

526
7-96 II

121

D. O. JO'RAYEV

**GEODEZIK O'LCHASHLARNI
MATEMATIK ISHLASH
NAZARIYASI**

2-QISM

**ENG KICHIK KVADRATLAR
USULI**

DARSLIK

526
7-96 II

1244

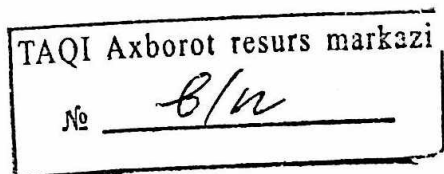
O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

D. O. JO'RAYEV, H. D. JO'RAYEVA

GEODEZIK O'LCHASHLARNI MATEMATIK ISHLASH NAZARIYASI

2-QISM
ENG KICHIK KVADRTLAR USULI

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
"Geodeziya, kartografiya va kadastr" yo'nalishi va turdosh yo'nalishida
ta'lim olayotgan talabalari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya
etiladi



"ILM ZIYO ZAKOVAT"
TOSHKENT – 2020

t.me/books_taqi

65.290-2

Q 18

UDK: 821.401.00

Jo'rayev D.O., Jo'rayeva H.D. Geodezik o'lchashlarni matematik ishlash.
Darslik / – Toshkent: "Ilm ziyo zakovat", 2020. – 160 bet.

KBK: 65.290-2

Darslikning 2 qismida eng kvadratlar usulining geodezik tenglashtirishdagi qullaniladigan asosiy usullari yoritilgan. Ko'p xil o'lchashlarni birgalikda tenglashtirish nazariyasi: parametrik va korrelat tenglashtirish usullarining mohiyati, algoritmi va ularni EHM da hisoblash usullari yoritilgan.

«Geodeziya, kartografiya va kadastr» yo'nalishi va ushbu fanni o'rganadigan turdosh yo'nalish talabalari uchun ham mo'ljallangan.

Taqrizchilar:

Avchiyev Sh.K., texnika fanlari nomzodi, dotsent (TAQI)

Muborakov X.M., texnika fanlari nomzodi, dotsent (O'ZMU)

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2013-yil, 20-dekabrda 484-sonli buyrug'iga asosan «Geodeziya, kartografiya va kadastr» yo'nalishi va turdosh yo'nalishida ta'lim olayotgan talabalar uchun darslik sifatida nashr etishga ruxsat berildi (grif № 484-116).

ISBN 978-9943-6034-2-4

Jo'rayev D.O., Jo'rayeva H.D. 2020

"Ilm ziyo zakovat" 2020

ANNOTATSIYA

Darslikning 2 qismida eng kichik kvadrat usulining geodezik tenglashtirishda qo'llaniladigan asosiy usullari yoritilgan. Ko'p xil o'lchashlarni birgalikda tenglashtirish nazariyasi: parametrik, korrelat va ko'p guruhli tenglashtirish usullarining mohiyati, algoritmi va ularni EHM da hisoblash usullari chet el tajribalarini hisobga olib yoritilgan.

Darslik «Geodeziya, kartografiya va kadastr» yo'nalishi va ushbu fanni o'rganadigan turdosh yo'nalish talabalari uchun ham mo'ljallangan.

АННОТАЦИЯ

Во второй части учебника приведены основные методы, применяемые в геодезическом уравнительном вычислении способом наименьших квадратов. Отражены теория совместного уравнивания неоднородных величин параметрическим, коррелятным и многогрупповым способом с учетом современных зарубежных практик на ЭВМ

Учебник рассчитано на студентов направления "Геодезия, картография и кадастр" для самостоятельного изучения курса.

ANNOTATION

In the second part of the textbook, the main methods used in geodetic equalization in the least squares method are given. The theory of simultaneous equalization of inhomogeneous quantities by a parametric, correlative and multigroup method is reflected, taking into account modern logging practices on a computer

The textbook is intended for students of the field "Geodesy, Cartography and Cadastre" for self-study of the course.

CHAPTER 10

The first part of the chapter is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation $f(x) = \int_0^x \sin t dt$. It is shown that $f(x)$ is a periodic function with period 2π and that its graph is a sine wave. The second part of the chapter is devoted to the study of the properties of the function $g(x)$ defined by the equation $g(x) = \int_0^x \cos t dt$. It is shown that $g(x)$ is a periodic function with period 2π and that its graph is a cosine wave.

CHAPTER 11

The first part of the chapter is devoted to the study of the properties of the function $h(x)$ defined by the equation $h(x) = \int_0^x \sin t dt$. It is shown that $h(x)$ is a periodic function with period 2π and that its graph is a sine wave. The second part of the chapter is devoted to the study of the properties of the function $k(x)$ defined by the equation $k(x) = \int_0^x \cos t dt$. It is shown that $k(x)$ is a periodic function with period 2π and that its graph is a cosine wave.

CHAPTER 12

The first part of the chapter is devoted to the study of the properties of the function $l(x)$ defined by the equation $l(x) = \int_0^x \sin t dt$. It is shown that $l(x)$ is a periodic function with period 2π and that its graph is a sine wave. The second part of the chapter is devoted to the study of the properties of the function $m(x)$ defined by the equation $m(x) = \int_0^x \cos t dt$. It is shown that $m(x)$ is a periodic function with period 2π and that its graph is a cosine wave.

KIRISH

Geodezik ishlarning asosiy qismini geodezik asboblari orqali o'lchashlar tashkil qiladi. O'lchashlar hamma texnika fanlarida bosh axborot manbai bo'lib xizmat qiladi. O'lchashlar natijasida sonli miqdor olinadi. Geodeziyada bu sonli miqdorlar ko'p o'lchanadi. O'lchash sifatini oshirish maqsadida yana kerakli miqdorlardan tashqari ortiqcha miqdorlar ham o'lchanadi. Geodezik asboblari orqali olingan bosh informatsiyani qayta hisoblab sonli qiymat olish uchun matematik hisoblash ishlari olib boriladi. Olingan natijalarni matematik qayta ishlangan ma'lumot ilmiy va amaliy ahamiyatga ega. O'lchash natijasida yo'qolmaydigan kichik xatoliklar borligi matematik qayta ishlash usullarining qanchalik zarurligini ko'rsatadi. Bundan tashqari o'lchashlarni sifatini va ishonchligini ta'minlaydigan ortiqcha o'lchamlarning ko'pligi natijalarni matematik qayta ishlashda matematik usullarning eng qat'iy usullarini talab qiladi. Shunday qilib, o'lchash natijalarini matematik qayta ishlashning asosiy maqsadi natijaning haqiqiy qiymatga yaqin bo'lgan aniq qiymatini olish, natija sifatini aniqlash va natijani ishonchli baholash. Bu masalalarni matematik qayta ishlashda miqdorning optimal qiymatini topish, o'lchash sifatini aniqlash va natija aniqligini baholash **kichik kvadratlar usuli** orqali amalga oshiriladi.

Geodezik o'lchashlarni matematik hisoblash nazariyasi vazifasi quyidagilardan iborat:

- Geodezik o'lchash natijalarini qayta ishlashda kichik kvadratlar usulini asoslash;
- kichik kvadratlar usuli prinsipini amalga oshirishda usullarni yaratish;
- geodezik o'lchashlarni matematik qayta ishlashni zamonaviy matematik algaritm bilan ta'minlash;

O'lchashlarni matematik qayta ishlash uchun juda muhim o'lchangan miqdorlar orasida matematik munosabat mavjud. Qayta ishlash natijasida u qanoatlantirilishi kerak. Teskari holatda ortiqcha o'lchashlar befoyda bo'ladi. Shunday qilib, ko'p o'lchangan miqdorlarni birgalikda matematik qayta ishlash masalasining matematik mazmuni juda katta ahamiyatga ega.

Tenglashtirish masalasining paydo bo'lish sharti va sababi ortiqcha o'lchangan miqdorlarning borligi va yo'qotib bo'lmaydigan kichik o'lchash xatoliklarining bo'lishi. Ortiqcha o'lchangan miqdorlarning bo'lmashligi yechiladigan masalaning bo'lmashligidir. Agar bir o'lchangan miqdor bir martadan topilganda edi, tenglamani tuzish mumkin bo'lmasdi va bog'lanmaslik xatoligi to'g'risida gap bo'lishi mumkin emasdi. Lekin ortiqcha o'lchangan miqdorsiz kuzatishni ishonchli tekshirish ham yo'q va aniqlikni oshirishning foydali yo'llari ham yo'q.

2-QISM

ENG KICHIK KVADRATLAR USULI

13. ENG KICHIK KVADRATLAR USULINING ASOSLARI BIR NECHTA O'LGACHAN QIYMATLARNI BIRGALIKDA TENGLASHTIRISH MASALASINING MOHIYATI

O'lgachlar xatoliklari nazariyasi ko'p marta o'lgachan bitta miqdorni matematik hisoblash tartibini o'rganadi. Lekin geodezik amaliyotda kerakli o'lgach miqdorlaridan tashqari ortiqcha o'lgach miqdorlari ham o'lgachadi. Masalan, uchburchakda hamma ichki burchaklarining o'lgachishi. Ortiqcha miqdorlar aniqlanayotgan miqdorning o'lgach aniqqligini oshirish va kerakli miqdorlar bilan matematik bog'liqlikda bo'lgan aniqlanayotgan miqdorning aniqqligini eng ishonchli aniqlash imkoniyatini beradi. Bundan tashqari olingan bog'lanmaslik xatosining ishonchli tekshirish bilan ta'minlanadi va o'lgachlarning sifatsizligi aniqlanadi.

Xatoliklar nazariyasi o'lgachan miqdorlar orasidagi matematik bog'liqlikni e'tiborga olmagan holda ko'p marta o'lgachan bitta miqdorning eng ishonchli qiymatini topish qoidalarini o'rganadi. Har xil sharoitda o'lgachan miqdorlar orasidagi matematik bog'liqlikni e'tiborga olgan holda teng aniqqlikka ega bo'lmagan miqdorlarning eng ishonchli qiymatini topish masalasi kitobning ikkinchi qismida bayon etiladi.

Ta'kidlaymizki, kursning ikkinchi qismi qoidasiga ko'ra o'lgachan miqdorlarning qiymatini topish **tenglashtirish** deyiladi. Ko'pincha **"tenglashtirilgan"** ham deyiladi, lekin bu termin noqulay ko'rinadi. Chunki teng aniqqlikdagi o'lgach miqdorlari **"tenglashtirilgan"** dan keyin teng aniqqlikka ega bo'lmay qoladi.

Tabiiki, savol tug'iladi: kursning birinchi va ikkinchi qismidagi yechiladigan masalani umumlashtirish mumkin emasmi? Buni qilish mumkin, lekin masala murakkablashadi, hech qanday foyda chiqmaydi. Tanlangan tenglashtirishni bo'lib bajarish tartibi masalani juda soddalashtiradi, bunda o'lgachlarning hamma natijalarini birgalikda qayta ishlash kabi oxirgi natijani beradi. Aytilganlarni e'tiborga olib, hamma keyingi mulohazalarda, bitta o'lgach natijalari bo'yicha bitta o'lgachan miqdori uchun ko'pmarta o'lgachlardan o'rtacha vazn qaraladi.

O'lgachlarni matematik qayta ishlash uchun juda muhim o'lgachan miqdorlar orasida matematik munosabat mavjud. Qayta ishlash natijasida u qanoatlantirilishi kerak. Teskari holatda ortiqcha o'lgachlar befoyda bo'ladi. Shunday qilib, ko'p o'lgachan miqdorlarni birgalikda matematik qayta ishlash

xatoligini yo'q qilish va o'lchash natijalarini to'g'rilash. Boshqa masala — tenglashtirish masalalari bo'yicha aniqlikni baholash.

$$x_i + v_i \quad (i=1, \dots, n),$$

orqali belgilab,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_n(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (13.3)$$

topamiz.

Ko'rinib turibdiki, bog'lanmaslik xatoligini yo'qotish masalasini ko'p yo'llar bilan hal qilish mumkin. Imkonli yo'llardan qaysi birini tanlash mumkin. Masalani aniq hal qilish absolyut qiymat bo'yicha o'lchash xatoligi miqdoriga teskari ishoradagi v_i tuzatmani topishdir. Lekin bunday masala yechimsizdir.

Demak, birinchidan tuzatma v_i bog'lanmaslik xatoligini yo'qotadi, ikkinchidan xatolik absolyut qiymat bo'yicha o'lchashning haqiqiy xatoga yaqin ekanligi isbotlaydi. Ikkinchi talabni bajarishda birinchi talab tuzatmalarning ishorasi xatoliklar ishorasiga teskari ekanligini ta'minlaydi.

Yana bir nechta qo'shimcha mulohazalar qilamiz.

Tenglashtirishdan maqsad - (13.2) tenglamadagi W_i bog'lanmaslik xatoligini yo'qotish uchun $x_1, \dots, x_n$ o'lchangan miqdorlarga v_i tuzatmalarni teng taqsimlash.

Bog'lanmaslik xatoligi yo'qotishdan maqsad bitta, ya'ni har xil yo'llar bilan hisoblandigan har bir topiladigan miqdor qiymati bir-biri bilan tengdir. Buni masalaning nomi aytib turibdi. Bog'lanmaslik xatosini yo'qotishdan tashqari tenglashtirishning yana maqsadi – hamma qidirilayotgan miqdorlar aniqlanayotgan qiymati aniqligini oshirish.

13.1. ENG KICHIK KVADRATLAR USULINING PRINSIPI

Yuqoridagi qo'yilgan masalani yechishda tuzatmalarni topish uchun o'lchash xatoliklari absolyut qiymatining qandaydir ehtimoliy xossalari masalasini ko'rib chiqish kerak. Bunda o'lchashlarning tasodifiy xatolari hisobga olinadi.

Xatoliklar $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ majmuasining ehtimolini topamiz. Ehtimollarni ko'paytirish nazariyasiga asosan topilayotgan ehtimol

$$P(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_1^2}{m_1^2} + \dots + \frac{\Delta_n^2}{m_n^2} \right)} \frac{d\Delta_1}{m_1}, \dots, \frac{d\Delta_n}{m_n}. \quad (13.4)$$

teng.

Tenglik (13.4) dan ko'rinib turibdiki, $R(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ miqdorning eng katta qiymatiga (13.4) tenglamaning o'ng tomonidagi daraja ko'rsatkichining eng kichik absolyut qiymati kamlik qiladi, ya'ni quyidagi shartga mosdir

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i^2}{m_i^2} = \min. \quad (13.5)$$

Olingan (13.5) shartni e'tiborga olib, agar v_i tuzatma uchun shartni qo'ysak

$$\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{m_i^2} = \min. \quad (13.6)$$

Ehtimoliy tushuncha bo'yicha v_i tuzatmalar absolyut qiymatining yig'indisi xatoliklar absolyut qiymatiga yaqinlashadi. Chunki (13.3) shart bo'yicha φ_i funksiyaning haqiqiy xatoligi bo'lgan tuzatma xatolikni yo'qotishi kerak. Tuzatma ishorasi bo'yicha mos ravishda o'lchashlar natijasi haqiqiy xatoliklariga teskari ishorada bo'lishi kerak.

Hamma $\frac{v_i^2}{m_i^2}$ qiymatlarni μ^2 ga ko'paytirib, tenglama (13.6) quyidagi qulay ko'rinishga keltiramiz

$$\left[\frac{\mu^2}{m^2} v^2 \right] = [pv^2] = \min \quad (5.7)$$

Funksiyalarni doimiy miqdorga ko'paytirish nuqtanining minimum koordinatasiga ta'sir qilmaydi. Qiymat $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$ o'lchangan miqdorlar vazni deyiladi.

Tenglama (13.7) matematik ifodalangan eng kichik kvadratlar prinsipidir

Eng kichik kvadratlar usuli tenglamaning yagona yechimini beradi va qator imkoniyatlarga ega. U quyidagi qulayliklarga ega:

1) minimum shartida ikkinchi darajali v_i bo'lishi yirik tuzatmalarni chegaralaydi, shuning uchun teng aniqlikdagi o'lchash miqdorlarida tuzatmalar ko'pmi ozmi o'lchangan miqdorlarga teng taqsimlanadi;

2) teng aniqlikdagi o'lchashlar natijasida vazn r_i v_i^2 da tuzatma eng aniq natijaga kamayadi, noaniq natijaga tuzatma ko'payadi.

Ikki aytilgan xossalar ham qo'yilgan fikr talabiga mos keladi. Kichik kvadratlar prinsipi foydasiga ishonchli dalil bor.

Kichik kvadratlar prinsipi bo'yicha noma'lumlarning tenglashtirilgan qiymatini topish eng aniq natijaga olib keladi. Bu kitobning birinchi bo'limida olingan quyidagi o'rtacha vazn formulasini keltirib chiqarishda ko'rinib turibdi.

Qandaydir X qiymat n marta o'lchangan va mos $r_1, \dots, p_n$ vaznli $x_1, \dots, x_n$ natija olingan. Eng kichik kvadratlar prinsipiga asoslangan x eng ishonchli qiymatini topamiz, ya'ni $[pv^2] = \min$ sharti bo'yicha.

Chunki

$$v_i = x - x_i$$

tenglama (13.7) ko'rinishga keltirish mumkin:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i (x - x_i)^2 = \min.$$

Ma'lumki, bu shartni bajarish uchun

$$\frac{df}{dx} = 0$$

yoki

$$\sum_{i=1}^n 2p_i (x - x_i) = 0.$$

Endi topish qiyin emas

$$2x \sum_{i=1}^n p_i - 2 \sum_{i=1}^n p_i x_i = 0$$

va

$$x = \frac{[px]}{[p]} = \bar{x}$$

Bu formula o'rtacha vazn formulasidir.

Eng kichik kvadratlar usulining yana bir afzalliklaridan biri uning umumiyligidir. Eng kichik kvadratlar usulida tenglashtirish masalasi boshqa

usullarga qaraganda eng ason yechiladi.

13.2. TENGLASHTIRISH MASALALARINI YECHISHNING ASOSIY USULLARI

Eng kichik kvadratlar usuli bilan bir nechta miqdorlarni birgalikda tenglashtirish masalasi eng qulay masaladir.

Agar o'zgaruvchi v_i mustaqil shartli tenglamalar (13.3) bilan bog'liq bo'lsa, funksiyaning minimumini topish talab qilinadi

$$[pv^2] = \min,$$

Bu masalani yechishda ikkita asosiy usul qo'llaniladi:

Bu masalani yechish uchun ikkita usul qo'llaniladi: noaniq ko'paytmali Lagranj usuli va absolyut ekstremum usuli. Buni qo'llashda, hamma o'lchangan X_i qiymatlar qandaydir bog'lanmagan noma'lumlar parametrlari funksiyasi ko'rinishida beriladi.

Kombinirovan usullar ham mavjud.

Lagranj usuliga asoslangan tenglashtirish birinchi usulini **korrelat usuli** deb ataymiz. Bu usul avval adabiyotlarda **shartli tenglamalar usuli** ham deb atalgan.

Ikkinchi usulning mohiyati quyidagicha:

O'lchangan X_i ($i = 1, \dots, n$) miqdorlar funksiyasi bo'lgan shunday mustaqil noma'lumlar parametrlari $T_1, \dots, T_k$ tanlanadi. Berilgan funksiya quyidagicha

$$X_i = f_i(T_1, \dots, T_k) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (13.8)$$

Unda yozish mumkin

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (13.9)$$

bu yerda $x_i - X_i$ miqdorning o'lchangan qiymati; t_v - tanlangan ($v = 1, 2, \dots, k$) parametrlarning tenglashtirilgan qiymati.

Keyinchalik yozamiz

$$v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) - x_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (13.10)$$

Shunday qilib, bir-biri bilan bog'liq bo'lgan hamma qidirilayotgan v_i tuzatmalar, bog'lanmagan t noma'lumlarning funksiyalari bilan almashtirish mumkin. Unda $[pv^2] = \min$ sharti, (13.10) tenglikni e'tiborga olganda quyidagicha yoziladi

$$\sum_{i=1}^n p_i \{f_i(t_1, t_2, \dots, t_k) - x_i\}^2 = \min$$

Ya'ni, shartli ekstremum masalasini absolyut ekstremum masalasiga keltiramiz.

Ikkinchi usul tenglashtirishning **parametrik** usuli deb ataymiz.

Bu usul geodezik adabiyotlarda yana «kerakli noma'lumlar usuli» nomi

qidirilayot miqdorlar qiymatini birdaniga topish uchun. Masalan, tekislikda birorta punktning koordinatasini, ikkita to'g'ri burchakli yassi koodinatalari x_1, y_1 va x_2, y_2 berilgan bo'lsa, topish talab qilinsin. Bu holda uchburchakning beshta elementi o'lchangan bo'lishi kerak – uchta burchagi va ikkita tomoni. Bunda har qanday ikkita elementini o'lchash kerak. Kerakli noma'lumlar sifatida uchburchakning ikkita elementini tanlash mumkin, misol uchun uchburchakning aniqlanayotgan uchi qidirilayotgan x_3 absessani va y_3 ordinatani tanlash mumkin, yani ikkita elementini.

Kursning birinchi qismida ta'kidlanganidek, o'lchash amaliyotida kerakli miqdorlarni o'lchash bilan chegaralanib qolmaydi. Doimo ortiqcha miqdorlar ham o'lchanadi. Ya'ni uchburchaklarni o'lchashdagi geodezik ishlarda, uni yechish uchun bitta tomon va ikkita burchak kifoya bo'lsa ham, uchta burchak o'lchanadi. Teodolit, nivelir yo'llari ikkitadan kam bo'lmagan tayanch punktlarga bog'lanadi. To'g'ri kesishtirish ikkita yo'nalish yetarli bo'lsa ham, kamida uchta yo'nalish bilan amalga oshiriladi. Teskari kesishtirish uchta yo'nalish yetarli bo'lsa ham, kamida to'rtta yo'nalish bilan amalga oshiriladi. Ketma ket triangulyatsiya to'rlarida kerakli o'lchashlar ikki marta ko'p bajariladi va h.k.

Tushunarli, kerakli va ortiqcha miqdorlar soni sharoit va masalaning qo'yilishiga bog'liq, tenglashtirish natijasida nima olish talab qilinishiga.

Alohida miqdorlarni ko'p marta o'lchaganda aniqlikning oshishi ma'lum o'lchashlar sonigacha bo'lishi mumkin. Undan keyin o'lchashlar aniqligi, sistematik xatoliklarining ta'siri yo'qotish mumkin bo'lmaganligi uchun yoki bu xatolikning yeyishmasligi uchun, kamayadi. Ortiqcha miqdorlarni o'lchash aniqlanayotgan miqdorning aniqligini oshirishda quyidagi katta qadam bo'ladi. U boshqa sharoitda bajarilgan o'lchash natijalari qidirilayotgan miqdor uchun qo'llaniladi. Masalan, uchburchakda uchinchi burchakni o'lchash hamma burchaklar aniqligini oshiradi. Bunda ikkita qiymat olinadi: bevosita o'lchangan va yassi uchburchakning ikki qolgan burchagigi yig'indisini 180° ga to'ldirib hisoblanganligi. Asosiy tenglashtirish usullarini ko'rib chiqamiz.

13.3. TENGLASHTIRISHNING PARAMETRIK USULI

Kerakli noma'lumlar $T_1, \dots, T_k$ tanlanib, o'lcangan miqdorlar $X_1, \dots, X_n$ orqali funktsiya ko'rinishida ifodalanadi

$$X_i = f_i(T_1, \dots, T_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (13.14)$$

Bu ko'rinishdagi tenglama **parametrik tenglamalar** bog'liqligi deyiladi. Kerakli noma'lumlarni tanlash – tenglashtirish usulida eng muhim o'rin tutadi. Chunki yechiladigan tenglamaning murakkabligi va hisoblash hajmi unga bog'liq. O'lcangan miqdorlar tenglashtirilgan qiymatini $x'_i = x_i + v_i$ bilan belgilaymiz. Bunda v_i – o'lcangan x_i qiymatlarga tuzatma. Kerakli noma'lumlarning tenglashtirilgan qiymatini t bilan belgilaymiz va yozamiz

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (13.15)$$

yoki

$$v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) - x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13.16)$$

Endi shart

$$[pv^2] = \min$$

Quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin

$$\sum_{i=1}^n p_i [f_i(t_1, \dots, t_k) - x_i]^2 = \min. \quad (13.17)$$

Ifodaning (13.17) chap tomonida faqat t noma'lum. Shuning uchun uni qandaydir funktsiya $F(t_1, \dots, t_k)$ ko'rinishida yozish mumkin. Ya'ni

$$F(t_1, \dots, t_k) = \min. \quad (13.18)$$

Shunday qilib, shartli ekstremum usulida tenglashtirish masalasini yechish kerakli T noma'lumlarni absolyut ekstremum masalasiga kiritish yo'li bilan bajariladi. Buning uchun $t_1, \dots, t_k$ noma'lumlar olinishi kerak bo'lgan aniq tenglamalar sistemasini tuzish kerak

$$\frac{\partial F}{\partial t_v} = 0 \quad (v = 1, \dots, k), \quad (13.19)$$

Lekin, agar (13.19) tenglama chiziqsiz ko'rinishda bo'lsa, unda uning yechimi amaliyotda yechib bo'lmaydigan masaladir. Shuning uchun masala quyidagicha yechiladi.

t_v parametr uchun u yoki bu yo'l bilan, berilgan aniqlikda $f_i(t_1, \dots, t_k) = x_i + v_i$ funksiyani to'g'ri chiziqli ko'rinishga Teylor qatoriga yoyish yo'li bilan taxminiy qiymat topiladi.

Bunda yoyishning ikkinchi va yuqori darajali e'tiborga olinmaydi. Bu tenglashtirish masalani yechiladigan qiladi. Bundan tashqari yechish algoritmiga keltiradi, ya'ni bir xil darajali hisoblashga keltiradi.

Noma'lumlar $t_1, \dots, t_k$ ni ko'rinishga keltiramiz

$$t_v = t_v^0 + \tau_v \quad (v=1, \dots, k) \quad (13.20)$$

Bu erda t_v^0 taxminiy qiymat, τ_v — unga tuzatmalar. Bu qiymatlarni t_v ga qo'yib, (13.16) tenglamani olamiz

$$v_i = f_i(t_1^0 + \tau_1, \dots, t_k^0 + \tau_k) - x_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (13.21)$$

Funksiya f_i ni Teylor qatoriga yoyib topamiz,

$$v_i = f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) + \left(\frac{\partial x'_i}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \dots + \left(\frac{\partial x'_i}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k + R - x_i \quad (13.22)$$

Bu yerda R — hamma yoyilgan hadlar yig'indisi. Taxminiy qiymatlar $t_1^0, \dots, t_k^0$ shunday aniqlikda topilishi kerakki, R qiymatni hisobga olmasa ham bo'lsin.

Eslatamiz, t_v^0 ning juda aniq qiymatini topish juda murakkab bo'ladi, masalan juda katta triangulyatsiya to'rini tenglashtirishda.

(13.22) tenglamadagi R qiymatni hisobga olmay yozamiz,

$$v_i = \left(\frac{\partial x'_i}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \dots + \left(\frac{\partial x'_i}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k + \{f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i\} \quad (13.23)$$

Belgilaymiz

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial t_1}\right)_0 &= a_{i1}, \quad \left(\frac{\partial x'_i}{\partial t_2}\right)_0 = a_{i2}, \dots, \left(\frac{\partial x'_i}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik} \\ f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i &= x_i^0 - x_i = l_i \end{aligned} \right\} \quad (13.24)$$

Endi tengliklar sistemasini yozish mumkin

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (13.25)$$

Chiziqli (13.25) tenglama **tuzatmalar parametrik tenglamasi** deyiladi. Uni qisqacha qilib **tuzatmalar tenglamasi** deb ataydilar.

Agar funksiya $f_i(t_1, \dots, t_k)$ chiziqli ko'rinishda bo'lsa, unda taxminiy qiymat t_v^0 ni hisoblamasa ham bo'ladi.

Tenglama (13.9) ko'rinishda bo'lsin

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) = a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \dots + a_{ik}t_k + L_i$$

Unda

$$l_i = L_i - x_i$$

va tuzatmalar tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi

$$v_i = a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \dots + a_{ik}t_k + l_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (13.26)$$

Lekin hisoblash amaliyotida taxminiy qiymat t_i^0 doimo hisoblanadi, bunda parametrik tenglama chiziqli ko'rinishda bo'ladi.

Unda

$$l_i = a_{i1}t_1^0 + a_{i2}t_2^0 + \dots + a_{ik}t_k^0 + L_i - x_i$$

va tuzatmalar tenglamasi (13.25) ko'rinishga keladi. Bu keyingi tenglashtirish hisoblarini yyengillashtiradi. Chunki t qiymatning o'rniga τ kichik tuzatmani hisoblash osonroq.

(13.25) tenglamadagi $[pv^2] = \min$ shartni hisobga olib yozamiz:

$$[pv^2] = \sum_{i=1}^n p_i (a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i)^2 = F(\tau_1, \dots, \tau_k) = \min \quad (13.27)$$

Masala aniq tenglamalar sistemasi bilan yechiladi

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_v} = 0 \quad (v = 1, \dots, k) \quad (13.28)$$

Hosila olamiz va ularni nolga tenglaymiz

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = 2p_1v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} + \dots + 2p_nv_n \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = 0 \quad (13.29)$$

(13.25) ifodani hisobga olib yozamiz

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau_1} = a_{i1}$$

Endi, (13.29) ifodani 2 ga qisqartirib yozamiz

$$\frac{\partial F}{2\partial \tau_1} = \sum_{i=1}^n p_i v_i a_{i1} = [pa_1v] = 0 \quad (13.30)$$

O'sha (13.25) tengsizlikka asosan topamiz

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau_2} = a_{i2}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \tau_3} = a_{i3}, \dots, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \tau_k} = a_{ik},$$

va xuddi shu asosda (13.30) ifoda topilgan edi

$$[pa_2v] = 0, \quad [pa_3v] = 0, \dots, [pa_kv] = 0.$$

Demak, tenglamalarni topdik

$$\left. \begin{aligned} [pa_1v] &= 0 \\ [pa_2v] &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ [pa_kv] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.31)$$

miqdorni X_i tenglashtirish ikkita bosqichda bajarilishi kerak: boshlanishida ko'p marta o'lgangan har bir miqdor uchun o'rta vaznni olish, keyinchalik ushbu qiymatlarning vazni va matematik aloqalarini hisobga olib, birinchi bosqichda olingan qiymatlarni tenglashtirish.

Deylik, $v_i = v'_i + v''_i$ bunda v'_i - tenglashtirishning birinchi bosqichidan keyin olingan o'lgangan natijalarga tuzatma, v''_i hamma o'lgangan miqdorlarni birgalikda tenglashtirishdan olingan ikkinchi tuzatma. v''_i tuzatma hamma o'lgangan natijalarga bir xil miqdorda taqsimlanadi.

Hamma o'lgangan natijalarni birgalikda tenglashtirish (13.31) tenglamaga olib keladi va quyidagi ko'rinishda keltirish mumkin

$$0 = [pa, v] = [pa, v'] + [pa, v''] \quad (v = 1, \dots, k)$$

Lekin

$$[pa, v'] = a_{1v}[pv']_1 + \dots + a_{nv}[pv']_n$$

bunda yig'indi $[pv']_i$ - ko'p o'lgangan alohida X_i qiymat uchun. Bu o'lgashlar uchun har bir X_i miqdor va a_{iv} koeffitsiyent bir xil bo'ladi.

Xatoliklar nazariyasidan ma'lumki (IV.52 formulaga qarag), $[pv]_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) shuning uchun $[pa, v] = 0$ va quyidagicha

$$[pa, v] = [pa, v''] \quad (13.33)$$

Yig'indi $[pa, v'']$ ko'rib chiqamiz.

Tuzatmalar tenglamasida bir xil ko'p o'lgangan miqdorlar uchun a_{iv} koeffitsiyentlar va v''_i tuzatmalar doimiy bo'ladi va quyidagicha yozamiz

$$[pa, v''] = a_{1v}v''_1[p]_1 + \dots + a_{nv}v''_n[p]_n$$

Lekin $[p]_i$ — o'rtacha vazn vazni, ya'ni o'lgangan miqdorlar birinchi bosqich tenglashtirilgan qiymatining vazni. Shuning uchun, $[p]_i = P_i$ belgilab, (13.33) formulani e'tiborga olib, yozamiz

$$\sum_{j=1}^N p_j a_{jv} v''_j = \sum_{i=1}^n P_i a_{iv} v''_i \quad (v = 1, \dots, k).$$

bunda N — hamma o'lgashlar soni, n — o'lgangan miqdorlar soni (albatta, $N > n$).

Shunday qilib, $[pv'']$ — min shartni saqlagan tenglama, $[Pv''] = \min$ o'lgangan miqdorlar qiymatining xatoliklar nazariyasi qoidasi bo'yicha oldindan to'g'rilangan $[Pv''] = \min$ shartni saqlagan tenglama bilan bir xildir. Ya'ni $v = v' + v''$ tuzatma $[pv''] = \min$ shartdan kelib chiqadigan (13.31) tenglamani qanoatlantiradi.

Parametrik usulda tenglashtirish masalasi quyidagi ketma-ketlikda yechiladi:

1. O'lgangan $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlar (unga hisoblanadigan v_i tuzatmalar)

shunday o'lchamda hisoblanadiki, x_i miqdorning m_i o'rta kvadratik xatolik imkoni boricha birga yaqin bo'lsin. Chiziqli miqdorlar detsimetr yoki santimetrda, burchaklar sekunda, kichik aniqlikdagi burchaklar minutda ifodalansin

Vazn hisoblash uchun koeffitsiyent k formula bo'yicha

$$p_i = \frac{k}{m_i^2}$$

shunday tanlanadiki, vazn imkoni boricha birga yaqin son bo'lsin. Bular hisoblashni yengillashtiradi.

2. Kerakli $t_1, \dots, t_k$ noma'lumlar shunday tanlanadiki, tuzatmalarning parametrik (13.25) tenglamasi eng oddiy ko'rinishda bo'lsin. Noma'lumlari bir-biri bilan matematik bog'liqlikda bo'lmasligi kerak, hamma o'lchangan miqdorlar tanlangan noma'lumlar orqali ifodalangan bo'lishi kerak. Noma'lum sifatida o'lchangan va o'lchanmagan qiymatlar olingan bo'lsin.

3. Hamma o'lchangan miqdorlar quyidagi funksiya ko'rinishida ifodalanadi

$$x'_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i = 1, \dots, n),$$

bunda $x'_i = x_i + v_i$

4. Noma'lumlarning taxminiy $t_1^0, \dots, t_k^0$ qiymati topiladi va ular tenglashtirilgan qiymatlar qanday o'nli sonlar bilan ifodalangan bo'lsa shunday sonlar bilan ifodalanadi. (13.24) formula bo'yicha koeffitsientlari va tuzatmalar (13.25) tenglamasining ozod hadi topiladi. Noma'lum t uchun shunday o'lcham qo'yiladiki, bunda tuzatmalar tenglamasi koeffitsiyentlari miqdori darajasi imkoni boricha birga yaqin bo'lsin.

5. Normal' (13.32) tenglamasi tuziladi va yechiladi. Natijada $\tau_1, \dots, \tau_k$ tuzatma olinadi.

6. Tenglama (13.25) yordamida tuzatmalar v_i ($i = 1, \dots, n$) qiymati hisoblanadi.

7. $x'_i = x_i + v_i$ tenglamadan o'lchangan miqdorlar tenglashtirilgan qiymati topiladi va $t_v = t_v^0 + \tau_v$ ($v = 1, \dots, k$) tenglamadan noma'lum tenglashtirilgan qiymati t hisoblanadi.

8. Hamma hisoblashlar quyidagi tenglik bilan tekshiriladi

$$x'_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i = 1, \dots, n),$$

Shuni nazarda tutish kerakki, bu tengliklarni tekshirishda xatolik hisoblash xatoligidan kelib chiqmaydi. Balki noma'lumlarning $t_1^0, \dots, t_k^0$ taxminiy

qiymatining noaniqligi va tuzatmalar $\tau_1, \dots, \tau_k$ absolyut qiymatining cheksiz katta bo'lishi. Chiziqsiz funksiya $f_i(t_1^0 + \tau_1, \dots, t_k^0 + \tau_k)$ hadlarni yoyishda e'tiborga olishga to'g'ri keladi.

Bunday holda tenglashtirishdan keyin olingan $t_1, \dots, t_k$ miqdorlar aniqlangan taxminiy qiymatlar deb qarash kerak va tenglashtirishni ular bilan qayta bajarish kerak.

Ko'pincha kerakli aniq $t_1^0, \dots, t_k^0$ qiymatini olish imkoniyati yo'qligi tenglashtirishning boshida ko'rinadi. Unda $t_1^0, \dots, t_k^0$ qiymatni aniqlash bo'lib xizmat qilgan birinchi tenglashtirishda hisoblashlarni oddiylashtirishga yo'l qo'yish kerak: hisoblashlarni oxirgi tenglashtirish hisoblariga nisbatan kam o'nli sonlar bilan ishlash.

13.4. MATRITSA IFODASIDA PARAMETRIK USULDA ENGLASHTIRISHNING NAZARIYASI.

Tuzatmalar parametrik tenglamalar sistemasi (13.25) matritsa ifodasida quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$V=AT+L \quad (13.33)$$

Bu ifodasiga kiruvchi matritsa elementlarining yoyilgan ko'rinishi quyidagicha

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{nn} \end{bmatrix};$$

Eng kichik kvadratlar usuli matritsa ifodasida quyidagi ko'rinishda bo'ladi

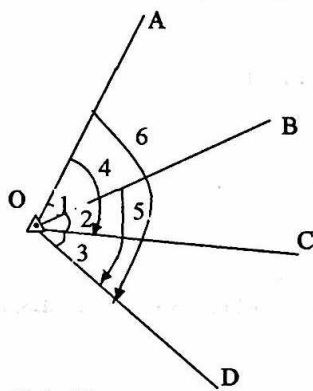
$$VPV^T = \min$$

13.5. PARAMETRIK USUL BILAN TENG ANIQLIKDAGI O'LCHASHLAR NATIJASINI TENGLASHTIRISH MISOLI

1-Masala. Parametrik usul bilan ko'p kombinatsiyada o'lchangan burchaklar natijasini tenglashtiring. 13.1-rasmda burchaklar O'lchash sxemasi, 13.1-jadvalda burchaklar o'lchash natijasi berilgan. Tenglashtirish natijasida quyidagilar olinishi

kerak: hamma burchaklarning tenglashtirilgan qiymati, o'lgangan burchaklarning o'rta kvadratik xatosi, ikkinchi, uchinchi va oltinchi burchaklarning tenglashtirilgan qiymatining o'rta kvadratik xatolari.

O'lgangan miqdorlar.



13.1-chizma

13.1-jadval

Burchaklar №	Burchaklar r	O'lgangan qiymatlar "x,"
1.	AOB	58° 15' 41,8"
2.	BOS	38 10 06.8
3.	COD	61 01 07.0
4.	AOC	96 25 45.1
5.	BOD	99 11 13.3
6.	AOD	157 26 52.6

1. Kerakli noma'lumlarni (parametrlarni) tanlash

Bu masalada oltita o'lgangan burchakdan har qanday 3 tasini bilish kifoya va shular orqali qolganlarini aniqlash uchun. Demak kerakli noma'lumlarni (parametrlar) $k=3$. Agar $k=2$ deb xato qabul qilsak, unda parametrlar orqali qolgan 4 ta burchakni topish qiyin bo'ladi. Agar $k=4$ deb xato qabul qilsak, unda parametrlardan bittasini boshqalari orqali ifodalashga to'g'ri keladi va u kerakli o'lcham bo'lolmaydi. Parametrlar bog'lanmagan (mustaqil) bo'lishi kerak.

Parametrlar sifatida oltita o'lgangan burchaklardan birinchi uchtasini olamiz. Ularni tenglashtirilgan qiymatini t_1 , t_2 va t_3 orqali belgilaymiz.

2. Parametrlarning taxminiy qiymatini aniqlash

(13.20) asosan yozamiz:

$$t_1 = t_1^0 + \tau_1, \quad t_2 = t_2^0 + \tau_2, \quad t_3 = t_3^0 + \tau_3$$

Kerakli noma'lumlarning taxminiy qiymati sifatida ularning o'lchash natijalarini olamiz, ya'ni

$$t_1^0 = 58^\circ 15' 41,8'' , \quad t_2^0 = 38^\circ 10' 06.8'' , \quad t_3^0 = 61^\circ 01' 07,0''$$

3 Parametrik tenglamalar bog'liqligini tuzish

Hamma oltita o'lgangan miqdorlar tenglashtirilgan qiymatini uchta kerakli noma'lumlarning tenglashtirilgan qiymati orqali ifodalaymiz:

$$\bar{x}_i = x_i + V_i = f_i(t_1, t_2, t_3)$$

Misolida

$$1) \bar{x}_1 = t_1$$

$$4) \bar{x}_4 = t_1 + t_2$$

$$2) \bar{x}_2 = t_2$$

$$5) \bar{x}_5 = t_2 + t_3$$

$$3) \bar{x}_3 = t_3$$

$$6) \bar{x}_6 = t_1 + t_2 + t_3$$

4. Tuzatmalarning parametrik tenglamasini tuzish

Umumiy holda (13.24) va (13.25) larga asosan bo'ladi:

$$V_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i3}\tau_3 + l_i \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

$$\text{bu yerda: } a_{i1} = \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t_1} \right); \quad a_{i2} = \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t_2} \right); \quad a_{i3} = \left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t_3} \right)_0 \quad l_i = f_i(t_1^0, t_2^0, t_3^0) - x_i$$

4-chi tuzatmalar tenglamasi misolida qanday tuzishni ko'rsatamiz. 4-chi tenglamalar bog'liqligi uchun bo'ladi:

$$a_{41} = \left(\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial t_1} \right)_0 = +1; \quad a_{42} = \left(\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial t_2} \right)_0 = +1; \quad a_{43} = \left(\frac{\partial \bar{x}_4}{\partial t_3} \right)_0 = 0$$

Ozod had:

$$l_4 = (t_1^0 + t_2^0) - x_4 = 58^{\circ}15'41,8'' + 38^{\circ}10'06,8'' - 96^{\circ}25'45,1'' = +3,5''$$

Demak,

$$V_4 = \tau_1 + \tau_2 + 3,5''$$

Hamma tuzatmalar tenglamasini yozamiz:

$$1) V_1 = \tau_1$$

$$2) V_2 = \tau_2$$

$$3) V_3 = \tau_3$$

$$4) V_4 = \tau_1 + \tau_2 + 3,5''$$

$$5) V_5 = \tau_2 + \tau_3 + 0,5''$$

$$6) V_6 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + 3,0''$$

Tenglama (13.32) bo'yicha tuzatmalar tenglamasi koeffitsiyentlari jadvalini (13.32) formula bo'yicha tekshirgan holda 3.2 jadvalga mos ravishda tuzamiz.

Ustunlar bo'yicha sonlarning yig'indisi bo'lganligi uchun, S_i ning hamma qiymatlarining yig'indisi ikkilangan chiziqning ustida joylashgan qiymatlar yig'indisiga teng bo'ladi.

Tenglamalar №	a_1	a_2	a_3	l , sek. da	S	V, sek. da	VV
1.	+1				+1	-1.5	2.25
2.		+1			+1	-1.00	1.00
3.			+1		+1	0.00	0.00
4.	+1	+1		+3.5	+5.5	+1.0	1.00
5.		+1	+1	+0.5	+2.5	-0.5	0.25
6.	+1	+1	+1	+3.0	+6.0	+0.5	0.25
Σ	+3	+4	+3	+7.0	+17.0		[VV]=
Noma'l.	-1.50	-1.00	0.00				=4.75
	$a_1]$	$a_2]$	$a_3]$	$l]$	$S]$		
$[a_{1i}$	+3	+2	+1	+6.5	+12.5		
$[a_{2i}$		+4	+2	+7.0	+15.0		
$[a_{3i}$			+3	+3.5	+9.5		
$[l]$				+21.5	+38.5		
$[S]$					+75.5		

5. Vazn funksiyasini tuzish

Shartga asosan oltinchi burchakning tenglashtirilgan qiymatining aniqligini baholash talab qilinadi. Uni kerakli noma'lumlar orqali ifodalaymiz.

$$F = \bar{x}_6 = t_1 + t_2 + t_3$$

Funksiyaning aniqligini baholashda qo'llaniladigan koeffitsiyentlarni (13.23) ga asosan topamiz.

$$f_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial t_1} \right)_0 = +1, \quad f_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial t_2} \right)_0 = +1, \quad f_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial t_3} \right)_0 = +1$$

6. Normal tenglamalarni yechish

Uchta normal tenglamadan iborat bo'lgan sistema harfiy ko'rinishda quyidagicha bo'ladi:

$$[a_1 a_1] \tau_1 + [a_1 a_2] \tau_2 + [a_1 a_3] \tau_3 + [a_1 l] = 0$$

$$[a_2 a_1] \tau_1 + [a_2 a_2] \tau_2 + [a_2 a_3] \tau_3 + [a_2 l] = 0 \quad (1.34)$$

$$[a_3 a_1] \tau_1 + [a_3 a_2] \tau_2 + [a_3 a_3] \tau_3 + [a_3 l] = 0$$

Bu sistemadagi koeffitsiyentlar va ozod hadlarning qiymatlari 13.2-jadvalda berilganlar bo'yicha 13.3-jadvalda yechiladi. Yechish ketma-ketligi 13.2-jadvalda ko'rsatilgandek hisoblanadi. Hamma hisoblar quyidagi formula bilan tekshiriladi:

$$1) \quad +3 + 2 + 1 + 6,5 = +12,5 \quad [a_1 s] = +12,5$$

$$2) \quad +2 + 4 + 2 + 7,0 = +15,0 \quad [a_2 s] = +15,0$$

$$3) \quad +1 + 2 + 3 + 3,5 = +9,5 \quad [a_3 s] = +9,5$$

$$4) +6,5 + 7,0 + 3,5 + 21,5 = +38,5 \quad [1s] = +38,5$$

$$5) +12,5 + 15,0 + 9,5 + 38,50 = +75,50 \quad [ss] = +75,50$$

Funksiyaning aniqligini baholash uchun tekshirishlar yig'indisini topamiz:

$$\sum_1 = [a_1s] - [a_1l] + f_1 = +12,5 - 6,5 + 1,0 = +7,0$$

$$\sum_2 = [a_2s] - [a_2l] + f_2 = +15,0 - 7,0 + 1,0 = +9,0$$

$$\sum_3 = [a_3s] - [a_3l] + f_3 = +9,5 - 3,5 + 1,0 = +7,0$$

$$[\sum] = +23,0$$

13.2-jadval

№	a_1a_1	a_1a_2	a_1a_3	a_1l	a_1s	a_2a_2	a_2a_3	a_2l	a_2s	a_3a_3	a_3l	a_3s	ll	ls	ss
1.	+1				+1										+1
2.						+1			+1						+1
3.										+1		+1			+1
4.	+1	+1		+3,5	+5,5	+1		+3,5	+5,5				+12,25	+19,25	+30,25
5.						+1	+1	+0,5	+2,5	+1	+0,5	+2,5	+0,25	+1,25	+6,25
6.	+1	+1	+1	+3,0	+6,0	+1	+1	+3	+6	+1	+3	+6	+9	+18,00	+36,0
Σ	+3	+2	+1	+6,5	+12,5	+4	+2	+7,0	+15,0	+3	+3,5	+9,5	+21,5	+38,5	+75,5

Tekshirishlar yig'indisini hisoblash quyidagi formula orqali tekshiriladi

$$[\sum] = [l] + [a_1s] + [a_2s] + [a_3s] + [ll] - [ls] = +3,0 + 12,5 + 15,0 + 9,5 + 21,5 - 38,5 = +23,5$$

Jadvaldagi berilganlardan foydalanib quyidagicha normal tenglamalar sistemasini olamiz:

$$3\tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3 + 6,5 = 0$$

$$2\tau_1 + 4\tau_2 + 2\tau_3 + 7,0 = 0$$

$$\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 + 3,5 = 0$$

7. Normal tenglamalarni yechish

Eslatamiz, 1-ilovada noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli bilan uchta normal tenglamalarni yechishning harfiy belgilarda ko'rsatilgan. Normal (13.35) tenglamalar yechishning sonli misoli ko'rilayotgan masala uchun 13.3-jadvalda berilgan. Ikkita oxirgi ustundagi hisoblashlar aniqlikni baholashga bog'liq va normal tenglamalarni yechishning qo'shimcha hisoblari deyiladi. Shuning uchun ularni tushintirish ulardan oldingi hisoblashlardan keyin amalga oshiriladi.

1) Birinchi tenglamalardagi noma'lumlar koeffitsiyentlari, ozod had va $[a_1S]$ ko'chirib yoziladi.

2) Birinchi qatorning hamma sonlari kvadrat koeffitsiyentlarga $[a_1a_1]$ bo'linadi. Hosil bo'lgan sonlar ikkinchi qatorga teskari ishora bilan yoziladi. Ishoralarning almashishi keyinchalik yig'indilarda ayirishda qo'l keladi.

Ikkinchi qator eliminatsion qator deyiladi.

Eliminatsion qator koeffitsiyentlari ko'p marta ishlatiladi. Ularni topish oson bo'lishi uchun odatda qizil rangda yozish kerak (darslikda raqamlar qalin qilib

ko'rsatilgan).

Agar foydalanilayotgan bo'lish jarayoni (protsessi) qiyin tuyilsa, unda $E = \frac{1}{[a_1 a_1]}$ qiymatni hisoblab, 3-qatorga yoziladi. Olingan natijani ketma-ket

birinchi qatorga ko'paytirib ikkinchi qatorga yoziladi.

3) Eliminatsion qator qiymatlari S ustungacha yig'iladi. Yig'indi "Tekshirish" ustuniga yoziladi. U $-\frac{[a_1 S]}{[a_1 a_1]}$ qiymatga teng bo'lishi kerak. Ya'ni quyidagi:

$$-1 - \frac{[a_1 a_2]}{[a_1 a_1]} - \frac{[a_1 a_3]}{[a_1 a_1]} - \frac{[a_1 I]}{[a_1 a_1]} = - \frac{[a_1 S]}{[a_1 a_1]}$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tekshirish joriy tekshirish deyiladi va u hamma eliminatsion qatorlarda bajariladi. U verguldan keyin uchta sonning oxirgi raqami qiymatining chekigacha hisoblanadi.

13.3-jadval

qator-r №	a_1 τ_1	a_2 τ_2	a_3 τ_3	I	S	Tekshirish h	F	$\Sigma F = S - I - F$
1.	+3.00	+2.00	+1.00	+6.50	+12.50		+1	+7
2.	-1	-0.667	-0.333	-2.167	-4.167	-4.167	-0.333	-2.333
3.	(-0.3333)							
4.		+4.00	+2.00	+7.00	+15.00		+1	+9
5.		-1.33	-0.67	-4.33	-8.34		-0.67	-4.67
6.		+2.67	+1.33	+2.67	+6.67	+6.67	+0.33	-4.33
7.		-1	-0.498	-1.000	-2.498	-2.498	-0.123	-1.622
8.		(-0.3745)						
9.			+3.00	+3.50	+9.50		+1	+7
10.			-0.33	-2.17	-4.17		-0.33	-2.33
11.			-0.66	-1.33	-3.32		-0.17	-2.16
12.			+2.01	0.00	+2.01	+2.01	+0.50	+2.51
13.			-1	0.00	-1.000	-1.000	-0.250	-1.250
14.			(-0.4975)					
15.	-2.167	-1.000	0.000	+21.50	+38.00		0.000	+3.000
16.	0.000	0.000	τ_3	-14.09	-27.11		-0.33	-2.33
17.	+0.667	-1.000		-2.67	-6.66		-0.04	-0.53
18.	-1.500	τ_2		0.000	0.000		-0.13	-0.63
19.	τ_1		[V V]	+4.74	+4.73		-0.50	-0.49
20.					+75.50		$\frac{1}{P_F}$	$\frac{1}{P_F}$
21.					-52.12			
22.					-16.64			
23.					-2.00		-	-
24.				[V V]	+4.74			

Normal tenglamalar yechimini tekshirish:

- 1). $3(-1,500)+2(-1,000)+(0,000)+6,5=0,000$
- 2). $2(-1,500)+4(-1,000)+2(0,000)+7,0=0,000$
- 3). $1(-1,500)+2(-1,000)+3(0,000)+3,5=0,000$

4) To'rtinchi qatarga ikkinchi normal tenglamalar koeffitsiyentlari $[a_2a_2]$ dan boshlab ozod had va $[a_2s]$ qiymat yoziladi.

- 5). Birinchi eliminatsion tenglamaning koeffitsiyentlari $-\frac{[a_1a_2]}{[a_1a_1]}$,

diagonalidan boshqa ketma-ket yuqoridagi birinchi normal tenglamalar koeffitsiyentiga ko'paytiriladi. Ko'paytma 5 – qatarga mos ravishda ikkinchi normal tenglamalar koeffitsiyentlari tagiga yoziladi.

6). Oltinchi qatarga yuqoridagi 4– va 5– qatorlarning mos ustunlaridagi qiymatlarni qo'shish yo'li bilan olingan ikkinchi ekvivalent tenglamalarning koeffitsiyentlari yoziladi.

Ikkinchi ekvivalent tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$[a_2a_2]r_2 + [a_2a_3]r_3 + [a_2/1] = 0$$

quyidagi tenglik orqali tekshirish bajariladi.

$$[a_2a_2] + [a_2a_3] = [a_2s1]$$

U verguldan keyingi 3-raqamning 1–2 birlik cheki aniqligida hisoblanadi.

Tenglikning chap tomonidagi olingan yig'indilar "Tekshirish" ustuniga yoziladi.

Ekvivalent va eliminatsion tenglamalar koeffitsiyentlari normal tenglama koeffitsiyentiga qaraganda verguldan keyin bitta yoki ikkita raqam ortiqcha aniqlikda hisoblanadi.

7. Oltinchi qator koeffitsiyentlari shu qatorning diagonal elementiga bo'linadi. Hosil bo'lgan sonlar teskari ishora bilan yoziladi va natijada ikkinchi eliminatsion qator topiladi. Bular sxemaning 7–qatoriga yoziladi. 3–bosqichda yoritilgan hisoblash tekshirishiga o'xshash tekshirish bajariladi.

8. Kvadratik koeffitsiyentdan boshlab uchinchi normal tenglamaning koeffitsiyentlari yoziladi.

9. Shu ustunda joylashgan 1– va 2– eliminatsion qator koeffitsiyentlari diagonal koeffitsiyentlaridan boshqa hamma mos ekvivalent tenglama koeffitsiyentlariga ko'paytirib, natijalar 10– va 11– qatorlarga yoziladi.

10. Har bir ustundagi 9–, 10– va 11– qator qiymatlari yig'iladi. Natijada 12– qatorda sistemaning uchinchi ekvivalent tenglamasi uchun qiymatlar hosil bo'ladi.

$$[a_3a_3]r_3 + [a_3/2] = 0$$

quyidagi tenglikka asosan hisoblashlarni tekshirish bajariladi:

$$[a_3a_3] + [a_3/2] = [a_3s2]$$

11. O'n ikkinchi qator koeffitsiyentlari shu qatorning diagonal elementlariga bo'linib, teskari ishora bilan olinadi va 13- qatorga yoziladi. Bu uchinchi eliminatsion qatordir. Uchinchi punktda yozilgan hisoblash tekshirishlari bajariladi.

Uchtadan ortiq tenglamalarda hisoblash jarayoni yuqorida berilganlarga mos ravishda davom ettiriladi.

Yuqorida yoritilgan hamma hisoblash jarayoni "to'g'ri yo'l" degan nom bilan yuritiladi.

12. "To'g'ri yo'l" dagi hisoblashlarning to'g'riligini tekshirish quyidagi tenglikning bajarilishini tekshirish yo'li bilan amalga oshiriladi:

$$[llk]=[lsk]=[ssk]$$

qiymatlar $[llk]$ va $[lsk]$ bir vaqtda L va S ustunlarda mos ravishda hisoblanadi. Keyinchalik S ustunda $[ssk]$ topiladi. Tengsizlik yuqori qatorlar bo'yicha tekshirishga o'xshash jiddiy tekshiriladi. Farq verguldan keyin 3 chi raqamning oxirgisining 1 va 2 birlik aniqligida bo'lishi mumkin.

13. "Teskari yo'l" deb ataladigan yechish sxemasi bajariladi. Formula (1.13) bo'yicha noma'lumlarga tuzatmalar τ_1, τ_2, τ_3 qiymatlarini hisoblanadi. Bu formulalarning alohida yig'iluvchilari 13.3-jadvalning pastki chap burchagiga mos ustunlarga yoziladi.

14. Normal tenglamalarga noma'lumlarning qiymatlarini qo'yish yo'li bilan normal tenglamalar sistemasini yechishni tekshirish bajariladi.

13.3-jadvalning oxiridan oldingi ustunida normal tenglamani yechish bilan bir vaqtda quyidagi formulani qo'llab funksiyaning $F = t_1 + t_2 + t_3$ teskari vazni hisoblanadi:

$$-\frac{1}{P_F} = -\frac{f_1^2}{[a_1 a_1]} - \frac{[f_2 1]^2}{[a_2 a_2 1]} - \frac{[f_3 2]^2}{[a_3 a_3 2]}$$

Bu formuladagi kasr suratining ikkinchi va uchunchi hadlari algoritmlari quyidagicha ochiladi:

$$[f_2 1] = f_2 - \frac{[a_1 a_2]}{[a_1 a_1]} \cdot f_1$$

$$[f_3 2] = f_3 - \frac{[a_1 a_3]}{[a_1 a_1]} \cdot f_1 - \frac{[a_2 a_3 1]}{[a_2 a_2 1]} \cdot [f_2 1]$$

13.3-jadvalning oxirgi ustunidagi funksiyaning teskari vazni tekshiruv formulasi bo'yicha olingan

$$-\frac{1}{P_F} = [f] - \frac{f_1 \Sigma_1}{[a_1 a_1]} - \frac{[f_2 1] \Sigma_2 1}{[a_2 a_2 1]} - \frac{[f_3 2] [a_3 2] \Sigma_3 2}{[a_3 a_3 2]}$$

Berilgan masala uchun $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ qiymatlar normal tenglamani tuzishda

hisoblangan.

8. O'lchangan natijalarga tuzatmalarni hisoblash

O'lchangan burchaklar qiymatiga V_i (13.25) formula bo'yicha, 13.2-jadvaldan topiladi va ushbu jadvalni tuzish tugatiladi. Shuningdek quyidagi tenglik tekshiriladi:

$$[a_1 V] = [a_2 V] = [a_3 V] = 0 \text{ va } [VV] = [I V] = [S V] = [I I 3] = [I S 3] = [SS 3]$$

9. Noma'lumlarning (parametrlarning) tenglashtirilgan qiymatini hisoblashi

Demak bu misolda parametrlar sifatida o'lchangan miqdorlar tanlangan, ko'riladigan hisoblarni keyingi bosqichdagi hisoblar bilan birgalikda bajarish muvofiqdir.

10. O'lchangan miqdorlar tenglashtirilgan qiymatini hisoblash

Tuzatma V_i dan foydalangan holda 13.4-jadvalda burchaklarning tenglashtirilgan qiymati hisoblangan.

11. Tenglashtirishning yakuniy tekshirishi

U tenglamalar bog'liqligi (13.15) bo'yicha burchakning tenglashtirilgan qiymatini qaytadan hisoblashdan iborat

Tekshirish hisoblari 13.4-jadvalda berilgan

13.4-jadval

Tar. №	Burchaklar	O'lchangan qiymatlar x_i	Tuzatmalar V_i	Tenglashtirilgan qiymatlar $\bar{x}_i$	Tenglamalar bog'liqligi $\bar{x}_i = f_i(t_1, t_2, t_3)$	Tekshirish
1	AOB	58° 15' 41,8"	-1,5"	58° 15' 40,3"	t_1	58° 15' 40,3"
2	BOC	38 10 06,8	-1,0	38 10 05,8	t_2	38 10 05,8
3	COD	61 01 07,0	0,0	61 01 07,0	t_3	61 01 07,0
4	AOC	96 25 45,1	+1,0	96 25 46,1	$t_1 + t_2$	96 25 46,1
5	BOD	99 11 13,3	-0,5	99 11 12,8	$t_2 + t_3$	99 11 12,8
6	AOD	157 26 52,6	+0,5	157 26 53,1	$t_1 + t_2 + t_3$	157 26 53,1

12 Aniqlikni baholash

1. Bevosita o'lchangan natijalarning o'rta kvadratik xatosi va "xatoliklar xatoligining" o'rta kvadrati

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{4.75}{6-3}} = 1.26''; \quad m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-k)}} = \frac{1.26}{\sqrt{2(6-3)}} = 0.51''$$

2. Oxirgi noma'lumning vazni $P_i = [(a_3 a_3 \cdot 2)] = 2.0$.

3. Oxirgidan oldingi noma'lumning vazni

$$P_i = \frac{[a_2 a_2 \cdot 1]}{[a_3 a_3 \cdot 1]} P_i = \frac{2.67}{2.67} 2.0 = 2.0; \quad [a_3 a_3 \cdot 1] = [a_3 a_3] - \frac{[a_1 a_3]}{[a_1 a_1]} [a_1 a_3] = 3.0 - 0.33 = 2.67.$$

4. Noma'lumlarning o'rta kvadratik xatosi:

$$m_i = \frac{m}{\sqrt{P_i}} = \frac{1.26}{\sqrt{2.0}} = 0.88''; \quad m_{m_i} = \frac{m_m}{\sqrt{P_i}} = \frac{0.51}{\sqrt{2.0}} = 0.36$$

$$m_i = \frac{m}{\sqrt{P_i}} = \frac{1.26}{\sqrt{2.0}} = 0.88''; \quad m_{m_i} = \frac{m_m}{\sqrt{P_i}} = \frac{0.51}{\sqrt{2.0}} = 0.36''$$

5. Tenglashtirilgan burchaklar yig'indisi (oltinchi burchak) o'rta kvadratik xatosi.

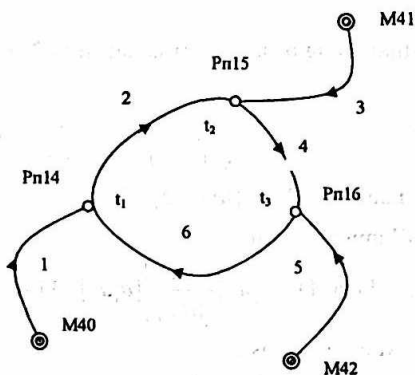
$$m_F = m \sqrt{\frac{1}{P_F}} = 1.26 \sqrt{0.50} = 0.88''; \quad m_{m_F} = m_m \sqrt{\frac{1}{P_F}} = 0.51 \sqrt{0.50} = 0.36''.$$

13.6. TENG ANILIKKA EGA BO'LMAGAN O'LCHASHLAR NATIJASINI PARAMETRIK USUL BILAN TENGLASHTIRISH MISOLI

2-Masala. 13.5-jadvalda berilgan nivelirlash natijalarini parametrik usulda tenglashtiring. Nivelir to'ri (13.2-chizma) sxemasida oltita o'lchangan yo'lning yo'nalishi strelka bilan ko'rsatilgan, yo'lning nomerlari aylana bilan belgilangan. Bosh (isxodnoe) nivelir markalari 40, 41, 42 tenglashtirilayotgan to'rdan yuqori toifa (klass)ga kiradi. Bu markalarning absolyut balandlik(otmetka)lari 13.5-jadvalda berilgan.

Tenglashtirish natijasida 14, 15, 16 tugun reperlarining otmetkasi va yo'llar bo'yicha nisbiy balandliklarining tenglashtirilgan qiymati topiladi. Aniqlikni baholaganda o'rta kvadratik xato hisoblansin:

– 1 km yo'lni nivelirlashdagi, reperlar otmetkasi va tenglashtirilgan ikkinchi nisbiy balandlik.



13.2-chizma

13.5-jadval

Yo'l №	Yo'l uzunligi L_i , (km.)	O'lchangan nisbiy balandlik h_i , (m.)	Tayanch punktlari №	Tayanch punktlari o'tmetkasi H_i , (m.)
1	25.0	-1,807	M 40	122.356
2	7.9	+3,901	M 41	118.874
3.	5.8	+5,554	M42	110.870
4.	6.1	-9,952		
5.	8.0	+3,593		
6.	9.6	+6,077.		

1 Kerakli noma'lumlarni (parametrlarni) tanlash

Nivelir to'rida nisbiy balandlik va o'tmetka aniqlanadigan elementlardir.

Uchta tugun nuqtalarning (reperlarning) o'tmetkasini topish uchun uchta nisbiy balandlik h_1 , h_2 , h_3 , larni o'lchash yetarli. Boshqa nisbiy balandliklar tugun reperlar va bosh punktlar o'tmetkasi bo'yicha hisoblanishi mumkin. Demak bu nisbiy balandliklarni o'lchashlar *ortiqcha o'lchashlar* deyiladi.

Demak, kerakli noma'lumlar (parametrlar) soni $k=3$ teng. Nivelir to'rida parametrlar sifatida nisbiy balandliklarni qabul qilgandan ko'ra, tugun reperlarining tenglashtirilgan o'tmetkasini qabul qilgan afzalroqdir. Ya'ni

$$t_1 = H_{14}; \quad t_2 = H_{15}; \quad t_3 = H_{16}$$

Nivelir to'ri sxemasida (13.2-chizma) bu belgilar mos reperlar yonida yozilgan.

2 Parametrlarning taxminiy qiymatini aniqlash

$$t_1 = t_1^0 + \tau_1 \quad t_2 = t_2^0 + \tau_2 \quad t_3 = t_3^0 + \tau_3$$

Tuzatma τ_j juda kichik miqdor bo'lishi uchun t_j^0 qiymatini iloji boricha reperlarning o'tmetkasining tenglashtirilgan qiymatiga yaqin qilib olish kerak. Biror bir nisbiy balandliklar bo'yicha topilgan reper o'tmetkalari parametrlarining qiymatini taxminiy qiymati deb qabul qilamiz. Ya'ni

$$t_1^0 = H_{40} + h_1 = 122,356 - 1.807 = 120.549 \text{ m,}$$

$$t_2^0 = H_{41} + h_3 = 118.874 + 5.554 = 124.428 \text{ m,}$$

$$t_3^0 = H_{42} + h_5 = 110.870 + 3.593 = 114.463 \text{ m.}$$

3. Parametrik tenglamalar bog'liqligini tuzish

Hamma tenglashtirilgan nisbiy balandliklar qiymatlarini reperlarning tenglashtirilgan o'tmetkalari orqali ifodalaymiz, ya'ni parametrlar orqali

$$\text{Umumiy holda: } \bar{x}_i = f_i(t_1, t_2, t_3)$$

Misol uchun:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \bar{h}_1 = t_1 - H_{40} \\ 2) \quad \bar{h}_2 = t_2 - t_1 \\ 3) \quad \bar{h}_3 = t_2 - H_{41} \\ 4) \quad \bar{h}_4 = t_3 - t_2 \\ 5) \quad \bar{h}_5 = t_3 - H_{42} \\ 6) \quad \bar{h}_6 = t_1 - t_3 \end{array} \right\}$$

Tenglamalar bog'liqligi soni o'lchangan nisbiy balandliklar soniga teng

4. Tuzatmalarning parametrik tenglamasini tuzish

Shuni ta'kidlash kerakki, (13.25) ga asosan tuzatmalar tenglamasi uchta parametrdagi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$V_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i3}\tau_3 + l_i,$$

bu yerda

$$a_{i1} = \left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial t_1} \right)_0; \quad a_{i2} = \left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial t_2} \right)_0; \quad a_{i3} = \left(\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial t_3} \right)_0; \quad l_i = f_i(t_1^0, t_2^0, t_3^0) - h_i.$$

Misol uchun ikkinchi tuzatmalar tenglamasini tuzishni batafsil ko'rib chiqamiz. Ikkinchi tenglamalar bog'liqligi uchun quyidagi hosilaga ega bo'lamiz:

$$a_{21} = \left(\frac{\partial h_2}{\partial t_1} \right)_0 = -1; \quad a_{22} = \left(\frac{\partial h_2}{\partial t_2} \right)_0 = 1; \quad a_{23} = \left(\frac{\partial h_2}{\partial t_3} \right)_0 = 0.$$

Ozod had:

$$l_2 = (t_2^0 - t_1^0) - h_2 = (124,428 - 120,549) - 3,901 = -0,022 \text{ m.}$$

Ya'ni,

$$V_2 = \tau_2 - \tau_1 - 0,022 \text{ m.}$$

Ozod had o'lchami (razmeri) keyinchalik shunday tanlanishi kerakki, ularning sonli qiymati birga juda yaqin bo'lsin.

Hamma tuzatmalar tenglamasini yozib chiqamiz:

$$1. V_1 = +\tau_1$$

$$2. V_2 = -\tau_1 + \tau_2 - 2,2 \text{ sm}$$

$$3. V_3 = +\tau_2$$

$$4. V_4 = -\tau_2 + \tau_3 - 1,3 \text{ sm}$$

$$5. V_5 = +\tau_3$$

$$6. V_6 = +\tau_1 - \tau_3 + 0,9 \text{ sm}$$

Tuzatmalar tenglamasini tuzishni juda diqqat e'tibor bilan bajarish kerak, chunki bu bosqichda yo'l qo'yilgan xatolik tenglashtirishning oxirida aniq bo'lishi mumkin.

13.6-jadval

O'l- r №	Yo'l vazni P= $\frac{10}{L}$	a_1	a_2	a_3	l	S	V, (sm)	Lv	plv	pv	$p l^{-2}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	0.40	+1				+1	-1.223			-0.489	0.598
2.	1.27	-1	+1		-2.2	-2.2	-1.014	+2.231	+2.833	-1.288	1.306
3.	1.72		+1			+1.0	-0.037			-0.064	0.002
4.	1.64		-1	+1	-1.3	-1.3	-0.821	+1.067	+1.750	-1.346	1.105
5.	1.25			+1		+1.0	+0.442			+0.552	0.244
6.	1.04	+1		-1	+0.9	+0.9	-0.765	-0.688	-0.716	-0.796	0.609
Σ		+1	+1	+1		+0.4			3.867		3.864
Noma'lumla r		-1.223	-0.037	+0.442							

Yig'indilar usuli bo'yicha tekshirish bilan tuzatmalar tenglamasi ko'effitsiyentlarini tenglama bo'yicha hisoblab, 13.6-jadvalni to'ldiramiz. O'lchashlar teng aniqlikka ega emas, unda ularning vazni hisoblanadi. 7 ta ustun to'ldiriladi. O'ngdagi va ikkilangan chiziqdan pastki qismi tenglashtirishning oxirida bajariladi.

5. Funksiya vaznini tuzish

Shart bo'yicha tenglashtirilgan nisbiy balandliklar aniqligini baholash 2 - yo'l bo'yicha bajarish talab qilinadi. Bu nisbiy balandlikni kerakli noma'lumlar orqali ifodalaymiz:

$$F = \bar{h}_2 = t_2 - t_1$$

Funksiya aniqligini baholash uchun koeffitsiyentlarni hisoblaymiz.

$$f_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial t_1} \right)_0 = -1; \quad f_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial t_2} \right)_0 = 1; \quad f_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial t_3} \right)_0 = 0;$$

6. Normal tenglamalarni tuzish

Uchta noma'lumli uchta tenglamalar sistemasi harfiy belgilashda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$[p_{a_1 a_1}] \tau_1 + [p_{a_1 a_2}] \tau_2 + \dots + [p_{a_1 a_3}] \tau_3 + [p_{a_1 l}] = 0$$

$$[p_{a_2 a_1}] \tau_1 + [p_{a_2 a_2}] \tau_2 + \dots + [p_{a_2 a_3}] \tau_3 + [p_{a_2 l}] = 0$$

$$[p_{a_3 a_1}] \tau_1 + [p_{a_3 a_2}] \tau_2 + \dots + [p_{a_3 a_3}] \tau_3 + [p_{a_3 l}] = 0$$

Normal tenglamalar koeffitsiyentlari 13.6-jadvalda berilganlar bo'yicha 13.7-jadvalda hisoblanadi. Malakali hisobchi oraliq hisoblash natijalarini yozmaydi. Bunday holda normal tenglamalar koeffitsiyenti 13.7^a - jadvali kabi juda ixcham ko'rinishda bo'ladi.

13.7-jadval

№	$pa_1 a_1$	$pa_1 a_2$	$pa_1 a_3$	$Pa_1 l$	$pa_1 s$	$pa_2 a_2$	$pa_2 a_3$	$pa_2 l$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	+0.40				+0.40			
2.	+1.27	-1.27		+2.79	+2.79	+1.27		-2.79
3.						+1.72		
4.						+1.64	-1.64	+2.13
5.								
6.	+1.04		-1.04	+0.94	+0.94			
Σ	+2.71	-1.27	-1.04	+3.73	+4.13	+4.63	-1.64	-0.66

13.7-jadvalning davomi

№	$pa_2 s$	$pa_3 a_3$	$pa_3 l$	$pa_3 s$	pll	pls	pss
	10	11	12	13	14	15	16
1.							+0.40
2.	-2.79				+6.15	+6.15	+6.15
3.	+1.72						+1.72
4.	+2.13	+1.64	-2.13	-2.13	+2.77	+2.77	+2.77
5.		+1.25		+1.25			+1.25
6.		+1.04	0.94	0.94	+0.84	+0.84	+0.84
Σ	+1.06	+3.93	-3.07	-1.82	+9.76	+9.76	+13.15

	a_1	a_2	a_3	l	s
$[pa_1]$	+2.71	-1.27	-1.04	+3.73	4.13
$[pa_2]$		+4.63	-1.64	-0.66	+1.06
$[pa_3]$			+3.93	-3.07	-1.82
$[pl]$				+9.76	+9.76
$[ps]$					+13.13

13.7 va 13.7^a jadvaldagi hisoblashlar albatta quyidagi formulaga mos formula bilan tekshiriladi:

- 1) $+2,71-1,27+1,04+3,73=+4,13$ $[pa_1S]=+4,13$
- 2) $-1,27+4,63-1,64-0,66=+1,06$ $[pa_2S]=+1,06$
- 3) $-1,04-1,64+3,93-3,07=-1,82$ $[pa_3S]=-1,82$
- 4) $+3,73-0,66-3,07+9,76=+9,76$ $[plS]=+9,76$
- 5) $+4,13+1,06-1,82+9,76=+13,13$ $[pSS]=+13,13$

Normal tenglamalar sonli koeffitsiyentlari bilan quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$+2,71\tau_1-1,27\tau_2-1,04\tau_3+3,73=0$$

$$-1,27\tau_1+4,63\tau_2-1,64\tau_3-0,66=0$$

$$-1,04\tau_1-1,64\tau_2+3,93\tau_3-3,07=0$$

Normal tenglamalarni yechish

Normal tenglamalarni yechish (noma'lumlarning taxminiy qiymatiga τ_1 , τ_2 , va τ_3 tuzatmalarni topish uchun) 13.8-jadvalda 1-ilovada ko'rsatilgan sxema bo'yicha va 13.3-jadvalda yuqorida tavsiflangan 1-topshiriq kabi bajariladi.

Asosiy oraliq tekshirishlar "qatorlarni yig'indisi" bo'yicha tekshiriladi. Sxema yechishning to'g'ri yo'lining oxirida qiymatlar taqqoslanadi:

$$[pll \cdot k] = [pls \cdot k]$$

Noma'lumlar τ_1 , τ_2 va τ_3 topgandan keyin ularning to'g'riligini normal tenglamalarga qo'yish orqali tekshiriladi.

Jadval 13.8^a da o'sha normal tenglamalarni yechishning qisqartirilgan sxemasi ko'rsatilgan. Bu holda 4 va 7-qatordagi ekvivalent tenglamalar koeffitsiyentlari oraliq natijalarni ko'paytirish sonlari elektron hisoblash mashinasi xotirasida saqlangan holda yozuvsiz olinadi.

Hisoblash mashinasida hisoblanganda, ko'paytmalarni yig'indisini topayotganda verguldan keyin bir xil aniqlikdagi son bo'lishligiga e'tibor berish kerak.

Oraliq yozuvlarsiz τ_j , θ_j , $[pll \cdot k]$, $[pls \cdot k]$ va $\frac{1}{p_f}$ qiymatlar ham hisoblanadi.

Yar №	Normal tenglamalarni yechish					Vazn ko'effitsientlarini hisoblash					13.8-14.4-1	
	τ_1	τ_2	τ_3	5	6	Tekshirish	Q_1	Q_2	Q_3	$S=S-Q_1$	Tekshirish	Vazn funktsiyasini hisoblash
1	-1.71	2	-1.04	4	5	6	7	8	9	10	11	$\tau_1 = S - \tau_2$
2	-1	3	-0.3438	-1.3764	-1.5240	-1.5240	-0.4690	-1	-1	-1.1560	-1.1560	$\tau_2 = S - \tau_1$
3	(-0.5600)	4	-1.64	-0.66	+1.06			-1		-0.06		-1
4	-0.595	5	-0.487	-1.748	+1.935		-0.469			-0.469		+1
5	+0.035	6	-2.127	-1.088	+2.695	+2.695	-0.469	-1		-1.527	+1.527	-0.469
6	-1	7	(-0.571)	-0.696	-0.723	-0.723	-0.1162	-0.2178		-0.3784	-0.3785	-0.1316
7	-3.03	8	-0.99	-3.07	-1.83			-1		-2.82		-0.6045
8	-0.99	9	-1.32	-1.432	+1.585		-0.384			+1.201		-1.25
9	-1.121	10	-0.573	+1.578		+1.345	-0.631	-0.537	-1	-0.814	-0.813	-0.340
10	+2.410	11	-1.065	+1.344		-0.531	-0.2618	+0.2187		-0.3373	+0.3373	-0.286
11	-1	12	(-0.41045)	-0.4419	-0.5577							-0.104
12		13	-0.76	-0.76	+0.76							-0.2306
13		14	-5.085	-5.134	-5.085							-0.565
14		15	-0.293	-0.293	-0.293							0.00
15		16	-0.471	-0.504	-0.471							-0.369
16			-1.862	-1.862								-0.070
			[0.07]	[0.07]								-0.331
												-0.004
												-0.100
												-0.143
												-0.117
												$\frac{1}{P_r}$
												$\frac{1}{P_r}$

Normal tenglamalarni yechishlarni tekshirish:

- 1) $+2.71 \tau_1 - 1.27 \tau_2 - 1.04 \tau_3 + 3.73 = 2.71(-1.223) - 1.27(-0.037) - 1.04(+0.442) + 3.73 = +0.003$
- 2) $-1.27 \tau_1 + 4.63 \tau_2 - 1.64 \tau_3 - 0.66 = -1.27(-1.223) + 4.63(-0.037) - 1.64(+0.442) - 0.66 = -0.003$
- 3) $-1.04 \tau_1 - 1.64 \tau_2 + 3.93 \tau_3 - 3.07 = -1.04(-1.223) - 1.64(-0.037) + 3.93(+0.442) - 3.07 = 0.000$

Tartib №	Normal tenglamalarni yechish					Vazir ko'effitsiyentalarni hisoblash					Vazir funktsiyasini hisoblash	
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	Tekshirish	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Tekshirish	$z_{p=0.97}$
1	-2.71	-1.27	-1.04	+3.73	+4.13	6	7	8	9	10	11	12
2	-1	+0.484	-0.333	-1.374	-1.524	-1.524	-1			+1.13		-1
	(-0.36003)									-1.154	-1.154	+0.3690
3												
4		+1.65	-1.64	-0.66	+1.06			-1		+0.66		+1
5		+4.035	-2.27	+1.088	+2.995	-2.995	4.469	-1		+1.577	+1.577	+0.531
	-1	-0.5271	-0.2666	-0.7423	-0.425	-0.425	+0.1162	+0.2478		-0.1744	-0.2785	-0.1016
	(-0.24782)											
6												
7		-1.89	-3.07	-1.82					-1	-0.32		+1.25
8		-2.410	-1.065	+1.144	-1.345	-1.345	4.631	-0.527	-1	-0.314	-0.313	-0.104
	-1	-0.4119	-0.5577	-0.5551	-0.5551	-0.5551	-0.2619	+0.1187	+0.4119	+0.378	+0.313	+0.032
	(-0.41192)											
9	-1.124	-0.037	-0.442	+0.76	+5.76							
10	t_1	t_2	t_3	+3.862	+3.862							-
				pv_1	pv_2							-0.443
												$\frac{1}{p_1}$
	+0.589	+0.254	-0.262									$\frac{1}{p_2}$
	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}									
	+0.254	+0.265	-0.219									
	Q_{21}	Q_{22}	Q_{23}									
	+0.252	+0.219	-0.415									
	Q_{31}	Q_{32}	Q_{33}									

7.1 Vazn koeffitsiyentlarini hisoblash

13.8 va 13.8^a jadvallarning qo'shimcha θ_1 , θ_2 va θ_3 ustunlarida vazn koeffitsiyentlarini aniqlash bo'yicha hisoblar keltirilgan. θ_1 ustundagi θ_{11} , θ_{12} , θ_{13} ni topish uchun vazn sistemasi ozod hadlari yoziladi. L ustunini θ_1 ustuniga almashtirish berilgan vazn koeffitsiyentlarga noma'lumlarning hisoblashlarini keltirib chiqaradi.

θ_2 va θ_3 ustunlarga ozod hadlar sistemasi yoziladi va u bo'yicha mos ravishda qolgan vazn koeffitsiyentlari θ_{21} , θ_{22} , θ_{23} , va θ_{31} , θ_{32} , θ_{33} topiladi. θ_1 , θ_2 va θ_3 ustunlardagi o'zgartirishlar bosh normal tenglamalar sistemasini yechish bilan birga amalga oshiriladi. Qo'shimcha ustunlardagi hisoblarni tekshirish uchun quyidagi ifoda qo'llaniladi

$$S'_i = S_i - 1$$

Berilgan masalada

$$S'_1 = 4,13 - 1 = 3,13; \quad S'_2 = 1,06 - 1 = 0,06; \quad S'_3 = -1,82 - 1 = -2,82$$

Vazn sistemasini yechishni tekshirish quyidagi usulda amalga oshiriladi:

1. Vazn koeffitsiyentlarining simmetrik $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ xossaga ega ekanligi tekshiriladi. Bu tekshirishning eng oddiy usulidir, lekin bir nechta diagonal koeffitsiyentlari θ_{ii} tekshirilmasdan qoladi.

2. quyidagi tekshirish formulasi qo'llaniladi:

$$(\theta_{11} + \theta_{12} + \theta_{13})S_1 + (\theta_{21} + \theta_{22} + \theta_{23})S_2 + (\theta_{31} + \theta_{32} + \theta_{33})S_3 = K$$

bu yerda :

$$S_1 = [pa_{1s}] - [pa_{1l}] = +4,13 - 3,73 = +0,40$$

$$S_2 = [pa_{2s}] - [pa_{2l}] = +1,16 - (0,66) = +1,72$$

$$S_3 = [pa_{3s}] - [pa_{3l}] = -1,82 - (-3,07) = +1,25$$

Berilgan misolda:

$$(0,589 + 0,254 + 0,262)0,40 + (0,254 + 0,363 + 0,219)1,72 + \\ + (0,262 + 0,219 + 0,415)1,25 = 3,000$$

Geodezik ishlab chiqarishda kam qo'llaniladigan vazn koeffitsiyentlari matritsasi juda katta foydali ma'lumotga ega. Shu munosabat bilan koeffitsiyentlar Q_{ij} tenglashtirilgan noma'lumlar t_i va t_j , bog'liqligini ko'rsatadi va quyidagi korrelyatsiya koeffitsiyenti bilan ifodalanadi:

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii} \cdot Q_{jj}}}$$

Bu vaziyatni boshlang'ich ma'lumotlar xatoligi ta'sirini e'tiborga olishdagi masalalarni to'g'ri yechishda e'tiborga olish kerak.

7.2 Tenglashtirilgan qiymatlar funksiyasi teskari vazni

Tenglashtirilgan qiymatlar funksiyasi teskari vazni P_F koeffitsiyentlar yordamida quyidagi formulada hisoblanadi:

$$\frac{1}{P_F} = f_1^2 Q_{11} + f_2^2 Q_{22} + f_3^2 Q_{33} + 2(f_1 f_2 Q_{12} + f_1 f_3 Q_{13} + f_2 f_3 Q_{23})$$

bu yerda: f_1, f_2, f_3 - chiziqlashtirilgan noma'lumlar funksiyasidagi koeffitsiyentlar.

Berilgan masalada $F = t_2 - t_1$ funksiyani baholamoqdamiz, shuning uchun formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{1}{P_F} = Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12}, \quad \text{chunki } f_1 = -1; \quad f_2 = 1; \quad f_3 = 0,$$

$$\text{bu yerdan: } \frac{1}{P_F} = 0,589 + 0,363 - 2 \cdot 0,254 = 0,444$$

Har qanday tenglashtirilgan nisbiy balandliklarning teskari vaznini aniqlayotganda baholanayotgan funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F = t_i - t_j$$

va formula oddiylashadi:

$$\frac{1}{P_F} = Q_{ii} + Q_{jj} - 2Q_{ij}$$

$$13.8\text{-jadvalning oxirgi ustunida funksiyaning teskari vazni } -\frac{1}{P_F} = -0,443$$

topiladi. U quyidagi formula bo'yicha hisoblangan:

$$-\frac{1}{P_F} = -\frac{f_1^2}{[pa_1 a_1]} - \frac{[f_2 1]^2}{[pa_2 a_2 1]} - \frac{[f_3 1]^2}{[pa_3 a_3 2]}$$

Formulaga mos bo'lgan tekshirish formulasi 13.8-jadvalning oxirgi ustunida ishlatiladi.

Katta sonli baholanayotgan funksiyada va kichik sonli noma'lumlarda P_F koeffitsiyentlarini oldinroq ishlash afzalroqdir, keyinroq formula bo'yicha teskari P_F ni topish kerak. Formula bo'yicha qo'shimcha ustunda bitta yoki ikkita funksiya uchun baholash osonroqdir.

7.3 Ikkita oxirgi noma'lumning vazni

Oxirgi noma'lumning P_{i_3} vazni, ushbu nomalumdagi oxirgi ekvivalent tenglamaning koeffitsiyentiga teng

$$P_{i_3} = [pa_3 a_3 2]$$

10-qatorning 3-ustuni (13.8-jadval) kesishishida topamiz:

$$P_{i_3} = 2,41$$

Oxiridan oldingi noma'lumning vazni quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$P_{i_2} = \frac{[pa_2a_21]}{[pa_3a_31]} P_{i_3}$$

Berilgan masalada:

$$[pa_3a_31] = 3.93 - 0.399 = 3.531$$

$$[pa_2a_21] = 4.035$$

$$P_{i_2} = \frac{4.035}{3.531} - 2.41 = 2.75$$

Olingan natijalar yuqorida formula bo'yicha olingan vaznlar qiymatiga mos keladi:

$$P_{i_3} = \frac{1}{Q_{33}} = \frac{1}{0.415} = 2.41 ; \quad P_{i_2} = \frac{1}{Q_{22}} = \frac{1}{0.353} = 2.75$$

8. O'lchash natijalariga tuzatmalarni hisoblash

Noma'lumlar τ_1, τ_2 va τ_3 qiymatini topilgandan keyin, formula bo'yicha 13.6-jadvalda o'lchangan nisbiy balandliklar qiymatiga tuzatmalar V_i ni topamiz va ushbu jadvalni tuzishni tugatamiz. Shu bilan birga tenglikning bajarilishi tekshiriladi:

$$[pVV] = [plr] = [pll \cdot 3] = [pls \cdot 3] = [pSS \cdot 3]$$

9. Noma'lumlarning tenglashtirilgan qiymatini hisoblash

(№ 14, 15, 16 reperlar otmetkasini hisoblash)

$$H_{14} = t_1 = t_1^0 + \tau_1 = 120,549 \text{ m} - 12,2 \text{ mm} = 120,5368 \text{ m}.$$

$$H_{15} = t_2 = t_2^0 + \tau_2 = 124,428 \text{ m} - 0,4 \text{ mm} = 124,4276 \text{ m}.$$

$$H_{16} = t_3 = t_3^0 + \tau_3 = 114,463 \text{ m} = 4,4 \text{ mm} = 114,4674 \text{ m}.$$

10. O'lchangan mikdorlar tenglashtirilgan qiymatini

hisoblash. (nisbiy balandliklarning tenglashtirilgan qiymatini hisoblash)

Tenglashtirilgan nisbiy balandliklar 13.9-jadvalda hisoblangan.

11. Tenglashtirishning yakuniy tekshirishi.

Tekshirish 13.9-jadvalda bajarilgan, u tenglashtirilgan nisbiy balandliklarni qaytadan reperlarning tenglashtirilgan otmetkasi funksiyasi deb qarab hisoblashdan iborat.

Shuni ta'kidlash kerakki, tenglashtirishda bajariladigan tekshirishlardan birortasi tenglashtirish boshidagi o'lchashlar vaznini hisoblashda qo'llanilmaydi va shu kabi yakuniy tekshirishda ham.

Yo'llar №	O'lchangan nisbiy balandliklar $h_i(\mathcal{M})$	Tuzatmalar V , (mm)	Tenglashtirilgan nisbiy balandliklar $\bar{h}_i(\mathcal{M})$	Tenglamalar bog'liqligi $\bar{h}_i = f_i(t_1, t_2, t_3)$	Tekshirish $\bar{h}_i(\mathcal{M})$
1	-1,807	-12,2	-1,8192	$t_1 - H_{40}$	-1,8192
2	+3,901	-10,1	+3,8909	$t_2 - t_1$	+3,8908
3	+5,554	-0,4	+5,5536	$t_2 - H_{41}$	+5,5536
4	-9,952	-8,2	-9,9602	$t_3 - t_2$	-9,9602
5	+3,593	+4,4	+3,5974	$t_3 - H_{42}$	+3,5974
6	+6,077	-7,6	+6,0694	$t_1 - t_3$	+6,0694

12. Aniqlikni baholash

1) Vazn birligidagi μ o'rta kvadratik xato (10 km yo'l bo'yicha nisbiy balandlik)

$$\mu = \sqrt{\frac{[PV^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{3,86}{6-3}} = \pm 1,13 \text{ sm} = \pm 11,3 \text{ mm}$$

Vazn birligidagi xatolikning o'z xatoligi:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-k)}} = \frac{11,3}{\sqrt{2(6-3)}} = 4,6 \text{ mm}$$

2) Bir km yo'lining o'rta kvadratik xatoligi

$$m_m = \frac{\mu}{\sqrt{c}} = \frac{11,3}{\sqrt{10}} = 3,6 \text{ mm}$$

3) Noma'lumlarning tenglashtirilgan qiymatlarining o'rta kvadratik xatolari (reper otmetkalari)

$$m_{h_1} = \mu \sqrt{Q_{11}} = 11,3 \sqrt{0,59} = 8,7 \text{ mm}; \quad m_{m_{h_1}} = m_\mu \sqrt{Q_{11}} = 4,6 \sqrt{0,59} = 3,5 \text{ mm}$$

$$m_{h_2} = \mu \sqrt{Q_{22}} = 11,3 \sqrt{0,36} = 6,8 \text{ mm}; \quad m_{m_{h_2}} = m_\mu \sqrt{Q_{22}} = 4,6 \sqrt{0,36} = 2,8 \text{ mm}$$

$$m_{h_3} = \mu \sqrt{Q_{33}} = 11,3 \sqrt{0,42} = 7,3 \text{ mm}; \quad m_{m_{h_3}} = m_\mu \sqrt{Q_{33}} = 4,6 \sqrt{0,42} = 3,0 \text{ mm}$$

4) Funksiyaning o'rta kvadratik xatosi (ikkinchi tenglashtirilgan nisbiy balandlik)

$$m_f = \mu \sqrt{\frac{1}{P_f}} = 11,3 \sqrt{0,44} = 7,5 \text{ mm}; \quad m_{m_f} = m_\mu \sqrt{\frac{1}{P_f}} = 4,6 \sqrt{0,44} = 3,1 \text{ mm}$$

13.7. TENGLASHTIRISHNING KORRELAT USULI

Korrelat usuli bilan tenglamalarni yechishning mohiyati quyidagicha: bog'langan o'zgaruvchi funksiyaning $[p\nu^2]$ minimumini topish masalasi mustaqil shartli tenglamalarning yordamchi ko'paytmalarini kiritish yo'li orqali Lagranj usuli bilan yechiladi.

Bir-biri bilan bog'langan mustaqil shartli tenglamalar hosil qilgan $X_1, \dots, X_p$, qiymatlar n marta o'lchangan.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(X_1, \dots, X_n) &= 0 \\ \varphi_2(X_1, \dots, X_n) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_r(X_1, \dots, X_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.38)$$

Tenglama (5.38) ni shunday ko'rishga keltirish kerakki, uning o'ng tomoni nolga teng bo'lsin.

Qiyamatlar X_i uchun $x_1, \dots, x_p$ natijalar mos vaznlar $p_1, \dots, p_p$ bilan olingan bo'lsin.

Chunonchi x_i qiymatlar o'lchash xatoliklaridan iborat. Ularni shartli tenglamaning chap tomoniga joylashirganimizda tenglamaning o'ng tomonida noldan farqli haqiqiy xatoliklar funksiyasi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ ni tashkil qilgan W bog'lanmaslik xatosi hosil bo'ladi.

Demak tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = W_j \quad (j = 1, 2, \dots, r). \quad (13.39)$$

Tenglashtirishda hamma bog'lanmaslik xatoliklarini yo'qotish talab qilinadi. Shuning uchun o'lchashlarning to'g'rilangan natijalari quyidagi tenglamani qanoatlantirishi kerak

$$\Phi_j(x_j + v_1, \dots, x_n + v_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r). \quad (13.40)$$

Ma'lumki, noaniq (13.40) sistemani yechishning ko'p imkonli yechimidan shunday tanlanadiki $[pv^2]$ eng kichik qiymatni qabul qilsin.

Yechilayotgan masalani matematik ifodada quyidagicha hal qilinadi:

$$[pv^2] = \min,$$

topish.

Agar o'zgaruchi $v_1, \dots, v_n$ tenglama (13.40) bilan o'zaro bog'liq bo'lsa. Ma'lum bu masala shartli tenglamalarning noma'lum ko'paytmalari yordamida Lagranj qoidasi bo'yicha korrelat usulida yechiladi.

Ta'kidlaymizki, parametrik usulda bu masala, ekstremum shartida yechiladi

shartli ekstremumdan absolyutiga o'tish mumkin bo'lgan, qo'shimcha mustaqil noma'lumlar yordamida yechiladi.

Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishda

$$F(v_1, \dots, v_n) = [p v^2] + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_r \varphi_r$$

bu yerda:

$$\varphi_j = \varphi_j(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

va

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_r \varphi_r = 0.$$

Kiritilgan r noaniq ko'paytmalar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ Lagranj funksiyasini mustaqil o'zgaruvchi sifatida qarashga imkon beradi. Unda topiladigan tuzatma qiymati ushbu tenglamani qanoatlantirishi kerak

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0 \quad (13.41)$$

(13.41) tenglikni (13.40) tenglikka bog'lab, $n + r$ noma'lumli $n + r$ tenglama olamiz ($v_1, \dots, v_n$ tuzatmali va $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ noaniq ko'paytmali).

Masalani yechishning sxemasi shunaqa.

Lekin, agar shartli tenglamalar chiziqsiz ko'rinishda bo'lsa, unda masalani umuman yechib bo'lmaydi.

Tenglashtirish masalasini hal qilish va yechish algoritmini topish uchun (13.40) tenglamani chiziqli ko'rinishga keltiramiz. Bu yerda v tuzatma yetarli darajada kichik son.

Chiziqsiz hadlarni etiborga olmay φ_i funksiyani Teylor qatoriga yoyib topamiz

$$\varphi_j(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n) + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \right)_0 v_1 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} \right)_0 v_n.$$

Belgilaymiz

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)_0 = a_{ij} \quad (13.42)$$

va tenglama (13.39) hisobga olib yozamiz

$$a_{1j} v_1 + \dots + a_{nj} v_n + W_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

ya'ni

$$\left. \begin{aligned} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n + W_1 &= 0 \\ a_{12}v_1 + \dots + a_{12}v_n + W_2 &= 0 \\ \dots &\dots \\ a_{1r}v_1 + \dots + a_{1r}v_n + W_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.43)$$

Yoki qisqartilgan ko'rinishda

$$\left. \begin{aligned} [a_1, v] + W_1 &= 0 \\ [a_2, v] + W_2 &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ [a_r, v] + W_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.44)$$

Tengsizliklar (13.43) va (13.44) tuzatmalar shartli tenglamalari deyiladi. Bog'lanmaslik W_i bu tenglamalarning ozod hadi deyiladi.

Agar shartli tenglamalar boshlanishidan chiziqli ko'rinishda berilganda edi, (13.42) formula kerak emas edi. Chunki $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}$ koeffitsiyentlar ma'lum bo'lardi.

Endi yechiladigan masalani quyidagicha fikrlash mumkin. Minimum funksiyaning $[pv^2]$ topish talab qilinadi, agar v o'zgaruvchi (13.43). tenglama bilan bog'liq bo'lsa.

Lagranj ko'paytuvchisini hisoblashni osonlashtirish uchun $\lambda_1 = -2k_1$, $\lambda_2 = -2k_2, \dots$, $\lambda_r = -2k_r$ deb belgilaymiz. Ko'paytuvchilar $k_1, k_2, \dots, k_r$ **korrelatlar** deyiladi.

Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$F(v_1, \dots, v_n) = [pv^2] - 2k_1([a_1v] + W_1) - \dots - 2k_r([a_rv] + W_r).$$

Keyinchalik yozamiz:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 2p_i v_i - 2k_1 a_{i1} - 2k_2 a_{i2} - \dots - 2k_r a_{ir} = 0,$$

Bunda

$$v_i = q a_{i1} k_1 + q a_{i2} k_2 + \dots + q a_{ir} k_r \quad (i = 1, \dots, n), \quad (13.45)$$

bu yerda

$$q_i = \frac{1}{p_i}$$

yoki

$$v_i = \frac{a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{ir}k_r}{p_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (13.46)$$

Tenglik (13.45) va (13.46) tuzatmalar korrelat

tenglamasini tuzish kabi shartli tenglamadagi tuzatma va koeffitsiyentlarni φ funksiya uchun mos o'lchamni (razmernost') kirish orqali, bir xil darajali miqdorga keltirish kerak;

4. Korrelat normal tenglama koeffitsiyentlarini koeffitsiyentlar jadvali yordamida hisoblash kerak.

Korrelat va parametrik usuldagi koeffitsiyentlar jadvalining farqi quyidagicha: birinchidan, birinchi usuldagi tuzatmalar shartli tenglamalar koeffitsiyentlari grafada pastdan yuqoriga joylashadi, tuzatmaning parametrik tenglamasi koeffitsiyentlari gorizontal qator bo'yicha joylashadi. Bundan tashqari, jadvalda «b» grafa yo'q. Chunki korrelat normal tenglamasining ozod hadlari shartli tenglamaning ozod hadlaridir.

Bog'lanmaslik xatoliklari $W_1, W_2, \dots, W_r$ qiymatlari mos shartli tenglamalar grafasidagi koeffitsiyentlar tagidagi qatorga yoziladi.

Korrelat normal tenglamalarida vazn p emas, teskari vazn q ishlatiladi.

5. Normal tenglamalar yechiladi va natijada korrelat k hisoblanadi.

6. Koeffitsiyentlar jadvalining mos grafasiga korrelat qiymatlarini ko'chirib yoziladi va (13.46) formula bo'yicha v tuzatma hisoblanadi.

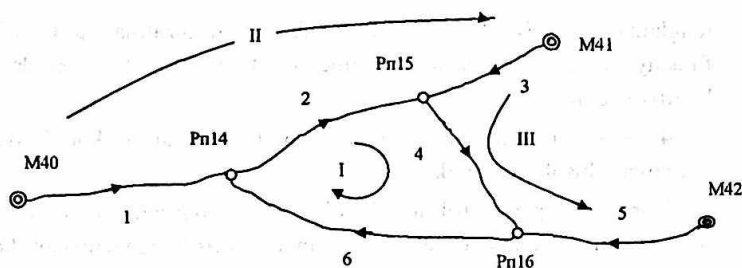
7. O'lchangan miqdorlarning tenglashtirilgan qiymati $x'_i = x_i + v_i$, hisoblanadi. Keyinchalik oxirgi tekshirish hisoblari bajariladi. (13.40) shartli tenglamadagi x'_i tenglashtirilgan qiymatlarni qo'yganda hisoblashda xatolikning yo'qligi tenglashtirishning qanoatlantirilganligini ko'rsatadi.

Koeffitsiyentlar jadvalini to'ldirishda yana quyidagi tartibni saqlash kerak. Bu jadval grafasining chapdan birinchi eng oddiy tenglamalarning koeffitsiyentlarini ± 1 koeffitsiyentlari bilan ko'chirib yozish kerak. O'ng grafalarga esa murakkabroq tenglamalar koeffitsiyentlarini ko'chirib yozish kerak. Bu normal tenglamani yechishni osonlashtiradi.

13.8. NIVELIR TO'RINI KORRELAT USULI BILAN TENGLASHTIRISH MISOLI.

3-Topshiriq. Nivelir to'rini (1-chizma) korrelat usuli bilan tenglashtiring. O'lchash natijalar va bosh ma'lumotlar 1-jadvalda berilgan.

Tenglashtirish natijasida 14, 15, 16 tugun reperlarning o'tmetkasi va yo'llar bo'yicha nisbiy balandliklarining tenglashtirilgan qiymati hisoblanishi kerak. Aniqlikni baholaganda quyidagi o'rta kvadratik xatoliklar hisoblandsin: 1 km yo'lni nivelirlashning, ikkinchi tenglashtirilgan nisbiy balandlik



1-chizma

1-jadval

Yo' l №	Yo'l uzunligi L_i (km.da)	Nisbiy balandlik h_i (m. da)	Tayanch punktlar nomeri	Tayanch punktlar otmetkasi N (m. da)
1	25,0	-1,807	M 40	122,356
2	7,9	+3,901	M 41	118,874
3	5,8	+5,554	M 42	110,870
4	6,1	-9,952		
5	8,0	+3,593		
6	9,6	6,077		

Tenglashtirish uchun parametrik usulda tenglashtirishda foydalanilgan to'ri olindi.

1. Shartli tenglamalar sonini hisoblash.

Shartli tenglamalar soni

$$r = n - K = 6 - 3 = 3$$

Bundan boshqa nivelirlashda r ni quyidagi formula bo'yicha ham topish mumkin:

$$r = P + M - 1$$

bu yerda: R – shartli tenglamalarga mos keluvchi, yopiq poligonlar soni;

M – boshlang'ich markalar soni. Ochiq to'ri uchun $M=1$. Misolda: $r = 1+3-1=3$

2. Tuzatmalar shartli tenglamasini tuzish.

Poligondagi nisbiy balandliklar belgilangan shartni bajarish kerak bo'lgan poligonlar yo'nalishi va nomerlarini ko'rsatuvchi strelkalar 1-chizmada ko'rsatilgan.

Birinci poligon bo'yicha nisbiy balandliklarning tenglashtirilgan qiymati

yig'indisi nolga teng, boshqasida oxirgi markalar otmetkasi farqi nolga teng bo'lishi kerak. Shartli tenglamalarga ega bo'lamiz:

$$1) \bar{h}_2 + \bar{h}_4 + \bar{h}_6 = 0 \quad \text{yoki} \quad 1) (h_2 + V_2) + (h_4 + V_4) + (h_6 + V_6) = 0$$

$$2) \bar{h}_1 + \bar{h}_2 - \bar{h}_3 - (H_{41} - H_{40}) = 0 \quad \text{yoki}$$

$$2) (h_1 + V_1) + (h_2 + V_2) - (h_3 + V_3) - (H_{41} - H_{40}) = 0$$

$$3) \bar{h}_3 + \bar{h}_4 - \bar{h}_5 - (H_{42} - H_{41}) = 0 \quad \text{yoki}$$

$$3) (h_3 + V_3) + (h_4 + V_4) - (h_5 + V_5) - (H_{42} - H_{41}) = 0$$

Tuzatmalar shartli tenglamasini topamiz:

$$1) V_2 + V_4 + V_6 + W_1 = 0. \quad \text{bog'lanmaslik} \quad W_1 = h_2 + h_4 + h_6$$

$$2) V_1 + V_2 - V_3 + W_2 = 0. \quad \text{bog'lanmaslik} \quad W_2 = h_1 + h_2 - h_3 - (H_{41} - H_{40})$$

$$3) V_3 + V_4 - V_5 + W_3 = 0, \quad \text{bog'lanmaslik} \quad W_3 = h_3 + h_4 - h_5 - (H_{42} - H_{41})$$

Bog'lanmaslikni hisoblashni bajarib, tuzatmalarning shartli tenglamalarning oxirgi ko'rinishini olamiz:

$$1) V_2 + V_4 + V_6 + 2,6 \text{ sm} = 0$$

$$2) V_1 + V_2 - V_3 + 2,2 \text{ sm} = 0$$

$$3) V_3 + V_4 - V_5 + 1,3 \text{ sm} = 0$$

Ozod hadlar o'lchami shunday tanlanadiki, bunda ularning sonli qiymati imkonli boricha birga yaqin bo'lishi kerak. Berilgan holatda mm va dm dan sm qulayroq.

Tuzatmalar shartli tenglamalarini tuzishda yo'l qo'yilgan xatoliklar faqatgina tenglashtirish oxirida ma'lum bo'ladi.

3. Vazn funksiyasini tuzish

Ikkinchi tenglashtirilgan nisbiy balandlikni aniqligini baholash uchun quyidagi funksiyaga ega bo'lamiz:

$$F = \bar{h}_2 \quad \text{yoki} \quad F = h_2 + V_2$$

Berilgan funksiyaning koeffitsiyentlari argumentda quyidagicha:

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial h_1} = 0; \quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial h_2} = +1; \quad F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = 0$$

4. Korrelat normal tenglamasini tuzish

Berilgan misolimizda korrelat normal tenglamalar harfiy ko'rinishda quyidagicha:

$$[qa_1a_1]K_1 + [qa_1a_2]K_2 + [qa_1a_3]K_3 + W_1 = 0$$

$$[qa_2a_1]K_1 + [qa_2a_2]K_2 + [qa_2a_3]K_3 + W_2 = 0$$

$$[qa_3a_1]K_1 + [qa_3a_2]K_2 + [qa_3a_3]K_3 + W_3 = 0$$

bu yerda: $-q_i = \frac{1}{P_i}$ - o'lchashlarning teskari vazni

Berilgan misol uchun

$$[qa_1a_3] = \sum_{i=1}^n q_i a_{i1} a_{i3} = q_4 a_{41} a_{43} + q_2 a_{21} a_{23} + \dots + q_3 a_{61} a_{63}$$

2-jadvalda shartli tenglamalar koeffitsiyenti va vazn funksiyasi ustunlar bo'yicha yozilgan. Ustunlar S' va Σ hisoblarni tekshirish uchun foydalaniladi. Normal tenglamalar koeffitsiyenti qisqartirilgan sxema bo'yicha hisoblangan.

2 jadval

Y o'l №	$q_i = \frac{L}{10}$	$a_1]$	$a_2]$	$a_3]$	S'	$F]$	$\Sigma]$	qV (sm.)	PV^2
1	2,5		+1		+1		+1	-1,222	0,597
2	0,79	+1	+1		+2	+1	+3	-1,014	1,302
3	0,58		-1	+1	0		0	-0,037	0,002
4	0,61	+1		+1	+2		+2	-0,822	1,106
5	0,80			-1	-1		-1	+0,442	0,244
6	0,96	+1			+1		+1	-0,763	0,606
Yig'indi		+3	+1	+1	+5	+1	+6		3,857
W		2.6	+2.2	+1.3			+6.1		
K		-0.795	-0.489	-0.552					
[qa_1		+2.36	+0.79	+0.61	+3.76	+0.79	+4.55		
[qa_2			+3.87	-0.58	+4.08	+0.79	+4.87		
[qa_3				+1.99	+2.02	-	+2.02		
[qs'					+9.86	+1.58	+11.44		
[qF						+0.79	+2.37		
[$q\Sigma$							+13.81		

$$[pV^2] = [KW] = 3,860$$

Yig'indilarni hisoblash $S = S' + W$

$$S_1 = [qa_1 S'] + W_1 = +3,76 + 2,6 = +6,36$$

$$S_2 = [qa_2 S'] + W_2 = +4,08 + 2,2 = +6,28$$

$$S_3 = [qa_3 S'] + W_3 = +2,02 + 1,3 = +3,32$$

Normal tenglamalar koeffitsiyentini tuzishni yig'indilar usulida tekshiramiz.

Masalan, ikkinchi tenglama uchun tekshirish tengligiga ega bo'lamiz:

$$[qa_1 a_2] + [qa_2 a_2] + [qa_3 a_2] = [qa_2 S]$$

$$\text{Sonlarda} \quad +0,79 \quad +3,87 \quad -0,58 \quad = +4,08$$

Korrelat normal tenglamalarini sonli ifodada yozamiz:

$$+2,36k_1+0,79k_2+0,61k_3+2,6=0$$

$$+0,79k_1+3,87k_2-0,58k_3+2,2=0$$

$$+0,61k_1-0,58k_2+1,99k_3+1,3=0$$

5. Korrelat normal tenglamalarini yechish.

Korrelat normal tenglamalarini 3-jadvalda Gauss sxemasi bo'yicha yechiladi.

3-jadval.

K_1	K_2	K_3	W	S	Tekshirish	F	$\Sigma = S-W+F$
+2.36	+0.79	+0.61	+2.6	+6.36		+0.79	+4.55
-1	-0.3347	-0.2585	-1.1017	-2.6949	-2.6949	-0.3347	-1.9280
(-0.42373)	+3.87	-0.58	+2.2	+6.28		+0.79	+4.87
	-0.264	-0.204	-0.870	-2.129		-0.264	-1.523
	+3.606	-0.784	+1.330	+4.151	+4.152	+0.526	+3.347
	-1	+0.2174	-0.3688	-1.1511	-1.1514	-0.1459	-0.9282
	(0.2773)						
		+1.99	+1.3	+3.32			+2.02
		-0.158	-0.672	-1.644		-0.204	-1.176
		-0.170	+0.289	+0.902		+0.114	+0.728
		+1.662	+0.917	+2.578	+2.579	-0.090	+1.572
		-1	-0.5517	-1.5511		+0.0542	-0.9458
		(0.60168)					
			-	+6.1		+0.79	+2.37
			-2.864	-7.007		-0.264	-1.523
			-0.491	-1.531		-0.077	-0.488
			-0.506	-1.422		-0.005	+0.085
			-3.861	-3.860		+0.444	+0.444
-1.102	-0.369	-0.552	-[pv ²]	-[pv ²]		$\frac{1}{p_F}$	$\frac{1}{p_F}$
+0.143	-0.120	k_3					
+0.164	-0.489						
-0.795	k_2						
k_1							

Normal tenglamalar yechimini tekshirish:

$$1) 2,36(-0,795)+0,79(-0,489)+0,61(-0,552)+2,6)=+0,001$$

$$2) 0,79(-0,795)+3,87(-0,489)-0,58(-0,552)+2,2=0$$

$$3) 0,61(-0,795)-0,58(-0,48)+1,99(-0,552)+1,3=0$$

Sxemaning to'g'ri yo'lda hisoblarning to'g'riligini tekshirish quyidagi formulalar bo'yicha W va S ustunlarda $[pV^2]$ hisoblash yo'li bilan bajariladi.

$$-[pV^2] = -\frac{W_1^2}{[qa_1a_1]} - \frac{[W_21]^2}{[qa_2a_21]} - \frac{[W_32]^2}{[qa_3a_32]} = -3,861$$

$$-[pV^2] = [W] - \frac{W_1S_1}{[qa_1a_1]} - \frac{[W_21][S_21]}{[qa_2a_21]} - \frac{[W_32][S_32]}{[qa_3a_32]} = -3,860$$

Oxirgi ikkita ustunlarda quyidagi formulalar bo'yicha funktsiyaning teskari vazni hisoblanadi:

$$\frac{1}{P_F} = [qFFr] = [qFF] - \frac{[qa_1F]^2}{[qa_1a_1]} - \frac{[qa_2F1]^2}{[qa_2a_21]} = +0,444$$

$$\frac{1}{P_F} = [qF\Sigma r] = [qF\Sigma] - \frac{[qa_1F][qa_1\Sigma]}{[qa_1a_1]} - \frac{[qa_2F1][qa_2\Sigma1]}{[qa_2a_21]} = +0,444$$

6. Tuzatmalarni va o'lchangan miqdorlar tenglashtirilgan qiymatini hisoblash

O'lchangan miqdorlarga tuzatmani 2-jadvalda tuzatmalar korrelyatsion tenglamasining formulasi bo'yicha hisoblaymiz:

$$V_i = q_i(a_{i1}K_1 + a_{i2}K_2 + a_{i3}K_3)$$

Hisoblashni osonlashtirish uchun korrelyatsion jadvalning "k" qatoriga yozilgan.

Tekshirish uchun $[pV^2]$ bevosita tuzatmalar bo'yicha va formula bo'yicha hisoblaymiz:

$$[pV^2] = -[KW]$$

Bu olingan qiymatlarni korrelyatsion normal tenglamalarini yechish sxemasi bo'yicha olingan qiymatlar bilan solishtiramiz

O'lchangan nisbiy balandliklarning tenglashtirilgan qiymatini 4-jadvalda hisoblab, tugun reperlar Rp14, Rp15, Rp16 ning o'tmetkasini topamiz.

4-jadval

Yo'llar №	Nisbiy balandliklar h_i (m)	Tuzatmalar V_i (mm)	Tenglashtirilgan nisbiy balandliklar $\bar{h}_i$ (m)
1	-1,807	-12,2	-1,8192
2	+3,901	-10,1	+3,8909
3	+5,554	-0,4	+5,5536
4	-9,952	-8,2	-9,9602
5	+3,593	+4,4	+3,5974
6	+6,007	-7,6	+6,0694

Tugun reperlar o'tmetkasi

$$H_{14}=H_{40}+\bar{h}_1=122,356-1,8192=120,5368\text{m},$$

$$H_{15}=H_{41}+\bar{h}_3=118,874+5,5536=124,4276\text{m},$$

$$H_{16}=H_{42}+\bar{h}_5=110,870+3,5974=114,4674\text{m},$$

7. Tenglashtirishni yakuniy tekshirish.

U poligon bo'yicha tenglashtirilgan nisbiy balandliklarini hisoblaganda bog'lanmaslik xatolikning yo'qligini tekshirishdan iborat.

$$1. \bar{h}_2 + \bar{h}_4 + \bar{h}_6 = +3,8909 - 9,9602 + 6,0694 = +0,0001 \text{ m.}$$

$$2. \bar{h}_1 + \bar{h}_2 - \bar{h}_3 - (H_{41} - H_{40}) = \\ = -1,8192 + 3,8909 - 5,5536 - (118,874 - 122,356) = +0,0001 \text{ m.}$$

$$3. \bar{h}_3 + \bar{h}_4 - \bar{h}_5 - (H_{42} - H_{41}) = \\ = +5,5536 - 9,9602 - 3,5974 - (110,870 - 118,874) = 0,0000 \text{ m.}$$

Qoldiq bog'lanmaslik xatoligi 0,3 mm. aniqlikda nolga teng bo'lishi kerak.

Bajarilgan tekshirish 2- jadvalda o'lchangan miqdorlar teskari vaznini hisoblashlarga ta'luqli emas.

8. Aniqlikni baholash

1. Vazn birligidagi o'rta kvadratik xatolik (10 km dagi yo'l bo'yicha nisbiy balandlik)

$$\mu = \sqrt{\frac{[pV^2]}{r}} = \sqrt{\frac{3,86}{3}} = \pm 1,13 \text{ sm} = \pm 11,3 \text{ mm};$$

vazn birligidagi xatolikning o'z xatoligi

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2r}} = \frac{11,3}{\sqrt{6}} = 4,6 \text{ mm}$$

2. Yo'lining 1 km o'rta kvadratik xatolik

$$m_{\text{km}} = \frac{\mu}{\sqrt{C}} = \frac{11,3}{\sqrt{10}} = 3,6 \text{ mm}$$

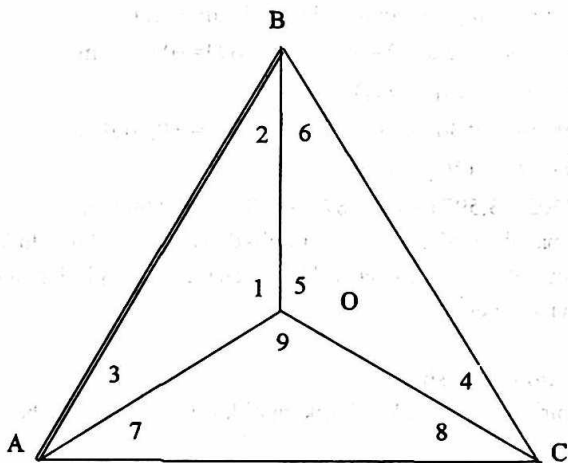
3. Funksiyaning o'rta kvadratik xatosi (ikkinchi tenglashtirilgan nisbiy balandlik)

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}} = 11,3 \sqrt{0,44} = 7,5 \text{ mm}; \quad m_{m_r} = m_\mu \sqrt{\frac{1}{P_F}} = 4,6 \sqrt{0,44} = 3,1 \text{ mm}$$

Tenglashtirishning korrelat va parametrik usullari bir xil natijani beradi.

13.9. TRIANGULYATSIYANING NAMUNALI SHAKLLARINI KORRELAT USULI BILAN TENGLASHTIRISH

4-Masala. Markaziy sistemadagi burchaklarni korrelat usuli bilan tenglashtiring va OC tomonini hisoblash aniqligini baholang. O'lchangan burchaklar qiymati 1-jadvalda berilgan. Boshlangich tomonining logarifmi $\lg S = \lg AB = 3,3182719$.



1-chizma

1. Shartli tenglamalar sonini hisoblash

Aniqlanadigan ikkita punkt O va C ning koordinatasini hisoblash uchun 4 ta burchakni o'lchash kerak bo'ladi. Shuning uchun ortiqcha o'lchashlar miqdori

$$r = n - k = 9 - 4 = 5$$

2. Tuzatmalar shartli tenglamasini tuzish.

Umumiy holda bu tenglamalar oldingi bo'limda ko'rib o'tilgan edi

2.1. Figuralar shartli tenglamalari

1). $(1) + (2) + (3) + 5,3'' = 0$

2). $(4) + (5) + (6) - 5,9'' = 0$

3). $(7) + (8) + (9) + 5,1'' = 0$

Ozod hadlar 1–jadvalda hisoblangan.

1-jadval

Δ - lar №	Burc haki ar №	O'lchangan burchaklar	Tuzatma -lar	Tenglashtirilgan burchaklar	Tenglashtiril- gan burchaklar sinuslar logarifmi	Tomonlar logarifmi
1	1	$106^{\circ}50'40,3''$	$-0,7''$	$106^{\circ}50'39,6''$	9,9809554	3,3182719
	2	42 16' 38,6	-3,1	42 16' 35,5	9,8278276	3,1651441
	3	30 52' 46,4	-1,5	30 52' 44,9	9,7103110	3,0476275
	Σ	$180^{\circ}00'05,3''$	-5,3	$180^{\circ}00'00,0''$		
		$W_1 = +5,3''$				
2	4	$20^{\circ}58'20,2''$	0,0	$20^{\circ}58'20,2''$	9,5537814	3,0476275
	5	125 20' 36,8	+3,4	125 20' 40,2	9,9115244	3,4053705
	6	33 40' 57,1	+2,5	33 40' 59,6	9,7439805	3,2378266
	Σ	$179^{\circ}59'54,1''$	+5,9	$180^{\circ}00'00,0''$		
		$W_2 = -5,9$				
3	7	$28^{\circ}26'12,5''$	-3,5	$28^{\circ}26'09,0''$	9,6777659	3,2378266
	8	23 45' 11,9	-1,1	23 45' 10,8	9,6050836	3,1651443
	9	127 48' 40,7	-0,5	127 48' 40,2	9,8976467	3,4577074
	Σ	$180^{\circ}00'05,1''$	-5,1	$180^{\circ}00'00,0''$		
		$W_3 = +5,1$				

2.2. Gorizont shartli tenglamasi

$$4). (1)+(5)+(9)-2,2'' = 0$$

Ozod hadni hisoblash

Burchaklar №	Burchaklar qiymatlari
1	$106^{\circ}50'40,3''$
5	125 20 36,8
9	127 48 40,7
Σ	359 59 57,8
	$W_4 = -2,2''$

3. Qutb(polyus) shartli tenglamasi

Bu shartli tenglamani tuzishda tegishli bo'limlarni chuqur o'rganish talab etiladi.

$$W_5 = \lg \frac{\sin 3 \sin 6 \sin 8}{\sin 2 \sin 4 \sin 7}$$

Ozod hadni hisoblash

3- jadval

Burch. №	Burchaklar qiymatlari	Burchaklar sinuslar logarifmi	$\Delta 1''$	Burch. №	Burchaklar qiymatlari	Burchaklar sinuslari logarifmi	$\Delta 1''$
3	30° 52' 46,4"	9,7103163	+35,2	2	42 16' 38,6"	9,8278348	+23,2
6	33 40' 57,1	9,7439726	+31,5	4	20 58' 20,2"	9,5537814	+54,9
8	23 45' 11,9	9,6050889	+47,9	7	28 26' 12,5	9,6777795	+38,9
	Σ_1	9,0593778			Σ_2	9,0593957	

$$W_5 = \Sigma_1 - \Sigma_2 = -179 \cdot 10^{-7} = -179 \text{ birlik } 7\text{-chi darajali logarifmi}$$

Normal tenglamalardagi katta koeffitsiyentlardan qutilish uchun, qutb shartli tenglamasining ozod hadini va koeffitsiyentlarini 5-chi darajali logarifmda ifodalaymiz.

$$5). -0,232(2)+0,352(3)-0,549(4)+0,315(6)-0,389(7)+0,479(8)-1,79=0$$

3. Vazn funksiyasini tuzish.

Tomon OC ni topishdagi aniqlikni baholash uchun vazn funksiyasini tuzamiz, ya'ni tenglashtirilgan burchaklar orqali shu tomonni hisoblash ifodasini:

$$F = \lg S \frac{\sin \{3 + (3)\} \sin \{6 + (6)\}}{\sin \{1 + (1)\} \sin \{4 + (4)\}}$$

Chiziqli ko'rinishga keltirgandan keyin

$$F = F_0 - \Delta_1(1) + \Delta_3(3) - \Delta_4(4) + \Delta_6(6),$$

bu yerda: F_0 – funksiya aniqligi baholashiga ta'sir qilmaydigan kattalik.

Logarifmlar o'zgarishini 5-chi darajada ifodalab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\Delta F = +0,064(1)+0,352(3)-0,549(4)+0,315(6)$$

Shu narsaga e'tibor berish kerakki, birinchi burchak sinuslar logarifmi o'zgarishi (-) belgi bilan olinmoqda, Ya'ni burchak qiymati 90° dan katta.

4. Korreilat normal tenglamalarini tuzish.

Berilgan misolimiz uchun korreilat normal tenglamalari sistemasi harfiy belgilarda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$[a_1a_1]K_1 + [a_1a_2]K_2 + [a_1a_3]K_3 + [a_1a_4]K_4 + [a_1a_5]K_5 + W_1 = 0$$

$$[a_1a_2]K_1 + [a_2a_2]K_2 + [a_2a_3]K_3 + [a_2a_4]K_4 + [a_2a_5]K_5 + W_2 = 0$$

$$[a_1a_3]K_1 + [a_2a_3]K_2 + [a_3a_3]K_3 + [a_3a_4]K_4 + [a_3a_5]K_5 + W_3 = 0$$

$$[a_1a_4]K_1 + [a_2a_4]K_2 + [a_3a_4]K_3 + [a_4a_4]K_4 + [a_4a_5]K_5 + W_4 = 0$$

$$[a_1a_5]K_1 + [a_2a_5]K_2 + [a_3a_5]K_3 + [a_4a_5]K_4 + [a_5a_5]K_5 + W_5 = 0$$

2.2.4. bo'limda yoritilgan mos hamma hisoblashlar 2.6-jadvalda berilgan

Korrelat normal tenglamalari sonli ko'rinishda quyidagicha:

$$1) +3,000k_1 + k_4 + 0,120k_5 + 5,300 = 0$$

$$2) +3,000k_2 + k_4 - 0,234k_5 - 5,900 = 0$$

$$3) +3,000k_3 + k_4 + 0,090k_5 + 5,100 = 0$$

$$4) k_1 + k_2 + k_3 + 3,000k_4 - 2,200 = 0$$

$$5) +0,120k_1 - 0,234k_2 + 0,090k_3 + 0,959k_5 - 1,790 = 0$$

4-jadval

Burc h.Nº	$a_1]$	$a_2]$	$a_3]$	$a_4]$	$a_5]$	$S']$	F]	$\Sigma]$	V
1	+1			+1		+2,000	+0,064	+2,064	-0,65*
2	+1			+	-0,232	+0,768		+0,768	-3,14
3	+1				+0,352	+1,352	+0,352	+1,704	-1,51
4		+1			-0,549	+0,451	-0,549	-0,098	+0,04
5		+1		+1		+2,000		+2,000	+3,41
6		+1			+0,315	+1,315	+0,315	+1,630	+2,45
7			+1		-0,389	+0,611		+0,611	-3,48
8			+1		+0,479	+1,479		+1,479	-1,06
9			+1	+1		+2,000		+2,000	-0,56
Σ	+3	+3	+3	+3	-0,024	+11,97	+0,182	+12,158	
W	+5,3	-5,9	+5,1	-2,2	-1,79	+0,51		$[V^2]=43,74$	
K	-2,491	+1,571	-2,397	+1,839	+2,787			$[V^2]=-[KW]=43,73$	
$[a_1$	+3			+1	+0,120	+4,120	+0,416	+4,536	
$[a_2$		+3		+1	-0,234	+3,776	-0,234	+3,532	
$[a_3$			+3	+1	+0,090	+4,090	0	+4,090	
$[a_4$				+3		+6,000	+0,064	+6,064	
$[a_5$					+0,959	+0,935	+0,525	+1,460	
$[S'$						+18,911	+0,771	-	
$[F$							+0,529	+1,299	
$[\Sigma$								+20,981	

Yig'indilarni hisoblash $S=S'+W$

$$S_3=[a_3S'] + W_3 = +4,090 + 5,100 = +9,190$$

$$S_1=[a_1S'] + W_1 = +4,120 + 5,300 = +9,420$$

$$S_2=[a_2S'] + W_2 = +3,766 - 5,900 = -2,134$$

$$S_4=[a_4S'] + W_4 = 6,000 - 2,000 = +3,800$$

$$S_5=[a_5S'] + W_5 = 0,935 - 1,790 = -0,855$$

5. Korrelat normal tenglamalarini yechish.

Normal tenglamalarni yechish 5-jadvalda bajarilgan. Ekvivalent va eliminatsion tenglamalar koeffitsiyentlarini hisoblashning to'g'riligini joriy tekshirishni bajarish natijalarini sxemada yozmaslik ham mumkin, shuning uchun unda ushbu ustun yo'q.

5-jadval

K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	W	S	F	$\Sigma = S - W + F$
+3,000			+1,000	+0,120	+5,300	+9,420	+0,416	+4,536
-1			-0,3333	-0,0400	-1,7666	-3,1400	-0,1387	-1,5120
-0,33333	+3,000		+1,000	-0,234	-5,900	-2,134	-0,234	+3,532
	0		0	0	0	0	0	0
	+3,000		+1,000	-0,234	-5,900	-2,134	-0,234	+3,532
	-1		-0,3333	+0,0780	+1,9666	+0,7113	+0,0780	-1,1773
	-0,33333							
		+3,000	+1,000	+0,090	+5,100	+9,190	0	+4,090
		0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0
		+3,000	+1,000	+0,090	+5,100	+9,190	0	+4,090
		-1	-0,3333	-0,0300	-1,7000	-3,0633	0	-1,3633
		-0,33333						
			+3,000		-2,200	+3,800	+0,064	+6,064
			-0,3333	-0,040	-1,767	-3,140	-0,139	-1,512
			-0,333	+0,078	+1,967	+0,711	+0,078	-1,177
			-0,333	-0,030	-1,700	-3,063	0	-1,363
			+2,001	+0,008	-3,700	-1,692	+0,003	+2,012
			-1	-0,0040	+1,8491	+0,8456	-0,0015	-1,0055
			-0,49975					
				+0,959	-1,790	-0,855	+0,525	+1,460
				-0,005	-0,212	-0,377	-0,017	-0,181
				-0,018	-0,460	-0,166	-0,018	+0,275
				-0,003	-0,153	-0,276	0	-0,123
				0	+0,015	+0,007	0	-0,008
				+0,933	-2,600	-1,667	+0,490	+1,423
				-1	+2,7867	+1,7867	-0,5252	-1,5252
				-1,07181				
					0,00	+0,51	+0,529	+1,299
-1,767	+1,967	-1,700	+1,850	+2,787	-9,36	-16,64	-0,058	-0,629
-0,111	+0,217	-0,084	-0,011	K_5	-11,60	-4,20	-0,018	+0,275
-0,613	-0,613	-0,613	+1,839		-8,67	-15,62	0	0
0	0	-2,397	K_4		-6,84	-3,13	0	-0,003
0	+1,571	K_3			-7,25	-4,64	-0,257	-0,747
-2,491	K_2				-43,72	-43,72	+0,196	+0,195
K_1					$-[V^2]$	$-[V^2]$	$1/P_F$	$1/P_F$

Korrelat normal tenglamalarini hisoblashni tekshirish

$$1). +3,000(-2,491)+1,839+0,120 \cdot 2,787+5,300=0,000$$

$$2). +3,000 \cdot 1,571+1,839-0,234 \cdot 2,787-5,900=0,000$$

$$3). +3,000(-2,397)+1,839+0,090 \cdot 2,787+5,100=-0,001$$

$$4). -2,491+1,571-2,397+3,000 \cdot 1,839-2,200=0,000$$

$$5). +0,120(-2,491)-0,234 \cdot 1,571+0,090(-2,397)+0,959 \cdot 2,787-1,790=0,000$$

Hisoblash sxemasining to'g'ri yo'nalishida hisoblash to'g'riligini tekshirish W va S ustunlarda bajarilgan va (2.7) va (2.8) formula bo'yicha $[V^2]$ miqdorni aniqlashdan iborat.

Funksiya teskari vazni oxirgi ikkita ustunda (2.13) va (2.14) formulalar bo'yicha bajariladi.

6. Tuzatmalarni va burchaklarning tenglashtirilgan qiymatini hisoblash

O'lchangan burchaklarga tuzatmalarni 6-jadvalda teng aniqlikdagi o'lchashlar uchun tuzatmalar korrelat tenglamalar quyidagi formulasi bo'yicha hisoblaymiz

$$V_i = a_{i1}K_1 + a_{i2}K_2 + \dots + a_{i5}K_5$$

Miqdor $[V^2]$ bevosita tuzatmalar bo'yicha va tekshiruv quyidagi formulasi bo'yicha topamiz:

$$[V^2] = -[KW]$$

Olingan bu qiymatlarni korrelat normal tenglamalari sxemasi bo'yicha olingan qiymatlar bilan solishtiramiz.

Burchaklarning tenglashtirilgan qiymati 2.5-jadvalda hisoblangan. Shu joyda burchaklarning tenglashtirilgan qiymati bo'yicha va bosh tomon logarifmi bo'yicha uchburchakni yechish ham bajarilgan.

7. Tenglashtirishning yakuniy tekshirish

U tenglashtirilgan burchaklar qiymatlari bo'yicha shartli tenglamalarda bog'lanmaslik xatoligi yo'qligini tekshirishni o'z ichiga oladi.

1-jadvalda uchburchakning ichki burchaklar yig'indisini hisoblash, birinchi

va oxirgi uchburchak uchun umumiy bo'lgan tomonlar logarifmi ikkita qiymatlarini taqqoslash yetarlidir. OA tomon uchun mos ravishda ular 3.1651441 va 3.1651443 ga teng. Moslik oxirgi raqamning 3 birlik chekidan oshib ketmasligi kerak

Triangulyatsiya to'rini tenglashtirishda ikkinchi bosh tomon bo'lsa, uni ham uchburchaklarni yechish bo'yicha olingan logarifm bilan taqqoslash kerak.

8. Aniqlikni baholash

1) Burchaklar o'lchashning o'rta kvadratik xatosi

$$m = \sqrt{\frac{v^2}{r}} = \sqrt{\frac{43,74}{5}} = 3,0'';$$

xatolikning o'z xatoligi

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2r}} = \frac{3,0}{\sqrt{10}} = 0,95''$$

2). OC tomoni logarifmi o'rta kvadratik xatosi

$$m_{g.s} = m \sqrt{\frac{1}{P_F}} = 3,0'' \sqrt{0,196} = 1,33 \text{ birlik 5-chi darajali logarifmi}$$

3) OC tomonini aniqlashning nisbiy xatoligi

$$\frac{m_s}{S} = \frac{m_{g.s}}{M} = \frac{1,33}{0,434 \cdot 10^5} = \frac{1}{32600}$$

13.10 TENGLASHTIRISH MATERIALLARI BO'YICHA ANIQLIKNI BAHOLASH TO'G'RISIDA

Aniqlikni baholash deganda o'lchashlarning va o'lchash miqdorlari funksiyasining tenglashtirishdan keyin o'rta kvadratik xatoligini topishga aytiladi.

Umumiy holatda har qanday miqdorning o'rta kvadratik xatoligi quyidagi formula bilan aniqlanadi

$$M_i = \mu \sqrt{\frac{1}{P_i}}, \quad (13.49)$$

bunda μ — vazn birligidagi xatolik;

P_i — undagi baholanadigan miqdor.

Shunday qilib, aniqlikni baholash ikkita alohida masalaga bo'linadi: vazn birligidagi xatolikni topish va baholanadigan miqdorning vaznini topish.

Chunki μ miqdor tenglashtirish natijasi bo'yicha, o'lchash natijalari vaznini tanlash sistemasi uchun tenglashtirishgacha qabul qilingan qiymatdan farq qilishi mumkin. Quyidagi formula bo'yicha

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \quad (13.50)$$

tenglashtirishdan keyin (13.49) formula bo'yicha hisoblanadigan M_i miqdor tenglashtirishgacha oldindan hisoblangandan farq qilishi mumkin.

Savol tug'iladi, ikkita miqdordan qaysi biri afzalroq: tenglashtirishgacha qabul qilingan (13.50) formula uchun yoki pastda keltirib, chiqariladigan tenglashtirishdan keyin, formula bo'yicha? Bu savol har bir alohida holatda aniq yechilishi kerak: ishonchli oraliq miqdoriga bog'liq holda vazn birligidagi haqiqiy xatolik qiymati uchun. Shubhasiz, eng tor ishonchli interval qiymatiga afzallik imkonini berish kerak.

Demak, aniqlikni baholash masalasini yechish uchun, birinchidan, vazn birligidagi xatolikni aniqlash va ikkinchidan, aniqlanadigan miqdor vaznini aniqlash usulini topish zarur.

Ikkinchi masala quyidagicha yechiladi: aniqlanadigan miqdor y o'lchash natijalari funksiyasi ko'rinishida beriladi

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \quad (13.51)$$

keyinchalik o'lchash xatoliklari nazariyasining ma'lum formulasi qo'llaniladi

$$\frac{1}{P_y} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{p_i}, \quad (13.52)$$

bunda p_i — o'lchash vazni.

Bir nechta miqdorlarni birgalikda tenglashtirishda aniqlikni baholashning katta qiyinchiligi (13.51) formulani topish, ya'ni aniqlanayotgann miqdorni o'lchash natijalari orqali keltirishdir. Tenglashtirishning hamma usullarida bu masala normal tenglama koeffitsiyentlari teskari matritsasini bevosita shu tenglamalarni yechish algoritmi bilan birgalikda yechiladi. Bu masalalarning to'liq ifoda etish va mos hisoblash usullarini keltirish keyingi boblarda keltirilgan.

Bu yerda faqat vazn birligidagi xatoliklarni hisoblash usullarini keltiramiz.

1. Vazn birligida xatolikni topish

Vazn birligida xatolikni topish uchun, birinchidan, xatoliklar nazariyasi formulasidan foydalanish mumkin

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}}.$$

Haqiqiy xatolik θ sifatida bog'lanmaslik xatoligi W olish mumkin. Bog'lanmaslik xatoligi vazni quyidagi formula orqali hisoblash mumkin:

$$\frac{1}{P} = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{p_i} \right],$$

bunda φ — o'lchangan miqdorlar orasidagi bog'liqlikni ifodalovchi, shartli

tenglamaning chap tomoni.

Endi vazn birligidagi xatolikni hisoblash uchun formulani topamiz

$$\mu = \sqrt{\frac{[PW^2]}{N}}, \quad (13.53)$$

bunda N — hosil bo'ladigan bog'lanmaslik xatoliklari soni

(13.53) formulada hamma hosil bo'ladigan shartli tenglamalar bog'lanmaslik xatoligi foydalaniladi, shuning uchun $N > r$. Lekin ishonchli chegarani qo'yish uchun "ko'rsatkich darajasi" («степень свободы») ortiqcha o'lchangan miqdorlar soniga teng sonni qabul qilishi kerak $r = n - k$.

Vazn birligidagi xatolik o'lchash natijasidagi v tuzatma yordamida ham aniqlanishi mumkin. Bu tuzatma o'lchash aniqligiga bog'liq. Mos formulani topamiz.

Chunki tenglashtirish shartni saqlagan holda bajariladi

$$[pv^2] = \min,$$

biz tenglikni yozishga haqlimiz

$$[p\Delta^2] > [pv^2],$$

bunda Δ — o'lchashlarning haqiqiy xatoliklari.

Bu tenglikning ikki tomonini o'lchashlar soniga bo'lib, topamiz

$$\frac{[p\Delta^2]}{n} = \mu^2 > \frac{[pv^2]}{n},$$

Bunda μ — empirik qiymati ($\mu^2 = M(p\Delta^2)$ aniq qiymati).

Oxirgi tengsizlikni tenglikka keltirish uchun, o'ng qismi maxrajini hozircha musbat noma'lum x miqdorga kamaytirish kerak. Tenglikni keyinchalik yozish mumkin

$$\mu^2 = \frac{[pv^2]}{n - x} \quad (13.54)$$

Masala x qiymatni topishga olib keladi. Bunda quyidagicha fikr yuritish kerak. Birinchidan, o'lchangan miqdorlar n soni kerakli miqdorlar sonidan kam bo'lmasligi kerak, ya'ni $n \geq k$.

Bundan ko'rinib turibdiki

$$x \leq k \quad (13.55)$$

Haqiqatdan, $x > k$ bo'lganda (13.54) tenglikning maxraji manfiy, bu bo'lishi mumkin emas. Chunki μ^2 va $[pv^2]$ — qiymatlar albatta musbat. Bu (13.55) tenglikning haqli ekanligini isbotlaydi.

x ham k dan kichik bo'lmasligi kerak. Quyidagi fikr teskarisini isbotlaydi.

Deylikki, $x < k$ bo'lsin. Unda $n = k$ bo'lganda (13.54) tenglikning maxraji musbat son bo'ladi. Lekin, agar $n = k$, ya'ni faqat kerakli miqdorlar o'lchanganda o'lchash natijasida bog'lanmaslik xatoligi paydo bo'lmasdi. Binobarin natijalarga tuzatma ham bo'lmasdi. Lekin bunda $[pv^2] = 0$ va (13.54) tenglik

qanoatlantirmaydi, chunki $\mu^2 \neq 0$. Shuning uchun x hech qachon k dan kichik bo'lishi kerak emas.

Shuning uchun, (13.54) formula umumiylik talabiga $x = k$ bo'lgandagina javob beradi

Aytilganlarni hisobga olib, vazn birligidagi xatolik formulasini yozamiz

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}, \quad (13.56)$$

Bunda $n - k = r$ — ortiqcha o'lchangan miqdorlar soni;

v — tenglashtirishdan olingan tuzatma;

r — tenglashtirishgacha qabul qilingan o'lchash miqdorlari vazni.

(13.56) formuladan ayrim bir hol kabi bitta miqdorni ko'p marta o'lchaganda vazn birligidagi xatolik uchun formula kelib chiqadi, ya'ni o'lchash xatoliklari nazariyasi formulasi

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}.$$

Ko'rinib turibdiki bu holda kerakli miqdorlar soni $k = 1$ ga teng.

Faqat kerakli miqdorlar o'lchangan holatni ko'rib o'tamiz. Ya'ni soni k ga teng yoki $n = k$. Bu holda o'lchash natijalariga tuzatma kiritilmaydi. Biz $v_i = 0$ va $[pv^2] = 0$ qabul qilishga majburlamiz. Lekin $\mu^2 \neq 0$, bu holatda ($n = k$ bo'lganda) μ miqdori to'g'risida fikrni aytish qiyin, μ miqdor noaniq. Demak (13.54) $n - x = 0$ bo'lishi kerak, ya'ni $x = k$ va biz $\frac{0}{0}$ ko'rinishda noaniqlikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, (13.54) formula (13.56) ko'rinishdagi ifodani oladi.

Yana quyidagi holatni e'tiborga olish kerak.

(13.53) va (13.56) formulalar o'lchash aniqligini to'g'ri baholashga shunday holatlarda beriladiki, bunda bog'lanmaslik xatoligi bosh berilgan xatolik bog'liq bo'lmasin. Misol, nivelir yo'lidagi boshlang'ich reper balandligi yoki bu xatoliklarning e'tiborsizligi. Berilgan bosh xatoliklarda e'tiborli xatoliklarning borligida o'lchash aniqligini (13.53) formula bilan eng to'g'ri baholanadi. Agar bunda faqat bosh berilganlarga bog'liq bo'lmagan bog'lanmaslik xatoligi foydalanilgan bo'lsa. Masalan uchburchaklar bog'lanmaslik xatoligi. Agar (13.56) formula bo'yicha hisoblangan qiymat μ (13.53) formula bo'yicha hisoblangan qiymatdan, bosh berilganlarsiz, sezilarli katta bo'lsa, bosh berilganlar aniqligining noaniqligini o'lchash aniqlikka nisbatan bildiradi. Bunday xulosani μ ning ikkala qiymati kerakli ishonch bilan olingan bo'lsa.

(13.56) formula bo'yicha tenglashtirishdan keyin olingan vazn birligidagi xatoliklar miqdoriga ishonch darajasi savoliga qaytamiz. Bunda foydalanilgan mustaqil bog'lanmaslik xatoliklari sonini hisobga olish kerak, ya'ni $r = n - k$. Chunki bog'lanmaslik xatoligi funksiyalarning haqiqiy xatoligidir. Shuning uchun

ishonchli chegarani qo'yishda r (число «степеней свободы») sonini e'tiborga olish kerak.

$r \geq 19$ da qiymat hisoblanadi χ^2 (1-qismga qarang).

$$m_{\mu} = \frac{0,75\mu}{\sqrt{r}}$$

va normal taqsimlanish qonuni qo'llaniladi.

2. Parametrik usulda tenglashtirishda (pv^2) ni hisoblash usullari

1. Koeffitsiyentlar jadvali yordamida. Koeffitsiyentlar jadvalida (13.25) tuzatmalar tenglamasidan foydalanib v_i tuzatma hisoblanadi. Shunday usulda 26-jadvalda bu tuzatmalar hisoblangan.

Hamma tuzatmalarni olgandan keyin $[pv^2]$ hisoblash qiyin emas.

2. $[pv^2] = [pv]$ formula bo'yicha. Bu formula deyarli qo'llanilmaydi, lekin katta nazariy qiymatga ega.

Tuzatmalar tenglamasini yozamiz

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i=1, \dots, n).$$

Bu tenglamani $p_i v_i$ ga ko'paytiramiz va ularni yig'amiz. Unda

$$[pv^2] = [pa_1v]\tau_1 + \dots + [pa_kv]\tau_k + [plv]. \quad (13.57)$$

lekin, (13.31) tenglikka asosan,

$$[pa_1v] = [pa_2v] = \dots = [pa_kv] = 0,$$

Shuning uchun (13.57) tenglikdan topamiz

$$[pv^2] = [plv]. \quad (13.58)$$

3. Formula bo'yicha

$$[pv^2] = [pa_1v]\tau_1 + \dots + [pa_kv]\tau_k + [plv].$$

Hamma tuzatmalar tenglamasini

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i=1, \dots, n).$$

$r_i l_i$ ga ko'paytirib va natijani yig'ib, topamiz

$$[plv] = [pa_1l]\tau_1 + \dots + [pa_kl]\tau_k + [pll].$$

(13.58) tenglikni e'tiborga olib, yozishimiz mumkin

$$[pv^2] = [pa_1l]\tau_1 + \dots + [pa_kl]\tau_k + [pll]. \quad (13.59)$$

4. Normal tenglamalarni yechish sxemasida.

(13.59) tengsizlikni normal tenglamalar sistemasiga qo'shamiz va quyidagicha topamiz

$$[pa_1a_1]\tau_1 + \dots + [pa_1a_k]\tau_k + [pa_1l] = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$[pa_1a_k]\tau_1 + \dots + [pa_ka_k]\tau_k + [pa_kl] = 0,$$

$$[pa_1l]\tau_1 + \dots + [pa_kl]\tau_k + [pll] = [pv^2].$$

Yangi olingan tenglamalar sistemasi normal tenglamalarning hamma

xossalarini saqlaydi. Shuning uchun bu tenglamani yechish qiyinchilik tug'dirmaydi.

Hamma noma'lumlar τ yo'qotgandan keyin $[pv^2]$ qiymatini topamiz (bu yechimning batafsilligi VI bobga qarang)

3. Korrelat usulida tenglashtirishda (pv^2) ni hisoblash usuli

1. Koeffitsiyentlar jadvali yordamida. Tuzatma v_i koeffitsiyentlar jadvalida (27-jadvalga qarang) formula (13.46). bo'yicha hisoblanadi. Tuzatmalarni topgandan keyin $[pv^2]$ hisoblanadi

2. Quyidagi formula bo'yicha

$$- [pv^2] = W_1 k_1 + W_2 k_2 + \dots + W_r k_r$$

Tuzatmalar korrelat tenglamasini yozamiz

$$v_i = \frac{a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{ir}k_r}{p_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Bu tenglamalarni $p_i v_i$ ga ko'paytirib va ularning yig'indisini olamiz. Bunda topamiz

$$[pv^2] = [a_1 v] k_1 + [a_2 v] k_2 + \dots + [a_r v] k_r \quad (13.60)$$

Tuzatmalar shartli tenglamalarni e'tiborga olib, ya'ni (13.44) tenglikni

$$[a_1 v] = -W_1,$$

$$[a_2 v] = -W_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$[a_r v] = -W_r,$$

Natijada (13.60) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi

$$- [pv^2] = W_1 k_1 + W_2 k_2 + \dots + W_r k_r \quad (13.61)$$

3. Korrelat normal tenglamalarini yechish sxemasi bo'yicha.

(13.61) tenglikni korrelat normal tenglamalari sistemasiga qo'shib, topamiz

$$[qa_1 a_1] k_1 + \dots + [qa_r a_r] k_r + W_1 = 0,$$

$$[qa_1 a_r] k_r + \dots + [qa_r a_r] k_r + W_r = 0,$$

$$W_1 k_1 + \dots + W_r k_r = -[pv^2].$$

Oxirgi tenglamalar sistemasi normal tenglamalar sistemasining hamma xossalarini saqlaydi. Shuning uchun uni yechish qiyinchilik keltirmaydi. Bu sistemadan hamma korrelatlarni chiqarib tashlab $[pv^2]$ qiymatini olamiz (yechimni VI bobga qarang).

4. Eng kichik kvadratlar prinsipini algebraik asoslash

Olingan (13.58) formula eng kichik kvadratlar prinsipiga yana bitta asos berishga imkon beradi. Bu formula yordamida eng kichik kvadratlar usuli bilan tenglashtirishdan keyin o'lchangan miqdorlar aniqligi yanada oshganligini ko'rsatish mumkin.

Quyidagi tenglikni yozamiz

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= x'_i - X_i \\ v_i &= x'_i - x_i \end{aligned} \right\} \quad (13.62)$$

Bunda θ_i — o'lchashlarning haqiqiy xatoligi;

x'_i — eng kichik kvadratlar usuli bo'yicha o'lchangan miqdorlarning tenglashtirilgan qiymati

(13.62) tenglikni olamiz

$$\theta_i + v_i = x'_i - X_i.$$

Chunki X_i o'lchangan miqdorning haqiqiy qiymati, farq $x'_i - X_i$ — tenglashtirilgan qiymatning haqiqiy xatosi. Bu xatoliklarni δ_i orqali belgilaymiz. Endi yozishimiz mumkin.

$$\delta_i = \theta_i + v_i \quad (i=1, \dots, n).$$

Keyinchalik yozamiz

$$[p\delta^2] = [p\theta^2] + [pv^2] + 2[p\theta v] \quad (13.63)$$

Miqdor $[p\theta^2]$ o'lchash aniqligini ta'riflaydi. Shuning uchun $[p\delta^2]$ miqdor o'lchangan miqdorlar tenglashtirilgan qiymati aniqligini ifodalashini mantiqan to'g'ri. Miqdor $[p\delta^2]$ ni olish uchun miqdor $[p\theta v]$ ni topish kerakligi tengsizlik (13.63) dan ko'rinib turibdi. Buning uchun parametrik tenglashtirish usuli formulalaridan foydalanamiz.

Noma'lumlarning t taxminiy qiymati sifatida ularning T haqiqiy qiymati olingan, ya'ni $t_i^0 = T_i$ ($i = 1, \dots, k$). Unda tuzatmalar parametrik tenglamalari ozod hadlarini (13.24) formulaga asosan quyidagi formula bo'yicha hisoblash mumkin.

$$l_i = f_i(T_1, \dots, T_k) - x_i.$$

Lekin, shubhasiz,

$$f_i(T_1, \dots, T_k) = X_i$$

shuning uchun

$$l_i = X_i - x_i = -\theta_i$$

Endi (13.58) formula quyidagi ko'rinishni oladi

$$[pv^2] = -[p\theta v]. \quad (13.64)$$

Chunki tenglashtirish natijalari noma'lumlarning taxminiy qiymatini qabul qilish sistemasiga bog'liq emas. Shuning uchun (13.64) formula universal

qiymatga ega.

Formula (13.63)ga murojaat qilib va (13.64) ifodani hisobga olib topamiz,

$$[p\delta^2] = [p\theta^2] - [pv^2]. \quad (13.65)$$

Formula (13.65) eng kichik kvadratlar usuli bilan tenglashtirilgandan keyin o'Ichangan miqdorlar aniqligi doimo oshishini tasdiqlashga imkoniyat beradi va bu aniqlikning oshishi darajasini tahlil qilishga imkon beradi. Buning (13.65) tenglikning ikki qismini n ga bo'lamiz

$$\frac{[p\delta^2]}{n} = \frac{[p\theta^2]}{n} - \frac{[pv^2]}{n}.$$

Lekin $\frac{[p\theta^2]}{n} \approx \mu^2$. Shuning uchun quyidagicha yozamiz

$$\frac{[p\delta^2]}{n} \approx \mu^2 - \frac{n-k}{n} \cdot \frac{[pv^2]}{n-k} \approx \mu^2 - \frac{n-k}{n} \mu^2 = \frac{k}{n} \mu^2,$$

yoki

$$\frac{[p\delta^2]}{n} \approx \frac{k}{n} \mu^2. \quad (13.66)$$

$\frac{[p\delta^2]}{n} = M^2$ — tenglashtirilgan qiymatlar aniqligini ta'riflovchi vazn birligidagi xatolik, μ^2 — o'Ichash aniqligini ta'riflaydigan miqdor deb, topamiz

$$M^2 \approx \frac{k}{n} \mu^2$$

yoki

$$\frac{\mu^2}{M^2} \approx \frac{n}{k}.$$

Chunki o'rta kvadratik xatoning kvadrati vaznga teskari proporsional bo'lganligidan yozishimiz mumkin

$$\left(\frac{p}{p}\right)_{\text{on}} \approx \frac{n}{k}, \quad (13.67)$$

ya'ni o'Ichangan miqdorlar tenglashtirilgan qiymati vaznlarining o'Ichangan miqdorlar vaznlariga nisbati o'rtacha $\frac{n}{k}$ ga teng. Ifoda (13.67) "vaznlarning o'rtacha nisbati" formulasi deyiladi. U tenglashtirilgan miqdorlarni aniqligini baholashda juda katta rol o'ynaydi.

Yuqorida keltirilgan eng kichik kvadratlar usulini asoslash o'Ichash natijalari uchun majburiy normal taqsimlanishni talab qilmaganligini eslatib o'tamiz. Formulalar (13.65) va (13.67) hamma taqsimlanishda to'g'ri bo'ladi. Shuning uchun eng kichik kvadratlar usulining ko'pgina afzaligiga uning to'liq universalligi ham qo'shish mumkin.

14. NORMAL TENGLAMALARNI TUZISH VA YECHISH

14.1. NORMAL TENGLAMALAR KOEFFITSIYENTLARINI HISOBLASH

Normal tenglamalar sistemasini matritsa ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$NZ = -L, \quad (14.1)$$

bunda N — kvadrat koeffitsiyentlari matritsasi;

Z — noma'lumlar ustuni matritsasi;

L — ozod had ustuni matritsasi.

(14.1) ifoda yoyilgan ko'rinishda quyidagicha:

$$\begin{pmatrix} N_{11}, \dots, N_{1m} \\ \dots \\ N_{m1}, \dots, N_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_m \end{pmatrix}. \quad (14.2)$$

Parametrik usulda tenglashtirishda tenglamalar soni $m = k$ ga teng, ya'ni kerakli miqdorlar soniga teng, korrelat usulda tenglashtirishda tenglamalar soni $m = r$, ya'ni ortiqcha miqdorlar soniga teng.

Normal tenglamalar koeffitsiyenti ikkita usulda ham bir xil ko'rinishdagi strukturaga ega. Quyidagicha:

$N_{ij} = [p_{ij}]$ — parametrik usulda,

$N_{ij} = [q_{ij}]$ — korrelat usulida,

$z_j = r_j$ va $L_i = [p_{ij}]$ — parametrik usulda,

$z_j = k_j$ va $L_j = W_j$ — korrelat usulida.

Tuzatmalar parametrik tenglamalari va tuzatmalar korrelat tenglamalari koeffitsiyentlari to'g'ri burchakli matritsani quyidagi orqali belgilaymiz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1m} \\ \dots \\ a_{n1}, \dots, a_{nm} \end{pmatrix} \quad (14.3)$$

bunda $n > m$.

Keyingilarda bu matritsani **b o s h l a n g' i c h** deb ataymiz. Mos tenglamalarni ham boshlang'ich deb ataymiz*.

Transponirovan matritsani A^T orqali, vaznlar diagonal matritsasini yoki teskari vaznlarini r yoki q orqali belgilab quyidagicha yozish mumkin.

$N = A^T p A$ — parametrik usul uchun

$N = A^T q A$ — korrelat usul uchun**

$$\left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} \quad (14.4)$$

Eslatma:

* Geodezik adabiyotlarda boshlang'ich matritsaning har xil ustunlarini lotin alfavitining har xil harflari bilan belgilaydilar. Bunda ustun nomeri harfining tartib raqumi bilan belgilaydi, qatorlar nomer sonli indeks bilan belgilanadi. Misol, 4 chi qatorning elementlari a_4, b_4, c_4 va h.k. yoziladi.

** Tuzatmalar shartli tenglamalari koeffitsiyentlarining transponirovan matritsasi qatorida tuzatmalar korrelat

tenglamalar koeffitsiyentlari joylashadi.

(14.4) tenglikdan ko'rinadiki N — bosh kvadratik diagonaliga nisbatan kvadratlil va simmetrikdir yoki $N_{ij} = N_{ji}$ ekanligini ko'rsatdik. Shuning uchun normal tenglamalar koeffitsiyentlarini qisqartirilgan ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\left. \begin{array}{l} N_{11}, N_{12}, N_{13}, \dots, N_{1m} \\ N_{22}, N_{23}, \dots, N_{2m} \\ N_{33}, \dots, N_{3m} \\ \dots\dots\dots \\ N_{mm} \end{array} \right\} \quad (14.5)$$

Ya'ni, koeffitsiyentlarni har bir qatorga kvadratidan boshlab yozish kerak. Tartib raqami j normal tenglamalar koeffitsiyentlari quyidagicha o'qiladi: j - chi ustun yuqoridan pastga kvadratik koeffitsiyentlarga va so'ng o'ngga qator bo'yicha, misol $N_{13}, N_{23}, N_{33}, \dots, N_{m3}$.

1. Normal tenglamalar koeffitsiyentlarini hisoblashni tekshirish

Normal tenglamalar koeffitsiyentlarini hisoblashni tekshirish quyidagiday bajariladi.

Har bir tuzatmalar parametrik tenglamalari uchun yig'indi hisoblanadi

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ik} + l_i = s_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

undan keyin quyidagi ko'rinib turgan tekshirish tenglamasidan foydalaniladi*:

$$\left. \begin{array}{l} [pa_1a_1] + [pa_1a_2] + \dots + [pa_1a_k] + [pa_1l] = [pa_1s] \\ [pa_2a_1] + [pa_2a_2] + \dots + [pa_2a_k] + [pa_2l] = [pa_2s] \\ \dots\dots\dots \\ [pa_ka_1] + [pa_ka_2] + \dots + [pa_ka_k] + [pa_kl] = [pa_ks] \end{array} \right\} \quad (14.6)$$

Korrelat usulida

$$s_i = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ir} \\ (i = 1, \dots, n),$$

Va tekshirish tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$[qa_1a_1] + [qa_1a_2] + \dots + [qa_1a_r] = [qa_1s]$$

$$[qa_2a_1] + [qa_2a_2] + \dots + [qa_2a_r] = [qa_2s]$$

$$\dots\dots\dots$$

$$[qa_ka_1] + [qa_ka_2] + \dots + [qa_ka_r] = [qa_ks]$$

Normal tenglamalar koeffitsiyentlarini yordamida hisoblanayotgan tuzatmalar tenglamasi koeffitsiyentlari jadvalida ikkita usulda ham tekshirish uchun «s» grafa berilgan.

* Hamma tuzatmalar tenglamalari koeffitsiyentlari a harfi bilan belgilangan. Ular ikkita indeksga ega: birinchisi indeks i qatorlar nomerini belgilaydi, ikkinchi koeffitsiyentlar jadvalidagi ustun nomeridir. Qisqartirilgan yozuvda koeffitsiyentlar ko'paytmasi joriy indeksi i tushirib qoldiriladi. Misol (14.6) tenglikdan ikkinchi qatordagi uchinchi ustun yoyilgan yozuvda quyidagicha bo'ladi

$$[pa_2a_3] = \sum p_1a_{12}a_{13} = p_{12}a_{12}a_{13} + p_{22}a_{22}a_{23} + p_{32}a_{32}a_{33} + \dots + p_{r2}a_{r2}a_{r3}$$

1. Tenglamani teng anqlik ko'rinishiga keltirish

Normal tenglamalarning koeffitsiyentlari va ozod hadlari teng anqlikdagi o'lchashlarda quyidagi ko'rinishda bo'ladi $[a_1a_1], [a_1a_2], \dots, [a_1l]$, ya'ni ikkita ko'paytmaning yig'indisi bo'ladi. Bunday ko'paytmaning yig'indisini hisoblash mashinalarida alohida ko'paytmalarni oraliq yozuvisiz olish mumkin amaliyotda juda muhim. Lekin ko'paytmalarning yig'indisi ko'rinishidagi $[pa_1a_1], [pa_1a_2], \dots, [pa_1l]$ va h. k. Ko'rsatilgan yo'l bilan olish qiyin va hisobni qiyinlashtiradi. Shuning uchun tenglamani teng anqlik ko'rinishiga keltiriladi (vazn birligiga). Bu o'zgartirishning ma'nosi shuki, tuzatmalar parametrik tenglamalarning hamma koeffitsiyentlari va ozod hadlari $\sqrt{p_i}$ ga ko'paytiriladi, bunda i — mos o'lchashlarning indeksi.

$\sqrt{p_i}$ ga ko'paytirishdan keyin redutsirovan tenglamalarni teng anqlikdagi o'lchashlar uchun tenglama deb qarash mumkin. Haqiqatdan, belgilab

$$a_{11}\sqrt{p_i} = a'_{11}, \quad a_{12}\sqrt{p_i} = a'_{12}, \quad \dots, \quad a_{1k}\sqrt{p_i} = a'_{1k}, \quad l_i = \sqrt{p_i} = l'_i,$$

topamiz

$$[a'_1a'_1] = [pa_1a_1], \quad [a'_1a'_2] = [pa_1a_2], \quad \dots, \quad [a'_1l'] = [pa_1l],$$

Va huddi shuni isbotlash talab qilingan edi.

Tuzatmalar korrelat tenglamalarini teng anqlik ko'rinishiga keltirish uchun bu tenglama koeffitsiyentlarini $\sqrt{q}$ ga ko'paytirish kerak.

Tenglamalarni teng anqlik ko'rinishiga keltirishda koeffitsiyentlar jadvalini o'ngdan $a'_1, \dots, a'_k, \dots, l', s'$ grafa bilan to'ldiriladi. Bu qo'shimcha grafa ning pastki qismiga quyidagi qiymatlarni ko'chirib yoziladi

$$[a'_1a'_1], [a'_1a'_2], \dots, [a'_1l'] \text{ va h.k.}$$

Agar tenglamalar koeffitsiyenti absolyut qiymati bo'yicha birga teng bo'lsa, ularni teng anqlik ko'rinishiga keltirishdan foyda yo'q.

Ikkita asosiy tenglashtirish usuli uchun koeffitsiyentlar jadvali (29 va 30 jadv.) formasini eng umumiy ko'rinishda keltiramiz. Graf F qo'llanilishini VII bobda 30 jadvalda tushuntiriladi.

29 j a d v a l g a tushuntirish(parametrik usul)

1. Tuzatmalar tenglamasining redutsirovan koeffitsiyentlari aniq yig'indisi va ozod hadlari s' grafaga yoziladi. U tenglik bilan tekshiriladi:

$$\sum_1' = a'_{11} + a'_{12} + \dots + a'_{1k} + l'_i \approx s'_i \sqrt{p_i}.$$

2. Normal tenglamalarning koeffitsiyentlar yig'indisining aniq qiymati $\sum$ va ozod hadlari jadvalning past qismidagi shu grafa s' ga ko'chiriladi. Tenglikning bu yig'indilar quyidagicha tekshiriladi

$$\sum_1 \approx [a'_1s'], \quad \sum_2 \approx [a'_2s'] \text{ va h. k.}$$

3. Tuzatma v ni hisoblash quyidagicha tekshiriladi:

$$v'_i = a'_{11}\tau_1 + \dots + a'_{1k}\tau_k + l' \text{ olinadi va keyinchalik } v'_i = v_i \sqrt{p_i} \text{ tenglik tekshiriladi}$$

29 jadval
(Forma)

O'ldi ash Ne	p	a, (u)	a ₁ (u)	...	a _k (u)	l	v	s	a ₁ (u)	a ₂ (u)	...	a _k (u)	i	v'	s'
l	p ₁	a ₁₁	a ₁₂	...	a _{1k}	l ₁	v ₁	s ₁	a ₁₁	a ₁₂	...	a _{1k}	l ₁	v ₁	s ₁
.	.	.	.	...	.	.	.	.	.	.	...	.	.	.	.
.	.	.	.	...	.	.	.	.	.	.	...	.	.	.	.
.	.	.	.	...	.	.	.	.	.	.	...	.	.	.	.
n	p _n	a _{n1}	a _{n2}	...	a _{nk}	l _n	v _n	s _n	a _{n1}	a _{n2}	...	a _{nk}	l _n	v _n	s _n
								[a ₁]	[a ₁ , a ₂]	[a ₁ , a ₂]	...	[a ₁ , a _k]	[a ₁ , l ₁]	[v ₁ , s ₁]	Σ ₁
								[a ₂]		[a ₂ , a ₃]	...	[a ₂ , a _k]	[a ₂ , l ₂]		Σ ₂
								...							
								...							
								...							
								[a _k]					[a _k , a ₁]	[l _k , l ₁]	Σ _k
								l _k					l _k		Σ _k

30 jadval
(Forma)

O'lc hash №	p	q	a ₁	a ₂	...	a _r	v	F ₁	F ₂	s	a ₁	...	a _r	v'	F ₁ '	F ₂ '	s'
			(k ₁)	(k ₂)	...	(k _r)					(k ₁)	...	(k _r)				
1	p ₁	q ₁	a ₁₁	a ₁₂	...	a _{1r}	v ₁	F ₁₁	F ₁₂	s ₁	a ₁₁	...	a _{1r}	v ₁	F ₁₁ '	F ₁₂ '	s ₁
.	.	.	.	.	...	.	.	.	.	.	.	...	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	...	.	.	.	.	.	.	...	.	.	.	.	.
n	p _n	q _n	a _{n1}	a _{n2}	...	a _{nr}	v _n	F _{n1}	F _{n2}	s _n	a _{n1}	...	a _{nr}	v _n	F _{n1} '	F _{n2} '	s _n
			W ₁	W ₂	...	W _r	[KW]										
										[a ₁]	[a ₁ a ₁]	...	[a ₁ a ₁]		[a ₁ F ₁]	[a ₁ F ₂]	Σ ₁
										[a ₂]		...	[a ₂ a ₂]		[a ₂ F ₁]	[a ₂ F ₂]	Σ ₂
										...	...	...	...		...	...	...
										...	...	...	...		...	...	...
										...	...	...	...		...	...	...
										[a _r]		...	[a _r a _r]		[a _r F ₁]	[a _r F ₂]	Σ _r
										[F ₁]					[F ₁ F ₁]	[F ₁ F ₂]	Σ F ₁
										[F ₂]						[F ₂ F ₂]	Σ F ₂

$[pv^2] = [v'v']$ ishonish qiyin emas. Ozod hadlar grafasida normal tenglamalarni yechish sxemasida $[pv^2]$ ni hisoblash tekshiriladi.

30-jadvalga tushuntirish(korrelat usuli)

1. Yig'indi s_i ga F_{i1} i F_{i2} qiymatlar kiradi: yig'indi s_i' ga — F_{i1} va F_{i2} $F_{i2}' = \partial F / \partial x_i$), bunda F — qandaydir $x_1, \dots, x_p$ o'zgaruvchining funksiyasi.

2. $[pv^2] = [v'v']$. Bundan tashqari $[pv^2] = -[kW]$. Uchinchidan korrelat normal tenglamalari sxemasini «W» grafada olamiz. Qoida bo'yicha pastda olamiz.

29-jadvalga berilgan qolgan tushuntirish mulohazalarining 30-jadvalga ham ta'luqlidir.

Birinchi va ikkinchi jadvalni to'ldirishga yana bitta muhim fikr bildiramiz.

Tuzatmalar parametrik tenglamasidagi va tuzatmalar shartli tenglamasidagi noma'lumlar shunday nomerlanish kerakki, jadvalning «a» grafaning chap tomoni o'ng tomoniga qaraganda kam to'ldirsin. Ya'ni grafalarda nolli koeffitsiyentlar ko'proq bo'lsin. Boshqa sharoitda ham ± 1 teng koeffitsiyentlarini ham chaproqqa joylashtirish kerak.

Qoidada bosh tenglamaning koeffitsiyentlari uchun noldan keyin uchta raqamni saqlash yetarli, ozod had uchun ikita-uchta. Normal tenglamalarning koeffitsiyentlari va ozod hadlari uchun noldan keyin uchta raqam yetarli bo'ladi.

Koeffitsiyentlar jadvaliga tushuntirishlarga berilgan hamma takliflarga amal qilish tenglashtirish hisoblarini juda osonlashtiradi.

Teng aniq o'lchashlarda yoki koeffitsiyentlari absolyut qiymat bo'yicha birga teng holatlarda jadvalning o'ng tarafi (ikkita chiziqli bilan ajratilgan) kerak emas.

14.2. NORMAL TENGLAMALARNI YECHISH

1. Gauss algoritmi

Normal tenglamalarni yechish - tenglashtirish hisoblarining eng qiyin bo'lagi hisoblanadi. Shuning uchun unga katta e'tibor berish kerak. Buni xilma xil usul bilan yechish mumkin.

K. Gauss noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuliga asoslangan, juda yaxshi belgilash sistemasini kiritish orqali masalani osonlashtiradigan usulni batafsil ishlab chiqdi. **Gauss algoritmi** deb ataladigan bu usulni batafsil ko'rib o'tamiz. Normal tenglamalarning katta sistemasini yechishning eng oson usuli Gauss algoritmidan u yoki bu darajada foydalanishini eslatib o'tamiz.

Amaliyot shuni ko'rsatadiki, opredelitel' usuli ikkita tenglamani yechishda juda qo'l keladi. Katta sistemalarni yechishda opredelitel' usuli Gauss algoritmi bilan bellasha olmaydi. Buni normal tenglamalar sistemasini yechish uchun chiziqli algebraning boshqa usullari haqida ham aytish

mumkin.

Kal'kulyator tipidagi hisoblash mashinalarining borligi normal tenglamalar sistemasini yechishda Gauss algoritmi bilan hisoblashlar yozuvi sonini bir muncha qisqartirish mumkin.

Elektron hisoblash mashinalarning imkoniyatlaridan foydalanishning eng qulay usuli krakovyanov usulidir.

Juda katta sistemalarni, o'nlab tenglamadan iborat hottaki yuzdan iborat tenglamalarni yechishda yaqinlashtirish usuli qo'llaniladi. Alohida bo'laklarga bo'linadigan mustaqil sistemadan iborat katta sonli tenglamalarni yechishda Pranis-Pranevich usuli qo'llanishi mumkin. Normal tenglamalarning katta sistemasini yechish masalasi 18-bobda ko'riladi.

Gauss algoritmini ko'rib chiqamiz.

Oldin aytganimizdek, Gauss algoritmining asosiga noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli yotadi. Gauss belgilashning qulay usulini kiritish, masalani nazariy qarashni osonlashtirish, hisoblash tartibini eslab qolish, ketma-ketlikning bir xilligi, oraliq hisoblash natijalarining to'g'ri ishonchli tekshirilishi bu usulning katta yutug'i ekanligi bildiradi.

To'rtta normal tenglamalarni yechish misolida Gauss algoritmini ko'rib o'tamiz.

$$\left. \begin{aligned} N_{11}z_1 + N_{12}z_2 + N_{13}z_3 + N_{14}z_4 + L_1 &= 0 \\ N_{21}z_1 + N_{22}z_2 + N_{23}z_3 + N_{24}z_4 + L_2 &= 0 \\ N_{31}z_1 + N_{32}z_2 + N_{33}z_3 + N_{34}z_4 + L_3 &= 0 \\ N_{41}z_1 + N_{42}z_2 + N_{43}z_3 + N_{44}z_4 + L_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

Normal tenglamalar sistemasini kvadratsiz koeffitsiyentlarning bosh koeffitsiyentlarga nisbatan simmetrik xususiyati ega, ya'ni kvadratlari diagonalini $N_{ij} = N_{ji}$.

Birinchi tenglamadan birinchi noma'lumni boshqalari orqali ifodalaymiz

$$z_1 = -\frac{N_{12}}{N_{11}}z_2 - \frac{N_{13}}{N_{11}}z_3 - \frac{N_{14}}{N_{11}}z_4 - \frac{L_1}{N_{11}} \quad (14.8)$$

(14.8) tenglama **eliminatsion tenglama** deyiladi (eliminatsion so'zi lotin elimino so'zidan «tashqariga chiqarish» yoki yo'qotish ma'nosini bildiradi).

(14.8) dan z_1 ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi qo'yib, koeffitsiyentlarning simmetrikligini hisobga olib, topamiz

$$\left(N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}} \right) z_2 + \left(N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}} \right) z_3 + \left(N_{24} - \frac{N_{12}N_{14}}{N_{11}} \right) z_4 + \left(L_2 - \frac{N_{12}L_1}{N_{11}} \right) = 0$$

$$\left(N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}}\right)z_2 + \left(N_{33} - \frac{N_{13}N_{13}}{N_{11}}\right)z_3 + \left(N_{34} - \frac{N_{13}N_{14}}{N_{11}}\right)z_4 + \left(L_3 - \frac{N_{13}L_1}{N_{11}}\right) = 0$$

$$\left(N_{24} - \frac{N_{12}N_{14}}{N_{11}}\right)z_2 + \left(N_{33} - \frac{N_{13}N_{14}}{N_{11}}\right)z_3 + \left(N_{44} - \frac{N_{14}N_{14}}{N_{11}}\right)z_4 + \left(L_4 - \frac{N_{14}L_1}{N_{11}}\right) = 0$$

Tenglamalar sistemasining birinchi noma'lumini yo'qotgandan keyin o'zgartirilgan kvadratsiz koeffitsiyentlar simmetriklik xossasini saqlaydi (sistemaning birinchi boshlang'ich koeffitsiyentlari simmetrikligi hosilasidir)

Belgilash kiritamiz

$$\left. \begin{aligned} N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}} &= N_{22}^{(0)}, & N_{33} - \frac{N_{13}N_{13}}{N_{11}} &= N_{33}^{(0)} \\ N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}} &= N_{23}^{(0)}, & N_{34} - \frac{N_{13}N_{14}}{N_{11}} &= N_{34}^{(0)} \\ N_{24} - \frac{N_{12}N_{14}}{N_{11}} &= N_{24}^{(0)}, & L_3 - \frac{N_{13}L_1}{N_{11}} &= L_3^{(0)} \\ L_2 - \frac{N_{12}L_1}{N_{11}} &= L_2^{(0)}, & N_{44} - \frac{N_{14}N_{14}}{N_{11}} &= N_{44}^{(0)} \\ & & L_4 - \frac{N_{14}L_1}{N_{11}} &= L_4^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (V1.9)$$

Belgi ⁽¹⁾ birinchi noma'lum yo'qotilganligini bildiradi. Endi o'zgartirilgan sistema quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\left. \begin{aligned} N_{22}^{(0)}z_2 + N_{23}^{(0)}z_3 + N_{24}^{(0)}z_4 + L_2^{(0)} &= 0 \\ N_{23}^{(0)}z_2 + N_{33}^{(0)}z_3 + N_{34}^{(0)}z_4 + L_3^{(0)} &= 0 \\ N_{24}^{(0)}z_2 + N_{34}^{(0)}z_3 + N_{44}^{(0)}z_4 + L_4^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

Tenglamalar sistemasidan ikkinchi noma'lumni yo'qotib, ikkinchi eliminatsion tenglamani olamiz

$$z_2 = -\frac{N_{23}^{(0)}}{N_{22}^{(0)}}z_3 - \frac{N_{24}^{(0)}}{N_{22}^{(0)}}z_4 - \frac{L_2^{(0)}}{N_{22}^{(0)}} \quad (14.11)$$

va ikkinchi o'zgartirilgan tenglamalar sistemani olamiz

$$\left(N_{33}^{(0)} - \frac{N_{23}^{(0)}N_{23}^{(0)}}{N_{22}^{(0)}}\right)z_3 + \left(N_{34}^{(0)} - \frac{N_{23}^{(0)}N_{24}^{(0)}}{N_{22}^{(0)}}\right)z_4 + \left(L_3^{(0)} - \frac{N_{23}^{(0)}L_2^{(0)}}{N_{22}^{(0)}}\right) = 0$$

$$\left(N_{34}^{(0)} - \frac{N_{23}^{(0)}N_{24}^{(0)}}{N_{22}^{(0)}}\right)z_3 + \left(N_{44}^{(0)} - \frac{N_{24}^{(0)}N_{24}^{(0)}}{N_{22}^{(0)}}\right)z_4 + \left(L_4^{(0)} - \frac{N_{24}^{(0)}L_2^{(0)}}{N_{22}^{(0)}}\right) = 0$$

Oxirgi tenglamalar sistemasi ham koeffitsiyentlarning simmetrikligini

saqlaydi.

Keyinchalik belgilashni kiritamiz

$$\begin{aligned} N_{33}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)} N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} &= N_{33}^{(2)}, & N_{44}^{(1)} - \frac{N_{24}^{(1)} N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} &= N_{44}^{(2)}, \\ N_{34}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)} N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} &= N_{34}^{(2)}, & L_3^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)} L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} &= L_3^{(2)}, \\ L_4^{(1)} - \frac{N_{24}^{(1)} L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} &= L_4^{(2)} \end{aligned}$$

undan keyin ikkinchi o'zgartirilgan tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\left. \begin{aligned} N_{33}^{(2)} z_3 + N_{34}^{(2)} z_4 + L_3^{(2)} &= 0 \\ N_{34}^{(2)} z_3 + N_{44}^{(2)} z_4 + L_4^{(2)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.12)$$

Endi uchinchi eliminatsion tenglamani olamiz

$$z_3 = -\frac{N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} z_4 - \frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \quad (14.13)$$

va uchinchi o'zgartirilgan sistemani olamiz

$$\left(N_{44}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \right) z_4 + \left(L_4^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \right) = 0$$

yoki Gauss belgilashlarini qo'llaganda

$$N_{44}^{(3)} z_4 + L_4^{(3)} = 0 \quad (14.14)$$

bundan

$$z_4 = -\frac{L_4^{(3)}}{N_{44}^{(3)}}$$

z_4 hisoblab, (14.13) eliminatsion tenglamalarga qaraymiz, undan z_3 ni topamiz. Keyinchalik z_3 va z_4 (14.11) tenglamaga qo'yib, z_2 ni topamiz va oxirida (14.8) tenglama yordamida z_1 ni topamiz.

Noma'lumlarni topish uchun (14.7), (14.10), (14.12) va (14.14) birinchi tenglamalar sistemasidan olinadigan, faqat eliminatsion tenglamalar (14.8), (14.11), (14.13) va (14.15), kerakligi ko'rinib turibdi,

Ko'rilayotgan usulda normal tenglamalarni yechish birinchi o'zgartirilgan tenglamalar sistemasini topish va undan eliminatsion tenglamalarni topishni o'z ichiga oladi.

*Biz Gauss kiritgan belgilashning tashqi ko'rinishini o'zgartirdik. Gaussda:

$$N_{22}^{(1)} = [\text{pbb } 1] \text{ yoki } N_{22}^{(1)} = [\text{qbb } 1]; \quad L_2^{(1)} = [\text{pbl } 1] \text{ yoki } [W_b \ 1]; \quad N_{33}^{(2)} = [\text{pcc } 2]$$

$$\text{yoki } N_{33}^{(2)} = [\text{qcc } 2]; \quad L_3^{(2)} = [\text{pcl } 2] \text{ yoki } L_3^{(2)} = [W_c \ 2] \text{ va h.k.}$$

Boshqa o'zgartirilgan tenglamalar sistemasi kerak bo'lmay qolarkan. Bunga ishonch hosil qilish uchun normal tenglamalar boshlang'ich sistemasining koeffitsiyent va ozod hadlarini 31-jadvalning pastgi qismiga birinchi boshlang'ich birinchi tenglamalarning va o'zgartirilgan sistemaning va eliminatsion tenglamalarning koeffitsiyentlari va ozod hadlarini ko'chirib yozamiz. Bunda oxirgi belgilash uchun $E_{j(j+1)}$, $E_{j(j+2)}$, $E_{j(j+3)}$ va h.k.ni qo'llaymiz (j -gacha tenglama uchun).

31-jadvalning pastki qismi har qanday elementini, (14.8), (14.11), (14.13) va (14.15) tengliklar strukturasi hisobga olgan holda, 31-jadvalning yuqori qismida berilganlardan foydalanib topish mumkinligi ko'rish qiyin emas.

Tablitsa 31

N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	L_1
	N_{22}	N_{23}	N_{24}	L_2
		N_{33}	N_{34}	L_3
			N_{44}	L_4
N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	L_1
	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{1L}
	$N_{22}^{(1)}$	$N_{23}^{(1)}$	$N_{24}^{(1)}$	$L_2^{(1)}$
		E_{23}	E_{24}	E_{2L}
		$N_{33}^{(2)}$	$N_{34}^{(2)}$	$L_3^{(2)}$
			E_{34}	E_{3L}
			$N_{44}^{(3)}$	$L_4^{(3)}$
				$E_{4L} = Z_4$

31-jadval normal tenglamalar sistemasini Gauss algoritmi bilan hisoblash sxemasiga asoslanganligi yotganligi ko'rinib turganligi takidlaymiz.

Hamma sistemalarning birinchi tenglamasi umulashgan holda quyidagi ko'rinishdagi ekvivalent sistemani hosil qiladi

$$N_{11}z_1 + N_{12}z_2 + N_{13}z_3 + N_{14}z_4 + L_1 = 0$$

$$N_{22}^{(1)}z_2 + N_{23}^{(1)}z_3 + N_{24}^{(1)}z_4 + L_2^1 = 0$$

$$N_{33}^{(2)}z_3 + N_{34}^{(2)}z_4 + L_3^2 = 0$$

$$N_{44}^{(3)}z_4 + L_4^3 = 0$$

(14.16)

Endi qabul qilingan belgilash sistemasi tushunarli bo'lmoqda. Birinchi tenglamaning birinchi no'ma'lumidagi har bir o'zgartirilgan sistemadagi shunday pastki indeksga ega bo'ladiki, xuddi birinchi boshlang'ich sistema noma'umlaridagi kvadratik koeffitsiyentlari kabi. Boshqa koeffitsiyentlarning pastki indekslari, xuddi shunday birinchi boshlang'ich sistemaning tenglamalardagi mos noma'lumlarniki kabi.

Yuqori indekslar, berilgan sistemani olgunga qadar yuqotilgan noma'lumlar sonini ko'rsatadi.

Har qanday o'zgartirilgan tenglamalar sistemasini oson yozish mumkin. Endi, misol, sakkiz tenglamalar sistemasidan beshta noma'lumni chiqargandan keyin quyidagi olinadi

$$N_{66}^{(5)} z_6 + N_{67}^{(5)} z_7 + N_{68}^{(5)} z_8 + L_6^{(5)} = 0$$

$$N_{67}^{(5)} z_6 + N_{77}^{(5)} z_7 + N_{78}^{(5)} z_8 + L_7^{(5)} = 0$$

$$N_{68}^{(5)} z_6 + N_{78}^{(5)} z_7 + N_{88}^{(5)} z_8 + L_8^{(5)} = 0$$

Oxirgi noma'lum uchun qiyinchiliksiz quyidagi ifodani yozish mumkin

$$z_8 = -\frac{L_8^{(7)}}{N_{88}^{(7)}}$$

Umumiy holda

$$z_m = -\frac{L_m^{(m-1)}}{N_{mm}^{(m-1)}}$$

bunda t — noma'lumlar soni.

Boshqa eliminatsion tenglamalarni yozish ham qiyin emas, masalan,

$$z_4 = -\frac{N_{45}^{(3)}}{N_{44}^{(3)}} z_5 - \frac{N_{46}^{(3)}}{N_{44}^{(3)}} z_6 - \frac{N_{47}^{(3)}}{N_{44}^{(3)}} z_7 - \frac{N_{48}^{(3)}}{N_{44}^{(3)}} z_8 - \frac{L_4^{(3)}}{N_{44}^{(3)}}$$

Umumiy holda

$$z_i = -\frac{N_{i(i+1)}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} z_{i+1} - \frac{N_{i(i+2)}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} z_{i+2} - \dots - \frac{N_{im}^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}} z_m - \frac{L_i^{(i-1)}}{N_{ii}^{(i-1)}}$$

yoki

$$z_i = E_{i(i+1)} z_{i+1} + E_{i(i+2)} z_{i+2} + \dots + E_{im} z_m + E_{ii}. \quad (14.17)$$

O'zgartirilgan tenglamalar koeffitsiyentlarni belgilash va ozod hadlarni quyidagi qoida bo'yicha ochiladi.

O'zgartirilgan sistemaning koeffitsiyenti (ozod hadi), xuddi shunday minus kasrli pastki indeksli oldingi o'zgartirilgan sistema koeffitsiyentiga teng. Maxrajida oldingi sistemaning birinchi kvadrat koeffitsiyentlari, sur'atda ikki koeffitsiyentlarining ko'paytmasi. Birinchi indeks maxrajidagidek, ikkinchisi kamayishiga qaytariladigan indeks. Ozod hadni belgilashning bir nechta xususiyatini misolda ko'rsatamiz.

$$N_{78}^{(5)} = N_{78}^{(4)} - \frac{N_{57}^{(4)} N_{58}^{(4)}}{N_{55}^{(4)}}$$

$$N_{48}^{(3)} = N_{48}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{38}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$$

$$N_{78}^{(4)} = N_{78}^{(3)} - \frac{N_{47}^{(3)} N_{48}^{(3)}}{N_{44}^{(3)}}$$

$$N_{44}^{(3)} = N_{44}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$$

va h. k.

Ozod hadlar quyidagicha ochiladi:

$$L_7^{(3)} = L_7^{(2)} - \frac{N_{37}^{(2)} L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$$

$$L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)} L_1^{(1)}}{N_{12}^{(1)}}$$

Umumiy holda

$$\left. \begin{aligned} N_{ij}^{(p)} &= N_{ij}^{(p-1)} - \frac{N_{pi}^{(p-1)} N_{pj}^{(p-1)}}{N_{pp}^{(p-1)}} \\ L_i^{(p)} &= L_i^{(p-1)} - \frac{N_{pi}^{(p-1)} L_{pj}^{(2p-1)}}{N_{pp}^{(p-1)}} \end{aligned} \right\} \quad (14.18)$$

doimo $j \geq i > p$ bo'ladi.

Ekvivalent sistemaning har qanday tenglamasi koeffitsiyentlari va ozod hadlarini berilgan qoida bo'yicha ochish, ekvivalent sistemaning oldingi tenglamalarining faqat birinchi boshlang'ich tenglamalari kerak ekanligi talab qilinishiga ishonch hosil qilamiz. Ya'ni, o'zgartiriladiga sistema uchun faqat birinchi tenglamalar kerak. Gauss algoritmi shunga asoslangan.

Har qanday o'zgartirilgan sistemaning bosh diagonalida joylashgan koeffitsiyentlarning hammasi musbat ekanligini ko'rsatamiz. Chunki kvadratlar yig'indisidir.

Boshlang'ich tenglamalar sistemasini ko'rib o'tamiz

$$a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n + w_1 = v_1' \quad (i = 1, \dots, n). \quad (14.19)$$

"Boshlang'ich" sistema deganda, tuzatmalar parametrik tenglamalarning yoki tuzatmalar korrelat tenglamalarining teng aniqlikka keltirilgan ko'rinishi tushuniladi. Ikkinchi holatda $w_i = 0$.

(14. 19) tenglamadan birinchi eliminatsion tenglama yordamida noma'lum z_1 ni chiqaramiz. Unda topamiz

$$a_{12}^{(1)} z_2 + a_{1m}^{(1)} z_m + w_i^{(1)} = v_i' \quad (14.20)$$

(14.20) tenglamaning o'ng tomoni o'zgarishsiz qoladi, $[pv^2] = \min$ shartidan normal tenglamalar sistemasini olish mumkin.

$$[a_1^{(1)} a_2^{(1)}] z_2 + \dots + [a_1^{(1)} a_m^{(1)}] z_m + [a_1^{(1)} w^{(1)}] z_2 = 0$$

va h. k.

Yig'indini ochamiz $[a_2^{(1)} a_2^{(1)}]$

Chunki

$$a_{i2}^{(1)} = a_{i2} - \frac{N_{12}}{N_{11}} a_{i1}$$

bunda

$$a_{i2}^{(1)} a_{i2}^{(1)} = \left(a_{i2} - \frac{N_{12}}{N_{11}} a_{i1} \right)^2 = a_{i2} a_{i2} - 2 a_{i2} a_{i2} \frac{N_{12}}{N_{11}} + a_{i1} a_{i1} \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11} N_{11}}$$

Keyinchalik bo'ladi

$$a_2^{(1)} a_2^{(1)} = a_{i2} a_{i2} - 2 a_{i2} a_{i2} \frac{N_{12}}{N_{11}} + a_{i1} a_{i1} \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11} N_{11}}$$

Normal tenglamalar koeffitsiyentlarini belgilashni hisobga olib, oxirgi tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$a_2^{(1)} a_2^{(1)} = N_{22} - 2 \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11}} + N_{11} \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11} N_{11}} = N_{22} - \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11}}$$

yoki

$$a_2^{(1)} a_2^{(1)} = N_{22} - \frac{N_{12} N_{12}}{N_{11}}$$

(14.18) formulaga asosan

$$a_2^{(1)} a_2^{(1)} = N_{22}^{(1)}$$

Ya'ni, koeffitsiyent $N_{22}^{(1)}$ — kvadratlar yig'indisi. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Ishonish qiyin emas va

$$a_2^{(1)} a_3^{(1)} = N_{23}^{(1)}$$

$$a_2^{(1)} w^{(1)} = L_2^{(1)}$$

va h. k.

(14.20) sistemadan ikkinchi eliminatsion tenglama yordamida z_2 noma'lumini chiqarib, topamiz

$$N_{33}^{(2)} = a_2^{(1)} a_3^{(1)}$$

va h. k.

Shunday qilib normal tenglamalarning o'zgartirilgan sistemasini birinchi boshlang'ich sistemaning hamma xossalarini saqlaganligini ko'rsatdik. Bosh diagonal bo'yicha kvadrat koeffitsiyentlari joylashadi, qolgan koeffitsiyentlar diagonaldagi kvadratik koeffitsiyentlarga nisbatan simmetrik joylashadi. Bu holat — normal tenglamalar sistemasini yechish uchun noma'lumlarni ketma - ket

yo'qotish usulining katta yutug'idir.

2. Normal tenglamalar sistemasining shartlanganligi

Normal tenglamalar sistemasining shartlanganligining (obuslovlennost') eng muhim ko'rsatkichi – D sistemaning ko'rsatkichi (opredelitel').

Normal tenglamalar sistemasining ko'rsatkichini ekvivalent tenglamalar sistemasidan oson olish mumkin. Bu sistemaning koeffitsiyentlar matritsasi uchburchakdir. Uchburchakli matritsaning ko'rsatkichi diagonal elementlarining ko'paytmasiga tengligi matritsalar nazariyasidan ma'lum. Shuning uchun,

$$D = N_{11} N_{22}^{(1)} N_{33}^{(2)} \dots N_{mm}^{(m-1)} \quad (14.21)$$

Bunda D qiymati har doim musbat ekanligi ko'rinib turibdi.

Bir xil tip sistema, bir xil tartibdagi va bir xil o'lchamli bosh tenglamalar koeffitsiyenti uchun D qanchalik katta bo'lsa, shartlanganlik shunchalik yaxshi bo'ladi.

Sistema shartlanganligining to'liq xarakteristikasi uchun koeffitsiyentlar matritsasining "shaxsiy soni" juda murakkab hisoblash ishlarini bajarishga to'g'ri keladi. Amaliyotda bajarishi qiyin.

Normal tenglama sistemasining yaxshi shartlanganlik belgilarini keltirib o'tamiz:

1. Kvadratik koeffitsiyentlari kvadratiksiz koeffitsiyentlarini absolyut qiymati bo'yicha sezilarli kattadir. Hamma kvadratsiz koeffitsiyentlar nolga teng bo'lsa yoki koeffitsiyentlar matritsasi diagonal' bo'lsa eng yaxshi holat hisoblanadi.

2. Kvadratsiz koeffitsiyentlar bosh diagonal atrofida guruhlashadi va matritsaning boshqa elementlari nolga teng bo'ladi. Bunday matritsa diagonal yaqini matritsasi deyiladi.

3. Ozod hadlari unchalik katta emas.

Berilgan belgilar oydin, isbotlashga o'rin yo'q. Har qanday teng sharoitda sistemaning kattalashi shartlanganlikni yomonlashtiradi.

3. Normal tenglamalarni yechilishini tekshirish usullari

1. Yor dam chi noma'lumlar bo'yicha tekshirish.
Noma'lumlarni kiritamiz

$$u_i = z_i - l \quad (i = 1, \dots, t). \quad (14.22)$$

Bunda, $z_i = i_l + l \quad (i = 1, \dots, t)$ va yozish mumkin

$$\begin{aligned} N_{j1}(u_1 + l) + N_{j2}(u_2 + l) + \dots + N_{jm}(u_m + l) + L_j = \\ = N_{j1}u_1 + N_{j2}u_2 + \dots + N_{jm}u_m + (N_{j1} + N_{j2} + \dots + N_{jm} + L_j) = 0. \end{aligned}$$

Lekin

$$N_{j1} + N_{j2} + \dots + N_{jm} + L_j = \sum_j$$

* Shartlanganlik tenglamalar sistemasining yechish aniqligini ko'rsatadi. Yomon shartlanganlikda, hisoblash jarayonida yaxlitlash xatoligi bog'liq bo'lgan, noma'lumlar katta xatolik bilan hosil bo'ladi.

Shuning uchun tenglamalar sistemasini yozish mumkin

$$\left. \begin{aligned} N_{11}u_1 + \dots + N_{1m}u_m + \sum_l = 0 \\ \dots\dots\dots \\ N_{lm}u_1 + \dots + N_{mm}u_m + \sum_m = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.23)$$

Quyidagi natija olindi: agar tenglamalarni $\sum_i (i = 1, \dots, t)$ ga teng, ozod had bilan qayta yechsak, (14.22) tenglikka muvofiq, asosiydan birga farq qilgan tekshirish noma'lumlarini olamiz.

Bu tekshirish uchun faqat bitta grafaga yoziladigan, tenglamaning yangi noma'lumlarini hisoblash, koeffitsiyentlari va ozod hadlari yig'indisining yozish kerak bo'ladigan, o'zgartirishlarni qaytarishga to'g'ri keladi.

2. Oraliq tekshirishlar. Tenglamalar sistemasini yechishning qiyinligi va faqat katta hajmdagi hisoblashlarda, keyingi hisoblash ishlari natijalari oldingi hisoblash ishlari natijasining nechog'lik xatosiz bajarilishiga bog'liq. Agar oldingi hisoblash ishlarida qo'yilgan xatolik keyingi hisoblash ishlarning noto'g'ri bajarilganligiga olib keladi. Shuning uchun normal tenglamalarni yechishda hisoblash natijalarini oraliq tekshirish juda muhim rol o'ynaydi.

Navbatdagi o'zgartirishning boshida birinchi tekshirish – quyidagi tenglama yordamida ellimatsion tenglamani tekshirish

$$-1 - \frac{N_{i(i+1)}^{(i-1)}}{N_{ji}} - \frac{N_{i(i+2)}^{(i-1)}}{N_{ji}} - \dots - \frac{N_{im}^{(i-1)}}{N_{ji}} - \frac{L_i^{(i-1)}}{N_{ji}} \approx -\frac{L_i^{(i-1)}}{N_{ji}} \quad (14.24)$$

bunda $\sum_i$ — i -chi ekvivalent sistemaning koeffitsiyenti va ozod hadining yig'indisi.

Yechish sxemasining Σ grafasiga (14. 24) tenglikning chap qismining aniq qiymatini ko'chirib yozish kerak. O'ngdagisi tekshirish uchun, qiymati hech joyda yozilmaydi.

Har bir keyingi ekvivalent tenglamaning ("qatorlar yig'indisi bo'yicha" tekshirish) koeffitsiyentlari va ozod hadlarini to'g'riligini tekshirish uchun asosiy oraliq tekshirish quyidagi formula bilan bajariladi.

$$N_{ii}^{(i-1)} + N_{i(i+1)}^{(i-1)} + \dots + N_{im}^{(i-1)} + L_i^{(i-1)} \approx L_i^{(i-1)} \quad (14.25)$$

bunda $\sum_i$ — $\sum$ qiymatni o'zgartirish natijasi.

Miqdor Σ bilan bu tekshirishni amalga oshirish uchun boshqa grafalarda qanday o'zgartirish bajarilgan bo'lsa shunday o'zgartirish bajariladi. Σ grafaga (14. 25) tenglikning chap qismidagi aniq qiymatlar ko'chiriladi.

(14. 25) tenglikning to'g'riligini isbotlaymiz.

(14. 23) ni e'tiborga olib, ikkita tenglikni quyidagicha yozish mumkin.

$$N_{ii}^{(i-1)} z_i + N_{i(i+1)}^{(i-1)} z_{i+1} + \dots \dots \dots N_{im}^{(i-1)} z_m + L_i^{(i-1)} = 0$$

$$N_{ii}^{(i-1)}u_i + N_{i(i+1)}^{(i-1)}u_{i+1} + \dots + N_{im}^{(i-1)}u_m = -\sum_i^{(i-1)}$$

Yuqori tenglikdan pastki tenglikni ayirib va (14. 22) tenglikni e'tiborga olib topamiz

$$N_{ii}^{(i-1)}z_i + N_{i(i+1)}^{(i-1)}z_{i+1} + \dots + N_{im}^{(i-1)}z_m + L_i^{(i-1)} = -\sum_i^{(i-1)}$$

Va shuni isbotlash talab qilingan edi.

Parametrik tenglashtirish usuli normal tenglamalarini yechishda yana $[pll]$ va $[psl]$ qiymatlar sxemaga ko'chirilib yoziladi. Ularni belgilaymiz:

$$\left. \begin{aligned} [pll] &= N_{(k+1)(k+1)} \\ [psl] &= \sum_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (14.26)$$

Bunda normal tenglamalarni yechishning **oxirgi tekshirish tenglama** sini olamiz

$$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = \sum_{k+1}^{(k)}$$

Yoki bunday

$$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = [pv^2].$$

3. $[pv^2]$ bo'yicha tekshirish.

Normal tenglamalar sistemasiga, parametrik usulda tenglashtirishda hosil bo'ladigan, normal tenglamalarning koeffitsiyentlari va ozod hadlari uchun biz tomonidan qabul qilingan belgilashlarni hisobga olib tenglik (V.59) ni qo'shamiz.

$$N_{1l}\tau_l + \dots + N_{lk}\tau_k + L_l = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$N_{lk}\tau_l + \dots + N_{kk}\tau_k + L_k = 0,$$

$$L_l\tau_l + \dots + L_k\tau_k + N_{(k+1)(k+1)} = [pv^2],$$

bunda

$$N_{(k+1)(k+1)} = [pll].$$

Yangi $k+1$ tenglama $k+1$ noma'lum bilan olingan sistema normal tenglamalarning hamma xossalarini saqlaydi. Shuning uchun bu sistemadan hamma noma'lumlarni tenglamadan τ yo'qotib topamiz

$$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = [pv^2] \quad (14.27)$$

Shunday qilib $N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = [pll]$ miqdor bosh diagonalda turganligi uchun kvadrat koeffitsiyentining o'zgaruvchanlik rolini o'ynaydi. Bunda $N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = [pv^2]$ qiymat quyidagicha ochiladi:

$$N_{(k+1)(k+1)}^{(k)} = N_{(k+1)(k+1)} + E_{1L}L_1 + E_{2L}L_2^{(1)} + E_{3L}L_3^{(2)} + \dots + E_{kL}L_k^{(k-1)}$$

yoki

$$[pv^2] = [pll] + \sum_{i=1}^k E_{iL} L_i^{(i-1)} \quad (14.28)$$

(14.28) ko'rinishdagi ifoda qoidasini quyidagi ta'riflash mumkin: $[pv^2]$ miqdori $= [pll]$ plyus yechish sxemasining yuqorida joylashgan sonlar L eliminatsion grafasi kesishgan qatordagi sonlar ko'paytmasining yig'indisiga teng.

Agar L grafa o'rninga N_u grafa foydalangan bo'lsa, ekvivalent tenglamaning hamma kvadratik koeffitsiyentlari $N_u^{(i-1)}$ ushbu qoida bo'yicha hisoblanadi.

(14.28) formula bo'yicha hisoblangan $[pv^2]$ qiymati, koeffitsiyentlar jadvalida olingan miqdor qiymatiga, hisoblash aniqligi chekida bo'lishi kerak.

Korrelat usulida tenglashtirishda ham huddi shunday tekshirish amalga oshiriladi.

Korrelat tenglashtirish usulida hosil buladigan (V.61) tenglikni normal tenglamalar sistemasiga ulaymiz

$$N_{11}k_1 + \dots + N_{1r}k_r + W_1 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$N_{r1}k_1 + \dots - N_{rr}k_r + W_r = 0,$$

$$W_1k_1 + \dots + W_rk_r + N_{(r+1)(r+1)} = -[pv^2],$$

bunda

$$N_{(r+1)(r+1)} = 0.$$

Qayta olingan sistema normal tenglamalar xossalarini saqlaydi. Shuning uchun hamma undan noma'lumlar k chiqarib tashlab, topamiz

$$-[pv^2] = N_{(r+1)(r+1)}^{(r)} = N_{(r+1)(r+1)} + E_{1w} * W_1 + E_{2w} * W_2^{(1)} + \dots,$$

yoki

$$-[pv^2] = \sum_{i=1}^k E_{iW} W_i^{(i-1)} \quad (14.29)$$

Ya'ni, qiymat $[pv^2]$, yechish sxemasida turuvchi eliminatsion qator va W grafa kesishgan son bilan yuqorida joylashgan sonlar ko'paytmasining yig'indisiga teng. Ushbu qoida bo'yicha olingan $[pv^2]$ qiymat koeffitsiyentlar jadvalining «v» grafasida keyinchalik hisoblangan va (V.61) formula bilan hisoblangan ikkita qiymat bilan taqqoslanadi.

4. Noma'lumlarni tekshirish. Hamma noma'lumlarni topgandan keyin tenglamalar yig'indisi bo'yicha quyidagi tekshirish bajariladi:

$$(\sum_1 - L_1) * z_1 + (\sum_2 - L_2) * z_2 + \dots + (\sum_n - L_n) * z_n + [L] = 0. \quad (14.30)$$

Ammo, katta tenglamalar sistemasini yechishda mos eliminatsion tenglamalardan har bir navbatdagi noma'lumlarni topgandan keyin ekvivalent tenglamalarga noma'lumlarni qo'yib tekshirib chiqish kerak. Yoki koeffitsiyentlar yig'indisidan va L dan foydalanib, tekshirish noma'lumlarini $i = z - 1$ hisoblash kerak,

Tenglashtirish hisoblari natijasini oxirgi tekshirish uchun, o'lchangan miqdorlar orasidagi matematik munosabatlarda bog'lanmaslik xatoligi yo'qotildimi tekshiriladi. Agar tenglashtirish parametrik usulda bajarilgan bo'lsa, undan tashqari tenglashtirishda o'lchangan miqdorlarni tanlangan kerakli noma'lumlar orqali ifodalangan tenglikning to'g'riligi tekshiriladi.

Tenglamalarni yechishning to'g'riligini bundan tashqari tekshirish, tenglashtirish natijasi o'lchash sifati va boshlang'ich berilganlar asosida tahlil qilinadi. Tuzatmalarning miqdori bo'yicha va ularning geodezik to'rga taqsimlanishiga qarab fikr yuritiladi. Normal v tuzatma absolyut qiymati bo'yicha belgilangan o'lchash xatoligi chekidan oshmasligi kerak. Ularning taqsimlanishi absolyut qiymat bo'yicha ozmi ko'pmi bir tekis bo'lishi kerak. Yo'l qo'yilmagan v katta tuzatmalar bosh berilganlar yoki o'lchashning sistematik xatoliklari sezilarli ta'siri ekanligini bildiradi. Boshlang'ich berilganlar atrofida katta xatoliklarning taqsimlanishi boshlang'ich berilganlar xatoligining anchagina ta'siri borligidan guvohlik beradi.

14.3. GAUSS ALGORITMI BILAN NORMAL TENGLAMALARNI YECHISHNING TO'LIQ VA QISQARTIRILGAN SXEMASI

1. To'liq sxemasi

Quyida Gauss algoritmining eng to'liq hisoblash sxemasi keltirilgan. U odatda Gauss — Dulitl' sxemasi ham deb ataladi. Bu sxemani oddiy kal'kulyatorda hisoblashni qo'llash mumkin. Hotirali kal'kulyatorlarda ishlashda judda oddiy sxemani qo'llashni eslatamiz.

Hisoblash tartibini sxemada ko'rsatish uchun bu sxemani Gauss algoritmi formulasiga mos belgilangan uchta tenglamani yechishda beramiz (14.1 -jadval).

Sxemaga tushuntirish(14.1 jadval).

1. Hamma hisoblashlar ketma-ket yuqoridan pastga bajariladi. Eliminatsion qatorlar quyidagi tarzda yechiladi. $1/N_1$ (yoki $1/N_{11}^{(1)}$ va h. k.) qiymatlar olingandan keyin, bu sonlar ekvivalent tenglamalar sistemasining boshqa koeffitsiyentlariga ko'paytiriladi. Eliminatsion tenglama koeffitsiyentlarini yuqorida turgan ekvivalent tenglama sistemasi koeffitsiyentlariga ko'paytirilib huddi shunday qatorlar $E_{12}N_1$, $E_{13}N_1$, $E_{14}N_1$, $E_{23}N_1^{(1)}$ va h. k. ham olinadi. Eliminatsion qator sonlari doimo yuqoridagi sonlarning ishorasiga qarama — qarshi ishorada bo'ladi ("yuqoridagi")

qator va sonlar deganda bevosita ushbu qator va son ustida turgan qator va sonlar tushuniladi).

2. Gorizontaal chiziq tagiga ko'chirib yoziladigan ekvivalent sistema koeffitsiyentlari pastki yaqin yuqori eliminatsion qatorida turuvchi berilgan grafadagi sonlar yig'indisi kabi olinadi.

14.1-jadval (shakl)

Tar- tib	τ_1	τ_2	τ_3	L	Σ	Izoh
0	1	2	3	4	5	6
N_{1i}	N_{11}	N_{12}	N_{13}	L_1	Σ_1	
E_1	-1	$-\frac{N_{12}}{N_{11}}$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}}$	$-\frac{L_1}{N_{11}}$	Σ_{E1}	
N_{2i}		N_{22}	N_{23}	L_2	Σ_2	
$E_{12}N$		$-\frac{N_{12}}{N_{11}} N_{12}$	$-\frac{N_{12}}{N_{11}} N_{13}$	$-\frac{N_{12}}{N_{11}} L_1$	$-\frac{N_{12}}{N_{11}} \Sigma_1$	
$N_{2i}^{(1)}$		$N_{22}^{(1)}$	$N_{23}^{(1)}$	$L_2^{(1)}$	$\Sigma_{N2}^{(1)}$	
E_2		-1	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	$-\frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	Σ_{E2}	
N_{3i}			N_{33}	L_3	Σ_3	
$E_{13}N$			$-\frac{N_{13}}{N_{11}} N_{13}$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}} L_1$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}} \Sigma_1$	
$E_{23}N^{(1)}$			$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} N_{23}^{(1)}$	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} L_2^{(1)}$	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \Sigma_{N2}^{(1)}$	
$N_{3i}^{(2)}$			$N_{33}^{(2)}$	$L_3^{(2)}$	$\Sigma_{N3}^{(2)}$	
E_3			-1	$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$	Σ_{E3}	
N_4				$[p1]$	Σ_4	
$E_{14}N$				$-\frac{L_1}{N_{11}} L_1$	$-\frac{L_1}{N_{11}} \Sigma_1$	
$E_{24}N^{(1)}$				$-\frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} L_2^{(1)}$	$-\frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \Sigma_{N2}^{(1)}$	
$E_{34}N^{(2)}$				$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} L_3^{(2)}$	$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \Sigma_{N3}^{(2)}$	
$N_{4i}^{(3)}$				$N_{44}^{(3)}$	$\approx \Sigma_4^{(3)} \approx [pv^2]$	
			$\tau_3 =$	$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$		
		$\tau_2 =$	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \tau_3$	$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$		
	$\tau_1 =$	$-\frac{N_{12}}{N_{11}} \tau_2$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}} \tau_3$	$-\frac{L_1}{N_{11}}$		

3. 2 grafaga mos tenglamaning koeffitsiyentlari va ozod hadlari yig'indisining aniq qiymati yoziladi. Sxemadagi tenglamalar sistemasi uchun qisqartirilgan sxema yozuvini qo'llash kerak. Ya'ni faqat kvadratik koeffitsiyentlaridan boshlab ko'chirib yozish kerak.

14.2-jadval

Tar-tib	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	L	Σ	Tek-shirish
0	1	2	3	4	5	6	7
N_{1i}	3,00	+0,39	-0,28	-0,26	+3,36	+6,21	
E_1	-1	-0,130	+0,093	+0,087	-1,120	-2,070	-2,070
N_{2i}		2,53	+0,20	-0,17	+3,34	+6,29	
$E_{12}N$		-0,05	+0,04	+0,03	0,44	-0,81	
$N_{2i}^{(1)}$		2,48	+0,24	-0,14	+2,90	+5,48	+5,48
E_2		-1	-0,097	+0,055	-1,170	-2,212	-2,210
N_{3i}			1,08	+0,29	-2,62	-1,33	
$E_{13}N$			-0,03	-0,02	+0,31	+0,58	
$E_{23}N^{(1)}$			-0,02	+0,01	-0,28	-0,53	
$N_{3i}^{(2)}$			1,03	+0,28	-2,59	-1,28	-1,28
E_3			-1	-0,272	+2,516	+1,244	+1,244
N_4				1,60	+2,99	+4,45	
$E_{14}N$				-0,02	+0,29	+0,54	
$E_{24}N^{(1)}$				-0,01	+0,16	+0,31	
$E_{34}N^{(2)}$				-0,08	+0,70	+0,35	
$N_{4i}^{(3)}$				1,49	+4,14	+5,63	+5,65
E_4				-1	-2,780	-3,780	-3,780
N_5					35,68	42,75	
$E_{15}N$					-3,76	-6,96	
$E_{25}N^{(1)}$					-3,39	-6,40	
$E_{35}N^{(2)}$					-6,50	-3,23	
$E_{45}N^{(3)}$					-11,51	-15,65	
$N_5^{(4)}$				τ_4	10,52	+10,51 $=[pv^2]$	
			τ_3	-2,78			
		τ_2	+3,28	+0,76	+2,52		
	τ_1	-1,65	-0,32	-0,16	-1,17		
	-0,85	+0,21	+0,30	-0,24	-1,12		

Eslatma. Odatda «Tekshirish» grafasi bajarilmaydi. 14.2 jadvalda o'quvchining hisoblash tartibini o'zlashtirishini yyengillashirish maqsadida bu grafa joylashtirilgan.

Tekshirish qiymatlari $\sum_2^{(1)}$, $\sum_3^{(2)}$, $\sum_4^{(3)}$, va h. k. Hech qayerga yozilmaydi.

Faqat parametrik usuldagi $\sum_{(k+1)}^{(k)}$ qiymat bundan mustasno.

4. Noma'lumlar qiymati eliminatsion qator E_3 , E_2 va E_1 yordamida topiladi. Bu qatorlar ajralib turishi uchun ular odatda boshqa rangli ruchkada yoziladi. Bu qatorning tagi bo'sh qoldiriladi.

Noma'lumlar qiymati hisoblanadigan sxemaning pastki qismi "tepalik" deb ataladi.

5. Eliminatsion qator koeffitsiyentlarida verguldan keyin boshqa qatorga qaraganda bitta ikkita son ko'proq olinadi.

14.2 – jadvalda Gauss – Dutil' sxemasi bo'yicha to'rtta normal tenglamalarni oddiy kal'kulyatorda yechish misolda keltirilgan.

Tenglamalar sistemasi va $\sum$ yig'indi berilgan

$$\begin{aligned} 3,00\tau_1 + 0,39\tau_2 - 0,28\tau_3 - 0,26\tau_4 + 3,36 &= 0; & \sum_1 &= +6,21; \\ +0,39\tau_1 + 2,53\tau_2 + 0,20\tau_3 - 0,17\tau_4 + 3,34 &= 0; & \sum_2 &= +6,29; \\ -0,28\tau_1 + 0,20\tau_2 + 1,08\tau_3 + 0,29\tau_4 - 2,62 &= 0; & \sum_3 &= -1,33; \\ -0,26\tau_1 - 0,17\tau_2 + 0,29\tau_3 + 1,60\tau_4 + 2,99 &= 0; & \sum_4 &= +4,45; \\ [pll] &= 35,68; & \sum_5 &= 42,75 \approx [pls]. \end{aligned}$$

Hisoblashlarni oxirgi tekshirish uchun topilgan noma'lumlarni tenglamalar yig'indisiga qo'yamiz. Koeffitsiyent va ozod hadlarni hisoblaymiz. (14.30 formulaga qarang).

$$\begin{aligned} \sum - L_1 &= +6,21 + 3,36 = +2,85 \\ \sum_2 - L_2 &= +6,29 - 3,34 = +2,95; \\ \sum_3 - L_3 &= -1,33 + 2,62 = +1,29; \\ \sum_4 - L_4 &= +4,45 - 2,99 = +1,46; \\ \sum_5 - [pll] &= +42,75 - 35,68 = +7,07. \end{aligned}$$

Endi olamiz

$$\begin{aligned} -2,85 \times 0,85 - 2,95 \times 1,65 + 1,29 \times 3,28 - 1,46 \times 2,78 + 7,07 &= \\ = -2,42 - 4,87 + 4,23 - 4,06 + 7,07 &= -0,05. \end{aligned}$$

Olingan xatolikni e'tiborga olmasa ham bo'ladi.

2. Hotirali kal'kulyatorda hisoblash uchun qisqartirilgan sxema

Oddiy kal'kulyatorda hisoblangan tenglamalar koeffitsiyenti yig'indisi va ikkita ko'paytuvchining ko'paytmasi yig'indisi (N) hisoblangan o'zgartirilgan tenglama koeffitsiyentlarini oraliq yozuvisiz birdaniga hotirali kal'kulyatorda hisoblash

mumkin. Bunda hisoblash sxemasiga faqat asosiy eliminatsion tenglamalarning o'zgartirilgan koeffitsiyentlar ko'chirib yozish mumkin. Hamma eliminatsion qator sonlarini yuqoridagi qator sonlariga (ya'ni $E_{12}, T, E_{13}N, E_{23} N^{(1)}$ va h.k.) ko'paytmasini ko'chirib yozish kerak emas. Huddi shunday oraliq yozuvsiz noma'lumlarni ham topishimiz mumkin.

Hotirali kal'kulyatorda berilgan usulda hisoblash aniqligi oddiy kal'kulyatorda hisoblashga qaraganda ancha yuqori bo'ladi. Chunki hotirali kal'kulyatorda hisoblashni katta o'nli sonda bajarish mumkin va oraliq hisoblashda yaxlitlash xatoligi uncha ta'sir qilmaydi.

14.3-jadvalda normal tenglamalar qisqartirilgan sxemada hotirali kal'kulyatorda yechilgan. Bu jadvalda noma'lumlar tekshirishlari $u=z-l$ hisoblangan. Bu tengliklarning aniqligi mos tushadi.

14.3 jadval

Tar-tib	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	L	Σ	Tek-shirish
0	1	2	3	4	5	6	7
N_{11}	3,000	+0,390	-0,280	-0,260	+3,360	+6,210	
E_1	-1	-0,1300	+0,0933	+0,0867	-1,1200	-2,0700	-2,0700
N_{21}		2,530	+0,200	-0,170	+3,340	+6,290	
$N_{21}^{(1)}$		2,479	+0,236	-0,138	+2,903	+5,480	+5,482
E_2		-1	-0,0952	+0,0557	-1,1710	-2,2105	-2,2106
N_{31}			1,080	+0,290	-2,620	-1,330	
$N_{31}^{(2)}$			1,031	+0,279	-2,583	-1,273	-1,272
E_3			-1	-0,2706	+2,5053	+1,2347	+1,2347
N_4				1,600	+2,990	+4,450	
$N_{41}^{(3)}$				1,494	+4,142	+5,636	+5,638
E_4				-1	-2,7724	-3,7724	-3,7724
N_5					35,680	42,750	
$N_5^{(4)}$					10,563	+10,563	
$\tau =$	-0,844	-1,635	+3,255	-2,772			-0,007
$u =$	-1,844	-2,635	+2,255	-3,772			

Olingan noma'lumlarni yig'indilar tenglamasiga qo'yib, qoldiq xatolikni topamiz. Bu 0,007 ga teng

Tekshirish natijalarining mosligi oddiy kal'kulyatorda hisoblaganga qaraganda hotirali kal'kulyatorda hisoblanganligi ancha aniqroq. Hotirali kal'kulyatorning bu afzalligi katta sonli tenglamalarni hisoblashda yana ham yaqqolroq ko'rinadi.

Lekin oddiy kal'kulyatorda ham dala sharoitida oddiy geodezik to'r uchun kerakli aniqlikni ta'minlash mumkin.

14.4. KRAKOVYAN USULI

Noma'lumlarni ketma ket yo'qotish uchun EHM da ishlashda, polyak astronomi Banaxeovich yaratgan, krakovyan usuli foydali. Bu usulda eng yuqori darajada kol'kulyator imkoniyati foydalaniladi, yaxlitlash xatoligi eng oz ta'sir qiladi va hisoblash protsessi sxemada joylashtiriladi.

Usulning mazmuni quyidagilardan iborat, kvadrat ildizini shu tenglamalarning kvadrat koeffitsiyentiga bo'lib, kal'kulyatorda ekvivalent sistemaning tenglamalar koeffitsiyentlari oraliq yozuvisiz olinadi. Shu mos qatorlarni «krakovyan» qatori deyiladi. Tushunish qiyin emas, eliminatsion tenglamalar elementlarining Gauss algoritmda o'zgartiriladigan jarayonda yig'iladigan ekvivalent tenglamalar elementlariga ko'paytmasi. Bunda shu grafada turgan krakovyan qatorlari sonining ko'paytmasiga teng.

Uchta tenglamani krakovyan usulida Gauss belgilashlari bilan ko'rsatamiz.

Yechish sxemasi 35-jadvalda berilgan. K harfi bilan krakovyan qatori belgilangan.

Hisoblashlarni yengillashtirish uchun, hamma N qator(ya'ni asosiy tenglamalar) miqdorlari, kvadrat koeffitsiyentlaridan tashqari, sxemaga teskari ishora bilan yoziladi.

K_{11} qatorni topish tartibi tushuntirish kerak emas; kal'kulyatorda $\sqrt{N_{11}}$ quyidagi tarzda olinadi: kal'kulyatorda ildizning taxminiy qiymatini qo'yiladi va N_{11} , qiymatga bo'linadi; qidirilayotgan ildiz bo'linmaning o'rta arifmetik ga teng:

$$\sqrt{a} = \frac{x_0 + \frac{a}{x_0}}{2}$$

x_0 — ildizning taxminiy qiymati.

Boshqa K_{11} qator miqdorlarini ham kal'kulyatorda odatdagi bo'lish usulida emas, ko'paytirish usuli bilan foydaliroq olishni ko'rsatamiz.

* Umuman geodezistlarga krakovyan usuli kvadrat ildiz usuli yoki Holetskiy usuli nomi bilan mashhur. Usulning birinchiligi Holetskiyga tegishli, lekin Banaxeovich bu usulni krakovyan hisoblashlarining u yaratgan xususiy holini olgan

Tar-tib	τ_1	τ_2	τ_3	L	Σ	Tekshirish
0	1	2	3	4	5	6
N_{1i}	N_{11}	$-N_{12}$	$-N_{13}$	$-L_1$	$-\Sigma_1$	
N_{2i}		N_{22}	$-N_{23}$	$-L_2$	$-\Sigma_2$	
N_{3i}			$-N_{33}$	$-L_3$	$-\Sigma_3$	
N_{4i}				[pll]	$-\Sigma_4$	
K_{1i}	$\sqrt{N_{11}}$	$\frac{-N_{12}}{\sqrt{N_{11}}}$	$\frac{-N_{13}}{\sqrt{N_{11}}}$	$\frac{-L_1}{\sqrt{N_{11}}}$	$-\Sigma K_1$	$\frac{-\Sigma_1}{\sqrt{N_{11}}}$
K_{2i}		$\sqrt{N_{22}^{(1)}}$	$\frac{-N_{23}^{(1)}}{\sqrt{N_{22}^{(1)}}}$	$\frac{-L_2^{(1)}}{\sqrt{N_{22}^{(1)}}}$	$-\Sigma K_2$	$\frac{-\Sigma_2^{(1)}}{\sqrt{N_{22}^{(1)}}}$
K_{3i}			$\sqrt{N_{33}^{(2)}}$	$\frac{-L_3^{(2)}}{\sqrt{N_{33}^{(2)}}}$	$-\Sigma K_3$	$\frac{-\Sigma_3^{(2)}}{\sqrt{N_{33}^{(2)}}}$
$N_{4i}^{(3)}$				$\sqrt{N_{44}^{(3)}}$	$-\Sigma_4^{(3)}$	
Noma'lumlar	τ_1	τ_2	τ_3	$\frac{-L_3^{(2)}}{\sqrt{N_{33}^{(2)}}}$		

Miqdor $N_{22}^{(1)}$ huddi farq kabi olinadi

$$N_{22} - \left(\frac{-N_{12}}{\sqrt{N_{11}}} \right)^2$$

yoki sxemaning belgilashida, $N_{22} - K_{12}^{(2)}$ (N_{22} miqdorni kal'kulyatarga qo'yganda $K_{12} = \frac{-N_{12}}{\sqrt{N_{11}}}$ miqdor kvadratlarning o'nlik sonini hisobga olish kerak).

Natijada quyidagi qiymat olinishi ko'rish qiyin emas.

$$N_{22}^{(1)} = N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}}$$

Olingan $N_{22}^{(1)}$ miqdorni kal'kulyatorda o'chirmasdan, yuqoridagi bayon qilingan usulda ildizdan chiqariladi va natija K_{2i} qatarga yoziladi.

K_{2i} qator kasrining surati formula bo'yicha hisoblanadi.

$$-N_{23}^{(1)} = -N_{23} + K_{12}K_{13};$$

$$-L_2^{(1)} = -L_2 + K_{12}K_{14};$$

$$-N_{26}^{(1)} = -\Sigma_2 + K_{12}K_{15};$$

Miqdorlar— Σ_{K1} , i Σ_{K2} chapda joylashgan sonlar yig'indisi kabi olinadi. Bunda chapdan oxirgi songa minus belgisi qo'yiladi.

Qiyamat $N_{33}^{(2)}$ formula bo'yicha topiladi

$$N_{33}^{(2)} = N_{33} - K_{13}^{(2)} - K_{23}^{(2)}.$$

$N_{33}^{(2)}$ miqdordan ildiz chiqarishdan oldin (umuman — ekvivalent sistemaning oxirgi tenglamaning kvadratik koeffitsiyentlari) 35-jadvalida ko'rsatilgandek "Noma'lumlar" qatoriga «L» grafasining pastiga yoziladi. Huddi shunday miqdor — $L_3^{(2)}$ ham (umumiy holda — L_k^{k-1} miqdor ham).

K_{3i} qator surati formula bo'yicha olinadi.

$$-L_3^{(2)} = -L_3 + K_{13}K_{14} + K_{23}K_{24};$$

$$-\sum_3^{(2)} = -\sum_3 + K_{13}K_{15} + K_{23}K_{25};$$

Hamma krakovyan qatorlari qiymatlari, ildizdan chiqarish va $\sqrt{N_{11}^{(1)}}$, $\sqrt{N_{22}^{(1)}}$, $\sqrt{N_{33}^{(2)}}$ ga bo'lish kal'kulyatorda oraliq yozuvlarisiz bajariladi. Endi, kal'kulyatorda $-\sum_3 + K_{13}K_{15} + K_{23}K_{25}$, yig'indini olib, uni o'chirmasdan birdaniga K_{3i} qatorda oldindan yozilgan $\sqrt{N_{33}^{(2)}}$ miqdorga bo'linadi. Hisoblash sxemaga oxirgi natija yoziladi. Huddi shunga o'xshash qoida bilan miqdorlar ham olinadi.

$$N_{44}^3 = [11] - K_{14}^2 - K_{24}^2 - K_{34}^2;$$

$$-\sum_4^{(3)} = -\sum_4 + K_{14}K_{15} + K_{24}K_{25} + K_{34}K_{35}.$$

Quyidagi farq ko'rinib turibdi. Chapdan krakovyan qatori miqdorini birinchi olishda N qator miqdorlaridan krakovyan qator sonlaridan ayirib tashlanadi; boshqa krakovyan qatorlarining miqdorini hisoblashda jadvalning yuqori qismidagi sonlar krakovyan qatori sonlari ko'aytmasi bilan algebraik yig'iladi.

K qator bo'yicha tekshirish Gauss — Dulitl' sxemasidagi ekvivalent tenglama qatori bo'yicha tekshirish kabi, agar chapdan birinchi sonni minus ishora bilan olinsa (bu sonlar sxemada doimo musbat).

Oxirgi noma'lum (bizning misolimizda τ_3) odatdagi formula bo'yicha hisoblanadi

$$\tau_3 = \frac{-L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}},$$

umumiy holda

$$\tau_k = \frac{-L_k^{(k-1)}}{N_{kk}^{(k-1)}}$$

Boshqa noma'lumlar kal'kulyatorda krakovyan qatori yordamida oraliq yozuvisiz quyidagi formulalar bo'yicha topiladi

$$\tau_2 = \frac{K_{24} + K_{23}\tau_3}{\sqrt{N_{22}^{(1)}}};$$

$$\tau_1 = \frac{K_{14} + K_{13}\tau_3 + K_{12}\tau_2}{\sqrt{N_{11}}};$$

ya'ni, Gauss – Dulitl' sxemasidagi kabi eliminatsion qatordan, faqatgina kvadrat ko'effitsiyentlardan ildizga bo'lish bu yerda qo'shimcha.

14.5 – jadvalda to'rtta normal tenglamani krakovyan usulida yechish misoli keltirilgan. Tenglamalar sistemasini oldin ikki marta yechilgani olingan. Bu sistemaning hamma miqdorlari, kvadrat ko'effitsiyentlaridan tashqari, sxemaga teskari ishora bilan ko'chiriladi.

14.5 jad'val

Tar- tib	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	L	Σ	Tekshi- rish
0	1	2	3	4	5	6	7
N ₁	3,00	-0,39	+0,28	+0,26	-3,36	-6,21	
N ₂		2,53	-0,20	+0,17	-3,34	-6,29	
N ₃			1,08	-0,29	+2,62	+1,33	
N ₄				1,60	-2,99	-4,45	
N ₅					35,68	-42,75	
K ₁	1,732	-0,225	+0,162	+0,150	-1,940	-3,585	-3,585
K ₂		1,575	-0,150	+0,087	-1,843	-3,481	-3,482
K ₃			1,016	-0,274	+2,542	+1,252	+1,251
K ₄				1,223 [pv ²] =	-3,383 10,613	-4,606 10,615	-4,606
Noma'- lumlar	-0.844	-1.632	+3.248	-2.768	-4.138/1.495		-0.001

Olingan noma'lumlarni tenglamalar yig'indisiga qo'yganda, hammasi bo'lib – 0,001 ga teng, qoldiq xatolik olindi.

Krakovyan qatorlarida, 14.3 – jadvaldagi eliminatsion qatordagiga qaraganda, o'ndan bir son oz saqlanib qolgan bo'lsa ham, krakovyan usulida yechishda tekshirish natijalari Gauss algoritmi bilan yechishdagiga qaraganda yomon emas. Bir xil o'nli sonlarni yaxlitlaganda krakovyan usulida natija aniqligiga Gauss algoritmiga qaraganda o'rtacha kam ta'sir qiladi. Absolyut qiymat bo'yicha eliminatsion qator sonlari, qoida bo'yicha, mos krakovyan qatori sonidan kam, demak, eliminatsion ko'effitsiyentlarning nisbiy yaxlitlanish xatosi krakovyan qatorlarining mos ko'effitsiyentlari xatosidan ko'p. Shuning uchun, normal tenglamalarni yechishda xatoliklarning bosh manbai hisoblangan, ko'paytmalarning yig'indisi yaxlitlash

xatoligi krakovyan usulida bir xil o'nli sonlarda yaxlitlash xatoligi kam.

EHMda hisoblash uchun krakovyan usuli juda foydali. Chunki, bu usulda, Gauss algoritmiga qaraganda, oraliq informatsiyalar ikki marta kam (ikkita qator bitta qatorni egallaydi).

14.5 – jadvalda $[pv^2]$ qiymati $[pII]$ minus krakovyan qatorlari kvadrati yig'indisi kabi hisoblangan. Ya'ni

$$[pv^2] = [pII] - K_{15}^2 - K_{25}^2 - K_{35}^2 - K_{45}^2$$

$$([pII] = 35,68)$$

14.5–jadvalda sistemaning aniqlovchisi(determinant) quyidagicha hisoblangan.

$$D = K_{11}^2 K_{22}^2 K_{33}^2 K_{44}^2.$$

14.5. ODDIY ITERATSIYA USULIDA TENGLAMALARNI YECHISH

Katta va yaxshi shartlangan tenglamalar sistemasi(20–30 tenglamalargacha) oddiy iteratsiya usulida yechish qulaydir (Gauss — Zeydel' usuli).

Bu usulning ketma – ketligi quyidagicha:

1. Har bir noma'lum boshqalar orqali ifodalanib, tenglamadan foydalaniladi. Aniqlanadigan noma'lumlar kvadratik koeffitsiyentlar bilan bu tenglamaga kiradigan.

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= -\frac{N_{12}}{N_{11}} z_2 - \frac{N_{13}}{N_{11}} z_3 - \frac{L_1}{N_{11}} \\ z_2 &= -\frac{N_{22}}{N_{22}} z_1 - \frac{N_{23}}{N_{22}} z_3 - \frac{L_2}{N_{22}} \\ z_3 &= -\frac{N_{33}}{N_{33}} z_1 - \frac{N_{23}}{N_{33}} z_2 - \frac{L_3}{N_{33}} \end{aligned} \right\} \quad (14.31)$$

Bu tenglamalarni iteratsion tenglamalar deb ataymiz

Iteratsiya (yaqinlashtirish) jarayonida navbatdagi har bir noma'lumning qiymati, mos iteratsion tenglamaga qolgan noma'lumlarning oxirgi qiymatini qo'yish orqali yo'li bilan olinadi. Birinchi yaqinlashtirishda z_1 ni topishda z_2 va z_3 qiymatlar, z_2 ni topishda z_3 qiymat esa nolga teng deb olinadi.

Berilgan iteratsiya jarayonining mosligi § 75 da isbotlangan

14.6 jadval

E	E_{i1}^0	E_{i2}^0	E_{i3}^0	E_{i4}^0
E_{1i}^0		-0,154	+0,259	+0,162
E_{2i}^0	-0,130		-0,185	+0,106
E_{3i}^0	+0,093	-0,079		-0,181
E_{4i}^0	+0,087	+0,067	-0,269	
L_{Ei}	-1,12000	-1,32000	+2,42600	-1,86900
$\sum E_{Ei}$	-1,070	-1,486	+2,231	-1,782
$-\sum_i/N_{ii}$	-2,070	-2,486	+1,231	-2,781

Eslatma. Iteratsion tenglamalarining koeffitsiyentlari va ozod hadlarini hisoblashni tekshirishni quyidagi formula bo'yicha amalga oshiriladi $\sum E_{Ei} - 1 \approx \sum L / N_{ii}$. Bunda $\sum E_{Ei}$ – Iteratsion tenglamalari koeffitsiyentlari va ozod hadlarini yig'indisi.

14.7 jadval

II Sxema

-1,12	-0,98	-0,87	-0,85	-0,85		τ_1
-1,15	-1,53	-1,62	-1,63	-1,63		τ_2
+2,35	+3,15	+3,24	+3,25	+3,25		τ_3
-2,60	-2,76	-2,77	-2,77	-2,77		τ_4

$$[pv^2] = -3,35 \cdot 0,85 - 3,34 \cdot 1,63 - 2,62 \cdot 3,25 - 2,99 \cdot 2,77 + 35,68 = 10,58$$

Hisoblashlar ikkita qog'ozda joylashgan ikkita sxema yordamida bajariladi.

Birinchi sxemaga (14.6– jadv.), ustunga yuqoridan pastga joylashtirib, iteratsion tenglama o'ng qismining koeffitsiyentlari va ozod hadlari ko'chirib yoziladi. Ikkinchi sxemaga (14.7– jadv.), yuqoridan pastga joylashtirib, navbatdagi noma'lumlarning qiymatlari ko'chirib yoziladi.

Noma'lumning navbatdagi qiymatini hisoblashda ikkinchi sxemaning chap cheti birinchi sxemaning mos grafasi o'ng chetiga tutashtiriladi. Undan keyin iteratsion tenglamaning mos ko'paytmalari va ozod hadlari kal'kulyatorda yig'iladi. Ikkinchi sxema grafasining to'lishi bilan uning chapki grafalari qirqib tashlanadi. Yaqinlashtirish navbatdagi noma'lum qiymatlari qaytarilganga qadar davom ettiriladi.

14.6–jadvalda boshqa usullar bilan oldin uch marta yechilgan normal

tenglamalarning yechimi ko'rsatilgan. Qiymat $[pv^2]$ quyidagi formula bo'yicha yechilgan.

$$[pv^2] = L_1\tau_1 + L_2\tau_2 + L_3\tau_3 + L_4\tau_4 + [pll].$$

Tenglamalar sistemasi

$$3,00\tau_1 + 0,39\tau_2 - 0,28\tau_3 - 0,26\tau_4 + 3,36 = 0; \quad \Sigma_1 = +6,21;$$

$$0,39\tau_2 + 2,53\tau_3 + 0,20\tau_4 - 0,17\tau_4 + 3,34 = 0; \quad \Sigma_2 = +6,29;$$

$$-0,28\tau_1 + 0,20\tau_2 + 1,08\tau_3 + 0,29\tau_4 - 2,62 = 0; \quad \Sigma_3 = -1,33;$$

$$-0,26\tau_1 - 0,17\tau_2 + 0,29\tau_3 + 1,60\tau_4 + 2,99 = 0; \quad \Sigma_4 = +4,45;$$

$$[pll] = 35,68.$$

Oddiy iteratsiya usulida olingan natijalar qiymati, oddiy kal'kulyatorda to'liq sxemada olingan natijalar qiymatidan aniqroq bo'lib chiqdi.

Iteratsiya usulining eng muhim qulayligi shundan iboratki, xatolik yaqinlashtirish jarayonida yaqinlashtirishni ko'paytiradi. Lekin oxirgi natijaga ta'sir qilmaydi. Lekin bu usul yaxshi shartlanganlikda foydali. Yomon shartlanganlikda yaqinlashtirish soni ko'payadi, usul qulay bo'lmay qoladi.

Oddiy iteratsiya usulini qo'llash bo'yicha yana ikkita izoh beramiz.

1. Katta sonli tenglamalarda I sxemada chap tomoni ozod hadlar absolyut qiymati bo'yicha katta bo'lsin. Bunda, bizning sxemamizda tenglamalarni quyidagi ketma -ketlikda joylashtirish kerak: 3-chi, 4-chi, 2-chi, 1-chi. Kam sonli tenglamalarda joylashtirish tartibi amaliy qiymatga ega emas.

2. Tekshirish uchun noma'lumlarni hamma tenglamalarga qo'yib chiqish kerak. Noma'lumlar qiymati oldindan olinganligi uchun biz bunday qilmadik.

15.1. PARAMETRIK USULDA TENGASHTIRISHDA FUNKSIYALAR VAZNLARINI HISOBLASH

Yuqorida aytilgandek, har qanday miqdorning aniqligini baholash uchun uni o'lchangan natijalar x_i ni funksiya ko'rinishiga keltirish kerak. Undan keyin ma'lum xatoliklar nazariyasi formulasini qo'llash mumkin

$$\frac{1}{P_\phi} = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{P} \right].$$

Topilishi talab qilinadigan vazn miqdori, masalaning sharti bo'yicha kerakli noma'lumlarning tenglashtirilgan t qiymati orqali yoki o'lchangan miqdorlar tenglashtirilgan x_i qiymati orqali ifodalanishi mumkin. Aniqlanayot miqdorni F orqali belgilaymiz.

Birinchi holda quyidagicha bo'ladi

$$F = F(t_1, \dots, t_k)$$

ikkinchida

$$F = \psi(x'_1, \dots, x'_n).$$

Ammo, o'lchangan miqdorlar kerakli noma'lumlar orqali quyidagi ko'rinishdagi tenglik bilan ifodalanadi.

$$x'_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i = 1, \dots, n),$$

va ikkinchi holat birinchi holatga olib keladi.

Demak quyidagi ko'rinishda

$$F = F(t_1, \dots, t_k)$$

va F qiymatning vaznini topish talab qilinadi. Qiymat t – o'lchash natijasi emas. Shuning uchun shunday fikr yuritamiz: $t = t^0 + \tau$ va qiymat F ni noma'lumlarning τ funksiyasi deb qarash mumkin, ya'ni normal tenglamalarning noma'lum sistemasini. Agar bu noma'lumlarni o'lchashlar natijalari orqali ifodalasak masala yechilgan bo'ladi: F qiymat o'lchash natijalari ko'rinishida ifodalangan bo'ladi.

Buning uchun quyidagi tarzda kirishamiz. Boshida noma'lumlarni normal tenglamalar ozod hadlari chiziqli funksiyasi ko'rinishida ifodalaymiz. Chunki ozod hadlar $[pa_1I]$, $[pa_2I]$, ..., $[pa_kI]$ larning yig'indisidir va noma'lumlarni chiziqli funksiya ko'rinishida ifodalash qiyin emas, ya'ni tuzatmalar tenglamasi ozod hadlari. Shunday qilib, masala yechilgan bo'ladi, agar miqdorlar vazni $l_i = f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i = x_i^0 - x_i$ teng, o'lchash natijalariga tengligini hisobga olsak. Miqdor l_i aniqlikni baholashda o'lchashlar natijasi rolini o'ynaydi.

Noma'lumlar τ ni normal tenglamalar ozod hadlarining chiziqli ko'rinishini teskari matritsa yordamida oson ifodalash mumkin. Normal tenglamalar

sistemasini matritsa ko'rinishda yozamiz

$$N_{\tau} = -L$$

bundan

$$\tau = -N^{-1}L$$

belgilaymiz

$$N^1 = Q$$

va mos ravishda teskari matritsa elementlarini Q_j , orqali, bunda j – qatorlar nomeri, s – ustunlar soni. Unda

$$\tau = -QL$$

yoki

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}, \dots, Q_{1k} \\ \dots \\ Q_{k1}, \dots, Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -L_1 \\ \vdots \\ -L_k \end{pmatrix}$$

Har qanday τ_i noma'lum uchun yozish mumkin

$$\tau_i = -Q_{i1}L_1 - Q_{i2}L_2 - \dots - Q_{ik}L_k \quad (15.1)$$

Parametrik usulda normal tenglamalar ko'effitsiyentlari teskari matritsa elementlarini vazn ko'effitsiyentlari ham deyiladi.

1. Qo'shimcha grafa usuli bo'yicha vazn ko'effitsiyentlarini hisoblash

Vazn ko'effitsiyentlari Q_{ij} teskari matritsaning diagonal elementlari kvadratlari deb ataladi. Quyida ular doimo musbat ekanligini ko'rsatamiz. Qolgan vazn ko'effitsiyentlari kvadratsiz deyiladi.

Kvadratsiz ko'effitsiyentlar bosh (kvadratlari) diagonalga nisbatan simmetrik xususiyatga ega, ya'ni

$$Q_{ji} = Q_{ij} \quad (15.2)$$

Bu tenglikning to'g'riligini isbotlaymiz.

Matritsalar nazariyasidan ma'lumki kvadrat matritsa uchun nazariya

$$(N^T)^{-1} = (N^{-1})^T \quad (15.3)$$

ya'ni, transponirovanlash ishlari va kvadratik matritsani teskarilash joylarni almashtirish mumkin.

Normal tenglamalar ko'effitsiyentlari matritsasi uchun simmetrikligi natijasida yozish mumkin

$$N^T = N; \quad (15.4)$$

shunig uchun, (15.3) va (15.4) hisobga olib, topamiz

$$(N^T)^{-1} = N^{-1},$$

bunda

$$N^{-1} = (N^{-1})^T,$$

yoki

$$Q = Q^T$$

ya'ni, teskari matritsa ham bosh diagonalga nisbatan simmetrik. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Endi vazn koeffitsiyentlarini hisoblash usullarini ko'ramiz. Bu usullar ma'lum o'zaro bog'lanishga asoslangan.

$$N^{-1}N = NN^{-1} = E \quad (15.5)$$

bunda E – birlik matritsa. N va Q matritsa uchun (15.5) tenglik yoyilgan ko'rinishda quyidagicha:

$$\begin{pmatrix} Q_{11}, \dots, Q_{1k} \\ \dots \\ Q_{k1}, \dots, Q_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11}, \dots, N_{1k} \\ \dots \\ N_{k1}, \dots, N_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11}, \dots, N_{1k} \\ \dots \\ N_{k1}, \dots, N_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11}, \dots, Q_{1k} \\ \dots \\ Q_{k1}, \dots, Q_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, 0, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, \dots, 0, 1 \end{pmatrix} \quad (15.6)$$

Matritsalarini ko'paytirish qoidasiga asosan, N va Q matritsa kvadratsiz elementlarining simmetrikligini hisobga olib, har qanday j -chi qator (ustun) vazn koeffitsiyentlari uchun quyidagi tenglamalar sistemasini yozish mumkin.

$$\left. \begin{array}{l} N_{11}Q_{j1} + \dots + N_{1k}Q_{jk} = 0 \\ \dots \\ N_{1j}Q_{j1} + \dots + N_{jk}Q_{jk} = 1 \\ \dots \\ N_{k1}Q_{j1} + \dots + N_{kk}Q_{jk} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nollar} \\ \\ 1 \\ \text{nollar} \end{array} \quad (15.7)$$

Asosiy sistemadan (τ noma'lumlar uchun) faqat ozod hadlari bilan farq qiladigan normal tenglamalar olindi. (15.7) sistemada hamma ozod hadlari, j -chi tenglamalarni hisobga olmaganda, nolga teng. Bunda ozod had – 1 ga teng.

Vazn koeffitsiyentlarning s -chi qatorini topish uchun, huddi shunday (15.7) tenglama kabi, tenglamalar sistemasini yechish kerak. Lekin ozod hadi –1 ga teng, s -chi tenglamaga qo'yish (boshqa ozod hadlar nol bo'ladi)

(15.7) tenglamalar sistemasida vazn koeffitsiyentlarini **qo'shimcha grafa** usuli bo'yicha hisoblash asosi yotadi. Bu quyidagidan iborat.

Normal tenglamalarni yechish sxemasida, har bir topiladigan vazn koeffitsiyentlari j -y qatori uchun qo'shimcha grafa qilinadi. Bu grafaga asosiy

sistemaning j -chi qatoriga -1 yoziladi. Qo'shimcha grafada L grafadagidek o'zgartirishlar bajariladi.

Hamma o'zgartirishlarni bajargandan keyin vazn koeffitsiyentlari noma'lumlar qanday hisoblangan bo'lsa huddi shunday hisoblanadi. Buning uchun mos qo'shimcha grafadagi L grafadan foydalaniladi.

Qo'shimcha grafa yordamida vazn koeffitsiyentlarini hisoblash usuli teskari matritsaning qandaydir qatorlari aniqlash talab qilingan hollarda qo'llaniladi. Agar teskari matritsaning hamma elementlarini topish talab qilinsa **Genzen usulini** qo'llash qulay.

2. Genzen usuli bo'yicha vazn koeffitsiyentlarini hisoblash

Agar teskari matritsaning hamma qatorlarini, oxiridan boshlab birinchida tugatib, kema-ket hisoblasa qo'shimcha grafa talab qilinmaydi. Hamma vazn koeffitsiyentlarini topish uchun asosiy normal tenglamalar sistemasining faqatgina eliminatsion tenglamalari kerak bo'ladi. Bunday yechim vazn koeffitsiyentlarining kvadratik diagonalga nisbatan simmetrik xossasi tufayli bo'lishi mumkin.

Vazn koeffitsiyentlarini Genzen usuli bilan yechishni to'rtta normal tenglama misolida ko'rsatamiz.

Birinchi navbatda vazn koeffitsiyentlarini oxirgi qatorini topamiz. Mos tenglamalar sistemasini yozamiz

$$\left. \begin{aligned} N_{11}Q_{41} + N_{12}Q_{42} + N_{13}Q_{43} + N_{14}Q_{44} &= 0 \\ N_{12}Q_{41} + N_{22}Q_{42} + N_{23}Q_{43} + N_{24}Q_{44} &= 0 \\ N_{13}Q_{41} + N_{23}Q_{42} + N_{33}Q_{43} + N_{34}Q_{44} &= 0 \\ N_{14}Q_{41} + N_{24}Q_{42} + N_{34}Q_{43} + N_{44}Q_{44} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

Bunda birinchi uchta tenglamaning ozod hadlari nolga teng. Bunda birinchi uchta noma'lumni yo'qotgandan keyin oxirgi tenglama ozod hadi o'zgarishsiz qoladi. Natijada quyidagini olamiz.

$$N_{44}^{(3)}Q_{44} - 1 = 0$$

bundan

$$Q_{44} = \frac{1}{N_{44}^{(3)}}.$$

Umumiy holda

$$Q_{kk} = \frac{1}{N_{kk}^{(k-1)}}. \quad (15.9)$$

Q_{43} , Q_{42} va Q_{41} vazn koeffitsiyentlarini normal tenglamalar yechish sxemasi eliminatsion qator yordamida oson topish mumkin. Bu qatorlarda ozod hadlarni nolga teng deb qabul qilish kerak. Bu (15.8) sistemani qarashdan bilinadi. Shunday qilib,

$$\left. \begin{aligned} Q_{43} &= E_{34}Q_{44} \\ Q_{42} &= E_{23}Q_{43} + E_{24}Q_{44} \\ Q_{41} &= E_{12}Q_{42} + E_{13}Q_{43} + E_{14}Q_{44} \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

Teskari matritsaning uchinchi qatori uchun tenglamalar sistemasini yozamiz

$$\left. \begin{aligned} N_{11}Q_{31} + N_{12}Q_{32} + N_{13}Q_{33} + N_{14}Q_{34} &= 0 \\ N_{12}Q_{31} + N_{22}Q_{32} + N_{23}Q_{33} + N_{24}Q_{34} &= 0 \\ N_{13}Q_{31} + N_{23}Q_{32} + N_{33}Q_{33} + N_{34}Q_{34} - 1 &= 0 \\ N_{14}Q_{31} + N_{24}Q_{32} + N_{34}Q_{33} + N_{44}Q_{34} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.11)$$

(15.11) sistemaning to'rtta noma'lumidan oxirigisi topildi. Chunki $Q_{34} = Q_{43}$

Qolgan noma'lumlarni topish uchun yozamiz

$$\left. \begin{aligned} Q_{33} &= E_{34}Q_{34} + \frac{1}{N_{33}^{(2)}} \\ Q_{32} &= E_{23}Q_{33} + E_{24}Q_{34} \\ Q_{31} &= E_{12}Q_{32} + E_{13}Q_{33} + E_{14}Q_{34} \end{aligned} \right\} \quad (15.12)$$

Vazn koeffitsiyentlarining ikkinchi qatori quyidagi tarzda topiladi

$$\left. \begin{aligned} Q_{24} &= Q_{42} \\ Q_{23} &= Q_{32} \\ Q_{22} &= E_{23}Q_{23} + E_{24}Q_{24} + \frac{1}{N_{22}^{(4)}} \\ Q_{21} &= E_{12}Q_{22} + E_{13}Q_{23} + E_{14}Q_{24} \end{aligned} \right\} \quad (15.13)$$

Oxiri, vazn koeffitsiyentlarining birinchi qatorini hisoblash uchun quyidagi formulani yozamiz

$$\left. \begin{aligned} Q_{14} &= Q_{41} \\ Q_{13} &= Q_{31} \\ Q_{12} &= Q_{21} \\ Q_{11} &= E_{12}Q_{12} + E_{13}Q_{13} + E_{14}Q_{14} + \frac{1}{N_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (15.14)$$

Teskari matritsaning har bir navbatdagi qatorini topgandan keyin tekshirish quyidagi formula bo'yicha bajariladi

$$(\Sigma_1 - L_1)Q_{j1} + (\Sigma_2 - L_2)Q_{j2} + \dots + (\Sigma_k - L_k)Q_{jk} = 1 \quad (15.15)$$

Bu formulani vazn koeffitsiyentlar uchun har qanday tenglamalar sistemasi tenglamalarini yig'ib oson topish mumkin.

Ganzen usuli bo'yicha hamma hisoblashlarni oraliq yozuvlarisiz hotirali dasturlangan kal'klyatorda hisoblash mumkin.

3. Noma'lum τ ning vaznini hisoblash

(15.1) asosan yozish mumkin

$$\tau_j = -[pa_1/l]Q_{j1} - [pa_2/l]Q_{j2} - \dots - [pa_k/l]Q_{jk}.$$

Qavsni ochib va l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ozod hadlar bo'yicha hadlarni guruhlashtirib topamiz

$$\tau_j = -p_1(a_{11}Q_{j1} + a_{12}Q_{j2} + \dots + a_{1k}Q_{jk})_1 - \dots - p_n(a_{n1}Q_{j1} + a_{n2}Q_{j2} + \dots + a_{nk}Q_{jk})_n,$$

yoki

$$\tau_j = -\sum_{i=1}^n p_i(a_{i1}Q_{j1} + a_{i2}Q_{j2} + \dots + a_{ik}Q_{jk})_i \quad (15.16)$$

Belgilaymiz

$$p_i(a_{i1}Q_{j1} + \dots + a_{ik}Q_{jk}) = \alpha_{ij} \quad (15.17)$$

Unda

$$\tau_i = -\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} l_j = -[\alpha_i/l] \quad (15.18)$$

$$(j = 1, \dots, k).$$

Shunday qilib, noma'lumlarni l ozod hadlarning chiziqli funksiyasi ko'rinishida ifodaladik. Oldin biz aniqlikni baholashda l_i miqdor o'lchashlar qiymatlari rolini o'ynaydi va p_i vaznga ekanligini aytgandik.

Endi (15.18) ga asosan yozamiz

$$\frac{1}{p_j} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \frac{1}{p_i} = \left[\frac{\alpha_j \alpha_i}{p} \right] \quad (15.19)$$

bunda R_j — noma'lum τ_j vazni.

Miqdor α hisoblash ancha qiyin. Ammo α miqdor va Q vazn koeffitsiyentlari orasida oddiy aloqa borligi ishni ancha osonlashtiradi. Uni belgilaymiz.

Tenglamalar sistemasini yozamiz

$$\alpha_{ij} = p_i(a_{i1}Q_{j1} + \dots + a_{ik}Q_{jk}) \quad (j = 1, \dots, n)$$

Bu hamma tenglikni $\frac{\alpha_u}{p_i}$ ga ko'paytirib va ularni yig'amiz

$$\left[\frac{\alpha_j \alpha_i}{p} \right] = [a_1 \alpha_i] Q_{j1} + \dots + [a_k \alpha_i] Q_{jk} \quad (15.20)$$

$[a_1 \alpha_i], \dots, [a_k \alpha_i]$ larning yig'indisini topamiz va tengsizlik sistemasini yozamiz.

$$\alpha_{is} = p_i(a_{i1}Q_{s1} + \dots + a_{ik}Q_{sk})$$

$$(i=1, \dots, n).$$

Bu tenglamalarni boshida a_{i1} ga ko'paytirib, keyinchalik a_{i2} ga va h. k. a_{ik} ($j=1, \dots, n$) gacha va har doim ko'paytirgandan keyin ularning yig'indisini olamiz. Natijada topamiz

$$[a_1 \alpha_i] = [p a_{i1} Q_{i1} + \dots + p a_{ik} Q_{ik},$$

$$[a_j \alpha_i] = [p a_{i1} Q_{i1} + \dots + p a_{ik} Q_{ik}$$

$$[a_k \alpha_i] = [p a_{i1} Q_{i1} + \dots + p a_{ik} Q_{ik}$$

yoki umumiy belgilashda

$$\left. \begin{aligned} [a_1 \alpha_i] &= N_{i1} Q_{i1} + \dots + N_{ik} Q_{ik}, \\ [a_j \alpha_i] &= N_{i1} Q_{i1} + \dots + N_{ik} Q_{ik} \\ [a_k \alpha_i] &= N_{i1} Q_{i1} + \dots + N_{ik} Q_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

Oxirgi tenglikning o'ng tomoni $Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{ik}$ vazn koeffitsiyentlarini topish uchun tenglamalar sistemasining chapki qismiga kiradi. Shuning uchun (15.7) ni e'tiborga olib va (15.21) hisobga olib, yozamiz

$$\left. \begin{aligned} [a_1 \alpha_i] &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ [a_j \alpha_i] &= 1 \\ \dots\dots\dots \\ [a_k \alpha_i] &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{nollar} \\ & \\ &\text{nollar} \end{aligned} \quad (15.22)$$

(15.22) ni hisobga olib (15.20) tenglik quyidagi ko'rinishga keladi

$$\left[\frac{\alpha_j \alpha_i}{P} \right] = Q_{ij} \quad (15.23)$$

(15.23) tenglik α qiymat va Q vazn koeffitsiyentlari orasidagi aloqani ifodalaydi.

Endi (15.19) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{1}{P_j} = Q_{jj} \quad (15.24)$$

Kerakli noma'lumlarning teskari vaznlari mos indeksli kvadratik vazn koeffitsiyentlariga teng ekanligi ko'rinib turibdi.

$Q_{jj} = \left[\frac{\alpha_j \alpha_j}{P} \right]$ tenglikdan ko'rinadiki, matritsa Q ning diagonal elementlari har

doim musbat, kvadratlar yig'indisining musbat p qiymatga bo'linganligini o'z ichiga oladi.

4. Oxirgi ikki noma'lumning vazni (Enke usuli)

Nemis geodezisti Enke normal tenglamalar sistemasidagi oxirgi ikki noma'lum uchun, koeffitsiyentlarni o'zgartirishda qo'llaniladigan oddiy formulalarni taklif qildi. Ko'pgina amaliy holatda bu formulalar bema'lol yetarli.

(15.9) va (15.24) formulalarga asosan yozamiz

$$\frac{1}{P_k} = \frac{1}{N_{kk}^{(k-1)}},$$

bundan

$$P_k = N_{kk}^{(k-1)}, \quad (15.25)$$

ya'ni oxirgi noma'lumning vazni ekvivalent sistemaning oxirgi tenglamasidagi kvadratik koeffitsiyentiga teng.

Oxirgidan oldingi noma'lum vazn uchun formulani to'rtta tenglama misolida topamiz. Oxirgidan oldingi noma'lum bu yerda τ_3 bo'ladi.

τ_3 va τ_4 noma'lumlarning joyini almashtiramiz (albatta mos koeffitsiyentlari bilan). Bunda N_{33} va N_{44} lar rol almashayotganligi uchun yozishimiz mumkin.

$$P_3 = N_{33}^{(3)} = N_{33}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{44}^{(2)}} = \frac{N_{33}^{(2)}}{N_{44}^{(2)}} \left(N_{44}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \right),$$

lekin

$$N_{44}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} = N_{44}^{(3)},$$

Shuning uchun

$$P_3 = \frac{N_{33}^{(2)}}{N_{44}^{(2)}} N_{44}^{(3)} \quad (15.26)$$

yoki, (15.25) hisobga olib,

$$P_3 = \frac{N_{33}^{(2)}}{N_{44}^{(2)}} P_4 \quad (15.27)$$

Normal tenglamalarni yechishning har qanday sxemasida $N_{33}^{(2)}$ i $N_{44}^{(3)} = P_4$ qiymatlarni oson topish mumkin.

$N_{44}^{(2)}$ qiymat quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi.

$$N_{44}^{(2)} = N_{44}^{(3)} - \left(- \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \right) \quad (15.28)$$

(15.28) hamma qiymatlari bor yoki ularni har qanday yechish sxemasida oson

hisoblash mumkin. Yechishning to'liq sxemasida (14.1 va 14.2 jadv.) $-\frac{N_{34}^{(2)}N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$ qiymatlar bor. Misol, 14.2 jadval: $N_{44}^{(2)} = 1,49 + 0,08 = 1,57$.

Shunday qilib noma'lumlar vaznini hisoblashning ikkita usulini ko'rib chiqdik:

1) har qanday noma'lumning teskari vazni mos indeksli vazn koeffitsiyentlari kvadratika teng, ya'ni

$$\frac{1}{P_j} = Q_{jj}$$

2) oxirgi ikkita noma'lumlarning vaznini (15.25), (15.26) va (15.27) yoki (15.28) formulalar bilan oson topish mumkin.

Noma'lumlarning teskari vaznini hisoblashning yana bitta quyidagi ko'rib chiqiladigan usuli mavjud.

5. Funksiya vaznlarini hisoblash

Funksiya $F(t_1, \dots, t_k)$ berilgan va uning aniqligini baholash talab qilinsin. Chunki vazn birligidagi xatolik ma'lum deylik. Masala funksiya vaznini aniqlashga olib keladi. Agar olingan natijalarni hisobga olsak, bu masalani yechish yetarlicha oson. Oldin funksiyaning chiziqli ko'rinishga keltiramiz.

$$\begin{aligned} F(t_1, \dots, t_k) &= F(t_1^0 + \tau_1, \dots, t_k^0 + \tau_k) = \\ &= F(t_1^0, \dots, t_k^0) + \left(\frac{\partial F}{\partial t_1} \right)_0 \tau_1 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial t_k} \right)_0 \tau_k + R, \end{aligned} \quad (15.29)$$

bunda R — ajralish (razlojenie) chiziqsiz hamma hadlarining yig'indisi.

Chunki taxminiy $t_1^0, \dots, t_k^0$ qiymat uchun, har qanday funksiyaning chiziqli qilish uchun uning aniqligi yetarli bo'lish uchun shart qo'yiladi. Qiymat R ga ahamiyat bermasa ham bo'ladi.

(15.29) asoslanib va belgilashlarni hisobga olib

$$\left. \begin{aligned} F(t_1^0, \dots, t_k^0) &= F_0 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial t_j} \right)_0 &= F_j \end{aligned} \right\} \quad (15.30)$$

topamiz

$$F(t_1, \dots, t_k) = F_0 + F_1 \tau_1 + \dots + F_k \tau_k. \quad (15.31)$$

Endi (15.18) e'tiborga olib yozish mumkin

$$F(t_1, \dots, t_k) = F_0 - F_1[\alpha_1 l] - \dots - F_k[\alpha_k l].$$

Qavsni ochib va l ozod had bo'yicha yig'indilarni guruhlab topamiz

$$F(t_1, \dots, t_k) = F_0 - \sum_{i=1}^n (\alpha_{i1} F_1 + \dots + \alpha_{ik} F_k) \quad (15.32)$$

Miqdor l_i aniqligini baholashda o'lichangan miqdorlar rol' o'yinashligini eslatamiz. Shuning uchun (15.32) tenglikning o'ng qismini o'lichangan natijalar funksiyasi deb qarash kerak, ya'ni $F(t_1, \dots, t_k) = F(l_1, \dots, l_n)$.

Unda (15.32) asosan quyidagini yozamiz

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} &= \sum_{i=1}^n (\alpha_{i1} F_1 + \dots + \alpha_{ik} F_k)^2 \frac{1}{P_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{P_i} (\alpha_{i1} \alpha_{i1} F_1 F_1 + 2 \alpha_{i1} \alpha_{i2} F_1 F_2 + \dots + \alpha_{i2} \alpha_{i2} F_2 F_2 + \\ &\quad + 2 \alpha_{i2} \alpha_{i3} F_2 F_3 + \dots + \alpha_{ik} \alpha_{ik} F_k F_k). \end{aligned}$$

Hadlar bo'yicha yig'ib topamiz

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} &= F_1 F_1 \left[\frac{\alpha_1 \alpha_1}{p} \right] + 2 F_1 F_2 \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2}{p} \right] + \dots + 2 F_1 F_k \left[\frac{\alpha_1 \alpha_k}{p} \right] + \\ &+ F_2 F_2 \left[\frac{\alpha_2 \alpha_2}{p} \right] + F_2 F_3 \left[\frac{\alpha_2 \alpha_3}{p} \right] + \dots + 2 F_2 F_k \left[\frac{\alpha_2 \alpha_k}{p} \right] + \dots + F_k F_k \left[\frac{\alpha_k \alpha_k}{p} \right]. \end{aligned}$$

Endi (15.23) munosabatni e'tiborga olib oxirida yozamiz

$$\frac{1}{P_F} = F_1 F_1 Q_{11} + 2 F_1 F_2 Q_{12} + \dots + 2 F_1 F_k Q_{1k} + \left. \begin{aligned} &+ F_2 F_2 Q_{22} + \dots + 2 F_2 F_k Q_{2k} + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ F_k F_k Q_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (15.33)$$

Bu (15.33) formula qo'yilgan masalani yechadi. Lekin amalda qachon noma'lumlar kam va baholanadigan funksiya ko'p bo'lsa, uni shunday holatda qo'llash kerak. Unda teskari matritsa topib, har qanday funktsiyani baholash oson. Bunday holat fotogrammetriyada ko'p bo'ladi. Juda katta sonli noma'lumlarda matritsani teskarilash ancha qiyin masala va (15.33) formulani qo'llash foydasiz bo'ladi. Bunday holatda teskari vaznni hisoblash, pastda bayon qilinadigan qo'shimcha grafa usulida bajariladi.

6. Funksiya vaznini qo'shimcha grafada hisoblash

Vazn koeffitsiyentlarining simmetrikligini hisobga olib, (15.33) formulani quyidagi tarzda ko'chirib yozamiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} &= F_1 F_1 Q_{11} + F_1 F_2 Q_{12} + F_1 F_3 Q_{13} + \dots + F_1 F_k Q_{1k} + \\ &+ F_2 F_1 Q_{21} + F_2 F_2 Q_{22} + F_2 F_3 Q_{23} + \dots + F_2 F_k Q_{2k} + \\ &+ F_3 F_1 Q_{31} + F_3 F_2 Q_{32} + F_3 F_3 Q_{33} + \dots + F_3 F_k Q_{3k} + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ F_k F_1 Q_{k1} + F_k F_2 Q_{k2} + F_k F_3 Q_{k3} + \dots + F_k F_k Q_{kk}. \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{P_F} = E_{1F}F_1 + E_{2F}F_2^{(0)} + \dots + E_{kF}F_k^{k-1} \quad (15.37)$$

7. O'lgangan miqdorlarning x'_i tenglashtirilgan qiymati vazni

x'_i miqdorning vazni funksiya vazni kabi olinadi

$$x'_i = f_i(t_1, \dots, t_k).$$

Hamma xususiy hosilalar bizga ma'lum bo'lganligi uchun hisoblashlar osonlashadi: $F_{ij} = a_{ij}$

8. t_j noma'lumlarning vaznini qo'shimcha grafada hisoblash

Tenglikni yozamiz

$$t_j = F(t_1, \dots, t_j, \dots, t_k),$$

bunda

$$F_1 = F_2 = \dots = F_{j-1} = 0,$$

$$F_j = 1$$

$$F_{j+1} = F_{j+2} = \dots = F_k = 0.$$

Bundan shunday qoida chiqadi: noma'lumlarning teskari vaznini hisoblash uchun qo'shimcha grafadagi asosiy sistemaning j - chi tenglamasi qatoriga $F_j = -1$ ko'chirib yoziladi va keyinchalik funksiyaning teskari vaznini olgandek bajariladi.

9. Aniqlikni baholash

Qandaydir y tenglashtirilgan miqdorning vaznini topgandan keyin, uning o'rta kvadratik xatosi quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi

$$M_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}},$$

bunda μ — vazn birligidagi xatolik.

Y miqdorning haqiqiy qiymati uchun ishonchli oraliqni formula bo'yicha topamiz

$$Y = y \pm tM_y,$$

bunda t koeffitsiyent, vazn birligidagi xatolikni topish uchun foydalanilgan qabul qilingan ishonchli ehtimollikka, taqsimlanish qonuniga va "ko'rsatgich darajasi" soniga, ya'ni ortiqcha o'lgashlar soniga yoki mustaqil haqiqiy xatoliklar soniga bog'liq. Vazn birligidagi xatolikni tenglashtirish natijasi bo'yicha olinish majburiy emasligini hisobga olish kerak. U boshqa yo'llar bilan ham olinish mumkin.

O'lchashlarning oldin bajarilgan katta materiallarni qayta ishlash yoki maxsus qo'yilgan eksperiment materiallari bo'yicha. Ishlab chiqarish materiallarini (u katta bo'lsa) tahlil qilish doimo eng ishonchli natija beradi.

15.2. FUNKSIYALAR VAZNLARINI KORRELAT USULIDA TENGLASHTIRISHDA HISOBLASH

Korrelat usulida, huddi parametrik usuldagidek har qanday miqdorning aniqligini baholash uchun uni o'lchash natijalari ko'rinishida $F = F(x_1, \dots, x_n)$, taqdim qilish kerak. Keyinchalik o'lchash xatoliklari nazariyasi formulasi qo'llaniladi.

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_\Phi} = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{1}{P} \right]$$

Kerakli formulalarni keltirib chiqarish ketma-ketligini shunday qilamiz:

1) funksiya chiziqlashtiriladi;

2) v tuzatma korrelat orqali ifodalanadi, keyinchalik F miqdor o'lchash natijalari funksiyasi tarzida beriladi va korrelat, ya'ni

$$F = \psi(x_1, \dots, x_n, k_1, \dots, k_r);$$

3) maxsus tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlari teskari matritsasi elementlari yordamida ψ funksiya $x_1, \dots, x_n$ qiymatli va W bog'lanmaslik xatoligi ko'rinishidagi funksiyaga o'zgartiriladi. Chunki bular o'lchash natijalarini funksiyasidir.

Shunday qilib, qo'yilgan masala quyidagicha yechiladi.

Masalani yechishga kirishamiz.

O'lchangan miqdorlarning tenglashtirilgan qiymati funksiyasi berilgan bo'lsin, ya'ni $F(x'_1, \dots, x'_n)$ va uning aniqligini baholash talab qilinsin.

Chunki $x'_i = x_i + v_i$ ($i = 1, \dots, n$), unda

$$F(x'_1, \dots, x'_n) = F(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n).$$

Funksiyani Teylor qatoriga yoyib (ajratib), topamiz

$$F(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = F(x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial F}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} v_n + R,$$

bunda R — yoyishning hamma hadlari yig'indisi, chiziqlidan boshqa.

R qiymatni e'tiborga olmay va belgilash kiritib

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = F_i (i = 1, \dots, n),$$

olamiz

natijalari funksiyasini topamiz. Lekin bunday yo'l juda qiyin va amaliyotda qo'llanib bo'lmaydigan. Amaliyotda qo'llanib bo'ladigan eng oson yechim ham bor. Bu yechim teskari vaznni qo'shimcha grafada yechish o'z ichiga oladi.

Bu usulni ko'rib chiqamiz.

1. Qo'shimcha grafada funktsiya vaznini hisoblash

(15.45) hisobga olib, (15.42) tenglikni quyidagicha yozamiz

$$F(x'_1, \dots, x'_n) = F(x_1, \dots, x_n) + \rho_1 W_1 + \dots + \rho_r W_r,$$

yoki

$$F(x'_1, \dots, x'_n) = F(x_1, \dots, x_n) + \rho_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \rho_r \varphi_r(x_1, \dots, x_n) = \\ = \Phi(x_1, \dots, x_n).$$

(15.47)

Endi ega bo'lamiz

$$\frac{1}{P_f} = \frac{1}{P_\Phi} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{P_i}$$

yoki, belgilab

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

va $\frac{1}{P} = q$ ekanligini hisobga olib, topamiz

$$\frac{1}{P_f} = [q\Phi^2]. \quad (15.48)$$

$\Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n)$ ning xususiy hosilasini topib, (15.47) e'tiborga olib

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \dots + \rho_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i},$$

$$\Phi_i = a_{i1} \rho_1 + \dots + a_{ir} \rho_r + F_i. \quad (15.49)$$

$\frac{1}{P_f} = [q\Phi^2]$ qidirilayotgan miqdorni topish uchun (15.49) hamma tenglikni $q_i F_i$

$(i = 1, \dots, n)$ ga ko'paytiramiz va keyin ularni yig'amiz.

$$[qF^2] = [qa_1 F] \rho_1 + \dots + [qa_r F] \rho_r + [qFF]. \quad (15.50)$$

(15.50) tenglikdagi $\rho_1, \dots, \rho_r$ ni ko'effitsiyentlarni topamiz. Buning uchun yana (15.49) tenglikdan foydalanamiz,

$$[qa_i \Phi] = [qa_i a_1] \rho_1 + \dots + [qa_i a_r] \rho_r + [qa_i F];$$

$$[qa_i \Phi] = [qa_i a_1] \rho_1 + \dots + [qa_i a_r] \rho_r + [qa_i F].$$

Lekin (15.46) tenglikdan, oxirgi tenglikning o'ng tomoni nolga tengligi ko'rinib turibdi. Shuning uchun bu tengliklarning chap qismi ham nolga teng, ya'ni

yoziyadi

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} (i = 1, \dots, n)$$

Normal tenglamalar koeffitsiyentlarni hisoblash bilan yo'lma-yo'l $[qa_1F]$, $[qa_2F]$, ..., $[qa_nF]$ va $[qFF]$ qiymatlar ham hisoblanadi.

Normal tenglamalarni yechish sxemasida ham qo'shimcha F grafa qilinadi. Bunga $[qa_1F]$, ..., $[qa_nF]$ qiymatlar $N_1, \dots, N_n$ qatorga va pastga $[qFF]$ qiymatlar ko'chiriladi. Bu grafada ham W grafadagiga o'xshash yechish jarayonida o'zgartishlar bajariladi.

Hamma o'zgartirishlarni tugatgandan keyin teskari vazn, E qatorning F grafa bilan kesishgan joydagi sonlar ustidagi, $[qFF]$ qiymatlarning algebraik yig'indisi va sonlar ko'paytmasi kabi olinadi

Qo'shimcha grafa sonlari funksiyaning baholanadigan soniga teng bo'lishi kerakligi aniq.

Yuqoridagi ta'riflangan qoidani yana quyidagi tarzda algebraik o'xshashlik bo'yicha olish mumkin.

(15.49) tenglikni tuzatmalar parametrik tenglamalari bilan taqqoslaymiz

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{in}\tau_n + l_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

(15.46) normal tenglamani τ noma'lumlar uchun normal tenglama bilan

$$[pa_1a_1]\tau_1 + \dots + [pa_1a_n]\tau_n + [pa_1l] = 0,$$

$$[pa_2a_1]\tau_1 + \dots + [pa_2a_n]\tau_n + [pa_2l] = 0,$$

$\frac{1}{p_F} = [q\Phi^2]$ qiymat huddi shunday $[pv^2]$ qiymat kabi algebraik ma'noga ega. $[pv^2]$

qiymat qanday qoida bo'yicha olingan bo'lsa $\frac{1}{p_F} = [q\Phi^2]$ qiymat ham huddi shunday

koeffitsiyent jadvalining l grafasi va normal tenglamalarni yechish sxemasining L grafasi yordamida olinadi. Buning uchun shartli tenglamalar jadvaliga F grafa va korreilat normal tenglamalarin yechish sxemasiga qo'shimcha F grafa kiritiladi. Bunda l_i xususiy hosila F_i rolini, p_i esa teskari vazn o'mini oladi: $q_i = \frac{1}{p_i}$.

2. O'Ichangan miqdorning tenglashtirilgan qiymatining vazni

Quyidagi tenglamani yozib

$$x'_i = F(x'_1, \dots, x'_n),$$

yechimni topamiz.

Madomiki bu holatda $F_1 = F_2 = \dots = F_{i-1} = 0$;

$$F_i = 1; \quad F_{i+1} = F_{i+2} = \dots = F_n = 0,$$

yechimni quyidagicha qoida ko'rinishda ifodalash mumkin: tenglashtirilgan va x'_i miqdor teskari vaznini topish uchun koeffitsiyentlar jadvaliga qo'shimcha grafa kiritilib bunga i - chi qatorga $+1$ ko'chirib yoziladi. Keyinchalik funksiyaning teskari vaznini hisoblash kabi bajariladi.

16. TENGLASHTIRISHNING BOSHQA KO'RINISHDAGI USULLARI

SHARTLI TENGLAMALARNI YECHISHNING GURUHLI USULLARI

Quyidagi nom bilan atalgan korrelat usuli tenglashtirishning to'rtta ko'rinishini ko'rib o'tamiz: 1) Gaussning ikki guruhli usuli, 2) Gaussning yaqinlashtirish usuli, 3) Kryuger usuli, 4) Bol'ts usuli.

Bu to'rt usullardan geodezik ishlar amaliyotida faqat ikkinchi va uchinchi usul qo'llaniladi. Birinchi faqat uchinchi va to'rtinchi usullarni asoslash uchun kerak. To'rtinchi usul esa, qandaydir tadqiqot va eksperimentlarda ahamiyatga ega. Ishlab chiqarishda hozirgi vaqtda bu usul qo'llanilmaydi.

Aytilganlarni hisobga olib, tenglashtirishning faqat ikkinchi va uchinchi usullariga misol keltiramiz. Birinchi va to'rtinchi usullarga qolganda faqatgina ularning nazariyasini keltirish bilan chegaralanamiz.

16.1. Gaussning ikki guruhli usuli.

Bu usul quyidagilardan iborat. Shartli tenglamalar $[pv^2]$ — min sharti bilan ikki guruhga ajratiladi. Boshlab birinchi guruh tenglamalari yechiladi, birinchi tuzatmalar topiladi va ularni o'lchangan miqdorga kiritiladi. Tuzatmaning oxirgi qiymati ularning yig'indisi olinadi

$$v_i = v_i' + v_i'' \quad (16.1)$$

bunda v_i' — ikkinchi tuzatma, buni topish uchun hamma berilgan shartli tenglamalar sistemasi birgalikda $[pv_i'^2] = \min$ sharti bilan yechiladi. Bunda II guruh tenglamalarning ozod hadlari v_i' birinchi tuzatma bilan to'g'rilangan natija bilan hisoblanadi. To'g'rilangan o'lchash natijalari birinchi guruh ozod hadlari baribir nolga teng bo'ladi.

Bunday qatorning to'g'riligini to'rtta shartli tenglama misolida ko'rsatamiz. Bunda tenglamalar ikkitadan ikki guruhga bo'lingan.

$$\begin{cases} [a_1 v] + W_1 = 0 \\ [a_2 v] + W_2 = 0 \\ [a_3 v] + W_3 = 0 \\ [a_4 v] + W_4 = 0 \end{cases} \quad (16.2)$$

(16.3)

v_i tuzatmani korrelat orqali ifodalaymiz. Ya'ni, (16.2) va (16) hamma tenglamalarni birgalikda yechib, tuzatmalar korrelat tenglamalarini yozamiz.

$$v_i = \frac{a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4}{p_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (16.4)$$

Endi I guruh tenglamani alohida $[pv^2] = \min$ shart bilan yechamiz va bu yechimdan v_i^2 birinchi tuzatmalarni topamiz. Alohida yechiladigan guruh tenglamalari korrelatlarini k_1^0 va k_2^0 orqali belgilab yozamiz.

$$v_i' = \frac{a_{i1}k_1^0 + a_{i2}k_2^0}{p_i}. \quad (16.5)$$

k_1 va k_2 korrelatlarni k_1^0, k_2^0 taxminiy qiymatlar orqali ifodalab va ularga tuzatmani

$$k_1 = k_1^0 + \delta k_1,$$

$$k_2 = k_2^0 + \delta k_2$$

va bu ifodalarni (VIII.4) formulaga qo'yib topamiz.

$$v_i = \frac{a_{i1}k_1^0 + a_{i2}k_2^0}{p_i} + \frac{a_{i1}\delta k_1 + a_{i2}\delta k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4}{p_i},$$

yoki (16.5) ifodani hisobga olganda

$$v_i'' = \frac{a_{i1}\delta k_1 + a_{i2}\delta k_2 + a_{i3}k_3 + a_{i4}k_4}{p_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (16.6)$$

v_i'' ikkinchi tuzatmani topish uchun $\delta k_1, \delta k_2, k_3$ va k_4 noma'lumli korrelatli normal tenglamalarni yechish kerak. Bu normal tenglamalar koeffitsiyentlar matritsasi I va II guruh tenglamalarniki qanday bo'lsa shunday bo'ladi. Lekin ozod hadlari farq qiladi: I guruh tenglamalarda ular nolga teng bo'ladi, II guruh tenglamalarida esa qandaydir bizga hali noma'lum W_3' va W_4' qiymatlar. Shunday qilib

$$\left. \begin{aligned} & [qa_1a_1]\delta k_1 + [qa_1a_2]\delta k_2 + [qa_1a_3]k_3 + [qa_1a_4]k_4 + \\ & + ([qa_1a_1]k_1^0 + [qa_1a_2]k_2^0 + W_1) = 0 \\ & [qa_2a_1]\delta k_1 + [qa_2a_2]\delta k_2 + [qa_2a_3]k_3 + [qa_2a_4]k_4 + \\ & + ([qa_2a_1]k_1^0 + [qa_2a_2]k_2^0 + W_2) = 0 \\ & [qa_3a_1]\delta k_1 + [qa_3a_2]\delta k_2 + [qa_3a_3]k_3 + [qa_3a_4]k_4 + \\ & + ([qa_3a_1]k_1^0 + [qa_3a_2]k_2^0 + W_3) = 0 \\ & [qa_4a_1]\delta k_1 + [qa_4a_2]\delta k_2 + [qa_4a_3]k_3 + [qa_4a_4]k_4 + \\ & + ([qa_4a_1]k_1^0 + [qa_4a_2]k_2^0 + W_4) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

(16.5) ga asosan (16.7) birinchi ikki tenglamaning ozod hadlari (aylana qavs ichidagi) nolga teng ekanligi ko'rinib turibdi. Endi (16.7) oxirgi ikki tenglamaning ozod hadlarini qarab chiqamiz. Bu ozod hadlarni birinchi tenglashtirishdan keyin to'g'rilangan o'lchash natijalaridan foydalanib olish kabi topish mumkin. Uchinchi

tenglamaning bog'lanmaslik xatoligini W_3' orqali belgilab va uni yuqorida ko'rsatilgan yo'l bilan yechamiz

$$W_3' = \varphi_3(x_1 + v_1', \dots, x_n + v_n') \quad (16.8)$$

Bu funksiyani qatorga yoyib va yoyishning chiziqli hadlari bilan chegaralanib, topamiz

$$W_3' = \varphi_3(x_1 + v_1', \dots, x_n + v_n') = \varphi_3(x_1, \dots, x_n + v_n') + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} v_1' + \dots + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_n} v_n' = W_3 + a_{13}v_1' + a_{23}v_2' + \dots + a_{n3}v_n'$$

$$\text{ya'ni} \quad W_3' = W_3 + [a_3 v'] \quad (16.9)$$

(16.5) tenglamadan $[a_3 v']$ qiymatni olamiz

$$v_i' = q_i a_{i1} k_1^0 + q_i a_{i2} k_2^0 \quad (i = 1, \dots, n), \\ [a_3 v'] = [q a_1 a_3] k_1^0 + [q a_2 a_3] k_2^0.$$

Endi (16.9) ko'rinishga keladi

$$W_3' = [q a_1 a_3] k_1^0 + [q a_2 a_3] k_2^0 + W_3$$

ya'ni (16.7) sistema uchinchi tenglamasining ozod hadi (16.8) formula bo'yicha topiladi. Biz shuni isbotlashimiz kerak edi. Xuddi shunday qilib to'rtinchisini ham topamiz

$$W_4' = \varphi_4(x_1 + v_1', \dots, x_n + v_n') \quad (16.10)$$

Shunday qilib Gaussning ikki guruh usulida v_i tuzatmani quyidagi yig'indi kabi topish mumkin

$$v_i = v_i' + v_i'',$$

bunda v_i' birinchi tuzatma (16.2) shartli tenglamalar sistemasini yechishdan olinadigan, v_i'' — (16.6) formula bo'yicha, bunda δx_1 , δx_2 , k_3 va k_4 normal tenglamalar sistemasidan topiladi

$$\left. \begin{aligned} [q a_1 a_1] \delta x_1 + [q a_1 a_2] \delta x_2 + [q a_1 a_3] k_3 + [q a_1 a_4] k_4 &= 0 \\ [q a_2 a_1] \delta x_1 + [q a_2 a_2] \delta x_2 + [q a_2 a_3] k_3 + [q a_2 a_4] k_4 &= 0 \\ [q a_3 a_1] \delta x_1 + [q a_3 a_2] \delta x_2 + [q a_3 a_3] k_3 + [q a_3 a_4] k_4 + W_3' &= 0 \\ [q a_4 a_1] \delta x_1 + [q a_4 a_2] \delta x_2 + [q a_4 a_3] k_3 + [q a_4 a_4] k_4 + W_4' &= 0 \end{aligned} \right\},$$

Ozod hadlari W_3' va W_4' esa shartli tenglamalardan, birinchi tuzatma bilan to'g'rilangan o'lchash natijalaridan foydalanib (16.8) va (16.10) formula bo'yicha topiladi.

Shunday qilib, ikki guruh usulning to'g'riligi isbotlandi. Bu usul odatdagi

usullarga qaraganda shunday hollarda foydasi borki, I guruh shartli tenglamalari mustaqil tenglamalarga bo'linsa. Unda ular oson yechiladi. Unda korrelat normal tenglamalarini yechish sxemasining W grafasi hisoblari yengillashadi.

Mavzuning boshida aytilganidek, Gaussning ikki guruhli usuli pastda ko'rsatiladigan yaqinlashtirish usuli bilan Kryuger usulini asoslash uchun kerak.

16.2. Gaussning yaqinlashtirish usuli

Yuqoridagi qaralgan usuldan kelib chiqib, shartli tenglamalarni yechish uchun Gauss yaqinlashtirish usulini taklif qildi. Ikkinchi guruh usulida oldin alohida (VII 1.2) guruh tenglamalari yechiladi va birinchi v_1 tuzatma topiladi. Keyin shartli tenglamalarni birgalikda yechishdan v_1 ikkinchi tuzatma topiladi:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I - guruh} \\ \left. \begin{array}{l} [a_1 v] = 0 \\ [a_2 v] = 0 \end{array} \right\} \\ \text{II - guruh} \\ \left. \begin{array}{l} [a_3 v] + W_3 = 0 \\ [a_4 v] + W_4 = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\}, \quad (16.11)$$

bunda W_3 va W_4 (16.8) va (16.11) formula bilan yechilgan.

(16.11) Shartli tenglamalar sistemasini boshlang'ich deb qarab, unga Gaussning ikki guruhli usulini qo'llaymiz. Chunki (16.11) tenglamalarning I guruhidagi ozod hadlari nollar, bu tenglamalarni alohida yechish hech qanday o'lchamlarga tuzatma keltirmaydi. Shuning uchun oldin alohida II guruh (16.11) tenglamalari yechiladi, yani tenglamalar

$$\left. \begin{array}{l} [a_3 v] + W_3 = 0 \\ [a_4 v] + W_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Natijada uchinchi tuzatmani olamiz. Bu tuzatmalarni kiritgandan keyin W_1 va W_2 , bog'lanmaslik xatoliklari paydo bo'ladi. Lekin W_3 va W_4 bog'lanmaslik xatoliklari yo'qoladi.

Bu hisoblash jarayonini davom ettirib, shartli tenglamalar guruhlarini navbatma - navbat yechib, sekin - sekin bog'lanmaslik xatoligini kamaytiramiz. Hamma bog'lanmaslik xatolarini yo'qotgandan keyin berilgan shartli tenglamalar sistemasini yechish tugatiladi. Chunki yaqinlashtirish jarayonda har bir yechilayotgan tenglamalar sistemasi oldingilarga teng va topilayotgan tuzatmaning qiymati aniqlanadi va yaqinlashtirishda olingan taxminiy v_1, v_2, v_3 tuzatmalar har bir o'lchangan x_i miqdorga v_i yig'indisini beradi. Ya'ni $v_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i^{(s)}$, bunda s — yaqinlashtirish soni, bunda hamma bog'lanmaslik xatoliklari yo'qotiladi. 16.1 bandida berilgan yaqinlashtirish jarayonining mosligi

isbotlangan.

Har bir ikki guruh tenglamadan o'z navbatida yechish uchun yana ikkita guruhga bo'lish mumkin va umuman shartli tenglamalarni xohlagan guruh soniga bo'lish mumkin. Eng foydali bo'lish bu tenglamalarning mustaqil ajralishidir.

16.3. Kryuger usuli

Kryuger usuli ham Gaussning yaqinlashtirish usuli kabi ikki guruhli Gauss usulining o'zgartirilganidir. Kryuger usulining mazmuni quyidagidan iborat.

Tuzatmalar shartli tenglamalari ikki guruhga bo'linadi, tenglashtirish I guruh tenglamalarini hisobga olib bajariladi va o'lchash natijalari birinchi tuzatmalar bilan tuzatiladi. Keyinchalik to'g'rilangan o'lchash natijalaridan foydalanib II guruh bog'lanmaslik xatoliklari topiladi.

Yo'lma-yo'l normal tenglamalarning I guruhini yechib, qo'shimcha graf yordamida o'tuvchi ko'paytmalar deb ataladigan topiladi. Shu bilan tenglashtirishning birinchi bosqichi tugatiladi. Bunda Gaussning ikki guruhli usulining birinchi bosqichidan faqatgina o'tish ko'paytmalarini topish bilan farq qiladi.

Tenglashtirishning ikkinchi bosqichida o'tish ko'paytmalari yordamida II guruh tuzatmalar shartli tenglamalarining yangi koeffitsiyenti hisoblanadi. Bunda II guruh tenglamalarini yechish bilan chegaralanadi va ikkinchi tuzatmalarining oxirgi qiymati olinadi.

Shunday qilib, Kryuger usulida umumiy normal tenglamalar sistemasi o'miga tenglamalari oz sonli ikkita sistemani yechishga to'g'ri keladi va Gaussning yaqinlashtirish usulidan farqi faqat bir martagina.

Kryuger usulining nazariyasini ko'rib o'tamiz. Ikki guruhga bo'lingan beshta tuzatmalar shartli tenglamasiga egamiz deylik.

I guruh

$$[a_1\vartheta] + W_1 = 0,$$

$$[a_2\vartheta] + W_2 = 0,$$

$$[a_3\vartheta] + W_3 = 0,$$

II guruh

$$[\alpha_1\vartheta] + W_4 = 0,$$

$$[\alpha_2\vartheta] + W_5 = 0,$$

Tenglashtirishning birinchi bosqichidan keyin va o'lchash natijalarini to'g'rilangandan keyin quyidagi tuzatmalar shartli tenglamalari sistemasini yozish mumkin.

$$\begin{aligned} \text{I guruh} \quad & \begin{cases} [a_1 \vartheta''] + W_1 = 0, \\ [a_2 \vartheta''] + W_2 = 0, \\ [a_3 \vartheta''] + W_3 = 0. \end{cases} \\ \text{II guruh} \quad & \begin{cases} [\alpha_1 \vartheta''] + W_4' = 0, \\ [\alpha_2 \vartheta''] + W_5' = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

bunda W_4' va W_5' to'g'rilangan o'lchash natijalari orqali hisoblanadi.

Endi II guruh tuzatmalar shartli tenglamasining koeffitsiyentlari, ya'ni α_{i1}, α_{i2} , yangi koeffitsientlar A_{i1}, A_{i2} ($i = 1, \dots, n$) bilan almashtiramiz. Ular shunday tanlanganki, normal tenglamalarning umumiy sistemasi ikkita mustaqil sistemaga bo'lsin. A koeffitsiyentlar a va α koeffitsiyentlarning chiziqli funksiyasidir.

Deylik o'zgartirish qilingan va quyidagi shartli tenglamalar sistemasi olingan:

$$\begin{aligned} \text{I guruh} \quad & \begin{cases} [a_1 v''] = 0 \\ [a_2 v''] = 0 \\ [a_3 v''] = 0 \end{cases} \\ \text{II - guruh (o'zgartirilgan)} \quad & \begin{cases} [A_1 v''] + W_4' = 0 \\ [A_2 v''] + W_5' = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (16.13)$$

(16.13) shartli tenglamalar asosida normal tenglamalar sistemasini yozish mumkin

$$\left. \begin{aligned} [qa_1 a_1] \bar{x}_1 + [qa_1 a_2] \bar{x}_2 + [qa_1 a_3] \bar{x}_3 + [qa_1 A_4] \bar{k}_4' + [qa_1 A_2] \bar{k}_5' &= 0 \\ [qa_2 a_1] \bar{x}_1 + [qa_2 a_2] \bar{x}_2 + [qa_2 a_3] \bar{x}_3 + [qa_2 A_4] \bar{k}_4' + [qa_2 A_2] \bar{k}_5' &= 0 \\ [qa_3 a_1] \bar{x}_1 + [qa_3 a_2] \bar{x}_2 + [qa_3 a_3] \bar{x}_3 + [qa_3 A_4] \bar{k}_4' + [qa_3 A_2] \bar{k}_5' &= 0 \\ [qa_4 A_1] \bar{x}_1 + [qa_2 A_4] \bar{x}_2 + [qa_3 A_4] \bar{x}_3 + [qA_4 A_4] \bar{k}_4' + [qA_4 A_2] \bar{k}_5' + W_4' &= 0 \\ [qa_1 A_2] \bar{x}_1 + [qa_2 A_2] \bar{x}_2 + [qa_3 A_2] \bar{x}_3 + [qA_4 A_2] \bar{k}_4' + [qA_2 A_2] \bar{k}_5' + W_5' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

(16.14) sistema ikkita mustaqil sistemaga ajralish uchun quyidagi shartni qo'yamiz:

$$\left. \begin{aligned} [qa_1 A_1] &= 0 \\ [qa_2 A_1] &= 0 \\ [qa_3 A_1] &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (16.15)$$

$$\left. \begin{aligned} [qa_1 A_2] &= 0 \\ [qa_2 A_2] &= 0 \\ [qa_3 A_2] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.16)$$

Masalani yechish uchun oltita o'tish ko'paytmasini aniqlash talab qilinishi ko'rinib turibdi, umumiy holda r_1, r_2 ko'paytmalari, bunda r_1 — I guruhdagi tenglamalar soni, r_2 — II guruhdagi tenglamalar soni.

Oltita o'tish ko'paytmalaridan uchitasi A_{i1} koeffitsiyentlarni hisoblash uchun, va uchitasi A_{i2} ($i = 1, \dots, p$) koeffitsiyentlarni hisoblash uchun. A_{i1} koeffitsiyentlar uchun tenglamani yozamiz

$$A_{i1} = a_{i1}\rho_{11} + a_{i2}\rho_{21} + a_{i3}\rho_{31} + \alpha_{i1} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (16.17)$$

bunda ρ — o'tish ko'paytmalari.

(16.17) Tenglamadan har birini mos $q_i a_{i1}$ ga ko'paytirib va ularni yig'ib, topamiz

$$[qa_1 A_1] = [qa_1 a_1] \rho_{11} + [qa_1 a_2] \rho_{21} + [qa_1 a_3] \rho_{31} + [qa_1 \alpha_1].$$

Xuddi shunday a_{i2} va a_{i3} koeffitsiyentlardan foydalanib, topamiz

$$[qa_2 A_1] = [qa_1 a_2] \rho_{11} + [qa_2 a_3] \rho_{21} + [qa_2 a_3] \rho_{31} + [qa_2 \alpha_1],$$

$$[qa_3 A_1] = [qa_1 a_3] \rho_{11} + [qa_2 a_3] \rho_{21} + [qa_3 a_3] \rho_{31} + [qa_3 \alpha_1].$$

(16.15) e'tiborga olib, ρ_{11} , ρ_{21} i ρ_{31} o'tish ko'paytiruvchilarini topish uchun normal sistema tuzamiz. A_{i1} o'zgartirilgan koeffitsienlarni hisoblash uchun

$$\left. \begin{aligned} [qa_1 a_1] \rho_{11} + [qa_1 a_2] \rho_{21} + [qa_1 a_3] \rho_{31} + [qa_1 \alpha_1] &= 0 \\ [qa_2 a_1] \rho_{11} + [qa_2 a_2] \rho_{21} + [qa_2 a_3] \rho_{31} + [qa_2 \alpha_1] &= 0 \\ [qa_3 a_1] \rho_{11} + [qa_3 a_2] \rho_{21} + [qa_3 a_3] \rho_{31} + [qa_3 \alpha_1] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.18)$$

A_{i2} koeffitsiyentlar uchun tenglikni yozamiz

$$A_{i2} = a_{i1}\rho_{21} + a_{i2}\rho_{22} + a_{i3}\rho_{32} + \alpha_{i2} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (16.19)$$

va undan normal tenglamalar sistemasini

$$\left. \begin{aligned} [qa_1 a_1] \rho_{12} + [qa_1 a_2] \rho_{22} + [qa_1 a_3] \rho_{32} + [qa_1 \alpha_2] &= 0 \\ [qa_2 a_1] \rho_{12} + [qa_2 a_2] \rho_{22} + [qa_2 a_3] \rho_{32} + [qa_2 \alpha_2] &= 0 \\ [qa_3 a_1] \rho_{12} + [qa_3 a_2] \rho_{22} + [qa_3 a_3] \rho_{32} + [qa_3 \alpha_2] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.20);$$

(16.18) va (16.20) mustaqil sistemalarni yechishdan mos o'tish ko'paytuvchilarini topib va (16.17), (16.19) tengsizliklar yordamida o'zgarish koeffitsiyentlari A ni hisoblab, (16.15) va (VI.16) shartlarni hisobga olib quyidagi ikkita mustaqil normal tenglamalar sistemasini yozish mumkin.

$$\left. \begin{aligned} [qa_1 a_1] \delta x_1 + [qa_1 a_2] \delta x_2 + [qa_1 a_3] \delta x_3 &= 0 \\ [qa_2 a_1] \delta x_1 + [qa_2 a_2] \delta x_2 + [qa_2 a_3] \delta x_3 &= 0 \\ [qa_3 a_1] \delta x_1 + [qa_3 a_2] \delta x_2 + [qa_3 a_3] \delta x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.21)$$

$$\text{va} \quad \begin{cases} [qA_1A_1]k'_4 + [qA_1A_2]k'_5 + W'_4 = 0 \\ [qA_1A_2]k'_4 + [qA_2A_2]k'_5 + W'_5 = 0 \end{cases}$$

Chunki bir xil (16.21) tenglamalar sistemasi ko'rinarli yechimga ega

$$\delta\kappa_1 = \delta\kappa_2 = \delta\kappa_3 = 0,$$

Tenglashtirishning ikkinchi bosqichida faqat (16.22) tenglamalar sistemasini yechishga to'g'ri keladi. Bu usulning qat'iyligini isbotlaydi.

(16.18) va (16.20) tenglamalar sistemasini ko'rib chiqib, I guruh korreilat normal tenglamalar sistemasidan faqat ozod hadi bilan farq qilishini ko'rish qiyin emas. Shuning uchun ρ_{11} , ρ_{21} , ρ_{31} i ρ_{12} , ρ_{22} va ρ_{32} r_{32} o'tish ko'paytuvchilarini ikkita qo'shimcha graf va ikkita "tepalik" (umumiy holda — r_2 qo'shimcha graf va «tepalik» yordamida) yordamida yo'lma-yo'l I guruh korreilat normal tenglamalar yechish yo'li bilan hisoblash mumkin. Bundan I guruh tenglamalari yetarli oson yechilganda Kryuger usulining qo'llash foydali ekanligi ko'rinib turibdi. Guruh shartli tenglamalar bir-biri bilan mustaqil bo'lsa bu usulni qo'llash juda foydali.

Kryuger usuli bilan tenglashtirish tartibi quyidagida iborat:

1) I guruh shartli tenglamalar yechiladi, v' birinchi tuzatmalar olinadi va o'lchash natijalari to'g'rilanadi, I guruh normal tenglamalarini yo'lma-yo'l yechishda qo'shimcha graf yordamida o'tish ko'paytuvchilari topiladi;

2) to'g'rilangan o'lchash natijalari bilan II guruhning W' bog'lanmaslik xatoligi hisoblanadi, (16.17) va (16.19) tenglamalar yordamida II guruh shartli tenglamalarining o'zgartirilgan koeffitsiyentlari hisoblanadi va (16.22) normal tenglamaning koeffitsiyentlari hisoblanadi.

3) (16.22) tenglamalar sistemasini yechishdan korreilatlar topiladi va keyinchalik v'' ikkinchi tuzatmalar.

4) oxirgi tuzatma v yig'indi kabi olinadi.

$$v = v' + v''$$

Tenglashtirilgan miqdor funksiyasi vazni Kryuger usulida quyidagi formula bo'yicha hisoblanishini eslatib o'tamiz*.

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_F} = & \left\{ [qFF] - \frac{[qa_1F]}{[qa_1a_1]}[qa_1F] - \frac{[qa_2F \cdot 1]}{[qa_2a_2 \cdot 1]}[qa_2F \cdot 1] - \dots \right\} + \\ & + \left\{ - \frac{[qA_1F]}{[qA_1A_1]}[qA_1F] - \frac{[qA_2F \cdot 1]}{[qA_2A_2 \cdot 1]}[qA_2F \cdot 1] - \dots \right\} = \left(\frac{1}{P_F} \right)' + \left(\frac{1}{P_F} \right)'' \end{aligned} \quad (16.23)$$

Bunda, birinchi figurali qavs ichidagi ifodalar I guruh tenglamalarini yechish jarayonida qo'shimcha F grafa yordamida olinadi, ikkinchi figurali qavs ichidagi ifodalar II guruh tenglamalarini yechishda olinadi.

Guruhlardan har qandayini yechishda ikki guruhli Kryuger usulini qo'llash mumkin. Umuman aytganda, Kryuger usuli ikki guruhli hisoblanmasdan ko'p guruhli hisoblanadi.

16.4. Bol'ts usuli

Bu usulni Kryuger usulining qandaydir revojlantirilgani deb qarash mumkin. Normal tenglamalar koeffitsiyenti matritsasini teskariga aylantirish yordamida yangi bajarilgan o'lchashlarni birgalikda qayta ishlash uchun oldingi tenglashtirishga ulashga imkon beradi. Xususiyl holda yangi geodezik to'rlarni oldingi tenglashtirganlarga ulash mumkin. Bol'ts usulining mazmunini oddiy misolda tushuntiramiz.

O'lchangan miqdorlar shartli tenglamalar bilan bog'langan deylik

$$\left. \begin{aligned} [a_1 v] + W_1 &= 0 \\ [a_2 v] + W_2 &= 0 \\ [a_3 v] + W_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.24)$$

O'lchangan miqdorlar soni, birgalikda tenglashtiriladigan bor bo'lgan miqdorlar bilan, oshadi. Natijada eski va yangi o'lchashlarning bir-biri bilan bog'liq bo'lgan yangi shartli tenglama hosil bo'ladi. Bunday hol bir necha marta bo'lishi mumkin.

Keyingi qayta tenglashtirishning kerakligini hisobga olib quyidagicha kirishish mumkin.

Birinci tenglashtirishda faqat I guruh shartlarini hisobga oluvchi, ya'ni (16.24), shu guruhning korrelat normal tenglamalarining teskari matritsasi hisoblanadi.

Keyin I guruhning korrelati ma'lum formula bo'yicha hisoblanadi

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -Q_{11}W_1 - Q_{12}W_2 - Q_{13}W_3 \\ k_2 &= -Q_{21}W_1 - Q_{22}W_2 - Q_{23}W_3 \\ k_3 &= -Q_{31}W_1 - Q_{32}W_2 - Q_{33}W_3 \end{aligned} \right\} \quad (16.25)$$

bunda Q — teskari matritsa elementlari.

Agar endi yangi shartli tenglamalar paydo bo'lsa

$$\left. \begin{aligned} [a_4 v] + W_4 &= 0 \\ [a_5 v] + W_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.26)$$

oldingi olingan teskari matritsa elementlaridan foydalanib yangi shartli tenglamalar koeffitsiyentlarining Kryugerning o'zgartirilgan o'tish ko'paytuvchilarini quyidagi formula bo'yicha hisoblash mumkin.

$$\left. \begin{aligned} \rho_{14} &= -Q_{11}[a_1 a_4] - Q_{12}[a_2 a_4] - Q_{13}[a_3 a_4] \\ \rho_{24} &= -Q_{21}[a_1 a_4] - Q_{22}[a_2 a_4] - Q_{23}[a_3 a_4] \\ \rho_{34} &= -Q_{31}[a_1 a_4] - Q_{32}[a_2 a_4] - Q_{33}[a_3 a_4] \\ \rho_{15} &= -Q_{11}[a_1 a_5] - Q_{12}[a_2 a_5] - Q_{13}[a_3 a_5] \\ \rho_{25} &= -Q_{21}[a_1 a_5] - Q_{22}[a_2 a_5] - Q_{23}[a_3 a_5] \\ \rho_{35} &= -Q_{31}[a_1 a_5] - Q_{32}[a_2 a_5] - Q_{33}[a_3 a_5] \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII } 1.27)$$

va o'zgartirilgan koeffitsiyentlari

O'zgartirilgan shartli tenglamalar sistemasini yechib

o'z navbatida, u orqali korrelyatsiyani hisoblash mumkin bo'lgan, mos teskari matritsa elementlarini olamiz

Keyingilarida paydo bo'ladigan, shartli tenglamalarni o'zgartirish uchun o'tish ko'paytuvchilarini olamiz

$$\left. \begin{aligned} [a_6 v] + W_6 &= 0 \\ [a_7 v] + W_7 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (16.30)$$

I guruhning III guruh bilan bog'langan oltita o'tish ko'paytuvchilari olinadi.

Keyin boshlab III guruh shartli tenglamaning o'zgartirilgan koeffitsiyentlar va ozod hadlar formula bo'yicha topiladi.

Keyinchalik o'tish ko'paytuvchilari hisoblanadi

$$\left. \begin{aligned} \rho_{46} &= -Q_{44}[A_4 A_6] - Q_{45}[A_5 A_6] \\ \rho_{56} &= -Q_{54}[A_4 A_6] - Q_{55}[A_5 A_6] \\ \rho_{47} &= -Q_{44}[A_4 A_7] - Q_{45}[A_5 A_7] \\ \rho_{57} &= -Q_{54}[A_4 A_7] - Q_{55}[A_5 A_7] \end{aligned} \right\} \quad (16.32)$$

va, oxirida, ikkinchi o'zgartirilgan koeffitsiyentlar va ozod hadlar formula bo'yicha topiladi

$$A'_{i6} = A_{i4}\rho_{46} + A_{i5}\rho_{56} + A_{i6}, \quad (i=1, \dots, n),$$

$$W'_6 = W_4\rho_{45} + W_5\rho_{56} + W'_6,$$

$$A'_{i7} = a_{i4}\rho_{47} + a_{i5}\rho_{57} + A_{i7} \quad (i=1, \dots, n),$$

$$W'_7 = W_4\rho_{47} + W_5\rho_{57} + W'_7.$$

Keyinchalik navbatdagi normal tenglamalar sistemasini yechib, uning teskari matritsasi va keyin korrelati topiladi.

$$\left. \begin{aligned} k_6 &= -Q_{66}W'_6 - Q_{67}W'_7 \\ k_7 &= -Q_{67}W'_6 - Q_{77}W'_7 \end{aligned} \right\} \quad (16.33)$$

va keyingi o'zgartirishlar bajariladi.

O'lchangan miqdorlarga tuzatmalar qiymati quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi.

$$v_i = a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + a_{i3}k_3 + A_{i4}k_4 + A_{i5}k_5 + A'_{i6}k_6 + A'_{i7}k_7 + \dots (i=1, \dots, n).$$

Oxirgi formulaga (VII.25), (16.29) va (16.33) ifodalardan korrelat qiymatlarini qo'yib, shartli tenglamalarning ozod hadlari bo'yicha chiziqli yoyilgan ko'rinishdagi tuzatma uchun formulani olamiz.

Yangi paydo bo'ladigan shartli tenglamalarni e'tiborga olish uchun (yangi o'lchashlar bilan aloqador), oldin hisoblangan normal tenglamalarning teskari matritsasi elementlaridan foydalanib ular o'zgartiriladi. Keyinchalik yangi normal tenglamalar sistemasini yechish jarayonida teskari matritsa elementlari topiladi. Bundan keyin ozod hadlar bo'yicha v tuzatmalar yoyishining qo'shimcha hadlari hisoblanadi.

Bol'ts usuli geodezik amaliyotning qandaydir xususiy va kamdan-kam hollarida foydalaniladi.

17. TENGLASHTIRISHNING KOMBINATSIYALANGAN (BIRGALIKDAGI) USULLARI

17.1 Ortiqcha noma'lumli parametrik usul

Ko'pgina hollarda o'lchangan miqdorlarni va faqat kerakli noma'lumlar orqali ifodalash mumkin, balki noma'lumlar orqali yoki kerakliidan ortiqcha orqali ifodalash mumkin, ya'ni **ortiqcha noma'lumlar** orqali. Ortiqcha noma'lumlar kerakli noma'lumlar bilan matematik bog'liqlikka ega. Bunday hollarda tenglashtirish uchun **ortiqcha noma'lumli parametrik usulni** qo'llash mumkin. Bu usulni odatdagi parametrik usulning bir ko'rinishi deb qarash mumkin.

Bu usulning nazariyasini ko'rib o'tamiz. Noma'lumlar sifatida miqdor tanlangan deylik. Ular bir-biri bilan uchta bir-biridan mustaqil tenglama bilan bog'liq.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_A(t_1, \dots, t_k) &= 0 \\ \varphi_B(t_1, \dots, t_k) &= 0 \\ \varphi_C(t_1, \dots, t_k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.34)$$

Bunda o'lchangan miqdorlarning $x_1, \dots, x_n$ tenglashtirilgan qiymati noma'lumlar funksiyasi ko'rinishida ifodalanadi

$$x_i = f_i(t_1, \dots, t_k) \quad (i = 1, \dots, n)^{**} \quad (17.35)$$

Noma'lumlarning $t_1^0, \dots, t_k^0$ taxminiy qiymatini tanlab tuzatmalar parametrik tenglamalar sistemasini topamiz

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (17.36)$$

Bunda τ noma'lumlar tenglamalar bilan bog'langan:

$$\left. \begin{aligned} [A\tau] + W_A &= 0 \\ [B\tau] + W_B &= 0 \\ [C\tau] + W_C &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.37)$$

Bu yerda kerakli miqdorlar soni $k - 3$ ga tengligi tushunarli.

(VIII.36) va (VIII.37) Tengliklarda quyidagi belgilashlar ko'zda tutilgan:

$$t = t_0 + \tau; \quad a_{i1} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_1} \right)_0, \quad a_{i2} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_2} \right)_0, \dots,$$

$$a_{ik} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_k} \right)_0;$$

$l_i = f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i$; x_i — miqdorlarning o'lchangan qiymatlari;

$$A_i = \left(\frac{\partial \varphi_A}{\partial t_i} \right)_0, \quad B_i = \left(\frac{\partial \varphi_B}{\partial t_i} \right)_0, \quad C_i = \left(\frac{\partial \varphi_C}{\partial t_i} \right)_0,$$

$$W_A = \varphi_A(t_1^0, \dots, t_k^0), \quad W_B = \varphi_B(t_1^0, \dots, t_k^0), \quad W_C = \varphi_C(t_1^0, \dots, t_k^0),$$

Lagranj funksiyasi ko'rinishni oladi

$$\Phi(\tau_1, \dots, \tau_k) = [p(a_1\tau_1 + a_2\tau_2 + \dots + a_k\tau_k + l)^2] + \\ + 2k_A([A\tau] + W_A) + 2k_B([B\tau] + W_B) + 2k_C([C\tau] + W_C),$$

bunda k — noaniq ko'paytuvchilar.

F funksiyaning xususiy hosilasini olamiz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_1} = 2[p a_1 v] + 2k_A A_1 + 2k_B B_1 + 2k_C C_1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_k} = 2[p a_k v] + 2k_A A_k + 2k_B B_k + 2k_C C_k.$$

Chunki Lagranj funksiyasining xususiy hosilalari nolga teng bo'lishi kerak, 2 ga bo'lgandan keyin topamiz

$$\left. \begin{aligned} [p a_1 v] &= A_1 k_A + B_1 k_B + C_1 k_C = 0 \\ [p a_2 v] &= A_2 k_A + B_2 k_B + C_2 k_C = 0 \\ &\dots \\ [p a_k v] &= A_k k_A + B_k k_B + C_k k_C = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.38)$$

(17.38) tenglikka v ning o'rniga (17.36) tuzatmalar tenglamasining o'ng tomonini qo'yib va olingan tenglikka (17.37) shartli tenglamalarni ulab $(k+3)$ noma'lumli $(k+3)$ tenglamalar sistemasini olamiz (umumiy holda $k+s$ noma'lumli $k+s$ tenglama, s — noma'lumlar tanlashning shartlar soni):

$$\left. \begin{aligned} [p a_1 a_1] \tau_1 + \dots + [p a_1 a_k] \tau_k + A_1 k_A + B_1 k_B + C_1 k_C + [p a_1 l] &= 0 \\ [p a_2 a_1] \tau_1 + \dots + [p a_2 a_k] \tau_k + A_2 k_A + B_2 k_B + C_2 k_C + [p a_2 l] &= 0 \\ &\dots \\ [p a_k a_1] \tau_1 + \dots + [p a_k a_k] \tau_k + A_k k_A + B_k k_B + C_k k_C + [p a_k l] &= 0 \\ A_1 \tau_1 + \dots + A_k \tau_k + W_A &= 0 \\ B_1 \tau_1 + \dots + B_k \tau_k + W_B &= 0 \\ C_1 \tau_1 + \dots + C_k \tau_k + W_C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Tenglamalar sistemasida koeffitsiyentlar kvadratlil diagonalga nisbatan simmetrikligi saqlanadi va uning davomi. Shuning uchun bu sistema odatda normal tenglamalarni yechadigan har qanday usul bilan yechish mumkin. Faqat yaqinlashtirish usulidan tashqari, bu holda bu usul foydasiz. Jumladan pastda

ko'riladigan Bessel' usul qo'llanilishi mumkin. Normal tenglamalarni yechish uchun birinchi u taklif qilgan ko'rilayotgan ortiqcha noma'lumli parametrik usul uchun.

(17.39) sistemani yechishdan $\tau_1, \dots, \tau_k$, noma'lumlarni olib, $t = t^0 + \tau$ qiymati hisoblanadi va (17.36) tuzatmalar tenglamasidan v tuzatmalar topiladi.

$[pv^2]$ qiymati bu usulda odatdagi qoidaga asosan topiladi: normal tenglamalarni yechishda ozod hadlar grafasidagi eliminatsion qatorlarning o'zidan yuqorida joylashgan sonlarga ko'paytmasining yig'indisi. Buni ko'rsatamiz.

(17.36) tenglikni $p_i v_i$ ga ko'paytirib va natijalarni yig'ib topamiz

$$[pv^2] = [pa_1 v] \tau_1 + [pa_2 v] \tau_2 + \dots + [pa_k v] \tau_k + [plv].$$

(VII 1.38) tenglikni hisobga olib topamiz,

$$[pv^2] = -(A_1 k_A + B_1 k_B + C_1 k_C) \tau_1 - (A_2 k_A + B_2 k_B + C_2 k_C) \tau_2 - \dots - (A_k k_A + B_k k_B + C_k k_C) \tau_k + [plv]$$

Tuzatmalar tenglamasining o'ng tomaniga v o'miga $[plv]$ ni qo'yib va hadlarni guruhlashtirib topamiz

$$[pv^2] = -[A\tau]k_A - [B\tau]k_B - [C\tau]k_C + [pa_1 l]k_1 + [pa_2 l]k_2 + \dots + [pa_k l]k_k + [pll]$$

(17.37) e'tiborga olib, topamiz

$$[pa_1 l] \tau_1 + [pa_2 l] \tau_2 + \dots + [pa_k l] \tau_k + W_A k_A + W_B k_B + W_C k_C + [pll] = [pv^2] \quad (17.40)$$

(17.40) tenglik tekshirish formulasi bo'lib amaliy ahamiyatga ega.

Bu tenglikni oxirgi tenglama sifatida (17.39) tenglamalar sistemasiga qo'shamiz. Yangi sistemaning oxirgi tenglamalar koeffitsiyentlari (17.39) sistemadagi ozod hadlarga teng. Bunda normal tenglamalar sistemasining simmetrikligi saqlanadi. Shuning uchun hamma τ va k noma'lumlarni yo'qotgandan keyin topamiz

$$[pv^2] = [pll]^{(k+3)},$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi. (umumiy holda

$$[pv^2] = [pll]^{(k+s)}).$$

Ko'rilayotgan usulda funksiyaning teskari vazni qo'shimcha grafada parametrik usuldagidek xuddi shunday yo'l bilan topilishi mumkin. Bu yo'lni eslatamiz: normal tenglamalarini yechish sxemaning qo'shimcha F grafasiga minus ishorasi bilan F_i xususiy hosila ko'chirib yoziladi. Keyinchalik shu grafada ozod hadlar grafasidagi o'zgartirishlar bajariladi va oxirida funksiyaning teskari

vazni minus ishora bilan (N_i qatorning F_i) eliminatsion qatorning F grafasi yuqorisidagi songa ko' paytmasining yig'indisi kabi olinadi. Buni ko'rsatamiz.

Teskari matritsaning elementlaridan foydalanib hamma τ noma'lumlarni quyidagi ozod hadlarning chiziqli funksiyasi ko'rinishida ifodalaymiz.

$$\tau_r = -[pa_1]Q_{r1} - [pa_2]Q_{r2} - \dots - [pa_k]Q_{rk} - \\ - W_A Q_{r(k+1)} - W_B Q_{r(k+2)} - W_C Q_{r(k+3)}. \quad (17.41)$$

Yig'indilarni tuzatmalar tenglamalarining ozod hadlari bo'yicha guruhlab, topamiz

$$\tau_r = -[\alpha_1] - W_A Q_{r(k+1)} - W_B Q_{r(k+2)} - W_C Q_{r(k+3)}. \quad (17.42)$$

bunda

$$\alpha_j = p_i (a_{i1}Q_{r1} + a_{i2}Q_{r2} + \dots + a_{ik}Q_{rk}). \quad (17.43)$$

Berilgan usulda ham va odatdagi parametrik usulda ham tenglik to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz

$$\left[\frac{\alpha_r \alpha_j}{p} \right] = Q_{rj}, \quad (17.44)$$

binobarin,

$$\left[\frac{\alpha_r \alpha_r}{p} \right] = Q_{rr}, \quad (17.45)$$

(17.43) tenglikni $\frac{\alpha_{ij}}{p_i}$ ga ko'paytirib va yig'gandan keyin, topamiz

$$\left[\frac{\alpha_r \alpha_j}{p} \right] = [a_1 \alpha_j]Q_{r1} + \dots + [a_j \alpha_j]Q_{rj} + \dots + [a_k \alpha_j]Q_{rk}. \quad (17.46),$$

Yig'indini $[a_1 \alpha_j], \dots, [a_k \alpha_j]$ topamiz. Buning uchun quyidagi tenglikni $a_{j1}, \dots, a_{jk}$ ga ko'paytiramiz

$$\alpha_{ji} = (a_{i1}Q_{j1} + \dots + a_{ik}Q_{jk})p_i$$

ko'paytirishdan keyin har birini yig'indisini olamiz

$$\left. \begin{aligned} [a_1 \alpha_j] &= [pa_1 a_1]Q_{j1} + \dots + [pa_1 a_j]Q_{jj} + \dots + [pa_1 a_k]Q_{jk} \\ [a_j \alpha_j] &= [pa_j a_1]Q_{j1} + \dots + [pa_j a_j]Q_{jj} + \dots + [pa_j a_k]Q_{jk} \\ [a_k \alpha_k] &= [pa_k a_1]Q_{j1} + \dots + [pa_k a_j]Q_{jj} + \dots + [pa_k a_k]Q_{jk} \end{aligned} \right\} \quad (17.47)$$

Teskari matritsaning elementlari uchun normal tenglamalarni e'tiborga olib, (17.49) sistemadan oson olish mumkin. Quyidagicha yozish mumkin¹.

¹ Ma'lum $QN = E$ o'zaro bog'lanishga asosan, bunda E — birlik matritsa.

$$[a_j \alpha_j] = -A_j Q_{j(k+1)} - B_j Q_{j(k+2)} - C_j Q_{j(k+3)};$$

$$[a_j \alpha_j] = 1 - A_j Q_{j(k+1)} - B_j Q_{j(k+2)} - C_j Q_{j(k+3)};$$

$$[a_k \alpha_j] = A_k Q_{j(k+1)} - B_k Q_{j(k+2)} - C_k Q_{j(k+3)}.$$

(17.46) tenglikka $[a_1 \alpha_j], \dots, [a_j \alpha_j], \dots, [a_k \alpha_j]$ o'rniga (17.47) tenglikning o'ng

qismini qo'yib va mos hadlarini guruhlashtirib, topamiz

$$\left[\frac{\alpha_r \alpha_j}{p} \right] = Q_{j^*} - Q_{j(k+1)}(A_1 Q_{r1} + \dots + A_r Q_{rk}) - Q_{j(k+2)}(B_1 Q_{r1} + \dots + B_k Q_{rk}) - Q_{j(k+3)}(C_1 Q_{r1} + \dots + C_k Q_{rk}).$$

Lekin $Q_{r^*} (i=1, \dots, k+3)$ elementlar uchun oxirgi uchta normal tenglamalar sistemasi e'tiborga olsak

$$A_1 Q_{r1} + \dots + A_k Q_{rk} = 0;$$

$$B_1 Q_{r1} + \dots + B_k Q_{rk} = 0;$$

$$C_1 Q_{r1} + \dots + C_k Q_{rk} = 0$$

shuning uchun

$$\left[\frac{\alpha_r \alpha_j}{p} \right] = Q_{j^*},$$

va shuni isbotlash kerak edi.

Bu usulda noma'lumlarning vazni mos kvadratik vazn koeffitsiyentlarga teng ekanligi eslatamiz. Ya'ni

$$\frac{1}{p_F} = \left[\frac{\alpha_r \alpha_r}{p} \right] = Q_{r^*},$$

Agar (17.42) ifodani e'tiborga olsak va W_A , W_B va W_C qiymatlar o'lchash natijalari funksiyasi emasligini hisobga olsak.

Teskari vaznini topish kerak bo'lgan $F(t_1, \dots, t_k)$, noma'lumlar funksiyasi berilgan.

Funksiyani chiziqli ko'rinishga keltirib yozamiz

$$F(t_1, \dots, t_k) = F_0 + F_1 \tau_1 + \dots + F_k \tau_k,$$

Bunda

$$F_0 = F(t_1^0, \dots, t_k^0) \quad \text{va} \quad F_i = \left(\frac{\partial F}{\partial t_i} \right)_0$$

(17.42) Tenglikni e'tiborga olib yozishimiz mumkin

$$F(t_1, \dots, t_k) = F_0 - F_1[a_1 I] - \dots - F_k[a_k I] + R$$

bunda R — o'lchash natijalariga va F_0 qiymatga bog'liq bo'lmagan ozod W_A , W_B i W_c , hadlarning qandaydir funksiyasi.

Agar R o'lchash natijalarning funksiyasi bo'lmasa, funksiyaning teskari vazni uchun bizga ma'lum bo'lgan formula ham to'g'riligicha qoladi.

$$\frac{1}{P_F} = F_1 F_1 Q_{11} + 2 F_1 F_2 Q_{12} + \dots + 2 F_1 F_k Q_{1k} + \\ + F_2 F_2 Q_{22} + \dots + 2 F_2 F_k Q_{2k} + \\ \dots \dots \dots + F_k F_k Q_{kk} \quad (17.48)$$

(17.48) formulada vazn koeffitsiyentlari, (17.39) umumiy normal tenglamalar sistema yordamida aniqlanadigan, hisobga olinadigan va shartli tenglamalar, umumiy sistemaning qismi.

Formula (VII 1.48) ga asosan yozamiz

$$\frac{1}{P_F} = [F\pi] \quad (17.49)$$

bunda

$$\pi_i = F_1 Q_{i1} + F_2 Q_{i2} + \dots + F_k Q_{ik}$$

Chunki $F_{k+1} = F_{k+2} = F_{k+3} = 0$, endi yozish mumkin

$$\pi_i = F_1 Q_{i1} + \dots + F_k Q_{ik} + F_{k+1} Q_{i(k+1)} + F_{k+2} Q_{i(k+2)} + F_{k+3} Q_{i(k+3)} \quad (17.50)$$

(17.50) formulani (17.41) formula bilan, (17.49) formulani (17.40) formula bilan taqqoslab bu usulda qo'shimcha grafada funksiyaning teskari vaznini ma'lum hisoblash qoidasi bilan hisoblash to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qildik. Oxirgi tenglamaning F grafasida N_{k+1} boshlab (ya'ni, W_A , W_B qatorida va h.k.) hamma vaqt nol turishini eslatamiz.

Shunday qilib, ortiqcha noma'lumli parametrik tenglashtirish usulida $[p\nu^2]$ va teskari vaznni hisoblash qoidalari odatdaga parametrik tenglashtirish usulidagidek o'z kuchida qoladi. Faqatgina normal tenglamalari farq qiladi.

Ko'rilayotgan tenglashtirish usulida normal tenglamalar odatdagi tenglashtirish usuliga nisbatan har doim katta bo'ladi. Ikkita bog'langan noma'lumlar sharti soniga. (Har bir kerakli ortiq songa qo'shilgan noma'lum bitta shartli tenglamani beradi).

Ortiqcha noma'lumli parametrik usulini tasavvur qilish uchun 2-misolga qaraymiz. Bu misolda kerakli noma'lumlar sifatida ikkita burchak olingan.

Noma'lum sifatida uchburchakning uchta burchagini olamiz, ya'ni egamiz

$$t_1 = x_1', \quad t_2 = x_2', \quad t_3 = x_3',$$

Bu tenglamalar ko'rinishini soddalashtiradi, tuzatmalar tenglamalarining koeffitsiyentlarini va ozod hadlarini hisoblashni osonlashtiradi. Lekin noma'lumlar soni bittaga ko'payadi va yana bitta shartli tenglama paydo bo'ladi. Natijada

normal tenglamalar soni ikkitaga ortadi. O'lichangan miqdorlar t noma'lumlar orqali quyidagi ko'rinishda ifodalanadi

$$x'_1 = t_1, \quad x'_4 = C \frac{\sin t_1}{\sin t_3},$$

$$x'_2 = t_2, \quad x'_5 = C \frac{\sin t_2}{\sin t_3},$$

$$x'_3 = t_3,$$

Xususiylashtirishning soddallashtirish shartlari.

Tanlangan t noma'lumlarni bog'laydigan shartli tenglamalarni yozamiz,

$$t_1 + t_2 + t_3 - 180^\circ = 0$$

Agar belgilasak

$$l_1^0 = x_1, \quad l_2^0 = x_2, \quad l_3^0 = x_3,$$

unda

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0$$

$$l_4 = C \frac{\sin x_1}{\sin x_3} - x_4;$$

$$l_5 = C \frac{\sin x_2}{\sin x_3} - x_5.$$

Normal tenglamalar ko'rinishini oladi

$$[pa_1a_1]x_1 + [pa_1a_2]x_2 + [pa_1a_3]x_3 + k + [pa_1t] = 0,$$

$$[pa_1a_2]x_1 + [pa_1a_2]x_2 + [pa_2a_3]x_3 + k + [pa_2t] = 0,$$

$$[pa_1a_3]x_1 + [pa_2a_3]x_2 + [pa_3a_3]x_3 + k + [pa_3t] = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + W = 0$$

bunda W — uchburchak bog'lanmaslik xatosi.

17.2. Bessel' usuli

Ortiqcha noma'lumli parametrik usuli paydo bo'lishiga bog'liq F. Bessel' usulining nazariyasini ko'rib chiqamiz.

Bessel' usuli normal tenglamalarni yechish uchun taklif qilingan. Bu usulning mazmuni quyidagidan iborat.

Normal tenglamalar sistemasi ikki guruhga bo'linadi. Keyinchalik I guruh alohida yechiladi, bunda II guruh noma'lumlarni hisobga olmasdan yechiladi. I guruhning noma'lumlaning taxminiy qiymati hisoblanib, ularni II guruh tenglamalariga qo'yiladi va unda yo'lma-yo'l ozod hadlari to'g'rilanadi. Yo'lma-yo'l guruhning noma'lumlarining taxminiy qiymatini hisoblab, shu I gruppning normal tenglamalarining teskari matritsa elementlarini topamiz, ya'ni, Q miqdorlarni.

Ko'rsatilgan hisoblardan keyin I guruh noma'lumlarning va II guruh noma'lumlarning taxminiy qiymatiga tuzatmalar bilan yangi normal tenglamalar sistemasini olamiz. I guruh tenglamalarning oxirgi sistemasi ozod hadsiz bo'ladi.

Keyinchalik olingan Q elementlar yordamida yangi sistemada I guruh noma'lumlarga tuzatmalar yo'qotiladi va faqat II guruhning noma'lumlari bilan normal tenglamalarining o'zgartirilgan sistemasi topiladi.

Oxirgi tenglamalar sistemasini yechib, II guruh noma'lumlari topiladi va oxirida teskari matritsa yordamida I guruh noma'lumlarining taxminiy qiymatiga tuzatma hisoblanadi.

Bessel' usuli bo'yicha beshta tenglama misolida hisoblash formulalarini olamiz. Bu tenglamalar sistemasini uchta va ikkita tenglama qilib ikki guruhga bo'lamiz.

Quyidagiga egamiz

$$\left. \begin{aligned} [aa]x_1 + [ab]x_2 + [ac]x_3 + [ad]x_4 + [ae]x_5 + W_1 &= 0 \\ [aa]x_1 + [bb]x_2 + [bc]x_3 + [bd]x_4 + [be]x_5 + W_2 &= 0 \\ [ac]x_1 + [bc]x_2 + [cc]x_3 + [cd]x_4 + [ce]x_5 + W_3 &= 0 \\ [ad]x_1 + [bd]x_2 + [cd]x_3 + [dd]x_4 + [de]x_5 + W_4 &= 0 \\ [ae]x_1 + [be]x_2 + [ce]x_3 + [de]x_4 + [ee]x_5 + W_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.51)$$

Tenglamani yechib

$$\left. \begin{aligned} [aa]x_1^0 + [ab]x_2^0 + [ac]x_3^0 + W_1 &= 0 \\ [ab]x_1^0 + [bb]x_2^0 + [bc]x_3^0 + W_2 &= 0 \\ [ac]x_1^0 + [bc]x_2^0 + [cc]x_3^0 + W_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.52)$$

Noma'lumlarning t_1^0, t_2^0, t_3^0 taxminiy qiymatini topamiz va yo'lma-yo'l — $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{22}, Q_{23}, Q_{33}$ koeffitsiyentlarni Endi belgilaymiz

$$t_i = t_i^0 + \delta x_i \quad (17.53)$$

va (17.52) tenglamani e'tiborga olib, tenglamalar sistemasini olamiz

$$\left. \begin{aligned} [aa]x_1 + [ab]x_2 + [ac]x_3 + [ad]x_4 + [ae]x_5 &= 0 \\ [aa]x_1 + [bb]x_2 + [bc]x_3 + [bd]x_4 + [be]x_5 &= 0 \\ [ac]x_1 + [bc]x_2 + [cc]x_3 + [cd]x_4 + [ce]x_5 &= 0 \\ [ad]x_1 + [bd]x_2 + [cd]x_3 + [dd]x_4 + [de]x_5 + W_4 &= 0 \\ [ae]x_1 + [be]x_2 + [ce]x_3 + [de]x_4 + [ee]x_5 + W_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.54)$$

bunda,

$$\left. \begin{aligned} W_4' &= W_4 + [ad]x_1^0 + [bd]x_2^0 + [cd]x_3^0 \\ W_5' &= W_5 + [ae]x_1^0 + [be]x_2^0 + [ce]x_3^0 \end{aligned} \right\} \quad (17.55)$$

Belgilash kiritamiz

$$\left\{ \begin{array}{l} [ad]t_4 + [ae]t_5 = L_1 \\ [bd]t_4 + [be]t_5 = L_2 \\ [cd]t_4 + [ce]t_5 = L_3 \end{array} \right\} \quad (17.56)$$

Unda birinchi uchta (17.54) tenglamalar sistemasini bunday yozish mumkin:

$$\left\{ \begin{array}{l} [aa]\alpha_1 + [ab]\alpha_2 + [ac]\alpha_3 + L_1 = 0 \\ [ab]\alpha_1 + [bb]\alpha_2 + [bc]\alpha_3 + L_2 = 0 \\ [ac]\alpha_1 + [bc]\alpha_2 + [cc]\alpha_3 + L_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (17.57)$$

Endi yozishimiz mumkin

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -Q_{11}L_1 - Q_{12}L_2 - Q_{13}L_3 \\ \alpha_2 = -Q_{21}L_1 - Q_{22}L_2 - Q_{23}L_3 \\ \alpha_3 = -Q_{31}L_1 - Q_{32}L_2 - Q_{33}L_3 \end{array} \right\} \quad (17.58),$$

yoki, (17.56) dagi belgilashlarni e'tiborga olib,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -Q_{11}[ad]t_4 - Q_{11}[ae]t_5 - Q_{12}[bd]t_4 - Q_{12}[be]t_5 - \\ - Q_{13}[cd]t_4 - Q_{13}[ce]t_5 = -([ad]Q_{11} + [bd]Q_{12} + [cd]Q_{13})t_4 - \\ - ([ae]Q_{11} + [be]Q_{12} + [ce]Q_{13})t_5 \\ \alpha_2 = (-[ad]Q_{21} + [bd]Q_{22} + [cd]Q_{23})t_4 + ([ae]Q_{21} + [be]Q_{22} + [ce]Q_{23})t_5 \\ \alpha_3 = (-[ad]Q_{31} + [bd]Q_{32} + [cd]Q_{33})t_4 - ([ae]Q_{31} + [be]Q_{32} + [ce]Q_{33})t_5 \end{array} \right\} \quad (17.59)$$

Belgilaymiz

$$\left\{ \begin{array}{l} -([ad]Q_{11} + [bd]Q_{12} + [cd]Q_{13}) = A_1 \\ -([ae]Q_{11} + [be]Q_{12} + [ce]Q_{13}) = B_1 \\ -([ad]Q_{21} + [bd]Q_{22} + [cd]Q_{23}) = A_2 \\ -([ae]Q_{21} + [be]Q_{22} + [ce]Q_{23}) = B_2 \\ -([ad]Q_{31} + [bd]Q_{32} + [cd]Q_{33}) = A_3 \\ -([ae]Q_{31} + [be]Q_{32} + [ce]Q_{33}) = B_3 \end{array} \right\}, \quad (17.60)$$

Tenglikni (17.58) quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = A_1t_4 + B_1t_5 \\ \alpha_2 = A_2t_4 + B_2t_5 \\ \alpha_3 = A_3t_4 + B_3t_5 \end{array} \right\} \quad (17.61)$$

(17.61) tenglikdan olinadigan α_1, α_2 , va α_3 qiymatlarni oxirgi ikki tenglamalar (17.54) sistemasiga qo'yamiz

$$\begin{aligned} & [ad]A_1t_4 + [ad]B_1t_5 + [bd]A_2t_4 + [bd]B_2t_5 + [cd]A_3t_4 + \\ & + [cd]B_3t_5 + [dd]t_4 + [de]t_5 + W_4' = 0, \\ & [ae]A_1t_4 + [ae]B_1t_5 + [be]A_2t_4 + [be]B_2t_5 + [ce]A_3t_4 + \\ & + [ce]B_3t_5 + [de]t_4 + [ee]t_5 + W_5' = 0. \end{aligned}$$

Shunga o'xshash hadlarni keltirishdan keyin topamiz

$$\left. \begin{aligned} &([dd] + [ad]A_1 + [bd]A_2 + [cd]A_3)t_4 + \\ &+ ([de] + [ad]B_1 + [bd]B_2 + [cd]B_3)t_5 + W'_4 = 0 \\ &([de] + [ae]A_1 + [be]A_2 + [ce]A_3)t_4 + \\ &+ ([ee] + [ae]B_1 + [be]B_2 + [ce]B_3)t_5 + W'_5 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.62)$$

Oxirgi tenglamalar sistemasi o'zgartirilgan sistemaga ekvivalent bo'lishi kerak

$$N_{44}^{(3)}t_4 + N_{45}^{(3)}t_5 + L_4^{(3)} = 0,$$

$$N_{45}^{(3)}t_4 + N_{55}^{(3)}t_5 + L_5^{(3)} = 0,$$

Boshlang'ich (17.51) sistemadan t_1, t_2, t_3 noma'lumlarni yo'qotishdan keyin olingan bo'lishi mumkin.

$$[de] + [ad]B_1 + [bd]B_2 + [cd]B_3 = [ae]A_1 + [be]A_2 + [ce]A_3. \quad (17.63)$$

Oxirgi tenglamani hisoblarning to'g'riligini tekshirish uchun foydalanish mumkin. Tenglamani to'g'riligini, unga $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, qiymatlarni qo'yib va kvadratsiz koeffitsiyentlarning simmetrikligi xossasini hisobga olib tekshirish mumkin.

Belgilab

$$\left. \begin{aligned} &[dd] + [ad]A_1 + [bd]A_2 + [cd]A_3 = C \\ &[de] + [ad]B_1 + [bd]B_2 + [cd]B_3 = \\ &= [de] + [ae]A_1 + [be]A_2 + [ce]A_3 = D \\ &[ee] + [ae]B_1 + [be]B_2 + [ce]B_3 = E \end{aligned} \right\} \quad (17.64)$$

Oxirida olamiz,

$$\left. \begin{aligned} &Ct_4 + Dt_5 + W'_4 = 0 \\ &Dt_4 + Et_5 + W'_5 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.65)$$

Shunday qilib, Bessel' usulida normal tenglamalarni yechish quyidagi ketma-ketlikda bajariladi:

1. (17.52) I guruh tenglamasi yechiladi. Natijada t_1^0, t_2^0, t_3^0 , qiymatlar va $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{22}, Q_{33}$ koeffitsiyentlar (teskari matritsa elementlari) olinadi*.

2. Formula (17.55) bo'yicha o'zgartirilgan II guruh tenglamani W'_4 va W'_5 ozod hadlar va formula (17.60) bo'yicha — $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ qiymatlari hisoblanadi.

3. Formula (17.64) bo'yicha II guruh o'zgartirilgan C, D, E koeffitsiyentlari hisoblanadi va (17.63) formula bo'yicha tekshiriladi.

4. Tenglama (VII 1.65) yechiladi va II guruh t_4 va t_5 noma'lumlari topiladi.

5. Formula (17.61) bo'yicha α_1, α_2 , va α_3 tuzatmalar topiladi va keyin noma'lumlar

$$t_1 = t_1^0 + \alpha_1$$

1

Agar Bessel' usuli ortiqcha noma'lumli parametrik usul bilan birga qo'shib qo'llanilsa I guruh tenglamalariiga τ noma'lumlar tarkibli tenglamalar kiritiladi ((17.39) formulaga qarang).

Bessel' usuli o'zining murakkabligi bo'yicha amaliy qo'llanilishini topmadi.

17.3. Qo'shimcha noma'lumli (o'lchanmagan) korrelyatsiya usuli

Ko'p hollarda shartli tenglamalarning ko'rinishini soddalashtirish uchun unga qo'shimcha noma'lumlar kiritiladigan imkoniyati bo'ladi. Soddalashtirish shartli tenglamalar sonini qo'shimcha noma'lumlar i ga oshirish yo'li bilan erishiladi. Ko'pincha bu foydali bo'lishi mumkin (misol, triangulyatsiya qatorlari yoki poligonometriya yo'llari tenglashtirish sistemalarida).

Qo'shimcha noma'lumli korrelat usuli nazariyasini ko'rib o'tamiz.

Deylik $x'_1, \dots, x'_n$ o'lchangan miqdorlar va t_1 va t_2 ikkita qo'shimcha noma'lumlar o'zaro shartli tenglamalar bilan bog'langan bo'lsin

$$\left. \begin{aligned} \varphi_a(x'_1, \dots, x'_n, t_1, t_2) &= 0 \\ \varphi_b(x'_1, \dots, x'_n, t_1, t_2) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_r(x'_1, \dots, x'_n, t_1, t_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.66)$$

Bu holda ortiqcha o'lchashlar soni $(r - 2)$ ga teng. Qo'shimcha noma'lumlar soni kerakli miqdorlar sonidan kam bo'lishi kerakligi tushunarli. Agar bu noma'lumlar soni kerakli miqdorlar soniga teng bo'lsa, parametrik usulga o'tish kerak edi. Agar noma'lumlar soni kerakli miqdorlar soniga teng yoki katta bo'lsa ko'rilayotgan usul bilan masalani yechib bo'lmaydi.

Masalani umuman olganda shartli tenglamalardan qo'shimcha noma'lumlarni yo'qotish yo'li bilan yechish mumkin. Unda, faqat o'lchangan miqdorlarni o'z ichiga olgan, $(r - 2)$ shartli tenglama olingan bo'ladi va masala odatdagi korrelyatsion usuli bilan yechishga olib keladi. Lekin bunday yechim hamma vaqt foydali emas. Masalani boshqa yo'l bilan yechamiz.

Oddiy yo'l bilan (17.66) tenglamani chiziqli ko'rinishga keltiramiz va yozamiz

[illegible]

bunda:

$$t_1 = t^0 + \tau, \quad W_a = \varphi_a(x_1, \dots, x_n, t_1^0, t_2^0), \dots, W_r = \varphi_r(x_1, \dots, x_n, t_1^0, t_2^0),$$

$$a_i = \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x_i} \right)_0, \dots, r_i = \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} \right)_0, A_i = \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial t_i} \right)_0, \dots, R_i = \left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial t_i} \right)_0,$$

Langranj funksiyasi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\Phi(v_1, \dots, v_n, \tau_1, \tau_2) = [p\nu^2] - 2k_a([av] + A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + W_a) - \dots - 2k_r([rv] + R_1\tau_1 + R_2\tau_2 + W_r),$$

F funksiyaning xususiy hosilasini olamiz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 2p_i v_i - 2k_a a_i - \dots - 2k_r r_i \quad (i=1, \dots, n),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_j} = -2k_a A_j - \dots - 2k_r R_j \quad (j=1, 2).$$

Bunda Lagranj funksiyasining xususiy hosilasi nolga teng. Endi yozish mumkin

$$v_i = q_i a_i k_a + \dots + q_i r_i k_r \quad (i=1, \dots, n), \quad (17.68)$$

$$A_j k_a + \dots + R_j k_r = 0 \quad (j=1, 2). \quad (17.69)$$

(17.68) tenglikni navbatma-navbat $a_i, \dots, r_i$ ga ko'paytirib va har ko'paytirgandan keyin ularni yig'ib topamiz

$$[av] = [qaa]k_a + \dots + [qar]k_r;$$

$$[bv] = [qab]k_a + \dots + [qbr]k_r;$$

$$[rv] = [qar]k_a + \dots + [qrr]k_r.$$

Oxirgi tenglamani e'tiborga olib, (17.67) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$\left. \begin{aligned} [qaa]k_a + \dots + [qar]k_r + A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + W_a &= 0 \\ [qar]k_a + \dots + [qrr]k_r + R_1\tau_1 + R_2\tau_2 + W_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.70)$$

(17.70) tenglamaga (17.69) tenglamani qo'shib, quyidagi k va τ , $(r+2)$ noma'lumli, $(r+2)$ tenglamalar sistemasini olamiz (umumiy holda $r+s$ noma'lumli $r+s$ tenglama, bunda s — qo'shimcha noma'lumlar soni):

$$\left. \begin{aligned} [qaa]k_a + \dots + [qar]k_r + A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + W_a &= 0 \\ [qar]k_a + \dots + [qrr]k_r + R_1\tau_1 + R_2\tau_2 + W_r &= 0 \\ A_1k_a + \dots + R_1k_r &= 0 \\ A_1k_a + \dots + R_2k_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.71)$$

(16.71) Tenglamalar sistemasi, yaqinlashtirish usulidan boshqa, normal tenglamalarni yechishning har qanday usuli bilan yechilishi mumkin. Tuzatma v bizga ma'lum bo'lgan formulalar (17.68) *bo'yicha hisoblanadi.

Ko'rilayotgan usulda $[pv^2]$ qiymati korrelat usulidagiga o'xshash yechiladi. Uni ko'rsatamiz.

Hamma (17.68) tenglikni p, v, i ga ko'paytirib va ularni yig'ib, topamiz

$$[pv^2] = [av]k_a + \dots + [rv]k_r.$$

(17.67) tenglikni e'tiborga olib, yozishimiz

$$[pv^2] = -W_a k_a - \dots - W_r k_r - (A_1 k_a + \dots + R_1 k_r) \tau_1 - \\ - (A_2 k_a + \dots + R_2 k_r) \tau_2,$$

(17.69) ifodani nazarda tutib topamiz

$$[pv^2] = -W_a k_a - \dots - W_r k_r = -[kW] \quad (17.72)$$

ya'ni odatda korrelat usuli formulasi. Tenglikni (17.71) sistemaga qo'shib

$$W_a k_a + \dots + W_r k_r = -[pv^2]$$

oxirgi tenglama sifatida. Ko'rilayotgan usul bo'yicha tenglashtirishda $[pv^2]$ qiymatini normal tenglamalarni yechish sxemasining W grafasida hamma noma'lumlarni yo'qotgandan keyin korrelat usulida tenglashtirishda ham topish mumkin.

Funksiyaning teskari vaznini qo'shimcha grafada xuddi shunday korrelat usulida tenglashtirish qoidasi bo'yicha olish mumkin.

Buni ko'rsatamiz.

Buning uchun oldingi funksiyani chiziqli ko'rinishga keltiramiz

$$F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = F(x_1, \dots, x_n) + [Fv] \quad (17.73)$$

(17.68) tenglikni navbatma - navbat F_i ga ko'paytirib va ularni yig'ib olamiz

$$[Fv] = [qaF]k_a + \dots + [qrF]k_r. \quad (17.74)$$

Korrelatdan W ozod hadlarga — o'lchash natijalari funksiyasiga o'tish uchun noma'lum ko'paytmalar usulini qo'llaymiz.

Birinchi (17.71) tenglamani ρ_a ga ko'paytirib, ikkinchini ρ_b ga va h.k. oxirgi W tarkibli tenglamani ρ_r ga, boshqa tenglamalarni ρ_1, ρ_2 ga. Keyinchalik hamma tenglamalarni yig'ib topamiz

$$([qa\rho] \rho_a + \dots + [qa'r] \rho_r + A_1 \rho_1 + A_2 \rho_2) k_a + \dots + \\ ([qa'r] \rho_a + \dots + [qrr] \rho_r + R_1 \rho_1 + R_2 \rho_2) k_r + (A_1 \rho_a + \dots + R_1 \rho_1) \tau_1 + \\ (A_2 \rho_a + \dots + R_2 \rho_2) \tau_2 + W_a \rho_a + \dots + W_r \rho_r = 0 \quad (17.75)$$

($r+2$) noaniq ko'paytuvchilarni kiritish ($r+2$) tenglamani yozishga imkon beradi

$$\left. \begin{aligned} [qaa]\rho_a + \dots + [qar]\rho_r + A_1\rho_1 + A_2\rho_2 + [qaF] &= 0 \\ [qar]\rho_a + \dots + [qrr]\rho_r + R_1\rho_1 + R_2\rho_2 + [qrF] &= 0 \\ A_1\rho_a + \dots + R_1\rho_r &= 0 \\ A_2\rho_a + \dots + R_2\rho_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.76)$$

(17.76) ifodani hisobga olib, (17.75) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$-[qaF]k_a - \dots - [qrF]k_r + W_a\rho_a + \dots + W_r\rho_r = 0$$

yoki

$$[qaF]k_a + \dots + [qrF]k_r + W_a\rho_a + \dots + W_r\rho_r = 0 \quad (17.77)$$

(17.77) va (17.74) tengliklarni taqqoslab yozishimiz mumkin

$$[Fv] = \rho_a W_a + \dots + \rho_r W_r$$

va, oxiri, (17.73) tenglikni ko'rinishda yozamiz

$$F(x'_1, \dots, x'_n) = F(x_1, \dots, x_n) + \rho_a W_a + \dots + \rho_r W_r \quad (17.78)$$

Endi biz yozishga haqimiz bor $F(x'_1, \dots, x'_n) = \Phi(x_1, \dots, x_n)$, ga asoslanib

$$\frac{1}{P_F} = \left[q \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0^2 \right],$$

bunda

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_0 = a_i \rho_a + \dots + r_i \rho_r + F_i \quad (17.80)$$

(17.79) va (17.80) ni hisobga olib keyinchalik yozamiz,

$$\frac{1}{P_F} = [qaa]\rho_a^2 + [qab]\rho_a\rho_b + \dots + [qar]\rho_a\rho_r + [qaF]\rho_a +$$

$$+ [qab]\rho_b\rho_a + [qbb]\rho_b^2 + \dots + [qbr]\rho_b\rho_r + [qbF]\rho_b +$$

$$+ [qar]\rho_r\rho_a + [qbr]\rho_r\rho_b + \dots + [qrr]\rho_r^2 + [qrF]\rho_r +$$

$$+ [qaF]\rho_a + [qbF]\rho_b + \dots + [qrF]\rho_r + [qFF]$$

Oxirgi ifodaning har bir qatoridagi umumiy ko'paytmanni qavsdan tashqariga chiqarib va (17.76) hisobga olib topamiz

$$\frac{1}{P_F} = -\rho_a(A_1\rho_1 + A_2\rho_2) - \rho_b(B_1\rho_1 + B_2\rho_2) - \dots - \rho_r(R_1\rho_1 + R_2\rho_2) +$$

$$+ [qaF]\rho_a + [qbF]\rho_b + \dots + [qrF]\rho_r + [qFF] =$$

$$- \rho_1(A_1\rho_a + B_1\rho_b + \dots + R_1\rho_r) -$$

$$- \rho_2(A_2\rho_a + B_2\rho_b + \dots + R_2\rho_r) +$$

$$[qaF]\rho_a + [qbF]\rho_b + \dots + [qrF]\rho_r + [qFF]$$

Oxirgi (17.76) ikki tenglamani e'tiborga qabul qilib yozish mumkin

$$[qaF]\rho_a + [qbF]\rho_b + \dots + [qrF]\rho_r + [qFF] \frac{1}{P_F} \quad (17.81)$$

Oxirida (17.81) tenglikni (17.76) sistemaga qo'shib oxirgi tenglama sifatida formulaning to'g'riliga ishonch hosil qilamiz.

$$\frac{1}{P_F} = [qFF] \cdot (r+2) = N_{r+3}^{(r+2)}$$

bizning holat uchun va

$$\frac{1}{P_F} = [qFF] \cdot (r+s) = N_{r+s+1}^{r+s}$$

bunda s — qo'shimcha noma'lumlar soni — umumiy holat uchun.

Ko'rilgan usul triangulyatsiya qatorlari sistemasini (Pranis-Pranevich usuli) va poligonometriya yo'llari sistemasini (Pranis-Pranevich va B. A. Litvinov usuli) tenglashtirish uchun qo'llaniladi. Bunda qo'shimcha noma'lumlar sifatida koordinatalar va direksion burchaklar kiritiladi. Triangulyatsiyada esa yana qatorlar va yo'llarni kesuvchi chiqish tomonlari kiritiladi. Shu tufayli shartli tenglamaning umumiy sistemasi bir-biri bilan juda zaif bog'langan alohida zven'ya uchun shartli tenglamalar sistemasiga bo'linadi. Qo'shni zven'ya uchun faqat qo'shimcha noma'lumlar umumiy bo'ladi.

Qo'shimcha noma'lumli korrelat usulida normal tenglamalarni tuzish va yechish uchun ko'proq va Pranis-Pranevichning ko'p guruhli usuli qo'llaniladi. Bunda bog'lovchi sifatida qo'shimcha noma'lumlar tanlanadi.

18. KO'P NAMA'LUMLI TENGLASHTIRISH HISOBLARI

KO'P NOMA'LUMLI NORMAL TENGLAMALARNI TUZISH VA YECHISH

1. Umumiy mulohazalar

Parametrik va korrelat usullari tenglashtirish masalasining har xil matematik usuli bo'lsa ham tenglashtirilgan miqdorning bir xil qiymatini beradi. Lekin geodezik hisoblarning turli hollarida hisoblash ishlari hajmi va murakkabligi bo'yicha ular bir xil emas. Bu usullarning ustunlik jihatlarini taqqoslaymiz.

Juda ko'p sonli kerakli va ortiqcha o'lchangan miqdorlarning borligi normal tenglamalarni yechishda katta hajmdagi tenglashtirish hisoblaridan iborat. Bunda

shuni e'tiborga olish kerakki, normal tenglamalarni yechishga sarf qilinadigan mehnat miqdori tenglamalar soniga proporsional ko'payish emas balki bir necha darajada ko'p bo'ladi. Ma'lumki, parametrik usulda tenglamalar soni kerakli miqdorlar soniga k , korrelat usulida normal tenglamalar soni ortiqcha miqdorlar soniga $r = n - k$ teng.

Shunday qilib, ko'p o'lchamli miqdorlarni tenglashtirishda tenglashtirish usulini tanlash, birinchi navbatda k va r qiymatlarga bog'liq. Agar $k < g$, parametrik usul foydaliroq, $r < k$ bo'lsa korrelat usuli afzalroq. Lekin tenglashtirish usulini tanlaganda parametrik va shartli tuzatmalar tenglamalari ko'rinishini ham e'tiborga olish kerak. Katta sistemali normal tenglamalarni yechish samaradorligi ushbu tenglamalardagi noma'lumlarning bir-biri bog'liqlik xarakteriga ham bog'liq. Agar birdan bir noma'lumlar bir nechta tenglamalarga kirsa, yechimni ancha yengillashtiradi. Quyida hozirgi paytda ishlab chiqarishda qo'llaniladigan ko'p sonli kerakli va ortiqcha miqdorlarni tenglashtirish hisoblarining eng samarali usullarini ko'rib o'tamiz.

18.1 Mustaqil bo'laklarga bo'linadigan normal tenglamalar sistemasini yechish

Hozirgacha hamma noma'lumlar har bir tenglamaga kirishini nazarda tutib, normal tenglamalarni yechishning umumiy ko'rinishini ko'rib o'tdik. Lekin geodezik amaliyotda katta sonli tenglamalarda bunday bo'lmaydi. Odatda noma'lumlar ba'zi tenglamalarga kiradi. Shuning uchun ko'p sonli normal tenglamalarni mustaqil sistema bo'laklariga bo'lish mumkin. Bu yechimni osonlashtiradi.

Normal tenglamalarni samarali yechishning keyingi holati parametrik va korrelat tuzatmalar tenglamasida noma'lumlarning joylashish tartibiga bog'liq. Bu tenglamadagi oxirgi joylarga tenglamalarda ko'p uchraydigan shunday noma'lumlarni joylashtirish afzalroq va oldingi joylarga kam noma'lumlarni joylashtirish afzalroq.

Deylik, uchta noma'lumli tuzatmalar parametrik tenglamalar sistemasi quyidagi ikkita alohida mustaqil sistemaga bo'linadi:

$$1. \quad a_i x_1 + c_i x_3 + l_i = v_i$$

$$(i = 1, \dots, n_1)$$

$$2. \quad b_i x_2 + c_i x_3 + l_i = v_i$$

$$(i = n_1 + 1, \dots, n)$$

Normal tenglamalar sistemasini tuzamiz va uni izchil o'zgartiramiz. Bunda o'lchashlar teng anqlikda deb, nazarda tutamiz,

$$\left. \begin{aligned} [aa]r_1 + [ac]r_3 + [al] &= 0 \\ [bb]r_2 + [bc]r_3 + [bl] &= 0 \\ [ac]r_1 + [bc]r_2 + [cc]r_3 + [cl] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

Quyidagi sistemani olamiz $N^{(1)}$

$$\left. \begin{aligned} [bb]r_2 + [bc]r_3 + [bl] &= 0 \\ [bc]r_2 + [cc \cdot 1]r_3 + [cl \cdot 1] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.2)$$

Ishonch qilish qiyin emas, chunki $[bb \cdot 1] = [bb]$, xuddi shunday $[ab] = 0$. Sabab shundaki $[bs \cdot 1] = [bs]$ va $[bl \cdot 1] = [bl]$. Keyinchalik ekvivalent sistemaning oxirgi tenglamasini olamiz

$$[cc \cdot 2]r_3 + [cl \cdot 2] = 0. \quad (18.3)$$

Normal tenglamalarni yechishda hisoblanadigan ekvivalent tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlarini yozamiz,

$$\left. \begin{aligned} [aa]r_1 + [ac]r_3 + [al] &= 0 \\ [bb]r_2 + [bc]r_3 + [bl] &= 0 \\ [cc \cdot 2]r_3 + [cl \cdot 2] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

Endi ko'rinib turibdiki, faqatgina ikkita ekvivalent koeffitsiyent sistemasini yechishga to'g'ri keladi — $[cc \cdot 2]$ va $[cl \cdot 2]$

Bizning misol uchun uni to'liq ochamiz

$$\left. \begin{aligned} [cc \cdot 2] &= [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} - \frac{[bc][bc]}{[bb]} \\ [cl \cdot 2] &= [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc][bl]}{[bb]} \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

Tenglik (18.5) berilgan masaladagi noma'lumlarni yo'qotish bo'yicha ish hajmini xarakterlaydi

Uchinchi noma'lumni tenglamaning birinchi o'ringa qo'yamiz:

$$1) c_i r_3 + a_i r_1 + l_i = v_i$$

$$(i = 1, \dots, n_1)$$

$$2) c_i r_3 + b_i r_2 + l_i = v_i$$

$$(i = n_1 + 1, \dots, n)$$

Normal tenglamalarni tuzamiz

$$\left. \begin{aligned} [cc]r_3 + [bc]r_2 + [ac]r_1 + [cl] &= 0 \\ [bc]r_3 + [bb]r_2 + [bl] &= 0 \\ [ac]r_3 + [aa]r_1 + [al] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

Sistema ($N^{(1)}$) quyidagi ko'rinishni oladi

$$\left. \begin{aligned} [bb \cdot 1]r_2 + [ab \cdot 1]r_1 + [bl \cdot 1] &= 0 \\ [ab \cdot 1]r_2 + [aa \cdot 1]r_1 + [al \cdot 1] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

Ekvivalent sistemaning oxirgi tenglamasi ko'rinishni oladi

$$[aa \cdot 2]r_1 + [al \cdot 2] = 0 \quad (18.8)$$

Ekvivalent sistemani yozamiz

$$\begin{cases} [cc]r_3 + [bc]r_2 + [ac]r_1 + [cl] = 0 \\ [bb \cdot 1]r_2 + [ab \cdot 1]r_1 + [bl \cdot 1] = 0 \\ [aa \cdot 2]r_1 + [al \cdot 2] = 0 \end{cases} \quad (18.9)$$

Bu holatda noma'lumlarni yo'qotish bo'yicha ish hajmi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi

$$\left. \begin{aligned} [bb \cdot 1] &= [bb] - \frac{[bc][bc]}{[cc]} \\ [ab \cdot 1] &= -\frac{[bc][ac]}{[cc]} \\ [bl \cdot 1] &= [bl] - \frac{[bc][cl]}{[cc]} \\ [aa \cdot 2] &= [aa] - \frac{[ac][ac]}{[cc]} - \frac{[ab \cdot 1][ab \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \\ [al \cdot 2] &= [al] - \frac{[ac][cl]}{[cc]} - \frac{[ab \cdot 1][bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \end{aligned} \right\} \quad (18.10)$$

Tengliklar (18.5) va (18.10) taqqoslab, ko'ramizki, ikki qisman mustaqil noma'lumning sistemasi uchun umumiy joylashishi tenglamaning oxirgi joyida tenglashtirish hisoblari bu noma'lum boshida joylashganga qaraganda umumiy hajmi sezilarli qisqarganligida.

Korrelat usulida tenglashtirishda koeffitsiyentlar jadvalidagi parametrik tenglamalar o'rini quyidagi tenglik egallaydi

$$a_i k_a + b_i k_b + \dots + r_i k_r - p_i v_i = 0 (i = 1, \dots, n) \quad (18.11)$$

Agar ularning vaznini shartli ravishda quyidagicha desak

$$q_i = \frac{1}{p_i}$$

Shuning uchun korrelat usulida tenglashtirishda koeffitsiyentlar jadvali katta sonli v_i tuzatmalar shartli tenglamalari uchun o'ng grafasi ajratiladi. Bu shartni bajarishda yana quyidagiga e'tibor berish kerak: koeffitsiyent jadvalida hisoblashlar uchun chapga +1 va -1 koeffitsiyentli tenglamalarni, o'ngga — boshqa tenglamalarni joylashtirish kerak.

Eslatamiz, katta sonli bosh tenglamalarni tenglashda ularni teng aniqlikka keltirish kerak.

18.2. Pranis-Pranevichning ko'p guruhli usuli

Yuqorida ko'rsatilgan hisoblash tartibida faqat hisoblash hajmini kamaytirib qolmasdan bir vaqtning o'zida bir nechta hisoblovchilarni jalb qilish imkoniyati bor. Mashhur geodezist olim I. Yu. Pranis-Pranevich qisman mustaqil sistemaga bo'lingan bosh tenglamalarni yechishning quyidagi tartibini taklif qildi:

1. Tuzatmalar parametrik va korrelat tenglamalari qisman mustaqil sistemaga ajratiladi. Har bir sistemaga bitta hisoblovchi ajratiladi.

2. Har bir hisoblovchi o'zining normal tenglamasini tuzadi, ya'ni mos koeffitsiyentlar va ozod hadlar hisoblanadi va undan qisman mustaqil normal tenglamalar sistemasi olinadi.

3. Har bir sistemadagi normal tenglamaning boshqa sistemaga kirmagan hamma noma'lumlari yo'qotiladi. Natijada har bir hisoblovchi *bog'lovchilarga* kiradigan normal tenglamalarning *xususiy bog'langan sistemasini* oladi, ya'ni bir nechta sistema uchun umumiy bo'lgan kerakli noma'lumlarning tuzatmasi τ va korrelati k .

Normal tenglamalarni yechishning odatdagi tartibining farqi qisman bog'langan sistemalarda normal tenglamalarni yechish mos o'zgartirilgan tenglamalarning hamma koeffitsiyentlari hisoblanadi. Birinchi tenglamaning emas yoki ekvivalent tenglamalarning emas.

Qisman bog'langan sistemalar koeffitsiyentlarini krakovyan usulida yechishda kvadrat koeffitsiyentlari ildiziga bo'linmaydi.

4. Kvadrat diagonalni nisbatan bir xil joylashgan qisman bog'langan sistema mos koeffitsiyentlarini yig'ib, umumiy bog'lovchi sistemani olamiz.

5. O'z sxemasini yechish eliminatsion (krakovyan) qatori yordamida hisoblovchilar boshqa noma'lumlarni topadilar.

Pranis-Pranevich usulining kamchiligi shundan iboratki, bog'lovchi sistemalarni yechishda ayrim yakka hisoblovchilarning qatnashishidir.

Pranis-Pranevich usulining matematik qat'iyligini oddiy misolda ko'rsatamiz. Buning uchun umumiy sistemani yechishni ikki marta qaytaramiz: bir marta odatdagi usul tartibida va ikkinchi marta Pranis-Pranevich usulida. Buning uchun ikkita qisman mustaqil sistemaga bo'linadigan quyidagi tuzatmalar parametrik tenglamasini olamiz:

$$1) a_i \tau_i + d_i \tau_4 + e_i \tau_5 + l_i = v_i$$

$$(i = 1, \dots, n_1)$$

$$2) b_i \tau_2 + c_i \tau_3 + d_i \tau_4 + e_i \tau_5 + l_i = v_i$$

$$(i = n_1 + 1, \dots, n)$$

Normal tenglamalarning sistemasining umumiy ko'rinishi qisqartirilgan yozuvda quyidagicha bo'ladi

$$\left. \begin{aligned} [aa]_1 \tau_1 + [ac]_1 \tau_4 + [ae]_1 \tau_5 + [al]_1 \\ [bb]_2 \tau_2 + [bc]_2 \tau_3 + [bd]_2 \tau_4 + [be]_2 \tau_5 + [bl]_2 \\ [cc]_3 \tau_3 + [cd]_3 \tau_4 + [ce]_3 \tau_5 + [cl]_3 \\ [dd]_4 \tau_4 + [de]_4 \tau_5 + [dl]_4 \\ [ee]_5 \tau_5 + [el]_5 \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

Gauss yig'indisidagi indekslar, mos xususiy sistemadan olingan ushbu kupaytmalar yig'indisidir. Chunki noma'lumlar τ_4 va τ_5 ushbu ikki sistemaga kiradi va unda

$$\left. \begin{aligned} [dd] &= [dd]_1 + [dd]_2 \\ [de] &= [de]_1 + [de]_2 \\ [dl] &= [dl]_1 + [dl]_2 \\ [ee] &= [ee]_1 + [ee]_2 \\ [el] &= [el]_1 + [el]_2 \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

Uchta noma'lumni yo'qotgandan keyin olingan to'liq bo'lmagan ekvivalent sistemani yozamiz,

$$\left. \begin{aligned} [aa]_1 \tau_1 + [ad]_1 \tau_4 + [ae]_1 \tau_5 + [al]_1 &= 0 \\ [bb]_1 \tau_2 + [bc]_2 \tau_3 + [bd]_2 \tau_4 + [be]_2 \tau_5 + [bl]_2 &= 0 \\ [cc \cdot 2] \tau_3 + [cd \cdot 2] \tau_4 + [ce \cdot 2] \tau_5 + [cl \cdot 2] &= 0 \\ [dd \cdot 3] \tau_4 + [de \cdot 3] \tau_5 + [dl \cdot 3] &= 0 \\ [de \cdot 3] \tau_4 + [ee \cdot 3] \tau_5 + [el \cdot 3] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.14)$$

Bu sistema to'liq ekvivalent sistemadan faqatgina oxirgi tenglama bilan farq qiladi
Yozilgan ekvivalent sistemaning o'zgartirilgan koeffitsiyentlarini ochamiz

$$\left. \begin{aligned} [cc \cdot 2] &= [cc]_2 - \frac{[bc]_2 [bc]_2}{[bb]_2} \\ [cd \cdot 2] &= [cd]_2 - \frac{[bc]_2 [bd]_2}{[bb]_2} \\ [ce \cdot 2] &= [ce]_2 - \frac{[bc]_2 [be]_2}{[bb]_2} \\ [cl \cdot 2] &= [cl]_2 - \frac{[bc]_2 [bl]_2}{[bb]_2} \\ [dd \cdot 3] &= [dd]_1 - \frac{[ad]_1 [ad]_1}{[aa]_1} - \frac{[bd]_2 [bd]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 2] [cd \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \\ [de \cdot 3] &= [de]_1 - \frac{[ad]_1 [ae]_1}{[aa]_1} - \frac{[bd]_2 [be]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 2] [ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \\ [dl \cdot 3] &= [dl]_1 - \frac{[ad]_1 [al]_1}{[aa]_1} - \frac{[bd]_2 [bl]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 2] [cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \\ [ee \cdot 3] &= [ee]_1 - \frac{[ae]_1 [ae]_1}{[aa]_1} - \frac{[be]_2 [be]_2}{[bb]_2} - \frac{[ce \cdot 2] [ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \\ [el \cdot 3] &= [el]_1 - \frac{[ae]_1 [al]_1}{[aa]_1} - \frac{[be]_2 [bl]_2}{[bb]_2} - \frac{[ce \cdot 2] [cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \end{aligned} \right\} \quad (18.15)$$

Endi bog'langan sistemaning koeffitsiyentlari va ozod hadlarini topdik, ya'ni
Pranis-Pranevich usuli bo'yicha $[dd \cdot 3]$, $[de \cdot 3]$, $[dl \cdot 3]$, $[ee \cdot 3]$, $[el \cdot 3]$.

Mos tuzatmalar tenglamalaridan olingan 1-chi qisman mustaqil normal tenglamalar sistema koeffitsiyentlarini yozamiz,

$$\left. \begin{aligned} [aa]_1 \tau_1 + [dd]_1 \tau_4 + [ae]_1 \tau_5 + [al]_1 &= 0 \\ [dd]_1 \tau_4 + [de]_1 \tau_5 + [dl]_1 &= 0 \\ [ee]_1 \tau_5 + [el]_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.16)$$

Sistemadan (18.16) noma'lum τ_1 ni yo'qotib xususiy bog'langan sistemani olamiz

$$\left. \begin{aligned} [dd \cdot 1]_1 \tau_4 + [de \cdot 1]_1 \tau_5 + [dl \cdot 1]_1 &= 0 \\ [ee \cdot 1]_1 \tau_5 + [el \cdot 1]_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

bunda koeffitsiyentlari quyidagi strukturaga ega bo'lgan

$$\left. \begin{aligned} [dd \cdot 1]_1 &= [dd]_1 - \frac{[ad]_1[ad]_1}{[aa]_1} \\ [de \cdot 1]_1 &= [de]_1 - \frac{[ad]_1[ae]_1}{[aa]_1} \\ [dl \cdot 1]_1 &= [dl]_1 - \frac{[ad]_1[al]_1}{[aa]_1} \\ [ee \cdot 1]_1 &= [ee]_1 - \frac{[ae]_1[ae]_1}{[aa]_1} \\ [el \cdot 1]_1 &= [el]_1 - \frac{[ae]_1[al]_1}{[aa]_1} \end{aligned} \right\} \quad (18.18)$$

2-chi qisman mustaqil normal tenglamalar sistema koeffitsiyentlarini yozamiz

$$\left. \begin{aligned} [bb]_2 \tau_2 + [bc]_2 \tau_3 + [bd]_2 \tau_4 + [be]_2 \tau_5 + [bl]_2 \\ [cc]_2 \tau_3 + [cd]_2 \tau_4 + [ce]_2 \tau_5 + [cl]_2 \\ [dd]_2 \tau_4 + [de]_2 \tau_5 + [dl]_2 \\ [ee]_2 \tau_5 + [el]_2 \end{aligned} \right\} \quad (18.19)$$

Sistema (18.19) dan noma'lumlar τ_2 va τ_3 ni yo'qotib, 2-chi xususiy bog'langan normal tenglamalar sistemasini olamiz

$$\left. \begin{aligned} [dd \cdot 2]_2 \tau_4 + [de \cdot 2]_2 \tau_5 + [dl \cdot 2]_2 \\ [ee \cdot 2]_2 \tau_5 + [el \cdot 2]_2 \end{aligned} \right\} \quad (18.20)$$

bunda koeffitsiyentlari quyidagi strukturaga ega bo'lgan

$$\left. \begin{aligned} [dd \cdot 2]_2 &= [dd]_2 - \frac{[bd]_2[bd]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 1]_2[cd \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2} \\ [de \cdot 2]_2 &= [de]_2 - \frac{[bd]_2[be]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 1]_2[ce \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2} \\ [dl \cdot 2]_2 &= [dl]_2 - \frac{[bd]_2[bl]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 1]_2[cl \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2} \\ [ee \cdot 2]_2 &= [ee]_2 - \frac{[be]_2[be]_2}{[bb]_2} - \frac{[ce \cdot 1]_2[ce \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2} \\ [el \cdot 2]_2 &= [el]_2 - \frac{[be]_2[bl]_2}{[bb]_2} - \frac{[ce \cdot 1]_2[cl \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2} \end{aligned} \right\} \quad (18.21)$$

Mos xususiy bog'langan sistemalarning koeffitsiyentlarini yig'ib, umumiy bog'langan sistemaning koeffitsiyentlarini olamiz.

Ifodalar (18.18) va (18.21) hisobga olib, misol uchun yozishimiz mumkin

$$[de \cdot 1]_1 + [de \cdot 2]_2 = [de]_1 + [de]_2 - \frac{[ad]_1[ae]_1}{[aa]_1} - \frac{[bd]_2[be]_2}{[bb]_2} - \frac{[cd \cdot 1]_2[ce \cdot 1]_2}{[cc \cdot 1]_2}$$

Tengliklardan (18.18) va (18.21) tashqari hisobga olib ushbu tenglikni yozamiz

$$[de]_1 + [de]_2 = [de]$$

$$[cd \cdot 1]_2 = [cd \cdot 2]$$

$$[ce \cdot 1]_2 = [ce \cdot 2]$$

$$[cc \cdot 1]_2 = [cc \cdot 2]$$

(2-chi sistemaning birinchi noma'lumi umumiy sistemadagi ikkinchidir), topamiz

$$[de \cdot 1]_1 + [de \cdot 2]_2 = [de] - \frac{[ad][ae]}{[aa]} - \frac{[bd \cdot 1][be \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cd \cdot 2][ce \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} = [de \cdot 3],$$

Ya'ni, tenglamaning to'g'riligiga ishonch hosil qilamiz

$$[de \cdot 1]_1 + [de \cdot 2]_2 = [de \cdot 3]$$

va shuni isbot qilishimiz kerak edi.

Qolgan tenglamalarning to'g'riligini mustaqil ishonch hosil qilish uchun o'quvchiga imkoniyat beramiz

$$[dd \cdot 1]_1 + [dd \cdot 2]_2 = [dd \cdot 3]$$

$$[dl \cdot 1]_1 + [dl \cdot 2]_2 = [dl \cdot 3]$$

$$[ee \cdot 1]_1 + [ee \cdot 2]_2 = [ee \cdot 3]$$

$$[el \cdot 1]_1 + [el \cdot 2]_2 = [el \cdot 3]$$

Pranis-Pranevich ko'p guruhli usul bo'yicha normal tenglamalarni yechish misoli

Ikkita qisman mustaqil normal tenglamalar sistemasini yechish talab qilinadi:

1)

$$4\tau_1 + \tau_4 - 2\tau_5 + 2$$

$$\tau_1 + 3\tau_4 + \tau_5 - 1$$

$$-2\tau_1 + \tau_4 + 5\tau_5 - 2$$

$$\hline \sum_1 = 3\tau_1 + 5\tau_4 + 4\tau_5 - 1$$

2)

$$4\tau_2 - \tau_3 - \tau_4 + \tau_5 + 3$$

$$-\tau_2 + 3\tau_3 - \tau_4 - 2\tau_5 + 2$$

$$-\tau_2 - \tau_3 + 3\tau_4 + 2\tau_5 - 3$$

$$\tau_2 - 2\tau_3 + 2\tau_4 + 5\tau_5 + 4$$

$$\hline \sum_2 = 3\tau_2 - \tau_3 + 3\tau_4 + 6\tau_5 + 6$$

Bog'lovchi nomalumlari τ_4 va τ_5 deylik. Qolgan noma'lumlari har bir sistemada yo'qotiladi.

Birinchi sistemani yechish 1-jadvalda berilgan, ikkinchisi 2-jadvalda. Yechish uchun Gauss algoritmining qisqartirilgan sxemasi qo'llanildi.

Koeffitsiyent

$$[ee \cdot 1]_1 = 4,00 = 5,00 - 0,50 \cdot 2,00$$

$$[el \cdot 1]_1 = -1,00 = -2,00 + 0,50 \cdot 2,00$$

$$[eS \cdot 1]_1 = +4,50 = +2,00 + 0,50 \cdot 5,00$$

1-jadval

Qatorlar	τ_1	τ_2	τ_3	l	S	Tekshirish
N_1	4,00	+1,00	-2,00	+2,00	+5,00	
E_1		-0,25	+0,50	-0,50	-1,25	-1,25
N_4		3,00	+1,00	-1,00	+4,00	
N_5			5,00	-2,00	+2,00	
$N_4^{(3)}$		2,75	+1,50	-1,50	+2,75	+2,75
$N_5^{(3)}$			4,00	-1,00	+4,50	+4,50
Noma'lumlar	-1,24	+1,07	-0,94			

2-jadval

Qatorlar	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	l	S	Tekshirish
N_2	4,00	-1,00	-1,00	+1,00	+3,00	+6,00	
E_2		+0,25	+0,25	-0,25	-0,75	-1,50	-1,50
N_3		3,00	-1,00	-2,00	+2,00	+1,00	
$N_3^{(2)}$		2,75	-1,25	-1,75	+2,75	+2,50	+2,50
E_3			+0,45	+0,64	-1,00	-0,91	-0,91
N_4			3,00	+2,00	-3,00	0	
N_5				5,00	+4,00	+10,00	
$N_4^{(3)}$			2,19	+1,46	-1,01	+2,64	+2,63
$N_5^{(3)}$				3,63	+5,01	+10,10	+10,10
Noma'lumlar	-0,53	-1,12	+1,07	-0,94			

Qator $N_4^{(3)}$ oddiy usulda olingan. Qatorlarning $N_5^{(3)}$ koeffitsiyenti quyidagi tarzda olingan:

$$[ee \cdot 2]_2 = 5,00 - 0,25 \cdot 1,00 - 0,64 \cdot 1,75 = 3,63;$$

$$[el \cdot 2]_2 = +4,00 - 0,25 \cdot 3,00 + 0,64 \cdot 2,75 = 5,01;$$

$$[eS \cdot 2]_2 = +10,00 - 0,25 \cdot 6,00 + 0,64 \cdot 2,50 = +10,10.$$

Endi mos qisman bog'langan sistema koeffitsiyentlarini yig'ib, bog'langan

sistemalar koeffitsiyentini olamiz. Ya'ni, $N_4^{(3)}$ va $N_5^{(3)}$ qatorlar 1 va 2 jadvallarda.

$$\begin{aligned} 4,94 \tau_4 + 2,96 \tau_5 - 2,51 &= 0; \quad \Sigma_1 = +5,39; \\ +2,96 \tau_4 + 7,63 \tau_5 + 4,01 &= 0; \quad \Sigma_2 = +14,60. \end{aligned}$$

3-jadval

Qatorlar	τ_4	τ_5	l	S	Tekshirish
$N_4^{(3)}$	4,94	+2,96	-2,51	+5,39	
E_4		-0,60	+0,51	-1,09	-1,09
$N_5^{(3)}$		7,63	+4,01	+14,60	
$N_5^{(4)}$		5,85	+5,52	+11,37	+11,37
Noma'lumlar	+1,07	-0,94			

Olingan $\tau_4 = +1,07$ va $\tau_6 = -0,94$ noma'lumlarni 1- va 2-jadvaldagi Eliminatsion qatorlarga qo'yib, qolgan noma'lumlarni topamiz

$$\tau_1 = 1,24, \tau_2 = -0,53 \text{ va } \tau_3 = -1,12.$$

Yechimning to'g'riligini tekshirish uchun hamma normal tenglamalar yig'indisidagi topilgan noma'lumlarga qo'yamiz. O'z navbatida Σ_1 va Σ_2 tenglamalar yig'indisi kabi (1-chi va 2-chi sistemalar yig'indisi)

$$\begin{aligned} 3\tau_1 + 3\tau_2 - \tau_3 + 8\tau_4 + 10\tau_5 + 5 &= \\ = -3 \cdot 1,24 - 3 \cdot 0,53 + 1,12 + 8 \cdot 1,07 - 10 \cdot 0,94 + 5,00 &= -0,03. \end{aligned}$$

Qoldiq xatolikni hisobga olmasa ham bo'ladi.

Pranis-Pranevich usulining qat'iyligiga amalda to'liq ishonch hosil qildik

Demak bog'langan normal tenglamalar, o'z navbatida qisman mustaqil sistemaga bo'linsa ularni Pranis-Pranevich usulini qo'llab yechish mumkin.

Pranis-Pranevich ko'p guruhli tenglashtirish usuli qo'shimcha noma'lumli korrelat usuli bilan birga qo'shib qo'llaniladi.

18.3. Katta sistemali normal tenglamalarni yechish uchun hisoblash sxemasi. Yechishning qo'shimcha nazorati

Katta sistemali normal tenglamalarni yechish uchun odatdagi qisqartirilgan hisoblash sxemasi noqulay bo'ladi. Chunki, ko'paytiruvchi va o'zgartirilgan koeffitsiyentlarni hisoblashda ko'paytmalar yig'indisi bir-biridan juda katta grafa soniga uzoq bo'lib qoladi. Bu vaziyat hisoblashni murakkablashtiradi va yanglishishga imkoniyat ko'payadi.

Ko'rsatilgan kamchilik ikki hisoblash sxemasini qo'llash bilan yo'qotiladi.

Sxema 1 ga birinchi boshlang'ich sistemalar koeffitsiyentlarini N va ekvivalent tenglamalar sistemalarini N_e ko'chirib oladi. *Sxema 2* ga eliminatsion tenglamalar koeffitsiyentlarini E ko'chirib yozadi.

Qog'ozni *Sxema 2* navbatdagi grafasining chap qirrasini bo'yicha qayirib, *sxema 1* mos grafasining o'ng qirrasiga taqab qo'yadi. Natijada ko'paytiriladigan juft ko'paytuvchilar qatorda joylashib qoladi.

Sxema 1 va *sxema 2* ning ko'rinishi 3-jadvalda ko'rsatilgan.

Sxema 2 ni *sxema 1* ga tutashtirayotganda adashmaslik uchun sxemaning yuqori qirralari qalin chiziq bilan belgilangan.

Birinchi boshlang'ich sistema koeffitsiyentlari (*sxema 1* da yarim qalin chiziq bilan ajratilgan) ekvivalent va eliminatsion tenglama koeffitsiyentlariga nisbatan boshqa rangdagi siyoh bilan ko'chirilishi kerak.

Sxema 1 da hamma qatorlar to'ldiriladi, *sxema 2* da bitta qator tashlab to'ldiriladi.

Katta sonli geodezik o'lchashlarni matematik qayta ishlash tajribasi shuni ko'rsatdiki, birinchi boshlang'ich normal tenglamalar koeffitsiyentlari va ekvivalent sistema koeffitsiyentlari qiymatlarida verguldan keyin uchta sonni saqlash, eliminatsion tenglamalar koeffitsiyentlarida bitta ikkita son ko'proq saqlash kerak bo'ladi. Noma'lumlarni hisoblagandan keyin iloji boricha ularni navbatdagi ekvivalent tenglamaga qo'yib borish kerakligi eslatib o'tamiz.

3 jadval

1 Sxema								2 Sxema								
Grafalar va qatorlar	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	...	L		z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	...	L	Grafalar va qatorlar
N_1	N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	N_{15}	...	L_1									
$N_1^{(0)}$	N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	N_{15}	...	L_1			E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	...	E_{1L}	E_1
N_2		N_{22}	N_{23}	N_{24}	N_{25}	...	L_2									
$N_2^{(0)}$		$N_{22}^{(0)}$	$N_{23}^{(0)}$	$N_{24}^{(0)}$	$N_{25}^{(0)}$	...	$L_2^{(0)}$				E_{23}	E_{24}	E_{25}	...	E_{2L}	E_2
N_3			N_{33}	N_{34}	N_{35}	...	L_3									
$N_3^{(2)}$			$N_{33}^{(2)}$	$N_{34}^{(2)}$	$N_{35}^{(2)}$	...	$L_3^{(2)}$					E_{34}	E_{35}	...	E_{3L}	E_3
N_4				N_{44}	N_{45}	...	L_4									
$N_4^{(1)}$				$N_{44}^{(1)}$	$N_{45}^{(1)}$	...	$L_4^{(1)}$						E_{45}	...	E_{4L}	E_4
$\vdots$					$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

“Tepa” hisoblarining to’g’riligining noma’lumlarining hisoblanish $i = z - 1$ yaxshi tekshirish nazorati hisoblanadi. Buning uchun quyidagi grafadan foydalaniladi

$$s_j = N_{1j} + \dots + N_{1j} + N_{jk} + L_j.$$

Parametrik tenglashtirish usulida albatta quyidagi tekshirish tengligidan foydalanish kerak

$$[pa_1v] = [pa_2v] = [pa_3v] = \dots = [pa_kv] = 0$$

Korrelat tenglashtirish usulida o’lchangan miqdorlarning tenglashtirilgan qiymatini hamma shartli tenglamalarga qo’yib chiqish kerak.

Agar tenglamalarni yechish uchun krakovyan usuli qo’llanilayotgan bo’lsa, 1 – sxema dagi $N_1^{(0)}, N_2^{(0)}, \dots, N_m^{(m-1)}$ qatorlarga va 2 – sxemadagi E qatorlarga krakovyan qatorlari joylashtiriladi. Bu qatorlarni ikki marta ko’chirib yozishga to’g’ri keladi. Krakovyan usulini bunday qo’llash katta sistemali tenglamalarni kal’kulyatorda yechishda ancha foydasizdir. Kompyuterda bu usulda yechish Gauss algoritmiga qaraganda samaradordir.

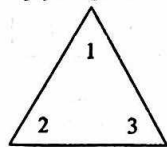
19. PLANLI GEODEZIK TO’RLARDA SHARTLI TENGLAMALARNING BA’ZI TURLARI

Triangulyatsiyalarni tenglashtirish uchun korrelat usulini amaliy qo’llashda shartli tenglamalarni tuzishni bilish juda muhim.

Quyidagi masalarni va №4 tekshirish ishi topshiriqlarini bajarishda uchraydigan shartli tenglamalar to’rini ko’rib o’tamiz.

1. Figura (uchburchak) sharti

Uchburchakning burchaklari haqiqiy qiymatlari (1-chizma) figuralar sharti quyidagicha



1 чизма

$$I + II + III + 180^\circ = 0$$

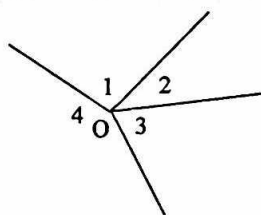
Burchaklarning haqiqiy qiymatlarini o’lchangan haqiqiy qiymatlarga almashtirish tenglikning o’ng tomonida bog’lanmaslik xatoligiga olib keladi.

$$1 + 2 + 3 - 180^\circ = W$$

Tenglashtirilgan burchaklar uchun topamiz:

$$1 + (1) + 2 + (2) + 3 + (3) - 180^\circ = 0 \text{ yoki } (1) + (2) + (3) + W = 0$$

2. Gorizont sharti



2-чизма

O nuqtada burchaklarning haqiqiy qiymatlari quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$I+II+III+IV-360^{\circ}=0$$

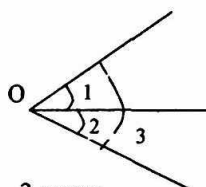
O'lchangan burchaklar yig'indisi bog'lanmaslik xatoligiga olib keladi:

$$1+2+3+4-360^{\circ}=W$$

quyidagicha:

$$1+(1)+2+(2)+3+(3)+4+(4)-360^{\circ}=0 \quad \text{yoki} \quad (1)+(2)+(3)+(4)+W=0$$

Tenglashtirilgan burchaklar uchun gorizont sharti



3-чизма

3. Stansiya shartlari.

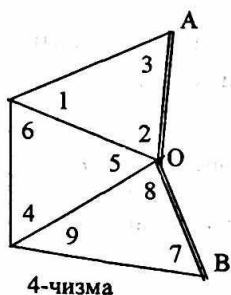
Alohida burchaklardan boshqa O nuqtada ularning yig'indisi o'lchansa shunday shart paydo bo'ladi (3-chizma):

$$I+II+III=0$$

Burchaklarni o'lchash bilan bog'lanmaslik

$1+2+3=W$ xatolikni va shartli tenglama $(1)+(2)+(3)+W=0$ topamiz.

4. Yig'indilar sharti (qattiq burchaklar sharti)



4-чизма

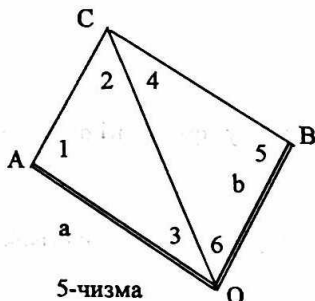
Agar AOB burchak berilgan bo'lsa, ya'ni aniq o'lchashlar natijasida olingan bo'lsa, unda quyidagi shart paydo bo'ladi:

$$II+V+VIII-\overline{AOB}=0$$

Yig'indilar sharti tenglamasi quyidagicha:

$$(2)+(5)+(8)+W=0$$

bu yerda: $W=2+5+8-AOB$



Yig'indilar sharti – bu direksion burchak sharti uchun xususiy hol, ya'ni boshlang'ichi qattiq direksion burchaklar bilan berilgan ikkita tomon bo'lsa.

5. Tomonlar(bazis) sharti

Tomonlar sharti OB tomonini ketma-ketlik bilan uchburchaklar AOC va OBS larni yechish orqali OA tomonni hisoblab topilgan qiymatining, ularning berilgan qiymati bilan mos tushishini qanoatlantirishi talab qilinadi. Bunda "a" va "b" tomonlar - bazis tomonlar.

Sinuslar teoremasidan foydalanib uchburchaklarni yechib,

$$b = \frac{a \sin I \sin IV}{\sin II \sin V} \dots \text{yoki} \dots \frac{a \sin I \sin IV}{b \sin II \sin V} = 1$$

Oxirgi ifodani logarifmlaymiz:

$$\lg a + \lg \sin I + \lg \sin IV - \lg b - \lg \sin II - \lg \sin V = 0$$

Burchaklarning haqiqiy qiymatlarini o'lgan qiymatlar bilan almashtirish tenglamaning o'ng tomonida bog'lanmaslik xatosini beradi:

$$\lg a + \lg \sin I + \lg \sin 4 - \lg b - \lg \sin 2 - \lg \sin 5 = W$$

O'lgan burchaklarga tenglashtirishdan tuzatmalar kiritish quyidagi ifodaga olib keladi:

$$\lg a + \lg \sin\{I + (i)\} + \lg \sin\{4 + (4)\} - \lg b - \lg \sin\{2 + (2)\} - \lg \sin\{5 + (5)\} = 0$$

Taylor qatoriga yoyishdan foydalanib funktsiyani chiziqli ko'rinishga keltiramiz:

$$u = \lg \sin\{i + (i)\} = \lg \sin i + \frac{\partial u}{\partial i}(i) = \lg \sin i + M \operatorname{ctg} i = \lg \sin i + M \frac{(i)''}{\rho''} \operatorname{ctg} i$$

Oxirgi had $(i)'' = 1''$ dagi qiymatini Δ_i orqali belgilaymiz, ya'ni

$$\Delta_i = \frac{M \operatorname{ctg} i}{\rho''}$$

bunda:

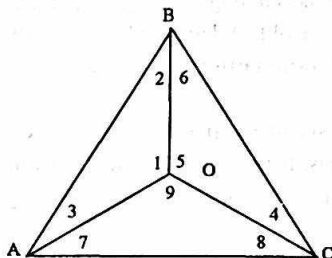
bu yerda: Δ_i – burchakning $1''$ ga uzgarishida $\lg \sin$ o'zgarishi. Yetti qiymatli jadvalda logarifm d ning $10''$ ga o'zgarishi berilgan, shuning uchun

$\Delta_i = \frac{d}{10}$. 90° dan kichik bo'lgan burchaklar uchun Δ_i qiymat plyus ishoraga, 90° – dan katta burchaklar uchun minus ishoraga ega bo'ladi.

Endi chiziqli ko'rinishga keltirilgan shartli tenglama quyidagicha bo'ladi:
 $\lg a + \lg \sin 1 + \Delta_1(1) + \lg \sin 4 + \Delta_4(4) - \lg b - \lg \sin 2 - \Delta_2(2) - \lg \sin 5 - \Delta_5(5) = 0$
 yoki ozod hadni hisobga olganda $\Delta_1(1) + \Delta_4(4) - \Delta_2(2) - \Delta_5(5) + W = 0$

Agar bitta bazisdan ikkinchisiga o'tishda bir nechta yo'nalish bo'yicha o'tishga to'g'ri kelsa, unda uchburchaklar kamrog'i tanlanadi.

6. Qutb(polyus) sharti



6-chizma

Qutb sharti shunday vaziyatda bo'ladiki, agar biror tomonni biror boshqa tomon orqali hisoblab topish imkoniyati bo'lsa. Shart hisoblangan qiymatlarning tengligini talab qiladi. To'r bunday holatda qutb degan nuqtaga ega bo'lishi kerak. Bunda yopiq figuraning hamma nuqtalarida yo'nalish o'lgangan bo'lishi kerak (6-chizma) yoki diagonal bo'lishi kerak.

Polyus sharti bazis sharti kabi tuziladi, faqat ozod had formulasida bazislar logarifmi olib tashlanadi, chunki bu yerda bosh berilgan tomon yagona hisoblanadi.

Qutb (polyus) shartini quyidagi usul bilan tuzish mumkin. Nuqta O ni qutb deb olamiz va uchun quyidagi tenglikni yozamiz:

$$\frac{OA}{OC} \cdot \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OB}{OA} = 1. \text{ Ushbu uchburchaklardan ikki tomonlarining tomon}$$

munosabatlarni sinuslar munosabatlari bilan almashtiramiz:

$$\frac{\sin VIII \sin VI \sin III}{\sin VII \sin IV \sin II} = 1 \quad \text{topamiz.}$$

Mos ravishda tomonlar sharti bilan topamiz:

$$-\Delta_2(2) + \Delta_3(3) - \Delta_4(4) + \Delta_6(6) - \Delta_7(7) + \Delta_8(8) + W = 0$$

20. Triangulyatsiya namunaviy figurasini ikki guruhli tenglashtirish usuli misoli

Ikki guruhli tenglashtirishning bir nechta usuli mavjud. Eng ko'proq qo'llaniladigani Kryuger usulidir. Uning ma'nosi shundan iboratki, shartli tenglamalar sitemasi ikki guruhga bo'linadi. Ikkinchi guruh shartli tenglamalar noaniq ko'paytmalar yordamida shunday o'zgartiriladiki, bunda korrelat normal tenglamalari umumiy sistemasini ikkita bog'lanmagan qismga bo'linadi. Bu bilan normal tenglamalarni yechishda hisoblash hajmini kamaytirishga erishiladi.

Ikki guruhli tenglashtirish usuli tartibini aniq misolda ko'rib o'tamiz.

5. Topshiriq. Markaziy sistemadagi (1-chizma) burchaklarni ikki guruhli tenglashtirish usuli bilan tenglashtirish va OC tomonini aniqlashning aniqligini baholang. O'lchash natijalari oldingi topshiriqda berilgan va 1-jadvalda ko'rsatilgan.

1. Shartli tenglamalar sonini hisoblash

Oldingi topshiriqda $r = 5$ ekanligini topdik.

2. Birinchi guruh shartli tenglamalarini tuzish.

Uning qatoriga figuralar shartli tenglamalarini kiritamiz

1) $(1)+(2)+(3)+5,3''=0$

2) $(4)+(5)+(6)-5,9''=0$

3) $(7)+(8)+(9)+5,1''=0$

Bog'lanmaslik xatoligi 1-jadvalda hisoblangan

2.1. Birinchi guruh shartli tenglamalarini yechish.

Birinchi guruh tenglamalari umumiy tuzatmaga ega emas, shuning uchun uchburchaklar bog'lanmasligini teng uch bo'lakka taqsimlaymiz. Shu tarzda olingan 1-jadvaldagi birinchi tuzatma o'lchangan burchaklarga tuzatma kiritiladi.

3. Ikkinchi guruh shartli tenglamalarini tuzish.

Ikkinchi guruhga gorizont va qutb(polyus) shartlari kiradi.

Bu shartlarning ozod hadlarini oldindan to'g'rilangan burchaklar qiymati bo'yicha hisoblaymiz.

3.1. Gorizont shartli tenglamasi.

$$(1)+(5)+(9)-3,7=0$$

Uchburchaklarni yechish

Burchak №	O'Ichangan burchaklar	Birinchi tuzatma	Oldindan to'g'rilangan burchaklar	Ikkinchi tuzatmalar	Tenglashtirilgan burchaklar	Tenglashtirilgan burchaklar-sinus logarifmi	Tomonlar logarifmi
1	106° 50' 40",3	-1,7"	106° 50' 38",6	+1,1	106° 50' 39",7	9,9809553	3,3182719
2	42 16 38,6	-1,8	42 16 36,8	-1,4	42 16 35,4	9,8278273	3,1651439
3	30 52 46,4	-1,8	30 52 44,6	+0,3	30 52 44,9	9,7103110	3,0476276
Σ	180° 00' 05",3 W ₁ =+5,3	-5,3	180° 00' 00",0	0,0	180° 00' 00",0		
4	20° 58 20,2	+2,0	20° 58 22,2	-1,9	20° 58 20,3	9,5537819	3,0476276
5	125 20 36,8	+1,9	125 20 38,7	+1,4	125 20 40,1	9,9115246	3,4053703
6	33 40 57,1	+2,0	33 40 59,1	+0,5	33 40 59,6	9,7439805	3,2378262
Σ	179° 59 54,1 W ₂ =-5,9	+5,9	180° 00' 00"	0,00	180° 00' 00"		
7	28° 26' 12",5	-1,7	28° 26' 10",8	-1",8	28° 26' 09",0	9,6777659	3,2378262
8	23 45 11,9	-1,7	23 45 10,2	+0,6	23 45 10,8	9,6050836	3,1651439
9	127 48 40,7	-1,7	127 48 39,0	+1,2	127 48 40,2	9,8976467	3,4577070
Σ	180° 00' 05",1 W ₃ =+5,1	-5,1	180° 00' 00",0	0	180° 00' 00"		

$$[V'V'] = 29,65$$

3.2. Qutb(polyus) shartli tenglamasi

Uni oldingi topshiriqda qanday bajargan bo'lsak shunday bajaramiz, faqat oldindan tenglashtirilgan burchaklardan foydalanish bilan.

Ozod hadni hisoblash

Burchaklar №	Burchaklar qiymati
1	106° 50' 38",6
5	125 20 38,7
9	127 48 39,0
	359° 59' 56",3
	W ₄ = -3,7"

Ozod hadni hisoblash

Burchaklar №	Burchaklar qiymati	Burchaklar sinusi logarifmi	Δ I"	Burchaklar №	Burchaklar qiymati	Burchaklar sinusi logarifmi	Δ I"
3	30° 52' 44",6	9,7103100	+35,2	2	42° 16' 36",8	9,8278306	+23,2
6	33 40 59,1	9,7439789	+31,5	4	20 58 22,2	9,5537924	+54,9
8	23 45 10,2	9,6050808	+47,9	7	28 26 10,8	9,6777729	+38,9
	Σ ₁	9,0593697			Σ ₂	9,0593959	

$$W_5 = \Sigma_1 - \Sigma_2 = -262 \cdot 10^{-7}$$

Ozod hadlarni 5-chi darajali logarifm bilan ifodalab, qutb shartli tenglamasini olamiz.

$$-0,232(2)+0,352(3)-0,549(4)+0,315(6)-0,389(7)+0,479(8)-2,62=0$$

4. Vazn funksiyasini tuzish.

OC tomonni aniqlashning aniqligini baholash uchun vazn funksiyasini tuzish 4.3 bo'limda qanday qilingan bo'lsa shunday bajariladi.

$$\Delta F = +0,064(1) + 0,352(3) - 0,549(4) + 0,315(6)$$

5. Ikkinchi guruh shartli tenglamalari koeffitsiyentlarini almashtirish va normal tenglamalarni tuzish.

Agar ikkinchi guruh birinchi shartli tenglama koeffitsiyentlarini α_1 deb belgilasak, unda almashtirilgan koeffitsiyentlar A_{i1} quyidagi formulalar bo'yicha topiladi:

$$A_{11} = \alpha_{11} - \frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31})$$

$$A_{21} = \alpha_{21} - \frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31})$$

$$A_{31} = \alpha_{31} - \frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31})$$

$$A_{41} = \alpha_{41} - \frac{1}{3}(\alpha_{41} + \alpha_{51} + \alpha_{61})$$

$$A_{91} = \alpha_{91} - \frac{1}{3}(\alpha_{71} + \alpha_{81} + \alpha_{91})$$

Har bir uchburchakka tegishli 2.9-jadvalda (2.25) formulaga asosan berilgan tenglashtirish uchun koeffitsiyentlar yig'indisi hisoblangan. Yig'indining uchdan biri mos uchburchakning almashtirilmagan koeffitsiyentlaridan ayrilgan. Xuddi shunday ikkinchi shartli tenglamalarning almashtirilgan koeffitsiyentlari A_{i2} va funksiyaning almashtirilgan koeffitsiyentlari hisoblanadi.

Bur ch. №	α_1	α_2	f	A_{11}	A_{21}	S_{11}	F_{11}	Σ_{11}	V_{11}
1	+1		+0,064	+2	-0,040	+1,960	-0,075	+1,885	+1,11
2		-0,232		-1	-0,272	-1,272	-0,139	-1,411	-1,37
3		+0,352	+0,352	-1	+0,312	-0,688	+0,213	-0,475	+0,26
Σ		+0,120	+0,416	0	0,000	0,000	-0,001	-0,001	
4		-0,549	-0,549	-1	-0,471	-1,471	-0,471	-1,942	-1,93
5	+1			+2	+0,078	+2,078	+0,078	+2,156	+1,44
6		+0,315	+0,315	-1	+0,393	-0,607	+0,393	-0,214	+0,48
Σ		-0,234	-0,234	0	0,000	0,000	0,000	0,000	
7		-0,389		-1	-0,419	-1,419		-1,419	-1,78
8		+0,479		-1	+0,449	-0,551		-0,551	+0,64
9	+1			+2	-0,030	+1,970		+1,970	+1,14
Σ		+0,090		0	0,000	0,000		0,000	14,08
W	-3,7	-2,62		-11,1	-2,62				[v v]
K				+0,613	+2,793			[v v] = - [kw] = 14,12	
			$[A_1]$	+18,00	+0,024	+18,024	+0,010	+18,034	
			$[A_2]$		0,933	+0,957	+0,490	+1,477	
			$[S]$			+18,981	+0,500	+19,481	
			$[F]$				0,453	+0,952	
			$[\Sigma]$					20,433	

Qachon boshlang'ich koeffitsiyentlar 0 va 1 ga teng bo'lsa, unda almashtirilgan mos ravishda $-1/3$ yoki $+2/3$ ga teng bo'ladi. Kasrli sonlar bilan ishlashni qulay qilish uchun unday koeffitsiyentlar va mos ravishda ozod hadlar 3 ga ko'paytiriladi.

Har bir uchburchakdagi almashtirilgan koeffitsiyentlar yig'indisi 0 ga teng bo'lishi kerak.

Korrelat normal tenglamalari koeffitsiyentlarini hisoblash 2.9-jadvalda odatdagi tartibda bajariladi.

Yig'indilarni hisoblash: $S=S'+W$

$$S_1=[A_1S]+W_4=+18,024-11,1=+6,924$$

$$S_2=[A_2S]+W_5=+0,957-2,62=-1,663$$

Ikkinchi guruh normal tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$+18,000 K_1 + 0,024 K_2 - 11,1 = 0$$

$$+0,024 K_1 + 0,933 K_2 - 2,62 = 0$$

6. Ikkinchi guruh korrelat normal tenglamalarini yechish.

Yechish: quyidagi jadvalda bajariladi.

K_1	K_2	W	S	F	$\Sigma = S - W + F$
+18,000	+0,024	-11,1	+6,924	+0,01	+18,034
-1	-0,0013	+0,6167	-0,3847	-0,0006	-1,0019
(-0,05556)					
	+0,933	-2,62	-1,663	+0,490	+1,447
	0,000	+0,014	-0,009	0,000	-0,023
	+0,933	-2,606	-1,672	+0,490	+1,424
	-1	+2,7931	+1,7921	-0,5252	-1,5263
	(-1,07181)				
		-	-13,72	+0,453	+0,952
		-6,845	+4,270	0,000	-0,011
		-7,279	-4,670	-0,257	-0,748
+0,617	+2,793	-14,124	-14,120	+0,196	+0,193
-0,004	K_2	$[v \ v]$	$[v \ v]$	$1/P_f$	$1/P_f$
+0,613					
K_1					

Normal tenglamalarni yechishni tekshirish

$$1) +18,000 \cdot 0,613 + 0,024 \cdot 2,793 - 11,1 = +0,001;$$

$$2) +0,024 \cdot 0,613 + 0,933 \cdot 2,793 - 2,62 = +0,001.$$

7. Ikkinchi tuzatma va burchaklarning tenglashtirilgan qiymatini hisoblash

Ikkinchi tuzatmalar quyidagi formulalar bo'yicha hisoblanadi:

$$v_i' = A_{i1} K_1 + A_{i2} K_2$$

Qiymat $[v \ v]$ bevosita tuzatmalar bo'yicha va tekshiruv formulalari bo'yicha topiladi:

$$[v^{\circ} v^{\circ}] = -[kw]$$

Bu qiymatlarni olingan qiymatlar bilan solishtiramiz.

Burchaklarning tenglashtirilgan qiymatlari hisoblangan. O'sha joyda uchburchaklarni yechish tenglashtirilgan burchaklar bo'yicha va boshlang'ich tomonlar logarifmi bo'yicha hisoblangan.

8. Tenglashtirishning yakuniy tekshirish.

1-jadvalda uchburchaklar tenglashtirilgan ichki burchaklarini yig'indisini hisoblaymiz va birinchi va uchinchi uchburchakdagi olingan AO tomonlar logarifmi qiymati bilan solishtiramiz.

9. Aniqlikni baholash.

1) To'liq tuzatmalar kvadratlari yig'indisi

$$[v^2] = [v^{\circ} v^{\circ}] + [v^{\circ} v^{\circ}] = 29,65 + 14,08 = 43,73$$

2) Burchaklar o'lchashi o'rta kvadratik xatosi

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} = \sqrt{\frac{43,73}{5}} = 3,0$$

xatolikning o'z xatoligi

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2r}} = \frac{3,0}{\sqrt{10}} = 0,95$$

3) OC tomoni logarifmi o'rta kvadratik xatosi

$$m_{\lg s} = m \sqrt{\frac{1}{P_F}} = 3,0 \sqrt{0,196} = 1,33 \text{ birlik 5-chi darajali logarifmi.}$$

4) OC tomonini aniqlashning nisbiy xatosi

$$\frac{m_s}{S} = \frac{m_{\lg s}}{M} = \frac{1,33}{0,434 \cdot 10} = \frac{1}{32600}$$

Ikki guruhli tenglashtirish usuli natijalari oldin ko'rib o'tgan usul natijalari bilan mos keldi.

Harfiy belgilardagi uchta normal tenglamalarni yechishning umumiy sxemasi

1 ilova

Uchta normal tenglamalarni yechishning umumiy sxemasi					Uchta normal tenglamalarni yechishning umumiy sxemasi					Uchta normal tenglamalarni yechishning umumiy sxemasi				
t_1	t_2	t_3	I	S	Tek- tab	Q_1	Q_2	Q_3	S	F	$S-l+f$	S_1	S_2	S_3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$[a_1, a_1]$	$[a_1, a_2]$	$[a_1, a_3]$	$[a_1, I]$	$[a_1, S]$			$[a_1, I] = 1$	$[a_1, I] = 0$	$[a_1, I] = 0$	S_1	f_1	f_1	f_1	f_1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$[a_2, a_1]$	$[a_2, a_2]$	$[a_2, a_3]$	$[a_2, I]$	$[a_2, S]$			$[a_2, I] = 0$	$[a_2, I] = 0$	$[a_2, I] = 0$	S_2	f_2	f_2	f_2	f_2
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$[a_3, a_1]$	$[a_3, a_2]$	$[a_3, a_3]$	$[a_3, I]$	$[a_3, S]$			$[a_3, I] = 0$	$[a_3, I] = 0$	$[a_3, I] = 0$	S_3	f_3	f_3	f_3	f_3
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$[a_1, a_1]$	$[a_1, a_2]$	$[a_1, a_3]$	$[a_1, I]$	$[a_1, S]$			$[a_1, I] = 0$	$[a_1, I] = 0$	$[a_1, I] = 0$	S_1	f_1	f_1	f_1	f_1
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$[a_2, a_1]$	$[a_2, a_2]$	$[a_2, a_3]$	$[a_2, I]$	$[a_2, S]$			$[a_2, I] = 0$	$[a_2, I] = 0$	$[a_2, I] = 0$	S_2	f_2	f_2	f_2	f_2
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$[a_3, a_1]$	$[a_3, a_2]$	$[a_3, a_3]$	$[a_3, I]$	$[a_3, S]$			$[a_3, I] = 0$	$[a_3, I] = 0$	$[a_3, I] = 0$	S_3	f_3	f_3	f_3	f_3
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$[a_1, a_1]$	$[a_1, a_2]$	$[a_1, a_3]$	$[a_1, I]$	$[a_1, S]$			$[a_1, I] = 0$	$[a_1, I] = 0$	$[a_1, I] = 0$	S_1	f_1	f_1	f_1	f_1
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$[a_2, a_1]$	$[a_2, a_2]$	$[a_2, a_3]$	$[a_2, I]$	$[a_2, S]$			$[a_2, I] = 0$	$[a_2, I] = 0$	$[a_2, I] = 0$	S_2	f_2	f_2	f_2	f_2
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$[a_3, a_1]$	$[a_3, a_2]$	$[a_3, a_3]$	$[a_3, I]$	$[a_3, S]$			$[a_3, I] = 0$	$[a_3, I] = 0$	$[a_3, I] = 0$	S_3	f_3	f_3	f_3	f_3
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$[a_1, a_1]$	$[a_1, a_2]$	$[a_1, a_3]$	$[a_1, I]$	$[a_1, S]$			$[a_1, I] = 0$	$[a_1, I] = 0$	$[a_1, I] = 0$	S_1	f_1	f_1	f_1	f_1
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$[a_2, a_1]$	$[a_2, a_2]$	$[a_2, a_3]$	$[a_2, I]$	$[a_2, S]$			$[a_2, I] = 0$	$[a_2, I] = 0$	$[a_2, I] = 0$	S_2	f_2	f_2	f_2	f_2
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$[a_3, a_1]$	$[a_3, a_2]$	$[a_3, a_3]$	$[a_3, I]$	$[a_3, S]$			$[a_3, I] = 0$	$[a_3, I] = 0$	$[a_3, I] = 0$	S_3	f_3	f_3	f_3	f_3
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$[a_1, a_1]$	$[a_1, a_2]$	$[a_1, a_3]$	$[a_1, I]$	$[a_1, S]$			$[a_1, I] = 0$	$[a_1, I] = 0$	$[a_1, I] = 0$	S_1	f_1	f_1	f_1	f_1
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$[a_2, a_1]$	$[a_2, a_2]$	$[a_2, a_3]$	$[a_2, I]$	$[a_2, S]$			$[a_2, I] = 0$	$[a_2, I] = 0$	$[a_2, I] = 0$	S_2	f_2	f_2	f_2	f_2

ADABIYOTLAR:

1. Жўраев Д.О. Геодезик ўлчашларни математик қайта ишлаш назарияси. 1-қисм: Ўлчашлар хатоликлари назарияси. Ўқув қўлланма. Т., ТАҚИ, 2000, 142 бет
2. Жўраев Д.О. Геодезик ўлчашларни математик қайта ишлаш назарияси. 2-қисм: Энг кичик квадратлар усули. Ўқув қўлланма Т., ТАҚИ, 2000, 110 бет
3. Жўраев Д.О., Носирова Д.Р. Геодезия. Ўқув қўлланма. 1-қисм. Т., ТАҚИ. 2002, 157 бет.
4. Жўраев Д.О., Ковалев Н.В. Городской и земельный кадастр. Учебное пособие. Ташкент, ТАСИ, 2004, 116 с.
5. Жўраев Д.О. Геодезия. 2-қисм. Ўқув қўлланма. Тошкент, ТАҚИ, 2004, 217 бет.
6. Jo'rayev D.O. Geodeziya. 1-qism. O'quv qo'llanma. Toshkent, TDTU, 2006, 140 b
7. Jo'rayev D.O. Geodeziya. 2-qism. O'quv qo'llanma. Toshkent, «O'sbekiston», 2006, 207 b.
8. Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. Основы теории ошибок. Книга 1. – М. МИИГАиК, 2005, 66 с.
9. Маркузе Ю.И. Теория математической обработки геодезических измерений. Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений. Книга 2. – М. МИИГАиК, 2005, 280 с.
10. Куштин И.Ф. Геодезия: обработка результатов измерений: учебное пособие. –М, ИКЦ, МарТ. 2006. -288 с.
11. Большаков В.Д. «Теория ошибок наблюдений» М., «Недра», 1983, 223с.
12. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. «Теория математической обработки геодезических измерений» М., «Недра», 1977, 367 с.
13. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. М., «Недра», 1984, 352 с.
14. Гудков В.М., Хлебников А.В. Математическая обработка маркшейдерско-геодезических измерений. Учеб. для вузов. –М., Недра, 1990, -335 с.

MUNDARIJA

	Kirish	5
	2-QISM. ENG KICHIK KVADRATLAR USULI	6
13.	Bir nechta o'lhangan qiymatlarni birgalikda tenglashtirish masalasining mohiyati	6
13.1	Eng kichik kvadratlar usulining prinsipi	9
13.2	Tenglashtirish masalasini yechishning asosiy usullari	11
13.3	Tenglashtirishning parametrik usuli	14
13.4	Matritsa ifodasida parametrik usulda tenglashtirish	20
13.5	Parametrik usulida teng aniqlikka ega bo'lgan o'lchashlar natijasini tenglashtirish misoli	20
13.6	Parametrik usulida teng aniqlikka ega bo'lmagan o'zchashlar natijasini tenglashtirish misoli	29
13.7	Tenglashtirishning korrelat usuli	41
13.8	Korrelat usulida teng aniqlikka ega bo'lmagan o'lchashlar natijasini tenglashtirish misoli	45
13.9	Triangulyatsiya namunali shakllarini korrelat usuli bilan tenglashtirish misoli	52
13.10	Tenglashtirish materiallari bo'yicha aniqlikni baholash.	58
14	Normal tenglamalarni tuzish va yechish.	66
14.1	Normal tenglamalar koeffitsiyentlarini yechish.	66
14.2	Normal tenglamalarni yechish	71
14.3	Gauss algoritmi bilan normal tenglamalarni yechishning to'liq va qisqartirilgan sxemasi.	83
14.4.	Krakovyan usuli	88
14.5.	Oddiy iteratsiya usulida tenglamalarni yechish	92
15	Funksiya vaznlarini yechish usullari	95
15.1	Funksiya vaznlarini parametrik tenglashtirish usulida hisoblash	95
15.2.	Funksiya vaznlarini korrelat tenglashtirish usulida hisoblash	107
16	Asosiy tenglashtirish usullarining boshqa ko'rinishlari.	112

	Shartli tenglamalarni yechishning guruhli usullari	112
16.1	Gaussning ikki guruhli usuli.	112
16.2	Gaussning yaqinlashtirish usuli	115
16.3	Kryuger usuli	116
16.4	Bol'ts usuli	120
17	Tenglashtirish usulining kombinatsiyalangan usuli	122
17.1	Ortiqcha noma'lumli parametrik usul	122
17.2	Bessel' usuli	129
17.3	Qo'shimcha noma'lumli(o'lchanmagan) korrelat usuli	133
18.	Ko'p noma'lumli tenglashtirish hisoblari	137
	Ko'p noma'lumli normal tenglamalarni tuzish va yechish	137
18.1	Mustaqil bo'laklarga bo'linadigan normal tenglamalar sistemasini yechish	138
18.2.	Pranis-Pranevichning ko'p guruhli usuli	140
18.3	Katta sistemali normal tenglamalarni yechish uchun hisoblash sxemasi. Yechishning qo'shimcha nazorati	146
19.	Planli geodezik to'rlarda shartli tenglamalarning ba'zi turlari	148
20.	Triangulyatsiya namunaviy figurasini ikki guruhli tenglashtirish usuli misoli	152
	Ilova	157
	Adabiyotlar	159

Jo'raev Davron Oqnazarovich

**GEODEZIK O'LCHASHLARNI MATEMATIK
ISHLASH NAZARIYASI**

2-QISM

ENG KICHIK KVADRATLAR USULI

Darslik

Bosishga ruxsat etildi. 07.01.2020 y.

Qog'oz bichimi 60x84 1/16. Times New Roman
garniturasida terildi.

Ofset uslubida oq qog'ozda chop etildi.

Nashriyot hisob tabog'i 10,0 Adadi 10. Buyurtma № 07
Bahosi kelishuv asosida

Nizomiy nomidagi Toshkent davlat pedagogika
universitetining bosmaxonasida chop etildi.

Manzil: Toshkent shahar Chilonzor tumani,
Bunyodkor ko'chasi 27 uy.

