ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

В. И. ЗУБОВ

В. И. ЗУБОВ

ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика»

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1982

ББК 22.161.6
З-91
УДК 517.2

Рецензент
чл.-кор. АН СССР проф. Е. П. Попов

Зубов В. И.
З-91 Динамика управляемых систем: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1982. — 285 с.
В пер.: 75 к.

Настоящее пособие содержит решение проблемы построения программных движений и их стабилизации, проблемы конструирования оптимальных систем управления, а также аппроксимации таких управлений. В книге большое внимание уделено решению ряда проблем нелинейной механики, а именно проведены анализ и интегрирование уравнений движения тяжелого твердого тела. Методы теории оптимального управления применены к решению задачи управления пучками заряженных частиц, включая задачу транспортировки.

Для студентов вузов, а также аспирантов, инженеров и научных работников, специализирующихся в области математической теории управления техническими объектами.

$3\,\frac{1502010000-077}{001(01)-82}33-81$

ББК 22.161.6
517.2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие посвящено развитию математических методов решения задач оптимального управления, а также решению ряда проблем управления, возникающих в механике и электродинамике. В нем даются методы построения управляющих электромагнитных полей, обеспечивающих заданные свойства движущихся в этих полях заряженных частиц, а также пучков таких частиц. Устанавливается теорема универсальности уравнений электродинамики Максвелла, т. е. показывается, что существует электромагнитное поле, вызывающее движение заряженных частиц, совпадающее с движением, происходящим в наперед заданном поле скоростей. Указываются способы формирования электромагнитного поля, в котором осуществляются фокусировка и ускорение заряженных частиц. Рассматривается задача конструирования управляющих моментов, обеспечивающих выполнение заданных требований, предъявляемых к движениям твердого тела, а также к системе таких тел. Наряду с этим изучается качественный характер поведения нелинейных механических систем такого рода под действием упомянутых моментов. Развиваются методы, позволяющие решать задачи управления автоматами, состоящими из системы различных объектов, и указывается подход к созданию управляющих автоматов как с памятью, так и без памяти на основе применения автоколебательных систем, моделирующих логические сети.

Книга основана на использовании результатов научных исследований, опубликованных в книгах В. И. Зубова: «Теория оптимального управления» (Судостроение, 1966) и «Аналитическая динамика гироскопических систем» (Судпромгиз, 1970). Однако главы II, III, а также ряд параграфов остальных глав публикуются в учебной литературе впервые.

На факультете прикладной математики — процессов управления Ленинградского государственного университета материалы, помещенные в настоящем учебном пособии, используются в специальных курсах и семинарах, проводимых для студентов старших курсов и аспирантов в соответствии с новыми учебными программами. Эти спецкурсы и семинары касаются развития математической теории управления техническими объектами и технологическими процессами. В связи с этим методологической особенностью настоящего учебного пособия является выделение круга задач из упомянутых областей науки и методов их решений. Научной основой этих методов являются аналитические, качественные и машинные методы исследования поведения решений систем дифференциальных уравнений, возникающих в задачах управления.

Настоящая книга дополняет известные учебные пособия
тематической теории процессов управления тем, что ука
новые пути в применении этой теории и касается нового
задач. Она ориентирована на студентов и аспирантов, спец
рующихся в области прикладной математики, и может быть
весьма полезной для инженеров и научных сотрудников, им
дело с проектированием, созданием и эксплуатацией систем
ления автоматами, а также систем управления транспорти
пучков заряженных частиц.

Считаю своим долгом выразить особую благодарность
зенту, чл.-кор. АН СССР Е. П. Попову, советами и рекоменд
которого автор руководствуется уже более 20 лет.

Автор будет признателен за все замечания и пожелания
рые ему будут высказаны читателями.

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Интегралы дифференциальных уравнений. — Построение неявных функций. — Представление решений. — Дифференциальные уравнения вероятных состояний

1. Введем в рассмотрение n-мерное евклидово пространство E_n векторов $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и предположим, что это пространство является фазовым пространством некоторой системы, описываемой совокупностью n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s\,(t, x_1, \ldots x_n), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Система (1.1) может быть также записана в векторной форме:

$$\frac{dX}{dt} = f\,(t, X), \tag{1.2}$$

где $f(t, X)$ есть векторная функция с компонентами $f_1(t, X)$, $f_2(t, X)$, ..., $f_n(t, X)$. Будем считать, что векторная функция $f(t, X)$ задана при $t \in (-\infty, +\infty)$, $X \in E_n$, вещественна и непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам. Любая непрерывно дифференцируемая векторная функция $X = X(t)$, заданная при $t \in (t_1, t_2)$, называется *решением системы* (1.2) в интервале (t_1, t_2), если при подстановке этой функции в уравнение (1.2) получается тождество, справедливое на данном интервале.

Пусть $t_0 \in (t_1, t_2)$ и пусть $X(t_0) = X_0$. Тогда будем говорить, что решение системы (1.2) проходит через точку X_0 в момент $t = t_0$, и будем обозначать такое решение через $X = X(t, X_0, t_0)$.

Проблема изучения поведения системы сводится, таким образом, к проблеме изучения свойств решений дифференциальных уравнений. Для изучения этих свойств используются два метода. Первый метод основан на построении решений, второй — на изучении свойств векторного поля, определяемого в фазовом пространстве дифференциальными уравнениями (1.2).

Перейдем к изучению аналитических свойств решений дифференциальных уравнений с помощью первого метода.

Определение 1.1. Функция $g(t, x_1, \ldots, x_n)$ вещественная, непрерывная, заданная при $t \in (-\infty, +\infty)$, $X \in E_n$, называется *первым интегралом* системы (1.1), если на любом решении этой системы она сохраняет постоянное значение.

Определение 1.2. Совокупность $g_1, \ldots, g_n$ первых интегралов системы (1.1) называется *полной*, если *матрица Якоби*

$$I(t, X) = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \right\|, \quad i, k = 1, \ldots, n,$$

неособая. При этом здесь, и в дальнейшем будем считать, что функции g_s, $s = 1, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам.

Определение 1.3. Функция $\Psi(t, X) = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_s} \cdot f_s$ называется *полной производной* от функции $g(t, X)$ в силу системы (1.1).

Если функции g_s, $s = 1, \ldots, n$, являются первыми интегралами, то выполняется равенство

$$\frac{\partial g_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_s}{\partial x_k} \cdot f_k = 0.$$

Если к тому же это есть полная совокупность первых интегралов, то матрица $I^{-1}(t, X)$ будет существовать и, следовательно, будет иметь место равенство

$$f(t, X) = -I^{-1}(t, X) \cdot \frac{\partial g}{\partial t},$$

где g — векторная функция, $g = (g_1, \ldots, g_n)$.

Наряду с системой (1.2) рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X) + h(t, X), \tag{1.3}$$

где $h(t, X)$ — некоторая векторная функция, обладающая теми же основными свойствами, что и функция $f(t, X)$.

Теорема 1.1. *Если $g(t, X) = (g_1, \ldots, g_n)$ есть полная совокупность первых интегралов системы* (1.1), *то любая векторная функция $X = X(t)$, непрерывно дифференцируемая по t, удовлетворяющая уравнению*

$$g(t, X) = Y, \tag{1.4}$$

где Y есть решение системы

$$dY/dt = Ih, \tag{1.5}$$

будет являться решением системы (1.3), *и, наоборот, любое решение системы* (1.3) *может быть представлено как решение системы* (1.4) *и* (1.5).

Доказательство. Матрица $I(t, X)$ — неособая. Поэтому из уравнения (1.4) можно определить обратную функцию $X = \varphi(t, Y)$ такую, что $\varphi(t_0, Y_0) = X_0$, где Y_0, X_0 и t_0 связаны соотношением $g(t_0, X_0) = Y_0$. Пользуясь функцией φ, исключим вектор X из правой части системы (1.5). Тогда для определения вектора Y получим систему уравнений

$$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}t = I(t, \varphi(t, Y))\, h(t, \varphi(t, Y)). \tag{1.6}$$

Пусть $Y(t, Y_0, t_0)$ есть решение системы (1.6). Очевидно, что вектор

$$X = \varphi(t, Y(t, Y_0, t_0)) \tag{1.7}$$

есть решение $X = X(t, X_0, t_0)$ системы (1.3). Действительно, равенство $X(t, X_0, t_0) = \varphi(t, Y(t, Y_0, t_0))$ при $t = t_0$ имеет место по построению. Покажем, что оно справедливо также при всех t, для которых соответствующие решения определены. Дифференцируя выражение (1.7), найдем, что справедливо равенство

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial Y}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t},$$

где $\frac{\partial\varphi}{\partial Y}$ — матрица Якоби функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, являющихся компонентами φ. Дифференцируя уравнение (1.4) по аргументам $y_1, \ldots, y_n$, имеем $I(t, X)\,\frac{\partial\varphi}{\partial Y} = E$, где E — единичная матрица, откуда получаем, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Y} = I^{-1}(t, \varphi(t, Y)).$$

Взяв от обеих частей уравнения (1.4) частную производную по t, находим, что $\frac{\partial g}{\partial t} + I(t, \varphi(t, Y))\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, откуда вытекает соотношение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -I^{-1}\frac{\partial g}{\partial t} = f(t, X),$$

Объединяя полученные соотношения и заменяя производную вектора Y правой частью системы (1.5), окончательно найдем

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = f(t, X) + h(t, X);$$

здесь вектор X определяется равенством (1.7).

Перейдем теперь к доказательству обратного утверждения. Пусть задано какое-либо решение $X = X(t, X_0, t_0)$ системы (1.3). Положим, $Y_0 = g(t_0, X_0)$ и найдем решение системы (1.5) с начальным условием $Y = Y_0$ при $t = t_0$:

$$Y = Y_0 + \int_{t_0}^{t} I(\tau, X(\tau, X_0, t_0))\, h(\tau, X(\tau, X_0, t_0))\,\mathrm{d}\tau.$$

Подставляя данное решение в уравнение (1.4), имеем векторную функцию $X = \varphi(t, Y)$. Эта функция удовлетворяет уравнению (1.3) и начальному условию $X = X_0$ при $t = t_0$ и, следовательно, совпадает с выбранным выше решением системы (1.3) (вследствие теоремы единственности, которая при данных предположениях имеет место). ■*)

Пример 1. Рассмотрим линейную систему

$$dX/dt = A(t)X + f(t),$$

где A — вещественная непрерывная матрица, а $f(t)$ — вещественный непрерывный вектор, заданные при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Обозначим через Y матрицу, столбцы которой являются линейно независимыми решениями однородной системы уравнений

$$dX/dt = A(t)X.$$

Тогда совокупность первых интегралов для этой системы дается формулой $g(t, X) = Y^{-1}X$. По теореме 1.1 решение неоднородной системы дается формулой $X = \varphi(t, Y)$, где Y удовлетворяет уравнению $\frac{dY}{dt} = If(t)$. В рассматриваемом случае $I = Y^{-1}$ и $\varphi(t, Y) = YY$. Следовательно, имеют место формулы

$$Y = Y_0 + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau) f(r)\, d\tau$$

и

$$X = Y(t)\left[Y_0 + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau\right].$$

Это соотношение называется *формулой Коши*.

Пример 2. Рассмотрим систему $\dot{X} = f(t, X) + h(t, X)$.

Пусть $g(t, X)$ есть полная совокупность первых интегралов системы $\dot{X} = f(t, X)$. Предположим, что $h(t, X) = I^{-1}(t, X)f(t)$, где $f(t)$ — какая-либо вещественная непрерывная функция, заданная при $t \in (-\infty, +\infty)$. При таком предположении исходная система уравнений интегрируется в квадратурах. Действительно, решение этой системы определяется формулой $X = \varphi(t, Y)$, где функция Y удовлетворяет уравнению

$$dY/dt = I(t, X)h(t, X) = f(t).$$

Следовательно, имеем равенство $Y = Y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$, и поэтому решение исходной системы определяется формулой

$$X = \varphi\left(t, Y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau\right).$$

Пример 3. Пусть исходная система имеет вид

$$dX/dt = f(t, X) + h(t, X, \mu),$$

Будем считать, что функции f и g, где $g(t, X)$ — полная совокупность первых интегралов системы (1.2), являются однозначными аналитическими функциями относительно компонент вектора X. Будем считать также, что функция h является однозначной аналитической функцией относительно компонент векторов $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ при достаточно малых $|\mu_1|, \ldots, |\mu_k|$. Пусть, далее, $h(t, X, 0) \equiv 0$.

*) Значок ■ означает окончание доказательства.

Любое решение $X = X(t, X_0, t_0, \mu)$ исходной системы может быть представлено в виде сходящегося ряда

$$X = \sum_{m=1}^{\infty} Y^{(m)}, \tag{1.8}$$

где $Y^{(m)}$ есть однородные формы степени $m - 1$ относительно величин $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Коэффициенты этих форм являются векторными функциями, определяемыми однозначно в виде интегралов от известных функций. Форма $Y^{(1)} = X(t, X_0, t_0)$ есть решение исходного уравнения при $\mu = 0$. Следовательно, $Y^{(1)} = X_0$ при $t = t_0$. Тогда $Y^{(m)} = 0$, $m > 1$, при $t = t_0$.

Это условие позволяет однозначно определить все формы $Y^{(m)}$. Действительно, по теореме 1.1, искомое решение может быть записано в виде $X = \varphi(t, Y)$, где Y есть решение уравнения

$$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}t = I(t, \varphi(t, Y))\, h(t, \varphi(t, Y), \mu), \tag{1.9}$$

удовлетворяющее начальному условию $Y = Y_0 = g(t_0, X_0)$ при $t = t_0$. Будем искать это решение в виде ряда

$$Y = Y_0 + \sum_{m=2}^{\infty} Z^{(m)}, \tag{1.10}$$

где $Z^{(m)}$ — однородные формы степени $m - 1$ относительно $\mu_1, \ldots, \mu_k$ с векторными коэффициентами, подлежащими определению. Ясно, что эти формы должны удовлетворять начальному условию $Z^{(m)} = 0$ при $t = t_0$. Если подставить ряд (1.10) в уравнение (1.9), затем разложить правую часть этого уравнения в ряды по степеням параметров $\mu_1, \ldots, \mu_n$ и приравнять слева и справа члены с одинаковым степенями, то получим равенства

$$\mathrm{d}Z^{(m)}/\mathrm{d}t = \zeta^{(m)}, \quad m = 2, 3, \ldots$$

Формы $\zeta^{(m)}$ определяются единственным образом через величины $Y_0, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(m-1)}$ и коэффициенты разложения функций I, h и φ по степеням Y. Отсюда находим, что

$$Z^{(m)} = \int_{t_0}^{t} \zeta^{(m)}\, \mathrm{d}\tau, \quad m = 2, 3, \ldots$$

Таким образом, решение в виде ряда (1.10) определяется единственным образом.

Если затем подставить ряд (1.10) в функцию $\varphi(t, Y)$ и переразложить ее по степеням $\mu_1, \ldots, \mu_k$, то получится ряд (1.8). Покажем теперь, что решение исходной системы можно непосредственно разыскивать в виде (1.8) и при этом все члены ряда определяются единственным образом с помощью квадратур.

Подставляя ряд (1.8) в исходное уравнение и переразлагая правую часть по степеням параметров $\mu_1, \ldots, \mu_k$, а затем приравнивая слева и справа члены одинакового измерения относительно $\mu_1, \ldots, \mu_k$, находим для определения функций $Y^{(m)}$ уравнения

$$\frac{\mathrm{d}Y^{(1)}}{\mathrm{d}t} = f\left(t, Y^{(1)}\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}Y^{(m)}}{\mathrm{d}t} = A(t)\, Y^{(m)} + f^{(m)}(t), \quad m = 2, 3, \ldots,$$

где $A(t) = \partial f(t, Y^{(1)})/\partial X$. Функции $f^{(m)}(t)$ являются однородными формами степени $m-1$ относительно $\mu_1, \ldots, \mu_k$ с известными векторными коэффициентами, если $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(m)}$ уже определены.

Рассмотрим однородную систему уравнений $dY/dt = A(t)Y$. Эта система имеет полную совокупность интегралов $g^{(1)}(t, Y) = I(t, Y^{(1)})Y$. Действительно, пусть I_{ik} есть элемент матрицы I, тогда $I_{ik} = \partial g_i^{(1)}/\partial x_k$ и, следовательно,

$$\frac{dI_{ik}}{dt} = \frac{\partial^2 g_i^{(1)}}{\partial x_k \partial t} + \sum_{s=1}^{n} f_s \frac{\partial^2 g_i^{(1)}}{\partial x_k \partial x_s},$$

откуда, меняя порядок дифференцирования, находим соотношение

$$\frac{dI_{ik}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{dg_i^{(1)}}{dt} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial g_i^{(1)}}{\partial x_s} \frac{\partial f_s}{\partial x_k}.$$

Так как $g_i^{(1)}$ являются первыми интегралами системы исходных уравнений при $\mu = 0$, то $dg_i^{(1)}/dt = 0$ и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} I = -I \frac{\partial f}{\partial X}.$$

Дифференцируя $g^{(1)}(t, Y)$ в силу однородной линейной системы, находим соотношения

$$\frac{dg^{(1)}(t, Y)}{dt} = \left(\frac{d}{dt} I + IA\right) Y = \left(-I \frac{\partial f}{\partial X} + I \frac{\partial f}{\partial X}\right) Y = 0.$$

Как вытекает из примера 1, справедливо тождество

$$Y^{(m)} = I^{-1}\left(t, Y^{(1)}\right) \int_{t_0}^{t} I\left(\tau, Y^{(1)}\right) f^{(m)}(\tau)\, d\tau.$$

Этим приведенное выше утверждение о возможности непосредственного построения ряда (1.8) с помощью квадратур от известных функций доказано полностью.

Существование решений в виде рядов (1.8) и их сходимость были доказаны Пуанкаре.

Пример 4. Пусть задана управляемая система

$$dX/dt = f(t, X) + B(t, X) U,$$

где $B(t, X)$ — матрица, имеющая n строк и r столбцов, элементы которой обладают теми же свойствами, что и компоненты вектора $f(t, X)$; U — r-мерный вектор управлений.

Если $g(t, X)$ есть полная совокупность первых интегралов при управлении $U = 0$, то изучение процесса управления в исходной системе сводится к изучению процесса управления в системе

$$dY/dt = I(t, \varphi(t, Y))\, B(t, \varphi(t, Y))\, U.$$

В частном случае, когда исходная система линейна, преобразованная система имеет вид

$$dY/dt = C(t) U,$$

где $C(t)$ — известная матрица, зависящая лишь от времени.

Систему (1.1) можно назвать *невозмущенной*, систему (1.3) — *возмущенной*, векторную функцию $h(t, X)$ — *возмущением*. Правую часть системы (1.5) обычно называют *пертурбацией*. Вычисление этой пертурбационной функции оказывается в ряде случаев весьма затруднительным, так как связано с отысканием неявных функций из уравнения (1.4). Ниже будет дан регулярный способ отыскания таких функций и, следовательно, пертурбационных функций на основе применения метода последовательных приближений. Имея в виду построение этого регулярного процесса, рассмотрим общую задачу отыскания неявных функций.

2. Рассмотрим систему уравнений

$$f_s(X, Y) = 0, \quad s = 1, \ldots, n; \quad Y = (y_1, \ldots, y_n), \quad X = (x_1, \ldots, x_m). \tag{1.11}$$

Предположим, что заданы векторы X_0, Y_0 такие, что $f_s(X_0, Y_0) = 0$, $s = 1, \ldots, n$. Пусть функции f_s заданы при

$$|x_j - x_{j0}| \leqslant \rho, \quad |y_s - y_{s0}| \leqslant r, \quad j = 1, \ldots, m; \quad s = 1, \ldots, n,$$

и дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам. Требуется найти непрерывную функцию $Y = Y(X)$, обращающую уравнение (1.11) в тождество и удовлетворяющую условию $Y(X_0) = Y_0$. Предположим, что такие функции найдены. Подставим их в систему (1.11) и продифференцируем полученное тождество последовательно по переменным $x_1, \ldots, x_m$:

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = 0, \quad s = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, m. \tag{1.12}$$

Введя обозначения $f(X, Y) = (f_1, \ldots, f_n)$, $I(X, Y) = \partial f/\partial Y$, из (1.12) получаем равенство

$$\frac{\partial Y}{\partial x_j} = -I^{-1}(X, Y) \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.13}$$

Здесь и в дальнейшем будем предполагать, что матрица $I(X,Y)$ является неособой в области задания уравнений (1.11). Из формулы (1.13) вытекает, в частности, что искомые неявные функции будут дважды непрерывно дифференцируемы относительно $x_1, \ldots, x_m$. Поэтому будут иметь место соотношения

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{1.14}$$

Покажем, что на основании соотношений (1.13) и (1.14) можно построить интегральные уравнения, которым будут удовлетворять искомые неявные функции. Действительно, интегрируя первое из уравнений (1.13), находим

$$Y(X) = \int_{x_{10}}^{x_1} -I^{-1}(X, Y) \frac{\partial f(X, Y)}{\partial x_1} \, dx_1 + C(x_2, \ldots, x_m), \tag{1.15}$$

где C — произвольная векторная функция, зависящая лишь от переменных $x_2, \ldots, x_m$; подставляя (1.15) во второе из уравнений (1.13), получаем соотношение

$$\frac{\partial C}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\int\limits_{x_{10}}^{x_1} -I^{-1}(X, Y)\frac{\partial f(X, Y)}{\partial x_1}\,dx_1\right] = -I^{-1}(X, Y)\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Изменив в этом равенстве порядок дифференцирования и интегрирования, а затем и порядок дифференцирования подынтегральной функции, воспользовавшись свойством (1.14), получим уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial x_2} + \int\limits_{x_{10}}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right) dx_1 = -I^{-1}(X, Y)\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Отсюда имеем $\frac{\partial C}{\partial x_2} = -I^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_2}$. Правая часть в последнем равенстве вычисляется при $x_1 = x_{10}$; функция Y, входящая в правую часть, также вычисляется при $x_1 = x_{10}$. Из этого равенства, таким образом, находим соотношение

$$C = \int\limits_{x_{20}}^{x_2} -I^{-1}\frac{\partial f'}{\partial x_2}\,dx_2 + D(x_3, \ldots, x_m).$$

Продолжая процесс вычисления аналогичным образом, получаем равенство

$$Y = Y_0 + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{x_{j0}}^{x_j} f^j dx_j, \tag{1.16}$$

где

$$f^j(X, Y) = -I^{-1}(X, Y)\frac{\partial f(X, Y)}{\partial x_j}.$$

Функции f^j в уравнении (1.16) вычисляются как функции аргументов X, $Y(X)$ при $x_1 = x_{10}, \ldots, x_{j-1} = x_{j-10}$, так что

$$f^j = f^j(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{j-10}, x_j, \ldots, x_m, Y(x_{10}, \ldots, x_{j-10}, x_j, \ldots, x_m)),$$
$$j = 1, \ldots, m.$$

Расширим несколько первоначально сформулированную задачу отыскания неявных функций и будем рассматривать теперь уравнение (1.16) независимо от этой задачи. Пусть векторные функции f_s^j заданы и непрерывны при $|y_s - y_{s0}| \leqslant r$, $|x_j - x_{j0}| \leqslant \rho$, $s = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$; и удовлетворяют в указанной области условию Липшица по Y

$$|f_s^j(X, \overline{Y}) - f_s^j(X, \overline{\overline{Y}})| \leqslant L\sum_{k=1}^{n}|\overline{y}_k - \overline{\overline{y}}_k|,$$

где L — некоторая положительная постоянная.

Выберем в качестве первого приближения вектор $Y^1 = Y_0$ и положим далее

$$Y^{k+1} = Y_0 + \sum_{j=1}^{m} \int_{x_{j0}}^{x_j} f^j(X, Y^k)\, dx_j, \tag{1.17}$$

$$K = \max_{\substack{j=1,\dots,m,\\ s=1,\dots,n,\\ |x_j - x_{j0}| \leqslant \rho,\\ |y_s - y_{s0}| \leqslant r}} |f_s^j(X, Y)|, \quad \rho' = \min\left(\rho, \frac{r}{Km}\right).$$

Из (1.17) вытекает, что при $|x_j - x_{j0}| \leqslant \rho'$, $j = 1, \dots, m$, любое приближение будет определено и непрерывно. Действительно, переходя в равенстве (1.17) к скалярной форме, получаем уравнение

$$y_s^{k+1} = y_{s0} + \sum_{j=1}^{m} \int_{x_{j0}}^{x_j} f_s^j(X, Y^k)\, dx_j, \quad s = 1, \dots, n. \tag{1.18}$$

Из (1.18) имеем неравенство

$$|y_s^{k+1} - y_{s0}| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \left| \int_{x_{j0}}^{x_j} f_s^j(X, Y^k)\, dx_j \right| \leqslant Km\rho' \leqslant r.$$

Эта оценка показывает, что любое приближение не выходит из области задания функции f^j. Непрерывность каждого приближения устанавливается обычным способом.

Введем обозначение $v^k = \max |y_s^{k+1} - y_s^k|$, где максимум берется по $s = 1, \dots, n$. Пусть $|x_j - x_{j0}| \leqslant \bar{\rho}$, где $\bar{\rho} \leqslant \rho'$. Тогда будем иметь оценку

$$|f_s^j(X, Y^k) - f_s^j(X, Y^{k-1})| \leqslant Lnv^{k-1}. \tag{1.19}$$

Оценка (1.19) имеет место при $s = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ в области $|x_j - x_{j0}| \leqslant \bar{\rho}$. Вычитая почленно равенства (1.18), соответствующие индексам k и $k+1$, найдем равенство

$$y_s^{k+1} - y_s^k = \sum_{j=1}^{m} \int_{x_{j0}}^{x_j} \left(f_s^j(X, Y^k) - f_s^j(X, Y^{k-1}) \right) dx_j.$$

Из этого равенства, используя неравенство (1.19), получим оценку

$$|y_s^{k+1} - y_s^k| \leqslant mnLv^{k-1}\bar{\rho}, \tag{1.20}$$

откуда в силу определения величин v^k имеем $v^k \leqslant mnL\bar{\rho}v^{k-1}$. Положим теперь $\bar{\rho} = \min(\rho', \frac{\alpha}{Lmn})$, где α — некоторое положительное число, $\alpha < 1$, тогда

$$v^k \leqslant \alpha v^{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \tag{1.21}$$

Теорема 1.2. *Интегральное уравнение* (1.16) *имеет единственное непрерывное решение* $Y = Y(X)$, *заданное в области* $|x_j - x_{j0}| \leqslant \bar{\rho}$, $j = 1, \ldots, m$, *и удовлетворяющее условию* $Y(X_0) = Y_0$ *для любых непрерывных векторных функций* f^j, *заданных при* $|x_j - x_{j0}| \leqslant \rho$, $|y_s - y_{s0}| \leqslant r$, $j = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, n$; здесь $\bar{\rho} = \min\left(\rho, \frac{r}{Km}, \frac{\alpha}{Lmn}\right)$.

Доказательство. Векторная функция Y^k представляет собой частную сумму ряда $Y^1 + (Y^2 - Y^1) + (Y^3 - Y^2) + \ldots$ Этот ряд равномерно сходится, так как $|y_s^{k+1} - y_s^k| \leqslant v^k$ при $|x_j - x_{j0}| \leqslant \bar{\rho}$, $j = 1, \ldots, m$. Из (1.21) следует, что и ряд величин $v^1 + v^2 + \ldots$ тоже сходится. Таким образом, в указанной области $Y^k \to Y(X)$ и притом равномерно. Переходя к пределу в (1.17), найдем, что функция $Y = Y(X)$ удовлетворяет уравнению (1.16) и начальному условию $Y(X_0) = Y_0$.

Покажем, что построенное решение является единственным. Предположим противное. Именно: пусть в указанной области существует решение $Z = Z(X)$ уравнения (1.16), удовлетворяющее тому же начальному условию и не совпадающее с решением $Y = Y(X)$ по крайней мере в одной точке. Положим

$$v = \max | y_s(X) - z_s(X) | , \quad s = 1, \ldots, n, \quad | x_j - x_{j0} | \leqslant \bar{\rho},$$
$$j = 1, \ldots, m.$$

Подставляя функции Y и Z в уравнение (1.16), получаем два тождества. Вычитая эти тождества почленно, будем иметь равенство

$$y_s(X) - z_s(X) = \sum_{j=1}^{m} \int_{x_{j0}}^{x_j} [f_s^j(X, Y) - f_s^j(X, Z)]\, dx_j,$$

откуда вытекает неравенство

$$| y_s(X) - z_s(X) | \leqslant mnLv\bar{\rho} \leqslant \alpha v.$$

В силу определения величины v имеем далее $v \leqslant \alpha v$. По предположению, $v \geqslant 0$. Если $v > 0$, то $\alpha \geqslant 1$, что противоречит выбору этой величины. Таким образом, $v = 0$ и, следовательно, $Z(X) = Y(X)$. ■

Следствие 1. *Если функции* f^j *являются однозначными и аналитическими в области* $|x_j - x_{j0}| \leqslant \rho$, $|y_s - y_{s0}| \leqslant r$, $j = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, n$, *то решение* $Y = Y(X)$ *уравнения* (1.16) *также будет однозначной аналитической функцией в области* $|x_j - x_{j0}| \leqslant \bar{\rho}$, $j = 1, \ldots, m$, *и, следовательно, будет представимо сходящимся рядом по степеням величин* $x_j - x_{j0}$.

Действительно, каждая из векторных функций Y^{k+1}, определяемая с помощью (1.17), будет однозначной аналитической функцией в указанной области. Следовательно, $Y = Y(X)$ также будет однозначной аналитической функцией в этой области, так как является пределом равномерно сходящейся последовательности таких функций. ■

Следствие 2. *Пусть левые части уравнения* (1.11), *заданные при*

$|x_j - x_{j0}| \leqslant \rho$, $|y_s - y_{s0}| \leqslant r$, $j = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, n$, *дважды непрерывно дифференцируемы и таковы, что матрица Якоби* $I(X, Y) = \frac{\partial f(X,Y)}{\partial Y}$ *— неособая в этой области. Тогда существует неявная функция* $Y = Y(X)$ в *области* $|x_j - x_{j0}| \leqslant \bar{\rho}$, $j = 1, \ldots, m$, *удовлетворяющая начальному условию* $Y(X_0) = Y_0$ *и интегральному уравнению* (1.16), *где*

$$f^j = -I^{-1}(x_{10}, \ldots, x_{j-10}, x_j, \ldots, x_m, Y(x_{10}, \ldots, x_{j-10}, x_j, \ldots, x_m)) \times \\ \times \frac{\partial f(x_{10}, \ldots, x_{j-10}, x_j, \ldots, x_m, Y(x_{10}, \ldots, x_{j-10}, x_j, \ldots, x_m))}{\partial x_j}.$$

Действительно, все приближения определяются аналогично. Полученные выше оценки сходимости этих приближений также сохраняют силу, так как величины v^k оценивают соответствующие функции при изменении всех аргументов. Следовательно, процесс последовательных приближений, определяемый уравнениями (1.17), будет сходиться. Из (1.16) вытекает также, что искомая неявная функция $Y = Y(X)$ будет дважды непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам. Если, кроме того, левые части уравнения (1.11) и компоненты матрицы $I^{-1}(X, Y)$ являются однозначными аналитическими функциями в исходной области, то неявная функция $Y = Y(X)$ будет также однозначной аналитической функцией в области $|x_j - x_{j0}| \leqslant \bar{\rho}$, $j = 1, \ldots, m$. ■

Следствие 3. *Пусть задана система дифференциальных уравнений* $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}t = f(t, Y, \mu)$, *где векторная функция* f *является однозначной аналитической в области* $|t - t_0| \leqslant \rho$, $|\mu_j - \mu_{j0}| \leqslant \rho$, $j = 1, \ldots, m$, $|y_s - y_{s0}| \leqslant r$, $s = 1, \ldots, n$. *Тогда решение этой системы* $Y = Y(t, Y_0, t_0, \mu)$ *также будет однозначной аналитической функцией при* $|t - t_0| \leqslant \bar{\rho}$, $|\mu_j - \mu_{j0}| \leqslant \bar{\rho}$, $j = 1, \ldots, m$.

Действительно, заданная система уравнений может быть представлена в виде уравнения (1.16):

$$Y = Y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, Y, \mu)\,\mathrm{d}t.$$

Если в этом уравнении положить $t = x_1$, $\mu_1 = x_2$, $\ldots$, $\mu_m = x_{m+1}$ и $f(t, Y, \mu) = f^1$, $f^2 = 0$, $\ldots$, $f^{m+1} = 0$, то получится частный случай уравнения (1.16). Из следствия 1 вытекает справедливость сделанного утверждения. ■

3. **Определение 1.4.** Будем говорить, что равенства

$$g_j(t, X, c_1, \ldots, c_k) = 0, \quad j = 1, \ldots, k,$$

определяют *интегралы системы* (1.1), если полные производные по времени в силу системы (1.1) от функций g_j обращаются тождественно в ноль.

Определение 1.5. Пусть задана совокупность функций $g(t, X, C) = (g_1, \ldots, g_n)$, где $C = (c_1, \ldots, c_n)$. Будем говорить, что уравнение

$$g = 0 \qquad (1.22)$$

определяет *полную совокупность интегралов системы* (1.1), если полная производная функции g в силу системы (1.1) обращается в тождественный ноль вследствие (1.22), и, кроме того, уравнение (1.22) может быть разрешимо относительно векторов X и C, так что $C = \Psi(t, X)$, $X = \varphi(t, C)$.

Если $g = 0$ определяет полную совокупность интегралов системы (1.1), то будет иметь место равенство $\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial X} \cdot f = 0$. Исключая вектор C, находим, что

$$\frac{\partial g(t, X, \Psi(t, X))}{\partial t} + \frac{\partial g(t, X, \Psi(t, X))}{\partial X} f(t, X) = 0.$$

Будем далее считать, что матрицы $I(t, X, C) = \frac{\partial g}{\partial X}$ и $J(t, X, C) = \frac{\partial g}{\partial C}$ — неособые, тогда

$$f(t, X) = -I^{-1}(t, X, \Psi(t, X)) \frac{\partial g(t, X, \Psi(t, X))}{\partial t}.$$

Заметим, что если равенство $g = 0$ определяет полную совокупность интегралов системы (1.1), то $\Psi(t, X)$ есть полная совокупность первых интегралов этой системы.

Теорема 1.3. *Если система* (1.1) *имеет полную совокупность интегралов* $g(t, X, C)$ *такую, что матрицы* $I(t, X, C)$ *и* $J(t, X, C)$ *— неособые, то любое решение системы* (1.3) $X = X(t, X_0, t_0)$ *можно представить в виде* $X = \varphi(t, Y)$, *где* Y *есть решение системы уравнений*

$$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}t = -J^{-1}(t, \varphi(t, Y), Y) I(t, \varphi(t, Y), Y) h(t, \varphi(t, Y)) \qquad (1.23)$$

с начальным условием $Y = Y_0$ *при* $t = t_0$. *Функция* $\varphi(t, Y)$ *является решением системы интегральных уравнений*

$$X = X_0 + \sum_{j=1}^{n} \int_{y_{j0}}^{y_j} I^{-1} \frac{\partial g}{\partial y_j} \mathrm{d}y_j + \int_{t_0}^{t} -I^{-1} \frac{\partial g}{\partial t} \mathrm{d}t. \qquad (1.24)$$

Подынтегральная функция в j-м *слагаемом уравнения* (1.24) *вычисляется при* $y_1 = y_{10}, \ldots, y_{j-1} = y_{j-10}$, $j = 2, \ldots, n+1$.

Доказательство. Покажем сначала, что векторная функция $X = \varphi(t, Y)$ где φ удовлетворяет (1.24), а Y — любое решение (1.23), обязательно, является решением уравнения (1.3). Действительно, так как φ есть решение уравнения (1.24), то при любом Y имеем, $g(t, \varphi(t, Y), Y) = 0$. Будем считать, что в этом тождестве векторная функция Y является решением системы (1.23). Тогда, дифференцируя его найдем

$$I \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + J \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

откуда

$$\frac{dX}{dt} = -I^{-1}J\frac{dY}{dt} - I^{-1}\frac{\partial g}{\partial t} = -I^{-1}\frac{\partial g}{\partial t} + h(t, X).$$

Если исключить теперь вектор Y из выражения $-I^{-1}\frac{\partial g}{\partial t}$ с помощью равенства $Y = \Psi(t, X)$, то получим

$$dX/dt = f(t, X) + h(t, X).$$

Докажем теперь, что любое решение системы (1.3) может быть представлено в виде $X = \varphi(t, Y)$, где φ — решение системы (1.24), а Y — решение системы (1.23) с начальным условием $Y = Y_0$ при $t = t_0$. Как было показано, функция $X = \varphi(t, Y)$ удовлетворяет системе (1.3) и начальному условию $X = \varphi(t_0, Y_0) = X_0$, следовательно, по теореме единственности $X(t, X_0, t_0) = \varphi(t, Y)$, где $X(t, X_0, t_0)$ — решение системы (1.3).■

Следствие 1. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + \sum_{m=2}^{\infty} f^m(t, X), \tag{1.25}$$

где f^m — однородные формы степени m относительно $x_1, \ldots, x_n$ с векторными коэффициентами. Компоненты этих векторов и элементы матрицы A являются вещественными непрерывными и ограниченными функциями, заданными при $t \geqslant 0$. Будем считать, что ряд, входящий в уравнение (1.25), *сходится равномерно относительно $t \geqslant 0$ при $|x_j| \leqslant r$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда уравнение* (1.25) *имеет семейство решений*

$$X = Y\alpha + \sum_{m=2}^{\infty} Y^{m*)}, \tag{1.26}$$

где Y^m — однородные формы степени m относительно величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $Y(t)$ — фундаментальная система решений уравнения

$$dX/dt = A(t)X. \tag{1.27}$$

Коэффициенты форм Y^m и элементы матрицы Y заданы при $t \geqslant 0$. Каково бы ни было число $T > 0$, существует число $\alpha_0 > 0$ такое, что ряд (1.26) *будет сходиться при $t \in [0, T]$ для всех векторов α, удовлетворяющих условию $|\alpha_j| \leqslant \alpha_0$, $j = 1, \ldots, n$.*

Действительно, положим в уравнении (1.3) $f(t, X) = A(t)X$, $h(t, X) = \sum_{m=2}^{\infty} f^m(t, X)$, $g(t, X, C) = X - YC$. Тогда решение системы (1.25) будет представляться в виде $X = YY$, где Y удовлетворяет уравнению

$$dY/dt = Y^{-1}h(t, YY). \tag{1.28}$$

---

*) Представление решений системы (1.25) в виде ряда (1.26) было предложено А. М. Ляпуновым.

Сделаем в системе (1.28) замену $Y = \alpha + Z$, тогда

$$dZ/dt = Y^{-1}h(t, Y(\alpha + Z)). \tag{1.29}$$

Правая часть уравнения (1.29) имеет на любом фиксированном промежутке $[0, T]$ второй порядок малости относительно α, Z. Константа Липшица по отношению к этим же величинам имеет первый порядок малости. Тогда, как вытекает из доказательства теоремы 1.2, величину α_0 можно выбрать столь малой, чтобы при $|\alpha_j| < \alpha_0$ все приближения можно было определить при $t \in [0, T]$ и чтобы на этом промежутке имела место равномерная сходимость относительно параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Пределом этих приближений будут служить ряды (1.26). ■

Перейдем теперь к вопросу о представлении некоторых классов движений. Предположим, что правые части системы (1.1) заданы при $t = \tau + i\sigma$, где $\tau \in (-\infty, +\infty)$, $\sigma \in (-h, h)$, $i = \sqrt{-1}$, и при всех комплексных значениях величин $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $f(t, X)$ является однозначной аналитической векторной функцией по отношению к $t, x_1, \ldots, x_n$ в указанной выше области ее определения и пусть существует некоторое множество M фазового пространства E_n такое, что функция $f(t, X)$ разлагается в ряды по степеням $t - t_0$ и $x_s - x_{s0}$, $s = 1, \ldots, n$, сходящиеся при $|t - t_0| < \rho$, $|x_s - x_{s0}| < r$, при этом величины r и ρ не зависят от $X_0 \in M$ и $t \in (-\infty, +\infty)$. Такую векторную функцию $f(t, X)$ будем называть *равномерно аналитичной в множестве* M.

Теорема 1.4. *Если система* (1.1) *имеет ограниченное решение* $X = X(t, X_0, t_0)$, *содержащееся в множестве* M *при* $t \in (-\infty, +\infty)$, *и функция* $f(t, X)$ *равномерно ограничена и равномерно аналитична в области* $X \in M$, $t = \tau + i\sigma$, $\tau \in (-\infty, +\infty)$, $\sigma \in (-h, h)$, *а также обладает постоянной Липшица, то ограниченное решение представимо в виде ряда, сходящегося при* $t \in (-\infty, +\infty)$,

$$X = X_0 + \sum_{m=1}^{\infty} X^m(t_0, X_0)\psi^m, \tag{1.30}$$

где $\psi = [e^{\lambda(t-t_0)} - 1][e^{\lambda(t-t_0)} + 1]^{-1}$, λ — *некоторое положительное число*.

Доказательство. Пусть $X = X(t, X_0, t_0)$ есть ограниченное решение системы (1.1), содержащееся в множестве M при $t \in (-\infty, +\infty)$. Покажем, что это решение, рассматриваемое как функция комплексного переменного t, является однозначной аналитической функцией в некоторой полосе на плоскости комплексного переменного t. Действительно, функция f равномерно ограничена и обладает постоянной Липшица, следовательно, для любых $\overline{X}$, $\overline{t}$ ($\overline{X} = X(\overline{t}, X_0, t_0)$) решение системы (1.1) существует, является аналитичным и однозначным при $|t - \overline{t}| \leqslant \overline{\rho}$ (см. следствие 3 теоремы 1.2) и определяется формулой $X = X(t, \overline{X}, \overline{t})$. При этом величина $\overline{\rho}$ не зависит от $\overline{t}$. Это решение в силу теоремы единственности будет совпадать с решением $X(t, X_0, t_0)$ по крайней мере в некотором промежутке $(\overline{t} - \varepsilon, \overline{t} + \varepsilon)$, но тогда в силу единственности аналитического продолжения функция $X(t, X_0, t_0)$ будет совпадать с функцией $X(t, \overline{X}, \overline{t})$ при $|t-\overline{t}| \leqslant \overline{\rho}$. Это и показывает, что $X(t, X_0, t_0)$ есть однозначная аналитическая функция в полосе $\tau \in (-\infty, +\infty)$, $\sigma \in (-\overline{\rho}i, +\overline{\rho}i)$.

Отобразим эту полосу конформно на круг единичного радиуса:

$$\psi = [e^{\lambda(t-t_0)} - 1][e^{\lambda(t-t_0)} + 1]^{-1}, \quad \lambda = \frac{\pi}{2\overline{\rho}}.$$

Функция ψ является *суперпозицией двух функций*: экспоненциальной и дробно-линейной. Первая отображает полосу на полуплоскость, вторая — полуплоскость на единичный круг. Решение системы (1.1) будет однозначной аналитической функцией в круге $|\psi| < 1$. Следовательно, его можно представить в виде ряда (1.30), сходящегося при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Для фактического построения ряда (1.30) сделаем в системе (1.1) замену независимой переменной по формуле

$$t = t_0 + \frac{1}{\lambda}[\ln(1+\psi) - \ln(1-\psi)].$$

Тогда $f(t, X) = \overline{f}(\psi, X)$ и система (1.1) примет вид

$$\frac{dX}{d\psi} = \frac{2}{\lambda(\psi^2-1)} \overline{f}(\psi, X). \tag{1.31}$$

Подставляя ряд (1.30) в систему (1.31), последовательным дифференцированием найдем единственным образом все коэффициенты этого ряда.

Замечание. Если ряд (1.30) расходится при $|\varphi| = 1$, то для вычисления ограниченного решения при больших значениях времени нужно брать достаточно большое число членов в разложении ряда (1.30). Это обстоятельство не позволяет в общем случае использовать ряд (1.30) для фактического построения ограниченных движений. Однако в некоторых случаях использование ряда (1.30) оказывается возможным.

Следствие I. *Если ограниченное решение является периодическим с периодом $2T$, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать $m(\varepsilon)$ такое, что векторная функция*

$$X_\varepsilon(t) = X_0 + \sum_{m=1}^{m(\varepsilon)} X^{(m)}(t_0, X_0)\psi^m \tag{1.32}$$

будет аппроксимировать с точностью до ε искомое периодическое движение.

Действительно, обозначим через $\overline{\psi}$ периодическую функцию с периодом $2T$ такую, что $\overline{\psi} = \psi(t)$ при $t \in [-T, T]$. Ввиду монотонности функции $|\psi|$ будем иметь неравенство $|\psi(t)| \leqslant |\psi(T)|$ при $|t| \leqslant T$. Следовательно, можно выбрать число $m(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{m=m(\varepsilon)+1}^{\infty} \|X^{(m)}\| \, |\psi(T)|^m < \varepsilon.$$

Тогда получим $\|X_\varepsilon(t) - X(t)\| < \varepsilon$ при $t \in [-T, T]$. Если теперь в функцию (1.32) вместо ψ подставить $\overline{\psi}$, то получим $2T$-периодическую функцию $\overline{X}_\varepsilon(t)$, которая будет аппроксимировать с точностью до ε периодическое решение $X(t)$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. ■

Определение 1.6. Будем говорить, что векторная функция $X(t)$ называется *рекуррентной*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $T = T(\varepsilon)$ такое, что в любом промежутке $(\theta - T, \theta + T)$ для каждого t существует число $\tau = \tau(t)$, обладающее свойством $\|X(t + \tau) - X(t)\| < \varepsilon$.

Это понятие было введено Г. Биркгофом. Им было обнаружено, что рекуррентное движение представляет наиболее общий случай стационарных движений динамических систем. Если число $\tau(t)$ можно всякий раз выбирать не зависящим от t, то функция $X(t)$ называется *почти периодической в смысле Бора*.

Следствие 2. *Если ограниченное решение является рекуррентным, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $m(\varepsilon)$ такое, что рекуррентное движение будет происходить в ε-окрестности дуги кривой* (1.32). *А именно: рекуррентное движение $X(t)$ будет принадлежать множеству точек, удовлетворяющих соотношению*

$$\|X - X_\varepsilon(t)\| \leqslant \varepsilon, \quad t \in [-T, T].$$

Действительно, в силу определения рекуррентной функции по величине $\varepsilon/2$ найдем T, а по величине T определим число $\overline{m}$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{m=\overline{m}+1}^{\infty} \|X^{(m)}\| \, |\psi(T)|^m < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Будем считать в (1.32) $m(\varepsilon) = \overline{m}$. Покажем, что $X(t)$ принадлежит указанному выше множеству. Положим $\theta = -t$, тогда $t + \tau(t) \in [-T, T]$. Далее, имеем неравенство

$$\|X(t) - X_\varepsilon(t+\tau)\| \leqslant \|X(t) - X(t+\tau)\| +$$
$$+ \|X(t+\tau) - X_\varepsilon(t+\tau)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ ■$$

4. Предположим, что некоторая физическая система имеет лишь конечное число состояний, в которых она может пребывать с той или иной вероятностью. Если предположить, что таких состояний n, то через $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ далее будут обозначаться вероятности пребывания системы в момент t в одном из этих состояний. Тогда по условиям задачи будем иметь:

1) $\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1$; 2) $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ при $i = 1, \ldots, n$.

В метрическом пространстве $R = \{X \in E_n, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n,$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ с метрикой, индуцированной евклидовым пространством E_n, введем в рассмотрение двупараметрическое семейство преобразований $F_{t_0}^{t}(p)$.

Определение 1.7. Будем говорить, что в метрическом пространстве задана *общая система*, если определено $F_{t_0}^{t}$ — двупараметрическое семейство преобразований R на себя, обладающее следующими свойствами:

1) для любого $p \in R$ и $t_0 \geqslant 0$ определено множество $F_{t_0}^{t}(p) \subset R$ при $t \geqslant t_0$, $F_{t_0}^{t}(p)$ не пусто;

2) $F_{t_0}^{t}(p) \to p$ при $t \to t_0 + 0$;

3) для любого элемента $p_1 \in F_{t_0}^{t_1}(p)$ определено множество состояний $F_{t_1}^{t}(p_1)$ такое, что $\bigcup F_{t_1}^{t}(p_1) = F_{t_0}^{t}(p)$ при $t \geqslant t_1$ по $p_1 \in F_{t_0}^{t_1}(p)$.

Будем в дальнейшем $F_{t_0}^{t}(p)$ при закрепленном p называть *семейством распределений*, определяемым начальным распределением p, и всюду считать $F_{t_0}^{t}(p)$ состоящим из одной лишь точки. Иначе говоря, будем рассматривать только такие общие системы, которые обладают свойством единственности. В этом случае удобно перейти к векторным обозначениям. А именно: распределение обозначить через X, тогда двупараметрическое преобразование запишется в форме

$$X = X(t, t_0, X_0), \tag{1.33}$$

где X_0 — начальное распределение. При этом свойство 3 из определения 1.7 примет вид

$$X = X(t, t_0, X_0) = X(t, t_1, X(t_1, t_0, X_0)). \tag{1.34}$$

Предположим, что правая часть (1.33) непрерывно дифференцируема по параметру t, тогда

$$\dot{X} = \frac{dX(t, t_0, X_0)}{dt}. \tag{1.35}$$

Если из (1.35) и (1.33) можно исключить начальное распределение X_0, получится система

$$\dot{X} = G(X, t), \tag{1.36}$$

где $G(X, t) = (g_1(X, t), \ldots, g_n(X, t))$ есть векторная функция. Так как функция (1.34) есть распределение, то векторная функция G будет обладать следующими свойствами:

а) $\sum_{i=1}^{n} g_i(X, t) = 0$ при $\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1$;

б) $g_j(X, t) \geqslant 0$ при $x_j = 0$ и при $\sum_{i \neq j} x_i = 1$;

в) $g_j(X, t) \leqslant 0$ при $x_j = 1$ и при $\sum_{i \neq j} x_i = 0$.

Теорема 1.5. *Если векторная функция* $G(X, t)$ *удовлетворяет каким-либо условиям, обеспечивающим существование и единственность решений системы* (1.36) *в* R, *то при выполнении условий а), б), в) каждому начальному распределению* X_0 *в момент* t_0 *отвечает единственное распределение* $X = X(t, t_0, X_0)$, *являющееся решением системы* (1.36).

Доказательство. При условии а) система (1.36) имеет частный интеграл $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Условия б) и в) показывают, что если начальные условия для системы (1.36) располагаются в пространстве R, то и решение системы (1.36) при $t \geqslant t_0$, также будет располагаться в пространстве R. Следовательно, каждому начальному распределению X_0 отвечает единственное решение системы (1.36) $X = X(t, t_0, X_0)$, являющееся, таким образом, также распределением при $t \geqslant t_0$. ■

Замечания. 1. Следует иметь в виду, что множество R может не быть инвариантным для системы (1.36), если ее рассматривать при $X \in E_n$ и $t \in (-\infty, +\infty)$.

2. В качестве условий, гарантирующих существование и единственность решений, можно взять, например, следующие. Будем считать, что $G(X, t)$ задана при $X \in E_n$, $t \in (-\infty, +\infty)$, вещественна, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по компонентам вектора X.

Рассмотрим сначала тот случай, когда векторная функция является линейной, т. е.

$$G(X, t) = A(t)X + B(t). \tag{1.37}$$

Будем считать, что элементы $a_{ij}(t)$ матрицы A и компоненты $b_i(t)$ вектора B заданы при $t \in (-\infty, +\infty)$, вещественны и непрерывны. Для того чтобы удовлетворить условиям а), б), в), следует потребовать, чтобы были выполнены соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t) + b_i(t) = 0 \text{ при } j = 1, \dots, n; \tag{1.38}$$

$$a_{ij}(t) + b_i(t) \geqslant 0 \text{ при } i \neq j; \tag{1.39}$$

$$b_i(t) + a_{ii}(t) \leqslant 0. \tag{1.40}$$

Теорема 1.6. *Если матрица* A *и вектор* B *постоянны и все собственные числа матрицы* A *имеют отрицательные действительные части и выполнены условия* (1.38), (1.39), (1.40), *то существует единственное стационарное распределение вероятностей и каждое распределение стремится к нему при* $t \to +\infty$.

З а м е ч а н и я. 1. В общем случае существует замкнутое множество стационарных распределений, к каждому из которых будет стремиться некоторое многообразие распределений.

2. Рассмотрим систему

$$\dot{X} = AX + B \sum_{i=1}^{n} x_i = \widetilde{A}X. \tag{1.41}$$

Легко видеть, что системы (1.37) и (1.41) совпадают на интегральном многообразии $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Применим метод Эйлера для приближенного отыскания решений системы (1.41). Имеем

$$X_{k+1} = (E + h\widetilde{A})\, X_k, \tag{1.42}$$

где $k = 0, 1, \ldots$ Здесь через X_k обозначено $X(k,h)$ и E — единичная матрица, h — шаг интегрирования по методу Эйлера. Легко видеть, что матрица $E + h\widetilde{A}$, являясь стохастической при любом $h > 0$, является матрицей условных вероятностей и задает марковскую цепь, определяющую вероятностные распределения X_{k+1} при любом $k \geqslant 0$ через начальное распределение X_0.

Теорема 1.7. *Предположим, что матрица* $A(t)$ *и вектор* $B(t)$ *являются* 2π*-периодическими и нулевое решение системы* $\dot{X} = A(t)X$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову. Тогда при выполнении условий* (1.38), (1.39), (1.40) *система* (1.37) *будет иметь единственное стационарное, периодическое распределение и все остальные распределения будут неограниченно приближаться к нему при* $t \to +\infty$.

З а м е ч а н и е. Если обозначить через $Y(t)$ фундаментальную систему решений системы (1.41), считая, что $\widetilde{A}$ зависит от t, $Y_0 = E$, где E — единичная матрица, то матрица $Z(t, \tau) = Y^{-1*}(\tau)Y^*(t)$ будет давать матрицу условных распределений $Z_j(t, \tau)$ вероятности того, что система была в состоянии i в момент τ и попала в состояние j в момент t. Естественно, что эти условные распределения удовлетворяют соотношению

$$Z(t, \tau) = Z(\tau, t_0)\, Z(t_0, t) \quad \text{для} \quad \tau \leqslant t_0 \leqslant t. \tag{1.43}$$

Соотношение (1.43) является известным *соотношением Колмогорова.*

Перейдем теперь к рассмотрению квазилинейных дифференциальных уравнений, описывающих вероятностные распределения. А именно: будем считать, что система (1.36) имеет вид

$$\dot{X} = A(t)X + B(t) + \mu H(X, t, \mu), \tag{1.44}$$

где $H(X, t, \mu) = (h_1, \ldots, h_n)$ — векторная функция, заданная при $X \in E_n$, $t \in (-\infty, +\infty)$ и $\mu \in (-\infty, +\infty)$, вещественная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая по всем своим аргументам.

Для того чтобы система (1.44) удовлетворяла условиям а), б), в), достаточно потребовать, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t) + b_i(t) + \mu h_i(X, t, \mu) = 0 \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, n; \tag{1.45}$$

$$a_{ij}(t) + b_i(t) + \mu h_i(X, t, \mu) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad j \neq i; \tag{1.46}$$

$$b_i(t) + a_{ii}(t) + \mu h_i(X, t, \mu) \leqslant 0. \tag{1.47}$$

Теорема 1.8. *Если выполнены условия теоремы* 1.6 *и условия* (1.45), (1.46), (1.47), *то существует положительное число* μ_0 *такое, что при* $|\mu| < \mu_0$ *будет существовать в системе* (1.44) *единственное стационарное распределение вероятностей. Все остальные распределения будут неограниченно приближаться к нему при* $t \to +\infty$. *При этом скорость сходимости оценивается экспонентой.*

Теорема 1.9. *Если выполнены условия теоремы* 1.7 *и условия* (1.45), (1.46) *и* (1.47), *то существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что при любом* $|\mu| < \mu_0$ *система* (1.44) *будет иметь единственное стационарное периодическое распределение. Все остальные распределения будут сходиться к нему при* $t \to +\infty$ *по экспоненте.*

Теорема 1.5 и условия (1.45), (1.46) и (1.47) показывают, что это стационарное движение будет распределением. Это обстоятельство и является основным при доказательстве этих теорем.

§ 2. ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

Инвариантные множества. — Устойчивость инвариатных множеств. — Оценки расстояния до инвариантного множества. — Количественные характеристики устойчивости. — Общие замечания

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n, t), \quad s = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

правые части которой заданы при $t \geqslant 0$ и $X \in E_n$ и удовлетворяют некоторым условиям, при которых существует решение

$$X = X\left(t, X^{(0)}, t_0\right) \text{ и } t \geqslant t_0 \geqslant 0, \quad X^{(0)} \in E_n.$$

Будем считать, что каждое такое решение определено при всех $t \geqslant t_0$ и таково, что

$$X\left(t, X^{(0)}, t_0\right) \to X^{(0)} \text{ при } t \to t_0 + 0;$$

при этом через точку $(X^{(0)}, t_0)$ может проходить бесконечное множество решений системы (2.1), обладающих указанными свойствами.

Обозначим через $F_{t_0}^t(X^{(0)})$ совокупность точек, принадлежащих всем таким решениям в некоторый фиксированный момент $t \geqslant t_0$; пусть

$$F_{t_0}^t\left(X^{(0)}\right) \to X^{(0)} \text{ при } t \to t_0 + 0.$$

Назовем $F_{t_0}^t(X^{(0)})$ *движением*, а совокупность всех точек, принадлежащих этому движению при $t \geqslant t_0$, — *траекторией* этого движения.

Отметим основные свойства, которыми обладает движение:

1) *для любого* $X^{(0)} \in E_n$ *множество элементов* $F_{t_0}^t(X^{(0)}) \in E_n$ *определено при любом* $t \geqslant t_0$.

2) $F_{t_0}^t(X^{(0)}) \to X^{(0)}$ при $t \to t_0 + 0$;

3) *пусть* $X^{(1)}$ — *некоторая точка множества* $F_{t_0}^{t_1}(X^{(0)})$, *тогда согласно свойству* 1 *определено движение* $F_{t_1}^{t}(X^{(1)})$, *при этом*

$$\bigcup F_{t_1}^{t}(X^{(1)}) = F_{t_0}^{t}(X^{(0)}) \text{ при } t \geqslant t_1 \text{ по } X^{(1)} \in F_{t_0}^{t_1}(X^{(0)}).$$

Третье свойство движения следует из определения самого движения как совокупности концов интегральных кривых, рассмотренных в момент t, каждая из которых проходит через точку $(X^{(0)}, t_0)$.

Ясно, что совокупность движений $F_{t_0}^{t}(X^{(0)})$ изображает двупараметрическое семейство преобразований E_n на себя, определенное при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и обладающее свойствами 1—3. Такое двупараметрическое семейство преобразований E_n на себя будем называть *общей системой* в E_n. Если правые части системы (2.1) непрерывны, то она имеет решение $X = X(t, X^{(0)}, t_0)$ при любом $X^{(0)} \in E_n$, определенное при некоторых $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Если каждое решение системы (2.1) существует при всех $t \geqslant t_0$, то система (2.1) определит в E_n общую систему. Если окажется, что при непрерывных правых частях системы (2.1) не все ее решения определены при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, то, делая замену независимой переменной по формуле

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} f_i^2(X(\tau, X^{(0)}, t_0), \tau)}\, d\tau,$$

получаем систему

$$\frac{dx_k}{ds} = \bar{f}_k(x_1, \ldots, x_n, t), \qquad (2,2)$$

правые части которой определены при $t \geqslant 0$ и $X \in E_n$. При этом любое решение системы (2.2) будет определено при всех $s \geqslant s_0 \geqslant 0$. Таким образом, система (2.2) определит в пространстве E_n двупараметрическое семейство преобразований $F_{s_0}^{s}(X^{(0)})$, обладающее свойствами 1—3. Следовательно, если правые части системы (2.1) непрерывны, то с ее помощью всегда можно определить общую систему в E_n.

Перейдем к изложению теории в общем случае.

Определение 2.1. Будем говорить, что в метрическом пространстве R задана *общая система*, если определено $F_{t_0}^{t}$-двупараметрическое семейство преобразований R на себя, обладающее следующими свойствами:

1) для любого $p \in R$ и $t_0 \geqslant 0$ определено множество $F_{t_0}^{t}(p) \subset R$ при $t \geqslant t_0$; $F_{t_0}^{t}(p)$ не пусто;

2) $F_{t_0}^{t}(p) \to p$ при $t \to t_0 + 0$;

3) для любого элемента $p_1 \in F_{t_0}^{t_1}(p)$ определено множество $F_{t_1}^{t}(p_1)$ такое, что

$$\bigcup F_{t_1}^{t}(p_1) = F_{t_0}^{t}(p) \text{ при } t \geqslant t_1 \text{ по } p_1 \in F_{t_0}^{t_1}(p).$$

Будем в дальнейшем $F_{t_0}^{t}(p)$ при закрепленном p называть *движени ем*, а совокупность всех точек, принадлежащих движению при $t \geq t_0$,—*траекторией* этого движения. Множество $M \subset R$ назовем *инвариантным множеством* общей системы, если M состоит из траекторий общей системы.

Дадим более точное определение инвариантного множества.

Определение 2.2. Множество M называется *инвариантным* по отношению к общей системе, если из $p \in M$ следует, что $F(t_0, p) \subset M$ при любом $t_0 \geqslant 0$. Здесь через $F(t_0, p)$ обозначена траектория движения $F_{t_0}^{t}(p)$.

Введем обозначение

$$\rho(t, p_0, t_0) = \sup_{p \in F_{t_0}^{t}(p_0)} \rho(p, M).$$

Введем понятие устойчивости инвариантного множества общей системы, расположенной в метрическом пространстве.

Определение 2.3. Инвариантное множество M общей системы в R называют *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать величину $\delta > 0$ такую, что при $\rho(p_0, M) < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\rho(t, p_0, t_0) < \varepsilon \text{ при } t \geqslant t_0 \geqslant 0$$

Если, кроме того, $\rho(t, p_0, t_0) \to 0$ при $t \to +\infty$, то инвариантное множество M называют *асимптотически устойчивым*.

Определение 2.4. Асимптотически устойчивое инвариантное множество M общей системы в R называют *равномерно асимптотически устойчивым*, если существует величина δ_1, соответствующая некоторому ε_1 (определение 2.3), такая, что $\rho(t, p_0, t_0) \to 0$ при $t - t_0 \to +\infty$ равномерно по $t_0 \geqslant 0$ и $\rho(p_0, M) < \delta_1$.

Замечание. Можно показать, что существует непрерывная строго монотонно убывающая от $+\infty$ до 0 функция $L(\tau)$, заданная при $\tau \in (-\infty, +\infty)$ и такая, что

$$\rho(t, p_0, t_0) < L(t - t_0) \text{ при } \rho(p_0, M) < \delta_1.$$

Действительно, положим

$$\lambda(t - t_0) = \sup_{\rho(p_0, M) < \delta_1} \rho(t, p_0, t_0).$$

Ясно, что $\lambda(t - t_0) \to 0$ при $t - t_0 \to +\infty$. Из этого вытекает, что можно построить функцию L, обладающую указанными выше свойствами. ∎

Определение 2.5. Асимптотически устойчивое инвариантное множество M называется *равномерно притягивающим*, если для любого $h > 0$ можно указать величины $T > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\rho(t, p_0, t_0) > \alpha$ при $0 \leqslant t - t_0 \leqslant T$ и $h \leqslant \rho(p_0, M) \leqslant \delta_2$, где δ_2 — положительная величина, соответствующая некоторому $\varepsilon_2 > 0$ (определение 2.3).

Определение 2.6. Инвариантное множество M называется *неустойчивым*, если существует некоторая величина $\varepsilon > 0$ такая, что при любом $\delta > 0$ можно указать точку p_0 и число $t_0 > 0$ такие, что для некоторого $t > t_0$ имеют место неравенства $\rho(p_0, M) < \delta$ и $\rho(t, p_0, t_0) \geqslant \varepsilon$.

Задача настоящего параграфа состоит в том, чтобы дать условия, при которых инвариантное множество M обладает тем или иным свойством устойчивости или неустойчивости, а также в том, чтобы дать метод, позволяющий оценивать функцию $\rho(t, p_0, t_0)$.

Первое свойство общей системы является, вообще говоря, довольно жестким, так как при решении, например, задачи Коши для систем уравнений в частных производных имеет место иногда следующий факт: задача Коши разрешима, например, для системы

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = f_s\left(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \ldots, t\right),$$

$$s = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, k, \tag{2.3}$$

при $\varphi \in R_1$, где φ — векторная функция переменных $x_1, \ldots, x_k$, которой отвечает решение $U = U(\varphi, t, t_0)$ системы (2.3), обладающее свойством $U \to \varphi$ при $t \to t_0 + 0$. Однако $U(\varphi, t, t_0) \in R$ при $t > t_0$, где R — некоторое функциональное пространство, содержащее в себе совокупность функций R_1. В случае общей системы имеем $R = R_1$. По этим соображениям далее будем рассматривать также такие двупараметрические семейства операторов $F^t_{t_0}$, которые определены при $t \geqslant t_0$ на любом элементе $p_0 \in R_1$, а значения их попадают в R, где R — некоторое метрическое пространство, $R_1 \subset R$ — его подмножество. Такие двупараметрические семейства операторов будем называть в дальнейшем *неполной общей системой*, так что неполная общая система обладает вторым и третьим свойствами общей системы. Для случая неполной общей системы инвариантное множество M будем считать *подмножеством* R_1. Все определения, данные в этом параграфе об устойчивости инвариантного множества, непосредственно переносятся на случай неполной общей системы. В этих определениях каждый раз следует лишь оговаривать, что движения $F^t_{t_0}(p_0)$ существуют лишь при $p_0 \in R_1$ или же $p_0 \in F^t_{t_0}(p_1)$.

2. Рассмотрим однопараметрическое семейство функционалов V_t, зависящих от параметра $t \geqslant 0$. Предположим, что для любого элемента $p \in G \subset R$ определена функция $V_t(p)$ вещественного переменного t, заданная при $t \geqslant 0$. Далее будем применять обозначение

$$V(t, p_0, t_0) = \sup_{p \in F^t_{t_0}(p_0)} V_t(p). \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. *Для того чтобы инвариантное множество M общей системы в R было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовало однопараметрическое семейство функционалов V_t, обладающее свойствами:*

1) *на любом элементе p из некоторой окрестности $S(M, r)$ множества M определена функция $V_t(p)$ вещественного аргумента t, заданная при $t \geqslant 0$;*

2) *для любого достаточно малого* $c_1 > 0$ *можно указать величин* $c_2 > 0$ *такую, что* $V_t(p) > c_2$ *при* $\rho(p, M) > c_1$ *и всех* $t \geqslant 0$;

3) $V_t(p) \to 0$ *равномерно относительно* $t \geqslant 0$ *при* $\rho(p, M) \to$

4) *функция* $V(t, p_0, t_0)$ *не возрастает при всех* $t \geqslant t_0$, *для которы она определена.*

Доказательство. Необходимость. Предполо жим, что множество M устойчиво. Тогда по $\varepsilon > 0$ можно указат величину $\delta > 0$ такую, что при $\rho(p_0, M) < \delta$ будет выполняться не равенство $\rho(t, p_0, t_0) < \varepsilon$, если $t \geqslant t_0$. Положим

$$V_{t_0}(p_0) = \sup_{t \geqslant t_0} \rho(t, p_0, t_0) \text{ при } \rho(p_0, M) < \delta. \quad (2.5$$

Ясно, что равенство (2.5) дает семейство функционалов, зависяще от одного параметра $t \geqslant 0$, определенное на любом элементе $p_0 \in$ $\in S(M, \delta)$.

Из равенства (2.5) следует, что $V_{t_0}(p_0) \leqslant \varepsilon_1$ при $\rho(p_0, M) < \delta_1$ где $\delta_1 < \delta$ — некоторая положительная величина, соответствую щая, согласно определению 2.3, взятому $\varepsilon_1 > 0$. Отсюда следует, что семейство функционалов V_t, определенное равенством (2.5), обла дает свойством 3. Кроме того, выполняются неравенства $V_{t_0}(p_0) \geqslant$ $\geqslant \rho(p_0, M)$, следовательно, семейство функционалов V_t обладает также свойством 2.

Покажем теперь, что справедливо свойство 4. Возьмем некоторую величину $t_1 > t_0$. Рассмотрим выражение $\rho(t, p, t_1)$, где $p \in F_{t_0}^{t_1}(p)$ В силу свойства 3 общей системы будем иметь включение $F_{t_1}^{t}(p) \subset$ $\subset F_{t_0}^{t}(p_0)$ при $t \geqslant t_1$ и любом $p \in F_{t_0}^{t_1}(p_0)$. Поэтому справедливо неравенство

$$\rho(t, p, t_1) \leqslant \rho(t, p_0, t_0) \text{ при } t \geqslant t_1$$

и любом $p \in F_{t_0}^{t_1}(p_0)$, откуда получаем соотношение

$$V_{t_1}(p) = \sup_{t \geqslant t_1} \rho(t, p, t_1) \leqslant \sup_{t \geqslant t_0} \rho(t, p_0, t_0) \leqslant V_{t_0}(p_0).$$

Таким образом, при любом элементе $p \in F_{t_0}^{t_1}(p_0)$ имеем неравенст во $V_{t_1}(p) \leqslant V_{t_0}(p_0)$, откуда вытекает, что

$$\sup_{p \in F_{t_0}^{t_1}(p_0)} V_{t_0}(p) = V(t_1, p_0, t_0) \leqslant V_{t_0}(p_0) \text{ при любом } t_1 \geqslant t_0.$$

Отсюда следует, что построенное семейство функционалов обладает также свойством 4.

Достаточность. Предположим, что существует семейств функционалов V_t, зависящее от параметра $t \geqslant 0$ и обладающее свой ствами 1—4. Покажем, что инвариантное множество M устойчиво Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < r/2$; положим

$$\lambda = \inf V_t(p) \text{ при } \rho(p, M) \geqslant \varepsilon \text{ и } \rho(p, M) \leqslant r/2.$$

Выберем величину δ так, чтобы при $\rho(p, M) < \delta$ выполнялось со отношение $V_t(p) < \lambda$ при $t \geqslant 0$. Покажем, что величина δ соответст вует, согласно определению 2.3, выбранному ε. В силу условия 4 будем иметь неравенство $V_{t_0}(p_0) \geqslant V(t, p_0, t_0)$, откуда следует, что при $\rho(p_0, M) < \delta$ имеем

$$V(t, t_0, p_0) < \lambda \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Пусть существует момент $t > t_0$, такой, что $\rho(t, p_0, t_0) \geqslant \varepsilon$. Тогда при этом будет $V(t, p_0, t_0) > \lambda$, что невозможно, ибо имеет место противоположное неравенство при любом выборе величины $t \geqslant t_0$ и для любого $p_0 \in S(M, \delta)$. ■

Замечание. Функция трех аргументов $\rho(t, p_0, t_0)$ может не быть, вообще говоря, непрерывной при $t \geqslant t_0$, поэтому может не существовать таких значений t, при которых

$$\varepsilon \leqslant \rho(t, p_0, t_0) \leqslant r/2$$

для некоторого $p_0 \in S(M, \delta)$. В этом случае доказательство теоремы останется в силе, если считать, что семейство функционалов определено и вне множества $S(M, r/2)$. Например, можно положить, что $V_t(p) = 1$ при $p \in S(M, r/2)$, $p \bar{\in} \bar{M}$ и $V_t(p) = 0$ при $p \bar{\in} \bar{M}$.

Таким же образом можно распространить на все пространство R семейство функционалов, построенное при доказательстве необходимости условий 1—4 теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы инвариантное множество M общей системы в R было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовало однопараметрическое семейство функционалов V_t, обладающее следующими свойствами:* 1) *выполнены все условия теоремы* 2.1 *для семейства* V_t; 2) *функция* $V(t, p_0, t_0) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *для любого* $p_0 \in S(M, \delta)$, *где* δ — *некоторая положительная величина.*

Доказательство. Необходимость. Пусть инвариантное множество M асимптотически устойчиво. Тогда оно просто устойчиво. Поэтому, как следует из теоремы 2.1, существует семейство функционалов, определенное равенством (2.5), обладающее свойствами 1—4 теоремы 2.1. Покажем, что построенное при помощи равенства (2.5) семейство функционалов удовлетворяет условию 2 настоящей теоремы.

По числу $\varepsilon > 0$ укажем $\delta > 0$ такое, что при $\rho(p_0, M) < \delta$ выполняется неравенство

$$\rho(t, p_0, t_0) < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0$$

и, кроме того,

$$\rho(t, p_0, t_0) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Поэтому для любого δ_1, соответствующего некоторому ε_1 на основании определения 2.3, укажем величину $T > 0$ такую, что $\rho(t, p_0, t_0) < \delta_1$ при $t = T$. Тогда будет выполняться неравенство $\rho(t, p, T) < \varepsilon_1$ при $t \geqslant T$ для любого $p \in F_{t_0}^T(p_0)$. Отсюда вытекает, что

$$V_T(p) = \sup_{t \geqslant T} \rho(t, p, T) \leqslant \varepsilon_1,$$

поэтому справедливо соотношение

$$V(t, p_0, t_0) = \sup V_T(p) \leqslant \varepsilon_1 \text{ при } p \in F^T_{t_0}(p_0),\ t = T;$$

тем более это неравенство будет иметь место при $t \geqslant T$, так как установлено, что функция $V(t, p_0\ t_0)$ не возрастает. Таким образом, условие 2 выполнено.

Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены, тогда, как следует из теоремы 2.1, множество M устойчиво. Вследствие этого по величине $\varepsilon > 0$ можно указать величину $\delta > 0$ такую, что при $\rho(p_0, M) < \delta$ выполняется неравенство

$$\rho(t, p_0, t_0) < \varepsilon \text{ при } t \geqslant t_0.$$

Далее, существуют две возможности:

1) либо $\rho(t, p_0, t_0) \to 0$ при $t \to +\infty$,

2) либо $\rho(t, p_0, t_0) > \gamma(p_0) > 0$ при $t \geqslant t_0$.

Действительно, пусть последнее не имеет места. Покажем тогда, что $\rho(t, p_0, t_0) \to 0$ при $t \to +\infty$. По величине ε_1 укажем δ_1 такое, что при $\rho(p_0, M) < \delta_1$ выполняется неравенство $\rho(t, p_0, t_0) < \varepsilon_1$, $t \geqslant t_0$. По величине δ_1 можно указать величину $T > 0$ такую, что $\rho(T, p_0, t_0) < \delta_1$. Из этого вытекает неравенство $\rho(t, p, T) < \varepsilon_1$ при $t \geqslant T$ для любого $p \in F^T_{t_0}(p_0)$, а тогда $\rho(t, p_0, t_0) \leqslant \varepsilon_1$ при $t \geqslant T$. Таким образом, $\rho \to 0$ при $t \to +\infty$.

Предположим теперь, что существует движение общей системы $F^t_{t_0}(p_0)$ такое, что выполняется неравенство $\rho(t, p_0, t_0) > \gamma(p_0) > 0$. Тогда $V(t, p_0, t_0) > \gamma_1 > 0$, что противоречит условию 2 настоящей теоремы. ■

Теорема 2.3. *Для того чтобы инвариантное множество M было равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы существовало однопараметрическое семейство функционалов V_t, обладающих свойствами:* 1) *выполнены все условия теоремы* 2.2; 2) *функция $V(t, p_0, t_0) \to 0$ при $t - t_0 \to +\infty$ равномерно относительно $t_0 \geqslant 0$, $\rho(p_0, M) \leqslant \delta$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть инвариантное множество M равномерно асимптотически устойчиво, тогда множество M устойчиво. Поэтому существует семейство функционалов, определенное посредством равенства (2.5). Покажем, что

$$V(t, p_0, t_0) \to 0 \text{ при } t - t_0 \to +\infty$$

равномерно относительно $t_0 \geqslant 0$, $\rho(p_0, M) \leqslant \delta$. Напомним обозначение, введенное выше:

$$V(t, p_0, t_0) = \sup_{p \in F^t_{t_0}(p_0)} V_t(p).$$

По условию теоремы $\rho(t, p_0, t_0) \to 0$ при $t - t_0 \to +\infty$ равномерно относительно $t_0 \geqslant 0$, $\rho(p_0, M) < \delta$. В силу этого по величине $\varepsilon_1 > 0$ можно указать величину $\delta_1 > 0$, соответствующую ε_1, согласно определению 2.3, такую, что $\rho(t, p_0, t_0) < \delta_1$ при $t = T + t_0$. Тогда

$\rho(t, p, T+t_0) < \varepsilon_1$ при $t \geqslant T + t_0$ и любом $p \in F_{t_0}^{T+t_0}(p_0)$; в силу этого $\rho(t, p_0, t_0) < \varepsilon_1$ при $t \geqslant T + t_0$. По определению, справедливы следующие равенства:

$$V(t, p_0, t_0) = \sup_{p \in F_{t_0}^{t}(p_0)} V_t(p) = \sup_{p \in F_{t_0}^{t}(p_0)} \sup_{\tau \geqslant t \geqslant T+t_0} \rho(\tau, p, t). \tag{2.6}$$

Отсюда $V(t, p_0, t_0) < \varepsilon_1$ при $t \geqslant T + t_0$. Таким образом, условие 2 настоящей теоремы выполнено.

Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены. Покажем, что множество M равномерно асимптотически устойчиво.

Пусть $\rho(t, p_0, t_0) \to 0$ при $t - t_0 \to +\infty$, но неравномерно относительно $t_0 > 0$, $\rho(p_0, M) \leqslant \delta_1$, где δ_1 — достаточно малое положительное число. В этом случае существует по крайней мере одна величина $h > 0$ такая, что можно указать последовательность точек $p_{0k} \in S(M, \delta_1)$; последовательность величин $t_{0k} \geqslant 0$ и последовательность моментов $t_k > t_{0k} \geqslant 0$ таких, что выполняются неравенства

$$\rho(t, p_{0k}, t_{0k}) \geqslant h \text{ при } t \in [t_{0k}, t_k],\ t_k - t_{0k} \to +\infty,\quad k \to +\infty;$$

тогда

$$V(t, p_{0k}, t_{0k}) \geqslant h > 0 \text{ при } t \in [t_0, t_k],$$

что невозможно, ибо согласно условию 2 имеем: $V(t, p_0, t_0) \to 0$ равномерно относительно $t_0 \geqslant 0$, $\rho(p_0, M) < \delta$.■

Теорема 2.4. *Для того чтобы инвариантное множество M было равномерно притягивающим, необходимо и достаточно, чтобы существовало однопараметрическое семейство функционалов, обладающее следующими свойствами:* 1) *выполнены все условия теоремы* 2.2; 2) *по любому достаточно малому $h > 0$ можно указать величины $T > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что*

$$V(t, p_0, t_0) > \alpha \text{ при } t \in [t_0, t_0 + T],\quad t_0 \geqslant 0 \text{ и } h \leqslant \rho(p_0, M) \leqslant \delta,$$

где $\delta > h$ — достаточно малая величина.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что множество M является равномерно притягивающим. Тогда множество M асимптотически устойчиво. Поэтому равенство (2.5) определяет семейство функционалов, обладающих всеми свойствами, указанными в теореме 2.2. Кроме того, по величине h в силу определения 2.5 можно указать величины $T > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\rho(t, t_0, p_0) > \alpha \text{ при } t \in [t_0, t_0 + T] \text{ и } \rho(p_0, M) \geqslant h.$$

Из формулы (2.4) следует, что справедливо неравенство

$$V(t, p_0, t_0) = \sup_{p \in F_{t_0}^{t}(p_0)} \sup_{\tau \geqslant t \geqslant t_0} \rho(\tau, p, t) \geqslant \alpha \text{ при } t - t_0 \leqslant T,$$

откуда следует выполнение условия 2 теоремы 2.4.

Достаточность. Пусть существует однопараметрическое семейство функционалов V_t, удовлетворяющих всем условиям теоремы 2.4.

Из условия 1 следует, что множество M асимптотически устойчиво. Покажем, что оно является также равномерно притягивающим. Пусть это не так. Тогда существует по крайней мере одна достаточно малая положительная величина h такая, что можно указать последовательность точек p_{0k}, $\rho(p_{0k}, M) \geqslant h$ и последовательность чисел t_{0k} и T_k таких, что $\rho(T_k + t_{0k}, p_{0k}, t_{0k}) \to 0$ при $k \to +\infty$. При этом $T_k \leqslant T$, где T может быть любой сколь угодно малой положительной величиной. А тогда в силу того, что $V_t(p) \to 0$ равномерно относительно $t \geqslant 0$, при $\rho(p, M) \to 0$ будем иметь следующий результат:

$$V(t_{0k} + T_k, p_{0k}, t_{0k}) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

что противоречит условию 2 теоремы 2.4, ибо

$$\rho(p_{0k}, M) \geqslant h, \quad \text{а} \quad T_k < T. \blacksquare$$

Пусть теперь общая система, определенная в R, такова, что движение $F^t_{t_0}(p)$ при любом $t \geqslant t_0$ есть одноточечное множество и непрерывно по t.

Теорема 2.5. *Для того чтобы инвариантное множество M было равномерно асимптотически устойчивым и равномерно притягивающим, необходимо и достаточно, чтобы существовало два семейства функционалов V_t и Φ_t, обладающих свойствами:* 1) *при любом* $p \in S(M, r)$, $r > 0$, *достаточно малом, определены величины* $V_t(p)$ и $\Phi_t(p)$, *являющиеся функциями вещественного аргумента* $t \geqslant 0$; 2) *при любой достаточно малой величине* $c_1 > 0$ *можно указать положительные величины* c_2 *и* c_3 *такие, что* $V_t(p) < -c_2$, а $\Phi_t(p) > c_3$ *при* $\rho(p, M) > c_1$ *и* $t \geqslant 0$; 3) $V_t(p) \to 0$ и $\Phi_t(p) \to 0$ *при* $\rho(p, M) \to 0$ *равномерно относительно* $t \geqslant 0$; 4) $\frac{d}{dt} V(t, p_0, t_0) = \Phi(t, p_0; t_0)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть множество M является равномерно асимптотически устойчивым и равномерно притягивающим. Тогда, как было показано, существует функция $L(\tau)$, заданная при $\tau \in (-\infty, +\infty)$, непрерывная, строго монотонно изменяющаяся от $+\infty$ до 0 и такая, что при $\rho(p, M) < \delta_1$ выполняется неравенство

$$L(t - t_0) > \rho(t, p_0, t_0) \text{ при } t \geqslant t_0.$$

Построим функционал

$$\Phi = \rho(p, M)\, e^{-L^{-1}(\rho(p, M))}.$$

Этот функционал обладает всеми свойствами, указанными в теореме. Положим далее, что

$$V(F^t_{t_0}(p_0), t) = -\int\limits_t^{+\infty} \Phi(F^\tau_{t_0}(p_0))\, d\tau \text{ и } t \geqslant t_0. \tag{2.7}$$

Формула (2.7) определяет вдоль движения $F^t_{t_0}(p_0)$ функционал, обращающийся при $t = t_0$ в $V_{t_0}(p_0)$ при $\rho(p_0, M) \leqslant \delta_1$. Действительно,

$$V\left(F^t_{t_0}(p_0),\, t\right) \geqslant -\varepsilon_1 e^{t_0 - t},$$

где ε_1 — некоторая положительная величина, которой соответствует δ_1 согласно определению 2.3. Из полученного выше неравенства имеем

$$V_{t_0}(p_0) > -\varepsilon_1 \text{ при } t_0 \geqslant 0 \text{ и } \rho(p_0, M) < \delta_1,$$

что означает выполнение условия 3 теоремы 2.5. Из выражения (2.7) вытекает равенство

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V\left(F^t_{t_0}(p_0), t\right) = \Phi\left(F^t_{t_0}(p_0)\right).$$

Покажем теперь, что семейство функционалов V_t, определенное посредством формулы (2.7), удовлетворяет условию 2 теоремы 2.5; имеем соотношение

$$V_{t_0}(p_0) = -\int\limits_{t_0}^{+\infty} \Phi\left(F^\tau_{t_0}(p_0)\right) \mathrm{d}\tau \leqslant -\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \Phi\left(F^\tau_{t_0}(p_0)\right) \mathrm{d}\tau.$$

По величине h, в силу того что множество M является равномерно притягивающим, можно указать величины T и α такие, что выполняется неравенство

$$\rho(t, p_0, t_0) > \alpha \text{ при } t \in [t_0, t_0 + T] \text{ и } \rho(p_0, M) \geqslant h,$$

а тогда справедливо неравенство

$$\Phi\left(F^t_{t_0}(p_0)\right) > \beta \text{ при } t \in [t_0, t_0 + T],$$

где β — достаточно малая положительная постоянная. Отсюда и из выражения (2.7) вытекает, что

$$V_{t_0}(p_0) \leqslant -\beta T \text{ при } \rho(p_0, M) > h \text{ и для любого } t \geqslant 0.$$

Этим необходимость условий доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть существуют два семейства функционалов, удовлетворяющих условиям теоремы 2.5. Семейство функционалов V_t удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1, поэтому множество M устойчиво.

Пусть существует движение $F^t_{t_0}(p_0)$, $\rho(p_0, M) < \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало и соответствует некоторому $\varepsilon > 0$, в силу определения 2.3 такое, что $\rho(t, p_0, t_0) > \gamma > 0$. Тогда на этом движении будем иметь неравенство

$$\Phi(t, p_0, t_0) > \beta > 0 \text{ при } t \geqslant t_0.$$

Учтем это неравенство и введенные выше обозначения, тогда

$$V(t, p_0, t_0) > (t - t_0)\beta + V_{t_0}(p_0),$$

что невозможно, ибо $V(t, p_0, t_0) < 0$ при $t \geqslant t_0$. Отсюда следует, что любое движение $F^t_{t_0}(p_0)$ обладает при $\rho(p_0, M) < \delta$ свойством

$$\rho(t, p_0, t_0) \to 0 \text{ при } t - t_0 \to +\infty$$

и притом равномерно относительно $t_0 \geqslant 0$ и $\rho(p_0, M) < \delta$.

Покажем теперь, что множество M является равномерно притягивающим. Пусть это не так. Тогда существует достаточно малое число $h > 0$ такое, что при $\rho(p_0, M) > h$ и любом $T > 0$ имеем

$$\inf_{t \in [t_0, t_0+T]} \rho(t, p_0, t_0) = 0, \quad t_0 \geqslant 0, \quad \rho(p_0 M) \geqslant h,$$

а тогда существуют последовательности t_{0k}, t_k, p_{0k} такие, что $\rho(t_k, p_{0k}, t_{0k}) \to 0$ при $k \to +\infty$.

Из формулы (2.7) имеем равенство

$$V_{t_0}(p_0) = \int_{t_0}^{+\infty} -\Phi(\tau, p_0, t_0)\, d\tau.$$

Положим здесь $t_0 = t_{0k}$, $p_0 = p_{0k}$. Разобьем интеграл, стоящий в правой части, на три интеграла:

$$V_{t_0}(p_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} -\Phi(\tau, p_0, t_0)\, d\tau + \int_{t_0+T}^{T_1} + \int_{T_1}^{+\infty} -\Phi(\tau, p_0, t_0)\, d\tau.$$

Первый из этих интегралов можно сделать сколь угодно малым в силу выбора числа T. Третий интеграл можно сделать сколь угодно малым, выбрав величину T_1 достаточно большой. Средний интеграл можно сделать сколь угодно малым, выбирая p_{0k}, t_{0k} с достаточно большим номером k. Тогда получим, что существует величина $k_0(\varepsilon)$, обладающая свойством

$$-V_{t_{0k}}(p_{0k}) < \varepsilon \text{ при } k \geqslant k_0(\varepsilon) \text{ и } \rho(p_{0k}, M) > h,$$

а это противоречит свойству 2. ■

З а м е ч а н и е. В случае, когда общая система в метрическом пространстве обладает лишь свойствами 1—3 (см. определение 2.1), также можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 2.5.

Теорема 2.6. *Для того чтобы инвариантное множество M было неустойчиво, необходимо и достаточно, чтобы существовали два семейства функционалов V_t и W_t, обладающие свойствами: 1) на любом элементе $p \in S(M, r)$, $r > 0$ определены функции $V_t(p)$ и $W_t(p)$ при $t \geqslant 0$; 2) функция $V_t(p)$ ограничена при $t \in [0, +\infty)$ и $p \in S(M, r)$; 3) для любого $\delta > 0$ можно указать точку p_0 и значение параметра t_0 такие, что $V_{t_0}(p_0) > 0$, $\rho(p_0, M) < \delta$; 4) $\frac{d}{dt}V(t, p_0, t_0) = \lambda V(t, p_0, t_0) + W(t, p_0, t_0)$, $W_t(p) \geqslant 0$, $\lambda = \mathrm{const} > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Возьмем $\bar\varepsilon > 0$, о котором идет речь в определении неустойчивости множества M. Пусть $p \in S(M, \bar\varepsilon)$; если $\rho(t, p, t_0) < \bar\varepsilon$ при $t \geqslant t_0$, то определим $V_t(p)$ так, чтобы выполнялось равенство $V_{t_0}(p) = 0$. Если существует величина t_p такая, что $\rho(t, p, t_0) \geqslant \bar\varepsilon$ при $t = t_p$, $\rho(t, p, t_0) < \bar\varepsilon$ при $t \in [t_0, t_p)$, то положим

$$V_t(F_{t_0}^t(p_0)) = e^{t-t_p} = V(t, p_0, t_0).$$

Ясно, что в первом и втором случаях имеем равенство $dV/dt = V$. Кроме того, семейство функционалов V_t ограничено. Далее, в силу определения неустойчивости для любого $\delta > 0$ можно указать точку p и значение параметра t_0, такие, что выполняется неравенство $\rho(t, p, t_0) \geqslant \bar{\varepsilon}$ при $t = t_p$; поэтому $V_{t_0}(p) > 0$ при $\rho(p, M) < \delta$. Таким образом, построенное семейство функционалов удовлетворяет всем условиям теоремы.

Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда, какую бы величину $\delta > 0$ ни взять, можно указать p_0, $\rho(p_0, M) < \delta$ и значение параметра t_0, такие, что $V_{t_0}(p_0) > 0$. Функция $V(t, p_0, t_0)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению $dV/dt = \lambda V + W$ и начальному условию $V(t, p_0, t_0) = V_{t_0}(p_0)$ при $t = t_0$.

Для решения этого уравнения справедлива оценка

$$V(t, p_0, t_0) \geqslant V_{t_0}(p_0)\, e^{\lambda(t-t_0)}. \tag{2.8}$$

Если предположить теперь, что множество M устойчиво, то окажется, что, с одной стороны, движение $F_{t_0}^t(p_0)$ при $t \geqslant t_0$ целиком лежит в области задания семейства V_t и, следовательно, $V(t, p_0, t_0)$ ограничено при $t \geqslant t_0$; с другой стороны, вдоль этого движения имеет место неравенство (2.8), противоречащее сделанному предположению об устойчивости. Таким образом, множество M неустойчиво. ■

Замечание. Аналогичную теорему можно доказать также в общем случае, когда множество $F_{t_0}^t(p_0)$ не является одноточечным.

3. Изложим теперь метод, позволяющий для некоторых общих систем оценивать функцию

$$\rho(t, p_0, t_0) = \sup_{p \in F_{t_0}^t(p_0)} \rho(p, M).$$

Рассмотрим две функции $M_1(x)$ и $M_2(x)$, заданные при $x \geqslant 0$, непрерывные, строго монотонно изменяющиеся при $x \in [0, +\infty)$. Введем однопараметрическое семейство функционалов R_t, заданное в некоторой окрестности $S(M, r)$ инвариантного множества M, зависящее от параметра $t \geqslant 0$.

Предположим, что имеют место неравенства

$$M_1(\rho(p, M)) \leqslant R_t(p) \leqslant M_2(\rho(p, M)) \quad \text{при } t \in [0, +\infty). \tag{2.9}$$

Тогда функцию $\rho(t, p_0, t_0) = \rho(F_{t_0}^t(p_0), M)$ всегда можно оценить снизу и сверху, если известна функция $R_t(F_{t_0}^t(p)) = R(t, p_0, t_0)$ или известна какая-либо оценка для этой функции.

Действительно, из неравенства (2.9) имеем

$$\rho(t, p_0, t_0) \leqslant M_1^{-1}(R(t, p_0, t_0))$$

и

$$M_2^{-1}(R(t, p_0, t_0)) \leqslant \rho(t, p_0, t_0),$$

где M_1^{-1}; M_2^{-1} суть обратные функции. Объединяя последние неравенства, получаем требуемую двустороннюю оценку для функции $\rho(t, p_0, t_0)$.

Предположим далее, что в некоторой окрестности $S(M, r)$ инвариантного множества M заданы два однопараметрических семейства функционалов V_t и W_t, обладающих следующими свойствами:

1) *для любого элемента* $p \in S(M, r)$ *определены функции* $V_t(p)$ и $W_t(p)$ *при всех* $t \in [0, +\infty)$;

2) *семейство функционалов* V_t *удовлетворяет неравенству*

$$\Phi_1(t) R_t^{l_1} \leqslant V_t \leqslant \Phi_2(t) R_t^{l_2}; \tag{2.10}$$

3) *семейство функционалов* W_t *удовлетворяет неравенству*

$$-\Psi_1(t) R_t^{k_1} \leqslant W_t \leqslant -\Psi_2(t) R_t^{k_2}; \tag{2.11}$$

4) *функция* $V(t, p_0, t_0)$ *непрерывно дифференцируема при всех* $t \geqslant t_0$, *пока она определена, и удовлетворяет соотношению*

$$\frac{d}{dt} V(t, p_0, t_0) = W(t, p_0, t_0), \tag{2.12}$$

или

$$\frac{d}{dt} V_t = W_t.$$

В свойствах 1—4 функций $\Phi_i(t)$ и $\Psi_i(t)$, $i = 1, 2$, являются непрерывными положительными функциями, заданными при $t \geqslant 0$; k_i, l_i, $i = 1, 2$, — положительные постоянные. Впрочем, функции $\Psi_i(t)$ могут принимать и нулевые значения.

Введем обозначения

$$k_i/l_i = \lambda_i; \quad f_i(\lambda_i, t) = \Psi_i(t)\, \Phi_i^{-\lambda_i}(t).$$

Пусть $\lambda > 0$ — некоторое число, а $t \geqslant t_0$, таково, что $V(t, p_0, t_0) \neq 0$. Умножим обе части равенства (2.12) на $V^{-\lambda}(t, p_0, t_0)$ и проинтегрируем в пределах от t_0 до $t > t_0$, тогда при $\lambda \in (0, 1)$ получим равенство

$$V(t, p_0, t_0) = \sqrt[1-\lambda]{V_{t_0}(p_0)^{1-\lambda} + (1-\lambda)\int_{t_0}^{t} W(\tau, p_0, t_0)\, V^{-\lambda}(\tau, p_0, t_0)\, d\tau}. \tag{2.13}$$

При $\lambda = 1$ будем иметь равенство

$$V(t, p_0, t_0) = V_{t_0}(p_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} W V^{-1} d\tau}; \tag{2.14}$$

при $\lambda > 1$

$$V(t, p_0, t_0) = \frac{V_{t_0}(p_0)}{\sqrt[\lambda-1]{1 + V_{t_0}(p_0)^{\lambda-1}(1-\lambda)\int\limits_{t_0}^{t} WV^{-\lambda}\,d\tau}}. \tag{2.15}$$

Рассмотрим ряд следующих случаев:

1°. $\lambda_i > 1$, $i = 1, 2$. Применяя неравенства (2.10) и (2.11) к равенству (2.15), получаем неравенство

$$\frac{V_{t_0}(p_0)}{\sqrt[\lambda_1-1]{1 + (\lambda_1 - 1)V_{t_0}(p_0)^{\lambda_1-1}\int\limits_{t_0}^{t} f_1(\lambda_1, \tau)\,d\tau}} \leqslant V(t, p_0, t_0) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{V_{t_0}(p_0)}{\sqrt[\lambda_2-1]{1 + (\lambda_2 - 1)V_{t_0}(p_0)^{\lambda_2-1}\int\limits_{t_0}^{t} f_2(\lambda_2, \tau)\,d\tau}}. \tag{2.16}$$

Используя неравенства (2.16) и (2.10), имеем

$$\sqrt[l_2]{\frac{\Phi_1(t_0)\Phi_2^{-1}(t)R_{t_0}(p_0)^{l_1}}{\sqrt[\lambda_1-1]{1 + (\lambda_1 - 1)\left(\Phi_2(t_0)R_{t_0}(p_0)^{l_2}\right)^{\lambda_1-1}\int\limits_{t_0}^{t} f_1(\lambda_1, \tau)\,d\tau}}} \leqslant$$

$$\leqslant R(t, t_0, p_0) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[l_1]{\frac{\Phi_2(t_0)\Phi_1^{-1}(t)R_{t_0}(p_0)^{l_2}}{\sqrt[\lambda_2-1]{1 + (\lambda_2 - 1)\left(\Phi_1(t_0)R_{t_0}(p_0)^{l_1}\right)^{\lambda_2-1}\int\limits_{t_0}^{t} f_2(\lambda_2, \tau)\,d\tau}}}. \tag{2.17}$$

Здесь R_t, как и в дальнейшем, есть семейство функционалов, обладающих свойством (2.9). Будем далее через $N_1(t, p_0, t_0)$ обозначать левую часть неравенства (2.17), а через $N_2(t, p_0, t_0)$ — правую часть этого неравенства.

2°. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Применяя неравенства (2.10), (2.11) к соотношению (2.14), получаем неравенство

$$V_{t_0}(p_0)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} f_1(1, \tau)\,d\tau\right) \leqslant$$

$$\leqslant V(t, p_0, t_0) \leqslant V_{t_0}(p_0)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} f_2(1, \tau)\,d\tau\right). \tag{2.18}$$

Применим вновь неравенство (2.10) к неравенству (2.18), тогда найдем

$$\sqrt[l_2]{\Phi_2(t)^{-1}\Phi_1(t_0)R_{t_0}(p_0)^{l_1}\exp\left(-\int_{t_0}^{t} f_1(1,\tau)\,d\tau\right)} \leqslant$$

$$\leqslant R(t, p_0, t_0) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[l_1]{\Phi_1(t)^{-1}\Phi_2(t_0)R_{t_0}(p_0)^{l_2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t} f_2(1,\tau)\,d\tau\right)}. \quad (2.19)$$

Обозначим левую часть неравенства (2.19) через $P_1(t, p_0, t_0)$, а правую часть — через $P_2(t, p_0, t_0)$.

3°. $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2$. Применим те же неравенства к соотношению (2.13):

$$\sqrt[1-\lambda_1]{V_{t_0}(p_0)^{1-\lambda_1} - (1-\lambda_1)\int_{t_0}^{t} f_1(\lambda_1,\tau)\,d\tau} \leqslant V(t, p_0, t_0) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[1-\lambda_2]{V_{t_0}(p_0)^{1-\lambda_2} - (1-\lambda_2)\int_{t_0}^{t} f_2(\lambda_2,\tau)\,d\tau}. \quad (2.20)$$

Разумеется, последнее неравенство имеет место, когда подкоренное выражение положительно и $V(t, p_0, t_0) \neq 0$. Применим к (2.20) вновь неравенство (2.10):

$$\sqrt[l_2]{\Phi_2(t)^{-1}\sqrt[1-\lambda_1]{\left(\Phi_1(t_0)R_{t_0}(p_0)^{l_1}\right)^{1-\lambda_1} - (1-\lambda_1)\int_{t_0}^{t} f_1(\lambda_1,\tau)\,d\tau}} \leqslant$$

$$\leqslant R(t, p_0, t_0) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[l_1]{\Phi_1(t)^{-1}\sqrt[1-\lambda_2]{\left(\Phi_2(t_0)R_{t_0}(p_0)^{l_2}\right)^{1-\lambda_2} - (1-\lambda_2)\int_{t_0}^{t} f_2(\lambda_2,\tau)\,d\tau}}. \quad (2.21)$$

Обозначим через $Q_1(t, p_0, t_0)$ левую часть неравенства (2.21), а через $Q_2(t, p_0, t_0)$ — правую часть.

4°. $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 > 1$. Аналогично, используя соотношения (2.14) и (2.15) и неравенства (2.10) и (2.11), найдем

$$N_1(t, p_0, t_0) \leqslant R(t, p_0, t_0) \leqslant P_2(t, p_0, t_0). \quad (2.22)$$

5°. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 > 1$. Применяя к соотношениям (2.14) и (2.15) неравенства (2.10) и (2.11), получаем

$$P_1(t, p_0, t_0) \leqslant R(t, p_0, t_0) \leqslant N_2(t, p_0, t_0). \quad (2.23)$$

6°. При $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 < 1$ имеем

$$N_1(t, p_0, t_0) \leqslant R(t, p_0, t_0) \leqslant Q_2(t, p_0, t_0). \tag{2.24}$$

7°. При $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 > 1$ имеем

$$Q_1(t, p_0, t_0) \leqslant R(t, p_0, t_0) \leqslant N_2(t, p_0, t_0). \tag{2.25}$$

8°. При $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 < 1$ имеем

$$P_1(t, p_0, t_0) \leqslant R(t, p_0, t_0) \leqslant Q_2(t, p_0, t_0). \tag{2.26}$$

9°. При $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 < 1$ имеем

$$Q_1(t, p_0, t_0) \leqslant R(t, p_0, t_0) \leqslant P_2(t, p_0, t_0). \tag{2.27}$$

Замечание. Все полученные здесь неравенства имеют место лишь до тех пор, пока выполнены условия: 1) определена функция $V(t, p_0, t_0)$ для всех $t \geqslant t_0$, пока $V(t, p_0, t_0) \neq 0$; 2) подкоренные выражения, встречающиеся в оценках, неотрицательны.

В тех случаях, когда в неравенствах справа стоит Q_2 или слева Q_2, движение $F_{t_0}^t(p_0)$ может в конечное время войти в инвариантное множество M.

4. Обозначим через $S_j(t, p_0, t_0)$ функцию, стоящую в правой части неравенства в j-м случае ($j = 1, \ldots, 9$), т. е. $S_1 = N_2$, $S_2 = P_2$, $S_3 = Q_2$ и т. д.

Теорема 2.7. *Если по любому* $\varepsilon > 0$ *можно указать число* $\delta > 0$ *такое, что при некотором* j *имеет место неравенство* $S_j(t, p_0, t_0) < \varepsilon$ *при* $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и $\rho(p_0, M) < \delta$, *то инвариантное множество* M *устойчиво и любое движение* $F_{t_0}^t(p_0)$ *при достаточно малом* $\rho(p_0, M)$, *а именно таком, чтобы* $\rho(p_0, M) < \delta(\varepsilon)$, где $\varepsilon \leqslant \bar{r}$, *будет удовлетворять оценкам, соответствующим* j*-му случаю, до тех пор пока* $V(t, p_0, t_0) \neq 0$ *и подкоренные выражения неотрицательны.* Величину $\bar{r}$ *можно указать эффективно, пользуясь неравенствами* (2.9).

Доказательство следует из вышеприведенных рассуждений.

Приведем теперь необходимые и достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости, при которых выполнены оценки определенного типа. Предположим, что существуют два однопараметрических семейства функционалов V_t и W_t, обладающих свойствами 1—4, введенными выше: при $l_i = 1$, $i = 1, 2$; $k_i = l$, $i = 1, 2$, $\Psi_i = b_i\,\Psi(t)$, $\Phi_i(t) = a_i\Phi(t)$, где a_i, b_i — положительные постоянные, а $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ — непрерывные положительные функции, заданные при $t \geqslant 0$. Впрочем, функция $\Psi(t)$ может принимать и нулевые значения. Вдоль любого движения $F_{t_0}^t(p_0)$, пока выполняются соотношения $F_{t_0}^t(p_0) \in S(M, r)$ и $V(t, p_0, t_0) \neq 0$, при $l \in (0, 1)$ будут иметь место неравенства

$$\Phi(t)^{-1} \sqrt[1-l]{\alpha_1 (\Phi(t_0) R_{t_0}(p_0))^{1-l} - \alpha_2 \int_{t_0}^{t} \Psi(\tau)\,\Phi(\tau)^{-l}\,d\tau} \leqslant R(t, p_0, t_0) \leqslant$$

$$\leqslant \Phi(t)^{-1} \sqrt[1-l]{\beta_1 (\Phi(t_0) R_{t_0}(p_0))^{1-l} - \beta_2 \int_{t_0}^{t} \Psi(\tau)\,\Phi(\tau)^{-l}\,d\tau}, \quad t \geqslant t_0; \tag{2.28}$$

при $l > 1$ — неравенства

$$\frac{\gamma_1 \Phi(t)^{-1} \Phi(t_0) R_{t_0}(p_0)}{\sqrt[l-1]{1 + \gamma_2 (\Phi(t_0) R_{t_0}(p_0))^{l-1} \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\tau) \Phi(\tau)^{-l} d\tau}} \leqslant R(t, p_0, t_0) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_1 \Phi(t)^{-1} \Phi(t_0) R_{t_0}(p_0)}{\sqrt[l-1]{1 + \delta_2 (\Phi(t_0) R_{t_0}(p_0))^{l-1} \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\tau) \Phi(\tau)^{-l} d\tau}}, \quad t \geqslant t_0; \quad (2.29)$$

при $l = 1$ — неравенства

$$\varepsilon_1 \Phi^{-1} \Phi(t_0) R_{t_0}(p_0) \exp\left(-\varepsilon_2 \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\tau) \Phi(\tau)^{-1} d\tau\right) \leqslant R(t, p_0, t_0) \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1 \Phi^{-1} \Phi(t_0) R_{t_0}(p_0) \exp\left(-\sigma_2 \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\tau) \Phi(\tau)^{-1} d\tau\right), \quad t \geqslant t_0. \quad (2.30)$$

Предположим далее, что

$$\int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\tau) \Phi(\tau)^{-l} d\tau \to +\infty \text{ при } t \to +\infty \text{ при некотором } l > 0. \quad (2.31)$$

Теорема 2.8. *Если условие (2.31) выполнено для некоторого l, то для того чтобы существовало два семейства функционалов V_t и W_t обладающих свойствами: 1) для любого элемента $p \in M$ определены функции $V_t(p)$ и $W_t(p)$, заданные при $t \geqslant 0$;*

2) семейство V_t удовлетворяет неравенствам

$a_1 \Phi(t) R_t \leqslant V_t \leqslant a_2 \Phi(t) R_t;$

3) семейство W_t удовлетворяет неравенству

$-b_1 \Psi(t) R_t^l \leqslant W_t \leqslant -b_2 \Psi(t) R_t^l;$

4) функция $V(t, p_0, t_0)$ непрерывно дифференцируема и имеет место равенство $\frac{d}{dt} V_t = W_t$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства (2.30), если $l = 1$, или (2.29), если $l > 1$, или (2.28), если $l \in (0, 1)$, где α_i, β_i, γ_i, δ_i, ε_i, σ_i $(i = 1, 2)$ — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Необходимость. Пусть существуют два семейства функционалов V_t и W_t, удовлетворяющих условиям 1—4 настоящей теоремы. Тогда, как было показано, будет выполнено одно из неравенств (2.28) — (2.30) в зависимости от того будет ли $l > 1$, $l = 1$, $l < 1$.

Достаточность. Пусть указанные неравенства выполнены. Положим

$$W_t = -\Psi(t) R_t^l$$

и

$$V_{t_0}(p_0) = -\int_{t_0}^{+\infty} W(\tau, p_0, t_0)\,d\tau. \qquad (2.32)$$

Пусть $l > 1$, тогда, подставляя в соотношение (2.32) неравенства (2.29), получаем неравенство

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{\gamma_1^l \Phi(t)^{-l} \Phi(t_0)^l R_{t_0}(p_0) \Psi(t)}{\left[1 + \gamma_2 (\Phi(t_0) R_{t_0}(p_0))^{l-1} \int_{t_0}^{t} \Psi(\tau) \Phi(\tau)^{-l}\,d\tau\right]^{\frac{l}{l-1}}}\,dt \leqslant V_{t_0}(p_0) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{+\infty} \frac{\delta_1^l \Phi(t)^{-l} \Phi(t_0)^l R_{t_0}^l(p_0) \Psi(t)}{\left[1 + \delta_2 (\Phi(t_0) R_{t_0}(p_0))^{l-1} \int_{t_0}^{t} \Psi(\tau) \Phi(\tau)^{-l}\,d\tau\right]^{\frac{l}{l-1}}}\,dt. \qquad (2.33)$$

Интегралы, стоящие в обеих частях неравенства (2.33), можно вычислить путем замены: $\Theta = \int_{t_0}^{t} \Psi(t) \Phi(t)^{-l}\,dt$.

В результате будем иметь неравенство $a_1\Phi(t_0)R_{t_0} \leqslant V_{t_0} \leqslant \leqslant a_2\Phi(t_0)R_{t_0}$, где a_1, a_2 — положительные константы, связанные определенным образом с величинами γ_i и δ_i.

Покажем, теперь, что $\frac{dV_t}{dt} = W_t$. Действительно, справедливо соотношение

$$V(t, p_0, t_0) = \int_{t}^{+\infty} -W(\tau, p_0, t_0)\,d\tau,$$

что следует из равенства (2.32), откуда и получаем, что

$$\frac{dV_t}{dt} = W_t.$$

Таким образом, семейство функционалов V_t, определенное при помощи равенства (2.32), удовлетворяет всем условиям теоремы.

Пусть теперь $l = 1$. Подставляя в (2.32) неравенства (2.30), получаем неравенство

$$\varepsilon_1^l \int_{t_0}^{+\infty} \Phi(t)^{-l} \Phi(t_0)^l \Psi(t) R_{t_0}^l(p_0) \times$$

$$\times \exp\left(-\varepsilon_2 l \int_{t_0}^{t} \Psi(\tau) \Phi(\tau)^{-1}\,d\tau\right) dt \leqslant V_{t_0}(p_0) \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1^l \int\limits_{t_0}^{-\infty} \Phi(t)^{-l}\Phi(t_0)^l \Psi(t) R_{t_0}^l(p_0) \times$$
$$\times \exp\left(-\sigma_2 l \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\tau)\Phi(\tau)^{-1}\,d\tau\right)dt. \qquad (2.34)$$

Вычисляя интегралы в неравенстве (2.34), найдем

$$a_1\Phi(t_0)R_{t_0} \leqslant V_{t_0} \leqslant a_2\Phi(t_0)R_{t_0},$$

где a_1, a_2 — положительные постоянные, известным образом связанные с ε_i, σ_i $(i = 1, 2)$. Как и выше, легко показать, что и в этом случае справедливо соотношение

$$dV_t\,/\,dt = W_t.$$

Пусть теперь $0 < l < 1$. Подставляя в (2.33) неравенства (2.28), получаем неравенство

$$\int\limits_{t^0}^{t_1} \Phi(t)^{-l}\left[\alpha_1(\Phi(t_0)R_{t_0}(p_0))^{1-l} - \alpha_2\int\limits_{t_0}^{t}\Psi(\tau)\Phi(\tau)^{-l}\,d\tau\right]^{\frac{l}{1-l}} \times$$
$$\times\Psi(t)\,dt \leqslant V_{t_0}(p_0) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_2}\Phi(t)^{-l}\Bigg[\beta_1(\Phi(t_0)R_{t_0}(p_0))^{1-l} -$$
$$-\beta_2\int\limits_{t_0}^{t}\Psi(\tau)\Phi(\tau)^{-l}\,d\tau\Bigg]^{\frac{l}{1-l}}\Psi(t)\,dt, \qquad (2.35)$$

где величины t_1 и t_2 выбраны так, чтобы левая и правая части неравенства (2.28) обращались в ноль соответственно при $t = t_1$, $t = t_2$, $(t_2 \geqslant t_1)$. В этом случае интеграл, стоящий в равенстве (2.32), берется лишь в конечных пределах, соответствующих тому, чтобы $R(t, p_0, t_0) \neq 0$. Вычисляя интегралы, стоящие в неравенстве (2.35), окончательно получаем

$$a_1\Phi(t_0)R_{t_0} \leqslant V_{t_0} \leqslant a_2\Phi(t_0)R_t,$$

где a_2 и a_1 — положительные постоянные, известным образом связанные с α_i, β_i $(i = 1, 2)$. ■

Следствие 1. *Обозначим через* $U(t, p_0, t_0)$ *правую часть одного из неравенств* (2.28) — (2.30).

Если по любому $\varepsilon > 0$ *можно указать* $\delta > 0$ *такое, что при* $\rho(p_0, M) < \delta$ *будет* $U(t, p_0, t_0) < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, *то инвариантное множество* M *устойчиво. Если к тому же* $U(t, p_0, t_0) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *то инвариантное множество* M *асимптотически устойчиво.*

Следствие 2. *Если при* $l \in (0, 1)$ *множество* M *устойчиво, то любое движение входит в множество* M *в конечное время и остается там.*

Следствие 3. *Если множество* M *устойчиво* (см. следствие 1), *то при наличии двух семейств функционалов* V_t и W_t, *заданных в области* $S(M, r)$, $r > 0$ *и удовлетворяющих условию теоремы* 2.8, *для лю-*

бого движения $F_{t_0}^t(p_0)$, начинающегося при достаточно малом $\rho(p_0, M)$, имеет место одна из оценок (2.28) — (2.30) при любом $t \geqslant t_0$ до тех пор, пока $V(t, p_0, t_0) \neq 0$ в случае $l \in (0, 1)$, $t \leqslant t_1$.

5. Сделаем теперь ряд общих замечаний.

Замечание. 1. Первая теорема Ляпунова о неустойчивости позволяет сфомулировать достаточные условия неустойчивости инвариантного множества M в случае общей системы.

Теорема 2.9. *Если существуют два однопараметрических семейства функционалов V_t и W_t, обладающих следующими свойствами: 1) при любом $p \in S(M, r)$, $r > 0$, M — некоторое инвариантное множество общей системы или неполной общей системы, определены функции $V_t(p)$ и $W_t(p)$ вещественного переменного t; 2) для любого $c_1 > 0$ можно указать $c_2 > 0$ такое, что при $\rho(p, M) > c_1$ будет $W_t(p) > c_2$, $t \in [0, +\infty)$; 3) $V_t(p) \to 0$ при $\rho(p, M) \to 0$ равномерно относительно $t \geqslant 0$; 4) при любой величине $\delta > 0$ можно указать точку $p_0 \in R_1$ или в случае общей системы $p_0 \in R$ и такое значение параметра $t_0 \geqslant 0$, что $V_{t_0}(p_0) > 0$, $p_0 \in S(M, \delta)$; 5) функция $V(t, p_0, t_0)$ непрерывно дифференцируема, и имеет место равенство*

$$\frac{dV(t, p_0, t_0)}{dt} = W(t, p_0, t_0) \text{ при всех } t \geqslant t_0$$

пока функция $V(t, p_0, t_0)$ определена, то инвариантное множество M неустойчиво.

Замечания. 2. Теорема 2.1 остается в силе и в случае неполной общей системы. При этом доказательство достаточности условий, сформулированных в теореме, сохраняется дословно с одним лишь упоминанием о том, что движение $F_{t_0}^t(p_0)$ определено при $p_0 \in R_1$. При доказательстве необходимости в случае неполной общей системы формула (2.5) определяет искомое семейство функционалов не во всей окрестности множества M. Однако определенный при помощи формулы (2.5) функционал можно распространить на некоторую достаточно малую окрестность множества M, например, следующим образом. На множестве точек p таких, что $\rho(p, M) = \varepsilon^1$, положим

$$V_{t_0}(p) = \inf_{\rho(p_0, M) = \varepsilon^1} V_{t_0}(p_0),$$

где inf берется по тем точкам p_0, в которых $V_{t_0}^*(p_0)$ уже определено. Изменяя ε^1 непрерывно до нуля, таким образом определим семейство функционалов V_t, заданное в некоторой окрестности множества M.

Легко видеть, что построенное таким образом семейство функционалов будет удовлетворять всем условиям теоремы 2.1.

3. Теоремы 2.2, 2.3 и 2.4 также сохраняются для случая неполных общих систем. При этом доказательства достаточности условий, сформулированных в этих теоремах, остаются в силе. При доказательстве необходимости следует учесть замечание 2.

4. Теоремы 2.5 и 2.6, как и предыдущие, переносятся на случай неполных общих систем. При этом доказательство достаточности условий, как и выше, остается неизменным. Функционалы, построенные при доказательстве необходимости в этих теоремах, в случае неполной общей системы определены не во всей достаточно малой окрестности множества M. Однако их можно доопределить таким образом, чтобы выполнялись все условия этих теорем.

Теоремы 2.7 и 2.8 основаны на знании поведения функционалов лишь вдоль движений, поэтому они также сохраняют силу и в случае неполной общей системы.

§ 3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Экстремум. Градиент. — Непрерывная минимизация. — Учет ограничений. — Решение алгебраических уравнений. — Отыскание экстремума. — Седловые точки. — Численная реализация алгоритмов

1. Решение проблемы отыскания экстремума функций многих переменных имеет фундаментальное значение для всей современной техники и экономики. Настоящий параграф посвящается изложению методов отыскания точек, в которых функция многих переменных достигает минимального значения.

Пусть функция $f_0(x_1, \ldots, x_n)$, принимающая вещественное значение, задана при любых вещественных значениях своих аргументов. Будем считать эту функцию в дальнейшем непрерывно дифференцируемой при всех конечных значениях $x_1, \ldots, x_n$.

Определение 3.1. Будем говорить, что в точке $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ функция f_0 имеет *минимум*, если можно указать такое число $\varepsilon > 0$, что при всех значениях $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{s=1}^{n} (x_s - x_s^{(0)})^2 < \varepsilon, \tag{3.1}$$

будет выполнено неравенство

$$f_0(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \leqslant f_0(x_1, \ldots, x_n); \tag{3.2}$$

при этом точку $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ называют *точкой строгого минимума*, если для всех точек $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию (3.1) и не совпадающих с точкой $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, неравенство (3.2) имеет место в строгом смысле.

Определение 3.2. Будем говорить, что в точке $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ функция $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ принимает *наименьшее возможное значение*, если неравенство (3.2) имеет место при любом выборе величин $(x_1, \ldots, x_n)$. При этом точку $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ называют *оптимальной точкой* функции f_0, а значение функции в этой точке называется *оптимальным значением*.

Пусть $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ — некоторая точка. Поставим вопрос о том, в каком направлении при движении точки из $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ функция f_0 возрастает с наибольшей скоростью. Известно, что такое направление определяется направлением *градиента* функции f_0, т. е. вектором, компонентами которого служат частные производные f_0, вычисленные в точке $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$,

$$\partial f_0/\partial x_1, \ldots, \partial f_0/\partial x_n.$$

Действительно, если направление луча, выходящего из точки $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, определить вектором $z = (l_1, \ldots, l_n)$, то уравнение этого луча можно представить в виде

$$x_s = \bar{x}_s + l_s t, \quad s = 1, \ldots, n, \quad t \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Скорость возрастания функции f_0 вдоль луча (3.3) в точке $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ определяется формулой

$$\left.\frac{df_0}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{s=1}^{n} l_s \frac{\partial f_0}{\partial x_s} (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n). \qquad (3.4)$$

Ясно, что правая часть (3.4) имеет наибольшее значение при

$$l_s = \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_s}\right) \Big/ \sqrt{\sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_s}\right)^2}, \quad s = 1, \ldots, n. \qquad (3.5)$$

При этом считается, что вектор z, определяющий направление луча (3.3), удовлетворяет условию $\sum_{s=1}^{n} l_s^2 = 1$.

Формула (3.5) дает выражение компонент единичного вектора, направленного по градиенту функции f_0. Очевидно, что направление, в котором функция f_0 при движении из точки $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ имеет наибольшую скорость убывания, обратно направлению вектора (3.5). Это свойство градиента f_0 положено в основу ряда методов численного отыскания точек, в которых f_0 имеет минимум. Остановимся на некоторых широко распространенных методах такого рода.

Метод наискорейшего спуска. Для того чтобы осуществить метод наискорейшего спуска, необходимо вычислить градиент функции f_0. Это вычисление проводится приближенно по формулам

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_s} (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \approx \frac{f_0(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{s-1}, \bar{x}_s + h, \bar{x}_{s+1}, \ldots, \bar{x}_n) - f_0(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{h},$$
$$s = 1, \ldots, n, \qquad (3.6)$$

где $h > 0$ есть некоторая постоянная. Из (3.6) вытекает, что для отыскания приближенного значения градиента функции f_0 необходимо вычислить $n+1$ значение функции f_0. Это обстоятельство оказывается в ряде практических случаев весьма существенным. С помощью градиента (3.6) строим луч

$$x_s = \bar{x}_s - t h_s, \quad s = 1, \ldots, n, \qquad (3.7)$$

где h_s — правая часть формулы (3.6), $t \geqslant 0$. Выберем некоторое число $\delta > 0$ и будем последовательно проводить вычисление функции f_0 на луче (3.7) в точках $t = \delta$, $t = 2\delta$, ..., сравнивая значение функции в этих точках между собой. Вычисления ведутся до тех пор, пока найдется число k_0 такое, что выполняются неравенства

$$f_0(\bar{x}_1 - \delta(k_0 - 1) h_1, \ldots, \bar{x}_n - \delta(k_0 - 1) h_n) \geqslant$$
$$\geqslant f_0(\bar{x}_1 - \delta k_0 h_1, \ldots, \bar{x}_n - \delta k_0 h_n) \leqslant f_0(\bar{x}_1 - \delta(k_0 + 1) h_1, \ldots, \bar{x}_n -$$
$$- \delta(k_0 + 1) h_n).$$

В том случае, когда в первой точке $t = \delta$ значение функции оказывается больше, чем в точке $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, число δ заменяют на $\delta/2$. Итак, пусть точка $t = k_0\delta$ построена, т. е.

$$x_s = \bar{x}_s - k_0\delta h_s, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Далее эту точку принимают за исходную, вычисляют в ней градиент функции f_0 и ищут минимальное значение функции на луче, проведенном в направлении, обратном градиенту, и т. д.

Метод градиента. В отличие от рассмотренного этот метод не предполагает отыскания числа k_0. Делается единственный шаг δ по лучу (3.7), и, если значение функции уменьшается, полученная точка принимается за исходную; в ней вычисляется градиент и снова делается шаг δ по лучу (3.7). Если при этом значение функции на каком-либо шаге не уменьшается, число δ заменяют на $\delta/2$ и процесс вычисления продолжается.

Метод случайных направлений. Как было отмечено, для применения градиента функции требуется на каждом шагу вычислений не менее чем $n + 1$ раз определять значение функции. Метод случайных направлений свободен от этого недостатка, но обладает известной нерегулярностью. Выберем начальную точку $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ и l случайных векторов $H_1, \ldots, H_l$. С помощью этих векторов построим l-мерное многообразие, содержащее точку $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$:

$$x_s = \bar{x}_s + \sum_{i=1}^{l} t_i h_{si}, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{3.8}$$

$t_i \in (-\infty, +\infty)$, h_{si} — компоненты векторов H_i. На этом многообразии функция f_0 становится функцией l переменных $t_1, \ldots, t_l$:

$$\bar{f}_0(t_1, \ldots, t_l) = f_0\left(\bar{x}_1 + \sum_{i=1}^{l} t_i h_{1i}, \ldots; \bar{x}_n + \sum_{i=1}^{l} t_i h_{ni}\right). \tag{3.9}$$

Функцию $\bar{f}_0$ минимизировать, вообще говоря, легче. Пусть каким-либо образом, например с помощью предыдущих методов, найдена точка $(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_l)$ такая, что справедливо неравенство $f_0(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_l) < f_0(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$. Тогда точку

$$x_s = \bar{x}_s + \sum_{i=1}^{l} \bar{t}_i h_{si}, \quad s = 1, \ldots, n,$$

берут в качестве начальной, строят новые l случайных направлений, через упомянутую точку проводят l-мерную гиперплоскость и процесс вычисления повторяется. Компоненты векторов H_i на каждом шаге выбираются как случайные числа, распределенные по какому-либо закону. В ряде случаев при достаточно большом n этот метод оказывается предпочтительней предыдущих.

Итеративный метод. Отличие этого метода от предыдущего в основном сводится к тому, что направления выбираются не случайно, а задаются и остаются неизменными во все время вычислений. Задаются n линейно независимых векторов $H_1, \ldots, H_n$. Фиксируется число $l < n$ и нумеруются последовательности чисел $i_1, \ldots, i_l$, $i_j = 1, \ldots, n$, $i_j \neq i_k$, $k \neq j$, числами натурального ряда $1, 2, \ldots, C_n^l$. Первый шаг вычислений состоит в следующем: выбирается начальная точка $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, через нее проводится гиперплоскость

$$x_s = \bar{x}_s + \sum_{j=1}^{l} t_j h_{si_{j_1}}, \quad s = 1, \ldots, n.$$

В этой гиперплоскости функция f_0 превращается в функцию l переменных. После минимизации ее каким-либо способом в этой гиперплоскости получается точка $(\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_n)$, которая принимается за начальную. Через нее проводится гиперплоскость вида

$$x_s = \bar{\bar{x}}_s + \sum_{j=1}^{l} t_j h_{si_{j_2}}, \quad s = 1, \ldots, n.$$

На третьем шаге используется третий набор независимых векторов $H_1, \ldots, H_{i_{j_3}}$ и т. д.

Поиск минимума функции f_0 двумя последними методами имеет особенно наглядный вид, когда $l = 1$. В этом случае минимизацию каждый раз нужно проводить для функции одной переменной, в которую обращается функция f_0 на прямой, проходящей через точку $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$. Минимальное значение функции на прямой можно искать методом наискорейшего спуска.

2. Перейдем теперь к рассмотрению непрерывных способов минимизации функций многих переменных. С этой целью рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= f_s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n); \\ y_s &= \frac{\partial f_0}{\partial x_s}(x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Теорема 3.1. Пусть 1) *функции* f_s, $s = 1, \ldots, n$ *заданы при любых вещественных значениях своих аргументов, вещественны и непрерывно дифференцируемы по своим аргументам*; 2) *градиент функции* f_0 *обращается в ноль в единственной точке, являющейся оптимальной точкой функции* f_0; 3) $f_s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0$ *лишь при* $y_1 = \ldots = y_n = 0$; 4) *интегральные кривые системы* (3.10) *продолжимы при* $t \in (-\infty, +\infty)$; 5) *функция* $W = \sum_{s=1}^{n} y_s f_s$ *отрицательно определена и при* $\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \to +\infty$ *окончательно удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{s=1}^{n} y_s f_s < \alpha < 0, \quad \alpha = \mathrm{const}.$$

Тогда любая интегральная кривая

$$x_s = x_s(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \quad s = 1, \dots, n, \tag{3.11}$$

системы (3.10) *такая, что* $x_s = \bar{x}_s$ *при* $t = 0$, *обладает свойством* $x_s \to x_s^{(0)}$ *при* $t \to +\infty$, *где* $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ — *оптимальная точка функции* f_0.

Доказательство. Предположим, что точка $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ найдена. Покажем тогда, что теорема 3.1 имеет место. Иначе говоря, для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать число $T(\varepsilon) > 0$ такое, что при $t \geqslant T(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{s=1}^{n} (x_s(t) - x_s^{(0)})^2 < \varepsilon.$$

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы $f_0(x_1, \dots, x_n) < \lambda$ при

$$\sum_{1}^{n} (x_s - x^{(0)})^2 < \delta, \quad \lambda = \inf_{\sum (x_s - x_s^{(0)})^2 \geqslant \varepsilon} f_0(x_1, \dots, x_n).$$

Покажем, что существует число $T > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\sum_{s=1}^{n} (x_s(T) - x_s^{(0)})^2 < \delta.$$

Действительно, если такого $T > 0$ не существует, то будет справедливо следующее рассуждение. Подставим уравнение интегральной кривой (3.11) в функцию f_0 и продифференцируем ее по времени. Получим тождество

$$\mathrm{d}f_0/\mathrm{d}t = W. \tag{3.12}$$

Из предположений теоремы следует существование $\alpha_1 < 0$ такого, что будет иметь место неравенство $\mathrm{d}f_0/\mathrm{d}t \leqslant \alpha_1$ при всех $t \geqslant 0$. Следовательно, $f_0 \leqslant f_0(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \alpha_1 t$. Последнее неравенство показывает, что f_0 на интегральной кривой (3.11) неограниченно убывает, что невозможно. Из этого вытекает, что число T существует.

Покажем теперь, что при $t > T$ справедливо неравенство

$$\sum_{s=1}^{n} (x_s(t) - x_s^{(0)})^2 < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Очевидно, что вдоль интегральной кривой (3.11) при $t \geqslant T$ имеет место неравенство

$$f_0(x_1(t), \dots, x_n(t)) \leqslant f_0(x_1(T), \dots, x_n(T)) < \lambda. \tag{3.14}$$

Если бы неравенство (3.13) нарушалось при некотором $t=\bar{t}$, то для момента времени выполнялось бы неравенство $f_0(x_1(\bar{t}), \ldots, x_n(\bar{t}))\geqslant\lambda$, что противоречит неравенству (3.14). Таким образом, неравенство (13.13) имеет место при всех $t\geqslant T$, следовательно, T можно взять в качестве числа $T(\varepsilon)$. ■

Следствие 1. *Если градиент функции f_0 обращается в ноль в единственной точке, являющейся оптимальной точкой функции f_0, и имеет место неравенство*

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_s}\right)^2>\alpha_1>0 \text{ при } \sum_{s=1}^{n}x_s^2\to+\infty,$$

то любая интегральная кривая

$$x_s=x_s(t),\quad s=1,\ldots,n, \tag{3.15}$$

системы

$$\mathrm{d}x_s/\mathrm{d}t=-\partial f_0/\partial x_s,\quad s=1,\ldots,n, \tag{3.16}$$

обладает свойством $x_s(t)\to x_s^{(0)}$ при $t\to+\infty$.

Вообще говоря, интегральная кривая (3.15) может достигать оптимальной точки за конечное время. При этом дополнительно предполагается, что частные производные функции f_0 удовлетворяют условию Липшица.

Если в системе (3.16) сделать замену независимой переменной t по формуле

$$\mathrm{d}t\left[1+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_s}\right)^2\right]=\mathrm{d}\tau,$$

то получится система дифференциальных уравнений, удовлетворяющая всем условиям теоремы 3.1. Последняя замена независимой переменной нужна лишь для того, чтобы интегральные кривые системы (3.16) стали продолжимыми по отношению к $\tau\in(-\infty,+\infty)$. Любое решение преобразованной системы будет обладать свойством $x_s(\tau)\to\to x_s^{(0)}$ при $\tau\to+\infty$. Следовательно, и любое решение системы (3.16) будет обладать таким же свойством. ■

Следствие 2. *Если функция f_0 достигает в некоторой точке $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ минимума, то эта точка для системы (3.16) является устойчивой по Ляпунову. Если же в достаточно малой ее окрестности градиент функции f_0 не обращается в ноль нигде, за исключением самой точки, то точка $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ будет асимптотически устойчивой. И наконец, если* grad f_0 *обращается в ноль в единственной точке и выполнены условия следствия 1, то оптимальная точка функции f_0 будет асимптотически устойчивой в целом.*

Пример 1. Пусть 1) функция f_0 дважды непрерывно дифференцируема и имеет вид

$$f_0=a+\sum_{s=1}^{n}a_sx_s+\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}x_jx_k+\mu f(x_1,\ldots,x_n),$$

где $a, a_1, \ldots, a_n, a_{jk}$ — постоянные числа; μ — малый параметр; 2) квадратичная форма $\Sigma a_{jk}x_jx_k$ — положительно определенная.

Тогда любое решение системы

$$\frac{dx_s}{dt} = -a_s - 2\sum_{j=1}^{n} a_{sj}x_j - \mu\,\frac{\partial f}{\partial x_s}, \quad s = 1, \ldots, n,$$

при $\mu = 0$ будет стремиться к точке $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, которая при $\mu = 0$ является оптимальной точкой функции f_0. При достаточно малом μ любое решение системы, начинающееся в достаточно малой окрестности точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, будет стремиться к точке $(x_1^{(0)}(\mu), \ldots, x_n^{(0)}(\mu))$, в которой функция f_0 имеет минимум.

3. Обратимся теперь к рассмотрению проблемы минимизации функций многих переменных при наличии ограничений. Рассмотрим ограничения вида

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{3.17}$$

Определение 3.3. Точку $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ назовем *точкой минимума функции* $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ *при условии* (3.17), если существует $\varepsilon > 0$ такое, что при всех $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию (3.17) и условию

$$\sum_{s=1}^{n} (x_s - x_s^{(0)})^2 < \varepsilon, \tag{3.18}$$

будет выполняться неравенство

$$f_0(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) < f_0(x_1, \ldots, x_n). \tag{3.19}$$

Определение 3.4. Точку $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ назовем *оптимальной точкой* функции f_0 *при условии* (3.17), если неравенство (3.19) имеет место при любых $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию (3.17).

Пусть $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ — некоторая точка, удовлетворяющая условию (3.17). Поставим вопрос: при движении в каком направлении из точки $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, совместимом с условием (3.17), функция $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ имеет наибольшую скорость возрастания? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть функции* f_j, $j = 0, \ldots, l$, *непрерывно дифференцируемы. Тогда направление, в котором скорость возрастания функции* f_0 *будет наибольшей при движении из точки* $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, *дается направлением проекции* $\operatorname{grad} f_0$ *на ортогональное дополнение подпространства, натянутого на систему векторов* $\operatorname{grad} f_1$, $\operatorname{grad} f_2$, ..., $\operatorname{grad} f_l$. *При этом рассматриваются только направления, совместимые с условием* (3.17).

Доказательство. Возьмем некоторую дифференцируемую кривую $x_s = x_s(t)$, $s = 1, \ldots, n$, проходящую через точку $x_s = \bar{x}_s$ при $t = 0$ и лежащую на многообразии (3.17). Пусть она удовлетворяет соотношениям

$$\frac{dx_s}{dt} = l_s \text{ при } t = 0; \quad s = 1, \ldots, n; \quad \sum_{s=1}^{n} l_s^2 = 1.$$

Задача состоит в том, чтобы выбрать направление, даваемое вектором $L = (l_1, \ldots, l_n)$, так, чтобы выражение $\left.\frac{df_0}{dt}\right|_{t=0}$ имело наибольшее значение.

Из условия (3.17) имеем уравнения

$$\sum_{s=1}^{n} l_s \frac{\partial f_j}{\partial x_s} = 0 \text{ при } t = 0, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{3.20}$$

Из уравнений (3.20) вытекает, что вектор L должен быть ортогонален всему подпространству, натянутому на векторы $\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_l$. Следовательно, вектор L располагается в ортогональном дополнении к этому подпространству. Вектор $\operatorname{grad} f_0$ представим как сумму двух ортогональных векторов:

$$\operatorname{grad} f_0 = \operatorname{grad}_l f_0 + A,$$

где $\operatorname{grad}_l f_0$ есть проекция $\operatorname{grad} f_0$ на ортогональное дополнение упомянутого выше подпространства. Другой вектор A содержится в этом подпространстве. Следовательно, справедливо тождество $LA = 0$, откуда вытекает, что

$$\left.\frac{df_0}{dt}\right|_{t=0} = L \operatorname{grad} f_0 = L \operatorname{grad}_l f_0. \tag{3.21}$$

Из (3.21) следует, что df_0/dt при $t = 0$ имеет наибольшее значение при $L = \operatorname{grad}_l f_0 / |\operatorname{grad}_l f_0|$.

Найдем фактическое представление $\operatorname{grad}_l f_0$. Имеем равенство

$$A = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \operatorname{grad} f_j,$$

следовательно, справедливо соотношение

$$\operatorname{grad}_l f_0 = \operatorname{grad} f_0 - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \operatorname{grad} f_j. \tag{3.22}$$

Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ определяются из условия ортогональности вектора (3.22) к векторам $\operatorname{grad} f_j$. Отсюда получаем систему l алгебраических уравнений для определения $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$:

$$(\operatorname{grad} f_j, \operatorname{grad} f_0) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (\operatorname{grad} f_j, \operatorname{grad} f_i), \quad j = 1, \ldots, l. \tag{3.23}$$

Без ограничения общности можно считать, что векторы $\operatorname{grad} f_j$, $j = 1, \ldots, l$, линейно независимы в точке $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, ибо в противном случае из них можно было бы выбрать линейно независимую систему. Матрицу системы (3.23) обозначим через C; ее определитель не обращается в ноль. Пусть R — матрица, столбцами которой являются векторы $\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_l$. Тогда вектор $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ можно представить в форме

$$\Lambda = C^{-1} R^* \operatorname{grad} f_0. \tag{3.24}$$

Знак * означает транспонирование матрицы. Из системы (3.24) вытекает, что величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ являются функциями переменных $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. ■

Теорема 3.3. *Пусть* 1) *функция* f_0 *при условии* (3.17) *имеет оптимальное значение в некоторой точке* $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$; 2) *вектор* $\mathrm{grad}_l f_0$ *обращается в ноль при условии* (3.17) *лишь в одной точке* $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $|\mathrm{grad}_l f_0| > \alpha > 0$ *при* $\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \to +\infty$.

Тогда любая интегральная кривая $x_s = x_s(t)$, $s = 1, \ldots, n$, системы

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{\partial f_0}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_s}, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{3.25}$$

такая, что $x_s = \bar{x}_s$ *при* $t = 0$, $s = 1, \ldots, n$, и $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ *удовлетворяет ограничениям* (3.17), *обладает свойством* $x_s(t) \to x_s^{(0)}$ *при* $t \to +\infty$, $s = 1, \ldots, n$*).

Доказательство. Каждая из функций f_j, определяемая формулой (3.17), является интегралом системы (3.25). Следовательно, любая интегральная кривая, начинающаяся в точке $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, удовлетворяющей условию (3.17), во все время движения будет удовлетворять этому же условию. Вычислим полную производную от функции f_0 в силу системы (3.25):

$$\frac{df_0}{dt} = -(\mathrm{grad}\, f_0, \mathrm{grad}_l f_0) = -(\mathrm{grad}\, f_0 - A, \mathrm{grad}_l f_0) = -(\mathrm{grad}_l f_0)^2.$$

Предположим, что любое движение системы (3.25) продолжимо при $t \in [0, \infty)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует число $T(\varepsilon) > 0$ такое, что при $t > T(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{s=1}^{n} (x_s(t) - x_s^{(0)})^2 < \varepsilon.$$

Доказательство этого факта осуществляется точно так же, как и в теореме 3.1, с тем лишь изменением, что числа λ и δ определяются с учетом условия (3.17). Следовательно, теорему 3.3 можно считать доказанной. ■

4. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Будем считать что функции f_s вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и заданы при всех конечных, вещественных значениях своих аргументов.

*) Вообще говоря, интегральная кривая может достигать оптимальной точки в конечное время. Здесь предполагается также, что правые части системы (3.25) удовлетворяют условию Липшица.

Поставим вопросы: при каких условиях система (3.26) имеет решение? когда это решение является единственным и как его найти с наперед заданной степенью точности?

Наряду с системой (3.26) рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dX/dt = Pf, \tag{3.27}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $P = -\{\partial f/\partial X\}^*$. Точки покоя системы (3.27) совпадают с решениями системы (3.26), если матрица P — неособая. Это обстоятельство лежит в основе ответов, которые можно дать на поставленные выше вопросы, опираясь на исследование движений системы (3.27).

Теорема 3.4. *Если* 1) *правая часть системы* (3.27) *удовлетворяет условию Липшица по переменным* $(x_1, \ldots, x_n)$; 2) *существуют положительные числа* $r_1 < r_2$ *такие, что*

$$\max_{\|X\|=r_1} f^2 < \min_{\|X\|=r_2} f^2, \quad f^2 > 0 \text{ при } \|X\| \geqslant r_1;$$

3) *матрица* P *— неособая, то в области* $\|X\| < r_1$ *существует единственное положение равновесия системы* (3.27), *являющееся единственным решением уравнения* (3.26) *в упомянутой области. При этом любое решение системы* (3.27)

$$X = X(t, X_0), \quad X = X_0 \text{ при } t = 0, \tag{3.28}$$

начинающееся в области $\|X_0\| < r_1$, *стремится к указанному положению равновесия при неограниченном возрастании времени. Кроме того, это положение равновесия является асимптотически устойчивым по Ляпунову.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $V = f^2$, тогда в силу системы (3.27) будем иметь равенство

$$dV/dt = W = -2[Pf]^2. \tag{3.29}$$

На любом решении (3.28) функция V не возрастает, так как функция W не принимает положительных значений. Поэтому из условия 2 теоремы 3.4 вытекает, что решение (3.28) будет удовлетворять условию $\|X(t, X_0)\| < r_2$ при $t \geqslant 0$ для всех начальных векторов X_0, удовлетворяющих неравенству $\|X_0\| < r_1$.

Покажем сначала, что система (3.26) имеет решение в области $\|X\| < r_2$. Действительно, если это не так, то существует $\alpha > 0$ такое, что в этой области будет $W < -\alpha$. Но тогда на решениях, остающихся в этой области, справедливо неравенство $V(X(t, X_0)) \leqslant \leqslant V(X_0) - \alpha t$. Следовательно, $V \to -\infty$ при $t \to +\infty$, что невозможно, так как функция V ограничена снизу ($V \geqslant 0$). Таким образом, система (3.26) в области $\|X\| < r_2$ имеет по крайней мере одно решение.

Покажем, что таких решений может быть только конечное число. Действительно, если X_1 и X_2 — два каких-либо решения системы (3.26), то будем иметь тождество

$$0 = f(X_2) - f(X_1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f(X_1 + t(X_2 - X_1))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 -P^*(X_1 + t(X_2 - X_1))\,\mathrm{d}t\,(X_2 - X_1). \qquad (3.30)$$

Если X_1 и X_2 достаточно близки, то из условия теоремы 3.3 и непрерывности будет вытекать, что матрица $\int_1^0 P^*(X_1 + t(X_2 - X_1))\mathrm{d}t$ — неособая; но тогда равенство (3.30) может иметь место только при $X_2 = X_1$. Отсюда вытекает, что двух достаточно близких решений, отличных друг от друга, в области $\|X\| < r_2$ система (3.26) не имеет. Следовательно, таких решений может быть разве лишь конечное число.

Из равенства (3.29) вытекает, что каждое решение системы (3.26), расположенное в области $\|X\| < r_2$, будет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Покажем теперь, что в области $\|X\| < r_1$ существует единственное решение системы (3.26). Предположим, что таких решений два, а именно X_1 и X_2. Каждое из этих решений является асимптотически устойчивым положением равновесия системы (3.27). Следовательно, на отрезке, соединяющем эти точки, будет существовать точка $\widetilde{X}$, принадлежащая границе области асимптотической устойчивости точки X_1. Решение

$$X = X\left(t, \widetilde{X}\right) \qquad (3.31)$$

будет оставаться в области $\|X\| < r_2$ и не будет стремиться к какому-либо другому положению равновесия системы (3.27), так как каждое такое положение равновесия асимптотически устойчиво и, следовательно, не может располагаться на границе области устойчивости положения равновесия X_1. Тогда существует $\alpha > 0$ такое, что на решении (3.31) будет $\dot{W} < -\alpha$ при $t \geqslant 0$. Следовательно, на решении (3.31) должно быть $V \to -\infty$, что невозможно. Отсюда вытекает, что точки $\widetilde{X}$ не существует, но тогда $X_1 = X_2$. ■

Следствие 1. *Если $f^2 \to +\infty$ при $\|X\| \to \infty$, то условие 2 будет выполнено при некоторых надлежащим образом выбранных величинах* r_1 и r_2.

Следствие 2. *Если система* (3.26) *линейна*, $f = AX + B$, *то* $P = -A^*$ *и система* (3.27) *имеет вид*

$$\dot{X} = -A^*AX - A^*B. \qquad (3.32)$$

Если матрица A — неособая, то все решения системы (3.32) будут асимптотически приближаться по экспоненте к решению линейной системы $X = -A^{-1}B$.

Если матрица A — неособая и все ее собственные числа имеют отрицательные действительные части, то вместо системы (3.32) можно рассмотреть систему $\dot{X} = AX + B$, решения которой будут обладать тем же свойством.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad k < n. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Будем считать, что функции $f_1, \ldots, f_k$ обладают теми же свойствами, что и в системе (3.26), и векторы $\operatorname{grad} f_j$, $j = 1, \ldots, k$, линейно независимы. Решения системы (3.33) образуют, вообще говоря, некоторое замкнутое многообразие M n-мерного пространства E_n. Требуется дать способ отыскания точек, принадлежащих этому многообразию.

Решение поставленной задачи можно осуществить несколькими путями. Например, можно построить функции $f_{k+1}, \ldots, f_n$ так, чтобы векторы $\operatorname{grad} f_j$, $j = 1, \ldots, n$, были линейно независимыми. Если рассмотреть систему (3.33) и систему

$$f_{k+1} = y_1, \ldots, f_n = y_{n-k}, \tag{3.34}$$

то можно применить теорему 3.4 и для заданных вещественных параметров $y_1, \ldots, y_{n-k}$ построить решение совместной системы (3.33) и (3.34). Придавая упомянутым параметрам различные значения, можно получить упомянутое многообразие M.

Покажем один из способов построения функций $f_{k+1}, \ldots, f_n$. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{X} = U + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \operatorname{grad}^* f_j. \tag{3.35}$$

Выберем величины λ_j в системе (3.35) так, чтобы функции f_j, $j = 1, \ldots, k$, были первыми интегралами системы (3.35). Иначе говоря, чтобы выполнялись тождества

$$\frac{df_j}{dt} \equiv 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{3.36}$$

Подставляя систему (3.35) в тождества (3.36), найдем соотношения

$$\operatorname{grad} f_j U + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\operatorname{grad} f_j, \operatorname{grad}^* f_i) = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{3.37}$$

Если обозначить через Λ вектор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, то из соотношений (3.37) будем иметь равенство

$$\Lambda = -\left(\left\{\frac{df}{dX}\right\}\left\{\frac{df}{dX}\right\}^*\right)^{-1}\left\{\frac{df}{dX}\right\}U. \tag{3.38}$$

Из равенства (3.38) вытекает, что система (3.35) может быть записана в виде

$$\dot{X} = BU, \text{ где } B = E - \left(\left\{\frac{df}{dX}\right\}^* \left\{\frac{df}{dX}\right\}\right)^{-1} \left\{\frac{df}{dX}\right\} \left\{\frac{df}{dX}\right\}^*, \tag{3.39}$$

и справедлива следующая теорема.

Теорема 3.5. *Если начальная точка X_0 лежит в многообразии M, то при любом управлении $U = U(X, t)$ решение $X = X(t, X_0, t_0)$, $X = X_0$ при $t = t_0$ системы* (3.39) *будет оставаться в многообразии M.*

Здесь предполагается, что управление $U(X, t)$ таково, что система (3.39) удовлетворяет условиям теорем существования и единственности решений.

Следствие. *Положим, что $U(X, t) = AX$ и система* (3.39) *имеет первые интегралы $f_1, \ldots, f_k$. В силу теорем существования она будет также иметь первые интегралы $f_{k+1}, \ldots, f_n$, причем такие, что векторы* grad f_j, $j = 1, \ldots, n$, *будут линейно независимыми*).*

Рассмотрим систему

$$\dot{X} = Pf, \quad P = -\left\{\frac{df}{dX}\right\}^*, \quad f = f_1, \ldots, f_k. \tag{3.40}$$

Теорема 3.6. *Если* 1) *правая часть системы* (3.40) *удовлетворяет условию Липшица;* 2) *для любого $\alpha > 0$ достаточно малого, существует $\beta > 0$ такое, что $f^2 > \alpha$ при $\rho(X, M) > \beta$;* 3) *векторы* grad f_j, $j = 1, \ldots, k$ *линейно независимы, то инвариантное множество M системы* (3.40) *асимптотически устойчиво по Ляпунову. Если к тому же существуют два числа $r_2 > r_1 \geq 0$ такие,* что $\max\limits_{\rho(X, M)=r_1} f^2 < \min\limits_{\rho(X, M)=r_2} f^2$, *то все решения системы* (3.40) $X = X(t, X_0)$ *будут обладать свойством* $\rho(X(t, X_0), M) \to 0$, $t \to +\infty$ при $\rho(X_0, M) < r_1$.**)

Доказательство этой теоремы вытекает из условий асимптотической устойчивости инвариантных множеств и рассуждений, проведенных в теореме 3.4. Действительно, возьмем в качестве функции Ляпунова $V = f^2$. Дифференцируя ее в силу системы (3.40), получим уравнение

$$dV/dt = W = -f^* P^* P f.$$

Так как матрица P^*P — неособая, то функция W обращается в ноль только на множестве M решений системы (3.33). Это множество является инвариантным множеством системы (3.40), так как состоит из точек покоя этой системы. ∎

5. Пусть задана функция $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ при $X \in E_n$, вещественная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая. Требуется найти достаточные условия минимума функции и дать способ приближенного отыскания точки минимума.

Необходимые условия минимума даются уравнениями

$$\partial f_0 / \partial x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.41}$$

---

*) Построение интегралов $f_{k+1}, \ldots, f_n$ для системы (3.39) можно осуществить по методу последовательных приближений.

**) Здесь $\rho(X, M) = \inf\limits_{Y \in M} \|X - Y\|$ — расстояние от точки X до множества M.

Будем рассматривать систему (3.41) как систему уравнений для определения величин $x_1, \ldots, x_n$ вне зависимости от проблемы минимума. Обозначим левые части этих уравнений через φ_i и введем в рассмотрение матрицу

$$\pi = -\left\{\frac{d\varphi}{dX}\right\}^*, \text{ где } \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dX/dt = \pi\varphi. \tag{3.42}$$

Из предыдущего известно, что если 1) система (3.42) удовлетворяет условиям существования и единственности решений; 2) существуют положительные числа $r_1 < r_2$ такие, что

$$\max_{\|X\|=r} \varphi^2 < \min_{\|X\|=r_2} \varphi^2, \quad \varphi^2 > 0 \text{ при } \|X\| \geqslant r_1;$$

3) матрица π — неособая, тогда существует единственная точка в области $\|X\| < r_1$, являющаяся решением системы (3.41). При этом для системы (3.42) эта точка будет являться асимптотически устойчивым положением равновесия, так что любое решение $X = X(t, X_0)$, $X = X_0$ при $t = 0$ системы (3.42), начинающееся в области $\|X_0\| < < r_1$, стремится асимптотически к упомянутому положению равновесия при $t \to +\infty$.

Рассмотрим далее уравнение

$$\dot{X} = -\varphi. \tag{3.43}$$

Продифференцируем функцию f_0 полным образом в силу системы (3.43):

$$df_0/dt = -\varphi^2. \tag{3.44}$$

Если система (3.43) удовлетворяет условиям существования и единственности решений и существуют числа $\bar{r}_1 < \bar{r}_2$ такие, что

$$\max_{\|X\|=\bar{r}_1} f_0 < \min_{\|X\|=\bar{r}_2} f_0,$$

а grad f_0 обращается в ноль в области $\|X\| < r_2$ в единственной точке, расположенной в области $\|X\| < r_1$, то все интегральные кривые системы (3.43), начинающиеся в области $\|X\| < r_1$, будут стремиться к положению равновесия системы (3.43) асимптотически при $t \to +\infty$. Это положение равновесия будет асимптотически устойчивым и функция f_0 будет иметь там минимум.

Объединим эти утверждения и сформулируем следующую теорему.

Теорема 3.6′. *Если* 1) *системы* (3.42) *и* (3.43) *удовлетворяют условиям существования и единственности;* 2) *существуют два числа* $r_1 < r_2$ *такие, что*

$$\max_{\|X\|=r_1} \mathrm{grad}^2 \varphi_0 < \min_{\|X\|=r_2} \mathrm{grad}^2 \varphi_0,$$

$$\max_{\|X\|=r_1} f_0 < \min_{\|X\|=r_2} f_0 \text{ и } \operatorname{grad}^2 \varphi_0 > 0 \textit{ при } \|X\| \geqslant r_1;$$

3) *матрица* π — *неособая, тогда в области* $\|X\| < r_1$ *существует единственная точка покоя, асимптотически устойчивая по Ляпунову как для системы* (3.42), *так и для системы* (3.43). *Все решения, начинающиеся в области* $\|X\| < r_1$, *асимптотически стремятся к этой точке покоя, одновременно являющейся точкой минимума функции* f_0.

Замечание. Разумеется, матрица π может становиться особой в найденном положении равновесия.

Рассмотрим проблему условного экстремума функции f_0 при наличии ограничений типа равенств

$$f_j = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{3.45}$$

Будем считать, что функции $f_0, f_1, \ldots, f_k$ заданы при $X \in E_n$, вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы. Кроме того, будем считать, что векторы $\operatorname{grad} f_j$, $j = 1, \ldots, k$, линейно независимы.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{X} = BU, \tag{3.46}$$

где $B = E - \left\{\frac{df}{dX}\right\}^* \left(\left\{\frac{df}{dX}\right\}\left\{\frac{df}{dX}\right\}^*\right)^{-1}\left\{\frac{df}{dX}\right\}$, а $U = -\operatorname{grad}^* f_0$.

Найдем полную производную функции f_0 в силу системы (3.46):

$$df_0/dt = -\operatorname{grad} f_0 B^* B \operatorname{grad}^* f_0. \tag{3.47}$$

Каждая функция, входящая в левую часть (3.45), является первым интегралом системы (3.46), и поэтому любая интегральная кривая, начинающаяся на многообразии (3.45), остается во все время движения на этом многообразии. Это обстоятельство совместно с равенством (3.47) позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.7. *Если* 1) *система* (3.46) *удовлетворяет условиям существования и единственности;* 2) *существуют два числа* $r_1 < r_2$ *такие, что*

$$\max_{\|X\|=r_1} f_0 < \min_{\|X\|=r_2} f_0;$$

3) *система* (3.46) *имеет единственное положение равновесия на многообразии* (3.45), *то это положение равновесия является условно асимптотически устойчивым и одновременно доставляет минимум функции* f_0.

Условие 3 этой теоремы может быть сформулировано несколько другим образом. Иначе говоря, можно найти достаточные условия, при которых это условие выполняется. С этой целью обозначим через $\overline{X}$ ту точку, в которой функция f_0 имеет минимум при условии (3.45). Построим некоторую кривую $X = X(t)$, проходящую через эту точку при $t = 0$ и имеющую касательный вектор ξ в этой точке.

Будем считать, что упомянутая кривая непременно располагается на многообразии (3.45). Тогда вектор ξ удовлетворяет условиям

$$(\operatorname{grad} f_0(\overline{X}),\ \xi) = 0, \tag{3.48}$$

$$(\operatorname{grad} f_j(\overline{X}),\ \xi) = 0,\ j = 1, \ldots, k; \tag{3.49}$$

grad $f_0(\overline{X})$ можно разложить на два ортогональных вектора:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \operatorname{grad} f_j(\overline{X}) \text{ и } \operatorname{grad} f_0 - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \operatorname{grad} f_j(\overline{X}),$$

причем так, что последний вектор будет ортогонален подпространству, натянутому на векторы grad $f_j(\overline{X})$.

Отсюда вытекает, что величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ удовлетворяют линейной алгебраической системе

$$(\operatorname{grad} f_0,\ \operatorname{grad} f_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\operatorname{grad} f_i,\ \operatorname{grad} f_j),\ j = 1, \ldots, k. \tag{3.50}$$

Если обозначить через Λ вектор с компонентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, то получится равенство

$$\Lambda = \left(\left\{\frac{df}{dX}\right\}\left\{\frac{df}{dX}\right\}^*\right)^{-1}\left\{\frac{df}{dX}\right\}\operatorname{grad}^* f_0. \tag{3.51}$$

Пусть вектор ξ имеет вид

$$\xi = \left(\operatorname{grad} f_0 - \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j \operatorname{grad} f_j)\right)^*. \tag{3.52}$$

Легко видеть, что вектор (3.52) удовлетворяет условию (3.49).

Если построить решение системы (3.46) с начальным условием $X = \overline{X}$ при $t = 0$, то это решение будет именно той кривой, для которой выполняются условия (3.48) и (3.49). Легко видеть, что условие (3.48) может быть записано для вектора ξ также в виде

$$\left(\operatorname{grad} f_0 - \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j \operatorname{grad} f_j)\right)^2 = 0. \tag{3.53}$$

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$g = f_0 - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j. \tag{3.54}$$

Тогда условия (3.53) эквивалентны n равенствам

$$\partial g/\partial x_s^r = 0, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{3.55}$$

Будем рассматривать равенства (3.55) и (3.45) совместно. Их можно записать в виде одной системы уравнений

$$g_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n + k;$$

$$g_s = \partial g/\partial x_s, \quad s = 1, \ldots, n,$$

$$g_{n+j} = f_j, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Введем функцию V, имеющую вид

$$V = \sum_{i=1}^{n+k} g_i^2,$$

и рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mathrm{d}x_s/\mathrm{d}t = -\partial V/\partial x_s, \tag{3.56}$$

$$\mathrm{d}\lambda_j/\mathrm{d}t = -\partial V/\partial \lambda_j. \tag{3.57}$$

Если 1) система (3.56), (3.57) удовлетворяет условиям существования и единственности; 2) существуют величины $r_1 < r_2$ такие, что

$$\max_{\|\eta\|=r_1} V < \min_{\|\eta\|=r_2} V, \quad \eta = (x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k),$$

$$V > 0 \text{ при } \|\eta\| \geqslant r_1;$$

3) матрица $\{\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\eta}\}$, $G = (g_1, \ldots, g_{n+k})$, — неособая, то существует единственное решение систем (3.45), (3.55) $X = \overline{X}$, $\lambda = \overline{\lambda}$ в области $\|\eta\| < r_1$. Соединяя эти условия с предыдущими, найдем достаточные условия для существования условного минимума функции f_0.

Замечание. Иногда задачи на условный экстремум формулируются так, что равенства (3.45) заменяются различными неравенствами. В общем случае задачи такого рода можно сформулировать так: *требуется найти минимум функции* $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ *при условии*

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) \in I_j, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{3.58}$$

Здесь через I_j обозначены точечные множества на вещественной прямой, являющиеся конечными или полубесконечными интервалами, которые могут быть как замкнутыми, так и полузамкнутыми, открытыми и полуоткрытыми, а также сводиться к единственной точке.

Покажем, что условия (3.58) могут быть сведены к условиям типа (3.45) путем введения добавочных независимых переменных. С этой целью введем в рассмотрение функции $\varphi_j(z_j)$, заданные при $z_j \in (-\infty, +\infty)$, вещественные, непрерывные и дважды непрерывно дифференцируемые и такие, что множество значений функций $\varphi_j(z_j)$ совпадает с множеством I_j, $j = 1, \ldots, k$. Тогда условие (3.58) может быть записано в виде системы равенств

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) - \varphi_j(z_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{3.59}$$

Ограничения (3.59) имеют такой же вид, как и (3.45), и, следовательно, задача на условный экстремум при условии (3.58) сводится к задаче на условный экстремум функции f_0 при условии (3.59). Функции $\varphi_j(z_j)$ можно выбирать различным образом. Например, если $\varphi(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{1+z^2}$, то значения функции $\varphi(z)$ заполняют замкнутый интервал $[0,1]$. Если $\varphi(z) = e^z/(1 + e^z)$, то значения функции $\varphi(z)$ заполняют интервал $(0,1)$. Если $\varphi(z) = z^2/(1 + z^2)$ то значения функции $\varphi(z)$ заполняют промежуток $[0,1)$. Если $\varphi(z) = 1/(1 + z^2)$, то значения функции $\varphi(z)$ заполняют промежуток $(0,1]$. Наконец, значения функции $\varphi(z) = e^z$ заполняют полубесконечный интервал $(0, +\infty)$ и значения $\varphi(z) = z^2$ заполняют полузамкнутый полубесконечный интервал $[0, +\infty)$. Разумеется, здесь имеется в виду изменение аргумента z от $-\infty$ до $+\infty$.

Заметим, что любые другие интервалы могут быть получены из этих линейным преобразованием независимой переменной z.

6. К задачам экстремума функций многих переменных относят также задачи отыскания седловых точек.

Предположим, что заданная функция

$$f(x_1, \ldots, x_h, y_1, \ldots, y_k) = f(X, Y)$$

при $X \in E_n$, $Y \in E_k$ вещественна, непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема.

Определение 3.5. Точка X_0, Y_0 называется *седловой точкой функции* $f(X, Y)$, если имеет место неравенство

$$f(X_0, Y) \leqslant f(X_0, Y_0) \leqslant f(X, Y_0).$$

Иначе говоря, если функция $f(X, Y_0)$ имеет минимум при $X = X_0$, а функция $f(X_0, Y)$ имеет максимум при $Y = Y_0$, то точка (X_0, Y_0) будет седловой.

Легко видеть, что в этой точке обязательно будет выполнено соотношение

$$\min_X \max_Y f(X,Y) = \max_Y \min_X f(X, Y).$$

Воспользуемся развитой выше теорией для отыскания седловых точек. Введем функцию V, имеющую вид

$$V = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right)^2 + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)^2,$$

и рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= -\partial V/\partial x_s, \quad s = 1, \ldots, n, \\ \dot{y}_j &= -\partial V/\partial y_j, \quad j = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Если X_0, Y_0 есть седловая точка, то из необходимых условий $\min\limits_X$ и $\max\limits_Y$ для функции $f(X, Y_0)$ и соответственно $f(X_0, Y)$ получаем систему уравнений

$$\frac{\partial f(X_0, Y_0)}{\partial x_s} = 0, \quad s = 1, \ldots, n; \quad \frac{\partial f(X_0, Y_0)}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{3.61}$$

Таким образом, седловая точка функции $f(X, Y)$ является точкой покоя для системы (3.60).

Выше были сформулированы достаточные условия существования единственной точки покоя для системы типа (3.60). А именно: если 1) система (3.60) удовлетворяет условиям существования и единственности; 2) существуют положительные числа $r_1 < r_2$ такие, что

$$\max_{\|X\| + \|Y\| = r_1} V < \min_{\|X| + \|Y\| = r_2} V, \quad V > 0 \text{ при } \|X\| + \|Y\| \geqslant r_1;$$

3) матрица $\left\{\frac{dF}{dZ}\right\}$ — неособая, где $F = \left(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}\right)$, $Z = (X, Y)$,

то в области $\|X\| + \|Y\| < r_1$ существует единственное решение системы (3.61), являющееся асимптотическим положением равновесия системы (3.60). Применяя развитую выше теорию к минимизации функции $f(X, Y)$ по X (здесь Y выступает как векторный параметр) и максимизации функции $f(X, Y)$ по Y (здесь X выступает как векторный параметр), можно найти конкретные условия существования и единственности таких точек покоя системы (3.61), которые являются седловыми точками функции $f(X, Y)$.

7. Численная реализация указанных выше алгоритмов отыскания экстремальных точек сводится к численному интегрированию различных систем дифференциальных уравнений. В ряде случаев эти дифференциальные уравнения имеют первые интегралы. Поэтому численные методы должны быть видоизменены таким образом, чтобы уравнения в конечных разностях, реализующие эти вычислительные процедуры, имели те же самые первые интегралы.

Пусть задана система n дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = F(t, X). \tag{3.62}$$

Предположим, что система (3.62) имеет $r < n$ первых интегралов

$$g_s(t, X) = c_s, \quad s = 1, \ldots, r. \tag{3.63}$$

Будем считать, что компоненты векторной функции F, а также векторных функций g_s заданы при $t \in (-\infty, +\infty)$, $X \in E_n$, вещественны и непрерывно дифференцируемы по отношению ко всем своим аргументам.

Рассмотрим сначала некоторую модификацию метода Эйлера численного интегрирования системы (3.62), а именно рассмотрим систему

$$X_{k+1} = X_k + hF(t_k, X_k) + Q(t_k, X_k)U, \tag{3.64}$$

где $U = (u_1, \ldots, u_r)$ — r-мерный вектор, $Q(t_k, X_k)$ — матрица, s-й столбец которой выражается градиентом функции g_s. Именно: $q_s = \operatorname{grad}_X{}^* g_s(t_k, X_k)$. При этом будем считать, что численно строится решение, определяемое условием $X = X_0$ при $t = 0$. Положим $t_k = kh$, тогда $X_k = X(kh)$.

Выберем в разностных уравнениях (3.64) вектор U так, чтобы система (3.64) имела интегралы (3.63) в качестве своих первых интегралов, а именно чтобы выполнялись равенства

$$g_s(t_{k+1}, X_{k+1}) = g_s(t_k, X_k); \quad k = 0, 1, \ldots; \ s = 1, \ldots, r. \tag{3.65}$$

Подставляя систему (3.64) в (3.65), убеждаемся, что (3.65) имеет решение $U = 0$ при $h = 0$ и в то же время якобиан левых частей соотношений (3.65), вычисленный при $h = 0$, $U = 0$, совпадает с определителем матрицы $Q^*(t_k, X_k)Q(t_k, X_k)$.

Таким образом, если этот определитель отличен от нуля, то система (3.65) определяет единственную неявную векторную функцию $U = U(h, t_k, X_k)$, обладающую свойством $U \to 0$ при $h \to 0$. Причем эта функция будет вещественная, заданная при всех достаточно малых h и непрерывно дифференцируемая.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.8. *Если векторы* $\mathrm{grad}_X g_s(t, X)$ *линейно независимы, то вычислительная схема* (3.64), (3.65) *будет сходящейся и интегралы* (3.63) *будут являться также первыми интегралами для системы в конечных разностях* (3.64).

Замечания. 1. Для фактического определения векторной функции U из соотношений (3.65) продифференцируем соотношения (3.65) по h, считая величины t_k, X_k не зависящими от h. Тогда получим систему уравнений

$$\mathrm{grad}_X g_s(t_{k+1}, X_{k+1}) F(t_k, X_k) +$$
$$+ \mathrm{grad}_X g_s(t_{k+1}, X_{k+1}) Q(t_k, X_k) \frac{\partial U}{\partial h} = 0, \quad s = 1, \ldots, r,$$

откуда найдем систему уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial h} = P(h, U, t_k, X_k). \tag{3.66}$$

Система (3.66) может быть разрешена численно с помощью метода Эйлера на промежутке $(0, h)$ с дробным шагом. Таким образом, вычислительная схема (3.64), (3.65) может конкретизироваться указанным выше образом.

2. Совершенно аналогично получаются вычислительные схемы метода Рунге — Кутта и метода Адамса.

Изложим теперь другой подход численного интегрирования системы при наличии интеграла. Разобьем с этой целью систему (3.62) на две подсистемы размерности l и r, $l + r = n + 1$:

$$\frac{dX}{dt} = F_1(X, Y), \quad \frac{dY}{dt} = F_2(X, Y). \tag{3.67}$$

Интегралы (3.63) соответственно запишутся в виде

$$g_s(X, Y) = c_s. \tag{3.68}$$

Будем считать, что векторы X и Y выбраны так, что матрица Якоби

$$\left\{\frac{\partial g_s}{\partial y_j}\right\}_{\substack{s=1, \ldots, r \\ j=1, \ldots, r}}$$

— неособая. При этих условиях система (3.68) будет определять величины $y_1, \ldots, y_r$ как неявные функции переменных $x_1, \ldots, x_l$. Построим для этих функций системы интегральных уравнений

$$Y = Y_0 + \sum_{j=1}^{l} \int_{x_{j_0}}^{x_j} L^j dx_j, \tag{3.69}$$

где $g = (g_1, \ldots, g_r)$, $L^j(X, Y) = -\left\{\frac{\partial g_s}{\partial y_m}\right\}^{-1}_{\substack{s=1,\ldots,r\\ m=1,\ldots,r}} \frac{\partial g(X, Y)}{\partial x_j}$.

Постоянные векторы X_0 и Y_0 являются начальными значениями искомых функций для системы (3.67) при $t = 0$.

Опишем вычислительную схему, основанную на использовании этих интегральных уравнений:

$$X_{k+1} = X_k + hF_1(X_k, Y_k),\ Y_{k+1} = Y_k + \sum_{j=1}^{l} \int_{x_{j_k}}^{x_{j_{k+1}}} L^j \mathrm{d}x_j. \qquad (3.70)$$

Теорема 3.9. *Если интегралы* (3.63) *являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями и матрица Якоби по независимым переменным имеет ранг r, то вычислительная схема* (3.69), (3.70) *является сходящейся**).

Замечания. 1. Интегралы, входящие в правую часть (3.70), можно вычислять в указанной схеме по какой-либо квадратурной формуле.

2. Развитые в этом параграфе численные методы отыскания экстремума функции многих переменных, а также методы отыскания решений алгебраических и трансцендентных уравнений являются в основном новыми. Однако среди них имеются такие, которые обобщают ранее известные методы. Так, например, если рызыскивается решение системы уравнений

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

путем минимизации функции $V = \Sigma f_i^2$ вдоль траекторий системы уравнений

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = -\left\{\frac{\partial f}{\partial X}\right\}^{-1} f(X),$$

то, применяя для ее интегрирования метод Эйлера с шагом $h = 1$, получим хорошо известный метод Ньютона численного отыскания корней. Если найти полную производную функции V в силу этой системы, то окажется, что

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_s} \dot{x}_s = -2V$$

и, следовательно, $V = V_0 e^{-2t}$, что дает очень частный способ минимизации функции V.

§ 4. О НАПРАВЛЕНИЯХ НАИБОЛЬШЕЙ И НАИМЕНЬШЕЙ СКОРОСТИ РОСТА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Допустимые и оптимальные управления. — Связь между различными понятиями оптимальности. — Демпфирование при наличии ограничений

1. Рассмотрим некоторый управляемый объект K. Будем считать, что его состояние полностью характеризуется фазовыми коор-

*) Доказательство теоремы непосредственно вытекает из принципа сжатых отображений.

динатами $x_1, \ldots, x_n$ и управлениями $u_1, \ldots, u_r$. Предположим, что эти величины являются функциями времени и связаны между собой дифференциальными уравнениями

$$dx_s/dt = f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t), \; s = 1, \ldots, n. \quad (4.1)$$

Наряду с системой (4.1) будем использовать ее векторную запись

$$dX/dt = F(X, U, t), \quad (4.2)$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $F = (f_1, \ldots, f_n)$, $U = (u_1, \ldots, u_r)$ — векторы. Естественно предположить, что для любого начального вектора $X^{(1)}$ и управления $U(t)$ существует движение объекта K, определяемое векторной функцией

$$X = X(t, U(t), X^{(1)}, t_1), \quad (4.3)$$

связанное с $U(t)$ системой дифференциальных уравнений (4.2) и удовлетворяющее начальному условию

$$X|_{t=t_1} = X^{(1)}.$$

Обозначим через $X^{(2)}$ то фазовое состояние, которое достигается объектом K в некоторый момент $t_2 > t_1$. Предположим, что управление $U(t)$ и соответствующее ему движение (4.3) с концами $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, заданные при $t \in [t_1, t_2]$, характеризуются значением некоторого функционала

$$I(U, X) = p_0(X^{(1)}, X^{(2)}, t_1, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(X, U, t)\, dt. \quad (4.4)$$

Подынтегральная функция в функционале (4.4) вычисляется на заданном управлении $U(t)$ и соответствующем ему движении (4.3).

Сделаем ряд предположений относительно системы (4.1) и функционала (4.4).

1. Будем считать, что функции f_s, $s = 1, \ldots, n$, f_0 и p_0 заданы при всех вещественных значениях входящих в них аргументов, вещественны и непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам.

2. Будем считать, что управления $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ заданы при $t \in (-\infty, +\infty)$, вещественны и кусочно-непрерывны, при этом число точек разрыва непрерывности конечно и в каждой из них управления имеют левосторонние и правосторонние пределы. Множество всех таких векторных функций U будем обозначать далее через C^0.

Определение 4.1. Управление $U(t)$ будем называть *допустимым*, если оно содержится в некотором заданном множестве G управлений. При этом G будем считать открытым в следующем смысле: если $U \in G$ и t_1, t_2 — некоторые числа, $t_1 < t_2$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что любая функция $\overline{U} \in C^0$, такая что

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{r} \left(u_i(t) - \bar{u}_i(t)\right)^2 dt < \varepsilon,$$

будет также принадлежать множеству G.

Рассмотрим вновь управляемую систему (4.1). Предположим, что множество допустимых управлений G является произвольным подмножеством совокупности C^0. Зададим некоторую функцию $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, принимающую вещественные значения и непрерывно дифференцируемую по всем своим аргументам. Будем считать, что эта функция задана при $t \in (-\infty, +\infty)$ и $x_s \in (-\infty, +\infty)$, $s = 1, 2, \ldots, n$. Возьмем некоторую точку X_1 и момент времени t_1. Тогда каждому управлению $U \in G$ отвечает движение

$$X = X(t, U, X_1, t_1), \tag{4.5}$$

проходящее через точку X_1 при $t = t_1$. При этом векторная функция (4.5) является решением системы уравнений (4.1) при $u_i = u_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$.

Поставим следующий вопрос: по какой траектории (4.5) системы (4.1) следует двигаться из точки (X_1, t_1), чтобы скорость изменения функции V была наибольшей или соответственно наименьшей? Иначе говоря, какому управлению $U \in G$ соответствует движение (4.5), перемещаясь вдоль которого будем иметь наибольшую или соответственно наименьшую скорость изменения функции V.

Такое управление может быть определено следующим образом. Вычислим значение функции V на движении (4.5) и найдем полную производную по t от полученной функции:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{dt} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s. \tag{4.6}$$

Положим в выражении (4.6) $t = t_1$ и найдем векторы $U_{\min}(X_1, t_1)$ и $U_{\max}(X_1, t_1)$, при которых правая часть (4.6) имеет соответственно наибольшее и наименьшее значения.

Предположим, что правая часть соотношения (4.6) неположительна при $U \in G$. Тогда оказывается, что наибольшая скорость убывания функции V имеет место вдоль движения, проекция скорости которого на направлении градиента V является наименьшей. Соответственно скорость убывания функции наименьшая вдоль того движения, проекция скорости которого на направлении градиента функции V является наибольшей.

Предположим, теперь, что правая часть соотношения (4.6) неотрицательна при $U \in G$. В этом случае функция V имеет наибольшую скорость возрастания вдоль того движения, проекция скорости которого на направлении градиента функции V является наибольшей. Соответственно этому скорость возрастания функции V будет наименьшей вдоль того движения, проекция скорости которого на направлении градиента функции V является наименьшей.

Предположим, наконец, что правая часть соотношения (4.6) отрицательна при $U = U_{\min}$ и положительна при $U = U_{\max}$. Тогда направление наибольшей скорости возрастания функции совпадает с направлением скорости того движения, проекция скорости которого на направление градиента V имеет наибольшую величину. И наконец, направление наибольшей скорости убывания функции V совпадет с направлением движения, проекция скорости которого на направление grad V минимальна.

Остановимся на том случае, когда функция V убывает вдоль движения, соответствующего управлению $U_{\min}(X_1, t_1)$. Полагая $U_0(X_1, t) = U_{\min}(X_1, t)$ и подставляя управление U_0 в систему (4.1), получим уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1^{(0)}, \ldots, u_r^{(0)}, t), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{4.7}$$

Предположим, что система (4.7) имеет при каждом X_1 и t_1 решение

$$X^{(0)} = X(t, X_1, t_1), \quad X = X_1 \text{ при } t = t_1, \tag{4.8}$$

непрерывное и кусочно-непрерывно дифференцируемое. Вычислим функцию $U_0(t) = U(X^{(0)}(t, X_1, t_1), t)$. Будем считать, что $U_0(t) \in G$. Тогда оказывается, что скорость убывания функции V в каждой точке интегральной кривой (4.8) является наибольшей. Действительно, пусть τ — некоторый момент и $\overline{X}$— точка кривой (4.8), соответствующая этому моменту. Формула (4.6) дает выражение скорости убывания функции V в этой точке вдоль любого движения, проходящего через нее. Наименьшее возможное значение правая часть (4.6) принимает при $U = U_{\min} = U_0(\tau)$. А это и означает, что скорость убывания функции V будет наибольшей вдоль движения (4.8).

Предположим теперь, что функция V определяет в каком-либо смысле расстояние от переходного процесса, возникающего в системе (4.1), до некоторого установившегося состояния или до некоторого многообразия, с которым сравнивается поведение интегральных кривых системы (4.1). Будем считать, что роль системы управления здесь сводится к тому, чтобы это расстояние уменьшать. Тогда естественным становится понятие об оптимальном управлении по отношению к демпфированию функции V.

Определение 4.2. Если функция $U_0(X, t)$ доставляет наименьшее возможное значение функции

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s + \frac{\partial V}{\partial t}$$

среди всех управлений из множества G и система (4.7) определяет действительное движение (4.8) так, что управление

$$U_0(t) = U\left(X^{(0)}(t, X_1, t_1)\, t\right)$$

является допустимым, то управление $U_0(t)$ и движение $X^{(0)}(t, X_1, t_1)$

называются *оптимальными по отношению к демпфированию функции* V.

Пример 1. Пусть в n-мерном пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ задана движущаяся точка с постоянной по величине скоростью

$$\dot{x}_s = u_s, \quad s = 1, \ldots, n, \quad \sum_{s=1}^{n} u_s^2 = 1. \tag{4.9}$$

Требуется управление $U = (u_1, \ldots, u_n)$ выбрать так, чтобы движущаяся точка из заданной точки $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ перемещалась в начало координат. Естественно в качестве функции V взять функцию $V = \sum_{s=1}^{n} x_s^2$.

Найдем управление, оптимальное по отношению к демпфированию функции V. Функция $\sum_{s=1}^{n} 2x_s u_s$ имеет наименьшее значение при

$$u_s = -x_s \Bigg/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{4.10}$$

Покажем, что при управлении (4.10) движущаяся точка из любой заданной точки $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ действительно попадает в начало координат. Система (4.9) при управлении (4.10) имеет вид

$$\frac{dx_s}{dt} = -x_s \Bigg/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{4.11}$$

Умножая s-е уравнение системы (4.11) на x_s и складывая, получим уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2 = -r, \quad \text{где } r = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^2}.$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем $r = -t + \bar{r}$. Следовательно, движущаяся точка попадет в начало координат в момент

$$\bar{t} = \bar{r} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^2}.$$

Легко показать, что $\bar{t}$ является наименьшим возможным временем, за которое движущаяся точка может из точки $\bar{X}$ попасть в начало координат. Таким образом, в данном случае управление $U^{(0)}$, оптимальное по отношению к демпфированию функции V, является одновременно оптимальным по быстродействию.

Пример 2. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i + \sum_{j=1}^{\tau} b_{sj} u_j, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{4.12}$$

Будем считать величины a_{si} постоянными вещественными числами, матрица которых имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями. Величины b_{sj} будем считать либо вещественными постоянными, либо функциями времени (или даже функциями фазовых координат $x_1, \ldots, x_n$; правда, тогда система может стать нелинейной, если функции b_{sj} будут зависеть нелинейным образом от $x_1, \ldots, x_n$).

Выберем функцию V следующим образом: пусть V является положительно определенной квадратичной формой, удовлетворяющей соотношению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2. \tag{4.13}$$

Такая квадратичная форма существует, и притом единственная. Будем считать, что функция V определяет расстояние интегральной кривой системы (4.12) до ее положения равновесия $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Задача управления состоит в том, чтобы возникающие переходные процессы демпфировать, т. е. переводить систему в положение равновесия или в достаточно малую его окрестность. Система (4.12) такова, что она является асимптотически устойчивой при $u_1 = \ldots = u_r = 0$ и роль системы управления сводится к существенному уменьшению времени демпфирования переходных процессов. Предположим, что $u_1, \ldots, u_r$ удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^{r} u_j^2 = 1$.

Найдем управления, оптимальные по отношению к демпфированию функции V. Функция $\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s = W$ в случае системы (4.12) имеет вид

$$W = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{j=1}^{r} \sum_{s=1}^{n} b_{sj} \frac{\partial V}{\partial x_s} u_j. \tag{4.14}$$

Заметим, что вид формулы (4.14) следует из соотношения (4.13). Управления, оптимальные по отношению к демпфированию функций V, будут даваться формулами

$$u_j^{(0)} = -\sum_{s=1}^{n} b_{sj} \frac{\partial V}{\partial x_s} \Bigg/ \sqrt{\sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{s=1}^{n} b_{sj} \frac{\partial V}{\partial x_s} \right)^2}. \tag{4.15}$$

Если ограничения на управления имеют вид $|u_j| \leqslant 1,\ j = 1, \ldots, r$, то управления, оптимальные по отношению к демпфированию функции V, будут иметь вид

$$u_j^{(0)} = -\operatorname{sign} \left(\sum_{s=1}^{n} b_{sj} \frac{\partial V}{\partial x_s} \right). \tag{4.16}$$

Так как $\frac{\partial V}{\partial x_s}$, $s = 1, \ldots, n$, являются линейными однородными формами относительно $x_1, \ldots, x_n$, то управление (4.16) можно представить в виде

$$u_j^{(0)} = -\operatorname{sign} \left(\sum_{s=1}^{n} c_{sj} x_s \right), \quad j = 1, \ldots, r. \tag{4.17}$$

Подставляя выражение (4.15) в систему (4.12), получаем оптимальную автоматическую систему управления по отношению к демпфированию функции V. При ограничениях модуля каждого управления автоматическая система управления, оптимальная по отношению к демпфированию функции V, получится, если в систему (4.12) подставить функции (4.16). Будем обозначать найденную систему номером (4.18).

Если b_{sj} — вещественные постоянные, то правые части системы (4.18) оказываются разрывными и поверхности их разрыва определяются уравнениями

$$\sum_{s=1}^{n} c_{sj}x_s = 0, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{4.19}$$

Заметим, что в системе (4.18) возникает, вообще говоря, непродолжимость движений через поверхности разрыва (4.19). В физических системах за счет инерционности происходят малые вибрации около поверхностей разрыва интегральных кривых, которые стягиваются к положению равновесия за конечное время, если вообще система может быть приведена за конечное время к положению равновесия.

Определим управление $\overline{u}_j^{(0)}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{u}_j^{(0)\prime} &= -1 \text{ при } \sum_{s=1}^{n} c_{sj}x_s \geqslant -l_j, \quad j = 1, \ldots, r, \\ \overline{u}_j^{(0)} &= +1 \text{ при } \sum_{s=1}^{n} c_{sj}x_s \leqslant l_j, \quad j = 1, \ldots, r, \end{aligned} \tag{4.20}$$

здесь l_j — достаточно малые положительные постоянные. Управление (4.20) имеет петлю гистерезиса в окрестности поверхностей разрыва (4.19). Подставим управление (4.20) в систему (4.12). Полученную систему будем обозначать номером (4.21). Для того чтобы определить единственным образом движения этой системы, необходимо в зоне гистерезиса задавать не только начальные данные, но и указывать ветвь гистерезисной петли. Вне зоны гистерезиса достаточно задавать только начальные данные, ибо система (4.21) становится однозначной. Переход с одной ветви гистерезисной петли на другую в ходе интегрирования системы определяется естественным образом. Система (4.21) при достаточно малых $l_1, \ldots, l_r$ сколь угодно близка к системе, оптимальной по отношению к демпфированию функции V. Все ее интегральные кривые выходят, вообще говоря, в конечное время на автоколебательный режим, расположенный в достаточно малой окрестности положения равновесия.

2. Выясним связь систем, оптимальных по отношению к демпфированию некоторой функции V, с системами, оптимальными в разных смыслах. Для установления этой связи несколько расширим понятие оптимальности по отношению к демпфированию функции V. Заметим прежде всего, что выше всюду использовался $\operatorname{grad} V$ по пространственным координатам $x_1, \ldots, x_n$, однако для построения оптимальных управлений достаточно уметь отыскивать наименьшее возможное значение функции $dV/dt = W$, где полная производная вычисляется в силу системы (4.1).

Далее, вместо функции V можно взять некоторый функционал, определенный на движениях и управлениях, входящих в систему (4.1). Рассмотрим самый простейший функционал такого типа. Пусть $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ — функция, обладающая теми же свойствами, что и ранее, и пусть функция $f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t)$ обладает теми же свойствами, что и правые части системы (4.1). Возьмем некоторую точку $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ и момент $t = \overline{t}$. Тогда каждому управлению U, заданному при $t \geqslant \overline{t}$, отвечает движение

$$X = X(t, U, \overline{X}, \overline{t}); \quad X = \overline{X} \text{ при } t = \overline{t}. \tag{4.22}$$

Управление U и соответствующее ему движение (4.22) определяют значение функционала

$$I = V(x_1, \ldots, x_n, t) + \int_{\bar{t}}^{t} f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.23}$$

где функции $x_1, \ldots, x_n$ являются координатами вектора (4.22), а управления $u_1, \ldots, u_r$ — именно те, которые соответствуют движению (4.22).

Поставим вопрос: вдоль какого движения (4.22) функционал (4.23) имеет наибольшую или наименьшую скорость изменения? Будем считать, что функционал (4.23) убывает, и зададимся целью отыскать управление такое, что вдоль соответствующего ему движения скорость убывания функционала (4.23) является наибольшей в точке $(\bar{X}, \bar{t})$. Найдем полную производную функционала (4.23) при $t = \bar{t}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\bar{t}} = f_0(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, u_1, \ldots, u_r, \bar{t}) + \\ + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, u_1, \ldots, u_r, \bar{t}) + \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{4.24}$$

Обозначим, как и ранее, через $U_{\min}$ то значение управления, которое доставляет функции (4.24) наименьшее возможное значение. Пусть $U^{(0)}(X, t) = U_{\min}$, тогда система (4.7) определяет движение $X^{(0)} = X(t, \bar{X}, \bar{t})$, и положим, что $U^{(0)}(t) = U^{(0)}(X^{(0)}(t), t)$. Будем считать, что $U^{(0)}(t)$ является допустимым управлением. Тогда это управление и соответствующее ему движение $X^{(0)}(t)$ назовем *оптимальными по отношению к демпфированию функционала* I.

Оказывается, что в каждой точке оптимальной интегральной кривой функционал I имеет наибольшую скорость убывания. Действительно, пусть $t_1 > \bar{t}$ — некоторый момент времени, точка $X^{(1)}$ — соответствующая ему точка интегральной кривой $X^{(0)}(t)$ и $U(t)$ — произвольное управление. Оценим скорость изменения функционала I в точке $(X^{(1)}, t_1)$ при этом управлении:

$$\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1} = f_0\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, u_1(t_1), \ldots, u_r(t_1), t_1\right) + \\ + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, u_1(t_1), \ldots, u_r(t_1), t_1\right) + \\ + \frac{\partial V}{\partial t} \geqslant f_0\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, u_1^{(0)}(t_1), \ldots, u_r^{(0)}(t_1), t_1\right) + \\ + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, u_1^{(0)}(t_1), \ldots, u_r^{(0)}(t_1), t_1\right) + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Отсюда вытекает, что скорость убывания функционала I в каждой точке оптимальной кривой является наибольшей.

Будем далее управление $U^{(0)}$ и соответствующее ему движение $X^{(0)}(t)$, оптимальное по отношению к демпфированию функционала I, называть *оптимальными по отношению к функциям* (V, f_0).

Пример 3. Пусть заданы две функции $f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t)$ и $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, причем $V = 0$ при $t = T$. Пусть, кроме того, $U^{(0)}$ и $X^{(0)} = X_1^{(0)}$ при $t = 0$ — оптимальное управление и движение по отношению к функциям (V, f_0). Если это управление и соответствующее ему движение удовлетворяют уравнению

$$f_0 + \sum_{s=1}^{n} f_s \frac{\partial V}{\partial x_s} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{4.25}$$

то они являются оптимальными по отношению к функционалу

$$I = \int_0^T f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t)\,dt. \tag{4.26}$$

Действительно, пусть $U(t)$ — некоторое допустимое управление и $X(t)$ — соответствующее ему движение, $X(0) = X_1^{(0)}$. Тогда будем иметь равенство

$$f_0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s + \frac{\partial V}{\partial t} = \alpha(t). \tag{4.27}$$

Левая часть равенства (4.27) вычисляется на взятом управлении при соответствующем ему движении. Имеем неравенство $\alpha(t) \geqslant 0$, так как левая часть (4.27) принимает наименьшее возможное значение при $U^{(0)}$, $X^{(0)}$ и это значение есть ноль (см. (4.25)). Левая часть (4.27) может быть записана в форме

$$dV/dt + f_0 = \alpha(t).$$

Интегрируя это выражение по t в пределах от 0 до T и учитывая то, что $V(T) = 0$, найдем соотношение

$$\int_0^T f_0 dt = \int_0^T \alpha(t)\,dt + V\left(X_1^{(0)}, 0\right). \tag{4.28}$$

Интегрируя соответственно уравнение (4.25), находим, что

$$V\left(X_1^{(0)}, 0\right) = \int_0^T f_0\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)}, \ldots, u_r^{(0)}, t\right) dt = I_0. \tag{4.29}$$

Из соотношений (4.28) и (4.29) вытекает, что $I_0 \leqslant I(U, X)$, где $I(U, X)$ определяется формулой (4.26).

Пример 4. Пусть S — некоторое многообразие в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n, t$; пара функций V и f_0, а также функция $p_0(X, t)$ заданы на многообразии S так, что $V = p_0(X, t)$; управление $U^{(0)}$ и движение $X^{(0)}$ оптимальны по отношению функциям (V, f_0); справедливо равенство $X^{(0)}(t) = X_1^{(0)}$ при $t = 0$, и движение $X^{(0)}(t)$ достигает многообразия S в некоторый момент $t = t_0$.

Если при этом управление $U^{(0)}$ и движение $X^{(0)}$ удовлетворяют уравнению

(4.25), то это управление и соответствующее ему движение являются оптимальными по отношению к функционалу

$$I = p_0(X_2, t) + \int_0 f_0 dt,$$

где (X_2, t) — точка на многообразии S.

Доказательство этого утверждения аналогично предыдущему.

Рассмотренные примеры показывают, что системы управления, оптимальные в смысле демпфирования и в смысле интегрального функционала, связаны между собой существенным образом. Решение проблемы построения системы, оптимальной в смысле демпфирования, сведено к отысканию наименьшего значения функций многих переменных. Эта задача намного легче задачи отыскания управлений, оптимальных в смысле интегрального функционала.

Управления, оптимальные в смысле демпфирования, имеют, как показывают примеры, приведенные выше, весьма ощутимую физическую природу. Системы, оптимальные в смысле интегрального функционала, часто имеют весьма завуалированный физический смысл. Поэтому, видимо, целесообразно рекомендовать при проектировании систем управления использование систем, оптимальных в смысле демпфирования.

3. Пусть теперь на движение системы (4.1) наложены связи вида

$$g_j(x_1, \ldots, x_n, t) = 0, \quad j = 1, \ldots, l, \; l < r. \tag{4.30}$$

Будем считать, что исходная система линейно зависит от управления и имеет вид

$$dx_s/dt = f_s(x_1, \ldots, x_n, t) + \sum_{i=1}^{r} b_{si}(x_1, \ldots, x_n, t)\, u_i. \tag{4.31}$$

Поставим вопрос об отыскании того движения системы (4.31), при перемещении вдоль которого из точки (X_1, t_1) функция V имеет наибольшую скорость изменения. При этом будем рассматривать только такие движения (4.31), которые подчинены связям (4.30).

Итак, пусть выполняется следующее равенство:

$$g_j(X_1, t_1) = 0, \quad j = 1, \ldots, l, \tag{4.32}$$

и пусть U — некоторое управление такое, что соответствующее ему движение $X(t, U, X_1, t_1)$ при $t \geqslant t_1$ удовлетворяет уравнениям связей (4.30), во всяком случае для значений t, достаточно близких к t_1. Найдем полную производную функции V вдоль этого движения:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s + \sum_{j=1}^{r} a_j u_j + \frac{\partial V}{\partial t}, \tag{4.33}$$

где $a_j = \sum_{s=1}^{n} b_{js} \frac{\partial V}{\partial x_s}$, $j = 1, \ldots, r$. Вдоль этого же движения будут выполняться уравнения

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ji}u_j + b_j = 0, \quad j = 1, \ldots, l, \tag{4.34}$$

где $b_j = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_s} f_s + \frac{\partial g_j}{\partial t}$, $a_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_s} b_{si}$.

Предположим, что управления $u_1, \ldots, u_r$ являются элементами пространства C и подчинены, кроме того, ограничениям

$$\sum_{i=1}^{r} u_i^2 \leqslant a^2, \tag{4.35}$$

где a^2 — достаточно большое число. Найдем такое управление $U = (u_1, \ldots, u_r)$, при котором правая часть (4.33) имеет наименьшее возможное значение. Будем считать далее, что векторы $A_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jr})$, $j = 1, \ldots l$, линейно независимы. Тогда векторы $U = (u_1, \ldots, u_r)$ и $A = (a_1, \ldots, a_r)$ можно разложить на две составляющие, одна из которых лежит в ортогональном дополнении к подпространству, натянутому на векторы $A_1, \ldots, A_l$, а другая — в этом подпространстве: $U = \overline{U} + \overline{\overline{U}}$, $A = \overline{A} + \overline{\overline{A}}$, где

$$\overline{\overline{U}} = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j A_j, \quad \overline{\overline{A}} = \sum_{j=1}^{l} \mu_j A_j. \tag{4.36}$$

Величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$; $\mu_1, \ldots, \mu_l$ определяются единственным образом из уравнений

$$\sum_{i=1}^{l} (A_j, A_i)\, \lambda_i = -b_j, \quad j = 1, \ldots, l; \tag{4.37}$$

$$\sum_{i=1}^{l} (A_j, A_i)\, \mu_i = (A_j, A), \quad j = 1, \ldots, l. \tag{4.38}$$

Будем считать, что величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$; $\mu_1, \ldots, \mu_l$ уже определены. Вектор $\overline{U}$ будет удовлетворять ограничениям

$$\sum_{i=1}^{r} \overline{u}_i^2 \leqslant a^2 - \sum_{i=1}^{r} \overline{\overline{u}}_i^2 = b^2. \tag{4.39}$$

Ввиду ортогональности векторов $\overline{U}$ и $\overline{\overline{U}}$ правая часть формулы (4.33) примет вид

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s + \sum_{j=1}^{r} \overline{a}_j \overline{u}_i + \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \overline{\overline{a}}_j \overline{\overline{u}}_j.$$

Отсюда легко видеть, что наименьшее значение она принимает при

$$\overline{U}_j = -b\overline{a}_j \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{r} \overline{a}_j^2}\,.$$

Таким образом, функция V в точке (X_1, t_1) имеет наибольшую скорость убывания вдоль того движения, которое проходит через точку X_1 при $t = t_1$ и соответствует управлению

$$U^{(0)} = -\frac{b\overline{A}}{|\overline{A}|} + \overline{\overline{U}}. \qquad (4.40)$$

Если управление (4.40) определяет движение

$$X^{(0)} = X^{(0)}(t), \quad X^{(0)} = X_1 \text{ при } t = t_1,$$

то это движение обязательно совместимо со связями и скорость убывания функции V вдоль него в каждой фиксированной точке является наибольшей. Эти утверждения могут быть установлены следующим образом: имеем равенство

$$\frac{dg_j}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_s} f_s + \frac{\partial g_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{r} a_{ji} u_i^{(0)}. \qquad (4.41)$$

Так как вектор $\overline{A}$ ортогонален векторам A_j, то правая часть равенства (4.41) тождественно равна нулю. В начальный момент $t = t_1$ уравнения связи удовлетворены, следовательно, они будут удовлетворены и во все время движения, так как функции g_j сохраняют свое постоянное значение.

Пусть теперь $\overline{t}$ — некоторый момент, $\overline{X}$ — соответствующая ему точка на движении. Оказывается, что наибольшую скорость убывания в данной точке вдоль движений, совместимых со связями, функция имеет при управлении $U^{(0)}$, т. е. вдоль движения $X^{(0)}$.

Пример 5. Пусть функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$ обращается в ноль в начале координат и пусть наименьшее значение функции (4.33) вдоль движений, удовлетворяющих условиям (4.30) и соответствующих управлениям, для которых справедливо неравенство (4.35), совпадает со значением функции $f_0(x_1, \ldots, x_n, t)$.

Тогда очевидно, что если движение $X^{(0)}(t)$ попадает при некотором $t = t^{(0)}$ в точку $X = 0$, $X^{(0)} = X_1^{(0)}$ при $t = 0$, то управление и соответствующее ему движение $X^{(0)}$ являются оптимальными по отношению к функционалу

$$J = -\int_0^t f_0(x_1, \ldots, x_n, \tau)\, d\tau$$

при условии, что заданы начальная и конечная точки движения $X = X_1^{(0)}$ при $t = 0$ и $X(t) = 0$ и ограничения вида (4.30). Разумеется, при этом должно быть $g_j = 0$ при $X = 0$.

Пример 6. Рассмотрим движение точки под действием силы, постоянной по величине и управляемой по направлению, причем движение будем считать происходящим в заданной плоскости. Если $x_1, \ldots, x_n$ — текущие координаты этой точки, то уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_s = u_s, \quad s = 1, \ldots, n, \quad \sum_{s=1}^{n} u_s^2 = 1.$$

Предположим, что точке $(x_1, \ldots, x_n)$ предписано двигаться в плоскости $\sum_{s=1}^{n} x_s k_s = 0$. Пусть требуется найти управление, оптимальное по отношению к демпфированию функции

$$V = \sum_{s=1}^{n} \dot{x}_s^2, \quad \frac{dV}{dt} = 2 \sum_{s=1}^{n} \dot{x}_s \ddot{x}_s = 2 \sum_{s=1}^{n} \dot{x}_s u_s.$$

Дифференцируя уравнение связи, находим соотношение $\sum_{s=1}^{n} k_s \dot{x}_s = 0$. Дифференцируя полученное соотношение, имеем $\Sigma k_s u_s = 0$. Найдем, как и ранее, векторы $\bar{A} = A - \bar{\bar{A}}$, $\bar{\bar{A}} = \mu K$. Отсюда вытекает, что

$$\mu = AK/K^2 = 2 \sum_{s=1}^{n} \dot{x}_s k_s \Big/ \sum_{s=1}^{n} k_s^2.$$

Следовательно, $\bar{a}_s = 2\dot{x}_s - k_s \mu$ и оптимальное управление будет определяться формулой

$$u_s^{(0)} = \left(-2b\dot{x}_s + bk_s\mu\right) \Big/ \sqrt{\Sigma a_i^2} + \bar{\bar{u}}_s, \quad \bar{\bar{u}}_s = \lambda k_s.$$

Число λ определяется из уравнения $\lambda_s \sum_{s=1}^{n} k_s^2 = 0$, следовательно, $\bar{\bar{u}}_s = 0$ ($s = 1, \ldots, n$). Таким образом, окончательно оптимальное управление будет иметь вид

$$u_s^{(0)} = (k_s\mu - 2\dot{x}_s) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Это управление будет определять движение, совместимое со связью, и вдоль него скорость точки будет затухать оптимальным образом.

Пример 7. Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= \sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i + \sum_{j=1}^{k} b_{sj} z_j, \quad s = 1, \ldots, n; \\ \frac{dz_j}{dt} &= g_j(t, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_k) + \sum_{i=1}^{r} c_{ji} u_i, \quad j = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Будем считать, что система (4.42) обладает теми же свойствами, что и система (4.1), однако предположим, что функции c_{ji} могут зависеть от фазового состояния $x_1, \ldots, x_n$ и положения рулевых органов $z_1, \ldots, z_k$, имеющих место в моменты, предшествующие рассматриваемому моменту t. Иначе говоря, будем считать, что задана система управления с последействием. Поставим вопрос об отыскании управлений, оптимальных по отношению к демпфированию функции V. Будем считать, что управления $u_1, \ldots, u_n$ такие, что $|u_j| \leqslant 1$. Предположим, что управляемый объект собственно устойчив, т.е. все собственные числа матрицы, составленной из элементов a_{si}, имеют отрицательные вещественные части. Выберем функцию V таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \right) = - \sum_{s=1}^{n} x_s^2 .$$

Изучим скорость изменения функции V вдоль движений системы (4.42); имеем выражение

$$\frac{dV}{dt} = - \sum_{s=1}^{n} x_s^2 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \left(\sum_{j=1}^{k} b_{sj} z_j \right).$$

Из последнего выражения можно заключить, что скорость изменения функции V в любой точке $(\overline{X}, \overline{Z}, t)$ системы (4.42) не зависит от управлений $u_1, \ldots, u_r$. Изучим теперь поведение второй производной функции V:

$$\frac{d^2V}{dt^2} = W + \sum_{j=1}^{r} u_j \gamma_j. \tag{4.43}$$

Скорость убывания функции $\dot{V}$ будет наибольшей при

$$u_j^{(0)} = - \operatorname{sign} \gamma_j. \tag{4.44}$$

Иначе говоря, при управлении (4.44) ускорение убывания функии V является наибольшим.

В оптимальной системе, получающейся при управлении (4.44), как и в примере 2, вообще говоря, появляется тот случай, когда в силу разрывности управления (4.44) движения в системе (4.42) оказываются непродолжимыми через поверхности разрыва. Это обстоятельство имеет место потому, что при постановке задачи об отыскании оптимального управления не учитывается тот непреложный факт, что в широком круге явлений природы управление движением осуществляется на основе информации о прежнем развитии, причем управление, вырабатываемое на основе этой информации, действует на протяжении некоторого времени и не учитывает действительного состояния движущейся материи. Это обстоятельство вызывает необходимость учета пространственного и временного запаздывания управления от хода управляемого явления.

В теории автоматического управления такой учет осуществляется часто с помощью гистерезиса, т. е. в системе управления (4.44) следует рассматривать управление

$$\overline{u}_j^{(0)} = -1 \text{ при } \gamma_j \geqslant -l_j, \quad \overline{u}_j^{(0)} = +1 \text{ при } \gamma_j \leqslant l_j, \ j = 1, \ldots, r, \tag{4.45}$$

где l_j — достаточно малые положительные числа. В общем случае величины $l_1, \ldots, l_r$ могут быть произвольными положительными функциями фазового состояния, времени и управления. При управлении (4.45) все ограниченные движения в системе (4.42) оказываются продолжимыми при $t \geqslant 0$.

ГЛАВА II

ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

§ 5. ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ, ВЫЗЫВАЮЩЕГО ЗАДАННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Уравнения электродинамики. Обратная задача. — Движение заряженной частицы при наличии среды. Случай свободного пространства. — Уравнения в частных производных с одинаковой главной частью. — Аналитические принципы ускорения и фокусировки.

1. Обозначим через E и H векторные функции, определяющие напряженность электрического и соответственно магнитного полей; а через B и D — векторные функции, определяющие магнитную и электрическую индукции. Эти четыре векторные функции определяют *электромагнитное поле* в пространстве и во времени. Известно, что они связаны между собой уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} E + \partial B/\partial t = 0, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{rot} H - \partial D/\partial t = J, \tag{5.2}$$

где J — пространственная плотность тока.

Векторная функция J определяется следующим образом. Пусть ρ — плотность заряда, зависящая от времени и пространственных координат. Тогда заряд δq, заключенный в объеме δV, будет определяться формулой

$$\delta q = \rho\delta V.$$

Пусть I есть ток через поверхность S, иначе говоря, пусть I есть заряд, проходящий через поверхность S за единицу времени. Тогда плотность тока J связана с током I формулой

$$I = \int\limits_S (J, n)\, \mathrm{d}S,$$

где n — нормаль поверхности S. Эта формула может одновременно служить определением векторной функции J через ток I.

Пусть S есть замкнутая поверхность, ограничивающая объем V. Тогда в силу определения имеем

$$I = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \rho \mathrm{d}V.$$

Если считать что поверхность S неподвижна, то справедливо соотношение

$$I = \int\limits_V -\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V.$$

Применяя формулу Гаусса — Остроградского к замкнутой поверхности S, найдем, что поток вектора плотности тока через замкнутую поверхность S выражается через объемный интеграл от дивергенции плотности тока; это дает формулу

$$\int\limits_V \left(\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dV = 0.$$

Так как последняя формула имеет место для любого объема, то будем также иметь дифференциальное соотношение

$$\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Подставляя в это соотношение левую часть уравнения (5.2), найдем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} D - \rho) = 0.$$

Применяя операцию дивергенции к уравнению (5.1), получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} B) = 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что эти уравнения дают следующие соотношения:

$$\operatorname{div} D = \rho, \tag{5.3}$$

$$\operatorname{div} B = 0. \tag{5.4}$$

Рассмотрим теперь движение единичного положительного заряда с массой покоя m_0, происходящего в электромагнитном поле. В широком классе случаев можно считать, что такое движение описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = Y,$$

$$\left(\dot{mY}\right) = E + Y \times B + G(t, X, Y). \tag{5.5}$$

Здесь $X = (x_1, x_2, x_3)$ — декартовы координаты заряженной частицы в некоторой абсолютной системе координат, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ — компоненты вектора скорости частицы в той же системе координат, m — релятивистская масса частицы, $m = m_0 / \sqrt{1 - \frac{Y^2}{C^2}}$, C — скорость света. Векторная функция $G(t, X, Y)$ явно не зависит от компонент электромагнитного поля; она представляет собой различные потенциальные и диссипативные силы, возникающие от взаимодействия движущейся частицы с окружающей средой, в частности эта векторная функция может учитывать влияние гравитационных полей и «лучистое трение». Система дифференциальных уравнений (5.5) единственным образом определяет движение заряженной частицы, если только заданы ее начальное положение и начальная скорость. При этом, естественно, предполагается, что векторные функции E и B, входящие в систему (5.5), являются известными функциями пространственных координат и времени. Упомянутое движение заряженной частицы определяет тогда единственным образом *вектор скорости* в каждой точке траектории.

Заметим, что распределение скоростей в пространстве и во времени

$$\dot{X} = \eta(t, X) \tag{5.6}$$

всегда можно задать так, что оно будет совпадать с указанным выше множеством скоростей на заданной траектории заряженной частицы.

Возникает вопрос: существует ли электромагнитное поле, вызывающее такое же движение заряженных частиц, которое определяется системой (5.6) с наперед заданным распределением скоростей $\eta(t, X)$?

Теорема 5.1. *Если задано поле скоростей* (5.6), *то существуют векторные функции* E и B, *удовлетворяющие уравнению Максвелла и такие, что система* (5.5) *определяет движения заряженной частицы в электромагнитном поле, идентичные с движениями, определяемыми системой* (5.6). *Разумеется, речь идет о движениях с одинаковыми начальными условиями.*

Доказательство. Будем считать, что распределение скоростей (5.6) задано. Требуется найти векторные функции E и B, удовлетворяющие уравнению Максвелла, задающие такое же распределение скоростей.

Предположим, что задача решена. Тогда необходимо должно иметь место тождество

$$\left(m\dot{\eta}\right) = E + \eta \times B + G. \tag{5.7}$$

Здесь и ниже операция дифференцирования понимается в полном смысле, а именно справедливо равенство

$$\left(m\dot{\eta}\right) = \frac{\partial(m\eta)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(m\eta)}{\partial x_i}\eta_i,$$

где η_1, η_2, η_3 — компоненты вектора $\eta(t, X)$. Заметим, что в (5.7) также $m = m_0/\sqrt{1 - \eta^2/C^2}$.

Возьмем операцию rot от обеих частей равенства (5.7) и воспользуемся уравнением Максвелла

$$-\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot}(\eta \times B) = \operatorname{rot}[(m\dot{\eta}) - G]. \tag{5.8}$$

Будем далее рассматривать тождество (5.8) как систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно компонент вектора $B = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты абсолютной декартовой системы координат. Пользуясь такой записью вектора B, получаем тождество

$$\operatorname{rot}(\eta \times B) = \operatorname{rot}(b_1\eta \times \boldsymbol{i}) + \operatorname{rot}(b_2\eta \times \boldsymbol{j}) + \operatorname{rot}(b_3\eta \times \boldsymbol{k}) =$$
$$= b_1 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{i}) + b_2 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{j}) + b_3 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{k}) + \nabla b_1 \times \eta \times \boldsymbol{i} +$$
$$+ \nabla b_2 \times \eta \times \boldsymbol{j} + \nabla b_3 \times \eta \times \boldsymbol{k}.$$

Раскрывая двойные векторные произведения в правой части последней формулы, окончательно найдем

$$\operatorname{rot}(\eta \times B) = b_1 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{i}) + b_2 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{j}) + b_3 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{k}) +$$
$$+ \eta \operatorname{div} B - \boldsymbol{i}(\eta, \nabla b_1) - \boldsymbol{j}(\eta, \nabla b_2) - \boldsymbol{k}(\eta, \nabla b_3).$$

С помощью последних соотношений система уравнений (5.8) может быть переписана в окончательной форме:

$$\mathring{B} - b_1 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{i}) - b_2 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{j}) - b_3 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{k}) - \eta \operatorname{div} B =$$
$$= \operatorname{rot}[G - (m\dot{\eta})]. \quad (5.9)$$

В уравнении (5.9) в функции G аргумент Y должен быть заменен векторной функцией $\eta(t, X)$, так что операция rot берется затем по переменным x_1, x_2, x_3.

Система (5.9) обладает замечательным свойством, а именно: если векторная функция B есть решение системы (5.9) и удовлетворяет дополнительному условию $\operatorname{div} B = 0$ в некоторый начальный момент $t = t_0$, то она будет удовлетворять этому условию тождественно.

Действительно, пусть B есть решение системы (5.9). Тогда оно удовлетворяет также и тождеству (5.8). Вычислим от обеих частей векторного равенства (5.8) дивергенцию:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} B) = 0.$$

Отсюда и из условия $\operatorname{div} B = 0$ при $t = t_0$ вытекает, что $\operatorname{div} B \equiv 0$. Это выражает, с другой стороны, свойство магнитной индукции, даваемое четвертым уравнением Максвелла. Из этого обстоятельства вытекает, что система (5.9) эквивалентна системе уравнений

$$\mathring{B} - b_1 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{i}) - b_2 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{j}) - b_3 \operatorname{rot}(\eta \times \boldsymbol{k}) = \operatorname{rot}[G - (m\dot{\eta})] \quad (5.10)$$

и начальному условию

$$\operatorname{div} B = 0 \text{ при } t = t_0. \quad (5.11)$$

Пусть $A_0(X)$ — произвольная векторная функция, тогда векторная функция $B = \operatorname{rot} A_0$ будет удовлетворять начальному условию (5.11). Уравнение (5.10) при начальном условии

$$B = \operatorname{rot} A_0 \quad (5.12)$$

при $t = t_0$ будет иметь единственное решение, как это будет показано в дальнейшем. Это позволяет определить магнитную индукцию B и электрическую напряженность E по формуле

$$E = (m\dot{\eta}) - \eta \times B - G(t, X, \eta). \tag{5.13}$$

Векторные функции B и E удовлетворяют системе уравнений Максвелла и задают некоторое электромагнитное поле. Покажем теперь, что движения систем (5.5) и (5.6) с одинаковыми начальными условиями совпадают.

Итак, пусть начальные условия X_0, Y_0 при $t = t_0$ определяют движение системы (5.5), причем $Y_0 = \eta(t_0, X_0)$. Требуется показать, что это движение будет совпадать с решением системы (5.6), удовлетворяющим начальному условию $X = X_0$ при $t = t_0$. Это утверждение будет установлено, если показать, что система (5.5) имеет интегральное многообразие

$$Y - \eta(t, X) = 0. \tag{5.14}$$

Для того чтобы установить существование такого многообразия, введем в рассмотрение функцию

$$Z = Y - \eta(t, X) \tag{5.15}$$

и вычислим полную производную этой функции вдоль интегральных кривых системы (5.5). Вычисление этой производной и последующая замена вектора Y его значением из (5.15) приводит к уравнению

$$\dot{Z} = f(t, X, Z). \tag{5.16}$$

Легко видеть, что правая часть уравнения (5.16) тождественно обращается в ноль при $Z = 0$. Рассмотрим систему (5.5) совместно с уравнением (5.16). Эта система имеет единственное решение, отвечающее начальным данным $X = X_0$, $Y = \eta(t_0, X_0)$, $Z = 0$ при $t = t_0$. В силу теоремы единственности это решение будет удовлетворять также условию $Z \equiv 0$, иначе говоря, совпадать с очевидным решением уравнения (5.16). Это означает, что система (5.5) имеет интегральное многообразие (5.14).

Интегральная кривая системы (5.5), начинающаяся при $t = t_0$ на интегральном многообразии (5.14), будет оставаться на нем во все время движения, но тогда первое из уравнений системы (5.5) будет совпадать с системой (5.6) и в силу единственности решений из совпадения начальных данных при $t = t_0$ будет вытекать совпадение движений систем (5.5) и (5.6) для всех значений времени, что и требовалось доказать. ■

Уравнение (5.4) системы Максвелла необходимо выполняется, если положить

$$B = \operatorname{rot} A. \tag{5.17}$$

Векторная функция $A(t, X)$, определяющая магнитную индукцию по формуле (5.17), называется *векторным потенциалом*. С помощью векторного потенциала первое уравнение системы Максвелла может быть записано в форме

$$\operatorname{rot}\left[E + \frac{\partial A}{\partial t}\right] = 0.$$

Следовательно, существует скалярная функция $\varphi(t, X)$ такая, что

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla\varphi. \tag{5.18}$$

Функция φ, удовлетворяющая соотношению (5.18), называется *электрическим потенциалом*. Если заданы векторный потенциал A и электрический потенциал φ, то напряженность электрического поля и магнитная индукция B определяются однозначно и удовлетворяют уравнениям (5.1) и (5.4). С помощью этих потенциалов система (5.5) может быть переписана в форме

$$\begin{aligned} &\dot{X} = Y, \\ &(m\dot{Y}) = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} + Y \times \operatorname{rot} A + G(t, X, Y). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Поставим вопрос о существовании векторного потенциала A и электрического потенциала φ, вызывающих такое же движение заряженной частицы, как система (5.6).

Теорема 5.2. *Если задано поле скоростей* (5.6), *то существуют векторный потенциал A и электрический потенциал* φ, *порождающие электромагнитное поле, в котором заряженная частица, движущаяся в соответствии с системой* (5.19), *будет двигаться идентично движениям системы* (5.6) *при совпадении начальных условий.*

Доказательство. Предположим сначала, что векторный потенциал A и электрический потенциал φ, вызывающие движение заряженной частицы, идентичное с системой (5.6), существуют. Тогда непременно будет выполняться тождество

$$(m\dot{\eta}) = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} + \eta \times \operatorname{rot} A + G(t, X, \eta). \tag{5.20}$$

Здесь точкой обозначается полная производная в силу уравнений (5.6). Положим $A = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, тогда справедливо представление

$$\begin{aligned} \eta \times \operatorname{rot} A &= \eta \times \nabla a_1 \times \boldsymbol{i} + \eta \times \Delta a_2 \times \boldsymbol{j} + \eta \times \nabla a_3 \times \boldsymbol{k} = \\ &= \eta_1\nabla a_1 + \eta_2\nabla a_2 + \eta_3\nabla a_3 - \boldsymbol{i}(\eta, \nabla a_1) - \boldsymbol{j}(\eta, \nabla a_2) - \boldsymbol{k}(\eta, \nabla a_3). \end{aligned}$$

Применяя последнее преобразование к тождеству (5.20), находим равенство

$$\dot{A} + \left\{\frac{d\eta}{dX}\right\}^* A + \nabla\varphi - \nabla(A, \eta) - G + (m\dot{\eta}) = 0. \tag{5.21}$$

Тождество (5.21) будем рассматривать как систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно четырех исходных функций, а именно относительно компонент векторного потенциала $A = (a_1, a_2, a_3)$ и скалярного потенциала φ. Представим скалярный потенциал в виде

$$\varphi = (A, \eta) + \Psi, \tag{5.22}$$

где Ψ — какой-либо заданный электрический потенциал. При условии (5.22) система (5.21) определяет единственную векторную функцию $A(t, X)$, удовлетворяющую начальному условию

$$A = A_0(X) \text{ при } t = t_0. \tag{5.23}$$

Это утверждение будет установлено ниже.

Предположим, что векторная функция A, удовлетворяющая системе (5.21) и начальному условию (5.23), построена. Тогда она совместно с электрическим потенциалом φ задает электромагнитное поле, движение заряженной частицы в котором определяется системой дифференциальных уравнений (5.19). Покажем, что эти движения совпадают с движениями, определяемыми системой (5.6), если только им соответствуют одинаковые начальные условия. Действительно, система (5.19) имеет интегральное многообразие

$$Y - \eta(t, X) = 0. \tag{5.24}$$

Этот факт устанавливается по аналогии с тем, как это было сделано в предыдущей теореме. А тогда, проводя те же рассуждения, что и в теореме 5.1, приходим к тому, что решение системы (5.6) с начальным условием $X = X_0$ при $t = t_0$ будет необходимо совпадать с решением системы (5.19), соответствующим начальным условиям

$X = X_0$, $Y = Y_0$ при $t = t_0$ и условию $Y_0 = \eta(t_0, X_0)$. ■

Замечания. 1. Теорема 5.2 остается в силе, если векторная функция G в системе (5.19) будет явно зависеть от искомого векторного потенциала A. Это обстоятельство приводит к тому, что система (5.21) становится нелинейной по отношению к искомым функциям, однако теорема существования и единственности, на которую в доказательстве теоремы 5.2 имеется ссылка, приводится ниже в такой форме, которая допускает упомянутую зависимость функции G от векторного потенциала A.

2. Векторный потенциал A и скалярный потенциал φ определяются в теореме 5.2 единственным образом через начальный вектор A_0 и произвольный скалярный потенциал Ψ, тогда как в теореме 5.1 магнитная индукция B определялась единственным образом только через начальный вектор A_0.

При определении напряженности электрического поля E можно ввести еще одну произвольную функцию Ψ, так как $\operatorname{rot} \nabla \Psi \equiv 0$. Таким образом, множества электромагнитных полей, создающих движение заряженных частиц, идентичное с системой (5.6), в теоремах 5.1 и 5.2 совпадают.

Ввиду того что в теореме 5.2 допускается зависимость функции G от векторного потенциала A, она является более общей по сравнению с теоремой 5.1.

2. Перейдем теперь к учету физических свойств среды, в которой происходит движение заряженных частиц. Будем считать сначала, что эта среда является изотропной. Иначе говоря, будем считать, что рассматриваемая среда характеризуется диэлектрической

постоянной ε и магнитной проницаемостью μ, так что электрическая индукция D и магнитная напряженность H определяются формулами

$$D = \varepsilon E, \quad H = B/\mu. \tag{5.25}$$

Поставим вопрос о нахождении вектора плотности тока J и пространственной плотности заряда ρ, создающих электромагнитное поле в изотропной среде, под действием которого заряженные частицы будут двигаться идентично с движениями системы (5.6).

Теорема 5.3. *В изотропной среде существуют такой вектор плотности тока J и такая пространственная плотность заряда ρ, которые определяют электромагнитное поле, вызывающее движение заряженных частиц, идентичное с движениями системы* (5.6).

Доказательство. По теореме 5.1 существует электрическая напряженность E и магнитная индукция B, вызывающие упомянутое в теореме 5.3 движение частиц.

Применяя предположение (5.25) к уравнениям Максвелла (5.2) и (5.3), найдем соотношения

$$J = \frac{1}{\mu}\left[\operatorname{rot} B - \varepsilon\mu \frac{\partial E}{\partial t}\right], \tag{5.26}$$

$$\rho = \varepsilon \operatorname{div} E.$$

Правые части в равенствах (5.26) могут быть выражены также через векторный потенциал A и скалярный потенциал φ:

$$J = \frac{1}{\mu}\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot} A + \varepsilon\mu\left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial \nabla\varphi}{\partial t}\right)\right].$$

Исходя из формулы векторного исчисления $\operatorname{rot}\operatorname{rot} A = -\Delta A + \nabla \operatorname{div} A$, будем иметь равенство

$$J = -\frac{1}{\mu}\left[\Delta A - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right] + \frac{1}{\mu}\nabla\left(\operatorname{div} A + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right). \tag{5.27}$$

Аналогично находим соотношение

$$\rho = \varepsilon \operatorname{div}\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}\right) = -\varepsilon\left(\Delta\varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div} A + \varepsilon\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \blacksquare \tag{5.28}$$

Перейдем теперь к рассмотрению движения заряженных частиц в анизотропной среде. Будем предполагать, что анизотропность среды задается электрической поляризацией P и магнитной поляризацией M, так что выполняются соотношения

$$D = \varepsilon_0 E + P, \quad H = \frac{B}{\mu_0} - M. \tag{5.29}$$

В формулах (5.29) ε_0 и μ_0 есть диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость вакуума.

Векторные функции P и M предполагаются известными функциями, зависящими от времени, пространственных координат, электрической напряженности E и магнитной индукции B.

Теорема 5.4. *Если система* (5.6) *задает поле скоростей в анизотропной среде с известной электрической поляризацией P и магнитной поляризацией M, то существуют вектор плотности тока J и пространственная плотность зарядов ρ, создающие электромагнитное поле, в котором заряженные частицы будут двигаться идентично с движениями системы* (5.6).

Доказательство. По теореме 5.1, существует электромагнитное поле E, B, в котором заряженные частицы будут двигаться указанным в теореме 5.3 способом. Это поле в соответствии с предположением (5.29) определяет единственным образом электрическую индукцию D и магнитную напряженность H, а тогда, исходя из уравнений (5.2) и (5.3), как и выше, найдем соотношения

$$J = J_0 - \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{rot} M\right],$$
$$\rho = \rho_0 + \operatorname{div} P. \tag{5.30}$$

Здесь через J_0 и ρ_0 обозначены правые части соответственно в формулах (5.26), (5.27), (5.28), в которых положено $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

Рассмотрим теперь частный случай движения заряженных частиц в свободном пространстве при условии, что дифференциальные уравнения (5.5) принимают вид

$$\overset{\circ}{X} = Y,$$
$$(\overset{\bullet}{mY}) = E + Y \times B + \operatorname{grad} g. \tag{5.31}$$

Теорема 5.5. *Существуют векторный потенциал A и электрический потенциал φ такие, что заряженная частица будет двигаться в электромагнитном поле, определяемом этими потенциалами в соответствии с уравнениями* (5.31) *идентично с движениями системы* (5.6). *При этом выполняются соотношения*

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\varphi, \quad B = \operatorname{rot} A, \tag{5.32}$$

где

$$A = -m\eta, \quad \varphi = -mC^2 + g; \tag{5.33}$$

здесь $m = m_0/\sqrt{1-\eta^2/C^2}$

Доказательство. Если движения, определяемые системой (5.31) и системой (5.6), при одинаковых начальных условиях будут совпадать, то обязательно будет справедливо тождество

$$(\overset{\circ}{m\eta}) = E + \eta \times B + \nabla g. \tag{5.34}$$

Применяя соотношения (5.32) к тождеству (5.34), получаем уравнение

$$(m\dot{\eta}) = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\varphi + \eta \times \operatorname{rot} A + \nabla g. \tag{5.35}$$

Систему (5.35) можно рассматривать как систему уравнений в частных производных для компонент вектора A. Непосредственной проверкой можно установить, что системе (5.35) удовлетворяют функции (5.33). Действительно, справедливы соотношения

$$\eta \times \operatorname{rot} A = \eta \times \operatorname{rot}(a_1 \boldsymbol{i}) + \eta \times \operatorname{rot}(a_2 \boldsymbol{j}) + \eta \times \operatorname{rot}(a_3 \boldsymbol{k}) =$$

$$= \eta \times (\nabla a_1 \times \boldsymbol{i}) + \eta \times (\nabla a_2 \times \boldsymbol{j}) + \eta \times (\nabla a_3 \times \boldsymbol{k}) =$$

$$= \eta_1 \nabla a_1 + \eta_2 \nabla a_2 + \eta_3 \nabla a_3 - \boldsymbol{i}(\eta, \nabla a_1) - \boldsymbol{j}(\eta, \nabla a_2) - \boldsymbol{k}(\eta, \nabla a_3).$$

Применяя эти соотношения к системе (5.35), находим уравнение

$$(m\dot{\eta}) = -\dot{A} - \nabla\varphi + \sum_{i=1}^{3} \eta_i \nabla a_i + \nabla g. \tag{5.36}$$

Если положить в уравнение (5.36) $A = -m\eta$, то оно примет вид

$$\nabla\varphi = \nabla g - \sum_{i=1} \eta_i \nabla (m n_i) = \nabla g - \frac{1}{2m} \nabla (m\eta)^2. \tag{5.37}$$

Заметим, что $m^2\eta^2 = C^2(m^2 - m_0^2)$, поэтому соотношение (5.37) удовлетворится, если положить $\varphi = -mC^2 + g$. Применяя теорему 5.2, можно утверждать теперь, что система (5.31) определяет движение, совпадающее с движениями системы (5.6) при условии совпадения начальных данных.■

Замечания. 1. Теорема 5.5 остается в силе, если векторная функция $G(t, X, Y)$ в системе (5.5) при подстановке $Y = \eta(t, X)$ будет совпадать с градиентом некоторой функции g. Для всех таких систем можно посчитать величину кинетической энергии заряженных частиц, располагающихся на интегральном многообразии $Y - \eta(t, X) = 0$.

Действительно, для кинетической энергии имеем соотношение

$$T = \frac{1}{2} m\dot{\eta}^2 = A^2 \Big/ \left(2m_0 \sqrt{1 + \frac{A^2}{m_0^2 C^2}}\right).$$

2. В изотропной среде для векторного электрического потенциала (5.33) вектор плотности тока и пространственная плотность заряда определяется по формулам

$$J = \frac{1}{\mu}\left[\Delta(m\eta) - \frac{\varepsilon\mu \partial^2 (m\eta)}{\partial t^2}\right] - \frac{1}{\mu}\nabla\left[\operatorname{div}(m\eta) + \varepsilon\mu C^2 \frac{\partial m}{\partial t}\right] + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial t}, \tag{5.38}$$

$$\rho = \varepsilon\left[\frac{\partial \operatorname{div}(m\eta)}{\partial t} + C^2 \Delta m - \Delta g\right]. \tag{5.39}$$

3. Если среда, в которой происходит движение заряженных частиц в соответствии с (5.31), анизотропна, то вектор плотности тока определяется формулой

$$J = J_0 - \frac{\partial P}{\partial t} - \operatorname{rot} M; \tag{5.40}$$

пространственная плотность заряда — формулой

$$\rho = \rho_0 + \operatorname{div} P. \tag{5.41}$$

В формулах (5.40) и (5.41) величины J_0 и ρ_0 определяются правыми частями соответственно (5.38) и (5.39), в которых положено $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

3. Доказательства предыдущих теорем и выводы из них были основаны на теореме существования и единственности решений систем уравнений с частными производными с одинаковой главной частью, а именно систем вида

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} f_s(t, X) \frac{\partial y_j}{\partial x_s} = g_j(t, X, Y), \; j = 1, \ldots, k. \tag{5.42}$$

Будем считать, что функции f_s и g_j, $s = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$, заданы при $t \in (-\infty, +\infty)$, $X \in E_n$, $Y \in E_k$, вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы по отношению к компонентам векторов X и Y.

Теорема 5.6. *Для любых функций $g_j(X)$, $j = 1, \ldots, k$, заданных при $X \in E_n$, вещественных, непрерывно дифференцируемых по компонентам вектора X, существует единственное решение $y_j = y_j(t, X)$, $j = 1, \ldots, k$, системы (5.42), заданное в области $|t - t_0| \leqslant a$, $\|X - X_0\| \leqslant b$, вещественное, непрерывное и непрерывно дифференцируемое по компонентам вектора X; удовлетворяющее начальному условию $y_j(t, X) = y_{j0}(X)$ при $t = t_0$ в области $\|X - X_0\| \leqslant b$.*

Доказательство. Наряду с системой (5.42) рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, являющуюся системой характеристик для уравнений (5.42),

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= f_s(t, X), \; s = 1, \ldots, n, \\ \frac{dy_j}{dt} &= g_j(t, X, Y), \; j = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Заменим систему (5.43) системой интегральных уравнений

$$\begin{aligned} x_s &= x_{s0} + \xi_s + \int_{t_0}^{t} f_s(\tau, X)\, d\tau, \\ y_j &= y_{j0}(X_0 + \xi) + \int_{t_0}^{t} g_j(\tau, X, Y)\, d\tau. \end{aligned} \tag{5.44}$$

С помощью метода последовательных приближений можно показать, что система интегральных уравнений имеет решение при любом выборе компонент вектора ξ из области $\|\xi\| \leqslant b$, причем эти решения будут заданы при $|t - t_0| \leqslant a$. Более того, константы a и b

можно выбрать так, чтобы указанное утверждение оставалось в силе при любом выборе величины t_0 и начального вектора X_0 из некоторого ограниченного множества. Разумеется, a и b будут зависеть, вообще говоря, от этого множества.

Итак, пусть функции

$$X = X(t, \xi), \tag{5.45}$$

$$Y = Y(t, Y_0(X_0 + \xi), \xi) \tag{5.46}$$

есть решение интегральных уравнений (5.44), записанное в векторной форме. Матрица $\left\{\frac{dX}{d\xi}\right\}$ при $t = t_0$ совпадает с единичной. Поэтому равенство (5.45) определяет вектор ξ как неявную векторную функцию X. Найдем эту функцию и исключим ее из (5.46). В результате этого исключения получим функции

$$y_j = y_j(t, X), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{5.47}$$

Непосредственной подстановкой (5.47) в систему (5.42) убеждаемся, что функции (5.47) являются решениями системы (5.42).

Так как векторная функция ξ, определяемая из соотношения (5.45), будет непрерывно дифференцируемой по компонентам вектора X, то такими же будут и функции (5.47). Полагая в формулах (5.45) и (5.46) $t = t_0$, находим, что $X = X_0 + \xi$, следовательно, $y_j(t, X) = y_{j0}(X)$ при $t = t_0$.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что построенное выше решение (5.47) является единственным решением, отвечающим заданным начальным функциям. Действительно, пусть существует другое решение $y_j = \overline{y}_j(t, X)$, $j = 1, \ldots, k$, удовлетворяющее уравнениям (5.42) и начальным условиям $\overline{y}_j = y_{j0}(X)$ при $t = t_0$, $j = 1, \ldots, k$. Предположим, что существует точка X_1 и момент времени t_1 такие, что выполняются неравенства $\overline{y}_j(t_1, X_1) \neq y_j(t_1, X_1)$. Это неравенство может иметь место, разумеется, лишь для группы функций. Будем считать, что величины $|t_1 - t_0|$ и $\|X_1 - X_0\|$ достаточно малы. Тогда будет существовать решение системы характеристик (5.43), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_s = x_{s1}, \quad y_j = y_{j1} \text{ при } t = t_1,$$

и решение с начальными данными

$$x_s = x_{s1}, \quad y_j = \overline{x}_{j1} \text{ при } t = t_1,$$

где $y_{j1} = y_j(t_1, X_1)$, $\overline{y}_{j1} = \overline{y}_j(t_1, X_1)$. Это будут два различных решения системы (5.43). Вычислим эти решения для значения $t = t_0$; эти значения должны удовлетворять соотношениям $X = \widehat{X}_0$ при $t = t_0$, $y_j = y_{j0}(\widehat{X}_0)$, $\overline{y}_j = y_{j0}(\widehat{X}_0)$.

Таким образом, при $t = t_0$ будет нарушаться условие теоремы единственности для системы (5.43). Поэтому наше предположение относительно точки t_1, X_1 неверно и, следовательно, $y_j(t, X) = \overline{y}_j(t, X)$

в достаточно малой окрестности точки t_0, X_0. Заметим, что числа a и b можно выбрать так, чтобы эта окрестность совпадала с множеством $|t - t_0| \leqslant a$, $\|X - X_0\| \leqslant b$. ■

4. Развитая выше теория построения электромагнитного поля позволяет сформулировать аналитические принципы ускорения и фокусировки заряженных частиц.

Теорема 5.7. *Если заряженная частица движется в соответствии с уравнениями* (5.31) *под действием электромагнитного поля*

$$
\begin{gathered}
E = -\partial A/\partial t - \nabla\varphi, \quad B = \operatorname{rot} A, \\
\varphi = -C^2 m_0 \sqrt{1 + \frac{A^2}{C^2 m_0^2}} + g,
\end{gathered}
\tag{5.48}
$$

то энергия частицы будет неограниченно возрастать при выполнении следующих условий: 1) *в начале движения* $X = X_0$, $Y = Y_0$ *при* $t = t_0$;

$$Y_0 = -A(t_0, X_0) \Big/ \left(m_0 \sqrt{1 + A^2(t_0 X_0)/(m_0^2 C^2)}\right);$$

2) *векторная функция* $A(t, X)$ *неограниченно возрастает по величине вдоль упомянутого движения. При этом скорость частицы будет сколь угодно близко приближаться к скорости света, не достигая ее в конечное время или в конечной части пространства.*

В теореме 5.7 векторный потенциал $A(t, X)$ можно считать заданной функцией; тогда вектор плотности тока и пространственная плотность заряда как для изотропной среды, так и для анизотропной будет определяться по формулам (5.27), (5.28).

Из теории построения электромагнитного поля вытекает также аналитический принцип фокусировки заряженных частиц. При этом под фокусировкой понимается такое асимптотическое поведение движущихся частиц, при котором некоторые равновесные движения или совокупности таких движений становятся устойчивыми в смысле Ляпунова. Такой аналитический принцип фокусировки может быть выведен следующим образом. Так как интегральная кривая системы (5.6), начинающаяся на многообразии $Y = \eta(t, X)$, остается там во все время движения, то, по существу, речь идет о поведении траекторий в системе (5.6).

Теорема 5.8. *Если заряженная частица движется в соответствии с системой* (5.31) *и электромагнитное поле определяется соотношениями* (5.48), *то поле будет фокусирующим при выполнении следующих условий:* 1) *система уравнений* (5.6) *при условии*

$$\eta(t, X) = -A \Big/ \left(m_0 \sqrt{1 + A^2/(m_0^2 C^2)}\right)$$

имеет орбитально асимптотически устойчивое равновесное интегральное многообразие; 2) *движения начинаются при условии*

$$X = X_0, \quad Y = Y_0 = \frac{-A(t_0, X_0)}{m_0 \sqrt{1 + A^2(t_0, X_0)/\left(C^2 m_0^2\right)}}, \quad t = t_0.$$

§ 6. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СТАЦИОНАРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Уравнения электродинамики стационарного магнитного поля. — Фокусировка заряженных частиц. — Устойчивость интегральных многообразий. — Существование решений систем уравнений в частных производных. — Влияние дополнительных сил

1. Будем предполагать, что стационарное магнитное поле задается векторной функцией $B(X)$, удовлетворяющей уравнению Максвелла

$$\operatorname{div} B = 0. \tag{6.1}$$

Будем считать, что заряженная частица, имеющая положительный единичный заряд и массу покоя m_0, будет двигаться в этом магнитном поле в соответствии с системой дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = Y,$$

$$(\dot{mY}) = Y \times B + G(X, Y). \tag{6.2}$$

Система (6.2) получается из системы (5.5), если положить там $E = 0$.

Поставим вопрос о существовании стационарного магнитного поля B, движение заряженной частицы в котором будет происходить идентично с движениями, определяемыми дифференциальными уравнениями

$$\dot{X} = \eta(X), \tag{6.3}$$

где $\eta(X)$ — заданная векторная функция.

Теорема 6.1. *Для любого поля скоростей* (6.3) *существует стационарное магнитное поле, в котором движение заряженных частиц будет происходить одинаковым образом с движениями в указанном поле скоростей при условии, что начальные данные, определяющие эти движения, совпадают и выполняется соотношение* $(\eta, G(X, \eta)) = 0$.

Доказательство. Если предположить, что магнитное поле $B(X)$, обладающее указанным в теореме свойством, существует, то имеет место тождество

$$(\dot{m\eta}) = \eta \times B + G(X, \eta). \tag{6.4}$$

Векторную функцию B можно разложить, и притом единственным образом, на две составляющих: $B = \overline{B} + \overline{\overline{B}}$, где $\overline{\overline{B}}$ есть составляющая, направленная по скорости, и $\overline{B}$ — поперечная составляющая. Так что справедливы соотношения

$$\overline{\overline{B}} = f\eta; \tag{6.5}$$

$$(\overline{B}, \eta) = 0. \tag{6.6}$$

Умножим тождество (6.4) слева векторно на η и воспользуемся соотношениями (6.5) и (6.6):

$$\overline{B}=\left(\eta\times G-\eta\times(\dot{m}\eta)\right)\Big/\eta^2. \tag{6.7}$$

Таким образом, векторная функция B будет иметь вид

$$B=f\eta+\left(\eta\times G-\eta\times(\dot{m}\eta)\right)\Big/\eta^2. \tag{6.8}$$

Выбрав функцию f так, чтобы правая часть (6.8) удовлетворяла уравнению (6.1), получим уравнение

$$\dot{f}+f\operatorname{div}\eta+\operatorname{div}\left[\frac{\eta\times G-\eta\times(\dot{m}\eta)}{\eta^2}\right]=0. \tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) получается при подстановке (6.8) в (6.1). При этом надо учесть, что в (6.9), как и выше, точкой обозначается полная производная в силу системы (6.3), т. е.

$$\dot{f}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}\eta_i,$$

где η_i — компоненты вектора η. Уравнение (6.9) рассмотрим как уравнение в частных производных первого порядка для определения функции f; ниже будет показано, что оно имеет решение. Будем предполагать, что такое решение найдено. Это означает, что магнитная индукция (6.8) определится полностью. Подставим функцию (6.8) в систему (6.2). Тогда окажется, что, какова бы ни была функция f, система (6.2) не будет от нее зависеть при $Y=\eta$, так как $Y\times f\eta=0$ при $Y=\eta$. Поэтому в дальнейших рассмотрениях можно выбирать один из вариантов функции f.

Покажем теперь, что движение, определяемое системой (6.2), при таком выборе B будет совпадать с движением, определяемым системой (6.3), если начальные условия этих уравнений будут совпадать.

Это обстоятельство вытекает из того, что система (6.2) имеет интегральное многообразие

$$Y-\eta(X)=0. \tag{6.10}$$

Для того чтобы это показать, введем в рассмотрение векторную функцию

$$Z=Y-\eta(X) \tag{6.11}$$

и вычислим полную производную этой функции в силу системы (6.2):

$$\dot{Z}=F(X,\ Z). \tag{6.12}$$

Непосредственным вычислением можно установить, что $F(X,\ Z)\equiv 0$ при $Z=0$. Рассмотрим систему (6.12) совместно с уравнениями (6.2). В силу теоремы существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений любое решение с начальными данными $X=X_0$, $Y=Y_0$, $Z=Z_0$ при $t=0$ будет обладать свойством

$Z \equiv 0$, если только $Z_0 = 0$. Это и означает, с другой стороны, что система (6.2) имеет интегральное многообразие (6.10). Далее, если интегральная кривая системы (6.2) начинается на интегральном многообразии (6.10), иначе говоря, если $Y_0 = \eta(X_0)$ при $t = 0$, то $Y = \eta(X)$ во все время движения. Это и означает, что решение системы (6.2) будет удовлетворять также уравнениям (6.3) и, следовательно, будет совпадать с соответствующим решением этого уравнения. ■

Рассмотрим сначала тот частный случай, когда функция $G(X, Y) = 0$. При этом уравнения (6.2) примут вид

$$\begin{aligned} &\dot{X} = Y, \\ &(m\dot{Y}) = Y \times B. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Теорема 6.2. *Для любого поля скоростей* (6.3) *существует магнитное поле* $B(X)$ *такое, что движение заряженной частицы, определяемое системой* (6.13), *будет совпадать с движениями системы* (6.3) *при совпадении начальных условий этих движений*; при этом $\eta^2 = \mathrm{const}$, $B = -m\,\mathrm{rot}\,\eta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя соотношение $\eta^2 = \mathrm{const}$ по компонентам вектора X, найдем тождество

$$\left\{\frac{d\eta}{dX}\right\}^* \eta = 0. \tag{6.14}$$

Если магнитное поле B, обладающее указанным в теореме 6.2 свойством, существует, то обязательно будет справедливо равенство

$$m\left\{\frac{d\eta}{dX}\right\}\eta = \eta \times B. \tag{6.15}$$

Из (6.14) и (6.15) находим тождество

$$m\left[\left\{\frac{d\eta}{dX}\right\}^* - \left\{\frac{d\eta}{dX}\right\}\right]\eta = B \times \eta. \tag{6.16}$$

Обозначим через β матрицу:

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда правая часть (6.16) может быть записана в виде $B \times \eta = \beta\eta$, так как b_1, b_2, b_3 являются компонентами вектора B. Из тождества (6.16) вытекает равенство

$$\beta = m\left[\left\{\frac{d\eta}{dX}\right\}^* - \left\{\frac{d\eta}{dX}\right\}\right]. \tag{6.17}$$

Сравнивая в равенстве (6.17) элементы матриц, стоящие в левой и правой частях, найдем также, что магнитное поле B имеет вид $B =$

$= -\mathrm{rot}(m\eta)$. Из этого вытекает, что функцию f, использованную в доказательстве теоремы 6.1, можно представить в форме

$$f = -m(\eta, \mathrm{rot}\,\eta)/\eta^2.$$

При этом выборе функции f теорема 6.1 выполняется и, следовательно, теорема 6.2 является тогда следствием теоремы 6.1. И поэтому дальнейшее доказательство можно провести по аналогии с теоремой 6.1. ■

2. Исследуем случай движения заряженной частицы в стационарном магнитном поле вдоль оси x_1. При этом оказывается, что с помощью стационарного магнитного поля можно решить не только задачу фокусировки, но и задачу ускорения частицы вдоль упомянутого направления. Разумеется, при этом сумма квадратов компонент скорости по всем трем осям остается неизменной.

Рассмотрим уравнения движения заряженных частиц в магнитном поле безразмерной формы:

$$\dot{X} = Y, \tag{6.18}$$

$$\dot{Y} = B \times Y, \tag{6.19}$$

$$\mathrm{rot}\,B = J, \tag{6.20}$$

$$\mathrm{div}\,B = 0. \tag{6.21}$$

Найдем зависимость поля $B = B(X)$ от компонент вектора X так, чтобы движение заряженных частиц вдоль выбранной оси, например оси x_1 декартовой системы $Ox_1x_2x_3$, испытывало фокусирующее влияние поля B и происходило с ускорением вдоль этой оси. В этой постановке задачи ток J является производной величиной и определяется через B при помощи уравнения (6.20). Из уравнения (6.19) имеем, что вектор Y сохраняет неизменный квадрат $Y^2 = \mathrm{const}$ во все время движения. Будем считать для определенности $Y^2 = 1$.

Введем в рассмотрение векторную функцию $\eta = \eta(X)$ с компонентами $\eta_1(X)$, $\eta_2(X)$, $\eta_3(X)$ следующим образом:

$$\eta_1(X) = [1 - \eta_2^2(X) - \eta_3^2(X)]^{1/2},$$

где $\eta_2(X)$ и $\eta_3(X)$ — пока произвольные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию $\eta_2^2(X) + \eta_3^2(X) \leqslant 1$. Представим магнитное поле B в виде

$$B = f(X)\,\eta(X) + \eta(X) \times \left\{\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}X}\right\}\eta, \tag{6.22}$$

где $f(X)$ — произвольная функция, для которой магнитное поле B удовлетворяет лишь условию (6.21). Это условие приводит к уравнению

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f\,\mathrm{div}\,\eta + \mathrm{div}\,B' = 0, \tag{6.23}$$

где $B' = \eta \times \left\{\frac{d\eta}{dX}\right\} \eta$. Полная производная по t в уравнении (6.23) берется вдоль интегральных кривых обыкновенной системы

$$dX/dt = \eta(X)] \tag{6.24}$$

так, что (6.23) является линейным уравнением в частных производных первого порядка по отношению к переменным x_1, x_2, x_3.

Теорема 6.3. *Если функции* $\eta_2(X)$, $\eta_3(X)$ *выбраны так, что система* (6.24) *имеет устойчивое (асимптотически устойчивое) интегральное многообразие* $x_2 = x_3 = 0$, *то система* (6.18), (6.19) *при выборе поля в форме* (6.22) *будет иметь условно устойчивое (асимптотически устойчивое) равновесное движение* $x_2 = x_3 = 0$ *при любом выборе функции* f, *удовлетворяющей условию* (6.23).

Поясним сказанное примером.

Пример. Положим для определенности, что

$$\eta_2(X) = \lambda x_2 - \omega x_3, \quad \eta_3(X) = \omega x_2 + \lambda x_3,$$

где λ и ω — некоторые функции компонент вектора X. Пусть $\lambda = \lambda(R)$, где $R = (x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ и ω — некоторая не обращающаяся в ноль скалярная функция. Тогда каждому корню уравнения $\lambda(R) = 0$ соответствует интегральное многообразие системы (6.24), которое будет асимптотически устойчивым при условии $d\lambda/dR < 0$ или когда разложение функции λ в окрестности упомянутого корня будет иметь вид

$$\lambda(R) = g(R - R_1)^{2k+1}, \quad g < 0, \quad k \geqslant 0, \quad \lambda(R_1) = 0.$$

Система (6.18), (6.19) при таком выборе функций η_2 и η_3 имеет условно асимптотически устойчивые интегральные многообразия $R = R_1$, так что частицы будут группироваться в окрестности упомянутых многообразий.

Доказательство. Первый этап доказательства состоит в выборе векторного поля скоростей $\eta = \eta(X)$. Для определенности можно считать, что $\eta^2(X) = 1$. Если такое поле скоростей порождается магнитным стационарным полем $B(X)$, то поперечная составляющая этого поля B' определяется однозначно формулой

$$B' = \eta \times \left\{\frac{d\eta}{dX}\right\} \eta.$$

Продольная составляющая магнитного поля представляется тогда формулой

$$B - B' = f\eta,$$

причем эта составляющая магнитного поля не влияет на динамику движения частиц, располагающихся на интегральном многообразии $y = \eta(X)$. Однако она определяет ток, конечно, наряду с поперечной составляющей B'.

Второй этап доказательства состоит в установлении того, что в фазовом пространстве системы существует интегральное многообразие $\eta(X) - Y = 0$; иначе говоря, любая частица, имеющая начальное положение X_0 и начальную скорость $\dot{X}_0$ такую, что $\dot{X}_0 = \eta(X_0)$ при

$t=0$, будет во все время движения оставаться на упомянутом интегральном многообразии.

Третий этап состоит в рассмотрении поведения частиц на интегральном многообразии $\eta(X) - Y = 0$. Это рассмотрение приводит к окончательному доказательству теоремы*). ■

Ниже рассматривается задача построения магнитного поля, в котором заряженная частица совершает заданное равновесное движение. При этом в окрестности заданного равновесного движения это поле обладает свойством фокусировки, точнее, упомянутое равновесное движение является орбитально асимптотически устойчивым.

Предположим, что задана равновесная траектория $\varphi = \varphi(\theta)$ в некотором поле $B = B(X)$. Определим структуру этого поля так, чтобы заданное равновесное движение было условно орбитально устойчивым или же условно орбитально асимптотически устойчивым. С этой целью введем в рассмотрение систему уравнений

$$\dot{X} = \eta(X), \tag{6.25}$$

обладающую тем свойством, что траектория равновесного движения является траекторией системы (6.25) и $\eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1$. Обозначим через $P(\theta)$ нормальную гиперплоскость кривой $\varphi = \varphi(\theta)$. Тогда если траектории системы (6.25) начинаются на гиперплоскости $P(0)$ в момент $t=0$ в достаточно малой окрестности $\varphi(0)$, то они при надлежащих условиях на правые части системы (6.25) обязательно пересекут нормальную гиперплоскость $P(\theta)$, причем время пересечения для каждой траектории будет, вообще говоря, различно. Пусть $X = X(t, X_0)$ — одна из таких траекторий. Тогда для момента пересечения t гиперплоскости $P(\theta)$ справедливо соотношение

$$([X(t, X_0) - \varphi(\theta)],\ \varphi'(\theta)) = 0. \tag{6.26}$$

На гиперплоскости $P(\theta)$ введем декартову систему координат с помощью векторов $B_1(\theta)$, $B_2(\theta)$, при этом они удовлетворяют условиям $(B_1(\theta),\ B_2(\theta)) = 0$, $B_1^2(\theta) = B_2^2(\theta) = 1$; тогда

$$X(t, X_0) = \varphi(\theta) + \xi_1 B_1 + \xi_2 B_2. \tag{6.27}$$

Если движение $X(t, X_0)$ известно, то формулы (6.26) и (6.27) единственным образом определяют величины θ, ξ_1, ξ_2. Верно также и обратное утверждение. С помощью системы (6.25), а также соотношений (6.26) и (6.27) найдем дифференциальные уравнения для величин θ, ξ_1, ξ_2. Дифференцируя соотношение (6.26) по t, найдем равенство

$$([X(t) - \varphi(\theta)],\ \varphi''(\theta))\,\dot{\theta} + ([\eta(X) - \varphi'(\theta)\,\dot{\theta}],\ \varphi') = 0,$$

откуда

*) При создании современных ускорителей используются различные типы равновесных траекторий, а не только прямая линия, совпадающая с осью x_1, как это было рассмотрено выше.

$$\dot{\theta} = \frac{(\eta(\varphi(\theta) + B\xi),\ \varphi')}{(\varphi')^2 - (B\xi,\ \varphi'')}. \tag{6.28}$$

Здесь через B обозначена матрица, столбцы которой B_1, B_2; $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Аналогично, дифференцируя (6.27), найдем соотношение $\eta(X) = \varphi'\dot{\theta} + B'\xi\dot{\theta} + B\dot{\xi}$, умножая которое слева на матрицу, транспонированную к B, найдем уравнение

$$\dot{\xi} = B^* \left[\eta(\varphi(\theta) + B\xi) - \frac{(\varphi' + B'\xi)(\eta(\varphi(\theta) + B\xi),\ \varphi')}{(\varphi')^2 - (B\xi,\ \varphi'')}\right]. \tag{6.29}$$

Запишем систему (6.28), (6.29) в символической форме:

$$\dot{\theta} = \zeta_1, \tag{6.30}$$

$$\dot{\xi} = \zeta, \tag{6.31}$$

где $\zeta = (\zeta_2, \zeta_3)$. Для того чтобы равновесная траектория $\varphi = \varphi(t)$ была траекторией системы (6.25), необходимо и достаточно выполнение условия $\zeta = 0$ при $\xi = 0$. Предположим далее, что существуют две функции $V(\theta, \xi)$ и $W(\theta, \xi)$, связанные соотношением

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = W, \tag{6.32}$$

где полная производная вычисляется в силу системы (6.30), (6.31), тогда справедливо соотношение

$$(\operatorname{grad} V,\ \zeta) = W - \frac{\partial W}{\partial \theta}\,\zeta_1. \tag{6.33}$$

Из соотношения (6.33) получим равенство

$$\zeta = \frac{\left(W - \dfrac{\partial V}{\partial \theta}\,\zeta_1\right)\operatorname{grad}^* V}{\|\operatorname{grad} V\|^2} + \psi\bar{V}, \tag{6.34}$$

где ψ — произвольная функция переменных θ и ξ, а $\bar{V}$ — вектор, ортогональный grad V. Если функция ζ_1 заключена между положительными константами хотя бы в некоторой окрестности точки $\xi = 0$, то положение равновесия $\xi = 0$ системы (6.31) устойчиво по Ляпунову, если функция V — положительно определенная, а функция W — знакопостоянная. Если же функция V — положительно определенная и допускает бесконечно малый высший предел, а W — отрицательно определенная, то положение равновесия $\xi = 0$ системы (6.31) будет асимптотически устойчивым. Эти утверждения становятся очевидными, если исключить время из системы (6.31), пользуясь уравнением (6.30).

Совершим теперь обратный переход к исходному фазовому пространству X. Дифференцируя соотношение (6.27) по t, найдем равенство

$$\dot{X} = \varphi'\zeta_1 + B'\xi\zeta_1 + B\zeta. \tag{6.35}$$

Напомним, что в равенстве (6.35) вектор ξ и величина θ являются известными функциями вектора X, причем $\theta = \theta(X)$ есть решение уравнения (6.26), а из (6.27) имеем равенство $\xi = B^*(X - \varphi(\theta))$. Подчиним далее функции ζ_1 и ψ условию $\eta^2 = 1$, где

$$\eta = \zeta_1 \left[\varphi' + B'B^* (X - \varphi) - \frac{\frac{\partial V}{\partial \theta} \operatorname{grad}^* V}{\| \operatorname{grad} V \|^2} \right] +$$

$$+ B\vec{V}\psi + \frac{BW \operatorname{grad}^* V}{\| \operatorname{grad} V \|^2}. \quad (6.36)$$

Определение 6.1. Обозначим через M траекторию $\varphi = \varphi(\theta)$. Равновесная траектория называется *орбитально устойчивой*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\rho(X_0, M) < \delta$ будет $\rho(X(t, X_0)M) < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$, и *орбитально асимптотически устойчивой*, если при этом $\delta(\varepsilon)$ можно выбрать к тому же так, чтобы $\rho(X(t, X_0), M) \to 0$ при $t \to \infty$. Здесь через $\rho(X, M)$ обозначено расстояние от точки X до M, а через $X(t, X_0)$ — решение, проходящее при $t = 0$ через точку X_0.

Теорема 6.4. *Если* 1) *векторная функция* (6.34) *обладает свойством* $\zeta = 0$ *при* $\xi = 0$; 2) *функция* V — *положительно определенная и допускает бесконечно малый высший предел*; 3) *функция* W — *определенно отрицательная и* $dV/dt = W$, *то система* (6.25) *имеет орбитально асимптотически устойчивую установившуюся траекторию* $\varphi = \varphi(\theta)$.

Замечание. В этой теореме подразумевается, что траектория $\varphi = \varphi(\theta)$ является либо простой замкнутой кривой, гомеоморфной окружности, либо самонепересекающейся пространственной кривой, заданной при всех действительных значениях параметра θ. От функций, входящих в правую часть (6.36), требуется выполнение таких свойств, при которых правые части системы (6.25) непрерывны и удовлетворяют условиям теоремы единственности.

Рассмотрим теперь движение заряженной частицы в фазовом пространстве X под действием поля $B = B(X)$:

$$\dot{X} = Y, \quad (6.37)$$

$$\dot{Y} = B(X) \times Y, \quad (6.38)$$

$$\operatorname{rot} B = J, \quad (6.39)$$

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (6.40)$$

Представим векторную функцию B в виде

$$B = f\eta + \eta \times \left(\left\{ \frac{d\eta}{dX} \right\} \eta \right), \quad (6.41)$$

где $\eta = \eta(X)$ определяется равенством (6.36) и f — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию (6.40). Это условие дает соотношение

$$(\operatorname{grad} f,\ \eta) + f \operatorname{div} \eta + \operatorname{div}\left(\eta \times \left(\left\{\frac{d\eta}{dX}\right\} \eta\right)\right) = 0. \tag{6.42}$$

Уравнение (6.42) есть линейное уравнение в частных производных для функции f, которое может быть проинтегрировано с помощью интегралов системы (6.25). Будем считать, что какое-либо решение уравнения (6.42) найдено. Тогда магнитное поле B будет вполне определять ток I и движение заряженных частиц через уравнения (6.37), (6.38).

Все это позволяет сформулировать теорему.

Теорема 6.5. *Система* (6.37), (6.38) *при выборе поля в форме* (6.41) *имеет равновесное движение* $\varphi = \varphi(\theta)$, *которое при выполнении условий теоремы* 6.4 *условно орбитально асимптотически устойчиво.*

3. Равновесная траектория в пространстве конфигураций может быть представлена не только в параметрической форме. Ниже рассматривается тот случай, когда равновесная траектория задается пересечением двух поверхностей. При условии отсутствия электрической составляющей поля уравнения Максвелла будут относиться только к компонентам искомого магнитного поля, а ток, порождающий это поле, является производной величиной.

Найдем строение правых частей системы трех дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = \eta(X), \quad X = (x_1, x_2, x_3), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3), \tag{6.43}$$

которые обладают следующими свойствами: 1) система (6.43) имеет интегральное многообразие

$$F_1(X) = 0, \quad F_2(X) = 0; \tag{6.44}$$

$$2)\quad \eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1. \tag{6.45}$$

Для решения поставленной задачи введем в рассмотрение два единичных ортогональных вектора:

$$a_1 = \frac{\operatorname{grad} F_1}{\sqrt{(\operatorname{grad} F_1)^2}}, \quad a_2 = \frac{\operatorname{grad} F_2 - \lambda \operatorname{grad} F_1}{\sqrt{(\operatorname{grad} F_2 - \lambda \operatorname{grad} F_1)^2}},$$

где $\lambda = (\operatorname{grad} F_1,\ \operatorname{grad} F_2)/(\operatorname{grad} F_1)^2$. Положим, что $a_3 = a_1 \times a_2$; тогда правая часть системы (6.43) может быть представлена в форме

$$\eta = \sum_{i=1}^{3} a_i \varphi_i = A\varphi, \tag{6.46}$$

где A — матрица со столбцами a_1, a_2, a_3, а $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Из условия (6.45) имеем равенство

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_i^2 = 1. \tag{6.47}$$

Так как система (6.43) имеет интегральное многообразие (6.44), то выполняются соотношения

$$(\eta, \operatorname{grad} F_1) = 0, \quad (\eta, \operatorname{grad} F_2) = 0, \tag{6.48}$$

которые справедливы на многообразии (6.44). Отсюда вытекает, что

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0. \tag{6.49}$$

Предположим, что заданы две функции $V = V(X, F_1, F_2)$, $W = W(X, F_1, F_2)$ такие, что для системы (6.43) имеет место соотношение

$$dV/dt = W, \quad (\eta, \operatorname{grad} V) = W. \tag{6.50}$$

Введем в рассмотрение вектор $H = (H_1, H_2, H_3)$, где

$$H_1 = \frac{(a_1, \operatorname{grad} V)}{\mu}, \quad H_2 = \frac{(a_2, \operatorname{grad} V)}{\mu}, \quad H_3 = \frac{(a_3, \operatorname{grad} V)}{\mu},$$

$$\mu = \sqrt{(a_1, \operatorname{grad} V)^2 + (a_2, \operatorname{grad} V)^2 + (a_3, \operatorname{grad} V)^2}.$$

С помощью этих обозначений соотношение (6.50) может быть переписано в виде

$$(H, \varphi) = W/\mu. \tag{6.51}$$

Введем единичный вектор G, ортогональный H. Положим $Q = H \times G$, тогда $(G, \varphi) = \psi_1$, $(Q, \varphi) = \psi_2$. Если положить $\xi = \{\frac{W}{\mu}, \psi_1, \psi_2\}$, то будем иметь равенство

$$\varphi = P^*\xi. \tag{6.52}$$

Из условия (6.47) и равенства (6.52) получаем соотношение

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + W^2/\mu^2 = 1. \tag{6.53}$$

Это обстоятельство вытекает из того, что матрица $P = \begin{pmatrix} H \\ G \\ Q \end{pmatrix}$ ортогональна и $P^{-1} = P^*$, где P^* есть матрица, транспонированная к P. Из условия (6.53) вытекает, что система (6.43), удовлетворяющая условиям (6.44), (6.45), тогда и только тогда будет удовлетворять условию (6.50), когда выполняется неравенство

$$W^2/\mu^2 \leqslant 1. \tag{6.54}$$

Будем считать всюду в дальнейшем, что функции F_1, F_2, W, V удовлетворяют условию (6.54). Из условия (6.53) вытекает также, что

$$\psi_1 = \sqrt{1 - W^2/\mu^2}\sin\psi, \quad \psi_2 = \sqrt{1 - W^2/\mu^2}\cos\psi, \tag{6.55}$$

где $\psi = \psi(X, F_1, F_2)$ — произвольная функция такая, что на интегральном многообразии должно выполняться равенство $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Это означает, что вектор ξ ортогонален первым двум строкам матрицы P, следовательно, этот вектор удовлетворяет соотношению

$$\xi = \pm P_3, \tag{6.56}$$

где P_3 — третий столбец матрицы P, $P_3 = \{H_3, G_3, Q_3\}$.

Итак, окончательно имеем равенство

$$\eta = AP^*\xi, \tag{6.57}$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} W/\mu \\ \sqrt{1 - W^2/\mu^2}\sin\psi \\ \sqrt{1 - W^2/\mu^2}\cos\psi \end{pmatrix}.$$

При этом вектор ξ удовлетворяет тому же условию (6.56) на интегральном многообразии (6.44).

Рассмотрим вопрос об устойчивости интегрального многообразия (6.44). Обозначим это многообразие через M, а расстояние от точки X до этого многообразия — через $\rho(X, M)$.

Определение 6.2. Многообразие (6.44) системы (6.43) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $\rho(X_0, M) < \delta$ будет $\rho(X, M) < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$, где $X = X(t, X_0)$ — решение системы (6.43), проходящее через точку X_0 при $t = 0$.

Определение 6.3. Интегральное многообразие (6.44) называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если оно устойчиво по Ляпунову, и число δ можно выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$\rho(X, M) \to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

$$\rho(X, M) < \varepsilon \text{ при } \rho(X_0, M) < \delta.$$

Теорема 6.6. *Если существуют две функции V и W, удовлетворяющие условиям*: 1) $V = 0$, $W = 0$ *при* $X \in M$, $V > \gamma > 0$, $W < -\gamma$ *при* $\rho(X, M) > \alpha$, *где* $\gamma = \gamma(\alpha) > 0$ *при* $\alpha > 0$; 2) функция V *непрерывно дифференцируема в силу системы* (6.43), *и имеет место соотношение* $(\operatorname{grad} V, \eta) = W$, *то многообразие* (6.44) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Замечание. Если система (6.43) имеет правые части, определяемые соотношением (6.57), функции V и W удовлетворяют условиям (6.54) и условиям 1, 2 теоремы 6.6, то система (6.43) имеет интегральное многообразие (6.44), причем это многообразие будет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Перейдем теперь к построению поля $B(X)$, обладающего свойствами: а) поле $B(X)$ допускает равновесные траектории заряженных частиц, расположенные на многообразии вида (6.44); б) поле $B(X)$ является фокусирующим в окрестности равновесных движений.

Уравнения движения заряженных частиц могут быть записаны в виде

$$\dot{X} = Y, \quad \dot{Y} = B(X) \times Y, \tag{6.58}$$

$$\operatorname{rot} B = J, \tag{6.59}$$

$$\operatorname{div} B = 0. \tag{6.60}$$

Представим векторную функцию B в виде

$$B = f\eta + \eta \times \left(\left\{\frac{d\eta}{dX}\right\}\eta\right), \tag{6.61}$$

где f — произвольная функция, выбираемая таким образом, чтобы поле (6.61) удовлетворяло условию (6.60). Подставляя выражени (6.61) в (6.60), найдем уравнение

$$\dot{f} + f \operatorname{div} \eta + \operatorname{div}\left[\eta \times \left(\left\{\frac{d\eta}{dX}\right\}\eta\right)\right] = 0. \tag{6.62}$$

Полная производная в уравнении (6.62) от функции f берется в сил обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = \eta(X). \tag{6.63}$$

Теорема 6.7. *Система* (6.58), *описывающая в безразмерной форм движение частиц в поле B, имеет равновесное движение, описываемо уравнениями*

$$F_1(X) = 0, \quad F_2(X) = 0, \quad Y = \eta(X). \tag{6.64}$$

Это равновесное движение условно асимптотически устойчиво, есл функции V и W, входящие в конструкцию $\eta(X)$, удовлетворяют тео реме 6.6.

Изучим структуру магнитного стационарного поля, в которо существуют поверхности, заполненные равновесными движениям заряженных частиц, а также выведем характеристики структуры которая обеспечивает условную орбитальную асимптотическую ус тойчивость упомянутых равновесных движений.

Рассмотрим систему трех уравнений

$$\dot{X} = \eta(X), \tag{6.65}$$

относительно которой предположим, что система (6.65) имеет инте гральное многообразие $G(X) = 0$, а также удовлетворяет услови $\eta^2 = 1$. Выясним структуру векторной функции $\eta(X)$, удовлетворяю щей этим двум условиям. Обозначим через $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ декартовы орты причем выберем их так, чтобы выполнялось равенство

$$\boldsymbol{a}_1 = \operatorname{grad}^* G / \| \operatorname{grad} G \|,$$

тогда справедливо соотношение

$$\eta(X) = \boldsymbol{a}_1\varphi_1 + \boldsymbol{a}_2\varphi_2 + \boldsymbol{a}_3\varphi_3 = A\varphi, \tag{6.66}$$

где A — матрица, $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ и φ — вектор, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Из условия $\eta^2 = 1$ получим равенство

$$\varphi^2 = 1. \tag{6.67}$$

Так как система (6.65) имеет интегральное многообразие, то спра ведливо равенство

$$(\mathrm{grad}G, \eta) = 0 \tag{6.68}$$

ри условии $G = 0$; следовательно, имеем $\varphi_1 = 0$ при $G = 0$. Обо-
начим через M множество точек фазового пространства, распола-
ающееся на интегральном многообразии $G = 0$.

Определение 6.4. Интегральное многообразие $G = 0$ назовем *рбитально устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ акое, что при $\rho(X_0, M) < \delta$ будет $\rho(X(t, X_0), M) < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$. сли к тому же число $\delta(\varepsilon)$ можно выбрать так, что $\rho(X(t, X_0), M) \to 0$ ри $t \to \infty$, то интегральное многообразие назовем орбитально асимпто- ически устойчивым.

Предположим, что для системы (6.65) существуют две функции (X) и $W(X)$, связанные соотношением

$$(\mathrm{grad}V, \eta) = W. \tag{6.69}$$

ыясним дальнейшую структуру векторной функции $\eta(X)$, удов- етворяющей условиям (6.66), (6.69). Введем в рассмотрение вектор

$$H_1 = A^* \,\mathrm{grad}^* V / \|A^* \,\mathrm{grad}^* V\|$$

построим такие два вектора H_2 и H_3, что векторы H_1, H_2, H_3 обра- уют правую декартову систему координат. Если обозначить через матрицу, столбцами которой являются эти векторы, то можно за- исать соотношение

$$P^* \varphi = \xi, \tag{6.70}$$

де $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, причем из предыдущего следует, что

$$\xi_1 = W / \|(\mathrm{grad}V, A)\|. \tag{6.71}$$

з (6.70) имеем равенство $\varphi = P\xi$ и, следовательно, $\xi^2 = 1$. Отсюда аходим $\xi_2 = \alpha\cos\psi$, $\xi_3 = \alpha\sin\psi$, где $\alpha = \sqrt{1 - \xi_1^2}$.

Из предыдущего вытекает, что произвольная функция ψ, а также ункции V и W должны удовлетворять соотношениям

$$(P_1, \xi) = 0 \text{ при } G = 0, \tag{6.72}$$

$$\xi_1^2 \leqslant 1, \tag{6.73}$$

де P_1 — первая строка матрицы P. При этих условиях система (6.65) ожет быть записана в форме

$$\dot{X} = \eta(X) = AP\xi. \tag{6.74}$$

Теорема 6.8. *Если* 1) *функция* V *обладает свойством* $V = 0$ *при* $\in M$, $V(X) > \gamma_1 > 0$ *при* $\rho(X, M) > \gamma_2 > 0$; 2) $W = 0$ *при* $\in M$, $W < -\gamma_1 < 0$ *при* $\rho(X, M) > \gamma_2$, *то система* (6.74) *имеет рбитально асимптотически устойчивое интегральное многообразие* $(X) = 0$.

З а м е ч а н и е. В теореме 6.8 предполагается, что функции W, V, а также ункции ψ и G таковы, что правые части системы (6.74) удовлетворяют условиям уществования и единственности решений.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о движении заряженно частицы в стационарном магнитном поле. Определим магнитное пол $B(X)$ соотношением

$$B(X) = f\eta + \eta \times \left(\left\{\frac{d\eta}{dX}\right\}\eta\right). \tag{6.75}$$

Функцию f, являющуюся, вообще говоря, произвольной, выбере так, чтобы удовлетворялось уравнение Максвелла

$$\operatorname{div} B = 0. \tag{6.76}$$

Это уравнение приводит к соотношению

$$(\operatorname{grad} f,\ \eta) + f \operatorname{div}\eta + \operatorname{div}\left[\eta \times \left(\left\{\frac{d\eta}{dX}\right\}\eta\right)\right] = 0. \tag{6.77}$$

Решение уравнения (6.77) может быть осуществлено путем использо вания интегралов системы (6.74).

В безразмерной форме уравнение движения заряженной частиц в этом поле может быть представлено в форме

$$\dot{X} = Y,\ \dot{Y} = B \times Y. \tag{6.78}$$

Поле (6.75) при условии (6.76) единственным образом определяе пространственную плотность тока:

$$\operatorname{rot} B = J. \tag{6.79}$$

При данном рассмотрении эта плотность является производной ве личиной и определяется через B.

Теорема 6.9. *Если выполнены условия теоремы* 6.8 *и поле B опре деляется соотношениями* (6.75), (6.76), *то при любом выборе функци f в системе* (6.78) *существует условно орбитально асимптотическ устойчивое равновесное многообразие* $G(X) = 0,\ Y = \eta(X)$.

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = k\left(\frac{\lambda x}{R} - y\omega\right),\quad \dot{y} = k\left(\omega x + \frac{\lambda_1 y}{R}\right),\quad \dot{z} = k\left((R - R_1)\mu + z\lambda\right), \tag{6.80}$$

где $\lambda_1 = \lambda[R - R_1 - \mu z]$. Здесь λ, ω, μ — некоторые функции вектора (x, y, z), $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, R_1 — положительная постоянная, k — нормирующий мно житель, являющийся функцией вектора (x, y, z) и удовлетворяющий услови $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Положим $V = (R - R_1)^2 + z^2$, имеем уравнение

$$\frac{1}{2}\dot{V} = k\lambda V. \tag{6.81}$$

Предположим, далее, что λ является функцией величины V. Если буде существовать положительное число $\rho_1 < R_1$ такое, что $\lambda = -g_0(V_1 - \rho_1)^{2k+1} + \ldots$, где $V_1 = V^{1/2}$, то при $g_0 > 0$ и $k \geqslant 0$ — целом система (6.80) имеет в качестве интегрального многообразия множество $V = \rho_1^2$. Это интегрально многообразие будет орбитально асимптотически устойчивым. При этом счит ся, что ω и μ являются вполне определенными функциями, принимающими, например, положительные значения. Если же $g_0 < 0$ и функция λ при $V_1 < \rho_1$ остается отрицательной и $\lambda = 0$ при $V = 0$, то система (6.80) имеет орбитально асимптотически устойчивое многообразие $V = 0$, область притяжения которого будет ограничиваться поверхностью $V = \rho_1$.

Возьмем в качестве функции $\eta(X)$, входящей в соотношение (6.75), правые части системы (6.80). Тогда заряженная частица под действием поля B будет двигаться так, что будет существовать равновесное многообразие $V = \rho_1^2$, которое будет условно орбитально асимптотически устойчивым.

Во втором случае это многообразие будет ограничивать область притяжения равновесной орбиты $V = 0$.

4. При построении магнитного стационарного поля использовались решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Рассмотрим систему таких уравнений общего вида и укажем способ отыскания ее решений:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_s} f_s(X, Y) = g_j(X, Y), \; j = 1, \ldots, k. \tag{6.82}$$

Пусть требуется найти решение системы (6.82), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_j = y_{j0}(X), \; j = 1, \ldots, k, \tag{6.83}$$

или в более общем виде: требуется найти решение $y_j = y_j(X)$, удовлетворяющее начальным соотношениям, записанным в неявной форме:

$$z_{j0}(X, Y) = 0, \; j = 1, \ldots, k, \tag{6.84}$$

причем соотношения (6.83) или (6.84) имеют место на начальном многообразии

$$\psi_0(X, Y) = 0. \tag{6.85}$$

Здесь и в дальнейшем будем считать все функции, встречающиеся в равенствах (6.82) — (6.85), заданными при $X \in E_n$, $Y \in E_k$, вещественными, непрерывными и непрерывно дифференцируемыми относительно компонент n-мерного вектора X и k-мерного вектора Y. Кроме того, в случае начальных условий (6.84) будем считать, что матрица $D(z_{10}, \ldots, z_{k0})'$ — неособая в точке $X = X_0$, $Y = Y_0$ и в этой точке удовлетворяются соотношения (6.84).

Теорема 6.10. *Система* (6.82) *имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение* $y_j = y_j(X)$, $j = 1, \ldots, k$, *в области* $\|X - X_0\| \leqslant b$, *удовлетворяющее начальным условиям* (6.84) *на начальном многообразии* (6.85), *если*

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_s} f + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \psi_0}{\partial y_j} g_j \neq 0 \tag{6.86}$$

при $X = X_0$, $Y = Y_0$.

Доказательство. Наряду с системой (6.82) рассмотри[м] систему характеристик

$$\begin{aligned} dx_s/dt &= f_s(X, Y), \quad s = 1, \dots, n, \\ dy_j/dt &= g_j(X, Y), \quad j = 1, \dots, k \end{aligned} \tag{6.87}$$

и дифференциальное уравнение в частных производных

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_s} f_s + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial z}{\partial y_j} g_j = 0. \tag{6.88}$$

Заметим, что система (6.87) является одновременно системой харак[-]теристик для уравнения в частных производных (6.88).

Для системы (6.87) построим интегралы

$$\psi_i(X, Y), \ i = 1, \dots, n+k-1,$$

причем так, чтобы ранг матрицы $\dfrac{D(\psi_1, \dots, \psi_{n+k-1})}{D(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)}$ был раве[н] $n+k-1$ при $X = X_0$, $Y = Y_0$. Такие интегралы для системы обык[-]новенных дифференциальных уравнений существуют.

Из условия (6.86) вытекает немедленно, что якобиа[н] $\dfrac{D(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n+k-1})}{D(X, Y)}$ не равен нулю при $X = X_0$, $Y = Y_0$, так как [в] противном случае частные производные функции ψ_0 являлись бы ли[-]нейными комбинациями соответствующих частных производны[х] функций ψ_i, которые удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_s} f_s + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} g_j = 0, \quad i = 1, \dots, n+k-1. \tag{6.89}$$

А тогда выполнение условия (6.86) было бы невозможно.

Независимость функций $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n+k-1}$ позволяет обратит[ь] уравнения

$$\psi_0 = 0, \psi_i = \zeta_i, \ i = 1, \dots, n+k-1. \tag{6.90}$$

В результате обращения уравнений (6.90) найдем уравнения

$$\begin{aligned} x_s &= \xi_s(\zeta_1, \dots, \zeta_{n+k-1}), \quad s = 1, \dots, n, \\ y_j &= \eta_j(\zeta_1, \dots, \zeta_{n+k-1}), \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{6.91}$$

Пользуясь соотношениями (6.91), исключим переменные x_s, y_j из ле[-]вых частей уравнений (6.84), а затем заменим переменные $\zeta_1, \dots, \zeta_{n+k-1}$ интегралами $\psi_1, \dots, \psi_{n+k-1}$. В результате этой замены получаютс[я] функции

$$z_j = z_j(X, Y). \tag{6.92}$$

Правые части (6.92) являются только функциями интеграло[в]

..., ψ_{n+k-1}, поэтому они необходимо удовлетворяют дифференциальному уравнению (6.88), что можно непосредственно установить, опираясь на равенства (6.89).

Предположим теперь, что векторы X и Y таковы, что выполнено отношение (6.85). Тогда значения интегралов в уравнениях (6.90) будут выражаться функциями ζ_i, $i = 1, \ldots, n+k-1$, и, следовательно, исходя из уравнений (6.91) получится, что функции (6.92) будут совпадать с левыми частями соотношений (6.84):

$$z_j(X, Y) = z_{j0}(X, Y), \ j = 1, \ldots, k.$$

Выше было предположено, что якобиан левых частей соотношений (6.84) отличен от нуля. Поэтому в окрестности точки X_0, Y_0 уравнения

$$z_j(X, Y) = 0, \ j = 1, \ldots, k, \tag{6.93}$$

также будут разрешимы относительно переменных $y_1, \ldots, y_k$ и вне многообразия (6.85). В результате этого разрешения получаются функции

$$y_j = y_j(X), \tag{6.94}$$

которые на многообразии (6.85) необходимо удовлетворяют начальным условиям (6.83).

Покажем теперь, что эти функции дают решение системы (6.82). С этой целью перейдем к векторно-матричной записи. Тогда система (6.82) может быть представлена в форме

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial Y}{\partial x_s} f_s = G. \tag{6.95}$$

Здесь $Y = (y_1, \ldots, y_k)$, $G = (g_1, \ldots, g_k)$, соответственно (6.93) примет вид

$$Z(X, Y) = 0, \ Z = (z_1, \ldots, z_k). \tag{6.96}$$

Дифференцируя уравнения (6.96) по x_s, найдем соотношение

$$\frac{\partial Z}{\partial x_s} + \left\{\frac{dZ}{dY}\right\} \frac{\partial Y}{\partial x_s} = 0,$$

откуда получаем выражение

$$\frac{\partial Y}{\partial x_s} = -\left\{\frac{dZ}{dY}\right\}^{-1} \frac{\partial Z}{\partial x_s}. \tag{6.97}$$

Подставляя выражение (6.97) в систему (6.95) и затем умножая слева на матрицу $\left\{\frac{dZ}{dY}\right\}$, найдем уравнение

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial x_s} f_s + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial Z}{\partial y_j} g_j = 0. \tag{6.98}$$

Легко видеть, что уравнение (6.98) выполняется тождественно, так как компоненты вектора Z удовлетворяют уравнению (6.88). Остается показать, что найденное решение системы (6.82) является единственным. С этой целью введем в рассмотрение систему уравнений

$$\frac{\partial z_j}{\partial \tau} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial z_j}{\partial x_s} \bar{f}_s + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial z_j}{\partial y_i} \bar{g}_i = 0, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{6.99}$$

где

$$\bar{f}_s = \frac{f_s}{\dot{\psi}_0}, \quad \bar{g}_i = \frac{g_i}{\dot{\psi}_0}, \quad \dot{\psi}_0 = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_s} f_s + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi_0}{\partial y_i} g_i.$$

Система (6.99) по доказанному ранее имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям $z_j = z_{j0}$ при $\tau = 0$. Легко видеть, что таким решением системы будет система функций (6.92), так как эти функции являются не зависящими от параметра τ. Далее, уравнения (6.93) определяют, как было показано, искомое решение для системы (6.82). Эти решения являются неявными функциями, которые определяются через систему (6.93) единственным образом, во всяком случае при $\|X - X_0\| \leqslant b$, где b — достаточно малая положительная постоянная. ■

5. Остается рассмотреть случай, когда дополнительное поле сил $G(X, Y)$ не ортогонально заданному полю скоростей при $Y = \eta$. В общем случае построение стационарного магнитного поля, обеспечивающего такое же движение заряженных частиц, как и в заданном поле скоростей, невозможно. Однако здесь имеет место теорема о фокусировке и ускорении заряженных частиц.

Теорема 6.11. *Для любого поля скоростей* (6.3) *и любого силового поля* $G(X, Y)$, *удовлетворяющего условиям* $(\eta, G(X, \eta) - (m\dot{\eta})) = 0$, $m = m_0/\sqrt{1 - \eta^2/c^2}$, *существует магнитное стационарное поле* B, *в котором частицы будут двигаться так же, как и в поле скоростей* (6.3) *при совпадении начальных условий. При этом если векторная функция* $\eta(X)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 6.3 *и* $\eta(X)$ *возрастает при* $x_1 \to +\infty$ *равномерно по отношению к* x_2 и x_3, $|x_2| < a$, $|x_3| < a$, *то упомянутое поле будет фокусировать и ускорять все частицы, располагающиеся на интегральном многообразии* $Y = \eta(X)$.

Доказательство. В рассматриваемом случае векторную функцию $G(X, \eta)$ можно представить в виде

$$G = g\eta + \eta \times G_1(X, \eta),$$

где G_1 — некоторая векторная функция, вполне определенная, и $g = (\eta, (m\dot{\eta}))/\eta^2$.

Магнитное стационарное поле B в этом случае можно искать, как и ранее, в форме $B = \bar{B} + \bar{\bar{B}}$, где $\bar{B} = f\eta$, $\bar{\bar{B}}$ есть вектор, ортогональный полю скоростей η. Этот вектор отыскивается, как и ранее, единственным образом через функции η и G_1. Для функции же f получаются уравнения в частных производных рассмотренного выше типа. После отыскания этой функции (достаточно иметь какой-либо ее вариант) поле B построено. В этом поле заряженные частицы будут двигаться так, что будет существовать интегральное многообразие $Y = \eta(X)$. Остающиеся на этом многообразии частицы будут фокусироваться и ускоряться вдоль оси x_1. ∎

§ 7. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Уравнения электродинамики для электрического поля. — Обратная задача электродинамики. — Электронная оптика

1. При отсутствии магнитной индукции уравнения Максвелла будут относиться только к электрическому полю E:

$$\mathrm{rot}\, E = 0. \tag{7.1}$$

Если φ — электрический потенциал, справедливо равенство

$$E = -\nabla\varphi. \tag{7.2}$$

Предположим, что движение заряженных частиц под действием электрического поля E описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = Y, \quad (m\dot{Y}) = E + G, \tag{7.3}$$

где $G = G(X, Y)$ — векторная функция, являющаяся суммой сил, действующих на заряженную частицу, отличных от сил, определяемых электрическим полем E.

Зададим поле скоростей

$$\dot{X} = \eta(X). \tag{7.4}$$

Теорема 7.1. *Электрическое поле E, в котором заряженные частицы движутся идентично с движениями системы (7.4), существует тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\mathrm{rot}\left[G(X, \eta) - \left\{\frac{\mathrm{d}(m\eta)}{\mathrm{d}X}\right\}\eta\right] = 0, \tag{7.5}$$

где $m = m_0/\sqrt{1 - \eta^2/C^2}$.

Доказательство. Если электрическое поле E существует, то обязательно будет иметь место равенство $E = (\dot{m\eta}) - G(X, \eta)$. Применяя к этому равенству условие (7.1), найдем, что (7.5) выполняется с необходимостью.

Покажем, что справедливо обратное утверждение, а именно: если условие (7.5) выполнено, то существует электрическое поле E, в котором движения будут совпадать с движениями системы (7.4) при наличии одинаковых начальных данных. С этой целью обозначим через ε_1, ε_2, ε_3 компоненты вектора

$\left[\left\{\frac{d(m\eta)}{dX}\right\}\eta - G(X, \eta)\right]$ и пусть $X_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ — некоторая точка пространства. Введем функцию $\varphi(X)$ посредством равенства

$$\varphi(X) = -\int_{x_{10}}^{x_1} \varepsilon_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 -$$

$$-\int_{x_{20}}^{x_2} \varepsilon_2(x_{10}, x_2, x_3)\,dx_2 - \int_{x_{30}}^{x_3} \varepsilon_3(x_{10}, x_{20}, x_3)\,dx_3 \tag{7.6}$$

и покажем, что справедливы равенства

$$\varepsilon_i(X) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7.7}$$

Так как выполнены условия теоремы, то выполняются соотношения

$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x_3} - \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial x_2} = 0.$$

Дифференцируя равенство (7.6) по x_1, найдем $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \varepsilon_1(X)$. Дифференцируя равенство (7.6) по x_2, найдем $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \varepsilon_2(x_{10}, x_2, x_3) + \int_{x_{10}}^{x_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x_2}dx_1$. Применяя предыдущие условия и вычисляя полученный интеграл $\int_{x_{10}}^{x_1}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial x_1}dx_1$, найдем $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \varepsilon_2(X)$. Дифференцируя далее равенство(7.6) по x_3 и применяя дважды условие (7.5), найдем также, что $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = \varepsilon_3$. Таким образом, правая часть равенства (7.6) определяет электрический потенциал φ и, следовательно, электрическое поле $E = -\nabla\varphi$.

Очевидно, что движение заряженных частиц в этом поле, описываемое уравнениями (7.3), будет совпадать с движением в поле скоростей (7.4) при совпадении начальных условий. Для доказательства этого факта покажем сначала, что система (7.3) будет иметь интегральное многообразие

$$Y = \eta(X). \tag{7.8}$$

С этой целью введем в рассмотрение вектор Z:

$$Z = Y - \eta(X) \tag{7.9}$$

и найдем полную производную этого вектора в силу системы (7.3):

$$\dot{Z} = F(X, Z). \tag{7.10}$$

Легко видеть, что правая часть уравнения (7.10) будет удовлетворять условию $F=0$ при $Z=0$. Следовательно, в силу теоремы существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений любое решение совместной системы (7.3), (7.10) с начальными условиями $X=X_0$, $Y=Y_0$, $Z=Z_0$ обладает свойством $Z=0$ при $Z_0=0$. Это означает, что система (7.3) имеет интегральное многообразие (7.8). Если начальные условия движений в системах (7.3) и (7.4) совпадают, иначе говоря, $Y_0=\eta(X_0)$, то эти движения также совпадают, так как движение системы (7.3) будет оставаться на многообразии (7.8). А тогда во все время движения выполняется равенство $Y=\eta(X)$. Первое уравнение системы (7.3) при этом совпадает с уравнением (7.4) и, следовательно, в силу теоремы существования и единственности будут совпадать и решения упомянутых систем.■

2. Рассмотрим обратную задачу электродинамики.

Теорема 7.2. *Если поле скоростей* (7.4) *таково, что существует функция* $u=u(X)$, *удовлетворяющая равенствам*

$$m\eta=\nabla u, \tag{7.11}$$

$$G(X,\eta)=\nabla g(X), \tag{7.12}$$

где g *— некоторая известная функция, то существует электрическое поле* E, *в котором заряженные частицы, двигаясь в соответствии с уравнением* (7.3), *будут совершать те же движения, что и система* (7.4), *при наличии одинаковых начальных условий; оно имеет вид*

$$E=\nabla[mC^2-g]. \tag{7.13}$$

Доказательство. Теорема 7.2 будет доказана, если показать, что при выполнении условий (7.11) и (7.12) будет выполняться равенство (7.5), являющееся в силу теоремы 7.1 необходимым и достаточным условием существования электрического поля, обладающего требуемым свойством.

Чтобы установить выполнение условий (7.5), вычислим полную производную векторной функции $m\eta$ в силу системы (7.4), воспользовавшись равенством (7.11):

$$(\dot{m\eta})=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(m\eta)}{\partial x_i}\eta_i=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\nabla u}{\partial x_i}m\eta_i=\frac{1}{2m}\nabla(m^2\eta^2). \tag{7.14}$$

Вычислим далее величину $m^2\eta^2$. Так как $m=m_0/\sqrt{1-\eta^2/C^2}$, то справедливо равенство

$$m^2\eta^2=C^2[m^2-m_0^2]. \tag{7.15}$$

Из соотношений (7.14) и (7.15) тогда имеем равенство

$$(\dot{m\eta})=\nabla(mC^2). \tag{7.16}$$

Если теперь равенство (7.16) и (7.12) подставить в условие (7.5), то получим тождество. Таким образом, искомое электрическое поле существует и определяется формулой (7.13).

Для того чтобы придать этой формуле окончательный вид, выразим векторную функцию η через исходную скалярную функцию u. Из равенств (7.11) и (7.15) имеем соотношение $m^2\eta^2 = C^2(m^2 - m_0^2) = (\nabla u)^2$. Поэтому выражение массы m через функцию u примет вид $m = \sqrt{m_0^2 + (\nabla u)^2/C^2}$ и, следовательно, из условия (7.11) имеем равенство

$$\eta = \nabla u \Big/ \sqrt{m_0^2 + (\nabla u)^2/C^2}\ . \tag{7.17}$$

Подставляя в выражение (7.13) равенство (7.17), найдем зависимость электрического поля от заданной функции u.■

Замечание. Пусть функция $u = u(X)$ задана. Система (7.4) тогда примет вид

$$\dot{X} = \nabla u \Big/ \sqrt{m_0^2 + (\nabla u)^2/C^2}\ . \tag{7.18}$$

В теореме 7.2 доказывается, что тогда существует единственное электрическое поле E, в котором движения будут совпадать с движениями системы (7.18) при наличии одинаковых начальных данных. При этом оказывается, что если на каком-либо движении $\nabla u \to +\infty$, то на этом движении будет также $\eta^2 \to C^2$.

3. Укажем способ распределения электрических зарядов в пространстве, обеспечивающий решение различных задач, возникающих при транспортировке пучков. В частности, предлагаемый способ распределения зарядов позволяет решить задачу фокусировки и ускорения пучков электронов.

Уравнения движения электрона в стационарном электрическом поле могут быть записаны в форме

$$\frac{dX}{dt} = Y, \qquad \frac{dY}{dt} = E(X), \tag{7.19}$$

где $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ — координаты, описывающие фазовое состояние заряженной частицы. Стационарное электрическое поле $E(X)$ удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} E = \rho, \ \operatorname{rot} E = 0, \tag{7.20}$$

где $\rho = \rho(X)$ — объемная плотность пространственно распределенных электрических зарядов. Задача формирования пучка электронов состоит в отыскании такой плотности распределения ρ, при которой упомянутый пучок обладает требуемыми свойствами, в частности фокусируется и ускоряется.

Перейдем к решению поставленной задачи. Зададим некоторое потенциальное поле скоростей

$$\eta(X) = \nabla u(X). \tag{7.21}$$

Положим, что

$$E(X) = \left\{\frac{d\eta(X)}{dX}\right\}\eta, \tag{7.22}$$

где $\left\{\frac{d\eta(X)}{dX}\right\} = \frac{D(\eta_1, \eta_2, \eta_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}$. Из формулы (7.21) вытекает, что векторная функция $E(X)$ является потенциальной, следовательно, $\mathrm{rot}\, E(X) = 0$. Из формулы (7.22) получаем, что пространственная плотность зарядов определяется формулой

$$\rho(X) = \nabla^2 \eta^2. \tag{7.23}$$

Теорема 7.3. *Пусть выполнены условия:*

1) *функция $u(x_1, x_2, x_3)$ имеет строгий максимум по отношению к величинам x_2, x_3 в точке $x_2 = x_3 = 0$ при $x_1 \geqslant 0$ (иначе говоря, требуется, чтобы функция $(u(x_1, x_2, x_3) - u(x_1, 0, 0))$ была определенно отрицательна по отношению к переменным x_2, x_3);*

2) *$u(x_1, x_2, x_3) - u(x_1, 0, 0) \to 0$ при $x_2 \to 0$, $x_3 \to 0$ равномерно по отношению к $x_1 > 0$;*

3) *$(\nabla u)^2 \to +\infty$ при $x_1 \to +\infty$, $x_2^2 + x_3^2 \leqslant \varepsilon$, где ε — некоторая положительная постоянная;*

4) *справедливо неравенство*

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(u(x_1, x_2, x_3) - u(x_1, 0, 0)) + \frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2}{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha(x_1) W(x_2, x_3),$$

где $W(x_2, x_3)$ — положительно определенная по отношению к x_2, x_3 функция, а $\alpha(x_1)$ — такая неотрицательная функция, что

$$\int_0^{+\infty} \alpha(x_1) \mathrm{d}x_1 = +\infty.$$

Тогда в системе (7.19) существует интегральное многообразие $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, условно асимптотически устойчивое по Ляпунову.

Иначе говоря, если δ-пучки электронов начинаются на многообразии

$$Y = \nabla u \tag{7,24}$$

при $t = 0$, то они, оставаясь на этом многообразии во все время движения, фокусируются вдоль оптической оси $x_2 = x_3 = 0$ и одновременно ускоряются.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала убедимся, что если пространственная плотность зарядов выбрана в соответствии с формулой (7.23), то система (7.19) имеет интегральное многообразие (7.24). Теперь исключаем параметр t и величины x_2 и x_3 рассматриваем на многообразии (7.24) как функции величины x_1. Исследования показывают, что эти функции описывают движения, асимптотически стремящиеся к нулю при $x_1 \to +\infty$. Из этого вытекает условная устойчивость и фокусировка δ-пучков электронов. Остается убедиться, что фокусировка сопровождается также ускорением заряженных частиц, что непосредственно вытекает из неограниченного возрастания величины (∇u^2) вдоль оптической оси. ■

Примеры. 1. Пусть $u = u_1(x_1) + u_2(x_2, x_3)$.

Все условия теоремы выполняются, если функция u_2 — определенно отрицательная, а $u_1 = ax_1 + bx_1^2$, где a и b — положительные постоянные.

2. Положим $u = u_1(x_1) + u_2(x_1, x_2, x_3)$, где функция u_2 периодична по x_1, определенно отрицательна по отношению к x_2 и x_3; $u_1 = ax_1 + p(x_1)$, где $p(x_1)$ — периодическая функция того же периода, что и u_2, a — такая положительная постоянная, что $a + \mathrm{d}p/\mathrm{d}x_1 > 0$.

Если функция $\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2$ — определенно положительная, то выполнены все условия теоремы 7.3, за исключением условия 3. Это приводит к тому, что располагающиеся на интегральном многообразии (7.24) δ-пучки электронов фокусируются, но неограниченно не ускоряются.

Замечания. 1. Релятивистский подход не вносит дополнительных трудностей в отыскание плотности зарядов. Через функцию u в распределение плотности зарядов можно ввести некоторые параметры, с помощью которых можно изменять различные свойства пучков, в частности уменьшать аберрацию.

2. Если электрическое поле E задано, то анализ поведения заряженных частиц осуществляется известными методами. Из приведенного здесь подхода вытекает, что эти методы анализа можно существенно дополнить путем построения интегральных многообразий типа (7.24), так как по заданному электрическому полю E, исходя из уравнений с частными производными первого порядка, можно построить функцию u, связанную с полем соотношением (7.22).

§ 8. ПУЧКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Интегральные инварианты. — Функции и плотности распределения. — Полные системы. — Статистический подход. — Универсальность уравнений Максвелла

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\overset{\circ}{X} = F(X, t), \tag{8.1}$$

правые части которой заданы при $t \in (-\infty, +\infty)$, $X \in E_n$ ($X = (x_1, \ldots, x_n)$, E_n — n-мерное евклидово пространство), вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам. При выполнении этих условий через каждую точку $X_0 \in E_n$ в любой момент $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ проходит единственное решение системы (8.1)

$$X = X(t, X_0, t_0), \tag{8.2}$$

так что $X = X_0$ при $t = t_0$.

Пусть D_{t_0} — некоторое открытое и связное множество фазового пространства E_n. Если $X_0 \in D_{t_0}$, то уравнение (8.2) можно рассматривать как отображение множества D_{t_0} в открытое связное множество D_t, которое образовано множеством векторов (8.2) при $X_0 \in D_{t_0}$. Таким образом, естественной является символическая запись

$$D_t = X(t, D_{t_0}, t_0). \tag{8.3}$$

В точном смысле равенство (8.3) можно представить также формулой

$$D_t = \{X(t, X_0, t_0) \text{ при } X_0 \in D_{t_0}\}. \tag{8.4}$$

Введем в рассмотрение неотрицательную скалярную функцию

$\rho(X, t)$, заданную при $t \in (-\infty, +\infty)$, $X \in E_n$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по всем своим аргументам.

Определение 8.1. Будем говорить, что система (8.1) имеет интегральный инвариант порядка n, если имеет место равенство

$$\int\limits_{D_{t_0}} \rho(X_0, t_0)\, \mathrm{d}x_{10} \dots \mathrm{d}x_{n0} = \int\limits_{D_t} \rho(X, t)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \tag{8.5}$$

для любой области D_{t_0}.

Функцию $\rho(X, t)$ называют *ядром* или *плотностью интегрального инварианта.*

Предположим, что система (8.1) имеет интегральный инвариант с ядром $\rho(X, t)$. Выясним связь, существующую вследствие (8.5) между функциями, входящими в правую часть системы (8.1), и плотностью $\rho(X, t)$. Для этого преобразуем правую часть равенства (8.5) путем замены переменных интегрирования по формуле (8.2):

$$\int\limits_{D_t} \rho(X, t)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \int\limits_{D_{t_0}} \rho(X(t, X_0, t_0), t) \frac{\mathrm{D}X(t, X_0, t_0)}{\mathrm{D}X_0} \mathrm{d}x_{10} \dots \mathrm{d}x_{n0}. \tag{8.6}$$

Величина $\Delta = DX(t, X_0, t_0)/\mathrm{D}X_0$, стоящая под знаком интеграла в (8.6), является якобианом преобразований переменных интегрирования по формуле (8.2).

Чтобы вычислить этот якобиан, следует найти дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют столбцы матрицы Якоби $\left\{\frac{\mathrm{D}X(t, X_0, t_0)}{\mathrm{D}X_0}\right\}$. С этой целью подставим уравнение (8.2) в уравнение (8.1) и продифференцируем последовательно полученные тождества по компонентам вектора X_0:

$$\dot{\xi}_j = \left\{\frac{\mathrm{D}F(X(t, X_0, t_0), t)}{\mathrm{D}X}\right\} \xi_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{8.7}$$

где $\xi_j - \partial X(t, X_0, t_0)/\partial x_{j0}$. Из уравнения (8.7) вытекает, что матрица Якоби $\left\{\frac{\mathrm{D}X(t, X_0, t_0)}{\mathrm{D}X_0}\right\} = \Xi$ будет являться матрицей фундаментальной системы решений для линейной системы

$$\dot{\xi} = \left\{\frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}X}\right\} \xi, \tag{8.8}$$

так как $\Xi = E$ при $t = t_0$, где E — единичная матрица. Это последнее утверждение вытекает из того, что при подстановке (8.2) в уравнение (8.1) и последующем интегрировании по t в пределах $[t_0, t]$ получается тождество

$$X(t, X_0, t_0) = X_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F \mathrm{d}t.$$

Дифференцируя это тождество по x_{j0} и полагая $t = t_0$, находим

$\xi_j = e_j$ при $t = t_0$, где e_j — единичный вектор, являющийся j-м столбцом матрицы E.

Вычисление определителя матрицы Ξ можно осуществить теперь по теореме Лиувилля:

$$\Delta = e^{\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\left\{\frac{DF(X(t, X_0, t_0), t)}{DX}\right\} dt},$$

где Sp означает след матрицы. Действительно, если систему (8.8) представить в форме

$$\dot{\xi} = P\xi, \tag{8.9}$$

где $P = \{p_{ij}\}$, то можно через элементы матрицы P вычислить производную определителя Δ. Известно, что эта производная выражается суммой определителей вида Δ с продифференцированной одной строкой. Продифференцированная строка может быть заменена с помощью системы (8.9), где следует положить $\xi = \Xi$. Тогда в этой строке появятся линейные комбинации остальных строк матрицы Ξ с коэффициентами p_{sj}, $j = 1, \ldots, n$. Это обстоятельство позволяет рассматриваемый определитель разложить на сумму, в которой лишь одно слагаемое может быть отлично от нуля, а именно слагаемое, соответствующее $j = s$. Это приводит к равенству

$$\dot{\Delta} = \Delta \sum_{s=1}^{n} p_{ss}.$$

Интегрирование этого соотношения при начальном условии $\Delta = 1$, $t = t_0$ и приводит к указанной выше формуле при замене

$$p_{ss} = \frac{\partial f_s(X(t, X_0, t_0), t)}{\partial x_s}.$$

Подставляя найденное значение якобиана в уравнение (8.6) и используя равенство (8.5), найдем тождество

$$\int\limits_{D_{t_0}} \rho(X_0, t_0)\, dx_{10} \ldots dx_{n0} =$$

$$= \int\limits_{D_{t_0}} \rho(X(t, X_0, t_0), t)\, \Delta dx_{10} \ldots dn_{n0}. \tag{8.10}$$

Дифференцируя уравнение (8.10) по t, находим уравнение

$$\int\limits_{D_{t_0}} \frac{d}{dt}[\rho(X(t, X_0, t_0), t)\Delta]\, dx_{10} \ldots dx_{n0} = 0. \tag{8.11}$$

Ввиду того что начальное множество D_{t_0} является произвольной областью фазового пространства, из уравнения (8.11) вытекает соотношение

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\left(X\left(t,\ X_0,\ t_0\right),\ t\right)\Delta\right]=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_s}\dot{x}_s\Delta+\rho\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_s}{\partial x_s}\Delta=0.$$

Освобождаясь от положительного множителя Δ и переходя к прежним переменным в соответствии с равенствами (8.2), найдем уравнение

$$\frac{\partial\rho\left(X,\ t\right)}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial\rho\left(X,\ t\right)}{\partial x_s}f_s\left(X,\ t\right)\right]+\rho\left(X,\ t\right)\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_s\left(X,\ t\right)}{\partial x_s},\tag{8.12}$$

где $f_1,\ \ldots,\ f_n$ есть компоненты вектора F, входящего в правую часть системы (8.1).

Будем рассматривать уравнение (8.12) как уравнение в частных производных для определения плотности интегрального инварианта. Установим условия, при которых уравнение (8.12) имеет неотрицательное, не обращающееся тождественно в ноль решение.

Так как уравнение (8.2) удовлетворяет начальному условию $X = X_0$ при $t = t_0$ и якобиан $\frac{DX(t,\ X_0,\ t_0)}{DX_0} = 1$ при $t = t_0$, то по теореме существования неявных функций равенства (8.2) определяют неявную функцию

$$X_0 = G(X,\ t,\ t_0).\tag{8.13}$$

Учитывая приведенные замечания, можно сформулировать теорему.

Теорема 8.1. *Если* 1) *решение* (8.2) *системы* (8.1) *существует при* $t\in(-\infty,\ +\infty)$, $t_0\in(-\infty,\ +\infty)$, $X_0\in E_n$, 2) *векторная функция* (8.13) *существует при* $t\in(-\infty,\ +\infty)$, $t_0\in(-\infty,\ +\infty)$, $X\in E_n$, *то каждой неотрицательной функции* $\rho_0(X)\not\equiv 0$, *заданной при* $X\in E_n$, *непрерывно дифференцируемой по всем своим аргументам, отвечает единственное неотрицательное решение* $\rho(X,\ t)$ *уравнения* (8.12) *такое, что* $\rho(X,\ t)=\rho_0(X)$ *при* $t = t_0$. *При этом* $\rho(X,\ t)$ *является ядром интегрального инварианта системы* (8.1).

Доказательство. К системе (8.1) присоединим уравнение

$$\dot{\rho} = -\rho\operatorname{div}\ F,\tag{8.14}$$

где $\operatorname{div} F = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_s}{\partial x_s}$. Пользуясь уравнением (8.2), исключим X из правой части уравнения (8.14). Тогда, интегрируя получающиеся равенства, будем иметь равенство

$$\rho=\rho_0\left(X_0\right)e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\operatorname{div}F\left(X\left(\tau,\ X_0,\ t_0\right),\ \tau\right)d\tau}.\tag{8.15}$$

Пользуясь уравнением (8.13), исключим из правой части равенства (8.15) вектор X_0:

$$\rho = \rho_0(G(X, t, t_0))\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{div} F(X(\tau, G(X, t, t_0), t_0), \tau)\, d\tau}. \tag{8.16}$$

Покажем, что функция (8.16) является плотностью интегрального инварианта системы (8.1). С этой целью установим сначала, что функция (8.16) удовлетворяет уравнению (8.12). Подставляя функцию (8.16) в (8.12), получаем равенство

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} f_s \frac{\partial \rho}{\partial x_s} + \rho \operatorname{div} F = \left[\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} f_s \frac{\partial \rho_0}{\partial x_s}\right] \times$$

$$\times\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{div} F(X(\tau, G(X, t, t_0), t_0), \tau)\, d\tau} +$$

$$+ \rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t}\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{div} F(X(\tau, G(X, t, t_0), t_0), \tau)\, d\tau} +\right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{n} f_s \frac{\partial}{\partial x_s}\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{div} F(X(\tau, G(X t, t_0), t_0), \tau)\, d\tau}\right] + \rho \operatorname{div} F. \tag{8.17}$$

Функция ρ_0 зависит только от векторной функции, компоненты которой являются первыми интегралами системы (8.1), поэтому первая скобка в правой части равенства (8.17) обращается тождественно в ноль. Второе слагаемое в правой части равенства (8.17) может быть преобразовано к виду

$$-\rho_0 e^{-\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{div} F(X(\tau, G(X, t, t_0), t_0), \tau)\, d\tau} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{div} F(X(\tau, G(X, t, t_0), t_0), \tau)\, d\tau +\right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{n} f_s \frac{\partial}{\partial x_s} \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{div} F(X(\tau, G(X, t, t_0), t_0), \tau)\, d\tau\right] =$$

$$= -\rho \left[\operatorname{div} F + \int\limits_{t_0}^{t} \left\{\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} F(X(\tau, G(X, t, t_0), t_0), \tau) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{s=1}^{n} f_s \frac{\partial}{\partial x_s} \operatorname{div} F(X(\tau, G(X, t, t_0), t_0), \tau)\right\} d\tau\right] = -\rho \operatorname{div} F. \tag{8.18}$$

При получении равенства (8.18) также используется тот факт, что $\operatorname{div} F(X(\tau, G(X, t, t_0), t_0), \tau)$, как функция переменных X и t, является первым интегралом системы (8.1). Из уравнения (8.18) вытекает, что правая часть равенства (8.17) тождественно равна нулю и, следовательно, функция (8.16) удовлетворяет уравнению (8.12).

Покажем, теперь, что эта функция является ядром интегрального инварианта для системы (8.1). Умножим уравнение (8.12) на якобиан Δ и проинтегрируем затем по переменным $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ по области D_{t_0}:

$$\int\limits_{D_{t_0}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} f_s \frac{\partial \rho}{\partial x_s} + \rho \operatorname{div} F \right] \Delta \mathrm{d}x_{10} \ldots \mathrm{d}x_{n0} =$$

$$= \int\limits_{D_{t_0}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\rho\Delta)\, \mathrm{d}x_{10} \ldots \mathrm{d}x_{n0} = 0.$$

Интегрируя это последнее соотношение в пределах от t_0 до t, получаем равенство

$$\int\limits_{D_{t_0}} (\rho\Delta)\, \mathrm{d}x_{10} \ldots \mathrm{d}x_{n0} = \int\limits_{D_{t_0}} \rho(X_0, t_0)\, \mathrm{d}x_{10} \ldots \mathrm{d}x_{n0}.$$

В левой части этого равенства произведем переход к переменным $x_1, \ldots, x_n$, пользуясь уравнением (8.2) или, точнее, уравнением (8.13). Известно, что якобиан $\mathrm{D}X_0$ является обратной величиной по отношению к якобиану Δ, поэтому

$$\int\limits_{D_t} \rho(X, t)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int\limits_{D_{t_0}} \rho(X_0, t_0)\, \mathrm{d}x_{10} \ldots \mathrm{d}x_{n0}. \blacksquare$$

Следствие 1. *Если система* (8.1) *имеет два интегральных инварианта с плотностями* ρ_1 *и* ρ_2, *то функция* $g(X, t) = \rho_1/\rho_2$ *является первым интегралом системы* (8.1). *При этом предполагается, что функция* $g(X, t)$ *не является константой.*

Обозначим через $\rho_{i_0}(X)$ значения, которые принимает функция ρ_i при $t = t_0$. Тогда по теореме (8.1) имеем уравнение

$$\rho_i = \rho_{i0}(G(X, t, t_0))\, \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{div} F(X(\tau, G(X, t, t_0), t_0), \tau)\, \mathrm{d}\tau}. \tag{8.19}$$

Из уравнения (8.19) вытекает, что функция $g(X, t)$ будет выражаться через первые интегралы системы (8.1) и, следовательно, будет сама являться первым интегралом этой системы.

Покажем теперь, что это утверждение имеет место и в общем случае, а именно требуется показать, что

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} f_s \frac{\partial g}{\partial x_s} \equiv 0.$$

Если обозначить через L оператор дифференцирования вдоль решений системы (8.1), то последнее равенство можно представить в форме $L(g)=0$:

$$L\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)=\frac{\rho_2 L(\rho_1)-\rho_1 L(\rho_2)}{\rho_2^2}=\frac{\rho_1\rho_2 \operatorname{div} F-\rho_2\rho_1 \operatorname{div} F}{\rho_2^2}\equiv 0.$$

Здесь использовано соотношение $L(\rho_i)=-\rho_i \operatorname{div} F$, вытекающее из (8.12). ∎

Следствие 2. *Если* $\operatorname{div} F=\sigma(t)$ *есть функция только независимой переменной* t, *то существует интегральный инвариант с плотностью* $\rho(t)=\exp[-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)d\tau]$. *В частности, при выполнении условия Эйлера* $\operatorname{div} F=0$ *будет существовать интегральный инвариант* $\rho=1$ *и сохраняется фазовый объем. В общем случае если существует функция* $\psi(X, t)$, *заданная при* $t\in(-\infty, +\infty)$, $X\in E_n$, *вещественная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая, удовлетворяющая условию* $\operatorname{div} F=\sigma(\psi)L(\psi)$, *то система* (8.1) *имеет интегральный инвариант*

$$\rho=e^{-\int_0^{\psi}\sigma(\tau)\,d\tau}. \tag{8.20}$$

Это последнее утверждение проверяется непосредственной подстановкой (8.20) в (8.12). При этом с помощью непосредственных вычислений удается установить, что (8.20) является решением (8.12). ∎

Следствие 3. *Если* $\operatorname{div} F=0$ *и система* (8.1) *имеет интегральные инварианты с плотностями* $\rho_1, \ldots, \rho_k$, *то она также будет иметь интегральный инвариант с плотностью* $\rho=\varphi(\rho_1, \ldots, \rho_k)$, *где* φ — *неотрицательная, тождественно не равная нулю функция, непрерывно дифференцируемая по своим аргументам. При этом функция* φ *должна быть задана при неотрицательных значениях своих аргументов.*

Сделанные здесь утверждения вытекают из того, что при условии $\operatorname{div} F=0$ плотности интегральных инвариантов являются первыми интегралами системы (8.1), поэтому любая неотрицательная функция φ с упомянутыми свойствами будет также являться первым интегралом системы (8.1) и, следовательно, удовлетворять уравнению (8.12), а по доказанному в теореме 8.1 будет непременно являться плотностью интегрального инварианта этой системы. ∎

2. Рассмотрим некоторые вопросы функций и плотностей распределения.

Определение 8.2. Функция $p(X, t)$, заданная при $t\in(-\infty, +\infty)$, $X\in E_n$, непрерывно дифференцируемая относительно своих аргументов, принимающая неотрицательные значения и такая, что $\int_{E_n} p(X, t)dx_1, \ldots, dx_n=1$, называется *плотностью функции распределения* $h(X, t)=\int_{-\infty}^{x_1}\ldots\int_{-\infty}^{x_n}p(X, t)dx_1 \ldots dx_n$.

Определение 8.3. Функция распределения $h(X, t)$ называется *функцией распределения фазовых состояний* системы (8.1), если она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_s} f_s = 0. \tag{8.21}$$

Теорема 8.2. *Если система* (8.1) *имеет интегральный инвариант с ядром* $\rho(X, t)$, *удовлетворяющим условию*

$\int\limits_{E_n} \rho(X,t)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n < +\infty$, *то система* (8.1)

имеет функцию распределения фазовых состояний с плотностью

$$p(X, t) = \rho(X, t) \Big/ \int\limits_{E_n} \rho(X, t)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Доказательство. Так как функция $\rho(X, t)$ является ядром интегрального инварианта, то $\int\limits_{E_n} \rho(X, t)\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ не зависит от t (здесь мы предполагаем, что система (8.1) отображает E_n на себя с помощью преобразования (8.2)). Следовательно, функция $p(X, t)$ также будет ядром некоторого интегрального инварианта и удовлетворяет уравнению (8.12). Введем обозначение

$$h(X, t) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(X, t)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n. \tag{8.22}$$

Покажем, что функция распределения (8.22) является функцией распределения фазовых состояний системы (8.1). Иначе говоря, функция (8.22) удовлетворяет уравнению (8.21).

Левую часть уравнения (8.21) можно рассматривать как производную, вычисленную от функции h в силу системы (8.1). Действительно, пусть $X(t+\tau, X, t)$ есть решение системы (8.1), проходящее через точку X при $\tau = 0$. Это обозначение может быть получено из (8.2), если в правой части t заменить на $t_0 + \tau$, а затем t_0 и X_0 заменить на t и X. Согласно определению, производная функции h в силу системы (8.1) задается формулой

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \lim_{\tau \to 0} \frac{h(X(t+\tau, X, t), t+\tau) - h(X, t)}{\tau}. \tag{8.23}$$

Подставляя выражение (8.22) в формулу (8.23) и заменяя переменные интегрирования, получаем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \lim_{\tau \to 0} \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} \frac{p(X(t+\tau, X, t), t+\tau)\,\Delta - p(X, t)}{\tau}\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n, \tag{8.24}$$

где Δ есть якобиан преобразования переменных интегрирования:

$$\Delta = \exp\left[\int_t^{t+\tau} \operatorname{div} F(X(\theta, X, t), \theta)\, d\theta\right].$$

Осуществляя предельный переход под знаком интеграла в уравнении (8.24), т. е. вычисляя производную по τ от числителя подынтегральной функции, найдем $dh/dt = 0$. Это и означает, что функция h является решением уравнения в частных производных (8.21).

Таким образом, установлено, что если плотность $p(X, t)$ удовлетворяет уравнению (8.12), то функция распределения (8.22) удовлетворяет уравнению (8.21) и, следовательно, является функцией распределения фазовых состояний системы (8.1). ∎

Определение 8.4. Будем говорить, что функции распределения фазовых состояний системы (8.1) $h_1(X, t), \ldots, h_n(X, t)$ образуют *фундаментальную систему*, если любая функция распределения $h(X, t)$ фазовых состояний системы (8.1) однозначно выражается через распределение начальных состояний $h(X, t_0)$ и функций фундаментальной системы $h_s(X, t)$, $s = 1, \ldots, n$.

Теорема 8.3. *Если выполнены условия теоремы* 8.1, *то существует фундаментальная система функций распределения фазовых состояний системы* (8.1).

Доказательство. Выберем плотности $p_{s0}(X)$, $s = 1, \ldots, n$, и построим функции распределения

$$h_{s0}(X) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p_{s0}(X)\, dx_1 \ldots dx_n, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{8.26}$$

так, чтобы уравнения

$$h_{s0}(X) = \pi_s, \quad s = 1, \ldots, n \tag{8.27}$$

были однозначно разрешимы относительно компонент вектора

$$x_s = \varphi_s(\pi_1, \ldots, \pi_n), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{8.28}$$

Далее будет показано, что функции p_{s0}, $s = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие этим условиям, существуют. Считая, что функции p_{s0}, $s = 1, \ldots, n$, выбраны, построим решение уравнения (8.21) $h_s(X, t)$ с начальными условиями

$$h_s(X, t) = p_{s0}(X) \quad \text{при} \quad t = t_0, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{8.29}$$

Введем обозначения

$$h_s(X, t) = h_{s0}(G(X, t, t_0)), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{8.30}$$

Компоненты вектора $G(X, t, t_0)$, как следует из (8.13), являются первыми интегралами системы (8.1), поэтому функции (8.30) также будут первыми интегралами этой системы и поэтому будут удовлетворять уравнению (8.21). Кроме того, векторная функция G при $t = t_0$

обращается в X и, следовательно, функции (8.30) удовлетворяют начальным условиям (8.29).

Покажем теперь, что любая функция распределения $h(X, t)$ фазовых состояний системы (8.1) однозначно определяется начальным распределением $h(X, t_0) = h_0(X)$ и функциями (8.30).

Рассмотрим функцию

$$h_0(\varphi_1(h_1(X, t), \ldots, h_n(X, t)), \ldots, \varphi_n(h_1(X, t), \ldots, h_n(X, t))). \tag{8.31}$$

Функция (8.31) является первым интегралом системы (8.1) и поэтому удовлетворяет уравнению (8.21). Если положить $t = t_0$, то в силу предыдущих построений будем иметь равенства

$$h_s = h_{s0}, \quad s = 1, \ \ldots, \ n,$$

$$\varphi_s(h_{10}, \ \ldots, \ h_{n0}) = x_s, \quad s = 1, \ \ldots, \ n,$$

и, следовательно, функция (8.31) удовлетворяет тому же начальному условию, что и функция $h(X, t)$. Следовательно, эти функции совпадают в силу имеющейся единственности решений начальной задачи для уравнения (8.21). Отсюда вытекает, что система (8.30) функций распределения фазовых состояний является фундаментальной.

Для завершения доказательства остается показать, что плотности p_{s0}, $s = 1, \ldots, n$, удовлетворяющие указанным выше свойствам, существуют.

Введем функцию $N(x)$, имеющую вид

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Построим функции h_{s0} так, чтобы выполнялись соотношения

$$h_{s0} = N(x_s) h_{n0}, \quad s = 1, \ \ldots, \ n - 1,$$

$$h_{n0} = N(x_1) N(x_2) \ \ldots \ N(x_n).$$

При таком задании функций h_{s0} плотности p_{s0} определяются очевидным образом:

$$p_{s0} = \frac{2N(x_s)\, e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{2}}}{(2\pi)^{n/2}}, \quad s = 1, \ldots, n-1,$$

$$p_{n0} = \frac{e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{2}}}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Уравнения (8.27) при таком выборе функций h_{s0} будут разрешимы единственным образом, так что функции φ_s, $s = 1, \ldots, n$, будут заданы при $\pi_s \in (0, 1)$, $s = 1, \ \ldots, \ n$. ■

Замечание 1. Функции (8.30) можно представить также в другой эквивалентной форме.

С этой целью найдем ядра интегральных инвариантов $p_s(X, t)$, удовлетворяющие уравнениям (8.12) и начальным условиям $p_s(X, t) = p_{s0}$ при $t = t_0$. И затем положим

$$h_s(X, t) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p_s(X, t)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{8.32}$$

Функции (8.32) удовлетворяют тем же начальным условиям, что и функции (8.30), и согласно теореме (8.2) удовлетворяют уравнениям (8.21). Ввиду имеющейся единственности решений заключаем, что функции (8.30) и (8.32) совпадают. Это обстоятельство можно установить также непосредственно путем замены переменных интегрирования по формулам (8.13). ▩

Замечание 2. Если в уравнения (8.27) подставить функции (8.30), то равенства (8.28) примут вид

$$g_s(X, t, t_0) = \varphi_s(\pi_1, \ldots, \pi_n), \quad s = 1, \ldots, n, \tag{8.33}$$

где g_s — компоненты векторной функции G.

Из сделанных предположений вытекает, что уравнения (8.33) разрешимы относительно компонент вектора X, так что будем иметь функцию

$$X = X(t, \pi_1, \ldots, \pi_n). \tag{8.34}$$

Покажем, что векторная функция (8.34) является общим решением системы (8.1). Это означает, что для любого начального вектора X_0 можно указать такие значения переменных $\pi_1, \ldots, \pi_n$, при которых решение (8.34) будет проходить через точку X_0 при $t = t_0$. Заметим, что для этого достаточно в равенствах (8.34) положить $\pi_s = h_{s0}(X_0)$. Из этого вытекает, что фундаментальная система функций распределения фазовых состояний дает возможность построить общее решение, а также решение любой начальной задачи. ▩

Замечание 3. Если начальные условия в системе (8.1) детерминированы, то знание нескольких частных решений, как правило, не позволяет построить общее решение этой системы. В качестве одного исключения можно указать тот случай, когда правые части системы (8.1) являются линейными. Тогда любое решение можно построить через его начальные данные и полную систему независимых решений. В предыдущем замечании было показано, что система (8.1) обладает таким свойством в общем случае, если отказаться от детерминированных начальных условий и перейти к функциям распределения фазовых состояний системы.

3. Введем понятие полных систем интегральных инвариантов.

Определение 8.5. Система интегральных инвариантов с ядрами $\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}$ называется *полной*, если любой другой интегральный инвариант системы (8.1) с ядром $\rho(X, t)$ выражается однозначно через начальное значение плотности $\rho(X, t_0)$ и ядра $\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}$.

Теорема 8.4. *Если выполнены условия теоремы* 8.1, *то система* (8.1) *имеет полную систему интегральных инвариантов.*

Доказательство. Выберем неотрицательные функции $\rho_{s0}(X)$, $s = 1, \ldots, n$, заданные при $X \in E_n$, непрерывно дифференцируемые и такие, что уравнения

$$\rho_{s0}(X) = \theta_s, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{8.35}$$

однозначно разрешимы относительно компонент вектора X:

$$x_s = \psi_s(\theta_1, \ldots, \theta_n), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{8.36}$$

Положим также $\rho_{n+1\,0} = 1$ и построим решения $\rho_s(X, t)$ уравнения (8.12) с начальными данными ρ_{s0}, $s = 1, \ldots, n+1$.

Пусть задан интегральный инвариант с плотностью $\rho(X, t)$, $\rho(X, t) = \rho_0(X)$ при $t = t_0$. Функция

$$\rho(X, t)/\rho_{n+1}(X, t) \tag{8.37}$$

является первым интегралом системы (8.1) и, следовательно, удовлетворяет уравнению (8.21) и начальному условию

$$\rho(X, t)/\rho_{n+1}(X, t) = \rho_0(X) \text{ при } t = t_0.$$

Функция

$$\rho_0\left(\psi_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_{n+1}}, \frac{\rho_2}{\rho_{n+1}}, \ldots, \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}\right), \ldots, \psi_n\left(\frac{\rho_1}{\rho_{n+1}}, \frac{\rho_2}{\rho_{n+1}}, \ldots, \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}\right)\right) \tag{8.38}$$

также является первым интегралом системы (8.1) и, следовательно, удовлетворяет уравнению (8.21), так как функции ρ_s/ρ_{n+1}, $s = 1, \ldots, n$, есть первые интегралы системы (8.1). При $t = t_0$ эти интегралы обращаются в известные функции ρ_{s0}, а тогда из уравнений (8.35) и (8.36) вытекает, что функция (8.38) принимает значение $\rho_0(X)$ при $t = t_0$.

В силу имеющейся единственности решений уравнений (8.21) функции (8.37) и (8.38) будут совпадать, поэтому справедливо равенство

$$\rho(X, t) = \rho_{n+1}\rho_0\left(\psi_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_{n+1}}, \frac{\rho_2}{\rho_{n+1}}, \ldots, \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}\right), \ldots, \psi_n\left(\frac{\rho_1}{\rho_{n+1}}, \frac{\rho_2}{\rho_{n+1}}, \ldots, \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}\right)\right).$$

Это и означает, что система (8.1) имеет полную систему интегральных инвариантов с ядрами $\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}$. ■

4. Перейдем теперь к исследованию движения заряженных частиц. Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &(\dot{my}) = q(E + y \times B). \end{aligned} \tag{8.39}$$

Электрическое поле E и магнитное B подчиняются уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ &\frac{\operatorname{rot} B}{\mu_0} = J + \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}, \\ &\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{div} E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \tag{8.40}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$ — координаты частицы в некоторой декартовой неподвижной системе, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — проекции скорости на оси этой системы, m — масса, q — заряд частицы. Так как заряженные частицы в пространстве конфигураций не могут возникать или исчезать, то естественно считать, что система

$$\dot{x} = \eta(x, t), \tag{8.41}$$

задающая поле скоростей в пространстве конфигураций, описывает взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение этого пространства на себя. Иначе говоря, без ограничения общности можно предполагать, что условия теоремы 8.1 для системы (8.41) выполняются. Тогда существует фундаментальная система функций распределения $h_s(x, t)$, $s = 1, 2, 3$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x_1}\eta_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2}\eta_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3}\eta_3 = 0, \tag{8.42}$$

где η_1, η_2, η_3 — компоненты векторной функции η. Заметим, что если задать функции распределения h_s, $s = 1, 2, 3$, и считать, что они независимы, т. е.

$$\frac{D(h_1, h_2, h_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \neq 0 \text{ при } x \in E_3,$$

то правая часть системы (8.41) через уравнение (8.42) определится единственным образом по формуле

$$\eta = -\left\{\frac{Dh}{Dx}\right\}^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}, \tag{8.43}$$

где $h = (h_1, h_2, h_3)$. Далее, если система (8.41) удовлетворяет условиям теоремы 8.1, то существует полная система интегральных инвариантов с ядрами ρ_s, $s = 1, 2, 3, 4$. При этом всегда можно считать, что $\rho_4(X, t) \neq 0$. Как было установлено выше, функции

$$\psi_s = \rho_s/\rho_4, \quad s = 1, 2, 3 \tag{8.44}$$

являются первыми интегралами системы (8.41), иначе говоря, удовлетворяют уравнению (8.42).

Из этого вытекает, что правая часть системы (8.41) может быть выражена также через ядра интегральных инвариантов:

$$\eta = -\left\{\frac{D\psi}{Dx}\right\} \frac{\partial\psi}{\partial t}, \text{ где } \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3). \tag{8.45}$$

Теорема 8.5. *Если h_1, h_2, h_3 есть фундаментальная система функций распределения для уравнения (8.41), то существуют пространственная плотность тока J и пространственная плотность заряда σ, создающие электромагнитное поле E, B, в котором функция распределения положений движущейся частицы в пространстве конфигураций определяется единственным образом через начальное распределение и функции h_1, h_2, h_3, если только начальная скорость частицы удовлетворяет соотношению $y_0 = \eta(x_0, t_0)$,* где *x_0 — начальное положение, t_0 — начальное время.*

В частности, если начальное распределение удовлетворяет условию $h_0(x) = h_s(x, t_0)$, *то заряженная частица имеет во все время движения распределение* $h_s(x, t)$.

Доказательство. Плотность тока и плотность заряда σ, как было показано выше, всегда можно выбрать так, что движение заряженной частицы будет происходить в соответствии с полем скоростей (8.41). Иначе говоря, возникающее электромагнитное поле E, B обладает тем свойством, что система (8.39) будет иметь в шестимерном фазовом пространстве интегральное многообразие $y = \eta(X, t)$. Все движения, начинающиеся на этом многообразии, в пространстве конфигураций подчиняются системе (8.41). Это означает, что в пространстве конфигураций заряженная частица движется в соответствии с этими уравнениями. А тогда, как доказано в предыдущих теоремах, функция распределения ее положений будет единственным образом определяться начальной функцией распределения и функциями, входящими в фундаментальную систему. ∎

Теорема 8.6. *Если задана полная система интегральных инвариантов для системы* (8.41), *то существуют пространственная плотность тока и пространственная плотность зарядов, создающие электромагнитное поле* E, B, *в котором заряженные частицы движутся так, что при* $y_0 = \eta(x_0, t_0)$ *и начальной плотности пучка* $\rho_0(X)$ *он будет сохранять свой заряд и иметь плотность* $\rho(X, t)$. *При этом эта плотность единственным образом выражается через* ρ_0 *и ядра, определяющие полную систему интегральных инвариантов системы* (8.41).

Доказательство. Выше было показано, что для любой векторной функции $\eta(x, t)$ существует плотность тока и плотность зарядов, вызывающих электромагнитное поле E, B, в котором заряженные частицы, движущиеся в соответствии с уравнением (8.39), будут оставаться на интегральном многообразии $y = \eta(x, t)$, если только их начальная скорость удовлетворяет соотношению $y_0 = \eta(x_0, t_0)$. Рассмотрим только те частицы, которые остаются на этом многообразии. Если пучок частиц в пространстве конфигураций имеет плотность $\rho_0(x)$, то, как было показано выше, существует интегральный инвариант с плотностью $\rho(x, t)$, так что

$$\int\limits_{D_{t_0}} \rho_0(x)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \int\limits_{D_t} \rho(x, t)\, dx_1 dx_2 dx_3.$$

Это соотношение можно интерпретировать как сохранение заряда во время движения. При этом из развитой выше теории вытекает, что ядро инварианта $\rho(x, t)$ может быть однозначно определено через начальную плотность $\rho_0(x)$ и ядра полной системы интегральных инвариантов. ∎

Замечание. Теоремы 8.5 и 8.6 в принципе решают вопрос о конструкции электромагнитного поля, обеспечивающего требуемое качество функционирования различных приборов, в которых происходит фокусировка и ускорение заряженных частиц. Однако следует заметить, что осуществление соотношения $y_0 = \eta(x_0, t_0)$ возможно на практике лишь с некоторой погрешностью. Кроме того, при движении пучка может возникать хотя и малое, но нескомпенсированное дополнительное электромагнитное поле, которое деформирует интегральное многообразие $y = \eta(x, t)$ в фазовом пространстве системы (8.39). Эти обстоятельства приводят к тому, что утверждения теорем 8.5 и 8.6 остаются в силе, вообще говоря, только на конечном интервале времени. Причем утверждения, сделанные в этих теоремах, будут выполняться приближенно.

5. Введем векторный потенциал A и электрический потенциал φ так, что

$$B = \operatorname{rot} A, \tag{8.46}$$

$$E = -\nabla\varphi - \partial A/\partial t. \tag{8.47}$$

Через эти потенциалы уравнения движения (8.39) могут быть записаны в форме

$$\begin{gathered} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = y, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(my) = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{rot} A \times y. \end{gathered} \tag{8.48}$$

Пусть заряженная частица движется в некотором поле скоростей

$$\dot{x} = \eta(x, t). \tag{8.49}$$

Возникает вопрос: существуют ли векторный потенциал A и электрический потенциал φ, вызывающие такое движение? Следующая ниже теорема показывает, что теория электромагнитного поля Максвелла носит универсальный характер.

Теорема 8.7. *Если заряженная частица движется в поле скоростей (8.49), то существуют векторный потенциал A и электрический потенциал φ, вызывающие такое движение.*

Доказательство. Пусть векторный и электрический потенциалы имеют вид

$$A = -m\eta, \tag{8.50}$$

$$\varphi = -mC^2, \tag{8.51}$$

где $m = m_0/\sqrt{1 - \eta^2/C^2}$. Система (8.48) при условиях (8.50), (8.51) будет иметь в фазовом пространстве интегральное многообразие $y = \eta(x, t)$. Следовательно, любое движение системы (8.49) будет совпадать в пространстве конфигураций с соответствующим движением, лежащим на этом интегральном многообразии. ■

Замечание. В условиях этой теоремы векторная функция $\eta(x, t)$ задана при $t \in (-\infty, +\infty)$, $x \in E_3$, вещественна, непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам.

Эти условия используются при доказательстве теоремы 8.7 и при вычислении электрического тока I и заряда σ по найденному векторному потенциалу A и электрическому потенциалу φ.

Введем функцию $S(x, t)$, заданную при $x \in E_3$, $t \in (-\infty, +\infty)$, вещественную и трижды непрерывно дифференцируемую по своим аргументам. Будем считать, что при любом фиксированном t множество $S > 0$ гомеоморфно открытому шару и множество $S = 0$

гомеоморфно сфере. Введем также функцию $W(x, S, t)$, заданную при всех значениях своих аргументов, вещественную и дважды непрерывно дифференцируемую по всем своим аргументам. Положим, далее, что

$$\eta(x, t) = \frac{\nabla S[\partial S/\partial t + W]}{(\nabla S)^2} + \nabla S \times F, \tag{8.52}$$

где F — некоторая векторная функция, заданная при $x \in E_3$, $t \in (-\infty, +\infty)$, вещественная и дважды непрерывно дифференцируемая по всем своим аргументам.

Будем считать, что векторная функция (8.52) такова, что система (8.49) удовлетворяет некоторым условиям существования и единственности решений. Или же для простоты будем считать, что правая часть (8.52) дважды непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам. Кроме того, будем предполагать, что выполнены неравенства

$$\eta^2 < C^2 \tag{8.53}$$

при $t \in (-\infty, +\infty)$, $x \in E_3$, во всяком случае в той части пространства, где будет происходить действительное движение заряженных частиц. Условие (8.53) является необходимым для того, чтобы векторный потенциал A и электрический потенциал φ в формулах (8.50), (8.51) имели вещественные значения при $t \in (-\infty, +\infty)$, $x \in E_3$.

Теорема 8.8. *Если* 1) $A = -m\eta$, $\varphi = -mC^2$; 2) *векторная функция* η *удовлетворяет условиям* (8.52), (8.53); 3) $W = 0$ *при* $S = 0$ *и* $W \geqslant 0$ *при* $S > 0$, *то система* (8.48) *имеет интегральное многообразие* $y = \eta(x, t)$, $S \geqslant 0$, *т. е. если движение*

$$x = x(t, x_0, y_0, t_0), \qquad y = y(t, x_0, y_0, t_0) \tag{8.54}$$

системы (8.48), *удовлетворяющее начальным условиям* $x = x_0$, $y = y_0$, *при* $t = t_0$, *удовлетворяет условиям* $S(x_0, t_0) > 0$ *и* $y_0 = \eta(x_0, t_0)$, *то* $S(x(t, x_0, y_0, t_0), t) > 0$, $y(t, x_0, y_0, t_0) = \eta(x(t, x_0, y_0, t_0), t)$ *при* $t \geqslant t_0$. *При этом из того, что* $S(x_0, t_0) = 0$, $y_0 = \eta(x_0, t_0)$, *вытекает, что* $S(x(t, x_0, y_0, t_0), t) \equiv 0$ *при* $t \geqslant t_0$.

Доказательство. В теореме 8.7 было установлено, что система (8.48) при условии (8.50), (8.51) имеет интегральное многообразие

$$y = \eta(x, t). \tag{8.55}$$

Для интегральных кривых, расположенных на этом многообразии, будет иметь место соотношение

$$\dot{S} = W. \tag{8.56}$$

Тогда из соотношений (8.55) и (8.56) вытекает, что интегральная кривая (8.54) системы (8.48) будет удовлетворять условиям, указанным в теореме 8.8. ■

Положим теперь для определенности, что

$$S(x, t) = r^2(t) - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t)(x_i - q_i(t))^2. \tag{8.57}$$

Будем считать, что функции $r(t)$, $\lambda_i(t)$, $q_i(t)$ заданы при $t \in (-\infty, +\infty)$, вещественны, непрерывны и трижды непрерывно дифференцируемы. При этом функция $r(t)$ принимает положительные значения, $\lambda_i(t)$ удовлетворяет неравенствам $\alpha_i \leqslant \lambda_i \leqslant \beta_i$, $i = 1, 2, 3$, где α_i, β_i — положительные постоянные.

Теорема 8.9. *Если* 1) *выполнены условия теоремы* 8.8; 2) $r(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$; 3) $\sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i \ddot{q}_i \geqslant 0$ *при* $t > 0$, *то пучок заряженных частиц, расположенных в начальный момент* t_0 *в области* $S \geqslant 0$ *и имеющих начальные скорости* $y_0 = \eta(x_0, t_0)$, *будет двигаться под действием электромагнитного поля, ускоряясь и фокусируясь.*

З а м е ч а н и е. Если $x = q(t)$, $q = (q_1, q_2, q_3)$ есть замкнутая кривая, то теорема 8.9 дает структуру ускоряющего и фокусирующего электромагнитного поля в циклическом ускорителе. Причем вектор F, входящий в функцию η, может быть использован для отработки дефекта инжекции заряженных частиц.

ГЛАВА III

ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 9. УПРАВЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Проблема Ньютона. — Динамическое положение равновесия. — Динамика относительного движения. — Непрямое регулирование

1. В своей книге «Математические начала натуральной философии» И. Ньютон поставил перед математиками задачу, состоящую в следующем: «Дело математиков найти такую силу, которая в точности удерживала бы заданное тело в движении по заданной орбите с данною скоростью, и, наоборот, найти тот криволинейный путь, на который заданною силою будет отклонено тело, вышедшее из заданного места с заданною скоростью». (Перевод академика А. Н. Крылова.)

В настоящем параграфе будут рассмотрены обе эти проблемы применительно к вращательному движению твердого тела вокруг неподвижной точки, так что в постановке Ньютона силу следует заменить моментом, а движение по криволинейной орбите — ориентацией осей, связанных с телом, в абсолютном пространстве.

Задача 1. *Рассмотрим сначала твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки так, что имеют место уравнения вращательного движения*

$$\theta\dot{\omega} + \omega \times \theta\omega = M, \tag{9.1}$$

где ω — *вектор угловой скорости,* θ — *тензор инерции,* M — *момент сил, приложенных к телу. Пусть заданы два орта* r *и* s; *вектор* s — *будем считать неизменным в абсолютном пространстве, вектор* r — *неизменным в твердом теле.*

Задача ориентации этого тела в заданном направлении s *состоит в нахождении момента* M *в таком виде, который приводит к выполнению условия* $r \to s$.

Представим себе на время, что изучается движение физического маятника под действием однородного поля силы тяжести и силы трения в точке подвеса. Известно, что действие этих двух факторов приводит, вообще говоря, к тому, что маятник начинает совершать затухающие колебания. При этом направление из точки подвеса на центр инерции маятника будет стремиться совпасть с направлением поля силы тяжести. Если первое из этих направлений дается вектором r, а второе — вектором s, то на рассматриваемый физический маятник будет действовать момент $kr \times s$, где k — некоторая положительная константа. Из этого рассмотрения можно вывести вид момента, с помощью которого можно решить поставленную выше задачу ориентации. А именно: примем, что момент M имеет вид

$$M = \mu + k\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}, \tag{9.2}$$

где μ — есть некоторый момент, характеризующий как бы момент силы трения в точке подвеса. Сначала для определенности будем полагать

$$M = -\omega + k\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}. \tag{9.3}$$

По отношению к телу вектор $\boldsymbol{s}$ будет совершать вращательное движение с угловой скоростью — ω, так что в системе координат, связанной с телом, справедливо соотношение

$$\dot{\boldsymbol{s}} = -\omega \times \boldsymbol{s}. \tag{9.4}$$

Теорема 9.1. *Положение равновесия* $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}$, $\omega = 0$ *системы* (9.1), (9.4) *при управлении* (9.3) *асимптотически устойчиво по Ляпунову при любом выборе* $k > 0$.

Любое движение системы (9.1), (9.4), *отличное от положения равновесия* $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{s}$, $\omega = 0$, *при надлежащем выборе* $k > 0$ *будет обладать свойством* $\omega \to 0$, $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{s}$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство. Наметим основные этапы, необходимые при доказательстве этой теоремы.

1) С помощью функции

$$V = \frac{1}{2}\left[(\omega, \theta\omega) + k(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r})^2\right]$$

установим факт устойчивости по Ляпунову положения равновесия, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}$, $\omega = 0$ путем разыскания полной производной этой функции в силу системы (9.1), (9.4) при управлении (9.3):

$$\dot{V} = -\omega^2.$$

2) Из свойств функции V выводится также, что при любом $k > 0$ на любом движении будет $\omega \to 0$ при $t \to +\infty$.

3) Если умножить уравнение (9.1) скалярно на вектор $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}$ и затем найти выражение производной скалярного произведения $(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}, \theta\omega)$, то из п. 2 получим, что обязательно должно быть, что $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} \to 0$ при $t \to +\infty$. Следовательно, либо $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{s}$, либо $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{s}$ при $t \to +\infty$ на любом движении рассматриваемой системы.

4) Из устойчивости по Ляпунову положения равновесия $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}$, $\omega = 0$ и свойств 2 и 3 вытекает, что при любом $k > 0$ будет $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{s}$, $\omega \to 0$ при $t \to +\infty$.

5) Покажем теперь, что любое движение, отличное от положения равновесия $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{s}$, $\omega = 0$ системы (9.1), (9.4), при управлении (9.3) и надлежащем выборе положительной постоянной k будет стремиться к асимптотически устойчивому положению равновесия. Действительно, выберем k так, чтобы для начального момента движения было $V_0 < 2k$, где через V_0 обозначено значение функции V при $t = 0$. Тогда при возрастании времени будем иметь неравенство $2k - V > 2k - V_0$. Из п. 2 и 3 получаем $\omega \to 0$, $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} \to 0$. Если пред-

положить, что $r \to -s$, то будем иметь $V \to 2k$ при $t \to +\infty$, что невозможно в силу сделанного выше выбора. Следовательно, при таком выборе k будет $\omega \to 0$, $r \to s$ при $t \to +\infty$. ■

Замечания. 1. Рассмотрим движение системы (9.1), (9.4) при управлении (9.2). Если функция $\dot{V} = (\omega, \mu) = W$ определенно отрицательна относительно компонент вектора ω и принимает отрицательные значения при $\omega \neq 0$, то сохраняются утверждения, аналогичные тем, которые содержатся в теореме 9.1.

2. Пусть на рассматриваемое тело действует наряду с управляющим моментом еще момент M_0. Тогда система (9.1) примет вид

$$\theta\dot{\omega} + \omega \times \theta\omega = M_0 + M.$$

Если управляющий момент определяется из формулы (9.2) и выполняются условия, сформулированные в замечании 1, то имеет место устойчивость при постоянно действующих возмущениях. А именно: для любого $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и для любого движения, отличного от положения равновесия $\omega = 0$, $r = -s$, можно указать $k > 0$ и $\gamma > 0$, такие, что $|\omega| < \varepsilon$, $|s - r| < \delta$ при $t \geqslant T$, если только во все время движения ($t \geqslant 0$) будет $|M_0| < \gamma$. Доказательство этого утверждения осуществляется также в несколько этапов, аналогичных тем, которые были приведены в теореме 9.1.

Таким образом, дано решение задачи конструирования управляющего момента, обеспечивающего ориентацию твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в заданном, неизменном в абсолютном пространстве направлений, и обратно: проведено исследование поведения динамических параметров, описывающих движение твердого тела под действием управляющих моментов такого рода.

2. Задача 2. *Представим теперь, что задан орт $s_0(t)$, «вращающийся с угловой скоростью» $\omega_0(t)$ в абсолютном пространстве. Следовательно, по отношению к рассматриваемому телу этот вектор будет «вращаться с угловой скоростью» $\omega_0 - \omega$ и потому в осях координат, связанных с телом, будем иметь соотношение*

$$\dot{s}_0 = (\omega_0 - \omega) \times s_0. \tag{9.5}$$

Требуется в системе (9.1) *управляющий момент M выбрать так, чтобы $r \to s_0$, $\omega_0 \to \omega$, где r, как и выше, орт, неизменно связанный с твердым телом.*

Пусть управляющий момент имеет вид

$$M = \mu_1 + \theta\dot{\omega}_0 + \omega_0 \times \theta\omega + kr \times s_0. \tag{9.6}$$

Положим сначала, что

$$\mu_1 = -(\omega - \omega_0). \tag{9.7}$$

Теорема 9.2. *Динамическое положение равновесия $r = s_0$, $\omega = \omega_0$ системы* (9.1), (9.5) *при управлении* (9.6), (9.7) *будет асимптотически устойчивым по Ляпунову при любом $k > 0$, и, более того, для любого движения, не совпадающего с другим положением равновесия $r = -s_0$, $\omega = \omega_0$, можно указать такое $k > 0$, что $r \to s_0$, $\omega \to \omega_0$ при $t \to +\infty$.*

Доказательство теоремы 9.2 при условии соответствующего выбора функции V дословно совпадает с доказательством теоремы 9.1.

Замечания. 1. Рассмотрим движение системы (9.1), (9.5) при управлении (9.6). Если функция $W_1 = ([\omega - \omega_0], \mu_1) = V_1$ определенно отрицательна по отношению к компонентам вектора $\omega - \omega_0$ и принимает отрицательное значение при $\omega \neq \omega_0$, то справедливы утверждения, аналогичные приведенным в теореме 9.2.

2. При решении задачи ориентации в теореме 9.1 управляющий момент был выбран не зависящим от распределения масс в теле.

При решении задачи сканирования по заданной программе управляющий момент оказался зависящим от распределения масс в теле. По-видимому, это является необходимым условием в рассматриваемом случае.

3. Если в системе (9.1) действует также некоторый момент M_0, то при выполнении условий, сформулированных в замечании 1, динамическое положение равновесия s_0, ω_0 будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях.

Задача 3. *Предположим, что требуется ориентировать тело так, чтобы* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}$ *и чтобы это положение было стабилизировано вращением.*

Уточним положение орта $\boldsymbol{r}$ в теле. А именно: при решении этой задачи будем считать, что $\boldsymbol{r}$ направлен по одной из главных осей инерции, или в случае динамически симметричного тела $\boldsymbol{r}$ располагается либо на оси симметрии, либо в плоскости, перпендикулярной этой оси.

Теорема 9.3. *Система* (9.1), (9.4) *при управлении* (9.2), *где* $\mu = -[\omega - \boldsymbol{s}(\omega, \boldsymbol{s})]$, *имеет семейство положений равновесия* $\boldsymbol{r} = \pm\boldsymbol{s}$, $\omega = \lambda\boldsymbol{s}$, *где* λ *— вещественный параметр.*

Каждое из положений равновесия $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}$, $\omega = \lambda\boldsymbol{s}$ *условно асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Естественно, что проблема реализации управляющих моментов, найденных при решении задач 1, 2, 3, также должна быть подвергнута тщательному рассмотрению, с тем чтобы указать те физические законы, основываясь на использовании которых можно было бы дать фактические рекомендации для построения системы управления.

Известно, что при изучении динамики относительного движения установлено наличие моментов кориолисовых сил инерции, действующих со стороны несомых тел на несущее тело. Далее будет показано, что относительное движение несомых тел можно организовать так, чтобы упомянутые моменты кориолисовых сил инерции были такого рода, как это указано в решении задач 1, 2 и 3.

3. Перейдем теперь к использованию динамики относительного движения для управления вращательным движением.

Пусть твердое тело T_0 несет систему динамически симметричных тел T_j. Предположим, что каждое из этих тел связано с T_0 таким образом, что может вращаться лишь вокруг оси $\mathbf{i}_j$ неизменно связанной с телом. Будем предполагать также, что центры инерции этих тел лежат на осях вращения. Тогда общий центр инерции этих тел будет иметь неизменное положение к телу T_0.

Предположим, что тело T_0 вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки, совпадающей с этим центром. Тогда будем иметь систему уравнений движения

$$\begin{gathered}\theta\dot{\omega}+\omega\times\theta\omega+\sum_j c_j\left(\mathbf{i}_j\ddot{\varphi}_j+\omega\times\mathbf{i}_j\dot{\varphi}_j\right)=M_0,\\ c_j\left[\ddot{\varphi}_j+(\mathbf{i}_j,\dot{\omega})\right]=q_j,\ j=1,\ldots,l,\end{gathered}\tag{9.8}$$

где l — число носимых тел; θ — тензор инерции системы тел. В случае, когда тела T_j закреплены, c_j — осевой момент инерции тела T_j, φ_j — угол поворота этого тела вокруг оси $\mathbf{i}_j$, M_0 — некоторый момент, q_j — проекции на ось вращения $\mathbf{i}_j$ моментов сил, действующих на тело T_j.

Пусть $\boldsymbol{s}$, как прежде, вектор, неизменный в абсолютном пространстве, и $\boldsymbol{r}$ — вектор, неизменно связанный с телом T_0. Требуется выбрать q_j, $j=1,\ \ldots,\ l$, так, чтобы $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{s}$. Обозначим через Q вектор

$$Q=\sum_{j=1}^{l} q_j\mathbf{i}_j.$$

Предположим, что матрица $D=\theta-\sum\limits_{j=1} c_j\mathbf{i}_j\mathbf{i}_j^*$ — неособая, здесь через $\mathbf{i}_j^*$ обозначен вектор, транспонированный по отношению к $\mathbf{i}_j$. Положим, что вектор Q удовлетворяет соотношению

$$Q=M_0-\omega\times\theta\omega-\sum_{j=1}^{l}c_j\omega\times\mathbf{i}_j\dot{\varphi}_j+D\theta^{-1}(\omega\times\theta\omega-M).\tag{9.9}$$

Заметим, что из неособенности матрицы D вытекает, что при любом выборе величин q_j вектор M определяется единственным образом. И далее, если среди ортов $\mathbf{i}_j$ имеется три линейно независимых, то при любом выборе M величины q_j определяются также единственным образом.

Будем далее предполагать, что среди векторов $\mathbf{i}_j$ имеется три линейно независимых. Как и выше, в осях, связанных с телом T_0, будем иметь соотношение

$$\dot{\boldsymbol{s}}=-\omega\times\boldsymbol{s}.\tag{9.10}$$

Теорема 9.4. *Система* (9.8), (9.10) *при управлении* (9.9), *где* $M=-\omega+k\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}$, *имеет семейство положений равновесия* $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}$, $\omega=0$, $\varphi_j=\text{const}$, *каждое из которых асимптотически устойчиво по отношению к* ω *и* $\boldsymbol{r}$. *При этом любое движение, не совпадающее с положением равновесия* $\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{s}$, $\omega=0$, $\varphi_j=\text{const}$, *при надлежащем выборе* $k>0$ *будет удовлетворять условию* $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{s}$, $\omega\to0$, $t\to+\infty$.

Доказательство теоремы 9.4 осуществляется по аналогии с тем, как это было сделано в теореме 9.1.

Ситуация, рассмотренная в теореме 9.4, соответствует тому случаю, когда тела T_j, находясь в равномерном вращении, стабилизируют положение равновесия $\omega=0$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}$ тела T_0.

Поставим теперь вопрос о нахождении управлений q_j, $j = 1, \ldots, l$, при котором тело T_0 будет совершать сканирование по заданной программе. Пусть вектор $\boldsymbol{s}_0$ вращается с угловой скоростью ω_0. Тогда в осях, связанных с телом T_0, будем иметь соотношение

$$\dot{\boldsymbol{s}}_0 = (\omega_0 - \omega) \times \boldsymbol{s}_0. \qquad (9.11)$$

Теорема 9.5. *Система* (9.8), (9.11) *при управлении* (9.9), *где* $M = -(\omega - \omega_0) + \theta\dot{\omega}_0 + \omega_0 \times \theta\omega + k\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}_0$, *будет иметь динамическое положение равновесия*

$$\omega = \omega_0, \quad \boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{r}, \quad \varphi_j = \mathrm{const}.$$

Каждое из таких динамических положений равновесия будет асимптотически устойчиво по отношению к $\boldsymbol{r}$, ω. *При этом любое движение этой системы, не совпадающее с* $\omega \equiv \omega_0$, $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{s}_0$, $\varphi_j = \mathrm{const}$, *будет при надлежащем выборе* k *обладать свойством* $\omega \to \omega_0$, $\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{s}_0$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство этой теоремы осуществляется по аналогии с теоремой 9.1.

Будем далее считать, что вектор $\boldsymbol{r}$ направлен по какой-либо из главных осей инерции всей системы тел. Тогда оказывается, что управление телом T_0 можно построить так, что $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{s}$ и тело T_0 будет стабилизировано вращением при такой ориентации.

Теорема 9.6. *Система* (9.8), (9.10) *при управлении* (9.9), *где* $M = -[\omega - \boldsymbol{s}(\omega, \boldsymbol{s})] + k\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}$, *будет иметь систему положений равновесия* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}$, $\omega = \lambda\boldsymbol{s}$, $\varphi_j = \mathrm{const}$. *Каждое из этих положений равновесия будет условно асимптотически устойчиво по отношению к переменным* $\boldsymbol{r}$ и ω, $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{s}$, $\omega \to \lambda\boldsymbol{s}$.

Изучим теперь проблему управления вращательным движением твердого тела, несущего систему каких-либо материальных точек, совершающих относительное движение. В результате предыдущих исследований установлено, что с помощью моментов кориолисовых сил инерции и моментов относительных количеств движения можно производить ориентацию и стабилизацию несущего тела в заданном направлении, а также принуждать это тело сканировать по заданной программе.

Рассмотрим твердое тело T_0, вращающееся вокруг неподвижной точки, и предположим, что с этим телом каким-либо образом связана система материальных точек, положение которых по отношению к телу T_0 единственным образом определяется с помощью обобщенных координат $q_1, \ldots, q_k$. При этих предположениях уравнение движения можно записать в форме

$$\Theta\dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \Theta\bar{\omega} = \bar{M} + \bar{M}_k - \bar{M}_0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \left(\dot{\bar{\omega}}, \bar{E}_j\right) + P_j + R_j, \quad j = 1, \ldots, k, \qquad (9.12)$$

где Θ — тензор инерции всей системы, рассматриваемой как единое твердое тело; T — кинетическая энергия относительных движений; $\bar{M}_k$ — момент кориолисовых сил инерции; M_0 — момент относительных количеств движения; величины $P_j = P_j(q_1, \ldots, q_k, \omega)$ зависят от центробежных сил; величины $R_j = R_j(q_1, \ldots, q_k, \dot q_1, \ldots, \dot q_k, \bar\omega)$ зависят от кориолисовых сил инерции; Q_j — обобщенная сила, отнесенная к обобщенной координате q_j; $\bar E_j$ — некоторый вектор, $\bar E_j = \bar E_j(q_1, \ldots, q_k)$; $\bar M$ — момент сил, действующих на систему.

Предположим, что выполнены следующие условия: а) система (9.12) разрешима относительно компонент вектора $\dot{\bar\omega}$ и величин $\ddot q_j$ так, что имеем уравнения

$$\dot{\bar\omega} = \bar A_0 + \sum_{i=1}^{k} \bar A_i Q_i,$$

$$\ddot q_j = B_{0j} + \sum_{i=1}^{k} B_{ji} Q_i, \quad j = 1, \ldots, k;$$

б) среди векторов $\bar A_i$ существуют три линейно независимых.

Выберем обобщенные силы Q_j так, чтобы было выполнено соотношение

$$\Theta \bar A_0 + \sum_{i=1}^{k} \Theta \bar A_i Q_i + \bar\omega \times \Theta \bar\omega = \bar M. \tag{9.13}$$

Пусть теперь $\bar s$ — орт, неизменный в абсолютном пространстве, и пусть $\bar r$ — орт, неизменно связанный с телом T_0.

Теорема 9.7. *Если выполнены условия* а) *и* б) *и если обобщенные силы удовлетворяют соотношению* (9.13), *где* $\bar M = -\bar\omega + l\bar r \times \bar s$, *то тело* T_0 *будет иметь положение относительного равновесия* $\bar r = \bar s$, $\bar\omega = 0$. *При этом каждое движение, не совпадающее с другим положением относительного равновесия* $\bar r = -\bar s$, $\bar\omega = 0$ *при надлежащем выборе положительной постоянной* $l > 0$, *будет обладать свойством* $\bar r \to \bar s$, $\bar\omega \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Теорема 9.8. *Если выполнены условия* а) *и* б) *и обобщенные силы удовлетворяют соотношению* (9.13), *где*

$$\bar M = -\left(\bar\omega - \bar\omega_0\right) + \Theta \dot{\bar\omega}_0 + \bar\omega_0 \times \Theta \bar\omega + l\bar r \times \bar s_0,$$

$\bar s_0$ — *орт, вращающийся в абсолютном пространстве с угловой скоростью* $\bar\omega_0$, *то система* (9.12) *будет иметь положение относительного динамического равновесия* $\bar r = \bar s_0$, $\bar\omega = \bar\omega_0$. *Каждое движение, не совпадающее с* $\bar r = -\bar s_0$, $\bar\omega = \bar\omega_0$ *при надлежащем выборе* $l > 0$, *будет обладать свойством* $\bar\omega \to \bar\omega_0$, $\bar r \to \bar s_0$ *при* $t \to +\infty$.

Теорема 9.9. *Если выполнены условия* а) *и* б) *и обобщенные силы удовлетворяют соотношению* (9.13), *где* $\bar M = -(\bar\omega - \bar s(\bar\omega, \bar s)) + l\bar r \times \bar s$, *то система* (9.12) *будет иметь две системы относительных положений равновесия*

$$\bar r = \bar s, \ \bar\omega = \lambda \bar s \ \text{ и } \ \bar r = -\bar s, \ \bar\varphi = \mu \bar s,$$

где λ и μ — вещественные параметры. При этом система положений равновесия $\bar{r} = \bar{s}$, $\bar{\omega} = \lambda \bar{s}$ условно асимптотически устойчива по Ляпунову.

Доказательство приведенных утверждений осуществляется аналогично теореме 9.1.

С математической точки зрения при решении задач 1, 2 и 3 была дана конструкция управляющих моментов, осуществляющих «прямое» управление.

4. Теперь рассматривается вопрос об управлении вращательным движением твердого тела в том случае, когда управляющее воздействие осуществляет *непрямое регулирование*. В этом случае дается конструкция закона управления, стабилизирующего тело в заданном направлении, а также дается конструкция закона управления, обеспечивающего вращение тела по заданной программе, причем это вращение является устойчивым. Наряду с этим дается способ ориентации тела в заданном направлении и стабилизации этого направления.

Рассмотрим систему

$$\begin{gathered} \Theta \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times \Theta \bar{\omega} = \bar{\nu} \\ \bar{\nu}^{(n)} + \bar{\varphi}\left(\bar{\nu}, \dot{\bar{\nu}}, \ldots, \bar{\nu}^{(n-1)}, \bar{\omega}, \dot{\bar{\omega}}, \ldots, \bar{\omega}^{(n-1)}\right) = \bar{u}, \end{gathered} \tag{9.14}$$

где Θ — постоянная матрица, являющаяся тензором системы, $\bar{\omega}$ — угловая скорость несущего тела, $\bar{u}$ — управляющее воздействие, $\bar{\nu}$ и $\bar{\varphi}$ — некоторые моменты сил, природа которых может быть произвольной, однако требуется, чтобы функция была вещественной, непрерывной и заданной при всех значениях своих аргументов. Положим, что управляющее воздействие имеет вид

$$\bar{u} = \bar{\varphi} + \bar{M}^{(n)} - \sum_{s=1}^{n} \left(\bar{\nu} - \bar{M}\right)^{(n-s)} a_s. \tag{9.15}$$

Будем считать, что в выражении (9.15) постоянные $a_1, \ldots, a_n$ являются вещественными и такими, что все корни уравнения

$$\varkappa^n + a_1 \varkappa^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

имеют отрицательные вещественные части.

Обозначим через $\bar{r}$ орт, неизменно связанный с несущим телом, а через $\bar{s}$ — орт, занимающий неизменное положение в инерциальном пространстве.

Требуется выбрать в управлении (9.15) $\bar{M}$ так, чтобы $\bar{r} \to \bar{s}$, $\bar{\omega} \to 0$.

Теорема 9.10. *Если $\bar{M} = -\bar{\omega} + l\bar{r} \times \bar{s}$, то несущее тело будет иметь положение относительного равновесия $\bar{r} = \bar{s}$, $\bar{\omega} = 0$, $\bar{\nu} = 0$. При этом каждое движение, не совпадающее с другим положением относительного равновесия $\bar{r} = -\bar{s}$, $\bar{\omega} = 0$, $\bar{\nu} = 0$ при надлежащем выборе положительной постоянной $l > 0$, будет обладать свойством $\bar{r} \to \bar{s}$, $\bar{\omega} \to 0$, $\bar{\nu} \to 0$ при $t \to +\infty$.*

Управляющее воздействие, выбранное в теореме 9.10, стабилизирует положение равновесия $\bar{r} = \bar{s}$, $\bar{\omega} = 0$, $\bar{\nu} = 0$.

Предположим, что в инерциальном пространстве задан некоторый декартовый трехвекторник, вращающийся с угловой скоростью $\bar{\omega}_0$. Обозначим через $\bar{s}_0$ какой-либо орт этого трехвекторника. Пусть требуется управление (9.11) построить так, чтобы $\bar{r} \to \bar{s}_0$, $\bar{\omega} \to \bar{\omega}_0$.

Теорема 9.11. *Если* $\bar{M} = (-\bar{\omega} - \bar{\omega}_0) + \Theta\dot{\bar{\omega}}_0 + \bar{\omega}_0 \times \Theta\bar{\omega} + l\bar{r} \times \bar{s}_0$, *то система* (9.14) *при управлении* (9.15) *имеет динамическое положение равновесия*

$$\bar{r} = \bar{s}_0, \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_0, \quad \bar{\nu} = \Theta\dot{\bar{\omega}}_0 + \bar{\omega}_0 \times \Theta\bar{\omega}_0.$$

Каждое движение, не совпадающее с $\bar{r} = -\bar{s}_0$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0$, $\bar{\nu} = \Theta\dot{\bar{\omega}}_0 + \bar{\omega}_0 \times \Theta\bar{\omega}_0$ *при надлежащем выборе* $l > 0$, *будет обладать свойством* $\bar{\omega} \to \bar{\omega}_0$, $\bar{r} \to \bar{s}_0$, $\bar{\nu} \to \Theta\dot{\bar{\omega}}_0 + \bar{\omega}_0 \times \Theta\bar{\omega}_0$ *при* $t \to +\infty$. Очевидно, что теорема 9.11 полностью решает проблему стабилизации и сканирования по заданной программе в случае непрямого регулирования.

Пусть снова орт $\bar{s}$ неподвижен в инерциальном пространстве. Требуется построить управление (9.15) так, чтобы $\bar{r} \to \bar{s}$ и чтобы несущее тело совершало вокруг направления $\bar{s}$ равномерное вращение при условии полного затухания переходного процесса. Предварительным анализом можно установить, что это возможно осуществить в случае, когда орт $\bar{r}$ совпадает с одной из главных осей тензора инерции Θ. Далее будем считать, что это предположение выполнено.

Теорема 9.12. *Если* $\bar{M} = -(\bar{\omega} - \bar{s}(\bar{\omega}, \bar{s})) + l\bar{r} \times \bar{s}$, *то система* (9.14) *при управлении* (9.15) *будет иметь две системы относительных положений равновесия* $\bar{r} = \bar{s}$, $\bar{\omega} = \lambda\bar{s}$, $\bar{\nu} = 0$ *и* $\bar{r} = -\bar{s}$, $\bar{\omega} = \mu\bar{s}$, $\bar{\nu} = 0$, *где,* λ *и* μ *— вещественные параметры. При этом каждое положение равновесия, входящее в первую группу, будет условно асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Теоремы 9.2 — 9.12 доказываются по полной аналогии с теоремой 9.1 путем соответствующего выбора функции V.

§ 10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ДВИЖЕНИЯ

Определение ориентации. — Определение элементов движения в линейном случае. — Локализация движения. — Квазилинейный случай. — Общий нелинейный случай

1. Пусть заданы системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$. Система $Oxyz$ является абсолютной, а система $Ox'y'z'$ связана с объектом, ориентация которого определяется. Обозначим через $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ и $\bar{x}_0'$, $\bar{y}_0'$, $\bar{z}_0'$ орты осей соответственно абсолютной и связанной систем координат. Через a_{ij} обозначим косинус угла между i-й осью связанной системы координат и j-й осью абсолютной системы. Тогда будем иметь соотношения

$$a_{11} = (\bar{x}_0', \bar{x}_0)\, a_{12} = (\bar{x}_0', \bar{y}_0)\, a_{13} = (\bar{x}_0', \bar{z}_0), \tag{10.1}$$

$$a_{21} = (\bar{y}_0', \bar{x}_0)\, a_{22} = (\bar{y}_0', \bar{y}_0)\, a_{23} = (\bar{y}_0', \bar{z}_0), \tag{10.2}$$

$$a_{31} = (\bar{z}_0', \bar{x}_0)\, a_{32} = (\bar{z}_0', \bar{y}_0)\, a_{33} = (\bar{z}_0', \bar{z}_0). \tag{10.3}$$

Введем в рассмотрение векторы $\bar{S}$ и $\bar{H}$. Обозначим через s_i, h_i и s_i', h_i', $i = 1, 2, 3$, компоненты векторов $\bar{S}$ и $\bar{H}$ соответственно в абсолютной и связанной системах координат. Векторы $\bar{S}$ и $\bar{H}$ в абсолютной системе координат могут быть представлены равенствами

$$\bar{S} = s_1\bar{x}_0 + s_2\bar{y}_0 + s_3\bar{z}_0, \tag{10.4}$$

$$\bar{H} = h_1\bar{x}_0 + h_2\bar{y}_0 + h_3\bar{z}_0. \tag{10.5}$$

Введем вектор $\bar{N}$, имеющий вид

$$\bar{N} = \bar{S} \times \bar{H}. \tag{10.6}$$

Тогда, обозначая компоненты вектора $\bar{N}$ в абсолютной системе координат через n_1, n_2, n_3, получаем

$$\bar{N} = n_1\bar{x}_0 + n_2\bar{y}_0 + n_3\bar{z}_0. \tag{10.7}$$

Умножая обе части равенств (10.4), (10.5) и (10.7) скалярно на вектор $\bar{x}_0'$ и учитывая соотношение (10.1), найдем

$$\begin{aligned} s_1' &= s_1a_{11} + s_2a_{12} + s_3a_{13}, \\ h_1' &= h_1a_{11} + h_2a_{12} + h_3a_{13}, \\ n_1' &= n_1a_{11} + n_2a_{12} + n_3a_{13}. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Выражения (10.8) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений для определения направляющих косинусов оси Ox' связанной системы координат в абсолютной системе. Легко видеть, что направляющие косинусы i-й оси связанной системы будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} s_i' &= s_1a_{i1} + s_2a_{i2} + s_3a_{i3}, \\ h_i' &= h_1a_{i1} + h_2a_{i2} + h_3a_{i3}, \\ n_i' &= n_1a_{i1} + n_2a_{i2} + n_3a_{i3}, \\ & \qquad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Здесь n_i', $i = 1, 2, 3$ — проекции вектора $\bar{N}$ на оси связанной системы координат.

Найдем численное выражение определителя системы (10.9). Раскрывая определитель этой системы по последней строке, имеем

$$\Delta = n_1(s_2h_3 - h_2s_3) - n_2(s_1h_3 - h_1s_3) + n_3(s_1h_2 - h_1s_2) = \bar{N}^2. \tag{10.10}$$

Таким образом, определитель системы (10.9) отличен от нуля тогда и только тогда, когда векторы $\overline{S}$ и $\overline{H}$ неколлинеарны.

Решим систему (10.9), для чего построим ее обратную матрицу. Обозначим через B матрицу системы (10.9). Тогда ее обратная матрица $C = B^{-1}$ определяется следующим образом. Элемент c_{ij} равен алгебраическому дополнению элемента b_{ij} матрицы B, разделенному на определитель матрицы B. Отсюда легко видеть, что матрица C может быть представлена в виде

$$C = \frac{1}{\overline{N}^2}\left(\overline{H}\times\overline{N},\ \overline{N}\times\overline{S},\ \overline{N}\right). \tag{10.11}$$

Это означает, что первый столбец матрицы C состоит из компонент вектора $\overline{H}\times\overline{N}$, взятых в абсолютной системе координат, второй столбец — из компонент вектора $\overline{N}\times\overline{S}$, взятых в той же системе, и, наконец, третий столбец — из компонент вектора $\overline{N}$.

С помощью матрицы C направляющие косинусы осей можно представить в форме

$$A_i = CF_i,$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \end{pmatrix} \text{ и } F_i = \begin{pmatrix} s_i' \\ h_i' \\ n_i' \end{pmatrix}. \tag{10.12}$$

Дадим запись направляющих косинусов в скалярной форме. Для этого вычислим векторы $\overline{H}\times\overline{N}$ и $\overline{N}\times\overline{S}$:

$$\overline{H}\times\overline{N} = \overline{H}\times(\overline{S}\times\overline{H}) = \overline{S}\,\overline{H}^2 - \overline{H}\,(\overline{H}\cdot\overline{S}) = \Theta(\overline{H})\,\overline{S}, \tag{10.13}$$

здесь $\Theta(\overline{H})$ — матрица:

$$\Theta(\overline{H}) = E\overline{H}^2 - \overline{H}\,\overline{H}^*,$$

где $\overline{H}^*$ означает транспонирование вектора $\overline{H}$, так что

$$\Theta(\overline{H}) = \begin{pmatrix} h_2^2+h_3^2 & -h_1h_2 & -h_1h_3 \\ -h_2h_1 & h_1^2+h_3^2 & -h_2h_3 \\ -h_3h_1 & -h_3h_2 & h_1^2+h_2^2 \end{pmatrix}. \tag{10.14}$$

Аналогично имеем равенство

$$\overline{N}\times\overline{S} = (\overline{S}\times\overline{H})\times\overline{S} = \overline{S}\times(\overline{H}\times\overline{S}) = \Theta(\overline{S})\,\overline{H}. \tag{10.15}$$

Из выражений (10.12) — (10.15) находим тождества:

$$a_{i1}\overline{N}^2 = s_i'\left[s_1(h_2^2+h_3^2) - s_2h_1h_2 - s_3h_1h_3\right] + h_i'\left[h_1(s_2^2+s_3^2) - h_2s_1s_2 - h_3s_1s_3\right] + n_i'\left[s_2h_3 - s_3h_2\right]; \tag{10.16}$$

$$a_{i2}\overline{N}^2 = s_i' [-s_1 h_2 h_1 + s_2 (h_1^2 + h_3^2) - s_3 h_2 h_3] +$$
$$+ h_i' [-h_1 s_2 s_1 + h_2 (s_1^2 + s_3^2) - h_3 s_2 s_3] + n_i' [s_3 h_1 - s_1 h_3]; \qquad (10.17)$$
$$a_{i3}\overline{N}^2 = s_i' [-s_1 h_3 h_1 - s_2 h_3 h_2 + s_3 (h_1^2 + h_2^2)] + h_i' [-h_1 s_3 s_1 -$$
$$- h_2 s_3 s_2 + h_3 (s_1^2 + s_2^2)] + n_i' [s_1 h_2 - s_2 h_1], \quad i = 1; 2, 3. \quad (10.18)$$

Формулы (10.16) — (10.18) дают *направляющие косинусы* i-й оси связанной системы координат в абсолютной системе.

Произведем некоторые преобразования этих формул. С этой целью введем число a и вектор $\overline{\sigma}$:

$$a = \frac{(\overline{S}, \overline{H})}{|\overline{S}||\overline{H}|}, \quad \overline{\sigma} = \overline{S} - |\overline{S}|\, a \frac{\overline{H}}{|\overline{H}|}.$$

Величина a является косинусом угла между $\overline{S}$ и $\overline{H}$, вектор $\overline{\sigma}$ ортогонален вектору $\overline{H}$, т. е. $(\overline{\sigma} \cdot \overline{H}) = 0$, и векторное произведение $\overline{\sigma} \times \times \overline{H}$ дает введенный выше вектор $\overline{N}$, т. е. $\overline{\sigma} \times \overline{H} = \overline{N}$.

Заменим всюду в предыдущих формулах векторы $\overline{S}$, $\overline{H}$, $\overline{N}$ на векторы $\overline{\sigma}$, $\overline{H}$, $\overline{N}$:

$$\overline{H} \times \overline{N} = \overline{\sigma}\,\overline{H}^2, \quad \overline{N} \times \overline{\sigma} = \overline{H}\,\overline{\sigma}^2.$$

Из выражения (10.12) имеем

$$a_{ij} = \frac{1}{|\overline{S}|^2 |\overline{H}|^2 (1 - a^2)} (\overline{H}^2 \sigma_i' \sigma_j + |\overline{S}|^2 (1 - a^2) h_i' h_j + n_i' n_j),$$
$$i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3. \quad (10.19)$$

В формуле (10.19) использованы равенства

$$\overline{N}^2 = \sigma^2 |\overline{H}|^2 \text{ и } \sigma^2 = |\overline{S}|^2 (1 - a^2).$$

Следует иметь в виду, что в (10.19) σ_i' и σ_j определяются по формулам

$$\sigma_i' = s_i' - \frac{|\overline{S}|\, a h_i'}{|\overline{H}|}, \quad \sigma_j = s_j - \frac{|\overline{S}|\, a h_j}{|\overline{H}|}.$$

В § 9 были сконструированы управляющие моменты, с помощью которых твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, ориентировалось в заданном направлении или сканировало по заданной программе. Конструкция этого момента (например, в случае решения проблемы ориентации) имеет вид

$$M = -\overline{\omega} + k\overline{r} \times \overline{s}'.$$

Напомним, что $\overline{s}'$ есть вектор, неизменный в абсолютном пространстве, $\bar{r}$ — неизменный вектор в твердом теле, $\bar{\omega}$ — угловая скорость этого тела.

Пусть $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — представление вектора $\bar{s}$ в абсолютном пространстве и $\bar{s}' = (s_1', s_2', s_3')$ — представление того же вектора в системе координат $Ox'y'z'$, неизменно связанной с телом. Тогда будем иметь равенства

$$\bar{s}' = A\bar{s}, \tag{10.20}$$

где A — матрица направляющих косинусов, рассмотренная выше, в осях $Oxyz$.

С помощью этой матрицы можно также определить и проекции мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ на подвижные оси Ox', Oy', Oz'. Действительно, из уравнений

$$\dot{\bar{x}}_0' = \bar{\omega} \times \bar{x}_0', \quad \dot{\bar{y}}_0' = \bar{\omega} \times \bar{y}_0', \quad \dot{\bar{z}}_0' = \bar{\omega} \times \bar{z}_0'$$

имеем

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\left(\bar{x}_0' \times \dot{\bar{x}}_0' + \bar{y}_0' \times \dot{\bar{y}}_0' + \bar{z}_0' \times \dot{\bar{z}}_0'\right).$$

Зная представление вектора x_0' в системе $Oxyz$ через матрицу A, можно, пользуясь этой формулой, вычислить компоненты вектора $\bar{\omega}$.

Итак, если заданы абсолютные координаты вектора $s(s_1, s_2, s_3)$, а также векторы $\bar{S}$, $\bar{H}$, $\bar{S}'$, $\bar{H}'$, рассмотренные выше, то управляющий момент M можно сформировать на основе этой совокупности наблюдений, а именно:

$$\bar{M} = -\frac{1}{2}\left(\bar{x}_0' \times \dot{\bar{x}}_0' + \bar{y}_0' \times \dot{\bar{y}}_0' + \bar{z}_0' \times \dot{\bar{z}}_0'\right) + k\bar{r} \times A\bar{s}. \tag{10.21}$$

Теорема 10.1. *Если в связанной системе координат измеряются компоненты двух неколлинеарных векторов $\bar{S}$ и $\bar{H}$, компоненты которых в абсолютной системе известны, то управление* (10.21) *приводит к тому, что существует два положения равновесия $\bar{r} = A\bar{s}$, $\bar{\omega} = 0$; $\bar{r} = -A\bar{s}$, $\bar{\omega} = 0$ такие, что первое из них асимптотически устойчиво по Ляпунову, второе — неустойчиво. При этом любое движение, не совпадающее со вторым положением равновесия при надлежащем выборе $k > 0$, будет обладать свойством $\bar{\omega} \to 0$; $\bar{z} \to A\bar{s}$ при $t \to \infty$.*

2. В общем случае управления вращательным движением твердого тела может оказаться, что вектор $\bar{s}$ меняется со временем. Например, он может являться ортом линии визирования, соединяющей начало неподвижной системы координат с центром масс движущегося управляемого объекта. Тогда решение задачи построения управляющих моментов должно основываться на предварительном определении требуемых элементов движения этого объекта.

Остановимся несколько более подробно на решении этой задачи в общем случае. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + f(t). \tag{10.22}$$

Предположим, что в процессе движения измеряются компоненты вектора

$$z = P_1(t)x + Q_1(t)u + f_1(t). \tag{10.23}$$

На основе этих измерений требуется определить компоненты векторной функции

$$\xi = P_2(t)x + Q_2(t)u + f_2(t) + Rz. \tag{10.24}$$

Будем считать, что элементы матриц, входящих в (10.22) — (10.24), а также компоненты векторов f_1, f_2 являются вещественными функциями, заданными при $t \geqslant 0$, непрерывными и ограниченными. Будем считать, что вектор фазового состояния x имеет размерность n, вектор управлений u имеет размерность r, вектор z — размерность l и ξ — размерность k. Обозначим через Y фундаментальную систему решений для системы $\dot{x} = P(t)x$, $Y = E$ при $t = 0$.

Предположим сначала, что управление u является известной функцией времени. Обозначим через B_1 матрицу $B_1 = P_1(t)\ Y(t)$.

Теорема 10.2. *Если существует число τ такое, что векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B_1, линейно независимы на промежутке $[t-\tau,\ t]$, то векторная функция ξ определяется в момент t единственным образом через известные функции и наблюденные значения вектора z на промежутке $[t-\tau,\ t]$.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольное начальное состояние для системы (10.22). Тогда система (10.22) имеет решение

$$x = Yx_0 + Y\int_0^t Y^{-1}(Qu + f)\,dt. \tag{10.25}$$

Подставляя решение (10.25) в (10.23), находим равенство

$$z = B_1x_0 + P_1Y\int_0^t Y^{-1}(Qu + f)\,dt + Q_1u + f_1. \tag{10.26}$$

Из условий теоремы вытекает, что

$$A_1(t-\tau,\ t) = \int_{t-\tau}^{t} B_1^*B_1 dt \text{ — неособая матрица.}$$

Домножая обе части равенства (10.26) на матрицу B_1^* слева и интегрируя по t в пределах от $t-\tau$ до t, получаем соотношение

$$\int_{t-\tau}^{t} B_1^* z\,dt = A_1(t-\tau,\, t)\, x_0 + \int_{t-\tau}^{t} B_1^* \left[B_1 \int_0^t Y^{-1}(Qu+f)\,dt + \right.$$

$$\left. + Q_1 u + f_1 \right] dt. \qquad (10.27)$$

Исключая вектор x_0 из выражения (10.25) с помощью соотношения (10.27), а затем исключая вектор x из функции (10.24), получаем равенство

$$\xi = R(t)\, z(t) + P_2 Y A_1^{-1}(t-\tau,\, t) \int_{t-\tau}^{t} B_1^* z\,dt + \xi_0(t), \qquad (10.28)$$

где $\xi_0(t)$ — известная функция, не зависящая от начального состояния системы (10.22) и наблюденных значений вектора z.

Дадим теперь другое представление векторной функции ξ, отличное от (10.28). Так как векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B_1^*, линейно независимы в промежутке $[t-\tau,\, t]$, то можно указать n точек в этом промежутке $t-\tau_j$; $j = 1, \ldots, n$, таких, что среди строк матрицы $B_1(t-\tau_j)$, $j = 1, \ldots, n$, имеется ровно n линейно независимых.

Заменим в (10.26) t на $t-\tau_j$, затем домножим полученный результат на матрицу $B_1^*(t-\tau_j)$ и просуммируем результат по индексу j:

$$\sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)\, z(t-\tau_j) = H_1 x_0 + \sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j) \times$$

$$\times \left[P_1(t-\tau_j)\, Y(t-\tau_j) \int_0^{t-\tau_j} Y^{-1}(Qu+f)\,dt + \right.$$

$$\left. + Q_1(t-\tau_j)\, u(t-\tau_j) + f(t-\tau_j) \right]. \qquad (10.29)$$

В формуле (10.29) через H_1 обозначена матрица

$$H_1 = \sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)\, B_1(t-\tau_j).$$

Матрица H_1 — неособая, поэтому из формулы (10.29) и решения (10.25) можно исключить вектор x_0, а затем исключить вектор x из функции (10.24). Тогда получим формулу

$$\xi(t) = R(t)\, z(t) + P_2(t)\, Y(t)\, H_1^{-1}(t) \sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)\, z(t-\tau_j) + \eta_0. \qquad (10.30)$$

В формуле (10.30) функция η_0 не зависит от начального состояния системы (10.22) и от наблюденных значений вектора z.

Формулы (10.28) и (10.30) доказывают теорему 10.2 полностью. ■

3. Остановимся теперь на решении проблемы локализации движения управляемой системы. Пусть задана линейная управляемая система

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + f(t). \tag{10.31}$$

Элементы матрицы P, Q и компоненты вектора f будем считать заданными при $t \geqslant 0$, вещественными, непрерывными и ограниченными. Пусть известно, что управление в этой системе стеснено ограничением

$$\int_0^T u^2 dt \leqslant \alpha^2, \tag{10.32}$$

где u является, как и прежде, r-мерной векторной функцией, x — n-мерной векторной функцией, дающей фазовое состояние системы. Предположим, что относительно некоторого управления

$$u = u(t) \tag{10.33}$$

известно, что оно удовлетворяет ограничениям (10.32) и переводит систему из известного состояния x_0 в конечное состояние $x = 0$ за известное время $[0, T]$. В остальном управление (10.33) остается неизвестным. При этих условиях требуется указать ту область фазового пространства E_n, в которой может находиться движение системы (10.31) при управлении (10.33).

Дадим решение этой задачи локализации движений. Прежде всего управление (10.33) может быть представлено в форме

$$u = B^*c + V, \tag{10.34}$$

где, как и выше, $B = Y^{-1}Q$ и c — постоянный вектор. Значения этого вектора можно определить из условий задачи единственным образом. А именно: домножая систему (10.31) слева на матрицу Y^{-1} и интегрируя в пределах $[0, T]$, найдем

$$-x_0 = A(0, T)c + \int_0^T Y^{-1} f dt.$$

Отсюда имеем равенство

$$c = -A^{-1}(0, T)\left(x_0 + \int_0^T Y^{-1} f dt\right), \tag{10.34'}$$

где $A(0, T) = \int_0^T BB^* dt.$

В этих выкладках было использовано условие ортогональности векторной функции V строкам матрицы B, т. е.

$$\int_0^T BV\mathrm{d}t = 0.$$

Подставляя равенство (10.34) в условие (10.32), получаем неравенство

$$\int_0^T V^2\mathrm{d}t \leqslant \alpha^2 - \left(x_0 + \int_0^T Y^{-1}f\mathrm{d}t\right)^* A^{-1}(0, T)\left(x_0 + \int_0^T Y^{-1}f\mathrm{d}t\right). \qquad (10.35)$$

Если систему (10.31) после умножения слева на Y^{-1} проинтегрировать от t до T, то получится соотношение

$$-Y^{-1}(t)\,x(t) - A(t, T)\,c - \int_t^T Y^{-1}f\mathrm{d}t = \int_t^T BV\mathrm{d}t. \qquad (10.36)$$

Представим теперь векторную функцию V на промежутке $[t, T]$ формой

$$V(\tau) = B^*(\tau)\gamma(t) + W(\tau), \qquad (10.37)$$

где функция W удовлетворяет условию ортогональности

$$\int_t^T B(\tau)\,W(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0.$$

Таким образом, вектор $\gamma(t)$ в формуле (10.37) может быть определен единственным образом:

$$\gamma(t) = A^{-1}(t, T)\int_t^T B(\tau)\,V(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Подставляя выражение (10.37) в неравенство (10.35), находим

$$\gamma^*(t)\,A(t, T)\,\gamma(t) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^2 - \left(x_0 + \int_0^T Y^{-1}f\mathrm{d}t\right)^* A^{-1}(0, T)\left(x_0 + \int_0^T Y^{-1}f\mathrm{d}t\right) - \int_t^T W^2\mathrm{d}t. \qquad (10.38)$$

Используя соотношение (10.36) и неравенство (10.38), находим далее неравенство

$$\eta^* A^{-1}(t, T)\,\eta \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^2 - \left(x_0 + \int_0^T Y^{-1}f\mathrm{d}t\right)^* A^{-1}(0, T)\left(x_0 + \int_0^T Y^{-1}f\mathrm{d}t\right) - \int_0^T W^2\mathrm{d}t, \qquad (10.39)$$

где η — левая часть (10.36).

Неравенство (10.39) в фазовом пространстве E_n задает *семейство эллипсоидов*. Если положить в неравенстве (10.39) $W = 0$, то получится эллипсоид, охватывающий это семейство:

$$(x-\bar{x})^* (Y^{-1})^* A^{-1}(t, T) Y^{-1}(x-\bar{x}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^2 - \left(x_0 + \int_0^T Y^{-1} f \mathrm{d}t\right)^* A^{-1}(0, T)\left(x_0 + \int_0^T Y^{-1} f \mathrm{d}t\right). \quad (10.40)$$

В неравенстве (10.40) положено

$$\bar{x} = -Y\left[A(t, T) c + \int_t^T Y^{-1} f \mathrm{d}t\right]. \quad (10.41)$$

Легко видеть, что формула (10.41) дает решение системы (10.31) при управлении (10.34) при условии, что $V = 0$. Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема 10.3. *Если управляемая система* (10.31) *под действием управления* (10.33), *удовлетворяющего условию* (10.32), *переводится из некоторого известного начального состояния* x_0 *за известное время* $[0, T]$ *в конечное состояние* $x = 0$, *то при условии линейной независимости векторных функций, стоящих в столбцах матрицы* B^*, *на любом из промежутков* $[t, T]$ *движение системы* (10.31) *может располагаться при любом фиксированном* $t \in [0, T]$ *лишь в области, определяемой неравенством* (10.40).

Перейдем теперь к решению проблемы локализации движения управляемой системы на основе использования некоторых измерений. Пусть вновь рассматривается система (10.31) при наличии ограничений (10.32) и измеряется величина

$$z = R(t) x(t). \quad (10.42)$$

И пусть также известно, что система (10.31) находится под действием управления (10.33), переводящего систему (10.31) из неизвестного начального состояния x_0 в конечное состояние $x = 0$ за известное время $[0, T]$. Требуется по измерениям величины z найти ту область фазового пространства E_n, где могут располагаться движения системы (10.31).

Будем искать управление (10.33) вновь в форме (10.34). Однако вектор c будет теперь неизвестным. Векторная функция V по-прежнему удовлетворяет условию ортогональности. Вектор c можно выразить по формуле (10.36) через неизвестное начальное состояние:

$$c = -A^{-1}(0, T)\left(x_0 + \int_0^T Y^{-1} f \mathrm{d}t\right). \quad (10.43)$$

Подставляя управление (10.34) в систему (10.31), умножая слева на матрицу Y^{-1} и интегрируя затем в пределах от t до T, находим

$$x = -Y\left[A(t, T) c + \int_t^T BV \mathrm{d}t + \int_t^T Y^{-1} f \mathrm{d}t\right]. \quad (10.44)$$

Подставляя соотношение (10.44) в формулу (10.42), получаем равенство

$$z = -RYA(t, T)c - RY\left[\int_t^T BV\mathrm{d}t - \int_t^T Y^{-1}f\mathrm{d}t\right]. \qquad (10.45)$$

Заменим в равенстве (10.45) $\int_t^T BV\mathrm{d}t$ через $-\int_0^t BV\mathrm{d}t$. Домножая обе части равенства (10.45) на матрицу R_1^* и, интегрируя в пределах $[0, T]$, получаем равенство

$$\int_0^T R_1^* z dt = \int_0^T R_1^* R_1 \mathrm{d}t \cdot c + \int_0^T R_1^* RY \int_0^t BV\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t -$$

$$- \int_0^T R_1^* RY \int_t^T Y^{-1}f\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t. \qquad (10.46)$$

Здесь положено $R_1 = RYA(t, T)$. Изменяя в среднем члене, входящем в правую часть (10.46), порядок интегрирования, получаем равенство

$$\int_0^T R_1^* RY \int_0^t BV\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t = \int_0^T B_1 V\mathrm{d}t,$$

где

$$B_1 = \int_t^T R_1^*(\tau) R(\tau) Y(\tau) B(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Положим $B_1 = \lambda^* B + B_2$, где $\int_0^T B_2 B^* \mathrm{d}t = 0$, тогда

$$\lambda^* = \int_0^T B_1 B^* \mathrm{d}t \cdot A^{-1}(0, T)$$

и, следовательно, выражение (10.46) можно представить в форме

$$\int_0^T R_1^* z\mathrm{d}t = \int_0^T R_1^* R_1 \mathrm{d}t \cdot c + \int_0^T B_2 V\mathrm{d}t - \int_0^T R_1^* RY \int_t^T Y^{-1}f\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t. \qquad (10.47)$$

Будем искать векторную функцию V в форме

$$V = B_2^* \gamma + W, \quad \int_0^T B_2 W\mathrm{d}t = 0. \qquad (10.48)$$

Из ограничений (10.32) имеем

$$c^* A(0, T)c + \gamma^* A_2(0, T)\gamma \leqslant \alpha^2 - \int_0^T W^2 \mathrm{d}t, \qquad (10.49)$$

где

$$A_2(0, T) = \int_0^T B_2 B_2^* dt.$$

Подставляя выражение (10.48) в соотношение (10.47), найдем также равенство

$$\int_0^T R_1^* z dt = \int_0^T R_1^* R_1 dt \cdot c + A_2(0, T)\gamma - \int_0^T R_1^* RY \int_t^T Y^{-1} f d\tau dt. \qquad (10.50)$$

Предположим, что матрица $A_2(0, T)$ — неособая, тогда при любом векторе c вектор γ определяется из (10.50) единственным образом. Исключим, пользуясь соотношением (10.50), вектор γ из неравенства (10.49), тогда для определения вектора x_0 получим семейство эллипсоидов. Эллипсоид, получаемый при $W = 0$, будет охватывать это семейство.

Обозначим этот эллипсоид через S_0 и сформулируем теорему.

Теорема 10.4. *Если* 1) в *процессе управления системой* (10.31) *измеряется величина* (10.42), *где* $R(t)$ — *матрица, заданная при* $t \geqslant 0$, ***вещественная, непрерывная и ограниченная***; 2) ***векторные функции***, *стоящие в столбцах матрицы* B_2^*, *линейно независимы на промежутке* $[0, T]$, *и векторные функции, стоящие в столбцах матрицы* B^*, *линейно независимы на каждом из промежутков* $[t, T]$, *то система* (10.31) *может переходить в конечное состояние* $x = 0$ *за заданное время* $[0, T]$ *лишь из начальных состояний, расположенных в области* S_0. *При этом движение системы* (10.31) *в любой момент* $t \in [0, T]$ *может располагаться в множестве состояний* $x_0 \in S_0$ *и* $x \in \Sigma$, *где* Σ — *область, определяемая* (10.40).

Доказательство теоремы вытекает из предыдущего анализа.

Замечание. Теорема 10.4 дает конструкцию того множества, содержащегося в фазовом пространстве системы (10.31), в котором может находиться управляемая точка. Однако конструкция этого множества осуществляется в зависимости от наблюдений на всем промежутке движения $[0, T]$, хотя для некоторых случаев локализации движений конструкцию этого множества полезно выражать через измерения, предшествующие моменту .

Покажем, как можно сконструировать упомянутое множество фазового пространства через такие измерения. Умножим обе части соотношения (10.45) на R_1^*, но проинтегрируем лишь в пределах $[0, t]$, тогда, изменяя порядок интегрирования в том же члене, найдем

$$\int_0^t R_1^* RY dt \int_0^t BV dt - \int_0^t \int_\tau^t R_1^*(\tau) R(\tau) Y(\tau) B(t) d\tau V(t) dt = \int_0^T B_1 V dt,$$

здесь $B_1(\tau) = \int_\tau^t R_1^*(\tau) R(\tau) Y(\tau) B(t) d\tau$

при $\tau \in [0, t]$ и $B_1 = 0$ при $\tau \in (t, T]$. Как и выше, представим функцию V в виде

$$V = B_2^* \gamma + W, \text{ где } B_1 = \lambda^* B + B_2.$$

Если окажется, что матрица $A_2(0, t)$ — неособая начиная с некоторых значений t, то для таких значений возможно решение задачи локализации через измерения величины (10.42), предшествующие значению t:

$$\xi = \eta, \qquad \eta = z.$$

4. Рассмотрим квазилинейную управляемую систему

$$\dot{x} = Px + Qu + f + \mu G(t, x, u). \tag{10.51}$$

Предположим, что в процессе движения измеряются компоненты вектора z:

$$z = P_1 x + Q_1 u + f_1 + \mu G_1(t, x, u); \tag{10.52}$$

с помощью этих измерений требуется определить компоненты векторной функции

$$\xi = P_2 x + Q_2 u + f_2 + \mu G_2(t, x, u) + Rz. \tag{10.53}$$

Будем считать, что векторные функции G, G_1, G_2 заданы при $t > 0$, $x \in E_n$ и $u \in E_r$, вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы относительно компонент векторов x и u. Будем считать далее, что если в системах (10.51) — (10.53) положить $\mu = 0$, то получатся соответственно системы (10.22) — (10.24).

Пусть Ω_n — некоторая конечная область фазового пространства E_n и пусть известно, что начальное состояние x_0 системы (10.51) располагается в этой области. Обозначим через B_1 матрицу, $B_1 = P_1 Y$, и будем сначала считать управление u известной непрерывной векторной функцией.

Теорема 10.5. *Если существует число $\tau > 0$ такое, что векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B_1, линейно независимы в промежутке $[t - \tau, t]$, то существует $\mu_0 > 0$ такое, что при всех $|\mu| < \mu_0$ векторная функция ξ определяется в момент t единственным образом через известные функции и наблюденные значения вектора z на промежутке $[t - \tau, t]$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \Omega_n$. Тогда система (10.51) имеет при всех достаточно малых μ, $|\mu| < \mu_1$, решение

$$x = x(t, x_0, \mu), \; x = x_0 \text{ при } t = 0. \tag{10.54}$$

Подставляя это решение в (10.52), найдем выражение

$$z = z(t, x_0, \mu). \tag{10.55}$$

Домножая (10.55) на матрицу B_1^* слева и интегрируя в пределах от $t - \tau$ до t, найдем соотношение

$$\int\limits_{t-\tau}^{t} B_1^* z \mathrm{d}t = \int\limits_{t-\tau}^{t} B_1^*(t)\, z(t, x_0, \mu)\, \mathrm{d}t. \tag{10.56}$$

Правая часть соотношения (10.56) имеет якобиан, вычисленный по компонентам вектора x_0, отличный от 0 при $\mu = 0$, так как он совпадает с определителем матрицы $A_1(t-\tau, t)$, где

$$A_1(t-\tau, t) = \int_{t-\tau}^{t} B_1^* B_1 dt.$$

Следовательно, соотношение (10.56) определяет неявную функцию

$$x_0 = \varphi(\xi_1, t, \mu), \tag{10.57}$$

где $\xi_1 = \int_{t-\tau}^{t} B_1^* z dt$.

Пользуясь (10.57), исключим из функции (10.54) вектор x_0, а затем исключим вектор x из функции (10.53). Тогда получим, что вектор будет определяться единственным образом через известные функции и наблюденные значения вектора z на промежутке $[t-\tau, t]$. Как и ранее, можно дать представление функции ξ через дискретные наблюдения вектора z. Для этого в формуле (10.55) заменим t на $t-\tau_j$, домножим после этого слева на матрицу B_1^* $(t-\tau_j)$ и просуммируем по индексу j:

$$\sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j) z(t-\tau_j) = \sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j) z(t-\tau_j, x_0, \mu). \tag{10.58}$$

Якобиан правых частей соотношения (10.58), вычисленный по компонентам вектора x_0 при $\mu = 0$, отличен от нуля, так как совпадает с определителем матрицы

$$\sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j) B_1(t-\tau_j) = H_1.$$

Точки $t-\tau_j$ считаются выбранными на промежутке $[t-\tau, t]$, так же как в предыдущем случае. Поэтому можно считать, что существует $\mu_0 > 0$ такое, что при всех μ, для которых $|\mu| < \mu_0$, система (10.58), может быть разрешена относительно компонент вектора x_0,

$$x_0 = \psi(\xi_2, t, \mu), \tag{10.59}$$

где $\xi_2 = \sum_{j=1}^{n} B_1^*(t-\tau_j)$.

Пользуясь (10.59), исключаем x_0 из функции (10.54) и затем x из функции (10.53). Тогда получим выражение вектора ξ через известные функции и дискретные наблюденные значения вектора z. ■

5. Рассмотрим теперь систему нелинейных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{10.60}$$

Предположим, что измеряется величина

$$z = G(t, x) \tag{10.61}$$

и требуется определить элементы движения, определяемые величиной $\xi = H(t, x)$. Будем считать, что векторные функции f, G, H заданы при $t \geqslant 0$, $x \in E_n$, вещественны, непрерывны и, кроме того, функции f и G непрерывно дифференцируемы по отношению к компонентам вектора x. Пусть далее система (10.60) имеет положение равновесия $x = 0$, $f(t, 0) = 0$. Пусть также $G(t, 0) = 0$. Положим $P = \partial f/\partial x$ при $x = 0$, $P_1 = \partial G/\partial x$ при $x = 0$. Обозначим, как и выше, в теореме 10.5 $B = P_1 Y$, где Y — фундаментальная система решений линейной системы $\dot{x} = P(t)x$, $Y(0) = E$.

Теорема 10.6. *Если для $T > 0$ можно указать число $\tau > 0$ такое, что существует промежуток $[t - \tau, t]$, в котором векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B, линейно независимы, $t \in [\tau, T]$, то можно указать $\delta = \delta(T) > 0$ такое, что для любого движения системы* (10.60), *начинающегося в области $||x_0|| < \delta$ при $t = 0$, можно вычислить единственным образом элементы $\xi(\nu)$ по измерениям z для любого $\nu \in [0, T]$. При этом измерения должны осуществляться в промежутке $[t - \tau, t]$.*

Доказательство. Выберем число ε так, чтобы любое решение

$$x = x(t, x_0) \tag{10.62}$$

системы (10.60), начинающееся при $||x_0|| < \varepsilon$, $t = 0$, было определено на промежутке $t \in [0, T]$. Подставим функцию (10.62) в функцию (10.61), затем умножим обе части на матрицу B^* и проинтегрируем в пределах $[t - \tau, t]$:

$$\int_{t-\tau}^{t} B^* z \, dt = \int_{t-\tau}^{t} B^*(t) \, G(t, x(t, x_0)) \, dt. \tag{10.63}$$

Легко видеть, что правая часть соотношения (10.63) обращается в ноль при $x_0 = 0$. Якобиан правых частей соотношения (10.63) по отношению к компонентам вектора x_0, вычисленный при $x_0 = 0$, совпадает с определителем матрицы $\int_{t-\tau}^{t} B^* B \, dt$ и, следовательно, отличен от нуля. Тогда существует столь малое $\delta = \delta(T)$, что при $||x_0|| < \delta$ вектор x_0 можно единственным образом определить из системы (10.63) при любом $t \in [\tau, T]$. Выберем δ к тому же так, чтобы было $\delta < \varepsilon$. Тогда существует единственное решение системы (10.60), удовлетворяющее найденному значению x_0. Вычисляя теперь функцию ξ, получаем искомый результат.■

§ 11. УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Координация движений. — Управление механическими системами. — Случай нестационарных связей. — Динамическая управляемость. — Конструкция управлений

1. В настоящем параграфе рассматривается задача управления автоматами (роботами), являющимися с механической точки зре-

ния системой связанных между собой твердых тел. Указана конструкция управлений, разрешающих вопрос координации и стабилизации движений автомата.

Будем считать, что автомат задан в виде системы связанных между собой твердых тел. Пусть T_0 — некоторое тело этой системы и с ним соединены другие твердые тела $T_1, T_2, \ldots, T_n$, причем так, что тело T_k может свободно вращаться вокруг точки O_k, неподвижной как в теле T_{k-1}, так и в теле T_k, $k=1, \ldots, n$. Таких цепочек тел, связанных с T_0, может быть несколько, и они могут разветвляться, образуя древовидную конструкцию.

Задача координации и стабилизации движений такого автомата может быть поставлена следующим образом. Пусть в каждом из тел системы задан орт, так, например, в теле T_k — орт $\overline{r}_k$, неизменно связанный с этим телом. Пусть в абсолютном пространстве задана система ортов. Так, например, орту $\overline{r}_k$ пусть будет соответствовать орт $\overline{s}_k$. Требуется построить управляющие моменты, действующие на тела системы так, чтобы $\overline{r}_k \to \overline{s}_k$ при $t \to \infty$, и так, чтобы это движение было устойчивым по Ляпунову.

Перейдем к решению поставленной задачи. Пусть $\overline{V}_k$ — абсолютная скорость точки O_k, $\overline{\omega}_k$ — абсолютная угловая скорость тела T_k. Тогда уравнения движения будут иметь вид

$$\Theta_k \dot{\overline{\omega}}_k + \overline{\omega}_k \times \Theta_k \overline{\omega}_k + \mu_k \overline{\rho}_k \times \left(\dot{\overline{V}}_k + \overline{\omega}_k \times \overline{V}_k\right) = \overline{M}_k, \quad k=0, 1, \ldots, n, \tag{11.1}$$

$$\mu_k \left(\dot{\overline{V}}_k + \overline{\omega}_k \times \overline{V}_k + \dot{\overline{\omega}}_k \times \overline{\rho}_k + \overline{\omega}_k \times \overline{\omega}_k \times \overline{\rho}_k\right) = \overline{F}_k, \quad k=0, 1, \ldots, n, \tag{11.2}$$

где μ_k — масса и Θ_k — тензор инерции тела T_k, $\overline{\rho}_k$ — радиус-вектор центра инерции тела T_k относительно точки O_k, $\overline{F}_k$ — главный вектор сил, $\overline{M}_k$ — момент сил, приложенных к телу T_k, вычисленный относительно центра инерции этого тела. Дифференцирование производится в системе координат, связанной с телом T_k. Орт $\overline{s}_k$ будет вращаться относительно тела T_k с угловой скоростью $-\overline{\omega}_k$; отсюда имеем уравнение

$$\dot{\overline{s}}_k = -\overline{\omega}_k \times \overline{s}_k. \tag{11.3}$$

Аналогичные уравнения можно выписать и для остальных цепей, имеющих место в автомате.

Теорема 11.1. *Если моменты сил, приложенных к телу, имеют вид*

$$\overline{M}_k = \mu_k \overline{\rho}_k \times \left(\dot{\overline{V}}_k + \overline{\omega}_k \times \overline{V}_k\right) - \overline{\omega}_k + l_k \overline{r}_k \times \overline{s}_k, \quad k=0, 1, \ldots, n, \tag{11.4}$$

то система (11.1), (11.2), (11.3) *будет иметь интегральное многообразие* $\overline{r}_k = \pm \overline{s}_k$, $\overline{\omega}_k = 0$, $k=0, 1, \ldots, n$. *Причем если движение* *не находится на таких многообразиях, то при достаточно большом значении коэффициентов усиления l_k имеем $\bar{r}_k \to \bar{s}_k$, $\bar{\omega}_k \to 0$ при $t \to \infty$ и многообразие $\bar{r}_k = \bar{s}_k$, $\bar{\omega}_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, асимптотически устойчиво по Ляпунову по отношению к переменным $\bar{\omega}_k$, $\bar{r}_k$.*

Предположим теперь, что орты $\bar{s}_k$ изменяют свое положение в пространстве. Для определенности будем считать, что орт $\bar{s}_k$ есть орт оси некоторой системы координат, вращающейся в абсолютном пространстве с угловой скоростью $\bar{\lambda}_k$. Тогда $\bar{s}_k$ будет совершать вращательное движение по отношению к телу T_k с угловой скоростью $\bar{\lambda}_k - \bar{\omega}_k$ и, следовательно,

$$\dot{\bar{s}}_k = \left(\bar{\lambda}_k - \bar{\omega}_k\right) \times \bar{s}_k. \tag{11.5}$$

Теорема 11.2. *Если управляющие воздействия имеют вид*

$$\bar{M}_k = \mu_k \bar{\rho}_k \times \left(\dot{\bar{V}}_k + \bar{\omega}_k \times \bar{V}_k\right) - \left(\bar{\omega}_k - \bar{\lambda}_k\right) + \\ + \Theta_k \dot{\bar{\lambda}}_k + \bar{\lambda}_k \times \Theta_k \bar{\omega}_k + l_k \bar{r}_k \times \bar{s}_k, \tag{11.6}$$

то в системе (11.1), (11.2), (11.5) возникает система интегральных многообразий $\bar{\omega}_k = \bar{\lambda}_k$, $\bar{s}_k = \pm \bar{r}_k$. Если движение системы не находится на таком многообразии, то при достаточно больших значениях коэффициентов усиления l_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, оно обладает свойством $\bar{r}_k \to \bar{s}_k$, $\bar{\omega}_k \to \bar{\lambda}_k$ при $t \to \infty$. При этом интегральное многообразие $\bar{r}_k = \bar{s}_k$, $\bar{\omega}_k = \bar{\lambda}_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, асимптотически устойчиво по Ляпунову по отношению к переменным $\bar{\omega}_k$, $\bar{r}_k$. Остальные многообразия будут неустойчивы по Ляпунову по отношению к этим же переменным.

З а м е ч а н и е. Конструкции управляющих моментов, указанных в теоремах 11.1 и 11.2, решают задачу координации движений. Так как закон движения точки O_0 в пространстве будет предопределять наряду с угловыми скоростями $\bar{\omega}_k$ перемещение любой точки O_k, то для описания полного управления движения автомата следует выбрать закон изменения главного вектора сил $\bar{F}_0$, например положить

$$\bar{F}_0 = \mu_0 \left(\bar{\omega}_0 \times \bar{V}_0 + \dot{\bar{\omega}}_0 \times \bar{\rho}_0 + \bar{\omega}_0 \times \bar{\omega}_0 \times \bar{\rho}_0 + \right. \\ \left. + \ddot{\bar{r}}_0(t)\right) + k_1\left(\bar{V}_0 - \dot{\bar{r}}_0(t)\right) + k_2\left(\bar{r}_0 + \bar{r}_0(t)\right), \tag{11.7}$$

где $\bar{r}_0$ — радиус-вектор точки O_0 в некоторой инерциальной системе координат, а $\bar{r}_0(t)$ — заданная программа движения точки O_0.

2. Выше при рассмотрении различных случаев управления вращательным движением твердого тела и системой тел в качестве управлений использовались моменты, которые с точки зрения общей теории уравнений движения являются обобщенными силами.

Перейдем теперь к исследованию общего случая управления системой материальных точек. Предположим, что задана механическая система, подчиненная стационарным голономным связям. Будем считать, что эта механическая система имеет k степеней свободы, так что каждой конфигурации системы отвечает вполне определенный набор величин $q_1, \ldots, q_k$. И, наоборот, каждому набору таких величин отвечает вполне определенная конфигурация рассматриваемой механической системы. Уравнения Лагранжа второго рода для такой механической системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{11.8}$$

где T — кинетическая энергия системы. Известно, что T представляет собой квадратичную форму и притом определенно положительную относительно величин $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$. Коэффициенты этой квадратичной формы являются, в свою очередь, известными функциями величин $q_1, \ldots, q_k$. Величины $Q_1, \ldots, Q_k$ называются *обобщенными силами.*

В соответствии с теоремой о канонической структуре силовых полей эти функции могут быть представлены в форме

$$Q_j = \frac{\partial}{\partial q_j} Q + R_j, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{11.6}$$

где функции R_j, $j = 1, \ldots, k$, представляют собой составляющие соленоидального поля. (Их также называют *гироскопическими силами.*) Физическое свойство такого поля сил заключается в том, что оно не дает вклада в элементарную работу, а именно:

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j R_j \equiv 0. \tag{11.10}$$

Будем считать, что функция Q и функции R_j, $j = 1, \ldots, k$, могут быть разложены в ряды по степеням величин $q_1, \ldots, q_k$ так, что

$$Q = \sum_{m=1}^{\infty} V^{(m)}, \quad R_j = \sum_{m=1}^{\infty} R_j^{(m)}. \tag{11.11}$$

Здесь функции $R_j^{(m)}$ и $V^{(m)}$ представляют собой однородные формы степени m относительно величин $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$. При этом коэффициенты этих форм являются известными функциями величин $q_1, \ldots, q_k$ и, возможно, времени t. Предположим далее, что

$$V^{(1)} = \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j P_j, \text{ где } P_j = -\frac{\partial}{\partial q_j} P \text{ и } P = \sum_{m=2}^{\infty} P^{(m)}.$$

Здесь через $P^{(m)}$ обозначены формы m-й степени относительно величин $q_1 - r_1, \ldots, q_k - r_k$ с известными постоянными коэффициентами.

Таким образом, система (11.8) примет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_j}+R_j,\quad j=1,\dots,k. \tag{11.12}$$

Теорема 11.3. *Если* 1) *функция* $V^{(2)}$ *определенно отрицательна относительно величин* $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$, 2) *функция* $P=P(q_1, \dots, q_k)$ *определенно положительна по отношению к величинам* $q_1-r_1, \dots, q_k-r_k$ (*для определенности квадратичную форму* $P^{(2)}$ *будем считать положительно определенной*), *то система* (11.12) *имеет положение равновесия* $q_1=r_1, \dots, q_k=r_k$, $\dot{q}_1=0, \dots, \dot{q}_k=0$, *асимптотически устойчивое по Ляпунову.*

Доказательство. Домножим уравнение (11.12) на $\dot{q}_j$ и просуммируем по индексу j полученное соотношение:

$$\frac{d}{dt}(T+P)=\sum_{m=2}^{\infty} mV^{(m)}. \tag{11.13}$$

Заметим, что соотношение (11.13) получится из уравнения (11.12), если учесть, что имеют место тождественные соотношения

$$\frac{d}{dt}P=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial P}{\partial q_j}\dot{q}_j,\quad \sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\frac{\partial V^{(m)}}{\partial \dot{q}_j}=mV^{(m)}.$$

Последнее соотношение вытекает из теоремы Эйлера об однородных функциях.

Аналогично можно вывести соотношение

$$\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=2T.$$

Функция $T+P$, входящая в равенство (11.13), является определенно положительной относительно величин $q_1-r_1, \dots, q_k-r_k$, $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$. Правая часть соотношения (11.13) является в то же время знакопостоянной отрицательной в окрестности точки $q_1=r_1, \dots, q_k=r_k$, $\dot{q}_1=0, \dots, \dot{q}_k=0$.

Далее из вида системы (11.12) вытекает, что эта точка является положением равновесия системы (11.12). Соотношение (11.13) показывает, что это положение равновесия непременно является устойчивым по Ляпунову. Покажем, что оно является также и асимптотически устойчивым. При решении аналогичной задачи в теории управления вращательным движением твердого тела использовались методы качественной теории дифференциальных уравнений. В этом общем случае такой подход также возможен. Однако ниже будет применен аналитический вывод справедливости этого утверждения.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = T + P - \alpha \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} P_j. \tag{11.14}$$

Найдем полную производную этой функции в силу системы (11.13):

$$dV/dt = W, \tag{11.15}$$

здесь

$$W = \sum_{m=2}^{\infty} mV^{(m)} - \alpha \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} P_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{dP_j}{dt} \right). \tag{11.16}$$

В формуле (11.16) исключим величину $\dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, пользуясь системой (11.12). Тогда окончательно будем иметь равенство

$$\frac{dV}{dt} = W = \sum_{m=2}^{\infty} mV^{(m)} - \alpha \sum_{j=1}^{k} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_j} + R_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) P_j + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{dP_j}{dt} \right]. \tag{11.17}$$

Покажем,что при достаточно малом положительном α функция Ляпунова V будет определенно положительной, а функция W — определенно отрицательной по отношению к величинам $q_1 - r_1, \ldots, q_k - r_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$. Действительно, из формулы (11.17) вытекает, что совокупность членов, квадратичных относительно упомянутых величин, содержится в выражении вида

$$2V^{(2)} - \alpha \sum_{j=1}^{k} P_j^2 - \alpha \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \dot{q}_j} P_j -$$
$$- \alpha \sum_{j=1}^{k} R_j P_j - \alpha \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \frac{dP_j}{dt}. \tag{11.18}$$

Первый и последний члены выражения (11.18) содержат квадратичную форму относительно величин $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$. Эта форма будет определенно отрицательной при достаточно малом положительном α. Второй член (11.18) содержит отрицательно определенную квадратичную форму относительно величин $q_1 - r_1, \ldots, q_k - r_k$. Остальные члены выражения (11.18) содержат билинейные формы относительно упоминавшихся величин. Производя оценку этих билинейных форм, убеждаемся, что выражение (11.18) является при достаточно малом положительном α определенно отрицательной функцией. Из этого заключаем, что функция W является определенно отрицательной, следовательно, изучаемое положение равновесия асимптотически устойчиво по Ляпунову.■

В заключение следует упомянуть о способе оценки билинейных форм, которым здесь приходится пользоваться. Если задана билинейная форма вида $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$, то имеем неравенство

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j\right| \leqslant a\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\varepsilon} + a\varepsilon\sum_{i=1}^{n} y_j^2,$$

где $a = \frac{1}{2}\max_{i,j}|a_{ij}|$ и ε — произвольное положительное число. Заменяя билинейные формы, входящие в (11.18), их верхними оценками, можно положительное число ε выбрать столь большим и положительное число α — столь малым, что квадратичная форма, входящая в (11.18), будет определенно отрицательной. ■

3. Перейдем теперь к рассмотрению того случая, когда рассматриваемая механическая система подчиняется голономным нестационарным связям.

Кинетическая энергия такой системы может быть представлена в форме

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}, \tag{11.19}$$

где $T^{(2)} = \frac{1}{2}\dot{q}^*A(t, q_1, \ldots, q_k)\dot{q}$ есть определенно положительная квадратичная форма относительно величин $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k)$, $T^{(1)}$ — линейная форма этих величин: $T^{(1)} = \sum_{j=1}^{k} a_j(t, q_1, \ldots, q_k)\dot{q}_j$, а $T^{(0)} = T^{(0)}(t, q_1, \ldots, q_k)$ — свободный член, не зависящий от обобщенных скоростей.

Предположим, что обобщенные силы

$$F = (Q_1, \ldots, Q_k) \tag{11.20}$$

в этом случае определяются формулами

$$Q_j = \frac{\partial\hat{Q}}{\partial\dot{q}_j} + R_j, \tag{11.21}$$

здесь $\hat{Q} \doteq \sum_{m=1}^{\infty}\hat{V}^{(m)}$, $\hat{V}^{(m)}$ — однородные формы степени m относительно $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$, причем

$$\begin{gathered}\hat{V}^{(1)} - \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{\partial}{\partial q_j}\left(P + T^{(0)}\right) + \frac{\partial a_j}{\partial t}\right\}\dot{q}_j,\\ \hat{V}^{(2)} = V^{(2)} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}T^{(2)}.\end{gathered} \tag{11.22}$$

Функция P, как и выше, разлагается в ряд $P=\sum_{m=2}^{\infty}P^{(m)}$, сходящийся в некоторой окрестности точки $q_j = r_j$.

Теорема 11.4. *Если выполнены условия:* 1) *матрица* $A(t, q_1, \ldots, q_k)$ *положительно определена и равномерно ограничена вместе с* A^{-1} *в некоторой окрестности точки* $q_1 = r_1, \ldots, q_k = r_k$; 2) *квадратичная форма* $V^{(2)}$ *отрицательно определена по отношению к величинам* $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$; 3) *квадратичная форма* $P^{(2)}$ *положительно определена по отношению к* $q_1-r_1, \ldots, q_k-r_k$, *то в системе* (11.8) *под действием обобщенных сил* (11.20) *возникает положение равновесия* $q_1 = r_1, \ldots, q_k = r_k$, $\dot{q}_1 = 0, \ldots, \dot{q}_k = 0$, *асимптотически устойчивое по Ляпунову.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы ведется по той же схеме, что и доказательство предыдущей. Отметим лишь ряд специфических особенностей, возникающих здесь. Равенство (11.13) в данном случае примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(T^{(2)}+P\right)=\sum_{m=3}^{\infty}m\widehat{V}^{(m)}+2V^{(2)}. \tag{11.23}$$

Равенство (11.23) получается из системы (11.8) после умножения обеих частей на $\dot{q}_j$ и почленного сложения. После этого следует учесть ряд соотношений, а именно:

$$\frac{d}{dt}T=\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j,$$

$$\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=2T^{(2)}+T^{(1)}.$$

Из этих соотношений имеем равенство

$$\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)=\frac{d}{dt}\left(2T^{(2)}+T^{(1)}\right)-$$
$$-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j=\frac{d}{dt}\left(T^{(2)}-T^{(0)}\right)+\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(T^{(2)}-T^{(0)}\right)+\frac{\partial T}{\partial t}=2V^{(2)}+\sum_{m=3}^{\infty}m\widehat{V}^{(m)}+\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{d}{dt}\left(P+T^{(0)}\right),$$

из которого следует равенство (11.23). Из соотношения (11.23) выводим, что положение равновесия $q_j = r_j$, $\dot{q}_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$, в системе (11.8) будет устойчивым по Ляпунову, так как функция $T^{(2)} + P$ является определенно положительной в окрестности этой точки, а ее полная производная — знакопостоянной отрицательной.

Покажем теперь, что имеет место также и асимптотическая устойчивость. С этой целью рассмотрим функцию

$$V = T^{(2)} + P - \alpha \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_j} P_j,$$

где $P_j = -\partial P / \partial q_j$. Дифференцируя эту функцию в силу системы (11.8) и учитывая соотношения (11.20), (11.21), (11.22), найдем равенство

$$\frac{dV}{dt} = W = 2V^{(2)} + \sum_{m=3}^{\infty} m\widehat{V}^{(m)} - \alpha \sum_{j=1}^{k} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_j} P_j + \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_j} \frac{dP_j}{dt} \right\}.$$

Как и в предыдущей теореме, можно показать, что при достаточно малом положительном α функция V является положительно определенной, а W — отрицательно определенной по отношению к $q_j - r_j$ и $\dot{q}_j$, $j = 1, \ldots, k$. ■

Заметим, что при наличии в системе стационарных связей обобщенные силы, приводящие систему к любой заданной конфигурации $q_1 = r_1, \ldots, q_k = r_k$, были построены таким образом, что они не зависели от характеристик инерции. В том же случае, когда связи нестационарные, обобщенные силы, решающие упомянутую задачу, оказываются зависящими от инерционных характеристик системы. Это обстоятельство наводит на мысль о том, что обобщенных сил, переводящих механическую систему в заданную конфигурацию и не зависящих от инерционных характеристик системы, в общем случае не существует. Эта мысль подтверждается на примерах.

4. Перейдем теперь к конструированию обобщенных сил, обеспечивающих переход механической системы в пространстве конфигураций в заданное, меняющееся во времени положение:

$$q_j = r_j(t), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{11.24}$$

Сделаем в системе (11.8) замену обобщенных координат по формулам

$$\varkappa_j = q_j - r_j(t), \quad \dot{\varkappa}_j = \dot{q}_j - \dot{r}_j(t). \tag{11.25}$$

Тогда кинетическая энергия T имеет вид

$$T = \tau^{(2)} + \tau^{(1)} + \tau^{(0)}, \tag{11.26}$$

где $\tau^{(2)}$ — квадратичная форма относительно величин $\dot{\varkappa}_j$, $\tau^{(1)}$ — линейная форма относительно величин $\dot{\varkappa}_j$, $\tau^{(0)}$ — свободный член, не зависящий от величин $\dot{\varkappa}_j$.

Тогда уравнение (11.8) примет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varkappa}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varkappa_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, k. \tag{11.27}$$

Определим обобщенные функции Q_j формулами

$$F = (Q_1, \dots, Q_k) = \left(\operatorname{grad} \widetilde{Q}\right)^* + R, \tag{11.28}$$

где $\operatorname{grad}\widetilde{Q} = \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial \dot{\varkappa}_1}, \dots, \frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial \dot{\varkappa}_k}\right)$, $R = (R_1, \dots, R_k), \dot{\varkappa}^* R = 0$;

$$\widetilde{Q} = \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{V}^{(m)}; \tag{11.29}$$

$$\widetilde{V}^{(1)} = -\sum_{j=1}^{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varkappa_j}\left(P + \tau^{(0)}\right) + \frac{\partial \widetilde{a}_j}{\partial t} \right\} \dot{\varkappa}_j,$$

$$\widetilde{V}^{(2)} = V^{(2)} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\tau^{(2)}, \tag{11.30}$$

где $\widetilde{a}_j$ — коэффициенты линейной формы $\tau^{(1)}$. Будем считать, что $\widetilde{V}^{(m)}$, $m = 3, \dots$, и $V^{(2)}$ являются однородными формами относительно $\dot{\varkappa}_1, \dots, \dot{\varkappa}_k$, тогда

$$P = \sum_{m=2}^{\infty} P^{(m)}. \tag{11.31}$$

Функции $P^{(m)}$ представляют собой однородные формы степени m относительно $\varkappa_1, \dots, \varkappa_k$ с постоянными коэффициентами.

Теорема 11.5. *Если выполняются условия:* 1) *матрица* $A(t, r_1 + \varkappa_1, \dots, r_k + \varkappa_k)$ — *положительно определенная и ограничена вместе с* A^{-1} *в некоторой окрестности точки* $\varkappa_1 = 0, \dots, \varkappa_k = 0$ *равномерно по отношению к* t; 2) *форма* $V^{(2)}$ *определенно отрицательна по отношению к* $\dot{\varkappa}_1, \dots, \dot{\varkappa}_k$, 3) *форма* $P^{(2)}$ *определенно положительна, то в системе* (11.8) *имеется динамическое положение равновесия* $q_j = r_j(t)$, $\dot{q}_j = \dot{r}_j(t)$, $j = 1, \dots, k$, *асимптотически устойчивое по Ляпунову.*

Доказательство. Эта теорема может быть установлена как следствие предыдущей. А именно: уравнения (11.27) можно рассматривать как уравнения Лагранжа второго рода для некоторой механической системы, подверженной нестационарным связям, имеющей обобщенные координаты $\varkappa_1, \dots, \varkappa_k$ и кинетическую энергию, определяемую формулой (11.26). А тогда из теоремы (11.4) вытекает, что под действием обобщенных сил, удовлетворяющих условиям (11.28)—(11.31), в этой системе возникает устойчивое и даже асимптотически устойчивое положение равновесия

$$\varkappa_j = 0, \quad \dot{\varkappa}_j = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Возвращаясь к прежним обобщенным координатам, получаем, что система (11.8) имеет динамическое положение равновесия

$$q_j = r_j(t), \quad \dot{q}_j = \dot{r}_j(t), \quad j = 1, \dots, k,$$

асимптотически устойчивое по Ляпунову. ■

Замечание. Конструкция обобщенных сил, переводящих механическую систему в заданную подвижную конфигурацию, в общем случае обязательно зависит от характеристик инерции. ■

5. Рассмотрим теперь вопрос о конструировании управляющего силового поля, обеспечивающего переход механической системы к заданной конфигурации. В случае управления вращательным движением твердого тела решение этой проблемы было основано на использовании кориолисовых сил и сил инерции относительного движения. Этот подход может быть с успехом использован и в общем случае.

Будем считать, что заданная механическая система является несущей. Предположим, что с ней связана некоторая система материальных точек, которые совершают относительные движения по отношению к несущей механической системе. Предположим, что объединенная механическая система, получающаяся таким образом, подчинена стационарным связям и описывается с помощью обобщенных координат $q_1, \dots, q_k, s_1, \dots, s_l$, $l \gg k$. Будем считать, что эта система подчинена голономным стационарным связям. Тогда ее кинетическая энергия представима в форме

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^* A \dot{q} + \dot{q}^* B \dot{s} + \frac{1}{2}\dot{s}^* C \dot{s}. \tag{11.32}$$

Уравнения Лагранжа для такой системы могут быть записаны в форме

$$A\ddot{q} + B\ddot{s} + \Pi = M, \tag{11.33}$$

$$C\ddot{s} + B^*\ddot{q} + \Sigma = u, \tag{11.34}$$

где $q = (q_1, \dots, q_k)$, $s = (s_1, \dots, s_l)$, $M = (M_1, \dots, M_k)$, $u = (u_1, \dots, u_l)$.

Будем считать, что $M_1, \dots, M_k$ есть обобщенные силы, отнесенные к координатам $q_1, \dots, q_k$ и действующие в системе, $u_1, \dots, u_l$ — обобщенные управляющие силы, отнесенные к координатам $s_1, \dots, s_l$.

Эти управляющие обобщенные силы предстоит выбрать так, чтобы исходная механическая система принимала заданную конфигурацию. Векторные функции Π и Σ имеют компоненты, являющиеся квадратичными формами относительно векторов $\dot{q}$ и $\dot{s}$. Эти векторы удовлетворяют соотношению $\dot{q}^*\Pi + \dot{s}^*\Sigma = 0$.

Теорема 11.6. *Пусть выполнены условия:* 1) *квадратичная форма* (11.32) *является положительно определенной при любом выборе обобщенных координат;* 2) *строки матрицы B линейно независимы и матрица A зависит только от обобщенных координат*

$q_1, \ldots, q_k$, 3) $u = B^*u_0 + \tilde{u}$, здесь

$$u_0 = [BC^{-1}B^*]^{-1}[M + BC^{-1}\Sigma - \Pi +$$
$$+ (A - BC^{-1}B^*)A^{-1}(\Pi_0 - F)]. \quad (11.35)$$

(*В формуле* (11.35) *принято обозначение* $\Pi_0 = \Pi$ *при* $\dot{s} = 0$, *векторная функция* F *определяется формулой* $F = (Q_1, \ldots, Q_k)$ *и обобщенные силы* Q_j *удовлетворяют условиям* (11.9), (11.10), (11.11), *где* $V^{(2)}$ — *отрицательная квадратичная форма величин* $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$, $P^{(2)}$— *определенно положительная квадратичная форма величин* $q_1 - r_1, \ldots, q_k - r_k$.) *Тогда при любом выборе обобщенной силы* $\tilde{u}$, *удовлетворяющей условию* $B\tilde{u} = 0$, *в системе* (11.33), (11.34) *возникает интегральное многообразие* $q_j = r_j$, $\dot{q}_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$. *Каждое движение системы* (11.33), (11.34), *располагающееся на этом интегральном многообразии, будет асимптотически устойчивым по отношению к величинам* $q_j - r_j$ *и* $\dot{q}_j$, $j = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Первый этап заключается в получении уравнений для обобщенных координат $q_1, \ldots, q_k$ из системы (11.33). Оказывается, что эти уравнения имеют вид

$$A\ddot{q} + \Pi_0 = F. \quad (11.36)$$

Это уравнение также может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_0}{\partial q_j} = Q_j, \; j = 1, \ldots, k, \quad (11.37)$$

где квадратичная форма T_0 получается из (11.32) при $\dot{s} = 0$. Действительно, если из уравнения (11.34) выразить вектор $\ddot{s}$ через входящие векторы и исключить затем этот вектор из уравнения (11.33), то получится уравнение указанного вида, домноженное слева на неособую матрицу $[A - BC^{-1}B^*]A^{-1}$. Освобождаясь от этой матрицы, получим уравнения (11.36) и соответственно (11.37), которые, как легко видеть, совпадают с уравнениями (11.12).

На втором этапе доказательства показывается, что любое решение, удовлетворяющее системе (11.33), (11.34), будет удовлетворять системе (11.34), (11.36). Следовательно, учитывая, что сделанные преобразования не нарушают вопроса об устойчивости, можно утверждать, что система (11.33), (11.34) имеет указанное в теореме интегральное многообразие. А тогда из теоремы 11.3 вытекает, что любое решение, расположенное на этом многообразии, будет асимптотически устойчивым по отношению к величинам $q_j - r_j$, $j = 1, \dots, k$, и $\dot{q}_j - \dot{r}_j$, $j = 1, \dots, k$. ■

Перейдем теперь к построению управляющего поля сил, обеспечивающих переход механической системы к конфигурации, меняющейся во времени, $q_j = r_j(t)$, $j = 1, \dots, k$. Будем считать в этом случае, что исходная механическая система и система материальных точек, несомых этой системой, подчинены голономным, стационарным или нестационарным связям. Тогда к квадратичной форме (11.32) надо прибавить линейную относительно величин $\dot{q}, \dot{s}$ форму и свободный член.

Сделаем в выражении кинетической энергии замену обобщенных координат по формуле

$$\varkappa_j = q_j - r_j, \quad \dot{\varkappa}_j = \dot{q}_j - \dot{r}_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Члены, образующие квадратичную форму относительно $\dot{\varkappa}_j$, обозначим через $\tau^{(2)}$. Члены, образующие линейную форму относительно $\dot{\varkappa}_j$, обозначим через $\tau^{(1)}$, и свободный член обозначим через $\tau^{(0)}$.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы можно написать в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = M_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_i} - \frac{\partial T}{\partial s_i} = u_i, \quad i = 1, \dots, l. \tag{11.38}$$

Теорема 11.7. *Пусть выполнены условия:* 1) *матрица* $A(t, r_1 + \varkappa_1, \dots, r_k + \varkappa_k, s_1, \dots, s_l)$ — *положительно определенная и ограниченная вместе с* A^{-1} *равномерно по отношению к* t *и* $s_1, \dots, s_l$ *в некоторой окрестности точки* $\varkappa_1 = 0, \dots, \varkappa_k = 0$; 2) *управляющие обобщенные силы удовлетворяют соотношению* $u = B^* u_0 + \tilde{u}$, *где*

$$\bar{u}_0 = [BC^{-1}B^*]^{-1}[M + BC^{-1}\hat{\Sigma} - \hat{\Pi} + (A - BC^{-1}B^*)A^{-1}(\hat{\Pi}_0 - F)], \tag{11.39}$$

F *определяется формулами* (11.28)—(11.31). *Тогда в системе* (11.38) *возникает интегральное многообразие* $q_j = r_j(t)$, $\dot{q}_j = \dot{r}_j(t)$. *Любое движение, расположенное на этом интегральном многообразии, будет асимптотически устойчивым по отношению к величинам* $q_j - r_j(t)$, $\dot{q}_j - \dot{r}_j(t)$.

Заметим, что в формулах (11.28)—(11.31) встречаются частные производные по t от величин $\tau^{(2)}, \tau^{(1)}, \tau^{(0)}$. Эти производные надо вычислять, рассматривая $s_1, \ldots, s_l$ как заданные функции времени.

Векторы P, $\widehat{\Pi}$, $\widehat{\Sigma}$, $\widehat{\Pi}_0$ получаются, если систему (11.38) записать в форме

$$A\ddot{\varkappa} + B\ddot{s} + \widehat{\Pi} = M, \quad C\ddot{s} + B^*\ddot{\varkappa} + \widehat{\Sigma} = u. \tag{11.40}$$

Доказательство теоремы. Исключение вектора $\ddot{s}$ из системы (11.40) приводит к системе уравнений для компонент $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$. Подобные уравнения были рассмотрены выше в теореме 11.5. Из этой теоремы вытекает, что существует для таких уравнений решение $\dot{\varkappa}_j = 0$, $\varkappa_j = 0$, асимптотически устойчивое по Ляпунову при любом выборе вектора $s(t)$, следовательно, любое решение системы (11.38), лежащее на интегральном многообразии $q_j = r_j(t)$, $\dot{q}_j = \dot{r}_j(t)$, будет асимптотически устойчивым к координатам $q_j - r_j(t)$, $\dot{q}_j - \dot{r}_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$. ■

Приведенные здесь теоремы являются основой для расчета систем автоматического управления, а также систем программного управления не только для системы вращающихся тел, но и для системы тел с телескопическими шарнирами и другими соединениями. Тем самым они позволяют анализировать и синтезировать системы управления манипуляторами, роботами и автоматами.

§ 12. УПРАВЛЕНИЕ БИОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Автоколебания в системе с одной степенью свободы. — Конечная сеть автоколебательных осцилляторов. — О соотношении отраслей сельского хозяйства

1. Если состояние некоторой системы описывается единственным образом с помощью двух функций $x(t)$, $y(t)$, зависящих от времени, то в широком классе случаев функционирование такой системы может быть промоделировано с помощью системы двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y). \tag{12.1}$$

При изучении функционирования исходной системы с помощью уравнений (12.1) особую роль будут, естественно, играть стационарные движения и совокупности таких движений, а также поведение нестационарных движений, начинающихся в некоторых достаточно малых окрестностях упомянутых стационарных движений.

К стационарным движениям относятся точки покоя, т. е. все те точки фазовой плоскости XY, которые удовлетворяют условиям

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0.$$

Другой вид стационарных движений представляют собой периодические решения системы (12.1)

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{12.2}$$

удовлетворяющие условию $x(t+T) = x(t)$, $y(t+T) = y(t)$ при любом t, где T — период решения (12.2).

Определение 12.1. Периодическое решение (12.2) системы (12.1) называется *автоколебанием*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $\rho(x_0, y_0), M] < \delta$ выполняется неравенство $\rho[(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)), M] < \varepsilon$ при $t \geqslant 0$ и $\rho \to 0$ при $t \to +\infty$.

Здесь через M обозначен график периодического решения (12.2) через $\rho[(x, y), M]$ —расстояние от точки (x, y) плоскости до графика M, и функции

$$x = x(t, x_0, y_0), \quad y = y(t, x_0, y_0) \tag{12.3}$$

представляют собой решение системы (12.1), удовлетворяющее начальным условиям $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = 0$. Согласно существующим воззрениям, система (12.1) может быть представлена в форме

$$\dot{x} = \frac{\partial \nu}{\partial x} - \omega y, \quad \dot{y} = \frac{\partial \nu}{\partial y} + \omega x, \tag{12.4}$$

где ν и ω есть функции переменных x и y. При этом функция ν удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial \nu}{\partial x} + y \frac{\partial \nu}{\partial y} = W. \tag{12.5}$$

Известно, что над системой (12.1) всегда можно произвести такое преобразование координат, при котором периодическое решение (12.2) будет располагаться на окружности некоторого радиуса с центром в начале координат. Имея в виду это обстоятельство, введем в рассмотрение полярную систему координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \tag{12.6}$$

Умножая первое из уравнений (12.4) на x, второе — на y, складывая почленно полученные результаты и используя (12.5) и (12.6) получаем уравнение

$$r\dot{r} = W \tag{12.7}$$

Умножая второе уравнение системы (12.4) на x, первое — на y и вычитая почленно из первого результата второй, находим равенства

$$x\dot{y} - y\dot{x} = x^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = r^2\omega + W_1,$$

где $W_1 = x \dfrac{\partial \nu}{\partial y} - y \dfrac{\partial \nu}{\partial x}$.

Используя систему (12.6), будем иметь равенство

$$r^2\dot{\varphi} = r^2\omega + W_1. \tag{12.8}$$

Используем теперь приведенные преобразования и сформулируем три утверждения:

1. Если существует число $r_0 > 0$ такое, что $W = 0$ при $r = 0$ и функция $r^2\omega + W_1$ не обращает в ноль, то система (12.1) имеет периодическое решение, располагающееся на окружности радиуса r_0. При этом период этого решения будет определяться формулой

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 d\varphi}{r_0^2\,\omega + W_1},$$

где ω и W_1 вычисляются под знаком интеграла при $r = r_0$.

2. Упомянутое в п. 1 периодическое движение будет автоколебанием, если $\frac{\partial W}{\partial r} < 0$ при $r = r_0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Если $\partial^k W/\partial r^k$ есть первая из частных производных, не обращающихся в ноль при $r \equiv 0$, то при k нечетном упомянутое периодическое решение будет автоколебанием, если эта частная производная остается отрицательной при $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r = r_0$.

Положим, что

$$W = -ar^2 \prod_{i=1}^{k} (r_i - r)(\rho_i - r), \tag{12.9}$$

где a — положительная постоянная; ρ_i, r_i — положительные величины, связанные между собой неравенствами

$$\rho_1 < r_1 < \rho_2 < r_2 < \dots < \rho_n < r_n.$$

При таком выборе функции W можно установить, что $W_1 \equiv 0$, и, следовательно, уравнение (12.8) будет иметь вид

$$\dot{y} = \omega. \tag{12.8'}$$

Если функция ω не обращается в ноль при $r = r_i$, то система (12.7), (12.8) при условии (12.9) будет иметь автоколебание, располагающееся на окружностях, причем если начальное состояние системы удовлетворяет условию $\rho_i < r < \rho_{i+1}$, то в системе устанавливаются автоколебания, соответствующие i-му энергетическому уровню $r = r_i$.

Введем теперь управляющие воздействия в автоколебательную систему (12.7), (12.8), а именно: заменим в (12.9) r_i на $u_i r_i$ и ρ_i на $\nu_i \rho_i$ и будем считать, что управления $u_1, \dots, u_k, \nu_1, \dots, \nu_k$ могут принимать значения ± 1. Тогда справедливо следующее утверждение.

3. Система (12.1) может быть переведена из любого начального состояния в заданный автоколебательный режим одного из уровней при надлежащем выборе управлений. При этом если система оказалась в некоторый момент в положении $\rho_i < r < \rho_{i+1}$, то при любом выборе остальных управлений u_j, ν_j система будет выходить на автоколебательный режим $r = r_i$ при $u_i = \nu_i = 1$.

2. Рассмотрим два единичных куба в n-мерном пространстве и в k-мерном. Вершинами первого куба являются точки с координатами $x_1, \ldots, x_n$, вершинами второго — точки с координатами $y_1, \ldots, y_k$. Здесь переменные x_s, y_j могут принимать лишь одно из значений: 0 или 1.

Пусть заданы некоторая совокупность вершин S_n первого куба и некоторая другая совокупность R_k вершин второго куба. Предположим, что задан закон, ставящий в соответствие точкам из S_n точки из множества R_k, причем каждой точке из множества R_k отвечает по крайней мере одна точка из S_n. Этот закон может быть выражен с помощью функциональной зависимости

$$y_j = f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{12.10}$$

Дадим способ представления функций f_j, входящих в (12.10).

Определение 12.2. Переменная x называется *логической*, если она принимает одно из двух значений: 0 или 1. Если x и y — две логические переменные, то логическая переменная $z = x \vee y$ определяется равенством $z = \max(x, y)$. Если x и y — две логические переменные, то логическая переменная $z = x \wedge y$*) определяется как $z = \min(x, y)$.

Через $\bar{x}$ далее будем обозначать отрицание логической переменной x; $\bar{x} = 1$ при $x = 0$ и $\bar{x} = 0$ при $x = 1$.

Пусть α — та точка S_n, в которой функция f_j принимает значение $+1$, и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — координаты этой точки. Тогда функция $f_j^\alpha = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}$ будет обращаться в единицу лишь в точке $x = \alpha$, если принять $x_s^{\alpha_s} = \bar{x}_s$ при $\alpha_s = 0$ и $x_s^{\alpha_s} = x_s$ при $\alpha_s = 1$. Легко видеть, что функции f_j, входящие в (12.10), можно представить тогда в форме

$$f_j = \bigvee_\alpha f_j^\alpha(x). \tag{12.11}$$

Дизъюнкция распространяется на всевозможные вершины α упомянутого свойства $f_j(\alpha) = 1$. Известно, что формулы (12.10), (12.11) дают описание в терминах логических переменных и булевых функций от них *логической сети* или *логического автомата без памяти*.

Поставим теперь вопрос о реализации указанной логической схемы с помощью сети автоколебательных осцилляторов. Выберем с этой целью какой-либо «стандартный» *автоколебательный осциллятор*

$$r\dot{r} = W, \quad \dot{\varphi} = \omega, \tag{12.12}$$

где

$$W = -ar^2(a_0 - r)(\delta a_1 + \delta a_2 - r).$$

*) Здесь $\vee$ — знак дизъюнкции, а $\wedge$ — знак конъюнкции.

Здесь a — положительная постоянная; $a_0 < a_1 < a_2$ — положительные постоянные; δ — логическая переменная, принимающая два значения: либо 0, либо 1. Значению $\delta = 0$ соответствует автоколебание $r = a_1$, значению $\delta = 1$ — автоколебание $r = a_2$.

Положим $r_0 = (a_1 + a_2)/2$, а

$$\delta = [\mathrm{sign}(r - r_0) + 1]/2. \tag{12.13}$$

Переменная δ, определяемая формулой (12.13), принимает значение 1 для всех $t > t_0$, если в системе (12.12) устанавливается автоколебание $r = a_2$, и $\delta = 0$ для всех $t > t_0$, если в системе (12.12) устанавливается автоколебание $r = a_1$.

Если даны два осциллятора типа (12.12), то можно управлять входом третьего осциллятора так, чтобы он (этот третий осциллятор) функционировал как дизъюнкция, т. е. выходил на максимальный энергетический уровень, соответствующий двум входным осцилляторам. Действительно, если даны два осциллятора $r_i \dot{r}_i = W_i$ и $\varphi_i = \omega_i$, $i = 1, 2$, то осциллятор (12.12), где $\delta = \delta_1 \vee \delta_2$, будет выходить на максимальный энергетический уровень, осуществляющийся в комбинируемых осцилляторах; здесь $\delta_i = [\mathrm{sign}(r_i - r_0) + 1]/2$.

Аналогично можно ввести операцию конъюнкции, а именно: если положить в (12.12) $\delta = \delta_1 \wedge \delta_2$, то (12.12) будет выходить на энергетический уровень, соответствующий минимальной орбите комбинируемых осцилляторов.

Многократное применение таких комбинаций позволяет построить сети, способные моделировать любой *конечный автомат без памяти*. В результате такого построения получается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_j = F_j, \quad \dot{y}_j = q_j, \quad j = 1, \ldots, k,$$

правые части которой зависят от переменных x_j, y_j, а также от переменных ξ_s, η_s $s = 1, \ldots, n$. Эти переменные удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\xi}_s = \overline{F}_s, \quad \dot{\eta}_s = g_s, \; s = 1, \ldots, n.$$

Если через A обозначить автоколебательный осциллятор, то вторую группу уравнений можно рассматривать как уравнения для осцилляторов $A_1, \ldots, A_n$, связь которых с первой группой уравнений осуществляется точно таким же образом, как связь величин y_j с величинами $x_1, \ldots, x_n$, входящими в формулы (12.10), (12.11).

В формулах (12.10), (12.11) значения переменных $x_1, \ldots, x_n$ являются независимыми в том смысле, что выбираются так, чтобы точка $x_1, \ldots, x_n$ принадлежала вершине куба. Энергетические же уровни $A_1, \ldots, A_n$ устанавливаются через управляемый вход с помощью внешнего сигнала.

В широком классе случаев любой внешний сигнал z может быть представлен как суперпозиция гармонических колебаний с различными амплитудами, частотами и фазами:

$$z = \sum_{s=1}^{n} z_s, \tag{12.14}$$

где $z_s = b_s \sin \varphi_s$, $\dot{\varphi}_s = \omega_s t + \varphi_{s0}$.

Если с входом осцилляторов $A_1, \ldots, A_n$ соединены фильтры, разделяющие входной сигнал (12.14) на гармонические составляющие, действующие на осцилляторы указанным выше образом, то внешний сигнал (12.14) «запускает» сеть осцилляторов, которая функционирует как конечный автомат без памяти. Выходные сигналы этой сети могут использоваться далее как управляющие для различных «исполнительных» органов.

Конечный автомат с памятью может быть представлен также логической сетью, поэтому сеть осцилляторов может, следовательно, моделировать функционирование и таких *конечных автоматов с памятью*.

Естественно, что рассмотренная выше сеть осцилляторов может быть многократно продублирована, с тем чтобы получить сигнал не с каждого отдельного осциллятора, а усредненный сигнал с группы осцилляторов, работающих единообразно. Такое резервирование позволяет учитывать в модели дополнительные свойства, имеющие место в биологических процессах.

3. Необходимость использования белков животного происхождения в питании человека — теперь хорошо известная истина. Дело здесь в том, что весь набор аминокислот, необходимых человеку, не получается в процессе пищеварения только из растительной пищи. И поэтому 10 аминокислот из общего числа 20 человеческий организм должен получать извне. Источником этих аминокислот и является животный белок. Организация Объединенных Наций создала специальную комиссию, которой было поручено, в частности, найти новые источники животного белка, способные разрешить проблему питания человечества в мировом масштабе. Внимание этой комиссии было привлечено к высококачественному белку термитов, населяющих обширные районы тропического пояса Земли. Эти насекомые используют в пищу различные вещества органического происхождения: кору, корни, кожу, древесину и т. д. Переваривание этой пищи происходит в организме термитов симбиотическим путем. А именно: вещества перерабатываются жгутиковыми бактериями, которые живут в пищеварительном тракте термитов в системе симбиоза с ними, и затем высокоценный микробный белок, составляющий тело этих бактерий, всасывается стенками кишечной полости насекомых.

В наших краях симбиотический способ питания используют, например, тараканы. Но самое главное, что таким же способом происходит питание всех жвачных животных, и во многом — лошадей. Здесь теперь мы сталкиваемся с целой иерархией микроорганизмов. У коровы, овцы и козы в конце этой иерархии стоят инфузории. Питаясь микробным белком, эти инфузории приобретают весьма ценные качества, являются вместилищем всех аминокислот и витаминов. В кишечном тракте их размножается в сутки до 2—2,5 кг. Затем в кишечнике они всасываются в организм и составляют основу белкового питания организма хозяина. Таким образом, микроорганизмы являются основными производителями животного белка. Как оценить их производительную способность? Принято считать, что эту производительную способность микроорганизмов объективно можно оценивать объемом пищеварительного тракта животных. Для коров этот объем в среднем можно принять равным 100 л, для овец и коз — 10 л, для лошадей — 30 л. Здесь подразумевается объем не всего кишечного тракта, а только той части, где происходит размножение бактерий, находящихся в симбиозе с организмом хозяина.

Ряд сельскохозяйственных животных наряду с человеком являются потребителями животного белка. Иначе говоря, процесс пищеварения у таких животных не может производить из растительной пищи весь набор аминокислот, поэтому недостающие аминокислоты должны вводиться в рацион этих животных извне. Такой же дефицит аминокислот, как и у человека, наблюдается у свиней, и близкий к этому дефициту — дефицит аминокислот у кур. Поэтому наряду с человеком к потребителям животного белка следует отнести как свиней, так и кур. При этом надо иметь в виду, что в соответствии с имеющимися нормами питания потребности свиньи в 5 раз выше, чем у человека, а потребности кур в 5 раз меньше, чем у человека. Список потребителей животного белка можно существенно продолжить. Однако это может увести в сторону от основной цели.

Естественно, что для откорма свиней и кур используются различные заменители пищевого животного белка. Однако в последнее время американскими, венгерскими и нашими отечественными исследователями было установлено, что не все вредные включения, попадающие с такой пищей, выносятся из организма животных. Более того, многие вредные и опасные вещества депонируются в жировой ткани и затем попадают в пищу человека. Это обстоятельство позволяет сделать заключение о том, что свиней, кур, а также крупный рогатый скот, овец и коз можно кормить только такими кормами, которые не содержат упомянутых выше вредных включений. Короче говоря, кормовой белок, даваемый свиньям и курам, должен быть «пригодным» в пищу человека.

Остановимся на показателях эффективности. Обозначим через K число крупного рогатого скота, имеющегося в сельском хозяйстве данной страны или заданного региона, через L — число лошадей данной страны или заданного региона и через M — число овец и коз данной страны или заданного региона. Тогда общий объем, в котором развивается активная бактериальная среда, представится формулой

$$100\,K + 30\,L + 10\,M.$$

Обозначим далее через P население данной страны или заданного региона, и пусть через S и R обозначено соответственно число свиней и кур данной страны или заданного региона. Тогда число потребителей может быть представлено суммой:

$$P + 5S + \frac{1}{5}R.$$

Положим

$$V = 50 \cdot \frac{10K + 3L + M}{5P + 25S + R};$$

назовем V первым удельным эффективным объемом, величина V выражает число литров активной бактериальной среды, приходящихся на одного потребителя.

Второй эффективный бактериальный объем выражается числом литров, приходящимся на одного потребителя. При этом птицеводство не учитывается вовсе. А именно: предполагается, что куры находятся на другом балансе в части обеспечения животным белком:

$$W = 10 \cdot \frac{10K + 3L + M}{P + 5S}.$$

Показатели V и W являются объективной характеристикой правильности соотношения отраслей животноводства. Их изменение по годам, рассмотренное для США, Канады, России, СССР, приводит к заключению о возможности определения с помощью них соотношения отраслей животноводства. При этом можно добиться такого определения соотношения, которое будет на данный рассматриваемый период оптимальным в смысле обеспечения населения продуктами животноводства.

Остановимся на динамике изменения показателей эффективности.

Таблица 1

Изменения показателя W в России

Год	1887	1890	1892	1894	1896	1900	1902	1904	1908	1910	1914
W	22	23	21	21	21	24	23	22	20	20	29

Из таблицы видно, что этот объективный показатель меняется очень мало и увеличивается с улучшением хозяйственной деятельности.

Таблица 2

Изменение показателя W для Канады

Год	1947	1953	1960	1961	1962	1963	1964	1965
W	24	25	25	22,5	25	26	27	25

Таблица 3

Изменение показателей V и W для США

Год	1953	1957	1960	1963	1964
V	20	20	19	19	20
W	25	25	22	22	23

Если делать упор на развитие скороспелых отраслей: свиноводства, птицеводства, игнорируя объективный показатель эффективности соотношения отраслей производства, то можно снизить показатель W и этим самым ухудшить эффективность животноводства.

В настоящее время за счет большого количества свиней этот показатель в СССР держится приблизительно около 20($W = 20$), что гораздо меньше такого показателя США и Канады ($W = 30$); также, как показывают таблицы, этот показатель меньше того уровня, который был в России в конце прошлого и в начале этого века. Единственно правильным выходом из создавшегося положения является планомерное увеличение поголовья крупного рогатого скота, лошадей, овец и коз.

Покажем это. Будем считать, что в общем случае имеется n отраслей, количественная характеристика которых определяется на текущий момент t величинами $x_1(t), \ldots, x_n(t)$. Если обозначить через $u_s(t)$ скорость прироста капиталовложений в отрасль s, отнесенную к моменту t, и если через $b_s(t)$ обозначить коэффициент, характеризующий прирост отрасли s на единицу капитала, тогда получатся уравнения развития отраслей

$$dx_s/dt = b_s u_s, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{12.15}$$

Будем считать, что выделение капиталовложений в каждую из отраслей в текущий момент t осуществляется из общего количества

$$\sum_{s=1}^{n} u_s(t) = u(t). \tag{12.16}$$

Если обозначить объем капиталовложений к моменту t во все отрасли через $x(t)$, то будем иметь равенство

$$\dot{x} = u(t). \tag{12.17}$$

Пусть задано начальное состояние отраслей $x_s = x_{s0}$ при $t = t_0$ и конечное состояние отраслей $x_s = x_{s1}$ при $t = t_0 + T$, $s = 1, \ldots, n$. Здесь t_0 — начальный момент периода планирования, T — период, на который планируется распределение капиталовложений. Требуется распределить капиталовложение таким образом, чтобы все отрасли, развиваясь из начального состояния, достигли к концу планируемого периода заданных уровней.

Перейдем к решению поставленной задачи. Будем искать функции u_s в виде

$$u_s = b_s c_s + v_s, \quad s = 1, \dots, n, \tag{12.18}$$

где $\int\limits_{t_0}^{t_0+T} b_s v_s \mathrm{d}t = 0$. Подставляя выражения (12.18) в уравнение (12.15) и интегрируя в пределах от t_0 до $t_0 + T$, а также в пределах от t до $t_0 + T$, найдем равенство

$$\frac{x_{s1} - x_{s0}}{\int\limits_{t_0}^{t_0+T} b_s^2 \, \mathrm{d}t} = c_s, \tag{12.19}$$

$$\frac{x_{s1} - x_s(t) - \int\limits_{t}^{t_0+T} b_s v_s \mathrm{d}t}{\int\limits_{t_0}^{t_0+T} b_s^2 \, \mathrm{d}t} = c_s. \tag{12.20}$$

Подставляя равенства (12.19) и (12.20) в выражение (12.18), найдем

$$u_s = \frac{b_s (x_{s1} - x_{s0})}{\int\limits_{t_0}^{t_0+T} b_s^2 \, \mathrm{d}t} + v_s, \tag{12.21}$$

$$u_s = \frac{b_s \left(x_{s1} - x_s(t) - \int\limits_{t}^{t_0+T} b_s v_s \mathrm{d}t \right)}{\int\limits_{t}^{t_0+T} b_s^2 \, \mathrm{d}t} + v_s. \tag{12.22}$$

Обозначим через $u_0(t)$ величину

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{b_s (x_{s1} - x_{s0})}{\int\limits_{t_0}^{t_0+T} b_s^2 \, \mathrm{d}t} = u_0. \tag{12.23}$$

Если выделение капиталовложений осуществляется в соответствии с найденным законом (12.21), то цель, поставленная перед планом развития отраслей, может быть достигнута. При этом суммарные капиталовложения, необходимые и достаточные для такого развития, определяются формулой

$$x_1 - x_0 = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} u_0 \mathrm{d}t. \tag{12.24}$$

Формула (12.24) получится после подстановки выражения (12.23) в (12.17) и последующего интегрирования по промежутку $[t_0, t_0+T]$.

Заметим, что выделения капиталовложений на самом деле могу осуществляться не по закону (12.23), а по закону $u(t)$. Введем тогда обозначение $\widehat{V} = u(t) - \dot{u}_0$. Для того чтобы цель развития была осуществима, необходимо, чтобы суммарные капиталовложения определялись формулой (12.24). Следовательно, обязательно должно выполняться равенство $\int\limits_{t_0}^{t_0+T} \widehat{V} dt = 0$. Рассмотрим теперь значения функций $\widehat{V_s}$. Эти функции при любом плане распределения, решающем основную задачу развития, должны удовлетворять условию.

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} b_s \widehat{V_s} dt = 0.$$

Применяя эту дифференциальную модель к отраслям животноводства и вводя в рассмотрение функционал

$$I = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} [k_1 V + k_2 S (a - S)] \, dt \, \frac{1}{T}, \tag{12.25}$$

выражающий количество животного белка в расчете на одного человека, получаемого из всех отраслей животноводства, рассмотренных выше, получаем, что при любом выборе управлений значение этого функционала I будет определено однозначно. Подставляя значение коэффициентов k_1, k_2, a, а также значение величин b_1, b_2, ... , b_5 в систему уравнений (12.15), в которой положено $x_1 = K$, $x_2 = L$, $x_3 = M$, $x_4 = S$, $x_5 = R$, находим, что оптимальное управление по отношению к выбранному функционалу действительно указывает на изменения соотношения животноводства в сторону уменьшения поголовья свиней.

Если уточнить дифференциальную модель (12.15), а именно составить баланс кормов и посевных площадей

$$\sum_{s=1}^{n} \left(a_{js} \dot{x}_s + b_{js} x_s \right) = \sum_{k=1}^{r} c_{jk} u_k, \quad j = 1, \dots, n, \tag{12.26}$$

то в результате решения задачи рационального соотношения видов в животноводстве получится также *рациональное распределение посевных площадей* $u_1, u_2, \dots, u_r$.

ГЛАВА IV

ПРОБЛЕМА ПОСТРОЕНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ

§ 13. ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ В УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ

Построение программных управлений. — Учет граничных условий. — Нелинейные системы

1. Рассмотрим сначала построение программных движений в линейных управляемых системах в простейшем случае. Пусть дана система n дифференциальных уравнений в векторной форме

$$dx/dt = P(t)x + Q(t)u + F(t). \tag{13.1}$$

Будем считать, что элементы матриц $P(t) = n \times n$, $Q(t) = n \times r$ и компоненты вектора $F(t)$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны и непрерывны.

Пусть заданы два постоянных вектора x_0 и x_1 — начальное и конечное положение системы (13.1). Требуется найти вектор-функцию $u = u(t)$ размерности r такую, чтобы решение системы (13.1), начинающееся при $t = 0$ в точке $x = x_0$, попадало при $t = T$ в точку $x = x_1$ и при этом интеграл $\int\limits_0^T u^*(\tau)\, u(\tau)d\tau$ был ограничен. Такие управления $u = u(t)$ будем называть *программными*.

Изучим вопрос существования программных управлений и их построения. Обозначим через $Y(t)$ фундаментальную матрицу решений системы уравнений

$$dx/dt = P(t)x \tag{13.2}$$

при начальном условии $Y(0) = E$, где E — единичная матрица.

Выполним в системе (13.1) замену искомой функции по формуле

$$x = Y(t)z, \tag{13.3}$$

где вектор z представляет собой новую искомую вектор-функцию. Эта векторная функция удовлетворяет уравнению

$$dz/dt = B(t)u + G(t), \tag{13.4}$$

где $B(t) = Y^{-1}(t)Q(t)$ и $G(t) = Y^{-1}(t)F(t)$. Выполним далее в системе (13.4) замену

$$z = \xi + \int\limits_0^t G(\tau)\,d\tau. \tag{13.5}$$

Тогда векторная функция $\xi(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$d\xi/dt = B(t)\,u. \tag{13.6}$$

В результате этих преобразований над исходной системой краевые (начальное x_0 и конечное x_1) условия переходят в такие:

$$\xi(0) = \xi_0 = x_0,$$
$$\xi(T) = \xi_1 = Y^{-1}(T)\,x_1 - \int_0^T Y^{-1}(\tau)\,F(\tau)\,d\tau. \tag{13.7}$$

Для простоты положим $r = 1$. Интегрирование уравнения (13.6) от 0 до T дает равенство

$$\xi_1 - \xi_0 = \int_0^T B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau. \tag{13.8}$$

Таким образом, для нахождения программного управления получили систему (13.8) линейных интегральных уравнений.

Решение уравнения (13.8) будем искать в виде

$$u(t) = B^*c + v(t), \tag{13.9}$$

где c — постоянный вектор, подлежащий определению, а $v(t)$ — некоторая функция, суммируемая вместе со своим квадратом на $[0, T]$ и такая, что

$$\int_0^T b_s(t)\,v(t)\,dt = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.10}$$

Здесь $b_s(t)$, $s = 1, \ldots, n$, означают компоненты вектора B и равенство (13.10) выражает условие ортогональности функции $v(t)$ ко всем компонентам вектора B. Подставляя выражение (13.9) в равенство (13.8), находим уравнение

$$\xi_1 - \xi_0 = A(T)\,c, \tag{13.11}$$

где $A(T) = \int_0^T B(t)B^*(t)dt$. Уравнение (13.11) имеет решение, если $\det A(T) \neq 0$ либо ранг матрицы $A(T)$ совпадает с рангом расширенной матрицы $A = \{A(T);\ \xi_1 - \xi_0\}$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 13.1. *Для того чтобы существовало программное управление, переводящее систему* (13.1) *из любого положения x_0 в любое другое положение x_1 за время T, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A = \int_0^T B\,B^*dt$,* где $B = Y^{-1}Q$, *была неособой. При этом все множество программных управлений дается формулой*

$$u = B^*c + v,$$

где $v(t)$ — *суммируемая с квадратом на* $[0, T]$ *функция и*

$$\int_0^T Bv dt = 0, \quad c = A^{-1}(T)\left[Y^{-1}(T)x_1 - \int_0^T Y^{-1}(\tau)F(\tau)\,d\tau - x_0\right].$$

Определение 13.1. Кусочно-непрерывные функции $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ будем называть *линейно независимыми* при $t \geqslant 0$, если существует число $T > 0$ такое, что из равенства

$$\sum_{i=1}^{n} c_i b_i(t) = 0 \text{ при } t \in [0, T] \tag{13.12}$$

следует, что $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 13.2. *Для того чтобы кусочно-непрерывные функции* $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ *были линейно независимыми при* $t \geqslant 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало число* $T > 0$ *такое, что матрица*

$$A(T) = \int_0^T BB^* dt$$

была бы положительно определенной; здесь $B(t)$ — *вектор с компонентами* $b_1(t), \ldots, b_n(t)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функции $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ линейно независимы при $t \geqslant 0$. Покажем, что матрица $A(T)$ — положительно определенная. Действительно, из линейной независимости указанных функций, по определению, существует такое $T > 0$, что при любом выборе постоянного вектора c, компоненты которого одновременно не равны нулю, будет существовать по крайней мере одна точка в промежутке $[0, T]$, в которой $B^*c \neq 0$. Отсюда вытекает, что $[B^*c]^2 > 0$ в этой точке, а в силу кусочной непрерывности компонент вектора $B(t)$ — и в некоторой окрестности. Следовательно, справедливо неравенство

$$\int_0^T [B^*c]^2 dt > 0. \tag{13.13}$$

Неравенство (13.13) можно записать в виде

$$c^* \int_0^T BB^* dt \; c = c^* A(T) c > 0$$

при любом c, которое и означает положительную определенность матрицы $A(T)$.

Заметим, что матрица $A(t)$ будет также положительно определенной при всех $t \geqslant T$.

Достаточность. Пусть матрица $A(T)$ — положительно определенная; тогда для любого вектора $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$ такого, что $\|c\| \neq 0$, будет выполняться неравенство

$$c^*A(T)c=\int\limits_0^T c^*BB^*c\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^T [c^*B]^2\,\mathrm{d}t>0.$$

Следовательно, существует по крайней мере одна точка $\overline{t}\in[0,\ T]$, где $c^*B(\overline{t})\neq 0$. Это и показывает, что функции $b_1, \ldots, b_n$ линейно независимы при $t\geqslant 0$. ∎

2. Пусть в более общем случае граничные условия заданы в виде

$$\sum_{j=0}^{s} G_j x(t_j)=H, \tag{13.14}$$

где G_j — вещественные постоянные матрицы порядка $m\times n$, H—m-мерный вектор, t_j — моменты времени $0\leqslant t_0<t_1<\ldots<t_s\leqslant T$. Требуется найти условия, при которых существует программное управление $u=u(t)$ и программное движение $x=x(t)$, удовлетворяющие системе (13.1) и условию (13.14). При этом предполагается, что $u(t)\in L_2$, $x(t)$ — непрерывная вещественная векторная функция, заданная на промежутке $[0,\ T]$.

Выразим решение системы (13.1) с помощью формулы Коши, считая, что $u=u(t)$ известно:

$$x(t)=Y(t)x_0+\int\limits_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int\limits_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)F(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{13.15}$$

Подставляя тождество (13.15) в условие (13.14), найдем соотношение

$$\sum_{j=0}^{s}[G_jY(t_j)]x_0+\sum_{j=0}^{s}\int\limits_0^{t_j}G_jY(t_j)Y^{-1}(\tau)Q(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau+$$
$$+\sum_{j=0}^{s}\int\limits_0^{t_j}G_jY(t_j)Y^{-1}(\tau)F(\tau)\,\mathrm{d}\tau=H.$$

Введем функции

$$\varphi_j(\tau)=\begin{cases}1 \text{ при } \tau\in[0,\ t_j];\\ 0 \text{ при } \tau\in(t_j,\ T];\end{cases}$$

тогда последнее соотношение можно переписать в форме

$$A_1x_0+\int\limits_0^T B_1(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau=H_1, \tag{13.16}$$

где A_1, B_1, H_1 имеют вид

$$A_1 = \sum_{j=0} G_j Y(t_j), \quad B_1 = \sum_{j=0}^{s} \varphi_j(\tau) G_j Y(t_j) Y^{-1}(\tau) Q(\tau),$$

$$H_1 = H - \sum_{j=0}^{s} \int_0^{t_j} G_i Y(t_j) Y^{-1}(\tau) F(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Равенство (13.16) можно рассматривать как систему интегральных уравнений, служащую для определения функции $u = u(t)$. Полагая опять $r = 1$, будем искать решение этих интегральных уравнений в форме

$$u = B_1^* c + v, \tag{13.17}$$

где $v \in L_2$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию ортогональности

$$\int_0^T B_1 v \mathrm{d}t = 0. \tag{13.18}$$

Введем обозначение $A_2 = \int_0^T B_1 B_1^* \, \mathrm{d}t$. Подставляя выражение (13.17) в соотношение (13.16) и учитывая условие (13.18), найдем равенство

$$A_1 x_0 + A_2 c = H_1. \tag{13.19}$$

Теорема 13.3. *Для того чтобы существовало программное управление* (13.17) *и соответствующее ему непрерывное решение системы* (13.1), *удовлетворяющее условиям* (13.14), *необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц* $\{A_1, A_2\}$ *и* $\{A_1, A_2, H_1\}$, *совпадали между собой.*

Здесь матрицы $\{A_1, A_2\}$ и $\{A_1, A_2, H_1\}$ получаются приписыванием столбцов.

Доказательство. Необходимость условий теоремы устанавливается приведенными выше рассуждениями, так как было установлено, что из предположения существования управления (13.17) и соответствующего ему непрерывного решения $x = x(t)$, удовлетворяющего условию (13.14), вытекает, что система (13.19) алгебраических уравнений совместна, а это и означает, что ранги матриц, упомянутых в теореме, необходимо совпадают между собой.

Достаточность условий теоремы вытекает из того, что линейная система (13.19) будет разрешима и какому-либо ее решению x_0, c отвечает управление (13.17) и решение (13.15), определяемое этим управлением и формулой Коши. Упомянутое решение будет непременно удовлетворять условию (13.14), так как это эквивалентно выполнению условий (13.19). ∎

Замечание. В более общем виде линейное краевое условие (13.14) может быть записано в виде

$$\int_0^T dG(\vartheta)\, x(\vartheta) = H, \tag{13.20}$$

где G — вещественная матрица, элементами которой, вообще говоря, могут являться произвольные функции ограниченной вариации.

Если умножить обе части формулы Коши на $dG(t)$ слева и затем проинтегрировать почленно обе части в пределах от 0 до T, то получится равенство

$$\int_0^T dG(t)\, Y(t)\, x_0 + \int_0^T dG(t) \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, Q(\tau)\, u(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \int_0^T dG(t) \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, F(\tau)\, d\tau = H.$$

Произведем перестановку порядка интегрирования во втором слагаемом:

$$\int_0^T dG(t) \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, Q(\tau)\, u(\tau)\, d\tau = \int_0^T B_1(t)\, u(t)\, dt,$$

здесь $B_1 = \int_t^T dG(\tau) Y(\tau) Y^{-1}(t) Q(t)$. Вводя, как и выше, обозначения

$$A_1 = \int_0^T dG(t)\, Y(t), \quad H_1 = -\int_0^T dG(t) \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, F(\tau)\, d\tau + H,$$

получаем, что управление $u = u(t)$, для которого существует непрерывное решение системы (13.1), удовлетворяющее условию (13.20), непременно будет удовлетворять системе интегральных уравнений

$$A_1 x_0 + \int_0^T B_1(t)\, u(t)\, dt = H_1. \tag{13.21}$$

Дадим более конкретные условия разрешимости поставленной краевой задачи (13.20), чем те, которые вытекают из теоремы (13.3). Будем в дальнейшем считать для определенности $m > n$. Столбцы матрицы A_1 не образуют базиса в пространстве E_m, поэтому существует подпространство, являющееся ортогональным дополнением к подпространству, натянутому на столбцы матрицы A_1. Векторы, входящие в базис этого ортогонального дополнения, расположим в виде матрицы Z.

Если k есть ранг матрицы A_1, то матрица Z будет иметь $m—k$ столбцов и будет иметь ранг $m—k$. Домножим систему (13.21) слева на матрицу Z^*:

$$\int_0^T Z^* B_1(t)\, u(t)\, dt = Z^* H_1. \tag{13.22}$$

Таким образом, установлено, что если система (13.1) имеет непрерывное решение $x = x(t)$, соответствующее управлению $u = u(t)$, которое удовлетворяет условию (13.20), то это программное управление будет удовлетворять системе интегральных уравнений (13.22).

Будем разыскивать решение этой системы интегральных уравнений в виде

$$u = B_1^*c + v,$$

где $c = Z\gamma$ и v, как и прежде, удовлетворяют условию $\int\limits_0^T B_1 v \, dt = 0$.

Для вектора γ, таким образом, получаем систему алгебраических уравнений

$$Z^* A_2 Z\gamma = Z^* H_1, \tag{13.23}$$

где, как и выше,

$$A_2 = \int\limits_0^T B_1 B_1^* dt.$$

Теорема 13.4. *Если матрица $Z^* A_2 Z$ — неособая, то при любом выборе векторной функции F и вектора H существует непрерывное решение системы* (13.1), *удовлетворяющее условию* (13.20). *При этом каждое программное управление представимо в форме*

$$u = B_1^* Z\gamma + v, \tag{13.24}$$

где γ есть постоянный вектор, определяемый единственным образом, векторная функция v суммируема с квадратом и удовлетворяет условию ортогональности $\int\limits_0^T B_1 v \, dt = 0$.

Теорема 13.5. *Если матрица $Z^* A_2 Z$ — неособая и матрица A_1 имеет ранг n, то каждому управлению* (13.24) *отвечает единственное решение $x = x(t)$, удовлетворяющее условию* (13.20). *Если же ранг матрицы A_1 есть $k < n$, то каждому управлению* (13.24) *отвечает семейство решений системы* (13.1), *удовлетворяющее условию* (13.20) *и зависящее от $n—k$ произвольных постоянных.*

Доказательство. Приведем доказательство теорем (13.4) и (13.5). Найдем вектор γ из линейной системы (13.23) и полученное с помощью его управление (13.24) подставим в систему интегральных уравнений (13.21). Тогда эти уравнения превратятся в линейные уравнения, служащие для определения вектора x_0.

Пусть k есть ранг матрицы A_1. Тогда если $k = n$, то эта система определяет единственное значение вектора x_0. Если же $k < n$, то вектор x_0 определяется с точностью до $n—k$ произвольных постоянных.

Эти утверждения вытекают из того, что ранг матрицы A_1 будет совпадать с рангом расширенной матрицы $\{A_1, (H_1 — A_2 Z\gamma)\}$. Последнее утверждение справедливо потому, что вектор $(H_1 — A_2 Z\gamma)$ ортогонален всем векторам, являющимся столбцами матрицы Z, что следует из имеющегося вида вектора γ, и, следовательно, этот вектор располагается в линейном подпространстве, натянутом на столбцы матрицы A_1. Этим теоремы 13.4 и 13.5 доказаны полностью.

ибо по найденным векторам γ и x_0 указан способ построения управлений и решений. ∎

Теорема 13.6. *Если матрица Z^*A_2Z — особая и имеет ранг l, то решение системы* (13.1), *удовлетворяющее условию* (13.20), *существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\{Z^*A_2Z,\ Z^*H_1\}$ также будет равен l. В этом случае каждое допустимое управление представимо в форме* (13.24), *однако вектор γ зависит от $m-k-l$ произвольных постоянных. Каждому такому управлению при $k=n$ соответствует единственное решение $x=x(t)$, при $k<n$ — семейство решений, зависящее от $n-k$ произвольных постоянных.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 13.6 алгебраическая система (13.23) имеет решение, зависящее от $m-$ $-k-l$ произвольных постоянных. Подставляя это решение в (13.24) и затем в (13.21), находим, что, как и прежде, вектор x_0 будет удовлетворять линейной системе $A_1x_0+A_2Z\gamma=H_1$. Как и выше, ранг матрицы A_1 будет совпадать с рангом расширенной матрицы $\{A_1, H_1-A_2Z\gamma\}$.

Следовательно, при $k=n$ вектор x_0 определяется единственным образом, при $k<n$ вектор x_0 будет определяться с точностью до $n-k$ произвольных постоянных. Решения, соответствующие построенным таким образом управлениям и начальным условиям, будут непременно удовлетворять условиям (13.20).

Обратное утверждение теоремы вытекает из рассуждений, в результате которых были построены уравнения (13.22) и (13.23)*). ∎

3. Рассмотрим теперь построение программных управлений в случае нелинейных систем. Пусть задана система n нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=P(t)x+Q(t)u+F(t)+\mu G(t,\ x,\ u,\ \mu). \tag{13.25}$$

Матрицы $P(t)=n\times n$ и $Q(t)=n\times r$ заданы при $t\geqslant 0$, вещественны и непрерывны; $G(t,\ x,\ u,\ \mu)$ — вещественная, непрерывно дифференцируемая по любой из компонент x и u вектор-функция; μ — малый положительный параметр. Для простоты будем считать, что $r=1$.

Пусть заданы точки x_0 и x_1. Требуется построить управление $u=$ $=u(t)$, переводящее систему (13.25) из положения x_0 в положение x_1 за время T, при этом управление должно удовлетворять условию $\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t<+\infty$. Эта проблема может быть разбита условно на две задачи: задачу существования и задачу приближенного отыскания упомянутого управления. Решение этих задач дается следующей теоремой.

Теорема 13.7. *Пусть матрица $A(T)=\int_0^T BB^*\mathrm{d}t$ — неособая,* здесь

---

*) Заметим, что подобная задача была решена Н. Н. Красовским для случая перехода из одной точки фазового пространства в другую за время T.

$B = Y^{-1}(t)Q(t)$, $Y(t)$ — *фундаментальная система решений дифференциальных уравнений $\dot{x} = P(t)x$ с начальным условием $Y(0) = E$. Тогда для любых двух ограниченных множеств G^0 и G^1 можно указать число $\mu^0 = \mu_0(G^0, G^1)$ такое, что при всех $\mu \leqslant \mu^0$ существует управление $u(t)$, переводящее систему из произвольной точки $x_0 \in G^0$ в произвольную точку $x_1 \in G^1$ за время T. Это управление непрерывно и может быть построено как предел равномерно сходящейся последовательности, каждый член которой определяется единственным образом рекуррентным соотношением.*

Доказательство. Пусть задача решена, т. е. имеем $u = u(t)$ и $x = x(t)$ такие, что они связаны уравнением (13.25), и движение $x(t)$ переходит из точки x_0 в точку x_1 за время T под действием этого управления.

Используя формулу Коши, получим, что уравнение (13.25) эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = Y(t)x_0 + Y(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)[Q(\tau)u(\tau) + F(\tau) + \mu G(\tau, x(\tau), u(\tau), \mu)]\,d\tau.$$

Полагая $t = T$, получим соотношение

$$Y^{-1}(T)x_1 - x_0 = \int_0^T B(t)u(t)\,dt + \int_0^T Y^{-1}(t)[F(t) + \mu G(t, x(t), u(t), \mu)]\,dt. \quad (13.26)$$

Представим управление $u(t)$ в виде

$$u = B^*c + v, \quad (13.27)$$

где функция v удовлетворяет условиям

$$\int_0^T b_s v\,dt = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad \int_0^T v^2 dt < +\infty. \quad (13.27')$$

Подставляя выражение (13.27) в соотношение (13.26) и разрешая полученное уравнение относительно компонент вектора c, получаем тождество

$$c = A^{-1}(T)\left\{Y^{-1}(T)x_1 - x_0 - \int_0^T Y^{-1}(t)F(t)\,dt - \mu\int_0^T Y^{-1}(t)G(t, x, u, \mu)\,dt\right\}. \quad (13.28)$$

Подстановка тождества (13.28) в формулу (13.27) дает выражение

$$u(t) = u_0(t) + \mu B^*(t) A^{-1}(T) \left[-\int\limits_0^T Y^{-1}(t) G(t, x(t), u(t), \mu)\, dt \right], \tag{13.29}$$

где

$$u_0(t) = B^*(t) A^{-1}(T) \left[Y^{-1}(T) x_1 - x_0 - \int\limits_0^T Y^{-1}(t) F(t)\, dt \right] + v(t). \tag{13.30}$$

По формуле Коши, решением системы (13.25) при управлении (13.29) будет

$$x(t) = x_0(t) + \mu \left[\int\limits_0^t Y(t) Y^{-1}(\tau) G(\tau, x(\tau), u(\tau), \mu)\, d\tau - \right.$$
$$\left. - Y(t) A(t) A^{-1}(T) \int\limits_0^T Y^{-1}(\tau) G(\tau, x(\tau), u(\tau), \mu)\, d\tau \right], \tag{13.31}$$

где

$$x_0(t) = Y(t) \left[x_0 + \int\limits_0^t B(\tau) u_0(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t Y^{-1}(\tau) F(\tau)\, d\tau \right]. \tag{13.32}$$

Формулы (13.30) и (13.32) показывают, что решением системы (13.25) при $\mu = 0$ и управлении $u = u_0(t)$ является кривая $x = x_0(t)$, которая проходит через точку $x = x_0$ при $t = 0$ и через точку $x = x_1$ при $t = T$. Соотношения (13.29) и (13.31) представляют собой систему интегральных уравнений для определения управления $u(t)$ и соответствующего ему движения $x(t)$.

Покажем, что при любой функции $v \in L_2[0, T]$, удовлетворяющей условиям (13.27'), система (13.29), (13.31) имеет единственное решение при $\mu \leqslant \mu^0$, где μ^0 — некоторая положительная постоянная. При этом решение этой системы дает искомое управление $u(t)$ и требуемое движение $x(t)$. Для доказательства этого утверждения введем в рассмотрение вектор $\xi(x, u)$. Тогда систему интегральных уравнений можно записать в виде

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \mu K(\xi, \mu, t), \tag{13.33}$$

где $\xi_0(t) = \binom{x_0(t)}{u_0(t)}$, $K(\xi, \mu, t)$ — оператор, получающийся из системы (13.31), (13.29):

$$K(\xi, \mu, t) = \begin{bmatrix} \int\limits_0^t Y(t) Y^{-1}(\tau) G(\tau, x, u, \mu)\, d\tau - \\ - Y(t) A(t) A^{-1}(T) \int\limits_0^T Y^{-1}(\tau) G(\tau, x, u, \mu)\, d\tau, \\ - B^*(t) A^{-1}(T) \int\limits_0^T Y^{-1}(\tau) G(\tau, x, u, \mu)\, d\tau. \end{bmatrix}$$

Легко видеть, что при $x_0 \in G^0$, $x_1 \in G^1$ и фиксированной функции $\varphi(t)$ справедливо неравенство $\|\xi_0(t)\| < r_1$, $r_1 > 0$, при $t \in [0, T]$.

Пусть $r_2 > r_1$ — некоторое число. Так как $K(\xi, \mu, t)$ является непрерывной функцией своих аргументов, то при любой непрерывной функции $\xi(t)$ такой, что $\|\xi(t)\| \leqslant r_2$ при $\mu \leqslant \mu_1$ и $t \in [0, T]$, имеем $\|K(\xi, \mu, t)\| \leqslant M$, где M — некоторая положительная константа.

Выберем число μ_2 такое, чтобы при любом $\mu \leqslant \mu_2$ выполнялось неравенство

$$\| \xi_0(t) + \mu K(\xi(t), \mu, t) \| \leqslant r_2,$$

где $\xi(t)$ — любая непрерывная функция и такая, что $\|\xi(t)\| \leqslant r_2$, $t \in [0, T]$. Для этого достаточно взять $\mu_2 \leqslant \min[\mu_1, (r_2 - r_1)/M]$.

Построим последовательные приближения $\xi_0, \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t), \ldots$ по формуле

$$\xi_{m+1}(t) = \xi_0(t) + \mu K(\xi_m, \mu, t), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{13.34}$$

При этом оказывается, что $\xi_{m+1}(t)$ является непрерывной векторной функцией, заданной на $[0, T]$ и удовлетворяющей условию

$$\| \xi_{m+1}(t) \| \leqslant \| \xi_0(t) \| + \mu \| K(\xi_m, \mu, t) \| \leqslant r_1 + \mu M \leqslant r_2,$$

если только $\|\xi_m(t)\| \leqslant r_2$ при $t \in [0, T]$. При $m = 0$ и $m = 1$ последнее имеет место. По индукции будем иметь $\|\xi_m(t)\| \leqslant r_2$ для всех $m \geqslant 0$.

Покажем теперь, что существует число $\mu^0 < \mu_2$ такое, что при любом $\mu \leqslant \mu^0$ ряд

$$\xi_0 + (\xi_1 - \xi_0) + \cdots \tag{13.35}$$

сходится равномерно на промежутке $[0, T]$. Так как функция $G(t, x, u, \mu)$ непрерывно дифференцируема по компонентам векторов x и u, то, как легко показать, существует положительная величина L такая, что для любых векторов $\overline{\xi}$ и $\overline{\overline{\xi}}$, удовлетворяющих неравенствам $\|\overline{\xi}(t)\| \leqslant r_2$, $\|\overline{\overline{\xi}}(t)\| \leqslant r_2$, будет

$$\| K(\overline{\xi}, \mu, t) - K(\overline{\overline{\xi}}, \mu, t) \| \leqslant L \| \overline{\xi} - \overline{\overline{\xi}} \| \quad \text{при } t \in [0, T] \text{ и } \mu \leqslant \mu_2.$$

Вычтем почленно из равенства (13.34) при $m = n - 1$ его же при $m = n - 2$:

$$\xi_n - \xi_{n-1} = \mu [K(\xi_{n-1}, \mu, t) - K(\xi_{n-2}, \mu, t)];$$

отсюда имеем неравенство

$$\| \xi_n - \xi_{n-1} \| \leqslant \mu L \max_{t \in [0, T]} \| \xi_{n-1}(t) - \xi_{n-2}(t) \|. \tag{13.36}$$

Введем обозначение $\varphi_n = \max\limits_{t \in [0, T]} \|\xi_n - \xi_{n-1}\|$. Из неравенства (13.36) будем иметь также неравенство

$$\varphi_n \leqslant \mu L \varphi_{n-1}. \tag{13.37}$$

Рекуррентное соотношение (13.36) дает неравенство

$$\varphi_n \leqslant (\mu L)^{n-1}\varphi_1, \tag{13.38}$$

$$\varphi_1 = \max_{t\in[0,T]} \| \xi_1 - \xi_0 \| \leqslant \mu \max_{\substack{t\in[0,T]\\ \|\xi\| \leqslant r_2,\, \mu < \mu_1}} \| K(\xi, \mu, t) \| = \mu M.$$

Из оценки (13.38) вытекает, что упомянутый выше ряд равномерно сходится при $t \in [0, T]$ и $\mu < \mu_3$, где $\mu_3 L = 1$. Положим $\mu^0 = \min(\mu_2, \mu_3)$. При $\mu \leqslant \mu^0$ построение последовательных приближений (13.34) оказывается возможным, каждая из функций $\xi_m(t)$ непрерывна и последовательность $\{\xi_m(t)\}$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходится на промежутке $[0, T]$. Обозначим ее предел через $\xi(t) = \{x(t), u(t)\}$. Покажем, что $\xi(t)$ — искомое. Действительно, подставляя это управление и это движение в интегральное уравнение, получаем тождество. Дифференцируя по t обе части (13.31), находим, что $x(t)$ удовлетворяет системе (13.25) при $u = u(t)$. Если в (13.31) положить $t = 0$ и $t = T$, то можно убедиться, что это движение переводит систему из положения $x = x_0$ в положение x_1 за время T. ▣

Замечание. Рассмотрение вопроса построения программных движений в общем случае краевых условий (13.20) проводится аналогично приведенным рассуждениям, так как интегральные уравнения для программных движений и управлений изменяются несущественным образом с точки зрения проведения всех оценок.

§ 14. ПОСТРОЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ И РЕЛЕЙНО-ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

Существование импульсных управлений. — Область управляемости. — Квазилинейный случай. — Режим стабилизации

1. Пусть задана линейная управляемая система

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + F(t), \tag{14.1}$$

где x — n-мерный фазовый вектор, u — r-мерный вектор управления. Будем считать, что элементы матриц P и Q и компоненты вектора F заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны и ограничены. Управление $u(t)$ будем называть *импульсным* на промежутке $[0, T]$, если этот промежуток подразделяется точками $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_k$ на частичные промежутки $[t_j, t_{j+1})$, в которых векторная функция $u(t)$ сохраняет постоянное значение u_j. При этом при четных значениях переменных j $u_j = 0$. Импульсное управление $u(t)$ будем называть также *релейно-импульсным*, если компоненты векторов u_j могут принимать лишь значения $0, \pm 1$.

Обозначим, как и выше, через B матрицу $B = Y^{-1}Q$, где Y — матрица фундаментальной системы решений для системы однородных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x. \tag{14.2}$$

Пусть требуется с помощью импульсного управления из любого начального состояния $x = x_0$ при $t = 0$ перевести систему в конечное фазовое состояние $x = 0$ при $t = T$.

Теорема 14.1. *Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы $B^*(t)$, линейно независимы в промежутке $[0, T]$, то существует семейство импульсных управлений, переводящее систему из начальной точки $x = x_0$ в конечное состояние $x = 0$ за время $[0, T]$.*

Доказательство. Для простоты рассуждений будем считать, что в управляемой системе (14.1) управление u — скалярная функция, иначе говоря, $r = 1$. Тогда условие теоремы будет состоять в том, что компоненты вектора $B(t)$ являются линейно независимыми функциями на промежутке $[0, T]$. Тогда необходимо существуют точки $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, T]$ такие, что векторы $B_s = B(t_s)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, линейно независимы. Выберем далее величины $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, ... так, чтобы промежутки $[t_j, t_j + \tau_j)$ не перекрывались при $j = 1, \ldots, n$, и положим $u = u_j$ при $t \in [t_j, t_j + \tau_j)$. В остальных точках промежутка $[0, T]$ положим $u = 0$. Здесь $u_1, \ldots, u_n$ — постоянные числа. Таким образом, построенное управление будет импульсным.

Покажем, что величины $u_1, \ldots, u_n$ можно выбрать так, что решение системы (14.1), начинающееся в произвольной точке x_0 при $t = 0$, будет попадать в точку $x = 0$ при $t = T$. Предположим, что такое управление построено. Тогда, подставляя его в (14.1) и затем домножая обе части на Y^{-1} и интегрируя в пределах от 0 до T, найдем равенство

$$-x_0 - \int_0^T Y^{-1}F\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n}\left[\int_{t_j}^{t_j+\tau_j} B(t)\,\mathrm{d}t\, u_j\right]. \qquad (14.3)$$

Легко видеть, что уравнение (14.3) имеет решение, если положить

$$x_0 = -\int_0^T Y^{-1}F\mathrm{d}t \quad \text{и} \quad u_j = 0.$$

Очевидно, что якобиан правых частей по переменным $u_1, \ldots, u_n$ совпадает с определителем матрицы, столбцами которой являются векторы $-\int_{t_j}^{t_j+\tau_j} B(t)\mathrm{d}t$. Определитель этой матрицы отличен от нуля при достаточно малых положительных величинах $\tau_1, \ldots, \tau_n$, так как этот определитель будет отличаться на величины более высокого порядка малости от определителя, составленного из векторов B_s, помноженного на произведение $\tau_1\tau_2\ldots\tau_n$, ибо

$$\int_{t_j}^{t_j+\tau_j} B(t)\,\mathrm{d}t = \tau_j B_j + \int_{t_j}^{t_j+\tau_j} [B(t) - B_j]\,\mathrm{d}t. \qquad (14.4)$$

Интеграл, стоящий в правой части (14.4), имеет порядок малости выше

τ_j в силу непрерывности вектора $B(t)$. Таким образом система (14.3) определяет при всех достаточно малых $\tau_1 > 0, \ldots, \tau_n > 0$ величины $u_1, \ldots, u_n$, которые и дают возможность построить импульсное управление.

Обозначим далее через v любое импульсное управление, заданное на промежутке $[0, T]$, обладающее тем свойством, что

$$\int_0^T Bv\mathrm{d}t = 0. \qquad (14.5)$$

Если обозначить построенное выше управление через u_0, то семейство импульсных управлений, решающее задачу перехода, будет задаваться формулой $u = u_0 + v$. ∎

Если управление можно выбрать только из класса релейно-импульсных, то задача перехода из начального состояния в заданное конечное, вообще говоря, разрешима не для всех начальных состояний.

Теорема 14.2. *Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы B^*, линейно независимы на промежутке* $[0, T]$, *то при* $F = 0$ *можно указать такое положительное число* H, *что при* $\|x_0\| < H$ *будет существовать релейно-импульсное управление, переводящее систему из начального положения* $x = x_0$ *при* $t = 0$ *в конечное положение* $x = 0$ *при* $t = T$.

Доказательство. Как и выше, будем предполагать, что в системе (14.1) управление u является скалярной величиной. Тогда, как и в теореме 14.1, получим систему

$$-x_0 = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{t_j}^{t_j+\tau_j} B(t)\,\mathrm{d}t u_j \right]. \qquad (14.6)$$

Величины u_j в системе (14.6) будем считать некоторыми параметрами, не обращающимися в ноль. Система (14.6) имеет решение при $\tau_j = 0$, $x_0 = 0$. Якобиан правых частей по переменным $\tau_1, \ldots, \tau_n$, вычисленный в точке $\tau_1 = 0, \ldots, \tau_n = 0$, совпадает с определителем матрицы, составленной из векторов B_j, $j = 1, \ldots, n$, помноженным на произведение величин u_j, следовательно, якобиан правых частей (14.6) отличен от нуля. Отсюда система (14.6) имеет единственное решение при любом выборе параметров u_j.

Выберем теперь u_j так, чтобы $u_j = \pm 1$. Если величина $\|x_0\|$ достаточно мала, то величины $\tau_1, \ldots, \tau_n$ сколь угодно малы. Поэтому промежутки $[t_j, t_j + \tau_j]$ перекрываться не будут и, следовательно, построенное релейно-импульсное управление будет решать задачу перехода. ∎

Замечания. 1. Если при $u = 0$ положение равновесия в системе (14.1), при $F = 0$ оказывается асимптотически устойчивым по Ляпунову, то с помощью релейно-импульсного управления при выполнении условий теоремы (14.2) можно за конечное время перейти из любого начального состояния $x = x_0$ в конечное состояние $x = 0$.

2. Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы B^*, линейно зависимы на промежутке $[0, T]$, то не может существовать импульсное управление, переводящее систему из любого начального состояния $x = x_0$ в конечное состояние $x = 0$ за время $[0, T]$.

Действительно, пусть это не так. Тогда импульсное управление можно представить также в форме

$$u = B^*c + v, \quad \text{где} \int_0^T Bv dt = 0.$$

Подставляя это управление в систему (14.1), домножая на Y^{-1} слева и интегрируя в пределах от 0 до T, найдем

$$A(0, T)c = -x_0 - \int_0^T Y^{-1}F dt. \tag{14.7}$$

При любом выборе вектора x_0 эта линейная система неразрешима, так как матрица $A(0,T)$ — особая.

2. В теореме 14.2 было установлено, что при релейном характере управления систему (14.1) можно перевести, вообще говоря, лишь из некоторой окрестности области начальных состояний x_0 в конечное состояние $x = 0$ за время $[0, T]$. Это обстоятельство возникает, как следует из теоремы 14.1, не из характера дискретности управления, а из того, что управления стеснены ограничениями по величине.

Изучим влияние ограничений несколько подробнее. Предположим, что управление $u \in U$, где U — некоторое множество, содержащее точку $u = 0$ в качестве внутренней.

Определение 14.1. Будем говорить, что начальное состояние x_0 принадлежит *области управляемости* R_0, если существуют число $T > 0$ и суммируемая с квадратом функция $u(t)$ такие, что система (14.1) переходит из начального состояния x_0 в конечное состояние $x = 0$ за время $[0, T]$ под действием управления $u = u(t) \in U$.

Естественно, что время перехода T может быть различным для различных начальных состояний $x_0 \in R_0$.

Аналогично можно ввести понятие об *области управляемости*, отнесенное к произвольному начальному моменту t_0, а именно через R_{t_0} будем обозначать совокупность всех начальных состояний x_0, для которых можно указать управление, переводящее систему (14.1) в конечное состояние $x = 0$ за время $[t_0, t_0 + T]$. Это управление будем также считать суммируемой с квадратом функцией на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ и, кроме того, $u \in U$. Для стационарных систем $R_{t_0} = R_0$.

Теорема 14.3. *Если существует некоторая достаточно малая окрестность точки $x = 0$, $||x|| < \delta$, содержащаяся в R_0, и система (14.1) стационарна, то область управляемости R_0 является открытым и связным множеством.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in R_0$. Тогда существует управление $u = u(t)$, для которого будет иметь место равенство

$$-x_0 = \int_0^T Y^{-1}[Qu + F]\,dt. \tag{14.8}$$

Следовательно, для любого начального состояния $\overline{x_0}$ при этом же управлении будем иметь соотношение

$$Y^{-1}(T)\,x(T) - \overline{x_0} = \int_0^T Y^{-1}(Qu + F)\,dt = -x_0. \tag{14.9}$$

Если $\|\overline{x_0} - x_0\| < \varepsilon$, то выполняется неравенство $\|x(T)\| \leqslant \|Y(T)\|\varepsilon$. Положим $\varepsilon = \delta/\|Y(T)\|$, тогда все движения системы (14.1), начинающиеся в ε-окрестности состояния x_0, оказываются в момент T в δ-окрестности состояния $x = 0$.

Следовательно, существует число T_1 такое, что система (14.1) может быть переведена из состояния $x(T)$ в положение $x = 0$ за время $[T,\ T + T_1]$ с помощью некоторого управления $u_1(t)$.

Таким образом, с помощью управления $u_2(t)$ система (14.1) может быть переведена из состояния $\overline{x_0}$ в состояние $x = 0$ за время $[0,\ T + T_1]$, причем

$$u_2(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [0,\ T), \\ u_1(t), & t \in [T,\ T + T_1]. \end{cases}$$

Тем самым показано, что $\overline{x_0} \in R_0$. Значит, R_0 — открытое множество. Связность этого множества вытекает из того, что из любых двух точек $x_0 \in R_0$, $\overline{x_0} \in R_0$ в конечное время система (14.1) может быть переведена в точку $x = 0$. Следовательно, точки x_0 и $\overline{x_0}$ могут быть соединены интегральными кривыми, соединяющими их с положением $x = 0$. При этом упомянутые интегральные кривые принадлежат множеству R_0 и являются абсолютно непрерывными. ■

Рассмотрим теперь случай, когда U есть совокупность векторных функций, удовлетворяющих ограничению

$$\int_0^T u^2 dt \leqslant a^2. \tag{14.10}$$

Теорема 14.4. *Если управления стеснены ограничениями* (14.10), *то область управляемости R_0 определяется неравенством*

$$x^* A^{-1}(0,\ +\infty)x \leqslant a^2,$$

причем считается, что векторные функции, стоящие в столбцах матрицы B^*, линейно независимы на каком-либо конечном промежутке и $F = 0$.

Доказательство. Будем представлять управление в форме

$$u = B^*c + v, \quad \int_0^T Bv\,dt = 0. \tag{14.11}$$

Если управление (14.11) переводит систему (14.1) из начального состояния x_0 в положение $x = 0$, то будем иметь равенство

$$-x_0 = A(0, T)c \tag{14.12}$$

и, следовательно, управление (14.11) примет вид

$$u = -B^*A^{-1}(0, T)x_0 + v. \tag{14.13}$$

Подставляя (14.13) в условия (14.10), найдем

$$x_0^* A^{-1}(0, T)\, x_0 \leqslant a^2 - \int_0^T v^2 \mathrm{d}t. \tag{14.14}$$

Неравенство (14.14) определяет наиболее широкую область при $\int_0^T v^2 \mathrm{d}t = 0$.

Обозначим через $R(0, T)$ эллипсоид, определенный неравенством $x^*A^{-1}(0, T)x \leqslant a^2$.

Покажем, что эллипсоид $R(0, T)$ включается в $R(0, T_1)$, если $T_1 > T$. Действительно, если управление (14.11) переводит систему (14.1) из начального состояния x_0 в положение $x = 0$ за время $[0, T]$, то, полагая на промежутке $t \in [T, T_1]$ $u = 0$, получаем, что продолженное таким образом управление будет переводить систему (14.1) из положения x_0 в положение $x = 0$ также за время $[0, T_1]$. Следовательно, из того, что $x_0 \in R(0, T)$, вытекает, что $x_0 \in R(0, T_1)$. Так как $R(0, T)$ принадлежит при любом $T \to \infty$ множеству $x^*A^{-1}(0, +\infty)x \leqslant a^2$, то это множество, таким образом, совпадает с областью управляемости R_0. ∎

Замечания. 1. Если в системе (14.1) $F \neq 0$, то множество $R(0,T)$ будет представлять собой эллипсоид при любом достаточно большом T с центром в точке

$$\xi(T) = -\int_0^T Y^{-1} F \mathrm{d}t.$$

Объединение всех таких эллипсоидов и будет давать область управляемости R_0, и, следовательно, вид этой области может оказаться весьма сложным.

2. Предположим, что управления в системе (14.1) являются кусочно-непрерывными и что U является некоторым многогранником пространства E_r. Тогда отыскание области управляемости является довольно сложной проблемой, не решенной до настоящего времени даже в случае, когда все входящие в систему (14.1) функции являются постоянными и U представляет собой r-мерный куб с центром в точке $u = 0$.

3. Пусть управляемая система описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + F(t) + \mu G(t, x, u, \mu). \tag{14.15}$$

Предположим, что элементы матриц P, Q и компоненты вектора F заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны и ограничены. Будем считать также, что компоненты вектора G заданы при $t \geqslant 0$, $x \in E_n$, $u \in E_r$, $\|\mu\| < \mu_1$, вещественны, непрерывны и непрерывно дифференцируемы относительно компонент векторов x и u. Обозначим, как и ранее, через $Y(t)$ фундаментальную систему решений для системы линейных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x, \ Y(0) = E. \tag{14.16}$$

Положим далее $B = Y^{-1}Q$. Пусть Ω — некоторая ограниченная область фазового пространства E_n. Требуется систему (14.15) из любой точки этой области перевести с помощью импульсного управления за время $[0, T]$ в конечное состояние $x = 0$.

Теорема 14.5. *Если векторные функции, являющиеся столбцами матрицы B^*, линейно независимы в промежутке* $[0, T]$, *то можно указать положительное число μ_0 такое, что при любом значении вещественного параметра μ, $|\mu| < \mu_0$, будет существовать семейство импульсных управлений, переводящих систему* (14.15) *из любого начального положения $x_0 \in \Omega$ в конечное положение $x = 0$ за время* $[0, T]$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать управление $u(t)$ в системе (14.15) скалярным. Тогда из условия теоремы (14.5) вытекает, что компоненты вектора B являются линейно независимыми функциями в промежутке $[0, T]$. А тогда можно указать в этом промежутке точки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ такие, что векторы $B_s = B(t_s)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, будут образовывать в n-мерном пространстве базис и поэтому определитель матрицы, столбцами которой являются эти векторы, будет отличен от нуля.

Предположим, что задача построения импульсного управления решена. Именно: пусть существуют достаточно малые положительные числа $\tau_1, \ldots, \tau_n$ и вещественные числа $u_1, \ldots, u_n$ такие, что управление $u(t)$, решающее задачу перехода, имеет вид $u = u_j$ при $t \in [t_j, t_j + \tau_j)$. В остальных же точках промежутка $[0, T]$ $u = 0$. Величины $\tau_1, \ldots, \tau_n$ такие, что промежутки $[t_j, t_j + \tau_j)$ не перекрываются. Подставим это управление в систему (14.15), домножим обе части слева на матрицу Y^{-1} и проинтегрируем затем в пределах от 0 до T:

$$-x_0 = \sum_{s=1}^{n} \left[\int_{t_s}^{t_s+\tau_s} B(t)\, dt \cdot u_s \right] + \int_0^T Y^{-1} F dt + \mu \int_0^T Y^{-1} G dt. \tag{14.17}$$

Покажем теперь, что система (14.17) имеет решение при $u = 0$. Действительно, эта система при $u = 0$ будет иметь вид

$$x_0 + \int_0^T Y^{-1} F dt + \mu \int_0^T Y^{-1} G(t, x, 0, \mu)\, dt = 0. \tag{14.18}$$

Легко видеть, что якобиан левой части (14.18), вычисленный отно ительно компонент вектора x_0, при $\mu = 0$ равен единице. Уравнение 14.18) при $\mu = 0$ имеет решение $x_0 = -\int\limits_0^T Y^{-1}F\mathrm{d}t$, поэтому существует акое число $\mu_2 > 0$, что при $|\mu| < \mu_2$ уравнение (14.18) будет иметь ешение. Следовательно, при таких значениях μ уравнение (14.17) акже имеет решение.

Вычислим теперь якобиан правой части (14.17) относительно пе- еменных $u_1, \ldots, u_n$. Этот якобиан при $\mu = 0$ будет совпадать с опре- елителем матрицы, столбцами которой являются векторы

$$\int\limits_{t_s}^{t_s+\tau_s} B(t)\,\mathrm{d}t, \quad s = 1, \ldots, n.$$

)пределитель этой матрицы при достаточно малых положительных еличинах $\tau_1, \ldots, \tau_n$ обязательно будет отличен от нуля, как это было оказано в теореме (14.1). Таким образом, система (14.17) будет иметь ешение при любом выборе параметра μ, $|\mu| < \mu_3$.

Возьмем далее произвольное импульсное управление v, обладаю- цее свойством $\int\limits_0^T Bv\mathrm{d}t = 0$. Если построенное выше управление обо- начить через u_0, то семейство импульсных управлений, решающих оставленную задачу, будет иметь вид

$$u = u_0 + v. \tag{14.19}$$

Если импульсное управление подчинить условию $|v| < v_0$, где v_0 — иксированная положительная константа, то можно будет указать исло $\mu_0 = \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ такое, что при всех $|\mu| < \mu_0$ управление 14.19) будет давать решение поставленной задачи.

При таком выборе управления u_0 область Ω оказывается достаточ- о малой окрестностью точки $x_0 = -\int\limits_0^T Y^{-1}F\mathrm{d}t$, а чтобы получить уп- авление, переводящее систему (14.15) из любой точки x_0 наперед аданной ограниченной области Ω, достаточно заметить, что система 14.17) при $\mu = 0$ имеет решение, построенное в предыдущем пара- рафе для линейного случая. Этим утверждение теоремы доказано олностью. ▨

Теорема 14.6. *Если векторные функции, являющиеся столбцами иатрицы B^*, линейно независимы на промежутке $[0, T]$ и если в сис- теме (14.15) $F = 0$, то существуют $h > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что сис- тема (14.15) может быть переведена из любого начального положения $\|x_0\| \leqslant h$ при любом $|\mu| < \mu_0$ в конечное положение $x = 0$ с помощью релейно-импульсного управления за время $[0, T]$.*

Доказательство. Будем считать, что управление u в сис- теме (14.15) является скалярной функцией. Тогда можно указать точки $t_1, t_2, \ldots, t_n$ в промежутке $[0, T]$ такие, что векторы $B_s =$

$= B(t_s)$ будут линейно независимыми. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — достаточно малые положительные величины. Положим $u = u_j$ при $t \in [t_j, t_j + \tau_j)$, $j = 1, \ldots, n$. В остальных точках промежутка $[0, T]$ положим $u = 0$. Считаем далее, что $\tau_1, \ldots, \tau_n$ таковы, что промежутки $[t_j, t_j + \tau_j)$ не перекрываются. Величины u_j считаем параметрами, принимающими только два значения: ± 1. Если с помощью такого релейно-импульсного управления система (14.15) может быть переведена из начального положения x_0 в конечное положение $x = 0$ за время $[0, T]$, то необходимо выполняется уравнение

$$-x_0 = \sum_{s=1}^{n} \left[\int_{t_s}^{t_s+\tau_s} B(t)\,\mathrm{d}t u_s \right] + \mu \int_0^T Y^{-1} G \mathrm{d}t. \tag{14.20}$$

Система (14.20) имеет решение $x_0 = 0$ при $\mu = 0$, $\tau_s = 0$, $s = 1, \ldots, n$. Якобиан правых частей (14.20) по отношению к переменным $\tau_1, \ldots, \tau_n$, вычисленный при $\mu = 0$, с точностью до знака совпадает с определителем матрицы, столбцами которой являются векторы B_s, $s = 1, \ldots, n$, и, следовательно, отличен от нуля. Из этого следует, что система (14.20) имеет решение при $\|x_0\| < h$, $|\mu| < \mu_0$, где h и μ_0 — некоторые положительные постоянные.

Остается теперь распорядиться выбором знаков параметра так, чтобы решения (14.20), а именно $\tau_1, \ldots, \tau_n$, были неотрицательны. Этот выбор можно осуществить, например, следующим образом. Так как векторы B_s, $s = 1, \ldots, n$, линейно независимы, то любой начальный вектор x_0 можно разложить по этим векторам B_s как по базису:

$$x_0 = \sum_{s=1}^{n} B_s \theta_s, \tag{14.21}$$

здесь θ_s, $s = 1, \ldots, n$, — некоторые вещественные числа. Положим $u_s = -\operatorname{sign}\theta_s$. Тогда выражение (14.21) может быть представлено в форме

$$-x_0 = \sum_{s=1}^{n} B_s \tau_{s0} u_s.$$

Здесь τ_{s0} будут уже, вообще говоря, положительными числами и будут представлять собой главную часть величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$, рассматриваемых как функции параметра μ_0. ■

Результат, аналогичный тому, который сформулирован в предыдущей теореме, имеет место для системы в режиме стабилизации. Именно: пусть задана система

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + H(t, x, u), \tag{14.22}$$

где $H(t, x, u)$ — векторная функция, заданная при $t \geqslant 0$, $x \in E_n$, $u \in E_r$, вещественная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая относительно компонент векторов x и u. Будем считать также, что $\|H\| \leqslant c\, [\|x\| + \|u\|]^2$, $c \to 0$ при $\|x\| \to 0$. Система (14.20) примет в этом случае вид

$$-\bar{x}_0 = \sum_{s=1}^{n} \left[\int_{t_s}^{t_s+\tau_s} B(t)\, dt\, u_s \right] + \int_0^T Y^{-1} H dt. \qquad (14.23)$$

Если предположить, что

$$\partial H/\partial x_s = 0,\ s = 1,\ \ldots,\ n,$$

при $x = 0$ (это соответствует тому случаю, когда все члены, линейные относительно x, уже выделены), то получим, что система (14.23) имеет решение при $x_0 = 0$, $\tau_s = 0$, $s = 1, \ldots, n$. Якобиан же правых частей системы (14.23) относительно величин $\tau_1, \ldots, \tau_n$ при $x_0 = 0$ и $\tau_s = 0$, $s = 1, \ldots, n$, будет отличен от нуля. Поэтому система (14.23) при достаточно малых $\|x_0\|$ будет разрешима и, следовательно, путем выбора знаков величин u_j можно построить релейно-импульсное управление, переводящее систему (14.22) из любого начального положения x_0, $\|x_0\| < h$, в конечное положение $x = 0$ за время $[0, T]$.

4. Рассмотрим вновь систему в режиме стабилизации и предположим, что управление стеснено некоторыми ограничениями $u \in U$, где U — некоторое множество, содержащее точку $u = 0$.

Определение 14.2. Начальное состояние $x_0 \in E_n$ и начальный момент $t_0 > 0$ будем называть *точкой области управляемости* R, если существует управление $u = u(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, переводящее управляемую систему из положения $x = x_0$ при $t = t_0$ в положение $x = 0$ при $t = t_0 + T$.

Теорема 14.7. *Если существует достаточно малая окрестность точки $x = 0$, $\|x\| < \delta$, принадлежащая любому сечению t множества R, то множество R открыто и связно. (Под сечением множества R понимается совокупность всех точек (x_0, t_0) с фиксированным значением t_0.)*

Доказательство. Пусть (x_0, t_0) — некоторая точка множества R. Тогда существует управление $u = u(t)$, заданное при $t \in [t_0, t_0 + T]$, переводящее управляемую систему из состояния x_0 в положение $x = 0$. В силу теоремы об интегральной непрерывности любое движение, начинающееся в точке $(\bar{x}_0, \bar{t}_0)$, при этом же управлении переходит в точку $\bar{x}$. При этом $\|\bar{x}\| < \delta$, если только $\{\|x_0 - \bar{x}\| + |t_0 - \bar{t}_0|\} < \varepsilon$. Далее, так как δ-окрестность точки $x = 0$ принадлежит любому t_0-сечению множества R, то существует управление, переводящее систему из точки $\bar{x}$ в положение $x = 0$ при $t \in [t_0 + T,\ t_0 + T + T_1]$. Отсюда вытекает, что точка $(\bar{x}_0, \bar{t}_0)$ будет непременно принадлежать множеству R и, следовательно, R является открытым множеством.

Далее, любые две точки множества R могут быть связаны между собой абсолютно непрерывной кривой, целиком принадлежащей множеству R. Действительно, из любых двух точек этого множества (x_0, t_0), $(\bar{x}_0, \bar{t}_0)$ можно подходящим выбором управлений попасть на полуось $x = 0$, $t_0 > 0$, и, следовательно, эти две точки могут быть соединены дугами интегральных кривых, по которым совершается переход на полуось и отрезком полуоси. Таким образом, множество R является открытым и связным. ▨

Замечания. 1. Если уравнения движения являются стационарными, то область управляемости представляет собой цилиндр, содержащий ось $x = 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$. В этом случае ограничения $t_0 > 0$ в определении области управляемости можно опустить и, следовательно, можно рассматривать область управляемости не в пространстве x, t, а в пространстве фазовых состояний E_n.

2. Построение границ области управляемости для нелинейных систем является еще не решенной проблемой. Если ограничения, стесняющие управления, смягчаются, то область управляемости, вообще говоря, расширяется. Зависимость границ области управляемости от параметров, входящих в ограничения, еще не изучена.

§ 15. СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ

Непрерывная прямая стабилизация. — Непрямое непрерывное регулирование. — Многоканальные системы управления. — Нестационарный случай. — Влияние запаздываний.

1. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = f_s(t, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_r), \; s = 1, \ldots, n, \tag{15.1}$$

описывающая движение некоторого управляемого объекта. Величины $x_1, \ldots, x_n$ являются фазовыми координатами этого объекта, $z_1, \ldots, z_r$ — его управляющими органами.

Перепишем систему (15.1) в векторной форме:

$$\dot{X} = F(t, X, Z), \tag{15.2}$$

где X — n-мерный вектор, Z — r-мерный вектор, F — n-мерная вектор-функция. Предположим, что для системы (15.2) построено некоторое программное движение $X_p(t)$ и $Z_p(t)$, определенное при $t \geqslant 0$. Это движение может быть построено из различных соображений, в частности программные управления $Z_p(t)$ и программная траектория $X_p(t)$ могут быть оптимальными в том или ином смысле.

В настоящем параграфе ставится задача отыскания такого **закона автоматического управления объектом**, при котором программное движение оказывается устойчивым или даже асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Перейдем к изложению способа построения системы автоматического управления, обладающей этим свойством. В системе (15.2) сделаем замену искомых функций и управляющих величин по формулам

$$X = X_p(t) + Y; \quad Z = Z_p(t) + U. \tag{15.3}$$

Тогда система (15.2) примет вид

$$dY/dt = G(t, Y, U), \tag{15.4}$$

где

$$G(t, Y, U) = F(t, X_p + Y, Z_p + U) - F(t, X_p, Z_p). \tag{15.5}$$

Из (15.5) вытекает, что при управлении $U=0$ система (15.4) имеет движение $Y=0$. Имея в виду построение простого регулятора, выделим в системе (15.4) члены, линейные относительно Y и U. Тогда получим систему первого приближения в виде

$$\dot{Y} = A(t)Y + B(t)U. \tag{15.6}$$

Предположим сначала, что $r=1$, т. е. имеется один управляющий орган, и пусть матрица A и вектор B постоянны.

Теорема 15.1. *Пусть* 1) *выполняется неравенство*

$$\| G(t, Y, U) - A(t)Y - B(t)U \| \leqslant c(\|Y\| + \|U\|), \tag{15.7}$$

где $c \to 0$ при $\|Y\| \to 0$, $\|U\| \to 0$; 2) *векторы* B, AB, A^2B, ..., $A^{n-1}B$ *линейно независимы.*

Тогда программное движение в системе (15.2) *можно сделать асимптотически устойчивым путем надлежащего выбора автоматической системы* *п р я м о г о р е г у л и р о в а н и я*, *при этом регулирование можно осуществлять с помощью сигнала, являющегося линейной комбинацией отклонений истинного движения от заданного программного.*

Иначе говоря, при выполнении условий 1 *и* 2 *настоящей теоремы в системе* (15.2) *при*

$$Z = Z_p \mp \sum_{k=1}^{n} c_k [x_k - x_{kp}(t)]$$

величины $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *можно выбрать так, что движение* $X = X_p(t)$ *этой системы будет асимптотически устойчивым по Ляпунову.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение матрицу S, j-й столбец которой имеет вид $A^{j-1}B$. Сделаем в системе (15.6) замену искомых функций по формуле $Y = S\overline{Y}$. Тогда для новой искомой векторной функции $\overline{Y}$ получим систему уравнений

$$\mathrm{d}\overline{Y}/\mathrm{d}t = S^{-1}AS\overline{Y} + S^{-1}BU. \tag{15.8}$$

Так как справедливо равенство $S^{-1}B = (1, 0, \ldots, 0)^*$ и вектор A^nB может быть разложен по векторам B, AB, ..., $A^{n-1}B$ как по базису, причем это разложение представимо в форме

$$A^nB = -p_nB - p_{n-1}AB - \cdots - p_1A^{n-1}B,$$

то система (15.8) после очевидных преобразований примет вид

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\overline{y}_1/\mathrm{d}t = -p_n\overline{y}_n + U \\ &\mathrm{d}\overline{y}_s/\mathrm{d}t = \overline{y}_{s-1} - p_{n-s+1}\overline{y}_n, \quad s = 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{15.9}$$

Положим в системе (15.9) $U = \sum_{k=1}^{n} c_k\overline{y}_k$. Полученную в результате этого преобразования систему будем обозначать номером (15.10).

Обозначим через $\Delta(\lambda)$ характеристический определитель системы (15.10). Найдем аналитическое выражение функции $\Delta(\lambda)$. Первая строка определителя имеет вид

$$(c_1 - \lambda, \ c_2, \ c_3, \ \ldots, \ c_n - p_n).$$

Представим $\Delta(\lambda)$ в виде суммы двух определителей, первый из которых будет иметь в качестве первой строки $(-\lambda, 0, \ldots, 0, -p_n)$, а второй — $(c_1, \ c_2, \ \ldots, \ c_n)$.

Раскрывая первый определитель, найдем, что он имеет вид

$$(-1)^n P_n(\lambda), \text{ где } P_n(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n.$$

Для второго определителя, разлагая его по элементам первой строки, получаем аналитическое выражение

$$(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} c_k P_{n-k}(\lambda), \text{ где } P_{n-k}(\lambda) = \lambda^{n-k} + p_1\lambda^{n-k-1} + \cdots + p_{n-k}, \quad P_0 = 1;$$

так что

$$\Delta(\lambda) = (-1)^n \left[P_n(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} c_k P_{n-k}(\lambda) \right].$$

Таким образом, характеристическое уравнение системы (15.10) будет иметь вид

$$P_n(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} c_k P_{n-k}(\lambda) = 0. \tag{15.11}$$

Обозначим через a_j коэффициент, стоящий в левой части (15.11) при λ^{n-j}, получающийся после приведения подобных. Легко видеть, что справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
a_1 &= p_1 - c_1, \\
a_2 &= p_2 - c_1 p_1 - c_2, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
a_j &= p_j - \sum_{k=1}^{j} c_k p_{j-k}, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
a_n &= p_n - \sum_{k=1}^{n} c_k p_{n-k}, \\
p_0 &= 1.
\end{aligned} \tag{15.12}$$

Из этих формул вытекает, что числа $c_1, \ldots, c_n$ можно выбрать так, чтобы характеристическое уравнение (15.11) системы (15.10) имело наперед заданные корни $\mu_1, \ \ldots, \ \mu_n$. Действительно, обозначим через $q_1, \ \ldots, \ q_n$ коэффициенты уравнения

$$\lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + \cdots + q_n = 0, \tag{15.13}$$

имеющего корни $\mu_1, \ldots, \mu_n$, и положим, что

$$c_j = p_j - \sum_{k=1}^{j-1} c_k p_{j-k} - q_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{15.14}$$

При таком выборе чисел $c_1, \ldots, c_n$ характеристическое уравнение (15.11) системы (15.10) будет иметь корни $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Пусть $\operatorname{Re}\mu_j < 0$, $j = 1, \ldots, n$. В этом случае система (15.10) будет иметь асимптотически устойчивое нулевое решение.

Сделаем над системой (15.10) обратное преобразование $\overline{Y} = S^{-1}Y$:

$$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}t = AY + B\sigma, \tag{15.15}$$

здесь $\sigma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$, вектор $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^*$ связан с вектором $C = (c_1, \ldots, c_n)^*$ соотношением $(S^{-1})^* C = \Gamma$.

Если в системе (15.2) положить

$$Z = Z_p + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k [x_k - x_{kp}(t)],$$

то систему (15.15) можно рассматривать как систему линейного приближения для (15.4). Но из асимптотической устойчивости нулевого решения (15.15) и из условия 1 настоящей теоремы будет вытекать асимптотическая устойчивость программного движения $X_p(t)$. ■

Замечания. 1. В ходе доказательства теоремы 15.1 дан конструктивный метод построения системы автоматического управления, обеспечивающей асимптотическую устойчивость программного движения; при этом коэффициенты усиления регулятора $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ определяются в замкнутой форме через элементы матрицы A и вектора B.

2. В ходе доказательства теоремы 15.1 установлено, что коэффициенты усиления $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ можно выбрать так, чтобы обеспечить любой заданный характер затухания переходных процессов, возникающих в ходе автоматического управления.

Действительно, выше было показано, что величины $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ можно выбрать так, чтобы линейное приближение (15.15) системы (15.2) при управлении

$$Z = Z_p + \sum_{k=1}^{n} \gamma_n [x_k - x_{kp}(t)]$$

имело наперед заданные собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Условие 2 теоремы 15.1 является, вообще говоря, излишне жестким. Определим подход к построению системы автоматического управления, обеспечивающей асимптотическую устойчивость программного движения для тех случаев, когда условие 2 может не выполняться.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ есть собственные числа матрицы A. Предположим, что среди них имеется в точности k таких, у которых вещественные части неотрицательны. Тогда неособым линейным преобразованием над искомыми функциями линейную систему (15.6) можно привести к виду

$$\begin{aligned} dY_1/dt &= A_1Y_1 + B_1U, \\ dY_2/dt &= A_2Y_2 + B_2U, \end{aligned} \tag{15.16}$$

где вектор Y_1 имеет размерность k; вектор Y_2 — размерности $n-k$; A_1 и A_2 — матрицы соответственно размерностей k и $n-k$; B_1 и B_2 — векторы тех же размерностей, что и Y_1 и Y_2. Матрица A_1 имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ с неотрицательными вещественными частями.

Теорема 15.2. *Если выполнено условие 1 теоремы 15.1 и векторы $B_1, A_1B_1, A_1^2B_1, \ldots, A_1^{k-1}B_1$ линейно независимы, то можно построить автоматическую систему управления, при использовании которой программное движение $X_p(t)$ оказывается асимптотически устойчивым по Ляпунову.*

Доказательство. Как следует из доказательства теоремы 15.1, для первой группы уравнений системы (15.16) можно выбрать управление

$$U = \sum_{j=1}^{k} c_j y_{j1} \tag{15.17}$$

так, чтобы нулевое решение этой системы было асимптотически устойчивым. Очевидно также, что при управлении (15.17) оказывается асимптотически устойчивым нулевое решение системы (15.16), а следовательно, и (15.6). Разумеется, при обратном переходе к системе (15.6) управление (15.17) подвергнется линейному преобразованию. Из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (15.6) при таком управлении будет вытекать асимптотическая устойчивость программного движения системы (15.2) при управлении

$$Z = Z_p(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k [x_k - x_{kp}(t)]. \ \blacksquare$$

При доказательстве теоремы 15.2 был использован тот факт, что собственными числами матрицы A_1 являются числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, а собственными числами матрицы A_2 — числа $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$, которые имеют отрицательные вещественные части согласно ранее сделанному предположению. Если векторы $B_1, A_1B_1, \ldots, A_1^{k-1}B_1$ оказываются линейно зависимыми, то, вообще говоря, невозможно построить автоматическую систему управления, обладающую тем свойством, что программное движение системы (15.2) становится асимптотически устойчивым. В этом случае можно указать, однако, ряд таких частных случаев, в которых оказывается все же возможным построить систему автоматического управления, стабилизирующую программное движение.

Предположим, что среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ имеются l собственных чисел с нулевыми вещественными частями (пусть это будут $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$), причем таких, которым отвечают простые элементарные делители. Неособым линейным преобразованием над искомыми функциями, входящими в систему (15.16), ее можно будет привести к виду

$$\begin{aligned} dY_1/dt &= \overline{A}_1 Y_1 + \overline{B}_1 U, \\ dY_2/dt &= \overline{A}_2 Y_2 + \overline{B}_2 U, \\ dY_3/dt &= \overline{A}_3 Y_3 + \overline{B}_3 U, \end{aligned} \tag{15.18}$$

где Y_i и $\overline{B}_i$, $i = 1, 2, 3$, — векторы размерностей соответственно l, $k - l$, $n - k$. Собственными числами матрицы $\overline{A}_1$ являются числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$.

Теорема 15.3. *Если система* (15.2) *линейна относительно X и Z и векторы $\overline{B}_2, \overline{A}_2\overline{B}_2, \ldots, \overline{A}_2^{k-l-1}\overline{B}_2$ линейно независимы, то существует автоматическая система управления для объекта, описываемого системой* (15.2), *стабилизирующая программное движение $X = X_p(t)$. Иначе говоря, управление Z можно выбрать так, чтобы движение $X = X_p(t)$ было устойчивым по Ляпунову.*

Доказательство. Как следует из доказательства теоремы 15.1, управление U можно выбрать в виде

$$U = \sum_{j=1}^{k-l} c_j y_{j2}, \tag{15.19}$$

притом так, чтобы нулевое решение второй группы уравнений (15.18) было асимптотически устойчивым по Ляпунову. При таком выборе управления (15.19) оказывается устойчивым по Ляпунову нулевое решение всей системы (15.18) и, следовательно, нулевое решение системы (15.6). Вследствие линейности системы (15.2) движение $X = X_p(t)$ будет также устойчивым. ■

Разумеется, утверждение теоремы 15.3 можно распространить также на некоторые нелинейные системы дифференциальных уравнений, укладывающихся в рамки сомнительных случаев, изученных в теории устойчивости движения. Не рассматривая это распространение теоремы 15.3, перейдем к изучению возможности стабилизации программного движения $X = X_p(t)$ с помощью непрямого регулирования.

2. Предположим, что требуется построить систему автоматического управления непрямого регулирования объектом, описываемым с помощью системы (15.2) так, чтобы движение $X = X_p(t)$ было стабильным (устойчивым или асимптотически устойчивым по Ляпунову) и притом чтобы уравнение регулятора имело вид

$$\dot{Z} = H(t, X, Z). \tag{15.20}$$

Рассмотрим сначала случай $r = 1$, т. е. случай одного регулирующего органа. Заметим, что функция $H(t, X, Z)$ должна быть такой, чтобы выполнялось соотношение

$$\dot{Z}_p = H(t, X_p, Z_p). \tag{15.21}$$

Сделаем в системе (15.2) и (15.20) замену искомых функций по формулам

$$Y = X - X_p(t), \quad U = Z - Z_p(t). \tag{15.22}$$

Тогда для определения новых искомых функций Y и U получим систему уравнений

$$\dot{Y} = G_1(t, Y, U), \quad \dot{U} = G_2(t, Y, U). \tag{15.23}$$

Из условия (15.21) вытекает, что

$$G_1 = F(t, Y + X_p, U + Z_p) - F(t, X_p, Z_p),$$

$$G_2 = H(t, Y + X_p, U + Z_p) - H(t, X_p, Z_p),$$

следовательно, $G_1 = 0$, $G_2 = 0$ при $Y = 0$, $U = 0$. Ввиду того что функция H подлежит определению, можно в системе (15.23) последнее уравнение записать в виде

$$\dot{U} = V, \tag{15.24}$$

где величину V можно рассматривать как искомое управление. Выделим в функции G_1 члены, линейные относительно Y и U. Тогда из (15.23) и (15.24) получим систему линейного приближения

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}Y/\mathrm{d}t = A(t)Y + B(t)U, \\ &\mathrm{d}U/\mathrm{d}t = V. \end{aligned} \tag{15.25}$$

Предположим, что матрица A порядка $n \times n$ и вектор B размерности n являются постоянными. Тогда справедливо утверждение, изложенное в теореме 15.4.

Теорема 15.4. *Если выполнены условия теоремы* 15.1, *то всегда можно построить систему автоматического управления непрямого регулирования для системы* (15.2) *так, чтобы програмное движение* $X = X_p(t)$ *было асимптотически устойчивым по Ляпунову. Иначе говоря, всегда можно построить функцию H так, чтобы движение* $X = X_p(t)$, $Z = Z_p(t)$ *системы* (15.2) *и* (15.20) *было асимптотически устойчивым. При этом функцию H всегда можно выбрать линейной относительно* X и Z, *т. е.*

$$H = \dot{Z}_p(t) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k [x_k - x_{kp}(t)] + R[Z - Z_p(t)]. \tag{15.26}$$

Доказательство. Сделаем в системе (15.25) замену $Y = S\overline{Y}$, $U = \overline{U}$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\bar{y}_1/\mathrm{d}t = -p_n \bar{y}_n + \overline{U}, \\ &\mathrm{d}\bar{y}_s/\mathrm{d}t = \bar{y}_{s-1} - p_{n-s+1}\bar{y}_n, \\ &\mathrm{d}\overline{U}/\mathrm{d}t = V. \end{aligned} \tag{15.27}$$

Положим в системе (15.27)

$$V = \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{y}_k + R\bar{U}$$

и получающуюся в результате этого систему обозначим номером (15.28). Пусть $\Delta_1(\lambda)$ — характеристический определитель системы (15.28). Разлагая определитель $\Delta_1(\lambda)$ по элементам последней строки подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 15.1, найдем равенство

$$\Delta_1(\lambda) = (-1)^n \left[(R-\lambda) P_n(\lambda) + \sum_{k=1}^{n} c_k P_{n-k}(\lambda) \right].$$

Таким образом, характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\lambda P_n(\lambda) - RP_n(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} c_k P_{n-k}(\lambda) = 0. \qquad (15.29)$$

Обозначая через a_j коэффициент при λ^{n+1-j} в левой части (15.29), после соответствующего приведения подобных членов найдем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
a_1 &= p_1 - R,\\
a_2 &= p_2 - Rp_1 - c_1,\\
a_j &= p_j - Rp_{j-1} - \sum_{k=1}^{j-1} c_k p_{j-k-1}, \qquad (15.30)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{n+1} &= p_{n+1} - Rp_n - \sum_{k=1}^{n} c_k p_{n-k},\\
p_{n+1} &= 0, \quad p_0 = 1.
\end{aligned}$$

Из формул (15.30) вытекает, что постоянные $R, c_1, \dots, c_n$ можно выбрать так, чтобы уравнение (15.29) имело наперед заданные корни $\mu_1, \dots, \mu_n$. Для этого достаточно величины $R, c_1, \dots, c_n$ определить аналогично тому, как это было сделано в теореме 15.1. Будем считать, что $\mathrm{Re}\,\mu_j < 0$, $j = 1, \dots, n$, где $\mu_1, \dots, \mu_n$ — корни уравнения (15.29). В этом случае нулевое решение системы (15.28) будет асимптотически устойчивым, а тогда решение $X = X_p(t)$, $Z = Z_p(t)$ системы

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}X/\mathrm{d}t = F(t, X, Z),\\
&\mathrm{d}Z/\mathrm{d}t = \dot{Z}_p(t) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k [x_k - x_{kp}(t)] + R[Z - Z_p(t)]
\end{aligned} \qquad (15.31)$$

будет асимптотически устойчивым по Ляпунову. Вектор $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^*$ связан с вектором $C = (c_1, \dots, c_n)^*$ соотношением $\Gamma^* = CS^{-1}$. ∎

Если векторы B, AB, A^2B, ..., $A^{n-1}B$ окажутся линейно зависимыми, то рассматриваемую задачу следует свести к той, которая была изучена выше. Для этого положим $Z = x_{n+1}$, $U = y_{n+1}$. Тогда система (15.25) примет вид

$$\frac{d\widetilde{Y}}{dt} = \widetilde{A}\widetilde{Y} + \widetilde{B}V, \tag{15.32}$$

где $\widetilde{Y} = (y_1, \ \ldots, \ y_{n+1})^*$.

Очевидно, что последняя строка матрицы $\widetilde{A}$ будет нулевой, а все компоненты вектора $\widetilde{B}$ будут нулями, за исключением последнего, который равен единице. Обозначим через λ_1, ..., λ_k все собственные числа матрицы A, вещественные части которых неотрицательны. Тогда над системой (15.32) можно сделать неособое линейное преобразование, в результате которого она примет вид

$$dY_i/dt = A_iY_i + B_iV, \quad i = 1, 2, \tag{15.33}$$

где A_1, A_2 — матрицы соответственно порядков k и $n-k$; B_1 и B_2, Y_1, Y_2 — векторы соответственно размерностей k и $n-k$.

Теорема 15.5. *Если выполнено условие* 1 *теоремы* 15.1 *и векторы* B_1, A_1B_1, $A_1^2B_1$, ..., $A_1^{k-1}B_1$ *линейно независимы, причем матрица* A_1 *имеет собственные числа* λ_1, ..., λ_k, *то константы* γ_1, ..., γ_n *системы* (15.31) *можно выбрать так, чтобы решение* $X = X_p(t)$, $Z = Z_p(t)$ *было асимптотически устойчивым.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 15.2.

Если же векторы B_1, A_1B_1, ..., $A_1^{k-1}B_1$ оказываются линейно зависимыми, то, вообще говоря, невозможно построить автоматическую систему управления непрямого регулирования, при которой движение $X = X_p(t)$, $Z = Z_p(t)$ было бы асимптотически устойчивым. Несмотря на это, в такой ситуации в ряде частных случаев удается строить систему автоматического управления, обладающую свойством устойчивости.

Представим себе, что первая группа уравнений системы (15.33) линейным неособым преобразованием приведена к системе того же вида, однако с той разницей, что матрица A_1 имеет собственные числа λ_1, ..., λ_l с нулевыми вещественными частями, причем элементарные делители, соответствующие этим собственным числам, простые. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 15.6. *Если система* (15.31) *линейна относительно* X *и* Z *и векторы* B_2, A_2B_2, $A_2^2B_2$, ..., $A_2^{k-l-1}B_2$ *линейно независимы, причем* A_2 *— матрица, имеющая собственные числа* λ_{l+1}, ..., λ_k *с неотрицательными вещественными частями, то движение* $X = X_p(t)$, $Z = Z_p(t)$ *системы* (15.31) *надлежащим подбором величин* γ_1, ..., γ_n *может быть сделано устойчивым по Ляпунову.*

Замечания. 1. В теоремах 15.1 и 15.6 дается фактическое представление законов автоматического управления, делающих программное движение асимптотически устойчивым. Это представление осуществляется непосредственно через элементы матрицы A и вектора B. В остальных теоремах такому представлению предшествует предварительное преобразование матрицы A, основанное на знании собственных чисел данной матрицы. Таким образом, в этих теоремах для получения нужных констант необходимо решить следующую задачу.

Задана матрица P порядка n, некоторые элементы которой зависят от ряда параметров $c_1, c_2, \ldots, c_m$ из фиксированной области изменения Ω. Требуется найти такую область $\Omega_0 < \Omega$ изменения параметров $c_1, c_2, \ldots, c_m$, в которой все собственные числа матрицы P будут иметь отрицательные вещественные части.

2. Из доказательства теорем, приведенных выше, вытекает, что системы автоматического управления, стабилизирующие программное движение, определяются не единственным образом. Это обстоятельство можно использовать для выбора среди таких систем управления наилучшей в некотором определенном смысле. Один из способов такого выбора будет указан ниже.

3. Перейдем теперь к рассмотрению задачи стабилизации программного движения при наличии нескольких управляющих органов. Предположим, что имеется r управлений. Тогда в системе (15.6) управление U есть r-мерный вектор $u_1, \ldots, u_r$ и под B нужно понимать матрицу, имеющую n строк и r столбцов. Рассмотрим тот случай, когда элементы матриц A и B постоянны.

Пусть векторы $B_1, \ldots, B_r$ являются столбцами матрицы B. Предположим, что они линейно независимы (в противном случае возникает задача с меньшим чем r числом управлений). Теоремы 15.1 и 15.6 остаются в силе, если среди векторов $A^k B_i$, $i = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, n-1$, имеется n линейно независимых. Тогда в случае прямого регулирования можно указать такой закон управления

$$Z = Z_p(t) + C[X - X_p(t)],$$

при котором программное движение $Z_p(t)$, $X_p(t)$ оказывается асимптотически устойчивым. Здесь C — матрица, имеющая r строк и n столбцов, все элементы которой постоянны. В случае непрямого регулирования можно указать закон управления

$$\dot{Z} = \dot{Z}_p + C[X - X_p(t)] + R(Z - Z_p(t)),$$

при котором программное движение X_p, Z_p становится асимптотически устойчивым, причем C является матрицей того же вида, что и ранее, а R — квадратная матрица порядка r с постоянными элементами.

Перейдем к доказательству высказанных утверждений. С этой целью построим из векторов $A^k B_i$ систему n линейно независимых векторов специального вида. Возьмем линейно независимые векторы

$$B_1, AB_1, \ldots, A^{k_1-1}B_1,$$

где число k_1 выбрано так, что вектор $A^{k_1}B_1$ уже является их линейной комбинацией. Среди векторов $B_2, B_3, \ldots, B_r$ обязательно найдется такой, который линейно независим с построенными векторами. Пусть это будет B_2. Рассмотрим вторую совокупность векторов

$$B_2, AB_2, \ldots, A^{k_2-1}B_2,$$

обладающих тем свойством, что они являются линейно независимыми между собой и с векторами первой совокупности и в то же время число k_2 таково, что вектор $A^{k_2}B_2$ представляется линейной комбинацией всех векторов, построенных ранее. Продолжая этот процесс, найдем последнюю совокупность векторов

$$B_\rho,\ AB_\rho, \dots,\ A^{k_\rho - 1}B_\rho,$$

линейно независимых между собой и с векторами, построенными ранее, так что будет выполнено соотношение

$$k_1 + k_2 + \dots + k_\rho = n.$$

Разумеется, может оказаться, что $\rho < r$. Обозначим через S матрицу, столбцами которой являются только рассмотренные векторы, взятые в порядке их построения. Сделав в системе (15.6) замену искомых функций по формуле $Y = S\overline{Y}$, преобразуем ее к виду

$$\mathrm{d}\overline{Y}/\mathrm{d}t = A_0\overline{Y} + B_0U. \qquad (15.34)$$

Представим эту систему в скалярной форме, для чего введем новые независимые переменные; положим

$$y_i^1 = \overline{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, k_1,$$
$$y_i^2 = \overline{y}_{i+k_1}, \quad i = 1, 2, \dots, k_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_i^\rho = \overline{y}_{i+k_1+k_2+\dots+k_{\rho-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, k_\rho,$$

тогда система (15.34) примет вид

$$\frac{\mathrm{d}y_1^1}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{\rho} a_{01,\,i}\, y_{k_i}^i + u_1,$$
$$\frac{\mathrm{d}y_2^1}{\mathrm{d}t} = y_1^1 + \sum_{i=1}^{\rho} a_{02,\,i}\, y_{k_i}^i,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\mathrm{d}y_{k_1}^1}{\mathrm{d}t} = y_{k_1-1}^1 + \sum_{i=1}^{\rho} a_{0k_1,\,i}\, y_{k_i}^i, \qquad (15.35)$$
$$\frac{\mathrm{d}y_1^2}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=2}^{\rho} a_{0k_1+1,\,i}\, y_{k_i}^i + u_2,$$
$$\frac{\mathrm{d}y_2^2}{\mathrm{d}t} = y_1^2 + \sum_{i=2}^{\rho} a_{0k_1+2,\,i}\, y_{k_i}^i,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dy_{k_2}^2}{dt} = y_{k_2-1}^2 + \sum_{i=2}^{\rho} a_{0k_1+k_2,\,i}\, y_{k_i}^i,$$

. . . .

В системе (15.35) имеется теперь лишь ρ управлений. Если $\rho < r$, то следует считать, что заранее принято $u_{\rho+1} = 0, \ldots, u_r = 0$. Положим в системе (15.35)

$$u_i = \sum_{k=1}^{k_i} c_{ik} y_k^i.$$

Полученную в результате этого систему будем обозначать номером (15.36). Легко видеть, что характеристический определитель в системе (15.36) представляется как произведение определителей порядков $k_1, \ldots, k_\rho$, появляющихся на главной диагонали матрицы, определитель которой дает характеристический полином. Эти определители того же вида, что и определители, рассмотренные в теореме 15.1, и, следовательно, выбором постоянных c_{ik} их корни можно сделать произвольными. Отсюда вытекает справедливость сделанного выше утверждения, так как величины c_{ik} можно выбрать так, чтобы нулевое приближение системы (15.36) было асимптотически устойчивым, а тогда будет асимптотически устойчивым программное движение $X_p(t)$, $Z_p(t)$.

Обратимся теперь к случаю непрямого регулирования. Рассмотрим наряду с системой (15.35) систему уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= \sum_{i=1}^{k_1} c_{1i} y_i^1 + r_1 u_1,\\
\frac{du_2}{dt} &= \sum_{i=1}^{k_2} c_{2i} y_i^2 + r_2 u_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{du_\rho}{dt} &= \sum_{i=1}^{k_\rho} c_{\rho i} y_i^\rho + r_\rho u_\rho.
\end{aligned} \tag{15.37}$$

Характеристическое уравнение системы (15.35), (15.37) получается путем раскрытия определителя порядка $n + \rho$, который представляется в виде произведения ρ определителей порядков $k_1 + 1$, $k_2 + 1, \ldots, k_\rho + 1$. Каждый из них имеет вид определителя, рассмотренного при доказательстве теоремы 15.4. Это означает, что выбором величин c_{ik}, входящих в систему (15.37), можно достичь того, что характеристическое уравнение системы (15.35), (15.37) будет иметь корни произвольного вида. В частности, эти корни можно выбрать так, чтобы нулевое решение системы (15.35), (15.37) было асимптотически устойчивым. Тогда программное движение $X_p(t)$, $Z_p(t)$ также будет асимптотически устойчивым.

Если среди векторов

$$A^k B_i, \quad i=1,\dots,r, \quad k=0,1,\dots,n-1,$$

не существует k линейно независимых, то систему (15.6) следует привести к виду (15.16). Пусть матрица B_1, входящая в эту систему, имеет своими столбцами векторы $Q_1, \dots, Q_r$. Если среди векторов

$$A_1^m Q_j, \quad m=0,\dots,k-1, \quad j=1,\dots,r,$$

окажется k линейно независимых, то теорема 15.2 и теорема 15.5 остаются в силе и при наличии r управлений. Иначе говоря, можно построить регулятор как прямого действия, так и непрямого, делающий движение $X_p(t)$, $Z_p(t)$ асимптотически устойчивым. Доказательство этого утверждения ведется аналогично тому, как это сделано в теоремах 15.2 и 15.4.

Если среди упомянутых векторов не окажется k линейно независимых, то построение программных регуляторов, делающих программное движение асимптотически устойчивым, вообще говоря, невозможно.

4. Перейдем, наконец, к рассмотрению вопроса, когда системы первого приближения оказываются нестационарными. Предположим, что уравнение движения управляемого объекта имеет вид

$$d^n x/dt^n = f(t, x, x', x'', \dots, x^{n-1}, Z). \tag{15.38}$$

Пусть $x_p(t)$, $Z_p(t)$ есть программное движение, положим

$$y = x - x_p; \quad U = Z - Z_p.$$

Тогда из уравнения (15.38) получим уравнение

$$d^n y/dt^n = g(t, y, y', \dots y^{(n-1)}, U),$$

где

$$g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}, U) =$$
$$= f(t, y + x_p, y' + x_p', \dots, y^{(n-1)} + x_p^{(n-1)}, U + Z_p) -$$
$$- f(t, x_p, x_p', \dots, x_p^{(n-1)}, Z_p).$$

Предположим, что функция g допускает представление

$$g = -\sum_{i=1}^{n} p_i(t) y^{(n-1)} + p(t) U + g_1(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}, U),$$

где g_1 есть совокупность нелинейных членов таких, что

$$|g_1| < \alpha [\,|y| + |y'| + \dots + |y^{(n-1)}| + |U|\,].$$

Здесь α — достаточно малая постоянная, если $|y|$, $|y'|$, ..., $|y^{(n-1)}|$, $|U|$ достаточно малы.

Будем считать, что функции $p_i(t)$ и $p(t)$ — непрерывные, вещественные и ограниченные, заданные при $t \geqslant 0$.

Теорема 15.7. *Если для любого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *можно указать числа* T, a *и* $\delta(\varepsilon)$ *такие, что множество точек* t, *удовлетворяющих неравенствам* $|p(t)| \leqslant \varepsilon$, $t \geqslant T$, *может быть покрыто системой интервалов, каждый из которых не превосходит длины* $\delta(\varepsilon)$, *не перекрывается соседними интервалами и расстояние между соседними интервалами остается не менее* a, *причем* $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0$, *то существует управление*

$$Z = Z_p(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t) [x^{(n-i)} - x_p^{(n-i)}],$$

при котором программное движение будет асимптотически устойчивым. При этом $c_i(t)$ *есть функции, заданные при* $t \geqslant 0$, *непрерывные и ограниченные.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{i=1}^{n} q_i y^{(n-i)},$$

где постоянные $q_1, \ldots, q_n$ выберем так, чтобы нулевое решение было асимптотически устойчивым. Тогда можно указать квадратичную форму в переменных $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ такую, что ее полная производная, вычисленная в силу этого уравнения, будет также квадратичной формой W, имеющей вид

$$W = -\sum_{i=1}^{n} [y^{(n-i)}]^2.$$

Возьмем некоторые $\varepsilon > 0$. Выберем покрытие множества значений t, удовлетворяющих неравенству $|p(t)| < \varepsilon$, интервалами, не превосходящими по длине $\delta(\varepsilon)$, расстояние между которыми остается не менее a. Вне этих интервалов определим управление U по формуле

$$U = \frac{1}{p(t)} \sum_{i=1}^{n} [p_i(t) + q_i] y^{(n-i)}.$$

Внутри них $U(t)$ определим по формуле

$$U = \varphi(t) \sum_{i=1}^{n} [p_i(t) + q_i] y^{(n-i)},$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная, ограниченная функция, заданная при $t \geqslant 0$ и выбираемая так, чтобы сохранить непрерывность.

Рассмотрим линейные уравнения первого приближения

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -\sum_{i=1}^{n} p_i(t) y^{(n-i)} + p(t) U \qquad (15.39)$$

при построенном выше управлении. Найдем полную производную функции V, вычисленную в силу уравнений (15.39):

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = W + W_1, \tag{15.40}$$

причем квадратичная форма W_1 имеет непрерывные ограниченные коэффициенты, которые отличны от нуля, возможно, лишь внутри выбранного покрытия. Оценивая правую часть (15.40), найдем

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant -\sum_{i=1}^{n} [y^{(n-i)}]^2 + \alpha(t) \sum_{i=1}^{n} [y^{(n-i)}]^2.$$

Функция $\alpha(t)$ отлична от нуля только на интервалах покрытия и принимает там конечное постоянное значение α_0. С другой стороны, имеем неравенство

$$\dot{V} \geqslant -[1 + \alpha(t)] \sum_{i=1}^{n} [y^{(n-i)}]^2.$$

Применяя к полученным неравенствам известный метод оценок, найдем, что нулевое решение системы (15.39) асимптотически устойчиво при любом управлении, построенном при достаточно малом ε. В данном случае этот метод оценок можно реализовать следующим образом. Существуют такие положительные постоянные a_1 и a_2, что справедлива оценка

$$a_1 \sum_{i=1}^{n} [y^{(n-i)}]^2 < V < a_2 \sum_{i=1}^{n} [y^{(n-i)}]^2.$$

Тогда имеем

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant \left[\frac{\alpha(t)}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right] V,$$

откуда находим, что

$$V \leqslant V_0 \exp \int_T^t \left[\frac{\alpha(t)}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right] \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant V_0 \exp\left\{-\frac{(t-T)}{a_2} + \frac{1}{a_1}\left[\frac{t-T}{a+\delta} + 1\right] \alpha_0 \delta\right\}.$$

Из этой оценки вытекает, что при достаточно малом δ функция V будет стремиться к нулю при $t \to +\infty$, откуда следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} [y^{(n-i)}]^2 \leqslant b_1 \sum_{i=1}^{n} [y_0^{(n-i)}]^2 \mathrm{e}^{-b_2 (t-T)}.$$

Из этого неравенства немедленно вытекает справедливость теоремы 15.7, так как асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (15.39) означает асимптотическую устойчивость программного движения $x_p(t)$, $Z_p(t)$. ■

Аналогичным образом можно рассмотреть случай непрямого регулирования.

Обращаясь к системе уравнений, сформулируем следующее утверждение. Если с помощью каких-либо преобразований система может быть сведена к одному уравнению рассмотренного типа, то вопрос о построении регулятора, стабилизирующего программное движение, решается теоремой 15.7. В связи с этим всякое условие на матрицу A и векторы B, при котором такое сведение к одному уравнению возможно, рассматривается как условие построения стабилизирующего регулятора.

5. Рассмотрим тот случай, когда выходные сигналы измерителей обладают определенным запаздыванием. Пусть система (15.6) имеет постоянные коэффициенты. Будем искать стабилизирующее управление в виде

$$U = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i (t - \tau). \tag{15.41}$$

Возникает вопрос: при какой матрице A и при каком векторе B возможно подобрать коэффициенты усиления $c_1, \ldots, c_n$ прямого регулятора (15.41) так, чтобы программное движение было асимптотически устойчивым?

Теорема 15.8. *Если выполнены условия теоремы* 15.1, *то при любом достаточно малом запаздывании* $\tau > 0$ *существуют такие коэффициенты усиления* $c_1, \ldots, c_n$, *при которых программное движение будет асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Положим в системе (15.9), что

$$U = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \bar{y}_i (t - \tau). \tag{15.42}$$

Получившуюся в результате этого систему будем обозначать номером (15.43). Система (15.43) является линейной системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Будем искать ее решение в виде

$$\bar{y}_s = k_s e^{\lambda t}, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{15.44}$$

где $k_1, \ldots, k_n$ и λ — искомые постоянные.

Подставляя выражение (15.44) в систему (15.43) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получаем для искомых величин систему алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \lambda k_1 &= -p_n k_n + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i k_i e^{-\lambda\tau}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda k_s &= k_{s-1} - p_{n-s+1} k_n, \quad s = 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{15.45}$$

Система (15.45) является линейной однородной относительно $k_1, \ldots, k_n$. Для того чтобы существовало ненулевое решение этой системы, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель $\Delta(\lambda, \tau)$ был равен нулю. Производя преобразования, аналогичные преобразованиям, сделанным выше, найдем равенство

$$\Delta(\lambda, \tau) = (-1)^n \left[P_n(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e^{-\lambda\tau} P_{n-k}(\lambda) \right]. \qquad (15.46)$$

Каждому корню уравнения

$$\Delta(\lambda, \tau) = 0 \qquad (15.47)$$

отвечает решение системы (15.43), представимое в форме (15.44). Пусть $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, ... — корни уравнения (15.47). Нулевое решение системы (15.43), а следовательно, и программное движение системы (исходной) будет асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда все корни управления (15.47) имеют отрицательную вещественную часть. Таким образом, для доказательства теоремы следует установить, что при достаточно малом $\tau > 0$ числа γ_1, .., γ_n всегда можно выбрать так, что $\mathrm{Re}\mu_j(\tau) < 0$. Обозначим через $\mu_1^{(0)}$, ..., $\mu_n^{(0)}$ корни уравнения (15.47) при $\tau = 0$. Как вытекает из теоремы 15.1, величины γ_1, ..., γ_n можно выбрать таким образом, чтобы эти корни принимали наперед заданные значения. Будем считать, что γ_1, ..., γ_n выбраны так, что

$$\mu_i^{(0)} < 0, \quad i = 1, \ldots, n \text{ и } \mu_i^{(0)} \neq \mu_j^{(0)}, \quad i \neq j.$$

Пусть $\alpha > 0$, причем $\mu_j^{(0)} < -\alpha$, $j = 1, \ldots, n$. Покажем, что существует число $\tau_1 > 0$ такое, что при любом $\tau > 0$ $(\tau \leqslant \tau_1)$ все корни уравнения (15.47) удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\,\mu_j(\tau) < -\alpha$.

Из вида функции (15.46) вытекает, что все корни уравнения (15.47), обладающие свойством $\mathrm{Re}\mu_j(\tau) \geqslant -\alpha$, обязательно располагаются в некотором прямоугольнике

$$-\alpha \leqslant \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant \beta, \quad -\omega \leqslant \mathrm{Im}(\lambda) \leqslant \omega,$$

где $\beta > 0$ и $\omega > 0$. Если при любом достаточно малом $\tau_1 > 0$ будут существовать корни уравнения (15.47), попадающие в этот прямоугольник, то из непрерывности функции $\Delta(\lambda, \tau)$ по обоим аргументам и замкнутости множества корней будет следовать, что при $\tau = 0$ уравнение (15.47) также имеет корни, расположенные в этом прямоугольнике. Это противоречит принятому предположению $\mu_j^{(0)} < -\alpha$, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно, существование числа τ_1 установлено. Таким образом, при выбранных величинах $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ при всех запаздываниях $\tau \leqslant \tau_1$ нулевое решение системы (15.43), а следовательно, и программное движение исходной системы будут асимптотически устойчивыми. ∎

Заметим, что оценка для величины τ_1 через коэффициенты исходной системы и выбранные коэффициенты усиления практически очень важна, так как запаздывание выходных сигналов измерителей, вообще говоря, не может быть сколь угодно малым. В связи с этим возникает задача выбора таких коэффициентов усиления, для которых соблюдался бы заданный запас устойчивости и при этом число τ_1 было максимально возможным или $\tau_1 \geqslant \tau_0$, где τ_0 — имеющееся в действительности запаздывание выходных сигналов измерителей.

Дадим способ аналитической оценки величины τ_1. Следует иметь в виду, что уравнение (15.47) имеет бесконечное число корней. Число τ_1 можно выбрать к тому же и так, чтобы выполнялись неравенства $\mathrm{Re}\mu_j < -\gamma$, $j = n+1, n+2, \ldots$, при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, где $\gamma > 0$ — произвольная постоянная. Иначе говоря, все корни начиная с номера $n+1$ при достаточно малом запаздывании располагаются сколь угодно далеко от мнимой оси. Действительно, возьмем прямоугольник

$$\left.\begin{aligned} -\gamma \leqslant \mathrm{Re}(\lambda) \leqslant -\alpha, \\ -\omega \leqslant \mathrm{Im}(\lambda) \leqslant \omega, \end{aligned}\right\}; \quad -\gamma < \overset{(0)}{\mu_j}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Легко видеть, что все корни уравнения (15.47), обладающие свойством $\mathrm{Re}\mu_j \geqslant -\gamma$, обязаны расположиться в этом прямоугольнике при некотором выбранном $\omega > 0$. Если окажется, что при выбранном γ нельзя найти τ_1 такое, чтобы все корни начиная с $n+1$ лежали левее прямой $\mathrm{Re}(\lambda) = -\gamma$, то вследствие непрерывности $\Delta(\lambda, \tau)$ уравнение (15.47) при $\tau = 0$ будет иметь корней больше чем n, что невозможно.

Это свойство корней уравнения (15.47) позволяет дать практически приемлемую оценку числа τ_1, рассматривая лишь поведение корней $\mu_j(\tau)$, $j = 1, \ldots, n$. Продифференцируем уравнения (15.47) по τ:

$$\frac{d\lambda}{d\tau}\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Delta}{\partial\tau} = 0;$$

отсюда

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{\partial\Delta/\partial\tau}{\partial\Delta/\partial\lambda}. \tag{15.48}$$

Выберем τ_1 так, чтобы любое из решений (15.48) с начальным условием $\lambda = \mu_j^{(0)}$ при $\tau = 0$ обладало свойством $\lambda < -\alpha$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Положим $\mu = \lambda - \mu_j^{(0)}$, тогда уравнение (15.48) примет вид

$$d\mu/d\tau = \varphi(\mu, \tau). \tag{15.49}$$

Правая часть уравнения (15.49) является аналитической однозначной функцией в окрестности ($\mu = 0$, $\tau = 0$).

Пусть уравнение

$$\frac{d\mu}{d\tau} = \frac{m}{(1-\mu/r)(1-\tau/\rho)} \tag{15.50}$$

является мажорантным для уравнения (15.49). Найдем решение уравнения (15.50) с начальным условием $\mu = 0$ при $\tau = 0$:

$$\mu = r\left(1 - \sqrt{1 + a\ln(1 - \tau/\rho)}\right), \qquad (15.51)$$

здесь $a = m\rho/r$. Правая часть (15.51) разлагается в сходящийся ряд в окрестности точки $\tau = 0$. Этот ряд будет мажорантным для ряда, в который разлагается правая часть уравнения (15.49). Найдем такое число τ_1, чтобы $\mu \leqslant h$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, $h < r$. Из (15.51) находим равенство

$$r_1 = \rho\left(1 - e^{-\frac{2r}{m\rho} + \frac{2r\,(1-h/r)^2}{m\rho}}\right).$$

Положим $h = \min(\alpha - \mu_j^{(0)}) < r$, тогда при $0 < \tau < \tau_1$ решение уравнения (15.49) не будет превосходить числа h, следовательно, все корни $\mu_j(\tau)$, $j = 1, \ldots, n$, уравнения (15.47) будут удовлетворять условию $\mu_j(\tau) \leqslant -\alpha$. Таким образом, число τ_1 можно рассматривать как искомую величину. Величины m, ρ, r, входящие в выражение τ_1, определяются через числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и коэффициенты исходной системы.

Разумеется, полученная оценка является довольно грубой, поэтому при практических расчетах следует численно интегрировать уравнение (15.49) по τ до момента выхода решения за допустимую зону $h = \min(\alpha - \mu_j^{(0)})$. При этом если τ_1 есть момент такого выхода, то его можно максимизировать путем выбора коэффициентов усиления $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ по какому-либо методу направленного поиска.

Замечания. 1. Различные измерители могут иметь различные запаздывания, поэтому управляющее воздействие U может быть, вообще говоря, линейной комбинацией сигналов-измерителей с различными запаздываниями. Иначе говоря, пусть

$$U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} y_i (t - \tau_j), \quad \tau_j \geqslant 0. \qquad (15.52)$$

Требуется выбрать коэффициенты усиления c_{ij} так, чтобы система (15.49) при условии (15.52) имела асимптотически устойчивое нулевое решение.

Оказывается, что если выполнены условия теоремы 15.1, то для любых достаточно малых $\tau_1, \ldots, \tau_s$ можно указать коэффициенты усиления c_{ij}, при которых программное движение исходной системы будет асимптотически устойчивым. В общем случае, когда запаздывания являются распределенными, управление U будет иметь вид

$$U = \sum_{i=1}^{n} \int_{-h}^{0} y_i (t + \theta)\, dg_i(\theta).$$

Можно показать, что при выполнении условий теоремы 15.1 и в этом случае при достаточно малом h функции $g_i(\theta)$ можно выбрать так, чтобы программное движение исходной системы было асимптотически устойчивым. Заметим, однако, что функции $g_i(\theta)$ могут быть выбраны направленно, так как, например, если точки их скачков задаются заранее, то нужно определить лишь величины скачков в этих точках.

Приведенные здесь утверждения устанавливаются аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 15.8.

2. Если имеется несколько, а именно r, управляющих органов, то в системе (15.6) B является матрицей, состоящей из n строк и r столбцов, а управление является r-мерным вектором $U = (u_1, \ldots, u_r)$.

Предположим, что векторы $B_1, \ldots, B_r$ — столбцы матрицы B — линейно независимы и среди векторов $A^k B_i$ имеется n линейно независимых. Тогда программное движение в исходной системе можно стабилизировать путем выбора коэффициентов усиления прямого регулятора

$$U_k = \sum_{i,j} c_{kij} y_i (t - \tau_j), \quad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, s, \quad k = 1, \ldots, r, \tag{15.53}$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_s$ — достаточно малые запаздывания выходных сигналов измерителей.

Доказательство этого утверждения осуществляется путем изучения поведения корней характеристического уравнения системы (15.6) при управлении (15.53). Такое изучение проводится аналогично тому, как это было сделано в теореме 15.8. При наличии нескольких запаздываний, разумеется, можно обойтись сигналом одного вида (с одним запаздыванием), если он является полным в том смысле, что в этом сигнале содержатся именно те фазовые координаты, выбором коэффициентов усиления при которых можно добиться стабилизации, иначе говоря, того, чтобы корни характеристического уравнения располагались в левой полуплоскости комплексного переменного λ.

Перейдем теперь к рассмотрению проблем стабилизации программного движения в случае наличия запаздываний в сигналах измерителей с помощью непрямого регулирования. Предположим, что в системе (15.27) управление U имеет вид

$$U = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \bar{y}_i (t - \tau) + R\bar{U} (t - \tau).$$

Полученную таким образом систему будем обозначать номером (15.54). Система (15.54) является линейной системой с запаздывающим аргументом. Обозначим через $\Delta_1(\lambda, \tau)$ ее характеристический определитель. Из предыдущего пункта вытекает, что

$$\Delta_1 (\lambda, \tau) = (-1)^n \left[\left(re^{-\lambda\tau} - \lambda \right) P_n (\lambda) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e^{-\lambda\tau} P_{n-k} (\lambda) \right]; \tag{15.55}$$

положим

$$\Delta_1(\lambda, \tau) = 0. \tag{15.56}$$

Нулевое решение системы (15.54) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все корни уравнения (15.56) имеют отрицательные вещественные части.

Теорема 15.9. *Если выполнены условия теоремы* 15.4, *то при достаточно малом* τ *коэффициенты усиления* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, R *можно выбрать так, чтобы программное движение исходной системы было асимптотически устойчивым по Ляпунову.*

Доказательство. Выберем коэффициенты $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, R так, чтобы уравнение (15.56) при $\tau = 0$ имело корни с отрицательными вещественными частями. Тогда существует $\tau_1 > 0$ такое, что при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$ выполняется неравенство $\operatorname{Re} \mu_j(\tau) < -\alpha < 0$, $j = 1, 2, \ldots$, где $\mu_j(\tau)$ — корни уравнения (15.56), а α выбрано так, что $\operatorname{Re} \mu_j(0) < -\alpha < 0$, $j = 1, \ldots, n$. Это утверждение вытекает из предыдущих рассуждений, так как уравнение (15.56) может быть представлено в виде (15.55). Таким образом, программное движение может быть в рассматриваемом случае стабилизировано с помощью непрямого регулятора вида

$$\dot{Z} = \dot{Z}_p(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k [x_k(t-\tau) - x_{kp}(t-\tau)] +$$
$$+ R[Z(t-\tau) - Z_p(t-\tau)].$$

Замечание. Если имеется несколько регулирующих органов, а именно r, и величины $x_1, \ldots, x_n$, $Z_1, \ldots, Z_r$ определяются по сигналам измерителей с различными запаздываниями $\tau_1, \ldots, \tau_s$, то всегда при достаточно малых запаздываниях коэффициенты усиления в линейном законе управления можно выбрать так, что программное движение будет асимптотически устойчивым при управлении

$$\dot{Z}_j = \dot{Z}_{jp}(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} c_{jik} [x_i(t-\tau_k) - x_{ip}(t-\tau_k)] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{s} R_{jik} [Z_i(t-\tau_k) - Z_{ip}(t-\tau_k)], \quad j = 1, \ldots, r.$$

При этом требуется, чтобы векторы $B_1, \ldots, B_r$ были линейно независимы, а среди векторов $A^k B_i$, $i = 1, \ldots, r$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, было n линейно независимых. Это утверждение доказывается путем рассмотрения характеристического уравнения соответствующей линейной системы.

§ 16. ДИСКРЕТНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ

Существование коэффициентов усиления. — Влияние неодновременности измерений. — Влияние запаздываний. — Релейное управление. — Непрямой релейный регулятор. — Влияние запаздываний

1. Рассмотрим вопрос о стабилизации программного движения с помощью кусочно-постоянного управления, являющегося функцией фазовых координат объекта, вычисляемых в некоторые дискретные моменты времени. Пусть в системе (15.6)

$$U = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(kh) \tag{16.1}$$

при $t \in [kh, (k+1)h)$. Тогда эта система примет вид

$$dY/dt = AY + BC^* Y(kh); \; t \in [kh, (k+1)h), \tag{16.2}$$

где $h > 0$ — некоторая постоянная, $k = 0, 1, \ldots$, $Y(0)$ — начальные данные системы (16.2), характеризующие начальное отклонение от программного движения. Возникает вопрос: при каких коэффициентах усиления $c_1, \ldots, c_n$ и при каком шаге дискретности h программное движение исходной системы является асимптотически устойчивым?

Теорема 16.1. *Если выполнены условия теоремы* 15.1, *то при любом достаточно малом h можно указать такие коэффициенты усиления $c_1, \ldots, c_n$, что нулевое решение системы* (16.2), *а вместе с ним* программное движение исходной системы (15.1) будут асимптотически устойчивыми по Ляпунову.*

Доказательство. Выберем числа $c_1, \ldots, c_n$ так, чтобы матрица $A + BC^*$ имела собственные числа с отрицательными вещественными частями. Построим квадратичную форму V как решение уравнения с частными производными

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} \sum_{s=1}^{n} (a_{is} + b_i c_s) y_s = -\sum_{i=1}^{n} y_i^2 .$$

Функция V будет положительно определенной формой. Найдем ее полную производную в силу системы (16.2):

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} b_i \sum_{s=1}^{n} c_s (y_s(kh) - y_s(t)). \qquad (16.3)$$

Функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$, входящие в (16.3), являются решением системы (16.2) с начальными условиями $y_i(0) = y_i^{(0)}$. Следовательно, на промежутке $t \in [0, h]$ вектор $Y(t)$ таков, что

$$dY/dt = AY + BC^*Y^0,$$

а на промежутке $t \in [h, 2h]$

$$dV/dt = AY + BC^*Y(h), \quad Y(t)|_{t=h} = Y(h).$$

Найдем оценку нормы вектора $Z(t) = Y(t) - Y(kh)$, $t \in [kh, (k+1)h]$. Из системы (16.2) имеем

$$dZ/dt = AZ + (A + BC^*)Y(kh); \; Z(kh) = 0. \qquad (16.4)$$

Умножая обе части (16.4) скалярно на $Z^*(t)$, получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \right) = \frac{Z^*(A^* + A)Z}{2} + Z^*(A + BC^*)Y(kh). \qquad (16.5)$$

Полагая $\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \xi^2$ и оценивая правую часть (16.5), находим неравенство

$$d\xi/dt \leqslant a(\xi) + b\|Y(kh)\|, \qquad (16.6)$$

откуда

$$\xi(t) \leqslant \left(e^{a(t-kh)} - 1\right) \frac{b}{a} \|Y(kh)\|,$$

или

$$\xi(t) \leqslant ch\|Y(kh)\|. \qquad (16.7)$$

Здесь $c > 0$ не зависит от h.

Неравенство (16.7) вытекает из (16.6) для достаточно малых h. Для таких h имеем неравенство

$$\| Y(t) - Y(kh) \| \leqslant ch \| Y(kh) \|, \quad t \in [kh, (k+1)h].$$

Положим $\rho = \sqrt{V}$, тогда из (16.3) будем иметь неравенство

$$d\rho/dt \leqslant -\lambda\rho + \mu h \| Y(kh) \|, \tag{16.8}$$

где λ и μ — положительные постоянные, не зависящие от h.

Неравенство (16.8) получается из (16.3) следующщм образом. Так как $V = \rho^2$, то справедливо равенство $\frac{dV}{dt} = 2\rho \frac{d\rho}{dt}$. Обозначим через λ половину минимального значения функции $\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{V}$, тогда $\frac{-\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{2\rho} \leqslant -\lambda\rho$. Функции $\partial V/\partial y_i$ являются линейными формами относительно $y_1, \ldots, y_n$, поэтому

$$|\partial V/\partial y_i| \leqslant c_i\rho,$$

где $c_1 > 0, \ldots, c_n > 0$ — постоянные. Учитывая эти соотношения и оценку на норму $\|Y(t) - Y(kh)\|$, легко получить неравенство (16.8).

Проинтегрируем неравенство (16.8), считая, что величина $\rho(kh)$ задана:

$$\rho(t) \leqslant e^{-\lambda(t-kh)} \left[\rho(kh) - \frac{\mu h}{\lambda} \| Y(kh) \| \right] + \frac{\mu h}{\lambda} \| Y(kh) \|. \tag{16.9}$$

Из неравенства (16.9) находим соотношение

$$\rho((k+1)h) \leqslant e^{-\lambda h} \rho(kh) + (1 - e^{-\lambda h}) \frac{\mu h}{\lambda} \| Y(kh) \|. \tag{16.10}$$

Ясно, что $\|Y(kh)\| \leqslant \gamma\rho(kh)$, где $\gamma > 0$ не зависит от h. Из неравенства (16.10) находим

$$\rho((k+1)h) \leqslant \rho(kh) \left[e^{-\lambda h} + \frac{\gamma\mu h}{\lambda} (1 - e^{-\lambda h}) \right]. \tag{16.11}$$

Величина $e^{-\lambda h} + \frac{\gamma\mu h}{\lambda} (1 - e^{-\lambda h})$ при достаточно малом h может быть оценена следующим образом:

$$e^{-\lambda h} + \frac{\gamma\mu h}{\lambda} (1 - e^{-\lambda h}) \leqslant 1 - \lambda_1 h,$$

где $\lambda_1 > 0$ не зависит от h. Итак, будем иметь неравенство

$$\rho((k+1)h) \leqslant (1 - \lambda_1 h)^{k+1} \rho(0). \tag{16.12}$$

Из неравенства (16.12) следует, что $Y(kh)\to 0$ при $k\to\infty$. Следовательно, $Y(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, ибо

$$\|Y(t)\|\leqslant\|Y(kh)\|+\|Y(t)-Y(kh)\|\leqslant\|Y(kh)\|+$$
$$+ch\|Y(kh)\|=(1+ch)\|Y(kh)\|.$$

Учет нелинейных членов влияет лишь на величину константы c_y, так как они удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме (15.1). Таким образом, оказывается, что при рассматриваемом управлении будет устойчивым также и программное движение исходной системы. ■

2. Рассмотрим теперь случай, когда управление U является линейной комбинацией фазовых координат объекта, вычисленных в разные моменты времени. Пусть оно имеет вид

$$U=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{l}c_{ij}y_i((k-j)h). \tag{16.13}$$

Оказывается, что при выполнении условий теоремы 16.1 всегда можно выбрать шаг h столь малым, что нулевое решение системы уравнений

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=AY+\sum_{j=0}^{l}BC_j^*Y((k-j)h) \tag{16.14}$$

будет асимптотически устойчивым. Вместе с тем программное движение исходной системы при управлении (16.13) будет асимптотически устойчивым лишь в том случае, если коэффициенты усиления c_{ij} выбраны так, что все собственные значения матрицы $A+\sum_{j=0}^{l}BC_j^*$ имеют отрицательные вещественные части.

Для доказательства этого утверждения найдем прежде всего оценки для векторных функций:

$$Z_j(t)=Y(t)-Y((k-j)h),\quad t\in[kh,\ (k+1)h);\ j=0,1,\ldots,l,\ k\geqslant 2l.$$

Функция $Z_0(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}Z_0}{\mathrm{d}t}=AZ_0(t)+(A+BC_0^*)Y(kh)+\sum_{j=1}^{l}BC_j^*Y((k-j)h),\ Z_0(kh)=0. \tag{16.15}$$

Для решения этого уравнения, так же как выше для решения уравнения (16.4), может быть получена оценка

$$\|Z_0(t)\|\leqslant c_0h\sum_{j=0}^{l}\rho((k-j)h). \tag{16.16}$$

Функция $Z_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dZ_1}{dt} = AZ_1 + BC_0^*Y(kh) + (A + BC_1^*)\,Y((k-1)h) + \sum_{j=2}^{l} BC_j^* Y((k-j)h), \tag{16.17}$$

$$Z_1(kh) = Y(kh) - Y((k-1)h).$$

Полагая в (16.16) $t = (k+1)h$, найдем неравенство

$$\| Y((k+1)h) - Y(kh) \| \leqslant c_0 h \sum_{j=0}^{l} \rho((k-j)h). \tag{16.18}$$

Если в неравенстве (16.18) заменить k на $k-1$, то для начального условия функции Z_1 будем иметь оценку

$$\| Z_1(kh) \| \leqslant hc_0 \sum_{j=0}^{l} \rho((k-1-j)h). \tag{16.19}$$

Учитывая неравенство (16.19), как и выше, найдем, что функция $\|Z_1(t)\|$ удовлетворяет неравенству

$$\| Z_1(t) \| \leqslant c_1 h \sum_{j=0}^{l+1} \rho((k-j)h). \tag{16.20}$$

Рассуждая аналогично, найдем неравенства

$$\| Z_j(t) \| \leqslant c_j h \sum_{s=0}^{l+j} \rho((k-s)h), \quad j = 1, \ldots, l, \quad t \in [kh, (k+1)h]. \tag{16.21}$$

Числа c_0, $c_1, \ldots$ являются положительными постоянными, не зависящими от h. Полагая $\sum_{j=0}^{l} C_j^* = C^*$, найдем, что dV/dt в силу системы (16.14) представляется в виде

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{j=0}^{l} \frac{\partial V}{\partial y_i} b_i \sum_{j=0}^{l} \sum_{s=1}^{n} c_{sj} [y_s((k-j)h) - y_s(t)]. \tag{16.22}$$

Применяя оценки для функции V и $\partial V/\partial y_i$, а также используя оценки (16.21), из уравнения (16.22) получаем неравенство

$$\frac{d\rho}{dt} \leqslant -\lambda\rho + \mu h \sum_{j=0}^{2l} \rho((k-j)h). \tag{16.23}$$

Интегрируя неравенство (16.23) с начальным условием $\rho = \rho(kh)$ при $t = kh$ на промежутке $[kh, (k+1)h]$, находим

$$\rho(t) \leqslant e^{-\lambda(t-kh)} [\rho(kh) - \xi] + \xi, \tag{16.24}$$

где $\xi = \frac{h\mu}{\lambda} \sum_{j=0}^{2l} \rho((k-j)h)$. При достаточно малых $h > 0$ неравенство (16.24) для $t = (k+1)h$ примет вид

$$\rho((k+1)h) \leqslant (1 - \lambda_2 h)\rho(kh) + ch^2 \sum_{j=1}^{2l} \rho((k-j)h). \tag{16.25}$$

Предположим, что последовательность $\rho(kh)$ ограничена, т. е. $\rho(kh) \leqslant a$. Тогда из неравенства (16.25) имеем

$$\rho((k+1)h) \leqslant (1 - \lambda_2 h)\rho(kh) + ch^2 a 2l. \tag{16.26}$$

Из неравенства (16.26) находим оценку:

$$\rho((k+2l)h) \leqslant (1 - \lambda_2 h)^k a + a \sum_{j=0}^{k-1} ch^2 (2l)(1 - \lambda_2 h)^j \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \lambda_2 h)^k a + a\frac{h2lc}{\lambda_2}. \tag{16.27}$$

Число $h > 0$ можно выбрать столь малым, чтобы $(1 - \lambda_2 h)^k + \frac{h2lc}{\lambda_2} \leqslant \leqslant \beta < 1$ при $k \geqslant k_0$. Итак, при $k > k_0 + 2l$ справедливо неравенство $\rho(kh) \leqslant \beta a$. Аналогично можно показать, что $\rho(kh) \leqslant \beta^2 a$ при $k \geqslant 2k_0 + 4l$. Отсюда вытекает, что $\rho(kh) \to 0$ при $k \to +\infty$.

Остается показать, что последовательность $\rho(kh)$ ограничена. Возьмем сферу единичного радиуса $\|Y\| = 1$ и число $h_0 > 0$. Построим интегральные кривые системы (16.14), начинающиеся на данной сфере для всех $t \leqslant 2lh_0$. Эти интегральные кривые заполняют некоторое ограниченное множество пространства $(y_1, \ldots, y_n)$ в силу имеющейся интегральной непрерывности.

Выберем число $\bar{\rho}$ так, чтобы упомянутое выше множество содержалось внутри эллипсоида $\rho < \bar{\rho}$. Выберем далее число $h_1 < h_0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$-\lambda + (2l + 1)\mu h < 0 \text{ при } h \leqslant h_1. \tag{16.28}$$

При выполнении неравенства (16.28) правая часть неравенства (16.23) будет отрицательной при $\rho = \bar{\rho}$ на любой интегральной кривой, располагающейся в области $\rho < \bar{\rho}$.

Возьмем начальное условие $\|Y_0\| = 1$. Интегральная кривая $Y(t)$ при $t \in [0, 2hl]$ будет удовлетворять условию $\|Y(t)\| < \bar{\rho}$. Пусть существует момент $\bar{t}$ такой, что $\|Y(\bar{t})\| = \bar{\rho}$ и $\|Y(t)\| < \bar{\rho}$ при $t < \bar{t}$. Для этого момента $\bar{t}$ будем иметь неравенство $d\rho/dt < 0$. Следовательно, функция $\rho(t)$ вдоль рассматриваемой кривой возрастает при убывании t от $\bar{t}$, т. е. должно иметь место соотношение $\rho(t) > \bar{\rho}$ при $t < \bar{t}$, если $t - \bar{t}$ достаточно мало. Это противоречит условию $\rho(t) < \bar{\rho}$. Следовательно, рассматриваемая интегральная кривая остается внутри эллипсоида $\rho < \bar{\rho}$ во все время движения. Из (16.21) вытекает тогда, что $Y(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Этим сделанные выше утверждения доказаны полностью.

Замечание. Разобранный выше случай дискретного прямого регулирования, вообще говоря, не сводится к случаю, рассматриваемому в теореме 16.1, ибо он охватывает, в частности, регуляторы, в которых используются сигналы-измерители, последовательно выдающие координаты объекта регулирования. Например, выдается сигнал $y_1(h)$, затем $y_2(2h)$ и т. д., наконец $y_n(nh)$.

3. Выходные сигналы различных измерителей могут выдаваться с шагом дискретности. При этом некоторые из них могут выдавать сигналы с различными запаздываниями. Возникает проблема выбора таких коэффициентов усиления этих сигналов, при которых программное движение исходной системы будет асимптотически устойчивым. Итак, пусть $h_1, \ldots, h_l$ — различные интервалы дискретности выходных сигналов измерителей и $\tau_1, \ldots, \tau_s$ — запаздывания, имеющие место в этих измерителях. Пусть $h_1 \leqslant, \ldots, \leqslant h_l$. Положим, управление U имеет вид

$$U = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{s} c^*_{ijk}\, y\left((k_i - j)\, h_i - \tau_k\right) \text{ при } t \in [k_1 h_1, (k_1 + 1)\, h_1].$$

Числа $k_2, \ldots, k_l$ при этом таковы, что аргументы всех рассматриваемых функций не превышают величины $k_1 h_1$.

Если выполнены условия теоремы 16.1, то коэффициенты усиления, входящие в векторы c^*_{ijk}, можно выбрать так, чтобы при любых достаточно малых $h_1, \ldots, h_l$ и $\tau_1, \ldots, \tau_s$ программное движение в исходной системе было асимптотически устойчивым. Это утверждение можно доказать следующим образом. Рассмотрим поведение функции V при выбранном управлении. Производная $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ будет содержать, как и ранее, функции вида $Y(t) - Y(t_1)$, где через t_1 обозначен какой-либо из аргументов, входящих в управление. Вместо этих функций оцениваем функции вида

$$Y(t) - Y((k - j)\, h_1), \quad j = 0, \ldots, m_1,$$

где m_1 выбрано так, чтобы любой из аргументов t_1 попал внутрь какого-нибудь промежутка $[(k - j - 1)h_1; (k - j)h_1]$. С помощью этих функций, применяя неравенство треугольника

$$\| Y(t) - Y(t_1) \| \leqslant \| Y(t) - Y((k - j)\, h_1) \| + \\ + \| Y(t_1) - Y((k - j)\, h_1) \|,$$

найдем оценку для $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$, с помощью которой, как и выше, докажем, что $Y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, если $h_1, \ldots, h_l$ и $\tau_1, \ldots, \tau_s$ достаточно малы.

Дискретный сигнал, поступающий на регулятор, может каким-либо способом преобразоваться в непрерывный. Возникает вопрос: как выбирать параметры преобразователей дискретного сигнала в непрерывный, чтобы стабилизировать программное движение? Рассмотрим вновь систему

$$dY/dt = AY + BU. \tag{16.29}$$

Предположим, что управление U является выходным сигналом преобразователя

$$\begin{aligned} hU &= C^* (Y(kh) - Y((k-1)h)), \quad t \in [kh, (k+1)h), \\ U(t) &= C^* Y[(k-1)h] \text{ при } t = (k-1)h. \end{aligned} \tag{16.30}$$

Система (16.29), (16.30) будет отвечать при этом поведению переходных процессов по отношению к заданному программному режиму. Требуется выбрать число $h > 0$ и числа $c_1, \ldots, c_n$ так, чтобы нулевое решение системы (16.29), (16.30) было асимптотически устойчивым, тогда таким же будет программное движение исходной системы. Оказывается, что если выполнены условия теоремы 16.1, то числа $h > 0, c_1, \ldots, c_n$ всегда можно выбрать так, чтобы упомянутые выше требования были выполнены. Доказательство этого утверждения может быть получено способом применения оценок, использованных выше.

Замечание. В случае, когда имеется несколько интервалов дискретности и выходные сигналы-измерители определяются с запаздываниями, также можно установить возможность стабилизации программного движения с помощью применения преобразователя. При этом преобразователь дискретных величин в непрерывные может быть и более сложным по сравнению с рассмотренным выше.

Обратимся, наконец, к рассмотрению задачи стабилизации программного движения с помощью непрямого дискретного регулятора. Пусть дана система

$$\dot{Y} = AY + BZ. \tag{16.31}$$

Требуется построить закон регулирования так, чтобы стабилизировать программное движение с помощью непрямого регулятора. Предположим, что сигналы, необходимые для стабилизации, вырабатываются с шагом дискретности h и запаздыванием τ. Тогда положим, что управляющее воздействие удовлетворяет системе

$$\dot{Z} = \sum_{j=0}^{l} C_j^* Y((k-j)h - \tau) + \sum_{j=0}^{l} r_j Z((k-j)h - \tau). \tag{16.32}$$

Здесь $t \in [kh, (k+1)h]$, $Y = Y_0$, $Z = Z_0$ при $t = 0$. Эти начальные данные совместно с системой (16.31), (16.32) определяют единственную интегральную кривую, поведение которой можно изучить с помощью развитых выше методов. Оказывается, что имеет место следующая теорема.

Теорема 16.2. *Если выполнены условия теоремы* 15.4, *то коэффициенты усиления в* (16.32) *можно выбрать так, что при достаточ-*

но малых h и τ программное движение исходной системы будет асимптотически устойчивым.

Доказательство этой теоремы производится в точном соответствии с приведенными выше рассуждениями.

4. Пусть задана некоторая система дифференциальных уравнений

$$dy_s/dt = f_s(y_1, \ldots, y_n),\ s = 1, \ldots, n. \tag{16.33}$$

Определение 16.1. *Множество M* точек $(y_1, \ldots, y_n)$ фазового пространства системы (16.33) называется *инвариантным*, если при $(y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \in M$ будет $(y_1, \ldots, y_n) \in M$ для $t \in (-\infty, +\infty)$, где $y_1, \ldots, y_n$ — решение системы (16.33), проходящее через точку $(y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ в момент $t = 0$.

Инвариантное множество M состоит из целых траекторий системы (16.33). Если M есть ограниченное множество, то его естественно рассматривать как множество колебательных движений, описываемых системой (16.33). Далее для краткости записи будем пользоваться векторными обозначениями.

Определение 16.2. Будем говорить, что система (16.33) имеет *стабильные колебания*, если существует замкнутое, инвариантное, ограниченное множество M, для которого можно указать такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что любая интегральная кривая системы (16.33), начинающаяся при $t = 0$ в δ-окрестности, при неограниченном возрастании времени остается в ε-окрестности, т. е. если $Y^0 \in S(M, \delta)$, то $Y(t, Y^0) \in S(M, \varepsilon)$ при $t \geqslant 0$. Здесь через $S(M, \delta)$ обозначено множество таких точек Y, что $\rho(Y, M) < \delta$; $\rho(Y, M) = \inf\limits_{X \in M} \|Y - X\|$ — расстояние точки Y до множества M.

Понятие стабильных колебаний системы (16.33) тесно связано с понятием автоколебаний.

Определение 16.3. Замкнутое ограниченное, инвариантное множество M называется ***автоколебанием системы*** (16.33), если M асимптотически устойчиво по Ляпунову, иначе говоря, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $Y(t, Y^{(0)}) \in S(M, \varepsilon)$ при $t \geqslant 0$ и $\rho(Y(t, Y^{(0)}), M) \to 0$ при $t \to +\infty$, если $Y^{(0)} \in S(M, \delta)$.

Из данного определения вытекает, что автоколебание M является одновременно стабильным колебанием системы (16.33), при этом для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что числа ε и δ будут удовлетворять определению 16.2. Если же M является стабильным колебанием, то отсюда не следует, что M — автоколебание системы (16.33). Из определения 16.3 вытекает, что автоколебанием может быть точка покоя, периодическое, почти периодическое или рекуррентное движение, а также любое движение, устойчивое по Лагранжу в обе стороны. Известно, что наиболее общим стационарным движением механических систем является рекуррентное движение. Оказывается, что если система (16.33) имеет автоколебание или стабильные колебания, то она имеет обязательно стационарные колебания, которые будут стабильными.

Выделим из множества M такое множество $M^{(0)}$, которое является инвариантным, замкнутым и ограниченным в силу ограниченности M и не содержит никакого собственного подмножества с такими же свойствами. Тогда по теореме Биркгофа оказывается, что все движения, входящие в $M^{(0)}$, будут рекуррентными. Разумеется, они могут вырождаться, в частности в точку покоя, периодическое или почти периодическое движение. Если множество M — автоколебание или стабильное колебание системы (16.33), то $M^{(0)}$ — стационарное стабильное колебание системы (16.33). Разумеется, приведенная выше ссылка на теорему Биркгофа относится к тому случаю, когда система (16.33) определяет динамическую систему в фазовом пространстве.

Определение 16.4. Будем говорить, что *интегральная кривая* $Y(t, Y^{(0)})$ *стремится к стабильному колебанию*, если существует такое число $T > 0$, что $Y(t, Y^{(0)}) \in S(M, \delta)$ при $t = T$; следовательно, $Y(t, Y^{(0)}) \in S(M, \varepsilon)$ при $t \geqslant T$, где ε и δ — числа из определения 16.2.

Обратимся теперь к проблеме стабилизации программного движения с помощью релейного управления. Эта стабилизация будет осуществляться в результате возникновения в сколь угодно малой окрестности программного движения стабильных колебаний, обладающих тем свойством, что любое движение, начинающееся в некоторой фиксированной окрестности программного движения, стремится к упомянутому стабильному колебанию, причем мера отклонения от него ε может быть выбрана сколь угодно малой.

Пусть система в отклонениях от программного движения имеет вид

$$\frac{dy_s}{dt} = f_s(y_1, \ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{r} b_{si}(y_1, \ldots, y_n)\, u_i, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{16.34}$$

Будем считать, что управления $u_1, \ldots, u_r$ принимают лишь два значения: $u_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, r$. Пусть система уравнений

$$dy_s/dt = f_s(y_1, \ldots, y_n), \; s = 1, \ldots, n, \tag{16.35}$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое решение и пусть функции f_s непрерывно дифференцируемы. Тогда можно указать функцию $V(y_1, \ldots, y_n)$, положительно определенную и непрерывно дифференцируемую, такую, что

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} f_s = W, \tag{16.36}$$

где W — отрицательно определенная функция. Введем в рассмотрение функции $\varphi_j(\sigma)$:

$$\begin{aligned} &\varphi_j(\sigma) = -1, \; \sigma > -l_j, \\ &\varphi_j(\sigma) = +1, \; \sigma < l_j, \; j = 1, \ldots, r, \end{aligned} \tag{16.37}$$

где $l_j > 0$ — некоторые постоянные. Положим далее, что

$$\sigma_j = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} b_{sj}, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{16.38}$$

Введем в рассмотрение также управление

$$u_j^{(0)} = \varphi_j(\sigma_j), \quad j = 1, \ldots, r. \tag{16.39}$$

Рассмотрим систему (16.34) при управлениях (16.39). Правые части такой системы будут многозначными функциями. Однако при надлежащем определении решений эта система будет задавать движение управляемого объекта. Напомним, что в области многозначности наряду с начальными данными следует указывать также ветвь многозначной функции, которая определяет движение, соответствующее этим начальным данным. При переходе движения через поверхность разрыва происходит естественная смена ветвей многозначной функции.

Теорема 16.3. *В системе* (16.34) *при управлении* (16.39) *при любом выборе чисел* $l_j > 0$, $j = 1, \ldots, r$; $l_j < l$, *возникает стабильное колебание, расположенное в сколь угодно малой окрестности точки* $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$, *если* l *достаточно мало. При этом каждая интегральная кривая системы* (16.34), *начинающаяся в некоторой фиксированной окрестности указанной точки, стремится к стабильному колебанию и, более того, мера отклонения* (см. определение 16.2) *от этого стабильного колебания может быть выбрана также сколь угодно малой.*

Доказательство. Выберем достаточно малые положительные числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > 0$ и построим соответствующие им числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ так, чтобы $\varepsilon_3 < \delta_2 < \varepsilon_2$; $\delta_3 < \varepsilon_3$; $\delta_1 < \varepsilon_1$ и, кроме того, числа δ_i были связаны с ε_i следующим образом. Введем числа

$$\lambda_i = \inf_{\|Y\| = \varepsilon_i} V,$$

тогда δ_i должно быть таким, чтобы $V < \lambda_i$ при $\|Y\| < \delta_i$, $i = 1, 2, 3$. Легко видеть, что числа ε_i, δ_i, удовлетворяющие всем перечисленным условиям, существуют. Выберем далее число $l > 0$ столь малым, чтобы при $l > l_j > 0$, $j = 1, \ldots, r$, выполнялись неравенства

$$W + \sum_{j=1}^{r} \sigma_j u_j^{(0)} < 0; \quad \delta_3 \leqslant \|Y\| \leqslant \varepsilon_1.$$

Тогда стабильные колебания M будут располагаться в области $\|Y\| \leqslant \varepsilon_3$. Любая интегральная кривая системы (16.34) при управлении (16.39), начинающаяся в области $\|Y\| \leqslant \delta_1$, будет стремиться к упомянутому стабильному колебанию и остается в области $\|Y\| \leqslant \varepsilon_1$. Более того, существует конечный момент T такой, что упомянутая интегральная кривая заходит в область $\|Y\| \leqslant \delta_3$ при

$t = T$ и, следовательно, остается при $t > T$ в области $\|Y\| \leqslant \varepsilon_3$. Действительно, предположим, что $\|Y^{(0)}\| \leqslant \delta_1$ и что существует такой момент $\bar{t}$, что $\|Y(\bar{t}, Y^{(0)})\| \geqslant \varepsilon_1$. Без ограничения общности можно считать, что при $t \in [0, \bar{t}]$ выполняется неравенство $\delta_3 \leqslant \leqslant \|Y(t, Y^{(0)})\| < \varepsilon_1$, тогда $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t < 0$ при $t \in [0, \bar{t}]$. Следовательно, выполняется неравенство $V(Y(t, Y^{(0)})) < V(Y^{(0)}) < \lambda_1$. Предположение $\|Y(\bar{t}, Y^{(0)})\| = \varepsilon_1$ означает, что $V(Y(t, Y^{(0)})) \geqslant \lambda_1$. Это противоречит предыдущему неравенству вследствие непрерывности функции V. Из этого вытекает, что $\|Y(t, Y^{(0)})\| \leqslant \varepsilon_1$ при $t \geqslant 0$. Так как $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t < < -\alpha$, где $\alpha > 0$ — постоянная, то вдоль исследуемой интегральной кривой справедливо неравенство

$$V(Y(t, Y^{(0)})) \leqslant V(Y^{(0)}) - \alpha t.$$

Два последних неравенства имеют место до тех пор, пока справедливо соотношение $\|Y(t, Y^{(0)})\| \geqslant \delta_3$. Следовательно, существует такой момент T, что $\|Y(T, Y^0)\| < \delta_3$. В противном случае функция $V(Y(t, Y^{(0)}))$ будет принимать отрицательные значения, что невозможно, ибо можно считать ε_1 выбранным так, что $V \geqslant 0$ при $\|Y\| \leqslant \varepsilon_1$. Точно так же, как и выше, устанавливается, что $\|Y(t, Y^{(0)})\| < \varepsilon_3$ при $t \geqslant T$.

Найдем множество $M_{Y^{(0)}}$ всех ω-предельных точек интегральной кривой $Y(t, Y^{(0)})$. Введем обозначения $M = \bigcup M_{Y^{(0)}}$, $\|Y^{(0)}\| < < \delta_1$. Ясно, что множество $M \subset \{Y : \|Y\| \leqslant \varepsilon_3\}$ будет замкнутым, инвариантным и ограниченным. Все интегральные кривые, начинающиеся в области $S(M, \delta)$, остаются в области $S(M, \varepsilon)$, следовательно, M является стабильным колебанием. При этом все интегральные кривые, начинающиеся в области $\|Y\| < \delta_1$, стремятся к этому стабильному колебанию. Заметим, что в качестве δ можно взять $\delta_2 - \varepsilon_3$, а в качестве ε можно взять $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$. ∎

Рассмотрим теперь случай, когда система линейного приближения для системы (16.34) имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} a_{si} y_i + \sum_{i=1}^{r} b_{si} u_i. \tag{16.40}$$

Величины a_{si} и b_{si} — вещественные постоянные. Введем в рассмотрение матрицу A и векторы $B_i : A = (a_{si})$, $B_i^* = (b_{1i}, \ldots, b_{ni})$.

Теорема 16.4. *Если среди векторов* $A^m B_i$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, r$, *имеется n линейно независимых, то существует такое релейное управление вида* (16.39), *при котором в системе* (16.40) *при любом выборе величин* $0 < l_j < l$ *возникают стабильные колебания, расположенные в сколь угодно малой окрестности точки* $y_1 = \ldots = = y_n = 0$, *если l достаточно мало. Любая интегральная кривая системы* (16.40) *при таком управлении, начинающаяся в некоторой фиксированной окрестности упомянутой точки, будет стремиться к указанному стабильному колебанию, мера отклонения от которого может быть сделана также сколь угодно малой.*

Доказательство. Положим в системе (16.40) $u_i = \overline{u_i} = \sum_{s=1}^{n} c_{is} y_s$. Тогда она может быть записана в форме

$$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}t = (A + BC)Y. \tag{16.41}$$

Вещественные постоянные элементы матрицы C можно выбрать так, чтобы нулевое решение системы (16.41) было асимптотически устойчивым (см. § 15). Будем считать, что матрица C выбрана таким образом. Тогда для любой отрицательно определенной квадратичной формы W можно подобрать положительно определенную квадратичную форму V такую, что

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} [(A + BC) Y]_s = W. \tag{16.42}$$

Введем функции

$$\sigma_j = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} b_{sj}, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{16.43}$$

Функции σ_j будут линейными формами относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$. Положим, что

$$u_j^{(0)} = \varphi_j(\sigma_j), \tag{16.44}$$

и покажем, что управление (16.44) системы (16.40) будет искомым. Действительно, подставим в систему (16.40) управление (16.44) и полученную вновь систему обозначим номером (16.45). Найдем полную производную V в силу системы (16.45):

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = W + \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \left(\varphi_j(\sigma_j) - \overline{u_j}\right). \tag{16.46}$$

Заметим, что можно выбрать столь малую окрестность точки $y_1 = \ldots = y_n = 0$, что функция $\varphi_j(\sigma_j) - \overline{u_j}$ будет иметь такой же знак, как и функция $\varphi_j(\sigma_j)$, $j = 1, \ldots, r$. Следовательно, функция $\sum_{j=1}^{r} \sigma_j(\varphi_j(\sigma_j) - \overline{u_j})$ может в этой окрестности принимать неотрицательные значения лишь при $-l_j \leqslant \sigma_j \leqslant l_j$, $j = 1, \ldots, r$. Отсюда вытекает, что при любых $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_3 > 0$, $\delta_3 < \varepsilon_1$ число l можно выбрать столь малым, чтобы выполнялось неравенство $W + \sum_{j=1}^{r} \sigma_j(\varphi_j - \overline{u_j}) < -\alpha < 0$, когда $\delta_3 \leqslant \|Y\| < \varepsilon_1$. При этом ε_1 взято так, чтобы $|\overline{u_j}| < 1$ при $\|Y\| < \varepsilon_1$, $j = 1, \ldots, r$. Выбирая числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ по квадратичной форме V точно так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 16.3, найдем, что в системе (16.45) имеется такое стабильное колебание, расположенное в сколь угодно малой окрестности точки $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$, если l достаточно мало, что все интегральные кривые системы (16.45), начинающиеся в фиксированной окрестности упомянутой точки, стремятся к этому стабильному колебанию, причем мера отклонения от него может быть сделана сколь угодно малой. ■

Замечания. 1. Если среди векторов $A^m B_i$ нет n линейно независимых, то теорема 16.4 остается в силе тогда и только тогда, когда среди векторов $A_1^m B_{1i}$, $m = 0, \ldots, k-1$, $i = 1, \ldots, r$, имеется k линейно независимых. Здесь матрица A_1 и векторы B_{1i} получены из матрицы A и векторов B_i путем неособого линейного преобразования с постоянными коэффициентами, примененного к системе (16.40) с целью приведения матрицы A к виду $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Матрица A_1 имеет порядок k, матрица A_2 — порядок $n-k$. Все собственные числа матрицы A_2 имеют отрицательные вещественные части, все собственные числа матрицы A_1 — неотрицательные вещественные части. Действительно, при выполнении упомянутого условия матрицу C в системе (16.41) можно выбрать так, чтобы ее нулевое решение было асимптотически устойчивым. Аналогично можно показать, что управление вида (16.44) будет искомым. Наоборот, если упомянутое выше условие не выполняется, т. е. число независимых векторов менее k, то можно привести пример, когда никакое релейное управление не приводит к возникновению в системе (16.40) стабильных колебаний. Иначе говоря, стабилизация программного движения невозможна.

2. Если все собственные числа A имеют отрицательные вещественные части, то при управлении (16.44) любая интегральная кривая системы (16.40) будет стремиться к стабильному колебанию. Если же среди собственных чисел матрицы A имеются собственные числа с нулевыми вещественными частями, а у матрицы A_1 только такие собственные числа, и есл среди векторов

$$A_1^m B_{1i}, \quad m = 0, \ldots, k-1, \quad i = 1, \ldots, r,$$

имеется k линейно независимых, то управление (16.44) можно выбрать так, чтобы все интегральные кривые, исходящие из наперед заданного ограниченного фазового пространства системы (16.40), стремились к стабильному колебанию. Действительно, если в первом случае положить $C = 0$, то число $l > 0$ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$W + \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \varphi_j(\sigma_j) < -\alpha < 0$$

при $\|Y\| \geqslant \delta_3$. Отсюда вытекает, что любая интегральная кривая стремится к стабильному колебанию, так как числа ε_1 и δ_1 могут быть выбраны произвольно большими.

Покажем теперь, что справедливо и второе утверждение данного замечания. Пусть σ — некоторое заданное ограниченное множество пространства $(y_1, \ldots, y_n)$. Обозначим через δ_1 такое число, что $\|y\|^2 < \delta_1$ при $y \in \sigma$. Следовательно, множество σ заключено внутри шара радиуса $\sqrt{\delta_1}$. Выберем матрицу C в системе (16.41) так, чтобы $|\overline{u_j}| < 1$ при $\|y\| < \sqrt{\delta_1}$ и чтобы нулевое решение системы (16.41) было асимптотически устойчивым. Это возможно, так как среди собственных чисел матрицы A нет собственных чисел с положительными вещественными частями. Выберем далее отрицательно определенную квадратичную форму W так, чтобы соответствующая ей положительно определенная форма V удовлетворяла неравенствам

$$m_1 \|y\|^2 \leqslant V \leqslant m_2 \|y\|^2, \quad 0 < m_1 < m_2.$$

Это возможно, так как любое решение системы (16.41) удовлетворяет неравенствам

$$a_1 \| y(\tau) \| e^{-a_2 (t-\tau)} \leqslant \| y(t) \| \leqslant b_1 \| y(\tau) \| e^{-b_2 (t-\tau)}, \quad t \geqslant \tau.$$

Тогда, выбрав квадратичную форму W из условия $-c_1 \|y\|^2 \leqslant W \leqslant -c_2 \|y\|^2$, найдем равенство

$$V = \int_t^{+\infty} -W d\tau.$$

Отсюда, применяя оценки, получаем неравенство

$$\frac{c_2 a_1^2 \| y(t) \|^2}{2a_2} \leqslant V \leqslant \frac{c_1 b_1^2 \| y(t) \|^2}{2b_2}.$$

Выберем c_1, c_2 так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{c_2 a_1^2}{2a_2} > m_1, \quad \frac{c_1 b_1^2}{2b_2} < m_2.$$

Возьмем число $\varepsilon_1 > 0$ столь большим, чтобы $m_1 \varepsilon_1^2 > m_2 \delta_1^2$. Выберем числа ε_2, ε_3, δ_2, δ_3 по функции V так, как это указывалось в теореме 16.4, и возьмем число $l > 0$ столь малым, чтобы при $0 < l_j < l$, $j = 1, \ldots, r$, выполнялось неравенство

$$W + \sum_{j=1}^{r} \bar{\sigma}_j (\varphi_j(\sigma_j) - \bar{u}_j) < -\alpha < 0, \quad \text{когда} \quad \delta_3 \leqslant \| y \| < \varepsilon_1.$$

При таком выборе числа l в системе (16.40) возникают стабильные колебания и все интегральные кривые, начинающиеся в сфере $\|y\| < \sqrt{\delta_1}$, стремятся к этому стабильному колебанию.

Нахождение управлений вида (16.44) требует значительного числа вычислений, связанных с построением квадратичной формы V. Поэтому заслуживают внимания различные другие способы нахождения управления вида (16.44), стабилизирующего программное движение и не связанного с построением квадратичной формы V.

Рассмотрим один из таких способов. Положим

$$V = X^* \Theta X; \quad W = X^* \Phi X,$$

где Θ и Φ — вещественные постоянные матрицы. Для вычисления матрицы Θ требуется найти $n(n+1)/2$ чисел, иначе говоря, решить систему линейных уравнений вида

$$\bar{A}^* \Theta + \Theta \bar{A} = \Phi. \tag{16.47}$$

Для построения функций (16.44) требуется знание линейных форм σ_j, $j = 1, \ldots, r$, т. е. знание nr чисел. Положим

$$\sigma_j = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{sj} y_s,$$

где $\Gamma_j = (\gamma_{1j}, \ldots, \gamma_{nj})$, $j = 1, \ldots, r$. Так как

$$\sigma_j = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} b_{sj},$$

то справедливы соотношения

$$\Gamma_j^* = 2\Theta B_j, \; j = 1, \ldots, r. \tag{16.48}$$

Будем считать, что матрица $\overline{A} = A + BC$ за счет соответствующего выбора матрицы C имеет все собственные числа с отрицательными вещественными частями. Выберем среди векторов $\overline{A}^m B_i$, $i = 1, \ldots, r$; $m = 0, \ldots, n-1$, ν линейно независимых векторов $H_1, \ldots, H_\nu$. Введем обозначение $C_i = \Theta H_i$. Векторы C_i, $i = 1, \ldots, \nu$, также будут линейно независимыми. Любой из векторов $\overline{A}^m B_i$ будет представляться линейной комбинацией векторов $H_1, \ldots, H_\nu$. Следовательно, любой из векторов $\Theta\overline{A}^m B_i$ будет представляться линейной комбинацией векторов C_i, $i = 1, \ldots, \nu$. Найдем систему уравнений, служащую для определения векторов C_i, $i = 1, \ldots, \nu$. С этой целью, умножая матричное уравнение (16.47) справа на вектор $\overline{A}^m B_i$ и применяя затем разложение получающихся векторов $\Theta\overline{A}^{m+1} B_i$ по векторам C_i, $i = 1, \ldots, \nu$, находим линейное уравнение вида

$$\overline{A}^* C_i + \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{ji} C_j = K_i, \quad i = 1, \ldots, \nu, \tag{16.49}$$

где K_i — известные векторы вида $\Phi\overline{A}^m B_i$, λ_{ji} — вещественные числа такие, что вектор $\sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{ji} C_j$ совпадает с $\Theta\overline{A}^{m+1} B_i$. Пусть $\overline{A}^m B_l = H_i$ и $\overline{A}^{m+1} B_l = H_s$, тогда λ_{ji} определяются единственным образом из системы

$$H_s^* H_k = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_{ji} H_j^* H_k, \quad k = 1, \ldots, \nu. \tag{16.50}$$

Итак, для того чтобы построить релейное управление (16.44), надо найти решение системы (16.50) и затем решение системы (16.49). Тогда векторы Γ_j имеют вид

$\Gamma_j = 2C_j$, $j = 1, \ldots, r$. ■

5. Рассмотрим теперь задачу построения непрямого релейного регулятора, стабилизирующего программное движение. Пусть система в отклонениях имеет вид

$$\dot{Y} = AY + BU + F; \; \dot{U}_j = V_j, \; j = 1, \ldots, r. \tag{16.51}$$

Величины $V_1, \ldots, V_r$ — управления, принимающие два значения:

± 1. Требуется построить такое управление $V_j^{(0)}$, $j = 1, \ldots, r$, которое стабилизировало бы программное движение.

Теорема 16.5. *Если среди векторов $A^m B_i$, $m = 0, \ldots, n-1$, $i = 1, \ldots, r$, имеется n линейно независимых, то существует релейное управление $V_j^{(0)}$ такое, что в системе (16.51) при управлении $V_j^{(0)}$ возникает стабильное колебание, расположенное в сколь угодно малой окрестности точки $y_1 = \ldots = y_n = u_1 = \ldots = u_r = 0$. При этом любая интегральная кривая, начинающаяся в фиксированной окрестности данной точки, стремится к стабильному колебанию, мера отклонения от которого может быть сделана также сколь угодно малой.*

Доказательство. Компоненты вектора F, входящего в (16.51), представляют собой совокупность нелинейных членов выше первого порядка малости. Отбросив эти члены, получим систему линейных уравнений, которую будем обозначать номером (16.52). Положим в ней

$$V_j = \overline{V}_j = \sum_{s=1}^{n} c_{sj} y_s + \sum_{i=1}^{r} r_{ij} u_i$$

и полученную линейную систему обозначим номером (16.53). Числа c_{sj} и r_{ji}, $s = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, r$; $i = 1, \ldots, r$, можно выбрать так, чтобы нулевое решение системы (16.53) было асимптотически устойчивым. Пусть W — отрицательно определенная квадратичная форма переменных $y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_r$. Построим соответствующую ей положительно определенную квадратичную форму V, связанную с W уравнением

$$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = W,$$

где $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ вычисляется в силу системы (16.53). Положим

$$\sigma_j = \partial V/\partial u_j, \tag{16.54}$$

где функции σ_j — линейные формы относительно $y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_r$. Положим далее

$$V_j^{(0)} = \varphi_j(\sigma_j), \; j = 1, \ldots, r. \tag{16.55}$$

Покажем, что управление (16.55) — искомое, если $0 < l_j < l$, $j = 1, \ldots, r$, где l — достаточно малая постоянная. Рассмотрим систему (16.51) при управлении (16.55). Полученную систему обозначим номером (16.56). Установим, что система (16.56) будет иметь стабильные колебания, расположенные в сколь угодно малой окрестности точки $y_1 = \ldots = y_n = u_1 = \ldots = u_r = 0$. Действительно, найдем $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ в силу (16.56):

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = W + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} f_s + \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \left(\varphi_j(\sigma_j) - \overline{V}_j\right),$$

откуда

$$\dot{V} = W_1 + \sum_{j=1}^{r} \sigma_j(\varphi_j(\sigma_j) - \overline{V}_j), \tag{16.57}$$

где $W_1 = W + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_s} f_s$ — отрицательно определенная функция. Из вида правой части (16.57) вытекает, что доказательство теоремы 16.5 можно осуществить точно так же, как это было сделано для теоремы 16.4. ∎

Замечания. 3. Если среди векторов $A^m B_i$ нет n линейно независимых и матрица A имеет собственные числа с неотрицательными вещественными частями, то программное движение может быть стабилизировано с помощью непрямого релейного регулятора тогда и только тогда, когда среди векторов $A_1^m B_{1i}$ есть k линейно независимых. Действительно, в этом случае можно величины c_{sj} и r_{ij} выбрать так, чтобы нулевое решение системы (16.53) было асимптотически устойчивым, а тогда в результате аналогичных рассуждений придем к тому, что при управлении (16.55) в системе (16.51) возникают стабильные колебания, которые стабилизируют программное движение.

4. Если $f_s = 0$, $s = 1, \ldots, n$, и матрица A имеет все собственные числа с отрицательными вещественными частями, то все интегральные кривые системы (16.51) при управлении (16.55) стремятся к стабильным колебаниям.

Если все собственные числа матрицы A_1 имеют нулевые вещественные части и все собственные числа матрицы A_2 имеют отрицательные вещественные части, а среди векторов $A_1^m B_{1i}$ найдется k линейно независимых, то при управлении (16.55) в системе (16.51) возникают стабильные колебания, обладающие тем свойством, что к ним стремятся все интегральные кривые, начинающиеся в наперед заданной ограниченной области. Доказательство этого утверждения аналогично приведенному в замечании 2.

5. В построенном здесь релейном непрямом регуляторе имеет место гистерезис. Однако, как следует из рассуждений, приведенных при доказательствах теорем, в области

$$-l_j \leqslant \sigma_j \leqslant l_j, \quad j = 1, \ldots, r,$$

функции φ_j могут принимать любые ограниченные значения, такие, чтобы существовало движение в системе, соответствующей рассматриваемому управлению.

Это обстоятельство позволяет конструировать регуляторы, стабилизирующие программное движение с заданными нелинейными характеристиками рулевых машин. Действительно, пусть заданы функции $g_j(\sigma)$, $j = 1, \ldots, r$, такие, что $g_j = -1$ при $\sigma \leqslant l_{1j}$; $g_j = +1$ при $\sigma \geqslant l_{2j}$, $l_{1j} < 0$, $l_{2j} > 0$. В промежутке $\sigma_{1j} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{2j}$, где $\sigma_{1j} < 0$, $\sigma_{2j} > 0$ — некоторые постоянные, имеет место зона нечувствительности, так что $g_j = 0$. В промежутках $[l_{1j}, \sigma_{1j}]$, $[\sigma_{2j}, l_{2j}]$ функции g_j определяются какими-либо нелинейными характеристиками $|g_j| \leqslant 1$ либо в случае, когда имеет место гистерезис, — многозначными нелинейными характеристиками. Пусть σ_j — линейные формы, о которых идет речь в последней теореме. Зададим управление

$$V_j = g_j(-k_j\sigma_j), \quad j = 1, \ldots, r, \tag{16.58}$$

где $k_1, \ldots, k_r$ — положительные постоянные коэффициенты усиления. Тогда оказывается, что числа $k_1, \ldots, k_r$ можно выбрать так, что система (16.51) при управлении (16.58) будет иметь стабильное колебание. Все интегральные кривые системы, начинающиеся в некоторой фиксированной окрестности точки $y_1 = \ldots = y_n = u_1 = \ldots = u_r = 0$, будут стремиться к этому стабильному колебанию. Колебание будет расположено в сколь угодно малой окрестности указанной точки, если коэффициенты усиления $k_1, \ldots, k_r$ имеют достаточно большие значения.

Все утверждения, сделанные в замечании 4, остаются справедливыми также и для управления (16.58). Релейные управления являются функциями фазовых координат и, возможно (в случае непрямого регулирования), функциями отклонения рулевых органов. Эти величины получаются как выходные сигналы измерителей и могут поступать непрерывно или с определенным шагом дискретности. При этом на выходе измерителей сигналы могут появляться с некоторым запаздыванием. Оказывается, что релейные управления, построенные выше, будут по-прежнему стабилизировать программное движение, если величины запаздывания и шага дискретности достаточно малы. Иначе говоря, при таком запаздывании и таком шаге дискретности в окрестности программного движения будут существовать стабильные колебания, расположенные сколь угодно близко к программному движению, если величина l и упомянутые величины запаздывания и шага дискретности достаточно малы. Все остальные движения, расположенные (начинающиеся) в некоторой фиксированной окрестности программного движения, стремятся к этому стабильному колебанию.

6. Покажем справедливость сделанных утверждений, например, в случае запаздывания выходных сигналов измерителей. Пусть релейное управление формируется на основе величин

$$y_s(t-\tau) \text{ и } u_j(t-\tau),\ s=1,\dots,n,\ j=1,\dots,r.$$

Выберем два числа $\bar{l}>0$ и $\bar{\tau}>0$ и построим интегральные кривые системы (16.51) при управлении (16.55), начинающиеся в полосе $-\bar{l}\leqslant\sigma_j\leqslant\bar{l}$. Числа $\bar{\tau}$ и $\bar{l}$ следует выбрать столь малыми, чтобы упомянутые интегральные кривые при $t\in[0,\bar{\tau}]$ не выходили из пределов полосы $-l<\sigma_j<l$. Это, во всяком случае, можно сделать в некоторой конечной окрестности точки $y_1=\dots=y_n=u_1=\dots=u_r=0$. При таком выборе величин $\bar{l}$ и $\bar{\tau}$ управление (16.55) при любом $\tau\leqslant\bar{\tau}$, $l_j<\bar{l}$, $j=1,\dots,r$, будет искомым, так как величины, построенные выше без учета запаздываний, будут играть ту же роль, что и ранее, а именно $\dot{V}<0$ при $\delta_3\leqslant\|Y\|\leqslant\varepsilon_1$. Из этого неравенства вытекает сделанное выше утверждение.

Пример. Рассмотрим случай одного регулирующего органа. Пусть линейная система имеет вид

$$\dot{Y}=AY+BU. \tag{16.59}$$

Обозначим через $\bar{A}$ матрицу $A+BC$, где C выбрана так, чтобы $\bar{A}$ имела все собственные числа с отрицательными вещественными частями. В случае, когда этим свойством обладает матрица A, $C=0$. Предположим, что векторы $\bar{A}^mB$ линейно независимы ($m=0,\dots,n-1$). Релейное управление

$$U^{(0)}=\varphi(\sigma), \tag{16.60}$$

вызывающее в системе (16.59) стабильное колебание, будет построено, если найти надлежащим образом линейную форму

$$\sigma=\sum_{s=1}\gamma_s y_s.$$

Введем, как и выше, в рассмотрение векторы $C_1, \ldots, C_n$; $C_i = \Theta\, \overline{A}^{\,i-1}B$. Пусть Φ — некоторая симметричная матрица, все собственные числа которой отрицательны. Легко видеть, что система (16.49) в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\overline{A}^*C_i + C_{i+1} = K_i, \quad i = 1, \ldots, \quad n-1, \\ &\overline{A}^*C_n + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s C_s = K_n, \end{aligned} \tag{16.61}$$

где $K_i = \Phi \overline{A}^{\,i-1}B$, $i = 1, \ldots, n$. Из системы (16.61) последовательно находим:

$$C_2 = -\overline{A}^*C_1 + K_1;$$

$$C_3 = \overline{A}^{*2}C_1 - \overline{A}^*K_1 + K_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_n = (-1)^{n-1}\overline{A}^{*(n-1)}C_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-\overline{A}^*)^{(n-1-i)} K_i.$$

Исключим из последнего уравнения (16.61) векторы $C_2, \ldots, C_n$. Тогда для вектора C_1 найдем систему n линейных уравнений вида

$$A_0C_1 = B_0,$$

где

$$A_0 = (-1)^{n-1}\overline{A}^{*n} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (-1)^{j-1} \overline{A}^{*j-1}. \tag{16.62}$$

Матрица A_0 такова, что система (16.62) всегда оказывается совместной, т. е. вектор C_1 существует. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, входящие в систему (16.62), являются решением системы уравнений

$$B^*\overline{A}^{*m}\overline{A}^n B = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j B^* \overline{A}^{*m} \overline{A}^{j-1} B, \quad m = 0, \ldots, n-1. \tag{16.63}$$

Система (16.63) возникает как результат разложения вектора $\overline{A}^mB$ по векторам $\overline{A}^jB$, $j = 0, \ldots, n-1$. После отыскания вектора C_1 полагаем $\gamma_j = 2c_{1j}$, где c_{1j} — компоненты вектора C_1, $j = 1, \ldots, n$.

Итак, задача отыскания стабилизирующего релейного управления в случае одного регулирующего органа сводится к нахождению решений двух систем линейных алгебраических уравнений порядка n. Для непосредственного отыскания квадратичной формы V потребовалось бы решать систему линейных уравнений порядка $(n(n+1))/2$.

ГЛАВА V

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЙ

§ 17. ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСПОРТИРОВКА ПУЧКОВ ТРАЕКТОРИЙ

Транспортировка симплекса. — Механические системы с несколькими степенями свободы. — Транспортировка пучка при разбросе скоростей. — Учет начальной и конечной скоростей

1. Рассмотрим сначала построение программных движений в линейных управляемых системах в простейшем случае. Пусть дана система n дифференциальных уравнений в векторной форме

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = P(t)x + Q(t)u + F(t). \tag{17.1}$$

Будем считать, что элементы матриц $P(t) = \{n \times n\}$, $Q(t) = \{n \times r\}$ и компоненты вектора $F(t)$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны и непрерывны. Пусть заданы два множества G_0 и G_1, причем относительно G_1 будем предполагать, что оно имеет внутренние точки. Требуется построить управление

$$u = Mx + N \tag{17.2}$$

так, чтобы оно переводило все траектории, начинающиеся в множестве G_0 за время $[0, T]$, в множество G_1. Относительно такого управления будем говорить, что оно осуществляет *транспортировку пучка траекторий*, заполняющего в начале движения множество G_0, в множество G_1.

Дадим сначала решение поставленной задачи для того частного случая, когда множества G_0 и G_1 являются заданными n-мерными симплексами S_0 и S_1. Итак, пусть точки $x_0^{(j)}$ (соответственно x_1^j) $j = 1, \ldots, n+1$, являются вершинами заданных симплексов S_0 и S_1. Таким образом, каждая точка симплекса S_0 (соответственно S_1) представима барицентрическими координатами $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$. Каждая координата принимает неотрицательное значение, и они связаны между собой соотношением

$$\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j = 1,$$

так что если x — некоторая точка симплекса S_0, то найдется совокупность барицентрических координат, причем единственная, удовлетворяющая соотношению

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j x_0^j.$$

Обозначим через $Y(t)$ фундаментальную матрицу решений системы

$$dx/dt = P(t)x \tag{17.3}$$

при начальном условии $Y(0) = E$, где E — единичная матрица.

В § 13 найдена конструкция управления, переводящего систему (17.1) за время $[0, T]$ из заданного начального положения в заданное конечное положение. Возьмем в качестве начального положения системы вершину $x_0^{(j)}$ симплекса S_0, в качестве конечного — вершину $x_1^{(j)}$ симплекса S_1. Очевидно, что такое управление

$$u^{(j)} = B^* C^{(j)} + V(t), \tag{17.4}$$

существует тогда и только тогда, когда система

$$\overline{x}_1^{(j)} - \overline{x}_0^{(j)} = A(T)\, C^{(j)} \tag{17.5}$$

совместна, где

$$A(T) = \int_0^T B(t)\, B^*(t)\, dt, \quad B(t) = Y^{-1}(t)\, Q(t), \ x^{(j)}(0) = \overline{x}_0^{(j)} = x_0^{(j)},$$

$$x^{(j)}(T) = \overline{x}_1^{(j)}, \ \overline{x}_1^{(j)} = Y^{-1}(T)\, x_1^{(j)} - \int_0^T Y^{-1}(\tau)\, F(\tau)\, d\tau.$$

Здесь мы считаем для простоты, что управление u является скалярным, $r = 1$. Если предположить, что матрица $A(T)$ — неособая, то из уравнения (17.5) найдем тождество

$$C^{(j)} = A^{-1}(T)\, [\overline{x}_1^{(j)} - \overline{x}_0^{(j)}]$$

и, следовательно, управление (17.4) будет иметь вид

$$u^{(j)} = B^* A^{-1}(T)\, [\overline{x}_1^{(j)} - \overline{x}_0^{(j)}] + V(t).$$

Напомним, что функция V является вещественной функцией, суммируемой с квадратом на $[0, T]$, и удовлетворяет условию ортогональности $\int_0^t BV dt = 0$. Зафиксируем одну из таких функций, тогда управление (17.4) определяет единственное движение $x^{(j)}(t)$, начинающееся в точке $x_0^{(j)}$ при $t = 0$ и достигающее точки $x_1^{(j)}$ при $t = T$. Это движение и управление (17.4) связаны системой уравнений

$$\dot{x}^{(j)} = P(t)\, x^{(j)} + Q(t)\, u^{(j)} + F(t). \tag{17.6}$$

Пусть x_0 — некоторая точка симплекса S_0 и пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ — ее барицентрические координаты. Обозначим через x_1 ту точку симплекса S_1, которая имеет такие же барицентрические координаты. Векторная функция

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j x^{(j)}(t) \qquad (17.7)$$

будет удовлетворять условиям $x(t) = x_0$ при $t = 0$, $x(t) = x_1$ при $t = T$.

Построим систему дифференциальных уравнений для векторных функций (17.7). С этой целью умножим обе части системы (17.6) на ξ_j и просуммируем полученные равенства по всем значениям j. Тогда, учитывая соотношения (17.7), имеем

$$\dot{x}(t) = P(t)x + Q(t)\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j u^{(j)} + F(t). \qquad (17.8)$$

Исключим в соотношениях (17.7) и (17.8) величину ξ_{n+1}. Тогда выражение (17.7) может быть записано в виде

$$x = x^{(n+1)} + z\xi, \qquad (17.9)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, а z — матрица:

$$z = \left(x^{(1)} - x^{(n+1)},\ x^{(2)} - x^{(n+1)},\ \dots,\ x^{(n)} - x^{(n+1)}\right). \qquad (17.10)$$

Предположим теперь, что матрица z является неособой. Очевидно, что из формулы (17.9) будем иметь равенство

$$\xi = z^{-1}\left[x - x^{(n+1)}\right]. \qquad (17.11)$$

Обозначим через U матрицу-строку, $U = (u^{(1)} - u^{(n+1)}, \dots, u^{(n)} - u^{(n+1)})$, тогда справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{n+1} \xi_j u^{(j)} = U\xi - u^{(n+1)}. \qquad (17.12)$$

Используя соотношения (17.11) и (17.12), из уравнения (17.8) получаем систему

$$\dot{x} = Px + Qu + F, \qquad (17.13)$$

где $u = Mx + N$, $M = Uz^{-1}$, $N = u^{(n+1)} - Uz^{-1}x^{(n+1)}$.

Опираясь на предыдущие рассмотрения, можно сформулировать теорему.

Теорема 17.1. *Если 1) матрица $A(T)$ — неособая; 2) матрица $z(t)$ — неособая при $t \in [0, T]$, то существует семейство управлений $u = Mx + N$, осуществляющее линейную транспортировку пучка траекторий, заполняющего в начальный момент симплекс S_0, в симплекс S_1 за время $[0, T]$. При этом матрица $M(t)$ определяется однозначно, вектор $N(t)$ представим в виде*

$$N(t) = N_0(t) + V - Uz^{-1}\int_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)V(\tau)\,d\tau,$$

где $N_0(t) = B^*C^{(n+1)} - Uz^{-1}\left[Y(t)\, x_0^{(n+1)} + \int\limits_0^t Y(t)\, B(\tau)\, B^*(\tau)\, C^{(n+1)} d\tau + \right.$

$\left. + \int\limits_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)\, F(\tau)\, d\tau\right]$. *Функция* V — *вещественная, суммируемая с квадратом на* $[0, T]$ *и удовлетворяющая условию* $\int\limits_0^T BV dt = 0$.

Подвергнем анализу второе условие теоремы 17.1. Цель этого анализа состоит в выяснении тех условий, при выполнении которых управление (17.2) имеет место. Для этого вычтем почленно из каждой системы (17.6) систему, соответствующую $j = n + 1$. Тогда, собирая векторы $x^{(j)} - x^{(n+1)}$ в матрицу z, найдем систему

$$dz/dt = Pz + R, \tag{17.14}$$

где R есть матрица, столбцами которой являются векторы $Q(u^{(j)} - u^{(n+1)})$. Умножая систему (17.14) слева на матрицу Y^{-1} и интегрируя затем в пределах от 0 до t, получаем тождество

$$\int\limits_0^t Y^{-1} \frac{dz}{dt} dt = \int\limits_0^t Y^{-1} Pz dt + \int\limits_0^t Y^{-1} R dt. \tag{17.15}$$

Производя слева интегрирование по частям и пользуясь соотношением $dY^{-1}/dt = -Y^{-1}P$, из тождества (17.15) найдем соотношение

$$Y^{-1}(t)\, z(t) = z(0) + \int\limits_0^t Y^{-1} R dt. \tag{17.16}$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части равенства (17.16). Столбец с номером j подынтегральной матрицы имеет вид

$$\{Y^{-1}R\}_j = Y^{-1} QB^* \left(C^{(j)} - C^{(n+1)}\right).$$

Следовательно, равенство (17.16) примет вид

$$\int\limits_0^t \{Y^{-1}R\}_j dt = A(t)\left(C^{(j)} - C^{(n+1)}\right),$$

где $A(t) = \int\limits_0^t BB^* dt$. Используя систему (17.5), получаем соотношения

$$\int\limits_0^t \{Y^{-1}R\}_j dt = A(t)\, A^{-1}(T)\left[\left(\overline{x}_1^{(j)} - \overline{x}_1^{(n+1)}\right) - \left(\overline{x}_0^{(j)} - \overline{x}_0^{(n+1)}\right)\right] =$$

$$= A(t)\, A^{-1}(T)\left[Y^{-1}(T)\left(x_1^{(j)} - x_1^{(n+1)}\right) - \left(x_0^{(j)} - x_0^{(n+1)}\right)\right].$$

Учитывая введенные выше обозначения, имеем равенство

$$\int_0^t Y^{-1}R dt = A(t) A^{-1}(T) [Y^{-1}(T) z_1 - z_0]. \qquad (17.17)$$

Из равенств (17.16) и (17.17) вытекает, что условие 2 теоремы 17.1 будет выполнено тогда и только тогда, когда матрица

$$[E - A(t) A^{-1}(T)] z_0 + A(t) A^{-1}(T) Y^{-1}(T) z_1 \qquad (17.18)$$

будет неособой при $t \in [0, T]$. Так как для любой матрицы z_1 можно указать матрицу S такую, что $z_1 = Sz_0$, то условие 2 теоремы 17.1 будет выполнено тогда и только тогда, когда начальный и конечный симплексы связаны линейным преобразованием с матрицей S такой, что матрица

$$E - A(t) A^{-1}(T) + A(t) A^{-1}(T) Y^{-1}(T) S \qquad (17.19)$$

— неособая при $t \in [0, T]$.

Это последнее условие всегда может быть выполнено, если матрица S такова, что $\|Y^{-1}S - E\|$, является достаточно малой. Таким образом установлена следующая теорема.

Теорема 17.2. *Если 1) матрица $A(T)$ — неособая; 2) задан симплекс S_0, то линейную транспортировку пучка траекторий, заполняющих в начальный момент симплекс S_0, можно осуществить с помощью линейного управления $u = Mx + N$ только в такой симплекс S_1, который связан с S_0 матрицей линейного преобразования S, удовлетворяющей неравенству*

$$\det [E + A(t) A^{-1}(T) (Y^{-1}(T) S - E)] \neq 0 \text{ при } t \in [0, T].$$

Теоремы 17.1 и 17.2 позволяют решить задачу, поставленную в начале настоящего параграфа, а именно: пусть множество G_0 ограничено. Построим какой-либо симплекс S_0, содержащий целиком это множество. Пусть далее множество G_1 имеет внутренние точки. Тогда можно построить симплекс S_1, целиком принадлежащий множеству G_1. Если построить управление (17.2), осуществляющее транспортировку пучка траекторий, расположенного при $t=0$ в симплексе S_0, в симплекс S_1 за время $[0, T]$, то это управление будет решать поставленную выше задачу.

2. Рассмотрим теперь линейную управляемую механическую систему с n степенями свободы, движение которой описывается с помощью системы дифференциальных уравнений

$$A_0(t) \ddot{x} + A_1(t) \dot{x} + A_2(t) x = B_0(t) u + F(t). \qquad (17.20)$$

Будем считать, что в системе (17.20) квадратные матрицы A_0, A_1, A_2 размерности $\{n \times n\}$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны и непрерывны. Кроме того, матрицу $A_0(t)$ будем считать неособой. Матрица $B_0(t)$ размерности $\{n \times r\}$ и векторная функция $F(t)$ размерности n также заданы при $t \geqslant 0$, вещественны и непрерывны. Вектор u имеет размерность r и представляет собой управляющее воздействие, приложенное к системе (17.20).

Известно, что вещественное евклидово пространство размерности $2n$ векторов x, $\dot{x}$ называется *фазовым пространством* системы (17.20). Наряду с фазовым пространством для механических систем с n степенями свободы рассматривают также вещественное евклидово пространство размерности n векторов x, так называемое *пространство конфигураций* или *пространство положений системы* (17.20).

Определение 17.1. Будем говорить, что управление

$$u = u(t, x) \tag{17.21}$$

осуществляет *транспортировку пучка* траекторий в пространстве положений системы (17.20) из множества G_0 в множество G_1 за время $[0, T]$ *при заданной начальной скорости*, если любое движение системы (17.20) при управлении (17.21), начинающееся при заданной скорости в множестве G_0 при $t = 0$, попадает в множество G_1 при $t = T$.

Выясним, при каких условиях существует управление (17.21), и дадим способ построения таких управлений. С этой целью рассмотрим однородную систему, соответствующую системе (17.20):

$$A_0\ddot{x} + A_1\dot{x} + A_2x = 0. \tag{17.22}$$

Построим фундаментальную систему решений для уравнений (17.22):

$$(y_i, z_i),\ i = 1, \ldots, 2n,\ z_i = \dot{y}_i.$$

Тогда общее решение системы (17.22) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{2n} c_i y_i = Y_1C_1 + Y_2C_2 \tag{17.23}$$

и соответственно

$$\dot{x} = Z_1C_1 + Z_2C_2, \tag{17.24}$$

где Y_1 — матрица, столбцами которой являются векторы y_i, $i = 1, \ldots, n$; Y_2 — матрица, столбцами которой являются векторы y_i, $i = n+1, \ldots, 2n$. Матрицы Z_1 и Z_2 составлены соответствующим образом из векторов z_i. Векторы C_1 и C_2 имеют размерность n, и их компоненты являются произвольными постоянными $C_1 = (c_1, \ldots, c_n)$, $C_2 = (c_{n+1}, \ldots, c_{2n})$.

Общее решение системы (17.20) будем искать в форме (17.23), где векторы $C_i = C_i(t)$ будем считать функциями времени, подлежащими определению. Дифференцируя выражение (17.23) и сравнивая результат с формулой (17.24), находим, что эти векторные функции необходимо удовлетворяют соотношению

$$Y_1\dot{C}_1 + Y_2\dot{C}_2 = 0. \tag{17.25}$$

Подставляя выражение (17.23) в систему (17.20) и используя (17.25), находим далее

$$A_0(Z_1\dot{C}_1 + Z_2\dot{C}_2) = B_0u + F. \tag{17.26}$$

Из соотношений (17.25) и (17.26) вытекает соотношение

$$\dot{C}_i = \eta_i(B_0u + F),\ i = 1, 2. \tag{17.27}$$

Интегрируя соотношение (17.27)в пределах от 0 до t и полагая $C_i(t) = \gamma_i$ при $t = 0$, получаем равенство

$$C_i = \gamma_i + \int_0^t \eta_i (B_0u + F)\,dt, \quad i = 1, 2. \tag{17.28}$$

Подставляя равенство (17.28) в формулы (17.23) и (17.24), получаем соотношения

$$x = Y_1\gamma_1 + Y_2\gamma_2 + \int_0^t \eta(t, \tau)[B_0(\tau)u(\tau) + F(\tau)]\,d\tau, \tag{17.29}$$

$$\dot{x} = Z_1\gamma_1 + Z_2\gamma_2 + \int_0^t \xi(t, \tau)[B_0(\tau)u(\tau) + F(\tau)]\,d\tau. \tag{17.30}$$

Без ограничения общности можно считать

$$Y_1 = Z_2 = E \text{ при } t = 0,\ Y_2 = Z_1 = 0 \text{ при } t = 0.$$

Здесь E — единичная матрица. Если x_0 и $\dot{x}_0$ — начальные условия для решения системы (17.20), то окончательно имеем формулу

$$x = Y_1x_0 + Y_2\dot{x}_0 + \int_0^t \eta(t, \tau)[B_0(\tau)u(\tau) + F(\tau)]\,d\tau. \tag{17.31}$$

Пусть заданы два симплекса S_0 и $S_1 \in E_n$ с вершинами x_{0j}, x_{j1}, $j = 1, \ldots, n + 1$. Построим управление u_j, переводящее систему (17.20) из j-й вершины симплекса S_0 в j-ю вершину симплекса S_1 за время $[0, T]$. С этой целью введем в рассмотрение матрицы

$$\widehat{B}(t, \tau) = \eta(t, \tau)B_0(\tau),\quad \widehat{A}(t) = \int_0^t \widehat{B}(t, \tau)\widehat{B}^*(t, \tau)\,d\tau.$$

Тогда из формулы (17.31) при $t = T$ получим равенство

$$\int_0^T \widehat{B}(T, \tau)u_j(\tau)\,d\tau = x_{j1} - Y_1(T)x_{0j} - Y_2(T)\dot{x}_0 - \int_0^T \eta(T, \tau)F(\tau)\,d\tau. \tag{17.32}$$

Будем искать решение системы (17.32) в форме

$$u_j = \widehat{B}^*\widehat{C}_j + V, \tag{17.33}$$

где $\widehat{C}_j$ — искомый постоянный вектор, V — r-мерная векторная функция, принадлежащая пространству $L_2[0, T]$ и такая, что $\int_0^T \widehat{B}(T, \tau)V(\tau)d\tau = 0$. Подставляя выражение (17.33) в систему (17.32), находим тождество

$$\widehat{C}_j = \widehat{A}^{-1}(T)\left[x_{j1} - Y_1(T)x_{0j} - Y_2(T)\dot{x}_0 - \int_0^T \eta(T, \tau)F(\tau)d\tau\right]. \quad (17.34)$$

Используя тождество (17.34) и выражение (17.33), получаем искомое управление. Подставляя далее это управление в (17.31), найдем искомую траекторию:

$$u_j = \widehat{B}^*(T, t)\widehat{A}^{-1}(T)\left[x_{j1} - Y_1(T)x_{0j} - Y_2(T)\dot{x}_0 - \int_0^T \eta(T, \tau)F(\tau)d\tau\right] + V, \quad (17.35)$$

$$x_j(t) = [Y_1(t) - \widehat{A}(t)\widehat{A}^{-1}(T)Y_1(T)]x_{0j} + \widehat{A}(t)\widehat{A}^{-1}(T)x_{j1} + x_0(t), \quad (17.36)$$

где векторная функция $x_0(t)$ не зависит от номера вершины симплексов и выражается формулой

$$x_0(t) = \left[Y_2(t) - \widehat{A}(t)\widehat{A}^{-1}(T)Y_2(T)\right]\dot{x}_0 + \int_0^t \eta(t, \tau) \times$$

$$\times [B_0(\tau)V(\tau) + F(\tau)]d\tau - \widehat{A}(t)\widehat{A}^{-1}(T) \times \int_0^T \eta(T, \tau)F(\tau)d\tau. \quad (17.37)$$

Пусть теперь ξ_j, $j = 1, \ldots, n+1$, — барицентрические координаты некоторой точки x_0 симплекса S_0 и пусть точка x_1 симплекса S_1 имеет такие же барицентрические координаты. Тогда векторная функция

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j x_j(t) \quad (17.38)$$

будет удовлетворять условиям $x = x_0$ при $t = 0$, $x = x_1$ при $t = T$. Формулу (17.38) можно записать в форме

$$x = \widehat{Z}\xi + x_{n+1}(t), \quad (17.39)$$

где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\widehat{Z}$ — матрица, столбцами которой являются векторы $x_j(t) - x_{n+1}(t)$. Следовательно, справедливо соотношение

$$\widehat{Z} = [Y_1(t) - \widehat{A}(t)\widehat{A}^{-1}(T)Y_1(T)]\widehat{Z}_0 + \widehat{A}(t)\widehat{A}^{-1}(T)\widehat{Z}_1, \tag{17.40}$$

где $\widehat{Z}_0$ и $\widehat{Z}_1$ — значения, принимаемые матрицей $\widehat{Z}$ соответственно при $t = 0$ и при $t = T$. Подставляя формулы (17.35) и (17.36) в систему (17.20) и затем умножая почленно на ξ_j и суммируя по всем значениям $j = 1, \ldots, n+1$, находим, что векторная функция (17.38) будет удовлетворять уравнению

$$A_0\ddot{x} + A_1\dot{x} + A_2 x = B_0(U\xi + u_{n+1}) + F, \tag{17.41}$$

где U — есть матрица, столбцами которой являются векторы $(u_j - - u_{n+1})$.

Если предположить, то матрица $\widehat{Z}$ — неособая при $t \in [0, T]$, то из выражения (17.39) найдем $\xi = \widehat{Z}^{-1}x - \widehat{Z}^{-1}x_{n+1}$. Исключая вектор ξ из правой части (17.41), найдем вид управления

$$u = \widehat{M}x + \widehat{N}. \tag{17.42}$$

Это управление в соответствии с проведенным выше построением будет переводить систему (17.20) из любой точки $x_0 \in S_0$ в точку $x_1 \in S_1$ за время $[0, T]$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 17.3. *Если выполнены условия:* 1) *матрица* $\widehat{A}(T)$ — *неособая;* 2) *матрица* $\widehat{Z}$ — *неособая при* $t \in [0, T]$, *то существует семейство управлений вида* (17.42), *осуществляющее транспортировку пучка траекторий в пространстве положений из симплекса* S_0 *в симплекс* S_1 *за время* $[0, T]$ *при заданной начальной скорости.*

3. Рассмотрим теперь пучок траекторий в пространстве положений, начинающийся из одной точки. Иначе говоря, будем считать, что начальное множество одноточечное, $G_0 = x_0$. Однако теперь будем считать, что начальная скорость $\dot{x}_0$ не является фиксированной, и, более того, положим, что $\dot{x}_0 \in S_0$, где S_0 — некоторый симплекс с вершинами $\dot{x}_{0j}$, $j = 1, \ldots, n+1$. Таким образом, симплекс S_0 характеризует теперь начальный разброс скоростей.

Определение 17.2. Будем говорить, что управление $u(t, x, \dot{x})$ осуществляет *транспортировку пучка* траекторий в пространстве положений с начальным *разбросом скоростей* S_0 в заданное множество S_1 за время $[0, T]$, если при этом управлении движение системы (17.20), начинающееся при $x = x_0$, $\dot{x}_0 \in S_0$ при $t = 0$, попадает в S_1 при $t = T$. Здесь S_1, как и выше, — симплекс, вершинами которого являются точки x_{1j}, $j = 1, \ldots, n+1$.

Выведем условия, при выполнении которых такие управления существуют, и дадим их конструкцию. Построим управление u_j, переводящее систему (17.20) из точки $(x_0, \dot{x}_{0j})$ в вершину x_{1j}, и через

$\dot{\overline{x}}_j(t)$ обозначим движение, отвечающее этому управлению. Тогда будем иметь соотношения

$$\overline{x}_j = Y_1 x_0 + Y_2 \dot{x}_{0j} + \int_0^t \eta(t, \tau)\,[B_0(\tau)\,\overline{u}_j(\tau) + F(\tau)]\,d\tau, \qquad (17.43)$$

$$\dot{\overline{x}}_j = Z_1 x_0 + Z_2 \dot{x}_{0j} + \int_0^t \xi(t, \tau)\,[B_0(\tau)\,\overline{u}_j(\tau) + F(\tau)]\,d\tau. \qquad (17.44)$$

Полагая в формуле (17.43) $t = T$, находим систему

$$x_{1j} - Y_1(T)\,x_0 - Y_2(T)\,\dot{x}_{0j} - \int_0^T \eta(T, \tau)\,F(\tau)\,d\tau = \int_0^T \widehat{B}(T, \tau)\,\overline{u}_j(\tau)\,d\tau. \qquad (17.45)$$

Будем искать решение системы (17.45) в виде

$$\overline{u}_j = \widehat{B}^*\overline{C}_j + V, \qquad (17.46)$$

где $\overline{C}_j$ — постоянный вектор, подлежащий определению, V — векторная функция из $L_2[0, T]$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T \widehat{B}(T, \tau)\,V(\tau)\,d\tau = 0.$$

Подставляя выражение (17.46) в систему (17.45), найдем равенство

$$\overline{C}_j = \widehat{A}^{-1}(T)\,(x_{1j} - Y_1(T)\,x_0 - Y_2(T)\,\dot{x}_{0j} - \int_0^T \eta(T, \tau)\,F(\tau)\,d\tau). \qquad (17.47)$$

Пусть ξ_j, $j = 1, \ldots, n+1$, — барицентрические координаты точки $\dot{x}_0$ симплекса S_0 и пусть точка x_1 симплекса S_1 имеет те же самые координаты; положим

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \overline{x}_j, \qquad (17.48)$$

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \dot{\overline{x}}_j. \qquad (17.49)$$

Из формул (17.48) и (17.49) и системы (17.20) находим, что векторная функция (17.48) будет удовлетворять уравнению

$$A_0\ddot{x} + A_1\dot{x} + A_2 x = B_0 \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j \overline{u}_j + F = B_0(\overline{U}\xi + u_{n+1}) + F. \qquad (17.50)$$

Формулы (17.48) и (17.49) можно представить в виде

$$x = \overline{Z}\xi + \overline{x}_{n+1}, \tag{17.51}$$

$$\dot{x} = \dot{\overline{Z}}\xi + \dot{\overline{x}}_{n+1}. \tag{17.52}$$

Столбцами матрицы $\overline{Z}$ являются векторы $\overline{x}_j - \overline{x}_{n+1}$, поэтому эта матрица заведомо будет неособой при $t = T$. Столбцы матрицы $\dot{\overline{Z}}$ образованы векторами $\dot{\overline{x}}_j - \dot{\overline{x}}_{n+1}$, поэтому эта матрица будет неособой при $t = 0$. Из предыдущего вытекает, что справедливы равенства

$$\overline{Z} = \left[Y_2(t) - \widehat{A}(t)\widehat{A}^{-1}(T)Y_2(T)\right]\dot{\overline{Z}}_0 + \widehat{A}(t)\widehat{A}^{-1}(T)\overline{Z}_1, \tag{17.53}$$

$$\dot{\overline{Z}} = \left[Z_2(t) - K(t)\widehat{A}^{-1}(T)Z_2(T)\right]\dot{\overline{Z}}_0 + K(t)\widehat{A}^{-1}(T)\overline{Z}_1, \tag{17.54}$$

где $K(t) = \int\limits_0^t \xi(t, \tau)B_0(\tau)\widehat{B}^*(t, \tau)\,d\tau$.

Теорема 17.4. *Если* 1) *матрица* $\widehat{A}(T)$ — *неособая*; 2) *матрица* (17.54) — *также неособая при* $t \in [0, T]$, *то существует управление* $u = Lx + N$, *осуществляющее транспортировку пучка траекторий, начинающегося в заданной начальной точке* x_0 *с начальным разбросом скоростей* S_0 *в симплексе* S_1 *за время* $[0, T]$.

Замечание. Условие 2 настоящей теоремы может быть существенно облегчено, если искать управление зависящим от фазового состояния системы.

Действительно, если матрица $\overline{H} = \begin{pmatrix} \overline{Z} \\ \dot{\overline{Z}} \end{pmatrix}$ такова, что матрица $\overline{H}^*\overline{H}$ — неособая, то вектор ξ может быть единственным образом определен из системы (17.51), (17.52) по формуле

$$\xi = (\overline{H}^*\overline{H})^{-1}\left[\overline{Z}^*(x - \overline{x}_{n+1}) + \dot{\overline{Z}}^*\left(\dot{x} - \dot{\overline{x}}_{n+1}\right)\right].$$

Подставляя найденное значение ξ в правую часть системы (17.50), получаем конструкцию управлений, обеспечивающих транспортировку рассматриваемого пучка в симплекс S_1.

Аналогично в условиях теоремы 17.3 можно заменить ограничительное условие 2 менее жестким, а именно потребовать, чтобы матрица $H = \begin{pmatrix} \widehat{Z} \\ \dot{\widehat{Z}} \end{pmatrix}$ обладала свойством: *квадратная матрица* H^*H — *неособая при* $t \in [0, T]$. Тогда искомое управление будет зависеть не только от положения системы, но и от скоростей

$$u = Mx + L\dot{x} + N. \quad ■$$

4. Рассмотрим теперь тот случай, когда транспортировка пучка осуществляется из симплекса S_0 в симплекс S_1 не только с заданной начальной скоростью $\dot{x}_0$, но и с заданной конечной скоростью $\dot{x}_1$. В этом

случае следует от системы (17.20) перейти к системе в нормальной форме $2n$ дифференциальных уравнений.

Пусть такой переход сделан и эти уравнения имеют вид, рассмотренный ранее:

$$\dot{x} = Px + Qu + F. \tag{17.55}$$

Напишем для такой системы формулу Коши

$$x = Yx_0 + \int_0^t Y(t, \tau) Q(\tau) u(\tau) \, d\tau + \int_0^t Y(t, \tau) F(\tau) \, d\tau. \tag{17.56}$$

Обозначим через x_{0j}' и x_{1j} соответственно начальные и конечные значения, соответствующие моментам $t = 0$ и $t = T$ для искомой векторной функции $x(t)$.

Первые n компонент этих векторов дают соответственно компоненты вершин S_0 и S_1, а последние n образуют заданные векторы $\dot{x}_0$, $\dot{x}_1$. Управление u_j, переводящее систему (17.55) из начального состояния в конечное за время $[0, T]$, будет удовлетворять, таким образом, системе

$$x_{1j} - Y(T) x_{0j} - \int_0^T Y(T, \tau) F(\tau) \, d\tau = \int_0^T B(T, \tau) u_j(\tau) \, d\tau.$$

Как и прежде, представляем u_j в виде

$$u_j = B^* C_j + V,$$

где $C_j = A^{-1}(T) \left(x_{1j} - Y(T) x_{0j} - \int_0^T Y(T, \tau) F(\tau) \, d\tau\right)$. Обозначая через $x_j(t)$ искомое движение, будем иметь равенство

$$x_j(t) = (Y(t) - A(t) A^{-1}(T) Y(T)) x_{0j} + A(t) A^{-1}(T) x_{1j} + x_0(t), \tag{17.57}$$

где векторная функция $x_0(t)$ не зависит от вершин симплексов S_0 и S_1.

Пусть ξ_j — барицентрические координаты некоторой точки x_0 симплекса S_0 и пусть x_1 — точка симплекса S_1 с теми же координатами. Рассмотрим векторную функцию

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j x_j = \widehat{H} \xi + x_{n+1}. \tag{17.58}$$

Если матрица $\widehat{H}^* \widehat{H}$ — неособая при $t \in [0, T]$, то равенство (17.58) определяет вектор ξ единственным образом,

$$\xi = \left(\widehat{H}^* \widehat{H}\right)^{-1} M^* (x - x_{n+1}). \tag{17.59}$$

Управление $u = \sum_{j=1}^{n} \xi_j u_j$ может быть представлено в форме $u = U\xi + u_{n+1} = Mx + L\dot{x} + N$, так как $\varkappa = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$.

Теорема 17.5. *Если* 1) *матрица* $A(T)$ — *неособая*, $A = \int_0^T BB^* dt$, $B = Y^{-1}(t)Q(t)$; 2) *матрица* $\widehat{H}^*\widehat{H}$ — *неособая при* $t \in [0, T]$, *то существует линейное управление, обеспечивающее транспортировку пучка, начинающегося в* S_0, *в симплекс* S_1 *за время* $[0, T]$ *с заданными начальными и конечными скоростями.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично тому, как это было сделано выше. Здесь только следует заметить, что в конструкцию управления будут входить начальные и конечные скорости $\dot{x}_0$ и $\dot{x}_1$ пучка.

§ 18. НЕЛИНЕЙНАЯ ТРАНСПОРТИРОВКА ПУЧКОВ ТРАЕКТОРИЙ

Квазилинейные уравнения. — Фокусировка и ускорение пучков заряженных частиц

1. Рассмотрим систему n нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + F(t) + \mu G(t, x, u, \mu). \tag{18.1}$$

Матрицы $P(t) = \{n \times n\}$ и $Q(t) = \{n \times r\}$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны и непрерывны; $G(t, x, u, \mu)$ — вещественная, непрерывная, непрерывно дифференцируемая по любой из компонент x и u вектор-функция; μ — малый положительный параметр. Для простоты будем считать, что $r = 1$.

Пусть заданы два множества G_0 и G_1, причем относительно G_0 будем предполагать, что оно имеет внутренние точки. Требуется построить управление

$$u = u(t, x), \tag{18.2}$$

переводящее все траектории, начинающиеся в множестве G_0, за время $[0, T]$ в множество G_1. Относительно такого управления будем говорить, что оно осуществляет транспортировку пучка траекторий, заполняющего в начале движения множество G_0, в множество G_1.

Дадим сначала решение поставленной задачи для того частного случая, когда множества G_0 и G_1 являются заданными n-мерными симплексами S_0 и S_1. Итак, пусть точки x_0^j (соответственно x_1^j), $j = 1, \ldots, n+1$, являются вершинами заданных симплексов S_0 и S_1. Обозначим через $Y(t)$ фундаментальную матрицу решений системы

$$dx/dt = P(t)x \tag{18.3}$$

при начальном условии $Y(0) = E$, где E — единичная матрица.

Возьмем в качестве начального положения системы вершину $x_0^{(j)}$ симплекса S_0, в качестве конечного — вершину $x_1^{(j)}$ симплекса S_1. Тогда, как следует из § 13, существуют управление $u^{(j)}(t)$ и соответствующее ему движение $x^{(j)}(t)$, переводящее систему (18.1) из положения $x_0^{(j)}$ в положение $x_1^{(j)}$ за время $[0, T]$. Такие управления и такие движения будут связаны между собой системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^{(j)}}{dt} = P(t)\,x^{(j)} + Q(t)\,u^{(j)} + F(t) + \mu G\left(t, x^{(j)}, u^{(j)}, \mu\right),$$
$$j = 1, \dots, n+1. \qquad (18.4)$$

Будем искать движение пучка в форме

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j(t)\, x^{(j)}(t), \qquad (18.5)$$

где величины $\xi_j(t)$ являются функциями, подлежащими определению. Однако начальные значения этих функций задаются однозначно для каждой траектории пучка. А именно: если $x(t) = x_0$ при $t = 0$, то $\xi_j(t) = \xi_j(0)$ при $t = 0$, причем числа $\xi_j(0)$ являются барицентрическими координатами точки x_0 в симплексе S_0. Подчиним также функции $\xi_j(t)$ условию $\sum\limits_{j=1}^{n+1}\xi_j(t) = 1$.

Перейдем к составлению дифференциальных уравнений для величин $\xi_j(t)$. Дифференцируя выражение (18.5) почленно и используя уравнение (18.4), получаем систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^{n+1}\left[\dot{\xi}_j(t)\,x^{(j)}(t) + \xi_j(t)\,\dot{x}^{(j)}(t)\right] = \sum_{j=1}^{n+1}\dot{\xi}_j(t)\,x^{(j)}(t) +$$
$$+ Px + Qu(t, x) + \mu G(t, x, u(t, x), \mu) + \sum_{j=1}^{n+1} Q\left(u^{(j)} - u\right)\xi_j +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n+1}\xi_j\mu\left(G\left(t, x^{(j)}, u^{(j)}\left(t, x^{(j)}\right), \mu\right) - G(t, x, u(t, x), \mu)\right) + F(t).$$
$$(18.6)$$

Выберем функции ξ_j так, чтобы суммы, стоящие в правой части системы (18.6), взаимно уничтожались:

$$\sum_{j=1}^{n+1}\dot{\xi}_j(t)\,x^{(j)}(t) + \sum_{j=1}^{n+1} Q\left(u^{(j)} - u\right)\xi_j +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n+1}\xi_j\mu\left[G\left(t, x^{(j)}, u^{(j)}\left(t, x^{(j)}\right), \mu\right) - G(t, x, u(t, x), \mu)\right] = 0, \qquad (18.7)$$

$$\frac{dx}{dt} = Px + Qu(t, x) + \mu G(t, x, u(t, x), \mu) + F(t). \tag{18.8}$$

Если положить в выражении (18.5) $\xi_{n+1} = 1 - \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$, можно получить запись выражения (18.5) в форме ($\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$):

$$x = Z\xi + x^{(n+1)}, \tag{18.9}$$

где Z — матрица, столбцами которой являются векторы $(x^{(i)} - x^{(n+1)})$. Выберем теперь в уравнениях (18.7) и (18.8) управление $u(t, x)$ так, чтобы

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^{n+1} u^{(j)} \xi_j = Mx + N, \tag{18.10}$$

где $M = UZ^{-1}$ и $N = u^{(n+1)} - UZ^{-1}x^{(n+1)}$. Тогда системы (18.7) и (18.8) можно рассматривать как независимые. А именно: система (18.7) примет вид

$$\dot{\xi} = \mu Z^{-1} [G(t, Z\xi + x^{(n+1)}, M(Z\xi + x^{(n+1)}) + N, \mu) -$$
$$- G(t, x^{(n+1)}, u^{(n+1)}, \mu) - \Psi\xi]. \tag{18.11}$$

В уравнении (18.11) Ψ представляет собой матрицу, столбцами которой являются векторы

$$[G(t, x^{(i)}, u^{(i)}, \mu) - G(t, x^{(n+1)}, u^{(n+1)}, \mu)].$$

Система (18.11) принадлежит к системам дифференциальных уравнений с малым параметром в стандартной форме Н. Н. Боголюбова. При достаточно малых значениях параметра μ решения этой системы будут удовлетворять неравенству

$$\| \xi(t) - \xi(0) \| < a \, |\mu|, \quad t \in [0, T]. \tag{18.12}$$

Теорема 18.1. *Если выполнены условия теоремы* 17.1 *и* Σ_1 — *некоторый симплекс, содержащий внутри себя симплекс* S_1, *то существует положительная постоянная* μ_0 *такая, что управление* (18.10) *будет осуществлять транспортировку пучка траекторий из симплекса* S_0 *внутрь симплекса* Σ_1 *при любом выборе параметра* μ, *удовлетворяющего условию* $|\mu| \leqslant \mu_0$.

Доказательство. Если $\xi_j(0)$, $j = 1, \ldots, n+1$, есть барицентрические координаты точки $x_0 \in S_0$, то соответствующая ей точка $x_1 \in S_1$, имеющая те же барицентрические координаты, будет отстоять от точки движения (18.5), вычисленной в момент $t = T$, на величину порядка μ, как это следует из оценки (18.12) и оценки

$$\xi_{n+1}(t) - \xi_{n+1}(0) = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j(0) - \xi_j(t)),$$

и, следовательно,

$$| \xi_{n+1} - \xi_{n+1}(0) | \leqslant b\mu. \tag{18.13}$$

Так как граница симплекса Σ_1 отстоит на некоторую положительную величину от симплекса S_1, то μ_0 можно выбрать так, чтобы при $|\mu| \leqslant \mu_0$ движение (18.5) попадало внутрь симплекса Σ_1. ■

Для квазилинейного случая можно также сформулировать теорему, аналогичную теореме, имеющей место в линейном случае.

Теорема 18.2. *Если* 1) *матрица* $A(T) = \int_0^T BB^* \mathrm{d}t$ — *неособая*, $B = Y^{-1}Q$; 2) *симплекс* S_0 *связан с симплексом* S_1 *линейным преобразованием* S, *удовлетворяющим условию*

$$\det [E + A(t) A^{-1}(T) [Y^{-1}(T) S - E]] \neq 0 \text{ при } t \in [0, T];$$

3) Σ_1 — *некоторый симплекс, содержащий внутри себя* S_1, *то существует положительная постоянная* μ_0 *такая, что управление* (18.10) *осуществляет транспортировку пучка траекторий, заполняющих в начальный момент симплекс* S_0, *в симплекс* Σ_1.

2. Остановимся теперь на решении нелинейной задачи транспортировки заряженных частиц с помощью стационарного электрического и стационарного магнитного полей. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ есть радиус-вектор заряженной частицы с зарядом q и массой m, движущейся под действием электрического поля E и магнитного B. Тогда уравнение движения такой частицы будет иметь вид

$$m\ddot{x} = E + q\dot{x} \times B. \tag{18.14}$$

В уравнении (18.14) управлениями являются векторы E и B. Наша цель заключается в том, чтобы указать способ построения этих векторных функций $E = E(x)$, $B = B(x)$, обладающих свойствами: во-первых, заряженные частицы, движущиеся в соответствии с уравнением (18.14), должны фокусироваться в окрестности некоторого равновесного движения, и, во-вторых, эти частицы должны ускоряться. Векторы E и B связаны между собой уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \operatorname{rot} \frac{B}{\mu_0} = J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t},$$

где μ_0 и ε_0 — магнитные и диэлектрические проницаемости вакуума, J — плотность тока;

$$\operatorname{div} J = -\partial\sigma/\partial t,$$

где σ — объемная плотность электрического заряда. Отсюда имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} B = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_0 \operatorname{div} E - \sigma] = 0.$$

Учитывая тот факт, что, по предположению, электрическое поле E и магнитное B не зависят от времени, будем иметь соотношения

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{div} E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \rho. \tag{18.15}$$

Таким образом, управления, входящие в уравнение (18.14), подчиняются соотношениям (18.15).

Перейдем к решению поставленной задачи. Введем в рассмотрение поле скоростей $\eta = \eta(x)$ и будем считать, что в этом поле движется заряженная частица единичной массы и единичного отрицательного заряда. Тогда уравнение движения (18.14) примет вид

$$\ddot{x} = E + B \times \dot{x}. \tag{18.16}$$

Положим в уравнении (18.16) $\dot{x} = \eta(x)$, получим равенство

$$\dot{\eta}(x) = E + B \times \eta. \tag{18.17}$$

Умножая уравнение (18.17) скалярно на $\eta(x)$, имеем соотношения

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\eta^2 = (\eta, E) = (\eta, \nabla\varphi). \tag{18.18}$$

Здесь положено $E = \Delta\varphi$, где φ — электрический потенциал.

Соотношение (18.18) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}\varphi = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\eta^2. \tag{18.19}$$

Полная призводная в равенстве (18.19) берется вдоль траекторий обыкновенной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \eta(x). \tag{18.20}$$

Из равенства (18.19) имеем

$$\varphi = \frac{1}{2}\eta^2 + g, \tag{18.21}$$

где g — первый интеграл системы (18.20). Таким образом, выражение (18.21) является общим интегралом уравнения (18.18).

Обозначим через B' поперечную составляющую магнитного поля, тогда B запишется в виде

$$B = f\eta + B'. \tag{18.22}$$

Подставляя выражение (18.22) в уравнение (18.18) и умножая обе части слева векторно на η, получаем соотношение

$$B' = \frac{\eta \times \left(\left\{\dfrac{d\eta}{dx}\right\}\eta - \nabla g - \dfrac{1}{2}\nabla\eta^2\right)}{\eta^2}. \tag{18.23}$$

Полученное соотношение подставим в выражение (18.22) и затем полученный результат — в систему (18.15):

$$\dot{f} + f\operatorname{div}\eta + \operatorname{div}B' = 0. \tag{18.24}$$

При любом выборе функции g уравнение (18.24) разрешимо. Пусть мы имеем одно из таких решений. Функция f и функция g определяют

огда единственным образом плотность тока J и плотность электри-
еского заряда σ. Будем считать, что технически возможно полу-
ить такую плотность тока и такую объемную плотность электри-
еского заряда для каждого набора функций f и g. Этим самым опре-
елено некоторое множество допустимых управлений:

$$B = f\eta + B', \quad E = \nabla\left(\frac{\eta^2}{2} + g\right). \tag{18.25}$$

Рассмотрим теперь совокупность шести дифференциальных урав-
ений:

$$\dot{x} = y, \; \dot{y} = E(x) + B(x) \times y. \tag{18.26}$$

В этой системе функции $E(x)$ и $B(x)$ определяются уравнениями (18.25). Покажем, что в шестимерном фазовом пространстве система (18.26) имеет интегральное многообразие:

$$\eta(x) - y = 0. \tag{18.27}$$

Иначе говоря, любое решение системы (18.26)

$$x = x(t, x_0, y_0), \; y = y(t, x_0, y_0),$$

проходящее в момент $t = 0$ через начальную точку x_0, y_0, лежащую на этом многообразии, будет оставаться во все время движения на этом многообразии.

Дифференцируя выражение (18.27) полным образом вдоль тра-
екторий системы (18.26), получаем формулу

$$\left\{\frac{d\eta}{dx}\right\} y - E(x) - B \times y = \left\{\frac{d\eta}{dx}\right\}\eta - E(x) - B \times \eta = \left\{\frac{d\eta}{dx}\right\}\eta - E(x) - B' \times \eta = \left\{\frac{d\eta}{dx}\right\}\eta - E(x) + \frac{\eta \times \eta \times \left(\left\{\frac{d\eta}{dx}\right\}\eta - \nabla g - \frac{1}{2}\nabla\eta^2\right)}{\eta^2}.$$

Раскрывая двойное векторное произведение, из последней формулы имеем равенство

$$\frac{d}{dt}(\eta(x) - y) = \frac{\eta\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\eta^2 - (E, \eta)\right]}{\eta^2}.$$

Множитель, стоящий в правой части этого равенства, в силу выбора электрического потенциала φ тождественно обращается в ноль. Следовательно, равенства (18.27) действительно дают интегральное многообразие в фазовом пространстве системы (18.26).

Таким образом, если инжекция заряженных частиц производится в соответствии с уравнением (18.27) в начальный момент, то дальнейшее движение частиц будет проходить на этом многообразии.

Теорема 18.3. *Если* 1) *система* $\dot{x} = \eta(x)$ *имеет асимптотически устойчивое многообразие* $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; 2) *электрический потенциал* φ *удовлетворяет условию* $(\eta, \nabla\varphi) > 0$ *при* $x_2^2 + x_3^2 > 0$, *то заряженные частицы, располагающиеся на интегральном многообразии* (18.27), *будут ускоряться и фокусироваться вдоль равновесного движения* $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Доказательство. Из предыдущих рассуждений вытекает, что все заряженные частицы, ввод которых в систему осуществляется в соответствии с равенствами (18.27) при $t = 0$, остаются на этом интегральном многообразии и в силу имеющейся асимптотической устойчивости равновесного движения $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, будут фокусироваться. Заключение об ускорении этих частиц вытекает из соотношения

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\eta^2 = \frac{d\varphi}{dt} = (\eta, \nabla\varphi). \blacksquare$$

§ 19. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С БЕСКОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Допустимые управления. — Существование оптимального управления. — Построение оптимальных управлений

1. Остановимся на оптимизации транспортировки пучков траекторий. С этой целью рассмотрим вновь систему дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\dot{X} = F(X, U, t) \tag{19.1}$$

и будем считать, что n-мерная векторная функция $F(X, U, t)$ задана при всех вещественных значениях своих аргументов, вещественна, непрерывна и непрерывно дифференцируема по отношению к компонентам вектора $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и вектора $U = (u_1, \ldots, u_r)$. Предположим, что наряду с системой (19.1) задана скалярная функция

$$W = W(X, U, t), \tag{19.2}$$

обладающая теми же свойствами, что и функции, входящие в правые части системы (19.1). Пусть D_0— некоторое множество начальных данных X_0 и D_t — образ этого множества, образованный концами траекторий в момент t, начинающихся при $t = 0$ в D_0. Тогда имеем равенство

$$D_t = X(t, D_0, t_0), \tag{19.3}$$

где $X = X(t, X_0, t_0)$ при $U = U(X, t)$ — решение системы (19.1), проходящее через точку X_0 при $t = t_0$. Здесь будем полагать $t_0 = 0$. Величина

$$\int\limits_{D_t} W(X, U(X, t), t)\,dx_1, \dots, dx_n$$

характеризует свойства пучка траекторий системы (19.1) при заданном управлении

$$U = U(X, t). \tag{19.4}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \int\limits_{D_t} W(X, U(X, t)\, t)\,dx_1, \dots, dx_n dt. \tag{19.5}$$

Ближайшей нашей задачей является отыскание в некотором классе допустимых управлений (этот класс будет уточнен ниже) такого управления, которое доставляет функционалу (19.5) оптимальное значение.

Для решения этой задачи сделаем в функционале (19.5) преобразование переменных интегрирования в многомерном интеграле по формуле (19.3). Тогда, следуя гл. II, будет иметь равенство

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \int\limits_{D_0} W(X(t, X_0, t_0), U(X(t, X_0, t_0), t), t) \times$$

$$\times\, e^{\int\limits_0^t \sum\limits_{s=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial x_s} d\tau} dx_{10} \dots dx_{n0} dt.$$

Переставляя порядок интегрирования, далее находим

$$I = \int\limits_{D_0} J dx_{10} \dots dx_{n0}, \tag{19.6}$$

где

$$J = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t} W(X, U, t)\, e^{\int\limits_0^t \sum\limits_{s=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial x_s} d\tau} dt. \tag{19.7}$$

Естественно, что интегрирование в формуле (19.7) осуществляется вдоль траекторий системы (19.1) при заданном управлении. Если управление

$$U_0 = U_0(X, t) \tag{19.8}$$

будет давать оптимальное значение функционалу (19.7) одновременно для всех начальных состояний X_0, то этим самым указанное управление будет давать оптимальное значение исходному функционалу. Таким образом, далее будем разыскивать управление (19.8), оптимальное по отношению к функционалу (19.7). Легко видеть, что задача в сильной степени упрощается, если дивергенция функции не зависит от частных производных компонент вектора U.

Заметим, что для задач электродинамики будет даже выполне условие $\operatorname{div} F \equiv 0$ для заряженных частиц, движущихся только п действием внешнего поля.

Пусть задана система n дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\, x_i + \sum_{i=1}^{r} q_{si}(t)\, u_i(t). \qquad (19.$$

Будем считать, что функции $p_{si}(t)$, $i = 1, \ldots, n$, и $q_{si}(t)$, $i = 1, \ldots,$ $s = 1, \ldots, n$, заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, ограничены и непреры ны. Воспользуемся векторной записью системы (19.9):

$$dX/dt = P(t)X + Q(t)U, \qquad (19.1$$

где X — n-мерный вектор $(x_1, \ldots, x_n)$; U — r-мерный векті $(u_1, \ldots, u_r)$; P и Q — матрицы порядка соответственно $n \times n$ и $n \times$ Предположим, что система (19.10) описывает процесс регулирован в некоторой физической системе, так что функции $u_1, \ldots, u_r$ являют управлениями, а функции $x_1, \ldots, x_n$ — фазовыми координатами си темы. Предположим, что задан функционал

$$I = \int_0^\infty W^2 dt, \qquad (19.1$$

где W^2 — квадратичная форма величин $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r$ ви

$$W^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} b_{ij} x_i u_j + \sum_{i,j=1}^{r} c_{ij} u_i u_j. \qquad (19.1$$

Правую часть (19.12) можно записать в векторно-матричной фор а именно:

$$W^2 = X^*AX + X^*BU + U^*B^*X + U^*CU,$$

где A, B, C — матрицы соответствующих размерностей. Будем сч тать, что все коэффициенты квадратичной формы (19.12) заданы п $t \geqslant 0$, вещественны, ограничены и непрерывны. Заметим, что в ве торно-матричной записи квадратичной формы (19.12) считает всегда, что матрицы A и C симметричны.

Сделаем предположение, существенное для дальнейшего, а имен будем считать, что квадратичная форма U^*CU является положител но определенной функцией своих переменных. Иначе говоря, буд считать, что существует число $a > 0$ такое, что

$$U^*CU \geqslant a \sum_{i=1}^{r} u_i^2 \text{ при всех } t \geqslant 0.$$

Определение 19.1. Управления $u_1, \ldots, u_r$ называются допустимы если выполнены условия:

1) $u_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ji}(t)\, x_i, \quad j = 1, \ldots, r,$ (19.13)

где m_{ji} — функции, заданные при $t \geqslant 0$, вещественные, ограниченные и непрерывные:

2) каждое решение системы (19.9), удовлетворяющее начальному условию $X = X_0$ при $t = t_0$, удовлетворяет неравенству

$$\| X \| \leqslant c_1 \| X_0 \| e^{-c_2 (t - t_0)} \tag{19.14}$$

при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, где c_1 и c_2 — положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от функций $m_{ji}(t)$, $j = 1, \ldots, r$; $i = 1, \ldots, n$, а

$$\| X \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ .$$

Если в систему (19.9) подставить допустимые управления, то она превратится в систему обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений, нулевое решение которой будет асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем равномерно по $t_0 \geqslant 0$. Заметим, что допустимые управления можно определить векторным равенством $U(t, X) = M(t)X$, что следует из (19.13). Выберем некоторый начальный вектор X_0 и некоторое допустимое управление $U(t, X)$. Тогда функционал (19.11) можно записать в форме

$$I(X_0, U) = \int_0^{\infty} W^2 dt.$$

В силу выражения (19.12) величина $I(X_0, U)$ будет конечной на любом допустимом управлении.

Определение 19.2. Допустимое управление $U_0 = M_0 X$ называется *оптимальным по отношению к функционалу* (19.11) при фиксированном X_0, если среди всех допустимых управлений $U(t, X) = M(t, X)$ оно доставляет величине $I(X_0, U)$ наименьшее возможное значение.

2. Перейдем теперь к отысканию условий существования оптимального управления и построению методов его вычисления.

Лемма 1. *Если $U(t, X) = M(t, X)$ есть допустимое управление, то управление $U(t, X) + \varepsilon \overline{U}(t, X)$ также будет допустимым при достаточно малом $|\varepsilon|$, где $\overline{U}(t, X) = N(t)X$. Здесь $N(t)$ — матрица порядка $r \times n$, все элементы которой заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, ограничены и непрерывны, а ε — вещественное число.*

Доказательство. С целью использования в дальнейшем некоторых результатов теории устойчивости движения изложим доказательство этой леммы несколько подробнее. Введем функцию

$$W = \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ik}(t)\, x_i x_k, \tag{19.15}$$

где величины $\beta_{ik}(t)$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, ограничены, не прерывны и таковы, что существуют два положительных числа β_1 и β_2, удовлетворяющих неравенствам

$$-\beta_1 \| X \|^2 \leqslant W \leqslant -\beta_2 \| X \|^2. \qquad (19.16)$$

Пусть задана произвольная система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = \overline{P}(t) X,$$

относительно которой известно, что она имеет асимптотически устойчивое нулевое решение, причем каждое ее решение удовлетворяет неравенствам вида (19.14). Тогда функция

$$V = \int_t^{\infty} [-W] \, d\tau \qquad (19.17)$$

может быть представлена в форме

$$V = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} x_i x_k, \qquad (19.18)$$

где α_{ik}, $i, k = 1, \ldots, n$, заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны, ограничены и таковы, что существуют два положительных числа α_1 и α_2, удовлетворяющих неравенствам

$$\alpha_1 \| X \|^2 \leqslant V \leqslant \alpha_2 \| X \|^2. \qquad (19.19)$$

Функции V и W будут связаны между собой соотношением

$$dV/dt = W \qquad (19.20)$$

или

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \left[\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_{si} x_i \right] = W. \qquad (19.21)$$

Полная производная в уравнении (19.20) вычисляется вдоль интегральных кривых рассматриваемой линейной системы и, следовательно, имеет вид левой части равенства (19.21).

Заметим, что справедливо также обратное утверждение, а именно: если существуют две функции V и W вида (19.18) и (19.15), удовлетворяющие неравенствам (19.19) и (19.16) и связанные между собой уравнением (19.21), то всякое решение рассматриваемой системы удовлетворяет неравенству вида (19.14). Итак, пусть матрица $\overline{P}$ имеет вид

$$\overline{P}(t) = P(t) + Q(t) M(t).$$

Так как управление $U(t, X) = M(t) X$ допустимо, то для выбранной функции (19.15) можно построить при помощи (19.17) функцию V, удовлетворяющую неравенствам (19.19).

Рассмотрим далее полную производную функции V, вычисленную в силу системы (19.9) при $U = M(t)X + \varepsilon N(t)X$. Тогда имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} [P(t) X + Q(t) M(t) X + \varepsilon Q(t) N(t) X]_s,$$

здесь индекс s означает, что берется s-я компонента вектора, стоящего в скобках. Из (19.20) будем иметь в этом случае уравнение

$$dV/dt = W + W_1, \tag{19.22}$$

где

$$W_1 = \varepsilon \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} [Q(t) N(t) X]_s. \tag{19.23}$$

Из формул (19.23) и (19.22) следует, что всегда можно выбрать ε столь малым по модулю, что будет выполнено неравенство

$$-\overline{\beta}_1 \|X\|^2 \leqslant W + W_1 \leqslant -\overline{\beta}_2 \|X\|^2,$$

где $\overline{\beta_1}$, $\overline{\beta_2}$ — положительные постоянные. При таких ε функции V и W удовлетворяют приведенному выше утверждению. Значит, при таких ε выполнено неравенство (19.14) для любого решения системы (19.10) при $U = [M(t) + \varepsilon N(t)]X$ и, следовательно, это уравнение является допустимым. ■

Теорема 19.1. *Для существования оптимального управления* $U_0 = M_0(t)X$ *для системы* (19.10) ***при любом выборе начального вектора*** X_0 *необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$\frac{d\Theta}{dt} + \Theta QC^{-1}Q^*\Theta + \Theta[P - QC^{-1}B^*] + [P^* - BC^{-1}Q^*]\Theta - A + BC^{-1}B^* = 0 \tag{19.24}$$

имело вещественное, непрерывное, ограниченное решение, заданное при $t \geqslant 0$ *в виде такой симметричной матрицы* $\Theta(t)$ *порядка* $n \times n$, *чтобы управление*

$$U = C^{-1}[Q^*\Theta - B^*]X \tag{19.25}$$

было допустимым. При этом матрица $M_0(t)$ *в оптимальном управлении определяется формулой*

$$M_0(t) = C^{-1}[Q^*\Theta - B^*]X.$$

Определение 19.3. Непрерывная векторная функция $U(t)$, заданная при $t \geqslant 0$, называется *допустимой для* X_0, если интегральная кривая системы (19.10) $X = X(t)$ при $U = U(t)$, $X(0) = X_0$ обладает свойством $X \to 0$ при $t \to \infty$ и интеграл

$$\int_0^\infty W^2(\tau, X(\tau), U(\tau))\, d\tau \tag{19.26}$$

сходится.

Определение 19.4. Допустимое в смысле определения 19.3 управление $U_0(t)$ называется *оптимальным*, если оно доставляет среди всех таких допустимых управлений наименьшее значение функционалу (19.26).

Замечание. Если существует ограниченное, непрерывное, заданное при $t \geqslant 0$ решение $\Theta(t)$ уравнения (19.24) такое, что управление $U_0 = C^{-1}(Q^*\Theta - B^*)X$ является допустимым в смысле определения 19.1, то существует оптимальное управление в смысле определения 19.4, задаваемое формулой

$$U_0(t) = C^{-1}(Q^*\Theta - B^*)Y_0X_0. \tag{19.27}$$

Теорема 19.2. *Уравнение* (19.24) *тогда и только тогда имеет вещественное, непрерывное, ограниченное решение* $\Theta(t)$, *заданное при* $t \geqslant 0$ *и такое, что управление* $U_0 = C^{-1}[Q^*\Theta(t) - B^*]X$ *является допустимым в смысле определения* 19.1, *когда существует совокупность* n *линейно независимых векторов* $X_{01}, \ldots, X_{0n}$, *обладающих свойствами:* 1) *система* (19.10) *имеет оптимальное в смысле определения* 19.4 *управление* $U_{0j}(t)$ *для начального условия* X_{0j}, $j = 1, \ldots, n$; 2) *управление* $\overline{U}(X, t) = M(t)X$, *где* $M(t) = U(t)[D(t)]^{-1}$, *является допустимым в смысле определения* 19.1.

Здесь $U(t)$ — *матрица,* j*-м столбцом которой является вектор* $U_{0j}(t)$; $D(t)$ — *матрица,* j*-м столбцом которой является решение уравнения* (19.10) $X_j(t)$ *при управлении* $U = U_{0j}(t)$ *с начальным условием* $X_j = X_{0j}$ *при* $t = 0$.

Следствие. *Из теоремы* 19.2 *вытекает, что построение оптимального управления* $U_0(X, t) = M_0(t)X$, *если оно существует, можно всегда выполнить следующим образом. Надо выбрать систему начальных условий* X_{0j} *(например, единичные векторы), построить для них оптимальные управления в смысле определения* 19.1 *и оптимальные траектории. Тогда матрица* $M_0(t)$ *совпадает* с $M(t)$ (см. теорему 19.2).

Если оптимальные управления и оптимальные траектории в смысле определения 19.4 построены приближенно, но оказалось, что управление $U(X, t) = M(t)X$ является допустимым, то оно будет сколь угодно близко к оптимальному управлению, если управления $U_{0j}(t)$ и соответствующие траектории $X_j(t)$ достаточно близки к оптимальным.

В теореме 19.1 указывается конструкция оптимального управления с помощью матрицы $\Theta(t)$, являющейся решением уравнения (19.24).

3. Дадим способ последовательных приближений, обеспечивающий нахождение матрицы $\Theta(t)$ с любой наперед заданной степенью точности. Пусть $W^2(t, X, U)$ — положительно определенная квадратичная форма величин $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r$, и пусть существует по крайней мере одно допустимое управление в смысле определения 19.1. Способ последовательных приближений состоит в следующем. Возьмем допустимое управление

$$U_1(X, t) = M_1(t)X$$

и рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Theta_1}{dt} = \Theta_1(P + QM_1) + (P^* + M_1^*Q^*)\Theta_1 -$$
$$- [A + BM_1 + M_1^*B^* + M_1^*CM_1] = 0. \qquad (19.28)$$

Система (19.28) имеет единственное вещественное, непрерывное решение $\Theta_1(t)$, заданное при $t \geqslant 0$ и ограниченное. Оставляя пока в стороне доказательство этого утверждения, положим

$$U_2(X, t) = M_2(t)X,$$

где

$$M_2(t) = C^{-1}(t)\ [Q^*(t)\Theta_1(t) - B^*(t)]. \qquad (19.29)$$

Тогда оказывается, что $U_2(X, t)$ будет обязательно допустимым управлением в смысле определения 19.1. Заменяя в (19.28) M_1 на M_2, получаем систему дифференциальных уравнений, имеющих единственное, вещественное, непрерывное решение $\Theta_2(t)$, заданное при $t \geqslant 0$ и ограниченное.

Аналогичным образом далее построим две последовательности:

$$\Theta_1(t),\ \Theta_2(t),\ \Theta_3(t),\ \ldots,$$
$$U_1(X, t),\ U_2(X, t),\ U_3(X, t),\ \ldots,$$

где $U_{k+1}(X, t) = M_{k+1}(t)X$ — допустимое управление при любом $k > 0$, а

$$M_{k+1}(t) = C^{-1}(t)\ [Q^*(t)\Theta_k(t) - B^*(t)],\quad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Матрица $\Theta_k(t)$ есть единственное, непрерывное, вещественное решение системы (19.28), заданное при $t \geqslant 0$ и ограниченное. Разумеется, в (19.28) $M_1(t)$ следует заменить на $M_k(t)$.

Теорема 19.3. *Если* а) $W^2(t, X, U)$ — *положительно определенная форма относительно* $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r$; б) $U_1(X, t) = M_1(t)X$ — *допустимое управление в смысле определения* 19.1, *то* 1) *для системы* (19.10) *существует управление* $U_0(t, X) = M_0(t)X$, *оптимальное по отношению к функционалу* (19.11) *для любого начального вектора* X_0; 2) *последовательность* $\Theta_1(t), \Theta_2(t), \ldots$, *сходится равномерно на каждом конечном промежутке* $[0, T]$ *к вещественной, непрерывной и ограниченной матрице* $\Theta(t)$, *заданной при* $t \geqslant 0$ *и являющейся решением уравнения* (19.24); 3) *последовательность* $U_1(X, t), U_2(X, t), \ldots$ *сходится к оптимальному управлению* $U_0(X, t) = M_0(t)X$ (*равномерно в каждой ограниченной области изменения величин* $x_1, \ldots, x_n, t$).

Следствие 1. *Каково бы ни было допустимое управление* $U_1(t, X) = M_1(t)X$, *играющее роль начального приближения, матрица* $\Theta(t)$ *не изменится ввиду единственности оптимального управления. Следовательно, от начального приближения зависит лишь быстрота сходимости последовательных приближений.*

Следствие 2. *Если матрицы* P, Q, A, B, C, M_1 — *постоянные* *и $U_1 = M_1X$ — допустимое управление, то матрица $\Theta(t)$, а следовательно, и матрица $M_0(t)$ являются постоянными и потому матрица Θ есть вещественное решение системы алгебраических уравнений*

$$\Theta QC^{-1}Q^*\Theta + \Theta[P - QC^{-1}B^*] + [P^* - BC^{-1}Q^*]\Theta - A + BC^{-1}B^* = 0. \tag{19.30}$$

Действительно, каждое приближение Θ_k является постоянной матрицей. Следовательно, предел последовательности Θ_1, Θ_2, ... постоянен.

Из теоремы 19.3 вытекает метод последовательных приближений для вычисления искомого решения системы (19.30). Система уравнений

$$\Theta_k(P + QM_k) + (P^* + M_k^*Q^*)\Theta_k - \\ - [A + BM_k] + M_k^*B^* + M_k^*CM_k] = 0, \tag{19.31}$$

где

$$M_k = C^{-1}[Q^*\Theta_{k-1} - B^*], \tag{19.32}$$

последовательно определяет матрицы Θ_1, Θ_2, ..., сходящиеся к искомому пределу. Уравнения (19.31) получаются из уравнения (19.28) заменой M_1 на M_k и Θ_1 на Θ_k при условии, что ищется постоянное решение. Сходимость такого метода последовательных приближений для отыскания решения уравнения (19.30) установлена в доказательстве теоремы 19.3 (см.: З у б о в В. И. Лекции по теории управления. М., Наука, 1975).

Рассмотрим теперь тот случай, когда система (19.1) является линейной неоднородной вида

$$dX/dt = PX + QU + F(t). \tag{19.33}$$

Пусть функционал (19.7) имеет вид

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}[W^{(2)} + W^{(1)}]dt, \tag{19.34}$$

где $W^{(2)}$ — квадратичная форма относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_r$ и $W^{(1)}$ — линейная форма относительно этих переменных с вещественными непрерывными коэффициентами.

Определение 19.5. *Управление $U^0 = M(t)X + N(t)$ будем называть допустимым, если любое решение системы* (19.33) *будет удовлетворять неравенству*

$$\|X\| \leqslant \gamma e^{\mu[t-t_0]}, \quad 2\mu < \lambda,$$

и, кроме того, значение функционала (19.34) *при таком управлении конечно.*

Заметим, что если коэффициенты линейной формы $W^{(1)}$ удовлетворяют такой же оценке, как и решение, а коэффициенты формы $W^{(2)}$ ограничены, то функционал (19.34) всегда будет принимать ограниченное значение для указанных управлений.

Определение 19.6. Среди допустимых управлений определим *оптимальное* как такое, которое будет доставлять функционалу (19.34) наименьшее возможное значение.

Задача построения оптимальных управлений для системы (19.33) может быть сведена к проблеме аналитического конструирования регуляторов путем следующих преобразований. Во-первых, система (19.1) рассматривается путем введения дополнительной координаты $\dot{x}_{n+1} = (\mu - \frac{\lambda}{2})x_{n+1}$. Во-вторых, вектор X заменяется на $Xe^{-\lambda/2}$ и вектор U — на вектор $Ue^{-\lambda/2}$. После этих преобразований система (19.33) может быть записана как линейная однородная, а функционал (19.34) можно рассматривать как квадратичный по отношению к новым искомым функциям и новым управлениям, так как векторная функция $F(t)$ в системе может быть заменена по формуле

$$F(t) = e^{-\left[\mu - \frac{\lambda}{2}\right]t} F(t)\, x_{n+1}.$$

Здесь считается $x_{n+1} = 1$ при $t = 0$. При такой замене из теорем 19.1, 19.2, 19.3 естественным образом вытекает существование и аналитическое представление оптимальных управлений в смысле определения 19.6.

Замечание. Весовая функция $e^{-\lambda t}$ может быть заменена произвольной непрерывно дифференцируемой, строго монотонной функцией $P(t)$, заданной при $t \geqslant 0$ и обладающей свойством $P(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Это обстоятельство не вносит дополнительных существенных трудностей в построение оптимальных управлений в смысле определения 19.6. Построение также будет сводиться к аналитическому конструированию, если в исходной системе дифференциальных уравнений и в исходном функционале сделать замену независимой переменной t по формуле $e^{-\tau} = P(t)$.

§ 20. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Допустимые и оптимальные управления. — Оптимальное управление движением заряженных частиц

1. Рассмотрим систему

$$\dot{X} = PX + QU + F(t) + G(X, U, t). \tag{20.1}$$

Будем считать, что векторная функция разлагается в ряд по компонентам векторов $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $U = (u_1, \ldots, u_r)$, равномерно сходящийся по $t \geqslant 0$ в некоторой окрестности начала координат $X = 0$, $U = 0$ и не содержащий членов ниже второго измерения относительно указанных переменных.

Определение 20.1. Управление

$$U = N(t) + U^{(1)} + U^{(2)} + \dots \tag{20.2}$$

называется *допустимым*, если система (20.1) при управлении (20.2) имеет решение

$$X = X(t, X_0, t_0), \tag{20.3}$$

заданное при $t \geqslant t_0$ и удовлетворяющее неравенству

$$\| X \| \leqslant a \| X_0 \| e^{-\alpha [t-t_0]} + b \tag{20.4}$$

при $t \geqslant t_0$, где a, b, α — некоторые положительные константы. Векторы $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, ..., здесь представляют собой однородные формы соответствующих степеней относительно компонент вектора X с известными векторными коэффициентами.

Пусть задан функционал

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} W(X, U, t)\, dt. \tag{20.5}$$

Определение 20.2. Допустимое управление называется *оптимальным* по отношению к функционалу (20.5), если оно доставляет этому функционалу наименьшее возможное значение.

Пусть U_1 — некоторое допустимое управление. Построим функцию V_1 как решение уравнения в частных производных:

$$\frac{dV}{dt} - \lambda V = -W. \tag{20.6}$$

Здесь полная производная функции V берется в силу системы (20.1) при $U = U_1$. При этом функция W вычисляется также на этом управлении. Построение такой функции можно осуществить следующим образом.

Подставим решение (20.3), соответствующее управлению $U = U_1$, в правую часть уравнения (20.6). Тогда (20.6) можно рассматривать как линейное уравнение и, следовательно, можно будет найти его решение:

$$V = e^{\lambda t} V_0 + \int_0^t e^{\lambda [t-\tau]} W_1 d\tau, \tag{20.7}$$

где через W_1 обозначено значение W на решении (20.3) при управлении U_1. Если теперь, пользуясь (20.3), в выражении (20.7) исключить вектор X_0 и положить

$$V_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} W_0 dt, \tag{20.8}$$

то получится функция V_1, являющаяся решением уравнения в частных производных (20.6). Заметим, что в равенстве (20.8) W_0 получается в результате подстановки в W_1 начальной точки $X_0 = 0$.

Рассмотрим теперь полную производную построенной функции V_1 в силу системы (20.1) при произвольном управлении $U = U(X, t)$:

$$\frac{dV_1}{dt} - \lambda V_1 + W(X, U, t) = e^{\lambda t} \widehat{W}(X, U, t). \tag{20.9}$$

Из предыдущего вытекает, что $\widehat{W} \equiv 0$ при $U = U_1$.

Найдем управление U_2, доставляющее наименьшее возможное значение функции (20.9) среди всех допустимых управлений, и будем считать управление U_2 допустимым.

Построим функцию V_2 по управлению U_2 точно так же, как строилась функция V_1 по управлению U_1. В результате таких построений возникают две последовательности:

$$U_1, U_2, \ldots, U_k; \quad V_1, V_2, \ldots, V_k.$$

В широком классе случаев оказывается, что $U_k \to U_0$, где U_0 — оптимальное управление.

В предыдущем параграфе доказательство такой сходимости было проведено для линейной системы. Доказательство сходимости последовательности U_k в рассматриваемом случае может быть проведено по аналогии, и утверждение здесь может быть сформулировано следующим образом. Если последовательность U_k сходится в линейной задаче, то при достаточно малом $\|F(t)\|$ последовательность U_k будет сходиться также и в нелинейной задаче. Здесь подразумевается также, что $W = W^{(1)} + W^{(2)} + \ldots$ есть ряд форм относительно компонент векторов X и U, сходящийся равномерно по отношению к $t \geqslant 0$ в некоторой окрестности начала координат $X = 0$, $U = 0$. При этом предполагается также, что квадратичная форма $W^{(2)}$ является определенно положительной.

2. Рассмотрим вновь движение заряженных частиц в электромагнитном поле, отыскиваемое системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{X} = Y, \\ &(m\dot{Y}) = E(X, t) + Y \times B(X, t). \end{aligned} \tag{20.10}$$

Вектор электрической напряженности $E(X, t)$ и магнитная индукция $B(X, t)$ определяются из уравнения Максвелла, если заданы пространственная плотность тока и плотность зарядов:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ &\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} B = J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \\ &\operatorname{div} B = 0, \\ &\operatorname{div} E = \sigma. \end{aligned} \tag{20.11}$$

Так что вектор J и скалярную функцию σ можно рассматривать как управления.

В шестимерном пространстве координат $X = (x_1, x_2, x_3)$ и импульсов $P = (p_1, p_2, p_3), P = mY$, задается плотность $\rho = \rho(X, P, t)$. Через эту плотность определяется функционал

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \int_{D_t} \rho(X, P, t)\, dx_1 dx_2 dx_3 dp_1 dp_2 dp_3 dt. \tag{20.12}$$

Задача управления заряженными частицами состоит в построении таких управлений, которые доставляют оптимальное значение функционалу (20.12).

Изложим метод последовательных приближений применительно к решению указанной задачи. Во-первых, сведем ее к рассматриваемой ранее задаче оптимизации функционала интегрального типа, и, во-вторых, установим, что получаемое в результате этого сведения оптимальное управление будет давать оптимальную плотность тока и оптимальную плотность зарядов. Имея в виду указанный план действий, сделаем в кратном интеграле замену переменных по формулам

$$X = X(t, X_0, P_0),\ P = P(t, X_0, P_0), \tag{20.13}$$

где X и P представляют решение системы (20.10), проходящее через точку X_0, P_0 при $t = 0$. В результате этой замены получим равенства

$$\int_{D_t} \rho(X, P, t)\, dx_1 dx_2 dx_3 dp_1 dp_2 dp_3 =$$

$$= \int_{D_0} \rho(X(t, X_0, P_0), P(t, X_0, P_0), t)\, e^{\int_0^t \operatorname{div} F d\tau} dx_{10} dx_{20} dx_{30} dp_{10} dp_{20} dp_{30}, \tag{20.14}$$

где через F обозначен шестимерный вектор, образующий правые части системы (20.10), дивергенция от которого берется по переменным $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$. Непосредственным вычислением устанавливаем, что $\operatorname{div} F \equiv 0$. Учитывая это обстоятельство и подставляя равенства (20.14) в функционал (20.12), а затем меняя порядок интегрирования, найдем

$$I = \int_{D_0} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \rho(X, P, t)\, dt dx_{10} dx_{20} dx_{30} dp_{10} dp_{20} dp_{30}. \tag{20.15}$$

Будем считать, что функционал (20.15) тогда и только тогда имеет оптимальное значение, когда функционал

$$\widehat{I} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \rho(X, P, t)\, dt \tag{20.16}$$

имеет оптимальное значение для всех X_0, P_0 из области D_0. Здесь предполагается, что интегрирование ведет вдоль интегральных кривых (20.13) системы (20.10) при заданных управлениях J, σ.

Предположим, что существуют оптимальные управления J_0, σ_0 по отношению к функционалу (20.16). Зададим некоторое многообразие начальных данных

$$\varphi_0(X_0, P_0) = 0, \tag{20.17}$$

где φ_0 — векторная функция, удовлетворяющая условиям общего характера. Из соотношения (20.17) вытекает тогда, что во все время движения функции (20.13) будут связаны соотношением

$$\varphi(t, X, P) = 0, \tag{20.18}$$

где $\varphi = \varphi_0$ при $t = 0$.

Действительно, вторую группу уравнений (20.10) можно тогда представить в форме

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{p_i}{m} = E(X) + \frac{P \times B}{m}. \tag{20.19}$$

Естественно, что здесь масса выражена через вектор P.

Дифференцируя соотношение (20.18) по x_i и t частным образом, найдем равенства

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left\{\frac{d\varphi}{dP}\right\} \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \left\{\frac{d\varphi}{dP}\right\} \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{20.20}$$

Исключая с помощью (20.20) частные производные из вектора (20.19), получаем для вектора φ систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{p_i}{\partial x_i} + \left\{\frac{d\varphi}{dP}\right\}\left[E(X) + \frac{P \times B}{m}\right] = 0. \tag{20.21}$$

Рассмотрим многообразие (20.17) как начальное многообразие для системы (20.21). Тогда векторная функция (20.18) будет решением задачи Коши для этой системы. Имея в виду это обстоятельство, разрешим равенство (20.18) относительно P, для чего достаточно, чтобы якобиан функции φ_0 по переменным P_0 был отличен от нуля на многообразии (20.17). В результате нахождения из (20.18) векторной функции $P = P(X, t)$ можно определить векторную функцию

$$\eta_0(X, t) = P/m. \tag{20.22}$$

В системе уравнений

$$\dot{X} = U, \tag{20.23}$$

где $U = (u_1, u_2, u_3)$ — некоторое управление, и

$$\hat{I} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \rho(X, Um, t)\,dt \tag{20.24}$$

будем считать, что m выражено теперь через U на основе формулы $P = Um$.

Обозначим через U_0 управление, оптимальное по отношению к функционалу (20.24). Оптимизацию будем производить среди управлений, стесненных условием $U = \eta_0$ при $t = 0$; при этом оказывается, что

$$U_0 = \eta_0. \tag{20.25}$$

Действительно, для оптимального управления U_0 в задаче (20.23), (20.24) можно построить электромагнитное поле E, B, инициирующее такие же движения в системе (20.10), как и система (20.23) при управлении $U = U_0$. Это электромагнитное поле единственным образом определяет пространственную плотность тока J и плотность зарядов σ. Следовательно, значения функционалов (20.24) и (20.16) будут совпадать для таких полей. А потому должно выполняться равенство (20.25), так как η_0 есть оптимальное распределение скоростей по отношению к выбору величин J и σ. Разумеется, здесь молчаливо предполагается, что выполнено требование единственности оптимальных управлений.

Таким образом, решение задачи построения оптимальных управлений для функционала (20.16) на заданном многообразии (20.17) сводится к отысканию оптимальных управлений в более простой задаче (20.23), (20.24), для которой разработан метод последовательных приближений.

О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений азрешима, вообще говоря, в тех случаях, в которых разрешима нальная задача. Однако краевые условия должны задаваться при гом при достаточно близких значениях независимой переменной и ыть совместными.

Пусть задана система n дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t),\ t \in (a; b),\ x \in G, \tag{1}$$

це G — область n-мерного евклидова пространства E_n. Рассмотрим эвокупность поверхностей

$$g_s(x) = c_s,\ s = 1, \ldots, n,$$

це функции g_s заданы при $x \in G$, c_s — произвольные постоянные.

Пусть $t_0 \in (a, b)$ и $x_0 \in G$ произвольно заданы.

Теорема 1. *Если* 1) *векторная функция $f(x, t)$ вещественна и нерерывна при $t \in (a, b)$, $x \in G$ и удовлетворяет условию Липшица тносительно компонент вектора x;* 2) *функции g_s, $s = 1, \ldots, n$, ещественны и непрерывно дифференцируемы и матрица Якоби* $\left(\begin{matrix} g_1, \ldots, g_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{matrix}\right)$ *— неособая при $x = x_0$, то существуют положительые числа h и r такие, что система* (1) *будет иметь при $t \in [t_0 - h,$ $+ h]$ единственное непрерывно дифференцируемое решение $x = x(t)$, довлетворяющее краевым условиям*

$$g_s(x(t_s)) = c_s,\ s = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

ри любом выборе величин t_s и c_s, $s = 1, \ldots, n$, подчиненных условию

$$|t_s - t_0| \leqslant h, \qquad \sum_{s=1}^{n} (c_s - c_{s0})^2 \leqslant r^2, \quad c_{s0} = g_s(x_0).$$

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1 *и матрица Якоби* $\left(\begin{matrix} g_1, \ldots, g_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{matrix}\right)$ *в точке $x = x_0$ имеет ранг $k < n$, то существуют положительные числа r и h такие, что система* (1) *имеет семейство непрерывно дифференцируемых решений $x = x(t)$, заданное при $t \in [t_0 -$ $- h, t_0 + h]$ и зависящее от $n - k$ произвольных постоянных. Каждое решение этого семейства удовлетворяет краевым условиям $g_{sj}(x(t_j)) =$ $= c_{sj}$, $j = 1, \ldots, k$, при любом выборе величин t_j и c_{sj}, удовлетворяющих условиям*

$$\sum_{j=1}^{k} (\dot{c}_{s_j} - c_{s_{j_0}})^2 \leqslant r^2, \text{ где } c_{s_{j_0}} = g_{s_j}(\dot{x}_0).$$

Номера $s_1, \ldots, s_k$ выбраны так, что ранг матрицы $D\begin{pmatrix} g_{s_1}, \ldots, & g_{s_k} \\ x_1, \ldots, & x_k \end{pmatrix}$ *при* $x = x_0$ *равен* k.

Теорема 3. *Если правые части системы* (1) *удовлетворяют условиям теоремы Каратеодори, то существуют числа $h > 0$ и $r > 0$ такие, что система* (1) *будет иметь абсолютно непрерывное решение $x(t)$ при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, удовлетворяющее почти везде в этом промежутке системе* (1).

При этом это решение будет удовлетворять краевым условиям $x_s(t_s) = x_s$, $s = 1, \ldots, n$, каковы бы ни были величины t_s, и вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие условиям $|t_0 - t_s| \leqslant h$, $\|x - x_0\| \leqslant r_0$.

ДОБАВЛЕНИЕ 2

К ОПТИМИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ

Рассмотрим сначала линейную систему

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + F(t). \tag{1}$$

Пусть задан функционал

$$I = \int_0^T [\omega^{(2)}(t, x, u) + \omega^{(1)}(t, x, u) + \omega^{(0)}(t)]\, dt, \tag{2}$$

где $\omega^{(2)}$ — квадратичная форма, $\omega^{(1)}$ — линейная форма по отношению к компонентам вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и вектора $u = (u_1, \ldots, u_r)$. Будем считать, что элементы матриц P, Q, компоненты вектора F и коэффициенты форм $\omega^{(2)}$, $\omega^{(1)}$, $\omega^{(0)}$ являются непрерывными, ограниченными, вещественными функциями, заданными при $t \geqslant 0$.

Пусть управление $u(t)$ задано. Требуется найти движение, доставляющее функционалу I наименьшее возможное значение.

Теорема 1. *Для того чтобы для каждого заданного управления существовало единственное движение системы* (1), *доставляющее наименьшее возможное значение функционалу I, необходимо и достаточно, чтобы матрица*

$$\int_0^T Y^*(t)\, A(t)\, Y(t)\, dt$$

была определенно положительной, где $Y(t)$ — фундаментальная система решений для системы $\dot{x} = P(t)x$ с начальным условием $Y(0) = E$

и $A(t)$ — матрица квадратичной формы по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_n$, входящим в $\omega^{(2)}(t, x, u)$.

Замечание. Теорема 1 содержит условие наблюдаемости движений линейной системы.

Действительно, если вектор $z(t) = (z_1, \ldots, z_k)$ определяется в результате наблюдения на промежутке $[0, T]$ и $z(t) = H(t)x$, то, положив

$$I = \int_0^T [H(t)x - z(t)]^2 \, dt,$$

приходим к заключению, что задача оптимизации и задача наблюдаемости совпадают, где $H(t)$ — матрица размерности $\{k \times n\}$ с вещественными, ограниченными, непрерывными элементами. Следовательно, положительная определенность матрицы $\int_0^T Y^* H^* H Y \, dt$ является необходимым и достаточным условием наблюдаемости.

Рассмотрим теперь квазилинейную систему

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + F(t) + \mu G(t, x, u, \mu) \tag{3}$$

и функционал

$$I = \int_0^T [\omega^{(2)}(t, x, u) + \omega^{(1)}(t, x, u) + \omega^{(0)}(t) + \mu G_0(t, x, u, \mu)] \, dt. \tag{4}$$

Пусть управление u задано и является, как и выше, измеримой ограниченной функцией, заданной на промежутке $[0, T]$. Требуется найти движение системы (3), доставляющее наименьшее возможное значение функционалу (4).

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то можно указать числа $\mu_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что при любом μ, $|\mu| < \mu_0$ для каждого измеримого ограниченного управления $|u| \leqslant r_0$ существует единственное движение, доставляющее наименьшее возможное значение функционалу (4). При этом $|x - x^0| \leqslant \delta_0$ при $t \in [0, T]$, где x^0 — оптимальное движение линейной системы, получающееся при $\mu = 0$.*

Замечание. Доказательство теоремы 2 проводится при условии непрерывности и непрерывной дифференцируемости компонент вектора G и функции G_0 по отношению к компонентам векторов u, x, μ.

Пусть теперь управление u задано так, что система (1) имеет семейство решений, удовлетворяющее краевым условиям

$$\int_0^T [dG_1] \, x(t) = H_1, \tag{5}$$

где G_1 — матрица, элементы которой — функции ограниченной вариации, интеграл понимается в смысле Стильтьеса, а H_1 — вектор с постоянными компонентами.

Не ограничивая общности, можно считать, что это семейство решений будет удовлетворять соотношению

$$A_1 x_0 = B_1, \tag{6}$$

где x_0 — вектор начальных условий, A_1 — матрица, имеющая k ортогональных строк, и B_1 — постоянный вектор. Построим матрицу A_2 путем добавления строк в матрице A_1 так, чтобы A_2 была ортогональная.

Теорема 3. *Если управление и в системе* (1) *задано так, что задача* (6) *разрешима, но неоднозначно, то, для того чтобы существовало единственное оптимальное движение, доставляющее наименьшее возможное значение функционалу* (2), *необходимо и достаточно, чтобы подматрица, составленная пересечением последних $n-k$ строк и $n-k$ столбцов матрицы* $\int\limits_0^T A_2 Y^* A Y A_2^* \, \mathrm{d}t$, *была положительно определенной.*

Вернемся к рассмотрению квазилинейной системы.

Теорема 4. *Если управление и задано так, что краевая задача* (6) *разрешима для системы* (3), *но не однозначно, то при выполнении условий теоремы* (3) *можно указать μ_0 и δ_0 такие, что при любом $|\mu| < \mu_0$ будет существовать единственное решение системы* (3), *удовлетворяющее условиям* (6) *и доставляющее функционалу* (4) *наименьшее возможное значение. При этом*

$$|x - x^0| < \delta_0 \text{ при } t \in [0, T],$$

где x^0 — оптимальное движение, соответствующее $\mu = 0$, существующее по теореме (3).

Замечание. В задачах оптимизации движений встречается тот случай, когда задается целое семейство управлений. Если это семейство зависит от нескольких произвольных постоянных, которые выбираются из условия (6), а также из условия минимизации функционала, тогда путем расширения исходной системы можно этот случай свести к рассмотренному выше.

ДОБАВЛЕНИЕ 3

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРАЕКТОРИИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = F(X, t), \tag{1}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор вещественного евклидова пространства E_n; F — n-мерная векторная функция, заданная при $X \in E_n$, $t \in (-\infty, +\infty)$, непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по компонентам вектора X. Пусть

$$X = Y(t) \tag{2}$$

есть некоторое невозмущенное решение системы (1), заданное при $t \geqslant 0$. Обозначим через $M(t_0)$ множество всех точек $Y(t)$ при $t \geqslant t_0$.

Определение 1. Будем говорить, что траектория невозмущенного движения (2) системы (1) *устойчива*, если при любом $t_0 \geqslant 0$ для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать положительное число $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ такое, что при $\|X_0 - Y_0\| < \delta$ будет $\rho(X(t, X_0, t_0), M(t_0)) < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$. Здесь через $X(t, X_0, t_0)$ обозначено решение системы (1), проходящее через точку X_0 при $t = t_0$, причем $Y_0 = Y(t_0)$. Величина $\rho(X(t, X_0, t_0), M(t_0))$ есть расстояние от изображающей точки $X(t, X_0, t_0)$ до множества $M(t_0)$.

Определение 2. Будем говорить, что траектория невозмущенного движения (2) *асимптотически устойчива*, если она устойчива, и число δ в определении (1) можно выбрать так, чтобы также было $\rho(X(t, X_0, t_0), M(t_0)) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Обозначим через $P(t)$ нормальную гиперплоскость к невозмущенному движению в точке $Y(t)$. Эта плоскость аналитически будет определяться уравнением

$$\left([X - Y(t)],\ \dot{Y}(t)\right) = 0.$$

Для определенности будем считать, что начальная точка X_0 располагается в плоскости $P(t_0)$. Если величина $\|X_0 - Y_0\|$ достаточно мала, то будет существовать момент τ первого пересечения решения $X(t, X_0, t_0) = X(t)$ с нормальной гиперплоскостью $P(t)$, следовательно, для этого момента τ будет иметь место равенство

$$\left([X(\tau) - Y(t)],\ \dot{Y}(t)\right) = 0. \tag{3}$$

Введем в плоскости $P(t)$ декартову систему координат. Пусть столбцы матрицы B представляют собой орты этой координатной системы. Тогда получим равенство

$$X(\tau) = Y(t) + B(t)\xi, \tag{4}$$

где ξ представляет собой $(n-1)$-мерный вектор, компоненты которого являются функциями аргумента t. Воспользуемся соотношениями (3) и (4) и построим систему дифференциальных уравнений для величины τ и вектора ξ. Дифференцируя соотношение (3) по t, находим равенство

$$\dot{\tau} = \frac{\dot{Y}^2 - ([X(\tau) - Y(t)], \ddot{Y})}{(X'(\tau), F(Y, t))}. \tag{5}$$

Здесь через $X'(\tau)$ обозначена производная по τ от вектора X. Дифференцируя тождество (4) по t и домножая затем слева на матрицу AB^*, где $A = (B^*B)^{-1}$ и B^* — матрица, транспонированная по отношению к B, получаем равенство

$$\dot{\xi} = AB^*(X'(\tau)\dot{\tau} - \dot{Y} - \dot{B}\xi). \tag{6}$$

Если исключить в равенствах (5) и (6) вектор $X(\tau)$ и $X'(\tau)$, то получится система

$$\dot{\tau} = G(\xi, t, \tau), \tag{7}$$

$$\dot{\xi} = H(\xi, t, \tau), \tag{8}$$

где

$$G(\xi, t, \tau) = \frac{\dot{Y}^2 - (B\xi, \ddot{Y})}{(F(Y + B\xi, \tau), F(Y, t))},$$

$$H(\xi, t, \tau) = AB^*(F(Y + B\xi, \tau) G(\xi, t, \tau) - F(Y, t) - \dot{B}\xi).$$

Легко видеть, что система (8) имеет очевидное решение $\xi = 0$ при $\partial F/\partial t = 0$ и интегрирование этой системы может производиться отдельно от уравнения (7).

Теорема 1. *Если* 1) *функция F не зависит от переменной t;* 2) *решение $\xi = 0$ системы* (8) *устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) по Ляпунову, то траектория невозмущенного движения* (2) *системы* (1) *будет устойчива (асимптотически устойчива, неустойчива) в смысле определений* 1, 2.

Теорема 2. *Если решение $\tau = t$, $\xi = 0$ системы* (7), (8) *будет устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) по Ляпунову, то и решение* (2) *системы* (1) *будет устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) по Ляпунову.*

Пример. Пусть система (1) является линейной системой с постоянными коэффициентами $\dot{X} = PX$. Собственные числа вещественной постоянной матрицы P будем считать различными и такими, что среди них имеется одно положительное, а остальные отрицательные или имеют отрицательные действительные части.

Тогда любое решение такой системы не будет устойчиво по Ляпунову, однако из приведенных выше теорем вытекает, что любое неограниченное движение при $t \to +\infty$ будет иметь асимптотически устойчивую траекторию и любое ограниченное движение при $t \to +\infty$ будет иметь неустойчивую траекторию.

Замечания. 1. Аналогично теореме 1.2 можно рассмотреть проблему устойчивости интегральных многообразий системы (1).

2. Следует заметить, что теория, рассмотренная в этом добавлении, впервые была разработана для решения проблем устойчивости периодических движений.

ДОБАВЛЕНИЕ 4

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Укажем необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования, а также дадим конструкцию оптимальных управлений. Пусть заданы две управляемые системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}_i = P_i x_i + Q_i u_i + F_i, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

где x_i — вектор фазового состояния i-й системы, имеющий размерность n_i; u_i — вектор управлений, имеющий размерность r_i.

Элементы матриц P_i, Q_i и векторов F_i заданы при $t \geqslant 0$, вещественны, непрерывны и ограничены.

Обозначим через $x_i^0 = x_i$ при $t = 0$ начальное состояние и через $x_i(T) = x_i$ при $t = T$ — конечное состояние управляемых систем (1). Будем считать, что компоненты векторов u_i являются функциями времени с суммируемым квадратом на промежутке преследования $[0, T]$.

Определение 1. Будем говорить, что *задача преследования* при движении из начальных состояний x_1^0, x_2^0 *разрешима на промежутке* $[0, T]$, если при любом выборе управления u_2 существует управление u_1 такое, что будут выполнены условия

$$H_1 x_1 = H_2 x_2 \text{ при } t = T, \tag{2}$$

где H_1 и H_2 — некоторые постоянные матрицы размерности $\{s \times \times n_i\}$, здесь s — число строк, n_i — число столбцов.

Определение 2. Будем говорить, что *задача преследования разрешима из любого начального состояния* x_1^0, если при любом выборе управления u_2 найдется управление u_1, такое, что имеют место условия (2).

Пусть Y_i — фундаментальная система решений для линейной системы

$$\dot{x}_i = P_i x_i, \quad Y_i = E_i \text{ при } t = 0,$$

где E_i — единичные матрицы.

Введем обозначения:

$$A_i(0, T) = \int_0^T B_i B_i^* \mathrm{d}t, \quad B_i = Y_i^{-1} Q_i,$$

$$\xi_i = Y_i(T)\left[x_i^0 + \int_0^T Y_i^{-1} F_i \mathrm{d}t\right].$$

Теорема 1. *Для того чтобы задача преследования из начального состояния x_1^0, x_2^0 была разрешима на промежутке $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы столбцы матрицы $H_2 Y_2(T) A_2(0, T)$ и вектор $H_1\xi_1 - H_2\xi_2$ располагались в линейном подпространстве, натянутом на векторы, образующие столбцы матрицы $H_1 Y_1(T) A_1(0, T)$.*

Замечание. Не ограничивая общности, можно считать, что ранг матриц H_i совпадает с s.

Теорема 2. *Для того чтобы задача преследования была разрешима из любого начального положения x_1^0 на промежутке $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $H_1 Y_1(T) A_1(0, T)$ совпадал с s.*

Введем в рассмотрение функцию

$$L = L(x_1(T), x_2(T)).$$

Поставим вопрос об отыскании *оптимальных стратегий* u_i^0, осуществляющих решение задачи преследования и удовлетворяющих условию

$$L(x_1(T, u_1^0), \; x_2(T, u_2^0)) =$$

$$= \min_{u_1} \max_{u_2} L(x_1(T, u_1), \; x_2(T, u_2)) =$$

$$= \max_{u_2} \min_{u_1} L(x_1(T, u_1), \; x_2(T, u_2)),$$

где $x_i = x_i(t, u_i)$ — решение системы (1) с начальным условием x_i^0 и управлением u_i-$u_i(t)$.

Теорема 3. *Если функция*

$$\Phi(z_1, z_2) = L(\xi_1 + Y_1(T) A_1(0, T) z_1, \quad \xi_2 + Y_2(T) A_2(0, T) z_2)$$

имеет седловую точку z_1^0, z_2^0 на линейном многообразии

$$H_1\xi_1 + H_1 Y_1(T) A_1(0, \; T) z_1 = H_2\xi_2 + H_2 Y_2(T) A_2(0, \; T) z_2,$$

так что $\Phi(z_1^0, \; z_2) \leqslant \Phi(z_1^0, z_2^0) \leqslant \Phi(z_1, z_2^0)$, то оптимальные стратегии u_i^0 существуют и могут быть представлены в форме $u_i^0 = B_i^* z_i^0 + v_i$, $i = 1, 2$, где B_i^*, как и выше, — матрица, транспонированная по отношению к матрице B_i, векторы v_i имеют суммируемые с квадратом компоненты и удовлетворяют условию $\int_0^T B_i v_i \mathrm{d}t = 0$, а в остальном произвольны.

Замечание. Теорема 3 дает конструкцию программных управлений, являющихся оптимальными стратегиями. Если с помощью этих стратегий рассчитать центр преследования

$$x_1(T) = \xi_2 + Y_1(T) A_1(0, T) z_1^0,$$

то в ряде случаев можно построить синтезированное управление, линейное относительно x_1.

Теорема 4. *Если выполнено условие теоремы 3 и столбцы матрицы B_1^* линейно независимы на любом интервале $[t, T]$, где $t \in [0, T]$, то можно указать вариант оптимальной стратегии u_1^0 в синтезированном виде $u_1^0 = Mx_1 + N$, где*

$$M = -B_1^* A_1^{-1}(t, \; T) Y_1^{-1}(t),$$

$$N = B_1^* A_1^{-1}(t, T) \left[Y_1^{-1}(T) x_1(T) - \int_t^T Y_1^{-1}(\tau) F_1(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right].$$

ЯВЛЕНИЯ КОНВЕРГЕНЦИИ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ *

Здесь мы укажем критерии существования и асимптотической устойчивости периодических решений в системах с последействием, неуточнимые на рассматриваемом классе функционалов. Пусть задана система n обыкновенных дифференциальных уравнений с последействием

$$\dot{X} = AX + F(t, \ X(t+\theta)), \tag{1}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)^*$; A — постоянная вещественная, неособая матрица размера $n \times n$; $F(t, \Phi) = (f_1(t, \Phi), \ldots, f_n(t, \Phi))^*$ — вещественные и непрерывные функционалы, определенные при $t \geqslant 0$, $\Phi(\theta) \in C_n[-h, \ 0]$; $h \geqslant 0$ — const. Пусть, кроме того, функционалы f_i удовлетворяют условиям Липшица вида

$$|f_i(t, \Phi(\theta)) - f_i(t, \Psi(\theta))| \leqslant \sum_{j=1}^{n} l_{ij} \sup_{-h\leqslant\theta\leqslant 0} |\varphi_j(\theta) - \psi_j(\theta)|,$$

$$i = 1, \ldots, n, \ t \geqslant 0;$$

$$\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)^*, \quad \Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^* \in C_n[-h, \ 0],$$

где l_{ij} — неотрицательные постоянные, не зависящие от выбора функций $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$.

Введем обозначения: S — постоянная, неособая матрица размера $n \times n$ такая, что матрица $B = S^{-1}AS$ имеет каноническую форму Жордана; $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — собственные числа матрицы A; $|G|$ — матрица, получающаяся из матрицы G путем замены ее элементов модулями этих элементов; C — матрица, получающаяся из матрицы B путем замены ее диагональных элементов λ_i их вещественными частями $\operatorname{Re}\lambda_i$; L — матрица размера $n \times n$ с элементами l_{ij};

$$\|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Теорема 1. *Если* 1) *выполняются неравенства*
$\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, k$; $\| \, |S| \, \| C^{-1} \| \, S^{-1}|L| \, \| \leqslant \alpha < 1$;
2) *функции* $f_i(t, 0)$ *ограничены при* $t \geqslant 0$, *то для любой вещественной и непрерывной векторной функции* $\Phi(t)$, $t \in [-h, 0]$ *система* (1) *име-*

* Это добавление написано Н. В. Зубовым.

ет при $t \geqslant 0$ *единственное решение* $X(t, \Phi)$, *удовлетворяющее условик* $X(t, \Phi) = \Phi(t)$, $t \in [-h, 0]$, *причем это решение ограничено.*

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы* 1 *и функциональ* $f_i(t, \Phi)$ *являются* μ-*периодическими по переменной* t, *т. е.*

$$f_i(t, \Phi(\theta)) = f_i(t + \mu, \Phi(\theta)), \quad i = 1, \ldots, n, \; t \geqslant 0,$$

то система (1) *имеет единственное* μ-*периодическое решение, причел это решение равномерно экспоненциально устойчиво в целом.*

Замечание. Если выполняются условия теоремы 1 и функциональ $f_i(t, \Phi)$ не зависят от переменной t, то у системы (1) существует единственно положение равновесия, причем это положение равновесия равномерно экспоненциально устойчиво в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белецкий В. В.** Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., 1965.
2. **Беллман Р.** Динамическое программирование. М., 1961.
3. **Блисс Г. А.** Лекции по вариационному исчислению. М., 1962.
4. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1974.
5. **Голубев В. В.** Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М., 1953.
6. **Гюнтер Н. М.** Курс вариационного исчисления. М.—Л., 1941.
7. **Зубов В. И.** Аналитическая динамика гироскопических систем. Л., 1970.
8. **Зубов В. И.** Использование динамики относительного движения при управлении вращательным движением. — Избранные проблемы прикладной механики, 1974.
9. **Зубов В. И.** Каноническая структура векторного силового поля. Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., 1970.
10. **Зубов В. И.** Теория оптимального управления. Л., 1966.
11. **Ишлинский А. Ю.** К теории сложных систем гироскопической стабилизации. — Прикладная математика и механика, 1958, т. 22, № 3.
12. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. М., 1968.
13. **Крылов А. Н., Крутков Ю. А.** Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. М., 1932.
14. **Ленерт Б.** Динамика заряженных частиц. М., 1967.
15. **Летов А. М.** Динамика полета и управление. М., 1969.
16. **Локк А. С.** Управление снарядами. М., 1958.
17. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. М., 1961.
18. **Ляпунов А. М.** Общая задача об устойчивости движения. М., 1950.
19. **Митропольский Ю. А.** Метод усреднения в нелинейной механике. К., 1971.
20. **Понтрягин Л. С.** и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
21. **Пуанкаре А.** О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М., 1947.
22. **Цыпкин Я. З.** Теория линейных импульсных схем. М., 1963.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Владимир Иванович Зубов

ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Редактор А. И. Селиверстова. Младшие редакторы: С. А. Доровских, Н. П. Майкова. Художник Ю. Д. Федичкин. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Е. И. Герасимова. Корректор Г. И. Кострикова.

ИБ № 2156

Изд. № ФМ-637 Сдано в набор 23.09.80. Подп. в печать 19.10.81. Т-25487. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. газетная. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 18 усл. печ. л. 18,19 усл. кр.-отт. 17,22 уч.-изд. л. Тираж 8000 экз. Зак. № 775. Цена 75 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К 51, Неглинная ул., д. 29/14

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА» ВЫПУСТИТ В СВЕТ В 1982 ГОДУ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ СЛЕДУЮЩИЕ УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ:

Ильичев А. В., Волков В. Д., Грущанский В. А. **Эффективность проектируемых элементов сложных систем:** Учеб. пособие.— 20 л., ил.— В пер.: 90 к.

Рассматриваются основные понятия и особенности исследования эффективности элементов сложных систем в проектно-конструкторской организации. Излагаются методы, модели и задачи исследования эффективности непосредственно на этапе проектирования элементов сложных технических систем с летательными аппаратами. Пособие отличается прикладной направленностью и широким диапазоном применения излагаемых вопросов в промышленности.

Крайнов В. П., Смирнов Б. М. **Излучательные процессы в атомной физике:** Учеб. пособие. — 15 л., ил. — 75 к.

Книга является пособием для изучения курсов «Квантовая теория излучения» и «Квантовая электродинамика». Принцип построения книги: изложение основ курса занимает малую часть ее объема; большая часть фактического материала приводится в форме задач с решениями; необходимый математический аппарат дан в приложениях. Все внимание сосредоточено на нерелятивистском характере излучательных переходов в атомных системах.

Люстерник Л. А., Соболев А. И. **Краткий курс функционального анализа:** Учеб. пособие. — 20 л., ил., — В пер.: 90 к.

Пособие написано в соответствии с программой по курсу функционального анализа для студентов университетов. Оно является результатом обработки лекций, читаемых в Воронежском университете. При этом широко использовалась книга тех же авторов «Элементы функционального анализа» (2-е издание вышло в 1965 г.), переведенная на ряд иностранных языков. Изложение материала ведется на высоком методическом и научном уровне, имеется большое число примеров и приложений.

Матвеев А. Н. **Электричество и магнетизм:** Учеб. пособие. — 30 л., ил. — В пер.: 1 р. 30 к.

Изложение курса начинается с экспериментального обоснования теории электричества и магнетизма и базируется на релятивистских представлениях, известных студентам из предшествующих разделов курса общей физики. Связь между электрическими и магнитными полями выявляется на самой ранней стадии изложения. Наряду с традиционными достаточно подробно изложены новые вопросы курса: элементы электроники твердого тела, флуктуации в цепях, аномальный скин-эффект, волноводы и резонаторы.

Книга представляет собой третий том курса общей физики для университетов и вузов. Первый том «Механика и теория относительности» вышел в 1976 г., второй — «Молекулярная физика» — в 1981 г.

Уважаемые читатели!