ning биринчисини y , иккинчисини x га кўпайтириб, олинган тенгликларни солиштирсак,

$$C_1 \dot{y} = C_2 \dot{x} \quad \text{ёки} \quad C_1 dy - C_2 dx = 0$$

муносабат ўринли бўлади. Охириги тенгликни интеграллаб қуйидагини оламиз:

$$C_1 y - C_2 x = \text{const}.$$

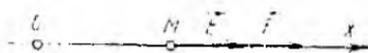
Бу тенглама z ўққа параллел текисликда ётувчи эгри чизиқнинг тенгламасини бифодалайди. Бинобарин, кўриладиган ҳолда нуқтанинг траекторияси ҳамини z ўққа параллел текисликда ётади.



21.6- расм.

21.3- масала. Оғирлиги P И бўлган автомобильни t_0 вақт ичида тезлигини v_0 дан v га v гача камайтириш учун қандай кўч билан тормозлаш керак?

Ечми. Автомобиль тўғри чизиқдан ҳаракатда деб қараймиз (21.6- расм). Автомобильнинг оғирлик кучи \vec{P} , нормал реакция кучи \vec{N} , тормозлаш кучи \vec{F} қўйилган бўлиб, бarcha кучлар йўналиши ва миқдор жиҳатдан ўзгармасдир.



21.7- расм.

(21.17) нинг биринчи тенгламасидан фойдаланиб, x ўққа нисбатан ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремаи қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m(v - v_0) = -F \cdot t$$

ёки

$$F = -\frac{P}{g} \frac{v_0 - v}{t} \quad \text{II.}$$

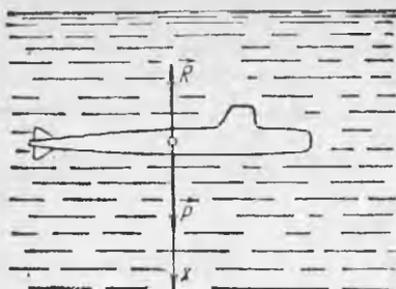
21.4- масала. e электр зарядига эга бўлган m массали заррача $E = A \sin kt$ кумуляциядан (A ва k — ўзгармас миқдорлар) бир жинсли электр майдонида ҳаракат қилади. Агар электр майдонида заррачага \vec{E} кучларини томонига йўналган $\vec{F} = e\vec{E}$ куч таъсир қилиши маълум бўлса, заррачанинг t вақтдан кейинги ҳаракат тезлиги аниқлансин. Оғирлик кучининг таъсири ҳисобга олинмасин. Заррачанинг бошланғич тезлиги нолга тенг.

Ечми. Агар Ox ўқини t кучларини бўйича йўналтирсак, заррачага вақтнинг функциясидаи иборат ва x ўқ бўйича йўналган куч $F = eE = eA \sin kt$ таъсир этади (21.7- расм). $v_0 = 0$ эканлигини эътиборга олиб, (21.16) ни x ўққа проекциялаб, керакли тезлиқни толамиз:

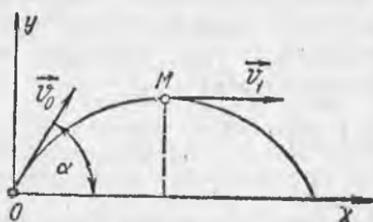
$$v = v_x = \frac{1}{m} \int_0^t F dt = \frac{eA}{m} \int_0^t \sin kt dt = -\frac{eA}{km} (\cos kt - 1).$$

21.5- масала. Тўғриб турган сув ости кемаси олғини манфий p сузувчанлик бўлиб, илгариларга h_0 шарт билан сув остига чўқади. Кема кичик манфий сузувчанликка эга бўлганда сузиши қаринлигини чўқиб тезлашувчи биринчи даражасига пропорционал ва h о v га тенг деб қабул қилиш мумкин; v нини k — пропорционаллик коэффициентини v — кема горизонтал проекциясининг юзи, v — сувга чўқиб тезлашувнинг миқдори. Кема массаси M га тенг. Кеманинг чуқур тезлиги v аниқлансин. $t = 0$ бўлганда $v_0 = 0$.

Ечми. x ўқни вертикал шартга йўналтирсак, сув ости кемасига таъсир қилган ўқ бўйлаб ўзгармас манфий сузувчанлик p ва унга қарама-қарши йўналган ва тезлиқнинг функциясидаи иборат қаринлик кучи $R = khv$ таъсир этади (21.8- расм). Шу сабабли нуқта ҳаракат миқдорининг дифференциал хўришидаги ўзгариши ҳақидаги (21.12) тенгламалар системасининг биринчисидан фойдаланамиз:



21.8- расм.



21.9- расм.

$$d(m v_x) = X dt$$

ёки берилган масала учун

$$d(M v) = (p - k \sigma v) dt.$$

Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб интегралласак, кеманинг чўкиш тезлигини топамиз:

$$\int_0^v \frac{d(M v)}{p - k \sigma v} = \int_0^t dt$$

ёки

$$\ln(p - k \sigma v) \Big|_0^v = - \frac{k \sigma t}{M},$$

бундан

$$v = \frac{p}{k \sigma} \left(1 - e^{-\frac{k \sigma t}{M}} \right).$$

5

21.6- масала. Снаряд бошланғич O ҳолатдан энг баланд M ҳолатга ўтганга қадар кетган вақт ичида унга таъсир қиладиган барча кучлар тенг таъсир этувчисининг импульси топилсин (21.9- расм).

Берилган: $v_0 = 500$ м/с, $\alpha_1 = 60^\circ$, $v = 200$ м/с, снаряднинг массаси $m = 100$ кг.

Ечиш. (21.17) дан фойдаланиб, барча кучлар тенг таъсир этувчисининг координатага ўқларидаги проекцияларини аниқлаймиз:

$$S_x = m(v_x - v_{0x}) = 100(200 - 500 \cos 60^\circ) = -5000 \text{ Н}\cdot\text{с.}$$

$$S_y = m(v_y - v_{0y}) = 100(-500 \sin 60^\circ) = -43300 \text{ Н}\cdot\text{с.}$$

21.4- §. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

N та моддий нуқталардан ташкил топган система нуқталарига ички ва ташқи кучлар таъсир этсин. U ҳолда (21.3) да

$$m_v \frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} = m_v \vec{\omega}_v = \frac{d}{dt} (m_v \vec{v}_v), \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

эканлигини назарда тутиб, системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dt} (m_v \vec{v}_v) = \vec{F}_v^e + \vec{F}_v^i, \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (21.22)$$

(21.22) тенгламаларни қўшамиз:

$$\frac{d}{dt} \sum m_v \vec{v}_v = \sum \vec{F}_v^e + \sum \vec{F}_v^i,$$

бунда (21.5) га кўра $\sum m_v \vec{v}_v = \vec{Q}$ системанинг ҳаракат миқдорини билдиради. Ички кучларнинг хоссасига кўра $\sum \vec{F}_v^i = 0$ бўлади. $\sum \vec{F}_v^e = \vec{R}^e$ ташқи кучларнинг бош векторини ифодалашини назарда тутсак,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^e \quad (21.23)$$

муносабат ўринли бўлади.

(21.23) тенглама система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг дифференциал кўринишидир. У қуйидагича ўқилади: системанинг ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган биринчи ҳосила системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош векторига тенг.

(21.23) тенгламада ички кучлар қатнашмайди. Ҳақиқатан ҳам ички кучлар система айрим нуқталарининг ҳаракат миқдори ўзгаришига таъсир этса-да, система ҳаракат миқдорининг ўзгаришига бевосита эмас, балки билвосита, ташқи кучлар орқали таъсир этади.

Масалан, автомобилли система деб қарасак, акселератор педалини босган сари (бунда ҳосил бўладиган куч ички кучдан иборат) автомобиль двигателининг айланишлар сони орта боради; агар автомобиль силлиқ муз устида турган бўлса, двигатель айланишлари ҳар қанча катта бўлса ҳам етакчи ғилдирақлар билан муз устидаги ишқаланиш кучи (ташқи куч) кичик бўлганда автомобиль жойидан силжимаيدи, яъни автомобилнинг ҳаракат миқдори нолга тенг бўлади. Лекин қуруқ ва равои асфальт йўлда ишқаланиш кучи етарли даражада катта бўлгани учун акселератор педалини босган сайин автомобиль тезроқ юра бошлайди, яъни унинг ҳаракат миқдори орта боради. Бу мисолда ички кучларнинг ташқи кучлар воситасида система ҳаракат миқдорининг ўзгаришига таъсир эта олиши намоён бўлади.

Кўпинча машина ва механизм қисмларига таъсир этувчи ички кучлар номаълум бўлади. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг амалий афзаллиги шундан иборатки, бу теоремани қўллашда ички кучлар бутунлай эътиборга олинмайди. Шу сабабли механик системани шундай танлаш керакки, натижада олинган номаълум бўлган кучларни ички кучлар қаторига киритишга эришиш зарур.

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан сувоқлик ва газ динамикасида ҳамда ўзгарувчан массали жисм динамикасида самарали фойдаланилади.

Агар системага ташқи кучлар таъсир этмаса ёки ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса ($\vec{R}^e = 0$), (21.23) ни

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан

$$\vec{Q} = \overrightarrow{const} \quad (21.24)$$

муносабатни оламиз. Векторли интеграллаш доимийси \overrightarrow{const} ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. Агар $t = 0$ да системанинг нуқталари $\vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}, \dots, \vec{v}_{n0}$ тезликларга эга бўлса,

$$\overrightarrow{const} = \sum m_v \vec{v}_{v0} = \vec{Q}_0$$

тенгликка эришамиз, буида \vec{Q}_0 системанинг бошланғич пайтдаги ҳаракат миқдори.

Шундай қилиб, 21.24 ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0. \quad (21.25)$$

(21.24) ёки (21.25) тенгликлар *механик система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни* деб аталади ҳамда система ҳаракат дифференциал тенгламалари (21.3) нинг биринчи векторли интегралли ифодалиғиди. Бу тенгликлардан кўрамизки, *агар системага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, системанинг ҳаракат миқдор вектори миқдор ва йўналиши жиҳатдан ўзгармай бўлади.*

(21.23) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг скаляр ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e, \quad (21.26)$$

(21.26) қуйидагича ўқилади: *система ҳаракат миқдорининг бирор ўқдаги проекциясидан вақт бўйича олнган ҳосила, системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.*

(21.23) тенгламанинг чап ва ўнг томонини dt га кўпайтириб, интегралласак:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0 + \int_0^t \vec{R}^e dt. \quad (21.27)$$

(21.27) тенглама *система ҳаракат миқдорининг чекли вақт ичида ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *система ҳара-*

кат миқдорининг чекли вақт ичида ўзгариши система шўқталарига таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг шу вақт ичидаги импульсига тенг.

(21.27) ни қўзғалмас Декарт координата ўқларига проекциялаб, қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} Q_x - Q_{ox} &= \int_0^t R_x^e dt, \\ Q_y - Q_{oy} &= \int_0^t R_y^e dt, \\ Q_z - Q_{oz} &= \int_0^t R_z^e dt. \end{aligned} \right\} (21.28)$$

Шундай қилиб, чекли вақт ичида бирор қўзғалмас координата ўқлари бўйича система ҳаракат миқдорининг ўзгариши худди шу вақт ичида системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош вектори импульсининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг бўлади.

Агар ташқи кучлар бош векторининг бирор (масалан, Ox) ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса ($R_x^e = 0$), (21.28) нинг биринчиси:

$$Q_x - Q_{ox} = 0$$

тенгликни оламиз. Бинобарин,

$$Q_x = Q_{ox} = \text{const} \quad (21.29)$$

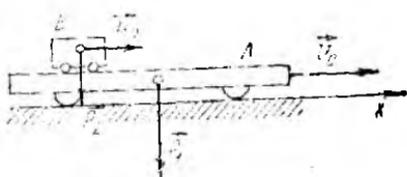
бўлади.

(21.29) тенглик берилган ўқ бўйича система ҳаракат миқдорининг сақланиши қонунини ифодалайди: системага таъсир этувчи ташқи кучлар бош векторининг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система ҳаракат миқдорининг мазкур ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади.

⑥ 21.7 - масала. Инерцияси бўйича \vec{v}_0 тезлик билан ҳаракатланувчи горизонтал A платформа бўлиб B тележка m ирсбий тезлик билан ҳаракатланади (21.10-расм). Маълум вақтда тележка тўхтаб қалади. Агар M — платформа массаси, m — тележка массаси маълум бўлса, тележка тўхтагандан кейин унинг платформа билан бирга қандай тезлик аниқлансин.

Ейти. x ўқи платформанинڭ ҳаракат бўйичасига олинади. Платформа ва тележканинг системи деб қарайлик. Система нуқталарига нольга тенг шундай P_1 ва P_2 оғирлик кучлари таъсир этад. Шу сабабдан ташқи кучлар бош векторининг x ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлади, яъни $R_x^e = 0$.

У ҳолда x ўқ бўйича система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни (21.29) ни қолдир.



$$Q_x = Q_{0x}$$

тенглик билан ифодаланади, бу ерда

$$Q_{0x} = m(v_0 + u_0) + Mv_0, \quad Q_x = (M + m)v$$

бўлгани учун қуйидаги ҳосил бўлади:

$$(M + m)v = m(v_0 + u_0) + Mv_0.$$

Бундан изланаётган тезликни тонамиз: $v = v_0 + \frac{m}{M + m} u_0$

21.5-§. Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани келтириб чиқарамиз.

(21.6) дан \vec{Q} нинг қийматини (21.23) га қўямиз:

$$M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{R}^e \quad (21.30)$$

ёки

$$M \vec{\omega}_C = \vec{R}^e, \quad (21.31)$$

бу ерда $\vec{\omega}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt}$ — система массалар марказининг тезланishi.

(21.30) ёки (21.31) тенгламалар система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани ифодалайди: системанинг массалар маркази массаси бутун система массасига тенг ва система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори таъсиридеги моддий нуқта каби ҳаракатланади.

Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема ва система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремалар битта теореманинг турли кўринишларидир.

(21.30) ёки (21.31) тенгламаларда ички кучлар қатнашмайди. Шундан келиб чиқиб, ички кучлар система массалар марказининг ҳаракатини ўзгартира олмайди, деган натижани оламиз.

Агар ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса ($\vec{R}^e = 0$), (21.30) га кўра,

$$M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0,$$

бундан

$$\vec{v}_C = \text{const}$$

бўлади. Бу тенглик система массалар маркази ҳаракатининг сақланиши қонунини ифодалайди: ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлса, системанинг массалар маркази тинч ҳолатда ёки тўғри чизиқли текис ҳаракатда бўлади. Агар системанинг массалар маркази бошланғич пайтда қўзғалмас бўлса ($\vec{v}_C = 0$), системанинг массалар маркази кейинчалик ҳам қўзғалмасдан қолади ($\vec{r}_C = \text{const}$).

(21.31) ни қўзғалмас Декарт координата ўқларига проекциялаб, қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$M\ddot{x}_C = R_x^e, \quad M\ddot{y}_C = R_y^e, \quad M\ddot{z}_C = R_z^e. \quad (21.32)$$

(21.32) тенгламалар система массалар марказининг қўзғалмас Декарт координата ўқларига nisbatan ҳаракат дифференциал тенгламаларини ифодалайди.

Агар ташқи кучларнинг бош вектори нолга тенг бўлмай, унинг бирор (масалан, Ox) ўқдаги проекцияси нолга тенг, яъни

$$R_x^e = 0$$

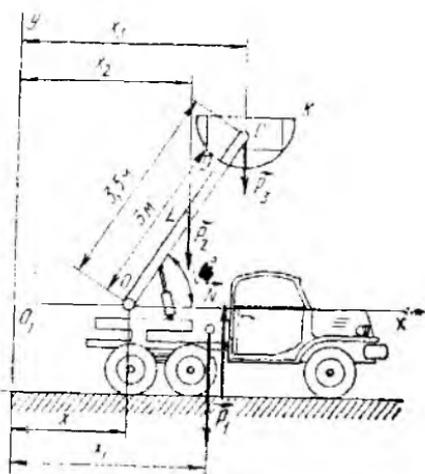
бўлса, (21.32) га кўра

$$M \frac{d \dot{x}_C}{dt} = 0$$

ёки

$$\dot{x}_C = v_{Cx} = \text{const} \quad (21.33)$$

бўлади. Бинобарин, системага таъсир этувчи кучлар бош векторининг бирор қўзғалмас ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система массалар маркази тезлигининг мазкур ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади. Агар бошланғич $t=0$ пайтда система массалар маркази тезлигининг x ўқдаги проекцияси ($v_{Cx})_0 = 0$ бўлса, кейинчалик ҳам $v_{Cx} = 0$, бинобарин, $x_C = \text{const}$ бўлади, яъни системанинг массалар маркази бу ҳолда x ўқ бўйича кўчмайди. Бу натижа система массалар маркази координаталарининг сақланиши қонунини ифодалайди.



21.11-расм.

7 21.8-масала. Массаси 1000 кг га тенг автомашинанига электр сымларни релле қилишда ишлатиладиган қўзғалувчи айланма кран ўрнатилган. Краннинг сема киважаси K расм текислигига перпендикуляр горизонтал O ўқ atroфida айлана атрофида L сержига бириктирилган (21.11-расм). Бошланғич

пайтда кран горизонтал ҳолда ва автомашина тинч ҳолатда бўлган. Агар кран $\alpha = 60^\circ$ бурчакка айланса, тормозланмаган машина қандай масофага силжийди? Бир жинсли L стерженнинг узунлиги 3 метр ва массаси 100 кг га тенг. Кажаванинг массаси 200 кг бўлиб, унинг массалар маркази O ўқдан $OC = 3,5$ м масофада жойлашган. Ҳаракатга кўрсатиладиган қаршилик кучи ҳисобга олинмасин.

Ечиш. Бу масалада автомашина L стержень ва K осма кажавадан ташқил топган учта жисмдан иборат системага эгадир. Уларнинг оғирлик кучлари мос равишда $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ га тенг, йилдиракларга нормал реакция кучларининг йиғиндисини \vec{N} га тенг куч ҳам таъсир этади. Бу кучларнинг барчаси вертикал бўлгани учун уларнинг горизонтал x ўқдаги проекцияларининг йиғиндисини нолга тенг бўлади.

$$R_x^e = 0.$$

Шу сабабли (21.33) га кўра массалар маркази тезлигининг x ўқдаги проекцияси ўзгармас бўлади:

$$\dot{x}_C = v_{Cx} = \text{const.}$$

Бошланғич пайтда $v_{Cx} = 0$ бўлгани учун

$$x_C = \text{const} \quad (1)$$

бўлади.

(20.5) ни эътиборга олсак, (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20} + m_3 x_{30}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

ёки

$$m_1 (x_1 - x_{10}) + m_2 (x_2 - x_{20}) + m_3 (x_3 - x_{30}) = 0. \quad (2)$$

Бунда x_{10}, x_{20}, x_{30} автомашина, L стержень ва K кажаванинг массалари марказининг бошланғич пайтдаги абсциссаларини; x_1, x_2, x_3 лар эса кран $\alpha = 60^\circ$ бурчакка кўтариладиган кейинги абсциссаларини ифодалайди.

21.11-расмдан:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + x_{10} & x_2 &= x + \frac{OD}{2} \cos \alpha, \\ x_3 &= x + OC \cos \alpha, & x_{20} &= \frac{OD}{2}, & x_{30} &= OC. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) ни (2) га қўйсак,

$$m_1 x_1 + m_2 \left[x + \frac{OD}{2} (\cos \alpha - 1) \right] + m_3 [x + OC (\cos \alpha - 1)] = 0.$$

$$x = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left[\frac{m_2 OD}{2} (1 - \cos \alpha) + m_3 OC (1 - \cos \alpha) \right] =$$

$$= \frac{1}{100 + 100 + 200} \cdot \left(\frac{100 \cdot 3}{2} + 200 \cdot 3,5 \right) (1 - 0,5) = 0,327 \text{ м.}$$

21.6*- §. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани суюқликнинг стационар оқимиغا татбиқи. Эйлер тенгламаси

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан ташқи муҳитлар динамикасида ҳам фойдаланилади. Бу теоремани ўзгарувчан кесимга эга бўлган қувур ичида ҳаракатланувчи суюқликнинг стационар оқими учун қўлайлигимиз, яъни қувур деворига перпендикуляр ўтказилган бирор кесимдаги суюқлик зарраларининг тезликларини бир хил ва вақтга боғлиқ эмас деб қараймиз.

Қувур девори ҳамда s_1 ва s_2 кесимлар билан чегараланган ҳажмдаги суюқликка ҳажм кучлари (одатда, оғирлик кучлари) ва сирт кучлари (масалан, суюқликнинг қувур деворига шиқаланиши кучлари) таъсир этади.

Ташқи ҳажм кучларининг бош векторини \vec{R}_x ва ташқи сирт кучларининг бош векторини \vec{R}_c билан белгилаймиз.

Агар берилган ҳажмдаги суюқликнинг бирор пайтдаги ҳаракат миқдори \vec{Q} га тенг бўлса, ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_x + \vec{R}_c \quad (21.34)$$

тенглик ўринли бўлади.

Айтайлик, суюқлик ўзгарувчан кесимга эга бўлган қувур бўйлаб ҳаракатлансин (21.12-расм). Суюқликнинг zichлигини (яъни бирлик ҳажмдаги массасини) ρ билан белгилайлик. У ҳолда s_1 кесимдаги суюқликнинг zichлиги ρ_1 га, s_2 кесимда эса ρ_2 га тенг бўлади. $\rho_1 v_1 s_1$ ва $\rho_2 v_2 s_2$ кўпайтмалар s_1 ва s_2 кесимлар орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтувчи суюқлик массаларини ifodalayди. Массанинг сақланиши қонунига кўра

$$\rho_1 v_1 s_1 = \rho_2 v_2 s_2$$

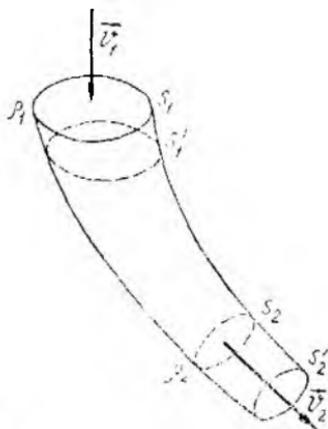
муносабат ўринли бўлади.

Исталган кесим орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтувчи суюқликнинг массасини M_c билан белгиласак, у қуйидагига тенг бўлади:

$$M_c = \rho_1 v_1 s_1 = \rho_2 v_2 s_2. \quad (21.35)$$

СИ бирликлар системасида M_c катталик $\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$ ўлчамга эга бўлади.

Айтайлик, t вақтда s_1 ва s_2 юзалар орасидаги суюқлик ҳажми τ га тенг бўлсин; $t + dt$ вақти ичида худди шу массага эга бўлган суюқлик s'_1 ва s'_2 кесимлар билан чегараланган ҳажмни ifodalayди (21.12-расм). Шундан келиб чиқиб, кўрсатилган масса ҳаракат миқдорининг



21.12-расм.

Ўзгариши s_1 ва s_1' юзалар орасидаги суyoқлик ҳаракат миқдорининг камайиши ҳамда s_2 ва s_2' юзалар орасидаги суyoқлик ҳаракат миқдорининг ортиши ҳисобига содир бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Суyoқликнинг oқими стационар бўлганда s_1 ва s_2 кесимлар орқали dt вақт ичида $M_c dt$ суyoқлик массаси ўтади ҳамда ҳаракат миқдорлари $M_c dt \vec{v}_1$ ва $M_c dt \vec{v}_2$ га тенг бўлади. dt вақт ичида ҳаракат миқдорининг ўзгаришини $d\vec{Q}$ билан белгиласак,

$$d\vec{Q} = M_c dt \vec{v}_2 - M_c dt \vec{v}_1$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M_c \vec{v}_2 - M_c \vec{v}_1 \quad (21.36)$$

муносабатни оламиз. Бу тенгламадаги $M_c \vec{v}_1$ ва $M_c \vec{v}_2$ кўйинтмалар вақт бирлиги ичидаги s_1 ва s_2 кесимлардаги ҳаракат миқдорини ифодалайди.

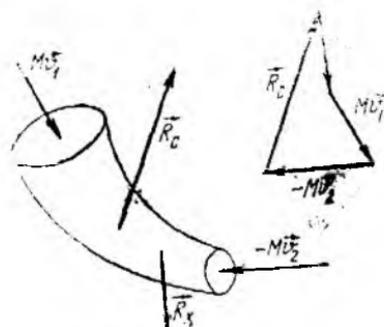
(21.36) ни (21.34) га қўйиб, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$M_c \vec{v}_1 - M_c \vec{v}_2 + \vec{R}_x + \vec{R}_c = 0. \quad (21.37)$$

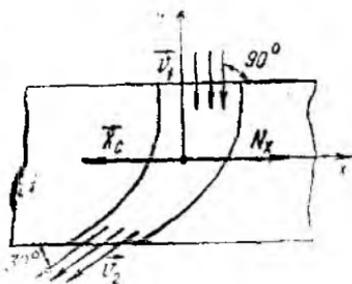
(21.37) тенглама Эйлер тенгласини ифодалайди: қувурнинг иккита ихтиёрий кесими орқали oқиб ўтувчи суyoқликнинг шу кесимлар орасидаги вақт бирлигидаги ҳажмининг ички томонига йўналган ҳаракат миқдорлари ҳамда ҳажм ва сирт кучлари бош векторларининг геометрик йиғиндисини нолга тенг бўлади (21.13-расм).

21.9-масала. Қирқими ўзгариб борадиган қўзғилмас каналга горизонтга $\alpha = 90^\circ$ бурчак остида $v_1 = 2$ м/с тезлик билан сув кирмоқда; канал вертикал текисликка нисбатан симметрик бўлиб, сув кирадиган жойидаги қирқими $s_1 = 0.02$ м²; сувнинг каналдан чиқиш жойидаги тезлиги $v_2 = 4$ м/с бўлиб, горизонтга $\alpha = 30^\circ$ бурчак остида йўналган. Канал деворида сув ҳосил қиладиган реакцияни горизонтал тузувчисини аниқлансин (21.14-расм).

Ечиш. Координата ўқларини 21.14-расмдагидек йўналтирамиз. Канал бўйлаб oқадиган сув зарраларига ҳар онда оғирлик кучи ва канал деворида ҳосил бўладиган реакция кучи таъсир этади. Оғирлик кучлари ҳажм кучларидан иборат



21.13- расм.



21.14- расм.

бўлиб, уларнинг бош вектори қанчаларнинг ёриқлиги ҳамда шунга эга сувнинг сўриқлик қучига тенг ва вертикал бўлиб йўналиши учун унинг горизонтал ўқдаги проекцияси нолга тенг ($X_x = 0$).

Канал деворида сув ҳосил қилаётган реакциянинг горизонтал тузувиши N_x канал деворида ҳосил бўладиган сирт қучларидан иборат реакция қучи бош векторининг горизонтал танқил эгувчиси X_c га миқдор жўхатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади. Каналга кирувчи сувнинг v_1 тезлиги x ўқига перпендикуляр ва каналдан чиқувчи сувнинг тезлиги эса x ўқ билан 30° бурчак ташқил этишини назарда тутиб, (21.38) нинг биринчи тенгламасини қўйолганда тузамиз:

$$M_c v_1 \cos 90^\circ - M_c v_2 \cos 30^\circ + X_c = 0$$

ёки $X_c = N_x$, $M_c = \rho_1 s_1 v_1 = \frac{\gamma}{g} s_1 v_1$, $\gamma = 9803,92 \text{ Н/м}^3$ бўлганда унда

$$N_x = \frac{\gamma}{g} s_1 v_1 v_2 \cos 30^\circ = \frac{9803,92}{9,81} \cdot 0,02 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 138 \text{ Н бўлади.}$$

21.7-§. Ўзгарувчан массали жисм ҳақида тушунча

Назарий механикада асосан массаларни ўзгармас бўлган система ва жисмларнинг ҳаракати ўрганилади. Лекин жисмлар ҳаракатланганда унга моддий зарраларнинг қўшилиши ёки ажралиши натижасида жисмларнинг массаси сезиларли даражада ўзгаришига кўплаб мисоллар келтириши мумкин. Масалан, ракета актив участкада ҳаракатланганда ёқилган ёниб, ундан ажралиши натижасида ракетанинг массаси камай боради; айсбергларнинг эриши (ёки музлаши) натижасида уларнинг массаси камайди ёки ортади; барабанга қосқоз, ич ёки кабелнинг ўралиши натижасида унинг массаси ортади ва ҳ.к. 1969 йил 16 июлда «Сатурн-5» ракетаи ёрдамида АҚШда учирилган «Аполлон-11» космик кеманинг старт ҳолатидаги массаси 2 950 000 кг; Ойдан Ерга қайтиб тушган бошқарил шибасининг массаси 5 561,5 кг бўлган^{*)}. Бундан кўраиники, космик кема массаси бошланғич пайтдаги миқдорига нисбатан 99,81 % га камайган.

Жисм массаси ўзгаришининг ўзига хос хусусиятларини ўрганишдан аввал ўзгарувчан массали жисм тушунчасини киритамиз.

Вақт ўтиши билан моддий зарраларнинг қўшилиши ёки ажралиши натижасида массаси узлуксиз равишда ўзгарадиган жисм *ўзгарувчан массали жисм* дейилади. Агар ўзгарувчан массали жисм илгариланма ҳаракатда бўлса, бундай жисмни ўзгарувчан массали нуқта деб қараш мумкин.

^{*)} Левантовский В. И. Механика космического полета в элементарном изложении. М.: Наука, 1980, 278, 280 б.

21.8-§. И. В. Мешчерский тенгламаси

Ўзгарувчан массали нуқта учун ўзгармас массали нуқта динамикасининг асосий қонунини бевосита қўллаш мумкин эмас.

Ёқилғи сарф бўлиши натижасида массаси узлуксиз равишда камайиб борувчи ракеташи моддий нуқта деб қараб, унинг актив участкадаги ҳаракат дифференциал тенгламасини чиқарамиз. Ракета массаси $M(t)$ ни вақтнинг узлуксиз дифференциалланувчи функцияси-дан иборат деб қараймиз. Ракетанинг ҳаракатини бирор қўзғалмас *Олуз* координаталар системасига нисбаган текшираимиз. Ажралувчи зарраларнинг ракетага кўрсатадиган босим кучини ички куч деб оламиз, яъни ракета ва ундан ажралувчи зарраларни битта механик система деб қараймиз.

Айтайлик, бирор t пайтда ракетанинг массаси $M = M(t)$ ва тезлиги \vec{v} га тенг бўлсин. Шу пайтдаги ракетанинг ҳаракат миқдори

$$\vec{Q}_0 = M\vec{v}$$

бўлади. dt вақт ичда ракетадан абсолют тезлиги \vec{u} га тенг dM массали зарралар ажралсин. Ракетанинг массаси M камаювчи функциядан иборат бўлгани учун $dM < 0$ ва $|dM| = -dM$. $t + dt$ вақтдан кейин система (ракета ва ундан ажралган зарралар) нинг ҳаракат миқдори қуйидагича аниқланади:

$$\vec{Q} = [M - (-dM)] \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) - dM \cdot \vec{u}.$$

dt вақт ичда ҳаракат миқдорининг ўзгаришини $d\vec{Q}$ билан белгиласак,

$$d\vec{Q} = \vec{Q} - \vec{Q}_0$$

ёки

$$\begin{aligned} d\vec{Q} &= (M + dM) (\vec{v} + d\vec{v}) - dM \cdot \vec{u} - M\vec{v} = \\ &= Md\vec{v} + dM (\vec{v} - \vec{u}) + dM \cdot d\vec{v}. \end{aligned} \quad (21.39)$$

Агар ракетага таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори \vec{F} билан белгиланса, система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги (21.23) тенгламига кўра,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}. \quad (21.40)$$

(21.39) ни (21.40) га қўйиб, $dM \cdot d\vec{v}$ иккинчи тартибли кичик миқдорни эътиборга олмасак,

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dM}{dt} (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{F} \quad (21.41)$$

ёки $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u}_r$ — ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги эканлигини эътиборга олсак,

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}_r \frac{dM}{dt} \quad (21.42)$$

тенгламани оламиз.

(21.41) ёки (21.42) тенгламалар *ўзгарувчан массали нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини* ифодалайди. Бу тенглама *И.В. Мещерский тенгламаси* дейилади.

(21.42) да

$$\vec{u}_r \frac{dM}{dt} = \vec{\Phi} \quad (21.43)$$

катталик куч ўлчамига эга бўлади; $\frac{dM}{dt}$ катталик вақт бирлиги ичидаги ёқилғи массасининг ўзгаришини ифодалайди. $\vec{\Phi}$ куч зарраларнинг ракетадан \vec{u}_r нисбий тезлик билан ажралиши натижасида ҳосил бўлади ва *реактив куч* дейилади.

(21.43) ни эътиборга олиб, (21.41) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\Phi} \quad (21.44)$$

(21.44) тенгламадан кўрамизки, ҳар онда *ўзгарувчан массали нуқта массасини унинг тезлишига кўпайтмаси мажкур нуқтага таъсир этувчи таъқи кучлар бош вектори билан реактив кучнинг геометрик йиғиндисига тенг.*

Агар ажралувчи зарраларнинг абсолют тезлиги \vec{u} нолга тенг бўлса, (21.41) ни

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{dM}{dt} \vec{v}$$

ёки

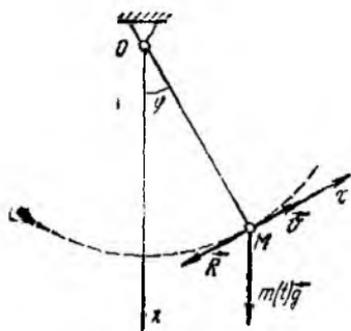
$$\frac{d}{dt} (M \vec{v}) = \vec{F} \quad (21.45)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бинобарин, агар ажралувчи зарраларнинг абсолют тезлиги нолга тенг бўлса, ўзгарувчан массали нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси (21.45) билан Ньютоннинг иккинчи қонунини ифодаловчи (15.4) тенгламалар бир хил кўринишга эга бўлади.

Шунингдек, ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги $\vec{v}_r = \vec{u} - \vec{v}$ бўлса, (21.42) дан

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (21.46)$$

тенгламани оламиз.



21.15- расм.

Шундай қилиб, ракетадан ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги нолга тенг бўлса, ўзгармас массали нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси (16.1) билан ўзгарувчан массали нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси (21.46) бир хил кўринишга эга бўлади. Лекин (21.43) ва (21.46) тенгламаларда массанинг ўзгарувчан эканлигини назарда тутиш керак.

Ўзгарувчан массали жисмнинг ҳаракатига оид масалаларни ечишда (21.41), (21.42) ва (21.44) тенгламаларнинг Декарт координата ўқлари ёки табиий

координата ўқларидаги проекцияларидан фойдаланилади.

21.10-масала. Ҳаракатини ўзгарувчи ҳамда бурчак тезликка пропорционал бўлган $R = \beta \dot{\varphi}$ қаршилик кучи таъсиридаги тебрангичнинг ҳаракат тенгламаси тузилиши. Тебрангичдан ажратувчи зарраларнинг нисбий тезлиги нолга тенг деб қаралиши.

Ечиш. Тебрангичга унинг сферлик кучи $m(t)g$ ва тезликка қарама-қарши йўналган муҳитнинг қаршилик кучи R таъсир этади (21.15-расм). Ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги $u_r = 0$ бўлгани учун $\Phi = 0$.

(21.44) ни M нуқтadan ҳаракат траекториясига ўтказилган уринмага проекциялаймиз:

$$M \frac{dv}{dt} = F_r + \Phi_r. \quad (1)$$

Масала шарҳига кўра $M = m(t)$, $F_r = -m(t)g \sin \varphi + R_r = -m(t)g \sin \varphi -$

$-\beta \dot{\varphi}$, $\Phi_r = 0$ бўлгани учун (1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -m(t)g \sin \varphi - \beta \dot{\varphi}$$

Вунда $v = l \dot{\varphi}$ бўлгани учун тебрангичнинг ҳаракат дифференциал тенгламасини

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{\beta}{m(t)l} \dot{\varphi}$$

ёки

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{m(t)l} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин.]

21.9-§. Циолковский формуласи

Ернинг тортини кучи ва ҳавонинг қаршичилигини ҳисобга олмай, ракетанинг фақат реактив куч таъсиридаги ҳаракатини текшираемиз. Ёқилри ёниши натижасида ракетадан ажралувчи зарраларнинг абсолют тезлиги u_r миқдор ва йўналлиш жиҳатдан ўзгармас бўлиб, ра-

Кетанинг тезлиги v га қарама-қарши йўналган деб қараймиз ва ёқилги ёниб бўлган пайтдаги ракетанинг тезлигини аниқлаймиз. x ўқни ракета ҳаракати бўйича йўналтирамиз ва $\vec{F} = 0$ эканлигини назарда тутиб, (21.42) ни бу ўққа проекциялаймиз:

$$M \frac{dv}{dt} = - \frac{dM}{dt} u_r$$

ёки

$$dv = - u_r \frac{dM}{M}$$

Бу тенгламани интеграллаймиз:

$$\int_{v_0}^v dv = - u_r \int_{M_0}^M \frac{dM}{M},$$

$$v = v_0 + u_r \ln \frac{M_0}{M}, \quad (21.47)$$

бунда v_0 , M_0 — ракетанинг бошланғич пайтдаги тезлиги ва массаси.

Агар ракета корпусининг массасини M_k , ёқилги массасини M_p билан белгиласак, ракетанинг бошланғич пайтдаги массаси $M_0 = M_k + M_p$, ёқилги ёниб бўлгандан кейинги массаси $M = M_k$ бўлади. Ёқилги ёниб бўлган пайтда, яъни актив участка охирида ракета энг катта тезликка эришади ва бу тезлик (21.47) га асосан

$$v_{max} = v_0 + u_r \ln \left(1 + \frac{M_p}{M_k} \right) \quad (21.47')$$

формуладан аниқланади.

Циолковский сони деб аталадиган

$$z = \frac{M_0}{M_k} \quad (21.48)$$

катталикини киритсак, (21.47') ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$v_{max} = v_0 + u_r \ln z. \quad (21.49)$$

Бу формула *Циолковский формуласи* дейилади.

(21.49) дан кўрамизки, актив участка охирида ракетанинг тезлиги унинг бошланғич тезлиги v_0 га, ажралувчи зарраларнинг нисбий тезлиги u_r га, Циолковский сони z га боғлиқ бўлади. Бундан ракетанинг максимал тезлиги ёқилгининг тез ёки секун сарфланишига боғлиқ бўлмайди, деган хулосага келамиз.

(21.49) дан кўрамизки, v_0 , u_r ва z ортган сари ракета тезлиги ҳам орта боради. Ернинг сунъий йўлдошларини учуришда v_0 ни ошириш учун кўп босқичли ракетадан фойдаланилади. Бирор босқичдаги ёқилги ёниб бўлгач, бу босқич ракетадан автоматик тарзда

ажралани ва ракета қўшимча бошланғич тезлик олади. u_r ва z ларни охириги ракета қонструкциеси ва ёқилиш турига боғлиқ.

Агар ракетанинг бошланғич тезлиги нолга тенг бўлса, (21.47') ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$u_{max} = u \cdot \ln z. \quad (21.50)$$

Бу формула ҳам Циолковский формуласи деб аталади. (21.50) дан

$$z = e^{\frac{v}{u_r}} \quad (21.51)$$

муносабатни оламиз.

21.11-масала. Уч босқичли ракета илгарилари ҳаракат қилади, унга Ернинг тортиш кучи ва атмосфера қаршилиги таъсир этмайди. Ҳар бир босқич узуни ажралиш аффеқтив тезлиги ва Циолковский сони бир миля бўлади, $u_r = 2500$ м/с, $z = 4$. Биринчи, иккинчи ва учинчи босқичларда ёқилиш ёниб тулаган пайтдаги ракетанинг тезликлари шундайкин.

Изоҳ. Ернинг тортиш кучи ва атмосферанинг қаршилиги ҳисобга олинмаган ҳолда ракета узуни ажралиш аффеқтив тезлиги v_e ва ажралувчи зарраларнинг иккинчи тезлиги u_r ўзaro тенг бўлади ($v_e = u_r$).

Ечмш. Падаянсетган тезликларни v_1, v_2, v_3 бидан белгиласак, (21.50) ва (21.49) Циолковский формуласини қура

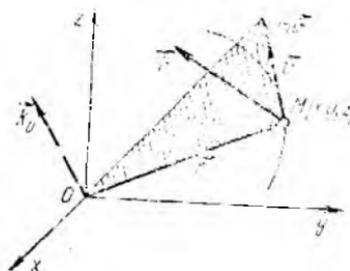
$$v_1 = v_e \ln z = 2500 \cdot \ln 4 = 3465 \text{ м/с,}$$

$$v_2 = v_1 + v_e \ln z = 3465 + 2500 \ln 4 = 6930 \text{ м/с,}$$

$$v_3 = v_2 + v_e \ln z = 6930 + 2500 \ln 4 = 10395 \text{ м/с.}$$

21.10-8. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг моменти ва системанинг кинетик моменти

Массеси m , ҳаракат тезлиги \vec{v} га тенг M нуқтанинг бирор O марказга нисбатан радиус-вектори \vec{r} га тенг бўлсин. O марказга нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти деб,



21.16- расм.

$$\vec{h}_0 = \vec{M}_0(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (21.52)$$

га тенг вектор қатъийликка айтилади (21.16- расм).

M нуқта ҳаракат миқдорининг моменти \vec{h}_0 момент маркази O нуқтага қўйилади.

Координаталар босини O марказда олиб, қўзғалмас x, y, z ўқларни утирвасак, (21.52) ни

$$\vec{k}_O = \vec{M}_O (m\vec{v}) = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

кўринишида ёзиш мумкин. Бу тенгликни координата ўқларига проекциялаб, ўқларга нисбатан ҳаракат миқдорининг моментларини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} k_x &= M_x (m\vec{v}) = m (y\dot{z} - z\dot{y}), \\ k_y &= M_y (m\vec{v}) = m (z\dot{x} - x\dot{z}), \\ k_z &= M_z (m\vec{v}) = m (x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \right\} (21.52')$$

СИ бирликлар системасида ҳаракат миқдорининг моменти $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ ёки $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ билан ўлчабди.

Механик система барча нуқталарининг O марказга нисбатан ҳаракат миқдори моментларининг геометрик йиғиндисин

$$\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O (m_v \vec{v}_v) = \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v \quad (21.53)$$

га тенг вектор системанинг O марказга нисбатан кинетик моменти ёки система ҳаракат миқдорининг бош моменти дейилади.

Системанинг кинетик моменти \vec{K}_O момент маркази O нуқтага қўйилади.

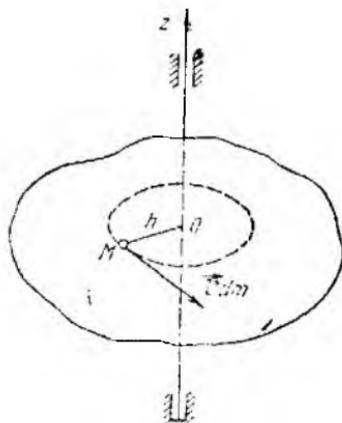
Агар механик система нуқталари бирор ҳажм (сирт ёки чизиқ) бўйича узлуксиз тақсимланган бўлса, у ҳолда (21.53) да йиғинди ўрнига массанинг қандай тақсимланганлигига мос интеграл олинади.

(21.53) ни координата ўқларига проекциялаб, мос ўқларга нисбатан системанинг кинетик моменти аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \sum M_x (m_v \vec{v}_v) = \sum m_v (y_v \dot{z}_v - z_v \dot{y}_v), \\ K_y &= \sum M_y (m_v \vec{v}_v) = \sum m_v (z_v \dot{x}_v - x_v \dot{z}_v), \\ K_z &= \sum M_z (m_v \vec{v}_v) = \sum m_v (x_v \dot{y}_v - y_v \dot{x}_v). \end{aligned} \right\} (21.53')$$

Системанинг ҳаракат миқдори унинг массалар маркази билан биргаликдаги бағарилама ҳаракатини (21.2-§ га мувофиқ), кинетик моменти эса унинг айланма ҳаракатини характертайди.

Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айланиш ўқига нисбатан кинетик моменти. z ўқ атрофида ω бурчак тезлик билан айланувчи жисмнинг z ўқига нисбатан кинетик моменти K_z ни ҳисоблаймиз (21.17-расм). Буни учун жисмдан массаси dm га тенг M бўлақчасини ажратамиз ва уни моддий нуқта деб қараймиз. Жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланганда бу бўлақча маркази айланиш ўқидаги O нуқтада бўлиши ва радиуси h га тенг айлана бўйлаб ҳа-



21.17-расм.

ракатланади. M нуқтанинг тезлиги \vec{v} мазкур айланага M нуқтада ўтказилган уринма бўйлаб йўналгани учун $\vec{v} dm$ ҳам уринма бўйлаб йўналади. Шу сабабли z ўққа нисбатан M бўлакчанинг ҳаракат миқдори $\vec{v} dm$ нинг моменти $k_z = M_z(\vec{v} dm) = v dm h = \omega h^2 dm$ га тенг бўлади. Бутун жисмнинг кинетик моменти эса $K_z = \int_{(M)} \omega h^2 dm =$

$$= \omega \int_{(M)} h^2 dm \text{ га тенг бўлади.}$$

(20.8) га кўра, $\int_{(M)} h^2 dm = I_z$ бўлганидан қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$K_z = I_z \cdot \omega. \quad (21.54)$$

Демак, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айланиш ўқиға нисбатан кинетик моменти жисмнинг мазкур ўққа нисбатан инерция моменти билан бурчак тезлигининг кўпайтмасига тенг.

Агар система қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи бир неча жисмдан ташкил топган бўлса, унинг кинетик моменти

$$K_z = I_{1z} \omega_1 + I_{2z} \omega_2 + \dots + I_{nz} \omega_n \quad (21.55)$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Бунда $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ лар ҳар бир жисмнинг бурчак тезлигини; $I_{1z}, I_{2z}, \dots, I_{nz}$ лар эса жисмларнинг z ўққа нисбатан инерция моментларини ифодалайди.

21.11-§. Нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

M нуқтанинг массаси m га тенг бўлиб, \vec{F} куч таъсирида \vec{v} тезлик билан ҳаракатлансин. Бундай нуқта учун динамиканинг асосий қонунини (16.1) га асосан $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ кўришишда ёзиш мумкин.

Бу тенгламанинг ҳар иккала томонини нуқтанинг радиус-вектори \vec{r} га векторли кўпайтирамиз

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (21.56)$$

Тенгламанинг чап томонидаги ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}.$$

Аммо $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$; $\vec{v} \times m\vec{v}$ вектор кўпайтма нолга тенг. Шу сабабли

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) \text{ тенглик ўринли бўлади. Натижада (21.56)}$$

дан

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (21.57)$$

тенгламани оламиз.

(21.52) га кўра $\vec{k}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$ вектори нуқтанинг O марказга нисбатан ҳаракат миқдори моментини ифодалайди.

Статика бўлимида кўрганмиздек, (6.1) га кўра $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ M нуқтага қўйилган \vec{F} кучининг O марказга нисбатан моментини ифодалайди.

Шундай қилиб.

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{M}_O(\vec{F}) \quad (21.58)$$

ёки

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) \quad (21.59)$$

тенглама ўринли бўлади.

(21.58) ёки (21.59) тенгламалар нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги қуйидаги теоремани ифодалайди: *моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас марказга нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу марказга нисбатан моментига тенг.*

(21.59) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, нуқта ҳаракат миқдорининг координата ўқларига нисбатан моментлари ўзгариши ҳақидаги теоремани оламиз:

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\vec{F}), \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y(\vec{F}), \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z(\vec{F}), \quad (21.60)$$

яъни *моддий нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан моментидан вақт бўйича олинган ҳосила нуқтага таъсир этувчи кучнинг шу ўққа нисбатан моментига тенг.*

Координата ўқларига нисбатан кинетик моментнинг ифодаси (21.52) ва кучнинг ўққа нисбатан momenti учун ўринли бўлган (6.9) ларни назарда тутиб, (21.60) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d}{dt} (y\dot{z} - z\dot{y}) &= yZ - zY, \\ m \frac{d}{dt} (z\dot{x} - x\dot{z}) &= zX - xZ, \\ m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) &= xY - yX. \end{aligned} \right\} \quad (21.61)$$

Нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўлланшга мисол тариқасида нуқтанинг марказга куч таъсиридаги ҳаракатини кўриб чиқамиз.

21.12-§. Нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракати. Юзалар қонуни

Таъсир чизиги ҳаминша фазонинг бирор қўзғалмас нуқтаси орқали ўтувчи куч *марказий куч* дейилади. Масалан, Ерга ҳаминша Қуёш марказига йўналган унинг тортиш кучи таъсир этади.

M нуқтага \vec{F} марказий куч таъсир этсин (21.18-расм). \vec{F} кучнинг таъсир чизиги ҳаминша O нуқтадан ўтгани туфайли унинг шу нуқтага нисбатан momenti нолга тенг бўлади. Бинобарин, (21.59) га асосан

$$\frac{dk_O}{dt} = 0,$$

яъни, O марказга нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг momenti ўзгармас вектордан иборат бўлади:

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{const} = \vec{c}. \quad (21.62)$$

Бу тенглама нуқта ҳаракат миқдори моментининг сақланиши ҳақидаги қуйидаги қонунни ифодалайди: *марказий куч таъсиридаги нуқта ҳаракат миқдорининг куч марказига нисбатан momenti ўзгармасдан қолади.*

(21.62) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб, нуқта ҳаракат дифференциал тенгламаларининг учта скаляр биринчи интегралини оламиз:

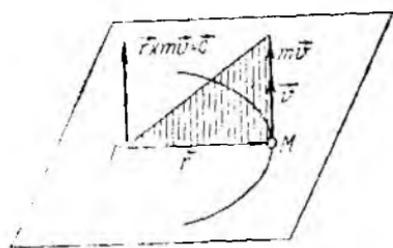
$$\left. \begin{aligned} m(\dot{y}z - z\dot{y}) &= C_1, \\ m(\dot{z}x - x\dot{z}) &= C_2, \\ m(\dot{x}y - y\dot{x}) &= C_3, \end{aligned} \right\} \quad (21.63)$$

бунда C_1 , C_2 , C_3 лар интеграллаш доимийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

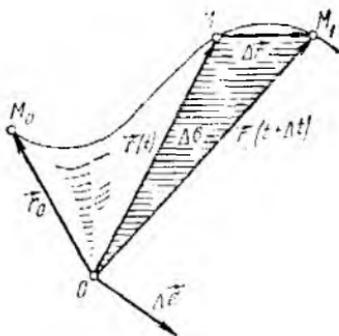
(21.62) га қуйидагича геометрик интерпретация бериш мумкин: \vec{r} ва \vec{v} ётган текисликка ҳар онда перпендикуляр йўналган $\vec{r} \times m\vec{v}$ вектори ҳаминша ўзгармас йўналишга эга бўлади. Шу сабабли \vec{r} ва \vec{v} векторлари доимо O марказдан ўтувчи бир текисликда ётади. Бинобарин, *марказий куч таъсиридаги нуқтанинг траекторияси бир текисликда ётувчи эгри чизиқдан иборат бўлади.* Бу эгри чизиқ бўйича ҳаракат қандай қонун асосида содир бўлишини аниқлаш учун нуқтанинг *сектор тезлиги* тушунчасини киритамиз.

Айталик, t вақтда нуқта ўз траекториясида M ҳолатини, $t + \Delta t$ вақтда M_1 ҳолатини эгалласин (21.19-расм). Агар O, M, M_1 учбурчак юзини $\Delta\sigma$ билан белгиласак, расмдан $\Delta\sigma$ юза \vec{r} радиус-вектор билан $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ кўчиш вектори векторли кўпайтмаси модулининг ярмига тенг бўлишига ишонч ҳосил қиламиз:

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{r}|.$$



21.18- расм.



21.19- расм.

Қуйидаги формула ёрдамида аниқланадиган

$$\Delta \vec{\sigma} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \Delta \vec{r}) \quad (21.64)$$

$\Delta \vec{\sigma}$ юза векторини киритамиз.

Юза вектори $\Delta \vec{\sigma}$ нинг шу юзага мос M нуқта оралиғига нисбатининг $\Delta t \rightarrow 0$ даги лимити нуқтанинг O марказга нисбатан сектор тезлиги дейилади.

Шундай қилиб, сектор тезлиги учун

$$\vec{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta t}$$

ёки

$$\vec{v}_\sigma = \frac{d\vec{\sigma}}{dt}$$

формула ўринли бўлади.

Сектор тезлиги \vec{v}_σ ни нуқтанинг тезлиги \vec{v} орқали ифодалаш учун (21.64) нинг иккала томонини Δt га бўлиб, $\Delta t \rightarrow 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\vec{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v})$$

ёки

$$2 \vec{v}_\sigma = \vec{r} \times \vec{v} = M_O(\vec{v}). \quad (21.65)$$

Башбарин, нуқтанинг бирор марказга нисбатан иккиланган сектор тезлиги шу нуқта тезлигининг мажкур марказга нисбатан моддотига тенг.

Агар нуқта бир текисликда ҳаракатланса, у ҳолда қутб координаталарини киритиб, сектор тезлигининг миқдори учун ушбу формулани қўлайлик.

$$v_{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin(\widehat{r, \vec{v}}) = \frac{1}{2} r v_{\rho} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}. \quad (21.66)$$

(21.65) нинг иккала томонини m га кўпайтирсак,

$$2 m \vec{v}_{\sigma} = \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{k}_0$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликни (21.62) билан солиштириб,

$$\vec{k}_0 = 2 m \vec{v}_{\sigma} = \vec{const} \quad (21.67)$$

бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, марказий куч таъсиридаги нуқтанинг сектор тезлиги ўзгармас бўлади, яъни нуқтанинг радиус-вектори иккита бир хил вақт оралиғида ўзаро тенг юзалар чизади. Бу натижа *юзалар қонуни* дейилади. Юзалар қонуни планеталар ҳаракати учун ўринли бўлиб, Кеплер қонуниларидан бирини ифодалайди.

Агар 21.20-рәсма тасвирланган эллипс бирор планетанинг орбитасини ифодаласа ҳамда унинг O фокусида Қуёш ётса, \vec{u} ҳолда перигелий деб аталадиган Π нуқтада планета энг катта \vec{v}_{Π} тезликка, афелий деб аталадиган A нуқтада энг кичик \vec{v}_A тезликка эга бўлади. Бу натижани \vec{v}_{Π} ва \vec{v}_A тезликларининг O нуқтага нисбатан моментларининг тенглигидан келтириб чиқариш мумкин:

$$v_{\Pi} \cdot O\Pi = v_A \cdot OA.$$

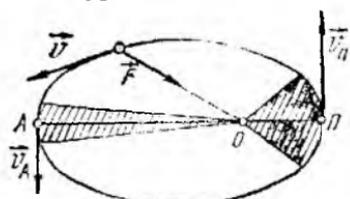
(21.66) ни назарда тутиб, (21.67) га кўра юзалар қонунини яна қуйидаги кўринишда ёза оламиз:

$$m r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

ёки

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{const}. \quad (21.68)$$

Агар нуқтага таъсир этувчи холдан фарқли \vec{F} куч бутун ҳаракат давомида z ўққа параллел бўлса ёки унинг таъсир чизиғи z ўқни кесиб ўтса, \vec{y} ҳолда $M_z(\vec{F}) = 0$ ва (21.60) нинг учинчи тенгламасига кўра



21.20- рәсм.

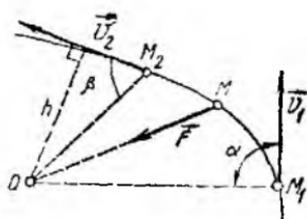
$$\frac{dk_z}{dt} = 0$$

ёки

$$k_z = M_z(m \vec{v}) = \text{const} \quad (21.69)$$

бўлади, яъни *нуқтага таъсир этувчи кучнинг бирор қўзғалмас ўққа*

нисбатан моменти ҳаминша нолга тенг бўлса, y ҳолда нуқтанинг шу ўққа нисбатан кинетик моменти ўзгармасдан қолади. Бу хулоса нуқта кинетик моменти нисбатан берилган ўққа нисбатан сақланиши қонунини ифода қилади.



21.21-расм.

21.12-масала. M нуқта таъсир чизиги довмо O нуқтадан ўталган марказий \vec{F} куч таъсирида ҳаракатланади. Агар M_1 ҳолатда нуқтанинг тезлиги $v_1 = 4$ м/с бўлса, $\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{3}{2}$ шартин қа-

булантирувчи нуқтанинг M_2 ҳолатдаги тезлиги v_2 аниқлансин. M_1 нуқтада v_1 билан \vec{F} орасидаги бурчак $\alpha = 90^\circ$, M_2 нуқтада v_2 билан \vec{F} куч орасидаги бурчак $\beta = 60^\circ$ (21.21-расм). M нуқтанинг ёғирлик кучи эътиборга олинмасин.

Ечиш. M нуқта учун O нуқтадан расм текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи z ўққа нисбатан нуқта кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўлаймиз. (21.60) шинг учинчи тенгламасинга кўра

$$\frac{dk_z}{dt} = M_z(\vec{F}).$$

$M_z(\vec{F}) = 0$ бўлгани учун k_z ўзгармас бўлади. Шу сабабли

$$k_{1z} = k_{2z}. \quad (1)$$

Бунда $k_{1z} = mv_1$, OM_1 — нуқтанинг M_1 ҳолатдаги кинетик моменти; $v_{1z} = mv_1 h = mv_2$, $OM_2 \sin \beta$ — нуқтанинг M_2 ҳолатдаги кинетик моменти. k_{1z} ва k_{2z} ларнинг қийматларини (1) га қўйсак.

$$mv_1 \cdot OM_1 = mv_2 \cdot OM_2 \sin \beta.$$

Бундан

$$v_2 = \frac{OM_1}{OM_2} \cdot \frac{v_1}{\sin \beta} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 6,93 \text{ м/с.}$$

21.13-§. Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

N та нуқтадан таниқил тоғтаи механик система нуқталарига қўйилган барча боғланишларини боғланиш реакция кучлари билан алмаштириб, система нуқталарига таъсир этувчи барча кучларни (жумладан, боғланиш реакция кучларини ҳам) \vec{F}_v^e ташқи ва \vec{F}_v^i ички кучларга ажратамиз. Натияжада бундай система нуқталарини эркин деб қараб, уларнинг ҳар бири учун кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги (21.58) теоремани қўйлаш мумкин:

$$\frac{d}{dt} \vec{M}_O(m_v \vec{v}_v) = \vec{M}_O(\vec{F}_v^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_v^i), \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

Бу тенгламаларни қўшсак,

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{M}_O (m_v \vec{v}_v) = \sum \vec{M}_O (\vec{F}_v^e) + \sum (\vec{M}_O (\vec{F}_v^i)) \quad (21.70)$$

тенглик ўришли бўлади.)

(21.70) да (21.53) га кўра $\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O (m_v \vec{v}_v)$ системанинг кинетик моментини ифодалайди.

Барча ташқи кучларнинг O нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг

$$\vec{M}_O^e = \sum \vec{M}_O (\vec{F}_v^e) \quad (21.71)$$

катталиқ ташқи кучларнинг O нуқтага нисбатан бош моменти дейилади.

(20.2) га кўра барча ички кучларнинг O нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг:

$$\sum \vec{M}_O (\vec{F}_v^i) = 0.$$

Шундай қилиб, (21.70) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e. \quad (21.72)$$

Олинган тенглама система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги ушбу теоремани ифодалайди: системанинг бирор қўзғалмас нуқтага нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг шу марказга нисбатан бош моментиغا тенг.

(21.72) ни иккала томонини қўзғалмас Декарт координата ўқларига проекциялаб, қуйидаги тенгликларни оламиз:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e, \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e, \quad (21.73)$$

бунда K_x, K_y, K_z лар мос равишда O_x, O_y, O_z ўқларга нисбатан системанинг кинетик моментларини; M_x^e, M_y^e, M_z^e лар эса мазкур ўқларга нисбатан ташқи кучларнинг бош моментларини ифодалайди.

(21.73) тенгламалар қўзғалмас координата ўқларига нисбатан система кинетик моменти ҳақидаги теоремани ифодалайди: системанинг бирор қўзғалмас ўққа нисбатан кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг шу ўққа нисбатан бош моментиغا тенг.

Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан жонемнинг қўзғалмас ўқ апрофидаги айниқам ҳаракати, сферик ҳаракати (кумўланиш, гироскопларнинг ҳаракати) ни ўришвида самарали фойдаланилади.

(21.72) да (21.73) тенгламаларни кўришиб турибдики, уларда ички кучлар қатнашмайди. Фақат ички кучлар системанинг кинетик

моментини ўзгартира олмайди. Ички кучлар билвосита ташқи кучлар билан биргаликда система кинетик моментининг ўзгаришига таъсир этиши мумкин.

(12)

21.13-масала. Электр чиғирикни юргизиш пайтида унинг A барабанига вақтга пропорционал айлантурувчи момент $m_{a\ddot{a}A} = at$ қўйилади, буида a — ўзгармас миқдор. M_1 массали B кўк массаси M_2 га тенг ва r радиусли A барабанга ўралладиган арқон воситасида кўтариллади (21.22-расм). Барабани доиравий цилиндр деб ҳисоблаб, унинг бурчак тезлиги аниқлансин. Бошланғич пайтда чиғирик тинч ҳолатда бўлади деб ҳисобланади.

Ечиш. Чиғирик барабани ва B юкни система деб қарасак, барабанга унинг оғирлик кучи $M_2\vec{g}$, таянч реакция кучи \vec{N} ва $m_{a\ddot{a}A}$ айлантурувчи момент таъсир этади, B юкка эса унинг оғирлик кучи $M_1\vec{g}$ қўйилган.

O нуқтада расм текислигига перпендикуляр йўналган Oz ўқни ўтказиб, бу ўққа нисбатан кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўлаймиз. (21.73) нинг учинчи тенгламаси

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e \quad (1)$$

дан фойдаланамиз,
(21.54) га асосан

$$K_z = I\omega, \quad (2)$$

бунда

$$I = \frac{M_2 r^2}{2} + M_1 r^2 \quad (3)$$

бўлиб, барабан ва B юкнинг z ўққа нисбатан инерция моментини; ω эса барабаниннг бурчак тезлигини билдиради.

Таъсир этувчи кучлар расм текислигида ётгани туфайли $M_z^e = M_0^e$ тенглик ўринли бўлади. $M_2\vec{g}$ ва \vec{N} кучлар O нуқтага қўйилгани учун уларнинг шу нуқтага нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Шу сабабли

$$M_z^e = M_0^e = m_{a\ddot{a}A} - M_1 g \cdot r = at - M_1 g \cdot r. \quad (4)$$

(2) ва (4) ни (1) га қўйиб, ўзгарувчиларни ажратиб интеграллаймиз:

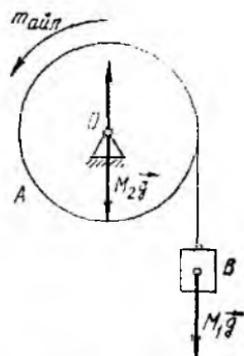
$$I \frac{d\omega}{dt} = at - M_1 g r,$$

$$\int_0^\omega d\omega = \frac{1}{I} \int_0^t (at - M_1 g r) dt,$$

$$\omega = \frac{1}{I} \left(\frac{at^2}{2} - M_1 g r t \right).$$

(3) ни эътиборга олсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$\omega = \frac{(at - 2M_1 g r)}{r^2 (2M_1 + M_2)} t.$$



21.22- расм.

21.14-§. Система кинетик моментининг сақланиш қонуни

Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремадан қуйидаги натижаларни оламиз.

1. Агар система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор марказга нисбатан бош momenti нолга тенг бўлса, системанинг шу нуқтага нисбатан кинетик momenti миқдор ва йўналиши жиҳатдан ўзгармас бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар $\vec{M}_O = 0$ бўлса, (21.72)га кўра

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = 0$$

бўлади. Бундан

$$\vec{K}_O = \text{const} \quad (21.74)$$

2. Агар система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бирор ўққа (масалан, Oz ўққа) нисбатан бош momenti нолга тенг бўлса, системанинг шу ўққа нисбатан кинетик momenti ҳаракат давомида ўзгармасдан қолади.

Агар $M_z = 0$ бўлса, (21.73) га асосан

$$\frac{dK_z}{dt} = 0$$

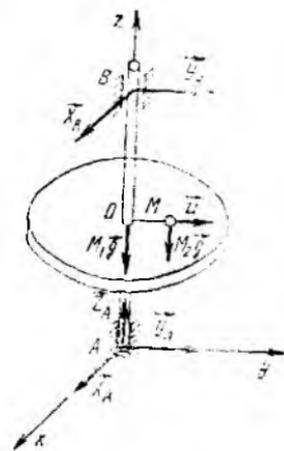
бўлади, бундан эса

$$K_z = \text{const} \quad (21.75)$$

эканлиги келиб чиқади.

(21.74) ва (21.75) тенгламалар система кинетик моментининг сақланиш қонунини ифодалайди.

21.14-масала. Массаси M_1 ва радиуси r га тенг бир жинсли диск ўз марказидан ўтувчи вертикал ўқ арофида ω_0 бошланғич бурчак тезлик билан айлана-



21.23-расм.

ди. Бошланғич пайтда диск марказидан унинг радиуси бўйлаб M_2 массали нуқта u тезлик билан ҳаракат қилади (21.23-расм). Таянч нуқталаридаги ишқаланув кучларини ҳисобга олмай дисkning бирор t_1 вақтдан кейинги ҳамда нуқта u нинг гардишига етган t_2 пайтдаги ($t_1 < t_2$) айланув бурчак тезликлари ω_1 ва ω_2 аниқлансин.

Ечим. r радиусли диск ва M нуқтаини система деб қарасак, система нуқталарига диск ва нуқтаининг оғирлик кучлари M_1g ва M_2g ҳамда A ва B нуқталарининг таянч реакция кучлари $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ лар таъсир этади. Бу кучлардан M_1g, M_2g, \vec{Z}_A лар z ўққа параллел ҳамда $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ лар z ўқини кесиб ўтуган учун уларнинг шу ўққа нисбатан моментлари нолга тенг бўлади. Ҳисобларин,

$$M_z = 0.$$

Шу сабабни z ўқда нисбатан кинетик моментнинг сақланиш қонунини ифодаловчи $K_z = \text{const}$ ёки

$$K_{oz} = K_{1z} = K_{2z} \quad (1)$$

муносабатлар ўрили бўлади. Бунда K_{oz} , K_{1z} ва K_{2z} ҳар системанинг бошланғич пайдали, t_1 ва t_2 вақтдан кейинги кинетик моментларни ифодаловди.

(21.54), (21.52') ва (20.25) га кўра

$$K_{oz} = I \omega_0 = \frac{M_1 r^2}{2} \omega_0 \quad (2)$$

$$K_{1z} = I \omega_1 + M_2 O M_2^2 \omega_1 = \frac{M_1 r^2}{2} \omega_1 + M_2 a^2 \frac{r^2}{4} \omega_1 = \frac{\omega_1}{2} (M_1 r^2 + 2M_2 a^2 \frac{r^2}{4}), \quad (3)$$

$$K_{2z} = I \omega_2 + M_2 r^2 \omega_2 = \frac{M_1 r^2}{2} \omega_2 + M_2 r^2 \omega_2 = \frac{\omega_2}{2} (M_1 + 2M_2) r^2 \quad (4)$$

ифодаларни оламиз.

(2), (3) ва (4) ни (1) га қўйиб, ω_1 ва ω_2 ларни аниқлашамиз:

$$\omega_1 = \frac{M_1 r^2 \omega_0}{M_1 r^2 + 2M_2 a^2 \frac{r^2}{4}}$$

$$\omega_2 = \frac{M_1 \omega_0}{M_1 + 2M_2}$$

21.15-§. Мураккаб ҳаракатдаги системанинг кинетик моменти

Қўшимча моддий нуқталар системасининг қўзғалмас координаталар системасига нисбатан ҳаракатини мураккаб ҳаракатдан иборат деб қараб, уни содда ҳаракатларга ажратиш система кинетик моментини ҳисоблашни осонлаштиради.

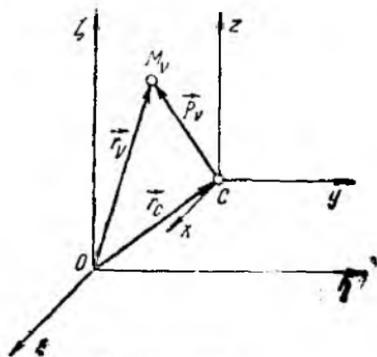
Қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан системанинг массалар маркази билан илгарилама ҳаракат қилувчи C ҳуз координаталар системасини киритамиз (21.24-расм).

Массаси m_v га тенг системанинг ихтиёрий M_v нуқтасининг O нуқтага нисбатан радиус-векторини \vec{r}_v , массалар марказидаги C нуқтага нисбатан радиус-векторини $\vec{\rho}_v$ ҳамда C нуқтанинг $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан радиус-векторини \vec{r}_c билан белгиласак,

$$\vec{r}_v = \vec{r}_c + \vec{\rho}_v \quad (21.76)$$

тенглик ўрили бўлади.

Кинематика бўлимидаги (13.8) га кўра, M_v нуқтанинг қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан тезлиги \vec{v}_{rv} нисбий ва \vec{v}_{ev} кўчирма тезликларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлади:



21.24-расм.

$$\vec{v}_v = \vec{v}_{rv} + \vec{v}_{ev}.$$

Қўзғалувчи координаталар системаси илгариллама ҳаракатда бўлгани

учун $\vec{v}_{ev} = \vec{v}_C$, $\vec{v}_{rv} = \frac{d\rho_v}{dt}$. Бинобарин,

$$\vec{v}_v = \vec{v}_C + \vec{v}_{rv}. \quad (21.77)$$

(21.53) га кўра, қўзғалмас O нуқта ва системанинг массалар маркази C га nisbatan системанинг кинетик моментлари учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$\vec{K}_O = \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v, \quad (21.78)$$

$$\vec{K}_C = \sum \vec{\rho}_v \times m_v \vec{v}_{rv}. \quad (21.79)$$

\vec{K}_O ва \vec{K}_C лар орасидаги боғланишни топиш учун (21.78) га \vec{r}_v нинг қийматини (21.76) дан, \vec{v}_v нинг қийматини (21.77) дан келтириб қўямиз:

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= \sum \vec{r}_C \times m_v \vec{v}_C + \sum \vec{\rho}_v \times m_v \vec{v}_C + \sum \vec{r}_C \times m_v \vec{v}_{rv} + \\ &+ \sum \vec{\rho}_v \times m_v \vec{v}_{rv} = \vec{r}_C \times (\sum m_v) \vec{v}_C + (\sum m_v \rho_v) \times \vec{v}_C + \vec{r}_C \times \sum m_v \vec{v}_{rv} + \\ &+ \sum \vec{\rho}_v \times m_v \vec{v}_{rv}. \end{aligned} \quad (21.80)$$

(21.80) да $\sum m_v = M$ — бутун система массаси; (20.4) га асосан $\sum m_v \rho_v = M \rho_C = 0$ (чунки C нуқта координаталар бошида олинган), $\sum m_v \vec{v}_{rv} = \frac{d}{dt} \sum m_v \vec{\rho}_v = 0$ ҳамда (21.79) га кўра $\sum \vec{\rho}_v \times m_v \vec{v}_{rv} = \vec{K}_C$ бўлгани учун уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times M \vec{v}_C + \vec{K}_C \quad (21.81)$$

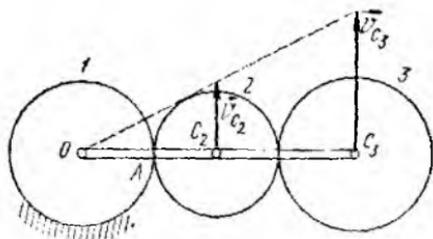
ёки

$$\vec{K}_O = \vec{M}_O(M \vec{v}_C) + \vec{K}_C. \quad (21.82)$$

(21.82) дан кўраливики, системанинг бирор қўзғалмас марказга nisbatan абсолют ҳаракатининг кинетик моменти, массаси бутун система массасига тенг деёл қараладиган система массалар марказининг шу нуқтага nisbatan кинетик моменти билан системанинг массалар марказиги nisbatan nisбий ҳаракат кинетик моменти нинг геометрик йиғиндисига тенг. Бунда системанинг nisбий ҳаракати, координатлар боши системанинг массалар маркази билан устма-уст тушувчи ва илгариллама ҳаракатдаги S_{xyz} координаталар системасига nisbatan қаралади.

(21.82) ни қўзғалмас ξ, η, ζ координата ўқларига проекциялаб, қуйидаги учта скаляр тенгликларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} K_z &= M_z (\overline{M \dot{v}_C}) + K_{Cz}^r \\ K_{\eta} &= M_{\eta} (\overline{M \dot{v}_C}) + K_{C\eta}^r \\ K_{\xi} &= M_{\xi} (\overline{M \dot{v}_C}) + K_{C\xi}^r \end{aligned} \right\} (21.83)$$



21.25-расм.

21.15-масала. Планетар узатманинг OC_3 кривошип ўқи билан усима-уст гушмовчи қўзғалмас z ўққа нисбатан кинетик momenti ҳисоблансин (21.25-расм). Қўзғалмас 1 ва қўзғалувчи 3 гилдиракларнинг r радиуслари бир хил. 3 гилдирак массаси m га, 2 гилдиракнинг массаси m_2 га, радиуси эса r_2 га тенг. Кривошип бурчак тезлигининг z ўқдаги проекцияси ω_z га тенг. Кривошип массаси ҳисобга олинмасин. Гилдираклар бир жинсли деб ҳисоблансин.

Ечилиш. Планетар узатма 2 ва 3 гилдираклардан ташкил топган система деб қараймиз. Дастлаб Виллис усулидан фойдаланиб, 3 гилдиракнинг бурчак тезлигини аниқлаймиз. Бунинг учун гилдираклар бурчак тезлиги асосида қуйидаги жадвални тузамиз.

	Етакчи стержень OC_3	Гилдираклар		
		1	2	3
Тўхтагунча бурчак тезлиги	ω_z	0	ω_2	ω_3
Тўхтагандан кейинги бурчак тезлиги	0	$-\omega_z$	$\omega_2 - \omega_z$	$\omega_3 - \omega_z$
Илашиш тури		ташқи	ташқи	

Бинобарин,

$$\frac{-\omega_z}{\omega_2 - \omega_z} = -\frac{r_2}{r}, \quad \frac{\omega_2 - \omega_z}{\omega_3 - \omega_z} = -\frac{r}{r_2} \quad (1)$$

Бу тенгликларни кўпайтирсак,

$$\frac{-\omega_z}{\omega_3 - \omega_z} = 1, \quad \Rightarrow \omega_3 = 0. \quad (2)$$

Шундай қилиб, 3 гилдирак илгариларо ҳаракатда бўлади.

Қўзғалмас z ўқни O нуқтада расм текислигига перпендикуляр равишда ўтказиб, бу ўққа нисбатан (21.83) шинг учинчи тенгласини

$$K_z = M_z (m \dot{v}_C) + K_{Cz}^r \quad (3)$$

кўрашишда ёзамиз.

Системанинг z ўққа нисбатан кинетик momenti

$$K_z = K_{z2} + K_{z3} \quad (4)$$

га тенг бўлади, бунда K_{z2} билан 2 гилдиракнинг, K_{z3} билан 3 гилдиракнинг z ўққа нисбатан кинетик momentлари белгиланган.

(2) ни 2 ва 3 гилдираклар учун қўлаймиз:

$$K_{z2} = M_z (m_2 \dot{v}_C) + K_{Cz,2}$$

$$K_{z3} = M_2 (m \vec{v}_{C_3}) + K_{C_3z}^r. \quad (6)$$

(5) ва (6) да

$$v_{C_2} = (r + r_2) \omega_2, \quad v_{C_3} = 2(r + r_2) \omega_2$$

бўлгани учун

$$M_2 (m_2 \vec{v}_{C_2}) = (r + r_2) m_2 v_{C_2} = (r + r_2)^2 m_2 \omega_2, \quad (7)$$

$$M_2 (m_2 \vec{v}_{C_3}) = 2(r + r_2) m_2 v_{C_3} = 4(r + r_2)^2 m_2 \omega_2 \quad (8)$$

ўринли бўлади.

C_2 нуқтадан расм текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи C_2z_2 ўққа нисбатан 2 гилдиракнинг кинетик momenti $K_{C_2z}^r = I_2 \omega_2^2$ га тенг, бунда $I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$ билан 2 гилдиракнинг C_2z_2 ўққа нисбатан инерция momenti, ω_2^2 билан 2 гилдиракнинг C_2z_2 ўқ атрофидаги нисбий ҳаракат бурчак тезлиги белгиланган. 2 гилдирак учун A нуқта тезликларининг оний маркази бўлгани учун

$$r_2 \omega_2^2 = (r + r_1) \omega_2 \quad \text{ёки} \quad \omega_2^2 = \frac{r + r_2}{r_2} \omega_2$$

тезликлар ўринли бўлади. Бинобарин,

$$K_{C_2z}^r = \frac{m_2 r_2^2}{2} \cdot \frac{r + r_2}{r_2} \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 r_2 (r + r_2) \omega_2. \quad (8)$$

3 гилдирак илгариллама ҳаракатда бўлгани учун

$$K_{C_3z}^r = 0. \quad (9)$$

(5) — (9) ларга асосан (4) ни қўидагича ёзиш мумкин:

$$K_z = (r + r_2)^2 m_2 \omega_2 + \frac{1}{2} m_2 r_2 (r + r_2) \omega_2 + 4(r + r_2)^2 m_2 \omega_2 = \frac{1}{2} [m_2 (2r + 3r_2) + 8m(r + r_2)] (r + r_2) \omega_2.$$

21.16-§. Система массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

(21.7б) ни назарда тутиб, система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг бош моментинини қўидагича ҳисоблаш мумкин:

$$\vec{M}_C^e = \sum \vec{r}_v \times \vec{F}_v^e = \sum (\vec{r}_C + \vec{\rho}_v) \times \vec{F}_v^e = \vec{r}_C \times \sum \vec{F}_v^e + \sum \vec{\rho}_v \times \vec{F}_v^e$$

ёки

$$\vec{M}_C^e = \vec{r}_C \times \vec{R}^e + \vec{M}_C^e, \quad (21.84)$$

бунда $\vec{R}^e = \sum \vec{F}_v^e$ — система нуқталарига таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош вектори; $\vec{M}_C^e = \sum \vec{\rho}_v \times \vec{F}_v^e$ — ташқи кучларнинг система массалар марказига нисбатан бош momenti.

(21.81) ва (21.84) га асосан система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.72) тенгlikмани

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_C \times M \vec{v}_C) + \frac{dK_C^r}{dt} = \vec{r}_C \times \vec{R}^e + \vec{M}_C^e$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу тенгламада

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{r}_C \times M \vec{v}_C) &= \frac{d\vec{r}_C}{dt} \times M \vec{v}_C + \vec{r}_C \times M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{v}_C \times M \vec{v}_C + \\ &+ \vec{r}_C \times M \vec{\omega}_C = \vec{r}_C \times M \vec{\omega}_C \end{aligned}$$

бўлгани учун (бунда $\vec{\omega}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt}$ — система массалар марказининг тезланиши) уни қуйидагича ёза оламиз:

$$\vec{r}_C \times M \vec{\omega}_C + \frac{dK_C^r}{dt} = \vec{r}_C \times \vec{R}^e + \vec{M}_C^e. \quad (21.85)$$

Массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани подаловчи (21.31) тенгламага асосан

$$M \vec{\omega}_C = \vec{R}^e.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини \vec{r}_C га векторли кўпайтирсак,

$$\vec{r}_C \times M \vec{\omega}_C = \vec{r}_C \times \vec{R}^e.$$

Бинобарин, (21.85) дан

$$\frac{dK_C^r}{dt} = \vec{M}_C^e \quad (21.86)$$

формулани оламиз. Бу формула системанинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моментиникига ўзгариш ҳақидаги теоремани подаловчи: система массалар марказига нисбатан ҳисобланган системанинг кинетик моментидан айри айрича олнган ҳосилла система нуқталарига таъсир қилувчи ташқи кучларнинг массалар марказига нисбатан ёки моментига тенг.

(21.72) ни (21.86) билан солиштириб, қўяр масс системанинг мар системасига ва система массалар маркази билан баробарликда илгариларда ҳаракатда бўлувчи координатлар системасига нисбатан кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремалар бир хил таърифлавишини кўрамиз.

(21.86) да ҳам худди (21.72) даги каби икки кучлар қатнашмайди.

Системанинг массалар марказига нисбатан кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремалар қаттиқ жисмининг тегиж қаршил ҳаракати ва эркин қаттиқ жисмининг ҳаракатини ташкил қилувчиларга ажратганда жисмининг массалар маркази атрофидаги айланма ҳаракатини ўрганишда бевосита фойдаланилади.

Қуйидаги иккита хусусий ҳолини кўрамыз:

1. Агар $\vec{M}_C^e = 0$ бўлса, у ҳолда (21.86) га кўра $\frac{d\vec{K}_C^e}{dt} = 0$, бинобарин,

$$\vec{K}_C^e = \text{const.} \quad (21.87)$$

(21.87) тенглик система массалар марказига нисбатан кинетик моментининг сақланиш қонунини ифодалайди: агар система массалар марказига нисбатан таниқи кўчларнинг бош моменти нолга тенг бўлса, у ҳолда системанинг массалар марказига нисбатан кинетик моменти ўзгармасдан қолади. Бунда, хусусан, бошлавчи Ҳайда системанинг массалар марказига нисбатан кинетик моменти нолга тенг бўлса, бутун ҳаракат давомида \vec{K}_C^e ўзгармасдан қолади.

2. Агар $M_{Cx} = 0$ бўлса, у ҳолда (21.86) нинг x ўққа проекцияси $\frac{dK_{Cx}^e}{dt} = M_{Cx}^e = 0$, бинобарин, $K_{Cx}^e = \text{const}$ бўлади.

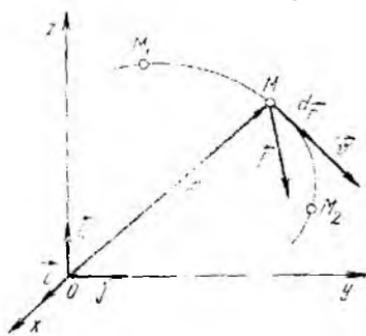
Яъни системанинг массалар маркази билан илгариланган ҳаракат қилувчи координаталар системасининг бирор ўқига нисбатан система нуқталарига таъсир этувчи кўчларнинг бош моменти нолга тенг бўлса, у ҳолда бутун ҳаракат давомида системанинг мазкур ўққа нисбатан кинетик моменти ўзгармасдан қолади.

21.17-§. Кўчнинг иши ва қуввати

Айтайлик, *Охуз* инерциал координаталар системасига нисбатан радиус-вектори \vec{r} га тенг M нуқта миқдор ва йўналиши жиҳатдан ўзгарувчи \vec{F} кўч таъсирида бирор эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракатлансин (21.26-расм). M нуқтанинг dt вақт ичидаги элементар кўчишини $d\vec{r}$ билан белгиласак, (8.17) га кўра $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ бўлгани учун элементар кўчини тезлик йўналиши бўйича содир бўлади ҳамда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}, \quad (21.88)$$

бунда dx, dy, dz билан элементар кўчишининг Ox, Oy, Oz инерциал ўқларга нисбатан проекциялари белгиланган. Кинематика бўлимида кўрганимиздек (8.4-§), элементар кўчишининг модули $|d\vec{r}|$ траекториянинг M нуқталаги бй узунлиги дифференциали ds



21.26- расм.

га ёки ўтилган йўл дифференциали $d\sigma$ га тенг:

$$|\vec{d\vec{r}}| = ds = d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \quad (21.89)$$

\vec{F} кучининг элементар иши деб, шу куч билан у қўйилган нуқта элементар кўчишининг скаляр кўпайтмасига тенг

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}^*) \quad (21.90)$$

катталikka айтилади.

(21.89) ни назарда тутиб, скаляр кўпайтманинг таърифига кўра, (21.90) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

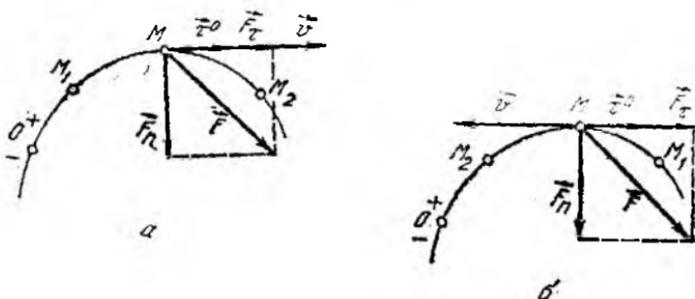
$$d'A = F d\sigma \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}). \quad (21.91)$$

M нуқтанинг траекториядаги ҳолатини $s = OM$ ёй координатаси билан ҳам аниқлаш мумкин (8.3-§). Саноқ боша учун O нуқтани олиб, M нуқтада траекторияга ўтказилган уринманинг бирлик вектори $\vec{\tau}^0$ ни ёй координатаси ортадиган томонга йўналтирамиз (21.27-расм).

Агар M нуқта ёй координатаси ортадиган томонга ҳаракатланса (21.27-расм, а), $ds > 0$ бўлиб, $d\sigma = |ds| = ds$ ва $\cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{\tau}^0})$ тенгликлар ўринлидир, чунки бу ҳолда \vec{v} ва $\vec{\tau}^0$ ларнинг йўналиши бир хил бўлади. Қўрилётган ҳолда (21.91) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$d'A = F ds \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{\tau}^0}).$$

Агар M нуқта ёй координатаси камайдиган томонга ҳаракатланса (21.27-расм, б), $ds < 0$ бўлиб, $d\sigma = |ds| = -ds$ ва $\cos(\widehat{\vec{F}, \vec{v}}) = -\cos(\widehat{\vec{F}, \vec{\tau}^0})$ тенгликлар ўринли бўлади, чунки бу ҳолда \vec{v} ва $\vec{\tau}^0$ лар қарама-қарши томонга йўналади. Шу сабабли (21.91) ни



21.27- расм.

*) умумий ҳолда (21.90) нинг ўнг томони бирор функциянинг тўлиқ дифференциалини билдирмайди. Шу сабабли дифференциал белгиси устига қўйилган.

$$d'A = F ds \cos(\vec{F}, \vec{\tau}^0)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бинобарин, ҳар иккала ҳолда ҳам

$$d'A = F ds \cos(\vec{F}, \vec{\tau}^0) \quad (21.92)$$

формула ўринли бўлади.

Агар \vec{F} кучни уринма ва нормаль бўйлаб йўналган \vec{F}_τ ва \vec{F}_n ташкил этувчиларга ажратсак, у ҳолда \vec{F} кучининг уринма ва нормалдаги проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$\left. \begin{aligned} F_\tau &= F \cos(\vec{F}, \vec{\tau}^0), \\ F_n &= F \cos(\vec{F}, \vec{n}^0). \end{aligned} \right\} \quad (21.93)$$

(21.93) даги биринчи тенгликка кўра кучнинг элементар иши учун ёзилган (21.92) формулани яна қуйидагича ифодалани мумкин:

$$d'A = F_\tau ds. \quad (21.94)$$

(21.91) дан кўрамизки, ds элементар кўшида \vec{F} кучининг фақат уринма ташкил этувчиси иш бажаради; $\vec{F}_n \perp \vec{\tau}$ бўлгани учун \vec{F}_n кучининг ds кўшидаги иши нолга тенг бўлади.

\vec{F} кучининг x, y, z ўқдаги проекцияларини X, Y, Z билан белгиласак, (21.90) га кўра элементар иш учун

$$d'A = Xdx + Ydy + Zdz \quad (21.95)$$

формулани оламиз. Бу формула *куч элементар ишининг аналитик ифодаси* дейилади.

Кўрнинг икки M_1, M_2 *ўлдори иши* деб, элементар ишдан траекториянинг ёни бўйлаб олинган интеграл орқали ифодаланувчи

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F dr = \int_{M_1}^{M_2} F \cos(\vec{F}, \vec{\tau}^0) ds \quad (21.96)$$

ёки

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (X dx + Y dy + Z dz) \quad (21.97)$$

скаляр интегралда айтилади.

(21.96) формула *куч ишининг геометрик ифодаси*, (21.97) эса *куч ишининг аналитик ифодаси* дейилади.

СИ барликлар системасида иш бирлиги учун жоуль (1 Ж = 1 Н·м ёки 1 Н = 0,102 кгк бўлгани учун 1 Ж = 0,102 кгк·м) қабул қилинган.

Механикада иш тушунчаси билан бирга кучнинг қуввати тушунчаси ҳам киритилади. Кучнинг вақт бирлигидаги иши *кучнинг қуввати* дейилади.

Агар жуда кичик dt вақт ичидаги \vec{F} кучнинг иши $d'A = \vec{F} d\vec{r}$ га тенг бўлса, таърифга кўра кучнинг қуввати

$$N = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (21.98)$$

тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, кучнинг қуввати куч ва тезлик векторларининг скаляр кўпайтмасига тенг.

Куч қувватининг аналитик ифодаси

$$N = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}$$

кўринишда ёзилади. Бунда \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} лар куч қўйилган нуқта тезлигининг координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди.

(21.98) га кўра

$$N = F \cdot v \cos(\widehat{F, v}) \quad (21.99)$$

формула ўринли бўлади.

СИ бирликлар системасида кучнинг қуввати ватт (Вт) билан ўлчилади ҳамда $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Ж/с}$ ёки $1 \text{ Ж} = 0,102 \text{ кгк.м}$ бўлгани учун $1 \text{ Вт} = 0,102 \text{ кгк.м.с}$. Техникада кўпинча қувват бирлиги учун киловатт (кВт), мегаватт (МВт) ва «от кучи» (о.к.) олинади ҳамда $1 \text{ кВт} = 1000 \text{ Вт}$, $1 \text{ МВт} = 1000000 \text{ Вт}$, $1 \text{ о.к.} = 736 \text{ Вт}$.

21.18-§. Тенг таъсир этувчининг иши ҳақидаги лемма

M моддий нуқтага $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ кучлар таъсир этса, бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N \quad (21.100)$$

нинг иши учун қуйидаги лемма ўринли бўлади.

Лемма. *Ҳаракатланувчи M нуқтага қўйилган тенг таъсир этувчи кучнинг бирор чекли йўли ўтишидаги иши таъкил этувчи кучларнинг худди шу йўли ўтишидаги ишларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

Исбот. (21.96) га асосан \vec{R} кучининг $M_1 M_2$ йўли ўтишидаги иши учун

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r}$$

формула ўринли бўлади. (21.100) ни назарда тутиб, бу формулани қуйидагича ёзши мумкин

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_1 d\vec{r} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_2 d\vec{r} + \dots + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_N d\vec{r}. \quad (21.101)$$

Бу тенгламанинг ўнг томонидаги эгри чизиqliи интеграллар мос ра-
вишда $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ кучларнинг $M_1 M_2$ йўлини ўтишдаги $A_1, A_2,$
 \dots, A_N ишларини ифодалайди. Шундай қилиб, тенг таъсир этувчи
кучнинг иши учун

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_N$$

муносабатни оламиз.

21.19-§. Айрим ҳолларда кучнинг ишини ҳисоблаш

Қуйидаги ҳолларда кучнинг ишини ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

1. Агар $F_\tau = F \cos(\vec{F}, \vec{\tau})$ катталик ёй координатасининг функ-
циясидан иборат бўлса, у ҳолда (21.96) га кўра кучнинг иши учун
қуйидаги муносабатни оламиз:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F \cos(\vec{F}, \vec{\tau}) ds = \int_{s_1}^{s_2} F_\tau ds, \quad (21.102)$$

бунда s_1 ва s_2 орқали M_1 ва M_2 нуқталарнинг ёй координаталари
белгиланган.

Хусусий ҳолда \vec{F} куч миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас
бўлиб, куч қўйилган нуқта тўғри чизиqli бўйича ҳаракатланса, у
ҳолда $F_\tau = F \cos(\vec{F}, \vec{\tau}) = \text{const}$ бўлиб, $M_1 M_2$ тўғри чизиqliи кўчиш-
даги \vec{F} кучнинг иши (21.102) га асосан

$$A = F s \cos \alpha \quad (21.103)$$

формула ёрдамида аниқланади. Бунда s нуқтанинг кўчишини; $\alpha =$
 $= \widehat{\vec{F}, \vec{\tau}}$ бурчакни ифодалайди (21.28-расм).

(21.103) да агар

$$\alpha = 0^\circ \text{ бўлса, } A = F \cdot s;$$

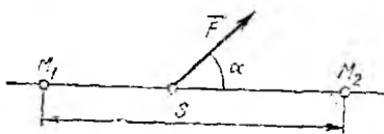
$$\alpha = 180^\circ \text{ бўлса, } A = -F \cdot s;$$

$$\alpha = 90^\circ \text{ бўлса, } A = 0$$

тенгликлар ўришли бўлади.

2. Умумий ҳолда нуқтага таъсир этувчи куч t вақтга, нуқта-
нинг радиус-вектори \vec{r} (ёки x, y, z координаталари) га ва тезлиги
 $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ га боғлиқ бўлади (15.1-§). Шу сабабли нуқтанинг чекли
кўчишдаги иши учун

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) d\vec{r} \quad (21.104)$$



21.28-расм.

формула ўришли бўлади. Бу эгри чи-
зиqliи интегрални ҳисоблаш учун нуқ-

тининг ҳаракат қонунини, яъни нуқтанинг радиус-векторини вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш керак:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

У ҳолда $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$ вақтнинг функциясида иборат бўлади. Натижада (21.104) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)] \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) dt, \quad (21.105)$$

бунда

$$\Phi(t) = \vec{F}[t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)] \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

вақтнинг маълум функцияси; t_1 ва t_2 лар эса мос равишда нуқта M_1 ва M_2 ҳолатлардан ўтган пайтдаги вақтни ифодалайди. Натижада кучнинг ишини ҳисоблаш t аргумент бўйича (21.105) кўринишдаги аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилади.

Шундан келиб чиқиб, умумий ҳолда $\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ куч қўйилган нуқтанинг ҳаракат қонунини билмай туриб, яъни дастлаб бу куч таъсиридаги нуқта учун динамиканинг иккинчи асосий масаласини ечимасдан $\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ кучнинг ишини ҳисоблаш мумкин эмас деган хулосага келамиз.

Шу сабабли нуқтага таъсир этувчи кучлар ва улар қўйилган нуқталарнинг кўчинини асосида бу кучлар таъсиридаги нуқтанинг ҳаракат қонунини билмай туриб ишни ҳисоблаш мумкин бўлган кучларни аниқлаш муҳим аҳамиятга эга. Шундай кучлардан айримларининг иши қандай ҳисобланишини кўриб чиқамиз.

3. **Оғирлик кучининг иши.** M нуқтанинг \vec{P} оғирлик кучи таъсирида M_1 ҳолатдан M_2 га эгри чизиқ бўйлаб кўчишидаги ишини ҳисоблаймиз (21.29-расм). Бунинг учун z ўқни вертикал юқорига йўналтириб, \vec{P} кучининг координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаймиз:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -P.$$

(21.95) ва (21.97) ларга кўра \vec{P} кучининг элементар ишини $d'A = X dx + Y dy + Z dz = -P dz$ чекли кўчишидаги иши эса

$$A = - \int_{z_1}^{z_2} P dz$$

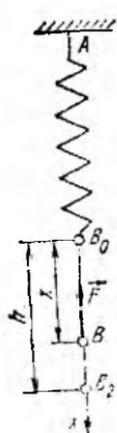
ёки

$$A = -P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2)$$

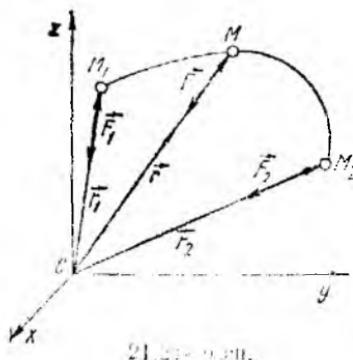


21.29-расм.

* бу формула M нуқтанинг оғирлик кучи \vec{P} ўзгармас бўлган ҳолда ўрилли бўлади.



21.30- расм.



21.106- расм.

формулалар ёрдамида аниқланади. Бунда $z_1 - z_2 = h$ M нуқтанинг вертикал қўчишини ифодалайди. Нуқтанинг M_1 ҳолати M_2 ҳолатдан баландроқ бўлса, $z_1 > z_2$ бўлиб, \vec{P} кучининг иши мусбат; M_1 нуқта M_2 дан пастроқ бўлса, $z_1 < z_2$ бўлиб, \vec{P} кучининг иши манфий қийматга эга бўлади. Ёшобарини, оғирлик кучининг иши

$$A = \pm Ph \quad (21.106)$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Агар нуқта юқорига ҳаракатланса, бу формулада манфий ишора, пастга ҳаракатланса, мусбат ишора олинади.

(21.106) дан кўрамизки, оғирлик кучининг иши нуқтанинг қандай траектория бўйлаб қўчишига эмас, балки нуқтанинг бошланғич ва охириги лойтадаги ҳолатлари орқали ўтувчи горизонтал текисликлар орасидаги масофага боғлиқ бўлади. Хусусан нуқта горизонтал текисликда ҳаракатланса, нуқтага таъсир этувчи оғирлик кучининг иши нолга тенг бўлади.

4. Эластиклик кучининг иши. A учи қўзғалмас қилиб бириктирилган AB пружинани чўзганда пружинани чўзувчи жисмга эластиклик кучи \vec{F} таъсир этади (21.30- расм). Бу куч пружинани эркин учидagi нуқтанинг кўчишига қарама-қарши йўналади ҳамда унинг модули пружинанинг чўзилишига пропорционал бўлади:

$$F = c \cdot B_0 B,$$

бунда c — пружинанинг биқирлик коэффициентини.

Координаталар бошини пружина деформацияланмаган ҳолатдаги B_0 нуқтада олиб, x ўқи пружина ўқи бўйлаб вертикал пастга йўналтирамиз.

Пружина эластиклик кучи \vec{F} шинг координата ўқларидаги проекцияси $F_x = -cx$, $F_y = 0$, $F_z = 0$ бўлади.

(21.97) га асосан $B_0 B_2 = h$ кўчишидаги пружина эластиклик кучининг иши

$$A = - \int_0^h cx \, dx = - \frac{ch^2}{2} \quad (21.107)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

(21.107) дан кўрамизки, эластиклик кучининг иши шу куч қўйилган нуқтанинг қандай қонуи асосида ҳаракатланishiга эмас, балки нуқтанинг бошланғич ва охириги ҳолатларига боғлиқ бўлади.

5. Тортилиш кучининг иши. Айтайлик, массаси m_1 га тенг M моддий нуқтага фазода доимо қўзғалмас, массаси m_2 га тенг C нуқтага йўналган ва микдорн

$$F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

га тенг тортилиш кучи таъсир этсин (21.31-расм). Бунда f — тортилиш доимийси; r — C ва M нуқталар орасидаги масофа.

\vec{F} куч M нуқтанинг радиус-векторига ҳамиша қарама-қарши йўналганн учун

$$\vec{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (21.108)$$

тенглик ўринини бўлади.

(21.108) ни координата ўқларига проекцияласак,

$$X = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{x}{r}, \quad Y = -f m_1 m_2 \frac{y}{r^3}, \quad Z = -f m_1 m_2 \frac{z}{r^3}$$

тенгликлар ҳосил бўлади.

(21.95) га кўра \vec{F} кучининг элементар иши

$$d'A = X dx + Y dy + Z dz = -f m_1 m_2 \frac{x dx + y dy + z dz}{r^3}$$

ёки

$$x dx + y dy + z dz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} dr^2 = r dr$$

бўлгани учун

$$d'A = -f m_1 m_2 \frac{r dr}{r^3} = -f m_1 m_2 \frac{dr}{r^2}$$

га тенг бўлади.

\vec{F} кучининг M нуқта M_1 ҳолатдан M_2 ҳолатга кўчишидаги иши

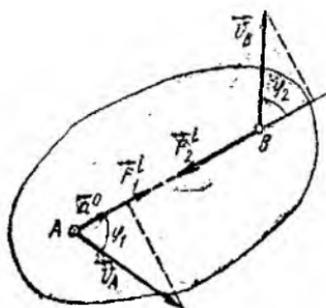
$$A = -f m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = f m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (21.109)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

(21.109) дан кўрашмики, қўзғалмас марказга тортилиш кучининг иши ҳам нуқтанинг траекториясига боғлиқ бўлмайди.

21. 20-§. Қаттиқ жисмга қўйилган кучларнинг иши

Қаттиқ жисмни нуқталари орасидаги масофалар ўзгармас бўлган механик система деб қараб, унга қўйилган кучларнинг ишини ҳисоблаймиз.



21.32- расм.

1. Қаттиқ жисм ички кучларининг иши ва қуввати. Эркин қаттиқ жисмнинг A ва B нуқталарига таъсир этувчи кучларни \vec{F}_1^l ва \vec{F}_2^l билан белгилаймиз (21.32-расм). Ньютоннинг учинчи қонунига кўра ички кучлар миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади, яъни

$$\vec{F}_2^l = -\vec{F}_1^l, \quad F_2^l = F_1^l.$$

Агар \vec{F}_1^l куч бўйича йўналган \vec{a}^o бирлик векторни киритсак, у ҳолда

$$\vec{F}_1^l = F_1^l \vec{a}^o, \quad \vec{F}_2^l = -\vec{F}_1^l = -F_1^l \vec{a}^o.$$

деб ёзиш мумкин. Бу кучларнинг элементар ишлари йиғиндисини аниқлаймиз:

$$d'A_1^l + d'A_2^l = \vec{F}_1^l \vec{v}_A dt + \vec{F}_2^l \vec{v}_B dt = F_1^l dt (\vec{v}_A \vec{a}^o - \vec{v}_B \vec{a}^o).$$

$$\text{Бунда } \vec{v}_A \vec{a}^o = v_A \cos \varphi_1 = n_{r_{AB}} \vec{v}_A; \quad \vec{v}_B \cdot \vec{a}^o = v_B \cos \varphi_2 = n_{r_{AB}} \vec{v}_B$$

эканлигини назарда тутсак,

$$d'A_1^l + d'A_2^l = \vec{F}_1^l dt (n_{r_{AB}} \vec{v}_A - n_{r_{AB}} \vec{v}_B) = 0$$

бўлади. Чунки кинематика бўлимида кўрганмиздек (12.2-§), эркин жисм иккита нуқтаси тезликларининг шу нуқталардан ўтувчи ўқдаги проекциялари ўзаро тенг бўлади:

$$n_{r_{AB}} \vec{v}_A = n_{r_{AB}} \vec{v}_B.$$

Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг иккита ихтиёрий нуқтасига қўйилган ички кучлар элементар ишларининг йиғиндисини нолга тенг бўлади.

Қаттиқ жисмни ички кучларининг йиғиндисини нолга тенг бўлган жуфт-жуфт нуқталар тўлаимидан ташкил топган деб қараиш мумкин. Шундан келиб чиқиб, жисмнинг барча жуфт нуқталарига қўйилган ички кучлар элементар ишларининг йиғиндисини нолга тенг, яъни

$$\sum d'A_v^l = 0 \quad (21.110)$$

бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Қаттиқ жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган кучнинг иши қаттиқ жисм нуқталарининг қандай ҳаракат қилишига боғлиқ бўлади. Айрим ҳолларда қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучларнинг иши ва қуввати қандай ҳисобланишини кўриб чиқамиз.

2. Эркин қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучлар системасининг иши ва қуввати. Эркин қаттиқ жисмга $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ кучлар системаси таъсир этсин.

Дастлаб \vec{F}_v кучнинг қувватини аниқлаймиз. (21.98) га кўра

$$N_v = \vec{F}_v \vec{v}_v, \quad (21.111)$$

буида \vec{v}_v — қўзғалмас координаталар системасига нисбатан эркин қаттиқ жисм M_v нуқтасининг тезлиги (21.33-расм). Кинематика бўлимида кўрганзимиздек, (12.4) га биноан

$$\vec{v}_v = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_v$$

формула ўринли бўлади, бунда \vec{v}_0 — қаттиқ жисмда қутб учун танлаб олинган ихтиёрий нуқтасининг тезлиги; $\vec{\omega}$ — қутб атрофидаги айланма ҳаракат бурчак тезлиги; $\vec{\rho}_v$ — M_v нуқтасининг O қутбга нисбатан радиус-вектори. \vec{v}_v қийматини (21.111) га қўйсақ,

$$N_v = \vec{F}_v \vec{v}_0 + \vec{F}_v (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_v)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Аралаш кўпайтманинг хоссасига кўра

$$\vec{F}_v (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_v) = \vec{\omega} (\vec{\rho}_v \times \vec{F}_v).$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги қавс ичидаги кўпайтма кучнинг O нуқтага нисбатан моментини ифодалайди, яъни

$$\vec{\rho}_v \times \vec{F}_v = \vec{M}_0(\vec{F}_v).$$

Шундай қилиб,

$$N_v = \vec{F}_v \vec{v}_0 + \vec{\omega} M_0(\vec{F}_v)$$

тенгликни оламиз.

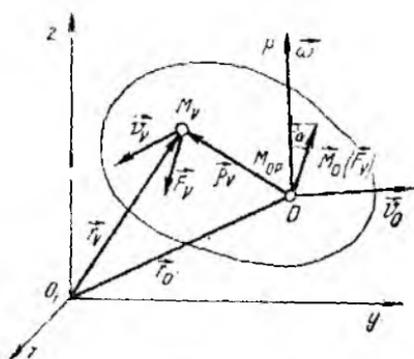
Статика бўлимида кўрганзимиздек (6.3-§), кучнинг бирор ўққа нисбатан momenti шу ўқда олинган ихтиёрий нуқтага нисбатан куч момент-векторининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг; бу ўқ учун бурчак тезлик йўналган OP ўқини олсак,

$$\vec{\omega} M_0(\vec{F}_v) = \omega M_0(\vec{F}_v) \cos(\vec{\omega}, \vec{M}_0) = \omega M_{OP}(\vec{F}_v)$$

муносабат ўринли бўлади.

Шундай қилиб, \vec{F}_v кучнинг қуввати учун

$$N_v = \vec{F}_v \vec{v}_0 + \omega M_{OP}(\vec{F}_v) \quad (21.112)$$



21.33-расм.

тенгликни оламиз. Бу тенгликни dt га кўпайтириб, \vec{F}_v кучининг элементар иши $d'A_v$ учун қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$d'A_v = N_v dt = \vec{F}_v \vec{v}_0 dt + \omega dt M_{OP}(\vec{F}_v)$$

ёки

$$d'A_v = \vec{F}_v d\vec{r}_0 + M_{OP}(\vec{F}_v) d\varphi,$$

бунда $\vec{v}_v dt = d\vec{r}_0$ — қутбнинг элементар кўчиши; $\omega dt = d\varphi$ жисмнинг OP ўқ апрофидаги элементар айланма кўчиши.

Эркин қаттиқ жисмга таъсир этувчи барча кучларнинг элементар иши

$$d'A = \sum d'A_v = (\sum \vec{F}_v) d\vec{r}_0 + [\sum M_{OP}(\vec{F}_v)] d\varphi$$

бун

$$d'A = \vec{R} d\vec{r}_0 + M_{OP} d\varphi \quad (21.113)$$

формула ёрдамида аниқланади. Бунда $\vec{R} = \sum \vec{F}_v$ — жисмга қўйилган кучлар системасининг бош вектори; $M_{OP} = \sum M_{OP}(\vec{F}_v)$ — OP ўққа нисбатан мазкур кучлар системасининг бош моменти.

(21.113) дан кўраинибки, эркин қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучларнинг элементар иши жисм қутб билан илгариланган ҳаракат қилганда элементар кўчишидаги кучлар бош векторининг иши билан кучларнинг қутбдан этувчи OP ўққа нисбатан бош моментининг жисм шу ўқ апрофида айланганда элементар кўчишидаги ишлари йиғиндисига тенг.

(21.113) ни dt га бўлиб, эркин қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучларнинг қувватини ҳисоблаймиз:

$$N = \vec{R} \vec{v}_0 + M_{OP} \omega, \quad (21.114)$$

бунда

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Эркин қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучлар системасининг чекли кўчишидаги ишини аниқлаш учун (21.113) ни интеграллаймиз:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r}_0 + \int_{M_1}^{M_2} M_{OP} d\varphi. \quad (21.115)$$

Бу формулалардан фойдаланиб, қаттиқ жисмнинг асосий ҳаракатлари учун таъсир этувчи кучларнинг иши ва қувватини ҳисоблаймиз.

3. Илгарилема ҳаракатдаги жисмга таъсир этувчи кучларнинг иши ва қуввати. Бу ҳолда $d\varphi = \omega dt = 0$ бўлгани учун

$$d'A = \vec{R} d\vec{r} = R_x dx + R_y dy + R_z dz \quad (21.116)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда $d\vec{r}_O = d\vec{r}$ жисм иштиёрий нуқтасининг кўчишини ифода қилади.

Кўрилатган ҳолда қувват қуйидагича тоғилмади:

$$N = \vec{R} \cdot \vec{v} = R_x \dot{x} + R_y \dot{y} + R_z \dot{z}, \quad (21.117)$$

бунда $\vec{v}_O = \vec{v}$ — жисм иштиёрий нуқтасининг тезлиги.

Кучлар системасининг чекли кучлидаги иши қуйидагича аниқланади:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r}. \quad (21.118)$$

Бинобарин, илгарилема ҳаракатдаги жисм нуқта-нуқта таъсир этувчи кучлар системасининг чекли кўчишидаги иши кучлар системаси бош векторининг мазкур кўчишидаги ишига тенг.

4. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилувчи жисмга таъсир этувчи кучлар системасининг иши ва қуввати. Агар жисм $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ кучлар системаси таъсирида қўзғалмас z ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлса, қутбни айланмиш ўқда оламиз; натижада $d\vec{r}_O = 0$ ҳамда бурчак тезлик йўналган OP ва z ўқлари устма-уст тунади (21.34-расм). Бинобарин, кўрилатган ҳолда

$$d'A = M_z d\varphi \quad (21.119)$$

формула ўринли бўлади, яъни қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилувчи жисмга таъсир этувчи кучлар системасининг элементар иши мазкур ўққа нисбатан кучлар бош моментининг жисм ўқ атрофида айланганда элементар кўчишидаги ишига тенг.

Бу ҳолда кучлар системасининг қуввати

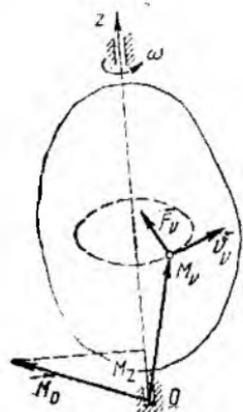
$$N = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega, \quad (21.120)$$

чекли айланма кўчишидаги иши эса

$$A = \int_{M_1}^{M_2} M_z d\varphi \quad (21.121)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

5. Текис параллел ҳаракатдаги жисм нуқта-ларига таъсир этувчи кучларнинг иши ва қуввати. Бу ҳолда OP ўқ текис шаклнинг айланмиш ошии ўқи билан устма-уст тунади ва (21.113),



21.34-расм.

(21.114) ҳамда (21.115) га кўра кучларнинг элементар иши, қуввати ва чекли кўчишдаги иши учун

$$d'A = \vec{R} d\vec{r}_O + M_{OP} d\varphi, \quad (21.122)$$

$$N = \vec{R} \vec{v}_O + M_{OP} \omega, \quad (21.123)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R} d\vec{r}_O + \int_{M_1}^{M_2} M_{OP} d\varphi \quad (21.124)$$

формулалар ўришли бўлади. Бунда OP ўқ қутб орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтади.

6. Сферик ҳаракатдаги жисм нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг иши ва қуввати. Бу ҳолда қутб учун жисмнинг қўзғалмас нуқтасини олсак, $d\vec{r}_O = 0$ бўлади ҳамда OP ўқ оний ўқ билан устма-уст тушади. Шу сабабли кўрилатган ҳолда кучлар системасининг элементар иши, қуввати ва чекли кўчишдаги иши

$$d'A = M_{OP} d\varphi, \quad (21.125)$$

$$N = M_{OP} \omega, \quad (21.126)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} M_{OP} d\varphi \quad (21.127)$$

формулалар ёрдамида аниқланади. Бунда ω жисмнинг оний бурчак тезлигини ифодалайди.

21. 21-§. Моддий нуқта ва системанинг кинетик энергияси. Кёниг теоремаси

Механикада моддий нуқта механик ҳаракатининг скаляр ўлчови сифатида унинг кинетик энергияси олинади. Нуқта массасини унинг тезлиги квадратига кўпайтмасининг ярмига тенг скаляр катталик $\frac{mv^2}{2}$ нуқтанинг кинетик энергияси дейилади.

СИ бирликлар системасида нуқтанинг кинетик энергияси $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$

ёки жоулда ўлчанади; $1 \text{ Ж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Механик система барча нуқталарининг кинетик энергиялари йиғиндисига тенг

$$T = \sum \frac{m_v v_v^2}{2} \quad (21.128)$$

катталик системанинг кинетик энергияси дейилади.

Нуқта ёки системанинг кинетик энергияси мазкур нуқталар тезликларининг йўналишига боғлиқ бўлмайди. Фақат система нуқталари тинч ҳолатда бўлгандагина системанинг кинетик энергияси нолга тенг бўлади.

Кинетик энергия ҳаракатнинг векторли ўлчовини ифодаловчи ҳаракат миқдорига нисбатан ушверсал катталиқ ҳисобланади, чунки механик ҳаракат бошқа хил ҳаракатларга, масалан, иссиқлик ёки электрга айланганда, механикада тушунилмайдиган ҳаракат йўналиши ўз маъносини йўқотади.

Механик ҳаракатнинг скаляр ўлчовига кўчнинг қуввати, элементар иши ёки чекли кўчиндаги иши каби *йзоро механик таъсирнинг скаляр ўлчовлари* мос келади. Улар орасидаги муносабатлар кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теорема воситасида ўриатилади.

Ҳаракатнинг иккала ўлчовини ҳам Ф. Энгельс «Табият диалектикаси» асарида аниқ изоҳлаб берган: «Шундай қилиб, биз механик ҳаракатнинг икки хил ўлчови борлигини кўраемиз, лекин бу ўлчовларнинг ҳар бири ёнғ муайян даражада чекланган доирадаги ҳодисалар учун амал қилишига ҳам ишонч ҳосил қилемиз. Агар мавжуд бўлиб турган механик ҳаракат кўчган тақдирда ҳам механик ҳаракатлигини сақлаб қолса, бундай ҳолда у массанинг тезликка кўпайтмаси тўғрисидаги формула билан ифодаланади. Агар у кўчган тақдирда механик ҳаракат сифатида йўқ бўлиб, потенциал энергия, иссиқлик, электр ва ҳоказолар шаклида яна пайдо бўлса, агар, ҳуллас, у ҳаракатнинг бирон-бир бошқа шаклига айланса, бундай ҳолда ҳаракатнинг бу янги шаклининг миқдори дастлаб ҳаракат қилган массанинг тезлик квадратига кўпайтмасига пропорционалдир. Хуллас, $m\vec{v}$ механик ҳаракатнинг ўзи билан ўлчанадиган механик ҳаракатдир; $\frac{mv^2}{2}$ ўзининг муайян миқдордаги бошқа ҳаракат шаклига айлана олиш қобилияти билан ўлчанадиган механик ҳаракатдир»¹⁾.

Механик система қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатлансин. Системанинг массалар маркази орқали ҳаминша $O\xi\eta\zeta$ га параллел равишда ҳаракатланувчи $Sxyz$ координаталар системасини ўтказамиз.

Системанинг кинетик энергияси аниқланадиган (21.128) формулада \vec{v}_v система M_v нуқтасининг абсолют тезлигини ифодалайди. Тезликларини қўшиш ҳақидаги теоремага (13.2-§) кўра, M_v нуқтанинг абсолют тезлигини

$$\vec{v}_v = \vec{v}_c + \vec{v}'_v \quad (21.129)$$

кўринишда ифодалани мумкин. Бувада \vec{v}_c билан система массалар марказидаги C нуқтанинг тезлиги (кўчирма тезлик); \vec{v}'_v билан M_v нуқтанинг $Sxyz$ координаталар системасига нисбатан тезлиги (нисбий тезлик) белгиланган.

(21.129) ни (21.128) га қўйсак,

¹⁾ Энгельс Ф. Табият диалектикаси. Т.: «Ўзбекистон», 1983, 77-б.

$$T = \frac{1}{2} \sum m_v (\vec{v}_C + \vec{v}_v')^2 = \frac{v_C^2}{2} \sum m_v + \vec{v}_C \sum m_v \vec{v}_v' + \frac{1}{2} \sum m_v (v_v')^2$$

ҳосил бўлади, бунда $\sum m_v = M$ — бутун система массаси; $\sum m_v \vec{v}_v' = \frac{d}{dt} \sum m_v \vec{r}_C = \frac{d}{dt} (M \vec{r}_C) = 0$ (чунки координаталар боши C нуқтада бўлгани учун $\vec{r}_C = 0$); $\frac{1}{2} \sum m_v (v_v')^2 = T_C$ — системанинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик энергияси. Системанинг кинетик энергияси учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + T_C. \quad (21.130)$$

(21.130) тенглик системанинг кинетик энергияси ҳақидаги Кё-нинг теоремасини ифодалайди: система абсолют ҳаракатининг кинетик энергияси бутун система массаси муҳассама қилинган деб қараладиган система массалар марказининг кинетик энергияси билан системанинг массалар марказига нисбатан кинетик энергияларининг айгиңдисиги тенг.

21.22-§. Қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси

Қаттиқ жисмнинг асосий ҳаракатлари учун кинетик энергияни ҳисоблашни кўриб чиқамиз.

1. Илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблашда унинг барча нуқталари бир хил $\vec{v}_v = \vec{v}$ тезликка эга бўлишини эътиборга оламиз.

$$T = \sum \frac{m_v v_v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_v = \frac{Mv^2}{2}, \quad (21.131)$$

бунда $\sum m_v = M$ бутун система массасини ифодалайди.

Бинобарин, илгарилама ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси массаси бутун система массасига тенг система ихтиёрий нуқтасининг кинетик энергиясига тенг.

2. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблашда жисм ихтиёрий M_v нуқтасининг тезлиги $v_v = \omega h_v$ формула ёрдамида аниқлавишини эътиборга оламиз, бунда ω — жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги; h_v — жисмнинг M_v нуқтасидан айланиш ўқигача бўлган масофа.

Шундай қилиб,

$$T = \sum \frac{m_v v_v^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_v h_v^2.$$

Агар бу формулада $I_z = \sum m_i h_i^2$ — жисмнинг айланниш ўқиغا нисбатан инерция моменти эканлигини ҳисобга олсак, кинетик энергия учун қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (21.132)$$

(21.132) дан кўрамизки, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг айланниш ўқиغا нисбатан инерция моменти билан унинг бурчак тезлиги квадрати кўпайтмасининг ярмига тенг.

Текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблашда жисмнинг ҳар ондаги ҳаракатини тезликларнинг оний маркази P орқали ўтувчи ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин. Шу сабабли бу ҳолда ҳам (21.132) формулани қўллаш мумкин:

$$T = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \quad (21.132)$$

бунда I_P билан тезликларнинг оний маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр ўтувчи ўққа (айланниш оний ўқи)га нисбатан жисмнинг инерция моменти, ω билан эса айланниш оний бурчак тезлиги белгиланган.

Шундай қилиб, текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси айланниш оний ўқиға нисбатан жисмнинг инерция моменти билан оний бурчак тезлиги квадрати кўпайтмасининг ярмига тенг.

Гюйгенс-Штейнер теоремасини ифодаловчи (20.21) формулага асосан

$$I_P = I_C + M(PC)^2 \quad (21.133)$$

муносабат ўринли бўлади (21.35-расм). Бунда I_C — система массалар маркази орқали айланниш оний ўқиға параллел ўтувчи ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти; PC — мазкур ўқлар орасидаги масофа; M — бутун жисм массаси.

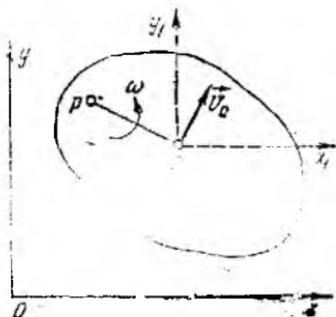
(21.133) ни (21.132) га қўйиб, текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси учун яна қуйидаги ифодаш оламиз:

$$T = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 (PC)^2$$

ёки $\omega PC = v_C$ жисм массалар марказининг тезлигини ифодалавчини назарда тутсак, қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2. \quad (21.134)$$

Бу формула текис параллел ҳаракатдаги жисм учун Кёниг теоремасини ифодалайди: текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси бутун



21.35- расм.

жисм массаси муҳассамлашган деб қараладиган система массалар марказининг кинетик энергияси билан массалар маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўқ атрофида айланма ҳаракат кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг бўлади.

Эркин қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси учун ҳам (21.134) га ўхшаш формула ўринли бўлади.

4. Сферик ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергиясини ҳисоблашда ҳар ондаги сферик ҳаракатни жисмнинг қўзғалмас нуқтасидан ўтувчи OP айланмиш оний ўқи атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат деб қарани мумкинлигида фойдаланамиз. Бу ҳол учун (21.132) формулани қўлласак,

$$T = \frac{1}{2} I_{OP} \omega^2 \quad (21.135)$$

тенглик ўринли бўлади. Бунда I_{OP} — айланмиш оний ўқига нисбатан жисмнинг инерция моменти; ω — оний бурчак тезлиги.

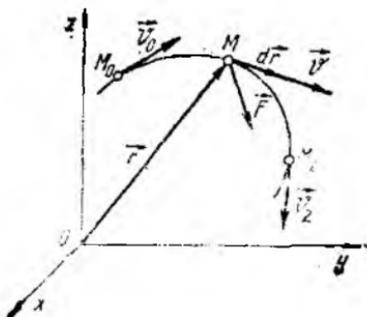
Демак, сферик ҳаракатдаги жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг айланмиш оний ўқига нисбатан инерция моменти билан оний бурчак тезлиги кватратига кўпайтмасининг ярмига тенг.

Қаттиқ жисмнинг асосий ҳаракатлари кинетик энергиясини ифодаловчи формулалардан кўрамавқки, кинетик энергия жисмнинг илгаривма ҳаракатини ҳам, айланма ҳаракатини ҳам характерлай олади.

Агар механик система бир-бири билан боғланган бир неча жисмлардан ташкил топган бўлса, бундай системанинг кинетик энергияси система таркибига кирувчи жисмлар кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг бўлади.

21.23-§. Моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Массаси m га тенг M эркин моддий нуқта \vec{F} куч таъсирида қўзғалмас $Oxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатлансини (21.36-расм). (16.1) га кўра бундай нуқта учун Ньютоннинг иккинчи қонунини



21.36- расм.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

кўринишида ёзиб, бу тенгсизлиkning иккала томонини \vec{F} куч қўшилган M нуқтанинг элементар кўчиши $d\vec{r} = \vec{v} dt$ га скаляр кўпайтира-
миз:

$$m \vec{v} d\vec{v} = \vec{F} d\vec{r}$$

ёки

$$d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = \vec{F} d\vec{r}.$$

Бу тенгламада $\vec{v}^2 = v^2$ эканлигини эътиборга олсак,

$$d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = \vec{F} d\vec{r} \quad (21.136)$$

ёки

$$d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = d' A \quad (21.136')$$

тенгликни оламиз. Бу формула *моддий нуктанинг дифференциал формадаги кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *нукта кинетик энергиясининг дифференциали нуктага таъсир этувчи кучнинг элементар ишига тенг.*

$$(21.136) \text{ нинг иккала томонини } dt \text{ га бўлиб, } \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = N$$

кучнинг қувватини ифодалашнинг назарда тутсак, нукта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m v^2}{2} \right) = N. \quad (21.137)$$

Бинобарин, *моддий нукта кинетик энергиясидан вақт бўйича олинган ҳосила нуктага таъсир этувчи кучнинг қувватига тенг.*

(21.136) ни нуктанинг бошланғич ва охириги ҳолатлари M_0 ва M_1 га мос чегараларда интеграллаймиз:

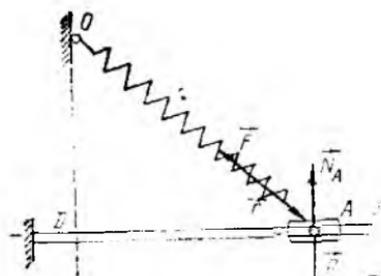
$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F} d\vec{r} \quad (21.138)$$

ёки

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = A, \quad (21.139)$$

бунда $A = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}$ кучнинг нукта M_0 ҳолатдан M_1 ҳолатга кўчишидаги иши. (21.138) ёки (21.139) тенгламалар *нуктанинг чекли формадаги кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *чекли кўчишидаги нукта кинетик энергиясининг ўзгариши унга таъсир этувчи кучнинг ҳудди шу кўчишидаги ишига тенг.*

Кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, асосан қуйидаги икки хил масалаларни ечиш мумкин. Биринчи хил масалаларда нуктанинг бошланғич ёки охириги тезлиги аниқланади. Нуктанинг ҳаракат қонунини аниқламай туриб, нуктага таъсир этувчи кучнинг ишини ҳисоблаш мумкин бўлган ҳолда мазкур теоремани қўлдан мақсадга мувофиқ бўлади, албатта. Иккинчи хил



21.37- расм.

15

масалаларда нуқтанинг тезлиги берилганда унга таъсир этувчи кучларнинг иши (хусусан, куч ёки ёй координатаси) аниқланади. Нуқтага таъсир этувчи кучнинг аналитик ифодаси номанъум бўлганда ёки нуқтанинг ҳаракат қонушнни аниқламай туриб бу хил масалаларни (21.139) формула ёрдамида ечиш айниқса қўл келади.

21.16- масала. O нуқтага бириктирилган ва биқирлиги c га тенг пружина таъсирида m массани A ползун (21.37-расм) горизонтал AD йўналишуви бўйлаб ишқалаймасдан ҳаракатланади. Агар ползун бошланғич пайтда A_0 нуқтадан бошланғич тезликсиз қўйиб юборилса, ползун D нуқтадан қандай тезлик билан ўтади? $AD = a$ ва ползун D нуқтада бўлганда пружинанинг узунлиги l га тенг ҳамда деформацияланмаган деб қаралади.

Ечиш. Ползунга пружинанинг эластик кучи $\vec{F} = -c \vec{r}$ (бунда \vec{r} — A нуқтанинг O нуқтага нисбатан радиус-вектори), оғирлик кучи \vec{P} ва нормал реакция кучи \vec{N}_A таъсир этади. \vec{P} ва \vec{N}_A кучлар A нуқтанинг ҳаракат йўналишига перпендикуляр бўлгани учун бу кучларнинг иши полга тенг бўлади. Пружинанинг чўзилши $\Delta l = \sqrt{l^2 + a^2} - l$ бўлгани учун (21.107) га кўра эластиклик кучининг иши қуйидагича ҳисобланади:

$$A = \int_{\sqrt{l^2+a^2}-l}^0 c r dr = \frac{c}{2} (\sqrt{l^2+a^2} - l)^2, \quad (1)$$

$v_0 = 0$ ва (1) ни (21.139) га қўйсак,

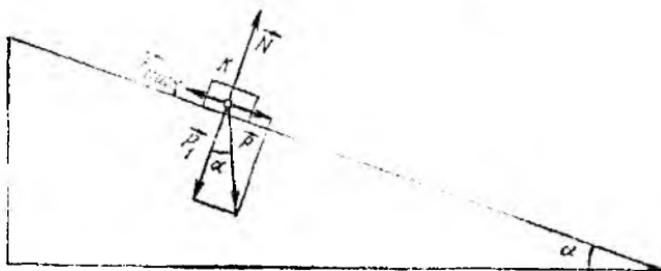
$$\frac{m v^2}{2} = \frac{c}{2} (\sqrt{l^2+a^2} - l)^2,$$

бундан эса

$$v = (\sqrt{l^2+a^2} - l) \sqrt{\frac{c}{m}}$$

ҳосил бўлади.

21.17- масала. K жисм (21.38-расм) гадир-булур қия текисликда тинч ҳолатда туради. Текисликнинг қиялик бурчаги α ва $f_0 > \operatorname{tg} \alpha$, бунда f_0 — тинч



21.38- расм.

ҳолатдаги ишқатининг коэффициентини. Агар жисма бошланғич ва тезлик берилса ҳамда ишқатининг коэффициентини f га тенг бўлса, жамъ қандай s йўлни ўтиб тўхтайд?

Ечиш. K шаклини қарайин. Унинг оғирлик марказидати M нуқтада муҳасамалашган моддий нуқта деб қарайиш.

M нуқтага унинг оғирлик кучи $\vec{P} = m \vec{g}$, ишқатининг кучи $\vec{F}^{\text{ишқ}}$ ва текресликнинг нормал реакция кучи \vec{A} таъсир этади.

Нуқтага таъсир этувчи кучлар ўзгармас ҳамда нуқтанинг охирига шайдаги тезлиги $v = 0$ эканлигини назарда тутсак, (21.133) формула қуйидаги кўринишга олади:

$$-\frac{m v_0^2}{2} = (P \sin \alpha - F^{\text{ишқ}}) s, \quad (1)$$

бунда v_0 — нуқтанинг бошланғич шайдаги тезлиги; s — изланаётган ўрилган йўл. (1) да

$$m = \frac{P}{g}, \quad F^{\text{ишқ}} = f P_1 = f P \cos \alpha$$

эканлигини эътиборга олсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$s = \frac{v_0^2}{2g(j \cos \alpha - \sin \alpha)}$$

21.18-масала. Массаси 3 кг бўлган моддий нуқта горизонтал тўғри чизиқ бўйлаб 5 м/с тезлик билан чап томонга ҳаракат қилади. Унга ўнг томонга йўналган ўзгармас куч таъсир эттирилади ва унинг таъсири 30 с дан кейин тўхтайтилади. шунда нуқтанинг тезлиги 55 м/с бўлиб, ўнг томонга йўнелади. Шу кучнинг миқдори ва баъжратган иши топилиши.

Ечиш. Моддий нуқта бошланғич шайда координаталар бошида бўлиб, горизонтал x ўқ бўйлаб ҳаракатланади деб қарайиш (21.39-расм).

Нуқтага ўнг томонга йўналган ўзгармас F куч, оғирлик кучи \vec{P} ва нормал реакция кучи \vec{N} таъсир этади. Нуқта ҳаракат миқдорининг (21.17) тенглик билан ифодаланган x ўқ бўйича ўзгариши ҳақидаги теоремага кўра

$$m v_{Bx} - m v_{Ax} = \int_0^t F_x dt = F_x t.$$

Бу ерда $v_{Ax} = -v_0 = -5$ м/с, $v_{Bx} = v_B = 55$ м/с, $F_x = F$ эканлигини эътиборга олсак,

$$F = \frac{m(v_B + v_0)}{t} = \frac{3(55 + 5)}{30} = 6 \text{ Н.}$$

Оғирлик кучи \vec{P} ва нормал реакция кучи \vec{N} ҳаракат йўналишига перпендикуляр бўлгани учун уларнинг иши нолга тенг бўлади. Шу сабабли (21.139) га кўра \vec{F} кучининг иши

$$A = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m}{2} (v_B^2 - v_0^2) = \frac{3}{2} (55^2 - 5^2) = 4500 \text{ Ж} = 4,5 \text{ кЖ.}$$

Нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгаришида нуқта тезлиги йўналишининг ўзгариши алоҳида аҳамиятга эгаллиги, нуқта кинетик энергиясининг ўзгаришига эса мураккаб таъсир эмаслиги бу масалада яққол намоён бўлаяпти.

21.24-§. Система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Система кинетик энергияси билан система нуқталарига қўйилган кучларнинг иши орасидаги муносабатни аниқлаймиз. M_1, M_2, \dots, M_N нуқталардан ташқил топган системанинг ихтиёрий M_ν нуқтасига таъсир этувчи ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисини \vec{F}_ν^e , ички кучларникини эса \vec{F}_ν^i билан белгилаймиз.

Системанинг ҳар бир нуқтаси учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаймиз. Айтайлик, система бошланғич ҳолатдан исалган ҳолатга кўчганда унинг ихтиёрий нуқтаси $M_{0\nu}$ ҳолатдан M_ν ҳолатга кўчсин ҳамда бу нуқтанинг тезлиги $\vec{v}_{0\nu}$ дан \vec{v}_ν га ўзгарсин (21.40-расм). У ҳолда (21.139) га кўра системанинг ҳар бир нуқтаси учун

$$\frac{m_\nu v_\nu^2}{2} - \frac{m_\nu v_{0\nu}^2}{2} = A_\nu^e + A_\nu^i, \quad (\nu = 1, 2, \dots, N)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Бунда $A_\nu^e - \vec{F}_\nu^e$ кучнинг; $A_\nu^i - \vec{F}_\nu^i$ кучнинг $M_{0\nu}M_\nu$ кўчишдаги ишлари.

Юқоридаги барча тенгликларни қўшсак,

$$\sum \frac{m_\nu v_\nu^2}{2} - \sum \frac{m_\nu v_{0\nu}^2}{2} = \sum A_\nu^e + \sum A_\nu^i$$

ёки (21.128) га кўра

$$T - T_0 = A^e + A^i \quad (21.140)$$

тенглик ўринли бўлади. Бунда T_0 ва T — системанинг бошланғич ва исалган пайтдаги кинетик энергиялари; A^e ва A^i барча ташқи ва ички кучлар системасининг ишлари.

(21.140) тенглама *чекли вақт ишида система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани* ифодалайди: *системанинг бир ҳолатдан бошқа ҳолатга кўчишида кинетик энергиясининг ўзгариши система нуқталарига таъсир этувчи ташқи ва ички кучларнинг мос қўчишлардаги ишларининг йиғиндисига тенг.*

Системанинг жуда кичик вақт ичидаги элементар қўчиши учун бу теорема



21.19-расм

$$dT = dA^e + dA^i \quad (21.141)$$

шаклида ёзилади. Бунда dA^e ва dA^i — барча мос равишда система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи ва ички кучларнинг элементар ишларини ифодалайди.

(21.141) ни dt га бўлиб, $\frac{d'A^e}{dt} = N^e$ ташқи кучларнинг қуввати, $\frac{d'A^i}{dt} = N^i$ ички кучларнинг қуввати эканлигини эътиборга олсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i. \quad (21.142)$$

(21.142) тенглама система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг дифференциал кўринишини ифодалайди: система кинетик энергиясидан вақт бўйича олинган ҳосила система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи ва ички кучлар қувватларининг йиғиндисига тенг.

Аввалги теоремалардан фарқли ўлароқ (21.140) — (21.142) тенгламаларда ички кучлар ҳам қатнашади. Агар механик система ўзгармас системадан ёки абсолют қаттиқ jisмдан иборат бўлса, 21.19-§ да кўрганimizдек, бу ҳолда ички кучлар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади ҳамда (21.140) тенглама

$$T - T_0 = A^e \quad (21.143)$$

кўринишда ёзилади.

(21.140) — (21.142) тенгламаларда ташқи ва ички кучлар таркибда актив ҳамда боғланиш реакция кучлари қатнашади. Агар система нуқталари идеал силлиқ сирт ёки эгри чизиқ бўйича ҳаракатланса, боғланиш реакция кучи фақат нормал танкил этувчидан иборат бўлиб, ҳаракат йўналишига перпендикуляр йўналади, шунинг учун унинг иши нолга тенг бўлади. Бу ҳолда система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи тенгламаларда идеал боғланиш реакция кучлари қатнашмайди.

21.19-масала. Радиуси r_1 ва массаси M_1 га тенг шприк барабанига L айлантурувчи момент қўйилган. Барабани ўралган трос учига M_2 массали C гилдиракнинг ўқи бириктирилган (21.11-расм). Гилдирак горизонт билан α бурчак ташкил этувчи қия текислик бўлиб сарпайий юқорига думалайди. Барабан α марта айланганда қандай бурчак тезликка эга бўлади? Боғланиш пайтида система тинч ҳолатда бўлган. Троснинг массаси ва инерциянинг ҳисобга олинмасин.

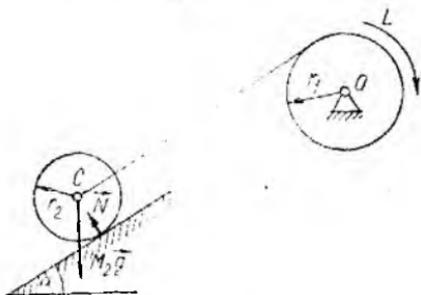
Ечили. Барабан ва гилдиракдан ташқари тўнган системага гилдиракнинг оғирлик кучи M_2g қия текислиқнинг нормал реакция кучи \vec{N} ни ўзгармас L момент таъсир этади. Барабанининг бурчак тезлиги ω ни янадаш учун система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.143) тенгламадан фидаланамиз:

$$T - T_0 = A^e. \quad (1)$$

Системанинг кинетик энергияси

$$T = T_1 + T_2, \quad (2)$$

бунда T_1 ва T_2 мос равишда гилдирак ва барабанининг кинетик энергиясини ифодалайди.



21.11-расм.

Ғилдирак текис параллел ҳаракатда бўлгани учун унинг кинетик энергиясини (21.134) формулага асосан аниқлаймиз:

$$T_1 = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_2^2.$$

Ғилдирак доғриқли цилиндрни иборат бўлгани учун $I_C = \frac{M_2 r_2^2}{2}$, сирпанмасдан думалагани учун $v_C = \omega_2 r_2$. Шу сабабдан

$$T_1 = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{4} M_2 r_2^2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} M_2 v_C^2 + \frac{1}{4} M_2 v_C^2 = \frac{3}{4} M_2 v_C^2.$$

Трес нуқтагаги кўчишни C нуқтанинг тезлиги барабан гаршидаги нуқтанинг тезлигига тенгдигини ўйлаб, яъни $v_C = \omega r_1$. Шундай қилсак,

$$T_1 = \frac{3}{4} M_2 \omega^2 r_1^2. \quad (5)$$

Бошланғич кўчларнинг O нуқта атрофида айланиш ҳаракатда бўлгани учун унинг кинетик энергиясини (21.132) формула ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{4} M_1 r_1^2 \omega^2. \quad (4)$$

(5) ва (4) ни (1) га қўйсак,

$$T = \frac{3}{4} M_2 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{4} M_1 r_1^2 \omega^2 = \frac{1}{4} r_1^2 \omega^2 (3M_2 + M_1).$$

Бошланғич пайтда система тинч ҳолатда бўлгани учун

$$T_0 = 0. \quad (6)$$

Барабан n марта айланда системага таъсир этувчи барча кўчларнинг ишини ҳисоблаймиз. Ғилдирак сирпанмай думалагани учун барабан n марта айланганда унинг марказидаги C нуқта қия текислик бўйлаб $s = 2\pi r_1 n$ масофага кўчади, барабан эса $\varphi = \frac{s}{r_1} = 2\pi n$ бурчакка айланади. Нормал реакция кучи \vec{N} нинг йўналишини ғилдиракнинг кўчишига перпендикуляр бўлгани учун унинг s кўчишидаги иши нолга тенг. Шу сабабдан система нуқталарига таъсир этувчи кўчларнинг иши

$$A = A_1 + A_2$$

га тенг бўлади. Бунда A_1 ғилдирак оғирлик кучи $M_2 g$ нинг қия текислик бўйлаб юқорига s масофага кўчишидаги иши бўлиб, $A_1 = -M_2 g s \sin \alpha = -M_2 g \cdot 2\pi r_1 n \sin \alpha$; A_2 эса L моментнинг барабан $\varphi = 2\pi n$ бурчакка айлангандаги ишини ифодалайди ҳамда

$$A_2 = L \varphi = L \cdot 2\pi n.$$

Шундай қилиб,

$$A = 2\pi n (L - M_2 g r_1 \sin \alpha). \quad (7)$$

(5), (6) ва (7) ни (1) га қўйиб, нэланаётган ω бурчак тезлигини аниқлаймиз:

$$\omega = \frac{2}{r_1} \sqrt{2\pi n \frac{L - M_2 g r_1 \sin \alpha}{M_1 + 3M_2}}.$$

21.25- §. Потенциалли куч майдони

Куч қўйилган нуқтанинг ҳаракат қилишини бисмай туриб, ишини ҳисоблаш мумкин бўлган яна бир туркум кучлар ҳақида тўхталамиз. Бунинг учун куч майдони тушунчасини киритамиз.

Фазонинг бирор соҳасидаги моддий нуқтага унинг координатасига боғлиқ, миқдор ва йўналиши маълум бўлган кучлар талсир этса, мазкур соҳа *куч майдони* дейилади.

Агар майдон кучлари вақтга боғлиқ бўлмаса, бундай майдон *стационар куч майдони* дейилади.

Агар куч майдони вақтга ҳам боғлиқ бўлса, бундай майдон *стационар бўлмаган куч майдони* дейилади.

Куч элементар ишининг аналитик ифодаси бўлиши (21.95) формула

$$d'A = X dx + Y dy + Z dz$$

нинг ўнг томонидаги дифференциал уч ҳал бирор $U(x, y, z)$ функциянинг тўлиқ дифференциалга тенг бўлса, бу функция *кучнинг потенциали* ёки *куч функцияси* дейилади. Куч функцияси мавжуд бўлган майдон *потенциалли куч майдони* дейилади. Бундай майдон *кучи потенциалли куч* ёки *консерватив куч* дейилади.

Агар \vec{F} кучнинг координата ўқларидаги проекциялари

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (21.144)$$

шартларни қаноатлантирса,

$$d'A = X dx + Y dy + Z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU \quad (21.145)$$

тенглик ўрили бўлади. Таърифга кўра, бундай майдон потенциалли куч майдонидан иборат бўлади ҳамда фақат координаталарга боғлиқ $U(x, y, z)$ функция кучнинг потенциалини ифodalayди.

Изоҳ. (21.144) шартлар (22.145) тенглик ўрили бўлишининг фақат етарли шартидан иборат бўлиб, зарурий шартини ифodalamayди. Ҳақиқатан ҳам, агар кучнинг координата ўқларидаги проекциялари қуйидаги шартларни қаноатлантирса,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} + Q \dot{z} - R \dot{y},$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} + R \dot{x} - P \dot{z},$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} + P \dot{y} - Q \dot{x},$$

(бунда P, Q, R лар $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ларнинг ихтиёрий функцияси-дан иборат), U ҳолда

$$X dx + Y dy + Z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz +$$

$$+ Qdt(\dot{z}\dot{x} - \dot{x}\dot{z}) + Rdt(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}) + \\ + Pdt(\dot{y}\dot{z} - \dot{z}\dot{y}) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$$

муносабат ўринли бўлади.

Потенциалли куч майдонида нуқтанинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ҳолатдан $M(x, y, z)$ ҳолатга чекли кўчишидаги иши

$$A = \int_{M_0}^M (Xdx + Ydy + Zdz) = \int_{M_0}^M dU = \\ = U(x, y, z) - U_0(x_0, y_0, z_0)$$

ёки

$$A = U - U_0 \quad (21.146)$$

га тенг бўлади.

Бинобарин, потенциалли кучнинг иши нуқтанинг охириги ва бошланғич ҳолатларига мос бўлган куч функцияси қийматларининг айирмасига тенг бўлиб, нуқтанинг траекториясига ҳамда траектория бўйлаб нуқтанинг қандай қонун асосида кўчишига боғлиқ бўлмайди.

Келгусида куч функцияси бир қийматли, чекли ва бутун майдон бўйича камида биринчи ва иккинчи тартибли ҳосиллага эга бўлган потенциалли куч майдонини қараймиз.

(21.146) дан кўрамизки, нуқта ёниқ траектория бўйлаб ҳар гал бирор белгиланган нуқтадан ўтганда унинг иши нолга тенг бўлади, чунки бу ҳолда нуқтанинг бошланғич ва охириги ҳолатлари устма-уст тушади, бинобарин, $U = U_0$ бўлиб, $A = 0$ тенглик бажарилади.

21.26-§. Тенг потенциалли сирт. Куч чизиқлари

Куч функциясининг қийматлари бир хил бўлган потенциалли куч майдонидаги нуқтанинг геометрик ўрни *тенг потенциалли сирт* дейилади. Шундай қилиб, тенг потенциалли сиртнинг тенгламасини

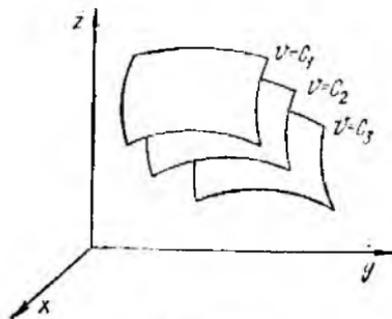
$$U(x, y, z) = C \quad (21.147)$$

кўринишда ёзиш мумкин. C га турлича қийматлар бериб, тенг потенциалли сиртлар тўпламини оламиз (21.42-расм).

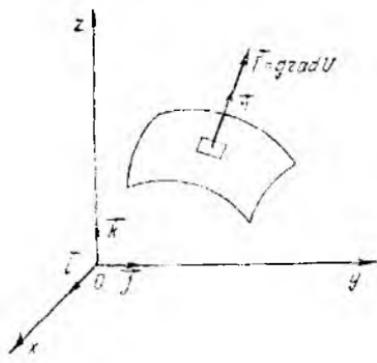
Агар нуқта $U(x, y, z) = C$ тенг потенциалли сирт бўйича элементар кўчиш олса, u ҳолда $dU = 0$ тенглик бажарилади. Шу сабабли

$$d'A = \vec{F} d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = 0, \quad (21.148)$$

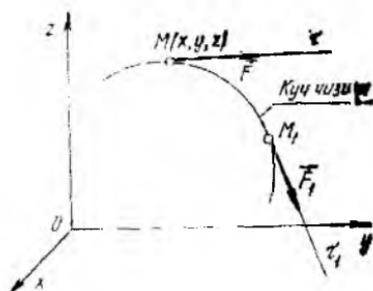
яъни тенг потенциалли сирт бўйлаб ҳаракатланувчи нуқтага таъсир этувчи кучнинг элементар иши нолга тенг. (21.148) дан кўрамизки,



21.42-расм.



21.43- расм.



21.44- расм.

$|\vec{F}| \neq 0$, $|d\vec{r}| \neq 0$ бўлгани учун $\cos(\vec{F}, d\vec{r}) = 0$. Яъни \vec{F} куч ҳар онда тенг потенциалли сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналади (21.43- расм). Шундай қилиб, скаляр функциянинг вектор градиенти тушунчасидан фойдалансак,

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad (21.149)$$

деб ёзиш мумкин. Бунда $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ лар координата ўқларининг бирлик векторларини ifodalaydi.

Куч майдонида тенг потенциалли сирт билан бир қаторда куч чизиги тушунчаси ҳам киритилади. Куч чизиги учун ҳар бир нуқта-сида унга ўтказилган уринма берилган майдон кучига коллинеар бўлган чизик олинади (21.44- расм). Куч чизигининг x, y, z координаталарга nisbatan дифференциал тенгламасини $d\vec{r}$ ва \vec{F} векторларининг коллинеарлик шартидан фойдаланиб,

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \quad (21.150)$$

кўринишида ёзиш мумкин.

21.27-§. Потенциал энергия

Потенциалли куч майдонида кучнинг потенциали U билан бир қаторда майдоннинг бирор нуқтасидаги тўпланган энергия миқдорини ifodalovchi ва потенциал энергия деб аталадиган бошқа Π функцияни киритиш мумкин.

Моддий нуқта бирор M ҳолатдан бошланғич M_0 ҳолатга кўчишида унга таъсир этувчи майдон кучларининг иши майдоннинг берилган M нуқтадаги Π потенциал энергияси дейилади.

Шундай қилиб,

$$\Pi = A = U_0 - U, \quad (21.151)$$

бува U_0 ўзгармас бўлиб, ҳаракатдаги нуқтанинг бошланғич ҳолатига боғлиқ бўлади. Шу сабабли *майдоннинг бирор нуқтасидаги потенциал энергия ихтиёрий ўзгармасгача аниқлик билан мазкур нуқтадаги манфий ишора билан олинган куч функциясига тенг бўлади.*

Агар нуқтанинг бошланғич ҳолати $U_0 = 0$ нуқтада олинса,

$$\Pi = -U$$

бўлади. Бу тенгликни назарда тутиб, элементар иш ва чекли кўчишдаги иш учун қуйидаги ифодаларни ёзиш мумкин:

$$d'A = dU = -d\Pi, \quad A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi. \quad (21.152)$$

Потенциалли куч майдонидаги нуқта ҳар онда $T = \frac{mv^2}{2}$ га тенг кинетик энергияга ва $\Pi = -U$ потенциал энергияга эга бўлади. Бу энергияларнинг йиғиндиси, яъни

$$E = T + \Pi \quad (21.153)$$

моддий нуқтанинг *тўлиқ механик энергияси* дейилади.

21.28-§. Куч функциясини аниқлашга оид мисоллар

Бир жинсли сғирлик кучи майдони, чизиқли эластиклик кучи ва Ньютон тортиш қонунига биноан, таъсир этувчи куч майдонларининг куч функциясини ҳисоблаймиз. Агар куч функцияси маълум бўлса, потенциал энергия (21.152) га асосан ҳисобланади.

1. Бир жинсли сғирлик кучи майдони. Агар майдон кучи миқдор ва йўналиш жиҳатдан ўзгармас бўлса, бундай майдон *бир жинсли* майдон дейилади. Масалан, Ер сиртига яқин масофада сғирлик кучи майдонини бир жинсли майдон деб қараиш мумкин. Ер сиртида қўзғалмас *Олуз* координаталар системасини олиб, z ўқини вертикал юқорига йўналтирамиз (21.45-расм), бу ҳолда бир жинсли сғирлик кучи майдонидаги нуқтага таъсир этувчи \vec{P} кучининг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -P = -mg. \quad (21.154)$$

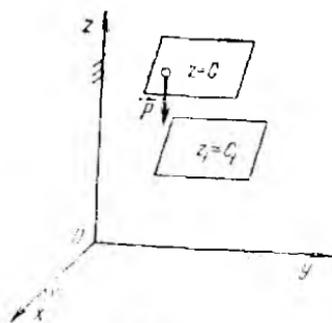
(21.95) га асосан P кучининг элементар ишини ҳисоблаймиз:

$$d'A = Xdx + Ydy + Zdz = -mgdz = d(-mgz) = dU.$$

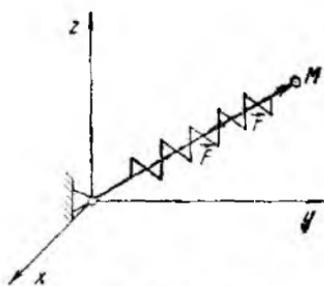
Бу тенгликдан кўрамизки, \vec{P} кучининг элементар иши $-mgz$ функциясининг тўлиқ дифференциалига тенг бўлгани учун сғирлик кучи майдони потенциалли майдондан иборат бўлади. Бинобарин, сғирлик кучи майдонининг куч функцияси

$$U = -mgz + \text{const}. \quad (21.155)$$

бўлади. Кўрилатган ҳолда $U = C$ ёки $z = \text{const}$ тенглик билан ифодаланадиган тенг потенциалли сиртлар горизонтал текисликлардан иборат бўлади.



21.45- расм.



21.46- расм.

2. Чизиқли эластиклик кучи майдони. Пружинанинг чизиқли эластиклик кучи

$$\vec{F} = -c\vec{r}$$

формуладан аниқланади (21.46-расм). Бунда c — пружинанинг қирқик коэффициент; \vec{r} — пружинанинг эркин учидagi нуқтанинг радиус-вектори.

Пружинанинг маҳкамланган O учидa координаталар бошини олиб, x, y, z ўқларга \vec{F} кучни проекциялаймиз.

$$X = -cx, Y = -cy, Z = -cz.$$

Бишобарин, кучнинг элементар иши

$$d'A = Xdx + Ydy + Zdz = -c(xdx + ydy + zdz)$$

формуладан аниқланади. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ тенгликни дифференциаллаб,

$$rdr = \frac{1}{2} d(r^2) = xdx + ydy + zdz$$

эканлигини эътиборга олак,

$$d'A = -c r dr = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right) = dU$$

тенглик ўриқли бўлади. Бу тенгликни интеграллаб, куч функциясини аниқлаймиз:

$$U = -\frac{c}{2} r^2 + const = -\frac{c}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + const. \quad (21.105)$$

Қўрилайтган ҳолда $U = C$ тенг потенциалли сиртлар $r = const$ бўлган сфералардан иборат.

3. Ньютон тортилиш кучи майдони. Массаси m_1 га тенг M нуқтага доимо қўзғалмас C марказга йўналган ва (21.108) формула ёрдамида аниқланадиган

$$\vec{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

Ньютон тортилиш кучи таъсир этсин (21.31-расмга қаранг). Бунда f — тортилиш доимийси; m_2 — тортилиш марказидаги нуқтанинг массаси; \vec{r} — M нуқтанинг C нуқтага нисбатан радиус-вектори.

(11.109) га кўра \vec{F} кучнинг элементар иши учун

$$d'A = -f m_1 m_2 \frac{dr}{r^2} \quad (21.156)$$

формула ўринли бўлади. Бу тенгламани интеграллаб, куч функциясини аниқлаймиз:

$$U = f \frac{m_1 m_2}{r} + const. \quad (21.157)$$

Бу ҳолда ҳам тенг потенциалли сиртлар маркази координаталар бошидаги сфералардан иборат бўлади.

21.29-§. Моддий нуқта ва механик система учун энергиянинг сақланиш қонуни

(21.152) га кўра $A = \Pi_0 - \Pi$ бўлгани учун моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.139) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi$$

ёки

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi_0 = h,$$

бунда h — ўзгармас бўлиб, бошланғич пайтдаги тўлиқ механик энергияни ифодалайди.

(21.153) га кўра $T + \Pi = E$ тўлиқ механик энергияни ифодалайди. Бинобарин, *энергия интеграл*и деб аталадиган

$$E = T + \Pi = h \quad (21.158)$$

тенглик ўринли бўлади.

(21.158) формула *моддий нуқта механик энергиясининг сақланиш қонунини* ифодалайди; *потенциалли куч майдонида ҳаракатланаётган нуқтанинг тўлиқ механик энергияси ўзгармасдан қолади.*

Агар механик система нуқталарига таъсир этувчи кучлар потенциалга эга бўлса, у ҳолда системанинг ҳар бир нуқтасига қўйилган кучларнинг иши (21.152) га кўра

$$A_v = \Pi_{0v} - \Pi_v \quad (21.159)$$

формуладан аниқланади. Шу сабабли система нуқталарига таъсир этувчи барча ташқи ва ички кучлар ишларининг йиғиндисини қуйидагига тенг бўлади:

$$A = \sum A_v = \sum \Pi_{0v} - \sum \Pi_v = \Pi_0 - \Pi. \quad (21.160)$$

Бунда $P_0 = \sum P_{0v}$ ва $\Pi = \sum P_v$ мос равишда система нуқталарига таъсир этувчи барча кучларнинг бошланғич ва охириги вайтдаги потенциал энергияларининг йиғиндисини ифодалайди.

(21.160) ни система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.140) формулага қўйсак,

$$T - T_0 = P_0 - \Pi$$

ёки

$$T + \Pi = T_0 + P_0 \quad (21.161)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Бу тенглама *механик система энергиясининг сақланиш қонуни*ни ифодалайди: *агар система нуқталарига таъсир этувчи ташқи ва ички кучлар потенциалга эга бўлса, у ҳолда маъмур системанинг тўлиқ энергияси ўзгармасдан қолади.*

Механик энергиянинг сақланиш қонуни ўринли бўлган механик система *консерватив система* дейилади.

Моддий нуқта ёки система нуқталарига потенциалга эга бўлмаган қаршиллик кучлари (масалан, ишқаланishi кучи) таъсир этса, механик энергиянинг бир қисми иссиқлик, электр ва бошқа энергияларга айланиш натижасида механик энергия камай боради. Бинобарин, бу ҳолда механик энергиянинг сақланиш қонуни ўринли бўлмайди. Лекин барча кўринишдаги (механик, иссиқлик, электр ва бошқа) энергиялардан ташкил топган тўлиқ энергия, механик система ҳар қандай куч майдонида ҳаракатланса ҳам, ўзгармасдан қолади.

22-БОБ. ҚАТТИҚ ЖИСМ ДИНАМИКАСИ

22.1-§. Қаттиқ жисм динамикасининг асосий масалалари

Статика бўлимида кучлар системаси таъсиридаги қаттиқ жисмнинг мувозанат шартлари ўрганилган эди. Кинематика бўлимида эса қаттиқ жисмнинг ҳаракатини аниқлаш усуллари, ихтиёрий нуқтасининг тезлиги ва тезланишини аниқлаш устида тўхтаган эдик. Қаттиқ жисм динамикасида учрайдиган масалаларни асосан қуйидаги икки гурпуага ажратиш мумкин: биринчи гурпуа масалаларда ҳаракати берилган қаттиқ жисмнинг қандай кучлар системаси таъсирида бўлиши аниқланади; иккинчи гурпуага онд масалаларда берилган кучлар таъсирида маълум бошланғич шартларга кўра қаттиқ жисм қандай ҳаракат қилиши, боғланишидаги жисм учун эса боғланиш реакция кучлари ҳам аниқланади.

Қаттиқ жисм ҳаракатини ўрганишда система динамикасининг умумий теоремаларидан фойдаланилади. Кинематика бўлимида кўрганганимиздек, эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини мураккаб ҳаракатдан иборат деб қараш мумкин (12.1-§). Бундай мураккаб ҳаракатни қутб учун ташлаб олинган жисм ихтиёрий нуқтасининг илгариллама ҳаракати (кўчирма ҳаракат) ва қутб атрофидаги айланма ҳаракат (нисбий ҳаракат) дан ташкил топган деб қараш мумкин.

Динамика бўлимида қутб учун одатда жисмнинг массалар маркази олинади. Шу сабабли массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремадан (21.5-§) фойдаланиб, жисмнинг илгарилана ҳаракат дифференциал тенгламаси тузилади. Бу теоремани ифодаловчи (21.31) тенгламага кўра

$$M \vec{\omega}_C = \vec{R}^e, \quad (22.1)$$

бу ерда M — бутун жисм массаси; $\vec{\omega}_C$ — қаттиқ жисм массалар марказининг тезланиши; \vec{R}^e — ташқи кучларнинг бош вектори.

Система массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема воситасида жисмнинг массалар маркази ятрофидаги айланма ҳаракат дифференциал тенгламаси тузилади. Бу теоремани ифодаловчи (21.86) тенгламага кўра

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C^e, \quad (22.2)$$

бу ерда \vec{K}_C — қаттиқ жисмнинг массалар марказига нисбатан кинетик momenti; \vec{M}_C^e — ташқи кучларнинг массалар марказига нисбатан бош momenti.

(22.1) ва (22.2) тенгламалар воситасида қаттиқ жисм динамикасининг юқорида баён этилган иккита асосий масаласини ечиш мумкин.

Бу бобда қаттиқ жисмнинг оддий ҳаракатлари учун қаттиқ жисм динамикасининг асосий масалалари қандай ечилишини кўриб чиқамиз.

22.2-§. Қаттиқ жисмнинг илгарилана ҳаракат дифференциал тенгламалари

Илгарилана ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг барча нуқталари худди жисмнинг массалар маркази каби ҳаракатланади. Шу сабабли илгарилана ҳаракатдаги жисмнинг ҳаракат дифференциал тенгламасини (22.1) кўринишда олиш мумкин. (22.1) да $\vec{\omega}_C = \vec{v}_C$ эканлигини эътиборга олсак, жисмнинг илгарилана ҳаракатини қуйидаги битта иккинчи тартибли векторли тенглама билан аниқлаш мумкин:

$$M \vec{v}_C = \vec{R}^e. \quad (22.3)$$

(22.3) ни иккала томонини қўзғалмас координата ўқларига проекциялаб, қаттиқ жисмнинг илгарилана ҳаракатини ифодаловчи скаляр формадаги учта иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини оламиз:

$$M \ddot{x}_C = R_x^e, \quad M \ddot{y}_C = R_y^e, \quad M \ddot{z}_C = R_z^e. \quad (22.4)$$

Илгариллама ҳаракатдаги қаттиқ жисм учун динамиканинг икки асосий масаласи худди моддий нуқта динамикасидаги каби ечилади.

Қўзғалмас $O\xi\eta\zeta$ координаталар системасига нисбатан илгариллама ҳаракатдаги жисм ушунг массалар марказига бириктирилган $Sxyz$ координаталар системасига нисбатан ҳаракатланадими. Шу сабабли илгариллама ҳаракатдаги жисмнинг массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моменти

$$\vec{K}_C = 0 \quad (22.5)$$

бўлади.

(22.5) ни (22.2) га қўйиб, илгариллама ҳаракатдаги жисм учун

$$\vec{M}_C = 0 \quad (22.6)$$

бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Демак, жисм илгариллама ҳаракатда бўлиши учун ташқи кучларнинг жисм массалар марказига нисбатан бош моменти нолга тенг бўлиши шарт, деган хулосага келамиз.

(22.6) тенглик жисм илгариллама ҳаракатда бўлишининг зарурий шартини ифодалайди. Чунки $\vec{M}_C = 0$ бўлишига қарамай, жисм массалар маркази атрофида айланма ҳаракатда бўлиши мумкин.

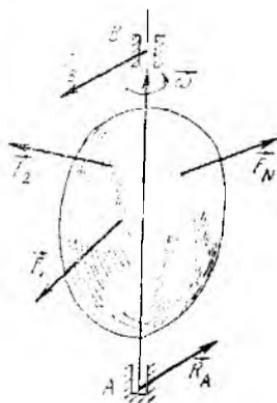
Агар $\vec{M}_C = 0$ бўлиши билан биргаликда боғланган айланда жисмнинг бурчак тезлиги ҳам нолга тенг бўлса, бундай жисм илгариллама ҳаракатда бўлишини осонликча исботлаш мумкин (бунинг исботи устида тўхталмаймиз).

Шундай қилиб, жисмнинг илгариллама ҳаракатини ўрганиш, масаласи бутун система масаласига тенг нуқта (массалар маркази) нинг ташқи кучлар бош вектори таъсиридаги ҳаракатини ўрганишига келтирилади.

22.3-§. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси

Қўзғалмас z ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги жисм боғланишдаги жисмдан иборат бўлади. Бундай жисмнинг ҳаракатини ўрганиш учун боғланишдан бўшатилш принциpidан фойдаланамиз. Агар ишқаланиш ҳисобга олинмаса, A ва B нодвижиникларнинг таянч реакцияларини \vec{R}_A , \vec{R}_B билан алмаштириш мумкин (22.1-расм). Наттижада мазкур жисмни \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , ..., \vec{F}_N , \vec{R}_A , \vec{R}_B кучлар таъсиридаги эркин жисм деб қараш мумкин.

Қўзғалмас z ўқ атрофида $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ бурчак тезлик билан айланма ҳаракат қилувчи



22.1- расм.

жисмнинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш учун z ўққа nisbatan жисм кинетик моментининг ўзгарини ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.73) нинг учинчи тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e \quad (22.7)$$

бунда K_z — жисмнинг z ўққа nisbatan кинетик моменти; $M_z^e = \sum M_z(\vec{F}_i^e)$ жисмга таъсир этувчи $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ кучларнинг z ўққа nisbatan бош моменти, \vec{R}_A ва \vec{R}_B реакция кучлари z ўқни кесиб ўтгани туфайли уларнинг шу ўққа nisbatan моментлари нолга тенг бўлади.

Ишқилишиш кучи мавжуд бўлганда M_z^e таркибига ишқилишиш кучларининг моментини ҳам қўйиш керак.

(21.51) га кўра $K_z = I_z \omega = I_z \dot{\varphi}$ бўлгани учун $\frac{dK_z}{dt} = I_z \ddot{\varphi}$ тенглик ўринли бўлади. Шу сабабли (22.7) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^e \quad (22.8)$$

ёки

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}_i^e). \quad (22.8')$$

(22.8) ёки (22.8') тенгламалар жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракати дифференциал тенгламасини ифодалайди.

Агар жисмнинг z ўқ атрофидаги айланма ҳаракат қонуни $\varphi = \varphi(t)$ ва инерция моменти I_z берилган бўлса, (22.8) дан фойдаланиб, та қи кучларнинг бош моменти M_z^e ни аниқлаш мумкин.

(22.8) тенгламада реакция кучлари қатнашмайди. A ва B таянчларнинг реакция кучларини аниқлаш устида 23.4-§ да батафсил ўхталамиз.

Инерция моменти I_z аниқ ва $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ берилган кучлар таъсиридаги жисмнинг берилган бошланғич шарҳлардаги ҳаракат қонуни тоғиш учун (22.8') дифференциал тенгламани мазкур бошланғич шартларга мувофиқ интеграллаш керак.

Агар айлиниш ўқи z га nisbatan ташқи кучларнинг бош моменти нолга тенг бўлса, у ҳолда жисмнинг z ўққа nisbatan кинетик моменти ўзгармас бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар $M_z^e = 0$ бўлса, (22.8) га кўра

$$I_z \ddot{\varphi} = 0,$$

бундан

$$K_z = I_z \omega = I_z \omega_0 = \text{const} \quad (22.9)$$

бўлишини кўраимиз. (22.9) да ω, ω_0 лар жисмнинг охириги ва бошланғич пайтларга мос бурчак тезликларини ифодалайди. Бу ҳол

инерцияси бўйича айланаётган жисмнинг ҳаракатига мос келади. Агар бирор машинанинг вали текис айланма ҳаракатда бўлса, бу ҳолда валини ҳаракатга келтирувчи кучларнинг momenti билан ишқаланиш кучларининг momenti миқдор жиҳатдан тенг, йўналиши қарама-қарши бўлади.

(22.8') ни қаттиқ жисмнинг илгариллама ҳаракат тенгламаларидан бирортаси, масалан, (22.4) нинг биринчи тенгламаси

$$M \ddot{x}_C = R_x^* \quad (22.10)$$

билан солиштирсак, айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг инерция momenti худди илгариллама ҳаракатдаги жисмнинг массасига ўхшаш функцияни бажаради, яъни *инерция momenti айланма ҳаракатдаги жисмнинг инертлик ўловини ифодалайди.*

Агар ташқи кучларнинг бош momenti M_z^* ва $\ddot{\varphi}$ маълум бўлса, (22.8) дан фойдаланиб, жисмнинг айланиш ўқиغا nisbatan инерция momenti I_z ни aniqlash mumkin.

22.4-§. Физик тебрангич

Массалар маркази орқали ўтмайдиган горизонтал ўқ атрофида ўзининг ogirlik kuchi $\vec{P} = Mg$ таъсирида ҳаракатланувчи жисмга *физик тебрангич* дейилади.

Физик тебрангичнинг айланиш ўқи тебрангичнинг *осилиш ўқи* дейилади. ОС масофани a билан белгиласак, тебрангичнинг ҳолати ОС чизиқнинг вертикалдан ogirlik бурчаги φ билан aniqlanadi.

Горизонтал z ўқни тебрангичнинг айланиш ўқи бўйлаб йўналтирамиз (22.2-расм). Оху текислигини тебрангичнинг ogirlik маркази C орқали ўтказиб, бу текислик учун расм текислигини оламиз. Тинч ҳолатдан φ бурчакка ogdirilgan тебрангичга унинг ogirlik kuchi \vec{P} ва O нуқтадаги цилиндрик шарнир реакция кучининг \vec{X}_0, \vec{Y}_0 ташкил etuvchilari таъсир etadi. Ишқаланиш кучини ҳисобга olmaymiz.

Тебрангичга таъсир etuvchi кучларнинг z ўққа nisbatan бош momenti

$$M_z^* = M_z(\vec{P}) + M_z(\vec{X}_0) + M_z(\vec{Y}_0) = Pa \sin \varphi$$

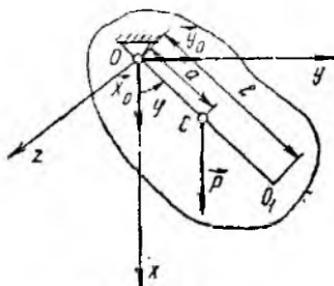
бўлгани учун (22.8) га кўра

$$I_z \ddot{\varphi} = -Pa \sin \varphi$$

ёки

$$\ddot{\varphi} + \frac{Pa}{I_z} \sin \varphi = 0 \quad (22.11)$$

тенгламани оламиз. Бунда I_z тебрангичнинг осилиш ўқиға nisbatan инерция momentini ifodalaydi.



22.2- расм.

(22.11) тенглама физик тебрангичнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси дейилади. $\sin \varphi \approx \varphi$ муносабат ўринли бўладиган физик тебрангичнинг кичик тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{I_z} \varphi = 0 \quad (22.12)$$

кўришида ёзиш мумкин. Бу дифференциал тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$\varphi = A \sin \left(\sqrt{\frac{Mga}{I_z}} t + \varepsilon \right). \quad (22.13)$$

(22.13) дан кўрамазики, φ бурчак тебраниш даври

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Mga}} \quad (22.14)$$

бўлган гармоник тебранма ҳаракат қонуни асосида ўзгаради.

(22.14) тенглама математик тебрангичнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси (18.17) дан фақат $\sin \varphi$ олдидаги ўзгармас коэффициентлари билан фарқ қилади.

Тебраниш даври физик тебрангичнинг тебраниш даврига тенг бўлган математик тебрангичнинг узунлигини аниқлаймиз. Бунинг учун (22.11) ва охириги тенгламадаги $\sin \varphi$ лар олдидаги коэффициентларни тенглаймиз:

$$\frac{Pa}{I_z} = \frac{g}{l},$$

бундан

$$l = \frac{I_z g}{Pa} = \frac{I_z}{Ma}. \quad (22.15)$$

(22.15) формула ёрдамида аниқланадиган l катталikka физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги дейилади.

(20.21) тенглик билан ифодаланадиган Гюйгенс-Штейнер теоремасини қуйидаги кўришида ёзамиз:

$$I_z = I_C + Ma^2, \quad (22.16)$$

бунда I_C билан тебрангичнинг оғирлик маркази орқали z ўққа параллел равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти белгиланган.

(22.16) ни (22.15) га қўйиб, физик тебрангичнинг келтирилган узунлиги учун

$$l = \frac{I_C}{Ma} + a \quad (22.17)$$

ифодани оламиз.

O нуқтадан оғирлик маркази йўналишида бу катталикни қўйиб, O_1 нуқтани оламиз (22.2-расм). O_1 нуқта физик тебрангичнинг силкиниш маркази дейилади. Оғирлик марказидан силкиниш марказигача бўлган масофа учун

$$a_1 = \frac{I_C}{Ma} \quad (22.18)$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар физик тебрангичнинг осилиш ўқи учун силкиниш маркази орқали ўтувчи ўқни олсак, (22.15) га кўра келтирилган узунлик учун

$$l_1 = \frac{I_C}{Ma_1} + a_1$$

формулани оламиз. (22.18) га асосан

$$a = \frac{I_C}{Ma_1}.$$

Бинобарин,

$$l_1 = a + a_1 = l$$

тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, O_1 ва O_2 нуқталардан ўтувчи ўқлар учун l_1 ва l келтирилган узунликлар ўзаро тенг бўлади. Бошқача айтганда, силкиниш маркази орқали ўтувчи ўқни осилиш ўқи учун олсак, у ҳолда аввалги осилиш ўқи янги силкиниш марказини ифодалайди, яъни бу ўқлар ўрнини ўзаро алмаштириш мумкин.

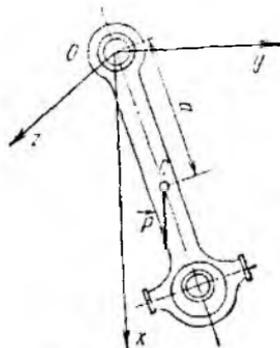
22.5-§. Жисملарнинг инерция моментларини тажриба усули билан аниқлаш

Техникада ихтиёрий шаклдаги бир жисмли ёки бир жинсиз жисملарнинг ўққа нисбатан инерция моментини аниқлашда тажриба усулидан фойдаланилади. Тебратиш усули ва буралма тебратиш усули ана шундай усуллар жумласидандир.

1. Тебратиш усули. Айтайлик, оғирлиги P га тенг шатуннинг оғирлик маркази C орқали ўтувчи, Oz га параллел горизонтал ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаш керак бўлсин. Бунинг учун дастлаб шатуннинг оғирлик марказини аниқлаймиз (7.3-§). Сўнгра шатунни O втулка орқали ўтувчи қўзғалмас Oz горизонтал ўққа осамиз (22.3-рasm) ва $\sin \varphi \approx \varphi$ муносабат ўринли бўладиган кичик бурчакка оғдириб тебратамиз. Тебратиш бошлангандан кейин шатуннинг t вақтичидаги тебратишлар сонини n ни аниқлаймиз. У ҳолда кичик тебратиш даври $T = \frac{\tau}{n}$ формула ёрдамида аниқланади.

Бундай шатунни осилиш ўқи Oz билан устма-уст тушувчи физик тебрангич деб қараш мумкин.

(22.14) га асосан физик тебрангичнинг кичик тебратишлар даври учун



22.3- рasm.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{Pa}} \quad (22.19)$$

ўринли бўлади. Бунда P — шатуннинг оғирлик кучи; a — оғирлик марказидан осилиш ўқи Oz гача бўлган масофа.

Шундай қилиб шатуннинг, тебраниш даври T , оғирлиги P ва оғирлик марказидан осилиш ўқигача бўлган a масофа маълум бўлса, шатуннинг осилиш ўқига нисбатан инерция моменти (22.19) га кўра

$$I_z = \frac{T^2 Pa}{4\pi^2} \quad (22.20)$$

тенглик воситасида аниқланади. Oz ўққа параллел равишда шатуннинг оғирлик марказидан ўтувчи Cz_1 ўққа нисбатан инерция моменти ҳисоблаш учун Гюйгенс-Штейнер теоремасини (фодаловни (20.21) формуладан фойдаланамиз:

$$I_z = I_{z_1} + Ma^2.$$

Бундан

$$I_{z_1} = I_z - Ma^2 = \frac{PaT^2}{4\pi^2} - \frac{Pa^2}{g}. \quad (22.21)$$

I_{z_1} ни билган ҳолда (20.19) га биноан шатуннинг Cz_1 ўққа нисбатан инерция радиусини аниқлаш мумкин:

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{I_{z_1}}{M}} = \sqrt{\frac{gaT^2}{4\pi^2} - a^2}. \quad (22.22)$$

2. Буралма тебраниш усули. Бу усулда ихтиёрый шаклдаги A жисмнинг инерция моменти аниқлаш учун дастлаб юқори учини қўзғалмас қилиб маҳкамлашган симнинг пастки учига инерция моменти I_C маълум бўлган эталон жисм (масалан, бир жиқли диск) осилади ва уни кичик φ бурчакка буриб қўйиб юборилади (22.4-расм, а). Буралган симнинг эластиклик кучи таъсирида эталон жисм буралма тебраниш ҳаракатида бўлади. φ бурчак кичик бўлганда эластиклик кучининг моменти буралиш бурчагига пропорционал бўлгани учун буралма тебраниш ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

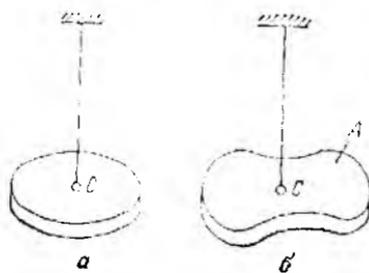
$$I_C \ddot{\varphi} = -k\varphi$$

ёки

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{I_C} \varphi = 0,$$

бунда k — ўзгармас коэффициент бўлиб, симнинг эластиклик хусусиятини фодалайди.

Эталон жисмнинг тебраниш даври учун



22.4- расм.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_C}{k}} \quad (22.23)$$

формула ўриқли бўлади.

Худди шунингдек, эталон жисм ўрнига берилган A жисми осиб (22.4-расм, б), бу жисмнинг тебраниш даври учун

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_C}{k}} \quad (22.24)$$

муносабатни оламиз.

(22.23) ва (22.24) тенгликларда k коэффициентни йўқотиб, A жисмнинг инерция моменти учун

$$I_C = I_C \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \quad (22.25)$$

формулани оламиз.

(46)

22.1-масала. Массиси M_1 ва радиуси r га тенг барабан бир учига M_2 массали C юк осмаган трос ёрдамида айлантирилади (22.5-расм). Трос B блок орқали ўтказилган бўлиб, A барабанга ўралган. A барабанга унинг бурчак тезлигига пропорционал бўлган қаршилик моменти m_k таъсир этади; пропорционаллик коэффициентни α га тенг. Агар бошланғич пайтда система тинч ҳолатда бўлса, барабанинг бурчак тезлиги аниқлансин. Трос ва B блокнинг массалари ҳисобга олинмайди. Барабан бир жинсли доиравий цилиндр деб қаралсин.

Ечилиш. Барабан ва C юкдан ташкил топган системанинг O нуқтадан расм текислигига перпендикуляр равида ўтган z ўққа нисбатан ҳаракат дифференциал тенгламасини (22.7) га қўра қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_2^e \quad (1)$$

Бунда K_z — барабан ва C юкдан ташкил топган системанинг z ўққа нисбатан кинетик моменти бўлиб,

$$K_z = I_2 \omega + M_2 v r \quad (2)$$

(2) да $I_2 \omega$ — z ўқ atroфida ω бурчак тезлик билан айланувчи барабанинг кинетик моменти; $M_2 v r$ — v тезлик билан илгариллама ҳаракатланувчи C юкнинг кинетик моменти.

$$I_2 = \frac{M_1 r^2}{2}, \quad v = \omega r$$

бўлгани учун

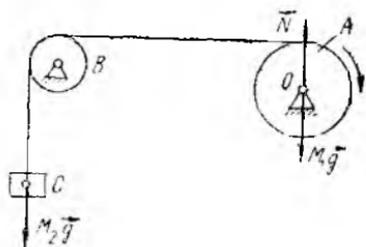
$$K_z = \frac{M_1 r^2 \omega}{2} + M_2 r^2 \omega = \frac{r^2 \omega}{2} (M_1 + 2 M_2) \quad (3)$$

Барабан ва юкдан ташкил топган системага таъсир этувчи кучларнинг z ўққа нисбатан бош моменти M_2^e қуйидагича аниқланади:

$$M_2^e = M_2 g r - m_k = M_2 g r - \alpha \omega \quad (4)$$

(3) ва (4) ни (1) га қўйсак,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{r^2 \omega}{2} (M_1 + 2 M_2) \right] = M_2 g r - \alpha \omega$$



22.5-расм.

$$\frac{r^2}{2} (M_1 + 2 M_2) \dot{\omega} = M_2 g r - \alpha \omega \quad (5)$$

дифференциал тенгламани оламиз. Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб, бошланғич шартларга мос чегараларда интегралласак,

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{M_2 g r - \alpha \omega} = \frac{2}{r^2 (M_1 + 2 M_2)} \int_0^t dt,$$

$$-\frac{1}{\alpha} \ln (M_2 g r - \alpha \omega) \Big|_0^{\omega} = \frac{2t}{r^2 (M_1 + 2 M_2)}.$$

Бундан барабашнинг бурчак тезлигини аниқлаймиз

$$\omega = \frac{M_2 g r}{\alpha} (1 - e^{-\beta t}). \quad (6)$$

(6) да $\beta = \frac{2\alpha}{r^2 (M_1 + 2 M_2)}$ Селгилаш киритилган.

(6) да $t \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак,

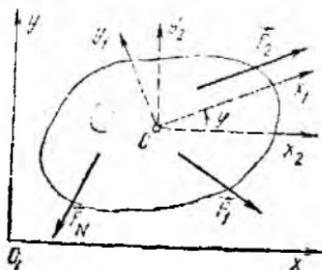
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega = \frac{M_2 g r}{\alpha} = const$$

бўлади.

22.6- §. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламалари

Айтайлик, қаттиқ жисмнинг массаси бирор $O_1 x y$ текисликка нисбатан симметрик жойлашган бўлсин; қаттиқ жисмга таъсир этувчи $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ кучлар эса шу текисликда ётсин ҳамда жисм нуқталарининг бошланғич тезлиги мазкур текисликка параллел бўлсин. Бу шартлар бажарилса, қаттиқ жисм текис параллел ҳаракатда бўлади ҳамда бундай ҳаракатни ўрганиш учун жисмни $O_1 x y$ текислик билан кесини натижасида қирқимда ҳосил бўлган текис шаклнинг ҳаракатини ўрганиш кифоя (22.6- расм).

Кинематика бўлимида қўрганмиздек, бундай текис шаклнинг ҳолатини ўзининг бирор C нуқтасининг координаталари x_C, y_C (динамикада одатда бундай нуқта учун жисмнинг массалар маркази олинади) ва бу нуқтада жисмга маҳкам бириктирилган $S x_1 y_1$ координаталар системаси x_1 ўқининг x ўқ билан ташкил қилган φ бурчаги ёрдамида аниқлаш мумкин.



Массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теоремани ифодаловчи (22.1) тенгламани қўзғалмас x ва y ўқларга проекциялаб, x_C ва y_C аниқланадиган қуйидаги иккита дифференциал тенгламани оламиз:

22.6- расм.

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_C &= R_x^e, \\ M \ddot{y}_C &= R_y^e. \end{aligned} \right\} \quad (22.26)$$

буида M — жисмнинг массаси; R_x^e , R_y^e — бош векторнинг x ва y ўқлардаги проекциялари.

Массалар марказига нисбатан нисбий ҳаракат кинетик моменти-нинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (22.2) тенгламадан фойдаланиб, φ бурчак аниқланадиган дифференциал тенгламани олиш мумкин.

Агар C нуқтада $O_1 x y$ га параллел равишда ҳаракатланувчи $C x_2 y_2$ координаталар системасини ўтказсак, текис шаклнинг $C x_2 y_2$ координаталар системасига нисбатан нисбий ҳаракати C нуқтада шакл текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи z_2 ўқ атрофидаги айланма ҳаракатдан иборат бўлади. Шу сабабли (21.54) га асосан z_2 ўққа нисбатан текис шаклнинг нисбий ҳаракат кинетик моменти $K_C = I_C \omega - I_C \dot{\varphi}$ муносабат ёрдамида аниқланади. Бинобарин, (22.2) га биноан қуйидаги тенглама ўринли бўлади:

$$I_C \ddot{\varphi} = M_C^e, \quad (22.27)$$

буида I_C — жисмнинг z_2 ўққа нисбатан инерция моменти;

M_C^e — z_2 ўққа нисбатан ташқи кучларнинг бош моменти.

Шундай қилиб, (22.26) ва (22.27) тенгламалар системаси қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламаларини ифодалайди.

Агар қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат қонунини ифодаловчи

$$x_C = \dot{f}_1(t), \quad y_C = \dot{f}_2(t), \quad \varphi = \dot{f}_3(t) \quad (22.28)$$

тенгламалар маълум бўлса, яъни массалар марказининг координаталари x_C , y_C ҳамда φ бурчак вақтнинг функцияси сифатида маълум бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг вақт бўйича иккинчи ҳосиласини аниқлаб, (22.26) ва (22.27) га қўйиш натижасида жисм нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг бош векторини аниқлаш мумкин.

Агар жисмга таъсир этувчи кучлар берилган, яъни R_x^e , R_y^e , M_C^e маълум бўлса, у ҳолда (22.26) ва (22.27) тенгламалар системасини интеграллаб, интеграллаш доимийларини ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқлаш натижасида жисмнинг текис параллел ҳаракат қонунини ифодаловчи (22.28) тенгламаларни олиш мумкин.

Агар $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ кучлар таъсирида текис параллел ҳаракат қилаётган жисм боғланишда бўлса, у ҳолда жисмга таъсир этувчи ташқи кучлар қаторига боғланиш реакция кучларини ҳам қўйиш керак; натижада боғланишдаги жисмнинг текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламалари

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_C &= R_x^e + R_x, \\ M \ddot{y}_C &= R_y^e + R_y, \\ I_C \ddot{\varphi} &= M_C^e + M_C^R \end{aligned} \right\} \quad (22.29)$$

қўринишда ёзилади. Бунда R_x , R_y — боғланиш реакция кучларининг координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси; M_C^e — массалар марказига нисбатан реакция кучларининг бош моменти.

(22.29) тенгламалар қаторига боғланиш тенгламаларини ҳам қўшниш керак. Агар текис параллел ҳаракат қилувчи боғланишдаги жисм массалар марказининг траекторияси маълум бўлса, у ҳолда (22.29) тенгламаларнинг биринчи икkitаси ўрнига бу тенгламаларнинг табиий координата ўқларидаги қуйидаги ифодаларидан фойдаланиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dv_C}{dt} &= R_\tau^e + R_\tau, \\ M \frac{v_C^2}{\rho} &= R_n^e + R_n, \end{aligned} \right\} \quad (22.30)$$

бунда v_C — массалар марказининг тезлиги; ρ — массалар маркази траекториясининг берилган ондаги эгрилик радиуси; R_τ^e , R_n^e — ташқи кучлар бош векторининг уринма ва нормалдаги проекциялари, R_τ , R_n — боғланиш реакция кучларининг уринма ва нормалдаги проекцияларининг йиғиндиси.

Баъзан (22.26) ва (22.27) тенгламаларнинг бирортаси ўрнига кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремадан ҳам фойдаланиш мумкин.

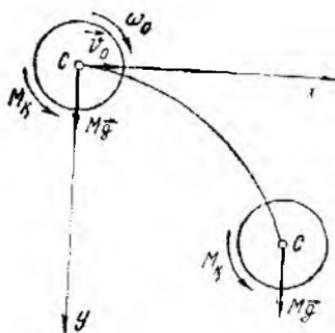
17 **22.2-масала.** Диск ўзининг огирлик кучи таъсирида вертикал текисликда пастга тушадди. Бошланғич пайтда дискка ω_0 бурчак тезлик берилган ҳамда унинг массалар маркази координаталар бошида жойлашган ва горизонтал йўналган v_0 тезликка эга. Дискка унинг массалар маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан айланма ҳаракатига қарама-қарши йўналган ва φ диск бурчак тезлигининг биринчи даражасига пропорционал бўлган қаршилик моменти таъсир этади (22.7-расм). Пропорционаллик коэффициенти β га, z ўққа нисбатан дискнинг инерция моменти I_C га тенг. Дискнинг ҳаракат тенгламаси тузилсин. x ва y ўқлари расмда тасвирланган.

Ечиш. Дискка унинг огирлик кучи Mg ва қаршилик моменти $M_\kappa = -\beta \dot{\varphi}$ таъсир этади. (22.26) ва (22.27) тенгламалардан фойдаланиб, дискнинг ихтиёрий пайтдаги ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузамиз:

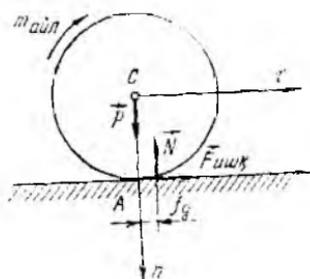
$$M \ddot{x}_C = 0, \quad M \ddot{y}_C = Mg, \quad I_C \ddot{\varphi} = -\beta \dot{\varphi}$$

ёки

$$\ddot{x}_C = 0, \quad \ddot{y}_C = g, \quad \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\frac{\beta}{I_C} \dot{\varphi}. \quad (1)$$



22.7- расм.



22.8- расм.

Бу тенгламаларни $t=0$ да $\varphi = \omega_0$, $x_C = v_0$, $y_C = 0$ бошланғич шартлар бўйича интеграллаймиз:

$$\dot{x}_C = v_0, \quad \dot{y}_C = g t, \quad \int_{\omega_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{\beta}{I_C} \int_0^t dt$$

ёки

$$\dot{x}_C = v_0, \quad \dot{y}_C = g t, \quad \varphi = \omega_0 e^{-\frac{\beta}{I_C} t}$$

Ҳосил бўлган тенгламаларни $t=0$ да $x_C = 0$, $y_C = 0$, $\varphi = 0$ бошланғич шартлар асосида интегралласак,

$$\begin{aligned} x_C = v_0 t, \quad y_C = \frac{g t^2}{2}, \quad \varphi = \omega_0 \int_0^t e^{-\frac{\beta}{I_C} t} dt = \\ = -\frac{I_C \omega_0}{\beta} e^{-\frac{\beta}{I_C} t} \Big|_0^t = \frac{I_C \omega_0}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{I_C} t}). \end{aligned}$$

лар ҳосил бўлади, бунда φ оқали бошланғич пайтда горизонтал ҳолатни эгалловчи диск диаметрининг x ўқ билан ихтиёрий пайтда ташкил қилган бурчаги белгиланган.

Шундай қилиб, дискнинг ҳаракат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$x_C = v_0 t, \quad y_C = \frac{g t^2}{2}, \quad \varphi = \frac{I_C \omega_0}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{I_C} t}).$$

22.3- масала. Радиуси r га тенг ғилдирак тўғри чиққли горизонтал рельсда $m_{ай} = \frac{5}{2} f P r$ айлантурувчи момент таъсирида ҳаракатланади (22.8- расм); бунда

f — сирпанишдаги ишқаланиш коэффициентини, P — ғилдиракнинг оғирлиги. Агар думалашдаги ишқаланиш коэффициентини $f_0 = \frac{1}{4} f r$ бўлса, ғилдиракнинг рельсга тегиб турган A нуқтасининг тезлиги аниқлансин. Ғилдирак массаси унинг гардиши бўйлаб текис тақсимланган. Бошланғич пайтда ғилдирак тинч ҳолатда бўлган.

Ечиш. Гилдиракка унинг оғирлак кучи \vec{P} , A нуқтадан f_{θ} масофага қўйилган нормал реакция кучи \vec{N} , сирлинишдаги ишқаланиш кучи $\vec{F}_{ишқ}$ (Кулон қонунига кўра $\vec{F}_{ишқ} = fN$), айлантирувчи момент $m_{айл} = \frac{5}{2} f P r$ таъсир этади.

Гилдиракнинг массалар маркази тўғри чиқиқли ҳаракатда ($\rho = \infty$) бўлади. Шунинг учун (22.30) ва (22.27) тенгламалардан фойдаланиб гилдиракнинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини тузимиз:

$$\frac{P}{g} \frac{dv_C}{dt} = f \cdot N, \quad (1)$$

$$\frac{P}{g} \frac{v_C^2}{\rho} = P - N, \quad (2)$$

$$I_C \ddot{\varphi} = -F_{ишқ} \cdot r - f_{\theta} \cdot N + m_{айл}. \quad (3)$$

(2) да $\rho = \infty$, $v_C \neq 0$ бўлгани учун

$$P - N = 0, \Rightarrow N = P. \quad (4)$$

(4) ни (1) га қўйиб, мос бошланғич шартларда интегралласак,

$$\frac{P}{g} \int_0^{v_C} dv_C = f P \int_0^t dt, \Rightarrow v_C = f g t. \quad (5)$$

$$(3) \text{ да } I_C = \frac{P}{g} r^2, F_{ишқ} = f \cdot N = f P, f_{\theta} = \frac{1}{4} f r,$$

$m_{айл} = \frac{5}{2} f P r$ эканлигини эътиборга олиб, мос бошланғич шартларда интегралласак,

$$\frac{P}{g} r^2 \int_0^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi} = \int_0^t \left(-f P r - \frac{1}{4} f P r + \frac{5}{2} f P r \right) dt,$$

будан

$$\dot{\varphi} = \frac{5}{4} \frac{f g t}{r} \quad (6)$$

бўлишини аниқлаймиз.

(10.6) дан фойдаланиб, A нуқта тезлигини аниқлаймиз:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{AC} \quad (7)$$

(7) ни горизонтал x ўққа проекцияласак,

$$v_{Ax} = v_C - v_{AC} = v_C - r \dot{\varphi} \quad (8)$$

ёки (5) ва (6) ни эътиборга олсак,

$$v_{Ax} = f g t - \frac{5}{4} f g t = -\frac{1}{4} f g t$$

тенглик ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, A нуқта тезлигининг миқдори $v_A = \frac{1}{4} f g t$ га тенг ҳамда x ўққа қарама-қарши йўналади.

22.4- масала. Массаси m га тенг A диск тврдишга B уш қўзғалмайдиган қилиб боғланган ингичка иш ўралган. Диск ишни чуватиб, бошланғич тезликсиз пастга тушади (22.9- расм). Дискнинг A нуқтадан диск текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўқ h баландликдан тушганда унинг тезлиги аниқлансин ва ишнинг тортилиш кучи топилсин.

Ечиш. Диск боғланишдаги жисмдан иборат. Ишни фикран кесиб, унинг дискка таъсирини тарағлиқ кучи \vec{S} билан алмаштирсак, дискни огирлик кучи $m\vec{g}$ га тарағлиқ кучи \vec{S} таъсирдаги эркин жисм деб қараш мумкин. Дискнинг массалар марказидаги A нуқта x ўқ бўйлаб тўғри ниҳизқли ҳаракатда бўлади. Шу сабабли массалар марказининг ҳаракатини аниқлаш учун (22.26) ишиг биринчи тенгласмасни тузимиз:

$$m \ddot{x}_A = m g - S$$

ёки

$$m \omega_A^2 = m g - S, \tag{1}$$

бунда $\ddot{x}_A = \omega_A^2 = A$ нуқтанинг тезланиши. (1) дан S ни аниқлаймиз:

$$S = m (g - \omega_A^2).$$

Диск учун (22.27) тенгласмани тузиш ўрнига кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремаши ифодаловчи (21.143) тенгласмадан фойдаланамиз:

$$T - T_0 = A^e. \tag{3}$$

Диск бошланғич пайтда тинч ҳолатда бўлгани учун

$$T_0 = 0. \tag{4}$$

Дискнинг исталган пайтдаги кинетик энергиясини ҳисоблашда текис параллел ҳаракатдаги жисм учун Кёниг теоремасини ифодаловчи (21.134) формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{4} m v_A^2 = \frac{3}{4} m v_A^2. \end{aligned} \tag{5}$$

бунда v_A — диск массалар марказининг тезлиги.

Дискка таъсир этувчи кучларнинг ишини ҳисоблаймиз. Диск h баландликка пастга тушганда огирлик кучининг иши mgh га, C нуқта ҳар онга тезликларнинг оний маркази билан устма-уст тушгани учун унга қўйилган \vec{S} кучининг иши волга тенг бўлади. Бинобарин,

$$A^e = mgh. \tag{6}$$

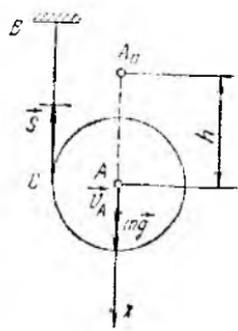
(4), (5) ва (6) ни (3) га қўйсак,

$$\frac{3}{4} m v_A^2 = mgh,$$

бундан

$$v_A^2 = \frac{4}{3} gh \tag{7}$$

ҳосил бўлади.



22.9- расм.

Шундай қилиб, цилиндр ўқи

$$v_A = \frac{2}{3} \sqrt{3gh} \quad (8)$$

тезлик билан ҳаракатланади.

(7) дан вақт бўйича ҳохла олсак,

$$2v_A \frac{dv_A}{dt} = \frac{4}{3} g \frac{dh}{dt},$$

бу ерда $\frac{dh}{dt} = v_A$, $\frac{dv_A}{dt} = a_A$ эканлигини эътиборга олиб, диск ўқининг тез-
ланишини аниқлаймиз:

$$\omega_A = \frac{2}{3} g. \quad (9)$$

(9) ни (2) га қўйиб, илпнинг таранглик кучи учун

$$S = m \left(g - \frac{2}{3} g \right) = \frac{m}{3} g \quad (9)$$

ифодани оламиз. Демак, ҳаракат лавомида илпнинг таранглик кучи ўзгармасдан қолади.

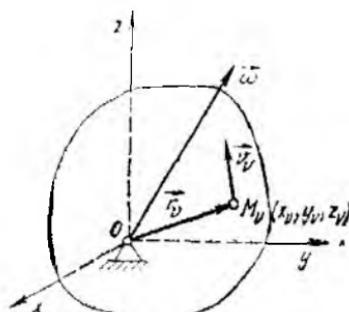
22.7*-§. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракати ва ассий динамик характеристикалари

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракатини ўрганиш техникада муҳим аҳамиятга эга. Айниқса, гироскопнинг ажойиб хусусиятларини талқин қилишда қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм ҳаракатига оид назариядан самарали фойдаланилади. Бундан ташқари, эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини ўрганишда ҳам қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракат назариясини татбиқ этиш мумкин, чунки эркин жисмнинг ҳаракатини илгариллама ва унинг бирор нуқтаси атрофида айланма ҳаракатдан ташкил топган деб қараш мумкин.

Дастлаб қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг динамик характеристикалари, яъни кинетик момент ва кинетик энергияси қандай ҳисобланишини кўриб чиқамиз.

1. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг кинетик momenti.

Жисмнинг қўзғалмас нуқтасида бирор $Oxyz$ координаталар системасини ўтказамиз (22.10-расм). Қаттиқ жисми N та кичик элементар бўлақчалардан ташкил топган деб қарасак, (21.53) га кўра жисмнинг қўзғалмас O нуқтасига нисбатан кинетик momenti учун



22.10- расм.

$$\vec{K}_O = \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v \quad (22.31)$$

формула ўринли бўлади. Бунда \vec{r}_v — жисм M_v нуқтасининг радиус-вектори; m_v — мазкур нуқтанинг массаси ва \vec{v}_v — *Олуз* координаталар системасига нисбатан M_v нуқтанинг тезлиги.

Кинематика бўлимида кўрганимиздек, M_v нуқтанинг тезлиги (11.4) Эйлер формуласи ёрдамида аниқланади:

$$\vec{v}_v = \vec{\omega} \times \vec{r}_v. \quad (22.32)$$

(22.32) ни (22.31) га қўйсак,

$$\vec{K}_O = \sum \vec{r}_v \times m_v (\vec{\omega} \times \vec{r}_v). \quad (22.33)$$

Икки қайтали вектор кўпайтма учун

$$\vec{r}_v \times m_v (\vec{\omega} \times \vec{r}_v) = \vec{\omega} m_v r_v^2 - m_v \vec{r}_v (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_v)$$

формула ўринли бўлгани учун

$$\vec{K}_O = \vec{\omega} \sum m_v r_v^2 - \sum m_v \vec{r}_v (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_v). \quad (22.34)$$

Агар *Олуз* координаталар системасини жисмга маҳкам бириктирилган деб қарасак, \vec{K}_O нинг қўзғалган *Ox* ўқдаги проекцияси қуйидагича ҳисобланади:

$$K_x = \omega_x \sum m_v (x_v^2 + y_v^2 - z_v^2) - \sum m_v x_v (\omega_x x_v + \omega_y y_v + \omega_z z_v)$$

ёки

$$K_x = \omega_x \sum m_v (z_v^2 + y_v^2) - \omega_y \sum m_v x_v y_v - \omega_z \sum m_v x_v z_v.$$

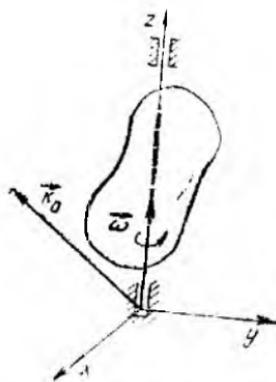
Бунда $\sum m_v (z_v^2 + y_v^2) = I_x$ орқали *x* ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти; $\sum m_v x_v y_v = I_{xy}$ ва $\sum m_v x_v z_v = I_{xz}$ лар билан эса марказдан қочирма инерция моментлари белгиланишини назарда тутсак, K_x учун ва худди шунингдек K_y , K_z лар учун қуйидаги ifadаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \omega_x I_x - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{xz}, \\ K_y &= -\omega_x I_{xy} + \omega_y I_y - \omega_z I_{yz}, \\ K_z &= -\omega_x I_{xz} - \omega_y I_{yz} + \omega_z I_z. \end{aligned} \right\} \quad (22.35)$$

Агар *x*, *y*, *z* ўқларни жисмнинг қўзғалмас *O* нуқтаси учун ясалган инерция эллипсоидининг бош ўқлари бўйича йўналтирсак, у ҳолда 20.8-§ да кўрганимиздек, марказдан қочирма инерция моментлари нолга тенг бўлади, бинобарин, инерция бош ўқлари учун

$$K_x = I_x \omega_x, \quad K_y = I_y \omega_y, \quad K_z = I_z \omega_z \quad (22.36)$$

формулалар ўринли бўлади.



22.11-расм.

(22.36) дан кўрамизки, x , y , z ўқлар инерция бош ўқларидан иборат бўлса, \vec{K}_0 кинетик моментнинг йўналиши бурчак тезлиги ω нинг йўналиши билан устма-уст тушади.

Хусусий ҳолда жисм қўзғалмас z ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлса (22.11-расм), y ҳолда ω бурчак тезлик вектори айланиш ўқи бўйлаб йўналади ва $\omega_x = \omega_y = 0$ бўлади. Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатнинг хусусий ҳолидан иборат бўлгани туфайли бундай жисм учун (22.36) ни

$$K_x = -I_{xz} \omega_z, \quad K_y = -I_{yz} \omega_z, \quad K_z = I_z \omega_z \quad (22.37)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар z ўқ O нуқта учун ясалган инерция эллипсоиднинг бош ўқидан иборат бўлса, $I_{xz} = I_{yz} = 0$ бўлади ва (22.37) дан

$$K_x = 0, \quad K_y = 0, \quad K_z = I_z \omega_z \quad (22.38)$$

муносабатларини оламиз.

2. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг кинетик энергияси. (21.128) га кўра жисмнинг кинетик энергияси учун

$$T = \frac{1}{2} \sum m_v v_v^2$$

ёки

$$T = \frac{1}{2} \sum m_v \vec{v}_v^2 = \frac{1}{2} \sum m_v \vec{v}_v \vec{v}_v \quad (22.39)$$

формула ўринли бўлади.

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм нуқтасининг тезлиги учун (22.32) формула ўринли бўлишини эътиборга олсак,

$$T = \frac{1}{2} \sum m_v \vec{v}_v \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_v)$$

ифода ҳосил бўлади. Бунда $\vec{v}_v (\vec{\omega} \times \vec{r}_v) = \vec{\omega} (\vec{r}_v \times \vec{v}_v)$ бўлишини назарда тутсак,

$$T = \frac{1}{2} \sum \vec{\omega} (\vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \frac{1}{2} (\vec{\omega} \cdot \vec{K}_0). \quad (22.40)$$

(22.40) да $\sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \vec{K}_0$ билан системанинг O нуқтага нисбатан кинетик моменти белгиланган.

Шундай қилиб, қўзғалмас нуқтага бўлган жисмнинг кинетик энергияси жисмнинг айланиш бурчак тезлигини қўзғалмас нуқтага нисбатан кинетик момент векторига скаляр кўпайтмасининг ярмига тенг.

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг кинетик энергияси учун яна қуйидаги формулани ёзиш мумкин:

$$T = \frac{1}{2} K_O \cos(\widehat{\omega \vec{K}_O}) = \frac{1}{2} (\omega_x K_x + \omega_y K_y + \omega_z K_z). \quad (22.41)$$

(22.41) дан кўрамизки, жисмнинг кинетик моменти ҳамisha мусбат қийматга эга бўлгани учун $\cos(\widehat{\omega \vec{K}_O}) > 0$ бўлади, яъни қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг бурчак тезлиги билан кинетик моменти орасидаги бурчак доимо ўткир бурчакдан иборат бўлади.

(22.35) ни (22.41) га қўйсак,

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) - 2 I_{yz} \omega_y \omega_z - 2 I_{zx} \omega_z \omega_x - 2 I_{xy} \omega_x \omega_y \quad (22.42)$$

формулани оламиз. Демак, қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг кинетик энергияси бурчак тезлигининг координата ўқларидаги проекцияларининг квадратик формасидан иборат бўлади.

Агар *Oxyz* координата системасининг ўқлари инерция боти ўқларидан иборат бўлса, у ҳолда марказдан қочирма инерция моментлари $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ бўлади ва (22.42) ни

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) \quad (22.43)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар (22.42) дан ω_x , ω_y ва ω_z лар бўйича хусусий ҳосила олиб, (22.35) ни эътиборга олсак,

$$K_x = \frac{dT}{d\omega_x}, \quad K_y = \frac{dT}{d\omega_y}, \quad K_z = \frac{dT}{d\omega_z} \quad (22.44)$$

формулалар ўринли бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

22.8*-§. Эйлернинг динамик тенгламалари

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини чиқариш учун қўзғалмас *O* нуқтада $O\xi\eta\xi$ қўзғалмас координаталар системаси ва жисм билан биргаликда ҳаракатланувчи *Oxyz* координаталар системасини ўтказамиз.

Қўзғалмас $O\xi\eta\xi$ координаталар системасига нисбатан кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (21.72) формулага кўра

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e, \quad (22.45)$$

бунда \vec{K}_O — жисмнинг қўзғалмас *O* нуқтага нисбатан кинетик моменти; \vec{M}_O^e — мазкур нуқтага нисбатан ташқи кучларнинг боти моменти.

Охуз координаталар системаси ўқларининг бирлик векторларини \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} билан белгиласак, \vec{K}_O ни x , y , z ўқлари бўйича ташкил этувчиларга ажратниш мумкин:

$$\vec{K}_O = K_x \vec{i} + K_y \vec{j} + K_z \vec{k}. \quad (22.46)$$

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг динамик тенгламаларини чиқаришда Эйлер иккита соддалаштириши киритади. Улардан бириинчиси шундан иборатки, (22.45) тенгламаларини қўзғалувчи координата ўқларига проекцияланади. Бунинг учун дастлаб $\frac{d\vec{K}_O}{dt}$ нинг қўзғалувчи координата ўқларидаги ифодасини аниқлаймиз:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{dK_x}{dt} \vec{i} + \frac{dK_y}{dt} \vec{j} + \frac{dK_z}{dt} \vec{k} + K_x \frac{d\vec{i}}{dt} + K_y \frac{d\vec{j}}{dt} + K_z \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (22.47)$$

Кинематика бўлимида кўрганимиздек, (13.13) га асосан

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k} \quad (22.48)$$

бўлади, бунда $\vec{\omega}$ билан жисмнинг бурчак тезлиги белгиланган.

(22.48) ва (22.46) ни назарда тутиб, (22.47) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O}{dt} &= \frac{dK_x}{dt} \vec{i} + \frac{dK_y}{dt} \vec{j} + \frac{dK_z}{dt} \vec{k} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O = \\ &= \frac{dK_x}{dt} \vec{i} + \frac{dK_y}{dt} \vec{j} + \frac{dK_z}{dt} \vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix} = \\ &= \frac{dK_x}{dt} \vec{i} + \frac{dK_y}{dt} \vec{j} + \frac{dK_z}{dt} \vec{k} + \vec{i} (\omega_y K_z - \omega_z K_y) + \\ &\quad + \vec{j} (\omega_z K_x - \omega_x K_z) + \vec{k} (\omega_x K_y - \omega_y K_x) \end{aligned}$$

ёки

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_O}{dt} &= \vec{i} \left(\frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y \right) + \vec{j} \left(\frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z \right) + \\ &\quad + \vec{k} \left(\frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x \right). \end{aligned} \quad (22.49)$$

Ташқи кучларнинг боти momenti учун

$$\vec{M}_O^e = M_x^e \vec{i} + M_y^e \vec{j} + M_z^e \vec{k} \quad (22.50)$$

тенглик ўринли бўлишини назарда тутсак, (22.49) ва (22.50) га асосан (22.45) тенглама қуйидаги учта скаляр тенгламага эквивалент бўлишини кўрамиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y &= M_x^e, \\ \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z &= M_y^e, \\ \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x &= M_z^e. \end{aligned} \right\} \quad (22.51)$$

Эйлер иккинчи содлалантириши сифатида қўзғалувчи координата ўқлари учун O нуқтадаги инерция бош ўқларини олади. Натижада (22.36) га кўра

$$K_x = I_x \omega_x, \quad K_y = I_y \omega_y, \quad K_z = I_z \omega_z$$

бўлади. Бу ҳолда (22.51) тенгламалар системаси қуйидагича ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) &= M_x^e, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) &= M_y^e, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) &= M_z^e. \end{aligned} \right\} \quad (22.52)$$

(22.52) тенгламалар *Эйлернинг динамик тенгламалари* дейилади. Бу тенгламаларни Эйлернинг кинематик тенгламалари (11.29)

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (22.53)$$

билан биргаликда ениш керак.

22.9*-§. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм учун динамиканинг асосий масаллари

Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм учун динамиканинг асосий масаллари: а) жисмнинг

$$\varphi = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t)$$

тенгламалар билан ифодаланган ҳаракат тенгламалари берилганда ташқий кучларнинг бош моментини аниқлаш ва б) жисмга таъсир этувчи кучларнинг моментини маълум бўлганда жисмнинг ҳаракат тенгламаларини аниқлашдан иборат. Динамиканинг биринчи масаласини ечиш φ , ψ , θ ларнинг ҳосилаларини топшига келтирилади; динамиканинг иккинчи масаласини ечиш эса (22.52) ва (22.53) тенгламаларини ечишга келтирилади.

Бу тенгламаларнинг аниқ ечимини жисмга қўйилган кучларнинг momenti, инерция моментлари ва бошланғич шартларга маълум чеклашлар қўйилгандагина аниқлаш мумкин.

Агар бошланғич шартларга ҳеч қандай чек қўйилмаган бўлса, фақат огирлик кучи таъсиридagi қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм-

нинг ҳаракати ҳақидаги масаланинг аниқ ечимини қуйидаги учта ҳолдагина аниқлаш мумкин.

1. Эйлер-Пуассон ҳоли. Бу ҳолда ихтиёрий шаклдаги жисмнинг огирлик маркази қўзғалмас нуқта билан устма-уст тушади ва Эйлер бурчаклари махсус эллиптик фулкциялар орқали ифодаланади.

2. Лагранж-Пуассон ҳоли. Бу ҳолда жисм симметрия ўқи-га эга бўлади. Агар жисмнинг симметрия ўқи учун z ўқни олсак $I_x = I_y$ бўлади, яъни O нуқта учун ясалган инерция эллипсоиди айланма эллипсоиддан иборат бўлади. Қўриқлаётган ҳолда қўзғалмас O нуқта ва жисмнинг массалар маркази симметрия ўқида ётади. Бу ҳолда Эйлер бурчаклари квадратура орқали аниқланади.

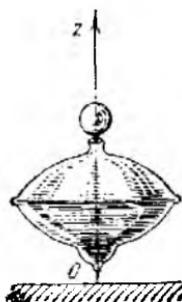
3. С.В.Ковалевская ҳоли. Ковалевская ҳолида $I_x = I_y = = 2I_z$ бўлади, яъни O нуқта учун ясалган инерция эллипсоиди чўзиқ айланма эллипсоиддан иборат бўлади. Жисмнинг қўзғалмас нуқтаси симметрия ўқида ётади ҳамда унинг огирлик маркази инерция эллипсоиднинг экваториал текислигида ётади. Бу ҳолда Эйлер бурчакларини аниқлаш гиперэллиптик функциялар орқали ифодаланади.

Лагранж-Пуассон ҳолидан гироскоплар назариясида самарали фойдаланилади.

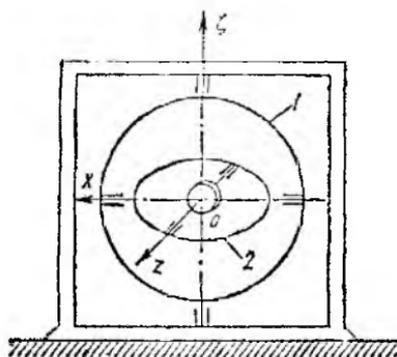
22.10*- §. Эркин гироскопнинг ҳаракати

Ўзининг симметрия ўқи атрофида тез айланадиган ва симметрия ўқидаги қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракатлана оладиган жисм *гироскоп* дейилади.

Гироскопга оддий мисол тариқасида бир учи горизонтал текисликка таянган ва симметрия ўқи атрофида тез айланивчи шприцдоқни олган мумкин (22.12-расм). Техникада турли гироскопик асбобларда гироскоп ротори 22.13- расмда схематик тасвирланган кардан осмасига ўриатилади. Кардан осмаси одатда қўзғалмас $O\xi$ ўқ атрофида айлана оладиган ташқи 1 думалоқ ҳалқадан ва унга подишниклар воситасида бириктирилган ва горизонтал Ox ўқ атрофида айлана оладиган ички 2 думалоқ ҳалқадан иборат бўлади. Ox ўқ ташқи ҳал-



22.12- расм.



22.13- расм.

қага. Оз өса ички ҳалқага подшивниклар воситасида ўрнатилади. Гироскоп Оз ўқининг бу тарзда ўрнатилиши унинг биға O нуқтаси қўзғалмас бўлишини таъминлаши билан бирга мазкур ўқнинг фазода икхтёрлий йўналишини эгаллашига ҳам имкон беради.

Кардан осмасига ўрнатилган гироскопнинг ҳолати Oz , $O\xi$ ва Ox ўқлари атрофидаги учта айланани бурчаклари φ , ψ , θ билан аниқланади. Шу сабабли бундай гироскопнинг эркинлик даражаси 3 га тенг бўлади.

Ў Агар гироскопга таъсир этувчи ташқи кучларнинг қўзғалмас O нуқтага нисбатан бош моменти нолга тенг бўлса, бундай гироскоп *эркин гироскоп* дейилади. Эркин гироскопни баъзида *мувозанатланган ёки астатик гироскоп* деб аталади.

Кардан осмасига ўрнатилган вэ сирлик маркаси қўзғалмас O нуқта билан устма-уст тушувчи гироскоп эркин гироскопга мисол бўла олади.

Эркин гироскопни Эллер — Пуансо ва Лангранж — Пуассон ҳолларининг мажмуидан иборат деб қараш мумкин.

Эркин гироскопга таъсир этувчи ташқи кучларнинг бош моменти $\vec{M}_O^e = 0$ бўлгани учун гироскопнинг абсолют ҳаракат кинетик моментиининг ўзгариши ҳақидаги теоремага кўра

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e = 0 \quad (22.54)$$

бўлади. Бинобарин, қўзғалмас O нуқтага нисбатан гироскопнинг кинетик моменти \vec{K}_O миқдор ва йўналиши жиҳатдан ўзгармас бўлади:

$$\vec{K}_O = \overrightarrow{const}. \quad (22.55)$$

Гироскопнинг элементар назариясида \vec{K}_O векторини гироскопнинг Oz ўқи бўйлаб йўналган деб қаралади. Бинобарин, *эркин гироскопнинг ўқи инерциал ҳисоблаш системасига нисбатан ўзгармас йўналишини сақлайди*. Эркин гироскопнинг бу асосий хусусиятидан турли навигация асбоблари ёрдамида фазода ўзгармас йўналишни таъминлашда кенг фойдаланилади.

22.11- §. Резаль теоремаси

Қўзғалмас O нуқтага эга бўлган жисм учун кинетик моментиининг ўзгариши ҳақидаги теоремани

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e \quad (22.45)$$

кўринишида ёзиш мумкин. Бунда \vec{M}_O^e — жисмга таъсир этувчи ташқи кучларнинг қўзғалмас O нуқтага нисбатан бош моменти.

\vec{K}_O вектордан вақт бўйича олинган ҳосила бу вектор учининг тезлиги $\vec{\omega}$ ни ифодалайди, яъни

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{u}.$$

Бунда \vec{u} вектори \vec{K}_O вектори годографига ўтказилган уризма бўйича йўналади. Шундай қилиб, (22.45) ни қуйидагича ёза оламиз:

$$\vec{u} = \vec{M}_O^e. \quad (22.56)$$

Бу формула *Резаль теоремасини* ифодалайди: *жисмнинг қўзғалмас O нуқтага нисбатан кинетик моменти вектори учининг тезлиги барча ташқи кучларнинг шу нуқтага нисбатан бош моментиغا тенг.*

Резаль теоремаси жисм кинетик моменти ўзгариши ҳақидаги теореманинг кинематик интерпретациясини ифодалайди.

22.12- §. Гироскопнинг элементар назарияси

Техникада қўлланиладиган гироскоп роторининг ўз ўқи атрофида айланиш бурчак тезлиги 20 000 — 60 000 айл/мин га тўғри келади. Гироскоплар кема, самолёт, ракета ва космик кемаларни бошқаришда кенг қўлланилади.

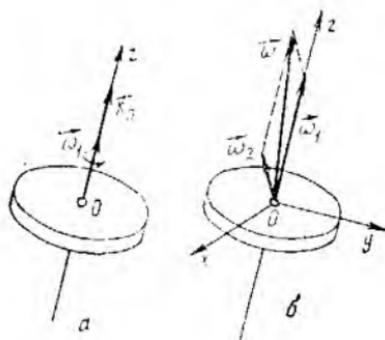
Гироскопнинг ҳаракатини ўрганишда кўпинча унинг ротори ҳаракатини аниқлаш алоҳида аҳамиятга эга.

Агар гироскоп ротори фақат ўзининг Oz симметрия ўқи атрофида ω_1 бурчак тезлик билан айланса, унинг \vec{K}_O кинетик моменти Oz ўқ бўйлаб ω_1 билан бир хил йўналади (22.14-рasm, *a*) ҳамда (21.54) га кўра

$$K_z = I_z \omega_1$$

тенглик ўринли бўлади. z ўқиш ω_1 билан бир хил йўналишда олсак, $K_O = K_z$ бўлиб,

$$\vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1.$$



22.14- рasm.

Айтайлик, гироскоп ротори ўз ўқи Oz атрофида $\vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан айлансин; Oz ўқ ёса, O нуқта атрофида $\vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан айлансин. У ҳолда қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатларини қўшни ҳақидаги теоремага асосан гироскоп роторининг абсолют бурчак тезлиги $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}_2$ бурчак тезликларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлади (22.14-рasm, *b*).

Олуғ координаталар системасининг z ўқини гироскоп ротори ўқи

бўйлаб йўналтирсак, бу координаталар системасининг ўқлари O нуқта учун ясалган инерция эллипсоидининг бош ўқларидаги иборат бўлади, бинобарин, (22.36) га асосан кинетик моментнинг x, y, z ўқларидаги проекциялари учун

$$K_x = I_x \omega_{zx}, \quad K_y = I_y \omega_{zy}, \quad K_z = I_z (\omega_1 + \omega_2) \quad (22.57)$$

муносабатларини оламиз. Бунда гироскоп z ўққа нисбатан симметрик бўлгани учун $I_x = I_y$.

Замонавий гироскопларда $\omega_1 = 6000 \text{ с}^{-1}$ ёки $n = 60\,000$ айл/мин гача бўлган қийматга эришади; ω_2 эса одатда $0,01 \text{ с}^{-1}$ дан олмайд. Биринчи яқинлашишда ω_2 ни эътиборга олмасак, (22.57) ни

$$K_x = 0, \quad K_y = 0, \quad K_z = I_z \omega_1$$

кўринишда ёзиш мумкин. Натيجали кинетик момент \vec{K}_O ни Oz ўқ бўйлаб йўналган деб қарани мумкин ва аввалгидек

$$\vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1 \quad (22.58)$$

формула ўринли бўлади.

Шундай қилиб, элементар назарияда гироскопнинг кинетик momenti унинг симметрия ўқи Oz бўйлаб йўналган ва модули эса гироскопнинг симметрия ўқи Oz га нисбатан унинг инерция momenti билан мазкур ўқ атрофидаги айланиш бурчак тезлиги кўпайтмасига тенг деб қаралади. Бундай гироскопнинг айрим хусусиятларини кўриб чиқамиз.

1. Кучнинг гироскоп ўқиغا таъсири. Шў пайтгача гироскопнинг қўзғалмас нуқтага нисбатан ҳаракатини ташқи кучларнинг momenti нолга тенг бўлган ҳолда текширдик. Энди гироскопга таъсир этувчи ташқи кучларнинг momenti нолдан фарқли бўлган ҳолни кўрамиз.

Айтайлик, оғирлик маркази O нуқтада бўлган гироскоп ротори ўқиға унга перпендикуляр равишда йўналган \vec{F} куч таъсир этсин (22.15-расм). Агар гироскоп ротори ўз ўқи атрофида айланмаса, у \vec{F} куч таъсирида O нуқта атрофида мазкур куч йўналишида кўчади. Агар гироскоп ротори ўз ўқи атрофида жуда катта бурчак тезлик билан айланса, у ҳолда \vec{F} куч таъсирида гироскоп бугунлай бошқача ҳаракатда бўлади.

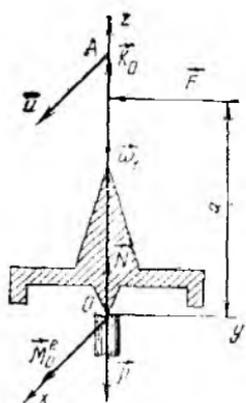
Ҳақиқатан ҳам Резаль теоремасига асосан \vec{K}_O вектори учининг тезлиги

$$\vec{u} = \vec{M}_O^* \quad (22.59)$$

ёки унинг миқдори

$$u = M_O^* = F \cdot a \quad (22.59')$$

формуладан аниқланади.



22.15- расм.

Шундай қилиб, $\vec{\omega}_1$ бурчак тезлик билан айланувчи гироскоп ўқи \vec{F} куч таъсиридан шу куч йўналишида эмас, балки унинг момент-вектори \vec{M}_O^F йўналишида, яъни кучнинг йўналишига перпендикуляр текисликда кўчади.

(22.59') формуладан кўрамизки, \vec{F} кучининг таъсири тўхтаган заҳоти $\vec{u} = 0$ бўлади. Демак, ротори тез айланаётган гироскоп ўқи инерцион хусусиятга эга бўлмайди.

Агар гироскоп ўқига оний куч таъсир этса (яъни зарба берилса), у ҳолда кинетик момент вектори учидagi A нуқта жуда кичик т вақт ичида \vec{u} -га тенг кўчини олади ҳамда гироскоп ўқи деярли бошланғич ҳолатини сақлайди. Бу натижа гироскопнинг асосий хоссаларидан бири бўлиб, *гироскоп ўқининг устуворлик хусусиятини* ифодалайди.

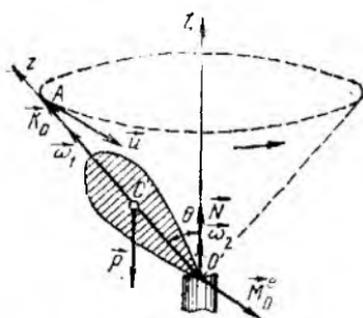
Айтайлик, оний \vec{F} куч гироскоп ўқига жуда кичик вақт $t = \tau$ давомида таъсир этсин, у ҳолда гироскоп ўқидagi A нуқта Oх ўқи йўналишида $u = \tau = F\alpha\tau$ масофага кўчади. Бунда гироскоп ўқи

$$\alpha = \frac{u_\tau}{K_O} = \frac{F\alpha\tau}{I\omega_1} \quad (22.60)$$

бурчакка огади.

(22.60) формуладан кўрамизки, ω_1 бурчак тезлик орта борган сари α бурчак камай боради. Масалан, оғирлиги $P = 50$ Н, инерция радиуси $\rho_u = 0,1$ м бўлган гироскоп ротори $n = 60\,000$ айл/мин бурчак тезлик билан айлансин. Агар гироскоп ўқига перпендикуляр йўналган ва O нуқтадан $a = 0,2$ м масофага қўйилган $F = 100$ Н куч $\tau = 0,1$ с давомида таъсир этса, шу вақт ичида гироскоп ўқи \vec{F} кучига перпендикуляр йўналишда

$$\alpha = \frac{F\alpha\tau}{\frac{P}{g} \rho_u^2 \cdot \frac{2\pi n}{60}} = \frac{100 \cdot 0,2 \cdot 0,1}{9,8 \cdot 0,01 \cdot \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 60000}{60}} = 0,0063 \text{ рад} = 0,36^\circ$$



22.16- расм.

бурчакка огади, яъни гироскоп ўқи деярли кўчишга улгурмайди.

2. Гироскоп ўқининг прецессияси. Пирилдоқ ҳаракатланганда, прецессия қандай содир бўлишини кўриб чиқамиз. Юқорида чиқарилган формулаларни ўтқир учи силлиқ ярим сферик сиртга таянган ва симметрия ўқи атрофида ўзгармас ω_1 бурчак тезлик билан айланувчи пирилдоқ учун қўллаймиз (22.16- расм). Гироскоп-

нинг элементар назариясига кўра, пирилдоқнинг O нуқтага nisbatan кинетик momenti miqdor jihatdan $K_O = I_z \omega_1$ ga teng бўлиб, пирилдоқнинг симметрия ўқи Oz бўйлаб йўналади, бунда I_z — пирилдоқнинг Oz ўққа nisbatan инерция momenti. Нормал реакция кучи \vec{N} ning O нуқтага nisbatan momenti nolga teng бўлгани учун ташиқи кучларининг O нуқтага nisbatan momenti \vec{M}_O^e ogirlik кучи \vec{P} ning шу нуқтага nisbatan momentiga gina teng бўлади. Қўзғалмас O нуқтадан пирилдоқнинг ogirlik маркази C нуқтагача бўлган масофани $OC = a$ va симметрия ўқи Oz билан вертикал Oz ўқ орасидаги бурчакни θ билан белгиласак,

$$M_O^e = Pa \sin \theta \quad (22.61)$$

бўлади ҳамда \vec{M}_O^e вектори симметрия ўқи ётган вертикал текисликка перпендикуляр йўналади.

(22.61) ni эътиборга олсак, Резаль теоремасига кўра қуйидаги тенгликни ёза оламиз:

$$u = Pa \sin \theta. \quad (22.62)$$

Бунда \vec{u} вектори Oz ўқ ётган вертикал текисликка перпендикуляр бўлиб, \vec{M}_O^e билан бир хил йўналишга эга бўлади.

A нуқта пирилдоқнинг симметрия ўқида ётгани туфайли, бу ўқнинг ҳаракати A нуқтанинг ҳаракати билан аниқланади. Бинобарин, пирилдоқнинг симметрия ўқи ogirlik кучи \vec{P} ётган вертикал текисликка перпендикуляр равнида ҳаракатланади. Бунда θ бурчак ўзгармай, мазкур ўқ доиравий конус сирги бўйлаб, 22.16-расмда тасвирланган стрелка йўналишида айланади. Пирилдоқ ўқининг бундай ҳаракати *прецессия* дейилади.

Oz симметрия ўқи вертикал Oz ўқ атрофида $\vec{\omega}_2$ бурчак тезлик билан айланганда \vec{K}_O вектори учидаги A нуқтанинг тезлиги

$$\vec{u} = \vec{\omega}_2 \times \vec{K}_O \quad (22.63)$$

тенгликдан аниқланади. Шунингдек, гироскопнинг элементар назариясида $\vec{K}_O = I_z \vec{\omega}_1$ деб олинишини назарда тутсак,

$$\vec{u} = I_z (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1), \quad (22.64)$$

унинг miqdori esa

$$u = I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta \quad (22.65)$$

формуладан аниқланади. (22.62) va (22.65) формулаларни солиштириб,

$$I_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta = Pa \sin \theta$$

Кўрилатган ҳолда $\theta = 90^\circ$ бўлгани учун

$$M_O^{cup} = I_2 \omega_1 \cdot \omega_2. \quad (22.68')$$

(22.67) тенглик Жуковский қондасини ифодалайди: агар гироскоп ўқи мажбурий прецессия ҳаракатида иштирок этса, у ҳолда гироскоп ўқи ўрнатилган подшипникларга моменти гироскопик моменти \vec{M}_O^{cup} га тенг жуфт куч таъсир этади ва бу жуфт куч $\vec{\omega}_1$ сектори $\vec{\omega}_2$ усти-а энг қисқа йўл билан тушадиган йўналишида гироскопнинг симметрия ўқини прецессия ўқи билан устима-уст тўширишига интилади.

Агар A ва B подшипниклар орасидаги масофа l га тенг бўлса, у ҳолда (\vec{N}_1, \vec{N}_2) гироскопик жуфт моментининг миқдори учун

$$M_O^{cup} = N_1 \cdot l = N_2 \cdot l \quad (22.69)$$

формула ўринли бўлади.

(22.68') ва (22.69) ни солиштириб, қуйидаги тенгликни оламиз:

$$I_2 \omega_1 \omega_2 = N_1 \cdot l = N_2 \cdot l.$$

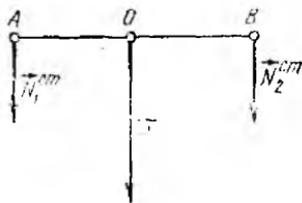
Бундан гироскопик босим кучларини аниқлаймиз:

$$N_1 = N_2 = \frac{I_2 \omega_1 \omega_2}{l} \quad (22.69)$$

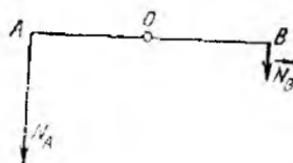
A ва B подшипникларга \vec{N}_1 ва \vec{N}_2 гироскопик босим кучларидан ташқари \vec{N}_1^{cm} ва \vec{N}_2^{cm} статик босим кучлари ҳам таъсир этади (22.18-расм) ҳамда бу кучлар гироскоп овирлик кучи \vec{P} нинг ярмига тенг бўлади:

$$N_1^{cm} = N_2^{cm} = \frac{1}{2} P. \quad (22.70)$$

Шундай қилиб, A ва B нуқталарнинг тўлиқ реакция кучи статик ва гироскопик ташкил этувчилардан иборат бўлади. 22.17 ва 22.18-расмларда тасвирланган \vec{N}_1 , \vec{N}_2 ва \vec{N}_1^{cm} , \vec{N}_2^{cm} кучларининг йўналишини эътиборга олиб, (22.69) ва (22.70) га асосан \vec{N}_A ва \vec{N}_B тўлиқ босим кучларининг миқдорларини



22.18- расм.



22.19- расм.

$$N_A = N_1 + N_1^{cm} = \frac{I_2 \omega_1 \omega_2}{l} + \frac{1}{2} P,$$

$$N_B = N_2 - N_2^{cm} = \frac{I_2 \omega_1 \omega_2}{l} - \frac{1}{2} P$$

формулалар ёрдамида аниқлаймиз (22.19-расм).

Гироскоплар воситасида снаряд, самолёт ёки ракета каби турли учувчи аппаратларнинг пререссия бурчак тезлигини аниқлашда ёки уларнинг стабил ҳолатини таъминлашда самарали фойдаланилади.

22-5-масала. Массаси $M = 1400$ кг, радиуси $a = 75$ см ва ўз ўқиға нисбатан олдинги инерция радиуси $\rho = \sqrt{0,55} a$ бўлган ёлдирак скати горизонтал текисликда радиуси $R = 200$ м бўлган бурилишда ўзгармас $v = 20$ м/с тезлик билан ҳаракат қилади (22.20-расм). Агар рельслар оралиғи $l = 1,5$ м бўлса, скатдан рельсга тушганган босим аниқлансин.

Ечиш. Ёлдирак скатининг абсолют ҳаракатини унинг массалар маркази билан биргаликдаги алгарилма ҳаракат (кўчирма ҳаракат) ва массалар маркази атрофидаги айланма ҳаракат (нисбий ҳаракат) дег ташкил топган деб қараймиз ҳамда массалар маркази атрофидаги айланма ҳаракати учун кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаймиз.

Ёлдирак скатининг массалар марказига нисбатан кинетик momenti \vec{K}_C^r ning miq'dori

$$K_C^r = I \omega_1^2$$

формула ёрдамида аниқланади. Буида $I = M \rho_a^2$ ёлдирак скатининг массалар марказига нисбатан инерция momenti; ω_1^2 — скатининг ўз ўқи атрофидаги айланмиш бурчак тезлиги. Ёлдираклар сиривмасдан ёлдирайди деб қарасак, $\omega_1^2 = \frac{v}{a}$ tenglik ўrinli бўлиди. Бинобарин,

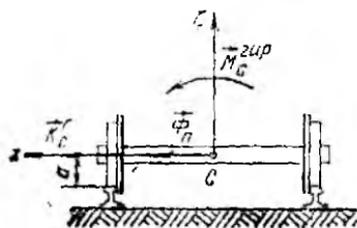
$$K_C^r = \frac{M \rho_a^2 v}{a}.$$

Агар иккала рельс ҳам битта горизонтал текисликда ётади деб қарасак, инерция маркази C атрофида скат $\omega_2 = \frac{v}{R}$ бурчак тезлик билан айланади.

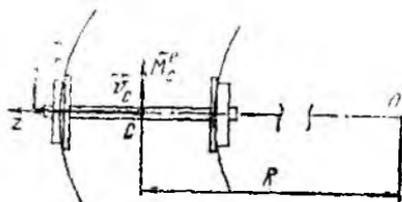
Бунда \vec{K}_C^r векторининг uchi

$$u_r = K_C^r \omega_2 = \frac{M \rho_a^2 v^2}{aR} \quad (1)$$

tezlikka ega бўлади ва \vec{u}_r ning йўналиши 22.21-расмда кўрсатилгандек, \vec{v}



22.20-расм.



22.21-расм.

тезликнинг йўналиши билан бир хил бўлади. (1) ни эътиборга олсан, Рельс теоремасига кўра

$$M_C^e = \frac{M\rho_a^2 v^2}{aR} = \frac{1400 \cdot 0,55 \cdot 0,75^2 \cdot 20^2}{0,75 \cdot 200} = 1155 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

бўлади. Гироскопик момент \vec{M}_C^{gip} миқдор жиҳатдан M_C^e га тенг

$$M_C^{gip} = M_C^e = 1155 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

йўналиши эса \vec{M}_C^e (ёки \vec{u}_r) га қарама-қарши бўлади. Шу сабабли гироскопик момент таъсирида ташқи рельсда босим ортади, ички рельсда эса камаяди.

Рельсларга тушадиган босимни ҳисоблашда марказдан қочирма инерция кучи $\vec{\Phi}_n$ нинг ҳам моментини ҳисобга олини керак. $\vec{\Phi}_n$ ни С нуқтага қўйилган деб қараймиз. Бу кучнинг миқдори

$$\Phi_n = \frac{Mv^2}{R} = 2800 \text{ Н}$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Φ_n таъсиридан ҳам ташқи рельсда босим ортади, ички рельсда камаяди.

Рельсларга тушадиган статик босим $\frac{Mg}{2}$ га тенг бўлишини эътиборга олсан, ташқи ва ички рельсларга тушадиган босимлар қуйидагича аниқланади:

$$N = \frac{Mg}{2} \pm \frac{\Phi_n a \pm M_C^{gip}}{l} = \frac{1400 \cdot 9,8}{2} \pm \frac{2800 \cdot 0,75 \pm 1155}{1,5} =$$

$$= (6860 \pm 2170) \text{ Н} = (6,86 \pm 2,17) \text{ кН}.$$

Бунда ташқи рельсга тушадиган босимни аниқлашда мусбат ишора, ички рельсдаги босимни аниқлашда манфий ишора олинади.

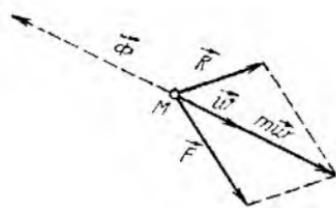
23-БОБ. ДАЛАМБЕР ПРИНЦИПИ. ҚЎЗГАЛМАС УҚ АТРОФИДА АЙЛАНУВЧИ ЖИСМНИНГ АЙЛАНИШ ҲАМ ҚЎРСАТАДИГАН БЎСИМИ

23.1-§. Моддий нуқта учун Даламбер принципи

Ньютон қонунаридан нлк бор эркин моддий нуқта ёки эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракатини ўрганишда фойдаланилган. Боғланишлар аксиомасининг қабул қилиниши натижасида бу қонуналар ихтиёрий механик система учун қўллана бошланди. Боғланишдаги моддий нуқта ёки системаларнинг ҳаракатини ўрганишда Ж. Даламбер томонидан кашф қилинган ва «Даламбер принципи» деб аталадиган махсус принцидан фойдаланилади. Эркин моддий нуқта учун Даламбер принципи динамиканинг асосий қонунига эквивалентдир. Боғланишдаги нуқта учун бу принцип боғланишлар аксиомаси билан биргаликда олинган динамиканинг асосий қонунига эквивалент бўлади.

Массаси m га тенг боғланишдаги M нуқта учун (18.1) га кўра динамиканинг асосий қонунини

$$m\vec{\omega} = \vec{F} + \vec{R} \quad (23.1)$$



23.1- расм.

кўришида ёзиш мумкин. Бунда \vec{w} — M нуқтанинг тезланиши, \vec{F} — мазкур нуқтага таъсир этувчи актив кучларнинг тенг таъсир этувчиси, \vec{R} — боғланиш реакция кучи.

(23.1) ни $\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{w}) = 0$ кўринишида ёзиб,

$$-m\vec{w} = -\vec{\Phi} \quad (23.2)$$

Белгилан киритсак,

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0 \quad (23.3)$$

тенгламани оламиз.

Миқдор жиҳатдан нуқтанинг массаси билан унинг тезланиши кўпайтмасига тенг ва нуқтанинг тезланишига қарима-қарши йўналган куч нуқтанинг инерция кучи дейилади.

(23.3) тенглик боғланишидаги нуқта учун Даламбер принципини ифодалайди: агар моддий нуқтага таъсир этувчи барча актив ва боғланиш реакция кучлари қаторига инерция кучини қўшсак, у ҳолда ҳар онда мувозанатланган кучлар системасини оламиз (23.1- расм).

Хусусан, эркин моддий нуқта учун (23.3) да $\vec{R} = 0$ деб олинади:

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = 0. \quad (23.4)$$

(23.1) тенглик эркин моддий нуқта учун Даламбер принципини ифода қилди: эркин моддий нуқтага таъсир этувчи актив кучлар қаторига ҳар онда инерция кучини қўшсак, бу кучлар ўзаро мувозанатда бўлади.

Аслида инерция кучи моддий нуқтага қўйилган бўлмайди. Шу сабабли Даламбер принципида киритиладиган мувозанат тушунчаси шарfli тушунчадир. Даламбер принципида нуқтага ҳар онда инерция кучи қўйилган деб қарашдан мақсад, динамиканинг асосий қонунини формал равишда статиканинг мувозанат тенгламасига ўхшаш тенгламаларга келтириб, динамика масалаларига статикадаги мувозанат шартларини қўлланшдан иборат. Шу билан бу усулга кинестатика усули дейилади.

Инерция кучининг актив куч ва боғланиш реакция кучларидан принципиал фарқи шундан иборатки, инерция кучлари акс таъсир этувчига эга эмас. Боянча айтганда, инерция кучининг берилган нуқтага таъсирини вужудга келтирадиган жисмин кўрсата олмаймиз. Шунинг учун ҳам баъзида инерция кучини «сохта куч» ҳам дейилади. Масалан, математик тебрангичга таъсир этувчи \vec{P} оғирлик кучи Ернинг тортинчи кучидан, боғланиш реакция кучи \vec{N} эсининг тэранглик кучидан иборат, лекин $-m\vec{w}$ га тенг инерция

кучининг таъсирини вужудга келтирадиган жисмни кўрсата олмай-
 миз.

(23.3) ни Декарт координата ўқларига проекциялаб,

$$\left. \begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0, \\ F_y + R_y + \Phi_y &= 0, \\ F_z + R_z + \Phi_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.5)$$

тенгламаларни оламиз. Бунда $\Phi_x = -m\ddot{x}$, $\Phi_y = -m\ddot{y}$, $\Phi_z = -m\ddot{z}$ инерция кучларининг Декарт координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди.

Агар нуқта тўғри чизиқли ҳаракатда бўлса, $\vec{\omega}$ мазкур чизиқ бўйлаб йўналади. Бу ҳолда инерция кучининг миқдори учун $\Phi = -m\omega$ тенглик ўринли бўлади. Башарти нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракатда иштирок этса, у ҳолда $\omega = 0$ бўлгани учун нуқтанинг инерция кучи ҳам нолга тенг бўлади.

Эгри чизиқли ҳаракатдаги нуқтанинг инерция кучини $\vec{\omega}_\tau$ уринма тезланишга қарама-қарши йўналган $\vec{\Phi}_\tau$ уринма инерция кучи ва $\vec{\omega}_n$ нормал тезланишга қарама-қарши йўналган $\vec{\Phi}_n$ нормал (марказдан қочирма) инерция кучларига ажратилиши мумкин (23.2-расм):

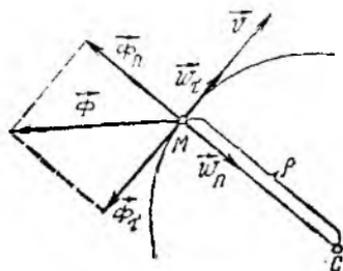
$$\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{\omega}_\tau, \quad \vec{\Phi}_n = -m\vec{\omega}_n. \quad (23.6)$$

Хусусан нуқта r радиусли айлана бўйлаб ω бурчак тезлик ва ε бурчак тезланиши билан ҳаракатланса, инерция кучининг уринма ва нормалдаги проекциялари учун

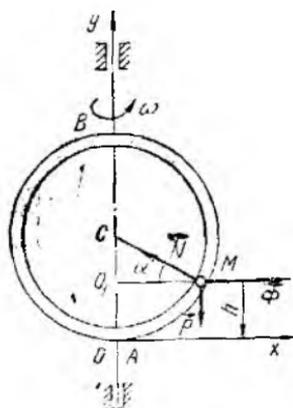
$$|\Phi_\tau| = mr|\varepsilon|, \quad \Phi_n = mr\omega^2 \quad (23.7)$$

формулалар ўринли бўлади. Бу ҳолда нуқтанинг уринма ва нормал инерция кучлари мос равишда айланма ва марказдан қочирма инерция кучлари дейилади.

Қуйидаги жадвалда айрим хусусий ҳолларда инерция кучини ҳисоблаш келтирилган:



23.2- расм.



23.3- расм.

№№	Нуктанинг ҳаракат тури	Уринма ва нормал тезлиги	Уринма ва нормал инерция кучи
1.	Тўғри чизиқли текис ҳаракат	$\omega_\tau = 0, \omega_n = 0$	$\Phi_\tau = 0, \Phi_n = 0$
2.	Тўғри чизиқли нотекис ҳаракат	$\omega_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \omega_n = 0$	$ \Phi_\tau = m \left \frac{dv_\tau}{dt} \right ,$ $\Phi_n = 0$
3.	Эгри чизиқли текис ҳаракат	$\omega_\tau = 0, \omega_n = \frac{v^2}{\rho}$	$\Phi_\tau = 0, \Phi_n =$ $= m \frac{v^2}{\rho}$
4.	Айлана бўйлаб ҳаракат	$\omega_\tau = r \cdot \epsilon$ $\omega_n = r \cdot \omega^2$	$ \Phi_\tau = mr \cdot \epsilon $ $\Phi_n = mr \cdot \omega^2$

Даламбер принципи тенгласини M нуктадан ўтказилган табиий координата ўқларига проекциялаб,

$$F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau = 0, \quad F_n + R_n + \Phi_n = 0, \quad F_b + R_b = 0 \quad (23.8)$$

тенгламаларини оламиз.

Даламбер принциpidан номальум реакция кучларини аниқлашда самарали фойдаланилади.

23.1-масала. Радиуси $r = 2$ м бўлган ва ички сирти силлиқ ковак ҳалқа вертикал AB диаметри atroфida $n = 30$ айлани бурчак тезлик билан айланади (23.3-расм). Ҳалқа ичида оғирлиги $P = 19,86$ Н бўлган M шарча жойлашган. Шарчанинг ҳалқага нисбатан мувозанатда бўладиган h баландлик ва бу ҳолатга мос бўлган ҳалқанинг реакция кучи N аниқлансин.

Ечиш. Ҳаракатдаги координата ўқларини шундай танлаёмизки, Oxy текислиги ҳалқанинг текислигида ёгсин. M шарчга унинг оғирлик кучи \vec{P} ва ҳалқанинг нормал реакция кучи \vec{N} таъсир этади.

Ҳалқа ўзгармас

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 30}{60} = \pi \text{ с}^{-1} \quad (1)$$

бурчак тезлик билан ҳаракатлангани учун шарчанинг инерция кучи

$$\Phi = \Phi_n = m\omega_n = m \cdot O_1M \cdot \omega^2 = mr \cdot \cos \alpha \cdot \omega^2 \quad (2)$$

нормал танкил аъувицидан иборат бўлади. Шу сабабли шарчга $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n$ инерция кучини қўйсак, Даламбер принциpidа яссан шарча мувозанатда бўлади.

Шарча учун (23.5) тенгламаларининг биринчи иккинчисини тузамиз

$$-N \cos \alpha + \Phi = 0, \quad -P + N \sin \alpha = 0. \quad (3)$$

(2) ни назарда тутиб, (3) нинг биринчи тенгласидан $N \cos \alpha = mr \cos \alpha \cdot \omega^2$ муносабатини оламиз. Бундан

$$N = mr \omega^2 = \frac{P}{g} r \omega^2 = \frac{19,86}{9,8} \cdot 2 \cdot 3,14^2 = 40 \text{ Н.}$$

(3) нинг иккинчи тенгласидан $\sin \alpha = \frac{P}{N} = \frac{20}{40} = 0,5$ эканлигини топамиз. Ўшундан, $\alpha = 30^\circ$.

ΔO_1MC дан

$$CO_1 = r \sin \alpha = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м.}$$

Шундай қилиб,

$$h = OC - O_1C = 2 - 1 = 1 \text{ м.}$$

23.2-масала. Вал I вертикал ўқ атрофида ўзгармас ω бурчак тезлик билан айланади. Валага φ бурчак остида стержень 2 пайванданган. Улар орасига радиуси r га тенг бир жинсли диск 3 қўйилган (23.4-расм). ω қандай қийматга эришганда дискнинг валга босими нолга тенг бўлади. Валининг йўналиши ҳисобга олинмасин.

Ечиш. O, y ўқни вал бўйлаб, O_1x ўқни эса дискнинг маркази орқали ўтказамиз. Диска ушнинг оғирлик кучи $m\vec{g}$, вал ва стерженьларнинг нормал реакция кучлари \vec{N}_1 ва \vec{N}_2 таъсир этади. Дискнинг валга босими миқдор жиҳатдан \vec{N}_1 га тенг бўлади.

Вал ўзгармас бурчак тезлик билан айланиши учун дискнинг инерция кучи

$$\Phi = \Phi_n = mr\omega^2 \quad (1)$$

нормал ташкил этувчидан иборат бўлади. Агар дискнинг марказига $\vec{\Phi}$ инерция кучини қўйсак, Даламбер принципинга асосан диск мувозанатда бўлади.

Диск учун (23.5) тенгламаларининг биринчи иккитасини тузимиз:

$$N_1 - N_2 \cos \varphi + \Phi = 0, \quad (2)$$

$$N_2 \sin \varphi - mg = 0. \quad (3)$$

Бу тенгламалардан N_2 ва N_1 ларни аниқлаймиз:

$$N_2 = \frac{mg}{\sin \varphi}, \quad N_1 = N_2 \cos \varphi - \Phi = mg \cdot \text{ctg} \varphi - mr\omega^2.$$

Охириги тенгламадан кўрамизки, $N_1 = 0$ бўлиши учун

$$\omega = \frac{g}{r} \text{ctg} \varphi$$

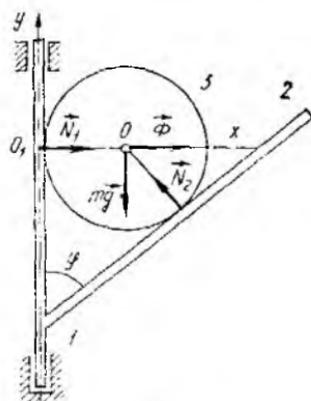
шарт бажарилиши керак.

23.2-§. Механик система учун Даламбер принципи

M_1, M_2, \dots, M_N моддий нуқталардан ташкил топган механик системага геометрик боғланишлар қўйилган бўлсин. Система нуқталарининг массаларини m_1, m_2, \dots, m_N билан белгиләймиз. Системанинг бирор M_v нуқтасига таъсир этувчи актив кучларнинг тенг таъсир этувчисини \vec{F}_v ; боғланиш реакция кучларининг тенг таъсир этувчисини \vec{R}_v ва бу нуқтанинг инерция кучини $\vec{\Phi}_v$ билан белгиләсак, нуқта учун баён этилган Даламбер принципинга кўра \vec{F}_v, \vec{R}_v ва $\vec{\Phi}_v$ кучлар ҳар онда ўзаро мувозанатлашади. Шу сабабли системанинг ҳар бир нуқтаси учун

$$\vec{F}_v + \vec{R}_v + \vec{\Phi}_v = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (23.9)$$

тенглик ўринли бўлади.



23.4-расм.

(23.9) тенгликлар система учун Даламбер принципини ифода-
лайди: агар актив ва боғланши реакция кучлари таъсиридаги
системанинг ҳар бир нуқтасига инерция кучини қўйсак, бу куч-
лар системаси мувозанатланган кучлар системасини ташкил
этади.

Система нуқталарига таъсир этувчи кучларни актив ва реакция
кучларига ажратмай, бaрки ички ва тaшқи кучлардан иборат деб
қарасак,

$$\vec{F}_v + \vec{R}_v = \vec{F}_v^a + \vec{F}_v^r$$

тенглик ўринли бўлади. Бунда $\vec{F}_v^a = M_v$ нуқтадаги тaшқи кучларнинг
тенг таъсир этувчиси, \vec{F}_v^r — ички кучларнинг тенг таъсир этувчиси.

Охириги тенгликни назарда тутиб, система учун Даламбер прин-
ципини

$$\vec{F}_v^a - \vec{F}_v^r + \vec{\Phi}_v = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (23.10)$$

кўринишида ҳам ёзиш мумкин.

Биласарин, *тaшқи ва ички кучлар таъсиридаги системанинг*
ҳар бир нуқтасига ҳар онда инерция кучини қўйсак, бу кучлар
мувозанатланган кучлар системасини ташкил этади.

Система учун Даламбер принципини ифодаловчи (23.9) ва (23.10)
тенгликлардан система нуқталари ҳар онда мувозанатда бўлади де-
ган хулоса келиб чиқмайди, чaнки аслида системанинг ҳар бир нуқ-
тасига инерция кучлари қўйилган бўлмайди.

\vec{F}_v , \vec{R}_v , $\vec{\Phi}_v$ (ёки \vec{F}_v^a , \vec{F}_v^r , $\vec{\Phi}_v$) кучларни ($v = 1, 2, \dots, N$) фа-
зодаги кучлар системаси деб қараб, статика бўлимидагидек, умумий
холда оьнита *кинегостатика тенгламаларини* олиш мумкин.
(23.9) тенгламаларни қўшиб, система учун

$$\sum (\vec{F}_v + \vec{R}_v + \vec{\Phi}_v) = 0 \quad (23.9')$$

ифодани оламиз.

(23.9) тенгламаларининг ҳар бирини M_v ($v = 1, 2, \dots, N$) нуқта-
ларнинг радиус-векторлари \vec{r}_v га векторли кўпайтириб қўшсак,

$$\sum (\vec{r}_v \times \vec{F}_v) + \sum (\vec{r}_v \times \vec{R}_v) + \sum (\vec{r}_v \times \vec{\Phi}_v) = 0$$

ёки

$$\sum [\vec{M}_O(\vec{F}_v) + \vec{M}_O(\vec{R}_v) + \vec{M}_O(\vec{\Phi}_v)] = 0 \quad (23.11)$$

тенглик ўринли бўлади.

(23.9') ва (23.11) тенгламаларни координата ўқларига проекция-
лаб, оьнита кинегостатика тенгламаларини оламиз:

$$\left. \begin{aligned} \sum (X_v + R_{v_x} + \Phi_{v_x}) &= 0, \\ \sum (Y_v + R_{v_y} + \Phi_{v_y}) &= 0, \\ \sum (Z_v + R_{v_z} + \Phi_{v_z}) &= 0, \\ \sum [M_x(\vec{F}_v) + M_x(\vec{R}_v) + M_x(\vec{\Phi}_v)] &= 0, \\ \sum [M_y(\vec{F}_v) + M_y(\vec{R}_v) + M_y(\vec{\Phi}_v)] &= 0, \\ \sum [M_z(\vec{F}_v) + M_z(\vec{R}_v) + M_z(\vec{\Phi}_v)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.12)$$

Агар система нуқталарига қўйилган кучларни ички ва ташқи кучларга ажратсак, ички кучларнинг хоссасига кўра $\sum \vec{F}_v = 0$,

$\sum \vec{M}_O(\vec{F}_v) = 0$ бўлгани учун (23.9') ва (23.11) дан

$$\left. \begin{aligned} \sum (\vec{R}_v + \vec{\Phi}_v) &= 0, \\ \sum [\vec{M}_O(\vec{R}_v) + \vec{M}_O(\vec{\Phi}_v)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.13)$$

тенгламаларни оламиз.

(23.13) ни координата ўқларига проекциялаб, яна олтита мувоzanат тенгламаларини олиш мумкин. Бу тенгламаларда ички кучлар қатнашмагани туфайли улардан система динамикасининг кўпгина масалаларини ечишда самарали фойдаланиш мумкин.

(23.13) да $\sum \vec{R}_v = \vec{R}_v^e$ — ташқи кучларнинг бош вектори; $\sum \vec{\Phi}_v = \vec{\Phi}$ — инерция кучларининг бош вектори; $\sum \vec{M}_O(\vec{R}_v) = \vec{M}_O^e$ — ташқи кучларнинг O марказга nisbatan бош momenti ва $\sum \vec{M}_O(\vec{\Phi}_v) = \vec{M}_O^{\Phi}$ — инерция кучларининг O марказга nisbatan бош momentiни ifodalashini эътиборга олсак,

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_v^e + \vec{\Phi} &= 0, \\ \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^{\Phi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.14)$$

тенгламалар ўринли бўлади.

Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ifodalovchi (21.23) ва система кинетик momentининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ifodalovchi (21.72) тенгламаларини

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_v^e - \frac{d\vec{Q}}{dt} &= 0, \\ \vec{M}_O^e - \frac{d\vec{K}_O}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.15)$$

кўришишда ёзиб, (23.14) ва (23.15) тенгламаларини солиштирсак, система инерция кучларининг бош вектори ва бош momenti учун

$$\left. \begin{aligned} \vec{\Phi} &= -\frac{d\vec{Q}}{dt}, \\ \vec{M}_O^{\Phi} &= -\frac{d\vec{K}_O}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (23.16)$$

$$(23.17)$$

ифодаларни оламиз.

Демак, система инерция кучларининг бош вектори системанинг ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосиланинг -1 га қўпайтмасига тенг; система инерция кучларининг бирор O марказга нисбатан бош моменти эса мазкур марказга нисбатан системанинг кинетик моментидан вақт бўйича олинган ҳосиланинг -1 га қўпайтмасига тенг.

Ҳаракатдаги система нуқталарига қўйилган боғланиш реакция кучларини аниқлашда, яъни динамик реакция кучларини аниқлашда Даламбер принципини қўлланш, айниқса, қўл келади.

23.3-§. Қаттиқ жисм инерция кучларининг бош вектори ва бош моменти

(21.6) га кўра ихтиёрий ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳаракат миқдори $\vec{Q} = M\vec{v}_C$ формула ёрдамида аниқланади. Шу сабабли бундай система инерция кучларининг бош вектори учун қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$\vec{\Phi} = -\frac{dQ}{dt} = -M\vec{\omega}_C, \quad (23.18)$$

бунда M — жисмнинг массаси; $\vec{\omega}_C$ — жисм массалар марказининг тезланиши.

Шундай қилиб, ихтиёрий ҳаракатдаги қаттиқ жисм инерция кучлари бош векторининг модули $\Phi = M\omega_C$ бўлиб, массалар марказининг тезланиши ω_C га қарама-қарши йўналади.

Ихтиёрий ҳаракатдаги қаттиқ жисм инерция кучларининг бош моментини ҳисоблашда қутб учун одатда жисм массалар марказидан C нуқта олинади. У ҳолда (23.17) ни

$$\vec{M}_C^{\Phi} = -\frac{d\vec{K}_C}{dt} \quad (23.19)$$

кўринишда ёзилади.

Агар $Sxyz$ координаталар системаси жисмга маҳкам бириктирилган бўлса, (22.49) га кўра

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_C}{dt} &= \vec{i} \left(\frac{dK_{Cx}}{dt} + \omega_y K_{Cz} - \omega_z K_{Cy} \right) + \\ &+ \vec{j} \left(\frac{dK_{Cy}}{dt} + \omega_z K_{Cx} - \omega_x K_{Cz} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \vec{k} \left(\frac{dK_{Cz}}{dt} + \omega_x K_{Cy} - \omega_y K_{Cx} \right) \quad (23.20)$$

муносабат ўринли бўлади.

(23.20) да

$$\begin{aligned} K_{Cx} &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z, \\ K_{Cy} &= -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z, \\ K_{Cz} &= -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_z \omega_z \end{aligned}$$

ҳамда

$$\vec{M}_C^\Phi = M_{Cx}^\Phi \vec{i} + M_{Cy}^\Phi \vec{j} + M_{Cz}^\Phi \vec{k}$$

бўлишини эътиборга олсак, (23.19) га биноан ихтиёрий ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг инерция кучлари бош моментининг координата ўқларидаги проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$\left. \begin{aligned} M_{Cx}^\Phi &= -I_x \varepsilon_x + I_{xy} (\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + I_{xz} (\varepsilon_z + \omega_x \omega_y) - \\ &\quad - I_{yz} (\omega_x^2 - \omega_y^2) - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z, \\ M_{Cy}^\Phi &= -I_y \varepsilon_y + I_{yz} (\varepsilon_z - \omega_y \omega_x) + I_{xy} (\varepsilon_x + \omega_y \omega_z) - \\ &\quad - I_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) - (I_x - I_z) \omega_z \omega_x, \\ M_{Cz}^\Phi &= -I_z \varepsilon_z + I_{xz} (\varepsilon_x - \omega_y \omega_z) + I_{yz} (\varepsilon_y + \omega_x \omega_z) - \\ &\quad - I_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (23.21)$$

Хусусий ҳолларда қаттиқ жисм инерция кучларининг бош моменти қандай ҳисобланишини кўриб чиқамиз.

1. Моддий симметрия текислигига эга бўлган қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати. Агар Cz ўқ ҳаракат текислиги билан устма-уст тушувчи моддий симметрия текислигига перпендикуляр бўлса, у ҳолда бу ўқ инерция бош ўқидан иборат бўлади ҳамда

$$I_{xz} = I_{yz} = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_x = \omega_y = 0.$$

Натижада (23.21) га асосан кўриладики текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг инерция кучлари бош моменти учун

$$M_{Cx}^\Phi = 0, \quad M_{Cy}^\Phi = 0, \quad M_{Cz}^\Phi = -I_z \varepsilon_z \quad (23.22)$$

формулалар ўринли бўлади.

2. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати. Бу ҳолда қутб учун айланиш ўқида ётувчи ихтиёрий нуқтани олиб, z ўқни айланиш ўқи бўйлаб йўналтирамиз; x, y ўқларни эса жисмга бириктирилган деб қараймиз. ω ва ε векторлари айланиш ўқи бўйлаб йўналгани туфайли $\omega_x = \omega_y = 0, \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ бўлади.

Бундан ташқари $\omega_z^2 = \omega^2$ бўлишини эътиборга олиб, (23.21) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} M_x^\Phi &= I_{xz} \varepsilon_z - I_{yz} \omega^2, \\ M_y^\Phi &= I_{yz} \varepsilon_z + I_{xz} \omega^2, \\ M_z^\Phi &= -I_z \varepsilon_z. \end{aligned} \right\} (23.23)$$

3. Илгарилама ҳаракат. Илгарилама ҳаракатдаги қаттиқ жисм учун $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ бўлгани туфайли $M_{C_x}^\Phi = M_{C_y}^\Phi = M_{C_z}^\Phi = 0$ бўлади.

Бинобарин, илгарилама ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг инерция кучлари унинг массалар марказидан ўтувчи $\vec{\Phi} = -m\vec{\omega}_C$ тенг таъсир этувчига келтирилади.

23.4-§. Жисм қўзғалмас ўқ атрафида айланганда подшипникларнинг динамика реакция кучларини аниқлаш

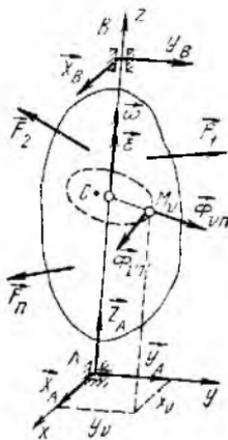
Айтайлик $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$ кучлар таъсиридаги қаттиқ жисм B нуқтада цилиндрик подшипник ва A нуқтада подпятник (таянч подшипник) қа ўрнатилган z ўқ атрафида ω бурчак тезлик ва ε бурчак тезланиш билан айланма ҳаракатда бўлсин (23.5-расм). Агар таянч нуқталарида ҳосил бўладиган ишқаланишни ҳисобга олмасак, боғланишдан бўшатиш ҳақидаги аксиомага кўра A подпятник ва B подшипникни \vec{R}_A ва \vec{R}_B реакция кучлари билан алмаштириш мумкин.

A ва B таянч нуқталари орасидаги масофани h билан белгилаймиз. Бундай жисмга Даламбер принципини қўллаш учун келтириш марказини A нуқтада олиб, жисмнинг ҳар бир нуқтасига $\vec{\Phi}_v$ инерция кучини қўямиз ҳамда (23.10) ва (23.11) тенгламаларни тузамиз:

$$\left. \begin{aligned} \sum \vec{F}_v + \vec{R}_A + \vec{R}_B + \sum \vec{\Phi}_v &= 0, \\ \sum \vec{M}_A(\vec{F}_v) + \vec{M}_A(\vec{R}_A) + \vec{M}_A(\vec{R}_B) + \sum M_A(\vec{\Phi}_v) &= 0, \end{aligned} \right\} (23.24)$$

бунда $\vec{M}_A(\vec{R}_A) = 0$.

(23.24) дан \vec{R}_A ва \vec{R}_B ни аниқлаш учун инерция кучларининг бош вектори $\vec{\Phi} = \sum \vec{\Phi}_v$ ва бош моменти $\vec{M}_A^\Phi = \sum \vec{M}_A(\vec{\Phi}_v)$ ни ҳисоблаш керак. Шу мақсадда $\vec{\Phi}_v$ инерция кучларини $\vec{\omega}_{vt}$ айланма ва $\vec{\omega}_{vn}$ марказга интилма тезланишларга қарама-қарши йўналган $\vec{\Phi}_{vt}$ ва $\vec{\Phi}_{vn}$ ташкил этувчиларга, \vec{R}_A ва \vec{R}_B ларни эса $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ ташкил этувчиларга ажратиб, (23.24) ни жисмга бириктирилган қўзғалувчи координата ўқларига проекциялаймиз:



23.5- расм.

$$\left. \begin{aligned}
 \sum X_v + X_A + X_B + \sum \Phi_{vx} &= 0, \\
 \sum Y_v + Y_A + Y_B + \sum \Phi_{vy} &= 0, \\
 \sum Z_v + Z_A &= 0, \\
 \sum M_x(\vec{F}_v) - Y_B \cdot h + \sum M_x(\vec{\Phi}_v) &= 0, \\
 \sum M_y(\vec{F}_v) + X_B \cdot h + \sum M_y(\vec{\Phi}_v) &= 0, \\
 \sum M_z(\vec{F}_v) + \sum M_z(\vec{\Phi}_v) &= 0.
 \end{aligned} \right\} (23.25)$$

(23.7) ни назарда тутиб, инерция кучларининг координата ўқ-ларидagi проекциялари учун қуйидаги муносабатларни оламиз:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{vx} &= |\Phi_{vt}| \cos(\widehat{\Phi_{vt}, x}) + |\Phi_{vn}| \cos(\widehat{\Phi_{vn}, x}) = \\
 &= m_v r_v \varepsilon \frac{y_v}{r_v} + m_v r_v \omega^2 \frac{x_v}{r_v} = m_v y_v \varepsilon + m_v x_v \omega^2, \\
 \Phi_{vy} &= |\Phi_{vt}| \cos(\widehat{\Phi_{vt}, y}) + |\Phi_{vn}| \cos(\widehat{\Phi_{vn}, y}) = \\
 &= -m_v r_v \varepsilon \frac{x_v}{r_v} + m_v r_v \omega^2 \frac{y_v}{r_v} = -m_v x_v \varepsilon + m_v y_v \omega^2.
 \end{aligned}$$

Бинобарин,

$$\left. \begin{aligned}
 \sum \Phi_{vx} &= \varepsilon \sum m_v y_v + \omega^2 \sum m_v x_v = My_C \varepsilon + Mx_C \omega^2, \\
 \sum \Phi_{vy} &= -\varepsilon \sum m_v x_v + \omega^2 \sum m_v y_v = -Mx_C \varepsilon + My_C \omega^2.
 \end{aligned} \right\} (23.26)$$

Кўриладики ҳолда ε_z — ε бўлгани туфайли, (23.23) га кўра инерция кучлари бoл моментининг координата ўқларидagi проекциялари қуйидагича аниқланади:

$$\left. \begin{aligned}
 M_x^\Phi &= \sum M_x(\vec{\Phi}_v) = I_{xz} \varepsilon - I_{yz} \omega^2, \\
 M_y^\Phi &= \sum M_y(\vec{\Phi}_v) = I_{yz} \varepsilon + I_{xz} \omega^2.
 \end{aligned} \right\} (23.27)$$

(23.26) ва (23.27) ни (23.25) га қўйсан,

$$\left. \begin{aligned}
 \sum X_v + X_A + X_B + My_C \varepsilon + Mx_C \omega^2 &= 0, \\
 \sum Y_v + Y_A + Y_B - Mx_C \varepsilon + My_C \omega^2 &= 0, \\
 \sum Z_v + Z_A &= 0, \\
 \sum M_x(\vec{F}_v) - Y_B \cdot h + I_{xz} \varepsilon - I_{yz} \omega^2 &= 0, \\
 \sum M_y(\vec{F}_v) + X_B \cdot h + I_{yz} \varepsilon + I_{xz} \omega^2 &= 0, \\
 \sum M_z(\vec{F}_v) - I_z \varepsilon &= 0.
 \end{aligned} \right\} (23.28)$$

(23.28) тенгламаларнинг биринчи бештаси воситасида A ва B нуқталардаги таянч реакцияларининг ташкил этувчилари X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B ларни аниқлаймиз.

(23.28) нинг олтинчи тенгламасида таянч реакциялари қатнашмайди ва бу тенглама қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат дифференциал тенгламаси (22.8) га эквивалентдир.

Агар жисм нуқталарининг массалари қандай тақсимлангани ва ташқи кучлар маълум бўлса, реакция кучларини қуйидаги тартибда аниқлаш мумкин. Дастлаб $x_C, y_C, M, I_{xz}, I_{yz}, \sum X_v, \sum Y_v, \sum Z_v, \sum M_x(\vec{F}_v), \sum M_y(\vec{F}_v), \sum M_z(\vec{F}_v)$ ларни аниқлаймиз; (23.28) нинг олтинчи тенгламаси ёрдамида ϵ бурчак тезлигини, сўнгра интеграллаш йўли билан ω бурчак тезлигини ҳисоблаймиз. ω ва ϵ ларнинг тошлаган қийматларини (23.28) га қўйиб, A подъятик ва B подъятигининг реакция кучларини топамиз.

23.5-§. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмни статик ва динамик мувозанатлаш

A ва B таянч нуқталарининг реакция кучларини статик ва динамик ташкил этувчиларга ажратамиз.

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A^{cm} + \vec{R}_A^0, \quad \vec{R}_B = \vec{R}_B^{cm} + \vec{R}_B^0.$$

Жисмга таъсир этувчи берилган $\vec{F}_v (v = 1, N)$ кучларни мувозанатловчи реакция кучларининг \vec{R}_A^{cm} ва \vec{R}_B^{cm} ташкил этувчилари *статик реакция кучлари* дейлади. Статик реакция кучларини аниқлаш учун (23.28) нинг биринчи бештасида $\epsilon = 0, \omega = 0$ деб оламиз. U ҳолда қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_v + X_A^{cm} + X_B^{cm} &= 0, \\ \sum Y_v + Y_A^{cm} + Y_B^{cm} &= 0, \\ \sum Z_v + Z_A^{cm} &= 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_v) - Y_B^{cm} \cdot h &= 0, \\ \sum M_y(\vec{F}_v) + X_B^{cm} \cdot h &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.29)$$

Бу тенгламалар статика бўлимида чиқарилган қўзғалмас ўққа эга бўлган жисмнинг мувозанат тенгламаларини ифодалайди.

Берилган кучлар таъсирида жисм z ўқ атрофида айланиши мумкин. Бундай айланма ҳаракат натижасида жисм нуқталарининг инерция кучлари ҳосил бўлади. Бу инерция кучларини мувозанатловчи реакция кучларининг \vec{R}_A^0 ва \vec{R}_B^0 ташкил этувчилари *динамик реакция кучлари* дейлади.

Жисмга таъсир этувчи берилган кучлар статик реакция кучлари билан мувозанатлашгани туфайли, (23.28) даи динамик реакция кучлари аниқланадиган қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} X_A^{\partial} + X_B^{\partial} + M y_C \cdot \varepsilon + M x_C \cdot \omega^2 &= 0, \\ Y_A^{\partial} + Y_B^{\partial} - M x_C \cdot \varepsilon + M y_C \cdot \omega^2 &= 0, \\ -Y_B^{\partial} \cdot h + I_{xz} \cdot \varepsilon - I_{yz} \cdot \omega^2 &= 0, \\ X_B^{\partial} \cdot h + I_{yz} \cdot \varepsilon + I_{xz} \cdot \omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.30)$$

Айланиш ўқи z бўйлаб йўналган инерция кучлари мавжуд бўлмагани туфайли, бу ўқ бўйича йўналган динамик реакция кучлари ҳам бўлмайди.

Ўзгармас айланиш ўқига эга бўлган ва овирлик маркази айланиш ўқида ётувчи жисм *статик мувозанатлашган жисм* дейилади. Өз айланиш ўқига эга бўлган статик мувозанатлашган жисмнинг массалар маркази учун $x_C = y_C = 0$ бўлади. Бу ҳолда (23.30) нинг биричи иккита тенгладасидан

$$X_A^{\partial} + X_H^{\partial} = 0, \quad Y_A^{\partial} + Y_H^{\partial} = 0, \quad (23.31)$$

яъни

$$\vec{R}_A^{\partial} = -\vec{R}_H^{\partial}$$

муносабатни оламиз. Бинобарин, статик мувозанатлашган жисмнинг динамик реакция кучлари жуфт кучни ташкил этади. Бундай жуфтни фақат жуфт куч билан мувозанатлаш мумкин бўлгани туфайли динамик реакция кучларини мувозанатловчи жисм нуқталарининг инерция кучлари ҳам жуфт кучга келтирилади.

(23.31) ни назарда тутиб, (23.30) нинг охириги иккита тенгладасидан динамик реакция кучларининг ташкил ётувчиларини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} X_A^{\partial} = -X_B^{\partial} &= \frac{I_{yz} \varepsilon + I_{xz} \omega^2}{h}, \\ -Y_A^{\partial} = Y_B^{\partial} &= \frac{I_{xz} \varepsilon - I_{yz} \omega^2}{h}. \end{aligned}$$

Динамик реакция кучларининг миқдори

$$R_A^{\partial} = R_H^{\partial} = \frac{\sqrt{(I_{xz}^2 + I_{yz}^2) (\varepsilon^2 + \omega^4)}}{h} \quad (23.32)$$

формула ёрдамида аниқлашади.

(23.32) дан кўрамизки, динамик реакция кучлари фақатгина бурчак тезланишига боғлиқ бўлмай, бурчак тезликка ҳам боғлиқ бўлади. Демак, жисм фақат инерцияси бўйича ўзгармас бурчак тезлик билан айланганда ҳам динамик реакция кучлари ҳосил бўлади.

Динамик реакция кучлари нолга тенг бўлган жисм *динамик мувозанатлашган жисм* дейилади.

(23.32) дан кўрамизки, марказдан қочирма инерция моментлари I_{xz} ва I_{yz} нолга тенг бўлгандагина динамик реакция кучлари нолга тенг бўлади. Бунинг учун динамик мувозанатлашган жисмнинг ай

лаиш ўқи инерция бош ўқидан иборат бўлиши керак. Қўрилайтган ҳолда жисмнинг оғирлик маркази айланиш ўқида ётгани туфайли *динамиқ мувозанатланган жисмнинг айланиш ўқи марказий инерция бош ўқидан иборат бўлади.*

Динамик реакция кучи таъсир этмайдиган марказий инерция бош ўқи эркин айланиш ўқи дейилади.

Айланиш ўқи эркин бўлиши учун техникада махсус баланслаш қўрилмасидан фойдаланилади. Бунинг учун жисмларни пармалаб ўйиш ёки маълум қисмига қўшимча юк бириктириши усулидан фойдаланилади.

Жисмда ўтказилган ихтиёрий ўқни иккита нуқтавий масса қўлиши йўли билан эркин айланиш ўқида айлантириш мумкинлигини исботлаймиз.

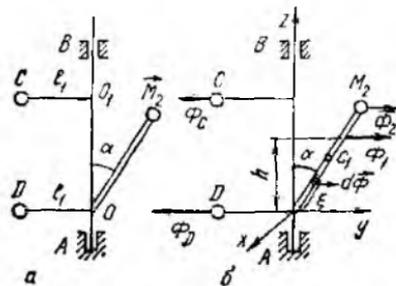
Массаси M га тенг бўлган жисм учун x_C, y_C, I_{xz}, I_{yz} лар маълум ва нолдан фарқли бўлсин. Бундай жисмга координаталари (x_1, y_1, z_1) ва (x_2, y_2, z_2) га тенг m_1 ва m_2 массали нуқталарни бириктираемиз. У ҳолда (20.5) ва (20.36) тенгликларга кўра

$$\left. \begin{aligned} Mx_C + m_1x_1 + m_2x_2 &= 0, \\ My_C + m_1y_1 + m_2y_2 &= 0, \\ I_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 &= 0, \\ I_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23.33)$$

шартлар бажарилса, $x'_C = y'_C = I'_{xz} = I'_{yz} = 0$ бўлишига ишонч ҳосил қилаемиз. (23.33) шартларни қапоатлантирувчи m_1 ва m_2 массаларни ва улар қўйилган нуқталарнинг координаталарини ташлаш усули билан қўйилган масалани ечиш мумкин. Бунинг учун айрим катталикларни олдиндан берилган деб қараш мумкин. Масалан, m_1, m_2 ва z_1, z_2 ($z_1 \neq z_2$) лар берилган деб қараб, x_1, y_1, x_2, y_2 ларни (23.33) дан аниқлаш мумкин.

Техникада бу усулдан тирсакли вал, кривошин ҳамда ўзаро бириктирилган қўшалок цилиндрларни динамик мувозанатлашда кенг фойдаланилади.

Одатда айланиш ўқида тушадиган босимни аниқлашда тайёр (23.30) формулалардан фойдаланмай, балки ҳар бир масала учун бевосита Даламбер принципи қўлланилади.



23.6- расм.

23.3- масала. Вертикал ўқ атрофида ўзгармас бурчак тезлик билан айланувчи валга $\alpha = 30^\circ$ бурчак остида массаси m_1 , узунлиги l га тенг стержень бириктирилган. Стержень учига массаси m_2 га тенг M_2 нуқта бириктирилган. Агар $CO_1 = DO = l_1 = 2l/3$ ва $OO_1 = l$ бўлса, C ва D нуқтавий массалар қандай қийматни қабул қилганда A ва B таянч нуқталарда динамик реакция кучлари ҳосил бўлмайди (26.3- расм, а).

Ечиш. OM_2 стержень ҳамда M_2, C ва D нуқталардан ташкил топган система $\omega = \text{const}$ бурчак тезлик билан вертикал ўқ атрофида айланганда A ва B таянч

нуқталарида ҳосил бўладиган динамик реакция кучларини аниқлаш учун Даламбер принциpidан фойдаланамиз. $\omega = \cos\alpha$ бўлгани учун система нуқталарининг инерция кучлари $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \vec{\Phi}_C, \vec{\Phi}_D$ нормал танкига эътибордан иборат бўлади (25.6-расм, б) ва уларнинг миқдори қуйидагича аниқланади:

$$\Phi_1 = m_1 \omega_C = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 l \sin \alpha, \quad (1)$$

$$\Phi_2 = m_2 \omega_2 = m_2 \omega^2 l \sin \alpha, \quad (2)$$

$$\Phi_C = m_C \omega_C = m_C \omega^2 l_1 = \frac{2}{3} m_C \omega^2 l, \quad (3)$$

$$\Phi_D = m_D \omega_D = m_D \omega^2 l_1 = \frac{2}{3} m_D \omega^2 l. \quad (4)$$

$\vec{\Phi}_2, \vec{\Phi}_C, \vec{\Phi}_D$ инерция кучлари мос равишда M_2, C, D нуқталарга қўйилган.

Агар узунлиги $d\xi$ га тенг стержень бўлакчасининг инерция кучини $d\Phi$ билан белгиласак, $d\Phi$ учун қуйидаги формула ўришди бўлади:

$$d\Phi = \xi \sin \alpha \cdot \omega^2 \cdot \gamma \cdot d\xi, \quad (5)$$

бунда γ — стерженнинг узунлик бирлигига мос бўлган масса. $\vec{\Phi}_1$ кучнинг қўйилган нуқтасини аниқлаш учун Ox_2z координаталар системасини шундай танлаймизки, стержень Oy_2z текислигида ётсин. У ҳолда стержень бўлакчаларининг инерция кучлари Oy ўққа параллел кучлар системасидан иборат бўлади ва бу кучларнинг O нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндиси мазкур кучлар тенг таъсир эътиборининг моментига тенг бўлади:

$$-\Phi_1 \cdot h = -\int_0^l \xi \cdot \cos \alpha \cdot d\Phi, \quad (6)$$

бунда h — $\vec{\Phi}_1$ кучнинг O нуқтага нисбатан елкаси; ξ — стержень бўлакчасининг координатаси.

(1) ва (5) ни эътиборга олиб, (6) ни

$$\frac{1}{2} m_1 \omega^2 l \sin \alpha \cdot h = \int_0^l \xi \sin \alpha \omega^2 \gamma \cdot \xi \cdot \cos \alpha \cdot d\xi \quad (7)$$

кўришида ёзиш мумкин.

(7) ни интеграллаб, h ни аниқлаймиз:

$$h = \frac{2}{3} l \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} l. \quad (8)$$

A ва B нуқталарда динамик реакция кучлари ҳосил бўлмаслиги учун $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \vec{\Phi}_C, \vec{\Phi}_D$ параллел кучлар системаси мувозанатланган бўлиши керак, яъни бу кучлар системаси қуйидаги тенгламаларни қаноатлантириши керак:

$$\sum \Phi_{xy} = 0; \quad \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_C - \Phi_D = 0;$$

$$\sum M_O(\vec{\Phi}_v) = 0; \quad -\Phi_1 \cdot h - \Phi_2 \cdot l \cos \alpha + \Phi_C \cdot l = 0$$

ёки (1) — (4) ҳамда (8) ни эътиборга олсак,

$$\frac{1}{2} m_1 \omega^2 l \sin \alpha + m_2 \omega^2 l \sin \alpha - \frac{2}{3} m_C \omega^2 l - \frac{2}{3} m_D \omega^2 l = 0, \quad (9)$$

$$-\frac{1}{2} m_1 \omega^2 l \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} l - m_2 \omega^2 l \sin \alpha \cdot l \cdot \cos \alpha + \frac{2}{3} m_C \omega^2 l = 0 \quad (10)$$

(10) дан

$$m_C = \frac{\sqrt{3}}{8} (m_1 + 3 m_2) = 0,216 (m_1 + 3 m_2). \quad (11)$$

(11) ни (9) га қўйиб, m_D ни аниқлаймиз:

$$m_D = 0,159 m_1 + 0,102 m_2.$$

Шундай қилиб, A ва B нуқталарда динамик реакция кучлари ҳосил бўлма-слиги учун C ва D нуқталарининг массалари

$$m_C = 0,216 (m_1 + 3 m_2), \quad m_D = 0,159 m_1 + 0,102 m_2$$

қийматларга эга бўлиши керак.

23.4-масала. Оғирлиги P бўлган бир жинсли тўғри бурчакли пластинка ўзининг AB диагонали атропоида ω бурчак тезлик билан айланади. Агар томонларининг узунлиги a ва b бўлса, пластинкадан A ва B таянчларга тушадиган динамик босим аниқлансин (23.7-расм).

Ечили. Жисм билан биргаликда ҳаракатланувчи $Sxyz$ координаталар системасини расмдаги тек йўналтирамиз.

Айлашни ўқиға қўйилган беллавишларни $\vec{X}_A^{\partial}, \vec{Y}_A^{\partial}, \vec{X}_B^{\partial}$ ва \vec{Y}_B^{∂} динамик реакция кучлари билан азмаштирамиз. У ҳолда $Sxyz$ координаталар системасининг ўқлари марказий ўқлардан иборат эканлигини ва пластинканиннг z ўқ атропоида ўзгармас бурчак тезлик билан айлашшини эътиборға олиб, (23.30) га ўхшаш тенгламаларни тузамиз*).

$$X_A^{\partial} + X_B^{\partial} = 0,$$

$$Y_A^{\partial} + Y_B^{\partial} = 0,$$

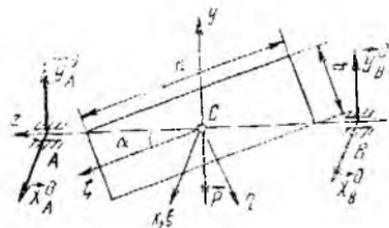
$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} (Y_A^{\partial} - Y_B^{\partial}) - I_{yz} \omega^2 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} (X_A^{\partial} - X_B^{\partial}) - I_{xz} \omega^2 = 0.$$

Sx ўқ пластинка текислигига перпендикуляр йўналган ҳолни, яъни бу ўқ марказий инерция бош ўқидан иборат бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда

$$I_{xz} = 0. \quad (2)$$

Марказдан қочирма инерция моментини ҳисоблаш учун $S\xi\eta$ марказий ва бош координаталар системасини шундай тиллаймизки, Sx ўқ $S\xi$ билан устма-уст тушсин; $S\xi$ ўқ пластинканиннг a томонига параллел, $S\eta$ эса унга перпендикуляр йўналсин.



23.7-расм.

* Координаталар боши C нуқтада олингани учун (1) тенгламаларининг учинчи ва тўртинчисида X_A^{∂} ва Y_A^{∂} лар ҳам қатнашади. Бинобарин, (23.30) ни тузишда координата ўқларини қандай танлаб олингани алоҳида аҳамиятга эга.

Cz ва $C\xi$ ўқлари орасидаги α бурчак

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

тегламадан аниқланади.

Координата ўқларини буриш формулалари воситасида марказдан қочирма инерция моменти аниқланадиган

$$I_{yz} = \int_{(M)} yz \, dm$$

интеграл остидаги z , y катталиклардан ξ , η катталикларга ўтамиз:

$$z = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha,$$

$$y = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha.$$

z ва y ларнинг бу қийматларини I_{yz} га қўйсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$I_{yz} = \frac{\sin 2\alpha}{2} \left[\int_{(M)} \xi^2 \, dm - \int_{(M)} \eta^2 \, dm \right] + \cos 2\alpha \int_{(M)} \eta \xi \, dm.$$

$C\xi\eta\xi$ бош координаталар системасидан иборат бўлгани учун марказдан қочирма инерция моменти $\int_{(M)} \eta \xi \, dm = 0$ бўлади.

$C\xi\eta$ ва $C\xi\xi$ текисликларга нисбатан инерция моментларини ҳисоблаймиз:

$$\int_{(M)} \xi^2 \, dm = \frac{P}{abg} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi^2 \, d\xi \, d\eta = \frac{Pa^3}{12g},$$

$$\int_{(M)} \eta^2 \, dm = \frac{P}{abg} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \eta^2 \, d\xi \, d\eta = \frac{Pb^3}{12g}.$$

Шундай қилиб,

$$I_{yz} = \frac{P}{12g} \cdot (a^3 - b^3) \cdot \frac{\frac{b}{a}}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{Pab}{12g} \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2}. \quad (3)$$

(2) ва (3) га асосан (1) ни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left. \begin{aligned} X_A^0 + X_B^0 &= 0, \\ Y_A^0 + Y_B^0 &= 0, \\ \frac{Pab\omega^2}{6g} \cdot \frac{a^3 - b^3}{(a^2 + b^2)^{3/2}} &= Y_A^0 - Y_B^0, \\ X_A^0 - X_B^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

44) тенгламалар системасидан изланаётган номаълумларни аниқлаймиз:

$$X_A^{\partial} = 0, \quad Y_A^{\partial} = \frac{-Pab\omega^2(a^2 - b^2)}{12g(a^2 + b^2)^{3/2}}, \quad X_B^{\partial} = 0$$

$$Y_B^{\partial} = \frac{Pab\omega^2(a^2 - b^2)}{12g(a^2 + b^2)^{3/2}}.$$

24-БОБ. АНАЛИТИК МЕХАНИКА

Аналитик механикада механик системаларнинг мувозанати ва ҳаракати ўрганилади. Механиканинг асосий принципларини баён этиш, улардан ҳаракат дифференциал тенгламаларини чиқариш, мазкур тенгламаларни изоҳлаш ва интеграллаш усуллари аналитик механиканинг асосий мавзусини ташкил этади. Аналитик механикада қўлланиладиган умумий усулларни механик системаларга табиқ этиш билан бирга бу усуллардан электр ва электромеханик ҳодисаларни тадқиқ қилишда ҳам самарали фойдаланиш мумкин.

24.1-§. Боғланишлар ва унинг классификацияси

18-бобда битта моддий нуқтага қўйилган боғланишлар устида тўхтаган эдик. Бу тушунчаларни механик система учун умумлаштираемиз.

Система нуқталарининг ҳаракатини уларнинг ҳаракат қонунига боғлиқ бўлмаган ва олдиндан берилган геометрик ёки кинематик шарҳлар билан чекловчи жиесларга боғланишлар ёки аналитик боғланишлар дейилади.

Бу таърифга кўра система нуқталарининг ҳаракатини чекловчи ҳар қандай жиес аналитик боғланишдан иборат бўла олмаслигини алоҳида таъкидлаб ўтамиз. Масалан, юк осилган пружина аналитик боғланишдан иборат бўлмайди, чунки юкнинг ҳаракатига пружина томонидан қўйиладиган чек юкнинг ҳаракат қонунига боғлиқ бўлади.

Агар система нуқталарига боғланишлар қўйилмаган бўлса, бундай система *эркин система* дейилади. Акс ҳолда система *боғланишдаги система* дейилади.

Қуёш системасига кирувчи планеталар эркин системани ташкил этади. Бу планеталар бир-бирига бутун олам тортишвин қонуни асосида таъсир этади. Планеталарнинг ҳаракати олдиндан берилган бирор шартлар билан кинематик чекланмайди.

Исталган машина ёки механизм боғланишдаги системага мисол бўла олади. Масалан, тепловозни боғланишдаги механик система деб қарасак, у ҳолда темир йўл боғланиш вази фасини ўтайди.

N та моддий нуқталардан ташкил топган механик система нуқталарига қўйилган боғланишларнинг математик ифодаси вақт, система нуқталарининг координаталари ва уларнинг ҳосилаларига боғлиқ тенгламалар ёки тенгсизликлар билан аниқланади:

$$f_{\mu}(x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}, \dot{x}_{\nu}, \dot{y}_{\nu}, \dot{z}_{\nu}, t) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l) \quad (24.1)$$

ёки

$$f_{\mu}(x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}, \dot{x}_{\nu}, \dot{y}_{\nu}, \dot{z}_{\nu}, t) \geq 0, (\mu = 1, 2, \dots, l). \quad (24.2)$$

Бу ерда ва келгусида $f_{\mu}(x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}, \dot{x}_{\nu}, \dot{y}_{\nu}, \dot{z}_{\nu}, t)$ ифодада $x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}, \dot{x}_{\nu}, \dot{y}_{\nu}, \dot{z}_{\nu}$ лар ўрнида барча $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N$ лар қатнашади ҳамда f_{μ} функция ва унинг ҳосилалари узлуксиз функциялардан иборат деб қаралади.

Тенгламалар билан ифодаланадиган боғланишлар *бўшатиладиган боғланишлар*, тенгсизликлар билан ифодаланадиган боғланишлар эса *бўшатиладиган боғланишлар* дейилади.

Масалан, иккита моддий нуқта ўзгармас l узунликка эга бўлган стержень билан туташтирилган бўлса, бундай боғланиш

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0 \quad (1)$$

тенглама билан ифодаланadi. Агар иккита моддий нуқта эгилиувчан, қўзилмайдиган ва узунлиги l га тенг ип билан туташтирилган бўлса, боғланиш

$$l^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \geq 0 \quad (2)$$

тенгсизлик билан ифодаланadi. Ип таранг ҳолатда бўлганда, тенглик ишораси, акс ҳолда тенгсизлик ишораси олинади.

Агар боғланишлар фақат система нуқталарининг координаталарига чек қўйса, бундай боғланишлар *геометрик боғланишлар* дейилади. Геометрик боғланишларнинг тенгламаси

$$f(x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}, t) = 0 \quad (24.3)$$

кўринишда ёзилади.

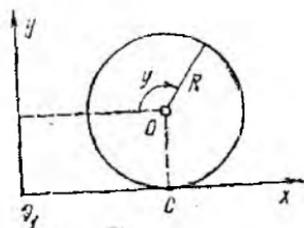
(1) ёки (2) муносабатлар билан ифодаланган боғланишлар геометрик боғланишларга мисол бўла олади.

Агар боғланишлар система нуқталарининг координаталаридан ташқари тезлигига ҳам чек қўйса, уларга *кинематик ёки дифференциалли боғланишлар* дейилади. Кинематик боғланишларнинг аналитик ифодаси (24.1) ёки (24.2) кўринишда ёзилади.

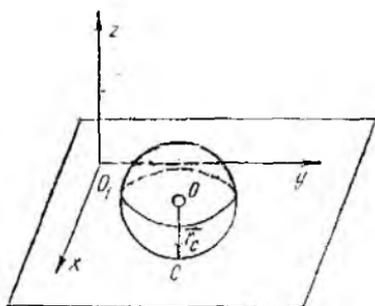
Агар боғланиш тенгламалари (24.1) интегралланадиган бўлса, боғланиш *голономли боғланиш*; интегралланмайдиган бўлса, *беголоном боғланиш* дейилади.

Масалан, радиуси R га тенг гилдирак тўғри чизиқли рельс бўйлаб сирпамай ҳаракатлансин (24.1-расм). Бундай гилдиракнинг O_1 ҳу ҳаракат текислигидаги ҳолати гилдирак O марказининг координаталари x_0, y_0 ва бу марказ атрофидаги айланш бурчаги φ билан аниқланади. Агар x ўқини рельс бўйлаб йўналтирсак, у ҳолда

$$y_0 = R \quad (3)$$



24.1- расм.



24.2- расм.

муносабат геометрик боғланиши ифодалайди. Бундан ташқари, ғилдирак сирпанмасдан ҳаракатлангани учун ғилдиракнинг рельсга тегиб турган C нуқтасининг тезлиги нолга тенг бўлади. Бу шарт

$$\dot{x}_O - R \dot{\varphi} = 0 \quad (4)$$

кинематик боғланиш билан ифодаланади. (4) ни интеграллаб, x_O ва φ орасидаги муносабатни аниқлаймиз:

$$x_O - R\varphi = \text{const.}$$

Бинобарин, (4) тенглама билан ифодаланадиган боғланиш голономли боғланишдан иборат бўлади.

Беголоном боғланиш қўйилган жисмга мисол тариқасида горизонтал текислик бўйлаб сирпанмасдан ҳаракатланувчи радиуси R га тенг шарни олиш мумкин (24.2- расм). Шарга қўйилган боғланишлар ичрнинг марказидан текисликкача бўлган масофанинг ўзгармаслигини ифодаловчи $z_O = R$ геометрик боғланиш ва шарнинг текисликка тегиб турган C нуқтасининг тезлиги нолга тенглигини ифодаловчи $\vec{v}_C = 0$ ёки

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_C = 0 \quad (5)$$

кинематик боғланиш билан ифодаланади.

Эйлернинг кинематик тенгламалари (11.29) дан фойдаланиб, (5) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} & \dot{x}_O \vec{i} + \dot{y}_O \vec{j} + \dot{z}_O \vec{k} + \\ & + \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi & \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi & \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \\ 0 & 0 & -R \end{array} \right| = 0. \end{aligned}$$

Бу векторли тенгламани координата ўқларига проекциялаб, қуйидаги учта скаляр тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_O - R(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) &= 0, \\ \dot{y}_O + R(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) &= 0, \\ \dot{z}_O &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6) тенгламаларнинг биринчи икkitаси интегралланмайди, шунинг учун бу тенгламалар беголоном боғланиш тенгламаларини ифодалайди.

Агар боғланишнинг аналитик ифодаси вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлса, унга *стационар бўлмаган боғланиш* дейилади. Стационар бўлмаган голономли ва бўшатмайдиган боғланиш тенгламалари умумий ҳолда

$$F_{\mu}(x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}, t) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l)$$

кўринишда ёзилади.

Масалан,

$$x^2 + y^2 + z^2 = (at)^2 \quad (7)$$

тенглама билан ифодаланган боғланиш стационар бўлмаган боғланишдан иборат. (7) нинг геометрик маъноси шундан иборатки, нуқта радиуси вақтга пропорционал равишда ортиб борадиган сфера сиртида ҳаракатланади.

Агар боғланишнинг аналитик ифодаси вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлмаса, бундай боғланиш *стационар боғланиш* дейилади. Голономли, стационар ва бўшатмайдиган боғланишлар тенгламаси умумий ҳолда

$$F_{\mu}(x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l)$$

кўринишда ёзилади. (1) — (4) тенгламалар ҳам стационар боғланиш тенгламаларини ифодалайди.

Келгусида фақат голономли бўшатмайдиган боғланишлар устида тўхталамиз.

24.2-§. Мумкин бўлган кўчиш. Системанинг эркинлик даражаси

Агар механик системага боғланишлар қўйилган бўлса, бундай система ихтиёрий равишда кўча олмайди, чунки боғланишлар система нуқталарининг фақат баъзи кўчишларигагина йўл қўяди.

Боғланишдаги механик система учун мумкин бўлган кўчиш тушунчасини киритамиз.

Системага қўйилган боғланишни қаноатлантирган ҳолда система нуқталарининг берилган онда тасаввур қилинадиган чексиз кичик кўчишлари *механик системанинг мумкин бўлган кўчиши* дейилади.

Худди шунингдек, боғланишдаги нуқта учун мумкин бўлган кўчиш тушунчаси киритилади.

Мумкин бўлган кўчишлар вақтнинг қайд қилинган пайти учун содир бўлади деб қаралгани туфайли система нуқталарига таъсир этувчи кучлар ҳам умумий ҳолда вақтга боғлиқ бўлишига қарамай, худди шу қайд қилинган пайт учун ўзгармас деб қаралади. Шунингдек, система нуқталарига мумкин бўлган кўчиш берилган пайтда стационар бўлмаган боғланиш тенгламаларида вақт ўзгармас деб олинади.

Мисол тариқасида

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (24.4)$$

кўринишдаги стационар бўлмаган, бўшатмайдиган голономли боғла-

аниш қўйилган битта моддий нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши қандай аниқланишини кўриб чиқамиз.

Айтайлик, вақтнинг қайд қилинган t пайтида нуқта $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ҳолатни эгалласин ва унинг радиус-вектори \vec{r}_0 бўлсин. Худди шу қайд қилинган вақт учун нуқтага фикран $\delta\vec{r}$ кичик кўчиш берамиз. Қандай шарт бажарилганда $\delta\vec{r}$ боғланишини қаноатлантиришини аниқлаймиз. Нуқта $\delta\vec{r}$ га кўчгандан сўнг $M(x_1, y_1, z_1)$ ҳолатни эгаллайди ва унинг радиус-вектори $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \delta\vec{r}$ га тенг бўлади. M_1 нуқтанинг координаталари учун қуйидаги тенгликлар ўринали бўлади:

$$x_1 = x_0 + \delta x, \quad y_1 = y_0 + \delta y, \quad z_1 = z_0 + \delta z,$$

бунда $\delta x, \delta y, \delta z$ билан $\delta\vec{r}$ векторининг проекциялари белгиланган бўлиб, улар координаталарнинг вариациялари дейилади.

M_1 нуқта ҳам боғланиш тенгламасини қаноатлантиргани туфайли

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, t) = 0$$

муносабат ўринали бўлади. Бу ифодани Тейлор қаторига ёйсақ,

$$f(x_0, y_0, z_0, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z + \dots = 0.$$

Бунда уч нуқта билан юқори тартибли ҳадлар белгиланган.

M_0 нуқтанинг координаталари боғланиш тенгламаси (24.4) ни қаноатлантиргани туфайли $f(x_0, y_0, z_0, t) = 0$ бўлади. Бинобарин, юқори тартибли ҳадларни эътиборга оламасак, $\delta\vec{r}$ мумкин бўлган кўчишнинг координата ўқларидаги проекциялари қуйидаги шартни қаноатлантириши керак:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z = 0. \quad (24.5)$$

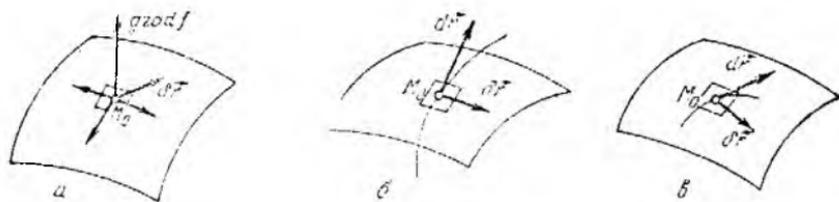
Агар қайд қилинган t вақт учун функциянинг M_0 нуқтадаги градиенти

$$(\text{grad } f)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \vec{k}$$

ни киритсак, (24.5) нинг chap томонини $(\text{grad } f)_0$ ва $\delta\vec{r}$ векторларнинг скаляр кўнаймаси тарзида ифодалаш мумкин:

$$(\text{grad } f)_0 \cdot \delta\vec{r} = 0. \quad (24.6)$$

(24.6) дан фойдаланиб, мумкин бўлган кўчининга қўйилган чекни қуйидагича геометрик изоҳлай оламиз. Қайд қилинган t вақтда (24.4) боғланиш тенгламаси фазода бирор сиртни ифодалайди. Маълумки, функциянинг M_0 нуқтадаги градиенти шу нуқтада сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналади. (24.6) дан кўрамизки, ҳар қандай мумкин бўлган кўчининг $\delta\vec{r}$ сиртга ўтказилган нормалга пер-



21.3- расм.

лендикуляр бўналади, яъни қайд қилинган t вақтда нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши (24.4) сиртга M_0 нуқтада ўтказилган уринма текисликка ётади (24.3- расм, а).

Агар нуқтанинг ҳақиқий кўчишини \vec{dr} билан белгиласак, бу кўчиш нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши $\vec{\delta r}$ дан фарқли равишда dt вақт берида нуқтага таъсир этувчи кучлар таъсирида содир бўлади ҳамда нуқтанинг траекториясига ўтказилган уринма бўйича йўналишда, chunki $\vec{dr} = \vec{v} dt$ (24.3- расм, б). Бинобарин, нуқтага (24.4) кўринишдаги стационар бўлмаган боғланиш қўйилса, нуқтанинг траекторияси сирт билан устма-уст тушмагани учун унинг ҳақиқий кўчиши \vec{dr} бирорта ҳам мумкин бўлган кўчиши $\vec{\delta r}$ билан устма-уст тушмайди.

Хусусан, нуқтага $f(x, y, z) = 0$ кўринишдаги стационар боғланиш қўйилса, у ҳолда нуқтанинг траекторияси $f(x, y, z) = 0$ сирт устида ётади (24.3- расм, в), демак, бу ҳолда доимо нуқтанинг ҳақиқий кўчиши \vec{dr} билан устма-уст тушадиган бирор $\vec{\delta r}$ мумкин бўлган кўчишини кўрсата оламиз.

Шундай қилиб, нуқтага стационар боғланиш қўйилса, унинг ҳақиқий кўчиши \vec{dr} бирорта мумкин бўлган кўчиши $\vec{\delta r}$ билан устма-уст тушади.

Агар механик системага

$$f_{\mu}(x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}, t) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l) \quad (24.7)$$

кўринишдаги l та ($l < 3N$) стационар бўлмаган боғланишлар қўйилган бўлса, худди (24.5) каби система нуқталарининг $\vec{\delta r}_1, \vec{\delta r}_2, \dots, \vec{\delta r}_N$ мумкин бўлган кўчишлари қуйидаги шартларни қаноатлантириши керак:

$$\sum_{\nu} \left[\left(\frac{\partial f_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \right)_0 \delta x_{\nu} + \left(\frac{\partial f_{\mu}}{\partial y_{\nu}} \right)_0 \delta y_{\nu} + \left(\frac{\partial f_{\mu}}{\partial z_{\nu}} \right)_0 \delta z_{\nu} \right] = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l). \quad (24.8)$$

Бунда $\delta x_{\nu}, \delta y_{\nu}, \delta z_{\nu}$ лар $\vec{\delta r}_{\nu}$ векторларнинг проекцияларини ифодалайди.

(24.8) ни қўйидагича ёзиш ҳам мумкин:

$$\sum_v (\text{grad } f_{\mu})_0 \cdot \delta \vec{r}_v = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l). \quad (24.9)$$

Шундай қилиб, берилган механик системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчиши (24.8) ёки (24.9) тенгламаларни қаноатлантирадиган $\delta x_v, \delta y_v, \delta z_v$ ($v = 1, 2, \dots, N$) вариацияларнинг қиймаглари билан аналитик аниқланади. $l < 3N$ бўлгани учун (24.8) тенгламалардаги $3N$ та вариациялардан l тасини қолган $3N - l$ таси орқали ифодалаш мумкин. Шу сабабли $3N - l = n$ та вариациялар эркин бўлиб, қолган l таси эса (24.8) тенгламалар воситасида аниқланадн. *Мумкин бўлган эркин кўчишлар соми системанинг эркинлик даражаси дейилади.*

Эркин моддий нуқтанинг эркинлик даражаси 3 га тенг бўлади. Агар нуқта (24.4) тенглама билан ифодаланадиган сирт устида ҳаракатланса, $\delta x, \delta y, \delta z$ орасида (24.5) кўринишидаги битта муносабат мавжуд бўлади. Шу сабабли сирт бўйлаб ҳаракатланаётган нуқтанинг эркинлик даражаси 2 га тенг бўлади. Агар нуқта эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланса, эгри чизиқни иккита сиртнинг кесишган чизиги деб қараш мумкин бўлганидан, бундай нуқтанинг эркинлик даражаси битта бўлади.

24.3-§. Кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги элементар иши. Идеал боғланишлар

Нуқтага таъсир этувчи \vec{F} кучининг $\delta \vec{r}$ мумкин бўлган кўчишдаги элементар ишини δA билан белгиласак, элементар иш ҳисобланадиган (21.90) ва (21.95) формулаларга асосан

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \quad (24.10)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Худди шунингдек, N та моддий нуқталардан ташкил топган механик система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг системанинг мумкин бўлган кўчишдаги элементар иши

$$\sum \delta A_v = \sum \vec{F}_v \cdot \delta \vec{r}_v \quad (24.11)$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Система нуқталарига қўйилган боғланиш реакция кучларини \vec{R}_v билан белгилаймиз.

Агар система нуқталарига қўйилган боғланиш реакция кучларининг системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишдаги элементар ишлари йиғиндаси нолга тенг бўлса, бундай боғланишлар идеал боғланишлар дейилади. Бинобарин, идеал боғланишлар учун

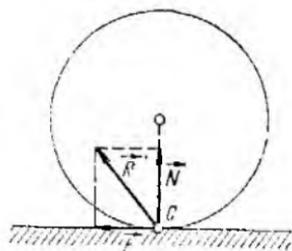
$$\sum \vec{R}_v \delta \vec{r}_v = 0 \quad (24.12)$$

тенглик ўринли бўлади.

$f(x, y, z) = 0$ боғланиш қўйилган битта нуқта учун (24.12) ни

$$\vec{R} \delta \vec{r} = 0 \quad (24.13)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Демак, идеал боғланиш реакция кучи \vec{R} нуқтанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчиши $\delta \vec{r}$ га перпендикуляр бўйича, яъни мазкур нуқтада $f(x, y, z) = 0$ сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўнатилади.



24.4-расм.

Идеал боғланишларнинг айрим турлари устида тўхталамиз.

1. Абсолют қаттиқ жисм нуқталари орасидаги боғланишни идеал боғланишдан иборат деб қараш мумкин. Бу ҳолда боғланиш реакция кучлари ички кучлардан иборат бўлади ҳамда худди (24.110) даги каби ички кучларнинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишидаги элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

2. Система маҳкамланган нуқталарининг ҳар бири идеал боғланишдан иборат бўлади, чунки бу нуқталарининг мумкин бўлган кўчиши нолга тенг.

3. Абсолют қаттиқ жисм бошқа қаттиқ жисм устида сирпанмасдан думаласа, бундай боғланиш ҳам идеал боғланишдан иборат бўлади (24.4-расм). Ҳақиқатан ҳам бу ҳолда думалангандаги ишқаланиш мавжуд бўлмайди. Абсолют силлиқ бўлмаган сиртнинг реакция кучи \vec{R} қўйилган C нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши $\delta \vec{r}_C = 0$ бўлади. Бинобарин, \vec{R} кучининг мумкин бўлган кўчишидаги иши $\delta A = \vec{R} \cdot \delta \vec{r}_C = 0$ бўлади ҳамда таърифта кўра бундай боғланиш идеал боғланишдан иборат бўлади.

24.4-§. Мумкин бўлган кўчиш принципи

Бу параграфда моддий нуқталар системасининг мувозанатини текширамиз. Аввало «мувозанат» сўзи «тинч ҳолат» га эквивалент бўлмай, моддий нуқталар системасига қараганда кўпроқ унга таъсир этувчи кучлар системасига тааллуқлидир. Ҳақиқатан ҳам моддий нуқтага таъсир этувчи кучлар ўзаро мувозанатланган бўлишига қарамай, моддий нуқта тинч ҳолатда бўлмай, тўғри чизиқли текис ҳаракатда бўлиши мумкин.

1788 йилда Лагранж идеал, стационар ва бўшатмайдиған боғланишлар қўйилган моддий нуқталар системасининг мувозанати ҳақидаги мумкин бўлган кўчиш принципини баён этди. Бу принципини Ньютон қонулларида фойдаланиб исботлани мумкин. Шу сабабли бу принципини теорема тарзида баён этамиз.

Теорема (мумкин бўлган кўчиш принципи). Идеал, стационар ва бўшатмайдиған боғланишлар қўйилган моддий нуқталар системаси мувозанатда бўлиши учун система нуқталарига қўйилган

барча актив кучларнинг система нуқталарининг ҳар қандай мумкин бўлган қўйишидаги элементар ишлари йиғиндиси нолга тенг бўлиши, яъни

$$\sum \vec{F}_v \delta \vec{r}_v = 0 \quad (24.14)$$

ҳамда система барча нуқталарининг берилган ондаги тезликлари нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Зарурлиги. Агар механик система мувозанатда бўлса, у ҳолда система нуқталарига қўйилган актив кучлар (24.14) шартни қаноатлантиришини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, агар механик система мувозанатда бўлса, мажкур системанинг ҳар бир нуқтасига қўйилган \vec{F}_v актив куч ва \vec{R}_v боғланиш реакция кучлари статика бўлимида чиқарилган бир нуқтага қўйилган кучларнинг мувозанат тенгламалари

$$\vec{F}_v + \vec{R}_v = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

ни қаноатлантиради.

Берилган ҳолатдан система нуқталарига $\delta \vec{r}_1, \delta \vec{r}_2, \dots, \delta \vec{r}_N$ мумкин бўлган қўчишлар берамиз ва мувозанат тенгламаларининг ҳар бирини $\delta \vec{r}_v$ га қўлайитириб қўшамиз:

$$\sum (\vec{F}_v + \vec{R}_v) \delta \vec{r}_v = 0$$

ёки

$$\sum \vec{F}_v \delta \vec{r}_v + \sum \vec{R}_v \delta \vec{r}_v = 0. \quad (24.15)$$

Система нуқталарига қўйилган боғланишлар идеал боғланишлардан иборат бўлгани учун $\sum \vec{R}_v \delta \vec{r}_v = 0$. Шундай қилиб, (24.15) дан исбот қилишини зарур бўлган

$$\sum \vec{F}_v \delta \vec{r}_v = 0$$

тенгликни оламиз.

Етарлилиги. (24.14) бажарилса, система мувозанатда бўлишини исботлаш учун мулоҳазани тескаридан бошлаймиз. Айтайлик, теореманинг барча шартлари бажарилишига қарамай, система нуқталари мувозанатда бўлмасин. Бу ҳолда системанинг кампада битта нуқтаси учун кучларнинг мувозанат шартлари бажарилмайди, яъни

$$\vec{F}_v + \vec{R}_v \neq 0.$$

Система нуқталарига мумкин бўлган қўчиш берамиз. Система нуқталарига қўйилган боғланишлар стационар боғланишдан иборат бўлгани учун система ҳар бир нуқтасининг нолга тенг бўлмаган тенг таъсир эгувчи кучдан олган ҳақиқий элементар қўчиши мумкин бўлган қўчишларнинг бирортаси билан устма-уст тушади. Тео-

рема шартига кўра система ҳар бир нуқтасининг берилган ондаги тезлиги нолга тенг бўлгани учун ҳақиқий элементар кўчишлар мазкур нуқтанинг тезланиши ёки тенг таъсир этувчи куч бўйлаб йўналади. Охириги тенгликни $\delta \vec{r}_v = d \vec{r}_v$ га скаляр кўпайтирсак, системанинг мувозанат ҳолатидан чиқарилган бирор нуқтаси учун

$$(\vec{F}_v + \vec{R}_v) \delta \vec{r}_v > 0$$

бўлади. Бундай тенгсизликларни системанинг барча нуқталари учун ёзиб, уларни қўшсак,

$$\sum \vec{F}_v \delta \vec{r}_v + \sum \vec{R}_v \delta \vec{r}_v > 0 \quad (24.16)$$

муносабатни оламиз.

Идеал боғланишлар учун $\sum \vec{R}_v \delta \vec{r}_v = 0$ бўлгани туғайли (24.16) даш қуйидаги тенгсизликни оламиз:

$$\sum \vec{F}_v \delta \vec{r}_v > 0.$$

Бу шартга (24.14) шартга зиддир. Бинобарин, (24.14) шарт bajarилса, система мувозанат ҳолатида қолиши керак. Шундай қилиб, (24.14) шарт механик система мувозанатининг зарур ва етарли шартини ифодалашини исботладик.

Агар берилган онда система нуқталарининг тезлиги нолга тенглигини ифодаловчи қўшимча шарт киргизилмаса, мумкин бўлган кўчининг принципи фақат система нуқталарининг тезланиши нолга тенглигини ифодалайди. (24.14) шарт bajarилган онда у билан бирга система нуқталарининг тезлиги нолга тенг бўлса, система мувозанатда бўлади. Агар чекли вақт оралиғида (21.11) шарт bajarилса, у ҳолда система мувозанатда бўлиши учун шу вақт оралиғининг бошланғич пайти учун система нуқталарининг тезлиги нолга тенг бўлиши керак.

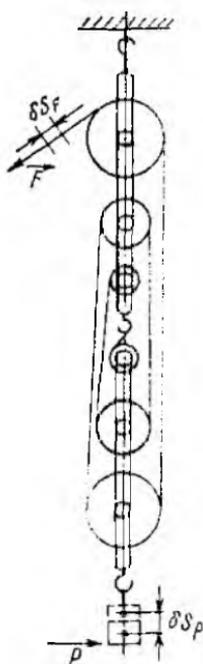
Элементар ишнинг аналитик ифодасидан фойдаланиб, мумкин бўлган кўчинг принципини

$$\sum (X_v \delta x_v + Y_v \delta y_v + Z_v \delta z_v) = 0 \quad (21.17)$$

кўринишида ёзиш мумкин.

Мумкин бўлган кўчинг принципини ифодаловчи (24.14) ифодада боғланиш реакция кучлари қатнашмайди. Лекин бу принцип ёрдамида номаълум боғланиш реакция кучларини ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун системани реакция кучи аниқланадиган боғланишдан бўшатиб, унинг системага кўрсатадиган таъсирини реакция кучи билан алмаштирамиз ва бу кўчини актив кучлар қаторига қўшамиз. Қолган боғланишлар эса идеал боғланишлардан иборат бўлиши керак.

Баъзан мумкин бўлган кўчинг принципини идеал бўлмаган боғланиш қўйилган система учун ҳам қўлланилади. Бунинг учун боғланишнинг ноидеаллик шартини мос реакция кучи билан алмаш-



24.5- расм.

тириб, бу кучни актив кучлар қаторига қўшиш керак. Масалан, боғланиш силлиқ бўлмаган сиртдан иборат бўлса, актив кучлар қаторига сирпанишдаги ишқаланиш кучи ёки умумий ҳолда бундан ташқари думалашлаги ишқаланиш жуфтини қўшиб, боғланишни идеал боғланишга келтирилади. Деворга қисиб маҳкамланган стержень (4.15- расм) тарзидаги боғланишни реакция жуфт momenti ҳамда боғланиш реакция кучининг горизонтал ташкил этувчиси (ёки вертикал ташкил этувчиси) билан алмаштириш йўли орқали идеал боғланишга келтирилади.

24.5- §. Мумкин бўлган кўчиш принципини оддий машиналарга қўллаш

Эркинлик даражаси битта бўлган оддий машиналарга мумкин бўлган кўчиш принципини қўллашимиз.

1. Полиспаст. Полиспаст иккита обоймага ўрнатилган блоклар системасидан ташкил топади (24.5- расм). Обоймалардан бири қўзғалмайди, иккинчиси эса блоклар орқали ўтказилган ип воситасида ҳаракатланади.

Блокларда ҳосил бўладиган ишқаланиш кучини ҳисобга олмай, мувозанат ҳолатида \vec{F} ва \vec{P} кучлар орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Полиспастга мумкин бўлган кўчиш берамиз. Агар \vec{F} куч қўйилган нуқта δs_F га кўчса, блоклар орасидаги олтига ян бўлагининг ҳар бири $\frac{1}{6} \delta s_F$ га қисқаради. Шу сабабли \vec{P} куч қўйилган нуқта $\delta s_P = \frac{1}{6} \delta s_F$ масофага юқорига кўчади.

Полиспаст учун мумкин бўлган кўчиш принципини қўлласак,

$$F \delta s_F - P \delta s_P = 0$$

ёки

$$F \delta s_F - P \cdot \frac{1}{6} \delta s_F = 0.$$

Бундан $F = \frac{1}{6} P$ бўлишини аниқлаймиз. Демак, ҳаракатлан-тирувчи \vec{F} кучнинг миқдори кўтарилаетган юкнинг оғирлигидан полиспаст вилдирақларининг сони қанча бўлса, шунча марта кам бўлади.

2. Винтли пресс. 24.6-расмда винтли пресс схемаси тасвирланган. Пресснинг жисмга босими (\vec{F}, \vec{F}') жуфт куч таъсирида ҳосил бўлади. Сиқилувчи жисмнинг реакция кучи \vec{N} билан мазкур жуфтнинг моменти орасидаги боғланишни мумкин бўлган кўчиш принципи воситасида аниқлаймиз.

AB дастага (\vec{F}, \vec{F}') жуфт йўналишида $\delta\varphi$ мумкин бўлган кўчиш берамиз. У ҳолда \vec{N} куч қўйилган нуқта бу кучнинг йўналишига қарама-қарши йўналишида δs_N кўчиш олади. Винтли пресс учун мумкин бўлган кўчиш принципини ифодаловчи

$$M \delta\varphi - N \delta s_N = 0 \quad (1)$$

тенгликни тузамиз.

Даста тўлиқ бир марта айланганда винт ўқи (винт қадами деб аталувчи) h масофага кўчади. $\delta\varphi$ ва δs_N орасидаги муносабатни аниқлаш учун винт ўқининг бўйлама кўчиши δs_N нинг винт қадами h га нисбати $\delta\varphi$ кўчишининг 2π бурчакка нисбатига тенглигидан фойдаланамиз:

$$\frac{\delta s_N}{h} = \frac{\delta\varphi}{2\pi}.$$

Бундан $\delta s_N = \frac{h}{2\pi} \delta\varphi$. δs_N нинг бу қийматини (1) га қўйсак,

$$2 F \cdot l \cdot \delta\varphi - N \cdot \frac{h}{2\pi} \delta\varphi = 0.$$

Бундан $N = 4\pi F \frac{l}{h}$ бўлишини аниқлаймиз.

Жисмни сиқувчи куч миқдор жиҳатдан аниқланган реакция кучи N га тенг бўлади.

24.6-§. Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллашга оид масалалар

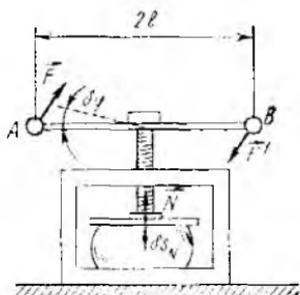
Мумкин бўлган кўчиш принципига оид масалаларни қуйидаги уч гуруҳга бўлиш мумкин:

1. Берилган онда мувозанатда бўлган системага таъсир этувчи кучларни ёки бу кучлар орасидаги муносабатларни аниқлаш.

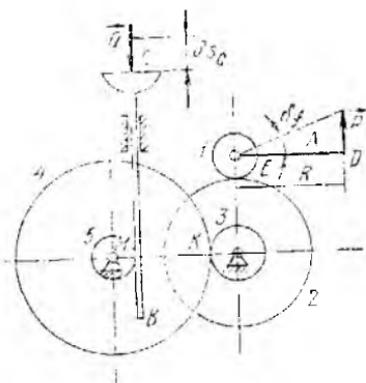
2. Таъсир этувчи кучлар берилган ҳолда системанинг мувозанат ҳолатини аниқлаш.

3. Мумкин бўлган кўчиш принципини қўллаб, боғланиш реакция кучларини аниқлаш.

24.1-масала. Домкрат механизмида узунлиги R бўлган A даста айланткичда тизилган радиуслар 1, 2, 3, 4 ва 5 лар ҳам айлана бошлайди ва домкрат-



24.6- расм.



24.7- расм.

нинг тишидан B рейкасини ҳаракатга келтирадиган. Домкрат мувозинат ҳолатида бўлганида C таянчида $Q = 4,8$ кН босим ҳосил қилиниш учун дастанинг учига унга тик қилиб қандай \vec{P} куч қўйиш керак?

Тишли филдиракларнинг радиуслари тегишлича $r_1 = 3$ см, $r_2 = 12$ см, $r_3 = 4$ см, $r_4 = 16$ см, $r_5 = 3$ см га, даста узунлиги $R = 18$ см га тенг (24.7- расм).

Ғаниш. Домкрат механизми C таянчга қўйилган \vec{Q} куч ва A дастанинг учигаги D нуқтага қўйилган \vec{P} куч таъсирида мувозинатда бўлади. Механизм звеноларини қўйидаги мумкин бўлган қўчишларни се-

рамыз. A даста филдирак 1 билан баргалдик \vec{P} куч йўналишида $\delta\varphi$ бурчакка бурилади. У ҳолда D нуқта δs_D га, филдирак 2 ва 3 лар $\delta\varphi_2$ бурчакка, филдирак 4 ва 5 лар $\delta\varphi_3$ бурчакка, рейка эса δs_C га қўчилади.

Домкрат механизми учун мумкин бўлган қўчиш принципини

$$P \delta s_D - Q \delta s_C = 0 \quad (1)$$

кўришида ёзамиз.

Система звеноларининг мумкин бўлган қўчишлари орасидаги муносабатларни аниқлаймиз. A даста ва филдирак 1 нинг бурилиш бурчаги билан даста учигаги D нуқтанинг қўчиши ўртасида қўйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_D}{R}.$$

1 филдирак тўғрисидаги E нуқта $\delta s_1 = r_1 \delta\varphi = \frac{r_1}{R} \delta s_D$ миқдорга қўчилади.

Филдирак 1 ва 2 лар ўзаро сирпанмасдан айлангани учун улар уринган E нуқтанинг мумкин бўлган қўчишлари тенг бўлади ва филдирак 2 $\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_1}{2} = \frac{r_1}{2R} \delta s_D$ га қўчилади.

Филдирак 3 ва 4 ўзаро сирпанмасдан айлангани учун улар уринган K нуқта нинг мумкин бўлган қўчишлари тенг бўлади ҳамда филдирак 4 $\delta\varphi_4 = \frac{\delta s_2}{r_4} = \frac{r_2 \delta\varphi_2}{r_4} = \frac{r_1 r_2}{r_4 R} \delta s_D$ га қўчилади.

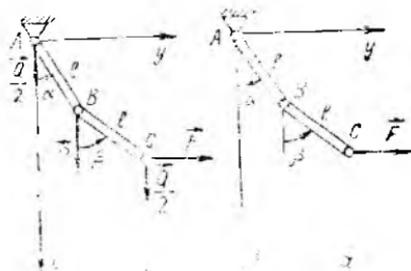
Филдирак 5 ва B тишли рейка ўзаро сирпанмасдан ҳаракатлангани учун филдирак 5 тўғрисидаги M нуқтанинг қўчиши \vec{Q} куч қўйилган C таянчнинг қўчиши δs_C га тенг бўлади:

$$\delta s_C = r_5 \delta\varphi_5 = \frac{r_1 r_2 r_5}{r_4 r_4 R} \delta s_D. \quad (2)$$

Шундай қилиб, система барча нуқта-ларининг мумкин бўлган қўйишларида δs_D орқали ифодалани мумкин. Шу сабаб ли мумкин бўлган эркин қўйишлар сонини 1 га тенг. Бинобарин, кўриляётган лемкрат ме ханизмнинг эркинлик даражаси 1 га тенг.

(2) ни (1) га қўйсак,

$$P \delta s_D - Q \cdot \frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} \delta s_D = 0$$



24.8-расм.

тенглик ҳосил бўлади. Бундан

$$P = Q \cdot \frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = 4800 \cdot \frac{0,03 \cdot 0,04 \cdot 0,03}{0,12 \cdot 0,16 \cdot 0,18} = 50 \text{ Н.}$$

24.2-масала. Иккита бир хил бир жиқсли AB ва BC стерженьлар ўзар- B шарнир билан бириктирилган. AB стержень қўзғалмас A шарнир апрофида айлана олади. BC стерженьнинг C унча миқдор жиқатдан стержень оғирлигининг ярмига тенг горизонтал F куч қўйилган (24.8-расм). Шарнирлардаги ишқаланишни эъти-борга олимай, системанинг мувозанат ҳолатидаги α ва β бурчаклар аниқлансин.

Ечиш. A нуқтани координаталар бонини учун қабул қилиб, координатни ўқларини 24.8-расмдагилек йўналтирамиз. Ҳар бир стерженьнинг узунлигини l билан белгиласак, система B ва C нуқталарига қўйилган боғланишлар қуйидаги 2 та

$$x_B^2 + y_B^2 - l^2 = 0, \quad (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 - l^2 = 0$$

шартлар билан ифодаланади. Бинобарин, системанинг эркинлик даражаси $n = 2N - m = 2 \cdot 2 - 2 = 2$ га тенг бўлади. Шундан келиб чиқиб, системанинг ҳо-латини 2 та α ва β бурчаклар билан аниқ таймиз.

Ҳар бир стерженьнинг оғирлик кучини унинг учларида қўйилган иккитачан ташкил эгувичиларга ажратсак, натижада системанига қўйилган кучлар системасини

A нуқтага қўйилган $\frac{Q}{2}$, B нуқтага қўйилган $\frac{Q}{2} + \frac{Q}{2} = Q$ ҳамда C нуқтага қў-

йилган $\frac{Q}{2}$ кучлар системасига келтирамиз (24.8-расм, б).

Мумкин бўлган кўчиши принципини (24.17) га асосан,

$$\frac{Q}{2} \delta x_A + Q \delta x_B + \frac{Q}{2} \delta x_C + F \delta y_C = 0 \quad (1)$$

кўринишида ёзиш мумкин.

A нуқта қўзғалмас бўлгани учун $\delta x_A = 0$; бундан ташқари $F = \frac{Q}{2}$ эканли-

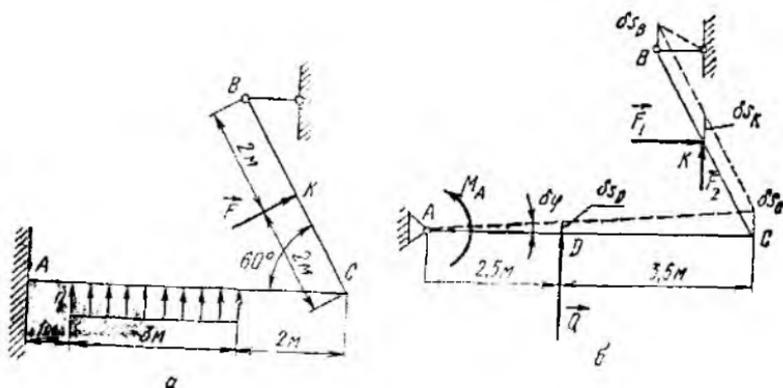
гини эътиборга олиб, (1) ни $\frac{Q}{2}$ га қисқартирсак,

$$2 \delta x_B + \delta x_C + \delta y_C = 0 \quad (2)$$

тенгликни оламиз.

δx_B , δx_C ва δy_C ларини α ва β бурчакларнинг вариациялари орқали ифо-даланиш учун x_B , x_C ва y_C координаталарни α ва β бурчакларнинг функциясыв сифатида қуйидагича ифодалаймиз:

$$\left. \begin{aligned} x_B &= l \cos \alpha, & x_C &= l \cos \alpha + l \cos \beta, \\ y_C &= l \sin \alpha + l \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



24.9- расм.

Нуктанинг мумкин бўлган кўчишлари мос координаталарнинг вариацияларига тенг бўлишини эътиборга олиб, (3) муносабатларни вариациялаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_B &= -l \sin \alpha \delta \alpha, \quad \delta x_C = -l \sin \alpha \delta \alpha - l \sin \beta \delta \beta, \\ \delta y_C &= l \cos \alpha \delta \alpha + l \cos \beta \delta \beta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) ни (2) га қўйиб, $\delta \alpha$ ва $\delta \beta$ қатнашган ҳадларни алоҳида ажратиб, ушбу тенглакни оламиз:

$$l (\cos \alpha - 3 \sin \alpha) \delta \alpha + l (\cos \beta - \sin \beta) \delta \beta = 0.$$

Бу тенглак системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишлари, яъни $\delta \alpha$ ва $\delta \beta$ вариацияларининг ҳар қандай қиймати учун ўринли ҳамда $\delta \alpha$ ва $\delta \beta$ лар ўзаро боғлиқсиз бўлави учун бу вариацияларнинг ҳар бири олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлади:

$$\cos \alpha - 3 \sin \alpha = 0,$$

$$\cos \beta - \sin \beta = 0$$

ёки

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg} \beta = 1.$$

Шундан қилиб,

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} = 18^\circ 25', \quad \beta = 45^\circ.$$

24.3- масала. Система 24.9- расм. а да тасвирланган мувозанат ҳолатини эгаллаган. F кучининг таъсир чизиги BC стерженга перпендикуляр йўналган; текис тақсимланган кучларнинг интенсивлиги q га тенг бўлиб, AC стерженга тўғри бурчак остида қўйилган.

Агар $F = 10$ кН, $q = 2$ кН/м бўлса, стерженларнинг оғирлигини ҳисобга олмаб, A нуктаининг реактиви моменти ва шу нуктадаги боғлавиинг реакция кучининг горизонтал ташкил этувчиси аниқлашсин.

Ениш. Текис тақсимланган кучларни улар таъсир этувчи участканинг ўртасидаги D нуктага қўйилган $Q = q \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$ кН синга куч билан алмаштирамиз.

F кучини горизонтал ва вертикал ташкил этувчиларга ажратамиз;

$$F_1 = F \cos 30^\circ = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} = 8,66 \text{ кН},$$

$$F_2 = F \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ кН.}$$

Дастлаб A нуқтадаги реакция моменти M_A ни аниқлаймиз. Бунинг учун A нуқтадаги боғланишни қўзғалмас шарнирли таянч билан алмаштирамыз ва системани A нуқта атрофида айланишига тўсқинлик қилувчи боғланишдан бўшатамыз ҳамда унинг системага таъсирини M_A реактив момент билан алмаштирамыз (24.9-расм, б).

Системани A нуқта атрофида $\delta\varphi$ бурчакка буриб, унга мумкин бўлган кўччи берамиз. Айтайлик, бу кўччи соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда бўлсин. У ҳолда система текис параллел ҳаракатда бўлади. C нуқтанинг мумкин бўлган кўчишини δs_C билан белгиласак,

$$\delta s_C = AC \cdot \delta\varphi.$$

AC стержень A нуқта атрофида $\delta\varphi$ га бурилганда \vec{Q} куч қўйилган D нуқта δs_D га параллел равишда δs_D га кўчади ҳамда

$$\frac{\delta s_D}{\delta s_C} = \frac{AD}{AC}$$

ёки

$$\delta s_D = \frac{AD}{AC} \delta s_C = \frac{AD}{AC} AC \cdot \delta\varphi = AD \cdot \delta\varphi$$

тенглик ўринли бўлади.

C ва B нуқталарининг кўчиши параллел ва уларга ўтказилган перпендикулярлар бир ўғри чизиқда ётмагани туфайли CB илгариллама ҳаракатда бўлади. Бинобарин, \vec{F} куч қўйилган K нуқтанинг кўчиши ҳам δs_C га параллел бўлади ва

$$\delta s_K = \delta s_C = AC \cdot \delta\varphi$$

муносабат ўринли бўлади.

24.9-расм, б да тасвирланган система учун мумкин бўлган кўччи ирришсини қўлаймиз:

$$M_A \delta\varphi + Q \delta s_D + F_2 \cdot \delta s_K = 0$$

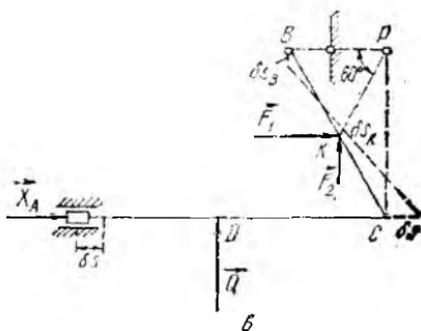
ёки

$$M_A \delta\varphi + QAD \delta\varphi + F_2 \cdot AC \cdot \delta\varphi = 0.$$

Бундан $M_A = -Q \cdot AD - F_2 \cdot AC = -6 \cdot 2,5 - 5 \cdot 6 = -45$ кНм. Бу ерда манфий шюра M_A реактив момент аслида соат стрелкаси ҳаракати бўйича йўналганлигини билдиради.

A нуқтадаги боғланиш реакция кўчишининг горизонтал ташкил этувчиси X_A ни аниқлаш учун A нуқтадаги боғланишнинг горизонтал йўналтирувчи бўйича ҳаракатлана оладиган сирпангич билан алмаштирамыз (24.9-расм, в).

Системанинг A нуқтасига горизонтал йўналишда δs кўчиши берамиз. A нуқтанинг ҳаракати чеклангани учун AC стержень илгариллама ҳаракатда бўлади ва C нуқта ҳам δs га кўчади. BC текис параллел ҳаракатда бўлади. C ва B нуқталарининг мумкин бўлган кўчиши δs ва δs_B ларга перпендикулярлар ўтказиб, улр-



24. 9-расм.

нинг кесилган нуқтасини P билан белгиласак, бу нуқта BC нинг айланish оний марказини ифодалайди. K нуқтани P билан туташтириб, K нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши δs_K PK га перпендикуляр бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

$$\delta s_K \text{ ни } \frac{\delta s_K}{\delta s} = \frac{PK}{PC} \text{ тенгликдан аниқлаймиз: } \delta s_K = \frac{PK}{PC} \delta s. \text{ Бунда } PC = \\ = 4 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \text{ м.}$$

24.9-расм, ϵ да тасвирланган система учун мумкин бўлган кўчиш принципини қўлаймиз:

$$X_A \delta s + F_1 \cos 30^\circ \cdot \delta s_K - F_2 \cos 60^\circ \delta s_K = 0$$

ёки

$$X_A \delta s + F_1 \frac{KP}{PC} \cos 30^\circ \delta s - F_2 \cos 60^\circ \delta s = 0.$$

Бундан X_A ни аниқлаймиз:

$$X_A = (F_2 \cos 60^\circ - F_1 \cos 30^\circ) \frac{KP}{PC} = \left(5 \cdot \frac{1}{2} - 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{2}{2\sqrt{3}} = -2.88 \text{ кН.}$$

X_A нинг манфий қийматга эга бўлиши, у ерда кўрсатилган йўналишга тескари йўналганлигини ифодалайди.

24.7-§. Системанинг умумлашган координаталари

Агар механик система N та моддий нуқталардан ташкил топган бўлса, унинг ҳолатини $Oxyz$ инерциал ҳисоблаш системасига нисбатан $3N$ та x_ν, y_ν, z_ν Декарт координаталари билан аниқлаш мумкин. Айтилик, механик системага

$$f_\mu(x_\nu, y_\nu, z_\nu, t) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, l) \quad (24.3)$$

қўйишидаги гомонли, стационар бўлмаган, идеал ва бўшатмайдиган беваришлар қўйилган бўлсин.

N ҳолда системанинг $3N$ та x_ν, y_ν, z_ν координаталари l та бевариш тенгламаларини қаноатлантиргани туфайли, улар эркин бўла олмайди. $3N$ координаталардан фақат $n = 3N - l$ таси эркин координаталардан иборат бўлади. Системанинг ҳолатини мазкур n та эркин координаталар воситасида, қолган координаталарни эса бевариш тенгламалари воситасида аниқлаш мумкин. Бироқ қўйишча эркин координаталарни бундай танлаш мақсадга мувофиқ бўлмайди, чунки бу усулда системанинг ҳолатини аниқлаш анча мураккаб бўлади. Аналитик механикада бундай системанинг ҳолатини бир қийматли аниқлаш учун *умумлашган координаталар* деб аталадиган n та мақсадга мувофиқ равишда танлаб олинган q_1, q_2, \dots, q_n эркин параметрлар олинади. Бундай координаталар учун узунлик ёки бурчак катталиклари ўлчовига эга бўлган параметрларни олиш мумкин. Қўйишча бундай координаталар учун қутб координаталари, цилиндрик ёки сферик координаталар олинади. Умумлашган координаталар q_i билан белгиланади.

Масалан, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг ҳолатини аниқлашда умумлашган координата сифатида айланish бурчаги φ ни

($q = \varphi$), сферик ҳаракатдаги жисм учун эса Эйлер бурчакларини ($q_1 = \varphi, q_2 = \psi, q_3 = \theta$) олиш мумкин. Умумий ҳолда текис параллел ҳаракатдаги жисмнинг ҳолатини аниқлаш учун қутб координаталари ва битта айлаш бурчагини олиш мумкин ($q_1 = x_C, q_2 = y_C, q_3 = \varphi$).

Айтайлик, механик системанинг ҳолати n та q_1, q_2, \dots, q_n умумлашган координаталар воситасида аниқлансин. Бундай системанинг ҳар бир нуқтаси ҳолатини унинг радиус-вектори \vec{r}_v орқали аниқлаш мумкин бўлгани туфайли, \vec{r}_v ларни умумлашган координаталар ва вақтнинг функцияси сифатида ифодалаш мумкин:

$$\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (24.18)$$

У ҳолда система нуқталарининг координаталари қуйидагича ифодланади:

$$\left. \begin{aligned} x_v &= x_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ y_v &= y_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ z_v &= z_v(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \end{aligned} \right\} (v = 1, 2, \dots, N). \quad (24.19)$$

Агар система нуқталарига голономли, стационар боғланишлар қўйилган бўлса, умумлашган координаталарни (24.19) да вақт ошқор равишида қатнашмайдиган қилиб танлаб олиш мумкин.

Умумлашган координаталарнинг афзаллиги шундан иборатки, бу координаталар эркин бўлиши билан бирга уларни киритиш натижасида голономли боғланишларни элибборга олиш зарурати туғилмайди. Чунки умумлашган координаталарни танлаш жараёнида боғланиш тенгламалари автоматик тарзда қаноатлантирилади. Юқорида кўрганмиздек (24.2-§), мумкин бўлган эркин кўчишлар (ёки эркин координаталар вариацияси) сонига системанинг эркинлик даражаси дейилади. Бинобарин, *голономли боғланишлар қўйилган системанинг эркинлик даражаси эркин координаталар сонига тенг бўлади*

(24.18) га кўра система нуқталарининг dt вақт ичидаги ҳақиқий кўчиши $d\vec{r}_v$ қуйидагича аниқланади:

$$d\vec{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} dt, \quad (v = 1, 2, \dots, N). \quad (24.20)$$

Маълумки, мумкин бўлган кўчишни аниқлашда боғланиш тенгламасида вақт ўзгармас деб қаралади. Шу сабабли (24.18) ёрдамида мумкин бўлган кўчишни ҳисоблашда $\delta t = 0$ деб олинади:

$$\delta \vec{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i \quad (24.21)$$

24.8-§. Умумлашган кучлар

Юқорида кўрганимиздек, система нуқталарига таъсир этувчи актив кучларнинг мумкин бўлган кўчишидаги ишларининг йиғиндис (24.11) формула ёрдамида аниқланади. (24.21) ни назарда тутиб, (24.11) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum \delta A_v = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i$$

ёки йиғиндиларнинг тартибини алмаширсак,

$$\sum \delta A_v = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^N \vec{F}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

тенглик ҳосил бўлади.

Агар

$$Q_i = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \quad (24.22)$$

белгилани киритсак, охириги тенгликни

$$\sum \delta A_v = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (24.23)$$

кўринишида ёза оламиз.

Q_i катталikka q_i умумлашган координатага мос бўлган *умумлашган куч* дейилади.

Шундай қилиб, система нуқталарига қўйилган актив кучларнинг системанинг мумкин бўлган кўчишидаги элементар ишлари йиғиндисдаги бирор умумлашган координатанинг вариацияси олдидаги коэффициент мазкур умумлашган координатага мос бўлган умумлашган кучни ифодалайди.

Умумлашган кучнинг ўлчови унга мос бўлган умумлашган координатанинг ўлчовига боғлиқ бўлади ва қуйидагича аниқланади:

$$[Q_i] = \frac{[A]}{[q_i]},$$

бунда $[A]$ — ишнинг ўлчови. Агар умумлашган координата узунлик бирлигида ўлчанса, умумлашган куч бирлиги (Н) да ўлчанади; агар умумлашган координата бурчак ўлчовига эга бўлса, умумлашган куч кучнинг моменти бирлиги (Н.м) да ўлчанади.

Умумлашган кучларни ҳисоблаш усуллари устида тўхталамиз.

1. Умумлашган кучларни (24.22) формула воситасида ҳисоблаш мумкин. Бу формуладаги иккита векторнинг скаляр кўпайтмасини уларнинг координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодаласак, умумлашган куч учун

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^N \left(X_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial q_i} + Y_{\nu} \frac{\partial y_{\nu}}{\partial q_i} + Z_{\nu} \frac{\partial z_{\nu}}{\partial q_i} \right) \quad (24.24)$$

муносабат ўрили бўлади.

2. Умумлашган кучни, масалан Q_1 ни, ҳисоблаш учун системага шундай мумкин бўлган кўчиш берамизки, натижада фақат δq_1 нолдан фарқли бўлсин:

$$\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = 0, \dots, \delta q_n = 0.$$

Бу кўчишдаги система нуқталарига қўйилган барча кучларнинг мумкин бўлган иши $(\delta A)_{q_1}$ ни (24.23) га кўра ҳисоблаймиз:

$$(\delta A)_{q_1} = Q_1 \delta q_1.$$

Бундан

$$Q_1 = \frac{(\delta A)_{q_1}}{\delta q_1} \quad (24.25)$$

бўлади.

Қолган умумлашган кучлар ҳам худди шунингдек ҳисобланади.

3. Агар система нуқталарига таъсир этувчи кучлар потенциалга эга бўлса, у ҳолда

$$X_{\nu} = \frac{\partial U}{\partial x_{\nu}}, \quad Y_{\nu} = \frac{\partial U}{\partial y_{\nu}}, \quad Z_{\nu} = \frac{\partial U}{\partial z_{\nu}}$$

тенгликлар ўрили бўлади. $X_{\nu}, Y_{\nu}, Z_{\nu}$ ларнинг бу қийматлари (24.23) га қўйсак,

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_{\nu}} \frac{\partial y_{\nu}}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_{\nu}} \frac{\partial z_{\nu}}{\partial q_i} \right).$$

Бу тенглиkning ўнг томони U функциядан умумлашган координата q_i бўйича олинган хусусий ҳосиллага тенг:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (24.26)$$

Шундай қилиб, *потенциалли кучлар таъсиридаги системанинг умумлашган кучи, кучнинг потенциалидан мос умумлашган координата бўйича олинган хусусий ҳосиллага тенг бўлади.*

Системанинг потенциал энергияси

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) = -U(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

формула ёрдамида аниқланишнинг эътиборга олсак, умумлашган куч учун

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (24.27)$$

формула ўрили бўлади.

Агар ишқаланиш кучи мавжуд бўлса, у ҳолда бу кучларни **актив** кучлар қаторига қўшиб, унга мос умумлашган кучлар ҳисобланади.

24.9-§. Системанинг умумлашган координаталардаги мувозанат шартлари

Юқорида кўрганимиздек, N та моддий нуқталардан ташкил топган механик системага l та голономли боғланишлар қўйилган бўлса, бундай системанинг ҳолатини $n = 3N - l$ та q_1, q_2, \dots, q_n умумлашган координаталар орқали аниқлаш мумкин.

Мумкин бўлган кўчиш принцигига асосан голономли, идеал, стационар ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган системанинг барилган онда барча нуқталарининг тезликлари нолга тенг бўлиши билан барча $\sum \vec{F}_V \delta \vec{r}_V = 0$ бўлиши, яъни барча актив кучларнинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишдаги ишларининг йиғиндисин нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

(24.11) ва (24.23) га асосан (24.14) ни

$$\sum Q_i \delta q_i = 0$$

ёки

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n = 0 \quad (24.28)$$

кўринишида ёки мумкин Барча q_1, q_2, \dots, q_n умумлашган координаталар эркин бўлиши учун голономли боғланишлар қўйилган система учун уларнинг вариациялари ҳам эркин бўлади. Шунинг учун $\delta q_1 = 0$ бўлган барча вариациялар $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0$ деб қабул қилиш мумкин. У ҳолда (24.28) дан $Q_1 = 0$ шартни оламиз. Худди шунингдек $\delta q_2 = 0$ ҳамда $\delta q_1 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0$ деб қараб, $Q_2 = 0$ ва ҳокимо шартларни оламиз. Шундай қилиб, (24.28) дан қуйидаги мувозанат шартларини оламиз:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_n = 0 \quad (24.29)$$

(24.29) тенглакларо голономли системанинг умумлашган координаталаридоги мувозанат шартларини ифодалайди: голономли, идеал, стационар ва бўшатмайдиган боғланишлар қўйилган система мувозанатда бўлиши учун танланган q_1, q_2, \dots, q_n умумлашган координаталарга мос умумлашган кучларнинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир (бошланғич пайтда система барча нуқталарининг тезлиги нолга тенг деб қараймиз).

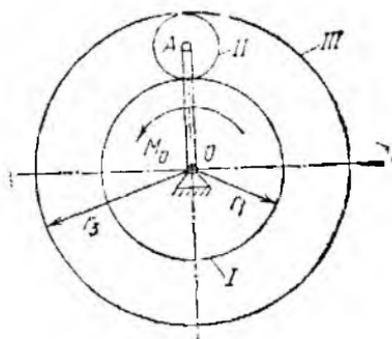
Агар система нуқталарига қўйилган кучлар потенциалга эга бўлса, у ҳолда (24.26) ни назарда тутиб, системанинг мувозанат шартлари (24.29)ни

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0 \quad (24.30)$$

ёки (24.27) га кўра

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0 \quad (24.30')$$

қўрinishида ёзиш мумкин. (24.30) ёки (24.30') шакллар куч функцияси (ёки потенциал энергия) экстремумга эга бўлишининг зарурий шартини берадими. Шундай қилиб, *потенциалли кучлар таъсиридаги механик системанинг мувозабат ҳолатида кўч функцияси ёки потенциал энергия экстремумга эришини мумкин.*



24.10-расм.

24.4-масала. Дифференциал улағма O ўқ атрафида айланиётган иккига I ва III тишли вилдирақлардан ҳамда OA даста ёрламда ҳаракатга келтириладиган ва унга эркин ўрнатилган II тишли югуздек вилдирақдан ишқил төлган (24.10-расм). Дастага momenti M_0 га тенг жуфт куч қўйилган. I ва III вилдирақларнинг радиуслари мос равишда r_1 ва r_2 га тенг. Механизм горизонтал текисликда жойлашган. Ишқиланишни эътиборга олмай, механизм мувозабатда бўлиши учун I ва III тишли вилдирақларга қўйиладиган жуфтларнинг momenti M_1 ва M_2 қандай қийматга эга бўлиши аниқлансин.

Ечиш. Системанинг ҳолати OA дастанинг айланмиш бурчаги φ_0 ҳамда I тишли вилдирақнинг айланмиш бурчаги φ_1 билан бир қийматли аниқланади. Ҳақиқатан ҳам, агар OA даста ва I тишли вилдирақни қўзғалмас деб қарасак, у ҳолда система қўзғалмас бўлади. Бинобарин, системанинг эркинлик даражаси 2 га тенг бўлади. φ_0 ва φ_1 бурчакларини умумлашган координаталар учун қабул қиламиз:

$$q_1 = \varphi_0, \quad q_2 = \varphi_1.$$

Системага momenti M_0 га тенг бўлган жуфт куч таъсири йўналишида $\delta\varphi_0$ ва $\delta\varphi_1$ мумкин бўлган кўчиши берамиз. У ҳолда II тишли вилдирақ $\delta\varphi_2$, III тишли вилдирақ эса $\delta\varphi_3$ мумкин бўлган кўчишларни олади. Бу кўчишларнинг йўналиши $\delta\varphi_0$ ва $\delta\varphi_1$ ларга беватан бўлади.

Механизм горизонтал текисликда жойлашгани туфайли вилдирақларнинг сўрилик кучи ни баъармайди.

Айталик, моментлари M_1 ва M_2 га тенг жуфт кучлар I ва III тишли вилдирақларини $\delta\varphi_1$ ва $\delta\varphi_2$ мумкин бўлган бурчак кўчиши йўналишида айлантирсин. У ҳолда система мувозабатда бўлиши учун мумкин бўлган кўчиш шартини янага ёсок:

$$\sum \delta A_v = M_0 \delta\varphi_0 + M_1 \delta\varphi_1 + M_2 \delta\varphi_2 = 0 \quad (1)$$

тенглама ўрнати бўлиши керак.

$\delta\varphi_2$ ни $\delta\varphi_0$ ва $\delta\varphi_1$ орқали ифода қилиш учун дастлаб. Виллис усулидан фойдаланиб, III тишли вилдирақнинг бурчак тезлиги ω_3 ни ω_0 ва ω_1 орқали ифода қиламиз.

	OA даста	Тишли вилдирақлар		
		I	II	III
Тўхтагунча бурчак тезлиги	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3
Тўхтагундан кейинги бурчак тезлиги	0	$\omega_1 - \omega_0$	$\omega_2 - \omega_0$	$\omega_3 - \omega_0$

Тишланиш тури

ташқи ички

Жадвалдан фойдаланиб, (14.12) га асосан қуйидаги тенгликларни ёзамиз:

$$\frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = \frac{r_3}{r_2}.$$

Бу тенгликларни қўпайтирсак,

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_3 - \omega_0} = -\frac{r_3}{r_1}, \Rightarrow \omega_3 = \omega_0 \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right) - \omega_1 \frac{r_1}{r_3}. \quad (2)$$

Боғланишлар стационар бўлганда бурчак тезликлар уларга мос мумкин бўлган бурчак кўчишларга пропорционал бўлишини эътиборга олсак, (2) дан

$$\delta\varphi_3 = \delta\varphi_0 \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right) - \delta\varphi_1 \frac{r_1}{r_3} \quad (3)$$

муносабатни оламиз.

(3) ни (1) га қўйсак,

$$\sum \delta A_v = \left[M_0 + M_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right) \right] \delta\varphi_0 + \left[M_1 - M_3 \frac{r_1}{r_3} \right] \delta\varphi_1 = 0.$$

(24.25) га асосан φ_0 ва φ_1 суръякларга мос умумлашган кучларни аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{(\sum \delta A_v) \varphi_0}{\delta\varphi_0} = M_0 + M_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right), \\ Q_2 &= \frac{(\sum \delta A_v) \varphi_1}{\delta\varphi_1} = M_1 - M_3 \frac{r_1}{r_3}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(24.29) га кўра системанинг мувозанат шартларини, яъни $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ тенгламаларни ҳисобга олиб, (4) дан M_3 ва M_1 ларни аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} M_0 + M_3 \left(1 + \frac{r_1}{r_3}\right) &= 0, \quad M_1 - M_3 \frac{r_1}{r_3} = 0, \Rightarrow \\ M_3 &= -\frac{M_0 r_3}{r_1 + r_3}, \quad M_1 = -\frac{M_0 r_1}{r_1 + r_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Бу нфодалардаги манфий ишора I ва III гилдиракларга қўйилган жуфтларнинг таъсири дастага қўйилган жуфт куч таъсирига қарама-қарши йўналганлигини нфодалтайди.

24.10 - §. Динамиканинг умумий тенгламаси Даламбер-Лагранж принципи

N та моддий нуқталардан ташкил топган механик система нуқталарига l та идеал ва бўшатмайдиغان боғланишлар қўйилган бўлсин. Даламбер принципига кўра системанинг бирор M_v нуқтасига таъсир этувчи \vec{F}_v актив ва \vec{R}_v боғланиш реакция кучлари $\vec{\Phi}_v$ шэррний кучи билан биргаликда ҳар онда

$$\vec{F}_v + \vec{R}_v + \vec{\Phi}_v = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (23.9)$$

мувозанат шартларини қаноатлантиради. Вақтнинг қайл қилинган бирор пайти учун система нуқталарига $\delta\vec{r}_v$ мумкин бўлган кўчиш берамиз. (23.9) тенгламаларнинг ҳар бирини $\delta\vec{r}_v$ мумкин бўлган кўчишга кўпайтириб, қўйсак,

$$\sum \vec{F}_v \delta \vec{r}_v + \sum \vec{R}_v \delta \vec{r}_v + \sum \vec{\Phi}_v \delta \vec{r}_v = 0$$

қосил бўлади.

Идеал боғланишларнинг таърифига кўра $\sum \vec{R}_v \delta \vec{r}_v = 0$ бўлгани учун

$$\sum (\vec{F}_v + \vec{\Phi}_v) \delta \vec{r}_v = 0 \quad (24.31)$$

ёки $\vec{\Phi}_v = -m_v \vec{\omega}_v$ эканлиги ҳисобга олинса,

$$\sum (\vec{F}_v - m_v \vec{\omega}_v) \delta \vec{r}_v = 0 \quad (24.32)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенглама динамиканинг умумий тенгламаси дейилади.

(24.32) га асосан, идеал ва бўғнатмайдиган боғланишлар қўйилган ҳаракатдаги система нуқталарига таъсир этувчи барча актив ҳамда инерция кўчларининг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишдаги элементар ишларининг йиғиндиси ҳар онда нолга тенг бўлади.

(24.31) ёки (24.32) тенгламалар Даламбер ва Лагранж принципларининг мажмуасидан иборат бўлгани учун *Даламбер — Лагранж принципи* деб аталади.

(24.31) нинг Декарт координатларидаги ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum [(X_v + \Phi_{vx}) \delta x_v + (Y_v + \Phi_{vy}) \delta y_v + (Z_v + \Phi_{vz}) \delta z_v] = 0. \quad (24.33)$$

Бунда x_v, y_v, z_v билан M_v нуқтанинг координатлари белгиланган. (24.33) да

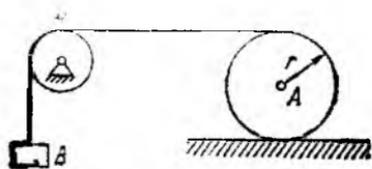
$$\Phi_{vx} = -m_v \ddot{x}_v, \quad \Phi_{vy} = -m_v \ddot{y}_v, \quad \Phi_{vz} = -m_v \ddot{z}_v$$

бўлгани учун динамиканинг умумий тенгламасини

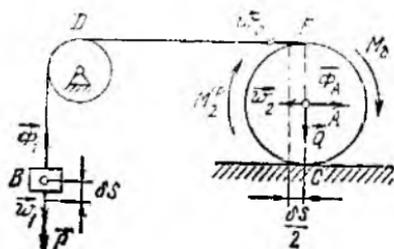
$$\sum [(X_v - m_v \ddot{x}_v) \delta x_v + (Y_v - m_v \ddot{y}_v) \delta y_v + (Z_v - m_v \ddot{z}_v) \delta z_v] = 0 \quad (24.34)$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

24.6-масала. Осириги P га тенг B юк D блок орқали ўтказилган чўзимайдишли ил воситасида радиуси r ва осирлиги Q га тенг цилиндрик A галтакни ҳаракатга келтирилади (24.11-расм). Галтак сирпанмасдан вилгайиши ва думалаш-



24.11- расм.



24.12- расм.

даги ишқаланиш коэффициентини f_0 га тенг, D блокнинг массасини эътиборга олмай, B юкнинг тезланиши аниқлансин.

Ечнш. Берилган B юкнинг гравитик кучи \vec{P} , галтакнинг сирпаллик кучи \vec{Q} ва думаладаги ишқаланиш жуфтнинг моменти M_0 ларни 24.12-расмда курсатилгандек тасвирлаймиз.

Инерция кумларини толамиз. $\vec{\omega}_1$ тезланиш билан тўғри қизиқли ҳаракат қилувчи B юкнинг инерция кучи $\vec{\Phi}_1 = -\frac{P}{g} \vec{\omega}_1$ вектор билан ифодаланайди.

Текис параллел ҳаракатдаги галтакнинг инерция кучлари галтак марказига қўйилган $\vec{\Phi}_2 = -\frac{Q}{g} \vec{\omega}_2$ векторга (бунда $\vec{\omega}_2$ — галтак марказининг тезланиши)

ҳамда моменти $M_2^q = -I_{2x} \epsilon_2$ га тенг жуфт кучга кестирилади. Бунда I_{2x} — галтакнинг O нуқтадан галтак текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти; ϵ_2 — галтакнинг бурмак тезланиши.

B юк δs мумкин бўлган кўчиши оғса, иш қўзилмаслиги сабабли галтак гардондаги E нуқта ҳам δs мумкин бўлган кўчиши олади. Галтак сирпалмасдан думалагани туфайли C нуқта текислабнинг ошиш марказини ифодалайди ва галтак марказининг кўчиши $\frac{\delta s}{2}$ га тенг бўлади. Буни назарда тутиб, динамиканинг умумий тенгламасини тузимиз:

$$P \delta s - \Phi_1 \delta s - M_0 \delta \varphi - M_2^q \delta \varphi - \Phi_2 \frac{\delta s}{2} = 0. \quad (1)$$

Бунда $\delta \varphi = \frac{\delta s}{2r}$ галтакнинг мумкин бўлган бурмак кўчишини ифодалайди.

Иш қўзилмаслиги сабабли $\omega_1 = \omega_E = \omega$. A нуқта тўғри қизиқли ҳаракатда бўлади. Шу сабабли бу нуқтанинг тезланиши $\vec{\omega}_2$ E нуқтанинг тезланиши $\vec{\omega}_E$ га параллел бўлганидан $\omega_2 = \frac{\omega L}{2}$ тенглик ўринли бўлади. Бинобарин,

$$\Phi_1 = \frac{P}{g} \omega,$$

$$M_2^q = I_{2x} \epsilon_2 = \frac{Q}{g} \frac{r^2}{2} \frac{\omega}{2r} = \frac{Q}{g} \frac{r}{4} \omega,$$

$$\Phi_2 = \frac{Q}{g} \omega_2 = \frac{Q}{g} \frac{\omega}{2},$$

$$\Phi_2 = \frac{Q}{g} \omega_2 = \frac{Q}{g} \frac{\omega}{2}.$$

Думаладаги ишқаланиш жуфтнинг моменти $M_0 = f_0 Q$ формула ёрдамида аниқланади. Натижада (1) ш қўйилганда ёзиш мумкин:

$$P \delta s - \frac{P}{g} \omega \delta s - f_0 Q \frac{\delta s}{2r} - \frac{Q}{g} \frac{r}{4} \omega \frac{\delta s}{2r} - \frac{Q}{g} \frac{\omega}{2} \frac{\delta s}{2} = 0.$$

Охириги тенгламанинг барча ҳадларини δs га бўламиз:

$$P - \frac{f_0 Q}{2r} - \left(P + \frac{Q}{8} + \frac{Q}{4} \right) \frac{\omega}{g} = 0.$$

Бундан B юкнинг теълашига шунини аниқлашди:

$$\omega = 8g \cdot \frac{\rho - \frac{I_0 Q}{2r}}{3Q + 8P}$$

24.11 - §. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари

Динамиканинг умумий тенгласмаси воситасида идеал боғланиш реакция кучлари қатнашмайдиган ҳаракат дифференциал тенгламаларини чиқариш мумкин. Бунинг учун динамиканинг умумий тенгласмасини ифодаловчи (24.32) тенгламада $\vec{\omega}_v = \frac{d\vec{v}_v}{dt}$ бўлишини эътиборга олиб, уни қуйидагича ёзамиз:

$$\sum_{v=1}^N \left(\vec{F}_v - m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_v = 0. \quad (24.35)$$

(24.21) га қўра радиус-векторнинг вариацияси

$$\delta \vec{r}_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

тенгликдан аниқлашсини назарда тутсак,

$$\sum_{v=1}^N \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_v - m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} \right) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \delta q_i = 0$$

тенглама ўринли бўлади. Бу тенгламада йиғиндилар тартибини ўзгартириб, уни

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} - \sum_{v=1}^N m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) \cdot \delta q_i = 0$$

шаклида ёзамиз. Бу тенгламада (24.22) га асосан

$$\sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

умумлашган кучларни ифодалайди. Шунинг учун

$$\sum_{i=1}^n \left(Q_i - \sum_{v=1}^N m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (24.36)$$

тенглик ўринли бўлади.

(24.36) да $B = m_v \frac{d\vec{v}_v}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ ифодани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$B = \frac{d}{dt} \left(m_v \vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \right) - m_v \vec{v}_v \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}. \quad (24.37)$$

(24.37) даги $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ ҳадларнинг фақат голономли система учун ўринли бўлган бошқа кўринишдаги ифодасини аниқлаймиз. Бунинг учун нуқтанинг тезлиги унинг радиус-векторидан вақт бўйича олинган ҳосиллага тенг бўлишини ҳамда t вақтининг радиус-вектор \vec{r}_v ифодасига фақат ошкор равишда қатнашибгина қолмай, балки q_1, q_2, \dots, q_n умумлашган координаталар орқали ҳам қатнашинини эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} \vec{v}_v &= \frac{d\vec{r}_v}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} \end{aligned} \quad (24.38)$$

муносабат ўринли бўлади. Бунда $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) умумлашган тезлик дейилади.

(24.38) нинг ҳар иккала томонидан умумлашган тезлик \dot{q}_i бўйича хусусий ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}. \quad (24.39)$$

Бу формула ёрдамида $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ аниқланади.

(24.38) нинг иккала томонидан q_i бўйича хусусий ҳосила олсак,

$$\frac{\partial \vec{v}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_n \partial q_i} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial t \partial q_i}. \quad (24.40)$$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ ни ҳисоблаш учун $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ катталик умумлашган координаталар ва вақтининг функциясидан иборат эканлигини эътиборга олиб, унинг вақт бўйича тўлиқ ҳосиласини толамиз:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_i \partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial^2 \vec{r}_v}{\partial q_i \partial t}. \quad (24.41)$$

(24.40) ва (24.41) ни солиштириб, иккита ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосилалар дифференциаллаш тартибига боғлиқ бўлмаслигини назарда тутсак,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial q_i} \quad (24.42)$$

тенгликни оламиз.

Шундай қилиб, $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ ning қийматини (24.39) ва $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q_i}$ ning қийматини (24.42) дан (24.37) га келтириб қўйсак, B учун

$$B = \frac{d}{dt} \left(m_v \vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_v \vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial q_i}$$

ифода ўринли бўлади. Бунда $\vec{v}_v^2 = v_v^2$ ҳамда

$$m_v \vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_v v_v^2}{2} \right), \quad m_v \vec{v}_v \cdot \frac{\partial \vec{v}_v}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{m_v v_v^2}{2} \right)$$

тенгликларни назарда тутиб, B учун яна қуйидаги ифодани оламиз:

$$B = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{m_v v_v^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{m_v v_v^2}{2} \right).$$

B ning бу қийматини (24.36) га қўйиб, ҳосилани йиғиндидан ташқарида ёзсак, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\sum_{i=1}^n \left[Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{v=1}^N \frac{m_v v_v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{v=1}^N \frac{m_v v_v^2}{2} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (24.43)$$

(24.43) да

$$T = \sum_{v=1}^N \frac{m_v v_v^2}{2} \quad (24.44)$$

системанинг кинетик энергиясини ифодалайди. Шу сабабли бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{i=1}^n \left[Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (24.45)$$

(24.45) тенглама умумлашган координаталар орқали ифодаланган динамиканинг умумий тенгласидир. Бу тенгламада

$$- \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

ҳад системанинг $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ мумкин бўлган кўчишидаги барча инерция кучлари ишларининг йиғиндисини ифодалайди.

Голономли боғланишлар қўйилган система учун барча $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ лар эркин бўлгани учун улар олдидаги ифодаларни алоҳида-алоҳида нолга тенглаш мумкин:

$$Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ёки

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (24.46)$$

(24.46) тенгламалар Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари ёки механик системанинг умумлашган координаталардаги ҳаракат дифференциал тенгламалари дейилади. Бу тенгламаларнинг сони системанинг эркинлик даражасига тенг бўлади. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларида идеал боғланиш реакция кучлари қатнашмайди.

(24.38) ва (24.44) лардан кўрамизки, системанинг кинетик энергияси аниқланадиган ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} C, \end{aligned} \quad (24.47)$$

бу системанинг кинетик энергияси умумлашган тезликларнинг квадратик функциясидаги иборат бўлади.

(24.47) да

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_j}, \quad B_i = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t}, \\ C &= \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

бўлиб, A_{ij} , B_i ва C катталиклар умумлашган координаталар ва вақтга боғлиқ, лекин умумлашган тезликка боғлиқ эмас. Шунинг сабабли

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + B_i$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n \left(A_{ij} \ddot{q}_j + \frac{dA_{ij}}{dt} \dot{q}_j \right) + \frac{dB_i}{dt}$$

муносабат ўринли бўлади.

Охириги ифодада умумлашган координаталарнинг иккинчи ҳосиласи \dot{q}_j қатнашади. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламасидаги бошқа ҳадлар умумлашган координаталарнинг биринчи даражадан юқори бўлмаган ҳосилаларини ўз ичига олади.

Шундай қилиб, Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари q_i ($i=1, 2, \dots, n$) координаталарга нисбатан иккинчи даражали оддий дифференциал тенгламалар системасидан иборат бўлади.

24.12-§. Потенциалли кучлар таъсиридаги механик система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари

Агар механик система нуқталарига потенциалли кучлар таъсир этса, у ҳолда (24.27) га кўра

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Шу сабабли бундай система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар Лагранж функцияси деб аталадиган

$$L = T + U = T - \Pi$$

функцияни киритсак, $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$ бўлгани учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини қуйидагича ёза оламиз:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (24.48)$$

(24.48) тенгламалар *потенциалли кучлар таъсиридаги механик система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини* ифодалайди.

24.13-§. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини қўллана олган масаллада

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларига доир масалалар қуйидаги тартибда ечилади.

1. Системанинг эркинлик даражаси аниқланади ва умумлашган координаталар танлаб олинади.

2. Системага таъсир этувчи актив кучлар расмда тасвирланади ва умумлашган кучлар 24.8-§ да баён қилинган усуллардан бири билан ҳисобланади.

3. Системанинг кинетик энергияси умумлашган координаталар ва умумлашган тезликларнинг функцияси сифатида аниқланади.

4. Лагранж тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган кинетик энергиянинг ҳосилалари $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \frac{\partial T}{\partial q_i}$ топилади.

5. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари тузилади ва бу тенгламаларни берилган бошланғич шартларда интеграллаб изланаётган номаълумлар аниқланади.

24.6-масала. Вертикал текисликда жойлашган кулакли механизмда кулак 1 O_1 нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида айланувчи r радиусли, массаси m га тенг бир жинсли дискдан иборат. Кулакка momenti M га тенг жуфт куч таъсир этади. Тишли рейка 2 вертикал йўналишда бўйлаб ҳаракатланади ва тишли блок 3 ни айлантиради. Блок 3 билан спарник 4 шарнир воситасида боғланган (24.13-расм. а). Тишли рейка ва спарникнинг массаси мос равишда m_2 ва m_4 га тенг. Блокнинг айланish ўқига нисбатан инерция momenti I га тенг. $R_3 = 2r_3$; $r_3 = 2r/3$; $m_2 = m/3$; $m_4 = m/6$; $I = 2mr^2$ деб қараб, системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси тузилади. Кривошип 5 нинг массаси эътиборга олинмасин.

Ечили. Системанинг ҳолати кулак 1 нинг айланish бурчаги φ билан бир қий-матли аниқланади. Ҳақиқатан ҳам, агар кулак 1 ни қўзғалмас деб қарасак, у ҳолда система қўзғалмас бўлади. Бинобарин, системанинг эркинлик даражаси бирга тенг. Кулакнинг айланish бурчаги φ ни умумлашган координата учун ташлаб оламиз: $q = \varphi$. X ҳолда кулакнинг бурчак тезлиги $\dot{q} = \dot{\varphi}$.

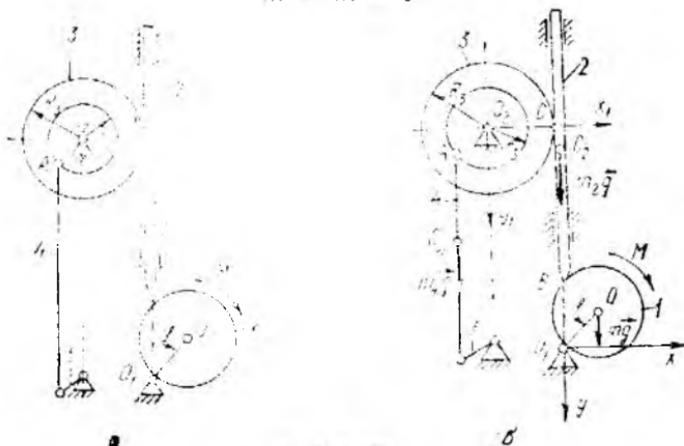
Бу геометрик муносабатларни аналитик усулда ҳам изохдаш мумкин. Қара-лаётган система кулак 1, тишли рейка 2, блок 3 ва спарник 4 дан ташкил топ-ган бўлиб, уларга қуйидаги голономли боғланишлар қўйилган:

$$y_B = -2r \cos \varphi, \quad (1)$$

$$v_C = R_3 \dot{\varphi}_3, \quad (2)$$

$$v_A = r_3 \dot{\varphi}_3, \quad (3)$$

$$x_{1A}^2 + y_{1A}^2 = r_3^2. \quad (4)$$



24.13-расм.

Бунда y_B — B нуқтасини оординатаси, r_C — рейка ва блок C нуқтасининг тезлиги, φ_3 — блокнинг бурчак тезлиги, r_A — блок ва спарник A нуқтасининг тезлиги, (1) тенглама тишли рейканинг B нуқтаси доимо кулакка тегиб туришини, (2) тенглама тишли рейка ва блок тинчлашган C нуқтала ҳаракат спарникмасдан содир бўлишини, (3) эса блок A нуқтасининг тезлиги илгариллама ҳаракатдаги спарник A нуқтасининг тезлигига тенглигини, (4) тенглама A нуқта r_3 радиусдан айланга бўйлаб ҳаракатланганини ифода қилади.

Кулак I O_1 нуқтасини ўз унчи горизонтал ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун унинг ҳолати O_1 нуқта атрофидаги айланмиш бурчати φ билан аниқланади. Тишли рейка вертикал йўналишдаги бўйича тўғри физикан ҳаракатда бўлгани учун унинг ҳолати B нуқтасининг оординатаси y_B ; блокнинг ҳолати O_2 нуқта атрофидаги айланмиш бурчати φ_3 ; спарникнинг ҳолати эса x_{1A} , y_{1A} координаталар билан аниқланади. Шундай қилиб, системанинг ҳолати бешта φ , y_B , φ_3 , x_{1A} , y_{1A} параметрлар билан аниқланади ва улар орасида тўртта голоном ва бешташар мавжуд. Демак, системанинг эркинлик даражаси 1 га тенг.

Расмда кулакка таъсир этувчи жуфт momenti M , кулак, тишли рейка ва спарникларнинг оғирлик кучлари m_1g , m_2g ва m_3g ларни тасвирлаймиз (24.13-расм, б).

Кулак φ бурчакка айланганда тишли рейка $h = 2r(1 - \cos \varphi)$ масофага вертикал пастрга силжийди; блок

$$\varphi_3 = \frac{h}{R_3} = \frac{3}{2}(1 - \cos \varphi) \quad (5)$$

бурчакка айланган.

Кулакка M момент йўналишида дёр мумкин бўлган кўчини бердик, кулак марказининг координатаси учун $\delta y_D = -r \cos \varphi$ тенглик ўринли бўлиши туфайли унинг вертикал бўйича мумкин бўлган кўчини қуйидагиси аниқланади:

$$\delta y_D = r \sin \varphi \delta \varphi.$$

(1) га кўра тишли рейканинг B нуқтаси

$$\delta y_C = \delta y_B = 2r \sin \varphi \delta \varphi$$

кўчини олади; (3) га асосан блок

$$\delta \varphi_3 = \frac{3}{2} \sin \varphi \delta \varphi$$

бурчакка айланеди; $y_{1A} = r_3 \cos \varphi_3$ бўлиши учун спарник $\delta y_{C_1} = \delta y_{1A} = -r_3 \sin \varphi_3 \delta \varphi_3 = -r \sin \varphi \sin \left[\frac{3}{2}(1 - \cos \varphi) \right] \delta \varphi$ га кўтади. Бунда манфий ишора A нуқта юқорига кўчишини ифода қилади. Бу кўшишларда M , m_1g , m_2g ва m_3g лар илаэриқини йиғиндиқини толамиз.

$$\begin{aligned} \delta A &= M \delta \varphi + m_1 g \delta y_D + m_2 g \delta y_{C_2} + m_3 g \delta y_{C_1} = \\ &= \left\{ M + m_1 g r \sin \varphi + \frac{m_2}{3} g \cdot 2r \sin \varphi - \frac{m_3}{6} g r \sin \varphi \cdot \sin \left[\frac{3}{2}(1 - \cos \varphi) \right] \right\} \delta \varphi = \\ &= \left\{ M + \frac{5}{3} m_1 g r \sin \varphi - \frac{m_3}{6} g r \sin \varphi \cdot \sin \left[\frac{3}{2}(1 - \cos \varphi) \right] \right\} \delta \varphi. \end{aligned}$$

Натижада φ умумийнинг координатасига мос бўлган умумийнинг куч қуйидагича аниқланади:

$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta \varphi} = M + \frac{5}{3} m_1 g r \sin \varphi - \frac{m_3}{6} g r \sin \varphi \cdot \sin \left[\frac{3}{2}(1 - \cos \varphi) \right]. \quad (6)$$

Системанин кинетик энергияси

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (7)$$

формуладан аниқланади. Бунда T_1, T_2, T_3, T_4 лар мос равишда кулак, тишли рейка, блок ва спарникларнинг кинетик энергияларини ифодалайди.

Кулак O_1 нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун

$$T_1 = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2}.$$

Гюйгенс—Штейнер теоремасига кўра,

$$I_1 = I_O + mr^2 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$$

бўлгани туфайли

$$T_1 = \frac{3}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2. \quad (8)$$

Тишли рейка A ўзга чизиқли ҳаракатда бўлгани учун

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_B^2.$$

Бунда $m_2 = m/3$ ва (1) га кўра

$$\dot{y}_B = 2r \dot{\varphi} \sin \varphi$$

бўлгани сабабли

$$T_2 = \frac{2}{3} mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi. \quad (9)$$

Блок O_2 нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида айланма ҳаракатда бўлгани учун $T_3 = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_3^2$. Бунда $I = 2mr^2$ ҳамда (5) га кўра

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{3}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (10)$$

бўлгани сабабли

$$T_3 = \frac{9}{4} mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi. \quad (11)$$

Спарник 4 илгариланма ҳаракат қилади. Шу сабабли

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_A^2.$$

Бунда $m_4 = m/6$ ҳамда (3) ва (10) га кўра $v_A = r_3 \dot{\varphi}_3 = \frac{2r}{3} \cdot \frac{3}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi = r \dot{\varphi} \sin \varphi$ бўлганидан

$$T_4 = \frac{1}{12} mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \quad (12)$$

ҳосил бўлади.

(8), (9), (11) ва (12) ни (7) га қўйиб, системанинг кинетик энергиясини умумлашган координата ва умумлашган тезликларнинг функцияси сифатида аниқлаймиз:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{3}{2} + r \sin \varphi \right) r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (13)$$

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган кинетик энергиянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) m r^2 \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) m r^2 \ddot{\varphi} + 6 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 3 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Берилган система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} \quad (15)$$

қўринишда ёзиб, (6) ва (14) ни эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) m r^2 \ddot{\varphi} + 3 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = M - \\ &- \frac{m}{6} g r \sin \varphi \cdot \sin \left[\frac{3}{2} (1 - \cos \varphi) \right] + \frac{5}{3} m g r \sin \varphi \end{aligned}$$

тенгламага эга бўламиз.

Шундай қилиб, берилган системанинг ҳаракат дифференциал тенгамасини қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2} + 6 \sin^2 \varphi \right) m r^2 \ddot{\varphi} + 3 m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi + \frac{m}{6} g r \sin \varphi \cdot \sin \left[\frac{3}{2} (1 - \cos \varphi) \right] - \\ &- \frac{5}{3} m g r \sin \varphi = M. \end{aligned}$$

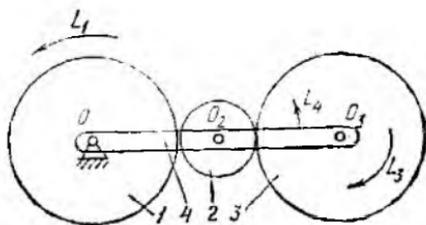
24.7-масала. Дифференциал механизмда m_1 массали шестерня 1 ва етакчи стержень 4 O нуқтадан ўтувчи вертикал ўқ апрофида бир-бирига боғлиқсиз равишда айланади (24.14-рasm). Шестерня 1 m_2 массали шестерня 2 билан тишлашади, ўз навбатида шестерня 2 m_3 массали шестерня 3 билан тишлашади. Шестерня 1 ва етакчи стержень 4 га моментлари M_1 ва M_4 га тенг жуфт кучлар қўйилган. Шестерня 3 га M_3 қаршилик momenti таъсир этади.

Шестерня 1 ва етакчи стержень 4 ning бурчак тезлашишлари аниқлансин. Шестернялар радиуслари мос равишда r_1 , r_2 ва r_3 га тенг бир жипсли диск деб қаралсин. Етакчи стерженнинг массаси эътиборга олинмасин. Қуйидагилар берилган: $m_1 = m_2 = 9m_3 = 90$ кг, $M_1 = 150$ Н·м, $M_3 = 120$ Н·м, $M_4 = 180$ Н·м, $r_1 = r_3 = 3r_2 = 0.3$ м.

Ечиш. Системанинг ҳолати шестерня 1 ва етакчи стержень 4 ларнинг айланиш бурчаклари φ_1 ва φ_4 билан бир қиймагли аниқланади. Ҳақиқатан ҳам, агар шестерня 1 ва етакчи стержень 4 ни қўзғалмас деб қарасак, у ҳолда система қўзғалмас бўлади. Шу сабабли унинг эркинлик даражаси 2 га тенг. φ_1 ва φ_4 бурчакларни умумлашган координаталар учун қабул қиламиз: $\varphi_1 = \varphi_1$,

$\varphi_2 = \varphi_1$. У ҳолда $\varphi_1 = \varphi_1$, $\varphi_2 = \varphi_1$ лар мос равишда шестерня 1 ва етакчи стержень 4 ларнинг бурчак тезликларини ifodalайди.

Дастлаб Виллис усулидан фойдаланиб, шестерня 2 ва 3 ларнинг бурчак тезликлари $\dot{\varphi}_2$ ва $\dot{\varphi}_3$ ларни $\dot{\varphi}_1$ ҳамда $\dot{\varphi}_4$ лар орқали ifodalаймиз.



24.14-рasm.

	4 стержень	Шестернилар		
		1	2	3
Тўхтагунча бурчак тезлиги	$\dot{\varphi}_4$	$\dot{\varphi}_1$	$\dot{\varphi}_2$	$\dot{\varphi}_3$
Тўхтагандан кейинги бурчак тезлиги	0	$\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4$	$\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4$	$\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4$
Тийлашни тури		таъқиқ		ташқи

Жадвалдан фойдаланиб, қуйидаги муносабатларни олаемиз:

$$\frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4}{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad (1)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4}{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4} = -\frac{r_3}{r_2}. \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгиликларни қўпайтириб ихчамласак,

$$\frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4}{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4} = \frac{r_3}{r_1} = 1.$$

Бундан нилдирак 3 нинг бурчак тезлигини аниқлаймиз:

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_4. \quad (3)$$

(3) ни (2) га қўйиб $\frac{r_3}{r_2} = 3$ эканлигини эътиборга олсак, $\frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4}{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_4} = -3$ бўлади, бундан иккестерия 2 нинг бурчак тезлиги аниқланган

$$\dot{\varphi}_2 = -3\dot{\varphi}_1 + 4\dot{\varphi}_4 \quad (4)$$

тенгликни олаемиз.

Q_1 ва Q_2 умумлашган кучларни аниқлаш учун системага таъсир этувчи жуфт моментларининг системани мумкин бўлган кўчишларидаги элементар ишлари йиғиндисини ҳисоблаймиз:

$$\delta A = M_1 \delta \varphi_1 + M_4 \delta \varphi_4 - M_3 \delta \varphi_3.$$

(3) га асосан

$$\delta \varphi_3 = \delta \varphi_4$$

тенглик ўринли бўлади. Бинобарин,

$$\delta A = (M_1 - M_3) \delta \varphi_1 + M_4 \delta \varphi_4. \quad (5)$$

Худди шу элементар ишларнинг йиғиндисини

$$\delta A = Q_1 \delta \varphi_1 + Q_2 \delta \varphi_2 \quad (6)$$

кўринишида ифодалаш мумкин. (5) ва (6) ни солиштириб,

$$Q_1 = M_1 - M_3, \quad Q_2 = M_4 \quad (7)$$

муносабатлар ўринли бўлишига ишонч ҳосил қилаемиз.

Системанинг кинетик энергияси

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (8)$$

бўлиб, бунда T_1 , T_2 ва T_3 лар мос равишда шестерня 1, 2 ва 3 ларнинг кинетик энергияларини ифодалайди.

Шестерня 1 O нуқтадан ўтувчи вертикал ўқ атрофида айланма ҳаракатда, шестерня 2 ва 3 лар эа текис параллел ҳаракатда бўлган учун

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{O_2}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{O_3}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2.$$

Бунда

$$I_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}, \quad v_{O_2} = (r_1 + r_2) \dot{\varphi}_1, \quad I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2},$$

$$v_{O_3} = (r_1 + 2r_2 + r_3) \dot{\varphi}_1, \quad I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2}$$

ҳамда (3) ва (4) ни эътиборга олиб, T_1 , T_2 ва T_3 ларнинг қийматларини (8) га қўйсак,

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + 9m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \dot{\varphi}_1^2 + [m_2 (r_1 + r_2)^2 + 8m_2 r_2^2 + m_3 (r_1 + 2r_2 + r_3)^2] \dot{\varphi}_4^2 - 12m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_4 \right\}.$$

Бундан

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + 9m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \dot{\varphi}_1 - 6m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_4,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + 9m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \ddot{\varphi}_1 - 6m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_4;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_4} = [m_2 (r_1 + r_2)^2 + 8m_2 r_2^2 + m_3 (r_1 + 2r_2 + r_3)^2] \dot{\varphi}_4 - 6m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_1,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} = [m_2 (r_1 + r_2)^2 + 8m_2 r_2^2 + m_3 (r_1 + 2r_2 + r_3)^2] \ddot{\varphi}_4 - 6m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_1,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_4} = 0.$$

(9)

Берилган система учун Лагранжийинг иккинчи хил тенгламаларини

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

кўринишда ёзиб, (7) ва (9) ни (10) га қўйсак,

$$\frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + 9m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \ddot{\varphi}_1 - 6m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_4 = M_1 - M_3,$$

$$[m_2 (r_1 - r_2)^2 + 8m_2 r_2^2 + m_3 (r_1 + 2r_2 + r_3)^2] \ddot{\varphi}_1 - 6m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_1 = M_4$$

тенгламаларни оламиз. Берилган ифодамарнинг сон қийматларини қўйиб, бу тенгламаларни

$$\left. \begin{aligned} 8,55\ddot{\varphi}_1 - 0,6\ddot{\varphi}_1 &= 30, \\ 60\ddot{\varphi}_1 - 0,6\ddot{\varphi}_1 &= 180 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(11) дан шестерня I ва елакни стержень 4 ларнинг изланган бурчак тезли-
нишларини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 = \ddot{\varphi}_1 &= 3,72 \text{ рад/с}^2, \\ \epsilon_4 = \ddot{\varphi}_4 &= 3,01 \text{ рад/с}^2. \end{aligned}$$

24.14*- §. Гамильтон — Остроградский принципи

Айтайлик, Лагранж функцияси $L = T + U$ га тенг механик системанинг ҳолати q_1, q_2, \dots, q_n умумлашган координаталар билан аниқлансин. Лагранж функцияси билан

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (24.49)$$

тенглик воситасида боғланган S динамик катталikka Гамильтон таъ-
сири дейилади.

Лагранж функцияси $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$ бўлгани туфайли Гамильтон таъсири S ни ҳисоблаш учун $t_0 \leq t \leq t_1$ вақт оралиғида $q_i = q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) функциялар берилган бўлиши керак. Бошқача айтганда, Гамильтон таъсири системанинг ҳаракатига боғлиқ функционалдан иборат.

Механик системанинг ҳаракатини n ўлчовли фазода координаталари q_1, q_2, \dots, q_n га тенг битта нуқтанинг ҳаракати билан ҳаракатлаш мумкин. Айтайлик, $t = t_0$ пайтда системанинг ҳолати n ўлчовли фазода A нуқта, $t = t_1$ вақтда эса B нуқтанинг ҳолатлари билан аниқлансин ҳамда системанинг ҳаракат траекторияси AB эгри чизиқ билан ифодалансин (24.15-рasm). Худди шу $t_1 - t_0$ вақт ичида система 24.15-рasmда итрих билан кўрсатилган кинематик мумкин бўлган траекториялар бўйлаб ҳам ҳаракатланиши мумкин. AB га системанинг ҳақиқий траекторияси дейилади.



24.15- рasm.

Гамильтон принципи воситасида системанинг иккита A ва B ҳолатлари орасида кинематик мумкин бўлган траекториялар ичидан худди шу ҳолатлар орасидаги ҳақиқий ҳаракат траекториясини ажратиш мумкин.

Гамильтон принципи қуйидагича ифодаланади: *системанинг иккита A ва B ҳолатлари орасидаги ҳақиқий ҳаракати, худди шу*

ҳолатлар орасидаги ва айнан шу вақт оралиғида содир бўладиган кинематик мумкин бўлган ҳаракатлардан шундай хусусияти билан фарқ қиладики, ҳақиқий ҳаракат учун Гамильтон таъсирига вариацияси нолга тенг ёки бошқача айтганда, системанинг ҳақиқий ҳаракати учун Гамильтон таъсири стационар қийматга эга бўлади, яъни

$$\delta S = 0. \quad (24.50)$$

Бу принцип стационар боғланишлар қўйилган система учун 1834-1835 йилларда У. Гамильтон томонидан баён этилган. Лекин стационар бўлмаган боғланишлар қўйилган умумий ҳолда бу принцилни М. В. Остроградский 1848 йилда баён этган. Шу сабабли бу принципга *Гамильтон — Остроградский принципи* ҳам дейилади.

Голономли боғланишлар қўйилган система учун бу принципти қўллашда солиштирилмабган ҳаракатлар айнан бир хил вақт ичида содир бўлади деб қаралади. Шу сабабли $\delta t = 0$ деб олинади. Бундай вариацияга *изохрон вариация дейилади*. Голономли боғланишлар қўйилган система учун изохрон вариация ва вақт бўйича олинган ҳосила коммутативлик хусусиятига эга:

$$\frac{d}{dt} \delta q = \delta \frac{dq}{dt} \quad (24.51)$$

Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларидан Гамильтон принципини келтириб чиқарамиз. Эркинлик даражаси n га тенг ва потенциал кучлар таъсиридаги системанинг ҳақиқий ҳаракати учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини (24.48) кўришида ёзиш мумкин:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Бу тенгламаларнинг ҳар бирини δq_i га кўпайтириб қўшсак,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) = 0. \quad (24.52)$$

(24.51) ни эътиборга олсак,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right).$$

Буни (24.52) га қўйиб,

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) \quad (24.53)$$

муносабатни оламиз.

Лагранж функцияси $L = L(t, q, \dot{q})$ ҳамда кўриляётган ҳолда $\delta t = 0$ бўлгани учун

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \delta L.$$

Шу сабабли (24.53) ни қуйидагича ифодалаймиз:

$$d \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \delta L dt.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини системанинг A ҳолатига мос келувчи $t = t_0$ вақтдан то системанинг B ҳолатига мос келувчи $t = t_1$ вақтгача интеграллаймиз:

$$\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt.$$

A ва B нуқталар қўзғалмас бўлгани учун $\{\delta q_i\}_{t_0} = 0$ ва $\{\delta q_i\}_{t_1} = 0$. Бинобарин, системанинг ҳақиқий ҳаракати учун

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0$$

ёки вариация изохрон бўлгани учун

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \quad (24.54)$$

тенглик ўринли бўлади.

(24.54) да $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ бўлишини ҳисобга олсак,

$$\delta S = 0$$

тенгликка эга бўламиз.

Гамильтон таъсири иш \times вақт бирлигида (СИ системасида кгм²/с да) ўлчанади.

24.15*-§. Каноник тенгламалар

Юқорида кўрганимиздек (24.11-§), Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари q_i умумлашган координаталарга нисбатан иккинчи тартибли n та оддий дифференциал тенгламалар системасидан иборат бўлади. Бу тенгламалар системасини $2n$ та биринчи тартибли тенгламалар билан алмаштириш мумкин эканлигини исботлаймиз.

Бунинг учун *умумлашган импульс* деб аталадиган ва Лагранж функцияси L ёки системанинг кинетик энергияси T билан

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (24.55)$$

ёки (24.47) га кўра

$$p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j + b_i \quad (24.56)$$

тенгликлар воситасида боғланган p_i динамик катталикларни киритамиз.

(24.56) да $a_{ij} \neq 0$ бўлгани учун барча \dot{q}_i ларни p_i лар орқали ифодалаш мумкин. Шу сабабли L функцияни фақат p_i ва q_i лар орқали ифодалаймиз.

Гамильтон функцияси деб аталувчи

$$H = -L + \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \quad (24.57)$$

функцияни киритсак, бу функциянинг вариацияси учун

$$\begin{aligned} \delta H = & - \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \\ & + \sum \delta p_i \dot{q}_i + \sum p_i \delta \dot{q}_i \end{aligned} \quad (24.58)$$

формула ўринли бўлади.

(24.58) да (24.55) га кўра $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ бўлишини эътиборга олсак,

унинг ўнг томонидаги иккинчи ва тўртинчи ҳадларнинг йиғиндиси нолга тенг; бундан ташқари, Лагранжийинг иккинчи хил тенгламасига кўра

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$$

бўлади. Бинобарин,

$$\delta H = - \sum \dot{p}_i \delta q_i + \sum \delta p_i \dot{q}_i. \quad (24.59)$$

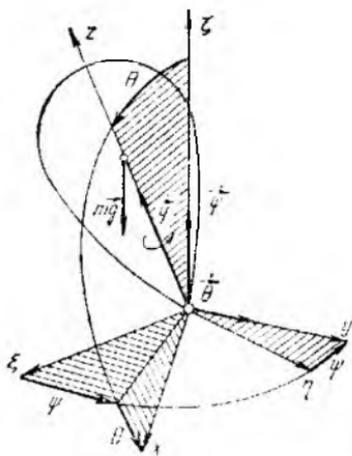
(24.56) воситасида (24.57) да барча \dot{q}_i ларни йўқотиб, $H(p_i, q_i, t)$ функциянинг вариациясини ҳисоблаймиз:

$$\delta H(p_i, q_i, t) = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i. \quad (24.60)$$

(24.59) ва (24.60) га асосан қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i = - \sum \dot{p}_i \delta q_i + \sum \dot{q}_i \delta p_i.$$

Голономли система учун δq_i ва δp_i лар ўзаро боғлиқ бўлмагани ҳамда охириги тенглик δq_i ва δp_i ларнинг ҳар қандай қийматларида ўринли бўлгани учун улар олдидаги коэффициентлар мос равишда тенг бўлади.



24.16-расм.

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ p_i &= - \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}. \end{aligned} \right\} \quad (24.61)$$

(24.61) тенгламалар Гамильтоннинг каноник тенгламалари дейилади.

Агар система нуқталарига стационар боғланишлар қўйилган бўлса, у ҳолда (24.47) га кўра системанинг кинетик энергияси умумлашган тезликларнинг бир жиғисли квадратик функциясидан иборат бўлади, бинобарин, Эйлернинг бир жиғисли функциялар ҳақидаги теоремасига кўра

$$\sum p_i \dot{q}_i - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

тенглик келиб чиқади.

Бу ҳолда Гамильтон функцияси учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L = 2T - (T + U) = T - U = T + \Pi; \quad (24.62)$$

яъни стационар боғланиш қўйилган ҳолда Гамильтон функцияси системанинг тўлиқ энергиясига тенг бўлади.

24.8-масала. Оғирлик кучи таъсирида қўзғалмас O нуқта атрофида ҳаракатланувчи пирилоқ симметрия ўқининг ҳолати Эйлер бурчакларини ифодаловчи прецессия бурчаги ψ ва нутация бурчаги θ билан аниқланади. Агар пирилоқ массаси m , унинг массалар марказидан O нуқтагача бўлган масфа l , z ўққа nisbatan инерция моменти C , O нуқтадан ўтувчи ва экваториал текисликда ўтувчи ихтиёрӣ ўққа nisbatan инерция моменти A га тенг бўлса, ψ , θ ҳамда соғ айланish бурчаги φ учун Гамильтон функцияси ва пирилоқнинг каноник тенгламалари тузилсин (24.16-расм).

Ечиш. Пирилоқ оғирлик кучининг потенциалини ҳисоблаш учун оғирлик кучининг O нуқтага nisbatan моментининг элементар ишини ҳисоблаймиз:

$$dA = mgl \sin \theta d\theta.$$

Бу элементар иш куч функциясининг дифференциалига тенг бўлади:

$$dU = mgl \sin \theta d\theta,$$

бундан

$$U = -mgl \cos \theta + C_1.$$

Потенциал функция ихтиёрӣ ўзгармасгача аниқлик билан ҳисоблангани туфайли, $C_1 = 0$ деб қараш мумкин. Шундай қилиб,

$$U = -mgl \cos \theta. \quad (1)$$

Пирилоқнинг кинетик энергияси

$$T = \frac{1}{2} [A(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) + C\dot{\psi}^2] \quad (2)$$

Формула ёрдамида аниқланади. Бунда p , q ва r лар пирилдоқ бурчак тезлигининг x , y , z координата ўқларидаги проекцияларини ифодалайди; 24.16-расмдан

$$\left. \begin{aligned} p &= -\dot{\psi} \sin \theta, \\ q &= \dot{\theta}, \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

эканлигини кўраемиз.

(3) ни (2) га қўйиб,

$$T = \frac{1}{2} [A (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2]. \quad (4)$$

Шундай қилиб, Лагранж функцияси L учун қўйидаги ифодани оламиз:

$$\begin{aligned} L = T + U &= \frac{1}{2} [A (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \\ &+ C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2] - mgl \cos \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

(24.55) га кўра p_φ , p_ψ , p_θ умумлашган импульслар учун ушбу тенгликларни оламиз

$$\left. \begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta), \\ p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = A \dot{\psi} \sin^2 \theta + C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta, \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = A \dot{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Бундан

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta &= \frac{p_\varphi}{C}, \\ \dot{\psi} &= \frac{p_\psi}{A \sin^2 \theta} - \frac{p_\varphi}{A \sin^2 \theta} \cos \theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(4) ва (7) ни эътиборга олиб, (24.62) формула ёрдамида Гамильтон функциясини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} H = T - U &= \frac{1}{2A} \left[\frac{(p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + p_\theta^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2C} p_\varphi^2 - mgl \cos \theta. \end{aligned}$$

(24.61) га кўра, Гамильтоннинг каноник тенгламаларини

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\psi}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \\ p_\psi &= -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad p_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad p_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{p_{\psi} - p_{\varphi} \cos \theta}{A \sin^2 \theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{A}, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{p_{\psi} - p_{\varphi} \cos \theta}{A \lg \theta \sin \theta} + \frac{p_{\varphi}}{C}, \\ \dot{p}_{\psi} &= 0, \quad \dot{p}_{\theta} = -\frac{(p_{\varphi} \cos \theta - p_{\psi})(p_{\psi} \cos \theta - p_{\varphi})}{A \sin^2 \theta} + mgl \sin \theta, \\ \dot{p}_{\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

кўришида ёшиш мумкин.

24.16-§. Механик системанинг устувор мувозанати ҳақида тушунча

Механик системанинг мувозанатини 3 турга бўлиш мумкин: устувор, ноустувор ва бефарқ мувозанат.

Агар мувозанат ҳолатидаги механик система нуқталарига кичик бошланғич кўчиш ва кичик бошланғич тезлик ёриш натижасида система нуқталари мувозанат ҳолати яқинида тебраниш ҳаракати бўлса, системанинг бундай мувозанати *устувор мувозанат*, мувозанат ҳолатидан узққлаша боғса, *ноустувор мувозанат* дейилади.

Агар механик системани мувозанат ҳолатидан кичик ёришни натижасида механик система энги ҳолатга ҳам мувозанатга қолса, системанинг бундай ҳолати *бефарқ мувозанат* дейилади.

24.17-расмда тасвирланган шпиндрнинг 1-ҳолати устувор, 2-ҳолати ноустувор ва 3-ҳолати бефарқ мувозанатга мисол бўла олади.

Айланлик, геосомон ёрланганлар кўйраган механик системанинг ҳолати q_1, q_2, \dots, q_n умумлашган координаталар билан аниқланади.

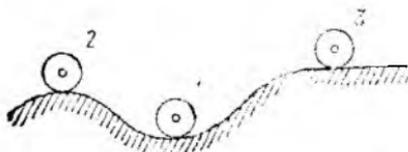
Умумлашган координаталарни системанинг мувозанат ҳолатидан бошлаб муволайимлаш, яъни мувозанат ҳолатида барча q_1, q_2, \dots, q_n координаталарни нолга тенг деб қараймиз.

Вақтнинг бирор t_0 пайтида системани мувозанат ҳолатидан оқдириб, системанинг шу пайтдаги умумлашган координаталари ва умумлашган тезликларини q_{i0} ва \dot{q}_{i0} иситилган t пайтдагисини эса q_i ва \dot{q}_i билан белгилаймиз.

Системанинг устувор мувозанатига аниқроқ таъриф бериш учун системанинг умумлашган координаталари ва умумлашган тезликларининг соя қийматини ўлчовчи катталикка келтираймиз.

Агар иситилганча кичик музобат соя ϵ га боғлиқ шундай $\eta > 0$ сояни топшиш мумкин бўлсаки,

$$|q_i| \leq \eta, \quad |\dot{q}_{i0}| \leq \eta, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (24.63)$$



24.17- расм.

бўлганда $t > t_0$ вақт учун

$$|q_i| < \epsilon \quad (24.64)$$

шартлар бажарилса, системанинг бундай мувозанат ҳолати *Ляпунов таърифига кўра устувор мувозанат* дейилади.

24.17-§. Лагранж-Дирихле теоремаси

Юқоридики кўрганмиздек, потенциалли кучлар таъсиридаги механик системанинг мувозанат шартлари (24.30') га мувофиқ

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_n} = 0$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгламалардан кўрамизки, потенциалли кучлар таъсиридаги системанинг мувозанат ҳолатларига система потенциал энергиясининг экстремал қийматлари мос келади. Лекин (24.30') тенгламалар воситасида система мувозанатининг устуворлигини аниқлай олмаймиз.

Лагранж 1788 йилда голономли ва идеал боғланишлар қўйилган, потенциалли кучлар таъсиридаги механик система устувор мувозанатининг етарли шартлари қўйидаги теорема билан ифодаланишини кўрсатган:

Потенциалли кучлар таъсиридаги системанинг потенциал энергияси минимум қийматга эга бўлидиган мувозанат ҳолатлари устувордир.

Исбот. Координаталар бошини системанинг мувозанат ҳолатида олсак, системанинг мувозанат ҳолатида $q_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) бўлади. Потенциал энергиянинг қиймати ихтиёрий ўзгармасгача аниқликда ҳисоблангани туфайли мувозанат ҳолатида уни нолга тенг деб қабул қилиш мумкин: $\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Агар мувозанат ҳолатида системанинг потенциал энергияси минимум қийматга эришса, у ҳолда мусбат ϵ сонни шунчалик кичик танлаш мумкинки, унинг атрофида $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ функциянинг қўшни экстремумлари қатнашмасин. У ҳолда $|q_i| \ll \epsilon$ тенгсизлик ўринли бўлидиган D соҳада потенциал энергия Π мусбат қийматга эга бўлади.

Координаталардан бири, масалан q_1 , D соҳанинг чегарасига тегишли $q_1 = \pm \epsilon$ қийматларини, қолган координаталар эса, D соҳада ихтиёрий қийматларни (жумладан, чегаравий қийматларни ҳам) қабул қилганда потенциал энергиянинг энг кичик қийматини Π_1 билан белгилаймиз. Π_1 албатта мусбат қийматга эга бўлади. Худди шунингдек, q_2 координата чегаравий қийматини, қолган координаталар (жумладан q_1 ҳам) D соҳада ихтиёрий қийматларини (ёки чегаравий қийматларини) қабул қилганда потенциал энергиянинг минимал қийматини Π_2 билан белгилаймиз. Шу тарзда барча n та умумлашган координаталар учун қатор

$$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$$

мусбат қийматларни оламиз. Агар уларнинг энг кичигини Π^* билан белгиласак, у ҳолда координаталардан бири миқдор жиҳатдан ϵ га тенг, қолганлари абсолют қиймати бўйича ϵ дан катта бўлмаганда

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq \Pi^*$$

бўлиши муқаррар. Система координаталарига абсолют қиймати ϵ дан кичик бўлган $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$ қийматларни бериб мувозанат ҳолатидан оғдирамиз ва система нуқталарига $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$ бошланғич тезликлар берамиз.

Агар системага идеал ва стационар боғланишлар қўйилган бўлса, боғланиш реакция кучларининг системанинг ҳақиқий кўчишидаги ишлари нолга тенг бўлади. Бинобарин, бундай ҳаракат учун энергиянинг сақланиш қонуни ўринли бўлади:

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0.$$

Ҳаракат давомида системанинг кинетик энергияси ҳамisha мусбат бўлгани учун бу ифодадан

$$\Pi < T_0 + \Pi_0 \quad (24.65)$$

тенгсизлик келиб чиқади. D соҳада потенциал энергия Π мусбат қийматга эга бўлгани учун ($T_0 + \Pi_0$) ҳам албатта мусбат бўлади. T_0 ва Π_0 узлуксиз бўлгани туфайли $T_0 + \Pi_0$ йиғиндини исталганча кичик қилиб танлаб олиш мумкин. Бошқача айтганда, ϵ дан кичик шундай η сонни топиш мумкинки, $|q_{i0}| < \eta$ ва $|\dot{q}_{i0}| < \eta$ бўлганда

$$T_0 + \Pi_0 < \Pi^*$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. Бу тенгсизлик q_{i0} ва \dot{q}_{i0} ларнинг сон-саноксиз қийматлари учун ўринли бўлади.*

Шундай қилиб, (24.65) га асосан

$$\Pi^* - \Pi > 0 \quad (24.66)$$

Умумлашган координаталарнинг бошланғич қийматлари D соҳа ичида ётгани туфайли (24.66) га асосан ҳаракат давомида умумлашган q_i координаталардан бирортаси ҳам ϵ қийматга эриша олмайди (яъни система нуқталари D соҳадан чиқиб кета олмайди), чунки аёв ҳолда $\Pi^* - \Pi$ маърифий қийматга эга бўлиши керак; бу натижа (24.66) га зиддир.

Демак, системанинг текширилаётган ҳолати устувордир. \square

Бу теореманинг қатъий исботи 1847 йида Лезжен Дирихле томонидан берилган. Шу сабабли бу теорема *Лагранж — Дирихле теоремаси* деб ҳам аталади.

Агар потенциал энергия таркибида айрим умумлашган координаталар ошқор равишда қатнашмаса, у ҳолда мазкур координаталарга нисбатан система бефарқ мувозанатда бўлади.

* Масалан, бу тенгсизлиكنи қаиоатлантерич учун $T_0 < \frac{\Pi^*}{2}$ ва $\Pi_0 < \frac{\Pi^*}{2}$

ўринли бўладиган q_{i0} ва \dot{q}_{i0} ларни олиш етарли.

Масалан, горизонтал ясовига эга бўлган цилиндрик сирт устидаги сир моддий нуқтанинг мувозанати қаралаётганда x ўқни цилиндрининг ясовисини бўйлаб йўналтирсак, x координатага шиббатли нуқтанинг мувозанати боғ'арқ мувозанатдан иборат бўлади.

Потенциалли кучлар таъсирдаги, эркинлик даражаси бирга тенг бўлган системанинг мувозанати б'гта

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \quad (24.67)$$

тенглама билан ифодаланади.

Системанинг қаралаётган мувозанат ҳолати устувор эканлигини аниқлаш учун системанинг потенциал энергияси бу ҳолатда минимум қийматга эга бўлиш-бўлмаслигини текшириш керак.

Агар $q = q_0$ мувозанат ҳолатида

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} > 0 \quad (24.68)$$

бўлса, потенциал энергия минимум қийматга эришади.

Мабодо $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} = 0$ бўлса, иккинчи ҳосила потенциал энергиянинг минимум қийматга эга бўлиш аломатини ифодамай олмайдди. Бу ҳолда потенциал энергиянинг навбатдаги $\left(\frac{\partial^k \Pi}{\partial q^k} \right)_{q=q_0}$ ҳосилаларини ҳисоблашга тўғри келади.

Агар потенциал энергиянинг биринчи нолга тенг бўлмаган ҳосиласи жуфт тартибли ва мусбат қийматга эга бўлса, у ҳолда $q = q_0$ мувозанат ҳолатида потенциал энергия минимум қийматга эга бўлади, бинобарин, системанинг бу мувозанат ҳолати устувор мувозанатдан иборат бўлади.

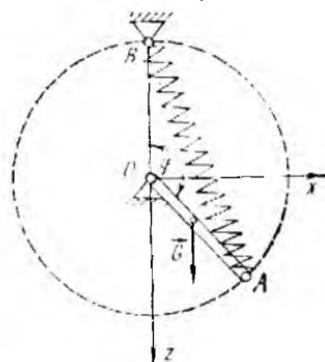
Агарда потенциал энергиянинг биринчи нолга тенг бўлмаган ҳосиласи тоқ тартибга эга бўлса, у ҳолда $q = q_0$ да на минимум ва на максимум мавжуд бўлмайди.

Потенциал энергия минимум қийматга эга бўлмаганли система мувозанатини А. М. Ляпунов теоремалари воситасидан аниқланади.*

24.9- масала. Қўзғалмас O шарир апрофида айланган олаётган сферлиги G ва узунлиги l га тенг OA стерженининг учига AB пружина бириктирилган (24.18- расм). Агар қўзғалмас пружинанинг узунлиги l ва пружинанинг бикирлик коэффицентини c га тенг бўлса, стерженининг устувор мувозанат ҳолати аниқлансин.

Ечиш. Стерженнинг ҳолатини φ бурчак билан аниқлаш мумкин. Шу сабабли умумлашган координата учун $\varphi = \varphi$ бурчакни оламиз. Системанинг потенциал энергияси стержень сферлик кучининг потенциал энергияси Π_1 ва деформацияланувчи пружинанинг потенциал энергияси Π_2 ларини йиндидисдан иборат

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$$



24.18- расм.

* Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М: Гостехиздат, 1950.

Бунда

$$П_1 = -G z_C, \quad П_2 = \frac{c h^2}{2}$$

бўлиб, z_C ва h лар

$$z_C = \frac{l}{2} \cos(180^\circ - \varphi) = -\frac{l}{2} \cos \varphi;$$

$$h = AB - l = 2l \sin \frac{\varphi}{2} - l = l \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} - 1 \right)$$

формулалар ёрдамида аниқланади.

Пайваста системанинг потенциал энергияси учун

$$\Pi = \frac{G l}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} c l^2 \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} - 1 \right)^2$$

теңлик ўринли бўлади.

Потенциал энергиянинг умумлашган координата φ бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини аниқлаймиз:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \left[(2cl - G) l \sin \frac{\varphi}{2} - cl^2 \right] \cos \frac{\varphi}{2};$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} (2cl - G) l \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} (2cl - G) l \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{cl^2}{2} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Системанинг мувозанат ҳолатида

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 \quad \left[(2cl - G) l \sin \frac{\varphi}{2} - cl^2 \right] \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Бу теңликдан системанинг мумкин бўлган иккита мувозанат шартларини олаемиз:

$$1) \quad (2cl - G) l \sin \frac{\varphi_1}{2} - cl^2 = 0, \quad \sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{cl}{2cl - G};$$

$$2) \quad \cos \frac{\varphi_2}{2} = 0, \quad \frac{\varphi_2}{2} = 90^\circ, \quad \varphi_2 = 180^\circ.$$

Система устувор мувозанатда бўлиши учун

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} > 0$$

шарт бажорлигини зарурлигини назарда тутиб, системанинг устувор мувозанат ҳолатида G ва cl орасида қандай муносабат мавжуд бўлишини ҳар иккала ҳола текшириб кўрамиз:

$$\Pi \sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{cl}{2cl - G} \text{ бўлганда}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi = \varphi_1} = \frac{l(cl - G)(3cl - G)}{2(2cl - G)}.$$

Бунда

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} < 1, \quad \frac{cl}{2cl - G} < 1, \quad G < cl$$

бўлгани туфайли

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi = \varphi_1} > 0$$

шарт бажариллади. Бинобарин, системанинг φ_1 бурчакка мос мувозанат ҳолати устувордир.

2) $\varphi_2 = 180^\circ$ бўлса,

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi = \varphi_2} = \frac{(G - cl)l}{2}.$$

У ҳолда $G > cl$ шарт бажарилганда

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi = \varphi_2} > 0$$

тенгсизлик ўринли бўлади ва системанинг бундай мувозанат ҳолати устувордир.

24.18- §. Системанинг устувор мувозанати яқинидаги кинетик ва потенциал энергиялари

Агар система нуқталарига голономли стационар боғланишлар қўйилса, $\vec{r}_v = \vec{r}_v(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ҳамда $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} = 0$ бўлади. Буни

назарда тутиб, (24.47) га асосан мазкур системанинг кинетик энергияси учун

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (24.69)$$

формулани оламиз. Бунда A_{ij} коэффициентлар умумлашган координаталарнинг функциясида ва $A_{ij} = A_{ji}$ ($i, j = \overline{1, n}$).

Агар системанинг мувозанат ҳолати устувор бўлса, системанинг бундай ҳолати учун потенциал энергия муҳим қўлланмага эга бўлади. Потенциал энергия ихтиёрий ўлчовларга аниқланганда туфайли координаталар ёқинда системанинг мазкур мувозанат ҳолатида орасик, бу ҳолатда потенциал энергияни нолга тенг деб қараш мумкин:

$$\Pi_0 = \Pi(0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (24.70)$$

$A_{ij}(q_1, \dots, q_n)$ коэффициентлари ва $\Pi(q_1, \dots, q_n)$ потенциал энергияни $q_i = 0$ ($i = \overline{1, n}$) мувозанат ҳолати яқинида Тейлор қаторига билам:

$$A_{ij} = A_{ij}|_0 + \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_\alpha}\right)_0 q_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left(\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0 q_\alpha q_\beta + \dots \quad (24.71)$$

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j + \dots \quad (24.72)$$

Системанинг устувор мувозанат ҳолатидаги кичик ҳаракатини тақриришлаш учун кинетик ва потенциал энергияси таркибидан q_i

ва q_i ларга нисбатан учинчи ва ундан юқори тартибли кичик миқдорларни эътиборга олмаймиз. У ҳолда (24.71) да фақат $(A_{ij})_0$ биринчи ҳад билан чегараланишга тўғри келади. Чунки (24.69) га асосан қолган бошқа ҳадларни $q_i q_j$ га кўпайтирганда учинчи ва ундан юқори тартибли кичик миқдорларни оламиз. Натижада системанинг кинетик энергияси учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (24.73)$$

бунда $a_{ij} = (A_{ij})_0$ коэффициентлар ўзгармас бўлиб, $a_{ij} = a_{ji}$ муносабатларини қаноатлантиради.

(24.72) да (24.70) ва (24.30) ларни назарда тутиб, учинчи ва ундан юқори тартибли кичик миқдорларни эътиборга олмасак,

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j \quad (24.74)$$

бўлади, бунда

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_2, \quad (i, j = \overline{1, n}) \quad (24.75)$$

ўзгармас бўлиб, *бикирлик коэффициентлари* дейилади ва $c_{ij} = c_{ji}$ муносабатлар ўринли бўлади.

Маълумки, ушбу кўринишдаги

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (24.76)$$

иккинчи даражали бир жинсли кўнхад квадратик форма дейилади.

Фақат мусбат қийматга эга ва x_1, \dots, x_n ўзгарувчиларнинг барчаси нолга тенг қийматларни қабул қилгандагина нолга тенг бўлишдан квадратик форма *мусбат аниқланган квадратик форма* дейилади.

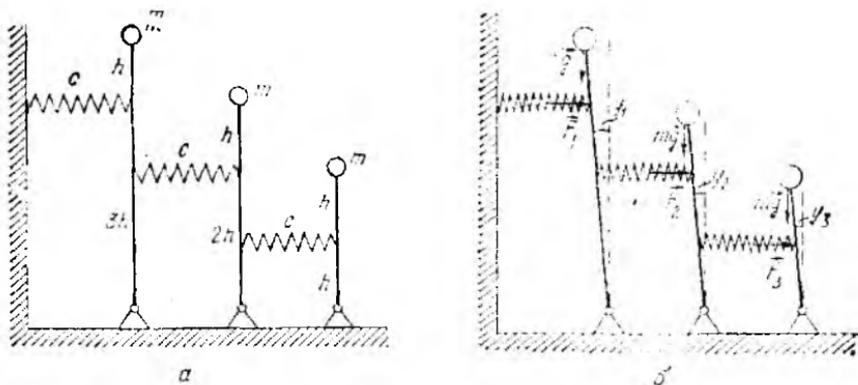
Бу таърифга кўра, системанинг кинетик энергияси мусбат квадратик формадан иборат бўлади. Шунингдек, мувозанат ҳолатида $\Pi_0 = 0$ ва мувозанат ҳолати яқинида потенциал энергия мусбат, яъни

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j > 0 \quad (24.77)$$

бўлгани учун у ҳам мувозанат ҳолати яқинида мусбат аниқланган квадратик формадан иборат бўлади.

Нетапан квадратик форманинг мусбат аниқланганлиги қуйидаги *Д. Д. Сильвестр (1814—1897) критерийси* орқали аниқланади: *квадратик форма мусбат аниқланган бўлиши учун мазкур форма матрицасининг барча бош диагональ минорлари, яъни*

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (24.78)$$



24.19- расм.

катталиклар мусбат бўлиши зарур ва етарлидир.

Бу критерийдан фойдаланиб Лагранж-Дирихле теоремасини қуйидаги тартибда қўллаш мумкин: потенциал энергиянинг мувозанат ҳолати яқинида q_1, q_2, \dots, q_n ларнинг даражаси бўйича иккинчи даражали кичик миқдоргача аниқликда қаторга ёйиб, биқирлик коэффициентлари c_i ларни топиб, (24.78) детерминантларини тузимиз. Агар $\Delta_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) шартлар bajarилса, системанинг мувозанат ҳолати устувор бўлади.

24.10- масала. 24.19- расм, а да тасвирланган маятниклар системаси вертикал мувозанат ҳолатининг устуворлиги текширилсин; биринчи маятник стерженининг узунлиги $4h$, иккинчисиники $3h$ ва учинчисиники эса $2h$ га тенг. Ҳар би маятникларнинг массалари ва пружиналарнинг биқирлиги бир хилга бўлиб, m с равишда m ва c га тенг. Пружиналар биқиртирилган нуқталардан маятник шарчаларининг ағирлик марказларигага бўлган масофага h га тенг. Стерженьларнинг массалари ҳисобга олинмасин, шарчалар эса моддий нуқталар деб қаралсин; маятниклар вертикал вазиятда бўлганда пружиналар кучланмаган ҳолатда бўлади.

Ечиш. Системанинг эркинлик даражаси 3 га тенг. Ҳудудлашган координатлар учун маятник стерженларнинг вертикалдан сгиш бурчакларини оламиз (24.19- расм, б)

$$q_1 = \varphi_1, \quad q_2 = \varphi_2, \quad q_3 = \varphi_3.$$

Пружиналарнинг эластиклик кучларини $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ билан белгиласек, бу кучларнинг миқдори қуйидагича аниқланади:

$$F_1 = 3ch\varphi_1, \quad F_2 = 2hc(\varphi_2 - \varphi_1), \quad F_3 = hc(\varphi_3 - \varphi_2).$$

Системанинг потенциал энергиясини деформацияланган пружиналарнинг потенциал энергияси Π_I ва ағирлик кучлари потенциал энергиялари Π_{II} ning йиғиндисида иборат деб қараймиз:

$$\Pi_I = \frac{9h^2}{2} c\varphi_1^2 + \frac{4h^2}{2} c(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{h^2}{2} c(\varphi_3 - \varphi_2)^2;$$

$$\Pi_{II} = -4mgh(1 - \cos \varphi_1) - 3mgh(1 - \cos \varphi_2) - 2mgh(1 - \cos \varphi_3),$$

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II} = \frac{9h^2}{2} c\varphi_1^2 + 2h^2 c(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{h^2}{2} c(\varphi_3 - \varphi_2)^2 -$$

$$-4mgh(1 - \cos \varphi_1) - 3mgh(1 - \cos \varphi_2) - 2mgh(1 - \cos \varphi_3).$$

Потенциал энергияни φ_1 , φ_2 ва φ_3 ларнинг даражаси бўлича қаторга ёзмиз ва бунда

$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{\varphi_1^2}{2} + \dots, \quad \cos \varphi_2 = 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} + \dots, \quad \cos \varphi_3 = 1 - \frac{\varphi_3^2}{2} + \dots$$

муносабатлар ўринини бўливида эътиборга оламиз. Агар учинчи ва ундан юқори тартибли кичик муқдорларни эътиборга олмасак, системанинг потенциал энергияси

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{9h^2}{2} c \varphi_1^2 + 2h^2 c (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{h^2}{2} c (\varphi_3 - \varphi_2)^2 - \\ &- 2mgh \varphi_1^2 - \frac{3}{2} mgh \varphi_2^2 - mgh \varphi_3^2 \end{aligned}$$

формула ёрдамида аниқланади.

(24.75) га асосан биқирлик коэффицентларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} \right)_0 = 13h^2 c - 4mgh, \\ c_{22} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} \right)_0 = 5h^2 c - 3mgh, \\ c_{33} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_3^2} \right)_0 = h^2 c - 2mgh, \\ c_{12} = c_{21} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \right)_0 = -4h^2 c, \\ c_{13} = c_{31} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_3} \right)_0 = 0, \\ c_{23} = c_{32} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_3} \right)_0 = -h^2 c. \end{aligned}$$

Сильвестр критерийини қўллаб, қуйидаги устувор мувозанат шартларини оламиз:

$$1) \Delta_1 = c_{11} > 0,$$

$$13h^2 c - 4mgh > 0; \quad (1)$$

$$2) \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 13h^2 c - 4mgh & -4h^2 c \\ -4h^2 c & 5h^2 c - 3mgh \end{vmatrix} > 0,$$

$$49h^4 c^2 - 59mgh^3 c + 12m^2 g^2 h^2 > 0; \quad (2)$$

$$3) \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 13h^2 c - 4mgh & -4h^2 c & 0 \\ -4h^2 c & 5h^2 c - 3mgh & -h^2 c \\ 0 & -h^2 c & h^2 c - 2mgh \end{vmatrix} > 0,$$

$$36h^6 c^3 - 153mgh^5 c^2 + 130m^2 g^2 h^4 c - 24m^3 g^3 h^3 > 0. \quad (3)$$

Шундай қилиб, системанинг устувор мувозанат шартлари (1) (2), (3) теңsizликлар билан ifodalanadi.

24.19-§. Эркинлик даражаси бирга тенг механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранишлари

Эркинлик даражаси бирга тенг механик системага қўйилган ҳоломонли боғланишлар стационар боғланишлардан иборат бўлса, бундай системанинг мувозанат ҳолати яқинидаги кичик ва потенциал энергиялари (24.73) ва (24.74) га асосан қўйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad (24.79)$$

бунда $c = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0$.

Айталик, $c > 0$ бўлсин. Бу ҳолда потенциал энергия минимумга эга бўлади ва Лагранж — Дирихле теоремасига қўра, системанинг мувозанати устувор бўлади.

Қўриқлаётган ҳол учун (24.79) ни назарда тутиб, Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаси

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

ни тузсак,

$$a \ddot{q} = -c q$$

ёки

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (24.80)$$

Бунда

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}}. \quad (24.81)$$

(24.80) тенглама (17.2) га ўхшашдир. (17.2) битта моддий нуқтанинг гармоник ҳаракатини, (24.80) эса эркинлик даражаси бирга тенг механик системанинг ҳаракатини характерлайди.

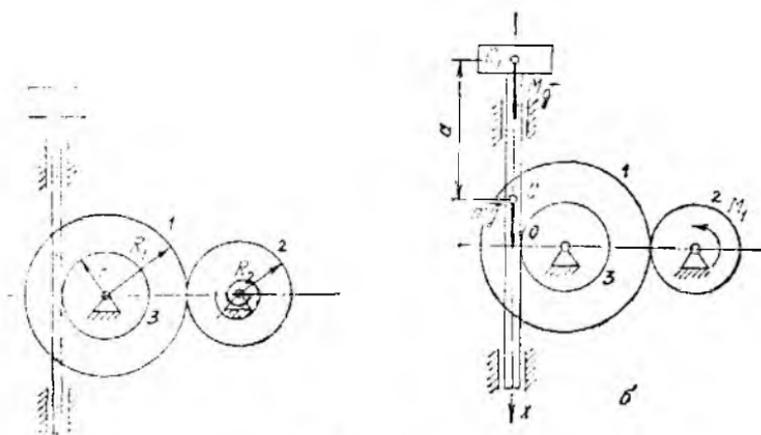
(24.80) тенгламанинг умумий ечимини (17.3) ва (17.7) га ўхшаш бир-бирга эквивалент бўлган қўйидаги икки хил кўринишда ёзиш мумкин

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

ёки

$$q = a_1 \sin(kt + \alpha). \quad (24.82)$$

Бу тенгламалардаги C_1 ва C_2 ёки a_1 ва α лар интеграллаш доимийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади. (24.81) тенглик ёрдамида тебранишларнинг доиравий частотаси ҳисобланади.



24.20- расм.

Тебранишлар даври учун

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}} \quad (24.83)$$

формула ўринли бўлади.

24.11- масала. Массаси M га тенг бўлган юк, 2 ҳамда бир-бирига маҳкам бириктирилган 1 ва 3 тишли вилдирақлар ёрдамида ҳаракатга келтириладиган m массали тишли рейка учун ўрнатилган (24.20- расм, а). 1 ва 3 тишли вилдирақларнинг инерция моментлари I_1 , 2 вилдирақники esa I_2 ; радиуслари мос равишда R_1 , r , R_2 га тенг. 2 вилдирақ биқирлик коэффициентини c га тенг ва расмга шартли равишда сингал пружина тарзида берилган етакловчи валга бириктирилган.

Системанинг эркин тебраниш частотаси аниқлаини.

Ениш. Системанинг ҳолатини етакловчи валнинг айланish бурчаги φ_2 билан аниқлаш мумкин. Бир-бирига, системанинг эркинлик даражаси бирга тенг бўлади. Умумийлан координата учун $q = \varphi_2$ ни оламиз. Бошларинч паёнда тишли рейканинг айланиш маркази унинг r радиусли вилдирақ билан тикилашган O нуқтасидан бўлади. Яъни $t = 0$ да $x = 0$, $x_1 = -a$ бўлади. Бунда x_1 билан юкнинг бошланғич координатаси белгиланган.

Расмга юк ва тишли рейкаларнинг оғирлик кучлари Mg ва mg ларини ҳамда етакловчи валнинг бурчлигига қарам-қарши йўналган эластиклик жуфт momenti M_1 ни таъсирлаймиз (24.20- расм, б).

Вилдирақнинг оғирлик маркази C ҳолатини эгаллаганда унинг координатаси x , жуфт моментининг esa $x = -a$ га тенг бўлади; вилдирақ 2 esa $\varphi_2 cm + \varphi_2$ сўришкани бўлади. Бунда $\varphi_2 cm$ билан вилдирақ 2 нинг статик мувозанатига мос айланish бурчани белгиланган.

Агар φ_2 бурчани кичик деб қарасак, у ҳолда вилдирақ 2 га миқдор жаҳдлан

$$M_1 = c(\varphi_2 cm + \varphi_2)$$

га тенг эластиклик жуфт momenti таъсир этади.

Системанинг потенциал энергияси юк ва тишли рейка оғирлик кучларининг потенциал энергиялари Π_1 , Π_2 ҳамда етакловчи валнинг эластиклик momenti потенциал энергияси Π_3 ларининг йиндисидаи иборат

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3.$$

Бунда

$$\Pi_1 = -m g x, \quad \Pi_2 = -Mg(x - a),$$

$$\Pi_3 = \frac{1}{2} c (\varphi_{2cm} + \varphi_2)^2 - \frac{c \varphi_{2cm}^2}{2}$$

бўлиб, x , φ_1 ва φ_2 лар орасида қуйидаги муносабат мавжуд бўлади:

$$x = r \varphi_1 = r \frac{R_2}{R_1} \varphi_2.$$

Шундай қилиб, системанинг потенциал энергияси учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\begin{aligned} \Pi &= -(M + m) g r \frac{R_2}{R_1} \varphi_2 + Mg a + \frac{1}{2} c (\varphi_{2cm} + \varphi_2)^2 - \frac{c \varphi_{2cm}^2}{2} = \\ &= -(M + m) g r \frac{R_2}{R_1} \varphi_2 + Mg a + c \varphi_{2cm} \varphi_2 + \frac{c \varphi_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Спирал пружинанинг статик деформациясига мос мувозанат ҳолатида $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}\right)_{\varphi_2=0} = 0$ бўлгани учун

$$-(M + m) g r \frac{R_2}{R_1} + c \varphi_{2cm} = 0$$

теплик ўрничи бўлади. Бунга назарда тутиб, системанинг потенциал энергияси учун қуйидаги ифодаси эга бўламиз:

$$\Pi = Mg a + \frac{1}{2} c \varphi_2^2.$$

Потенциал энергиянинг φ_2 бўйича ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = c \varphi_2. \quad (1)$$

$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} = c > 0$ бўлгани учун потенциал энергия минимум қийматга эга бўлади ва

Лагранж-Дирихле теоремасига кўра, $\varphi_2 = 0$ атрофидаги системанинг мувозанати устувордир.

Системанинг кинетик энергияси

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (2)$$

бўлиб, бунда T_1 ва T_2 лар мос равишда 1, 3 ва 2 гилдиракларнинг; T_3 эса юк билан тишли рейканинг кинетик энергиясини ифода қилади.

1, 3 ва 2 гилдираклар бўғиммас ўқлар атрофида айланма ҳаракатда, тишли рейка ва юк x ўқ бўлиб тўғри эниқли ҳаракатда бўлгани учун

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2.$$

Бунда

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{R_2}{R_1} \dot{\varphi}_2, \quad \dot{x} = r \dot{\varphi}_1 = r \frac{R_2}{R_1} \dot{\varphi}_2$$

бўлишни назарда тутиб, (2) ни қуйидагича ёзамиз:

$$T = \frac{1}{2} \left[I_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + I_2 + (M + m) r^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right] \dot{\varphi}_2^2 \quad (3)$$

(3) да $a = I_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + I_2 + (M + m) r^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2$ белгилани киритсак, кинетик энергиянинг ҳосилалари учун қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = a \dot{\varphi}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = a \ddot{\varphi}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0. \quad (4)$$

Система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламасини

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} \quad (5)$$

кўринишда ёзиб, (1) ва (4) ни (5) га қўйсак,

$$a \ddot{\varphi}_2 = - c \varphi_2$$

ёки

$$\ddot{\varphi}_2 + k^2 \varphi_2 = 0.$$

Бунда

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{R_1}{R_2} \sqrt{\frac{c}{(M + m) r^2 + I_1 + I_2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2}}$$

системанин кичик тебранилар доирасий частотасини ифодалайди.

24.20-§. Эркинлик даражаси битта бўлган системанин сўнувчи тебранма ҳаракати

Техникада учрайдиган кўпгина масалаларни ечишда эркинлик даражаси бирга тенг механик система нуқталарига потенциалли кучлардан ташқари, муҳитнинг

$$\vec{R}_v = -\mu_v \vec{v}_v = -\mu_v \dot{r}_v \quad (24.84)$$

кўринишдаги физикли қаршиллик кучи таъсир этадиган ҳоллар учрайди. Бунда μ_v қаршиллик коэффициентини ифодалайди. Системанин ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш учун

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \quad (24.85)$$

формадаги Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларидан фойдаланамиз (24.85) да

$$Q = Q^{\Pi} + Q^R, \quad (24.86)$$

бунда Q^{Π} система нуқталарига таъсир этувчи потенциалли кучларга мос, Q^R эса қаршиллик кучи R_v га мос умумлашган кучларни ифодалайди.

Q^H ни

$$Q^H = - \frac{\partial H}{\partial q} = -cq, \quad (24.87)$$

Q^R (ни (24.22) га асосан

$$Q^R = \sum_{v=1}^N \vec{R}_v \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q} \quad (24.88)$$

формула ёрдамида аниқланади.

(24.88) да $\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q} = \frac{\dot{\vec{r}}_v}{\dot{q}}$ муносабат ўринли бўлишини назарда

тутиб, \vec{R}_v ning қийматини қўямиз:

$$Q^R = - \sum_{v=1}^N \mu_v \vec{r}_v \frac{\dot{\vec{r}}_v}{\dot{q}} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{v=1}^N \frac{\mu_v \dot{r}_v^2}{2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}, \quad (24.89)$$

(24.89) даги $\Phi = \sum_{v=1}^N \frac{\mu_v \dot{r}_v^2}{2}$ га *диссипатив функция* ёки

Релей функцияси дейилади. Бу функция ўзининг тузилиши бўйича системанинг кинетик энергиясига ўхшаш, лекин унда нуқталарнинг массалари ўрнида қаршилик коэффициентлари қатнашади.

Φ функцияни q ва \dot{q} орқали ифодалаймиз. Бунинг учун $\vec{r}_v = \vec{r}_v(q)$, $\dot{\vec{r}}_v = \frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q} \dot{q}$ эканлигини эътиборга оламиз:

$$\Phi = \sum_{v=1}^N \frac{\mu_v \dot{r}_v^2}{2} = \frac{\dot{q}^2}{2} \sum_{v=1}^N \mu_v \left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q} \right)^2 = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2, \quad (24.90)$$

бунда $B(q) = \sum_{v=1}^N \mu_v \left(\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial q} \right)^2$ ўзгарувчи бўлиб, уни $q = 0$ атрофида q ning даражалари бўйича Тейлор қаторига ёзимиз:

$$B(q) = B_0 + \left(\frac{\partial B}{\partial q} \right)_0 q + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots \quad (24.91)$$

Агар диссипатив функцияни ҳисоблашда учинчи ва ундан юқори тартибли кичик миқдорларни эътиборга олмасак, у ҳолда (24.91) да фақат биринчи ҳад B_0 билан чегараланишига тўғри келади, чунки (24.90) га асосан бошқа ҳадларни q^2 га қўпайтиришда учинчи ва ундан юқори тартибли кичик миқдорларни олмаймиз. Бунда $B_0 = \mu$ белгилан келиб, қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu q^2. \quad (24.92)$$

μ катталик ўзгармас бўлиб, умумлашган қаршилик коэффициентини дейилади.

(24.79) ва (24.92) га асосан, Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган кинетик энергиянинг ҳосилаларини ва Q^Φ ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad (24.93)$$

$$Q^\Phi = - \frac{\partial \Phi}{\partial q} = - \mu \dot{q} \quad (24.94)$$

(24.86), (24.87), (24.93), (24.94) ларни (24.85) га қўйиб, эркинлик даражаси бирга тенг системанинг муҳитнинг шизикли қаршилиги таъсиридаги сўнувчи тебранма ҳаракат дифференциал тенгламасини қўйидаги кўринишида оламиз:

$$a\ddot{q} = -cq - \mu\dot{q}$$

ёки

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0, \quad (24.95)$$

булда $\frac{c}{a} = k^2$, $\frac{\mu}{a} = 2n$ белгилашлар киритилган.

(24.95) тенглама моддий нуқтанинг сўнувчи тебранма ҳаракат дифференциал тенгламаси (17.11) га ўхшаш бўлиб, уни интеграллаш 17.3-§ да батафсил баён этилган. (24.95) ни интеграллашда 17.3-§ дагидек учта ҳолни алоҳида-алоҳида кўриши керак: 1) $n < k$ (қаршилик кичик бўлган ҳол); 2) $n > k$ (қаршилик катта бўлган ҳол); 3) $n = k$ (чегаравий ҳол). Биринчи ҳолда механик система мувозанат ҳолати яқинида сўнувчи тебранма ҳаракати, иккинчи ва учинчи ҳолларда эса апернодик ҳаракатда бўлади.

21.21 - §. Эркинлик даражаси бирга тенг механик системанинг мажбурий тебранма ҳаракати

Эркинлик даражаси бирга тенг механик система нуқталарига потенциалли куч, муҳитнинг теъликка пропорционал қаршилик кучи ва вақтнинг функциясидан иборат уйғотувчи куч таъсир этсин. Уйғотувчи кучга мис умумлашган куч

$$Q_1 = H \sin(pt + \delta) \quad (24.96)$$

формула ёрдамида аниқланилган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда (24.87), (24.94) ва (24.96) га асосан, Q умумлашган куч қўйидагича аниқланади:

$$Q = Q^n + Q^\Phi + Q_1 = -cq - \mu\dot{q} + H \sin(pt + \delta). \quad (24.97)$$

(24.93) ва (24.97) ни (24.85) га қўйсак,

$$a \ddot{q} = -cq - \mu \dot{q} + H \sin(pt + \delta)$$

ёки

$$\ddot{q} + 2n \dot{q} + k^2 q = H_0 \sin(pt + \delta) \quad (24.98)$$

тенгламани оламиз. Бунда $H_0 = \frac{H}{a}$.

(24.98) тенглама *тезликка пропорционал қаршилик кучи ва еркинлик даражасидан иборат уйқотувчи куч таъсирида бўлган, эркинлик даражаси бирга тенг системанинг мувозанат ҳолати яқинидаги кичик мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламаларини* ифодалайди. Бу тенглама худди шундай кучлар таъсиридаги нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракат дифференциал тенгламаси (17.49) га ўхшаш бўлиб, уни интеграллаш 17.7-§ да батафсил баён этилган.

Шундай қилиб, эркинлик даражаси бирга тенг механик системанинг мувозанат ҳолати яқинидаги кичик ҳаракатларини ўрганиш моддий нуқтанинг ҳаракатини ўрганишга келтирилади.

24.22* - §. Эркинлик даражаси иккига тенг механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранишлар

Потенциалли кучлар таъсиридаги голономли, стационар боғланишлар қўйилган ва эркинлик даражаси иккига тенг бўлган механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранишларини текшириш учун умумлашган координаталар учун системанинг мувозанат ҳолатидан ҳисобланадиган q_1 ва q_2 координаталарни оламиз. Системанинг мувозанати устувор бўлгани туфайли q_1, q_2 ҳамда \dot{q}_1, \dot{q}_2 лар бундай мувозанат ҳолати яқинида ҳаминша миқдор жиғатдан кичик қийматларга эга бўлади.

Эркинлик даражаси иккига тенг бўлган системанинг кинетик энергияси (21.73) га кўри, қуйидагича аниқланади:

$$T = \frac{1}{2} [a_{11}(q_1, q_2) \dot{q}_1^2 + 2a_{12}(q_1, q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22}(q_1, q_2) \dot{q}_2^2]. \quad (21.99)$$

Инерция коэффициентлари a_{ii} умумий ҳолда q_1 ва q_2 координаталарнинг функциясидан иборат бўлади. Кинетик энергияни иккинчи даража ва кичик миқдоргача аниқликда ҳисоблайдиган бўлсак, a_{ii} нинг q_1 ва q_2 нинг даражаси бўйича Маклорен қаторига ёйганда, бошчи тартибли кичик миқдорларининг эътиборга олишга ҳақли келади:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}(q_1, q_2) &\cong a_{11}(0, 0) = a_{11}, \\ a_{12}(q_1, q_2) &\cong a_{12}(0, 0) = a_{12}, \\ a_{22}(q_1, q_2) &\cong a_{22}(0, 0) = a_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (24.100)$$

Бунда a_{11} , a_{12} , a_{22} инерция коэффициентлари ўзгармас бўлади. Шундай қилиб, эркинлик даражаси иккига тенг бўлган системанинг кинетик энергияси қуйидаги ўзгармас коэффициентли квадратик форма ёрдамида аниқланади:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2). \quad (24.101)$$

Тезлик полдан фарқли бўлганда кинетик энергия мусбат қийматга эга бўлгани туфайли (24.101) квадратик форма (24.78) Сильвестр критерийсини қаноатлантиради. Қўрилаётган система учун бу шартлар қуйидагича ёзилади:

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad (24.102)$$

(24.74) формула ёрдамида эркинлик даражаси иккига тенг системанинг потенциал энергияси аниқланади:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2). \quad (24.103)$$

Устувор мувозанат ҳолати учун (24.103) квадратик форма мусбат аниқланган формадан иборат бўлиб, у (24.78) Сильвестр критерийсини қаноатлантиради;

$$c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \quad (24.104)$$

Қўрилаётган система учун

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \end{aligned} \right\} \quad (24.105)$$

қўрinishидан Лагранж тенгламаларини тузиш учун кинетик ва потенциал энергияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= 0, & \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} &= c_{11}q_1 + c_{12}q_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= a_{12}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= 0, & \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} &= c_{12}q_1 + c_{22}q_2 \end{aligned} \right\} \quad (24.106)$$

(24.106) да $a_{12} = a_{21}$, $c_{12} = c_{21}$ бўлишини эътиборга олиб, (24.105) га кўчирам,

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{12}q_1 + c_{22}q_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24.107)$$

тенгламаларни оламиз

Шундай қилиб, эркин ик даражаси иккига тенг бўлган потенциалли кучлар таъсиридаги механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранма ҳаракат дифференциал тенгламалари иккита иккинчи тартибли ўрғармас коэффициентли бир жинсли тенгламалар системасидан иборат бўлади. Бу тенгламаларнинг умумий ечимини

$$q_1 = A \sin(kt + \epsilon), \quad q_2 = B \sin(kt + \epsilon) \quad (24.108)$$

кўришишида излаймиз. Бунда A , B , k ва ϵ лар интеграллаш доимийлари бўлиб, ҳаракатнинг бошланғич шартларидаги аниқланади.

q_1 ва q_2 ларнинг вақт бўйича иккинчи ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\ddot{q}_1 = -Ak^2 \sin(kt + \epsilon), \quad \ddot{q}_2 = -Bk^2 \sin(kt + \epsilon)$$

ва уларнинг қийматларини (24.92) га қўямиз:

$$\begin{aligned} -a_{11}Ak^2 \sin(kt + \epsilon) - a_{12}Bk^2 \sin(kt + \epsilon) + c_{11}A \sin(kt + \epsilon) + \\ + c_{12}B \sin(kt + \epsilon) = 0, \\ -a_{21}Ak^2 \sin(kt + \epsilon) - a_{22}Bk^2 \sin(kt + \epsilon) + c_{21}A \sin(kt + \epsilon) + \\ + c_{22}B \sin(kt + \epsilon) = 0. \end{aligned}$$

Бу тенгламалар t нинг ҳар қандай қийматларида айнаи бажарилиши учун $\sin(kt + \epsilon)$ олдидаги коэффициентлар полга тенг бўлиши керак:

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}k^2)A + (c_{12} - a_{12}k^2)B = 0, \\ (c_{21} - a_{21}k^2)A + (c_{22} - a_{22}k^2)B = 0. \end{cases} \quad (24.109)$$

Система ҳаракатланганда бу чизиқли бир жинсли алгебраик тенгламалар системаси A ва B га нисбатан полдан фарқли ечимга эга бўлиши керак (акс ҳолда (24.108) га бинсан $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 0$, яъни система тинч ҳолатда бўлади). Шу сабабли (24.109) системанинг детерминанти полга тенг бўлиши керак:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{21} - a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (24.110)$$

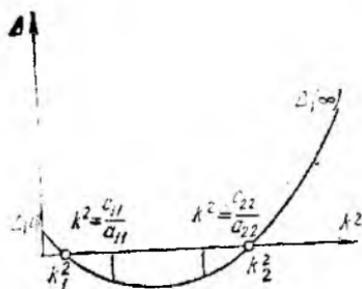
Бу детерминантни очиб ёзсак,

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0, \quad (24.111)$$

(24.110) ёки унга эквивалент бўлган (24.111) тенглама частота-лар тенгламаси дейилади.

Частоталар тенгламасининг k^2 га нисбатан иккала илдизи ҳам ҳақиқий ва мусбат бўлишини исботлаймиз. Бунинг учун (24.110) ёки (24.111) тенгламаларнинг чап томонини $\Delta(k^2)$ билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\Delta(k^2) = (c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2$$



24.21- разм.

тенглама параболанинг тенгласини ифодалайди (24.21- расм). Частоталар тенгласининг k_1^2 ва k_2^2 илдизларига параболанинг k^2 ўқ билан кесишган нуқталари мос келади.

(24.102) ва (24.104) муносабатлардан фойдаланиб, қуйидаги катталикларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta(0) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \quad \Delta(\infty) > 0,$$

$$\Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = -\frac{(a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11})^2}{a_{11}^2} < 0, \quad \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = -\frac{(a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22})^2}{a_{22}^2} < 0.$$

Бундан кўраимизки, $k^2 = 0$ ва $k^2 = \infty$ лар орасида парабола k^2 ўқни k_1^2 ва k_2^2 ларнинг мусбат илдизига мос равишда икки марта кесиб ўтади (мазкур графикни чизишда аниқлик учун $\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}}$ ва $k_1^2 < k_2^2$ деб олинган). Бинобарин, (24.110) ёки (24.111) тенгламаларнинг k^2 га нисбатан иккала илдизи ҳам ҳақиқий ва мусбат қийматга эга бўлади:

$$0 < k_1^2 < \frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}} < k_2^2 < \infty. \quad \blacksquare \quad (24.112)$$

Агар (24.109) тенгламалар бир-бирига боғлиқ бўлмаган тенгламалар системасидан иборат бўлса (масалан, $a_{12} = a_{21} = 0$ ва $c_{12} = c_{21} = 0$ ҳолида), бу ҳолга мос тебраниш частотаси *парциал частота* дейилади ва қуйидагича аниқланади:

$$k_1^* = \sqrt{\frac{c_{11}}{a_{11}}}, \quad k_2^* = \sqrt{\frac{c_{22}}{a_{22}}}.$$

(24.112) формула ва 24.21- расмдан кўраимизки, парциал частоталар k_1 ва k_2 частоталар орасидаги қийматларни қабул қилади, яъни k_1 кичик частотадан катта ва k_2 катта частотадан кичик бўлади. $k_1 = k_2$ бўлиши учун система

$$k^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{22}}{a_{22}}$$

частота билан тебраниши керак. Бу ҳолда парабола k^2 ўққа уринади.

Частоталар тенг бўлганда (24.109) тенгламаларнинг ҳар бири A ва B ларнинг ҳар қандай қийматида ўринини бўладиган айниятлардан иборат бўлади. Бу ҳолда (24.107) тенгламалар q_1 ва q_2 лар аниқланадиган иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган системани ташкил этади ва уларнинг ечимини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$q_1 = A_1 \sin(k\tau + \alpha_1), \quad q_2 = A_2 \sin(k\tau + \alpha_2) \quad (24.113)$$

(24.113) да A_1 , A_2 , ϵ_1 ва ϵ_2 ўзгармаслар ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

Бу ҳолда система гармоник тебраниш ҳаракатда бўлади. Ҳар бир q_1 ва q_2 координаталар синусоида қонуни бўйича бир-бирига боғлиқсиз равишда бир миқ. частота билан ўзгаради.

Система турлича частота билан ҳаракатланган ҳолда k_1^2 ва k_2^2 лардан квадрат ядиз чиқариб, k_1 ва k_2 ларнинг мусбат қийматларидан фойдаланамиз. k_1 ва k_2 ларнинг ҳар бирига (24.108) тенгламаларнинг биттадан хусусий ечими мос келади. Бунда k_1 частотага A_1 , B_1 ва ϵ_1 ҳамда k_2 частотага A_2 , B_2 ва ϵ_2 ларнинг қийматлари мос келади. Хусусий ечимлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмагани туфайли умумий ечим уларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади.

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2), \\ q_2 &= B_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1) + B_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (24.114)$$

A_1 ва B_1 , A_2 ва B_2 сонлар орасида (24.109) тенгламалар билан аниқланадиган боғланиш мавжуд. Бу тенгламаларга k_1 ва k_2 ни қўйсак, у ҳолда (24.109) тенгламалар системасининг детерминанти нолга тенг бўлади. Бинобарин, бу иккита тенгламалар системасининг фақат биттаси боғлиқсиз бўлади. Бу тенгламаларнинг бирортасидан (масалан, биринчисидан) қуйидаги нисбатни аниқлаймиз:

$$\frac{B_i}{A_i} = - \frac{c_{11} - a_{11} k_i^2}{c_{12} - a_{12} k_i^2} = \mu_i, \quad (i = 1, 2). \quad (24.115)$$

Ҳар бир k_1 ва k_2 частоталарнинг қийматига уларга мос μ_1 ва μ_2 тўғри келади. (24.115) воситасида аниқланган

$$B_1 = \mu_1 A_1, \quad B_2 = \mu_2 A_2 \quad (24.116)$$

ифодаларни (24.114) га қўйсак, умумий ечим қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2), \\ q_2 &= \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (24.117)$$

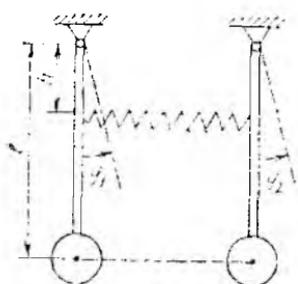
Бу ечимда k_1 ва k_2 частоталар ҳамда μ_1 ва μ_2 коэффициентлар мазкур системани характерловчи маълум сонлар бўлиб, A_1 , A_2 , ϵ_1 ва ϵ_2 ихтиёрий ўзгармаслар ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

(24.117) ёрдамида аниқланадиган умумий ечим формуласидан кўраимизки, эркинлик даражаси иккига тенг системанинг мувозанат ҳолати яқинидаги ҳаракати иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган тебранишлар йиғиндисидан иборат бўлади:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}, \quad q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)}.$$

Бунда

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(1)} &= A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1), \quad q_2^{(1)} = \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \epsilon_1), \\ q_1^{(2)} &= A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2), \quad q_2^{(2)} = \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \epsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (24.118)$$



21.22- расм.

Иккала координаталарда ҳам биринчи тебраниш k_1 , иккинчиси k_2 частота билан содир бўлади. Бу частоталарга мос тебранишлар *системанинг бош тебранишлари* дейилади.

(24.118) дап кўрамизки, барча координаталар ҳар бир бош тебранишда гармоник қонуни асосида бир хил частота ва фаза билан ҳаракатланади.

(24.115) га асосан, μ_1 ва μ_2 ларнинг физик маъноси қуйидагича бўлади: координаталардан бирида бош тебраниш амплитудаси бошқа координатадаги амплитудадан қанча катта (ёки кичик) бўлишини ифодалайди.

24.12-масала. Уzunлиги l ва массаси m бўлган иккита бир хил маятник би-киригига c бўлган, учлари маятникларнинг стерженларига маҳкамланган пружина билан h баландликда бир-бирига боғланган (24.22-расм, а). Маятниклардан бири мувожазат қилинган α бурчакка оёдирилганда кейин системанинг маятниклар мувожазати текислигидаги кичик тебранишлари аниқлансин; маятникларнинг бош-ланғич тезлиги нолга тенг. Маятниклар стерженларининг массалари билан пружина массаси ҳисобга олинмасин.

Ечиш. Системанинг эркинлик даражаси иккита тенг. Умумлашган координаталар учун маятникларнинг вертикалдан олинган бурчаклари $q_1 = \varphi_1$ ва $q_2 = \varphi_2$ ларини оламиз.

Системанинг кинетик энергияси

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2). \quad (1)$$

Системанинг потенциал энергияси mgl оғирлик кучларининг потенциал энергияси Π_1 ва деформацияланган пружинанинг эластиклик кучи потенциал энергияси Π_{II} ларнинг йиғиндисига тенг бўлади:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_{II}.$$

Бунда

$$\Pi_1 = mgl(1 - \cos q_1) + mgl(1 - \cos q_2)$$

ёки Π_1 ни қатъига бўлиб иккинчи даражали кичик миқдорлар билан чеклансак,

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} mgl (q_1^2 + q_2^2).$$

Пружинанинг эластиклик кучининг потенциал энергияси иккинчи даражали кичик миқдорлар билан чеклансак,

$$\Pi_{II} = \frac{1}{2} ch^2 (q_2 - q_1)^2.$$

Шунинг ҳилиб,

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_{II} = \frac{1}{2} [mgl + ch^2] (q_1^2 + q_2^2) - 2ch^2 q_1 q_2. \quad (2)$$

(1) ва (2) дан

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

кўринишидаги Лагранж тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган ҳосилаларни аниқлаймиз

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= m l^2 \dot{\varphi}_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = m l^2 \ddot{\varphi}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} &= (mgl + ch^2) \varphi_1 - 2ch^2 \varphi_2; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} &= m l^2 \dot{\varphi}_2, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = m l^2 \ddot{\varphi}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} &= (mgl + ch^2) \varphi_2 - 2ch^2 \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) ни (3) га қўйиб, барча ҳадаларни чап томонга ўтказсак, системанинг ҳаракат тенгламаларини

$$\left. \begin{aligned} m l^2 \ddot{\varphi}_1 + (mgh + ch^2) \varphi_1 - ch^2 \varphi_2 &= 0, \\ m l^2 \ddot{\varphi}_2 - ch^2 \varphi_1 + (mgh + ch^2) \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

кўринишида ёзиш мумкин.

(5) нинг умумий ечимини (24.108) га асосан

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A \sin(kt + \epsilon), \\ \varphi_2 &= B \sin(kt + \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

кўринишида излаймиз.

(6) дан кўришмакчи,

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= ml^2, \quad a_{22} = ml^2, \\ a_{12} &= 0, \quad c_{11} = mgl + ch^2, \\ c_{22} &= mgl + ch^2, \quad c_{12} = -ch^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(7) ни (24.111) частоталар тенгламаси

$$(c_{11} - a_{11} k^2)(c_{22} - a_{22} k^2) - (c_{12} - a_{12} k^2)^2 = 0$$

га қўйсак,

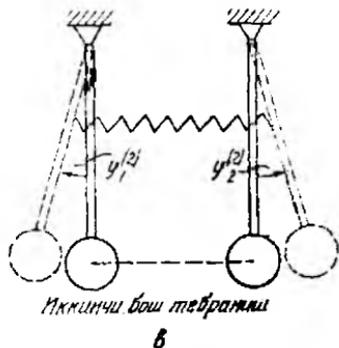
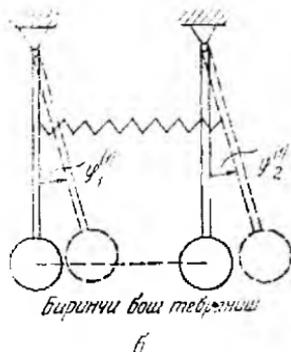
$$(mgl + ch^2 - ml^2 k^2)^2 - c^2 l^4 = 0.$$

Бу тенгламадан беш тебранилишнинг эллиптик кватрени аниқлаймиз

$$k_1^2 = \frac{g}{l}; \quad k_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2ch}{ml^2}, \quad (8)$$

(24.115) га асосан ҳар бир беш тебранилишлар амплитудаларининг нисбатини ту

$$\frac{B_2}{A_1} = u_1 = - \frac{c_{11} - a_{11} k_1^2}{c_{12} - a_{12} k_1^2} = - \frac{mgl + ch^2 - ml^2 \frac{g}{l}}{-ch^2} = +1,$$



24.22-расм

$$\frac{B_2}{A_2} = \mu_2 = \frac{c_{11} - a_{11} k_2^2}{c_{12} - a_{12} k_2^2} = - \frac{mgl + ch^3 - ml^2 \left(\frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^3} \right)}{-ch^2} = -1$$

тенгликларни оламиз.

Шундай қилиб,

$$B_1 = A_1, B_2 = -A_2$$

Натижада (24.114) га асосан (б) тенгламаларнинг умумий ечимини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \\ \varphi_2 &= A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) - A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1), \end{aligned} \right\}$$

бу ердаги k_1 ва k_2 лар (б) тенгликлар ёрдамида аниқланади. (9) га кўра биринчи бош тебраниш учун

$$\varphi_1^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1), \quad \varphi_2^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + \varepsilon_1), \quad (10)$$

иккинчи бош тебраниш учун эса

$$\varphi_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2), \quad \varphi_2^{(2)} = -A_2 \sin(k_2 t + \varepsilon_2) \quad (11)$$

хусусан аниқроқ оламиз. Бу тенгликларга мос бош тебранишлар 24.22-расм, б, о да тасвирланган.

(10) дан кўришимизки, агар биринчи бош тебранишда биринчи маятник ерگا-калдаи $\varphi_1^{(1)}$ бурчакка оғса, иккинчи маятник ҳам худди шу йўналишда $\varphi_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)}$ бурчакка оғса. (11) га кўра иккинчи бош тебранишда биринчи маятник $\varphi_1^{(2)}$ бурчакка оғса, иккинчи маятник унга қарама-қарши йўналишда $\varphi_2^{(2)} = -\varphi_1^{(2)}$ бурчакка оғади.

(9) дан A_1 , A_2 , ε_1 ва ε_2 ихтиёрый ўзгармаслар ҳаракатнинг бошланғич шартларидан аниқланади.

Масаланинг шартига кўра бошланғич $t = 0$ пайтда

$$\varphi_{10} = \alpha, \quad \varphi_{20} = 0, \quad \dot{\varphi}_{10} = 0, \quad \dot{\varphi}_{20} = 0. \quad (12)$$

(9) дан вақт бўйича ҳосилла оламиз:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 k_1 \cos(k_1 t + \varepsilon_1) + A_2 k_2 \cos(k_2 t + \varepsilon_2), \\ \varphi_2 &= A_1 k_1 \cos(k_1 t + \varepsilon_1) - A_2 k_2 \cos(k_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(9) ва (13) га ҳаракатнинг бошланғич шартлари (10) ни қўямиз:

$$\begin{aligned} \alpha &= A_1 \sin \varepsilon_1 + A_2 \sin \varepsilon_2, \\ 0 &= A_1 \sin \varepsilon_1 - A_2 \sin \varepsilon_2, \\ 0 &= A_1 k_1 \cos \varepsilon_1 - A_2 k_2 \sin \varepsilon_2, \\ 0 &= A_1 k_1 \cos \varepsilon_1 - A_2 k_2 \cos \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Бундан

$$\begin{aligned} A_1 k_1 \cos \varepsilon_1 - A_2 k_2 \cos \varepsilon_2 &= 0, \\ \cos \varepsilon_1 &= \cos \varepsilon_2 = 0, \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 2 A_1 \sin \varepsilon_1 - 2 A_2 \sin \varepsilon_2 &= \alpha, \\ A_1 = A_2 &= \frac{\alpha}{2}, \end{aligned} \quad (15)$$

(14) ва (15) ни назарда тутиб (9) ни қўйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\alpha}{2} \left[\sin \left(k_1 t + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(k_2 t + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\alpha}{2} (\cos k_1 t + \cos k_2 t) = \\ &= \alpha \cos \frac{k_1 + k_2}{2} t \cos \frac{k_1 - k_2}{2} t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{\alpha}{2} \left[\sin \left(k_1 t + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(k_2 t + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\alpha}{2} (\cos k_1 t - \cos k_2 t) = \\ &= \alpha \sin \frac{k_1 + k_2}{2} t \sin \frac{k_2 - k_1}{2} t. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, (12) бошланғич шартларга мос бўлган (5) тенгламанинг хусусий ечими қўйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha \cos \frac{k_1 + k_2}{2} t \cdot \cos \frac{k_1 - k_2}{2} t, \\ \varphi_2 &= \alpha \sin \frac{k_1 + k_2}{2} t \cdot \sin \frac{k_2 - k_1}{2} t. \end{aligned}$$

24.23*-§. Устувор ҳаракат ҳақида тушунча

Динамиканинг иккинчи асосий масаласини ечиш натижасида система ҳаракат дифференциал тенгламаларининг берилган кучлар ва бошланғич шартларга мос ечимини аниқлаймиз. Бироқ масалادا берилган бошланғич шартлар ҳақиқатда бир оз ўзгариши мумкин бўлган ҳолларни ҳам қарашга тўғри келади. Масалан, снаряд, ракета ёки самолётнинг бошланғич тезлиги ҳаминча ҳисобланган бошланғич тезлик билан устма-уст тушавермайди. Бундан ташқари, система ҳаракати лавомида унга масалани ечишда назарда тутилмаган оний кучлар ёки вақтинча кучлар таъсир этадиган ҳоллар ҳам учрайди. Масалан, самолёт учаётганда ҳавонинг зичлиги ўзгариши натижасида қаршилик кучи ўзгариши ёки бошқа қўшимча кучлар таъсир этиши мумкин. Бошланғич пайт учун бундай қўшимча кучларнинг таъсири тўхтаган пайтни олиб, иккинчи ҳолни биринчи ҳолга келтириш мумкин.

Берилган кучлар ва шартларга мос бўлган ҳаракатни *асосий ҳаракат*, берилган кучлар ва ўзгарган бошланғич шартларга мос бўлган ҳаракатни эса, *уйғотилган ҳаракат* деб атаيمиз. Асосий ҳаракат содир бўладиган бошланғич шартлар билан ўзгарган бошланғич шартлар орасидаги фарқ кичик бўлганда, уйғотилган ҳаракатнинг асосий ҳаракатга яқин бўлиши мўҳим амалий аҳамиятга эга. Шу маънода асосий ҳаракатни устувор деб қараш мумкин.

Системанинг устувор ҳаракатини аниқроқ таърифлаш учун ҳолати q_1, q_2, \dots, q_n координаталар билан аниқланадиган ва эркинлик даражаси n га тенг бўлган механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламаларини қуйидаги $s = 2n$ та биричи тартибли дифференциал тенгламаларга келтираимиз:

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(t, y_1, y_2, \dots, y_s), \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (24.119)$$

Бунда y_i система нуқталарининг координаталари, тезликлари ёки уларнинг бирор функциясидан иборат қандайдир параметрларни ифода қилади.

Айтайлик,

$$y_j = f_j(t)$$

берилган $t = t_0$ да $y_s = y_{s0}$ бошланғич шартларга мос бўлган (24.119) тенгламаларининг хусусий ечимини ифодаласин. Бу хусусий ечимга мос ҳаракатни асосий ҳаракат учун олсак, (24.119) тенгламанинг бошқа ҳар қандай бошланғич шартлардаги хусусий ечимларига мос ҳаракатлар эса *уйғотилган ҳаракатларни* ифода қилади. Уйғотилган ҳаракатнинг асосий ҳаракатдан огиши y_s ларнинг айирмаси билан аниқланади.

Устувор ҳаракатга А. М. Дяпунов томонидан берилган таърифларни келтираимиз.

Агар иситилганча кичик мусбат ϵ сон учун *унга* боғлиқ шундай мусбат η сон топилсаки, бошланғич $t = t_0$ пайтида

$$|y_j(t_0) - f_j(t_0)| \leq \eta \quad (24.120)$$

шартлар бажариладиган барча уйғотилган ҳаракатлар учун

$$|y_j(t) - f_j(t)| < \epsilon \quad (24.121)$$

тенгсизликлар бажарилса, системанинг бундай асосий ҳаракати устувор дейилади.

Агар бирор ҳайд қилинган ϵ сон учун иситилганча кичик шундай $\eta < \epsilon$ сонни топиши мумкин бўлсаки, (24.120) тенгсизлик бажариладиган бирорта уйғотилган ҳаракат учун вақтнинг бирор пайтида

$$|y_j(t) - f_j(t)| = \epsilon \quad (24.122)$$

тенглик ўринли бўлса, системанинг бундай ҳаракати ноустувор ҳаракат дейилади.

24.24*-§. Уйғотилган ҳаракат дифференциал тенг- малари

Ҳаракатнинг устуворлигини ўрганиш учун ҳаракат тенгласида

$$x_j = y_j - f_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (24.123)$$

тенглик ёрдамида аниқланадиган янги ўзгарувчига ўтамиз. Бунда $f_j(t)$ асосий ҳаракатга мос бўлган (24.119) тенгламанинг хусусий ечимини; x_j эса асосий ҳаракатдан оёқинини ифодалайди. Янги ўзгарувчилар орқали ифодаланган қуйидаги тенгламалар

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, \dots, x_s) \equiv Y_j(t, x_1 + f_1, \dots, x_s + f_s) - Y_j(t, f_1, \dots, f_s) \quad (24.124)$$

уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламалари дейилади.

x_j ўзгарувчилар орқали (24.120) ва (24.121) тенгсизликларини

$$|x_j(t_0)| \leq \eta, \quad (24.125)$$

$$|x_j(t)| < \varepsilon \quad (24.126)$$

кўринишида ёзиш мумкин. Шу сабабли устувор ҳаракатга яна қуйидаги таърифни бериш мумкин.

Агар исталганча кичик мусбат ε сон учун шундай мусбат η сон топилсаки, бошланғич $t = t_0$ пайтда (24.125) тенгсизликлар бажариладиган барча уйғотилган ҳаракатлар учун (24.126) тенгсизликлар ўринли бўлса, системанинг бундай асосий ҳаракати устувор дейилади.

Агар асосий ҳаракат устувор бўлса ва барча уйғотилган ҳаракатлар учун (24.125) ни қаноатлантирувчи шундай исталганча кичик η сон топилсаки,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t) = 0 \quad (24.127)$$

шартлар бажарилса, у ҳолда асосий ҳаракат асосий кичик устувор ҳаракат дейилади.

24.13- масала. Ҳаракати

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x - x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - y - x^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

тенгламалар билан ифодаланадиган нуқтанинг мувозанат ҳолати яқинидаги уйғотилган ҳаракат тенгламалари тузилсин.

Ечиш. Системанинг мувозанат ҳолати

$$\begin{aligned} y - x - x^2 &= 0, \\ 3x - y - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

тенгламалар ҳисобидан аниқланади. Бу тенгламаларни биргаликда ечиб, қуйидаги иккита мувозанат ҳолатини аниқлаймиз:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 2.$$

$x_1 = 0, y_1 = 0$ мувозанат ҳолатига мос уйғотилган ҳаракат тенглмаларини чиқариш учун

$$x = x_1 + \xi, y = y_1 + \eta$$

тенгликлар билан аниқланадиган янги ўзгарувчиларга ўтамиз. Уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламалари худди (1) га ўхшаш бўлиб, фақат унда янги ўзгарувчилар қатнашади:

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta - \xi - \xi^2,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = 3\xi - \eta - \xi^2,$$

$x_2 = 1, y_2 = 2$ мувозанат ҳолати яқинидаги ҳаракат тенгламаларини чиқариш учун x ва y ўрнига

$$x = 1 + \xi, y = 2 + \eta$$

тенгликлар билан аниқланадиган ξ ва η ўзгарувчиларни киритамиз. Бу ҳолга мос уйғотилган ҳаракат тенгламалари

$$\frac{d\xi}{dt} = -3\xi + \eta - \xi^2,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi - \eta - \xi^2$$

қўришида ёзилади.

24. 25*-§. Ҳаракатнинг устуворлиги ҳақидаги Ляпунов теоремалари

Ляпунов ҳаракатнинг устуворлиги аниқланадиган иккита усулни кўрсатган. Биринчи усул (24.124) уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламаларининг ечимларини тексиз қатор тарзда фойдаландан иборат бўлиб, бу усул (24.123) тенгламаларининг баъзи хусусий ҳоллари учун қўлланади. Биринчи усулни қўлловчи жуда кўп ҳисобланганларни бажаришга тўғри келади. Шу сабабли ҳаракатнинг устуворлигини аниқловчи иккинчи усулдан фойдаланилади. Ляпуновнинг иккинчи усули маълум параметрлар ҳисоблангандуруни ва Ляпунов функцияси деб аталадиган бирор V функцияни топишга келтирилади. Келгусиз координатлар боши атрофида аниқланган x_1, \dots, x_s ўзгарувчиларнинг функцияси $V(x_1, \dots, x_s)$ устида тўхталамиз. Бу функцияни бир дейлик, фақат $x_1 = \dots = x_s = 0$ да нолга тенг ва узлуксиз хусусий ҳолатларга яна деб қараймиз.

Таърифлар. 1. Агар $h > 0$ қанча кичик бўлмасин

$$|x_j| \leq h \quad (24.128)$$

соҳада $V(x_1, \dots, x_s)$ функция фақат битта аниқ ишорали (аниқ мусбат ёки аниқ манфий) қийматларни қабул қилса ва фақат $x_1 = \dots = x_s = 0$ да нолга тенг бўлса, у ҳолда $V = V(x_1, \dots, x_s)$ функция (24.128) соҳада *аниқ ишорали функция* дейилади.

2. Агар $V(x_1, \dots, x_s)$ функция (24.128) соҳада фақат бир хил ишорали қийматларни қабул қилса ҳамда $x_1^2 + \dots + x_s^2 \neq 0$ да ҳам

нолга тенг бўла олса, у ҳолда $V = V(x_1, \dots, x_s)$ функция мазкур соҳада ўзгармас (мусбат ёки манфий) шиорали функция дейилади.

3. Агар h қанчалик кичик бўлмасин (24.128) соҳада $V(x_1, \dots, x_s)$ функция ҳам мусбат, ҳам манфий қийматларини қабул қила олса, у ҳолда $V(x_1, \dots, x_s)$ функция мазкур соҳада ўзгарувчи шиорали функция дейилади.

Қуйида баён этилган Ляпуновнинг биринчи теоремаси асосий ҳаракат устуворлигининг етарли шартини ифодалайди:

Агар уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламалари учун аниқ шиорали шундай $V(x_1, \dots, x_s)$ функцияни топши мумкин бўлсаки, мазкур тенгламаларда қатнашувчи V функциянинг тўлиқ ҳосиласи V га қарама-қарши ўзгармас шиорали ёки айнан нолга тенг бўлса, у ҳолда асосий ҳаракат устувордир.

Ляпуновнинг қуйидаги иккинчи теоремаси ёрдамида ҳаракатнинг асимптотик устуворлиги аниқланади.*

Агар уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламалари учун шундай аниқ шиорали $V(x_1, \dots, x_s)$ функцияни топши мумкин бўлсаки, мазкур тенгламаларда қатнашувчи V функциянинг вақт бўйича тўлиқ ҳосиласи ҳам V га қарама-қарши аниқ шиорали функциядан иборат бўлса, у ҳолда асосий ҳаракат асимптотик устувордир.

24.14-масала. Агар уйғотилган ҳаракат тенгламалари

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 3z - x(y - 2z), \\ \dot{y} = -2x - 3z - 3yz, \\ \dot{z} = 2x - y + y^2 \end{cases} \quad (1)$$

кўринишда берилса, асосий ҳаракатнинг устуворлиги аниқлансин.

Ечиш. Ляпунов функциясини аниқ шиорали мусбат функция шаклида қуйидагича танлаб оламиз.

$$V = 2x^2 + y^2 + 3z^2.$$

У ҳолда

$$\frac{dV}{dt} = 4x\dot{x} + 2y\dot{y} + 6z\dot{z} \quad (2)$$

ёки \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} ларнинг қийматини (1) дан келтириб қўйсак,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4xy - 12xz - 4x^2(y - 2z)^2 - 4xy - 6yz - 6y^2z + 12xz - 6yz + 6y^2z = \\ &= -4x^2(y - 2z)^2. \end{aligned}$$

$\frac{dV}{dt} \leq 0$ (бунда тенглик шиораси координаталар боши ҳамда $x=0$ ва $y=2z$ текисликларда

ҳосил) бўлгани учун $\frac{dV}{dt}$ ўзгармас шиорали манфий функциядан иборат бўлади.

Бунисарин, Ляпуновнинг биринчи теоремасига асосан, асосий ҳаракат устувордир.

* — Ляпуновнинг бу теоремалари исботини П. Г. Малкиннинг «Теория устойчивости движения» (М.: Наука, II боб, 9. 10-§, 1966) китобидан ўқиш мумкин.

24.15- масала. Агар уйғотилган ҳаракат тенгламалари

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3, \\ \dot{y} &= -x - y^3 \end{aligned}$$

кўринишда берилса, $x = y = 0$ координаталар боши яқинидаги асосий ҳаракатнинг асимптотик устувор бўлиши исботлансин.

Ечиш. Ляпунов функциясини аниқ шорали мусбат функция шаклида қуйидагича таниб оламиз: $V = x^2 + y^2$. У ҳолда V нинг вақт бўйича ҳосиласи

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2(x^2 + y^2)$$

ўзгармас шорали маъфий функция бўлгани учун

$$x = y = 0$$

асосий ҳаракат Ляпуновнинг иккинчи теоремасига кўра асимптотик устувор бўлади ҳамда бу ҳолатдан кичик оқдирилган система елқининг ўтиши билан бу ҳолатга яқинлаша боради.

24.26*- §. Биринчи яқинлашишдаги устувор мувозанат

Кўпинча уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламаларнинг ечимини аниқлаш амримаҳол бўлгани учун ҳаракатнинг устуворлигини биринчи яқинлашиш усули билан ҳам аниқланади. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, биринчи яқинлашишда ҳаракатнинг устуворлигини аниқлаш учун уйғотилган ҳаракат дифференциал тенгламаларида чиқиқли ҳадлар алоҳида ажратиб ёзилади. Мазкур тенгламаларнинг ўнг томони вақтга боғлиқ бўлмаган ҳол билан чекланамиз:

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{js}x_s + Z(x_1, \dots, x_s), \quad (24.129)$$

бунда $a_{jk} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k} \right)_{x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0}$ бўлиб, $Z(x_1, \dots, x_s)$ эса иккинчи ва ундан юқори тартибли x_j ларни ўз ичига олган ҳадларни ифодалайди.

Биринчи яқинлашишда ҳаракатнинг устуворлигини текшириш учун (24.129) да чиқиқсиз ҳадларни эътиборга олмай

$$\frac{dx_j}{dt} = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{js}x_s \quad (24.130)$$

тенгламалар қаралади ва уларнинг характеристик тенгламаси

$$\lambda^s + A_1\lambda^{s-1} + A_2\lambda^{s-2} + \dots + A_s = 0 \quad (24.131)$$

тузилади. У ҳолда ҳаракатнинг устуворлиги аниқланадиган қуйидаги *Ляпунов теоремалари* ўринли бўлади.*)

*) — Ляпуновнинг бу теоремалари исботини И. Г. Малкиннинг «Теория устойчивости движения» (М.: Наука, III боб, 22-§, 1966) китобидан ўқини мумкин.

1-теорема. Агар биринчи яқинлашишдаги система характеристик тенгламасининг барча илдизлари манфий ҳақиқий қисмага эга бўлса, у ҳолда уйғотилган ҳаракат тенгламасидаги юқори тартибли ҳадлар қандай бўлишидан қатъи назар асосий ҳаракат устивор, шун билан бирга асимптотик устивор бўлади.

2-теорема. Агар биринчи яқинлашишдаги система характеристик тенгламасининг ҳеч бўлмаганда битта илдизи муsbат ҳақиқий қисмага эга бўлса, у ҳолда уйғотилган ҳаракат тенгламасидаги иккинчи ва undan юқори тартибли ҳадларни ҳар қандай танланганига қармай, асосий ҳаракат ноустивор бўлади.

Характеристик тенглама илдизларининг иборасини аниқлашда қуйидаги Гурвиц теоремасидан фойдаланилади.¹⁾

Теорема. n -тартибли ҳақиқий коэффициентли

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

тенгламанинг барча илдизлари манфий ҳақиқий қисмага эга бўлиши учун қуйидаги

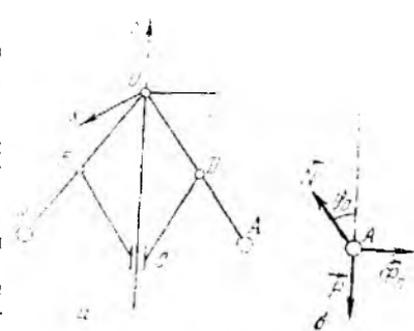
$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2s-1} & a_{2s-2} & \dots & \dots & \dots & a_s \end{vmatrix} \quad (24.132)$$

детерминантларнинг барчаси муsbат бўлиши зарур ва етарлидир. Бунда $i > s$ бўлса, $a_i = 0$.

24.16-масала. Уаги регулятори узунликлари l га тенг ва O пуктада шарнирли бириктирилган OA ва OB стерженлардан ташкил тоилган бўлиб, бу стерженларнинг унча m массали шарчалар бириктирилган (24.23-расм, a). Вертикал ўқ бўйича сирлана олидиган C муфта CE ва CD стерженлар воситасида шарлар ўришилган стерженлар шарлар билан бириктирилган. Шарлар моддий пукталар деб қаралин. Бурчак тезлик олган сари шарлар бир-биридан қулаш ва C муфта юқорига кўтарилаш, бурчак тезлик камийса, шарлар бир-бирига яқинлашади ва C муфта тастага тушади.

Муфта ва стерженларнинг сирлигиши эътиборга олмай, регулятор ҳаракатининг устуворлиги аниқлисин. Айланувчи қисмларнинг (шарлар бу ҳисобга кирмайди) вертикал ўқда шикбатан инерция моменти I_0 га тенг.

φ_0 бурчак билан аниқлашилган асосий ҳаракатдан регулятори φ бурчакка олиши натижасида ҳосил бўладиган тикловчи момент



24.23-расм.

¹⁾ - Гурвиц теоремасининг исботини А. Г. Куров «Курс высшей алгебры» (М.: 1963) китобидан ўқиш мумкин.

$$M_z = -k(\varphi - \varphi_0)$$

га тенг. Бунда k — ўзгармас мусбат коэффициент.

Ечиш. Регуляторнинг эркинлик даражаси иккита тенг. Умумлашган координаталар учун OC ўқ атрафидаги айланми бурчлиги β ва OA , OB стерженларнинг OAB текислика перпендикуляр горизонтал ўқ атрафидаги айланми бурчаги φ ни оламиз. Регулятор ўзгармас $\beta = \varphi_0$ бурчак тезлик билан айланганда φ_0 бурчакни аниқлаймиз. Бунинг учун шарларнинг нисбий мувозанатини текшириш кифоя (24.23-расм, б). Шарларга таъсир этувчи оғирлик кучи \vec{P} ($\vec{P} = m\vec{g}$) ва реакция кучи \vec{N} қаторига нормал инерция кучи $\vec{\Phi}_n$ ($\Phi_n = ml\omega_0^2$) $\sin \varphi_0$ ни қўшсак, бундай кучлар системасини мувозанатда деб қараш мумкин.

Бу кучларни \vec{N} га перпендикуляр AK ўққа проекцияласак,

$$\Phi_n \cos \varphi_0 - mg \sin \varphi_0 = 0$$

ёки Φ_n нинг қийматини қўйсак,

$$m l \omega_0^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - mg \sin \varphi_0 = 0.$$

Бундан

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l \cos \varphi_0}. \quad (1)$$

Шундай қилиб, регулятор OC ўқ атрафида берилган ω_0 бурчак тезлик билан айланса, у ҳолда OA ва OB стерженлар вертикалга φ_0 бурчак остида оғган ҳолда ҳаракатланади. Бу ҳаракатни асосий ҳаракат деб атаймиз.

Системанинг ҳаракат дифференциал тенгламасини тузиш учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларидан фойдаланамиз.

Умумлашган кучларни ҳисоблаймиз. Регуляторга шарларнинг оғирлик кучлари ва M_z тикловчи момент таъсир этади.

Шарлар оғирлик кучларининг потенциал энергияси ихтиёрий ўзгармасгача аниқлик билан

$$\Pi = -2mgl \cos \varphi$$

формула ёрдамида аниқланади. Шу сабабли шарларнинг оғирлик кучларига мос бўлган Q_φ умумлашган куч манфий инёра билан олинган потенциал энергиянинг φ бўйича хусусий ҳосиласига тенг бўлади:

$$Q_\varphi = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -2mg l \sin \varphi. \quad (2)$$

Тикловчи M_z моментга мос умумлашган кучни Q_β билан белгиласак, Q_β ни элементар иш ифодасидаги дф мумкин бўлган кўчиш олдидаги коэффициентга тенг деб қараш мумкин:

$$\delta A_1 = M_z \delta \beta.$$

Бинобарин,

$$Q_\beta = M_z = -k(\varphi - \varphi_0). \quad (3)$$

Системанинг кинетик энергиясини ҳисоблаймиз:

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \dot{\beta}^2 + I_2 \dot{\varphi}^2).$$

Бунда I_1 регулятор айланувчи қисмларининг (шарлар бу ҳисобга кирамайди) z ўққа нисбатан инерция моменти I_0 билан φ бурчакка боғлиқ шарларнинг z ўққа нисбатан инерция моментлари йиғиндисига тенг:

$$I_1 = I_0 + 2ml^2 \sin^2 \varphi.$$

Шарларнинг x ўқда нисбатан инерция моменти

$$I_0 = 2 m l^2$$

Шундай қилиб, системанинг кинетик энергияси умумлашган координаталар бўли-
ли қуйидагича ифодаланadi:

$$T = \frac{1}{2} [(I_0 + 2 m l^2 \sin^2 \varphi) \dot{\beta}^2 + 2 m l^2 \dot{\varphi}^2].$$

Берилган система учун

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= Q_{\beta}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

кўринишдаги Лагранжнинг II хил тенгламаларини тузиш учун зарур бўлган ки-
нетик энергиянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \beta} &= (I_0 + 2 m l^2 \sin^2 \varphi) \dot{\beta}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= \\ &= 4 m l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{\beta} + (I_0 + 2 m l^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\beta}, \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 2 m l^2 \dot{\varphi}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 2 m l^2 \ddot{\varphi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 2 m l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\beta}^2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(2), (3) ва (5) ни (4) га қўйсак,

$$\left. \begin{aligned} 4 m l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{\beta} + (I_0 + 2 m l^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\beta} &= -k (\varphi - \varphi_0), \\ 2 m l^2 \ddot{\varphi} - 2 m l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\beta}^2 &= -2 m g l \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Системанинг (1) асосий ҳаракат яқинидаги кичик тебраниларини қараймиз.
Бунинг учун қуйидаги алмаширишни киритамиз:

$$\varphi = \varphi_0 + x, \quad \dot{\beta} = \dot{\beta}_0 + \dot{y} = \omega_0 + \dot{y}. \quad (7)$$

Бунда x ва y лар φ ва β ўзгаришларининг кичик ортирмаларини ифода-
лайди. (7) ни (6) га киришиб, қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} 4 m l^2 \sin (\varphi_0 + x) \cos (\varphi_0 + x) \dot{x} (\omega_0 + \dot{y}) + [I_0 + 2 m l^2 \sin^2 (\varphi_0 + x)] \ddot{y} &= -kx, \\ x - \frac{1}{2} (\dot{\beta}_0 + \dot{y})^2 \sin (2\varphi_0 + 2x) + \frac{g}{l} \sin (\varphi_0 + x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Асосий ҳаракат яқинидаги кичик ҳаракатларни текшириш учун барча ҳад-
ларни биринчи тартибли кичик миқдоргача аниқлаш сизили ҳисоблаймиз. Бунинг
учун $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$ деб фариз қиламиз. Натижада (8) ни қуйидагича ёзиш
мумкин:

$$\left. \begin{aligned} (I_0 + 2 m l^2 \sin^2 \varphi_0) \ddot{y} + 2 m l^2 \sin^2 \varphi_0 \cdot \dot{\beta}_0 x + kx &= 0, \\ x - \dot{\beta}_0 \sin 2\varphi_0 \cdot \dot{y} + \left(\frac{g}{l} \cos \varphi_0 - \dot{\beta}_0^2 \cos 2\varphi_0 \right) x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Шундай қилиб, системанинг асосий ҳаракати яқиндаги кичик ҳаракатлари учун (9) кўринишидаги иккинчи ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системасини оламиз. Уларни ешиш учун

$$x = C_1 e^{\lambda t}, \quad \dot{y} = C_2 e^{\lambda t}$$

деб фараз қиламиз. Бунда C_1, C_2 лар ўзгармас миқдорлар. У ҳолда (9) га мос характеристик тенгламани

$$\left(\frac{I_0}{2mI^2} + \sin^2 \varphi_0 \right) \lambda^3 + \dot{\beta}_0^2 \sin^2 \varphi_0 (1 + 2 \cos^2 \varphi_0 + \frac{I_0}{2mI^2}) \lambda + \frac{k}{2mI^2} \dot{\beta}_0 \sin 2\varphi_0 = 0 \quad (10)$$

кўринишида ёзилади. Бунда

$$a_0 = \frac{I_0}{2mI^2} + \sin^2 \varphi_0, \quad a_1 = 0,$$

$$a_2 = \dot{\beta}_0^2 \sin^2 \varphi_0 \left(1 + 2 \cos^2 \varphi_0 + \frac{I_0}{2mI^2} \right),$$

$$a_3 = \frac{k}{2mI^2} \dot{\beta}_0 \sin 2\varphi_0$$

Белгиланларни киритсак,

$$a_0 \lambda^3 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

тенглама ўринли бўлади. Бу характеристик тенглама ядизларнинг ҳақиқий қисми манфий бўлишини ифодаловчи Гурвиц шартлари

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_0) > 0$$

қўринишига бўлади. Кўрсатилган ҳолда $a_0 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 = 0$ бўлгани учун Гурвиц шартлари қаноатланмайди, бироқарин, регуляторнинг ҳаракати поустувор бўлади. Бу факт экспериментал равиш билан ҳам тасдиқланган. Шу сабабли бошқарини системасига қўшимча элементларни қўришнига тўғри келади.

21.27- §. Ҳаракатини оптимал бошқарини ҳақида тушунча

Техникада объектларнинг ҳаракатини бошқарини ва бошқарини-нинг энг яхши ҳусулини табиқан атомлада аҳамиятини эга. Хосирги кунда бошқаринидаги объектлар деярли ҳар қатламда учрайди: авиацияда, саҳра ва регуляторлар билан танқосланган турли электротроник ороларда ва улар жумла қилиблар.

Бошқаринидаги объектни бир ҳолатдан бошқа ҳолатга турлича ҳусуларда табиқан муаммо. Шундан келиб чиқиб, биз ҳу-майлорда энг яхши бўлиб ўтириши аниқланган ҳолатда, аниқан оптимал бошқаринидаги муаммо дегунга келишимиз.

Техникада оптимал бошқаринидаги муаммо дегунга келишимиз. Бошқаринидаги муаммо дегунга келишимиз. Бошқаринидаги муаммо дегунга келишимиз. Бошқаринидаги муаммо дегунга келишимиз. Бошқаринидаги муаммо дегунга келишимиз.

масалалар бошқарини функцияси қатнашадиган масалалар дейилади. Агар бошқарини функцияси ва таъсир этувчи кучлар маълум бўлса, у ҳолда ҳаракатни бошқарини берилган объектнинг маъжур кучлар таъсиридаги ҳаракатини аниқлашга доир механиканинг оддий масаласига келтирилади.

Бошқаринини оғималлиги олдиндан белгиланган сифат белгисига қараб аниқланади. Масалан, икки пункт орасида учадиган самолётини эиғ қисқа вақтда манзилга етишини бошқарини масаласида сифат белгиси учини сарф бўлган вақт, махемал юк ташини масаласида эса сифат белгиси ташилган юкнинг оғирлиги билан ифодаланади.

Қўйинча механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари

$$\frac{dx_j}{dt} = f(x_1, \dots, x_s, u_1, \dots, u_k), \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (24.133)$$

ёки

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (24.134)$$

кўринишдаги тенгламаларга келтирилади. Буида x_1, \dots, x_s лар системанинг берилган ондаги ҳолати ва тезлигини ифодаловчи миқдорлар, u_1, \dots, u_k лар эса бошқарини параметрларини ифодалайди. Масалан, тўғри чизиқли ҳаракатдаги автомобилнинг ҳаракатини унинг босиб ўтган йўли s ва ҳаракат тезлиги v билан характерлаш мумкин. Бу катталиклар вақтини функцияси сифатида ўзгарали ва улар двигателнинг тортиш кучи F ни ҳайдовчи томондан ўзгартирини орқали бошқариледи. Бу масалада F бошқарувчи параметрини ифодалайди.

Одатда, бошқарини параметрлари u_1, \dots, u_k лар ихтиёрий бўлмай, уларга маълум шартлар қўйиледи. Масалан, u — автомобиль двигателини тортиш кучи бўлса, u параметр $0 \leq u \leq u_1$ кўринишдаги шартни қапоатлантирини керак.

Бошланғич $t = t_0$ пайтда система x_0 ҳолатда бўлиб, $t = t_1$ пайтда уни x_1 ҳолатга олиб келини талаб қилинса, бошқарини масаласи

$$\frac{dx}{dt} = f[x, u(t)]$$

дифференциал тенгламаларини ушбу

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

чекаравий шартларда ечимга эга бўладиган $u(t)$ бошқарини функциясини танлашга келтирилади. Бу масаланинг ечими $x(t)$ бўлса, бошқарини сифат белгиси

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0[x(t), u(t)] dt \quad (24.135)$$

формула бўйинча ҳисобланади.

Ҳаракат дифференциал тенгламаларни (24.133) ёки (24.134) тенгламалар билан ифодаланадиган, механик системанинг ҳаракатини оптимал бошқариш масаласи (24.135) функционалнинг мумкин бўлган энг кичик қийматини аниқлашга келтирилади.

25- Б О Б. ЗАРБА НАЗАРИЯСИ

25.1- §. Зарба назариясининг асосий тушунчалари

Жуда кичик вақт ичида системанинг айрим ёки барча нуқталарининг тезлиги, бинобарин, ҳаракат миқдори чекли катталикка ўзгарса, бундай ҳодиса *зарба* дейилади.

Зарба содир бўладиган вақт *зарба вақти* дейилади. Зарба вақти τ секунднинг мингдан бир ёки ундан кичик улушига тенг бўлади.

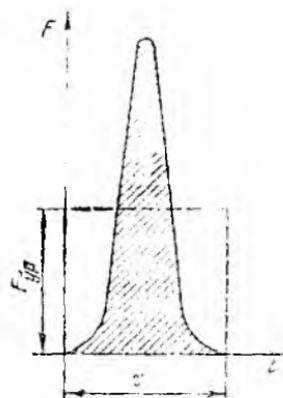
Механик система нуқталарига бирданига боғланиш қўйилганда ёки система боғланишдан бир зумда бўшатилганда зарба ҳодисаси содир бўлади. Масалан, илгариллама ҳаракатдаги жисм қўзғалмас жисм билан тўқнашганда зарба содир бўлиб, бунда қўзғалмас жисм бирданига қўйилган боғланиш вазифасини ўтайди. Спортчи трамплиндан сакраш пайтида ҳам зарба содир бўлади, бунда зарба спортчи боғланишдан (трамплиндан) бўшатилган (ажралган) пайтда содир бўлади. Шунингдек, тўп отилганда ёки снаряд портлаганда ҳам зарба содир бўлади.

Зарба даврида вужудга келувчи ва тўқнашувчи жисмларга жуда кичик вақт ичида таъсир этиб, ўта катта қийматга эришадиган ва импульси чекли бўлган куч *зарбали куч* дейилади. Агар \vec{F} куч зарбали кучдан иборат бўлса, одада бундай кучнинг ўзгариш қонуни маълум бўлмайди, лекин бу куч модулининг тақрибий графигини 25.1-расмдагидек тасвирлаш мумкин. Зарбали куч зарба вақтида жуда тез орта бориб, максимал қийматга эришади, сўнгра зарба даври охиригача тез суръатда камаяди. Қўпинча зарбали кучнинг батафсил ўзгариш қонунини аниқлашга эҳтиёж туғилмай, балки зарба давридаги куч импульсини аниқлаш муҳим аҳамиятга эга бўлади. Ушбу

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} \cdot dt \quad (25.1)$$

формула ёрдамида аниқланадиган вектор катталик *зарбали куч импульси* дейилади. Зарбали куч импульси 25.1-расмда тасвирланган *зарбали куч графиги* ҳамда абсцисса ўқи t билан чегараланган штрихланган юза орқали ифодланади.

Бяъзда зарбали кучнинг таъсирини тасаввур қилиш учун зарба вақтида ўзгармас-



25.1- расм.

дан қоладиган ва зарбали куч импульси таъсирини бера оладиган ҳамда

$$F_{\text{срм}} \cdot \tau = S \quad (25.2)$$

формула ўрдамида аниқланадиган ўртача зарбали куч $F_{\text{срм}}$ киритилади.

Техникада зарба ҳодисасидан болғалаш, штамповка, таянч қозиклар қоқмида ва бошқа соҳаларда фойдаланилади.

25.2- §. Зарба назариясининг асосий тенгламаси

Массаси m га тенг моддий нуқтага жуда кичик τ вақт ичида зарбали \vec{F} куч ва зарбали бўлмаган вақтнинг функциясидан иборат \vec{Q} куч таъсир этсин. Нуқтанинг зарбадан олдинги тезлигини \vec{v} , зарбадан кейинги тезлигини \vec{u} билан белгиласак, зарба вақти τ ичида ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt + \int_0^{\tau} \vec{Q} dt \quad (25.3)$$

формула ўринли бўлади.

(25.3) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи зарбали куч импульси \vec{S} га тенг; иккинчи қўшилувчи учун Лагранжнинг ўрта қиймат ҳақидаги теоремасини қўлласак,

$$\int_0^{\tau} \vec{Q} dt = \vec{Q}_{\text{срм}} \cdot \tau.$$

Бунда $\vec{Q}_{\text{срм}}$ билан \vec{Q} кучнинг $(0, \tau)$ оралиқда қабул қиладиган ўртача қиймати белгиланган. $\vec{Q}_{\text{срм}}$ чекли катталиқ, τ эса кичик қийматга эга бўлгани туфайли $\vec{Q}_{\text{срм}} \cdot \tau \approx 0$ деб олиш мумкин. Яъни зарба вақтида зарбали бўлмаган кучларнинг импульсини зарбали куч импульсига нисбатан эътиборга олмаслик мумкин. Шундай қилиб, зарба вақтида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S}, \quad (25.4)$$

яъни зарба вақтида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши нуқтага таъсир этувчи зарбали куч импульсига тенг.

(25.4) тенглама зарба назариясининг асосий тенгламаси дейлади.

Агар нуқтага бир вақтнинг ўзида бир неча зарбали кучлар таъсир этса, (25.4) да мазкур зарбали кучлар импульсларининг геометрик йиғиндисини олинади.

(25.4) тенглама дифференциал тенгламадан иборат бўлмай, балки чекли миқдорлар қатнашадиган алгебраик тенгламадан иборат.

Бу тенглама воситасида зарбали импульс маълум бўлганда зарба вақтида нуқта тезлигининг ўзгаришини ёки зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги нуқтанинг тезликлари берилганда зарбали куч импульсини аниқлаш мумкин.

Худди шунингдек, келгусида учрайдиган зарба назариясига оид барча тенгламалар дифференциал тенгламалардан иборат бўлмай, балки алгебраик (чекли) тенгламалардан ташкил топади.

(25.4) ни Декарт координата ўқларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} m u_x - m v_x &= S_x, \\ m u_y - m v_y &= S_y, \\ m u_z - m v_z &= S_z. \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

яъни зарба вақтида нуқта ҳаракат миқдорининг бирор қўзғалмас ўқдаги проекциясининг ўзгариши шу нуқтага таъсир этувчи зарбали куч импульсининг мазкур ўқдаги проекциясига тенг.

Агар зарбали куч импульси маълум бўлса, у ҳолда (25.4) дан фойдаланиб, нуқтанинг зарбадан кейинги тезлигини аниқлаймиз:

$$\vec{u} = \vec{v} + \frac{\vec{S}}{m}. \quad (25.6)$$

(25.6) тенгламадан кўрамизки, зарбадан кейинги тезлик \vec{u} зарбадан олдинги тезлик \vec{v} дан $\frac{\vec{S}}{m}$ га тенг чекли катталikka фарқ қилади. Зарба вақти t жуда кичик ва бу вақт ичида нуқтанинг тезлиги чекли миқдорга ўзгаргани туфайли зарба вақтида нуқтанинг кўчиши жуда кичик бўлади ва одатда уни эътиборга олинмайди. Шундай қилиб, зарба вақтида нуқта кўчишга улгурмайди.

25.3- §. Зарба вақтида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Айтайлик, N та моддий нуқталардан ташкил топган механик система берилган бўлсин. Зарба вақтида зарбали бўлмаган кучларнинг импульсини эътиборга олмаклик мумкин бўлгани учун система нуқталарига таъсир этувчи кучларнинг импульсини ташқи ва ички зарбали кучлар импульсидан ташқил топган деб қараш мумкин. Агар система ихтиёрий M_v нуқтасининг зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги тезликларини мос равишда \vec{v}_v ва \vec{u}_v билан белгиласак, зарба назариясининг асосий тенгламасига кўра

$$m_v \vec{u}_v - m_v \vec{v}_v = \vec{S}_v^e + \vec{S}_v^i \quad (25.7)$$

тенглик ўрикли бўлади. Бунда \vec{S}_v^e ва \vec{S}_v^i мос равишда ташқи ва ички зарбали кучлар импульсларини ifодалайди. Система учун бундай тенгламалардан N тасини ёзиб, уларни ҳадлаб қўшсак,

$$\sum m_{\nu} \vec{u}_{\nu} - \sum n_{\nu} \vec{v}_{\nu} = \sum \vec{S}_{\nu}^e + \sum \vec{S}_{\nu}^i.$$

Бунда

$$\sum m_{\nu} \vec{u}_{\nu} = \vec{Q}, \quad \sum n_{\nu} \vec{v}_{\nu} = \vec{Q}_0$$

мос равишда системанинг зарбадан кейинги ва зарбадан олдинги ҳаракат миқдорларини ифодалайди. Бундан ташқари, ички кучларнинг хусусиятига кўра, $\sum \vec{S}_{\nu}^i = 0$ бўлгани учун

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_{\nu}^e. \quad (25.8)$$

Бу тенглама зарба вақтида система ҳаракати миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: зарба вақтида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши, система нуқталарига қўйилган ташқи зарбали кучлар импульсларининг йиғиндисига тенг.

Агар

$$\sum \vec{S}_{\nu}^e = 0$$

бўлса, (25.8) га кўра

$$\vec{Q} = \vec{Q}_0. \quad (25.8')$$

яъни фақат ички зарбали кучларнинг импульси зарба вақтида бутун системанинг ҳаракат миқдорини ўзгартира олмайди.

(25.8) ни координата ўқларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} Q_x - Q_{0x} &= \sum S_{\nu x}^e, \\ Q_y - Q_{0y} &= \sum S_{\nu y}^e, \\ Q_z - Q_{0z} &= \sum S_{\nu z}^e. \end{aligned} \right\} \quad (25.9)$$

(25.9) дан кўрамизки, $\sum S_{\nu x}^e = 0$ бўлса,

$$Q_x = Q_{0x}$$

яъни агар ташқи зарбали куч импульсларининг бирор ўқдаги проекцияси нолга тенг бўлса, система ҳаракат миқдорининг мазкур ўқдаги проекцияси зарба вақтида ўзгармасдан қолади.

(21.6) га кўра

$$\vec{Q} = M \vec{u}_C, \quad \vec{Q}_0 = M \vec{v}_C, \quad (25.10)$$

бунда $M = \sum m_{\nu}$ бутун система массаси, \vec{u}_C ва \vec{v}_C лар мос равишда система массалар марказининг зарбадан кейинги ва зарбадан олдинги тезликларини ифодалайди. (25.9) ни назарда тутиб, (25.8) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M(\vec{u}_C - \vec{v}_C) = \sum \vec{S}_{\nu}^e. \quad (25.11)$$

(25.11) тенглама зарба вақтида система массалар маркази ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди: зарба вақтида система массалар маркази ҳаракат миқдорининг ўзгариши система нуқталарига таъсир этувчи ташқи зарбали куч импульсларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Хусусий ҳолда $\sum \vec{S}_v^e = 0$ бўлса, (25.11) га кўра

$$\vec{u}_c = \vec{v}_c.$$

Демак, ташқи зарбали куч импульсларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлса, система массалар марказининг зарбадан кейинги ва зарбадан олдинги тезликлари ўзгармасдан қолади.

(25.11) ни координата ўқларига проекциялаб қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\left. \begin{aligned} M(u_{cx} - v_{cx}) &= \sum S_{vx}^e, \\ M(u_{cy} - v_{cy}) &= \sum S_{vy}^e, \\ M(u_{cz} - v_{cz}) &= \sum S_{vz}^e. \end{aligned} \right\} \quad (25.12)$$

25.4*- §. Зарба вақтида нуқта ва система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Юқорида кўрганимиздек, зарба вақтида нуқта кўчишга улгурмайди. Шу сабабли зарбадан олдинги ва кейинги нуқтанинг радиус-векторини \vec{r} билан белгилаб, зарба назариясининг асосий тенгламаси (25.4) ни \vec{r} га векторли кўпайтирсак, қуйидагини оламиз:

$$\vec{r} \times m \vec{u} - \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times \vec{S}.$$

Бу муносабат зарба вақтида нуқта кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайди. Зарба вақтида нуқта кинетик моментининг бирор марказга nisbatan ўзгариши нуқтага қўйилган зарбали куч импульсининг мажкур марказга nisbatan моментига тенг. Бу теоремани N та нуқтадан ташкил топган системанинг ҳар бир нуқтаси учун қўлласак,

$$\vec{r}_v \times m_v \vec{u}_v - \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \vec{r}_v \times \vec{S}_v^e + \vec{r}_v \times \vec{S}_v^i, \quad (v = \overline{1, N}) \quad (25.13)$$

тенгламалар ўринли бўлади. Бунда \vec{S}_v^e ва \vec{S}_v^i лар мос равишда системанинг M_v нуқтасига таъсир этувчи ташқи ва ички кучлар зарбали импульсларининг ифодалайди. (25.13) тенгламаларни қўшамиз:

$$\sum \vec{r}_v \times m_v \vec{u}_v - \sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \sum \vec{r}_v \times \vec{S}_v^e + \sum \vec{r}_v \times \vec{S}_v^i,$$

бунда $\sum \vec{r}_v \times m_v \vec{u}_v = \vec{K}_0$, $\sum \vec{r}_v \times m_v \vec{v}_v = \vec{K}_0^0$ мос равишда системанинг O марказга nisbatan зарбадан кейинги ва зарбадан олдинги кинетик

моментларини; $\sum \vec{r}_v \times \vec{S}_v = \sum \vec{M}_O(\vec{S}_v)$ esa ташқи зарбали кучлар импульсларининг O марказга нисбатан моментларининг йиғиндисини ифодалайди. Ички кучларнинг хусусиятига кўра, $\sum \vec{r}_v \times \vec{S}_v = = \sum \vec{M}_O(\vec{S}_v) = 0$.

Шундай қилиб, қуйидаги муносабат ўриqli бўлади:

$$\vec{K}_O - \vec{K}_O^0 = \sum \vec{M}_O(\vec{S}_v). \quad (25.14)$$

Бу тенглик зарба вақтида система кинетик моментининг ўзгарishi ҳақидаги теоремани ифодалайди: зарба вақтида система кинетик моментининг бирор марказга нисбатан ўзгарishi система нуқталарига қўйилган зарбали кучлар импульсларининг мазкур марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг.

Агар

$$\sum \vec{M}_O(\vec{S}_v) = 0$$

бўлса, (25.14) га кўра,

$$\vec{K}_O = \vec{K}_O^0,$$

яъни фақат ички кучларнинг импульси зарба вақтида система кинетик моментини ўзгартира олмайди.

(25.14) ни координата ўқларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} K_x - K_x^0 &= \sum M_x(\vec{S}_v), \\ K_y - K_y^0 &= \sum M_y(\vec{S}_v), \\ K_z - K_z^0 &= \sum M_z(\vec{S}_v). \end{aligned} \right\} \quad (25.15)$$

Хусусий ҳолда $\sum M_x(\vec{S}_v) = 0$ бўлса, (25.15) га асосан $K_x = K_x^0$.

25.5- §. Зарба вақтида зарбали кучнинг иши ҳақидаги Кельвин теоремаси

21.17- § да чиқарилган формулалар ёрдамида зарбали кучларнинг зарба вақтидаги ишини бевосита ҳисоблаш анча мураккабдир. Чунки зарбали кучлар жуда катта қийматга эришади ҳамда зарба вақтида система нуқталарининг кўчиши эътиборга олинмайдиган даражада кичик бўлади. Зарба назариясининг асосий тенгламаси (25.4) дан фойдаланиб, зарбали кучларнинг зарба вақтидаги ишини ҳисоблаш мумкин.

(25.4) ни дастлаб \vec{u} га, кейин \vec{v} га кўпайтирсак,

$$\begin{aligned} m\vec{u}^2 - m\vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{S} \cdot \vec{u}, \\ m\vec{u} \cdot \vec{v} - m\vec{v}^2 &= \vec{S} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Бу тенгликларни қўшиб, 2 га бўлсак,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \vec{S} \cdot (\vec{u} + \vec{v}). \quad (25.16)$$

Нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан (25.16) тенгликнинг чап томони унга таъсир этувчи \vec{F} кучининг иши A га тенг. Шу сабабли

$$A = \frac{1}{2} \vec{S} \cdot (\vec{u} + \vec{v}). \quad (25.17)$$

(25.17) тенглама кучнинг ишини мазкур куч импульси ва нуқтанинг ўртача тезлиги орқали аниқлайдиган Кельвин теоремасини ифодалайди: *бирор вақт оралигида нуқтага қўйилган кучнинг иши, кучнинг мазкур вақт оралигидаги импульси билан нуқтанинг бошланғич ва охириги тезликлари йиғиндиси скаляр қўпайтмасининг ярмига тенг.*

Кельвин теоремасини нуқтанинг ҳар қандай ҳаракатларига ҳам қўллаш мумкин.

Механик система учун Кельвин теоремасини келтириб чиқаришда системанинг ҳар бир нуқтаси учун (25.17) га ўхшаш тенгламаларни ёзиб, улар ўзаро қўшилади:

$$\sum A_v = \frac{1}{2} \sum \vec{S}_v \cdot (\vec{u}_v + \vec{v}_v). \quad (25.18)$$

Бунда \vec{S}_v билан системанинг M_v нуқтасига таъсир этувчи ташқи ва ички кучлар импульсларининг геометрик йиғиндиси белгиланган: $\vec{S}_v = \vec{S}_v^e + \vec{S}_v^i$.

25.6-§. Жисмнинг қўзғалмас сиртга урилишидаги тўғри зарба. Тикловчи коэффицентни тажриба йўли билан аниқлаш

Агар жисм массалар марказининг тезлиги қўзғалмас сиртга урилиши олдида сирт билан жисм уриладиган нуқтада қўзғалмас сиртга ўтказилган нормаль бўйича йўналса, бундай зарба *тўғри зарба* дейилади.

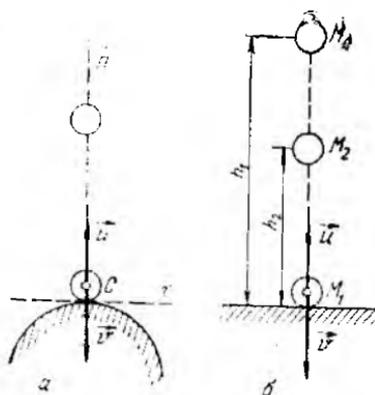
Айтайлик, бошланғич тезликсиз эркин тушаётган ва массаси m га тенг шар қўзғалмас горизонтал текисликка (ёки урилиш нуқтасидаги нормаль вертикал юқорига йўналган қўзғалмас сиртга) \vec{v} тезлик билан урилсин (25.2-расм). Бундай тўғри зарбада шарнинг зарбадан кейинги тезлиги \vec{u} сиртга ўтказилган Cn нормаль бўйича юқорига йўналади.

Зарба вақтини икки даврга бўлиш мумкин: биринчи даврни t_1 билан белгиласак, бу вақт мобайнида шарнинг тезлиги нолга тенг бўлгунча, у деформацияланади; иккинчи t_2 даврида эса эластиклик кучи таъсирида, бутунлай бўлмаса-да, шар ўз шаклини тиклайди

ва u тезлик билан сиртдан қапчийди. Шу сабабли зарба вақтини τ билан белгиласак, $\tau = \tau_1 + \tau_2$ бўлади.

Шар қўзғалмас текисликка урилганда бўладиган тўғри зарбада шарнинг зарбадан кейинги ва олдинги тезлиги миқдорларининг ўзаро нисбатига тенг катталик зарбадаги *тикловчи коэффициент* дейилади ва k билан белгиланади:

$$k = \frac{u}{v}. \quad (25.19)$$



25.2 расм.

Агар $k = 1$ бўлса, бундай зарба *абсолют эластик зарба* дейилади. Бу

ҳолда $u = v$ бўлиб, зарба натижасида шарнинг тезлиги зарбадан олдинги тезлик йўналишига қарама-қарши йўналади.

Агар $k = 0$ бўлса, бундай зарба *абсолют эластик бўлмаган зарба* дейилади. Бундай зарбадан кейинги шарнинг тезлиги $u = 0$ бўлади.

Тикловчи коэффициент $0 < k < 1$ бўлган ҳоллардаги зарба *эластик зарба* дейилади.

Зарба вақтининг биринчи даврида спллик сиртнинг шарга таъсир этувчи ўзгарувчи зарбали реакция кучини N_1 , иккинчи давридагисини N_2 билан белгилайлик. N ҳолда ҳар иккала вақт оралиғи учун зарба назариясининг асосий тенгلامаси (25.4) ни тузиб, нормалга проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} 0 - (-mv) &= S_1, \\ mv - 0 &= S_2 \end{aligned} \right\}$$

ҳосил бўлади, бунда $S_1 = \int_0^{\tau_1} N_1 dt$ ва $S_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} N_2 dt$ лар биринчи ва

иккинчи зарба давларига мос бўлган реакция кучларининг зарбали импульсларини ифодалайди. Зарбали бўлмаган кучларнинг, масалан, оғирлик кучининг зарба вақтидаги импульсини эътиборга олмаймиз.

Шундай қилиб,

$$mv = S_1; \quad mv = S_2$$

тенгликлар ўринли бўлади. (25.19) ни назарда тутиб, бу тенгликлардан тикловчи коэффициент ва зарбали импульслар орасидаги қуйидаги муносабатни оламиз:

$$k = \frac{S_2}{S_1}, \quad (25.20)$$

яъни шар қўзғалмас сиртга урилгандаси тўғри зарбада зарба вақтининг иккинчи даврига мос зарбали куч импульсининг биринчи

Зарбадаги зарбали куч импульсига нисбати тикловчи коэффициентга тенг бўлади.

Тикловчи коэффициент тажриба усулида қуйидагича аниқланади. Синалаётган жисм материалдан ясалган шарча h_1 баландликдан худди шундай материалдан (ёки бошқа синалувчи материалдан) ясалган салмоқли горизонтал плитига бошланғич тезликсиз ташланади (25.2-расм, б). Зарбадан кейин шарча h_2 баландликка кўтарилади.

M_0M_1 участка учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани қўллаб, шарчанинг зарбадан олдинги тезлиги v ни аниқлаймиз: $v = \sqrt{2gh_1}$.

Худди шунингдек, M_1M_2 участка учун бу теоремани қўлласак, шарчанинг зарбадан кейинги тезлиги учун

$$u = \sqrt{2gh_2}$$

формула ўринли бўлади. u ва v нинг қийматларини (25.19) га қўйиб тикловчи коэффициентни аниқлаймиз.

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad (25.21)$$

Қуйидаги жадвалда катта тезлик билан тўқнашувчи айрим жисмларнинг тикловчи коэффициентлари қиймати берилган:

Тўқнашувчи жисмлар	k
Ёғоч шар резинага урилганда	0,26
Ёғоч шарлар ўзаро урилганда	0,50
Пўлат шарлар ўзаро урилганда	0,56
Шиша шарлар ўзаро урилганда	0,94

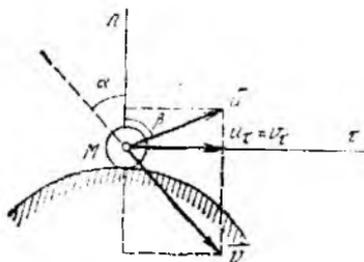
Агар шар қўзғалмас сиртга урилган пайтда унинг массалар марказининг тезлиги урилиш нуқтасида қўзғалмас сиртга ўтказилган нормаль билан α бурчак ташкил этса, бундай зарба қийишқ зарба дейилади (25.3-расм). $\alpha = 0$ бўлса, тўғри зарба содир бўлади.

α бурчак тушини бурчаги дейилади. Умумий ҳолда шар сиртга урилгандан кейин унга ўтказилган Mn нормалга β бурчак остида

\bar{u} тезлик билан қалчийди. β бурчакка қайтиш бурчаги дейилади.

Агар сиртни идеал силлиқ сиртдан иборат деб қарасак, зарбали реакция кучи сиртга ўтказилган нормаль бўйлаб йўналади ва унинг уринмадаги проекцияси нолга тенг бўлади. Бу ҳолда зарба назариясининг асосий тенгламаси (25.4) ни M_τ уринмага проекцияласак,

$$m\bar{u}_\tau - m\bar{v}_\tau = 0$$



25.3-расм.

$$u_{\tau} = v_{\tau}. \quad (25.22)$$

Қийишқ зарбада

$$k = \frac{|u_n|}{|v_n|} \quad (25.23)$$

га тенг катталикка *тикловчи коэффициент* дейилади. Бунда $|u_n|$ ва $|v_n|$ орқали \vec{u} ва \vec{v} тезликларнинг нормалдаги проекцияларининг абсолют қиймати белгиланган.

(25.23) дан

$$|u_n| = k |v_n|. \quad (25.24)$$

(25.22) ва (25.24) га асосан шар марказининг зарбадан кейинги тезлиги қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{u_{\tau}^2 + u_n^2} = \sqrt{v_{\tau}^2 + k^2 v_n^2} = \sqrt{(v \sin \alpha)^2 + (k v \cos \alpha)^2} = \\ &= v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

25.3-расмдан

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\tau}}{|v_n|}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{v_{\tau}}{|u_n|} = \frac{v_{\tau}}{k |v_n|} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha.$$

Шундай қилиб,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha. \quad (25.26)$$

Бу формула воситасида қайтиш бурчаги билан тушиш бурчаги орасидаги муносабат аниқланади.

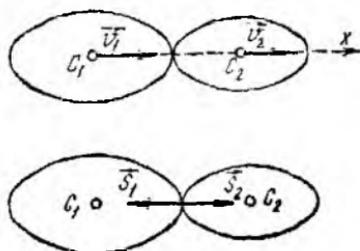
25.7-§. Иккита жисмнинг тўғри марказий зарбаси

Агар иккита жисм бир-бирига уриладиган нуқталаридаги умумий нормаль жисмларнинг массалар маркази орқали ўтса ҳамда зарба олдидаги жисмларнинг тезликлари мазкур умумий нормаль бўйича йўналса, бундай зарба *тўғри марказий зарба* дейилади.

Массалари m_1 ва m_2 га тенг иккита жисм зарбадан олдин ҳам, кейин ҳам илгарилема ҳаракатда бўлсин. Бундай жисмларнинг тўғри марказий зарбасини текширамыз. Жисмларнинг зарбадан олдинги

тезликлари \vec{v}_1 ва \vec{v}_2 га тенг бўлиб, жисмлар урилганда уриниш нуқтасида ўтказилган умумий нормаль бўйича йўналасин (25.4-расм).

Агар жисмлар бир томонга ҳаракатланса, зарба содир бўлиши учун $v_1 > v_2$ шарт бажарилиши керак. Жисмларнинг массаси, зарбадан олдинги тезликлари ва зарбадаги тикловчи коэффициент маълум бўлганда зарба-



25.4-расм.

дан кейинги жисмлар массалар марказининг тезлиги ва зарбали импульсини аниқлаймиз. Ташқи зарбали импульслар таъсир этмагани туфайли (25.8') га асосан қуйидаги тенглик ўрилади:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2,$$

яъни системанинг зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги ҳаракат миқдорлари ўзаро тенг бўлади. Бу векторли тенгликни жисмларнинг массалар марказини тугаштирувчи C_{1x} ўққа проекцияласак,

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}. \quad (25.27)$$

Бу тенгламада u_{1x} ва u_{2x} иккита номаълум қатнашади. Агар тикловчи коэффициент берилган бўлса, бу номаълумларни аниқлаш учун яна битта қўшимча тенгламани олиш керак. Зарбадан кейин иккинчи жисмнинг тезлиги биринчисига нисбатан ортгани туфайли ($u_{1x} < u_{2x}$) жисмларнинг тўғри зарбасини тикловчи коэффициент жисмларнинг зарбадан кейинги ва зарбадан олдинги нисбий тезликларининг нисбатига тенг бўлади:

$$k = \frac{|u_{1x} - u_{2x}|}{|v_{1x} - v_{2x}|} = - \frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}, \quad (25.28)$$

бунда $v_{1x} > v_{2x}$ деб қараймиз. (25.28) дан

$$u_{2x} - u_{1x} = k (v_{1x} - v_{2x}) \quad (25.29)$$

тенгликни оламиз. (25.27) ва (25.29) тенгламаларни биргалликда ечиб, жисмларнинг зарбадан кейинги тезликларини аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (v_{1x} - v_{2x}), \\ u_{2x} &= v_{2x} + (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} (v_{1x} - v_{2x}). \end{aligned} \right\} \quad (25.30)$$

Илгариларда ҳаракатдаги жисмлар урилганда ҳосил бўладиган \vec{S}_1 ва \vec{S}_2 ($\vec{S}_1 = -\vec{S}_2$) зарбали импульсларни аниқлаш учун жисмларнинг бирортаси, масалан, биринчиси учун (25.3) ни қўллаймиз. У ҳолда иккита жисмдан ташкил топган система учун ички ҳисобланган зарбали импульс биринчи жисм учун ташқи импульсдан иборат бўлади. Натижада

$$m_1 (u_{1x} - v_{1x}) = S_{1x}; \quad S_{1x} = -S_{2x} \quad (25.31)$$

ёки (25.30) га асосан

$$S_{1x} = -S_{2x} = - (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}). \quad (25.32)$$

Агар жисмларнинг иккинчиси қўзғалмас бўлса, у ҳолда (25.30) ва (25.32) да $v_{2x} = 0$ бўлгани туфайли

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}, \\ u_{2x} &= (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}, \\ S_{1x} &= -S_{2x} = -(1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2} v_{1x}. \end{aligned} \right\} \quad (25.32)$$

Қуйидаги хусусий ҳолларни кўралик:

1. Абсолют эластик бўлмаган зарба ($k=0$). Бу ҳолда (25.30) га кўра

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}, \quad (25.34)$$

яъни *абсолют эластик бўлмаган зарбадан кейин жисмлар бир хил тезлик билан ҳаракатланади*, бошқача айтганда, абсолют эластик бўлмаган зарба натижасида иккала жисм бир-биридан ажралмай, бир хил тезлик билан ҳаракатланади.

Бу ҳолда зарбали куч импульси учун

$$S_{1x} = -S_{2x} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}) \quad (25.35)$$

формула ўринли бўлади.

2. Абсолют эластик зарба ($k=1$). Бу ҳолда (25.30) ва (25.32) га асосан

$$\left. \begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}), \\ u_{2x} &= v_{2x} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}), \\ S_{1x} &= -S_{2x} = -2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}). \end{aligned} \right\} \quad (25.36)$$

(25.35) ва (25.36) формулаларни солиштириб, абсолют эластик зарбадаги зарбали импульс миқдори абсолют эластик бўлмаган зарбадаги импульс миқдорига нисбатан икки баравар катта бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

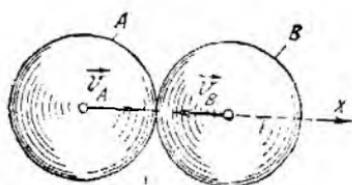
Жисмларнинг массалари тенг ($m_1 = m_2$) бўлган хусусий ҳолда (25.36) дан қуйидагини оламиз:

$$u_{1x} = v_{2x}, \quad u_{2x} = v_{1x}.$$

Яъни абсолют эластик зарбада иккита бир хил массали жисмлар тўқнашиши натижасида уларнинг тезликлари алмашади. Агар иккинчи жисм тинч ҳолатда бўлиб, биринчи жисм унга келиб урилса,

$$u_{1x} = 0, \quad u_{2x} = v_{1x},$$

яъни зарбадан кейин иккинчи жисм худди биринчи жисм эга бўлган тезлик билан ҳаракатланади; биринчи жисм эса тинч ҳолатда бўлади.



25.5- расм.

25.1- масала. Бир хилдаги иккита A ва B эластик шар бир-бирига қараб ҳаракатланади. Урилишдан олдинги тезликлар нисбати қандай бўлганда A шар урилишдан кейин тўхтаб қолади? Зарба вақтидаги тикловчи коэффициент k га тенг.

Ечили. x ўқни шарлар марказини туташтирувчи энгиз бўйича v_A йўналган томонга йўналтиришимиз (25.5- расм). У ҳолда (25.30) формуласининг биринчисида $u_{1x} = 0$, $m_1 =$

$$= m_2 = m, \quad v_{1x} = v_A, \quad v_{2x} = -v_B$$

$$0 = v_A - \frac{1}{2} (1+k) (v_A + v_B),$$

бундан шарларнинг урилишдан олдинги тезликлари нисбатини аниқлаймиз:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{1+k}{1-k}.$$

25.8- §. Зарба вақтида кинетик энергиянинг йўқолиши. Карно теоремаси

Иккита жисмнинг тўғри марказий зарбасида $|S_{1x}| = |S_{2x}| = S_x$ белгилани киритсак, у ҳолда ҳар қайси жисмга таъсир этувчи зарбали импульслар ва тикловчи коэффициент (25.31) ва (25.28) га кўра қуйидагича аниқланади:

$$\begin{aligned} m_1 (u_{1x} - v_{1x}) &= S_x, \\ m_2 (u_{2x} - v_{2x}) &= -S_x, \end{aligned} \quad (25.37)$$

$$k = \frac{u_{2x} - u_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}}.$$

(25.29) ни назарда тутиб, (25.37) нинг биринчисини $u_{1x} + kv_{1x}$ га, иккинчисини $u_{2x} + kv_{2x}$ га кўпайтириб, олинган тенгламаларни қўшсак,

$$m_1 (u_{1x} - v_{1x}) (u_{1x} + kv_{1x}) + m_2 (u_{2x} - v_{2x}) (u_{2x} + kv_{2x}) = 0. \quad (25.38)$$

Бу тенгламани бошқача кўринишда ёзиш учун қуйидаги айниятлардан фойдаланамиз:

$$u_{1x} (u_{1x} - v_{1x}) = \frac{1}{2} (u_{1x}^2 - v_{1x}^2) + \frac{1}{2} (u_{1x} - v_{1x})^2,$$

$$kv_{1x} (u_{1x} - v_{1x}) = \frac{1}{2} k (u_{1x}^2 - v_{1x}^2) - \frac{1}{2} k (u_{1x} - v_{1x})^2,$$

уларни қўшсак,

$$\begin{aligned} (u_{1x} - v_{1x}) (u_{1x} + kv_{1x}) &= \frac{1}{2} (1+k) (u_{1x}^2 - v_{1x}^2) + \\ &+ \frac{1}{2} (1-k) (u_{1x} - v_{1x})^2. \end{aligned} \quad (25.39)$$

Худди шунингдек, қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$(u_{2x} - v_{2x})(u_{2x} + kv_{2x}) = \frac{1}{2}(1+k)(u_{2x}^2 - v_{2x}^2) + \frac{1}{2}(1-k)(u_{2x} - v_{2x})^2. \quad (25.40)$$

(25.39) ва (25.40) ни эътиборга олиб, (25.38) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{2}(1+k)[(m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2) - (m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2)] + \frac{1}{2}(1-k)[m_1 (u_{1x} - v_{1x})^2 + m_2 (u_{2x} - v_{2x})^2] = 0. \quad (25.41)$$

Бунда

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2),$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(m_1 u_{1x}^2 + m_2 u_{2x}^2)$$

лар мос равишда системанинг зарбадан олдинги ва зарбадан кейинги кинетик энергияларини ифодалайди:

$$T = \frac{1}{2}[m_1 (u_{1x} - v_{1x})^2 + m_2 (u_{2x} - v_{2x})^2]$$

катталиқ эса зарба натижасида йўқотилган тезликка мос кинетик энергияни ифодалайди.

Юқоридаги белгилашларни назарда тутиб, (25.41) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T_1 - T_2 = \frac{1-k}{1+k} T. \quad (25.42)$$

(25.42) тенглик *иккита жисмнинг тўғри марказий эластик зарбасида кинетик энергиянинг йўқолишига оид Карно теоремасини* ифодалайди: *эластик зарбада йўқотилган кинетик энергия, йўқотилган тезликка мос кинетик энергиянинг $\frac{1-k}{1+k}$ қисмига тенг.*

Абсолют эластик зарба учун $k = 1$ ва

$$T_1 = T_2,$$

яъни абсолют эластик зарбада кинетик энергия йўқолмайди.

Абсолют эластик бўлмаган зарба учун $k = 0$ бўлади ва

$$T_1 - T_2 = T \quad (25.43)$$

формула ўринли бўлади. Бу ҳолда кинетик энергия максимум даражада йўқолади (потенциал ва иссиқлик энергияларига айланади).

(25.43) тенглик *абсолют эластик бўлмаган зарба учун Карно теоремасини* ифодалайди: *абсолют эластик бўлмаган зарбада йўқотилган кинетик энергия йўқотилган тезликка мос кинетик энергияга тенг.*

Абсолют эластик бўлмаган зарба патижасида жисмлар бир хил u_x тезликка эга бўлади:

$$u_{1x} = u_{2x} = u_x.$$

Шу сабабдан (25.37) ning биринчи иккита тенгламасини

$$\left. \begin{aligned} m_1 (u_x - v_{1x}) &= -S_x, \\ m_2 (u_x - v_{2x}) &= S_x \end{aligned} \right\} \quad (25.44)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламалардан фойдаланиб, u_x ва S_x ларни аниқлаймиз:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}, \\ S_x &= \frac{m_1 m_2 (v_{1x} - v_{2x})}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \right\} \quad (25.45)$$

(25.44) ни эътиборга олиб, йўқотилган тезликка мос кинетик энергия учун

$$T = \frac{S_x^2}{2m_1} + \frac{S_x^2}{2m_2} = \frac{S_x^2}{2m_1 m_2} (m_1 + m_2) \quad (25.46)$$

ифодани оламиз. (25.46) га S_x ning қийматини (25.45) дан келтириб қўйсак,

$$T = \frac{m_1 m_2 (v_{1x} - v_{2x})^2}{2 (m_1 + m_2)}. \quad (25.47)$$

T ning бу қийматини (25.43)га қўйиб, абсолют эластик бўлмаган жисм учун Карно теоремасини яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2 (v_{1x} - v_{2x})^2}{2 (m_1 + m_2)}. \quad (25.48)$$

(25.48) ни иккинчи жисм қўзғалмас бўлган ҳол учун қўллаймиз. У ҳолда $v_{2x} = 0$ бўлгани сабабдан

$$T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2 v_{1x}^2}{2 (m_1 + m_2)}$$

ёки кўрилайётган ҳолда $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2$ бўлгани учун

$$T_1 - T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1. \quad (25.49)$$

Шундай қилиб, иккинчи жисм қўзғалмас бўлганда кинетик энергиянинг сарф бўлиши биринчи жисм кинетик энергиясининг $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ қисмига тенг бўлади.

Бу формулалардан фойдаланиб, сандон устига қўйилган қиздирилган металлга урилайётган боланинг фойдали иш коэффициентини аниқлаш мумкин. Боланинг массаси m_1 , қиздирилган металл ва

сандонинг биргалликдаги массаси m_2 га тенг бўлсин. Қиздирилган металлни абсолют эластик бўлмаган жисм деб қараш мумкин. Бу ҳолда металлни деформациялаш учун сарф бўлган $T_1 - T_2$ йўқотилган кинетик энергия фойдали ҳисобланади; $T_1 - T_2$ ни болганинг кинетик энергияси T_1 га нисбати болганинг фойдали иш коэффициентини фойдалайди:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (25.50)$$

(25.50) дан кўрамизки, болганинг массаси сандон массасига нисбатан етарлича кичик бўлганда унинг фойдали иш коэффициенти катта бўлади.

25.2-масала. Тобланаётган металл билан биргалликдаги массаси $m_2 = 240$ т бўлган сандон устига массаси $m_1 = 10$ т бўлган болга муҳраси $v = 5$ м/с тезлик билан тушади. Бунда тикловчи коэффициент $k = 0,3$ га тенг эластик зарба содир бўлади деб қараб, болганинг фойдали иш коэффициенти аниқласин.

Ечиш. Болганинг муҳраси сандон устидаги тобланаётган металл устига тушганда тўғри марказий зарба содир бўлади деб қараймиз. Ох ўқни болганинг ҳаракат йўналиши бўйича, яъна вертикал паҳта йўналирамаиз. У ҳолда болганинг зарбадан олдинги тезлиги $v_{1x} = v$ ҳамда сандон қўзғалмас бўлгани учун унинг зарбадан олдинги тезлиги $v_{2x} = 0$ бўлади. (25.33) га асосан, болга ва сандоннинг зарбадан кейинги тезликлари u_{1x} ва u_{2x} ларни аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} u_{1x} &= v - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} v = \frac{(m_1 - km_2)}{m_1 + m_2} v, \\ u_{2x} &= (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} v. \end{aligned} \quad (1)$$

(1) ни эътиборга олиб, (25.41) формула ёрдамида йўқотилган тезликка мос системанинг кинетик энергиясини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2} \left[\frac{(m_1 - km_2)v}{m_1 + m_2} \right]^2 + \frac{m_2}{2} \left[\frac{m_2(1+k)v}{m_1 + m_2} \right]^2 = \\ &= \frac{m_1}{2} \frac{v^2 m_2^2 (1+k^2)}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 (1+k^2) v^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{(1+k)^2 m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

(25.42) га биноан, йўқотилган кинетик энергия учун

$$T_1 - T_2 = \frac{1-k}{1+k} T = \frac{(1-k^2) m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$$

фойдани оламиз. Бу масалада металлни деформациялаш учун сарф бўлган $T_1 - T_2$ йўқотилган кинетик энергия фойдали ҳисобланади. Шу сабабли болганинг фойдали иш коэффициенти қуйидагича аниқланади:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Сунда $T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ — болганинг кинетик энергиясига тенг барча сарф бўлган энергия.

Шундай қилиб, болганинг фойдали иш коэффициенти

$$\eta = \frac{(1-k^2) m_2}{m_1 + m_2} = \frac{[1 - (0,3)^2] \cdot 240 \cdot 10^3}{(10 + 240) \cdot 10^3} \approx 0,874.$$

25.9* - §. Зарбали кучларнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи ва текис параллел ҳаракатдаги жисмга таъсири

Айтайлик, қаттиқ жисм қўзғалмас z ўқ атрофида ω_0 бурчак тезлик билан айланаётган бўлсин. Бундай жисмга зарбали кучнинг таъсир этиши натижасида унинг бурчак тезлиги қандай ўзгаришини кўриб чиқамиз. Шу мақсадда зарба вақтида z ўққа nisbatan кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (25.15) нинг учинчи тенгламасидан фойдаланамиз:

$$\bullet \quad K_z - K_z^0 = \sum M_z(\vec{S}_v^0). \quad (25.51)$$

(25.51) га асосан, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айланмиш ўқига nisbatan кинетик momenti

$$K_z = I_z \omega, \quad K_z^0 = I_z \omega_0$$

формулалар ёрдамида аниқланади. K_z ва K_z^0 нинг бу қийматларини (25.51) га қўйсак,

$$I_z (\omega - \omega_0) = \sum M_z(\vec{S}_v^0). \quad (25.52)$$

Бундан

$$\omega - \omega_0 = \frac{\sum M_z(\vec{S}_v^0)}{I_z}. \quad (25.53)$$

Бинобарин, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмга ташқи зарбали кучлар таъсир этиши натижасида унинг бурчак тезлигининг ўзгариши, ташқи зарбали куч импульсларининг мазкур ўққа nisbatan моментлари йиғиндисининг худди шу ўққа nisbatan жисм — шириния моментига nisbatanга тенг.

Зарбали кучларнинг текис параллел ҳаракатдаги жисмга таъсирини аниқлаш учун жисмнинг массалар маркази ҳаракатланадиган текисликда x ва y ўқларини ўтказамиз. Жисмнинг текис параллел ҳаракатини жисм массалар марказининг илгариллама ҳаракати ва массалар маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда ўтувчи ўққа nisbatan айланма ҳаракатларнинг мажмуасидан иборат деб қараш мумкин.

Айтайлик, массалар марказининг зарбадан олдинги тезлиги \vec{v}_c , жисмнинг бурчак тезлиги эса ω_0 га тенг бўлсин. U ҳолда (24.12) га асосан массалар маркази тезлигининг x ва y ўқлари бўйича ўзгариши аниқланидиган қуйидаги иккита тенгламани оламиз

$$\left. \begin{aligned} m(u_{c_x} - v_{c_x}) &= \sum S_{vx}^0 \\ m(u_{c_y} - v_{c_y}) &= \sum S_{vy}^0 \end{aligned} \right\} \quad (25.54)$$

(25.54) да S_{vx}^0 ва S_{vy}^0 лар \vec{S}_v^0 ташқи зарбали импульснинг x ва y ўқлардаги проекцияларини ифодалайди.

Агар жисмнинг массалар маркази орқали ҳаракат текислигига перпендикуляр равишда z ўқни ўтказсак, зарба вақтида z ўқ кўчишга улгурмайди, шу сабабли z ўққа нисбатан зарба вақтида кинетик моментнинг ўзгариши (25.52) га асосан

$$I_{C_z}(\omega - \omega_0) = \sum M_{C_z}(\vec{S}_V^e) \quad (25.55)$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Бу ерда I_{C_z} — массалар маркази билан биргаликда ҳаракатланувчи ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти; $M_{C_z}(\vec{S}_V^e)$ — ташқи зарбали куч импульси \vec{S}_V^e нинг C_z ўққа нисбатан моментини ифодалайди.

Шундай қилиб, *ташқи зарбали импульслар таъсирида текио параллел ҳаракатдаги жисм массалар марказининг зарбадан кейинги тезлиги (25.54), жисм бурчак тезлигининг зарба вақтидаги ўзгариши (25.55) формулалар ёрдамида аниқланади.*

25.10*-§. Зарба маркази

Айтайлик, қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг бирор M нуқтасига ташқи зарбали импульс \vec{S} таъсир этсин. Бу импульс таъсирида таянч нуқталарида \vec{S}_1 , \vec{S}_2 зарбали реакция импульслари ҳосил бўлади ва таянч нуқталарига зарбали босимлар таъсир этади.

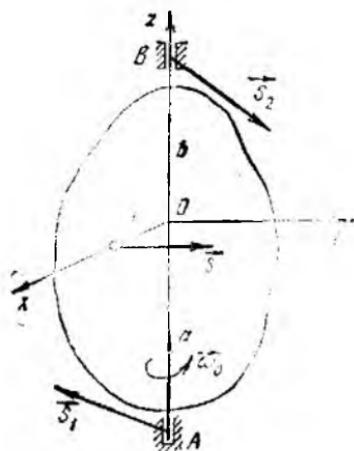
Координата ўқларини қуйидагича танлаймиз: z ўқни зарбадан олдинги жисмнинг бурчак тезлиги $\vec{\omega}_0$ бўйлаб йўналтирамиз; Oxy текисликни зарбали импульс қўйилган M нуқта орқали, x ўқни OM бўйлаб йўналтирамиз (25.6-расм). U ҳолда M нуқтанинг координаталари қуйидагига тенг бўлади:

$$x_M = OM = h, \quad y_M = 0, \quad z_M = 0.$$

Зарба вақтида жисм кўчишга улгурмагани туфайли жисм билан боғланган $Oxyz$ координаталар системасини зарба вақтида қўзғалмас деб қараш мумкин.

A ва B таянчлардан Oxy текислигига бўлган масофаларни мос равишда a ва b билан белгилаймиз.

O нуқтага нисбатан зарба вақтида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ва кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремаларни ифодаловчи (25.10) ва (25.14) тенгламаларни тузимиз:



25.6- расм.

$$\left. \begin{aligned} \vec{Q} - \vec{Q}_0 &= \vec{S} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2, \\ K_0 - \vec{K}_0^0 &= \vec{M}_0(\vec{S}) + \vec{M}_0(\vec{S}_1) + \vec{M}_0(\vec{S}_2). \end{aligned} \right\} \quad (25.56)$$

Айтайлик, жисм зарбадан олдин ва зарбадан кейин 25.6 - расмда тасвирланган $\vec{\omega}_0$ вектори йўналишига мос айлан сив. Y ҳолда

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_y = 0, & \omega_z &= \omega, \\ \omega_{0x} &= \omega_{0y} = 0, & \omega_{0z} &= \omega_0 \end{aligned}$$

ва

$$\begin{aligned} u_{Cx} &= -\omega y_C, & u_{Cy} &= \omega x_C, & u_{Cz} &= 0, \\ v_{Cx} &= -\omega_0 y_C, & v_{Cy} &= \omega_0 x_C, & v_{Cz} &= 0, \end{aligned}$$

(22.25) га кўра,

$$\begin{aligned} K_x &= -I_{zx}\omega, & K_y &= -I_{yz}\omega, & K_z &= I_z\omega, \\ K_x^0 &= -I_{zx}\omega_0, & K_y^0 &= -I_{yz}\omega_0, & K_z^0 &= I_z\omega_0. \end{aligned}$$

Бу муносабатларни эътиборга олиб, (25.56) ни координата ўқ-ларига проекцияласак,

$$\left. \begin{aligned} -My_C(\omega - \omega_0) &= S_x + S_{1x} + S_{2x}, \\ Mx_C(\omega - \omega_0) &= S_y + S_{1y} + S_{2y}, \\ 0 &= S_z + S_{1z}, \\ -I_{zx}(\omega - \omega_0) &= aS_{1y} - b \cdot S_{2y}, \\ -I_{yz}(\omega - \omega_0) &= -a \cdot S_{1x} + bS_{2x} - h \cdot S_x, \\ I_z(\omega - \omega_0) &= hS_y. \end{aligned} \right\} \quad (25.57)$$

(25.57) тенгламаларнинг биринчи бештаси воситасида зарбали реакция импульсларининг проекциялари: S_{1x} , S_{1y} , S_{1z} , S_{2x} ва S_{2y} лар аниқланади; охириги тенглама воситасида жисмнинг зарба вақтидаги бурчак тезлигининг ўзгариши аниқланади.

Қандай шартлар бажарилганда ташқи зарбали импульслар таъсир этганда таянч нуқталарида зарбали реакция импульси ҳосил бўлмаслигини кўриб чиқамиз. Бу ҳолда S_{1x} , S_{1y} , S_{1z} , S_{2x} , S_{2y} лар нолга тенг бўлиши керак. Натижада (25.57) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} -My_C(\omega - \omega_0) &= S_x, \\ Mx_C(\omega - \omega_0) &= S_y, \\ 0 &= S_z, \\ -I_{zx}(\omega - \omega_0) &= 0, \\ -I_{yz}(\omega - \omega_0) &= -hS_x, \\ I_z(\omega - \omega_0) &= h \cdot S_y. \end{aligned} \right\} \quad (25.58)$$

(25.58) дан таянч нуқталарида зарбали реакция кучлари ҳосил бўлмайдиغان излашадиган шартларни оламиз:

1) (25.58) нинг учинчи тенгламасига кўра зарбали куч импульси айланиш ўқиغا перпендикуляр бўлиши керак;

2) $S_z = 0$ бўлгани учун (25.58) нинг тўртинчи ва бешинчи тенгламаларига асосан, $I_{zx} = I_{zy} = 0$, яъни Oz айланиш ўқи бу ўқнинг Oxy текислиги билан кесилган нуқтасида бош инерция ўқидан иборат бўлиши керак;

3) (25.58) нинг биринчи ва иккинчи тенгламаларидан кўрамизки, $x_C S_x + y_C S_y = 0$ ёки $\vec{r}_C \cdot \vec{S} = 0$ бўлиши керак; бошқача айтганда, жисм масса марказининг радиус-вектори \vec{r}_C ҳамда зарбали импульс \vec{S} векторлари ўзаро перпендикуляр бўлиши керак, яъни зарбали куч импульси айланиш ўқи ва массалар маркази орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр йўналиши зарур;

4) (25.58) нинг иккинчи ва олтинчи тенгламаларига биноач, қуйидаги тенглик ўринли бўлиши керак:

$$x_C \cdot h = \frac{I_z}{M} = \rho^2, \quad (25.59)$$

бунда ρ жисмнинг айланиш ўқиغا нисбатан инерция радиусини ифодалайди. (25.58) формула ёрдамида зарбали импульс қўйиладиган M нуқтанинг ҳолати аниқланади:

$$h = \frac{I_z}{M x_C}. \quad (25.60)$$

Юқоридаги шартларни қаноатлантирадиган M нуқта зарба маркази дейилади.

Агар жисм моддий симметрия текислиги Π га эга бўлса, юқоридаги шартлар соддалашади. Бу ҳолда айланиш ўқи моддий симметрия текислиги Π билан кесилган O нуқтада инерция бош ўқидан иборат бўлади ҳамда жисмнинг оғирлик маркази C ҳам Π текисликда ётади (25.7-расм). Кўрилатган хусусий ҳолда зарба таянч нуқталарига таъсир этмаслиги учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

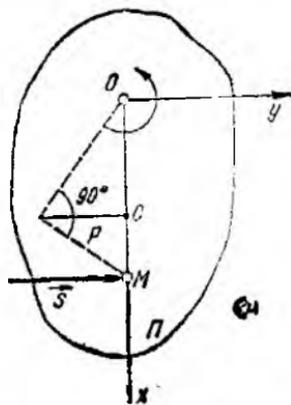
1) \vec{S} зарбали импульс Π текисликда ётсин ва OC га перпендикуляр бўлиши керак;

2) зарбали импульс \vec{S} нинг таъсир чизигидан айланиш ўқиғача бўлган масофа

$$h = OM = \frac{\rho^2}{x_C} = \frac{I_z}{M x_C} \quad (25.61)$$

формула ёрдамида аниқланади. Бунда ρ билан жисмнинг айланиш ўқиға нисбатан инерция радиуси белгиланган.

(25.61) дан кўрамизки, зарба маркази айланиш ўқиға мос бўлган силкинши маркази (22.4-§) билан устма-уст тушиши керак.



25.7-расм.

Зарба марказини аниқлаш техникада кўп қўлланилади. Масалан, материалларнинг мустаҳкамлигини динамик синаш учун қўлланиладиган зарба машинасида зарба марказини аниқлаш алоҳида аҳамиятга эга.



25.8- расм.

25.3- масала. Зарба марказини аниқлашда ишлатиладиган асбобда массаси m ва узунлиги l га тенг стержень унинг O учидан унга перпендикуляр равишда ўтувчи қўзғалмас горизонтал ўқ атрофида айлана олади. 25.8-расмда тасвирланган мувозанат ҳолатида зарба импульси стержень ва айланниш ўқиغا перпендикуляр йўналган зарба берилади. Зарба маркази ва стерженьнинг зарбадан кейинги бурчак тезлиги аниқлансин.

Ечиш. x ўқни стержень бўйлаб вертикал пасга йўналтириб, (25,60) га асосан O нуқтадан зарба марказигача бўлган $h = OM$ масофани аниқлаймиз:

$$h = \frac{I_z}{m x_C} = \frac{2ml^2}{3ml} = \frac{2}{3} l.$$

Зарба олдида стержень тинч ҳолатида ($\omega_0 = 0$) бўлишини эътиборга олиб, (25,55) формула воситасида стерженьнинг зарбадан кейинги бурчак тезлигини аниқлаймиз.

$$\omega = \frac{S \cdot h}{I_z} = \frac{S \cdot \frac{2}{3} l}{\frac{ml^2}{3}} = \frac{2S}{l \cdot m}.$$

25.4 - масала. Зарба машинасининг радиуси $r = 0,1$ м ва қаврилиги $\delta = 0,05$ м бўлган A пўлаг дискдан ва диаметри $d = 0,02$ м ва узунлиги $l = 0,9$ м бўлган доиравий B пўлаг стерженьдан иборат. O ўққа зарба тегмаслиги учун уриладиган C брус O айланниш ўқи ёлган горизонтал текисликдан қандай h масофага ўрнатилиши керак? Зарба горизонтал йўналишида берилади деб қаралсин (25,9-расм).

Ечиш. Стержень ва дискнинг оғирлигини P_1 ва P_2 билан белгиласак,

$$P_1 = \gamma l \frac{\pi d^2}{4}, \quad P_2 = \gamma \pi r^2 \delta,$$

бунда γ — бирлик ҳажмга тўғри келган пўлатнинг оғирлиги.

O нуқтадан системанинг массалар марказигача бўлган масофа

$$OC = \frac{P_1 \frac{l}{2} + P_2 (l + r)}{P_1 + P_2}$$

формула ёрдамида аниқланади. Бундан ташқари,

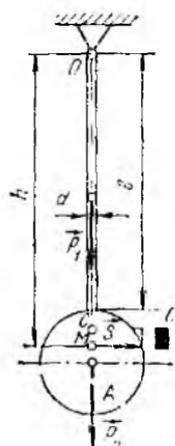
$$\rho^2 = \frac{I_z}{M} = \frac{P_1 \frac{l^2}{3} + P_2 (l + r)^2 + P_2 \frac{r^2}{2}}{P_1 + P_2}$$

муносабат ўринли бўлади. Олинган ифодаларни

$$h = OM = \frac{\rho^2}{OC}$$

формулага қўйсак,

$$h = \frac{I^2 \cdot \frac{d^2}{12} + r^2 \delta \left[(l + r)^2 + \frac{r^2}{2} \right]}{l^2 \cdot \frac{d^2}{8} + r^2 \delta (l + r)} = 0,934 \text{ м.}$$



25.9- расм.

Айрим механик катталикларнинг ўлчов бирликлари

Асосий катталиклар	Ўлчамлиги	Ўлчов бирлиги				Бошқа бирликлар билан СИ бирликлари орасидаги боғланишлар
	СИ ва СГС	МКГСС	СИ	СГС	МКГСС	
1	2	3	4	5	6	7

Асосий бирликлар

Узунлик	L	L	м	см	м	$1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$
Масса	M	$L^{-3}FT^3$	кг	г	т.м.б.-кгк.	$1 \text{ т.м.б.} = 9,81 \text{ кг}$
Вақт	T	T	с	с	с	

Қўшимча бирликлар

Ясси бурчак	1		1 рад	рад	рад	—
Фазовий бурчак	1		1 ср	ср	ср	—

Ҳосилавий бирликлар

Юза	L^2	L^2	м^2	см^2	м^2	$1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$
Ҳажм	L^3	L^3	м^3	см^3	м^3	$1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$
Тезлик	LT^{-1}	LT^{-1}	м/с	см/с	м/с	$1 \text{ см/с} = 10^{-2} \text{ м/с}$
Тезланиш	LT^{-2}	LT^{-2}	м/с ²	см/с ²	м/с ²	$1 \text{ см/с}^2 = 10^{-2} \text{ м/с}^2$
Бурчак тезлик	T^{-1}	T^{-1}	рад/с	рад/с	рад/с	—
Бурчак тезланиш	T^{-2}	T^{-2}	рад/с ²	рад/с ²	рад/с ²	—
Зичлик	$L^{-3}M$	$L^{-3}FT^3$	кг/м ³	г/см ³	т.м. б./м ³ =кгк.с ² /м ⁴	$1 \text{ г/см}^3 = 10^3 \text{ кг/м}^3$
Куч	LMT^{-2}	F	Н	дина	кгк	$1 \text{ кгк} = 9,81 \text{ Н}$
			$1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$			
Босим	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	Па	дина/см ²	кгк/м ²	$1 \text{ кгк/м}^2 = 9,81 \text{ Па}$ $1 \text{ атм} = 1,01325 \text{ Па}$

1	2	3	4	5	6	7
Кучнинг импульси Харакат миқдори Кучнинг моменти Инерция моменти Кинетик моменти Иш, энергия	LMT^{-1} LMT^{-1} L^2MT^{-2} L^2M L^2MT^{-1} L^2MT^{-2}	FT FT LF LFT^2 LFT LF	Н.с кг.м/с Н. м кг.м ² кг.м ² /с Ж	див.с г. см/с дина. с г.см ² г.см ² /с эрг	кгк.с г.м.б. м/с = кгк.с. кгк.м м.б.м ² = кгк.м.с ² м.б.м ¹ /с = кгк.м.с кгк.м	1 кгк.с = 9,81 Н.с. 1 кгк.с = 9,81 кг. м/с 1 кгк.м = 9,81 Н.м. 1 г.см ² = 10 ⁻⁷ кг.м ² 1 г.см ² /с = 10 ⁻⁷ кг.см ² /с 1 кгк.м = 9,81 Ж 1 эрг = 10 ⁻⁷ Ж 1 ст кучи = 736 Вт 1 эрг/с = 10 ⁻⁷ Вт
Кувват	L^2MT^{-3}	LFT^{-1}	Вт	эрг/с	кгк.м/с	
Тебраниш частотаси	T^{-1}	T^{-1}	Гц	Гц	Гц	

ФОНДАЛНИНГАН АДАБИЁТ

1. Аэнэ-Корнев С.К., Янг-уразов Ш.Х. Назарий механикадан масала-дар ешиш методикаси (Статика ва кинематика). Қайта нашланган 2-нашри. — Т.: Уқитувчи, 1974.
2. Аэнэ-Корнев С.К., Янг-уразов Ш.Х. Назарий механикадан масала-дар ешиш методикаси (Динамика). — Т.: Уқитувчи, 1967.
3. Айзенберг Т.В., Вороников И.М., Оселкин В.Н. Дуюқдорлик то к реченино задал по теоретической механике. — 6-е стереотип. изд. — М.: Высшая школа, 1968.
4. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. — 7-е изд., доп. М.: Наука, 1975, т. I; — 6-е издание. — М.: Наука, 1975, т. II; — М.: Наука, 1973, т. III.
5. Бражничченко Н.А., Кап В.И., Минибург Б.В. [и др.]. Сборник задач по теоретической механике. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1974.
6. Буленин Н.В. Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1971.
7. Буленин Н.В., Луны Я.Д., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1979, тт. I, II.
8. Вороников И.М. Курс теоретической механики. — 13-е стереотип. изд. — М.: Наука, 1966.
9. Фернет М. М. Курс теоретической механики. — 2-е изд. — М.: Высшая школа, 1973.
10. Деброндарова В.В., Никитин В.В. Курс теоретической механики — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1983.
11. Корсакиев К.С., Батман Г.Д., Дронг В.И. [и др.]. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1983.
12. Лонджанский Д.Т., Дурье А.И. Курс теоретической механики. — 8-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука 1981, т. I; 6-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1983, т. 2.
13. Мешчерский И.В. Назарий механикадан масаладар тўплами. — Русча 3-д. иштри а муваффиқлиқотидаги 2-нашри. — Т.: Уқитувчи, 1967.
14. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. — 35-е изд., перераб. — М.: Наука, 1981.
15. Старжинский В.М. Теоретическая механика. — М.: Наука, 1980.
16. Тарт С. М. Краткий курс теоретической механики. 9-е изд. — М.: Наука, 1974.
17. Шохайдарова П., Шохайтов Ш., Золдров Ж. Назарий механика. — Т.: Уқитувчи, 1981.
18. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. — 6-е изд., испр. — М.: Высшая школа, 1984, ч. 2.
19. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. — 6-е изд., испр. — М.: Высшая школа, 1984, ч. 1.
20. Яблонский А. А., Норейко С. С. Курс теории колебаний. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: Высшая школа, 1975, ч. 2.
21. Яблонский А. А., Норейко С. С., Вольфсон С. А., Киселев В. А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. — М.: ИСР, — М.: Высшая школа, 1978.
22. Уразов А.Т., Назарий механика асосий курси. — Қайта нашланган 3-нашри. — Т.: Уқитувчи, 1966.

Номилар кўрсаткичи

- Абу Али ибн Сино (980 — 1037) — ўрта аср Шарқининг энциклопедист олими **6**
- Амонтон Гильем (1663 — 1705) — француз олими **54**
- Архимед (эрамизгача 287 — 212) — мутафаккир, қадимги Юнонистоннинг буюк математиги ва физиги **9, 97**
- Беруний Абу Райхон (973 — 1048) — Ўрта Осиё (Хоразм) олими, математика, физика, астрономия, фалсафа, геология каби соҳаларда муҳим асарлар ёзган **6**
- Варишён Пьер (1654 — 1722) — француз механиги ва математиги **9**
- Галилей Галилео (1564 — 1642) — итальян олими **4, 7**
- Гюльден Гуго (1841 — 1896) — швед астрономи **109**
- Даламбер Жан Лерон (1717 — 1783) — француз математиги ва физиги **7**
- Дирихле Петер Густав (Лежен Дирихле) (1805 — 1859) — немис олими **512**
- Жуковский Николай Егорович (1847 — 1921) — рус математиги ва механиги мамлакатимиз гидро ва аэродинамика фанининг асосчиси **7, 9**
- Ильюшин Александр Антонович (1911 йилда туғилган) — совет механик олими **8**
- Ишлунский Александр Юльевич (1913 йилда туғилган) — совет механик олими **8**
- Карно Лазар Никола (1753 — 1823) — француз математиги **557**
- Келдини Мстислав Всеволодович (1911 — 1978) — совет математиги ва механиги, академик **8**
- Кельвин (Томсон Уильям) (1824 — 1907) — инглиз физиги **550**
- Ковалевская Софья Васильевна (1850 — 1891) — рус олимаси. Дунёда биринчи аёл математик **7**
- Коперник Николай (1473 — 1543) поляк математиги ва астрономи **7**
- Корнолис Гюстав Гаспар (1792 — 1843) — француз механик олими **218**
- Королев Сергей Павлович (1906 — 1966) — атоқли совет конструктори, амалий космонавтика асосчиси, академик **8**
- Кремон Луиджи (1830 — 1903) — италиялик олим математик **65**
- Кулон Шарль Огюстон (1736 — 1813) — француз инженери ва физиги **54**
- Лагранж Жозеф Луи (1736 — 1813) — француз математиги ва механиги **7, 9, 475, 511**
- Ленин Владимир Ильич (1870 — 1924) — мутафаккир, революционер, Совет Иттифоқи Коммунистик партияси ва Совет давлатининг асосчиси **4, 5**
- Ломоносов Михаил Васильевич (1711 — 1765) — рус энциклопедист олими, шоир **7**
- Ляпунов Александр Михайлович (1857 — 1918) — рус математиги, академик **536**
- Максвелл Жемс Кларк (1831 — 1879) — инглиз физик олими **65**
- Марк Карл (1818 — 1883) — мутафаккир, революционер, илмий коммунизм асосчиси **212**
- Мещерский Иван Всеволодович (1859 — 1935) — рус механик олими, ўзгарувчан массага жисм механикасининг асосчиси **7**
- Ньютон Исаак (1643 — 1727) — буюк инглиз олими, файласуфи. Классик механика қонуларининг асосчиси **7**
- Остроградский Михаил Васильевич (1801 — 1862) — рус математиги, академик **7**
- Пуансо Луи (1777 — 1869) — француз математиги, механиги, инженери **9, 35**
- Раҳматуллин Халил Аҳмедович (1909 — 1988) — ўзбек совет механик-олими, академик **8**

- Сильвестр Жемс Жозеф (1814—1894)— инглиз математиги 516
- Уллубек Муҳаммад Тарагай (1394—1449)— Урта Осиёлик буюк олим, астроном, математик 6
- Циолковский Константин Эдуардович (1857—1935)— рус совет олим ва ихтирошчи, ракета двигатели назариясига асос солган 7
- Чаплигин Сергей Александрович (1869—1942)— рус совет математиги, академик 7,9
- Шаль Мишель (1793—1880)— француз механик-олими 207
- Эйлер Леонард (1707—1783)— математик, механик, физик. Россияда яшаган ва ижод қилган 7, 256
- Эйнштейн Альберт (1879—1955)— немис физик-олими, нисбийлик назариясининг асосчиси 6
- Энгельс Фридрих (1820—1895)— мутафаккир, революционер. илмий коммунизм асосчиларидан бири 4, 9, 112, 405
- Урозбоев Муҳаммад Тошевич (1906—1971)— ўзбек совет механик-олими, академик 8
- Қобулов Восил Қобулович (1921 йилда туғилган)— ўзбек совет механик-олими, академик 8

АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРНИНГ АЛФАВИТ КЎРСАТКИЧИ

- абсолют қаттиқ жисм** 9
 — эластик бўлмаган зарба 551
 — зарба 551
- айлана ёйининг оғирлиқ маркази** 106
- айланиш оний ўқи** 191
- айланма инерция кучи** 453
- аналитик боғланишлар**
 — механика 468
- аниқ шорали функция** 536
- апериодик ҳаракат** 292
- асимптотик устувор ҳаракат** 535
- асосий ҳаракат** 534
- беголоном боғланиш** 469
- бефарқ мувозанат** 510
- бикирлик коэффициенти** 516
- бинормаль** 133
- бosh нормаль** 133
- боғланиш** 13
 — кўпайтувчиси 313
 — реакция кучи 13
 — тенгламаси 311
- боғланишдаги механик система** 468, 471
 — нуқта 311
 — учун Даламбер принципи 452
 — система 468
- боғланишдан бўшатиш принципи** 13
- боғланишлар** 468
 — аксиомаси 13
- бурчак тезликларнинг параллелограмми**
 қондаси 231
- бўшатадиган боғланиш** 469
- бўшатмайдиган боғланиш** 469
- вазнсиз сержень** 15
- вазнсизлик ҳолати** 328
- Варианшон теоремаси** 28, 85
- вақт** 113
- винт параметри** 88
 — чизми 245
 — ўқи 245
 — қалами 245
 — ҳаракати 245
- Галилей алманшириши** 327
- Гамильтон таъсири** 504
 — Остроградский принципи 505
- Гамильтоннинг каноник тенгламалари** 508
- гармоник тебранма ҳаракат** 140
- географик кенглик** 329
- геометрик боғланиш** 469
- геоцентрик кенглик** 329
- гироскоп** 442
- гироскопик жуфт** 448
 — момент 448
- голономли боғланиш** 469
- гравитацион масса** 250
- Гурвиц теоремаси** 539
- Гюйгенс—Штейнер теоремаси** 340
- Гюльден теоремалари** 109
- Даламбер принципи** 451
 — Лагранж принципи 491
- динамика виш** 87
 — — били моментининг аналитик ифодиси 89
 — мувозанатлашган жисм 463
 — реакция кучлари 462
- динамика 8, 249**
- динамиканинг асосий қонуни** 251
 — умумий тенгламаси 491
 — — теоремалари 253
- динамиклик коэффициенти** 298
- дифференциал тенгламанинг биринчи интеграллари** 264
 — узатма 240
 — формалаги моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгарishi ҳақидаги теорема 409
- дифференциалли боғланиш** 469
- дучалашдани ишқаланиш жуфти** 59
 — — коэффициенти 59
 — — моменти 59
- донра секторининг оғирлиқ маркази** 107
- доғрайай дискининг инерция моменти** 341
 — конусининг оғирлиқ маркази 108
 — ҳаққанинги инерция моменти 341
- ёпишма текислик** 133
- жисмнинг абсолют ҳаракати** 228
 — берилган ондаги бурчак тезланиши 152
 — бурчак тезлиги 150
 — вази 327
 — илгарилма ҳаракат тенгламаси 422
 — ҳаракати 147
 — кўчирма ҳаракати 228
 — мураккаб ҳаракати 228
 — нисбий ҳаракати 228
 — оний бурчак тезланиши 192

- **огирлиж кучи** 69
- — **маркази** 99
- **төкис айланма ҳаракат тенгламаси** 151
- — — **ҳаракати** 151
- — **ўзгарувчан айланма ҳаракати** 152
- **секинланувчан айланма ҳаракати** 152
- **сферик ҳаракат тенгламалари** 189
- — **ҳаракати** 188
- **тезланувчан айланма ҳаракати** 152
- **қўзғалмас нуқта агрофидаги айланма ҳаракат тенгламалари** 189
- — — **ҳаракати** 188
- — **ўқ агрофида айланма ҳаракат кинематик тенгламаси** 150
- — — **ҳаракати** 149
- Жуковский қондаси** 449
- жуфт айланмиш** 236
- — **моменти** 236
- — **куч** 29
- — **моменти вектори** 77
- жуфтнинг елкаси** 29
- **моменти** 31
- **текислиги** 29
- варба** 544
- **вақти** 544
- **вақтида нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема** 545
- — **нуқта кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема** 548
- — **система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема** 549
- — **система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема** 547
- **маркази** 563
- **назариясининг асосий тенгламаси** 545
- варбали куч** 544
- — **графиғи** 544
- — **импульси** 544
- идеал боғланиш** 474
- изохрон вариация** 505
- инерциал система** 251
- **ҳаракат** 251
- инерцион масса** 250
- инерция бош ўқлари** 346
- **эллипсоиди** 345
- **қонуни** 251
- ички кучлар** 333
- ишқаланиш бурчаги** 54
- **конуси** 54
- **кучи** 53
- **соҳаси** 55
- Карно теоремаси** 557
- Кельвин теоремаси** 550
- кесилувчи кучлар системаси** 16
- **кучларнинг мувозанат тенгламалари** 92
- кинематик боғланиш** 469
- кинетостатика тенгламалари** 456
- **усули** 452
- Ковалевская ҳоли** 442
- консерватив куч** 415
- **система** 421
- Кориолис инерция кучи** 325
- **тезланиши** 218, 220
- **теоремаси** 218
- кран фермалари** 60
- кинематика** 8
- куч** 251
- **ишнинг геометрик ифодаси** 394
- — **аналитик ифодаси** 394
- **кўпбурчаги** 22
- **майдони** 415
- **функцияси** 415
- **чизиғи** 417
- **элементар ишнинг аналитик ифодаси** 394
- **қувватининг аналитик ифодаси** 395
- кучлар системаси** 10
- **системасининг бош вектори** 36
- — **векторин инварианти** 82
- — **инварианти** 82
- — **марказга нисбатан статик моменти** 99
- — **марказий ўқи** 88
- — **текисликка нисбатан статик моменти** 99
- **таъсирининг ўзаро мустақиллик қонуни** 252
- кучни аналитик усулда аниқлаш** 21
- кучнинг елкаси** 30
- **импульси** 356
- **йўналиши** 9
- **миқдори** 9
- **нуқтага нисбатан момент вектори** 73
- — — **моменти** 30
- **таъсир чизиғи** 10
- **текисликдаги проекцияси** 20
- **чекли йўлдаги иши** 394
- **элементар импульси** 356
- **ўққа нисбатан моменти** 74
- **қуввати** 394
- кўпбурчак қондаси** 17
- кўприк фермалари** 60
- кўчирма инерция кучи** 325
- Лагранж—Дирихле теоремаси** 512
- **Пуассон ҳоли** 442
- Лагранжнинг биринчи хил тенгламалари** 312, 316
- **иккинчи хил тенгламалари** 496
- логарифмик декремент** 292
- Ляпунов таърифига кўра устувор мувозанат** 511
- **теоремалари** 536, 538
- **функцияси** 537
- Ляпуновнинг иккинчи усули** 536
- Максвелл—Кремон диаграммаси** 65, 66
- марказдан қочирма инерция кучи** 453
- — — **моменти** 345
- марказий инерция бош ўқлари** 346
- — **эллипсоиди** 346

- куч 380
- массалар геометрияси** 335
- математик тебрангич** 318
- механик система** 333
 - — учун бошлангич шартлар 353
 - — энергиясининг сақланиш қонуни 421
 - — ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни 364
 - системанинг мумкин бўлган кўчиши 471
 - — ҳаракат дифференциал тенгламалари 353
 - ҳаракат 4
 - ҳаракатнинг векторли ўлчови 356
- Мешчерский тенгламаси** 373
- моддий нуқта** 9
 - — динамикасининг биринчи асосий масаласи 257
 - — иккинчи асосий масаласи 262
 - — механик энергиясининг сақланиш қонуни 420
 - нуқтанинг мажбурий ҳаракат тенгламаси 296
 - — тебранма ҳаракати 283
 - — тўлиқ механик энергияси 418
- моментлар параллелограмми** 78
- мувозанат ҳолати** 10
- мувозанатлашган гироскоп** 443
 - кучлар системаси 10
- мумкин бўлган кўчиш принципи** 475
- назарий механика** 4
- нолга эквивалент система** 10
- нормал инерция кучи** 329
 - реакция кучи 14
 - текислик 133
- ноустувор мувозанат** 510
 - ҳаракат 534
- нуқта динамикасининг асосий тенгламаси** 252
 - тесқари масаласи 262
 - — тўғри масаласи 257
 - механик ҳаракатининг скаляр ўлчови 404
 - тезланишининг кўндаланг ташкил этувчиси 132
 - — радиал ташкил этувчиси 132
 - — тезлигининг алгебраик қиймати 127
 - — кўндаланг ташкил этувчиси 126
 - — модуль 127
 - — радиал ташкил этувчиси 126
 - ҳаракат мақдори моментининг сақланиш қонуни 380
 - — — ўзгариши ҳақидаги теорема 379
 - — миқдорининг чекли вақт ичида ўзгариши ҳақидаги теорема 359
 - — — ўзгариши ҳақидаги теорема 358
 - — — теореманинг дифференциал кўряниши 358
 - нуқтанинг абсолют тезланиши 214
 - — — тезлиги 214
 - — — ҳаракати 214
 - айланма тезланиши 156, 172
 - берилган ондаги тезланиш вектори 130
 - — — тезлик вектори 123
 - — — кинематик тенгламаси 117
 - — — тармақлик тебранма ҳаракати 285
 - — — инерция кучи 432
 - — — кинетик энергияси 404
 - — — кўчирма тезлиги 213, 215
 - — — ҳаракат тезланиши 213, 218
 - — — — тезлиги 213, 215
 - — — ҳаракати 213
 - — — кўчиш вектори 123
 - — — марказга ниситлама тезланиши 156, 172
 - — — мураккаб ҳаракати 214
 - — — нисбий тезланиши 213, 218
 - — — ҳаракат дифференциал тенгламаси 326
 - — — тезлиги 213
 - — — траекторияси 213
 - — — ҳаракати 213
 - — — нормал тезланиши 137
 - — — сектор тезлиги 381
 - — — тебранниш фазаси 141
 - — — амплитудаси 141
 - — — текис ўзгарувчан ҳаракати 139
 - — — теқилил тебранниши 298
 - — — траекторияси 113
 - — — тўғри чизиқли ҳаракат дифференциал тенгламаси 255
 - — — уринма тезланиши 137
 - — — эгри чизиқли текис ўзгарувчан ҳаракат тенгламаси 140
 - — — — ҳаракат тенгламаси 139
 - — — — ўзгарувчан ҳаракати 139
 - — — эркин тебранма ҳаракат дифференциал тенгламаси 284
 - — — ўртача тезланиш вектори 130
 - — — тезлик вектори 122
 - — — ўтган йўли 128
 - — — ўқди нисбатан инерция momenti 337
 - — — ҳаракат миқдори 354
 - — — ҳаракатини векторли усулда аниқлаш 117
 - — — табиий усулда аниқлаш 119
 - — — цилиндрлик координаталарда аниқлаш 118
- Ньютонынннг учинчи қонуни** 13
- оддий узатма** 239
- оддий вилл ҳаракати** 247
- ортиқча юкланиш** 328
 - — — стерженга эга бўлган ферма 62
 - — — бўлмаган ферма 62
- оғирлик кучининг иши** 397
 - — — марказини аниқлашнинг бўлакларга ажратиш усули 103
 - — — манфий юза усули 104
 - — — симметрия усули 102

- — — тажриба усули 105
- параллел кучлар маркази 98
- — системаси 27
- параллелограмм иккинчиси 12
- планетар улатма 240
- потенциалли куч 415
 - — майдони 415
- преломия бурчани 188
- Пуансо усули 80
- Резаль теоремаси 444
- резонанс 301
- Риттер нуқталари 70
 - усули 70
- ричаг 41
 - мувозанати 42
- сапоқ системаси 112
- Сильвестр критерийси 516
- силлиқ текисликнинг реакция кучи 14
- сирпанишдаги ишқаланиш 53
 - — коэффициенти 54
 - — кучи 53
- система 333
 - кинетик моментининг сақланиш қонуни 386
 - — — ўзгариши ҳақидаги теорема 384
 - — энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теоремани дифференциал кўриниши 413
 - массалар маркази координаталарининг сақланиш қонуни 367
 - — марказига нисбатан кинетик моментининг сақланиш қонуни 392
 - — марказининг сақланиш қонуни 367
 - — — ҳаракати ҳақидаги теорема 366
 - учун Даламбер принцили 456
 - ҳаракат миқдорининг бош momenti 377
 - — — чекли вақт ичида ўзгариши ҳақидаги теорема 364
 - — — ўзгариши ҳақидаги теорема 362
- системанинг бош тебранилари 530
 - кинетик энергияси 404
 - — — ҳақидаги Кёниг теоремаси 406
 - марказга нисбатан кинетик momenti 377
 - массалар маркази 335
 - массаси 335
 - нуқтага нисбатан инерция momenti 337
 - текисликка нисбатан инерция momenti 337
 - эркинлик даражаси 471
 - ўққа нисбатан инерция радиуси 339
 - — — momenti 337
 - қутбга нисбатан инерция momenti 337
- ҳаракат миқдори 354
- соф айланни бурчаги 188
 - — ўқи 188
- статик аниқ масала 42
 - — ферма 62
 - — ишқаланиш кучи 54
 - — мувозанатлашган жисм 463.
 - — исаниқ масала 42
 - — юзаниқ ферма 62
 - — реакция кучлари 462
- статика 8
- стационар бўланиш 471
 - бўлмаган бўланиш 471
 - — куч майдони 445
 - — куч майдони 415
- стержендаги эўриқиш 23
- стерженнинг инерция momenti 341
- сферик шарнирнинг реакция кучи 15
- сўнги коэффициенти 292, 306
- сўнувчи тебранма ҳаракат амплитудаси 292
 - — — даври 291
- табиғи координата ўқлари 133, 134
 - — — учқилик 133
- таранглик кучи 16
- ташқи кучлар 331
 - кучларнинг нуқтага нисбатан бош momenti 384
- таъсир ва акс таъсир қонуни 252
- тақсимланган кучлар 43
- тебраниш даври 141, 286
 - — — декременти 292
 - — — частотаси 286
- тебраниларининг дисправий частотаси 141
 - — бошланғич физаси 141
- тезлик географи 131
- тезликларнинг параллелограмм қондаси 215
- тезланишларнинг параллелограмм қондаси 219
- текис параллел ҳаракатдаги жисм учун Кёниг теоремаси 407
 - — — шакл 160
 - — — нуқтасининг тезлигини проекция усули билан аниқлаш 164
 - — — — — тезликлар оний марказидан фойдаланиб аниқлаш 166
 - — — — — қутб усулида аниқлаш 164
 - — — — — ҳаракатнинг кинематик тенгламалари 161
 - — — — — шаклнинг айлапиш оний маркази 164
 - — — — — бурчак тезланиши 161
 - — — — — бурчак тезлиги 161
 - — — — — тезланишлар оний маркази 163
 - — — — — тезликлар оний маркази 164
 - — — — — ҳаракат текислиги 160
 - — — — — тенгламалари 161
- текисликдаги кучлар системаси 85
 - — — системасининг бош momenti 86

— — — мувозанат тенгламалари 93
 — — — — шартлари 39
 — параллел кучлар мувозанати 41
 тенг таъсир эгувчи куч 10
 — потенциалли сирт 416
 тикловчи коэффициент 551
 тортишни кучининг иши 399
 теребонининг оғирлик маркази 106
 тугун 60
 — кесилш усули 62
 тугунлар чизиги 188
 тушиш бурчаги 552
 тўғри зарба 552
 — марказий зарба 553
 — чизикли секинланувчан ҳаракат 132
 — — тезланувчан ҳаракат 132
 узатиш сони 239
 уйғотилган ҳаракат 534
 — — дифференциал тенгламалари 585
 умумлашган координата 484
 — куч 486
 — тезлик 494
 урнима текислик 133
 учбурчак юзасининг оғирлик маркази 105
 устувор мувозанат 510
 фаза сиёжиши 305
 фаза 112
 фазладаги кучлар системаси 72
 — — — мувозанатнинг аналитик ифодаси 92
 — — — векторли ифодаси 92
 — — — системасининг бош вектори 81
 — — — бош моменти 81
 — — — скаляр инварианти 84
 — параллел кучларнинг мувозанат шартлари 93
 физик тебрангич 425
 — тебрангичнинг келтирилган узунлиги 426
 — — келиши ўқи 425
 — — силжиниш маркази 426
 — — ҳаракат дифференциал тенгламаси 426
 ферма 69
 цилиндрлик вазирининг реакция кучи 15
 Цевковский формуласи 375, 376
 чап гина 245
 частота нар тенгламаси 527
 текис ферма иши нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема 499
 — вақт ичда система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема 412
 чизикнинг координата текисликларига нисбатан статик моменти 102
 — нуқтага нисбатан статик моменти 102
 — ағирлик радиуси 136

Шаль теоремаси 207
 шарнинг инерция моменти 343
 шарлар 15
 эри чизикли текис ҳаракат 128, 139
 — — ҳаракат 113
 — чизикли эрилик вектори 131
 Эйлер бурчаклари 188
 — теоремаси 189, 370
 — Даламбер теоремаси 189
 — Пуансо ҳоли 412
 Эйлернинг динамик тенгламалари 441
 — кинематик тенгламалари 204
 эквивалент кучлар системаси 10
 эквивалентлик принципи 250
 эластик зарба 551
 эластиклик кучининг иши 398
 энергия интегралли 420
 эркин айланиш ўқи 464
 — гироскоп 443
 — моддий нуқта учун Даламбер принципи 452
 — — — ҳаракат дифференциал тенгламасининг векторли ифодаси 254
 — — нуқтанинг Декарт координата ўқларидаги дифференциал тенгламалари 255
 — — табиий координата ўқларидаги динамик тенгламалари 256
 — система 468
 — қаттиқ жисм нуқтасининг тезланиши 212
 — — — тезлиги 210
 — — жисмнинг кинематик тенгламалари 208
 юзалар қонуни 382
 юзанинг координата текисликларига нисбатан статик моменти 102
 ясси ферма 60
 ўзаро механик таъсирнинг векторли ўлчови 356
 — — скаляр ўлчови 405
 ўзгармас механик система 333
 — инвариант функция 537
 ўзгарувчан массали жисм 371
 — — нуқта 371
 — — нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламаси 372
 ўзгарувчи инвариант функция 537
 ўш иши 215
 ўртача зарбали куч 545
 ўқ бўйича система ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни 365
 қайтарувчи куч 283
 қайшиш бурчаги 552
 қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламалари 431
 қийшиқ зарба 552
 қотиш принципи 13
 қувурнинг инерция моменти 342
 қузғалмас аксонд 191

- аксондиннг тенгламаси 195
- нуқта атрофида айланувчи жисм нуқта асининг айланма тезланиши 196
- — — — — тезлиги 193
- — — — — ўққа интилма тезланиши 196
- центроида 171
- қўзғалувчи аксонд 191
- аксондиннг тенгламаси 195
- таянчиннг реакция кучи 15
- центроида 171
- қўшилган жуфт 35
- ҳажминнг координата текисликларига нисбатан статик моменти 102
- нуқтага нисбатан статик моменти 102
- ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни 360
- тенгламаси 116
- қонуни 116
- ҳаракатдаги ишқаланиш коэффициенти 54
- ҳақиқий вертикал 329

М У Н Д А Р И Ж А

Ўз боши	3
Жириш	4
I ҚИСМ. ҚАТТИҚ ЖИСМ СТАТИКАСИ	9
1-б.б. Статиканинг асосий тушунчалари ва аксиомалари	9
1.1-§. Статиканинг асосий тушунчалари	9
1.2-§. Статика аксиомалари	10
1.3-§. Боғланиш ва боғланиш реакциялари	13
2-б.б. Кесишувчи кучлар системаси	16
2.1-§. Кесишувчи кучларни геометрик қўшиш	16
2.2-§. Уч кучнинг мувозанати ҳақидаги теорема	17
2.3-§. Кучни ташкил этувчиларга ажратилиш	18
2.4-§. Кучнинг текисликдаги ва ўқдаги проекцияси	19
2.5-§. Теги таъсир этувчининг аналитик усулда аниқлаш	21
2.6-§. Кесишувчи кучлар системасининг мувозанати	21
3-б.б. Текисликдаги параллел кучлар ва жуфтлар назарияси	27
3.1-§. Иккита параллел кучларни қўшиш	27
3.2-§. Жуфт куч ҳақида тушунча	29
3.3-§. Куч моментининг алгебраик қиймати	30
3.4-§. Жуфт кучнинг momenti	31
3.5-§. Эквивалент жуфтлар ҳақидаги теорема	32
3.6-§. Бир текисликда ётувчи жуфтларни қўшиш. Текисликдаги жуфтларнинг мувозанат шартлари	34
4-б.б. Текисликдаги кучлар системаси	35
4.1-§. Кучни ўзига параллел кўчиришга оид лемма	35
4.2-§. Текисликдаги кучлар системасининг бош вектори ва бош momenti	36
4.3-§. Текисликдаги кучлар системасини теги таъсир этувчига келтириш. Вариньен теоремаси	37
4.4-§. Текисликдаги кучлар системасининг мувозанат шартлари	39
4.5-§. Текисликдаги параллел кучларнинг мувозанат шартлари	41
4.6-§. Ричагнинг мувозанати	41
4.7-§. Статик аниқ ва статик ноаниқ масалалар	42
4.8-§. Тақсимланган кучлар	43
4.9-§. Бир текисликда ётувчи бир печа жисмдан ташкил топган системанинг мувозанати	48
4.10-§. Ишқаланиш. Сирланишдаги ишқаланиш	53
4.11-§. Думаланшдаги ишқаланиш	58

5-боб. Фермаларни ҳисоблаш усуллари	60
5.1*- §. Ферма ҳақида тушунча	60
5.2*- §. Ферма егржевларидаги зўриқишларни туғуиларни кесил усули билан аниқлаш	62
5.3*- §. Максвелл -- Крeмон диаграммаси	65
5.4*- §. Ритгер усули	70
6-боб. Фазодаги кучлар системаси	72
6.1- §. Кучнинг нуқтага нисбатан момент-вектори	72
6.2- §. Кучнинг ўқда нисбатан моменти	73
6.3- §. Кучнинг ўқда нисбатан моменти билан шу ўқдаги нуқтага нисбатан моменти орасидаги боғланиш	74
6.4- §. Жуфтни параллел текисликка кўчириш ҳақидаги теорема	76
6.5- §. Жуфтнинг момент- вектори	77
6.6- §. Фазодаги жуфтларни қўйиш	78
6.7- §. Фазода ихтиёрий жойланган кучлар системасини бир нуқта- га келтириш	80
6.8- §. Фазодаги кучлар системаси бош вектори ва бош моментининг аналитик ифодалари	81
6.9- §. Фазодаги кучлар системасининг инвариантлари	82
6.10- §. Фазодаги кучлар системаси битта жуфтга ёки тенг таъсир этувчига келтириладиган ҳўллар. Вариньон теоремаси	84
6.11- §. Фазодаги кучлар системасини динамик битта келтириш	86
6.12- §. Марказий ўқ тенгламаси	88
6.13- §. Фазодаги кучлар системасини иккита ўзаро кесилмайдиган кучларга келтириш	91
6.14- §. Фазодаги кучлар системасининг мувозанат шартлари	91
6.15- §. Бир нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисмнинг мувоза- нат шартлари	93
6.16- §. Иккита нуқтаси билан маҳкамланган қаттиқ жисмнинг мувоза- нат шартлари	94
7-боб. Параллел кучлар маркази ва огирлик маркази	97
7.1- §. Параллел кучларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлаш. Па- раллел кучлар маркази	97
7.2- §. Жисмнинг огирлик марказини аниқлаш	99
7.3- §. Огирлик марказини аниқлаш усуллари	102
7.4- §. Олчи нуқтаси баъзи бир жисми жисмларнинг огирлик мар- казини аниқлаш	105
7.5- §. Гюльден теоремалари	109
II ҚИСМ. КИНЕМАТИКА	112
8-боб. Нуқта кинематикаси	112
8.1- §. Асосий тушунчалар	112
8.2- §. Векторнинг скаляр аргумент бўйича ҳосиласи	114
8.3- §. Нуқта ҳаракатини аниқлаш усуллари	116
8.4- §. Нуқтанинг тезлиги	116
8.5- §. Нуқтанинг тезланиши	120
8.6- §. Нуқта ҳаракатининг хусусий ҳоллари	138
9-боб. Қаттиқ жисмнинг илгариллама ва қўзғалмас ўқ атрофидаги айлан- ма ҳаракатлари	147
9.1- §. Жисмнинг илгариллама ҳаракати	147
9.2- §. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракат тенгламаси	149
9.3- §. Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги айланма ҳаракати чақ тезлиги. Текис айланма ҳаракат	150
9.4- §. Жисмнинг бурчак тезланиши. Текис ўзгарувчан ай- ланма ҳаракат	150

9.5- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизиқли тезлиги	154
9.6- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисм нуқтасининг чизиқли тезланиши	156
10- б о б. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати	160
10.1- §. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини аниқлаш. Текис шаклнинг ҳаракат тенгламалари	160
10.2- §. Текис шаклнинг кўчишига оид теорема	162
10.3- §. Текис шакл нуқталарининг тезликлари	163
10.4- §. Тезликлар оний маркази	164
10.5- §. Тезликлар оний маркази аниқланадиган баъзи ҳоллар	166
10.6- §. Центроидлар	171
10.7- §. Текис шакл нуқтасининг тезланишини қутб усулида аниқлаш	172
10.8- §. Қутб усули билан текис шакл нуқталарининг тезланишларини аниқлашга оид масалалар	173
10.9- §. Тезланишлар оний маркази	182
11- б о б. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракати	188
11.1- §. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги айланма ҳаракат тенгламалари. Эйлер бурчаклари	188
11.2- §. Эйлер-Даламбер теоремаси	189
11.3- §. Оний айланиш ўқи. Аксидлар	190
11.4- §. Қўзғалмас нуқта атрофида айланма ҳаракатдаги жисмнинг бурчак тезлиги ва бурчак тезланиши	191
11.5- §. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезлиги	193
11.6- §. Қўзғалмас нуқта атрофида айланувчи жисм нуқтасининг тезланиши	195
11.7- §. Оний бурчак тезланиш вектори	197
11.8* - §. Эйлернинг кинематик тенгламалари	202
12- б о б. Эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракати	207
12.1- §. Эркин жисм ҳаққатининг кинематик тенгламалари	207
12.2- §. Эркин жисм нуқтасининг тезлиги	209
12.3- §. Эркин жисм нуқтасининг тезланиши	211
13- б о б. Нуқтанинг мураккаб ҳаракати	212
13.1- §. Нуқтанинг нисбий, кўчирма ва абсолют ҳаракатлари	212
13.2- §. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезликларини қўшиш ҳақидаги теорема	214
13.3- §. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг тезланишларини қўшиш ҳақидаги Кориолис теоремаси	217
13.4- §. Мураккаб ҳаракатдаги нуқтанинг нисбий, кўчирма ва Кориолис тезланишлари	219
13.5- §. Нуқтанин мураккаб ҳаракатига оид масалалар	221
14- б о б. Қаттиқ жисмнинг мураккаб ҳаракати	228
14.1- §. Умумий мулоҳазалар	228
14.2- §. Жисмнинг илгарилама ҳаракатларини қўшиш ҳақидаги теорема	229
14.3- §. Жисмнинг кесинувчи ўқлар атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшиш	230
14.4- §. Жисмнинг иккита параллел ўқ атрофидаги айланма ҳаракатларини қўшиш	232
14.5- §. Цилиндрик гишти узатмалар	239
14.6- §. Жисмнинг илгарилама ва айланма ҳаракатларини қўшиш	244
III Қисм. ДИНАМИКА	249
15- б о б. Динамиканинг асосий қонунлари	249

15.1- §.	Динамика предмети	219
15.2- §.	Классик механиканинг асосий қўшуллари	251
16- боб.	Эркин моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари ва динамиканинг икки асосий масаласи	254
16.1- §.	Эркин моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари	254
16.2- §.	Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласи (тўғри масала)	257
16.3- §.	Моддий нуқта динамикасининг биринчи асосий масаласини ечишга доир масалалар	259
16.4- §.	Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласи (тескари масала)	262
16.5- §.	Моддий нуқта динамикасининг иккинчи асосий масаласини ечинга доир масалалар	265
16.6- §.	Моддий нуқтанинг содда ҳоллардаги тўғри чизиқли ҳаракат дифференциал тенгламаларини интеграллаш	274
17- боб.	Моддий нуқтанинг тўғри чизиқли тебранма ҳаракати	283
17.1- §.	Умумий мулоҳазалар	283
17.2- §.	Моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати	283
17.3- §.	Тезликнинг биринчи даражасига пропорционал бўлган қаршилик кучи таъсиридан моддий нуқтанинг эркин тебранма ҳаракати	289
17.4- §.	Моддий нуқтанинг мажбурий тебранма ҳаракати	295
17.5- §.	Нуқтанинг тепкали тебранишлари	298
17.6- §.	Резонанс ҳолидаси	300
17.7- §.	Нуқтанинг мажбурий тебранишига муҳим қаршилигининг таъсири	302
18- боб.	Боғланишдаги моддий нуқтанинг ҳаракати	311
18.1- §.	Боғланишдаги нуқта динамикасининг асосий тенгламаси	311
18.2- §.	Қўзғалмас силлиқ сирт устидаги нуқтанинг ҳаракати, Лагранжнинг Сиринчи хил тенгламалари	312
18.3- §.	Силлиқ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи нуқтанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари	315
18.4- §.	Берилаган эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи нуқта ҳаракат дифференциал тенгламасининг табиий координата ўқларидаги ифодаси	317
18.5- §.	Математик тебрангич	318
19- боб.	Моддий нуқтанинг нисбий ҳаракат динамикаси	324
19.1- §.	Моддий нуқтанинг нисбий ҳаракат дифференциал тенгламалари. Қўшрма ва Кориолис инерция кучлари	324
19.2- §.	Классик механиканинг нисбийлик принципи	326
19.3- §.	Нуқтанинг нисбий мувозилати, Вазисизлик	327
19.4- §.	Жисмларнинг мувозилати ва ҳаракатига Ер айланishiнинг таъсири	328
20- боб.	Механик система динамикасига киради	333
20.1- §.	Механик система Механик система нуқталарига таъсир этувчи кучларни классификация қилиш	333
20.2- §.	Системанинг масса маркази	335
20.3- §.	Инерция моментлари	335
20.4- §.	Жисмнинг параллел ўқларга нисбатан инерция моментлари ҳисобини Гюйгенс — Штейнер теоремаси	339
20.5- §.	Бир жисмни банди жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблаш	340
20.6- §.	Жисмнинг бебилан нуқтадан ўтувчи ўқларга нисбатан инерция моментлари	343

20.7*- §. Инерция эллипсоиди	345
20.8*- §. Инерция бош ўқдарининг хусусиятлари	346
11- б о б. Динамиканинг умумий теоремалари	352
21.1- §. Механик системанинг ҳаракат дифференциал тенгламалари	352
21.2- §. Моддий нуқтанинг ва системанинг ҳаракат миқдори. Куч импульси	354
21.3- §. Нуқта ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема	358
21.4- §. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема	362
21.5- §. Система массалар марказининг ҳаракати ҳақидаги теорема	366
21.6*- §. Система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани сувоқликнинг стационар оқимга татбиқи. Эйлер тенгламаси	369
21.7- §. Ўзгарувчан массали жисм ҳақида тушунча	371
21.8- §. Н. В. Мещерский тенгламаси	372
21.9- §. Цюлковский формуласи	374
21.10- §. Моддий нуқта ҳаракат миқдорининг моменти ва системанинг кинетик моменти	376
21.11- §. Нуқта ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема	378
21.12- §. Нуқтанинг марказий куч таъсиридаги ҳаракати. Юзалар қонуни	380
21.13- §. Система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема	383
21.14- §. Система кинетик моментининг сақланиш қонуни	386
21.15- §. Мураккаб ҳаракатдаги системанинг кинетик моменти	387
21.16- §. Система массалар марказига нисбатан шисбий ҳаракат кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема	390
21.17- §. Кучнинг иши ва қуввати	392
21.18- §. Тенг таъсир эгувчининг иши ҳақидаги лемма	395
21.19- §. Айрим ҳолларда кучнинг ишини ҳисоблаш	396
21.20- §. Қаттиқ жисмга қўйилган кучларнинг иши	399
21.21- §. Моддий нуқта ва системанинг кинетик энергияси. Кёпг теоремаси	404
21.22- §. Қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси	406
21.23- §. Моддий нуқта кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема	408
21.24- §. Система кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема	412
21.25- §. Потенциалли куч майдони	415
21.26- §. Тенг потенциалли сирт. Куч чизиқлари	416
21.27- §. Потенциал энергия	417
21.28- §. Куч функциясини аниқлашга онд мисоллар	418
21.29- §. Моддий нуқта ва механик система учун энергиянинг сақланиш қонуни	420
22- б о б. Қаттиқ жисм динамикаси	421
22.1- §. Қаттиқ жисм динамикасининг асосий масалалари	421
22.2- §. Қаттиқ жисмнинг илгариллама ҳаракат дифференциал тенгламалари	422
22.3- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси	423
22.4- §. Физик тебрангич	425
22.5- §. Жисмларнинг инерция моментларини тажриба усули билан аниқлаш	427
22.6- §. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракат дифференциал тенгламалари	430
22.7*- §. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг ҳаракати ва асосий динамик характеристикалари	436
22.8*- §. Эйлернинг динамик тенгламалари	439
22.9*- §. Қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм учун динамиканинг асосий масалалари	441
22.10*- §. Эркин гироскопнинг ҳаракати	442

22.11- §. Резаль теоремаси	443
22.12- §. Гироскопнинг элементар назарияси	444
23- б о б. Даламбер принципи. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмнинг айлануш ўқиға кўрсатадиган босими	451
23.1- §. Моддий нуқта учун Даламбер принципи	451
23.2- §. Механик система учун Даламбер принципи	455
23.3- §. Қаттиқ жисм инерция кучларининг бош вектори ва бош моменти	458
23.4- §. Жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланганда поддининикларнинг динамик реакция кучларини таърифлаш	460
23.5- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланувчи жисмни статик ва динамик мувозанатлаш	462
24- б о б. Аналитик механика	468
24.1- §. Боғлавишлар ва уларнинг классификацияси	468
24.2- §. Мумкин бўлган кўчиш. Системанинг эркинлик даражаси	471
24.3- §. Кўчининг мумкин бўлган кўчишдаги элементар иши. Идеал боғлавишлар	474
24.4- §. Мумкин бўлган кўчиш принципи	475
24.5- §. Мумкин бўлган кўчиш принципини оддий машиналарға қўллаш	478
24.6- §. Мумкин бўлган кўчиш принципини қўлланға оид масалалар	479
24.7- §. Системанинг умумлашган координаталари	484
24.8- §. Умумлашган кучлар	486
24.9- §. Системанинг умумлашган координаталардан мувозанат шартлари	488
24.10- §. Динамиканинг умумий тенгламаси. Даламбер—Лагранж принципи	490
24.11- §. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари	493
24.12- §. Потенциалли кучлар таъсирдаги механик система учун Лагранжнинг иккинчи хил тенгламалари	497
24.13- §. Лагранжнинг иккинчи хил тенгламаларини қўллашға оид масалалар	497
24.14*-§. Гамильтон—Остроградский принципи	504
24.15*-§. Каноник тенгламалар	506
24.16- §. Механик системанинг устувор мувозанати ҳақида тушунча	510
24.17- §. Лагранж—Дирихле теоремаси	511
24.18- §. Системанинг устувор мувозанати яқинидаги кинетик ва потенциал энергиялари	515
24.19- §. Эркинлик даражаси бирға тенг механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранишлари	519
24.20- §. Эркинлик даражаси бирға бўл ан системанинг сўнувчи тебраниш ҳаракати	522
24.21- §. Эркинлик даражаси бирға тенг механик системанинг мажбурий тебраниш ҳаракати	524
24.22*-§. Эркинлик даражаси иккиға тенг механик системанинг устувор мувозанати яқинидаги кичик тебранишлари	525
24.23*-§. Устувор ҳаракат ҳақида тушунча	533
24.24*-§. Уйғотил ан ҳаракат дифференциал тенгламалари	535
24.25*-§. Ҳаракатнинг устуворлиги ҳақидаги Лиувен теоремалари	536
24.26*-§. Биринчи яқинлашмишдаги устувор мувозанат	538
24.27*-§. Ҳаракатини оптимал бешқариш ҳақида тушунча	542
25- б о б. Зарба назарияси	544
25.1- §. Зарба назариясининг асосий тушунчалари	544
25.2- §. Зарба назариясининг асосий тенгламаси	545
25.3- §. Зарба вақтида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема	546
25.4*-§. Зарба вақтида нуқта га система кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема	548

25.5- §. Зарба вақтида зарбали кучнинг иши ҳақидаги Кельвин теоремаси	549
25.6- §. Жисмнинг қўзғалмас сиртга урилишидаги тўғри зарба. Тикловчи коэффициентни тажриба йўли билан аниқлаш	550
25.7- §. Иккита жисмнинг тўғри марказий зарбаси	553
25.8- §. Зарба вақтида кинетик энергиянинг аўқолиши. Карно теоремаси	556
25.9*- §. Зарбали кучларнинг қўзғалмас ўқ агрофида айланувчи ва текас параллел ҳаракатдаги жисмга таъсири	560
25.10*- §. Зарба маркази	561
1- илова. Айрим механик катталикларнинг ўлчов birlikлари	565
Фойдаланилган адабиётлар	567
Иомлар кўрсаткичи	568
Асосий тушунчаларнинг алфавит кўрсаткичи	570

22.21
P 31

Рашидов Т. ва бошқ.

Назарий механика асослари: Олий техника ўқув юрт. студ. учун дарслик/Т. Рашидов, Ш. Шовиётов, Қ. Б. Мўминов; Т. Рашидов таҳририда.
— Т.: Ўқитувчи, 1990. — 584 б.

1. 1, 2 Автордош.

Рашидов Т. и др. Основы теоретической механики:
Учебник для высш. техн. учеб. заведений.

ББК 22.21я73

к/та в поле
закуплены - мясной
сиромы Гамбас

Гурьев А. С. Курно. 9авт.
Забанк. Мид

22.02.2012 г

Т. РАШИДОВ,
Ш. ШОЗИЁТОВ,
Қ. Б. МУМИНОВ

Назарий механика асослари

ЎзССР Халқ таълими министрлигининг республика
ўқув методика маркази олий техника ўқув юртли-
рининг студентлари учун дарслик сифатида тавсия этган

*ЎзССР ФА нинг академиги, профессор Т. Рашидов
тахрири остида*