

ББК 31.29

Ф75

УДК 621.311.019.3

Фокин Ю. А., Туфанов В. А.

Ф75 Оценка надежности систем электроснабжения. —
М.: Энергоиздат, 1981 — 224 с., ил.

75 к.

Рассматриваются методы оценки надежности как элементов, так и систем электроснабжения. Приводятся показатели эксплуатационной надежности характерных элементов, рассматриваются модели отказов элементов и влияние характеристик нагрузок и параметров внешней среды на показатели функциональной надежности. Большое внимание уделяется методам расчета надежности сложных электрических схем с использованием структурного анализа. Изложены алгоритмы расчета недоотпуска электроэнергии в сложных системах электроснабжения.

Для научных работников, инженеров научно-исследовательских и проектных организаций инженеров энергопредприятий.

Ф 30312-548
051(01)-81 55-81 (Э). 2302050000

ББК 31.29
6П.2.1

Юрий Александрович Фокин
Вячеслав Александрович Туфанов

Оценка надежности систем электроснабжения

Редактор А. В. Мясников
Редактор издательства И. А. Сморгчова
Обложка художника В. Д. Козлова
Технический редактор Н. П. Собакина
Корректор Н. А. Смирнова
ИБ № 1529 («Энергия»)

Сдано в набор 23.04.81 Подписано в печать 03.08.81 Т-22071
Формат 84×108¹/₃₂ Бумага типографская № 2 Гарн. шрифта литературная
Печать высокая Усл. печ. л. 11,76 Уч.-изд. л. 12,47
Тираж 6000 экз. Заказ 1133 Цена 75 к.

Энергоиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

© Энергоиздат, 1981

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема обоснования целесообразного уровня надежности систем электроснабжения на современном этапе развития имеет большое народнохозяйственное значение. Аварийные и внезапные перерывы электроснабжения потребителей вызывают большой народнохозяйственный ущерб, обусловленный поломкой оборудования, порчей сырья и материалов, затратами на ремонты, недовыпуском продукции, простоями технологического оборудования и рабочей силы, а также издержками, связанными с другими факторами.

Проблема надежности технических систем в ее современном виде была сформулирована в начале 50-х годов применительно к радиоэлектронным устройствам и системам автоматики, которые включали в себя большое количество элементов. В настоящее время методы анализа надежности используются уже во многих отраслях техники. Однако функционирование различных технических систем имеет свои особенности, «механический» перенос методов, разработанных в одних областях техники, на другие не может дать плодотворных результатов. Поэтому при изложении ряда вопросов надежности, возникающих при проектировании и эксплуатации систем электроснабжения, авторы стремились учесть как достижения современной теории надежности, так и специфику функционирования систем электроснабжения как систем силового типа, подверженных в значительной степени влиянию неблагоприятных воздействий внешней среды и непосредственно связанных с электрической системой и объектами народного хозяйства.

В настоящее время проектирование и эксплуатация систем электроснабжения промышленных предприятий, городов, объектов сельского хозяйства, как правило, производятся без количественных оценок надежности схем электрических соединений. Такое положение в ря-

де случаев приводит к выбору неоптимальных решений. Учитывая сложность проблемы надежности в ее количественной постановке для инженеров, занимающихся проектированием и эксплуатацией систем электроснабжения, авторы стремились к максимальному упрощению излагаемого материала.

Целью настоящей книги является ознакомление широкого круга специалистов, занимающихся проектированием и эксплуатацией систем электроснабжения, с основными вопросами теории надежности в их практическом приложении.

В связи с введением в вузах курса «Основы теории надежности» для специальности «Электроснабжение промышленных предприятий, городов и сельского хозяйства» в предлагаемой книге сделана также попытка систематизации материала по отдельным вопросам учебной программы, имеющегося во многих журнальных статьях, трудах конференций, совещаний и т. д. При изложении этого материала нашел отражение опыт авторов в чтении лекций по указанному курсу.

В процессе написания данной книги материал между авторами был распределен следующим образом: введение, гл. 2, § 3. 1—3.6, гл. 4 написаны Ю. А. Фокиным, гл. 1, § 3.7—3.10, гл. 5, 6 — В. А. Туфановым.

Авторы выражают глубокую признательность доктору техн. наук, проф. В. А. Веникову, который явился инициатором написания этой книги. Они благодарны сотрудникам и аспирантам кафедры ст. инж. А. М. Орлову, ст. инж. А. В. Быкову, В. Н. Третьякову и А. М. Харченко, принимавшим участие в сборе и обработке материала, разработке программ и проведении расчетов. Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность рецензенту канд. техн. наук В. Я. Ольховскому и редактору канд. техн. наук, доц. А. В. Мясникову, чьи замечания способствовали улучшению книги.

Замечания и пожелания по книге просим сообщать по адресу: 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10, Энергоиздат.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Современные системы электроснабжения являются частью электроэнергетических систем, которые отличаются от других технических систем не только большими размерами, но и сложным характером взаимосвязей между отдельными элементами и внешней средой, а также между объектами производства и потребления энергии. Системы электроснабжения имеют те же особенности, что и электроэнергетические системы. Одной из основных характеристик системы является надежность, определяющая экономическую эффективность функционирования системы.

С кибернетических позиций система электроснабжения является открытой. Ее функционирование можно представить как непрерывный обмен энергией между системой и потребителями при невозможности ее складирования и непреднамеренно мешающих воздействиях на систему, приводящих к отказу ее элементов, а в ряде случаев и системы в целом.

Взаимодействие между системой электроснабжения и внешней средой носит стохастический (вероятностный) характер, и можно говорить лишь о некоторой вероятности достижения системой цели — передачи энергии потребителю.

При оценке эффективности работы системы электроснабжения можно различать два вида ее устойчивости: вещественно-энергетическую и структурно-функциональную. Первый вид связан с постоянством энергетического баланса, второй — с постоянством структуры системы и ее реакции на внешние воздействия. Для современных систем электроснабжения промышленных предприятий, городов, объектов сельского хозяйства и других объектов второй вид устойчивости является определяющим, хотя с усложнением структуры и значительным увеличением мощности единичных потребителей возможен переход к определяющей роли первого вида. В предлагаемой книге основное внимание уделено методам оценки постоянства структуры системы при слу-

чайных воздействиях на ее элементы, т. е. оценки так называемой структурной или схемной надежности систем электроснабжения. Под надежностью любого технического объекта будем понимать его способность выполнять определенные задачи в определенных условиях эксплуатации, а применительно к системам электроснабжения — обеспечение потребителей электроэнергией в пределах допустимых показателей ее качества (напряжения, частоты).

Надежность системы электроснабжения также является одним из показателей качества системы, однако этот показатель существенным образом отличается, например, от показателей качества энергии, так как если система не обладает необходимой степенью надежности, то все остальные показатели качества теряют свое практическое значение, поскольку они не могут быть полноценно использованы в эксплуатации. Фактор надежности всегда учитывался при создании систем электроснабжения. Деление потребителей на категории по надежности и рекомендации по построению схемных решений для электроснабжения каждой категории способствуют обеспечению структурной устойчивости системы во времени. С развитием науки о надежности, занимающейся анализом общих закономерностей, определяющих долговечность работы различных технических устройств и сооружений, и разработкой способов предупреждения отказов на стадиях проектирования, сооружения и эксплуатации, а также развитием и проникновением во все области человеческой деятельности вычислительной и информационной техники, создались объективные условия решения проблем надежности не только в качественном, но и в количественном аспекте. Надежность при этом можно оценить количественно как вероятность того, что характеристики объекта будут находиться в пределах технических норм на протяжении заданного периода времени при заданных условиях эксплуатации.

На основе количественных оценок надежности возможна количественная оценка экономической эффективности системы электроснабжения.

В настоящее время в качестве количественного показателя эффективности принимают отношение реального выходного эффекта к идеальному, т. е. отношение математического ожидания отпущенной потребителем

электроэнергии в реальной системе к математическому ожиданию энергии в идеальной по показателям функционирования системе. Количественная оценка эффективности является одним из конечных результатов всех расчетов надежности силовых систем, каковыми являются системы электроснабжения. При этом недоотпуск электроэнергии потребителям, обусловленный отказами элементов оборудования, определяется с учетом реальных характеристик электропотребления. Очевидно, что количественная оценка эффективности системы электроснабжения должна базироваться на количественных показателях ее надежности.

В расчетах надежности систем электроснабжения, так же как и любых технических систем, возникает противоречивое желание: иметь, с одной стороны, наиболее точную расчетную модель, с другой — простоту расчетов и обеспеченность модели исходными данными.

В настоящее время в энергетике, да и в большей части основных областей техники получили широкое распространение элементные методы расчета, исходящие из предположения, что система состоит из самостоятельных (в смысле надежности) элементов, т. е. на второй план отходят функциональные зависимости между параметрами элементов. Применение элементных методов расчета надежности на современном этапе в значительной степени оправдано теми задачами, которые могут быть решены при реальных возможностях получения информации об отказах оборудования и его режимах работы. Оценка надежности систем электроснабжения производится на этапе проектирования или реконструкции и в гораздо более редких случаях — в процессе эксплуатации. Поэтому необходимы методы оценки надежности, позволяющие работать с минимумом исходных данных, в то же время обеспечивающие достоверные результаты, по возможности простые, позволяющие рассматривать достаточно большое количество вариантов, ограничивающих области детальных исследований. При решении этих задач элементные методы могут дать вполне приемлемые с практической точки зрения результаты. Этим отнюдь не отрицается необходимость разработки более совершенных методов оценки надежности, в частности методов управления уровнем надежности, исходя из анализа функционирования элементов, процессов, происходящих в элементах и

системе при передаче электроэнергии и воздействии на нее внешних неблагоприятных факторов, т. е. так называемой функциональной надежности.

Поэтому в книге дается статистический анализ характеристик надежности основных элементов систем электроснабжения, полученных в реальных системах, и рассмотрены возможности количественных отражений «физики» отказов, обусловленных старением элементов системы, т. е. постепенных отказов.

В большей своей части элементы систем электроснабжения являются восстанавливаемыми после отказа и отключаемыми во время функционирования системы с целью профилактики и капитальных ремонтов. Показатели надежности элементов в общем случае непостоянны во времени, меняются в течение эксплуатации. Наиболее адекватно математически такого рода процессы функционирования системы описываются с использованием случайных процессов, которые, однако, сложны в практических инженерных расчетах, поэтому в книге определенное место отводится обоснованию возможностей упрощения математических моделей для целей практического применения.

В связи с постоянно растущей сложностью систем электроснабжения (увеличением числа элементов и функциональных взаимосвязей) возникает проблема разработки инженерных методов расчета надежности сложных многосвязных систем с многими входами (источниками электроэнергии) и выходами (потребителями) с ориентацией на широкое использование ЭВМ. При этом рассматриваются не только способы анализа надежности, основанные на анализе хотя и ограниченно, но в реальных системах все же очень большого количества состояний системы, обусловленных различным состоянием отдельных ее элементов, но и способы, основанные на структурном анализе систем, применение которых позволяет формализовать не только процессы расчета показателей надежности, но и, что особенно важно в практических расчетах, процесс получения расчетных схем по надежности — весьма трудоемкую операцию. Основная трудность формализации в получении расчетных схем по надежности систем электроснабжения состоит в том, что отказы не всех элементов локализируются в них самих в результате работы автоматических выключателей (которые к тому же сами могут

отказывать). Отказ ряда элементов в зависимости от конкретных электрических схем приводит к отключению на время оперативных переключений и других смежных с ним элементов. Поэтому часто электрическая схема отличается от схемы по надежности функционирования.

В настоящее время исследования и разработанные методы решения задач оценки как структурной (схемной) надежности, так и надежности функционирования, связанных с анализом режимов работы, находятся на такой стадии развития, когда ставится вопрос не только о принципиальной возможности решения той или иной задачи, но и о выборе наиболее экономичного и практически приемлемого алгоритма решения. Ориентация на аналитические методы решения позволяет получать достаточно простые результативные алгоритмы.

Как уже отмечалось, одной из конечных целей расчета надежности систем электроснабжения является оценка недоотпуска электроэнергии. Эта задача в настоящее время является еще нерешенной, для ее решения проводятся интенсивные исследования. Одно из возможных направлений, основанное на широком использовании методов линейного программирования, освещено в пятой главе.

Привлечение аппарата аддитивных двойственных оценок позволило наметить пути решения задачи синтеза надежности систем электроснабжения.

Применяемые в настоящее время элементные методы расчета базируются на статистике отказов оборудования систем электроснабжения. Достоверные статистические данные о процессах функционирования элементов являются залогом получения достоверных результатов в расчетах надежности систем. Однако степень достоверности результатов расчетов надежности систем по известной достоверности результатов для элементов до последнего времени оценивалась интуитивно на качественном уровне. В книге излагаются методы определения доверительных границ для показателей надежности систем электроснабжения.

Теория и практика надежности систем электроснабжения развиваются всего лишь на протяжении 15—20 лет и поэтому не могут претендовать на законченность. Ряд вопросов недостаточно разработан и нуждается в соответствующем уточнении.

Глава первая

ПОКАЗАТЕЛИ И ХАРАКТЕРИСТИКИ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ

1.1. Основные показатели надежности элементов

Показателем надежности принято называть признак (мерило), по которому оценивается надежность элемента, а характеристикой надежности — количественное значение этого показателя для конкретного элемента. В теории надежности показатели надежности обычно связывают со случайными событиями, являющимися отказами и восстановлением элемента. Однако идентичные показатели могут быть определены и для других состояний (или событий), характеризующих функционирование элемента, например переход в горячий (холодный) резерв, профилактика или плановый ремонт и т. д.

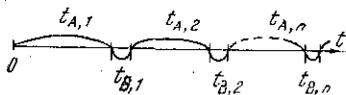


Рис. 1.1. Траектория случайного процесса функционирования восстанавливаемого элемента.

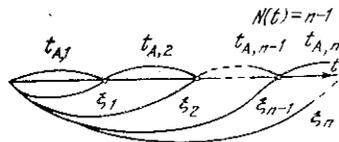


Рис. 1.2. Траектория случайного потока однородных отказов.

Как наиболее общий случай рассмотрим функционирование восстанавливаемого элемента. Функционирование такого элемента представляет случайный процесс с конечным множеством состояний и непрерывным временем, для которого (рис. 1.1) интервалы $t_{A,i}$ ($t_{B,i}$) соответствуют нахождению элемента в рабочем (отказовом) состоянии. Так как для большинства элементов $t_{A,i} > t_{B,i}$, то для описания отказов можно принять более простую модель, а именно случайный ординарный поток однородных событий (траектория этого процесса представлена на рис. 1.2). Усилим упрощение, считая $t_{A,i}$ неза-

висимыми случайными величинами с одинаковым законом распределения, что при произвольном виде закона распределения приводит нас к так называемому потоку с ограниченным последствием (ПОП-модели).

Рассматриваемая модель соответствует такой эксплуатации элемента, когда аварийный ремонт полностью восстанавливает первоначальное качество элемента или состоит в замене отказавшего элемента идентичным новым. Естественно, что она «соответствует» реальному функционированию элемента с некоторой оговоркой, как и всякая другая идеализация. Однако свойство независимости подтверждают статистические данные об отказах элементов электроэнергетических систем — основная доля их может быть отнесена к внезапным отказам. Кроме того, анализ статистического материала обычно выявляет значительное количество различных причин и видов отказов, которые не связаны друг с другом и, следовательно, не обуславливают друг друга. Иногда даже можно найти случаи полного соответствия модели, так, например, замена опоры или гирлянды изоляторов на воздушной линии электропередачи при их повреждении.

Для полного определения процесса с ограниченным последствием (иногда его называют процессом восстановления) достаточно охарактеризовать все моменты появления отказов, т. е. случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Наиболее важной характеристикой исследуемого случайного процесса является число отказов $N(t)$ в интервале времени $[0, t]$.

Обозначим через $F(t)$ распределение случайной величины $t_{A,i}$ и через $F^{(n)}(t)$ распределение случайной величины $\xi_n = t_{A,1} + t_{A,2} + \dots + t_{A,n}$, т. е. $F^{(n)}$ представляет n -кратную свертку распределения $F(t)$, определяемую, как известно, по рекуррентной формуле

$$F^{(n)}(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x) dF(x). \quad (1.1)$$

К моменту времени t ($\xi_{n-1} < t < \xi_n$) произошло $(n-1)$ отказов элемента. Интуитивно ясно и можно строго показать, что функция $F(\xi_n) = F^{(n)}(t)$ однозначно определяет вероятность появления n и более отказов¹, т. е.

$$P\{N(t) \geq n\} = F^{(n)}(t). \quad (1.2)$$

¹ Очевидно, что $P\{N(t) \geq 0\} = F^{(0)}(t) = 1$, так как $N(t) \geq 0$ является достоверным событием.

С другой стороны, вероятность $P\{N(t) \geq n\}$ полностью определяет закон распределения дискретной случайной величины $N(t)$ для заданного интервала времени $[0, t]: F\{N(t) < n\} = 1 - P\{N(t) \geq n\}$. Так как этот закон распределения определяется как сумма вероятностей появления исследуемой случайной величины $P\{N(t) = n\}$ (где $n = 0, 1, 2, \dots$), то ясно, что вероятность появления $N(t) = n$ определится разностью ординат закона распределения

$$P\{N(t) = n\} = F\{N(t) < n+1\} - F\{N(t) < n\} = \\ = P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\},$$

что с учетом (1.2) приводит к соотношению

$$P\{N(t) = n\} = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t). \quad (1.3)$$

Среднее число отказов в интервале времени $[0, t]$

$$\Omega(t) = M\{N(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = [F^{(1)}(t) - F^{(2)}(t)] + \\ + 2[F^{(2)}(t) - F^{(3)}(t)] + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t). \quad (1.4)$$

Используя (1.1) и тот факт, что $F^{(1)}(t) = F(t)$, получаем основное уравнение

$$\Omega(t) = F(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t F^{(n)}(t-x) dF(x). \quad (1.5)$$

Так как знаки Σ и \int можно взаимно менять местами, то

$$\Omega(t) = F(t) + \int_0^t \left[\sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t-x) \right] dF(x). \quad (1.6)$$

В (1.6) выражение, стоящее в квадратных скобках, в соответствии с (1.4) равно $\Omega(t-x)$, следовательно,

$$\Omega(t) = F(t) + \int_0^t \Omega(t-x) dF(x). \quad (1.7)$$

Осуществляя предельный переход $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\Omega(t)/\Delta t]$, получаем функцию $\omega(t)$, тождественно равную математическому ожиданию числа отказов в единицу времени ($\Delta t \sim 1$). В теории надежности этот основной показатель надежности восстанавливаемого элемента получил название параметра потока отказов. Проведя аналогичную операцию с выражением (1.4), получим:

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(t), \quad (1.8)$$

где $f^{(n)}(t)$ — плотность распределения величины ξ_n .

Любой элемент площади $f^{(n)}(t)\Delta t$ определяет безусловную вероятность появления любого n -го отказа ($n = 1, 2, \dots$) в интервале $[t, t + \Delta t]$, следовательно, $\omega(t)$ тождественно определяет также безусловную вероятность отказа элемента в единицу времени.

Несмотря на кажущуюся сложность представленных выкладок, выявленная вероятностная трактовка параметра потока отказов позволяет достаточно просто получить его статистическую оценку. Для этого достаточно определить среди n элементов, находящихся под наблюдением в интервале времени $[0, t + \Delta t]$, число отказавших элементов в интервале $[t, t + \Delta t]$, после чего

$$\hat{\omega}(t) = N(t, t + \Delta t) / [n(t, t + \Delta t)\Delta t]. \quad (1.9)$$

Для невосстанавливаемого элемента, работающего до первого отказа, имеет место случай вырожденного случайного процесса, траектория которого полностью определяется длительностью интервала безотказной работы. Из выражения (1.3) имеем:

$$P\{N(t) = 0\} = 1 - F(t) = P(t), \quad (1.10)$$

т. е. закон распределения длительности интервала t_d полностью характеризует надежность этого элемента.

Функция $P(t)$ определяет вероятность безотказной работы (иногда ее называют функцией надежности), функция $Q(t) = F(t)$ обозначает вероятность отказа, а ее производная $Q'(t)$ — плотность вероятности времени безотказной работы. В силу свойства плотности вероятности произведение $Q'(t)\Delta t$ определяет безусловную вероятность того, что элемент откажет в интервале $[t, t + \Delta t]$. Очевидно, что $Q'(t)\Delta t$ есть вероятность совме-

шения двух событий $P(AB)$, где событие A состоит в безотказной работе элемента в интервале $[0, t]$, т. е. $P(A) = P(t)$, а событие B — в отказе элемента на отрезке $(t, t + \Delta t)$. Тогда $P(B/A) = P\{t < t_{A,i} < t + \Delta t / t_{A,i}\}$ — вероятность того, что элемент откажет в интервале $(t, t + \Delta t)$ при условии, что он проработал без отказа до момента t :

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{Q'(t)}{P(t)} \Delta t = - \frac{P'(t)}{P(t)} \Delta t = \lambda(t) \Delta t. \quad (1.11)$$

Полученный показатель $\lambda(t)$ называется интенсивностью отказов элемента и тождественно равен условной вероятности отказа элемента в интервале $[t, t + \Delta t]$ (здесь, как и раньше, $\Delta t \sim 1$) при условии, что он работал безотказно до момента t . Заметим, что эта функция сравнительно давно используется в демографии при составлении таблиц смертности, т. е. для человека интенсивность «отказа» определялась значительно раньше, чем для технических объектов. В общем случае $\omega t \neq \lambda(t)$, и только для экспоненциального закона распределения $\omega(t) = \lambda(t) = \lambda$. Равенство $\omega(t) = \lambda(t)$ справедливо также для нестационарных пуассоновских процессов. Для «стареющих» элементов $\lambda(t)$ является неубывающей функцией, а $\omega(t)$ имеет всегда конечное установившееся значение при $t \rightarrow \infty$. Статистическая оценка функции $\lambda(t)$ проводится по формуле, аналогичной (1.9), только ее знаменатель определяется средним числом безотказно работающих в интервале $[t, t + \Delta t]$ элементов.

Подобным образом на основе закона распределения времени восстановления $F(t_B)$ можно определить интенсивность восстановления $\mu(t)$.

Не останавливаясь подробно на других показателях надежности, которые исчерпывающе могут быть описаны на основе закона распределения случайной величины (гамма-процентный ресурс), их математическими ожиданиями (наработка на отказ, среднее время восстановления и т. п.) или на основе вероятностей, представляющих средние относительные длительности (коэффициент готовности, коэффициент технического использования), укажем на следующий необходимый показатель. Элемент может находиться не в одном, а в нескольких состояниях отказа, вызывающих различные последствия. Рабочие состояния также могут отличаться друг от дру-

га, например, значениями передаваемой мощности. В этих условиях коэффициент готовности не является исчерпывающей характеристикой. Каждое состояние целесообразно в этом случае характеризовать безусловной вероятностью, смысл и способ определения которой аналогичны коэффициенту готовности. Кроме установившихся значений вероятностей этих состояний, справедливых при $t \rightarrow \infty$, необходимо ввести неустановившееся значение, соответствующее относительно малому периоду времени. Это необходимо при расчетах надежности на малых отрезках времени.

Получаемая на основе обработки статистического материала оценка параметра потока отказов в общем случае не позволяет однозначно определить другие вероятностные характеристики, например функцию распределения $F(t_{A,i} < t)$, которая необходима при расчетах надежности систем с использованием метода статистического моделирования. Особенно затруднителен указанный период для нестационарных потоков отказов.

Переход к другим характеристикам невозможен без установления определенности по отношению к свойству последствия потока отказов, выражающемуся в степени зависимости чисел отказов для любых непересекающихся интервалов времени. Статистическое определение этого свойства в большинстве случаев затруднено, а часто является просто невозможным. Возможны лишь численные эксперименты с последующим сравнением получаемых результатов со статистическими оценками функций $\hat{\omega}(t)$. Так, например, для стареющих элементов можно проанализировать изменение характера поведения функции $\omega(t)$ в зависимости от значения и знака коэффициента корреляции между величинами $t_{A,i}$ и $t_{A,i+1}$. Однако такой подход для высоконадежных элементов явно нецелесообразен, так как интересующая нас информация может быть оценена на основе анализа причин отказов и особенностей эксплуатации. В большинстве практических случаев реальные потоки могут быть представлены одной из следующих наиболее изученных к настоящему времени математических моделей: пуассоновский поток (поток без последствия), у которого количества отказов на двух непересекающихся интервалах времени независимы; закон распределения случайной величины $t_{A,i}$ в общем случае зависит от того, где на оси времени произошел i -й отказ; условная и

безусловная вероятности отказа в единицу времени совпадают (НПП-модель); функция $\omega(t)$ полностью определяет процесс;

поток отказов с ограниченным последствием, у которого взаимно независимы промежутки времени между отказами, т. е. все величины $t_{A,i}$ имеют одинаковую функцию распределения $Q(t)$, поэтому для того, чтобы задать поток с ограниченным последствием, достаточно указать функцию распределения $Q(t)$ (ПОП-модель).

После того как исследуемый реальный поток отказов элементов представлен одной из указанных моделей, легко могут быть получены все необходимые характеристики надежности. Особенности определения конкретных характеристик рассматриваются далее.

В отличие от других технических систем оценку показателей надежности элементов электроэнергетической системы невозможно провести на основе специально разработанных планов испытаний, т. е. с помощью активного эксперимента. Необходимая информация в основном может быть получена с помощью наблюдения или ретроспективных данных об эксплуатации. Обработку эксплуатационной статистики обычно приходится вести при изменяющемся объеме выборки и времени ее получения и при неизвестных законах распределения для получаемых совокупностей случайных величин. Поэтому разработанные в теории надежности методы, которые, как известно, ориентированы на другие условия и области техники, не могут быть использованы непосредственно. Вот почему при изложении последующих разделов основное внимание обращается на особенности применения вероятностно-статистических методов, иллюстрируемые примерами для различных элементов систем электроснабжения. Примеры выбраны так, чтобы кроме способов статистической оценки показать основные, типичные характеристики надежности, обусловленные особенностями функционирования и «физикой отказов».

1.2. Характеристики эксплуатационной надежности воздушных линий электропередачи 110 кВ. Стационарная модель

Статистический материал, собранный для воздушных линий, находящихся в однородных условиях эксплуатации и оборудованных средствами грозозащиты и устройствами АПВ, содержал число устойчивых отключений,

превышающее 50. Рассматривались линии электропередачи, работающие во втором климатическом районе (по ветровым нагрузкам), суммарной длиной свыше 1500 км. На основе исчерпывающей технической документации после соответствующего упорядочения статистических данных о длительности функционирования элементов оценка параметров потока отказов (устойчивых повреждений) производилась по формуле

$$\hat{\omega}_0(t) = \frac{N(t, t + \Delta t)}{L_{\Sigma}(t, t + \Delta t) \Delta t}, \quad (1.12)$$

где $N(t, t + \Delta t)$ и $L_{\Sigma}(t, t + \Delta t)$ — соответственно число отказов на интервале $[t, t + \Delta t]$ и суммарная длина ли-

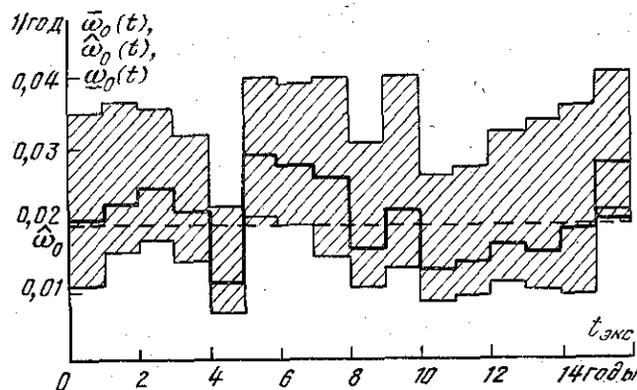


Рис. 1.3. Функция $\hat{\omega}_0(t)$ и границы доверительных интервалов для $\gamma=0,9$.

ний, имеющих срок службы $T(t \leq T \leq t + \Delta t)$; Δt — период усреднения ($\Delta t = 1 \div 2$ года).

Функция $\hat{\omega}_0(t)$ для линий на металлических опорах представлена на рис. 1.3. Там же показаны границы двусторонних доверительных интервалов $\bar{\omega}_0(t)$, $\omega_0(t)$, полученные при доверительной вероятности $\gamma=0,9$. Для линий на деревянных и железобетонных опорах изменение функции $\hat{\omega}_0(t)$ во времени имеет подобный характер. Исследуемые случайные функции имеют устойчивый средний уровень $\hat{\omega}_0$, а амплитуды отклонений от среднего уровня, как показала проверка, близки к нор-

мальному распределению. Для такого процесса период времени между отказами имеет экспоненциальное распределение с параметром, равным среднему значению

функции $\hat{\omega}_0$, следовательно, поток устойчивых повреждений можно считать стационарным. Характер изменения автокорреляционной функции $K_x(\tau)$ (рис. 1.4) дает основание считать независимыми повреждения линий, происшедшие в различные сезоны года, т. е. для потока отказов правомерно свойство отсутствия последствия. Таким образом, процесс устойчивых повреждений исследуемых линий можно считать простейшим пуассоновским.

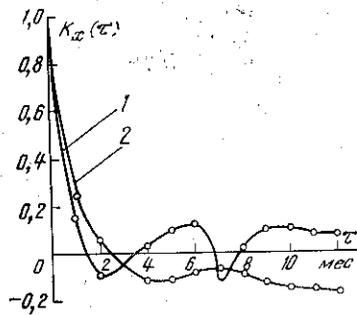


Рис. 1.4. Автокорреляционная функция процесса устойчивых отказов линий 110 кВ. 1 — на металлических опорах; 2 — на деревянных опорах.

Для линий, находящихся в одинаковых условиях эксплуатации, с помощью регрессионного анализа бы-

ла проверена гипотеза о наличии линейной зависимости между числом устойчивых повреждений и длиной линии. Экспериментальные данные представлены на рис. 1.5. Отклонения линий при повреждении их концевых устройств не учитывались, поэтому постоянная составляющая отсутствует. Уравнения регрессии было представлено в виде

$$N = al, \quad (1.13)$$

где a — коэффициент регрессии, связанный с коэффициентом корреляции $r_{N,l}$ соотношением $a = r_{N,l} \sigma_N / \sigma_l$; здесь

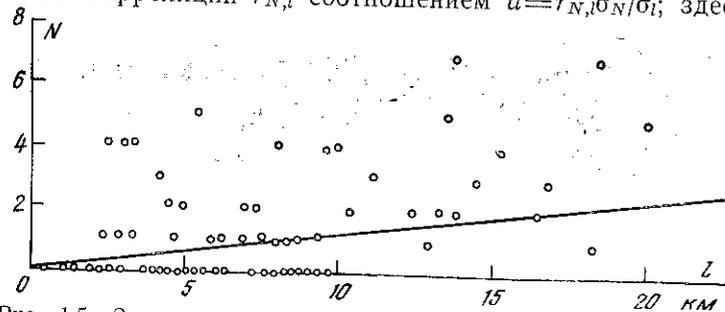


Рис. 1.5. Зависимость числа устойчивых повреждений от длины линии.

σ_N и σ_l — среднеквадратические отклонения соответственно для числа устойчивых повреждений и для длины линии l .

Расчеты дали следующие значения коэффициентов: $a = 0,12$ 1/км и $r_{N,l} = 0,34$. Полученные значения коэффициента еще не позволяют принять окончательное решение. Стохастическая связь считается реальной при q -процентном уровне значимости, если выполняется условие $|r_{N,l}| > t_q \sigma_r$, где t_q — квантиль нормального распределения, $\sigma_r = (1 - r_{N,l}) / \sqrt{m}$ — оценка среднеквадратического отклонения статистического коэффициента корреляции от теоретического, m — число опытов, равное в данном случае числу обследованных линий. При $q = 1\%$, $\sigma_r = 0,107$ и $t_q = 2,58$ имеем $|r_{N,l}| = 0,34 > 0,277$. Так как статистическая оценка коэффициента принадлежит критической области, то гипотеза о наличии исследуемой линейной зависимости правомерна.

Исчерпывающе полной характеристикой восстановления является закон распределения длительности аварийного простоя (ремонта). Для воздушных линий электропередачи, как и для других элементов систем электроснабжения, получаемые статистические ряды соответствуют несимметричным одномодальным распределениям, мода которых равна или по крайней мере близка к нулю. Среди отвечающих этому признаку распределений (гамма-распределение, распределение Вейбулла—Гнеденко, экспоненциальное) предположение следует отдать последнему, учитывая его простоту и удобство использования в последующих расчетах.

Для проверки согласованности теоретического и статистического распределения на первом этапе исследования очень удобно использовать вероятностную бумагу, линейный характер расположения точек на которой свидетельствует в пользу исследуемого распределения. Более строгую проверку следует проводить с использованием критериев согласия (χ^2 Пирсона, Колмогорова, ω^2 Мизеса и т. д.). В рассматриваемом случае такая последовательность проверки подтвердила правомерность гипотезы об экспоненциальном распределении. При этом математические ожидания длительностей аварийного ремонта составили 6,9 и 8 ч для линий соответственно на металлических и деревянных опорах.

Как показывает анализ причин повреждений, одно-

Оценка вероятностей развития аварии для двухцепных линий 110 кВ

Энергосистема	Характеристика	Материал опор		
		Металл	Дерево	Железобетон
1	\hat{p}	0,069	0	—
1	$\bar{p}-\underline{p}$ ($\gamma=0,99$)	0,18—0,02	0,03—0	—
2	\hat{p}	0,063	—	0,058
2	$\bar{p}-\underline{p}$ ($\gamma=0,99$)	0,15—0,03	—	0,2—0,01

фазные к.з. обуславливают более 70% устойчивых повреждений. В этих условиях эффективность применения устройств пофазного повторного включения явно видна из снижения оценки математического ожидания длительности аварийного простоя $\hat{t}_в$. Для весьма протяженных

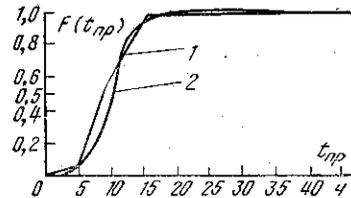


Рис. 1.6. Функции распределения длительностей отключений линии 110 кВ для производства капитального ремонта. 1 — статистическая; 2 — теоретическая.

линий 110 кВ использование этих устройств позволило снизить значение $\hat{t}_в$ более чем в 2 раза.

Важная группа показателей надежности связана с преднамеренными (плановыми) отключениями линии электропередачи для производства текущих (эксплуатационных) и капитальных ремонтов. В отличие от аварийных отключений здесь в механизме явления в большей мере проявляется фактор определенности: время и объем ремонтов определяются заранее. Но тем не менее случайные факторы и здесь проявляются в значительной степени. Случайные длительности отключений группируются около некоторого среднего значения. Очевидно, что в качестве теоретического распределения длительностей преднамеренных отключений целесообразно априори принять усеченное нормальное распределение. Как видно из рис. 1.6, это предположение является обоснованным для длительностей капитальных ремонтов. Необходимые проверки подтвердили правомерность предложенной аппроксимации.

Как известно, устойчивые повреждения цепей двухцепных линий или линий, проходящих по одной трассе, являются зависимыми событиями. Для практических расчетов представляет интерес оценка условной вероятности \hat{p} устойчивого отключения второй (первой) цепи при устойчивом повреждении первой (второй). Иногда эту характеристику называют вероятностью развития аварии. При известной вероятности \hat{p} параметр потока одновременных отключений обеих цепей двухцепной линии можно определить по формуле

$$\omega_0^{(2)} = 2\hat{p}\hat{\omega}_0. \quad (1.14)$$

Оценки вероятности \hat{p} и их доверительные границы $\bar{p}-\underline{p}$ приведены в табл. 1.1.

Полученные свойства потоков устойчивых повреждений справедливы для объектов, при проектировании и строительстве которых не было допущено ошибок в расчетных условиях и использования некачественных материалов; в противном случае поток отказов имеет убывающую характеристику $\hat{\omega}(t)$. Особенности получения характеристик надежности в этих условиях даны в § 1.3.

1.3. Характеристики эксплуатационной надежности силовых трансформаторов 110 кВ. Нестационарная модель

В основу расчетов были положены данные по эксплуатации трансформаторов 110 кВ одной из крупнейших энергосистем, расположенной во втором климатическом районе, за пятилетний период (1533 трансформаторо-года). При этом число трансформаторов со сроком наработки $t > 14$ лет определено ориентировочно. В качестве отказов трансформаторов фиксировались их устойчивые отключения с периодом времени $t \geq 3$ мин из-за неисправности самого трансформатора или его присоединения, но без коммутационной аппаратуры и реакторов. Случаи появления замыканий на землю во внешней ошиновке, не приводящие к автоматическому отключению трансформатора, не учитывались. Основная

доля отказов самих трансформаторов (63,6%) вызвана заводскими дефектами и некачественным монтажом. Как показывает анализ, такие отказы и отказы присоединения следует отнести к внезапным. Отказов при внешних КЗ и отказов, возникших из-за старения изоляции¹ (т. е. постепенных отказов), не зафиксировано. Это обусловлено малой долей трансформаторов с большой наработкой и, в значительно большей мере, отсутствием перегрузок и своевременным проведением капитальных ремонтов с заменой изоляцией.

Простейшим, но практически не отражающим характера отказов показателем надежности является средняя вероятность отказа за период наблюдения T (удельная повреждаемость). Этот показатель определяется по формуле

$$Q(T) = \left(\sum_{i=1}^T N_i \right) / \sum_{i=1}^T n_i \Delta t_i, \quad (1.15)$$

где N_i — число отказов за период $\Delta t = 1$ год; n_i — число трансформаторов, находящихся в работе в период Δt_i ; T — период наблюдения; $i = 1, 2, 3, \dots, T$.

Полученные оценки средней вероятности отказа ($3,05 \cdot 10^{-2}$; $3,3 \cdot 10^{-2}$; $5,67 \cdot 10^{-2}$ 1/год соответственно для трехобмоточных трансформаторов мощностью $S = 10 \div 100$ МВ·А, двухобмоточных $S < 10$ МВ·А и двухобмоточных трансформаторов с присоединением $S = 10 \div 100$ МВ·А) не имеют значимого разброса. Проверка по известным в математической статистике критериям показала, что выборки можно считать однородными. Поэтому данные по отказам рассматриваемых групп трансформаторов могут быть объединены, что позволяет получить более точные оценки характеристики надежности при имеющемся дефиците данных.

Определение характеристик потока отказов проводилось при допущении о мгновенном восстановлении. Такое допущение вполне правомерно в данном случае, так как время наработки на отказ более чем в 10^3 раз превосходит время восстановления. Заметим, что за время восстановления принимались длительность непродолжительного ремонта трансформатора на месте установки или время восстановления работы схемы в случае от-

ключения трансформатора без повреждения (повреждение присоединения) или при использовании резервного оборудования¹.

Оценка параметра потока отказов была определена как функция времени работы трансформатора, исчисляемого с момента ввода его в эксплуатацию:

$$\hat{\omega}(t, t + \Delta t) = N(t, t + \Delta t) / [n(t, t + \Delta t) \Delta t],$$

где $N(t, t + \Delta t)$ и $n(t, t + \Delta t)$ — число соответственно отказавших и находившихся в установке трансформаторов за период $\Delta t = 2$ года, имеющих срок наработки, равный t .

Значения этой функции за период $t \leq 8$ лет были определены точно, а за период $t > 8$ лет — с погрешностью $\pm (5 \div 20)\%$, возникающей из-за того, что число трансформаторов, установленных в 40-е и в начале 50-х годов, было определено приблизительно с помощью экстраполяции полученной корреляционной зависимости между числом трансформаторов в установке и количеством энергии, переданной потребителям. На рис. 1.7 представлена функция $\hat{\omega}(t)$ и нанесены границы двусторонних доверительных интервалов $\underline{\omega}(t)$ и $\overline{\omega}(t)$, соответствующих коэффициенту доверия $\delta_2 = 0,9$. Это значение коэффициента доверия было выбрано на основании информационного аспекта статистических оценок, который позволяет получить оптимальный (в информационном смысле) доверительный интервал. Вид функций $\omega(t)$ указывает на нестационарность потока отказов транс-

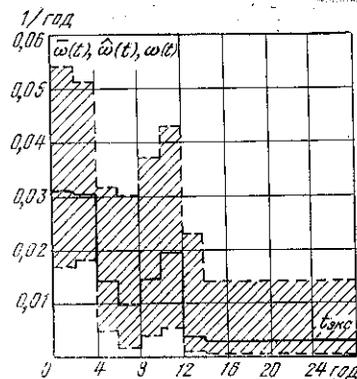


Рис. 1.7. Функция $\hat{\omega}(t)$ и границы доверительных интервалов ($\gamma = 0,9$) для системы трансформатор — присоединение.

¹ В некоторых случаях (например, при планировании резерва) в выборку времени восстановления нужно включать и время ремонта трансформаторов на заводе, так как оно соизмеримо с длительностью наработки на отказ. В этом случае необходимо использовать методику для процессов с конечным временем восстановления.

¹ Модели с учетом старения — см. гл. 2.

форматоров, свойство ординарности которого не вызывает сомнения.

подавляющее большинство трансформаторов имеет не более одного отказа, и мы можем считать, что периоды их наработки вследствие доминирования внезапных отказов являются независимыми случайными величинами. Тогда и интервалы времени между отказами, зафиксированные в полученной статистике, — также независимые случайные величины, т. е. мы получаем процесс с ограниченным последствием.

Основываясь на доминировании внезапных отказов, мы можем считать независимыми количества отказов в двух полегающих непересекающихся произвольно выбранных интервалах времени и тогда считать процесс пуассоновским. Указанные выше допущения приводят к гипотезам, которые следует считать граничными; в первой предполагается замена отказавших элементов исправными повыми, во второй надежность восстанавливаемого элемента принимается такой же, как и у элемента, ни разу не отказавшего к моменту обнаружения отказа первого. Выполнить проверку независимости указанных величин в обоих случаях при существующих обстоятельствах не представляется возможным, так как в статистическом материале мы имеем выборку различных состояний переменного числа (количественный рост парка трансформаторов) отказов при различном их положении по оси времени. Поэтому рассмотрим обе гипотезы, а их влияние на оценку надежности систем определим в § 3.8.

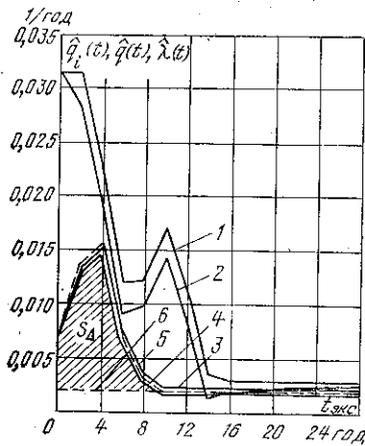


Рис. 1.8. Результаты расчетов характеристик надежности.

1, 2 — соответственное нулевое $\hat{q}_0(t) = \hat{w}(t)$ и десятое приближение плотности вероятности отказа для трансформатора с присоединением; 3, 4 — нулевое и пятое приближения плотности вероятности отказа трансформатора; 5 — статистическая функция интенсивности отказа трансформатора; 6 — прямая $\lambda(t, \infty)$.

независимости указанных величин в обоих случаях при существующих обстоятельствах не представляется возможным, так как в статистическом материале мы имеем выборку различных состояний переменного числа (количественный рост парка трансформаторов) отказов при различном их положении по оси времени. Поэтому рассмотрим обе гипотезы, а их влияние на оценку надежности систем определим в § 3.8.

Для процессов с ограниченным последствием плотность вероятности отказа $q(t) = Q'(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра с разностным ядром:

$$q(t) = \omega(t) - \int_0^t \omega(x) q(t-x) dx. \quad (1.16)$$

Результаты численного решения представлены на рис. 1.8. С помощью численного интегрирования была получена функция $Q(t)$, изменяющаяся более плавно. В нашем случае это свойство облегчает задачу по определению вида и параметров функций распределения интервалов между отказами (функции ненадежности в данном случае).

Большинство зафиксированных отказов происходит в начальный период работы трансформаторов — это можно объяснить дефектами изготовления отдельных трансформаторов, дефектами монтажа трансформаторов, присоединений, устройств защиты и автоматики. Этими дефектами обладает относительно небольшая часть элементов, для которых характерен относительно высокий уровень повреждаемости. Оставшаяся основная доля элементов обладает значительно более высоким уровнем надежности. Поэтому с учетом вышеуказанного подхода, а также характера изменения функций $\hat{w}(t)$ для времени распределения безотказной работы более правомерной среди прочих известных будет гипотеза о суперпозиции двух экспоненциальных распределений:

$$Q(t) = 1 - c_1 \exp(-\lambda_1 t) - c_2 \exp(-\lambda_2 t), \quad (1.17)$$

где c_1, λ_1 — соответственно доля и интенсивность отказов дефектных элементов; c_2, λ_2 — эти же значения для элементов без дефектов.

Приближенные начальные значения параметров этой функции надежности определялись на основании следующих соотношений:

$$\lambda_2 = \lambda(t, \infty), \quad c_1 \approx S_\Delta, \quad (1.18)$$

где S_Δ — характеристика функции $\hat{\lambda}(t)$, равная площади, ограниченной осью ординат, ломаной $\hat{\lambda}(t)$ и прямой $\lambda(t, \infty)$ (рис. 1.8).

Для ясности на рис. 1.8 $\hat{\lambda}(t)$ и S_Δ приведены только для случая отказов трансформаторов. Последующими

уточнениями по значениям функции $\widehat{Q}(t)$ параметры распределения (1.17) могут быть определены с достаточной точностью. В качестве критерия точности было использовано максимально возможное приближение теоретической функции распределения к статистической в зоне больших значений t . Непосредственное использование соотношений И. Б. Погожева не дает достаточно хорошего приближения теоретической функции надежности к статистической, по-видимому, из-за того, что статистические функции имеют не монотонный, а скачкообразный характер изменения на начальном нестационарном участке. Для исследуемых процессов получены следующие значения параметров:

для трансформатора $\lambda_1 = 0,287$ 1/год; $\lambda_2 = 0,05 \times 10^{-3}$ 1/год; $c_1 = 0,063$; $c_2 = 0,937$;

для системы трансформатор — присоединение $\lambda_1 = 0,162$ 1/год; $\lambda_2 = 0,7 \cdot 10^{-3}$ 1/год; $c_1 = 0,181$; $c_2 = 0,819$.

В случае суперпозиции экспоненциальных распределений интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \frac{c_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}}, \quad (1.19)$$

а параметр потока отказов имеет вид:

$$\omega(t) = \omega(t, \infty) + [\omega(0) - \omega(t, \infty)] \exp(-\gamma t), \quad (1.20)$$

где $\omega(t, \infty)$ — установившееся значение параметра $\omega(t)$, а остальные параметры связаны соотношениями

$$\lambda_1 \lambda_2 / (c_2 \lambda_1 + c_1 \lambda_2) \approx \lambda_2 / (1 - S_\Delta); \quad (1.21)$$

$$\omega(0) = \lambda(0) = \lambda_0 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2; \quad (1.22)$$

$$\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_0 \approx \lambda_1 (1 - S_\Delta). \quad (1.23)$$

Сравнение функций $\widehat{Q}(t)$ и $Q(t)$ при указанных выше значениях параметров и их взаимное расположение показывают на достаточно хорошее их соответствие.

Остановимся несколько подробнее на особенностях проверки конкурирующих гипотез. Следует отметить неприменимость для проверки конкурирующих гипотез критериев Колмогорова, $n\omega_2(\alpha)$ Мизеса и χ^2 Пирсона при подобном методе получения функции распределения

$\widehat{Q}(t)$, так как число рассматриваемых элементов меняется от интервала к интервалу. Некоторая возможность сравнения гипотез появляется в результате ис-

пользования приема, применяемого в критерии λ_n Пирсона. Этот критерий обладает высокой чувствительностью и работает при непостоянстве n_i по интервалам Δt_i , но в нашем случае он неприменим полностью, так как функция $\widehat{Q}(t)$ не достигает 1. Тем не менее, определив отклонения плотностей вероятностей конкурирующих гипотез $Q'(t)$ от статистической $\widehat{Q}'(t)$ по формуле

$$f(y) = \frac{\widehat{Q}'(t)}{Q'(t)} \Big|_{t=\varphi(y)}, \quad (1.24)$$

где $y = \widehat{Q}(t)$, можно установить, какая из конкурирующих гипотез имеет большую степень правомерности.

Меньшие отклонения (рис. 1.9), полученные для случая суперпозиции экспоненциальных распределений, подтверждают правильность наших исходных предпосылок, т. е. в качестве функции надежности для трансформаторов с ошиновкой (и отдельно для трансформаторов) мы можем принять суперпозицию двух экспоненциальных распределений.

Для нестационарного пуассоновского процесса вероятность появления отказа (функция надежности) на интервале $[0, t]$

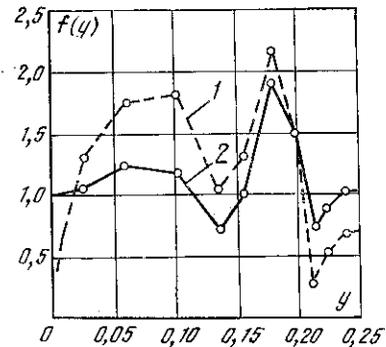


Рис. 1.9. Функции отклонения гипотетической плотности распределения от статистической для трансформатора с присоединением.

1 — при распределении Вейбулла — Гнеденко; 2 — при суперпозиции экспоненциальных распределений.

$$P(t) = \exp \left[- \int_0^t \omega(x) dx \right] = \exp \left[- \omega(t, \infty) t - \int_0^t e^{\beta - \gamma x} dx \right], \quad (1.25)$$

где $\beta = \ln [\omega(0) - \omega(t, \infty)]$.

В этом случае, если k -й отказ произошел во время t_k , то функция распределения интервала $t_{A, k+1}$ между

k -м и $(k+1)$ -м отказами выразится как

$$P(t_{A, k+1} < t) = 1 - \exp \left[- \int_{t_k}^{t_k+t} \omega(x) dx \right]. \quad (1.26)$$

Таким образом, в данной модели параметр потока отказов является исчерпывающей характеристикой надежности.

1.4. Характеристики надежности кабельных линий 110 и 35 кВ. Случай малых выборок, совместное действие внезапных и постепенных отказов

Максимальная нагрузка кабельных линий 110 кВ за весь период эксплуатации не превышала 40—60% нагрузки, допустимой по нагреву. Этот факт и имеющиеся данные периодических проверок изоляции позволяют предположить, что износ ее не достиг значения, обуславливающего значимую вероятность появления отказов, вызванных старением изоляции.

Исследуемыми отказами считались аварийные отключения, вызванные устойчивыми повреждениями кабельных линий (механические повреждения, электрический или тепловой пробой), и повреждения, обнаруженные обслуживающим персоналом и требующие немедленного вывода кабельных линий из работы (наличие газа в муфтах и кабеле, сильные течи масла).

Для получения характеристик надежности был использован статистический материал по линиям, неизменным по длине за рассматриваемый период времени. В качестве основной характеристики надежности принят закон распределения интервалов времени между аварийными отключениями $P(t)$ системы из нескольких кабельных линий, не изменяющейся по своему составу за рассматриваемый промежуток времени T .

Число зафиксированных аварийных отключений кабельных линий мало: $N=3$ *. Классические методы математической статистики в этом случае малоэффективны, так как сглаживание эмпирического распределения, которое производится для освобождения от несущественных случайных отклонений и выяснения истинного характера распределения, при очень малом числе данных не дает хороших результатов.

* Для кабельных линий низкого давления $N=3$ и полученные аналогичными методами результаты имеют качественно такой же характер.

В данном случае необходимо использовать методы для получения результатов по малым выборкам — прямоугольных вкладов и уменьшения неопределенности. Основные идеи этих методов состоят в том, чтобы использовать априорную информацию о границах распределения и об отсутствии скачков функции распределения внутри этих границ. Кроме того, отдельным осуществившимся на опыте значениям не приписывается особой значимости и информация, содержащаяся в конкретных реализациях, перераспределяется на области, примыкающие к этим реализациям. Указанные методы отличаются друг от друга способом перераспределения индивидуальной информации. Ниже использовался метод прямоугольных вкладов как наиболее эффективный.

Плотности и функции распределения интервала времени между аварийными отключениями для обследованных совокупностей кабельных линий среднего и низкого давления представлены на рис. 1.10. Полученные результаты дают основание предположить экспоненциальный закон распределения времени между от-

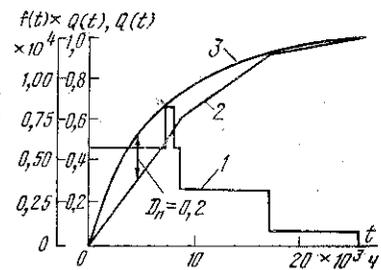


Рис. 1.10. Распределение интервала времени между аварийными отключениями кабельных линий 110 кВ среднего давления ($T=3$ года,

$L_{\Sigma}=42,3$ км).

1 — гистограмма; 2 — эмпирическое; 3 — теоретическое.

казами для каждой из совокупностей кабельных линий.

Для проверки гипотезы о законе распределения при использовании малых выборок следует рекомендовать критерий D_n Колмогорова. При использовании этого критерия в случаях, подобных нашему, следует выбрать заранее более высокий уровень значимости α и тем самым уменьшить вероятность ошибки второго рода, т. е. уменьшить вероятность принятия гипотезы, когда она ложна. Принимая значения уровня значимости $\alpha=0,2$, получаем критическое значение разности статистической и теоретической функций распределения $D_n(\alpha)=0,52$. Фактические наибольшие значения статистики D_n оказываются равными 0,2 и 0,08 соответственно для кабельных линий низкого и среднего давления. Так как в обоих случаях $D_n(\alpha) > D_n$, то предложенные выше гипотезы

могут быть приняты. Принятие этих гипотез эквивалентно утверждению о том, что поток аварийных отключений обоих типов кабельных линий является простейшим пуассоновским. Параметры этого потока легко могут быть определены известным образом для кабельной линии любой длины.

Для получения характеристик длительностей ремонта (восстановления) при аварийных повреждениях представляется возможным объединить статистические дан-

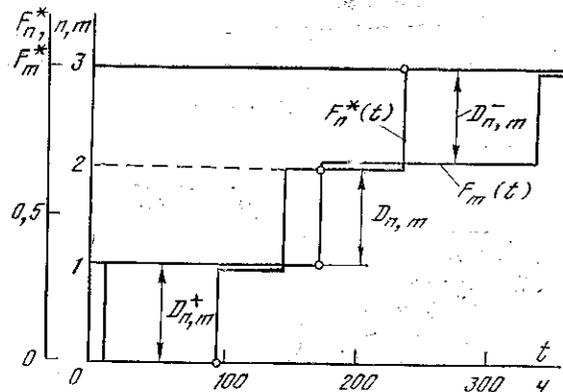


Рис. 1.11. Односторонние наибольшие расхождения $D_{n,m}^+$ и $D_{n,m}^-$ эмпирических функций $F_n^*(t)$ и $F_m^*(t)$.

ные по кабельным линиям обеих групп, так как принципиальных различий в приемах обнаружения и способах ликвидации повреждений у данных типов кабельных линий нет. Для подтверждения правомерности указанных предпосылок был применен критерий Смирнова для проверки гипотезы об однородности двух выборок. По имеющимся двум выборкам построены эмпирические функции распределения $F_n(t)$ и $F_m(t)$ длительностей аварийных ремонтов кабельных линий низкого и среднего давления соответственно (рис. 1.11).

За меру расхождения этих функций были приняты статистики $D_{n,m}^+$, $D_{n,m}^-$ и $D_{n,m}$, которые соответствуют $D_{n,m}^+$ и $D_{n,m}^-$ — односторонним наибольшим расхождениям, $D_{n,m}$ — наибольшему абсолютному расхождению. В соответствии с рис. 1.11 $D_{n,m}^+ = D_{n,m}^- = D_{n,m} = 0,33$, т. е.

значение статистики $D_{n,m}$ меньше критического значения наибольшего абсолютного расхождения $D_{n,m}(\alpha)$, которое при уровне значимости $\alpha=0,2$ принимает значение, равное 0,5. Полученные результаты подтверждают правомерность нулевой гипотезы, предполагающей однородность указанных выборок.

После объединения данных получены следующие результаты. Оценка математического ожидания длительности аварийного ремонта $t_b = 198$ ч, а эмпирической функции распределения длительностей аварийного ремонта близка к теоретической функции, представимой в виде $F(t_b) = 1 - \exp(-0,507 \cdot 10^{-2} t)$. Распределение интервала времени между ревизиями концевых муфт кабельных линий хорошо согласуется с логарифмически-нормальным законом распределения. Среднее значение указанных интервалов приблизительно равно одному году, а среднеквадратические отклонения относительно невелики.

Полученные характеристики не зависят от длины кабельной линии, чего нельзя сказать о характеристиках преднамеренных отключений, вызванных неисправностями масляной системы. Для определения последних была применена методика, использованная выше для случая аварийных отключений. Как показали расчеты, интервалы времени между исследуемыми видами отключений для совокупностей кабельных линий, не изменяющихся за расчетный период T , подчиняются экспоненциальному закону распределения. Так как результирующий интервал времени между плановыми отключениями будет определяться минимальным из случайных интервалов t_1 и t_2 , то результирующая функция распределения $P(t_{\text{ип}})$ будет равна произведению исходных функций $P(t_1 > t)$ и $P(t_2 > t)$.

Выше были рассмотрены элементы, параметр потока устойчивых аварийных отключений которых описывается невозрастающей функцией $\omega(t)$. Надежность этих элементов в основном обусловлена внезапными отказами, а появление постепенных (износных) отказов эффективно предотвращается своевременным выполнением профилактики и капитальных ремонтов или не проявляется за счет недоиспользования их нагрузочной способности. На примере кабельных линий 35 кВ обратимся к случаю «старееющих» элементов и основное внимание уделим описанию потока устойчивых аварийных отклю-

чений. Статистика показывает, что в 60-е годы половина аварийных пробоев кабельных линий была вызвана старением изоляции. В более ранние периоды эксплуатации доля этих отказов была значительно меньшей. По мере износа изоляции проводилась достаточно интенсивная замена кабеля.

Вычисленная по формуле (1.12) характеристика $\hat{\omega}(t, t+\Delta t)$ для кабельной линии единичной (1 км) длины представлена на рис. 1.12. При периоде усреднения $\Delta t=1$ году очень сильно проявляется случайный харак-

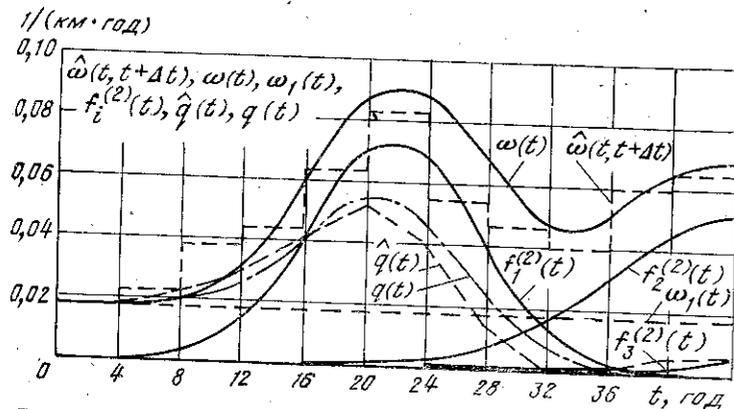


Рис. 1.12. Характеристики надежности кабельных линий 35 кВ.

тер отдельных значений функции $\omega(t, t+\Delta t)$ при конкретных значениях аргумента t . Последовательно проведенное увеличение периода усреднения показало, что наилучшим образом закономерности изменения этой функции выявляются при $\Delta t=4$ годам.

Статистически оценить влияние внезапных отказов, сопровождаемых токами короткого замыкания, на износ изоляции не представляется возможным. При этом следует учесть, что отказы отдельной кабельной линии или ее участка заданной длины относительно редки. Поэтому можно предположить, что отмеченная выше корреляция между внезапными и износными отказами в действительности весьма незначительна, что позволяет считать независимыми потоки отказов, обусловленные внезапными и износными отказами. Характер изменения функции $\hat{\omega}(t)$ в начальный период эксплуатации позво-

ляет считать поток внезапных отказов стационарным. Тогда функция $\hat{\omega}(t)$ может быть представлена в виде

$$\hat{\omega}(t) = \omega_1 + \omega_2(t), \quad (1.27)$$

где $\omega_1, \omega_2(t)$ — соответственно параметры потока внезапных отказов и отказов, вызванных старением изоляции.

В качестве рабочей модели примем, что исследуемый поток отказов является потоком с ограниченным последствием, рассмотренным выше. Заметим, что принятие этой модели предполагает отсутствие корреляции последовательных интервалов между износными отказами. Отмеченная ранее замена кабеля по мере износа изоляции служит основанием для этой модели. Как известно, постепенные отказы достаточно хорошо описываются нормальным законом, тогда в соответствии с (1.8) можно написать

$$\omega_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma}} \exp \left[-\frac{(t - nt_0)^2}{2n\sigma^2} \right], \quad (1.28)$$

где t_0 — математическое ожидание времени старения изоляции.

Выражение (1.28) справедливо при $\sigma \ll t_0$, что выполняется в нашем случае. Характерный вид функции $\omega(t)$ и закономерности ее формирования позволяют получить в качестве первого приближения следующие соотношения для параметров нормального распределения: $t_0 \approx 22$ года, $\sigma < t_0/3$. Задаваясь значениями t_0 и σ и выполняя построения на основе выражения (1.27), можно построить функцию $\omega_2(t)$ и сравнить сумму $\omega_1 + \omega_2(t)$ с ее эмпирической характеристикой $\hat{\omega}(t)$. На рис. 1.12 приведены необходимые составляющие указанного построения для окончательно выбранных параметров $t_0=22$ года и $\sigma=5,5$ лет.

Функцию распределения интервалов времени между отказами кабельной линии единичной длины $Q(t)$ для результирующего потока, обусловленного внезапными и постепенными отказами, следует представить в виде

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t} \left[0,5 - \Phi_0 \left(\frac{t - t_0}{\sigma} \right) \right], \quad (1.29)$$

где $\Phi_0(z)$ — нормированная функция Лапласа; $\lambda = \omega_1 = 0,018$ 1/год.

Теоретическая плотность вероятности $q(t) = Q'(t)$ легко может быть определена по выражению (1.28), а ее статистическая оценка $\hat{q}(t)$ при известной функции $\hat{\omega}(t)$ — на основе решения уравнения Вольтерра (1.16) (результаты см. на рис. 1.12). Расхождение $\Delta q = q(t) - \hat{q}(t)$ не превышает 7% на всем интервале наблюдения. Результаты сравнения эмпирических и теоретических характеристик позволяют признать, что полученные теоретические функции хорошо аппроксимируют (сглаживают) экспериментальные данные.

Предложенный выше подход к определению характеристик надежности, основанный на разложении потока на две составляющие, достаточно прост. Для получения точности, достаточной для практических расчетов, он может быть легко реализован графически, что позволяет избавиться от сложных и громоздких алгоритмов численного решения интегральных уравнений.

Глава вторая

МОДЕЛИ ОТКАЗОВ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ НАДЕЖНОСТИ

2.1. Внезапные и постепенные отказы элементов систем электроснабжения

Если исключить из рассмотрения отказы элементов систем электроснабжения в течение начального периода эксплуатации и периода освоения оборудования, когда наблюдается повышенное число отказов, обусловленное недоработками конструкции, монтажа, несовершенными методами эксплуатации, то основными причинами отказов линий электропередачи, трансформаторов, коммутационных аппаратов являются: воздействие неблагоприятных условий среды (сильный ветер, гололед, резкие перепады температур, атмосферные перенапряжения); механические повреждения, в частности линий электропередачи при строительстве других объектов народного хозяйства, при производстве земляных работ; ошибочные действия эксплуатационного персонала; износ отдельных частей элементов (старение изоляции, коррозия металлических частей, износ дугогасительных камер

выключателей и т. д.). Отказы подразделяются на внезапные, которые появляются в результате резкого, внезапного изменения основных параметров под воздействием одного или нескольких случайных факторов внешней среды либо вследствие ошибок обслуживающего персонала, и постепенные, при которых наблюдается плавное, постепенное изменение параметра элементов в результате износа отдельных частей или всего элемента в целом.

В процессе эксплуатации в материалах, из которых изготавливаются элементы, накапливаются необратимые изменения, снижающие прочность, нарушающие координацию и взаимодействие отдельных узлов и в случайные моменты времени приводящие к отказу элемента. Деление отказов на внезапные и постепенные носит условный характер и в основном служит для анализа и количественной оценки протекающих явлений. В процессе эксплуатации на любой элемент, отдельные части которого в той или иной мере уже подвергнуты износу, воздействуют внезапные пиковые нагрузки. Если проанализировать статистику отказов элементов электроснабжения, то отказы, вызванные износом, составляют весьма незначительную долю (до 10%) общего их количества. Это говорит о необходимости более детального изучения процессов старения, износа и разработки количественных характеристик показателей надежности, т. е. показателей функциональной надежности. Количественная оценка воздействующих процессов требует схематизации физической картины явлений, обусловленной как исключительным многообразием влияющих факторов, так и сложными, подчас малоизученными взаимосвязями между ними. Упрощенное представление взаимосвязей может дать только качественную характеристику явления. До последнего времени основным методом исследования показателей надежности элементов технических систем, в том числе и систем электроснабжения, был статистический метод.

В современных условиях уже невозможно полностью решать возникающие задачи, такие, например, как прогнозирование и управление уровнем надежности на стадии проектирования систем электроснабжения, основываясь только на статистическом подходе. Наиболее перспективное направление — это сочетание статистических методов с анализом физических процессов, проис-

ходящих в элементах конструкций и вызывающих старение, износ и отказы элементов.

При рассмотрении показателей надежности любого элемента различают три периода его эксплуатации: период приработки — I, период нормальной эксплуатации — II и период интенсивного износа и старения — III

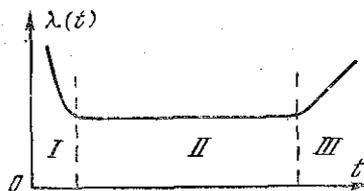


Рис. 2.1. Зависимость интенсивности отказов элемента от времени эксплуатации.

(рис. 2.1). В первый период интенсивность отказов имеет тенденцию к уменьшению с течением времени. Это связано с выявлением скрытых дефектов монтажа и изготовления, отбраковкой элементов. Второй период характеризуется примерно постоянной интенсивностью отказов, в этот период отказы в основном носят внезапный характер (механические повреждения, повреждения вследствие неблагоприятных внешних условий и т. д.). Последний период характеризуется повышением интенсивности отказов с течением времени и связан с интенсивным износом, старением и необратимыми физико-химическими процессами в материалах, из которых изготовлены элемент и его части.

Каждый из типов отказов характеризуется собственной математической моделью и, следовательно, собственным подходом к получению количественных характеристик. Одной из основных характеристик отказов является функция распределения времени безотказной работы; все остальные показатели надежности, связанные с отказами, могут быть получены на основании этой зависимости.

Поэтому представляется целесообразным рассмотреть упрощенные схемы формирования случайной величины времени безотказной работы элементов при указанных моделях отказов, в частности, второго и третьего периодов эксплуатации, представляющие наибольший практический интерес.

2.2. Формирование схемы внезапных повреждений

Математическое описание схемы внезапных повреждений целесообразно рассмотреть на конкретном примере — кабельной линии среднего напряжения, про-

ложенной в земле, основными причинами отказов которой, согласно статистике, являются механические повреждения. Рассмотрим более подробно математическое описание времени безотказной работы кабельной линии в результате механических повреждений.

Как известно, кабельная линия обладает вполне определенной механической прочностью, и все ее конструктивные элементы выполнены так, что обеспечивают сохранность линии при воздействии механических нагрузок, не превышающих предел прочности бронированного покрытия, оболочки, изоляции жил кабеля.

Механические нагрузки, воздействующие на кабельную линию, при эксплуатации всегда являются случайными, и связи между значениями таких нагрузок во времени обычно не наблюдается. Пиковые нагрузки, приводящие к повреждению кабельной линии, возникают случайно, и невозможно однозначно предсказать момент их появления. Среднее значение механических нагрузок на кабельную линию практически при любых условиях прокладки всегда намного меньше предельно допустимого (по механической прочности). Превышение предела механической прочности приводит к отказу кабельной линии. Учитывая конструкции кабельных линий и характерные условия их эксплуатации, можно отметить два условия: уровень предельно допустимой механической нагрузки остается постоянным в течение времени эксплуатации; отказ возникает не как следствие постепенного изменения внутреннего состояния элемента, так как предел механической прочности с течением времени изменяется мало, а лишь в результате внешних случайных воздействий, не зависящих друг от друга и возникающих в случайные моменты времени, которые однозначно невозможно предсказать.

Разделим весь период рассматриваемого времени $(0, t)$ на интервалы $i=0, 1, 2, \dots, k, \dots, n$ и обозначим через α_i вероятность того, что превышение механической прочности кабельной линии произойдет в i -м интервале. Очевидно, что кабельная линия откажет при первом таком превышении механической прочности. Так как «прочность» линии неизменна, а случайные пиковые воздействия независимы, то случайные события появления «пиковой» нагрузки на каждом интервале времени также можно считать независимыми. События A_i — появления в любом интервале пиковой нагрузки и B_i (не-

появления) являются противоположными. Поэтому вероятность того, что превышение максимальной прочности произошло в произвольном k -м интервале времени можно определить по правилу умножения независимых событий:

$$P(A) = P(A_k) \prod_{i=0}^{k-1} P(B_i) = \alpha_k \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \alpha_i). \quad (2.1)$$

Если условия эксплуатации линии неизменны, то приближенно можно считать $\alpha_i = \alpha_j = \alpha_k = \dots = \alpha$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$); тогда

$$P(A) = (1 - \alpha)^k \alpha, \quad (2.2)$$

т. е. $P(A)$, по существу, вероятность того, что время безотказной работы будет составлять k интервалов.

Для того чтобы получить функцию распределения времени безотказной работы, выраженную в числе интервалов, необходимо просуммировать все вероятности появления отказов, начиная с первого интервала:

$$P(t \leq T = k \text{ интервалов}) = \alpha \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \alpha)^i = 1 - (1 - \alpha)^k. \quad (2.3)$$

Известно, что при достаточно малых значениях α ($k\alpha = 0,1 \div 20$) погрешность от замены $(1 - \alpha)^k$ на $e^{-k\alpha}$ имеет порядок $\frac{k\alpha^2}{2}$, а так как вероятность механического

повреждения α в каждом интервале мала, то с достаточной для практических расчетов точностью можно осуществить такую замену. Поэтому функция отказа или интегральная функция распределения времени безотказной работы, выраженная в интервалах времени, имеет вид:

$$P(t \leq T) = F(t) = Q(t) = 1 - e^{-k\alpha}. \quad (2.4)$$

Переходя к непрерывному аргументу времени, получаем:

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (2.5)$$

где λ — параметр распределения — среднее число повреждений (отказов) в единицу времени.

Дифференциальная функция распределения или плотность вероятности случайной величины времени безотказной работы элемента (рис. 2.2)

Среднее время безотказной работы при этой схеме повреждений и экспоненциальном распределении времени между отказами

$$f(t) = Q'(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (2.6)$$

$$t = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.7)$$

интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - \int_0^t f(t) dt} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt} = \lambda. \quad (2.8)$$

На основании рассмотренной схемы повреждений можно сделать вывод, что в системе со своевременными

капитальными и профилактическими ремонтами оборудования, заменой износившихся частей, когда другие виды отказов составляют незначительную часть, в качестве основного распределения времени безотказной работы следует принимать экспоненциальное. Это распределение наиболее широко распространено в расчетах надежности не только систем электроснабжения, но и других технических систем, оно также является основным в практических расчетах надежности систем электроснабжения.

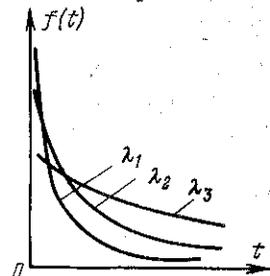


Рис. 2.2. Дифференциальная функция экспоненциального закона распределения времени безотказной работы при внезапных отказах ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$).

2.3. Формирование схемы постепенных повреждений

Как уже рассматривалось ранее, основными причинами постепенных повреждений являются старение материалов и износ отдельных частей элементов систем электроснабжения. Как ни совершенна конструкция эле-

мента и его частей, а также технология производства монтажа, материалы, из которых изготовлен объект со временем претерпевают необратимые изменения. Они возникают вследствие теплового и вибрационного старения изоляции трансформаторов, кабельных линий генераторов, коррозии металлических частей проводов опор, оболочек, кабельных линий, износа дугогасительных камер коммутационных аппаратов при отключении токов короткого замыкания, а также вследствие деформации материалов, диффузии одного материала в другой. Например, в изоляции электротехнических изделий под действием нагрева токами нагрузки, изменения электродинамических сил, возникающих при резком изменении тока, вибрации, повышения влажности, вредных примесей в среде, окружающей изоляцию, воздействия электрического поля происходят сложные физико-химические процессы ее старения. Изоляция становится хрупкой, ломкой, появляются трещины, уменьшается электрическая прочность, и при случайном превышении допустимого уровня пробивного напряжения происходит отказ. Аналогичные явления происходят при коррозии и окислении металлических частей оборудования, находящихся под воздействием механических нагрузок, т. е. отдельные части оборудования постепенно изнашиваются (как бы накапливаются элементарные повреждения в различных его частях), общий предел прочности снижается, и при случайном превышении его происходит отказ.

Таким образом, рассматриваемая ситуация является обобщением предыдущей (внезапных повреждений). Но если при механическом воздействии превышение предела прочности приводит к внезапному отказу элемента, то в данном случае происходит суммирование многих элементарных повреждений в различных частях элементов, что приводит к постепенному изменению состояния объекта и отказу, т. е. необходимы, например, многократное превышение допустимой температуры изоляции, отключение токов коротких замыканий выключателем и воздействие неблагоприятных условий внешней среды и т. д. Для построения математического описания этих явлений предположим некоторые идеализированные условия. В случайные моменты времени возникают единичные элементарные повреждения и при накоплении k повреждений объект отказывает. Элементарное повре-

ждение состоит в том, что износ объекта увеличивается на некоторую величину Δx за время Δt , вероятность возникновения износа Δx за время Δt равна $\lambda \Delta t$ и не зависит от того, насколько изношен объект за предшествующий интервал времени, т. е. не зависит от его состояния. Выберем интервал времени таким образом, чтобы вероятностью двух и более элементарных повреждений в этом интервале можно было пренебречь. При указанных условиях нетрудно определить вероятность появления k элементарных повреждений на интервале времени $[0-t]$. Вначале определим вероятность того, что в произвольно выбранном интервале времени Δt произойдет хотя бы одно повреждение. Согласно условию ординарности потока элементарных повреждений вероятность появления по крайней мере одного и одного элементарного повреждения в указанных условиях численно совпадают и равны $\lambda \Delta t$, а вероятность отсутствия такого повреждения равна $1-\lambda \Delta t$. Разделим весь отрезок времени $(0-t)$ на n равных частей: $\Delta t_i = \frac{t}{n}$. Так

как вероятности возникновения элементарных повреждений в указанных отрезках независимы, то вероятность появления k элементарных повреждений на отрезке времени $(0-t)$ можно определить, используя схему независимых испытаний (биномиальный закон распределе-

$$P(t_k) = C_n^k \left(\lambda \frac{t}{n}\right)^k \left(1 - \lambda \frac{t}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \quad (2.9)$$

Предел этого выражения при неограниченном увеличении числа интервалов $n \rightarrow \infty$, а следовательно, при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(t_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{(\lambda t)^k}{n^k} \times \frac{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^k} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (2.10)$$

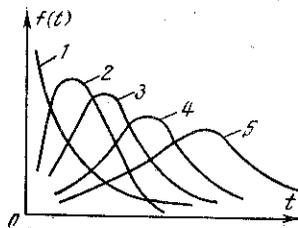


Рис. 2.3. Дифференциальная функция закона гамма-распределения времени безотказной работы при постепенных отказах.

1 — $k=1$; 2 — $k=2$; 3 — $k=3$; 4 — $k=4$; 5 — $k=6$.

$$P(t \leq T) = Q(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}. \quad (2.11)$$

Дифференциальная функция распределения или плотность вероятности времени безотказной работы

$$f(t) = Q'(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} - \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} = \lambda^k t^{k-1} \frac{1}{(k-1)!} e^{-\lambda t}. \quad (2.12)$$

Так как для целых k $(k-1)! = \Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$,

где $\Gamma(k)$ — гамма-функция, то в общем виде

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\lambda t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Это распределение называется гамма-распределением времени безотказной работы (рис. 2.3). При $k=1$ это распределение превращается в экспоненциальное, т. е. одно повреждение приводит к отказу элемента.

Интенсивность отказов при распределении времени безотказной работы по закону гамма-распределения

$$\lambda(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k-1)!}{i!} (\lambda t)^i}, \quad (2.14)$$

т. е. вероятность числа элементарных повреждений на отрезке $(0-t)$ зависит от длины этого отрезка и распределена по закону Пуассона с параметром λt .

Объект откажет, если произойдет не менее k элементарных повреждений.

Вероятность того, что время безотказной работы будет не менее T (интегральная функция распределения времени безотказной работы), можно определить по формуле

т. е. интенсивность отказов уже не постоянна во времени, как это наблюдалось при экспоненциальном законе распределения, а увеличивается с течением времени, и тем медленнее, чем больше параметр k , т. е. чем большей «прочностью» обладает материал (рис. 2.4).

Математическое ожидание или среднее время безотказной работы

$$\bar{t} = \frac{k}{\lambda}, \quad (2.15)$$

дисперсия

$$D(t) = \frac{k}{\lambda^2} \quad (2.16)$$

Следует отметить, что с ростом k закон гамма-распределения асимптотически приближается к нормальному.

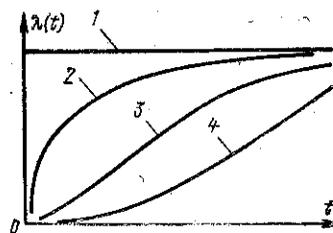


Рис. 2.4. Интенсивность отказов элемента при гамма-распределении времени безотказной работы.

1 — $k=1$; 2 — $k=2$; 3 — $k=4$; 4 — $k=6$.

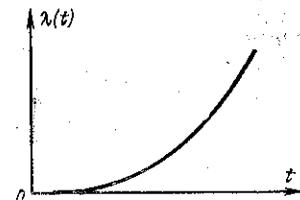


Рис. 2.5. Интенсивность отказов элемента при нормальном законе распределения времени безотказной работы элемента.

норму. Если вариация времени безотказной работы $\sqrt{D(t)}/\bar{t}$ будет менее 0,3, то с достаточной для практических расчетов точностью закон распределения можно аппроксимировать нормальным. Интенсивность отказов при нормальном законе распределения времени безотказной работы (рис. 2.5)

$$\lambda(t) = \exp\left(-\frac{t-\bar{t}}{2\sigma_t}\right) / \sigma_t \sqrt{2\pi} \Phi\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma_t}\right), \quad (2.17)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv \quad (2.18)$$

— функция Лапласа; $\sigma_t = \sqrt{D(t)}$ — среднее квадратическое отклонение времени безотказной работы.

Переход от гамма-распределения к нормальному обоснован при большом пределе прочности элемента по сравнению с действующими нагрузками, т. е. когда величина «наложенного» износа мала, например изоляция отличается высокой однородностью, проводка — высокой стойкостью к коррозии и т. д. Законы гамма-распределения и нормальный имеют возрастающую интенсивность отказов с течением времени эксплуатации, что хорошо согласуется с физической сущностью протекающих процессов износа.

При рассмотрении модели постепенных отказов число элементарных повреждений принималось целым в предположении, что износ происходит дискретно. В действительности износ элемента происходит практически непрерывно, поэтому параметры закона гамма-распределения в общем случае могут быть и целыми, и дробными. Тогда плотность гамма-распределения записывается в виде

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} e^{-\beta t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

где α и β — параметры распределения (любые положительные числа).

Математическое ожидание и дисперсия времени безотказной работы соответственно равны:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= (\alpha+1) / \beta; \\ \sigma^2_t &= (\alpha+1) / \beta^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Полученные числовые характеристики времени безотказной работы позволяют по статистическим данным (среднему значению и дисперсии) определить параметры закона гамма-распределения:

$$\alpha = \bar{t}^2 / \sigma^2_t - 1; \quad \beta = \bar{t} / \sigma^2_t. \quad (2.21)$$

Рассмотренные схемы формирования времени безотказной работы элемента в значительной степени идеализированы. В действительности на любой элемент системы электроснабжения воздействуют также внезапные случайные факторы при износе отдельных частей эле-

мента. Поэтому законы распределения, получаемые в результате обработки статистических данных об отказах, будут являться композицией рассмотренных ранее законов. Аппроксимацию законов распределения по статистическим данным необходимо производить лишь после тщательного анализа причин отказов с учетом физических состояний элементов. В ряде случаев, например, может быть использовано сочетание экспоненциального

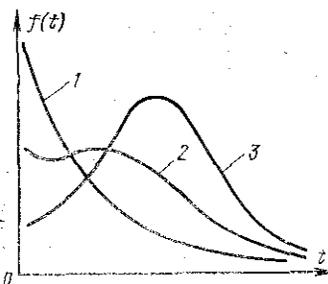


Рис. 2.6. Дифференциальная функция распределения времени безотказной работы элемента при внезапных и постепенных отказах.
1 — $\lambda=2$; 2 — $\lambda=1$; 3 — $\lambda=0,2$.

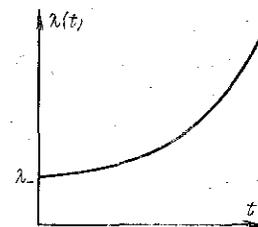


Рис. 2.7. Зависимость интенсивности отказов элемента от времени при внезапных и постепенных отказах.

и нормального законов, если элемент имеет стареющие изнашивающиеся части и подвержен внезапным отказам (рис. 2.6):

$$f(t) = e^{-\lambda t} \left\{ \lambda \left[1 - \Phi \left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma_t} \right) \right] + \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2}} \right\}. \quad (2.22)$$

Интенсивность отказов при таком законе распределения времени безотказной работы (рис. 2.7)

$$\lambda(t) = \lambda + \exp \left[-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2} \right] / \sigma_t \sqrt{2\pi} \Phi \left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma_t} \right). \quad (2.22a)$$

Если среднее время до отказа из-за внезапного повреждения меньше среднего времени до появления отказа из-за износа, то кривая распределения близка к экспоненциальной функции распределения, если же внезапные отказы практически исключены (очень редки), то плотность распределения близка к нормальной.

2.4. Формирование законов распределения сроков службы изоляции элементов

Надежность самых распространенных элементов систем электроснабжения, таких как силовые трансформаторы и кабельные линии, в значительной степени определяется надежностью работы изоляции, прочность которой нельзя рассматривать как неизменяющую в течение эксплуатации. Как известно, основной характеристикой изоляции электротехнических изделий является ее электрическая прочность, которая в зависимости от условий эксплуатации и вида изделия определяется механической прочностью, эластичностью, исключающей возможности образования остаточных деформаций, трещин, расслоений под воздействием механических нагрузок. Однородность и монолитность структуры изоляции и ее высокая теплопроводность исключают возникновение повышенных местных нагревов, приводящих к уменьшению электрической прочности. Разрушение изоляции при функционировании элемента происходит в основном в результате нагрева токами нагрузок и воздействий температур внешней среды; механические нагрузки (вибрации, деформации, удары и т. п.) также способствуют быстрому разрушению.

Если изоляция находится под высоким напряжением, то заметное влияние на процессы старения оказывает электрическое поле. Вначале, когда изоляция новая и достаточно однородная, электрическое старение происходит медленно, но вследствие тепловых и механических воздействий, сопровождающихся расслоением, возникновением воздушных прослоек, пустот, трещин, газовых и других включений (например, масла), оно становится заметным. В изоляции развиваются ионизационные процессы, возникают частичные разряды, связанные с окислительными реакциями, приводящими к появлению агрессивных реагентов, в еще большей степени разрушающих изоляцию. Образование трещин и расслоений способствует увеличению интенсивности частичных разрядов, когда пробивается часть слоев изоляции. Такие разряды возникают уже при напряжении, равном половине напряжения пробоя. Такого рода частичные разряды сопровождаются значительными бросками тока, гораздо большими, чем ионизационные токи. Значительно снижают электрическую прочность также поверхностные разряды, приводящие к разрушению внешних слоев изоляции. Возникновение поверхностных разрядов в значительной степени обусловлено неблагоприятным воздействием среды, в которой находится изоляция.

Среди перечисленных факторов, определяющих срок службы изоляции, одним из основных и наиболее изученных является тепловое старение. На основании экспериментальных исследований было получено известное

«восьмиградусное» правило, согласно которому повышенные температуры на каждые восемь градусов в среднем вдвое сокращают срок службы изоляции. В зависимости от класса применяемой изоляции в настоящее время применяются шести-, восьми-, десяти и двенадцатиградусные правила. Изоляция более высокого класса менее подвержена старению, например для изоляции класса Н применяется двенадцатиградусное правило.

Срок службы изоляции $t_{ст}$ в зависимости от температуры нагрева θ

$$t_{ст} = A_T \exp(-\gamma\theta), \quad (2.23)$$

где γ — коэффициент, характеризующий степень старения в зависимости от класса изоляции; A_T — срок службы изоляции при $\theta=0$ (некоторая условная величина).

Подобный упрощенный подход к оценке срока службы изоляции имеет достаточно хорошее теоретическое обоснование с точки зрения общих законов кинематики химических реакций. Известно, что обобщенная зависимость существует для скорости химических реакций

$$k = k_0 T^n \exp(-W_0/RT), \quad (2.24)$$

где k_0 — постоянная реакции, соответствующая температуре $T=\infty$; W_0 — энергия активации; R — газовая постоянная; n — коэффициент, определяющий класс химической реакции, для изоляции окислительные процессы протекают по законам мономолекулярной реакции: $n=1$.

Для мономолекулярных реакций постоянная скорости реакции определяется из уравнения

$$-dc/dt = kc, \quad (2.25)$$

где c — концентрация непрореагировавших молекул в момент времени t , или

$$k = \frac{1}{t} (\ln c - \ln c_0); \quad (2.26)$$

здесь c_0 — концентрация непрореагировавших молекул в начальный период времени $t=0$.

Для практических расчетов скорость химических реакций определяется по уравнению Вант-Гоффа-Аррениуса:

$$k = k_0 \exp(-W_0/RT) = k_0 \exp(-B/T), \quad (2.27)$$

где $B = W_0/R$.

Свойства полимерных диэлектриков определяются структурами молекул, т. е. длиной макромолекулы и силой межмолекулярных взаимосвязей, которые в свою очередь пропорциональны концентрации молекул, участвующих в химической реакции. Таким образом, можно утверждать, что мера прочности изоляции E/E_0 пропорциональна скорости химической реакции, зависящей от температуры T , т. е.

$$\ln(E/E_0) = -kt, \quad (2.28)$$

где E_0 и E — соответственно значения рабочей характеристики для моментов времени 0 и t .

Срок службы изоляции согласно (2.28) при неизменной температуре в этих условиях определяется из уравнения

$$\ln t_{ст} = B/T + \ln k_0 + \ln \ln(E/E_0). \quad (2.29)$$

Отметим также, что в [2.1] на основании детального анализа закономерностей теплового старения полимерных диэлектриков показано, что логарифм меры механических, физических и диэлектрических характеристик (под мерой понимается прочность на разрыв, относительное удлинение, электрическая прочность, влагостойкость и т. д.) связан прямолинейной зависимостью со временем теплового старения изоляции. Если выбрать как меру теплового старения определенное значение какой-либо рабочей характеристики диэлектрика (например, указанное выше отношение E/E_0), то время $t_{ст}$, по истечении которого изоляция достигнет этого состояния, может быть определено из уравнения

$$\ln t_{ст} = (B/T + Y) \quad (2.30)$$

или

$$t_{ст} = \exp(B/T + Y). \quad (2.31)$$

Эта зависимость срока службы от температуры, подтвержденная опытами с изоляцией электротехнических изделий, показывает значительный разброс коэффициентов B и Y для одного и того же типа изоляции, что объясняется не только некоторыми различиями условий экспериментов, но главным образом тем, что механическая и электрическая прочность материалов носит случайный характер, поэтому указанные зависимости можно интерпретировать только как зависимости между средними значениями срока службы и прочности в одинаковых температурных условиях. Время, за которое

изоляция достигнет некоторого критического значения рабочей характеристики для определенных температурных условий, является случайной величиной:

$$t_{ст} = \frac{1}{k_0} \ln(E/E_0) \exp(B/T). \quad (2.32)$$

Другим важным фактором, способствующим интенсивному старению изоляции, является механическая нагрузка на нее, в особенности обусловленная электродинамическими процессами при резких изменениях тока, например при резкопеременной нагрузке силового трансформатора, частых набросах и сбросах нагрузки, сквозных токах коротких замыканий. Механические характеристики прочности изоляции также зависят от температуры. Предел механической прочности быстро снижается по мере нагрева, но в то же время изоляция становится более эластичной. Однако значительные деформации сопровождаются появлением необратимых структурных изменений в виде трещин, разрывов, расслоений. Электромеханические силы, воздействующие во время изменений тока, пропорциональны квадрату мгновенного значения тока. Изменение воздействующих сил во времени можно представить как суммарное наложение трех составляющих: аperiodической, периодической с частотой питающей сети 50 Гц и циклической с частотой 100 Гц. При резкопеременном режиме электропотребления амплитуды вибраций могут быть довольно значительными вследствие квадратичной зависимости от тока.

Полимерные материалы, из которых изготавливается изоляция, обладают сравнительно невысокой прочностью к усталостному разрушению. В общем случае для различной вероятности разрушения «кривые жизни» материалов описываются уравнением

$$N = N_0 + (N_1 - N_0) \left(\frac{R_f - S_0}{S - S_0} \right), \quad (2.33)$$

где S , N — соответственно разрушающее напряжение и предельное число циклов; S_0 , N_0 — наименьшие напряжение и число циклов, при которых возможно усталостное разрушение; R_f — предел выносливости материала (случайная величина, зависящая от качества изготовления материала).

В настоящее время отсутствуют экспериментальные вероятностно-статистические характеристики прочности изоляции при вибрационном старении материала.

На основании теории суммирования повреждений получена зависимость срока службы материалов от параметров воздействия и характеристик прочности

$$t_{c, m} = \frac{N_1 T_e x_0^m \psi(a)}{\psi(m+a) P(x_0^2, m+a)}, \quad (2.34)$$

где $x_0 = R_f / \sigma_s$; $T_e = 2\pi \sigma_s / \sigma_s$ — эффективный период σ_s / σ_s — среднее квадратическое отклонение случайного процесса $S(t)$ и его первой производной;

$$P(x_0^2, m+a) = \frac{1}{\psi(m+a)} \int_{x_0}^{\infty} y^{m+a} e^{-y^2/2} dy;$$

$$\psi(n) = 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Из рассмотрения двух основных факторов, влияющих на срок службы изоляции, которые к тому же тесно связаны между собой, можно предположить, что как усталостные явления в изоляции, так и тепловое старение в значительной степени зависят от качества изготовления и материала электротехнического изделия, от однородности материала изоляции, обеспечивающей отсутствие местных нагревов, так как трудно предположить, что откажет вся изоляция (пробой произойдет по всей площади изоляции). Неоднородности материала (микротрещины, расслоения и др.) случайно распределены по всему объему (площади) изоляции и случайны по своей величине. При воздействии переменных неблагоприятных условий как теплового, так и электродинамического характера неоднородности материала увеличиваются, например микротрещина распространяется в глубь изоляции и при случайном повышении напряжения наступает пробой изоляции. Причиной отказа можно считать небольшую неоднородность материала. Естественно предположить, что число неблагоприятных воздействий (тепловых или электромеханических), необходимых для пробоя изоляции, есть функция, убывающая при возрастании размеров неоднородности, т. е. это число является минимальным для наибольшей по

своим размерам неоднородности (трещины, расслоения и др.).

Отсюда следует, что число неблагоприятных воздействий (т. е. срок службы изоляции) должно подчиняться закону распределения минимального члена из числа независимых случайных величин — чисел неблагоприятных воздействий, отвечающих различным по размерам неоднородностям, т. е. если t — время безотказной работы всей изоляции, а t_i — время безотказной работы ее i -го участка ($i=1, 2, \dots, n$), то

$$t_c = \min(t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (2.35)$$

Поэтому для определения закона распределения времени безотказной работы такого объекта, как изоляция элемента системы электропитания, необходимо найти вероятность распределения минимальных времен безотказной работы всей совокупности участков. Наибольший интерес представляет случай, когда законы распределения времени безотказной работы отдельных участков имеют произвольный характер, но вид законов распределения одинаков, т. е. резко выраженных отличающихся участков нет.

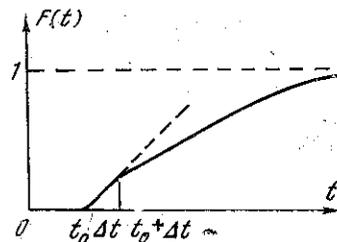


Рис. 2.8. Интегральная функция распределения времени безотказной работы участка изоляции.

В смысле надежности участки такой системы соответствуют последовательному соединению, поэтому функция распределения времени безотказной работы такой системы

$$F_c(t) = 1 - [1 - F(t)]^n. \quad (2.36)$$

Рассмотрим самый общий случай, когда распределение $F(t)$ имеет так называемый «порог чувствительности», т. е. элемент гарантированно не откажет в интервале времени $[0, t_0]$ (в частном случае $t_0=0$). Очевидно, функция $F(t_0 + \Delta t)$ всегда положительна как неубывающая функция аргумента. Первоначально для простоты рассуждений предположим, что в окрестности t_0 функцию $F(t)$ можно заменить линейной зависимостью (рис. 2.8)

$$F(t_0 + \Delta t) \approx c \Delta t, \quad (2.37)$$

где $c > 0$ — некоторый постоянный коэффициент.

Для времени $(t_0 + \Delta t)$ функция $F(t_0 + \Delta t) > 0$, поэтому функция распределения системы имеет вид:

$$F_c(t_0 + \Delta t) \approx 1 - (1 - c\Delta t)^n,$$

причем, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - c\Delta t)^n = 0$ при $c > 0, \Delta t > 0$

$F_c(t_0 + \Delta t) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, что соответствует физическому существу рассматриваемых процессов — при бесконечной площади (объеме) изоляции вероятность ее отказа равна 1.

Разделим время $(t - t_0)$ на n частей, т. е. $\Delta t = (t - t_0)/n$, и определим предел $F_c(t + \Delta t)$ при $n \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_c\left(t + \frac{t - t_0}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(1 - c \frac{t - t_0}{n}\right)^n\right] = 1 - \exp[-c(t - t_0)]. \quad (2.38)$$

Таким образом, в рассматриваемых условиях функция распределения срока службы изоляции элемента электроснабжения

$$F_c(t) = \begin{cases} 1 - \exp[-c(t - t_0)], & t \geq t_0; \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \quad (2.39)$$

Форма этого закона определяется поведением функций распределения на малых участках времени (возможностью линеаризации). Если зависимость изменения вероятности отказа на каждом участке будет нелинейной, то ее можно всегда с достаточной степенью точности аппроксимировать степенной зависимостью, т. е.

$$F(t_0 + \Delta t) = c\Delta t^\alpha. \quad (2.40)$$

Выполняя те же самые преобразования, можно получить асимптотический закон распределения времени безотказной работы системы:

$$F_c(t) = \begin{cases} 1 - \exp[-c(t - t_0)^\alpha], & t \geq t_0; \\ 0, & t < t_0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Если распределение не имеет порога чувствительности, то

$$F_c(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-ct^\alpha), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Распределения этого типа называются распределениями Вейбулла. В. Вейбулл предлагал рассматривать функцию распределения в виде

$$F(t) = 1 - \exp[-\varphi(t)]. \quad (2.43)$$

Единственным необходимым условием, которому должна удовлетворять функция $\varphi(t)$, является то, что она должна быть положительной неубывающей функцией, стремящейся к некоторой величине t_0 , необязательно равной нулю. Наиболее простой функцией, удовлетворяющей этому условию, является $T_m^{-1}(t - t_0)^\alpha$, поэтому можно положить

$$F(t) = 1 - \exp[-T_m^{-1}(t - t_0)^\alpha].$$

Достоинством этого распределения является простота математического выражения при выполнении необходимых общих условий. Этим распределением доволь-

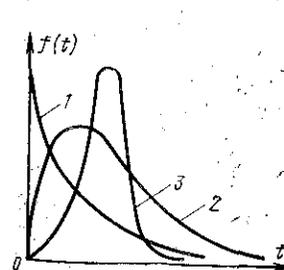


Рис. 2.9. Дифференциальная функция распределения времени безотказной работы изоляции по закону Вейбулла.
1 — $\alpha=1$; 2 — $\alpha=0.5$; 3 — $\alpha=4$.

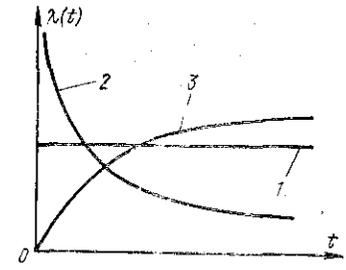


Рис. 2.10. Интенсивность отказов при распределении по закону Вейбулла.
1 — $\alpha=1$; 2 — $\alpha=0.5$; 3 — $\alpha=1.5$.

но часто можно аппроксимировать распределение времени безотказной работы систем с конечным числом последовательно (в смысле надежности) соединенных элементов (длинные кабельные линии со значительным количеством муфт и др.). В математической статистике распределение Вейбулла называется также распределением третьего типа для крайних членов последовательности независимых случайных величин.

Плотность распределения (без порога чувствительности) (рис. 2.9)

$$f(t) = \begin{cases} \alpha c t^{\alpha-1} \exp(-c t^\alpha), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Нетрудно видеть, что в частном случае при $\alpha=1$ это распределение превращается в обычное экспоненциальное. Интенсивность отказов при распределении по закону Вейбулла (рис. 2.10)

$$\lambda(t) = \alpha c t^{\alpha-1}. \quad (2.45)$$

Отметим, что интенсивность отказов в зависимости от параметра α может расти, оставаться постоянной (экспоненциальный закон) и убывать. Последней зависимости (уменьшение интенсивности отказов с увеличением времени эксплуатации) трудно найти физическое объяснение, так как в отличие от металлов, которые могут с течением времени под воздействием небольших циклических нагрузок упрочняться выравниванием внутренних напряжений, для изоляции не существует упрочнения. Подобная зависимость может быть объяснена только «выжиганием» — отказами экземпляров в начале эксплуатации, а оставшиеся элементы в среднем будут обладать большей долговечностью. Отметим также, что при $\alpha=2$ функция распределения времени безотказной работы совпадает с распределением Релея, а при $\alpha \gg 1$ достаточно хорошо аппроксимируется нормальным распределением в окрестности среднего времени безотказной работы.

Математическое ожидание (среднее время) безотказной работы и дисперсия при распределении Вейбулла

$$\bar{t} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) c^{-\frac{1}{\alpha}}; \quad (2.46)$$

$$D(t) = c^{\frac{2}{\alpha}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right], \quad (2.47)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

2.5. Общие принципы получения показателей функциональной надежности силовых трансформаторов и кабельных линий

Как уже указывалось ранее, срок службы силовых трансформаторов и кабельных линий в основном определяется свойствами электроизоляционных материалов. Продолжительность «жизни» их зависит от очень многих случайных факторов, основными из которых, более или менее поддающимися количественным оценкам, являются тепловые воздействия и электродинамические нагрузки при резких изменениях тока (для силовых трансформаторов). В свою очередь, тепловые нагрузки на изоляцию указанных элементов зависят от случай-

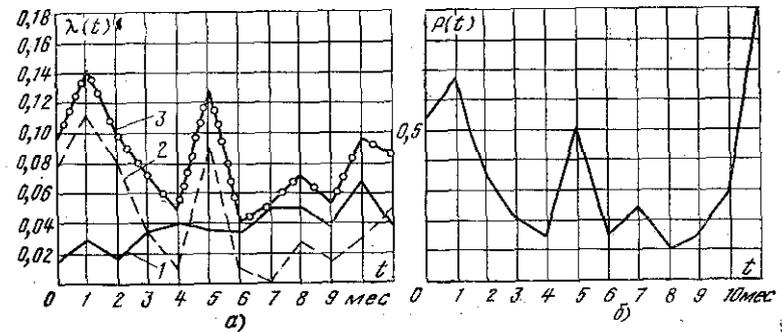


Рис. 2.11. Экспериментальная кривая интенсивности отказов кабельных линий в течение года (а) и годовой график максимальных среднемесячных нагрузок (б).

1 — механические повреждения; 2 — электрический пробой изоляции; 3 — общее число повреждений.

ных изменений токовых нагрузок и температур внешней среды, а также от взаимосвязи между изменениями этих случайных процессов. Как правило, повреждаемость изоляции указанных элементов возрастает в период наибольших электрических нагрузок и снижается со снижением нагрузки. В качестве примера на рис. 2.11 приведены зависимости отказов кабельных линий одного из заводов из-за механических и электрических повреждений и график среднемесячных нагрузок, при рассмотрении которых легко заметить довольно тесную связь этих величин. Поэтому на практике представляет интерес разработка методов выбора таких расчетных значе-

ний нагрузок, которые обеспечивали бы заданный (по тем или иным критериям) уровень надежности, т. е. в определенном смысле управление уровнем надежности уже на стадии проектирования, выбором параметров элементов систем электроснабжения. Для решения такого рода задач можно предложить два подхода:

1) получение показателей надежности изоляции указанных элементов на основе математического описания случайных процессов изменения токовой нагрузки этих элементов и температуры внешней среды и по ним — характеристик случайных процессов температуры изоляции, а на их основе с использованием теоретических законов, характеризующих прочность изоляции, получение показателей интенсивностей отказов и функций надежности, отвечающих тем или иным значениям нагрузки элементов. Аналогичный подход используется при выборе параметров элементов в условиях резкопеременного режима электропотребления, когда определяющим условием является вибрационное старение изоляции, например обмоток трансформаторов, так как для кабельных линий в силу особенностей их конструктивного выполнения этот фактор мало влияет на сроки службы изоляции;

2) менее точный способ, который предполагает, что выбор параметров указанных элементов систем электроснабжения производится с учетом вполне конкретных условий, например температуры окружающей среды, систем охлаждения, количества набросов и сбросов нагрузки при резкопеременном характере электропотребления и т. д. Целесообразно среди многих влияющих факторов выделить для количественных характеристик только токовую нагрузку в качестве главного фактора — тепловое старение, считая, что остальные факторы могут быть учтены введением поправочных коэффициентов. При этом не рассматриваются закономерности изменения процессов во времени и вероятностные особенности характеристик прочности изоляции, т. е. результаты применимы к некоторым средним условиям (для математических ожиданий сроков службы, считая зависимости сроков службы от температуры функциональными). В этом случае токовые нагрузки, температура перегрева изоляции, срок службы моделируются более простыми математическими моделями — случайными величинами, которые функционально взаимосвязаны между собой.

Второй подход позволяет, хотя и приблизительно, но более просто, получить значения расчетных нагрузок элементов, обеспечивающих заданный уровень надежности.

2.6. Количественные характеристики показателей функциональной надежности силовых трансформаторов

Получение количественных характеристик показателей функциональной надежности целесообразно рассмотреть на примере силовых трансформаторов, для изоляции которых характерно и тепловое, и вибрационное старение в резкопеременных режимах электропотребления. В расчетах показателей надежности реальных элементов необходимо учитывать возможность появления внезапных и постепенных отказов. Условно рассматривая элемент как состоящий из двух элементов, в одном из которых может появиться внезапный, а в другом — постепенный отказ, вероятность безотказной работы можно получить как произведение вероятностей двух независимых элементов, соединенных последовательно в смысле надежности:

$$p(t) = p_v(t) p_n(t), \quad (2.48)$$

где $p_v(t)$, $p_n(t)$ — соответственно вероятности безотказной работы условных элементов, соответствующих внезапным и постепенным отказам.

Учитывая полученные ранее выводы (см. § 2.2 и 2.4) по видам законов распределения этих видов отказов, получаем:

$$p(t) = \exp(-\lambda t) \exp[-c(t - t_0)^\alpha], \quad (2.49)$$

где t_n — срок службы изоляции, зависящий от характеристик прочности изоляции и внешних воздействий.

Если задать необходимый уровень надежности, то, решая последнее уравнение (при известной из статических данных интенсивности внезапных отказов λ) относительно t_n и соответственно характеристик внешних воздействий, можно путем выбора расчетных значений нагрузки обеспечить заданный уровень надежности за время

$$t_n = t_0 + \left[\frac{1}{c} (\lambda_b t + \ln p(t))^{1/\alpha} \right]. \quad (2.50)$$

Рассмотрим алгоритмы получения показателей надежности при тепловом старении изоляции. В § 2.4 было получено соотношение, связывающее срок жизни изоляции с мерой прочности $E_{кр}/E_0$ и температурой изоляции,

$$t_{ст} = \frac{1}{k_0} \ln \frac{E_{кр}}{E_0} \exp(B/T), \quad (2.51)$$

где $E_{кр}$ — критическое значение параметра прочности, при котором наступает отказ.

В процессе старения изоляции соотношение $E_0/E_{кр}$ изменяется в диапазоне от 1 до 0. Для сокращения математических выкладок целесообразно ввести следующую величину:

$$M_{кр} = 1 - E_0/E_{кр}, \quad (2.52)$$

которая изменяется в пределах от 0 до 1.

На основании соображений, изложенных в § 2.4, распределение этой величины, характеризующей прочность изоляции, можно считать распределением Вейбулла:

$$F(M_{кр}) = 1 - \exp[-b(M_{кр} - M_0)^\alpha], \quad (2.53)$$

где M_0 — минимальное значение случайной величины, соответствующее максимальному критическому значению рабочей характеристики E , при которой возможен отказ; α , b — параметры распределения.

Учитывая, что

$$M_{кр} = 1 - \exp\left[k_0 \exp\left(-\frac{B}{T}\right) (t_{ст})\right] = 1 - \exp(-kt),$$

где

$$k = k_0 \exp\left(-\frac{B}{T}\right),$$

закон распределения срока службы имеет вид:

$$F(t_{ст}) = 1 - \exp\{-b[1 - \exp(-kt) - M_0]^\alpha\}. \quad (2.54)$$

Плотность вероятности случайной величины срока службы и интенсивность постепенных отказов при неизменной температуре изоляции равны:

$$f(t_{ст}) = abk \exp(-kt) [1 - \exp(-kt) - M_0]^{\alpha-1} [1 - F(t_{ст})]; \quad (2.55)$$

$$\lambda_n(t_{ст}) = abk \exp(-kt) [1 - \exp(-kt) - M_0]^{\alpha-1}. \quad (2.56)$$

В реальных условиях нагрузка элемента системы электроснабжения (в данном случае трансформатора) изменяется случайно, а температура изоляции зависит от случайных изменений температуры внешней среды, поэтому и температура изоляции изменяется также случайно. Ее целесообразно моделировать случайным процессом. Проведенные экспериментальные исследования

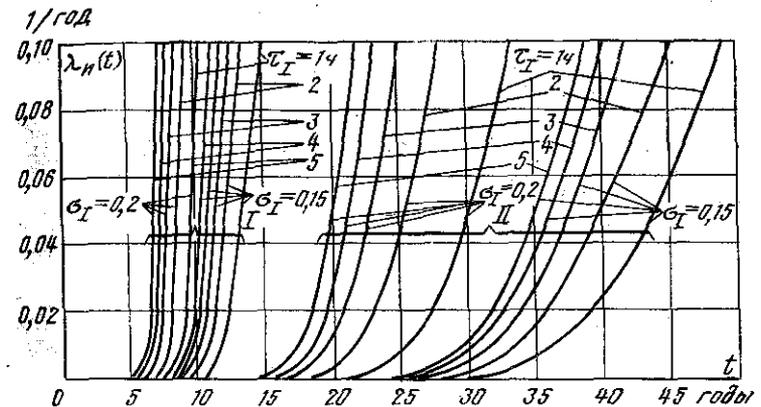


Рис. 2.12. Зависимость интенсивности отказов изоляции силового трансформатора от времени при учете только теплового старения. I — при постоянной температуре окружающей среды; II — при учете суточного и сезонного изменений температуры окружающей среды и взаимной корреляционной связи между процессами изменения температуры окружающей среды и нагрузки.

с применением аналоговой вычислительной техники показали, что законы распределения температуры изоляции для часто встречающихся условий наиболее целесообразно аппроксимировать законом гамма-распределения

$$f(T) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} T^\alpha \exp(-T/\beta). \quad (2.57)$$

Показатели функциональной надежности зависят от скорости химической реакции, являющейся функцией температуры. Для указанных расчетов целесообразно оперировать не законами распределения, а числовыми характеристиками. При интегральном характере износа и старения изоляции характеристикой, наиболее адекватно отражающей происходящие процессы, является

математическое ожидание скорости химической реакции

$$\bar{k} = \frac{k_0}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} T^{\alpha} \exp\left(-\frac{B}{T} - \frac{T}{\beta}\right) dT =$$

$$= \frac{k_0}{\Gamma(\alpha+1)} 2 \left(\frac{B}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} K_{\alpha+1} \left[2 \left(\frac{B}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

где $K_{\nu}(x)$ — функция Макдональда.

В результате расчетов показателей надежности получены интенсивности отказов и функции надежности вследствие теплового старения изоляции при различных характеристиках нагрузки и смешанном составе потребителей¹ (варьировалось среднеквадратическое отклонение σ_I и постоянная корреляции τ_I — случайного процесса

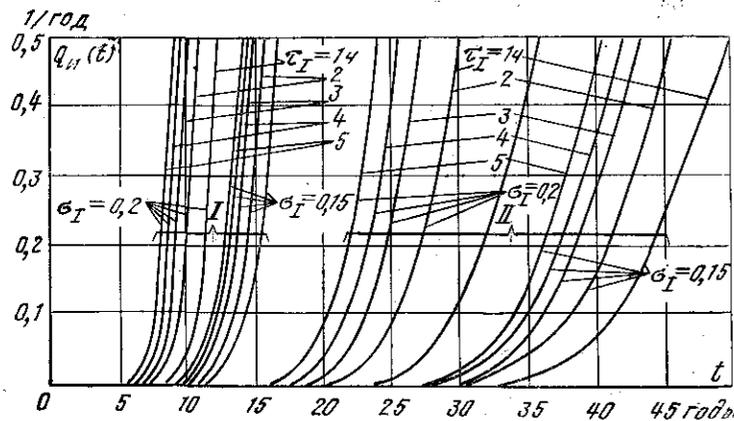


Рис. 2.13. Изменение вероятности отказа изоляции силового трансформатора от времени при учете только теплового старения.

I — при постоянной температуре окружающей среды; *II* — при учете суточного и сезонного изменений температуры окружающей среды и взаимной корреляционной связи между процессами изменения температуры окружающей среды и нагрузки.

нагрузки) с учетом сезонных и суточных изменений температуры окружающей среды (рис. 2.12, 2.13). Зависимости рассчитаны для среднегодовой нагрузки трансформаторов $\bar{I} = 0,7 I_{ном}$.

Группа зависимостей *I* рассчитана при постоянной температуре окружающей среды 20°C, группа зависимостей *II* — при учете сезонного и суточного изменений температуры окружающей среды и взаимной корреляционной связи между этими процессами. Характер электропотребления отражается постоянной корреляции случайного

¹ Эти и другие зависимости, приведенные на рис. 2.12—2.18, получены на ЭВМ инж. Н. В. Третьяковым.

процесса изменения нагрузки τ_I , которая в рассматриваемом случае варьировалась от 1 до 5 ч. Анализ зависимостей показывает, что учет фактического изменения температуры внешней среды оказывает существенное влияние на показатели функциональной надежности трансформатора, если нет крупных потребителей с резкопеременным режимом работы. В настоящее время нет экспериментальных характеристик прочности изоляции при вибрационном старении материала, однако по данным ГОСТ 11677-75 можно оценить параметр m так называемой кривой усталости (рис. 2.14):

$$\left. \begin{aligned} m \lg S + \lg N &= \text{const} \text{ при } N < N_0; \\ N &\rightarrow \infty \text{ при } N > N_0, \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

где N_0 — число циклов, соответствующее точке перелома на кривой усталости; m — параметр кривой усталости, характеризующий ее наклон; S — разрушающее напряжение; N — предельное число циклов.

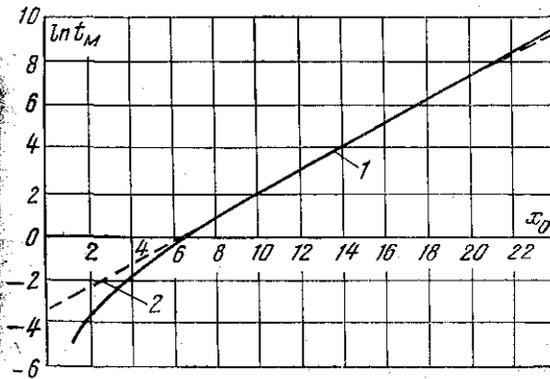


Рис. 2.15. Логарифм срока службы изоляции силового трансформатора при вибрационном старении (для резкопеременного режима электропотребления) в зависимости от соотношения предела прочности и действующих напряжений.

1 — расчетная зависимость; 2 — приближенная зависимость.

Для расчета зависимости срока службы при вибрационном старении сложную зависимость (2.34) при $x_0 = R_I / \sigma_S > 7$ можно аппроксимировать простым выражением (рис. 2.15)

$$\ln A_m t_{c,m} = (x_0 / E_m) \quad (2.59)$$

или

$$t_{c, m} = \frac{1}{A_M} \exp\left(\frac{x_0}{E_M}\right). \quad (2.60)$$

Показатели надежности, обусловленные вибрационным старением, равны:

$$F(t_{c, m}) = Q(t_{c, m}) = 1 - \exp[-b_M (E_M \sigma_S \ln A_M t_{c, m} - S_0)^{a_M}]; \quad (2.61)$$

$$f(t_{c, m}) = \frac{1}{t_{c, m}} a_M b_M \sigma_S E_M [\sigma_S E_M \ln (A_M t_{c, m}) - S_0]^{a_M - 1} [1 - F(t_{c, m})]; \quad (2.62)$$

$$\lambda_{и, m}(t) = a_M b_M \frac{\sigma_S}{t_{c, m}} E_M [\sigma_S E_M \ln (A_M t_{c, m}) - S_0]^{a_M - 1}; \quad (2.63)$$

при

$$t_{c, m} \geq \frac{1}{A_M} \exp\left(\frac{S_0}{\sigma_S E_M}\right).$$

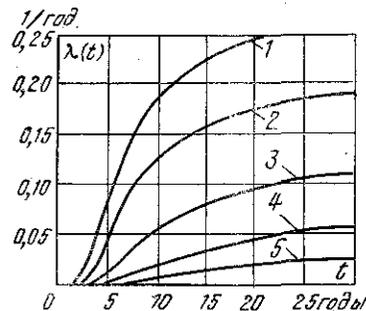


Рис. 2.16. Интенсивность старения изоляции силового трансформатора при вибрационном старении и вариации предельных разрушающих напряжений.

1 — $\bar{T}=0,85$, $\sigma_I=0,25$; 2 — $\bar{T}=0,8$, $\sigma_I=0,20$;
3 — $\bar{T}=0,75$, $\sigma_I=0,20$; 4 — $\bar{T}=0,70$, $\sigma_I=0,20$;
5 — $\bar{T}=0,65$; $\sigma_I=0,20$.

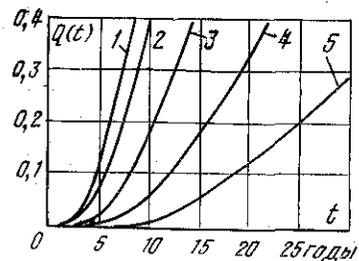


Рис. 2.17. Вероятность отказа силового трансформатора при вибрационном старении (для резкопеременного режима электропотребления).
1—5 — то же, что и на рис. 2.16.

Рис. 2.18. Нагрузочная способность трансформатора, обусловленная совместным учетом теплового и вибрационного старения изоляции в зависимости от вариации нагрузки ξ при вероятности безотказной работы 0,8 в течение 20 лет.

Анализ показателей надежности (рис. 2.16, 2.17) при вариации характеристик прочности σ_S показывает очень значительную зависимость их от среднеквадратического отклонения в материале изоляции, которое зависит не только от амплитуд изменения тока в обмотке, но и от однородности материала изоляции.

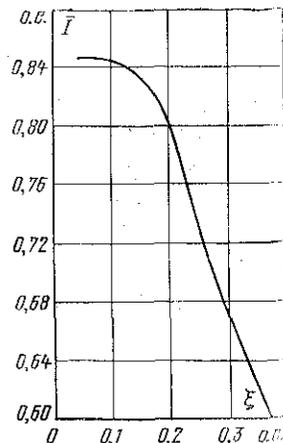
Характер изменения случайного процесса нагрузки можно в обобщенном виде характеризовать коэффициентом вариации нагрузки $\xi = \sigma_I / \bar{I}$ — отношением среднеквадратического отклонения токовой нагрузки к математическому ожиданию. Очевидно, чем больше значение ξ , тем больше наблюдаются изменения в режиме электропотребления. На рис. 2.18 показана обобщенная зависимость нагрузочной способности трансформатора при совместном учете теплового и электродинамического старения изоляции, построенная при условии безотказной работы изоляции с вероятностью 0,8 в течение 20 лет. Эта зависимость может быть использована в приближенных практических оценках.

2.7. Определение расчетных нагрузок силовых трансформаторов и кабельных линий

В соответствии с принципами, изложенными в § 2.5, целесообразно более подробно остановиться на алгоритмах возможной методики определения расчетных нагрузок, обеспечивающих заданный уровень надежности указанных элементов. Математическое описание рассматриваемых процессов в значительной степени упрощено.

Для элементов электрооборудования систем электропитания обычно задается номинальный нагрузочный режим, при котором гарантируются технические параметры и характеристики, приводимые в технических условиях. В стандартах по изготовлению силовых кабелей и трансформаторов не указывается их срок службы. Обычно устанавливается гарантийный срок службы указанных элементов, но не отмечается, с какой степенью надежности они должны работать в течение этого срока.

Критериями допустимости того или иного режима являются максимальная температура проводника и износ изоляции за рассматриваемый период. По термическому воздействию на изоляцию силовых кабелей и трансформаторов различают расчетные нагрузки, выбранные с учетом теплового износа изоляции, и расчетные нагрузки по максимально допустимой температуре. При этом предполагается замена действительной переменной нагрузки эквивалентной по указанным условиям нагрева. За основу выбора расчетной нагрузки по



тепловому износу изоляции принимается допущение, что при длительно допустимых температурах нагрева, нормированных для трансформаторов и кабелей, происходит их нормальный износ, условно отвечающий некоторому экономически целесообразному сроку службы.

При вероятностном моделировании нагрузки для определения расчетной нагрузки I_p в настоящее время широко используется выражение

$$I_p = I_c + \beta \sigma_I, \quad (2.64)$$

где I_c и σ_I — соответственно среднее значение и среднее квадратическое отклонение тока нагрузки; β — коэффициент, зависящий от принятой вероятности превышения нагрузкой расчетного значения.

От того, какое значение задать β в расчетах, в сильной степени зависит значение расчетной нагрузки элемента (особенно при значительных вариациях нагрузки), а следовательно, его номинальные параметры: технико-экономические характеристики в эксплуатации, и, в частности, его функциональная надежность. С учетом принятого допущения коэффициент β следует выбирать так, чтобы соответствующая ему вероятность превышения расчетного значения нагрузки, от которой зависит срок службы изоляции, была мала. Однако экономически целесообразный срок службы элемента электрической сети зависит от условий эксплуатации: параметров режима работы элемента, местоположения в сети, его значимости в схеме электроснабжения, типа потребителя и т. д.

При определении оптимального срока службы, а следовательно, и соответствующей расчетной нагрузки по износу изоляции одной из составляющих целевой функции должна быть составляющая, обусловленная нагрузочной способностью элемента, которая учитывала бы надежность элемента.

В нормальных условиях эксплуатации основным влияющим фактором, на наш взгляд, является температура нагрева $\theta = \theta_n - \theta_0$, зависящая от токовой нагрузки элемента. Здесь θ_0 — температура среды, в которой находится изоляция. Поэтому, зная функциональные зависимости от нагрузки элемента, можно приближенно оценить составляющие тех показателей надежности элемента, которые определяются износом изоляции, зависящим от нагрузки элемента и продолжительности его

воздействия. В этом подходе не учитывается влияние различного рода аварийных режимов работы элемента, например токов сквозных коротких замыканий, на срок службы изоляции.

Следует отметить, что такой подход не исключает оценки влияния остальных факторов на срок службы изоляции, например, путем введения поправочных коэффициентов, которые учитывали бы конкретные условия эксплуатации элемента.

В результате решения известного дифференциального уравнения теплового баланса можно получить значение температуры нагрева θ в зависимости от тока нагрузки I :

$$\theta = \theta_{\text{ном}} \left(\frac{I}{I_{\text{ном}}} \right)^2 (1 - e^{-rt}) + \theta_0 e^{-rt}. \quad (2.65)$$

где r — величина, обратная постоянной времени нагрева; $\theta_{\text{ном}}$ — температура перегрева, соответствующая номинальной нагрузке; θ_0 — начальная температура перегрева.

В результате многочисленных исследований нагрузок в системах электроснабжения с разным составом потребителей установлено, что законы распределения нагрузок как случайных величин подчиняются нормальным. Поэтому далее все конкретные результаты будут излагаться применительно к этому закону, однако методика справедлива также при любом другом законе распределения нагрузки.

На основе решения уравнения теплового баланса и принятого нормального распределения тока нагрузки получен закон распределения температуры перегрева как функции тока нагрузки

$$f(\theta) = \frac{I_{\text{ном}}}{\sqrt{2\pi\theta\sigma_I^2}\theta_{\text{ном}}} \times \exp\left(-\frac{I_{\text{ном}}^2}{2\sigma_I^2} \theta + I_c^2\right) \text{ch}\left(\frac{I_c I_{\text{ном}}}{\sigma_I^2} \sqrt{\frac{\theta}{\theta_{\text{ном}}}}\right). \quad (2.66)$$

Представляется целесообразным в качестве расчетной нагрузки принять для кабелей длительно допустимый ток по нагреву, для трансформаторов — номиналь-

ный ток. Тогда, принимая во внимание то, что этим ток
кам соответствует перегрев $\theta_d = \theta_{ном}$, получаем:

$$f(\theta) = \frac{1 + \beta\xi}{\sqrt{2\pi\theta_d\xi^2\theta}} \times \exp\left[-\frac{1}{2\xi^2} - \frac{(1 + \beta\xi)^2\theta}{2\xi^2\theta_d}\right] \text{ch}\left(\frac{1 + \beta\xi}{\xi^2} \sqrt{\frac{\theta}{\theta_d}}\right). \quad (2.67)$$

Этот закон относится к законам гамма-распреде-
ления. Случайные значения нагрузки вызывают случайные
изменения температуры перегрева, а следовательно,

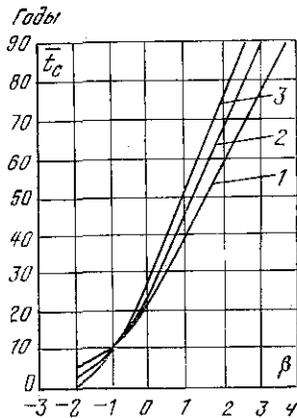


Рис. 2.19. Зависимость среднего срока службы изоляции трансфор-
маторов и кабельных линий от коэффициента β расчетной нагрузки
1 — при $\xi=0.2$; 2 — $\xi=0.25$; 3 — $\xi=0.3$.

срок службы изоляции как функция случайной величин
ны (2.23) будет также случайной величиной. По нему
можно оценить время наступления отказа элемента
вследствие старения изоляции.

На основании распределения температуры перегрева
и зависимости срока службы от температуры перегрева
получают следующие показатели (рис. 2.19, 2.20):
плотность вероятности распределения срока службы

$$f(t_c) = \frac{1 + \beta\xi}{t_c \sqrt{2\pi\gamma\theta_d\xi^2 \ln(A_T/t_c)}} \exp\left[-\frac{1}{2\xi^2} - \frac{(1 + \beta\xi)^2 \ln(A_T/t_c)}{2\gamma\theta_d\xi^2}\right] \text{ch}\left[\frac{1 + \beta\xi}{\xi^2} \sqrt{\frac{\ln(A_T/t_c)}{\gamma\theta_d}}\right]; \quad (2.68)$$

числовые характеристики

$$\bar{t}_c = \frac{2A_T(1 + \beta\xi)}{\sqrt{2\gamma\theta_d\xi^2 + (1 + \beta\xi)^2}} \exp\left(-\frac{\gamma\theta_d}{2\gamma\theta_d\xi^2 + (1 + \beta\xi)^2}\right); \quad (2.69)$$

$$\sigma_{t_c} = A_T \sqrt{1 + \beta\xi} \left\{ \frac{2 \exp\left[-\frac{2\gamma\theta_d}{4\gamma\theta_d\xi^2 + (1 + \beta\xi)^2}\right]}{\sqrt{4\gamma\theta_d\xi^2 + (1 + \beta\xi)^2}} - \frac{4(1 + \beta\xi) \exp\left[-\frac{2\gamma\theta_d}{2\gamma\theta_d\xi^2 + (1 + \beta\xi)^2}\right]^{1/2}}{2\gamma\theta_d\xi^2 + (1 + \beta\xi)^2} \right\}. \quad (2.70)$$

Для практических расчетов зависимость среднего
срока службы в первом приближении можно аппрокси-
мировать линейными уравнениями:

для кабельных линий

$$\bar{t}_c = (45\xi + 8,5)\beta + 60\xi + 13; \quad (2.71)$$

для трансформаторов

$$\bar{t}_c = (38\xi + 7,4)\beta + 5\xi + 11,5. \quad (2.72)$$

На основании полученного закона распределения
срока службы изоляции можно получить выражение для

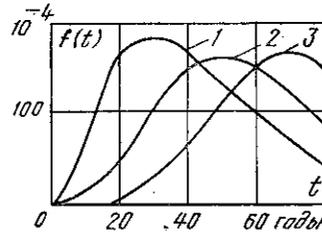
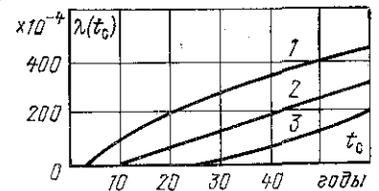


Рис. 2.20. Дифференциальная
функция распределения срока
службы изоляции кабельных
линий и трансформаторов при
вариации расчетного значения
нагрузки (коэффициента β).
1 — при $\beta=1$; 2 — $\beta=2$; 3 — $\beta=3$.

Рис. 2.21. Интенсивность отка-
зов трансформаторов вследст-
вие теплового старения изоля-
ции в зависимости от времени
эксплуатации при вариации
расчетных значений нагрузки
(коэффициента β).



1 — при $\beta=1$; 2 — $\beta=2$; 3 — $\beta=3$.

определения интенсивности постепенных отказов вслед-
ствие теплового износа изоляции (рис. 2.21)

$$\lambda_n(t_c) = \frac{(1 + \beta\xi) \exp\left[-0,5\xi^2 - \frac{(1 + \beta\xi)^2}{2\gamma\theta_d\xi^2} \ln(A_T/t_c)\right] \times}{t_c \sqrt{2\pi\gamma\theta_d\xi^2 \ln(A_T/t_c)}} \left\{ \Phi\left[\frac{1 + \beta\xi}{\xi} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \text{ch}\left[\frac{1 + \beta\xi}{\xi^2} \sqrt{\frac{\ln(A_T/t_c)}{\gamma\theta_d}}\right] \right.$$

$$\left. \times \sqrt{\frac{\ln(A_T/t_c)}{\gamma\theta_d} - \xi^{-1}} \right] + \Phi\left[\frac{1 + \beta\xi}{\xi} \times \right.$$

$$\times \sqrt{\frac{\ln(A_T/t_c)}{\gamma \theta_d} + \xi^{-1}} \left[-\Phi(\xi^{-1}) - \Phi(-\xi^{-1}) \right], \quad (2.73)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv$ — функция Лапласа.

Для практических расчетов эту сложную зависимость с достаточной степенью точности целесообразно заменить более простым выражением:

для кабельных линий

$$\lambda_n(t_c) = 10^{-4} \left[\frac{1,8}{\xi} t_c + (240 - 100\beta)(1 - e^{-0,03t_c}) \right]; \quad (2.74)$$

для трансформаторов

$$\lambda_n(t_c) = 10^{-4} \left[\frac{1,01}{\xi} t_c + (200 - 80,5\beta)(1 - e^{-0,07t_c}) \right]. \quad (2.75)$$

Выбор расчетной нагрузки элементов систем электроснабжения. Многие авторы разделяют технические системы на два основных класса с точки зрения обоснования требований по надежности. При этом к первому классу относят системы, полезный эффект которых а также ущерб из-за отказов можно измерить в денежных единицах. Ко второму классу относят системы, использование которых не приводит непосредственно к получению материальных выигрышей или убытков и действие которых трудно оценить в денежных единицах. В зависимости от типа потребителя системы электроснабжения могут быть отнесены к первому или второму классу. В связи с этим возможны два различных подхода к обоснованию требований по надежности работ элементов систем электроснабжения. В первом случае задачу можно решать без ограничений на характеристики элемента (стоимость, номинальные параметры и т. д.), во втором необходимо учитывать ограничения на показатели надежности или параметры оборудования.

Выбор расчетной нагрузки кабельных линий и трансформаторов по условию обеспечения требуемого уровня надежности. При выборе расчетной нагрузки элементов электроснабжения, относящихся ко второму классу, целесообразно исходить из требуемого уровня надежности работы, устанавливаемого на основе соображений, связанных со значимостью элемента в электроснабжении для данного потребителя.

Если установлен необходимый уровень надежности работы элемента по тем или иным соображениям и известна интенсивность внезапных отказов по статистическим данным, то с помощью зависимости интенсивности постепенных отказов от коэффициента β расчетной нагрузки определяется значение расчетной нагрузки, обеспечивающее заданный уровень надежности (в данном случае этот уровень определяет λ_n) в течение требуемого периода времени:

$$\int_0^t \lambda_n(t) dt = -\ln p(t) - \lambda_n t. \quad (2.76)$$

В случае взаимно резервируемых (параллельное соединение в смысле надежности) двух одинаковых элементов и 100%-ной пропускной способности каждого элемента относительно узла нагрузки вероятность безотказной работы $p_c(t)$ определяется выражением

$$p_c(t) = 1 - [1 - p(t)]^2. \quad (2.77)$$

где $p(t) = p_B(t) p_H(t)$ — вероятность безотказной работы каждого элемента; $p_B(t)$ и $p_H(t)$ — вероятности безотказной работы, обусловленные соответственно внезапными отказами и отказами вследствие износа.

В данном случае коэффициент β расчетной нагрузки можно определить также из уравнения

$$\int_0^t \lambda_n(t) dt = -\ln [1 - \sqrt{1 - p_c(t)}] - \lambda_n t. \quad (2.78)$$

В качестве примера определена расчетная нагрузка кабельной линии 10 кВ типа АСБ, проложенной в земле в траншеях и питающей нагрузку с характеристиками $I_c = 140$ А (согласно статистическим данным по нагрузке различных видов потребителей коэффициент вариации $\xi = 0,1 \div 0,4$) и интенсивностью внезапных отказов $\lambda_n = 0,01$ 1/год в предположении, что линия должна работать с надежностью не менее чем $p(t) = 0,8$ в течение 20 лет. Определена также разница приведенных затрат на линию при выборе расчетной нагрузки с $\beta = 3$ и по предлагаемому методу:

$$\Delta Z\% = \frac{Z_{\beta=3} - Z_{\beta=0,8}}{Z_{\beta=0,8}} 100.$$

Нерезервированная кабельная линия

ξ	0,1	0,2	0,3	0,4
$\beta_{\rho=0,8}$	3,1	2,4	2,1	1,7
$\Delta Z, \%$	0,55	6,2	9,15	22,5
$I_p (\rho=0,8), A$	183	207	228	235
$I_p (\beta=3), A$	182	224	266	308

Резервированная кабельная линия

$\beta_{\rho=0,8}$	2,4	1,3	1,0	0,85
I_p, A	173,6	176,5	182	187,5

Из полученных результатов видно, что чем больше вариация токовой нагрузки ξ , тем больше разница в приведенных затратах при выборе расчетного значения нагрузки этими двумя способами.

Выбор расчетного значения нагрузки по условию минимума приведенных затрат. Если элементы систем электроснабжения работают в такой системе, в которой полезный эффект и результат отказа можно выразить в денежных единицах, то при выборе расчетной нагрузки целесообразно руководствоваться условием минимума приведенных затрат на сооружение и эксплуатацию элемента.

Выражая сечение кабеля через допустимый по нагреву ток, нетрудно видеть, что приведенные затраты на сооружение и эксплуатацию нерезервированного участка кабельной линии являются функцией от коэффициента β расчетной нагрузки. Так, сечение кабельной линии при вероятностном задании нагрузки

$$F = I_c^2 (1 + \beta\xi)^2 n \rho (1 + \alpha\theta_d) \frac{s_\Sigma}{\theta_d}, \quad (2.7)$$

где n — число жил в кабеле; ρ — удельное электрическое сопротивление; α — температурный коэффициент увеличения сопротивления; F — сечение кабеля; s_Σ — суммарное сопротивление кабеля и среды, окружающей его; θ_d — длительно допустимая температура перегрева.

Приведенные затраты можно определить по формуле

$$Z = \varphi(\beta) = H + G(1 + \beta\xi)^2 + \frac{L}{(1 + \beta\xi)^2} + M(\lambda_{в,в} \bar{t}_{в,в} + \lambda_{н} \bar{t}_{н}),$$

где

$$H = \left(p_n + \frac{a}{100} \right) k' k'_0;$$

$$G = \frac{1}{\beta} \left(p_n + \frac{a}{100} \right) k k'_0 I_c^2 n \rho (1 + \alpha\theta_d) \frac{s_\Sigma}{\theta_d};$$

$$L = \frac{b_s l t_\Gamma (1 + \xi^2) \theta_d}{(1 + \alpha\theta_d) s_\Sigma}; \quad M = y_0 I_c U_{ном} \cos \varphi_c t_\Gamma l;$$

p_n — нормативный коэффициент эффективности; a — отчисления на амортизацию, ремонт и обслуживание; k'_0 — соответственно расходы, не зависящие и зависящие от сечения кабеля; l — длина кабельной линии; b_s — стоимость 1 кВт·ч потерянной энергии; t_Γ — рассматриваемый период времени; y_0 — удельный ущерб от недоотпуска электроэнергии; $\bar{t}_{в,в}$, $\bar{t}_{н}$ — соответственно среднее время аварийного восстановления при внезапных отказах и при отказах вследствие износа изоляции; $U_{ном}$ — номинальное напряжение; $\cos \varphi_c$ — средний коэффициент мощности; $\lambda_{в}$, $\lambda_{н}$ — соответственно интенсивности внезапных и постепенных отказов.

Аналогичное уравнение получается для трансформатора. Капитальные вложения K и удельные потери в стали ΔP_x и обмотках ΔP_K трансформатора также являются функциями его номинальной мощности. Учитывая, что по расчетной нагрузке трансформаторов выбирается его номинальная мощность, легко убедиться в том, что приведенные затраты на сооружение и эксплуатацию трансформатора также будут функцией от коэффициента β расчетной нагрузки:

$$Z = \left(p_n + \frac{a}{100} \right) f_1(\beta) + b_s t_\Gamma \left[f_2(\beta) + f_3(\beta) \frac{1 + \xi^2}{(1 + \beta\xi)^2} \right] + y_0 I_c U_{ном} \cos \varphi_c t_\Gamma [\lambda_{в,в} \bar{t}_{в,в} + \lambda_{н}(\beta) \bar{t}_{н}], \quad (2.81)$$

$$f_1(\beta) = k = \varphi_1(S_{ном});$$

$$f_2(\beta) = \Delta P_x = \varphi_2(S_{ном});$$

$$f_3(\beta) = \Delta P_K = \varphi_3(S_{ном}).$$

В системах электроснабжения сложной конфигурации полный перерыв питания потребителей происходит довольно редко. Надежность сложной системы электроснабжения является функцией надежности ее элемен-

тов и зависит от пропускной способности отдельных элементов.

В общем случае для сложной системы перерыв электроснабжения является функцией состояний ее элементов. Вероятность перерыва электроснабжения потребителей будет равна:

$$q_c = f(q_1, q_n), \quad (2.82)$$

где q_1 — вероятность аварийного отключения; q_n — вероятность преднамеренного отключения.

Два параллельно соединенных элемента со стопроцентной пропускной способностью могут быть рассмотрены как самое простое звено сложной системы. В данном случае полные перерывы электроснабжения возможны только при совпадении аварийного отключения одного элемента с преднамеренным отключением другого, а также при совпадении аварийных отключений обоих элементов:

$$q_c = 2k_n q_1 q_n + q_n^2, \quad (2.83)$$

где $k_n < 1$ — коэффициент, учитывающий уменьшение вероятности совпадения событий вследствие того, что возможно лишь наложение аварии на преднамеренное отключение, а не наоборот (см. гл. 3);

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \lambda_v \bar{t}_{v,v} + \lambda_n(\beta) \bar{t}_{v,n}; \\ q_n &= \lambda_n \bar{t}_{np}. \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

здесь \bar{t}_{np} — среднее время преднамеренного отключения; λ_n — интенсивность преднамеренных отключений; $\lambda_n(\beta)$ — интенсивности аварийных отключений.

Народнохозяйственный ущерб в данном случае

$$\begin{aligned} Y &= y_0 I_c U_{ном} \cos \varphi_{стг} \times \\ &\times 2I(2k_n \lambda_n \bar{t}_{np} [\lambda_v \bar{t}_{v,v} + \lambda_n(\beta) \bar{t}_{v,n}] + \\ &+ [\lambda_v \bar{t}_{v,v} + \lambda_n(\beta) \bar{t}_{v,n}]^2). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Приведенные народнохозяйственные затраты на сооружение и эксплуатацию резервированного участка кабельной линии будут равны:

$$\begin{aligned} Z &= 2H + 2G(1 + \beta\xi)^2 + \frac{L}{2 + (1 + \beta\xi)^2} + \\ &+ 2M \{2k_n \lambda_n \bar{t}_{np} [\lambda_v \bar{t}_{v,v} + \lambda_n(\beta) \bar{t}_{v,n}] + [\lambda_v \bar{t}_{v,v} + \lambda_n(\beta) \bar{t}_{v,n}]^2\}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Аналогичное уравнение можно составить для параллельно работающих взаимно резервируемых трансформаторов. Значение коэффициента β_{opt} , при котором приведенные затраты будут минимальными, определяется из условия $\partial Z / \partial \beta = 0$ при заданных характеристиках нагрузки.

Результаты расчетов определения расчетных нагрузок кабельной линии и трансформатора приведены ниже. Получены также оценки разности приведенных затрат ΔZ при выборе значения расчетной нагрузки по $\beta=3$, β_{opt} и изложенному методу.

Нерезервированная кабельная линия

ξ	0,1	0,2	0,3	0,4
β_{opt}	4,8	2,2	1,2	0,8
$\Delta Z, \%$	5	7,75	13,2	40
$I_{p, opt}, A$	207,0	201,5	190,5	185

Трансформатор

β_{opt}	3,5	1,75	1,3	1,12
$I_{p, opt}, A$	189	189	194,5	202,5

Резервированная кабельная линия

β_{opt}	2,2	0,9	0,4	0,2
$I_{p, opt}, A$	171	165	157	151

Анализ результатов показывает, что чем больше вариация нагрузки ξ , тем больше разница между результатами по этим методам.

Исходя из необходимости более целесообразного использования оборудования в течение заданного срока эксплуатации с необходимой степенью надежности расчетные значения нагрузок по условиям износа изоляции целесообразно дифференцировать в зависимости от коэффициента вариации нагрузки. Но при этом активную роль начинают играть ограничения по пику температуры.

Глава третья

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Основные задачи надежности, решаемые с использованием теории случайных процессов

При решении некоторых практических задач надежности, таких, как оценка вероятностей отказа и безотказной работы системы на относительно коротких ин-

тервалах времени, соизмеримых с продолжительностью восстановления после аварии, расчет надежности электроснабжения в условиях поэтапного сооружения элементов системы, оценка вероятности развития аварии в системе с зависимыми элементами и др., возникает необходимость моделирования процессов отказов и восстановлений во времени с учетом начальных состояний отдельных элементов.

Наиболее характерными задачами являются оценка надежности системы во время преднамеренного отключения отдельных ее элементов для профилактики и капитальных ремонтов оборудования или оценка показателей оперативной надежности источников энергии в системе. Эти задачи можно решать различными способами при произвольных функциях распределения времени безотказной работы элементов, времени восстановления, продолжительности и интервала между преднамеренными отключениями. Одним из наиболее часто применяемых способов решения поставленных задач является численное моделирование на ЭВМ. Однако значительная трудоемкость расчетов и отсутствие наглядности ограничивают практическое применение этого способа.

В то же время использование допущений общего характера, отвечающих реальным условиям, позволяет применять хорошо разработанный аппарат теории массового обслуживания и, в частности, аппарат так называемых марковских случайных процессов для решения поставленных задач. Отметим также, что использование моделей случайных процессов в инженерных расчетах надежности систем электроснабжения позволяет обосновать и выявить области применения более простых алгоритмов. В качестве наиболее характерных примеров рассмотрим принципы составления расчетной модели процессов для простейших схем (нерезервируемых и резервируемых).

3.2. Одноэлементная схема

Функционирование элементов систем электроснабжения наиболее адекватно можно описать случайным процессом. В качестве основных допущений при этом используются допущения о пуассоновском характере потока отказов элементов систем и экспоненциальное распределение времени восстановления.

Процесс называется марковским, если для каждого момента времени вероятность любого состояния элемента в будущем зависит только от состояния его в настоящий момент времени и не зависит от того, каким образом элемент пришел в это состояние.

При указанных допущениях процесс отказов и восстановлений обладает важным свойством: время пребывания элементов в состоянии безотказной работы или восстановления не зависит от того, сколько времени он провел уже в этом состоянии, и распределено по экспоненциальному закону.

Если процесс, протекающий в системе со счетным множеством состояний и непрерывным временем, является марковским, то его можно описать с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний.

Рассмотрим элемент, который может находиться в двух состояниях: 0 — исправной работы и 1 — отказа (элемент восстанавливается). Определим вероятности состояний $p_0(t)$, $p_1(t)$ элемента в произвольный момент времени t при различных начальных условиях.

Эту задачу решим при условии, что поток отказов простейший с интенсивностью $\lambda = \text{const}$, закон распределения времени между отказами (частота отказов).

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (3.1)$$

Время восстановления описывается также экспоненциальным законом распределения с параметром $\mu = \text{const}$:

$$f(t_{\text{в}}) = \mu e^{-\mu t_{\text{в}}}. \quad (3.2)$$

Если имеется направленный граф состояний элемента или системы, то систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний p_k ($k=0, 1, 2, \dots$) можно сразу написать, пользуясь следующим простым правилом. В левой части каждого уравнения стоит производная $\frac{dp_k(t)}{dt}$, а в правой части — столько членов, сколько

ребер связано непосредственно с данным состоянием; если ребро оканчивается в данном состоянии, член имеет знак плюс, если начинается из данного состояния — знак минус. Каждый член равен произведению интенсивности потока событий, переводящего эле-

мент или систему по данному ребру, и вероятности того состояния, из которого начинается ребро (рис. 3.1):

$$\left. \begin{aligned} p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ p'_1(t) &= -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Система дифференциальных уравнений может быть использована для определения вероятностей безотказной работы электрических систем, функции и коэффициента готовности, вероятности нахождения в ремонте (восстановлении) среднего времени пребывания системы в любом состоянии на относительно коротких интервалах времени, когда необходим учет начальных условий (состояний элементов).

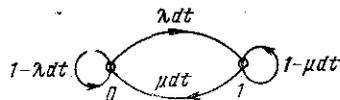


Рис. 3.1. Расчетный граф состояний одноэлементной схемы.

Решив эту систему уравнений при начальных условиях $p_0(0)=1, p_1(0)=0$, т. е. предположив, что в момент $t=0$ элемент находится в рабочем состоянии, получим:

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}; \quad (3.4)$$

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (3.5)$$

Если в начальный момент времени элемент был в состоянии отказа (восстановления) $p_0(0)=0, p_1(0)=1$, то

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}; \quad (3.6)$$

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (3.7)$$

Для установившегося значения вероятности $t \rightarrow \infty$, в практических расчетах $t \gg 3\bar{t}_B$ коэффициент готовности выражается формулой

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = k_r = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\bar{t}}{\bar{t} + \bar{t}_B}. \quad (3.8)$$

а коэффициент вынужденного простоя равен:

$$k_{\pi} = 1 - k_r = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\bar{t}_B}{\bar{t} + \bar{t}_B}. \quad (3.9)$$

Проанализируем более подробно степень затухания экспоненты:

$$\lambda + \mu = \frac{1}{\bar{t}} + \frac{1}{\bar{t}_B} = \frac{\bar{t} + \bar{t}_B}{\bar{t}\bar{t}_B} \approx \frac{\bar{t}}{\bar{t}_B} \approx \frac{1}{\bar{t}_B}. \quad (3.10)$$

Это выражение получено в предположении, что время безотказной работы практически всех элементов электрических систем много больше времени аварийного восстановления. Поэтому формулы (3.4), (3.5) для практических расчетов можно преобразовать следующим образом:

$$\text{при } p_0(0)=1, p_1(0)=0 \quad p_0(t) = k_r + k_{\pi} \exp(-t/\bar{t}_B); \quad (3.11)$$

$$p_1(t) = k_{\pi} - k_{\pi} \exp(-t/\bar{t}_B); \quad (3.12)$$

$$\text{при } p_0(0)=0, p_1(0)=1 \quad p_0(t) = k_r - k_r \exp(-t/\bar{t}_B); \quad (3.13)$$

$$p_1(t) = k_{\pi} + k_r \exp(-t/\bar{t}_B). \quad (3.14)$$

Коэффициент готовности и коэффициент вынужденного простоя можно интерпретировать как среднюю

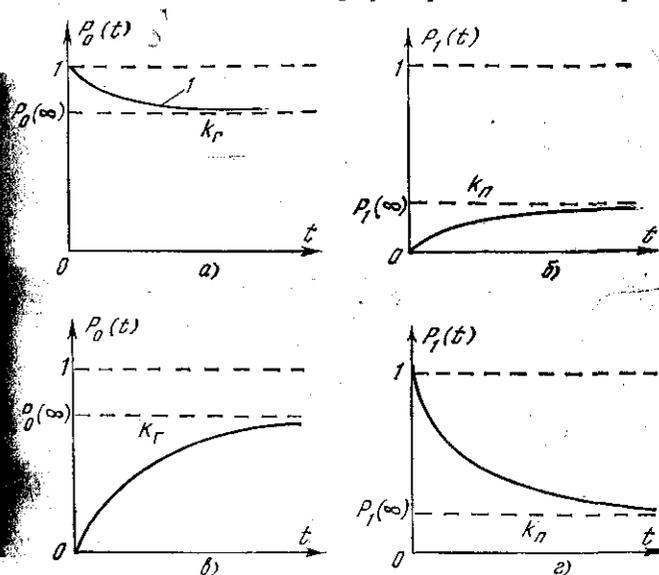


Рис. 3.2. Зависимости коэффициента готовности и коэффициента вынужденного простоя от времени при различных начальных условиях. а — при $p_0(0)=1, p_1(0)=0$; б — $p_0(0)=1, p_1(0)=0$; в — $p_0(0)=0, p_1(0)=1$; г — $p_0(0)=0, p_1(0)=1$.

вероятность нахождения систем соответственно в рабочем состоянии и в состоянии отказа (рис. 3.2, а-г). Из анализа формул (3.8), (3.9) видно, что чем меньше среднее время восстановления элемента (чем больше $\mu = \frac{1}{\bar{t}_B}$), тем больше коэффициент затухания $(\lambda + \mu)$,

тем быстрее процесс стремится к установившемуся значению вероятности, т. е. к установившимся значениям k_r и k_n . Обычно при определении показателей надежности электроснабжения, связанных с технико-экономической оценкой последствий от недоотпуска электроэнергии для достаточно длительных интервалов времени (сезон, год), без большой погрешности вероятности состояний системы можно считать по установившимся средним вероятностям $p_0 = p_0(\infty) = k_r$ и $p_1 = p_1(\infty) = k_n$. Такого рода режимы с точки зрения надежности называются предельными режимами элемента (или системы).

С вероятностной точки зрения, если в числе рассматриваемых состояний системы имеются состояния без выхода, то при $t \rightarrow \infty$ система с практической достоверностью оказывается в одном из них. Вероятности установившихся состояний $t \rightarrow \infty$ определяются очень просто из решения обычной системы алгебраических уравнений, полученных из системы дифференциальных уравнений путем приравнивания производных (левых частей) нулю $\frac{dp_k(t)}{dt}$ и замены $p_k(t) = p_k = \text{const}$ и допол-

ненных нормировочным условием $\sum_{k=0}^n p_k = 1$. Система

уравнений для элемента с двумя состояниями имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0; \\ p_0 + p_1 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

откуда

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \quad (3.16)$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}; \quad (3.17)$$

т. е. получился тот же результат, что и при анализе предельных случаев с помощью дифференциальных уравнений.

Этот результат можно интерпретировать несколько иначе. В самом деле, установившееся значение вероятности рабочего состояния элемента равно отношению среднего времени безотказной работы элемента к сумме средних времен безотказной работы и восстановления:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\frac{1}{\bar{t}_B}}{\frac{1}{\bar{t}} + \frac{1}{\bar{t}_B}} = \frac{\bar{t}}{\bar{t} + \bar{t}_B}. \quad (3.18)$$

При принятых допущениях среднее время безотказной работы за произвольный достаточно большой период времени T равно сумме времен между отказами t_i элементов, деленной на число отказов за время T , которое равно λT . При целом λT

$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda T} \sum_{i=1}^{\lambda T} t_i, \quad (3.19)$$

аналогично среднее время состояния отказа

$$\bar{t}_B = \frac{1}{\lambda T} \sum_{i=1}^{\lambda T} t_{B,i}. \quad (3.20)$$

Вероятность отказового состояния элемента за период времени T равна отношению суммарного времени отказового состояния $t_{\Sigma,0}$ ко всему времени T :

$$p_1 = \frac{t_{\Sigma,0}}{T} = \frac{\left(\frac{1}{\lambda T} \sum_{i=1}^{\lambda T} t_{B,i} \right) \lambda T}{T} = \frac{\bar{t}_B \lambda T}{T} = \lambda \bar{t}_B. \quad (3.21)$$

Вероятность безотказной работы $p_0 = 1 - p_1 = 1 - \lambda \bar{t}_B$. Таким образом, получено важное соотношение: вероятность отказового состояния элемента за достаточно большой промежуток времени равна произведению среднего времени восстановления на параметр потока отказов, т. е. практически по удельной повреждаемости элемента и среднему времени восстановления можно определить среднюю вероятность отказового и безотказового состояний элемента. В практических расчетах принимают $\omega = \lambda$, поэтому вероятности отказового и рабочего состояний определяются по формулам

$$p_1 = \lambda \bar{t}_B = \omega \bar{t}_B; \quad (3.22)$$

$$p_0 = 1 - \omega \bar{t}_B. \quad (3.23)$$

3.3. Система, состоящая из последовательных восстанавливаемых элементов

Система, состоящая из n последовательных восстанавливаемых элементов*, отказывает в тех случаях, когда отказывает любой из элементов (вероятностью отказов нескольких элементов при принятых допущениях о свойстве потока отказов пренебрегаем). Поэтому суммарный поток отказов всех элементов практически обладает свойством ординарности, которое позволяет пренебречь одновременностью отказов двух и более элементов. Система из n однородных последовательно соединенных элементов имеет два состояния: 0 — все элементы в рабочем состоянии, 1 — один из элементов в отказовом состоянии. Применяя вышеизложенный метод определения вероятностей состояния при различных начальных условиях, получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -n\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Вероятность работы n элементов в течение времени dt определяется с использованием правила умножения вероятностей для совместных событий (работы) всех элементов в течение времени dt :

$$e^{-n\lambda dt} = (1 - n\lambda dt). \quad (3.25)$$

Вероятность восстановления отказавшего элемента за интервал времени dt определяется так же, как и в случае одноэлементной схемы. При начальных условиях $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$, тогда получаем

$$p_0(t) = \frac{\mu}{n\lambda + \mu} + \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu} e^{-(n\lambda + \mu)t}; \quad (3.26)$$

$$p_1(t) = \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu} - \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu} e^{-(n\lambda + \mu)t}. \quad (3.27)$$

При начальных условиях $p_0(t) = 0$, $p_1(t) = 1$ (цепь в отказовом состоянии)

$$p_0(t) = \frac{\mu}{n\lambda + \mu} - \frac{\mu}{n\lambda + \mu} e^{-(n\lambda + \mu)t}; \quad (3.28)$$

* Следует отметить, что соединение элементов электрической цепи не всегда соответствует соединению элементов в смысле надежности (см. § 4.8).

$$p_1(t) = \frac{n\lambda}{n\lambda + \mu} + \frac{\mu}{n\lambda + \mu} e^{-(n\lambda + \mu)t}. \quad (3.29)$$

Для стационарного состояния $t \rightarrow \infty$ коэффициент готовности

$$k_r = \frac{\mu}{n\lambda + \mu} = \frac{\bar{t}}{n\bar{t}_B + \bar{t}} = \frac{\bar{t}}{n\left(\bar{t}_B + \frac{1}{n}\bar{t}\right)}; \quad (3.30)$$

коэффициент вынужденного простоя

$$k_n = \frac{\mu}{n\lambda + \mu} = \frac{n\bar{t}_B}{n\bar{t}_B + \bar{t}} \approx \frac{n\bar{t}_B}{\bar{t}}; \quad (3.31)$$

вероятность отказового состояния за время T

$$p_1 = n\lambda \bar{t}_B.$$

Если элементы неоднородные, т. е. $\lambda_i \neq \lambda_j \neq \lambda_n$, то

$$p_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{t}_{Bi}; \quad (3.32)$$

$$p_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{t}_{Bi}. \quad (3.33)$$

3.4. Система, состоящая из параллельно соединенных восстанавливаемых элементов

Параллельное соединение в смысле надежности восстанавливаемых элементов означает, что при отказе одного из элементов система продолжает выполнять свои функции, т. е. предполагается автоматическое резервирование каждого элемента с пропускной способностью, достаточной для полного обеспечения мощности потребителя.

В общем случае, когда система при таком резервировании состоит из n независимых элементов, число возможных состояний системы будет 2^n , если считать, что каждый элемент может быть в двух состояниях — рабочем и отказовом — и отказ системы наступает только при переходе в k -е состояние ($k=2, 4, 8 \dots$), т. е. когда все элементы окажутся в отказовом состоянии.

Рассмотрим более подробно самый простой случай, наиболее часто встречающийся в электрических системах, — параллельное соединение двух элементов (две цепи линии электропередачи, двухтрансформаторные

подстанции и т. д.). Такая система может находиться в четырех состояниях: 1 — оба элемента в рабочем состоянии; 2 — первый элемент в отказовом состоянии, второй — в рабочем; 3 — второй элемент в отказовом состоянии, первый — в рабочем; 4 — оба элемента в отказовом состоянии. Соответствующие вероятности этих состояний будут $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$, $p_4(t)$.

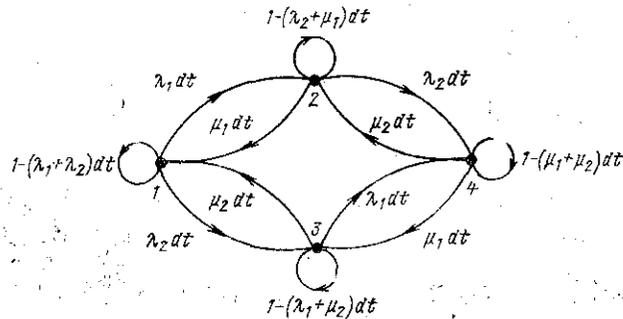


Рис. 3.3. Расчетный граф состояний системы, состоящий из двух взаимно резервируемых элементов.

Граф переходов для этой системы приведен на рис. 3.3.

Система дифференциальных уравнений, описывающих вероятности состояний во времени следующая:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1(t)}{dt} &= -(\lambda_1 + \lambda_2) p_1(t) + \mu_1 p_2(t) + \mu_2 p_3(t); \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= -(\lambda_2 + \mu_1) p_2(t) + \lambda_1 p_1(t) + \mu_2 p_4(t); \\ \frac{dp_3(t)}{dt} &= -(\lambda_1 + \mu_2) p_3(t) + \lambda_2 p_1(t) + \mu_1 p_4(t); \\ \frac{dp_4(t)}{dt} &= -(\mu_2 + \mu_1) p_4(t) + \lambda_1 p_3(t) + \lambda_2 p_2(t). \end{aligned} \right\} (3.34)$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений, в общем виде решение записывается следующим образом:

$$p_k(t) = \sum_{k=1}^N a_k^{(i)} e^{-\rho_i t}, \quad (3.35)$$

где $k=1, 2, \dots, N$ — число состояний системы; ρ_i — корни характеристического уравнения; a_k — постоянные коэффициенты.

Для нашего случая решение в общем виде следующее:

$$\left. \begin{aligned} p_1(t) &= a_1 [\mu_1 \mu_2 + a_2 e^{-(\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_2) t} + \\ &+ \mu_2 a_3 e^{-(\lambda_1 + \mu_1) t} + \mu_1 a_4 e^{-(\lambda_2 + \mu_2) t}]; \\ p_2(t) &= a_1 [\lambda_1 \mu_2 - a_2 e^{-(\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_2) t} - \\ &- \mu_2 a_3 e^{-(\lambda_1 + \mu_1) t} + \lambda_2 a_4 e^{-(\lambda_2 + \mu_2) t}]; \\ p_3(t) &= a_1 [\lambda_2 \mu_1 - a_2 e^{-(\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_2) t} + \\ &+ \lambda_2 a_3 e^{-(\lambda_1 + \mu_1) t} - \mu_1 a_4 e^{-(\lambda_2 + \mu_2) t}]; \\ p_4(t) &= a_1 [\lambda_1 \lambda_2 + a_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) t} - \\ &- \lambda_2 a_3 e^{-(\lambda_1 + \mu_1) t} - \lambda_2 a_4 e^{-(\lambda_2 + \mu_2) t}], \end{aligned} \right\} (3.36)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}; \quad (3.37)$$

$$a_2 = \lambda_2 [\lambda_1 p_1(0) - \mu_1 p_2(0)] - \mu_2 [\lambda_1 p_3(0) - \mu_1 p_4(0)]; \quad (3.38)$$

$$a_3 = \lambda_1 [p_1(0) + p_3(0)] - \mu_1 [p_2(0) + p_4(0)]; \quad (3.39)$$

$$a_4 = \lambda_2 [p_1(0) + p_2(0)] - \mu_2 [p_3(0) + p_4(0)]. \quad (3.40)$$

Для стационарного состояния

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{\bar{t}_1 \bar{t}_2}{(\bar{t}_1 + \bar{t}_{B,1})(\bar{t}_2 + \bar{t}_{B,2})} = k_{r,1} k_{r,2}; \\ p_2 &= \frac{\lambda_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{\bar{t}_{B,1} \bar{t}_2}{(\bar{t}_1 + \bar{t}_{B,1})(\bar{t}_2 + \bar{t}_{B,2})} = k_{n,1} k_{r,2}; \\ p_3 &= \frac{\lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{\bar{t}_{B,2} \bar{t}_1}{(\bar{t}_1 + \bar{t}_{B,1})(\bar{t}_2 + \bar{t}_{B,2})} = k_{n,2} k_{r,1}; \\ p_4 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)} = \frac{\bar{t}_{B,1} \bar{t}_{B,2}}{(\bar{t}_1 + \bar{t}_{B,1})(\bar{t}_2 + \bar{t}_{B,2})} = k_{n,1} k_{n,2}. \end{aligned} \right\} (3.41)$$

Функция готовности и коэффициент готовности системы определяются по формулам

$$k_r(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t); \quad (3.42)$$

$$k_r = p_1 + p_2 + p_3, \quad (3.43)$$

коэффициент вынужденного простоя системы

$$k_n = 1 - k_r = k_{n,1} k_{n,2} = \lambda_1 \lambda_2 \bar{t}_{B,1} \bar{t}_{B,2}. \quad (3.44)$$

Системы, в которых осуществляется резервирование, называются системами с избыточностью по надежности. Два параллельно соединенных элемента, каждый из которых способен выполнять необходимые функции (передать требуемую мощность), составляет простейшую систему с избыточностью по надежности. Следует отметить важное свойство таких систем. Если поток отказов и восстановлений элементов, входящих в систему с избыточностью по надежности, обладает свойствами простейшего марковского процесса, то и параметр потока отказов и восстановлений такой системы, рассматриваемой как эквивалентный элемент, с достаточной для практических целей точностью можно также считать обладающим этими свойствами, т. е. стационарностью, ординарностью, отсутствием последствия. Этот поток отказов системы с избыточностью по надежности будет также пуассоновским вследствие того, что вероятность отказов системы гораздо меньше вероятности отказов отдельных элементов.

При рассмотрении одноэлементной системы было показано, что коэффициент затухания экспоненты обратно пропорционален времени восстановления элемента:

$$\lambda + \mu \sim \bar{t}_B^{-1}. \quad (3.45)$$

Анализируя вероятности состояния системы (3.36), нетрудно видеть, что при условии $\mu_i \gg \lambda_i$, характерном для элементов электрических систем,

$$e^{-(\lambda_i + \mu_i)t} \approx e^{-\frac{t}{\bar{t}_{B_i}}}; \quad (3.46)$$

$$e^{-(\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)t} \approx e^{-t \frac{\bar{t}_{B_1} + \bar{t}_{B_2}}{\bar{t}_{B_1} \bar{t}_{B_2}}}, \quad (3.47)$$

где

$$\bar{t}_{B,c} = \frac{\bar{t}_{B_1} \bar{t}_{B_2}}{\bar{t}_{B_1} + \bar{t}_{B_2}} \quad (3.48)$$

имеет смысл эквивалентного времени восстановления двух параллельно соединенных элементов.

В частном случае, если элементы имеют одинаковые показатели надежности,

$$\bar{t}_{B,c} = 0,5 \bar{t}_B. \quad (3.49)$$

Рассматривая систему с двумя параллельно соединенными элементами как один эквивалентный элемент, можем записать:

$$k_{п,c} = \lambda_c \bar{t}_{B,c}, \quad (3.50)$$

откуда

$$\lambda_c = \frac{k_{п,c}}{\bar{t}_{B,c}} = \frac{\lambda_1 \bar{t}_{B_1} \lambda_2 \bar{t}_{B_2} (\bar{t}_{B_1} + \bar{t}_{B_2})}{\bar{t}_{B_1} \bar{t}_{B_2}} = \lambda_1 k_{п,2} + \lambda_2 k_{п,1}. \quad (3.51)$$

Параметр потока отказов системы из двух резервирующих друг друга элементов равен произведению параметра потока отказов первого на среднюю вероятность отказового состояния второго плюс произведение параметра потока отказов второго на среднюю вероятность отказа первого элемента. Иначе говоря, слагаемые $\lambda_1 k_{п,2}$, $\lambda_2 k_{п,1}$ имеют смысл удельного числа отказов системы при отказе соответственно первого и второго элементов. Полученный практический алгоритм определения параметра потока отказов системы с резервированием можно распространить на случай, когда n элементов взаимно резервируют друг друга, т. е. соединены параллельно. Для определения параметра потока отказов в этом случае необходимо рассмотреть столько слагаемых, сколько элементов в системе, т. е.

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^n \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \bar{t}_{B_j}; \quad (3.52)$$

$$\bar{t}_{B,c} = \frac{k_{п,c}}{\lambda_c} = \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_i \bar{t}_{B_i}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \bar{t}_{B_j}}, \quad (3.53)$$

В частном случае, если элементы с одинаковыми показателями надежности,

$$\lambda_c = n \lambda^n \bar{t}_B^{n-1}; \quad (3.54)$$

$$\bar{t}_{B,c} = \frac{\lambda^n \bar{t}_B^n}{n \lambda^n \bar{t}_B^{n-1}} = \frac{\bar{t}_B}{n}. \quad (3.55)$$

Полученный алгоритм определения этих двух основных показателей надежности можно распространить на

системы любой сложности с произвольным (в смысле надежности) соединением элементов, считая, что параметр потока отказов и для нее обладает теми же свойствами, что и для простейших резервированных систем.

Параметр потока отказов системы, состоящей из n независимых восстанавливаемых элементов, равен сумме произведений параметра потока отказов каждого элемента на среднюю вероятность отказа части системы, оставшейся после исключения этого элемента, причем, если отказ рассматриваемого элемента приводит к отказу системы, то вероятность отказа оставшейся части системы принимается равной единице.

3.5. Система с произвольным соединением элементов

При увеличении числа элементов в рассчитываемой системе количество ее возможных состояний быстро возрастает (например, в системе с n элементами без учета преднамеренных отключений элементов число состояний $N=2^n$), поэтому применение теории марковских процессов для оценки надежности с использованием полной системы дифференциальных уравнений, их анализа и решения встречает определенные трудности. Решение системы уравнений предусматривает вычисление определителя N -го порядка для составления характеристического уравнения, нахождения всех корней характеристического уравнения, вычисления постоянных множителей путем решения $(N+1)$ раз системы N линейных уравнений.

Решение подобных задач в общем виде затруднительно не только из-за сложности символических преобразований на ЭВМ, но и из-за трудностей получения аналитического выражения и последующего использования получаемых результатов.

Решение задачи с использованием значений параметров λ_i , μ_i , $p_k(0)$ существенно облегчает получение результата, но также не исключает символических преобразований, необходимых при вычислении определителя. Поэтому в том случае, когда необходимо исследовать надежность систем на коротких интервалах времени, ограничивают число состояний N , объединяя группу элементов в один с эквивалентными показателями надежности (λ_0 , μ_0 и т. д.), которые приближенно могут быть оценены изложенными выше способами.

Расчет надежности сложной системы также можно выполнить, используя разбиение сложной системы на подсистемы, показатели надежности которых могут быть получены достаточно просто. Затем, представляя подсистемы в виде элементов с эквивалентными показателями надежности, можно решить задачу в целом для системы. Следует отметить, что в случае смешанного последовательно-параллельного или параллельно-последовательного соединения элементов доминирующее влияние на показатели надежности оказывают последовательные подсистемы. С достаточной степенью точности для практических расчетов можно предположить, что результирующий поток отказов системы с избыточностью по надежности относительно узлов нагрузки является простейшим.

3.6. Расчет показателей надежности с учетом ремонтных состояний и преднамеренных отключений элементов

В процессе эксплуатации под воздействием различных случайных факторов и нагрузок происходит разрегулировка элементов, стареют и отказывают отдельные части их, происходят коррозия металлических частей (проводов и опор линий электропередачи), загрязнение изоляции распределительных устройств, истирание изоляции обмоток генераторов, разрегулировка приводов выключателей, ухудшение параметров масла трансформаторов и т. д. Все это снижает качество функционирования элементов и системы в целом, увеличивается вероятность отказов элементов системы.

Своевременные и целесообразные по объему профилактические ремонты оборудования позволяют не только повысить технические характеристики эксплуатируемых систем и улучшить показатели их надежности, но и сократить эксплуатационные расходы. В ряде случаев можно добиться необходимых показателей надежности лишь путем соответствующей организации профилактических ремонтов. Система с правильно выбранным периодом и объемом профилактических работ долго не стареет. Однако проведение профилактических и капитальных ремонтов оборудования связано с отключением элементов электрических систем, изменением схемы электроснабжения потребителей. В ряде случаев без частичного демонтажа элемента не удается выявить и локализовать неисправности.

Обычно периодичность проведения профилактических и капитальных ремонтов для большей части оборудования определяется правилами технической эксплуатации с учетом фактического состояния оборудования. Объем и графики ремонтов оборудования устанавливаются ежегодными планами. Как правило, графики профилактических и капитальных ремонтов составляются таким образом, чтобы максимально снизить возможный ущерб от недоотпуска электроэнергии, и обычно целесообразным оказывается снижать интенсивность ремонтов в следующие периоды: максимума нагрузок, паводка для оборудования ГЭС, наиболее ответственной работы потребителей (например, в период уборки урожая для сельскохозяйственных потребителей). Кроме того, ремонт оборудования и аппаратов, непосредственно связан-

ных с технологическими агрегатами, по возможности производится одновременно с ремонтом последних.

Следует отметить, что преднамеренные отключения элементов производятся не только для проведения профилактических и капитальных ремонтов. Довольно часто преднамеренные отключения, в особенности линий электропередачи, производятся по заявкам различных организаций (например, строительных). Частота и продолжительность такого рода отключений, которые также понижают надежность электроснабжения потребителей, зависят от многих случайных факторов, что затрудняет прогнозирование таких отключений.

Так же как и для аварийных отключений элементов электрических систем, преднамеренные отключения в расчетах показателей надежности целесообразно задавать параметром потока преднамеренных отключений $\lambda_{п}$ и средней продолжительностью их $\bar{t}_{пр}$. Параметр потока преднамеренных отключений во времени, несмотря на то что он обусловлен принципиально иными факторами по сравнению с потоком аварийных отключений, с достаточной степенью точности можно также считать неизменным во времени.

Закон распределения продолжительности преднамеренных отключений элементов в большинстве случаев можно считать нормальным, так как в его формировании играют роль иные факторы по сравнению с формированием времени аварийного отключения (восстановления). Средняя продолжительность профилактического и капитального ремонта в основном определяется правилами технической эксплуатации. Отклонения от средней продолжительности обусловлены влиянием погодных условий, состоянием ремонтной базы, транспортными условиями, наличием запасных частей и т. д. Продолжительность преднамеренных отключений, например по заявкам других организаций, также распределена по закону, близкому к нормальному.

Следует также отметить, что для резервированных систем электроснабжения преднамеренные отключения резервирующего элемента не производятся, если основной элемент находится в аварийном ремонте. Продолжительность преднамеренного отключения элемента обычно соизмерима с продолжительностью аварийного ремонта, поэтому, естественно, расчеты показателей надежности на коротких интервалах времени при учете преднаме-

ренных отключений необходимо выполнять с учетом начальных условий состояния элементов. Исходя из этих положений, теорию марковских процессов для оценки вероятностей состояния можно применять с некоторыми допущениями (так как продолжительность преднамеренных отключений распределена не по экспоненциальному закону и параметр потока преднамеренных отключений изменяется во времени). К тому же, если состояния преднамеренных отключений элементов описывать дифференциальными уравнениями, то общее число их для системы с n элементами возрастет до 3^n , что резко затруднит получение решения.

В практических расчетах надежности на достаточно длительных интервалах времени $t \gg 3\bar{t}_{п, i, max}$ обычно используются средние вероятности, а учет начальных условий производится упрощенно с использованием условности понятий «элемент» и «система» в расчетах надежности. Если система избыточна по надежности, то при преднамеренном отключении рассматриваемого элемента вся оставшаяся часть системы рассматривается как один эквивалентный элемент с эквивалентными показателями надежности. При этом надежность эквивалентного элемента рассчитывается с учетом начальных условий его функционирования, т. е. предполагается, что в момент преднамеренного отключения рассматриваемого элемента эквивалентный элемент был в работоспособном состоянии.

Суть метода состоит в том, что вероятность наложения аварийного отключения одного элемента на преднамеренное отключение другого (а не наоборот) определена с учетом начальных условий. Следовательно, вероятность его аварии за время преднамеренного отключения рассматриваемого элемента меньше средней вероятности его аварийного отключения; согласно (3.5)

$$p_{i, \text{э}} = \frac{\lambda_{\text{э}}}{\lambda_{\text{э}} + \mu_{\text{э}}} - \frac{\lambda_{\text{э}}}{\lambda_{\text{э}} + \mu_{\text{э}}} e^{-(\lambda_{\text{э}} + \mu_{\text{э}}) t} = k_{п, \text{э}} - k_{п, \text{э}} e^{-\frac{t}{\bar{t}_{\text{э}, \text{э}}}} \quad (3.56)$$

Если продолжительность преднамеренного отключения принять равной $\bar{t}_{пр}$, то

$$p_{i, \text{э}} = k_{п, \text{э}} \left(1 - e^{-\frac{\bar{t}_{пр}}{\bar{t}_{\text{э}, \text{э}}}} \right) = k_{п, \text{э}} k \left(\frac{\bar{t}_{пр}}{\bar{t}_{\text{э}, \text{э}}} \right), \quad (3.57)$$

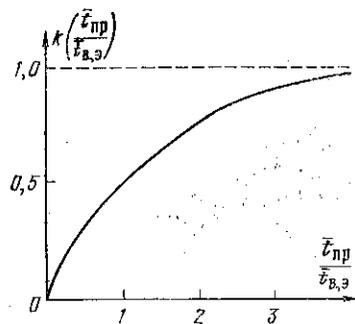


Рис. 3.4. Зависимость понижающего коэффициента k от соотношения времени преднамеренного отключения элемента $\bar{t}_{пр}$ и эквивалентного времени восстановления оставшейся части системы $\bar{t}_{в,э}$.

меренного отключения одного элемента и аварийного отключения другого учитывается введением коэффициента

$$k\left(\frac{\bar{t}_{пр}}{\bar{t}_{в,э}}\right) = \frac{\bar{t}_{пр}}{\bar{t}_{пр} + \bar{t}_{в,э}} \quad (3.58)$$

Если система состоит из n независимых элементов, то рассматривается последовательно n гипотез и для каждой определяются показатели надежности. Результирующая надежность обусловлена совокупностью показателей при каждой гипотезе. В системах с небольшим числом элементов обычно одновременно более одного преднамеренного отключения не рассматривается, в системе с большим числом элементов преднамеренно может быть отключено несколько элементов.

Система с последовательным соединением элементов. В нерезервированных системах электроснабжения для уменьшения вероятности отключенного состояния и уменьшения количества перерывов электроснабжения стремятся по возможности совместить преднамеренные отключения элементов для профилактических и капитальных ремонтов (см. также § 4.3). Для приближенных проектных расчетов коэффициент вынужденного простоя такой системы с учетом преднамеренных

где $k(\bar{t}_{пр}/\bar{t}_{в,э})$ — коэффициент, зависящий (рис. 3.4) от соотношения времени аварийного восстановления резервирующего эквивалентного элемента и времени преднамеренного отключения рассматриваемого элемента.

В том случае, если расчеты показателей надежности выполняются на длительных интервалах времени ($t > \bar{t}_{в,э,макс}$), то в практических расчетах можно не учитывать начальные условия, и фактор уменьшения вероятности совпадения преднамеренного отключения одного элемента и аварийного отключения другого учитывается введением коэффициента

отключений определится по формуле

$$k_{п.с} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{t}_{в,и} + (\lambda_{п.и} \bar{t}_{пр,и})_{нб}, \quad (3.59)$$

где $(\lambda_{п,и} \bar{t}_{пр,и})_{нб}$ — наибольшая вероятность преднамеренного отключения одного из n элементов системы.

Результирующий параметр потока отказов (отключений) и эквивалентное время восстановления (отключения) равны:

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^n \lambda_i + \lambda_{п,нб}; \quad (3.60)$$

$$\bar{t}_{в,с} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{t}_{в,с} + (\lambda_{п,и} \bar{t}_{пр,и})_{нб}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i + \lambda_{п,нб}}, \quad (3.61)$$

где $\lambda_{п,нб}$ — наибольшая частота отключения одного из n элементов системы.

Система с параллельным соединением элементов. Вначале рассмотрим простейший случай — систему с двумя взаимно резервирующими элементами. Согласно изложенным выше принципам расчета коэффициент вынужденного простоя такой системы (средняя вероятность отключенного состояния)

$$k_{п.с} = \lambda_1 \bar{t}_{в,1} \lambda_2 \bar{t}_{в,2} + \lambda_{п,1} \bar{t}_{пр,1} k\left(\frac{\bar{t}_{пр,1}}{\bar{t}_{в,2}}\right) \lambda_2 \bar{t}_{в,2} + \lambda_{п,2} \bar{t}_{пр,2} k\left(\frac{\bar{t}_{пр,2}}{\bar{t}_{в,1}}\right) \lambda_1 \bar{t}_{в,1}; \quad (3.62)$$

$$k\left(\frac{\bar{t}_{пр,1}}{\bar{t}_{в,2}}\right) = \left(1 - e^{-\frac{\bar{t}_{пр,1}}{\bar{t}_{в,2}}}\right) \text{ или } k\left(\frac{\bar{t}_{пр,1}}{\bar{t}_{в,2}}\right) = \frac{\bar{t}_{пр,1}}{\bar{t}_{пр,1} + \bar{t}_{в,2}}; \quad (3.63)$$

$$k\left(\frac{\bar{t}_{пр,2}}{\bar{t}_{в,1}}\right) = \left(1 - e^{-\frac{\bar{t}_{пр,2}}{\bar{t}_{в,1}}}\right) \text{ или } k\left(\frac{\bar{t}_{пр,2}}{\bar{t}_{в,1}}\right) = \frac{\bar{t}_{пр,2}}{\bar{t}_{пр,2} + \bar{t}_{в,1}}. \quad (3.64)$$

Параметр потока отказов системы и эквивалентное время восстановления равны:

$$\lambda_c = \lambda_1 (\lambda_2 \bar{t}_{в, 2}) + \lambda_2 (\lambda_1 \bar{t}_{в, 1}) + \lambda_{п, 1} k \left(\frac{\bar{t}_{пр, 1}}{\bar{t}_{в, 2}} \right) \lambda_2 \bar{t}_{в, 2} + \lambda_{п, 2} k \left(\frac{\bar{t}_{пр, 2}}{\bar{t}_{в, 1}} \right) \lambda_1 \bar{t}_{в, 1}; \quad (3.65)$$

$$\bar{t}_{в, c} = \frac{k_{п, c}}{\lambda_c} = \frac{\lambda_1 \bar{t}_{в, 1} \lambda_2 \bar{t}_{в, 2} + \lambda_{п, 1} \bar{t}_{пр, 1} k \left(\frac{\bar{t}_{пр, 1}}{\bar{t}_{в, 2}} \right) \lambda_2 \bar{t}_{в, 2} + \lambda_1 (\lambda_2 \bar{t}_{в, 2}) + \lambda_2 (\lambda_1 \bar{t}_{в, 1}) + \lambda_{п, 1} k \left(\frac{\bar{t}_{пр, 1}}{\bar{t}_{в, 2}} \right) + \lambda_{п, 2} \bar{t}_{пр, 2} k \left(\frac{\bar{t}_{пр, 2}}{\bar{t}_{в, 1}} \right) \lambda_1 \bar{t}_{в, 1}}{\lambda_1 (\lambda_2 \bar{t}_{в, 2}) + \lambda_2 (\lambda_1 \bar{t}_{в, 1}) + \lambda_{п, 1} k \left(\frac{\bar{t}_{пр, 1}}{\bar{t}_{в, 2}} \right) + \lambda_{п, 2} k \left(\frac{\bar{t}_{пр, 2}}{\bar{t}_{в, 1}} \right) \lambda_1 \bar{t}_{в, 1}}. \quad (3.66)$$

Этот прием расчета легко распространить на систему с n взаимно резервирующими элементами:

$$k_{п, c} = \prod_{i=1}^n \lambda_i \bar{t}_{в, i} + \sum_{i=1}^n \lambda_{п, i} \bar{t}_{пр, i} k \left(\frac{\bar{t}_{пр, i}}{\bar{t}_{в, \vartheta, i}} \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \bar{t}_{в, j}; \quad (3.67)$$

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \bar{t}_{в, j} + \sum_{i=1}^n \lambda_{п, i} k \left(\frac{\bar{t}_{пр, i}}{\bar{t}_{в, \vartheta, i}} \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j \bar{t}_{в, j}; \quad (3.68)$$

$$\bar{t}_{в, c} = \frac{k_{п, c}}{\lambda_c}. \quad (3.69)$$

Следует отметить, что чем выше избыточность системы по надежности, тем меньше эквивалентное время восстановления $\bar{t}_{в, \vartheta, i}$ оставшейся части системы. Эти алгоритмы расчетов основных показателей надежности являются основой для расчета более сложных схем электрических соединений, которые рассматриваются в гл. 4.

3.7. Использование марковских и полумарковских процессов

В этом параграфе основное внимание уделено следующим вопросам: 1) возможности расширения сферы применения однородных марковских моделей; 2) методам решения при использовании этих моделей; 3) выявлению влияния свойств нестационарных потоков отказов на результаты решения поставленной задачи; 4) разработке неэкспоненциальных (полумарковских) моделей.

Формирование более сложных моделей, которые полнее и точнее отражают особенности функционирования элементов и системы, безусловно, является задачей, имеющей самостоятельное значение. Такие исследования позволяют глубже проанализировать преимущества и недостатки аналитического подхода и статистического моделирования.

Ниже использование достаточно полных моделей сочетается с применением асимптотических методов, которые позволяют выявить некоторые общие закономерности, получить упрощенные формулы, пригодные для практического применения, и одновременно определить основные факторы, обуславливающие поведение группы. Отмеченные возможности асимптотического подхода проявляются в том, что в ряде случаев удается доказать инвариантность результата к виду законов распределения, описывающих функционирование элементов. Рассмотрим основные соотношения для марковских процессов.

Наибольшее распространение в практике надежности электроэнергетических систем получили однородные марковские процессы с дискретным и непрерывным временем, называемые «конечными цепями Маркова».

Между марковскими цепями с дискретным и непрерывным временем можно установить следующее соответствие. Достаточно взять условную единицу времени Δ , чтобы рассматривать непрерывный марковский процесс $\xi(t)$ в моменты $t = k\Delta$ как дискретный марковский процесс $\bar{\xi}(t)$ с переходными вероятностями $\bar{p}_{i,j}(k) = \bar{p}(k\Delta)$. Очевидно, что предельные вероятности p_j ($j=0, 1, 2, \dots$) будут те же самые, что и для исходного процесса $\xi(t)$. Понятно, что такие интересующие нас величины, как среднее время до первого попадания в состояние j и среднее время нахождения в состоянии j , соответствуют при дискретной интерпретации среднему количеству попаданий в состояние j и т. п. В дискретных процессах исследование этих вопросов можно вести, используя элементарный математический аппарат.

Практика применения этих моделей позволяет принять следующие заключения: 1) при длительных интервалах рассмотрения марковские модели с дискретным и непрерывным временем дают практически одинаковые результаты; 2) модели с дискретным временем целесообразно использовать при определении продолжительности рабочего состояния в порядке достижения заданного момента времени. Однако марковские модели с непрерывным временем являются более информативными, так как они позволяют получать результаты не только в виде вероятностей, как относительных длительностей (или числа случаев) пребывания системы в исследуемом состоянии, но и в виде функций распределения, математических ожиданий длительностей и т. п. Напомним, что при поглощающем отказовом состоянии мы имеем результат в виде функций распределения, а при отражающем — в виде относительных длительностей (коэффициент готовности и т. п.).

Обобщая изложенное в начале главы, представим функционирование системы уравнением вида

$$P'(t) = AP(t), \quad (3.70)$$

где $P(t)$ — матрица-столбец вероятностей $p_i(t)$ пребывания системы в момент времени t в i -м состоянии:

$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1, i = 1, 2, \dots, n$; A — квадратная матрица порядка n известных постоянных величин, представляющих собой алгебраические суммы соответствующих величин интенсивностей переходов; матрица A однозначно определяется по диаграмме переходов.

Рассмотрим вопрос о непосредственном определении вероятности безотказной работы системы. Выражение (3.70) в терминах преобразования Лапласа приобретает следующий вид:

$$sP(s) - P(0) = AP(s), \quad (3.71)$$

откуда

$$P(s) = \|sE - A\|^{-1} P(0),$$

где E — единичная матрица.

Ручной счет становится непригодным при $n > 3$. Наиболее приемлемым с практической точки зрения является метод спектрального разложения матрицы A . Матрице A в базисе из собственных векторов соответствует диагональная матрица Λ , элементами которой являются собственные значения Λ_i , а именно

$$A = T\Lambda T^{-1}, \quad (3.72)$$

где $T = \|t_{i,j}\|$ — матрица собственных векторов. С учетом очевидных тождеств

$$sE - A = sE - T\Lambda T^{-1};$$

$$T^{-1}\|sE - A\|T = T^{-1}sET - \Lambda = sE - \Lambda;$$

из (3.71) получаем:

$$P(s) = T\|sE - \Lambda\|^{-1}T^{-1}P(0). \quad (3.73)$$

Матрица $\|sE - \Lambda\|$ является диагональной, поэтому обратная ее матрица легко определяется. При $P(0) = \{1, 0, \dots, 0\}$ с помощью обратного преобразования Лапласа получаем оригиналы

$$P_i(t) = L^{-1}\{P_i(s)\} = \sum_{k=0}^{n-1} t_{i,k} t_{k,o}^{-1} \exp(\Lambda_k t). \quad (3.74)$$

При законах распределения, отличных от экспоненциальных, функционирование элемента не может быть представлено однородным марковским процессом. В этих случаях целесообразно использовать идеи и методы теории массового обслуживания, общей тенденцией которых является нахождение такого случайного процесса, связанного с исходным, который можно было бы рассматривать как марковский процесс.

Пусть $v(t)$ — некоторый процесс, в любой момент времени описывающий состояние системы; предполагается, что по реализации случайной функции $v(t)$ можно проследить за всеми изменениями, происходящими в системе. Примером процесса может служить число неработоспособных элементов, находящихся в системе в произвольный момент времени t . Д. Кендалл предложил метод вложенных цепей Маркова, смысл которого состоит в следующем. Выбираются такие моменты времени $\{t_n\}$, $t_n < t_{n+1}$, что значения процесса $v(t_n)$ образуют цепь Маркова. Таким образом, вложенная цепь Маркова — это последовательность значений процесса в спе-

циально выбранные моменты времени $\{t_n\}$. Подчеркнем, что моменты t_n , как правило, оказываются не детерминированными, а случайными, зависящими от самого процесса $v(t)$.

Важный частный случай выделяется посредством определения полумарковского процесса. Пусть N — множество состояний системы. Для каждого $i \in N$ определены вероятности перехода $p_{i,j}$ такие, что $0 \leq p_{i,j} \leq 1$ и $\sum_{i \in N} p_{i,j} = 1, i \in N$; распределения вероятностей

$F_i(t)$ положительной случайной величины $\xi^{(i)}, F_i(t) = P\{\xi^{(i)} < t\}, F_i(+0) = 0; i \in N$. Будем считать также заданным распределение случайного вектора (ξ_0, v_0) . Полумарковский процесс конструируется из введенных объектов по следующему принципу.

Пусть случайный вектор (ξ_0, v_0) принял некоторое значение (x, i) в соответствии с распределением $F_i(t)$. Тогда определим $v(t)$ в интервале времени $(0, \xi_0)$ как $v_0; v(t) = i, 0 \leq t \leq x$; затем из случайной совокупности N выберем значение v_1 ; вероятность того, что будет выбрано именно $v_1 = j$, равна $p_{i,j}$ (здесь i — значение, принятое v_0). После этого выберем значение случайной величины $\xi_1 = y$ в соответствии с законом распределения $F_j(t)$, что позволяет определить процесс $v(t)$ в более широком промежутке времени: $v(t) = j, x \leq t \leq x + y$. Вслед за этим производится выбор элемента v_2 из множества N . На этот раз вероятность того, что v_2 примет значение k , равна $p_{i,k}, k \in N$. Так как стало известно, что $v_2 = k$, то в соответствии с $F_k(x)$ выбирается значение случайной величины $\xi_2 = z$, что дает $v(t) = k, x + y \leq t \leq x + y + z$ и так далее. Таким образом, мы сформировали полумарковский процесс.

Найдем вероятность того, что полумарковский процесс в момент t примет фиксированное значение. Введем специальное обозначение для этого

$$A(i, t) = P\{v(t) = i\}, t > 0, i \in N. \quad (3.75)$$

Дополнительно введем функцию $B_j(i, t)$ — вероятность того, что $v(t) = i$, при условии, что восстановление произошло в момент $t = 0$ и после этого восстановления процесс $v(t)$ принял значение j . Ясно, что если с вероятностью 1 случайный вектор (ξ_0, v_0) принимает значение $(0, j)$, то

$$A(i, t) = \sum_{k \in N} p_{i,k} B_k(i, t),$$

— если же $(\xi_0, v_0) = (\tau, j)$, то

$$A(i, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t < \tau, i = j; \\ 0, & \text{если } t < \tau, i \neq j; \\ \sum_{k \in N} p_{i,k} B_k(i, t - \tau), & \text{если } t > \tau. \end{cases}$$

Таким образом, зная распределение случайного вектора (ξ_0, v_0) , легко выразить функцию $A(i, t)$ через $B_j(i, t)$, а именно

$$A(i, t) = P\{\xi_0 > t, v_0 = i\} + \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} p_{j,k} \int_0^\infty B_k(i, t - \tau) d_\tau P\{\xi_0 < \tau, v_0 = j\}. \quad (3.76)$$

Найдем функцию $B_k(i, t)$. Выберем распределение случайного вектора (ξ_0, v_0) следующим образом:

$$P\{v_0 = j, \xi_0 < t\} = \begin{cases} 0, & \text{если } j_0 \neq j; \\ F_j(t), & \text{если } j_0 = j. \end{cases}$$

Тогда функция $A(i, t)$ будет в точности равна $B_j(i, t)$. Приняв это во внимание, из (3.76) находим:

$$B_j(i, t) = [1 - F_j(t)] \delta_{i,j} + \sum_{k \in N} p_{i,k} \int_0^\infty B_k(i, t - \tau) dF_j(\tau), \quad (3.77)$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

3.8. Однородные марковские модели для систем с зависимыми элементами и учет задержки ввода в эксплуатацию элемента группы

Прежде всего рассмотрим получение асимптотического результата для известного решения для простейшей резервированной системы при $n=2$, состоящей из идентичных элементов. Выражения для вероятности безотказной работы можно представить в форме

$$P(t) = (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1} [\Lambda_2 \exp(\lambda_1 t) - \Lambda_1 \exp(\Lambda_2 t)], \quad (3.78)$$

где $\Lambda_1, \Lambda_2 = -(\lambda_1 + \mu)/2 \pm \sqrt{[(\lambda_1 + \mu)/2]^2 - 2\lambda^2}$ — корни характеристического многочлена (собственные значения матрицы A); λ, μ — параметры экспоненциальных распределений длительностей работы и восстановления элемента.

Формула (3.78) не очень сложна, однако ее использование требует сравнительно больших затрат для выполнения расчетов. Если учесть, что $\mu \gg \lambda$, то, используя расположение в ряд, получаем приближенные значения корней:

$$\Lambda_1 \approx -2\lambda^2 / (\lambda_1 + \mu), \quad \Lambda_2 \approx -(\lambda_1 + \mu) + 2\lambda^2 / (\lambda_1 + \mu) \approx -\mu.$$

Так как $|\Lambda_2| \gg |\Lambda_1|$, то при достаточно большом t функция

$$P(t) \approx (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1} \Lambda_2 \exp(\Lambda_1 t) \rightarrow \exp\left(-\frac{2\lambda^2}{3\lambda + \mu} t\right) \quad (3.79)$$

является асимптотически экспоненциальной.

Отсюда следует, что поток отказов рассмотренной группы является асимптотически простейшим пуассоновским с параметром $\omega_c(t) \approx 2\lambda^2 / (3\lambda + \mu)$. Сделанный вывод подтверждает вид функции интенсивности отказов группы $\lambda_c(t) = -P'(t) / P(t)$. Результаты расчетов по точным формулам представлены на рис. 3.5. Они показывают, что асимптотический результат становится правомерным при $t \geq 3/\mu$. В реальных случаях в зависимости от расчетного интервала и значений μ легко могут быть сделаны конкретные выводы о возможности использования асимптотического результата.

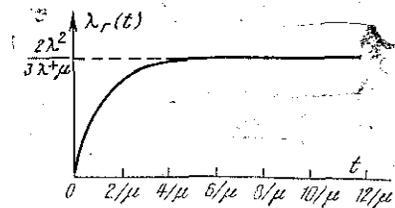


Рис. 3.5. Интенсивность отказа для группы ($n=2$).

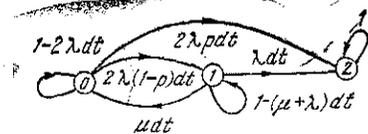


Рис. 3.6. Диаграмма состояний двухцепной воздушной линии с учетом развития аварийной ситуации.

в срабатывании коммутационной аппаратуры или на двухцепных линиях электропередачи, когда обрыв провода одной цепи может явиться причиной отключения второй. Статистические исследования показывают, что вероятность такого развития аварии с точностью, достаточной для практических расчетов, могут быть приняты постоянными во времени.

На примере одной двухцепной воздушной линии рассмотрим возможность учета развития аварийной ситуации при использовании аппарата марковских процессов. Исходные параметры потоков устойчивых повреждений цепей линии $\omega_c(t) = \lambda$, вероятность повреждения второй цепи при предшествующем повреждении первой (и наоборот) в силу симметрии $p_{2/1}(t) = p_{1/2}(t) = p$.

На отрезке времени dt вероятность повреждения одной цепи $2\lambda dt$, а вероятность одновременного повреждения цепей из-за развития аварии $p2\lambda dt$. Диаграмма состояний такой системы с соответствующими вероятностями переходов приведена на рис. 3.6. При начальных условиях $P(0) = \{1, 0, 0\}$ функционирование группы описывается следующей системой уравнений в операторной форме:

$$P(s) = \begin{vmatrix} s + 2\lambda & -\mu \\ -(1-p)2\lambda & s + \mu + \lambda \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.80)$$

Из (3.80) получаем операторное выражение для вероятности безотказной работы системы

$$R(s) = P_0(s) + P_1(s) = \frac{s + \mu + \lambda + (1-p)2\lambda}{s^2 + s(3\lambda + \mu) + 2\lambda^2 + 2p\lambda\mu} \quad (3.81)$$

где корни характеристического полинома

$$\Lambda_1 \approx -\frac{2\lambda^2 + 2p\lambda\mu}{3\lambda + \mu},$$

$$\Lambda_2 \approx -(3\lambda + \mu) + \frac{2\lambda^2 + 2p\lambda\mu}{3\lambda + \mu}$$

существенно отличаются друг от друга. Выразим интенсивность отказов системы через математическое ожидание времени безотказной работы:

$$\lambda_c(t, \infty) = \frac{1}{T} = 1 / \lim_{s \rightarrow 0} R(s) = \frac{2\lambda^2 + 2p\lambda\mu}{\mu + \lambda + (1-p)2\lambda} \quad (3.82)$$

При $p \rightarrow 0$ ($p \rightarrow 1$), когда отказы цепей независимы, (взаимосвязаны)

$$\lim_{p \rightarrow 0} \lambda_c(t, \infty) = \frac{2\lambda^2}{3\lambda + \mu}; \quad \lim_{p \rightarrow 1} \lambda_c(t, \infty) = 2\lambda$$

получаем хорошо известные результаты, подтверждающие правильность выбранной модели. Из (3.82) с учетом того, что $\mu \gg \lambda$, получаем выражение для параметров потока одновременного отключения обеих цепей линии

$$\omega_c(t, \infty) = \lambda_c(t, \infty) \approx \frac{2\lambda^2}{\mu} + 2p\lambda \quad (3.83)$$

Если группа в начальный момент времени находится в состоянии 1, т. е. $P(0) = \{0, 1, 0\}$, то небольшое изменение претерпит числитель в выражении (3.81),

а асимптотические оценки останутся те же самые. Это означает, что среднее время безотказной работы группы и среднее время работы группы между отказами практически совпадают. Аналогичным образом могут быть составлены и проанализированы модели, в которых учтены возможности отказов в срабатывании коммутационной аппаратуры и отключения элемента в тех случаях, когда нагрузка превысит предельно допустимую. Заметим, что в этой модели учет развития аварийной ситуации не приводит к увеличению размерности задачи — число состояний в диаграмме остается таким же, каким оно было для случая независимых элементов.

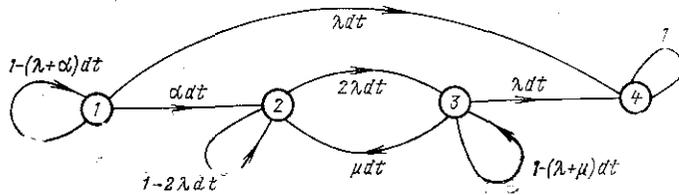


Рис. 3.7. Диаграмма состояний группы ($n=2$) идентичных элементов с учетом задержки ввода в эксплуатацию одного из элементов.

В ряде случаев при поэтапном сооружении объектов электрических систем производится последовательный ввод оборудования (генераторов, линий электропередачи и др.) и некоторое время объект может работать без резерва. Возникает задача оценки надежности объектов в такого рода ситуациях.

В настоящее время нет опубликованных работ по обработанной статистике указанных периодов задержки. Материалы, опубликованные за рубежом, позволяют аппроксимировать исходные статистические распределения периодов задержки экспоненциальной функцией. Несмотря на недостаток статистического материала, можно утверждать, что наиболее вероятны малые периоды задержки, поэтому эти распределения должны быть несимметричными и одномодальными с модой, стремящейся к нулю. Указанные предпосылки позволяют по крайней мере на первых этапах исследования принять экспоненциальное распределение для длительностей задержки.

Диаграмма состояний, отражающая функционирование рассматриваемой группы элементов в этих условиях,

представлена на рис. 3.7. Интенсивность перехода из состояния 1 в состояние 2 определяется как величина, обратная математическому ожиданию длительности задержки $\alpha=1/T_3$. Решение в этом случае имеет вид:

$$R(t) = 1 - \frac{\alpha(3\lambda + \mu + \Lambda_1)}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)(\Lambda_3 - \Lambda_1)} \exp(\Lambda_1 t) + \frac{\alpha(3\lambda + \mu + \Lambda_2)}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)(\Lambda_3 - \Lambda_2)} \exp(\Lambda_2 t) + \frac{\alpha(3\lambda + \mu + \Lambda_3)}{(\Lambda_1 - \Lambda_3)(\Lambda_2 - \Lambda_3)} \exp(\Lambda_3 t), \quad (3.84)$$

где $\Lambda_1 = -(\alpha + \lambda)$; $\Lambda_2 \approx -2\lambda^2 / (3\lambda + \mu)$; $\Lambda_3 \approx -(3\lambda + \mu) + 2\lambda^2 / (3\lambda + \mu)$.

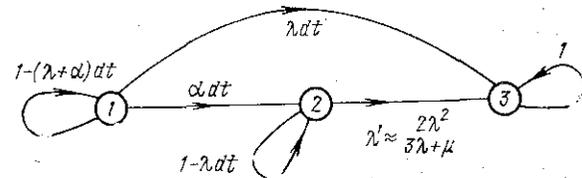
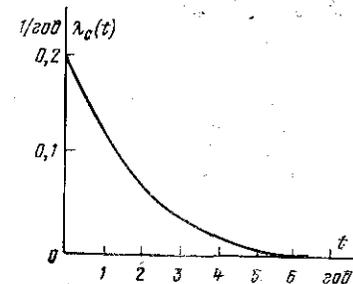


Рис. 3.8. Упрощенная диаграмма состояний.

Рис. 3.9. Интенсивность отказа группы при задержке ввода в эксплуатацию одного из элементов.



Заметим, что Λ_2 и Λ_3 приближенно равны соответствующим параметрам простейшей резервированной системы при одновременном вводе элементов в эксплуатацию. Используя соотношения $\mu \gg \lambda$, $\mu \gg \alpha$, $|\Lambda_3| \gg |\Lambda_1| > |\Lambda_2|$ и учитывая, что величина $2\lambda^2 / (3\lambda + \mu)$ пренебрежимо мала, получаем упрощенное выражение для вероятности безотказной работы группы

$$R(t) \approx \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \exp[-(\alpha + \lambda)t] + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} \exp\left(-\frac{2\lambda^2}{3\lambda + \mu} t\right); \quad (3.85)$$

этому выражению с погрешностью, не превышающей величины

$$\delta = \frac{2\lambda^2}{(3\lambda + \mu)(\lambda + \alpha)} \sqrt{100}, \quad (3.86)$$

соответствует упрощенная диаграмма состояний системы (рис. 3.8).

Для параметров, характеризующих линии электропередачи 110 кВ, была определена интенсивность отказов системы (рис. 3.9). Исходная и упрощенная модели дают практически одинаковый результат — погрешность, не превышает сотых долей процента. Расчеты показывают, что система начинает работать как нерезервированная, интенсивность отказов снижается и при $t \gg 3\alpha$ достигает значения, соответствующего резервированной системе. Но, так как $\lambda \gg 2\lambda^2/\mu$, то даже относительно небольшая задержка ввода в эксплуатацию резервного элемента группы значительно снижает надежность ее функционирования.

3.9. Характеристики надежности при нестационарных потоках отказов

Поток отказов линий электропередачи и трансформаторов может иметь значимый тренд, и параметр потока отказов таких элементов в этом случае аппроксимируется функцией вида $\omega_i(t) = A_i B_i \times \exp(-\gamma_i t)$. Дефицит исходных данных в настоящее время не позволяет отдать предпочтение ни одной из указанных в § 1.1 граничных моделей, поэтому возникает задача сравнения результатов, к которым приводят эти модели при определении характеристик надежности для групп отказов. Решение этой задачи проводится на примере системы ($n=2$) при учете только аварийных отключений. Для сравнения результатов выбран параметр потоков отказов $\omega_c(t)$.

Рассмотрим решение задачи при условии, что функционирование элементов представлено ПОП-моделью. Неизменный вид функции $F(t_{\Delta, i} < t) = Q(t)$ для получения решения позволяет кроме статистического моделирования использовать аналитический подход, основанный на аппарате полумарковских процессов. Однако особенности функции $\omega_i(t)$ дают возможность построить однородную марковскую модель функционирования группы. Для $\omega(t) = A + B \exp(-\gamma t)$ функция распределения длительностей интервалов между отказами в ПОП-модели представляет суперпозицию экспоненциальных распределений

$$Q(t) = 1 - c_1 \exp(-\lambda_1 t) - c_2 \exp(-\lambda_2 t). \quad (3.87)$$

По известным значениям A , B и γ можно получить параметры функции распределения (3.87)

$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = A + B; \quad (3.88)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A + B + \gamma; \quad (3.89)$$

$$c_2 \lambda_1 + c_1 \lambda_2 = (\lambda_1 \lambda_2) / A. \quad (3.90)$$

Тот факт, что однородные марковские модели всегда дают решение в виде суперпозиции экспонент, наталкивает на мысль о возможности построения однородной марковской цепи, которая давала бы решение, соответствующее выражению (3.87). Диаграмма состояний такой марковской цепи представлена на рис. 3.10. Она имеет дополнительное псевдореальное состояние 1, после достижения которого элемент отказывает с интенсивностью $\lambda_2 < \lambda_1 = \lambda_0 + \alpha$. Средняя длительность перехода из состояния 0 в состояние 1 равна $1/\alpha$, а параметр $\lambda_0 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2$, т. е. равен значению интенсивности отказов элемента в момент времени $t=0$. Легко показать, что полученной марковской цепи соответствует решение

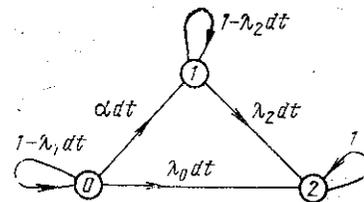


Рис. 3.10. Диаграмма состояний элемента. 0, 1 — рабочие состояния; 2 — отказное состояние.

$$R(t) = 1 - Q(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [(\lambda_0 - \lambda_2) \exp(-\lambda_1 t) + \alpha \exp(-\lambda_2 t)], \quad (3.91)$$

откуда получаем выражения для коэффициентов

$$c_1 = (\lambda_0 - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2); \quad c_2 = \alpha / (\lambda_1 - \lambda_2), \quad (3.92)$$

которые совместно с формулами (3.88) — (3.90) позволяют по значениям A , B и γ определить интенсивности переходов для диаграммы состояний, представленной на рис. 3.11. Приближенное равенство параметров α и γ указывает на то, что полученная модель адекватно отражает период наличия «приработочных» отказов элемента.

На основе диаграммы состояний элемента была получена диаграмма состояний системы (рис. 3.11). На основе указанного ранее

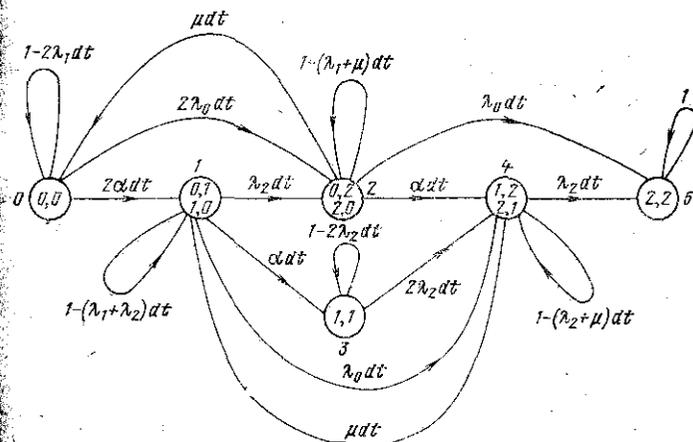


Рис. 3.11. Диаграмма состояний группы.

подхода были разработаны алгоритм и программа расчета для определения характеристик надежности группы — вероятности безотказной работы $R_c(t)$ интенсивности отказов $\lambda_c(t)$ и параметра потока отказов $\omega_c(t)$.

При анализе результатов следует исходить из следующего предположения. Отказы системы отделены значительными промежутками времени, во много раз превосходящими среднее время безотказной работы элемента. В силу этого отказы становятся практически независимыми и поток отказов системы приближается к пуассоновскому, для которого характеристики $\omega_c(t)$ и $\lambda_c(t)$ совпадают. Поэтому в практических расчетах нет необходимости определять характеристику $\omega_c(t)$ с помощью уравнения Вольтерра, а можно воспользоваться приближенным равенством

$$\omega_c(t) \approx \lambda_c(t) = -R'_c(t)/R_c(t). \quad (3.93)$$

Расчеты подтверждают это предположение. На рис. 3.12 приведены результаты расчета при $\omega_i(t) = 0,1667 + 0,1333 \exp(-0,3t)$, $\lambda_1 = 0,5$ 1/год, $\lambda_2 = 0,1$ 1/год, $\alpha = 0,2$ 1/год, $\mu = 1000$ 1/год. Значения функций $\omega_c(t)$ и $\lambda_c(t)$ различаются лишь четвертой значащей цифрой.

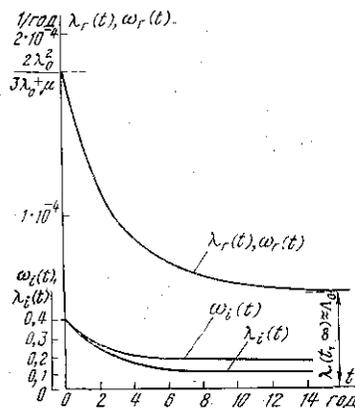


Рис. 3.12. Характеристики надежности группы при стационарных потоках отказов элементов.

Расчеты показали, что для возможного диапазона изменения параметров $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ элементов системы электроснабжения собственные значения, кроме наименьшего по модулю, фактически определяются указанными исходными параметрами, а именно $\lambda_4 \approx \lambda_3 = 3\lambda_0 + \mu$, $\lambda_2 \approx 2(\alpha + \lambda_2)$, $\lambda_1 \approx \alpha + \lambda_2$. В этих условиях значение наименьшего по модулю собственного значения λ_0 является асимптотой функций $\lambda_c(t)$ и $\omega_c(t)$. На относительно большом интервале времени, равном средней длительности безотказной работы системы T_c , ее функционирование протекает в установившемся режиме, поэтому справедливо приближенное равенство

$$T_c \approx 1/\lambda_c(t, \infty). \quad (3.94)$$

С помощью аппарата полумарковских процессов можно получить более простое выражение для этого показателя:

$$T_c = \lim_{s \rightarrow 0} R_c(s) = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} [\lambda_1 \lambda_2 + \mu (c_1 \lambda_2 + c_2 \lambda_1)] \times \left(\frac{c_1^2}{2\lambda_1} + \frac{2c_1 c_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{c_2^2}{2\lambda_2} + \frac{1}{\mu} \right). \quad (3.95)$$

Таким образом, в рассмотренном случае открываются большие возможности по упрощению решения полной проблемы собственными значениями.

Если для элементов используется НПП-модель, то поведение группы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} P'_0(t) &= -2\omega_i(t) P_0(t) + \mu P_1(t); \\ P'_1(t) &= 2\omega_i(t) P_0(t) - [\mu + \omega_i(t)] P_1(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

где $P_i(t)$ — вероятность нахождения группы в состоянии с числом отказавших элементов, равным i ; здесь вероятность безотказной работы группы $R_c^{\text{нпп}}(t) = P_0(t) + P_1(t)$, а функция $\omega_c^{\text{нпп}}(t)$ определена в формуле (3.93).

Используя линейное приближение для функции $\omega_i(t)$, инвариантные подстановки и замену переменных, от (3.96) приходим к уравнению

$$a^2 \eta'' + b \eta = 0, \quad (3.97)$$

решение которого может быть получено в виде сходящегося ряда, но значения новой переменной таковы, что сходимость обеспечивается при очень большом числе членов ряда.

Метод Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага приводит к решению системы (3.96) ценой больших затрат машинного времени, так как шаг при необходимой точности очень мал и составляет 10^{-4} — 10^{-5} лет.

Расчеты на ЭВМ показали, что НПП-модель при одинаковой исходной функции $\omega_i(t)$ приводит к результатам, которые с точностью до погрешностей расчетов ($\delta < 5\%$) совпадают с предыдущими результатами. Такая нечувствительность по отношению к свойству отсутствия последствия, по-видимому, связана с характером поведения исходной функции $\omega_i(t)$ и относительно высокой надежностью элементов.

Результаты проведенного анализа позволяют для практических целей рекомендовать ПОП-модель функционирования элемента, формирование которой осуществляется с помощью однородной марковской цепи. Такой подход может оказаться эффективнее статистического моделирования, в частности, при получении эквивалентных характеристик надежности для групп элементов.

3.10. Асимптотическая устойчивость решения для групп отказов, обусловленных преднамеренными отключениями

В § 3.5 рассматривались приближенные методы учета преднамеренных отключений элементов в системах электроснабжения. Основной вопрос заключается в том, каким образом сказываются на результатах расчетов указанные исходные предпосылки, возможно ли использование экспоненциальных моделей и, в частности, количественная оценка большей регулярности потока преднамеренных отключений по сравнению с потоком аварийных отключений элементов. При экспоненциальной идеа-

лизации решение может быть получено на основе аппарата однородных марковских процессов.

Диаграммы состояний системы для различных отказовых состояний представлены на рис. 3.13 и 3.14. Параметры λ_i и μ_i определены на основе математических ожиданий соответствующих временных интервалов.

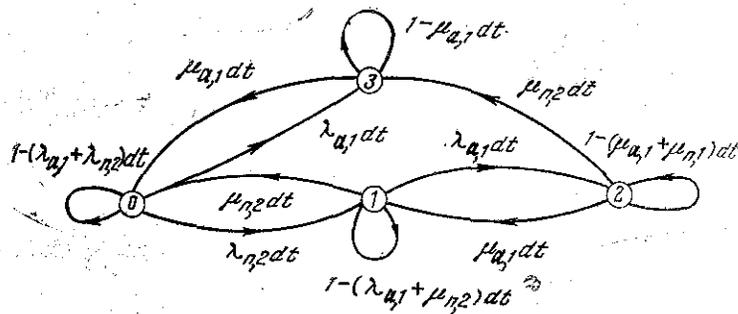


Рис. 3.13. Диаграмма состояний для отражающего отказового состояния.

0 — оба элемента в работе; 1 — первый элемент в работе, второй — в плановом ремонте; 2 — первый элемент в аварийном ремонте, второй — в плановом ремонте; 3 — первый элемент в аварийном ремонте, второй — в работе.

Для отражающего отказового состояния вероятность нахождения системы в состоянии 2

$$p_2 \approx \frac{\lambda_{a,1} \lambda_{n,2}}{\mu_{n,2} (\mu_{a,1} + \mu_{n,2})} = \lambda_{a,1} \lambda_{n,2} t_{пр,2} \frac{t_{в,1} t_{пр,2}}{t_{в,1} + t_{пр,2}}, \quad (3.98)$$

откуда

$$p_2 = q_{a,1,п,2} = q_{a,1} q_{п,2} k, \quad (3.99)$$

где $k = t_{пр,2} / (t_{в,1} + t_{пр,2})$ (см. § 3.5) — коэффициент, учитывающий возможность наложения только аварийного отключения на плановый ремонт, а $q_i = \lambda_i t_i$ — вероятность (средняя относительная длительность) i -го состояния элемента.

Модель с поглощающим отказовым состоянием [1, 2] приводит к следующему выражению для математического ожидания времени безотказной работы системы:

$$T_{a,1,пр,2} = \lim_{s \rightarrow 0} R_c(s) = (\mu_{n,2} + \lambda_{a,1} + \lambda_{n,2}) / (\lambda_{a,1} \lambda_{n,2}). \quad (3.100)$$

Легко показать, что функция $R_c(t)$ является асимптотически экспоненциальной, поэтому параметр потока наложений аварийных отключений на плановые

$$\omega_{a,1,п,2}(t) = 1/T_{a,1,п,2} \approx \lambda_{a,1} q_{п,2}. \quad (3.101)$$

Однако по отношению к реальным характеристикам функционирования рассмотренные экспоненциальные модели являются слишком грубыми. Так, например, для интервалов между плановыми отключениями и длительностей аварийных и плановых ремонтов, как показывают исследования, часто наиболее правомерны распределения Эрланга, нормальное логарифмически-нормальное и т. п. При учете действительных законов распределения указанных интервалов функционирование элементов и всей группы не может быть представлено однородным марковским процессом, так как в произвольно выбранные моменты времени функционирование элементов и группы не обладают марковским свойством. Наиболее адекватной моделью в этих условиях является полумарковский процесс.

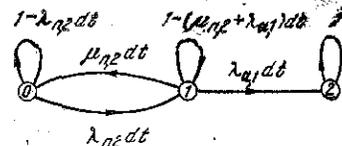


Рис. 3.14. Диаграмма состояний для поглощающего отказового состояния (0, 1 и 2 — то же, что и на рис. 3.13).

Функционирование рассматриваемой группы элементов в рамках поставленной задачи представим следующими исходными данными: $G_{a,1}(t) = 1 - \exp(-\lambda_{a,1}t)$ — функция распределения интервала между аварийными отключениями первого элемента; $G(t)$ — функция распределения продолжительности работы второго элемента без планового ремонта; $H(t)$ — функция распределения длительности планового ремонта. Полагаем, что $G(t)$ и $H(t)$ — произвольные дифференцируемые функции, для которых справедливы следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} 1 - G(t) &= G_0(t), \quad \int_0^{\infty} G_0(t) dt = t_{п,2} = 1/\lambda_{п,2}; \\ 1 - H(t) &= H_0(t), \quad \int_0^{\infty} H_0(t) dt = t_{пр,2} = 1/\mu_{п,2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.102)$$

Используя свойства экспоненциального распределения для случая поглощающего отказового состояния (оба элемента отключены), получаем диаграмму состояний (рис. 3.15), в которых возможно только наложение аварийного отключения на плановый ремонт.

Обозначим $v(t)$ число неработоспособных элементов (моменты изменения этой случайной величины будут представлять моменты $\{t_n\}$) и определим полумарковский процесс функционирования пары. Вероятности перехода $p_{i,j}$ для установившегося режима, не зависящие

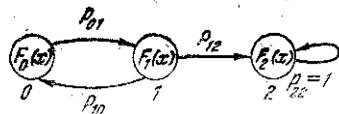


Рис. 3.15. Диаграмма состояний полумарковского процесса функционирования группы (0, 1 и 2 — то же, что и на рис. 3.13).

от начального состояния системы, выразим, используя диаграмму состояний (см. рис. 3.15) и параметры исходных распределений, тогда

$$\|p_{i,j}\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_{п,2} & 0 & \lambda_{a,1} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.103)$$

Распределения вероятностей случайной величины, представляющей длительность нахождения в i -м состоянии ($i \in N$), определяются следующим образом:

$$F_i(t) = P\{\xi^{(i)} \leq t\} = \begin{cases} G(t), & i=0; \\ 1 - \exp(-\lambda_{a,i} t) H_0(t), & i=1; \\ 1 - \delta_+(t), & i=2, \end{cases} \quad (3.104)$$

где $F_1(t)$ представляет функцию распределения для $\min\{t_1, t_2\}$; t_1 — продолжительность планового ремонта; t_2 — продолжительность безотказной работы первого элемента, $\delta_+(t)$ — односторонняя единичная импульсная функция.

Вероятность безотказной работы системы в заданных условиях

$$R_c(t) = P\{v(t)=0\} + P\{v(t)=1\}, \quad (3.105)$$

где $P\{v(t)=i\}$ — вероятность того, что полумарковский процесс в момент t примет фиксированное значение.

Если в начальный момент времени система находилась в состоянии $j_0=0$, то

$$R_c(t) = B_0(0, t) + B_0(1, t). \quad (3.106)$$

Приведем очевидные равенства:

$$L\{1 - F_j(t)\} = F_{0,j}(s) = \begin{cases} G_0'(s), & j=0; \\ L\{\exp(-\lambda_{a,i} t) H_0(t)\} = \\ = H_0'(s + \lambda), & j=1; \end{cases}$$

$$L\{dF_j(t)\} = f_j(s) = \begin{cases} L\{G'(t)\} = g(s), & j=0; \\ L\{\exp(-\lambda_{a,i} t) [H_0(t) \lambda_{a,i} - \\ - H_0'(t)]\} = 1 - sH_0(s + \lambda_{a,i}), & j=1. \end{cases}$$

Используя преобразование Лапласа, уравнение (3.77) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_0(i, s) \\ b_1(i, s) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} F_{00}(s) \delta_{0,i} \\ F_{01}(s) \delta_{1,i} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} p_{00} f_0(s) & p_{01} f_0(s) \\ p_{10} f_1(s) & p_{11} f_1(s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0(i, s) \\ b_1(i, s) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

откуда окончательно имеем:

$$L\{R_c(t)\} = R_c(s) = \frac{(\mu_{п,2} + \lambda_{a,1}) [G_0(s) + H_0(s + \lambda_{a,1}) g(s)]}{\mu_{п,2} + \lambda_{a,1} - \mu_{п,2} [1 - sH_0(s + \lambda_{a,1})] g(s)}. \quad (3.107)$$

Для определения функции $R_c(t)$ необходимо знать аналитический вид исходных функций распределения, но это приведет к частному решению задачи. Поэтому для решения в общем случае воспользуемся известными свойствами преобразования Лапласа и определим математическое ожидание длительности безотказной работы пары $T_{a,1,п,2}$ и коэффициент вариации $\rho = \sigma_T / T_{a,1,п,2}$. Для этой цели укажем на соотношения

$$\left. \begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} g(s) &= 1; \quad \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = t_{п,2} = 1/\lambda_{п,2}; \\ \lim_{s \rightarrow 0} H_0(s + \lambda_{a,1}) g(s) &= \int_0^\infty \left[\int_0^t \exp\{-\lambda_{a,1}(t - \tau)\} H_0(t - \tau) g(\tau) d\tau \right] dt = \int_0^\infty \exp(-\lambda_{a,1} x) \times \\ &\times H_0(x) dx = a. \end{aligned} \right\} \quad (3.108)$$

Выполняя интегрирование по частям, нетрудно показать, что

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_{a,1}} \left\{ 1 - \int_0^{\infty} \left[1 - \lambda_{a,1}x + \theta \frac{(\lambda_{a,1}x)^2}{2} \right] dH_0(x) \right\} = \\ = t_{пр,2} - \theta_1 \frac{\lambda_{a,1}}{2} M[t_{пр}^2], \quad (3.109)$$

где $\theta_1 < 1$.

Кроме того, так как $\lambda_{a,1}^{-1} \gg M[t_{пр,2}^2]$, что подтверждается статистикой, то $\alpha \approx t_{пр,2} = \mu_{п,2}^{-1}$. Подставив полученные значения в выражение для $R_c(s)$, определим:

$$\lim_{s \rightarrow 0} R_c(s) = T_{a,1,п,2} = \frac{(\mu_{п,2} + \lambda_{a,1})t_{пр,2} + (\mu_{п,2} + \lambda_{a,1})\alpha}{\lambda_{a,1}}. \quad (3.110)$$

С относительной погрешностью $\delta_{отн} < 0,5\theta_1 M[t_{пр,2}] \times \lambda_{a,1} \lambda_{п,2}$, не превышающей 0,001—1%, формула (3.110) принимает вид:

$$T_{a,1,п,2} = \frac{\mu_{п,2} + \lambda_{a,1} + \lambda_{п,2}}{\lambda_{a,1} \lambda_{п,2}}, \quad (3.111)$$

т. е. длительность безотказной работы пары совпадает со значением математического ожидания безотказной работы рассматриваемой системы, когда $G(t)$ и $H(t)$ — экспоненциальные распределения [см. формулу (3.100)].

При известном выражении для $R_c(s)$ коэффициент вариации определяется по формуле

$$\rho = \sqrt{\lim_{s \rightarrow 0} \{-2R'_c(s)/R_c^2(s)\} - 1} \quad (3.112)$$

и после преобразований принимает значение

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{\lambda_{a,1}}{\mu_{п,2} + \lambda_{a,1}} \left[1 - \frac{D_{t_{п,2}} + D_{\tau_1}}{(t_{п,2} + \tau_1)^2} \right]}, \quad (3.113)$$

где τ_1, D_{τ_1} — соответственно математическое ожидание и дисперсия длительности нахождения системы в состоянии $i=1$, $\tau_1 = \alpha \approx t_{пр,2}$; $D_{t_{п,2}}$ — дисперсия продолжительности межремонтного периода. Обычно $t_i^2 \gg D_{t_i}$, поэтому $(D_{t_{п,2}} + D_{\tau_1})/(t_{п,2} + \tau_1)^2 < 1$, тогда справедливо соотношение

$$1 > \rho' > \rho = \sqrt{1 - \lambda_{a,1}/(\mu_{п,2} + \lambda_{a,1})}. \quad (3.114)$$

Согласно статистическим данным $\rho' > 0,98 + 0,999$ (меньшая цифра характеризует пару крупных генераторов, большая — линию электропередачи 110 кВ длиной 50 км). Для функций распределения, используемых в теории надежности, значение ρ , стремящееся к единице, указывает на близость действительной функции к экспоненциальной.

Полученные результаты показывают, что закон распределения безотказной работы системы в рассмотренных условиях близок к экспоненциальному (для стационарного режима и при относительно малом α), точнее, функция $R_c(t)$ асимптотически не зависит от вида законов распределения интервалов между плановыми отключениями и длительностей плановых ремонтов. Параметр результата определяется математическими ожиданиями исходных функций распределения, т. е. величинами $t_{п,2}$ и $t_{пр}$. Следует указать, что если рассматриваемый интервал времени $\Delta T < 3t_{пр}$, то система находится в нестационарном режиме работы и полученные результаты неправомерны. Такое положение характерно для расчетов надежности систем электроснабжения на коротких интервалах времени в задачах оперативного (диспетчерского) управления. В этом случае решение может быть получено на основе метода интегральных уравнений; при этом число рассматриваемых последовательных событий можно сократить до 2—3, что позволяет значительно упростить решение.

3.11. Характеристики длительности пребывания системы в отказовых состояниях

Рассмотрим вероятностные характеристики длительностей пребывания системы в отказовых состояниях при самых общих предположениях о видах законов распределения продолжительности аварийных и плановых ремонтов. Необходимость такого рассмотрения вызвана тем, что именно для этих временных интервалов экспоненциальная аппроксимация часто является слишком грубой. Анализируемое состояние системы будет заключаться в совпадении аварийных ремонтов элементов или наложении аварийного ремонта одного элемента на плановый ремонт другого. Результат, полученный для такого простейшего случая, можно распространить на более сложные, когда отказовое состояние системы вызвано

совпадением неработоспособных состояний большего числа ее элементов ($n > 2$).

Пусть в момент времени t (рис. 3.16) возникло отказовое состояние, состоящее в наложении аварийного отключения первого элемента на ремонт второго элемента. Для данной задачи безразличен вид этого ремонта. Нас интересует длительность x_0 рассматриваемого отказового состояния системы, которая является случайной величиной:

$$x_0 = \min \{x_1, x_{2(x_1)}\}. \quad (3.115)$$

Заметим, что, поскольку исходные величины x_1 и x_2 являются случайными, не имеют смысла предположения $x_1 \cong x_2$.

На основе формулы (3.115) можем записать:

$$P(x_0 > t) = P(x_1 > t) P(x_{2(x_1)} > t), \quad (3.116)$$

первый множитель в выражении (3.116)

$$P(x_1 > t) = 1 - H_1(t),$$

где $H_1(t)$ — функция распределения длительности ремонта первого элемента.

Известна также функция распределения $H_2(t) = 1 - P(x_2 > t)$. Таким образом, решение сводится к определению закона распределения «хвоста» $H_{2(x_1)}(t) = 1 - P(x_{2(x_1)} > t)$ для установившегося режима работы системы ($t \rightarrow \infty$). А. Д. Соловьевым получено решение, которое можно представить в виде

$$P(x_{2(x_1)} > t) = \frac{1}{\tau_2} \int_t^{\infty} P(x_2) dx_2, \quad (3.117)$$

где τ_2 — математическое ожидание времени ремонта (аварийного или планового) второго элемента.

Если функция $P(x_i)$ является экспоненциальной, то распределение для величины $x_{i(x_j)}$ не отличается от исходного, т. е. от распределения для x_i , что является следствием известных свойств этого распределения.

Для элементов систем электроснабжения 35—110 кВ были получены соответствующие распределения «хвостов». Их вид указывает на то, что вне зависимости от исходного распределения распределение «хвоста» приближается к экспоненциальному. В предельном случае, когда время ремонта является постоянной величиной, распределение «хвоста» становится равномерным. При-

ближение к равномерному наблюдается в основном в случаях, когда исходное распределение является нормальным с относительно малой дисперсией.

Для линий электропередачи 110 кВ было рассмотрено наложение аварийного ремонта одной цепи на плановое отключение другой. Результаты расчетов представлены на рис. 3.17. Для интервала времени, когда обе цепи находятся в нерабочем состоянии, получена функция $P(\tau_0)$, которая достаточно близка к экспоненте, при этом величина $M[\tau_0] = \int_0^{\infty} P(\tau_0) d\tau =$

$$= 3,4 \text{ ч.}$$

Если вместо истинного вида исходных распределений использовать экспоненциальные с параметром, совпадающим с соответствующими математическими ожиданиями, то

$$M[\tau_0]_{\text{экс}} = \frac{t_{\text{впр}} t_{\text{пр}}}{t_{\text{в}} + t_{\text{пр}}} = \frac{6,9 \cdot 10,2}{6,9 + 10,2} = 4,13 \text{ ч.}$$

Экспоненциальная идеализация привела к завышению результата на 21%. Таким образом, используя упрощенные расчетные формулы для длительностей отказовых состояний при экспоненциальной идеализации, мы получаем пессимистическую оценку. Как показывают расчеты, в наихудшем случае (когда виды законов распределения резко различаются, а средние длительности неработоспособных состояний (близки) погрешность не превысит 25%, что позволяет рекомендовать упрощенный подход в инженерных расчетах.

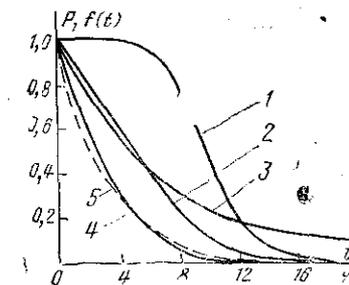


Рис. 3.17. Исходные распределения и результаты расчетов.

1 — функция $P(t_{\text{пр}})$; 2 — функция $P(t_{\text{в(хв)}})$; 3 — функция $P(t_{\text{в}})$; 4 — функция $P(\tau_0)$; 5 — экспоненциальное приближение с параметром, равным $1/M[\tau_0]=1/3,4$.

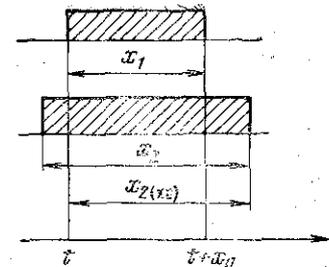


Рис. 3.16. Диаграмма совпадения неработоспособных состояний двух элементов.

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ

4.1. Относительность понятий «элемент» и «система» в расчетах надежности электрических систем

В расчетах надежности электрических систем, так же как в любых других, возникает противоречивая ситуация: с одной стороны — желание иметь точную модель, наиболее адекватно описывающую процессы отказов и восстановлений, с другой — простота расчетов и обеспеченность выбранной расчетной модели исходными данными.

В настоящее время наиболее широкое распространение получили методы расчета надежности, которые исходят из предположения, что система состоит из самостоятельных в смысле надежности элементов. В этих методах отказом элемента считается выход его параметров (электрических, механических, тепловых и т. д.) за пределы допустимых технических норм. Предполагается, что при отказе элемент отключается коммутационными устройствами от остальной части системы. Эти методы расчета не учитывают функциональные зависимости между параметрами режимов отдельных элементов электрических систем, что является их несомненным недостатком. Однако, принимая во внимание отсутствие необходимых исходных данных, простоту расчетов и возможность получения количественных оценок надежности для современных сложных систем, на данном этапе развития теории надежности применение таких методов следует считать оправданным.

Понятия «элемент» и «система» в расчетах надежности относительны. Объект, считающийся системой в одном исследовании, может рассматриваться как элемент, если изучается объект большего масштаба. Например, если исследуется надежность работы электрической станции, то станция представляется как система, а генераторы, выключатели, шины распределительного устройства, турбины представляются отдельными элементами. Если же исследуется надежность одного генератора, то его части — статор, ротор, возбуждатель и т. д. — представляются как элементы, а сам генератор — как система.

Деление системы на элементы зависит также от характера рассмотрения (функциональные, конструктивные, схемные, оперативные элементы и т. д.), требуемой точности проводимого исследования, уровня представлений о функционировании устройств, наличия статистического материала, масштабности объекта в целом. Например, при оценке надежности сложной системы относительно узла нагрузки в целом группа конструктивных элементов присоединения (разъединитель, выключатель с комплектом релейной защиты и соответствующим участком шин) представляется как один элемент с единым показателем надежности, включающим отказы этих аппаратов в статическом состоянии и оперативных режимах. Однако при оценке вероятности развития аварии в системе укрупнение не позволяет решить задачу. В этом случае следует учитывать отдельно отказы выключателя в статическом и оперативных состояниях и включать в них отказы релейной защиты.

Отказы двухцепной линии электропередачи на одной опоре включают отказы каждой цепи и распространение аварии с одной цепи на вторую. Тем не менее в ряде случаев двухцепные линии представляют одним элементом, что значительно упрощает расчеты показателей надежности сложных схем.

Относительность понятий «элемент» и «система» создает возможность широкого применения поэтапного метода расчета надежности. Суть его состоит в том, что на последующем этапе расчета элемент сложной системы (станция, подстанция, группа линий электропередачи) может быть представлен как отдельная система, для которой последовательно уточняются показатели надежности. Тем самым создаются возможности расчета надежности достаточно сложных систем. Следует отметить, что данный метод расчета надежности можно совершенствовать, вводя в расчетную модель зависимости характеристик надежности элементов от параметров режимов их работы, однако это усложняет методику расчетов.

Расчетный элемент характеризуется следующими статистическими показателями надежности:

1. Параметр потока отказов ω , 1/год, т. е. среднее количество отказов в единицу времени (обычно в год), отнесенное к одному элементу (для простейшего потока $\omega = \lambda$). Для линий электропередачи параметр потока отказов обычно относится к 1 км линии [1/(км·год)].

2. Среднее время восстановления (замены) аварийного ремонта $\bar{t}_в$, час/одно восстановление.

3. Параметр потока преднамеренных отключений элемента $\lambda_п$, 1/год.

4. Средняя продолжительность одного преднамеренного отключения элемента (в основном для профилактических и капитальных ремонтов оборудования) $\bar{t}_{пр}$, час/одно отключение.

Ненадежность элемента (средняя вероятность отказового состояния) определяется средней вероятностью его суммарного простоя вследствие вынужденного отключения из-за повреждений и преднамеренных отключений для профилактики (см. гл. 3):

$$q_з = q + q_п, \quad (4.1)$$

где $q = \lambda \bar{t}_в / 8760$ — вероятность вынужденного простоя; $q_п = \lambda_п \bar{t}_{пр} / 8760$ — вероятность преднамеренного отключения.

Вероятность рабочего состояния (коэффициент готовности) определяется по формуле

$$p = 1 - q_з = 1 - q - q_п = \bar{t}_р / 8760, \quad (4.2)$$

где $\bar{t}_р$ — время безотказной работы элемента.

Если времена $\bar{t}_в$, $\bar{t}_{пр}$, $\bar{t}_р$ измеряются в годах, то

$$\left. \begin{aligned} q &= \lambda \bar{t}_в; \\ q_п &= \lambda_п \bar{t}_{пр}; \\ p &= \bar{t}_р \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Отметим, что эти же показатели надежности могут характеризовать и систему в целом.

4.2. Основные допущения, принимаемые при расчетах показателей надежности. Понятие отказа системы

Для большей части задач, связанных с технико-экономической оценкой надежности электрических систем, нет необходимости рассматривать показатели надежности на коротких интервалах времени, поэтому можно не учитывать начальные состояния элементов. К тому же применение для этих целей методов теории массового обслуживания встречает серьезные затруднения вычислительного характера, если система имеет большее число восстанавливаемых элементов и произвольную схему

коммутации. Поэтому при расчетах показателей надежности в интервалах времени, равных сезону, году, можно использовать более простые вероятностные модели, основанные на средних значениях вероятностей состояния элементов. При указанных интервалах рассмотрения показателей надежности изложенные в гл. 3 алгоритмы расчета основных показателей надежности (коэффициента вынужденного простоя, параметра потока отказов и среднего времени восстановления) обеспечивают достаточную точность, если выполняются следующие условия:

- 1) отказы элементов системы независимы;
- 2) времена безотказной работы и времена восстановления описываются экспоненциальными законами распределения;
- 3) поток отказов элементов системы ординарен;
- 4) время безотказной работы значительно больше времени восстановления для всех элементов.

Отметим, что для обоснования возможности применения алгоритмов расчетов по средним значениям показателей надежности большее значение имеют последние два условия, которые обычно выполняются практически для всех элементов электрических систем. Даже если законы распределения времени безотказной работы и восстановления значительно отличаются от экспоненциальных, погрешность расчетов по средним значениям незначительна (см. гл. 3).

Наиболее трудоемко определение параметра потока отказов системы $\lambda_с$, равного сумме произведений параметра потока отказов каждого независимого элемента на среднюю вероятность отказа оставшейся после исключения этого элемента части системы (см. гл. 3).

Понятие «оставшаяся часть системы» носит несколько условный характер и зависит от решаемой задачи и принятого метода решения. Например, когда под отказом системы относительно каждого узла понимается полное прекращение его электроснабжения и не учитываются ограничения по пропускной способности, то оставшаяся часть системы — это совокупность всех остальных $(n-1)$ элементов, составляющих оставшуюся часть схемы, для которой необходимо найти вероятность отказа ее относительно рассматриваемого узла. Однако для основных узлов нагрузки полное прекращение электроснабжения можно считать достаточно редким явлением. В то же время электроэнергетические системы как системы силового типа имеют ограничения по пропускной способности элементов. Отказ отдельных элементов или даже группы элементов чаще приводит не к полному прекращению электроснабжения, а к ограничению потребностей или отпуску электроэнергии с показателями качества ниже нормируемых. Такого рода отказы следует отнести к частичным отказам. Для них можно определить все перечисленные показа-

тели надежности с учетом и без учета преднамеренных отключений элементов.

Так, если не учитывать преднамеренные отключения элементов в системе произвольной сложности, состоящей из n независимых элементов, то порядок расчета при определении параметров, например частичного отказа, вызывающего у потребителей дефицит мощности не более $S_{\mu, c}$ $\mu, c=1, 2, \dots, \gamma_0, \dots, m_0$, следующий. Вычисляется параметр потока отказов для каждого состояния системы j ($j=1, 2, \dots, m_j$), вызывающего дефицит мощности:

$$\lambda_{j, c} = \sum_{l=1}^{n_j} \lambda_l \left[\sum_{i=1}^{m_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{v_{l, i}} q_{l, k, i} \prod_{\substack{k=v_{l, i}+1 \\ k \neq i}}^n p_{l, k, i} \right], \quad (4.4)$$

где n_j — общее число элементов в m_j состояниях, при которых возникает дефицит мощности не более $S_{j, c}$; m_j — число состояний системы, которые вызывают дефицит мощности не более $S_{j, c}$ (в частном случае m_j может быть равным 1); $v_{l, i}$ — число элементов в l -м состоянии, отказ которых совместно с отказом элемента i приводит к дефициту мощности не более $S_{j, c}$; $q_{l, k, i}$, $p_{k, l, i}$ — соответственно средние вероятности отказового и безотказового состояний k -го элемента в l -состоянии.

Затем вычисляется средняя вероятность состояния системы, вызывающего дефицит мощности не более $S_{j, c}$:

$$q_{j, c} = \sum_{l=1}^{m_j} \prod_{k=1}^{v_{l, i}} q_{l, k, i} \prod_{k=v_{l, i}+1}^n p_{l, k, i}. \quad (4.5)$$

Аналогично определяются параметры потока отказов и средняя вероятность во всех состояниях γ_0 , вызывающих дефицит мощности не более $S_{\mu, s}$, количество таких расчетов равно m_0 .

Результирующий параметр потока отказов системы и средняя вероятность отказов, вызывающих дефицит мощности не более $S_{\mu, c}$, равны:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\mu, c} &= \sum_{j_c=1}^{m_c} \lambda_{j, c} \\ q_{\mu, c} &= \sum_{j_c=1}^{m_c} q_{j, c} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Функция надежности системы и среднее время безотказной работы в указанных условиях

$$P_{\mu, c}(t) = \exp(-\lambda_{\mu, c} t). \quad (4.7)$$

Среднее время восстановления частичного отказа

$$\bar{t}_{в, \mu, c} = q_{\mu, c} / \lambda_{\mu, c}. \quad (4.8)$$

Расчеты показателей надежности частичных отказов системы весьма трудоемки, так как в них для каждого отдельного состояния предусматривается анализ режимов работы каждого элемента (как правило, расчет потоко-распределения для каждого состояния) и сравнение его с допустимым по техническим условиям. В результате такого сравнения можно определить дефицит мощности и недоотпуск электроэнергии в системе.

Пример. Для системы, приведенной на рис. 4.1, требуется определить показатели надежности при частичном отказе системы (например, отказ элементов 1 и 4), если известны все показатели надежности элементов (преднамеренные отключения не учитывать).
Решение. Для указанного состояния определяются параметр потока отказов

$$\lambda_{\mu, c} = \lambda_1 q_4 p_2 p_3 p_5 + \lambda_4 q_1 p_2 p_3 p_5 = p_2 p_3 p_5 (\lambda_1 q_4 + \lambda_4 q_1) = p_2 p_3 p_5 (\lambda_1 \lambda_{в, 4} + \lambda_4 \lambda_{в, 1}),$$

средняя вероятность частичного отказа

$$q_{\mu, c} = q_1 q_4 p_2 p_3 p_5 = p_2 p_3 p_5 \lambda_{в, 1} \lambda_{в, 4},$$

среднее время восстановления

$$\bar{t}_{в, \mu, c} = \frac{q_{\mu, c}}{\lambda_{\mu, c}} = \frac{\lambda_{в, 1} \lambda_{в, 4}}{\lambda_{в, 1} + \lambda_{в, 4}}.$$

Анализируя алгоритмы расчетов показателей надежности произвольных систем, в том числе и не сводящихся к последовательно-параллельным схемам по надежности, следует отметить, что одной из сложных и трудоемких задач является многократное определение средних вероятностей отказов оставшихся частей схем после исключения поочередно каждого элемента. В общем случае после исключения одного элемента сложные схемы практически не упрощаются. При расчетах коэффициентов вынужденного простоя относительно разных узлов нагрузки расчеты также весьма трудоемки. Трудоемкость и число расчетов резко увеличиваются при учете преднамеренных отключений элементов в сложных системах. Поэтому одной из основных задач анализа надежности электроэнергетических систем относительно узлов нагрузки (или комплекса узлов) является разработка методов определения средних вероятностей отказа и безотказной работы их.

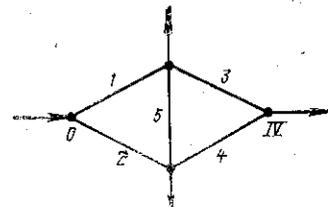


Рис. 4.1. Схема типа «мостик».

С усложнением взаимосвязей между элементами расчетную схему по надежности без применения особых приемов невозможно свести к схеме с последовательно-параллельным или параллельно-последовательным соединением элементов. Например, для схемы типа «мостик» или схемы с большим числом поперечных связей правила преобразования последовательно-параллельных или параллельно-последовательных схем надежности неприменимы.

Из аналитических вероятностных методов расчета сложных схем рассмотрим три основных: 1) метод анализа вероятностей состояний системы с анализом параметров режимов в каждом состоянии (этим методом определяются параметры частичных отказов системы); 2) метод, использующий формулу полной вероятности, и основанный на ней метод разложения на множители; 3) метод, использующий структурные представления схемы, т. е. замену сложной схемы эквивалентными относительно узловых пунктов последовательно-параллельными или параллельно-последовательными¹.

4.3. Метод анализа вероятностей состояний системы

С помощью этого метода можно учесть взаимосвязь режимов отдельных элементов и системы с вероятностями состояния системы, т. е. количественно оценить влияние ограничений пропускной способности элементов (по токам нагрева, потерям напряжения и т. д.) на показатели надежности системы, в частности на недоотпуск электроэнергии.

Для определения показателей надежности различных состояний системы выделяются расчетные элементы с учетом логики функционирования сети. Реальные элементы системы объединяются в расчетные группы, отказ которых не локализуется в них самих, а приводит к отключению всех смежных элементов (см. § 4.8). Это, как правило, группа элементов, не разделенных в схеме автоматическими коммутационными аппаратами. В смысле надежности такие элементы оказываются соединенными последовательно. По показателям надежности

¹ Здесь не рассматриваются логико-аналитические методы расчета надежности сложных систем и методы, использующие статистическое моделирование процессов отказов и восстановлений на ЭМВ.

реальных элементов определяются показатели надежности расчетных элементов:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_j &= \sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i; \\ q_j &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{T}_{в. i} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{T}_{п. i}, \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

где n — число элементов в цепи передачи энергии и примыкающих к ней цепях, не отделенных от нее какими-либо коммутационными аппаратами; m — число элементов, примыкающих к цепи передачи энергии, отделенных от нее неавтоматическими коммутационными аппаратами, например разъединителями, в частном случае $m+n=1$.

Затем выделяются группы элементов, преднамеренные отключения которых могут совмещаться, и определяются показатели преднамеренных отключений таких групп. Например, для группы из k реальных элементов с периодичностью отключений $\frac{1}{\lambda_{п. 1}}, \frac{1}{\lambda_{п. 2}}, \dots, \frac{1}{\lambda_{п. k}}$ или

$\bar{T}_{п. 1}, \bar{T}_{п. 2}, \dots, \bar{T}_{п. k}$ определяется наименьшее общее кратное этих значений, т. е. наименьший интервал времени, в течение которого произойдет целое число преднамеренных отключений каждого элемента $\bar{T}_{пр}$. Выбирается элемент с наибольшей продолжительностью $\bar{t}_{пр. i}$ преднамеренных отключений. Параметр потока преднамеренных отключений и средняя вероятность преднамеренных отключений такого эквивалентного элемента определяются по формулам

$$\lambda_{п. j} = \frac{1}{\bar{T}_{пр}} \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k (\bar{T}_{пр} \lambda_{п. l} - 1) + \lambda_{п. i} \bar{T}_{пр} \right]; \quad (4.10)$$

$$q_{п. j} = \frac{1}{\bar{T}_{пр}} \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k (\bar{T}_{пр} \lambda_{п. l} - 1) \bar{t}_{пр. l} + \lambda_{п. i} \bar{T}_{пр} \bar{t}_{пр. i} \right]; \quad (4.11)$$

при этом должно соблюдаться условие $q_{п. j} \leq 1$.

Затем анализируются режимы при различных состояниях схемы — с одним и двумя аварийно отключенными элементами — и с наложением на каждый преднамеренно отключенный элемент аварийного состояния другого.

Состояния с тремя и более отключенными элементами в практических расчетах не рассматриваются как маловероятные.

Для каждого состояния системы определяются параметр потока отказов и преднамеренных отключений $\lambda_{c,i,j}$ и его вероятность $Q_{i,j}$. Например, для состояния системы с i -м и j -м отключениями расчетными элементами эти величины можно определить по формулам

$$\lambda_{c,i,j} = (\lambda_i q_j + \lambda_j q_i + \lambda_{n,i} q_j k_{n,i} + \lambda_{n,j} q_i k_{n,j}) k_{r,i,j}; \quad (4.12)$$

$$Q_{i,j} = (q_i q_j + q_i q_{n,j} k_{n,j} + q_j q_{n,i} k_{n,i}) k_{r,i,j}, \quad (4.13)$$

где

$$k_{r,i,j} = \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq i \neq j}}^N (1 - q_t - q_{n,t}) / (1 - q_{n,t}) \quad (4.14)$$

— коэффициент готовности оставшейся части системы после исключения из нее i -го и j -го расчетных элементов; N — общее число расчетных элементов системы.

Рассчитываются режимы работы элементов и системы и сравниваются с допускаемыми, затем оценивается значение отключаемой мощности в узлах схемы для обеспечения режима или минимального суммарного ущерба от ограничений по мощности и недоотпуска энергии потребителям системы. Недоотпущенная энергия равна сумме недоотпусков при всех состояниях системы.

Метод отличается значительной трудоемкостью, так как практически для каждого состояния возникает необходимость расчета потокораспределения. Существенного упрощения и сокращения расчетов можно достигнуть, если нелинейную задачу расчета потокораспределения решать как линейную, пренебрегая зависимостью потребления мощности в узлах от напряжения, и использовать обобщенные параметры системы: матрицу коэффициентов распределения

$$C = Z_b^{-1} M_t (M Z_b^{-1} M_t)^{-1}, \quad (4.15)$$

или матрицу узловых сопротивлений

$$Z = (M Z_b^{-1} M_t)^{-1}, \quad (4.16)$$

где M и M_t — соответственно первая матрица инцидентий и транспонированная матрица инцидентий; Z_b^{-1} —

матрица сопротивлений ветвей, обычно диагональная.

При отсутствии свободных ЭДС в схеме и пропорциональном изменении активной и реактивной мощности узлов уравнения связи параметров ветвей и узлов имеют вид:

$$S_b = C S_y, \quad (4.17)$$

$$U_\Delta = Z(a S_y), \quad (4.18)$$

где S_b — матрица значений потоков мощности в ветвях электрической схемы замещения; S_y — матрица нагрузок узлов; U_Δ — матрица падений напряжения от базисного узла до всех узлов схемы; $a = \frac{1}{\sqrt{3} U_n}$ — постоянный коэффициент, на который умножаются все элементы матрицы S_y .

Ограничения в системах электроснабжения в аварийных состояниях возникают чаще всего вследствие ограничений пропускной способности элементов по нагреву или вследствие недопустимых потерь напряжения. Поэтому значение отключаемой мощности в каждом узле можно оценить на основе информации, содержащейся в матрицах C и Z . Они состоят из коэффициентов, показывающих долю участия каждой нагрузки в нагрузке ветви или падении напряжения до узла. Иногда, особенно при вероятностном задании нагрузок узлов, для оценки отключаемых мощностей целесообразно ввести операторы обратного перехода от нагрузок ветвей и падений напряжения к нагрузкам узлов:

$$S_y = K S_b = (C_t C)^{-1} C_t S_b; \quad (4.19)$$

$$S_y = a^{-1} Z^{-1} U_\Delta = A U_\Delta, \quad (4.20)$$

где индекс t означает транспонирование матрицы C ; $A = a^{-1} Z^{-1}$ — оператор, переводящий вектор падений напряжения до узлов в нагрузку узлов.

Однако расчеты по этим формулам нельзя проводить с произвольным набором потоков мощности в ветвях и напряжениях в узлах, необходима последовательная процедура относительно каждого узла и ветви, начиная с наиболее электрически удаленных узлов и наиболее

загруженных ветвей. Процессы расчетов выполняются итерационно для обеспечения минимума суммарного недоотпуска электроэнергии. Для оценки недоотпуска электроэнергии целесообразно воспользоваться моделью нагрузки потребителей в виде системы случайных величин S и все расчеты выполнять для математических ожиданий и дисперсий. Этот метод особенно эффективен для оценки недоотпуска электроэнергии при вероятностно-статистическом характере электропотребления и рассмотрении системы на достаточно длительных интервалах времени. Матрицы математических ожиданий

\bar{S}_B , \bar{U}_{Δ} и дисперсий нагрузок ветвей $D(S_B)$, $D(U_{\Delta})$ равны:

$$\bar{S}_B = C \bar{S}_Y; \quad (4.21)$$

$$D(S_B) = \|C^2_{i,j}\| D(S_Y) + \left\| \sum_{k \neq l} C_{i,k} C_{i,l} \sigma_{s,k} \sigma_{s,l} r_{k,l} \right\|, \quad (4.22)$$

$$\bar{U}_{\Delta} = a Z \bar{S}_Y = Z_A \bar{S}_Y; \quad (4.23)$$

$$D(U_{\Delta}) = a^2 \|Z^2_{i,j}\| D(S_Y) + \left\| a^2 \sum_{k \neq l} z_{i,k} z_{i,l} \sigma_{s,k} \sigma_{s,l} r_{k,l} \right\|, \quad (4.24)$$

где $\sigma_{s,k}$ и $\sigma_{s,l}$ — соответственно среднее квадратическое отклонение нагрузки k -го и l -го узлов; $r_{k,l}$ — коэффициент корреляции между случайными величинами нагрузок этих узлов.

Зная числовые вероятностные характеристики искомых параметров нагрузок ветвей и потерь напряжения до узлов, с использованием неравенства Чебышева нетрудно выявить перегруженные ветви и узлы с недопустимыми уровнями напряжения по условиям

$$S_p = \bar{S}_B + \beta [D(S_B)]^{1/2} \geq S_d; \quad (4.25)$$

$$U_{\Delta,p} = \bar{U}_{\Delta} + \beta [D(U_{\Delta})]^{1/2} \geq U_{\Delta,d}. \quad (4.26)$$

Если законы распределения параметров режимов в сложной схеме аппроксимированы нормальными законами, то значение β обычно принимается равным 3 (известное в теории вероятностей правило «трех сигм»). При этом вероятность превышения расчетного значения S_p и $U_{\Delta,d}$ равна 0,00135, при других законах эта вероятность будет другой.

Следует отметить, что в общем случае величина β выбирается из условия

$$\int_{x+\beta\sigma_x}^{\infty} p(x) dx = \gamma, \quad (4.27)$$

где $p(x)$ — закон распределения параметра режима; x и σ_x — соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение параметра режима; γ — заданная вероятность превышения параметра режима (здесь она аналогична уровню значимости статистического результата).

После определения максимальных значений разности из условий (4.25) и (4.26) $S_{p,i} - S_{d,i} = \Delta S_i$ и $U_{\Delta,p,i} - U_{\Delta,d,i} = \delta U_{\Delta,i}$, т. е. выявления наиболее загруженной ветви i и узла с наиболее низким напряжением j , оценивают вероятностные характеристики отключений мощности в узлах по условиям существования режима при выбранных вероятностях γ . При этом используются линейные операторы (4.19) и (4.20), а вероятностные характеристики режимов в узлах пересчитываются по формулам, аналогичным (4.21) — (4.24), но с заменой оператора C на K , оператора Z_A на A . Для i -й ветви приближенно можно считать:

$$\Delta \bar{S}_i = \bar{S}_i \int_{S_{d,i}}^{\infty} p(S_i) dS_i; \quad (4.28)$$

$$\sqrt{D(\Delta S_i)} = \Delta \bar{S}_i \sqrt{D(S_i)} / \bar{S}_i. \quad (4.29)$$

Определяются новые значения вероятностных характеристик нагрузок узлов. После отключения мощностей в узлах

$$\bar{S}_{y,i} = \bar{S}_y - \Delta \bar{S}_i; \quad (4.30)$$

$$D(S_{y,i}) = D(S_y) + D(\Delta S_y) - 2K(S_y \Delta S_y), \quad (4.31)$$

где $K(S_y \Delta S_y)$ — корреляционный момент связи между случайными величинами S_y и ΔS_y , вычисляется по исходным статистическим характеристикам нагрузок узлов и обобщенным параметрам схем.

Снова вычисляются вероятностные характеристики параметров режимов по (4.21) — (4.24) с проверкой по условиям (2.25) — (4.26) и определяются характеристики отключаемой мощности в узлах по наиболее загружен-

ной ветви и наиболее низкому напряжению в узле. И так до тех пор, пока все параметры режимов не будут удовлетворять условиям вероятностного существования режима в рассматриваемом состоянии системы.

Недоотпуск электроэнергии $\Delta W_{i,1}$, обусловленный ограничениями пропускных способностей элементов схемы, или $\Delta W_{\mu,2}$, обусловленный недопустимыми потерями напряжения до узлов в μ -м состоянии системы вычисляется по формулам

$$\Delta W_{i,1} = T \sum_{k=1}^y \Delta \bar{S}_{1,k} \cos \varphi_k Q_{\mu}; \quad (4.32)$$

$$\Delta W_{\mu,2} = T \sum_{k=1}^y \Delta \bar{S}_{2,k} \cos \varphi_k Q_{\mu}, \quad (4.33)$$

где $\Delta \bar{S}_{1,k}$, $\Delta \bar{S}_{2,k}$ — отключаемая мощность (математическое ожидание) в узле нагрузки k по условию соответственно перегрузки ветвей и недопустимого уровня напряжения узлов; y — число узлов в схеме замещения системы; Q_{μ} — вероятность μ -го состояния; T — интервал времени, для которого выполняется расчет и получены все вероятностные характеристики.

Затем определяется суммарный недоотпуск энергии по всем состояниям с одним и двумя отключенными элементами.

Количество вычислений можно сократить, если воспользоваться нижней оценкой значения недоотпущенной потребителям энергии. В данном случае вероятностные характеристики отключаемой мощности не определяются и недоотпуск энергии, например, при μ -м состоянии системы и ограничении пропускной способности i -й ветви будет равен:

$$\Delta W_{i,1} = \gamma_i T Q_{\mu} \bar{S}_i \cos \varphi_i, \quad (4.34)$$

где

$$\gamma_i = \int_{S_{д,i}}^{\infty} p(S_i) dS_i. \quad (4.35)$$

В частности, при нормальном законе распределения нагрузки

$$\gamma_i = 1 - \Phi \left(\frac{S_{д,i} - \bar{S}_i}{\sigma_{S,i}} \right), \quad (4.36)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа, значение которой определяется по таблицам.

Аналогично рассчитывается недоотпуск электроэнергии при всех других состояниях системы.

В настоящее время метод анализа вероятностей состояния системы является основным, он позволяет в оценках надежности отразить особенности различных режимов системы. Однако расчеты, выполненные этим методом, отличаются исключительной трудоемкостью. В ряде случаев количество расчетов можно несколько сократить, исключив из рассмотрения состояния с малоагруженными элементами, отказы которых незначительно влияют на режимы системы.

Иногда при расчетах надежности систем электропитания не надо учитывать ограничения пропускных способностей элементов, а важно лишь оценить структурную надежность схемы относительно каждого узла нагрузки. В этом случае применяется другая группа методов, основанная на использовании структурного анализа сложных схем и формуле полной вероятности.

4.4. Метод с использованием формулы полной вероятности

Этот метод позволяет с помощью известной из теории вероятностей формулы полной вероятности представить сложную схему в виде эквивалентной последовательно-параллельной. Рассмотрим основную идею этого способа на примере конкретной схемы без учета преднамеренных отключений элементов.

Формула полной вероятности для определения надежной работы схемы интерпретируется следующим образом. Вероятность любого события (например, вероятность работы системы относительно узла) вычисляется как сумма произведений вероятностей несовместимых гипотез (в качестве гипотезы рассматриваются либо работа, либо отказ любого элемента) и вероятности события (т. е. работы оставшейся части цепи) при этой гипотезе.

Применяя формулу полной вероятности к расчету вероятности безотказной работы любой схемы, можно сформулировать так называемую теорему разложения на множители: надежность цепи избыточностью равна произведению вероятности безотказной ра-

боты i -го элемента цепи на вероятность безотказной работы оставшейся цепи (места подключения i -го элемента замкнуты накоротко) плюс произведение вероятности отказа того же i -го элемента на вероятность безотказной работы оставшейся части цепи (места подключения элемента разомкнуты), т. е. для выделенного в схеме элемента рассматриваются две независимые гипотезы.

Покажем на примере мостиковой схемы (см. рис. 4.1) применение теоремы разложения, а следовательно, и формулы полной вероятности для определения показателей надежности сложных схем. Отказы узловых пунктов не учитываются.

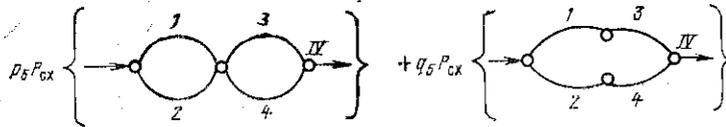


Рис. 4.2. Диаграмма, иллюстрирующая применение теоремы разложения для расчета надежности сложных схем.

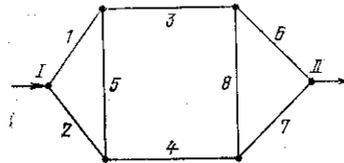


Рис. 4.3. Расчетная схема (типа «двойной мостик»).

В качестве такого элемента выбираем элемент 5. Тогда, применяя теорему разложения, нетрудно свести мостиковую схему к сумме двух цепей: последовательно-параллельной и параллельно-последовательной (рис. 4.2), методы расчета которых хорошо разработаны. Вероятность безотказной работы этой схемы относительно узла В

$$P_c = P_5 \{ (1 - q_1 q_2) (1 - q_3 q_4) \} + q_5 \{ [1 - (q_1 + q_3 - q_1 q_3) (q_2 + q_4 - q_2 q_4)] \},$$

где $(1 - q_1 q_2) (1 - q_3 q_4)$ — вероятность безотказной работы схемы при первой гипотезе — безотказной работе элемента 5; P_5 — вероятность первой гипотезы; q_5 — вероятность второй гипотезы.

Формула полной вероятности и основанная на ней теорема разложения играют большую роль в анализе надежности сложных схем, поскольку позволяют свести сложную схему к совокупности элементарных, причем в сложной схеме эту теорему приходится применять многократно.

Метод оценки надежности, основанный на формуле полной вероятности, достаточно удобен, прост и нагляден при расчетах без применения ЭВМ несложных схем с небольшим числом ветвей и узлов. Для сложных схем реализации этого метода осложняется выбором элементов, относительно которых производится разложение.

Пример 4.2. Определить вероятность безотказной работы схемы типа «двойной мостик», приведенной на рис. 4.3, относительно узла II без учета преднамеренных отключений элементов, если заданы средние вероятности отказов состояний элементов q_1, q_2, \dots, q_8 . Отказы узловых пунктов не учитываются. Предполагается, что элементы схемы независимы в смысле вероятности отказов. Пропускные способности элементов не ограничены.

Решение. Применяя теорему разложения относительно элемента 5, определяем вероятность безотказной работы оставшейся части схемы, содержащей элементы 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8. Для оценки безотказной работы этой оставшейся части схемы в свою очередь применяем теорему разложения относительно элемента 8:

$$P_c = P_5 \{ P_8 (1 - q_1 q_2) (1 - q_3 q_4) (1 - q_6 q_7) + q_8 (1 - q_1 q_2) [1 - (q_3 + q_6 - q_3 q_6) (q_4 + q_7 - q_4 q_7)] \} + q_5 \{ P_8 [1 - (q_1 + q_3 - q_1 q_3) (q_2 + q_4 - q_2 q_4)] (1 - q_6 q_7) + q_8 [1 - (q_1 + q_3 + q_6 - q_1 q_3 - q_1 q_6 - q_3 q_6 + q_1 q_3 q_6) \times (q_2 + q_4 + q_7 - q_2 q_4 - q_2 q_7 - q_4 q_7 + q_2 q_4 q_7)] \}.$$

4.5. Методы структурного анализа сложных схем и использование их для оценки надежности

Применение методов структурного анализа для исследования схем электрических систем и систем электроснабжения позволяет изучать их в общем виде. При расчете показателей надежности с помощью структурных схем анализируются не все возможные состояния системы, а только состояния безотказной работы того

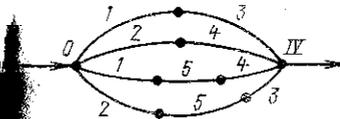


Рис. 4.4. Минимальные пути для схемы типа «мостик».

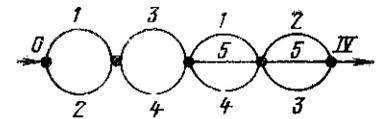


Рис. 4.5. Минимальные сечения для схемы типа «мостик».

минимального набора элементов, которые обеспечивают нормальное функционирование схемы (передачу энергии) от источника питания до узла нагрузки (минимальные пути) или отказ того минимального набора элементов, отказ которого любым из наборов приводит к отказу системы относительно рассматриваемого узла (минимальные сечения).

Из определения минимальных путей и сечений следует, что предполагается неограниченная пропускная способность элементов схемы относительно каждого рассматриваемого узла нагрузки. Например, для схемы, приведенной на рис. 4.1, без учета надежности узловых пунктов минимальными путями относительно узла IV

являются [1, 3], [2, 4], [1, 5, 4], [2, 5, 3] (рис. 4.4), а минимальными сечениями — наборы элементов [1, 2], [3, 4], [1, 5, 4], [2, 5, 3] (рис. 4.5).

С помощью минимальных путей или сечений, полученных в результате структурного анализа схемы, можно определить вероятность обесточения узла нагрузки. Рассмотрим основные положения и определения, используемые в структурном анализе.

Графом $\Gamma (V, H)$ называются два любых множества V и H , в которых каждому элементу из множества H соответствуют два элемента из множества V . Элементы V и H называются соответственно вершинами и ребрами графа. Вершины, соответствующие ребру, называются концами ребра. Ребро называется ориентированным, если один из его концов рассматривается как начало, а другой как окончание. На схеме ориентированное ребро изображается как отрезок со стрелкой. Граф, в котором отдельные ребра ориентированы, называется частично-ориентированным, граф, где все ребра ориентированы, называется ориентированным, граф без ориентации ребер называется неориентированным. Изучение структуры той или иной схемы равносильно изучению структуры графов. Граф называется планарным, если он может быть изображен на плоскости без пересечений ребер в точках, не являющихся вершинами графа, в противном случае граф является непланарным. Для систем электроснабжения свойство планарности, как правило, выполняется, так как переходы линий друг над другом встречаются относительно редко. Анализ связей при расчетах надежности заключается прежде всего в нахождении и оценке путей между его вершинами, т. е. между источником питания и узлами нагрузки. Путем графа называется такая последовательность ребер, в которой конец каждого предыдущего ребра совпадает с началом последующего. Однороберный путь называется непосредственным, многореберный — транзитным.

Существует много способов определения минимальных путей графа. Эти способы разделяются на аналитические и логико-цифровые (последние обычно реализуются только на ЭВМ) и основаны на аналитическом представлении схемы в виде матрицы непосредственных путей. По путям графа можно также определить и минимальные сечения.

Чтобы составить структурную схему (граф сети), необходимо предварительно преобразовать схему электрической сети в расчетную схему надежности, т. е. схему функционирования сети. Последовательно соединенные элементы между двумя узлами целесообразно заменить одним эквивалентным, параметры которого определяются по известным формулам. Аналогичный прием применяется для элементов, параллельно соединенных между двумя узлами.

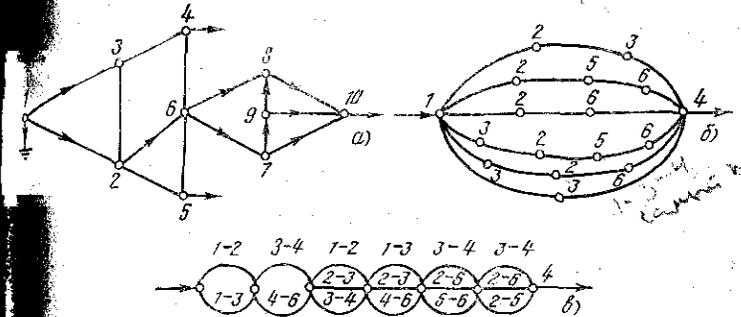


Рис. 4.6. Расчетная схема системы электроснабжения.

а — расчетная схема надежности; б — минимальные пути относительно п. 4 левой части схемы и матрица непосредственных путей A ; в — минимальные сечения относительно п. 4 левой части схемы.

После этого элементам расчетной схемы ставятся в соответствие ребра графа, а пунктам физического соединения (сборным шинам, трехобмоточным трансформаторам, местам подключения ответвлений к магистральным линиям) — вершины графа (рис. 4.6). Надежность пунктов физического соединения элементов и имитационной аппаратуры может учитываться введением в расчетную схему элементов соответственно логически функционирования их в электрической системе (см. рис. 4.8). Кроме указанных вершин в графе сети будет еще одна особая вершина — вершина источников, иногда называемая вершиной «истока». Источник питания, если вероятность его безотказной работы отличается от 1, рассматривается расчетным элементом надежности. Все свободные концы ребер элементов таких источников питания соединяются в вершину — «исток».

Обычно граф сети с учетом возможных направлений потоков мощности в элементах является частично-ориентированным. Направленность графа сети относительно узлов нагрузки может быть различной. Поэтому

1007 Принят в печать 1983г.

для оценки надежности системы относительно различных узлов нагрузки следует каждый раз проверять ориентировку ребер исходного графа.

Иногда (например, если необходимо аналитически выявить группы доминирующих элементов, определяющих в основном надежность электроснабжения узла) возникает необходимость построения двойственного графа, т. е. графа путей между вершинами, соответствующих сечениям в исходном графе. Применение этого способа позволяет упростить расчеты.

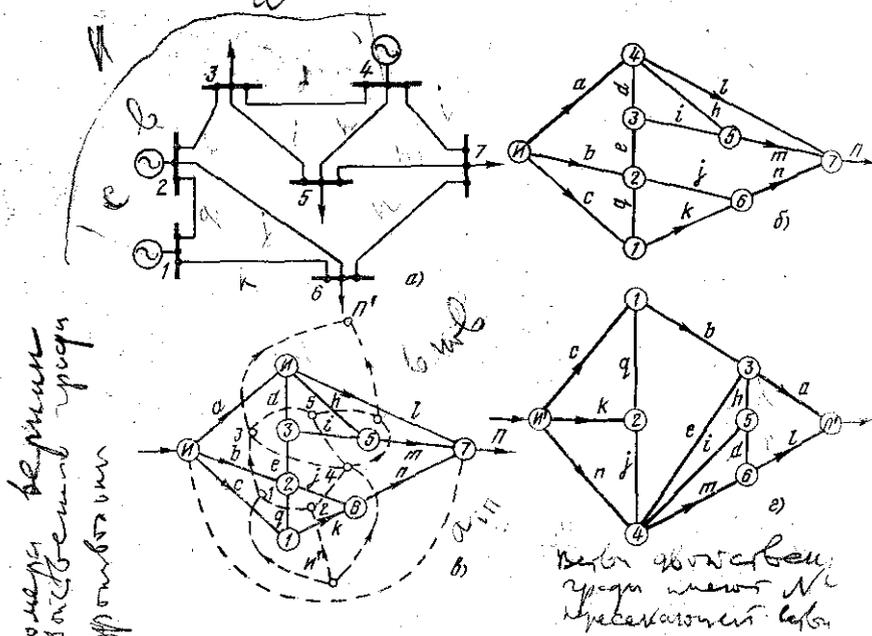


Рис. 4.7. Диаграмма, поясняющая методику построения двойственного графа.

а — схема электроснабжения; б — расчетный граф по надежности; в — схема построения двойственного графа; г — двойственный граф.

Для построения двойственного графа (рис. 4.7, а, б) в условном графе проводится условное ребро между вершиной источников питания и вершиной узла нагрузки, т. е. ребро $a_{и,п}$, которое вместе с другими ребрами разделяет плоскость на области, не содержащие ни вершин, ни других ребер (одна из областей является внешней). Поместив в каждую область (в том числе и во внешнюю)

по одной вершине и соединив полученные новые вершины ребрами, которые пересекают соответствующие ребра исходного графа (рис. 4.7, в), получим граф, двойственный исходному (рис. 4.7, г). При этом условная дуга $a_{и,п}$ должна остаться непересекаемой, а разделенные вершины будут соответственно вершинами источников $И'$ и потребителя $П'$ двойственного графа.

Если исходный граф направленный, то ребра двойственного графа ориентируются, если направление ребра исходного графа $a_{i,j}$ совпадает с направлением обхода по часовой стрелке двойственного ребра $a'_{i,j}$, принимается направление от узла внутри области, в противном случае — к узлу.

Двойственный граф исходного представлен на рис. 4.7, в. Отметим, что в задачах надежности один и тот же исходный граф может иметь различные двойственные графы в зависимости от того, относительно какого узла потребителя рассматривается надежность системы электроснабжения (сечения относительно разных узлов различные). Каждому сечению, разделяющему узлы И и П в исходном графе, соответствует некоторый путь из И' в П' в двойственном графе. Построение и составление исходной схемы в виде графа дают возможность упростить процесс исследования надежности системы путем применения алгебраической методики вычисления.

В качестве аналитического образа графа, как исходного, так и двойственного, используется матрица непосредственных путей, которая, например, для исходного графа строится следующим образом.

1. Нумеруются вершины исходного графа. Для удобства расчетов нумерацию рекомендуется начинать с вершины источников. Порядок матрицы равен числу вершин в исходном графе.

2. Строки и столбцы матрицы обозначаются номерами вершин графа.

3. Элементу, принадлежащему i -й строке и j -му столбцу матрицы A , присваивается некоторое число (единица или значение вероятности надежной работы элемента), если из вершины i к вершине j имеется непосредственный путь; если пути нет — ставится нуль. Если указанному элементу присваивается значение 1, то такую матрицу называют матрицей смежности.

Используя матрицу непосредственных путей A в качестве аналитического образа расчетной схемы по надежности, можно определить минимальные пути и минимальные сечения в сложной схеме.

Рассмотрим основные методы определения минимальных путей.

Квазиминорный метод определения минимальных путей основывается на использовании определителей особого рода — квазиминоров (беззнаковых определителей):

$$\alpha_{k,l} = |a_{i,j} \rightarrow k,l| \text{ при } k \neq l,$$

где $|a_{i,j} \rightarrow k,l|_{i,k}$ ($k \neq l$) — квазиминор элемента $a_{i,k}$ в матрице A ; знак $|a_{i,j} \rightarrow k,l|$ является символом квазиминора, а знак $a_{i,j} \rightarrow k,l$ указывает на матрицу с вычеркнутыми i -й строкой и k -м столбцом, которая вписывается внутрь символа квазиминора.

Из теории графов известно, что

$$|a_{i,j} \rightarrow k,l|_{k,l} = \sum_{m \neq n} a_{m,n} A_{m,n}^{(l)},$$

где $A_{m,n}^{(l)} = |a_{i,j} \rightarrow m,n \rightarrow l,k|_{a_{i,l}}$ при $m \neq l$; $A_{m,n}^{(l)} = 1$ при $m = l$.

Вычисление исходного квазиминора сводится к разложению его на квазиминоры меньшего порядка, процесс вычисления его сходен с процессом вычисления обычных определителей. Сначала в исходной матрице непосредственных путей вычеркиваются столбец с номером, соответствующим номеру вершины, от которой начинается путь, и строка с номером вершины, в которой путь заканчивается. Полученный квазиминор определяет число и конфигурацию путей из вершины источника в вершину узла нагрузки. Для получения их явного выражения необходимо продолжать разложение до тех пор, пока оно не превратится в явное алгебраическое выражение, каждый член которого представляет собой аналитическое выражение пути. Процесс разложения начинается с номера строки, соответствующей номеру исходной вершины, и производится по элементам строки. Разложение последующих, меньших квазиминоров производится по строке с номером, соответствующим номеру вершины, в которой ребро, участвовавшее ранее в разложении, имеет конец.

Например, для рассматриваемого квазиминора (см. рис. 4.6,а) число путей из вершины 1 в вершину 4 (см. рис. 4.6,б)

$$\alpha_{14} = a_{12}a_{23}a_{34} + a_{12}a_{25}a_{56}a_{64} + a_{12}a_{26}a_{64} + a_{13}a_{32}a_{25}a_{56}a_{64} + a_{13}a_{32}a_{26}a_{64} + a_{13}a_{34}.$$

Квазиминорный метод определения путей достаточно нагляден и прост при расчете вручную, однако он сильно усложняется уже при незначительном увеличении порядка матрицы непосредственных путей. Поэтому при расчетах сложных схем с порядком матрицы непосредственных путей более 8—10, если затруднено разбиение на подсхемы, следует применять логико-цифровые методы получения путей.

Логико-цифровые методы определения минимальных путей предназначены для выполнения расчетов на ЭВМ.

Метод разветвления путей. Сначала определяется произвольный путь, соединяющий вершину нагрузки с вершиной источника питания. Затем, начиная с вершины, непосредственно находящейся перед концом этого пути, в направлении к вершине источника питания определяются все возможные ответвления от этого пути и вновь образованных путей, из этих ответвлений формируются новые пути. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут использованы все возможные ответвления.

Исходной величиной для расчета является квадратная матрица непосредственных путей A . В программе при расчете на ЭВМ кроме матрицы непосредственных путей используются также рабочая матрица $M[n, n]$ и $(n-1)$ фиксирующая матрица $M^{(i)}[n, n]$. Фиксирующими матрицами обеспечивается минимальность искомого пути, т. е. соблюдается условие, чтобы в искомом пути ни одна из вершин не встречалась дважды. Этот алгоритм ввиду поэлементного сравнения рабочих массивов на каждом шаге построения путей имеет значительное время счета и пригоден для схем с числом узлов не более 15—20.

Использование матрицы непосредственных путей. В качестве исходной матрицы в этом методе используется уплотненная матрица непосредственных путей P , в i -й строке которой записываются номера всех вершин, инцидентных i -й вершине, кроме тех, которые соединены с i -й вершиной ребром, оканчивающимся в ней. Кроме того, к данной матрице добавляется дополнительный нулевой столбец, который служит для передачи управления в программе. Поэтому матрица P имеет размерность $(n \times s)$, где s — максимальная степень захода вершин графа плюс единица.

Степенью захода вершины графа называется число ребер, оканчивающихся в этой вершине. Для графов с различными степенями захода вершин неиспользованные места в матрице P заполняются нулями. Для схемы, приведенной на рис. 4.8, матрица P

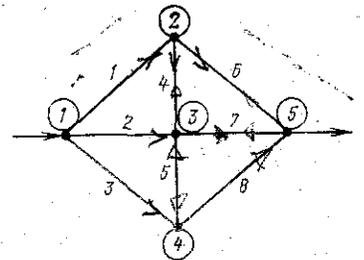


Рис. 4.8. Расчетная схема для иллюстрации логико-цифрового метода получения минимальных путей.

имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Кроме того, используется матрица границ ребер графа B размером $(m \times 2)$, где m — число ребер графа. В i -й строке данной матрицы записываются номера вершин, являющихся граничными вершинами i -го ребра, причем больший номер записывается во втором столбце, а меньший — в первом.

Для графа, приведенного на рис. 4.8, матрица B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Алгоритм определения минимальных путей от вершины источника питания до вершины узла нагрузки заключается в следующем. Вначале в первый столбец рабочей матрицы R записываются значения 1 и 0. Размерность матрицы R определяется размерностью матрицы P . Затем в зависимости от постоянного конечного элемента первой строки заполнение матрицы R осуществляется следующим образом.

1. Если конечный элемент оказывается равным нулю, то предыдущий столбец сдвигается на одну строку вверх и анализируется элемент в первой строке этого столбца.

2. Если элемент в первой строке встретился второй раз, то последний столбец сдвигается на одну строку вверх и анализируется элемент в первой строке этого столбца.

3. Если в первой строке появился номер элемента вершины, относительно которой определяются пути, то считывается первая строка, т. е. те вершины, через ко-

торые проходит путь. Затем столбец с конечным элементом сдвигается на одну строку вверх и снова анализируется элемент первой строки этого столбца.

4. Если не получился ни один из указанных в п. 1, 2, 3 результатов, то в следующий столбец рабочей матрицы R записывается строка из матрицы P с номером, равным конечному элементу.

Признаком окончания процесса формирования минимальных путей является наличие нулевого элемента в первой строке первого столбца рабочей матрицы. Для получения путей в виде последовательности вершин необходимо воспользоваться матрицей B для представления их последовательностью ребер.

Логика формирования минимальных путей от источника питания до узла нагрузки B в схеме, приведенной на рис. 4.8, по изложенным правилам представлена в виде заполнения рабочей матрицы R (цифры над стрелками указывают номер применяемого правила):

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 2 & \\ \hline 0 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ \hline & & 4 & 0 & 4 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \end{matrix} \\ \\ \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 5 & \\ \hline 0 & 3 & 5 & 4 & \\ \hline 4 & 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & & & \end{array} \right| \begin{matrix} 3 & [1235] & 3 & \\ 4 & & & \end{matrix} \\ \\ \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & \\ \hline 4 & 0 & & 0 & & \\ \hline 4 & 0 & & & & \end{array} \right| \begin{matrix} 3 & [12345] & 3 & \\ 4 & & & \end{matrix} \\ \\ \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & \\ \hline 4 & 0 & & 1 & & \\ \hline 0 & 0 & & 4 & & \end{array} \right| \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & \\ 3 & [125] & 3 & & \end{matrix} \\ \\ \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 & & \\ \hline 4 & & & & & \\ \hline 0 & & & & & \end{array} \right| \begin{matrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \\ 4 & & & & & \end{matrix} \\ \\ \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 4 & 5 & 0 & & \\ \hline 0 & 4 & & & & \\ \hline & & 5 & & & \end{array} \right| \begin{matrix} 4 & & & & & \\ 4 & & & & & \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
4 \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & & & \rightarrow \\ & 0 & 0 & & & \\ & & & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 5 & 0 & \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & & & \rightarrow \\ & 0 & & & & \\ & & & & & \end{array} \right| 3 [1325] 1 \rightarrow \\
1 \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| 3 [135] 3 \rightarrow 4 \rightarrow \\
4 \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & 3 & 0 & \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 & 0 & \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| 3 [1345] 3 \rightarrow \\
3 \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ & & & & & \end{array} \right| 4 \rightarrow \\
4 \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| 2 \rightarrow \\
2 \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & & & \rightarrow \\ & 0 & 0 & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & & & & \rightarrow \\ & 0 & 0 & & & \end{array} \right| 3 [14325] 3 \rightarrow \\
1 \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 5 & 0 & \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & & & & \rightarrow \\ & 0 & & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & \\ 0 & & & & & 2 \\ 0 & & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| 3 [1435] 3 \rightarrow \\
2 \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 5 & 0 & & 1 \\ 0 & & & & & \rightarrow \\ & 0 & & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 \\ 0 & & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| 3 [145] 3 \rightarrow \\
3 \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & \rightarrow \\ & & & & & \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & \end{array} \right|
\end{array}$$

Таким образом, в результате выполнения указанных логико-цифровых операций получены следующие пути: $\Pi_1 - [1,2,3,5]$ или $[a_{12}a_{23}a_{35}]$; $\Pi_2 - [1,2,3,4,5]$ или $[a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}]$; $\Pi_3 - [1,2,5]$ или $[a_{12}a_{25}]$; $\Pi_4 - [1,3,2,5]$ или $[a_{13}a_{32}a_{25}]$; $\Pi_5 - [1,3,5]$ или $[a_{13}a_{35}]$; $\Pi_6 - [1,3,4,5]$

или $[a_{13}a_{34}a_{45}]$; $\Pi_7 - [1,4,3,2,5]$ или $[a_{14}a_{43}a_{32}a_{25}]$; $\Pi_8 - [1,4,3,5]$ или $[a_{14}a_{43}a_{35}]$; $\Pi_9 - [1,4,5]$ или $[a_{14}a_{45}]$.

Применение матрицы P вместо матрицы непосредственных путей значительно экономит оперативную память ЭВМ и облегчает ввод исходных данных, однако в алгоритме используется принцип перебора всех ненулевых элементов первой строки рабочей матрицы R при каждом шаге изменения.

Применение логико-цифровых методов получения минимальных путей, один из которых был изложен выше, позволяет рассчитывать сложные системы. При этом возникает другая задача — ограничить количество путей, общее число которых может достигать десятков и сотен тысяч, выявляя основные пути таким образом, чтобы погрешность, обусловленная неучетом остальных путей, не выходила за допустимые пределы. Многие пути можно не учитывать, так как обычно сечениями с числом элементов более трех можно пренебречь.

Для сложных систем возникает задача определения основного пути, так как потребитель в замкнутой схеме при нормальном режиме работы получает электроэнергию по элементам, входящим во многие пути. Основными должны быть путь или несколько путей, обладающих максимальной надежностью и пропускающих большую часть мощности потребителя. В качестве такого можно использовать путь с максимальным значением величины:

$$H = \prod_{i=1}^l p_i S_i = \prod_{i=1}^l H_i, \quad (4.37)$$

где p_i — вероятность безотказной работы i -го участка пути, по которому протекает доля мощности нагрузки рассматриваемого узла $S_i = S_i/S_n$, которая определяется по матрице коэффициентов распределения для нормального режима работы схемы; l — общее число участков (ребер) пути; значение H_i пропорционально количеству электроэнергии, которая будет передана потребителю за время нормальной работы i -го участка пути.

После определения по указанному критерию основного пути целесообразно определить пути, близкие по значимости к основному. Целесообразно использовать следующий принцип. Присвоим всем вершинам основного пути номер 1 и назовем этот путь путем первого порядка. В случае отказа любого из элементов этого пути

при наличии к узлу многих путей электроснабжение узла может быть осуществлено по другому пути, в который входит другое (другие) ребро графа. Назовем вновь образованный путь путем второго порядка. Путь первого порядка единственный, а пути второго порядка образуют некоторое множество, число элементов которого зависит от возможных ответвлений от пути первого порядка. Всем вершинам путей второго порядка присваивается номер 2. Аналогично при отказе элементов путей второго порядка можно образовать пути третьего порядка, а при отказе элементов последних — пути четвертого порядка и т. д. Последовательность наращивания путей обусловлена структурой резервирования в системе. Если пренебречь вероятностью одновременного отказа более трех элементов в системе как маловероятной, то при наличии хотя бы одного пути четвертого порядка перерыва электроснабжения не возникает; если же такой путь отсутствует, то при отказе трех элементов (путей первого, второго и третьего порядков) возникает перерыв электроснабжения потребителя. Поэтому при введении ограничений в расчетах по числу одновременно отказываемых элементов достаточно учитывать лишь пути до четвертого порядка включительно. Для учета отказа не более двух элементов в системе допустим учет путей до третьего порядка включительно. Это резко сокращает число анализируемых путей в сложных схемах.

Перейдем к рассмотрению основных методов определения минимальных сечений. Существует несколько способов получения минимальных сечений расчетного графа относительно рассматриваемой вершины или группы вершин (узлов нагрузки).

Из множества всех сечений графа можно выделить систему независимых сечений, которые называются базисными сечениями S_b . Все аналитические образы направленного графа — матрицы инцидентий M и независимых контуров N , путей P , базисных сечений S_b — соответствуют одному и тому же графу, поэтому можно установить вполне однозначное соответствие между всеми этими матрицами и в результате линейных преобразований получать из одних комбинаций матриц другие. Ниже рассмотрено два основных способа получения минимальных сечений: с использованием первой матрицы инцидентий M и матрицы путей P .

Определение минимальных сечений по первой матрице инцидентий M . Первая матрица инцидентий расчетного графа в этом мето-

де составляется для неориентированного графа независимо от того, является ли он ориентированным или нет.

Строки матрицы M по существу являются сечениями, отсекающими соответствующий узел от остальной части схемы. Принцип построения матрицы M обуславливает то обстоятельство, что эти сечения являются независимыми и могут служить базисом сечений. В результате линейной комбинации таких сечений, т. е. строк матрицы M , могут быть получены все остальные сечения рассматриваемого узла (или группы узлов) относительно вершины источников питания.

При формировании сечений описываемым способом они получаются в результате сложения строки матрицы M , соответствующей вершине источника питания, со всевозможными сочетаниями остальных строк матрицы M , кроме строки, соответствующей вершине, относительно которой определяется совокупность сечений.

Сложение строки, соответствующей источнику питания, со строкой, соответствующей узлу, относительно которого производится определение сечений, дает сразу два сечения, «отсекающих» эти две вершины от остальной схемы.

Если в результате арифметического сложения строк матрицы M получаются элементы больше единицы, то этим элементам присваиваются нулевые значения. При формировании сечений необходимо исключить неминимальные сечения, которые образуются при сложении строк, соответствующих несмежным вершинам.

Рассмотрим в качестве примера получение минимальных сечений для расчетного графа (рис. 4.8) относительно вершины 5. Первая матрица инцидентий этого графа (без учета ориентации ребер)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Складываем арифметически строки 1 и 5 (если результат получается больше 1, то присваиваем этому значению нуль):

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

В результате получаем два сечения S_1 и S_2 , состоящих из ребер $S_1 - [1, 2, 3]$; $S_2 - [6, 7, 8]$. Аналогично выполняем последовательно сложения строк $(1, 2)$; $(1, 3)$; $(1, 4)$, $(1, 2, 3)$; $(1, 2, 4)$; $(1, 3, 4)$; $(1, 2, 3, 4)$. Получаем соответственно сечения $S_3 - [2, 3, 4, 6]$; $S_4 - [1, 2, 5, 8]$; $S_5 - [3, 5, 6, 7]$; $S_6 - [2, 4, 5, 6, 8]$; $S_7 - [1, 4, 7, 8]$.

Такой способ получения минимальных сечений по существу является одной из реализаций всевозможных разбиений множества вершин графа на два подмножества, в одном из которых обязательно есть вершины источника питания, а в другом — вершины нагрузки. Ребра, инцидентные вершинам, принадлежащим различным подмножествам, образуют сечение.

Общее число сочетаний N строк матрицы M , которое необходимо проанализировать, чтобы получить все сечения графа относительно рассматриваемой вершины, равно:

$$N = \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k = 2^{n-2},$$

где n — число вершины расчетного графа.

Применение этого метода для расчета схем с числом вершин $n \geq 15-20$ даже с применением ЭВМ становится неэффективным ввиду резкого увеличения числа анализируемых сочетаний.

Определение минимальных сечений по матрице минимальных путей. Сечения формируются по матрице минимальных путей исходя из следующих соображений. Если элемент входит во все пути, то он является одноэлементным сечением, если хотя бы один из двух элементов i и j поочередно входит во все пути и элементы i и j не являются одноэлементными сечениями, то они образуют двухэлементное сечение. Аналогичные рассуждения можно провести относительно трех элементов, четырех и т. д. Поэтому для формирования минимальных сечений целесообразно пути представить в виде так называемой матрицы путей Π , столбцы которой соответствуют элементам схемы, строки — путям. Элементам этой матрицы присваивается значение 1, если элемент входит в соответствующий путь, и 0, если элемент не входит в путь. Например, для схемы, приведенной на рис. 4.6,

$$\Pi = \begin{matrix} & 1-2 & 1-3 & 2-3 & 3-4 & 2-5 & 2-6 & 5-6 & 4-6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

По матрице путей можно определить все сечения в схеме относительно рассматриваемого узла нагрузки, анализируя сочетания столбцов матрицы Π . Сечения рассматриваются в порядке возрастания числа элементов, входящих в них (одноэлементные, двухэлементные, трехэлементные и т. д.).

Если для некоторого элемента схемы μ составляющие вектор-столбца матрицы $\Pi_{\mu, i} = 1$ для всех $i = 1, 2,$

$3, \dots, k$, где k — число путей (в нашем примере $k=6$), то элемент μ является одноэлементным сечением. Если в вектор-столбцах матрицы Π имеется хотя бы одна составляющая, равная нулю, то в схеме не существует одноэлементных сечений и можно сразу перейти к отысканию двухэлементных. В рассматриваемом примере из анализа матрицы Π видно, что одноэлементных сечений нет.

После решения вопроса об одноэлементных сечениях определяются двухэлементные сечения, т. е. анализируются сочетания по два вектор-столбца, соответствующие двум элементам схемы μ и ν . Элементы μ и ν образуют двухэлементное сечение, если логическая сумма $\Pi_{\mu, i} \vee \Pi_{\nu, i} = 1$, где $i = 1, 2, 3, \dots, k$, \vee — знак логической суммы — дизъюнкция (читается так: $\Pi_{\mu, i}$ или $\Pi_{\nu, i}$). Значение истинности составляющих $\Pi_{\mu, i}$ или $\Pi_{\nu, i}$ определяется по следующей таблице:

$$\begin{aligned} 0 \vee 0 &= 0 \\ 0 \vee 1 &= 1 \\ 1 \vee 0 &= 1 \\ 1 \vee 1 &= 1 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Применяя это правило к рассматриваемому примеру, видим, что только два сочетания удовлетворяют условию, когда логическая сумма элементов столбцов равна 1. Такими сочетаниями являются первый и второй (элементы 1—2 и 1—3), четвертый и восьмой (элементы 3—4 и 4—6) вектор-столбцы:

$$\begin{matrix} 1-2 & 1-3 & & 3-4 & 4-6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} & = & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & ; & \begin{matrix} 3-4 & 4-6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} & = & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

В результате в этой схеме определяются два двухэлементных сечения $[1-2, 1-3]$ и $[3-4, 4-6]$. Аналогично вычисляются трехэлементные сечения, при этом анализируются сочетания из трех вектор-столбцов и определяется их логическая сумма, и, если она равна

единице, это сочетание элементов образует трехэлементное сечение.

Например, сумма первого, третьего и четвертого вектор-столбцов, соответствующих элементам 1—2, 2—3, 3—4, равна:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

В результате такого анализа получаются четыре трехэлементных сечения [1—2, 2—3, 3—4]; [1—3, 2—3, 4—6]; [3—4, 2—6, 5—6]; [3—4, 2—6, 2—5] (см. рис. 4.6, в). Этим методом можно определить сечения из четырех и более элементов. Но обычно рассмотрение заканчивается на вычислении двух- или трехэлементных сечений, так как вероятность одновременного отказа двух и более элементов в электрической схеме очень мала.

Для исключения неминимальных сечений при дальнейшем анализе не рассматриваются сочетания, которые уже образовали минимальные сечения в предыдущих комбинациях, например при вычислении трехэлементных сечений не рассматриваются те сечения, в которых уже содержатся элементы 1—2 и 1—3 или 3—4 и 4—6. По изложенным правилам, пренебрегая сечениями, содержащими более трех элементов, можно получить шесть сечений. Этот метод позволяет просто получить сечения, в которые входят узлы схемы.

4.6. Расчет показателей надежности по структурным схемам

После определения минимальных путей и сечений исходная сложная расчетная схема по надежности заменяется эквивалентной относительно узла, последовательно-параллельной — в случае путей (см. рис. 4.6, б) или параллельно-последовательной — в случае сечений (см. рис. 4.6, в).

Такая замена дает возможность использовать известные приемы расчета, в частности применить формулу для суммы вероятностей совместимых событий — безот-

казной работы путей или событий отказа сечений. Но следует иметь в виду, что пути и сечения в общем случае являются зависимыми, так как в них могут входить одни и те же элементы. Эту зависимость необходимо учитывать при определении вероятности надежной работы нескольких путей или вероятности отказа нескольких сечений в формуле для суммы вероятности совместимых событий при условии, что каждый путь может пропустить всю необходимую мощность в узел нагрузки.

Применяя формулу для суммы вероятностей совместимых событий (работы путей) к эквивалентной параллельно-последовательной схеме, получаем для вероятности безотказной работы схемы относительно узла n

$$P\left(\sum_{i=1}^k \Pi_i\right) = \sum_{i=1}^k P(\Pi_i) - \sum_{i,j} P(\Pi_i \Pi_j) + \sum_{i,j,l} P(\Pi_i \Pi_j \Pi_l) - \dots + (-1)^{k-1} P(\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_k), \quad (4.39)$$

где $P(\Pi_i)$ — вероятность безотказной работы i -го пути:

$$P(\Pi_i) = \prod_{j=1}^{m_i} p_{i,j}; \quad (4.40)$$

$p_{i,j}$ — вероятность безотказной работы j -го элемента i -го пути; m_i — число элементов в i -м пути;

$$P(\Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_k) = P(\Pi_1) P(\Pi_2 / \Pi_1) \dots P(\Pi_k / \Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{k-1}) \quad (4.41)$$

— вероятность безотказной работы k путей; $P(\Pi_2 / \Pi_1)$ — условная вероятность безотказной работы второго пути при условии, что первый путь работает безотказно. Эту вероятность можно получить, если в последовательности второго пути места подключения элементов, уже входивших в состав первого пути, будут закорочены, т. е. вероятность их безотказной работы при вычислении условной вероятности принимается равной единице. Например, для схемы, приведенной на рис. 4.6, $P(\Pi_1) = p_{12} p_{23} p_{34}$; $P(\Pi_2 / \Pi_1) = p_{25} p_{56} p_{64}$.

При определении каждой последующей условной вероятности следует учитывать вероятность безотказной работы только тех элементов, которые еще не входили в предыдущие пути. Вероятность безотказной работы элементов, входивших в предыдущие пути, рав-

на 1. Вероятность того, что пути Π_1 и Π_2 работают безотказно, равна $P(\Pi_1\Pi_2) = P(\Pi_1)P(\Pi_2/\Pi_1) = p_{12}p_{23}p_{34}p_{25} \times p_{56}p_{64}$. Распространяя это положение на k путей, можно показать, что

$$P(\Pi_1\Pi_2\Pi_3 \dots \Pi_k) = \prod_{i=1}^r p_i, \quad (4.42)$$

где r — число элементов, входящих в k путей, т. е. эта вероятность равна произведению вероятностей безотказной работы всех элементов, входящих в эти пути, причем каждый элемент учитывается в произведении только один раз, хотя он может участвовать в нескольких путях. Для схемы, приведенной на рис. 4.6,а,

$$P(\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4\Pi_5\Pi_6) = p_{12}p_{13}p_{23}p_{34}p_{25}p_{26}p_{46}p_{56}.$$

При определении вероятности отказа схемы относительно узла нагрузки, когда она заменяется эквивалентной параллельно-последовательной (минимальные сечения), также используется формула суммы вероятностей совместимых событий (отказов сечений). Вероятность отказа схемы относительно узла Π

$$Q_{с.п} = Q\left(\sum_{i=1}^{k_c} C_i\right) = \sum_{i=1}^{k_c} Q(C_i) - \sum_{i,j} Q(C_i C_j) + \sum_{i,j,l} Q(C_i C_j C_l) - \dots (-1)^{k_c-1} Q(C_1 C_2 \dots C_{k_c}), \quad (4.43)$$

где $Q(C_i)$ — вероятность отказа i -го сечения;

$$Q(C_i) = \prod_{j=1}^{m_i} q_{i,j}; \quad (4.44)$$

здесь $q_{i,j}$ — вероятность отказа j -го элемента i -го сечения; m_i — число элементов в i -м сечении;

$$Q(C_1 C_2 \dots C_{k_c}) = Q(C_1)Q(C_2/C_1) \dots Q(C_{k_c}/C_1 C_2 \dots C_{k_c-1}) \quad (4.45)$$

— вероятность отказа k_c сечений; $Q(C_2/C_1)$ — условная вероятность отказа второго сечения при отказе первого сечения.

Эту вероятность можно получить, если в последовательности второго сечения места подключения элементов, уже входивших в состав первого сечения, будут

разорваны, т. е. вероятность их отказа при вычислении условной вероятности принимается равной единице; например, для схемы, приведенной на рис. 4.6,б,

$$Q(C_1) = q_{12}q_{13}; \quad Q(C_3/C_1) = q_{23}q_{34}.$$

При определении каждой последующей условной вероятности следует учитывать вероятность отказа только тех элементов, которые еще не входили в предыдущие сечения. Вероятность отказа элементов, входивших в предыдущие сечения, равна 1; например, вероятность отказа сечений C_1 и C_3 равна:

$$Q(C_1 C_3) = q_{12}q_{13}q_{23}q_{34},$$

соответственно вероятность отказа k_c сечений

$$Q(C_1 C_2 \dots C_{k_c}) = \prod_{i=1}^{r_c} q_i, \quad (4.46)$$

где r_c — число элементов, входящих в k_c сечений, т. е. эта вероятность равна произведению вероятностей отказов всех элементов, входящих в эти сечения, причем каждый элемент учитывается в произведении только один раз. Для схемы, приведенной на рис. 4.6,в,

$$Q(C_1 C_2 \dots C_6) = q_{12}q_{13}q_{23}q_{34}q_{25}q_{26}q_{46}q_{56}.$$

Этим приемом обеспечивается идентичность результатов, полученных при расчете сложных исходных схем эквивалентных структурных. Пренебрежение этим правилом, в частности, в определении вероятности безотказной работы по путям приводит к недопустимо большим погрешностям.

Рассмотрим особенности этих двух способов определения показателей надежности по путям и сечениям. В формуле определения вероятности безотказной работы с использованием путей число слагаемых равно $(2^k - 1)$ и ни одним из слагаемых нельзя пренебречь [см. (4.39)], так как все они являются произведениями множителей, близких к единице. При незначительном усложнении схемы, в особенности если схема многосвязная с большим числом поперечных связей, число путей резко возрастает и расчеты становятся весьма трудоемкими. Метод, использующий представление исходной схемы в виде минимальных сечений относительно узлов

нагрузки, свободен от этого недостатка, так как в большинстве случаев можно ограничиться учетом слагаемых, в которых не более трех сомножителей, т. е. при формировании сечений использовать пути до четвертого порядка включительно. Приближенно можно считать, что вероятность отказа сечений равна сумме их вероятностей отказов

$$Q\left(\sum_{i=1}^{k_c} C_i\right) \approx \sum_{i=1}^{k_c} Q(C_i), \quad (4.47)$$

и в расчет следует вводить сечения с числом элементов не более двух-трех в зависимости от конкретной задачи и необходимой точности расчетов.

Конечный результат — вычисление вероятности отказа системы относительно узла нагрузки или вероятности безотказной работы (т. е. вероятности противоположного события) при представлении схемы в виде минимальных сечений — достигается быстрее и проще, чем методом минимальных путей, однако сам по себе процесс определения сечений более трудоемкий. На существующем этапе развития и применения этих методов в электроэнергетике нецелесообразно противопоставлять один метод другому, так как для схем с протяженной структурой и малым числом поперечных связей определенные преимущества будет иметь метод путей, а для схем с концентрированной структурой и большим числом поперечных связей предпочтителен метод сечений.

В настоящее время при создании схем требования к надежности электроснабжения определяют выбор вариантов схем сети, объемов и способов резервирования. Перебор всех возможных конфигураций схем с целью выбора наилучшей невозможен из-за их большого количества. Поэтому выделение сечений, оказывающих наибольшее влияние на надежность схемы, позволяет, с одной стороны, целенаправленно менять ее структуру, а с другой стороны — более просто оценить ее надежность с достаточной для практики точностью. Поэтому возникает задача выделения доминирующего (доминирующих) сечений, т. е. сечений, имеющих максимальную вероятность отказа. Доминирующее сечение можно определить по двойственному графу расчетной схемы. Следует отметить, что граф, двойственный исходному, достаточно просто построить, если граф рассматриваемой схемы планарный и остается планарным при добав-

лении условного ребра, соединяющего вершины потребителя и источника питания. Если граф непланарный, то его можно свести к планарному, например, используя формулу полной вероятности относительно ребра (ребер), которое делает граф непланарным. Например, если в схеме, приведенной на рис. 4.7,а, рассматривается вероятность надежной работы схемы относительно узла 5, то граф $I-5$ не является планарным, поэтому, используя формулу полной вероятности, получаем:

$$P(I \rightarrow 5) = q_{35}P(I \rightarrow 5)_- + (1 - q_{35})P(I \rightarrow 5)_+, \quad (4.48)$$

где $P(I \rightarrow 5)$ — вероятность надежной работы связи вершины I с вершиной 5 в исходном графе; q_{35} — вероятность отказа ребра a_{35} ; $P(I \rightarrow 5)_-$ — вероятность надежной связи между этими же вершинами в случае удаления из графа ребра a_{35} ; $P(I \rightarrow 5)_+$ — то же, но когда вершины, связанные с ребром a_{35} , объединены в одну.

Таким образом, исследование надежности непланарного графа сведено к исследованию планарного графа. Минимальное сечение $S_{i,п}^d$ называется доминирующим по вероятности отказов, если

$$Q(S_{i,п}^d) = \max \{Q(C_{i,п}^{(i)})\} \text{ при } i = 1, 2 \dots k_c, \quad (4.49)$$

где k_c — число минимальных сечений относительно рассматриваемого узла P .

Доминирующему сечению $S_{i,п}^d$ исходного графа будет соответствовать путь максимальной вероятности совпадения отказов из элементов I' и P' в двойственном графе, поэтому определение доминирующего сечения исходного графа можно свести к определению пути максимальной вероятности совпадения отказов ребер из I' и P' в двойственном графе.

Чтобы найти путь из вершины I' в вершину P' с максимальной вероятностью совпадения отказов ребер, можно последовательно анализировать пути из узла I' во все остальные вершины графа, оценивая вероятность совпадения отказов элементов. Полученные пути позволяют кроме доминирующего сечения определить группу ближайших к нему по вероятности отказов.

Эту процедуру можно выполнить следующим образом. Искомый путь вместе с другими путями максимальной вероятности совпадения отказов элементов из I' во все остальные вершины графа образуют некоторое дерево, число ветвей которого в процессе нахождения этих

путей увеличивается от 0 до $(n-1)$, где n — число вершин графа, а вершины графа одна за другой включаются в «растущее» дерево. Каждая вершина графа получает временное обозначение вида $M'_i(Q'_i, j)$, если i -я вершина еще не включена в искомое дерево, или в противном случае постоянное обозначение вида $M_i(Q_i, j)$, где Q_i, j — соответственно вероятность совпадения отказов элементов искомого пути Q_i или промежуточного пути Q'_i , ведущего из вершины I' в вершину i ; обозначение j указывает предшествующую i -й вершине вершину j в рассматриваемом пути.

Присвоение вершине графа постоянного обозначения осуществляется в результате процесса сравнения временных индексов Q'_i вершин, непосредственно с ней связанных. В начале сравнения все вершины графа, кроме вершины I' , получают временное обозначение $M'_i(0, 0)$, где $i=1, 2, \dots, n-1$. Процесс сравнения начинается с узла источников I' . Вершина I' непосредственно связана с $m_{I'}$ вершинами графа, она получает временное обозначение $M'_i(Q'_i, I')$, где

$$Q'_i = q_{I', i} \text{ при } i=1, 2, \dots, m_{I'}. \quad (4.50)$$

Из $m_{I'}$ ребер, непосредственно связанных с вершиной I' , для включения в искомое дерево выбирается то, которое удовлетворяет условию

$$Q_i = \max \{Q'_i\} \text{ при } i=1, 2, \dots, m_{I'}. \quad (4.51)$$

Вершина i с другой вероятностью $q_{I', i}$ включается в искомое дерево. Обозначение вершины i становится постоянным: $M_i(Q_i, I')$, другие обозначения остаются временными. Полученная таким способом часть дерева будет непосредственно связана с m_i вершинами, которые получают временные обозначения вида $M'_k(Q'_k, j)$, где

$$Q'_k = \max \{Q'_k, Q_i, q_{i, k}\}. \quad (4.52)$$

Следующим ребром дерева будет то, которое удовлетворяет условию

$$Q_k = \max \{Q'_k\} \text{ при } k=1, 2, \dots, m_i. \quad (4.53)$$

Вершина k включается в дерево с постоянной пометкой $M_k(Q_k, j)$. Процесс продолжается до тех пор, пока число ребер искомого дерева не станет равным $(n-1)$.

После выполнения всех операций согласно изложенному алгоритму всем вершинам графа присваивается постоянное обозначение. Элементы, входящие в доминирующее сечение $C^a_{i, \Pi}$ исходного графа, выявляются путем проверки последовательности второго индекса обозначения вершин найденного пути в двойственном графе, начиная с узла I' , а первый индекс обозначения $M_{I'}(Q_{I'}, j)$ прямо указывает на вероятность отказов доминирующего сечения:

$$Q(C^a_{i, \Pi}) = Q_{I'}. \quad (4.54)$$

Обозначения вершин, соседних (непосредственно связанных) с искомым путем, позволяют определить группу сечений, ближайших к доминирующему по степени отказов, с вероятностью

$$Q(C^{(i)}_{i, \Pi}) = \frac{Q_{I'}}{Q_k} Q_i q_{i, k}. \quad (4.55)$$

где i — соседняя с искомым путем вершина; k — вершина искомого пути, связанная с i -й вершиной ребром i, k .

Когда соседний узел i непосредственно связан с узлом I' , формула (4.55) приобретает вид:

$$Q(C^{(i)}_{i, \Pi}) = Q_i q_{i, I'}. \quad (4.56)$$

Если все элементы в системе имеют одинаковые показатели надежности, каждая вершина получает обозначение $M_i(q^s, j)$, где s — число ребер пути из вершины I' в вершину i . Это число называют кардинальным расстоянием между вершинами I' и i . Так, если $q \ll 1$, то вместо нахождения пути с максимальной вероятностью совпадения отказов элементов $Q_i = q^s$ можно искать пути с минимальным кардинальным расстоянием s , используя известные алгоритмы нахождения кратчайших путей. Для формирования путей можно использовать также любой из описанных ранее способов. Из множества полученных путей двойственного графа определяется доминирующий, соответствующий максимальной вероятности отказа системы относительно рассматриваемого узла нагрузки, т. е. выделяется наиболее ненадежная группа элементов (или элемент).

Рассмотренные методы расчета показателей надежности сложных систем электроснабжения с использованием минимальных путей и сечений можно еще более

упростить, если использовать показатели надежности, рассчитанные для узлов, более близких к источникам, при определении показателей надежности более удаленных узлов, т. е. рекуррентный метод расчета. Этот метод может быть применен только для быстрой приближенной оценки показателей надежности вариантов систем электроснабжения в проектных расчетах. В на-

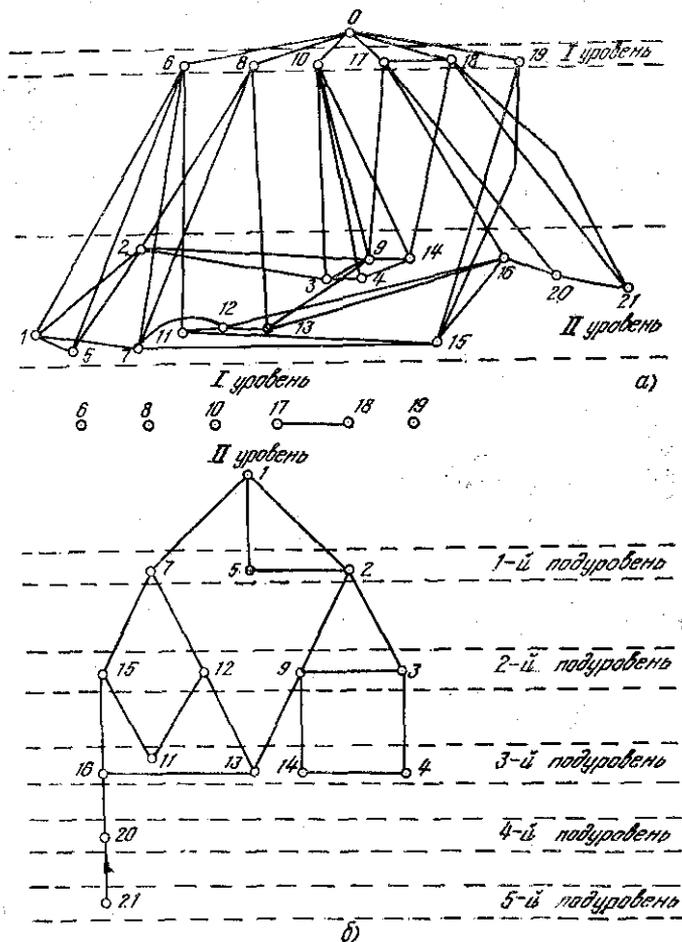


Рис. 4.9. Расчетный граф по надежности для пояснения рекуррентного метода расчета (а) и разделение исходной схемы (графа) на подуровни (б).

стоящее время достаточно обоснованной и проработанной методики такого рода расчетов для систем электроснабжения еще не существует.

Наметим принципиальные возможности решения этой задачи. Рекуррентный расчет можно построить по принципу разбиения вершин расчетного графа (узлов нагрузки) на уровни относительно вершины источников питания при наличии непосредственной связи между вершинами соседних уровней (рис. 4.9,а). Между вершинами соседних уровней существуют только непосредственные пути и не должно быть транзитных, если не включать в них вершины этого же уровня. Таким образом, к I уровню относительно вершины источников питания относятся все вершины, имеющие непосредственную связь (непосредственный путь) с вершиной источников питания, ко II уровню — все вершины, имеющие непосредственную связь с вершинами I уровня, к r-му уровню — все вершины, имеющие непосредственную связь с вершинами (r-1)-го уровня. При таком подходе показатели надежности вершин с увеличением порядка уровня вершины в общем случае понижаются.

Каждая l-я вершина в общем случае непосредственно связана с вершинами более высокого (первый обобщенный путь) и низкого уровня (второй обобщенный путь), а также с вершинами своего уровня (второй обобщенный путь), поэтому надежность электроснабжения ее зависит от надежности передачи энергии к вершинам этих уровней. Целесообразно определить показатели надежности для вершин каждого уровня на основании показателей надежности вершин предыдущего уровня.

При использовании, например, метода путей целесообразен следующий порядок расчета. Для вершины l-го уровня определяются показатели надежности по показателям надежности путей, связывающих вершины l-го уровня с вершинами (l-1)-го уровня (они состоят, как правило, из одного из нескольких — k ребер), т. е. вероятность отказа первого обобщенного пути к вершине i

$$q_{i,l,l} = \prod_{j=1}^k [1 - (1 - q_{i,j}^{(r)}) (1 - q_j^{(r)}) (1 - q_{j,(l-1)}^{(r)})]. \quad (4.57)$$

Если l=1, то вероятность $q_{i,l,l}$ равна произведению вероятностей отказов ребер, связывающих i-ю вершину с вершиной источников питания.

Затем определяется вероятность отказа всех путей, связывающих вершину i с вершинами l -го уровня, т. е. вероятность отказа обобщенного пути второго порядка $q_{i,l}$. Для определения показателей надежности второго обобщенного пути уровень l разбивается на подуровни по тому же принципу (рис. 4.9,б). После этого для придания рассматриваемому уровню последовательно-параллельной структуры из рассмотрения исключаются все ребра, соединяющие вершины, лежащие на одном подуровне, и ребра, соединяющие вершину с высшим подуровнем. В итоге вершина должна быть связана с подуровнем только одним ребром. Показатели надежности вершин, связанных с исключенным ребром j, k , уточняются по формулам

$$q_{j,l} = q_{j,l,1} [1 - (1 - q_{j,k}) (1 - q_k) (1 - q_{k,l,1})], \quad (4.58)$$

$$q_{k,l} = q_{k,l,1} [1 - (1 - q_{k,j}) (1 - q_j) (1 - q_{j,l,1})], \quad (4.59)$$

где q_j, q_k — соответственно вероятности отказов j -й и k -й вершин.

После этого определяется вероятность отказа $q_{i,l}$ полученной последовательно-параллельной структуры относительно вершины i (при условии, что каждая вершина j имеет обобщенный путь передачи с высшего уровня с вероятностью отказа $q_{j,l,1}$). В результате с учетом остальных вершин l -го уровня

$$q_{i,l,1,1} = q_{i,l,1} q_{i,l,1}. \quad (4.60)$$

Затем аналогичным способом определяются показатели надежности $q_{i,(l+1)}$ для вершин $(l+1)$ -го уровня, т. е. определяется вероятность отказа так называемого третьего обобщенного пути.

Вероятность отказа i -й вершины равна:

$$q^{(i)} = 1 - (1 - k q_{i,l,1} q_{i,l,1} q_{i,l,1,1}) (1 - q_i), \quad (4.61)$$

где коэффициент $k=10 \div 20$ введен для исключения занижения вероятности отказа отдельных вершин.

Объем расчетов этим методом пропорционален количеству вершин графа, поэтому этот метод позволяет рассчитывать системы электроснабжения достаточно большого объема, однако наиболее точные результаты получаются для вершин самого низшего уровня, для которых отсутствует третий обобщенный путь.

Отметим также, что расчет целесообразно проводить последовательно, начиная с первого уровня и выполняя сразу для всех вершин каждого уровня.

И, наконец, для еще более приближенной оценки показателей надежности сложных систем электроснабжения относительно узлов нагрузки можно воспользоваться учетом только двух сечений расчетного графа относительно узла: ребер, непосредственно связанных с вершиной (узлом нагрузки), и ребер, инцидентных вершине источника питания. Эти сечения быстро определяются по матрице M инцидентий расчетного графа. Если внутри схемы отсутствуют «слабые» с точки зрения надежности связи (между источником питания и рассматриваемым узлом нагрузки), этот способ дает приемлемые результаты.

Методы расчета показателей надежности сложных схем с использованием минимальных путей и сечений достаточно просто позволяют учесть преднамеренное отключение элементов. Так, при представлении исходной схемы в виде минимальных путей вероятность отказа $Q_{с.п}$ схемы относительно узла нагрузки Π складывается из суммы вероятностей двух гипотез: отказов всех путей

$Q \left(\sum_{i=1}^k \Pi_i \right)$ и наложения на преднамеренное отключение i -го элемента отказа оставшейся части системы

$Q_{п.} \left(\sum_{i=1}^{k-r_i} \Pi_i \right)$ (предполагаем, что преднамеренные отключения отдельных элементов не совмещаются):

$$Q_{с.п} = Q \left(\sum_{i=1}^k \Pi_i \right) + Q_{п.} \left(\sum_{i=1}^{k-r_i} \Pi_i \right), \quad (4.62)$$

$$Q \left(\sum_{i=1}^k \Pi_i \right) = 1 - P \left(\sum_{i=1}^k \Pi_i \right); \quad (4.63)$$

$$Q_{п.} \left(\sum_{i=1}^{k-r_i} \Pi_i \right) = \sum_{i=1}^m k_{п.,i} q_{п.,i} Q \left(\sum_{i=1}^{k-r_i} \Pi_i \right); \quad (4.64)$$

$P \left(\sum_{i=1}^k \Pi_i \right)$ — вероятность работы всех путей схемы, определяется по формуле для суммы вероятностей

совместимых событий (4.39); $q_{n,i}$ — вероятность преднамеренного отключения i -го элемента схемы; r_i — число путей, в которых содержится i -й элемент схемы; $(k-r_i)$ — число путей, оставшихся после исключения i -го элемента из схемы; $k_{n,i} < 1$ — коэффициент, учитывающий уменьшение вероятности отказов вследствие того, что возможно наложение аварии оставшейся части схемы на преднамеренное отключение i -го элемента, а не наоборот (см. § 3.6); m — число элементов в сложной схеме.

Если схема представлена в виде минимальных сечений, то вероятность отказа относительно узла Π

$$Q_{c,\Pi} = Q\left(\sum_{i=1}^{k_c} C_i\right) + \sum_{i=1}^m q_{n,i} k_{n,i} Q\left(\sum_{j=1}^{k_c-r_i} C_j\right) \approx \sum_{i=1}^{k_c} Q(C_i) + \sum_{i=1}^m q_{n,i} k_{n,i} \sum_{j=1}^{k_c-r_i} Q(C_j), \quad (4.65)$$

где (k_c-r_i) — число сечений, оставшихся в схеме после исключения i -го элемента.

В оставшейся после исключения i -го элемента части схемы минимальные сечения получаются из сечений исходной полной схемы после исключения неминимальных сечений. Аналогичные приемы можно использовать для расчета надежности тех сложных схем, в которых возможны совмещения преднамеренных отключений различных элементов. В этом случае рассматриваются гипотезы наложения аварий на преднамеренные отключения двух и более элементов оставшихся частей схемы и гипотезы отказа схемы без учета преднамеренных отключений элементов.

4.7. Влияние зависимых отказов элементов на надежность схем электрических соединений

В эксплуатации электрических систем имеют место как независимые отказы отдельных элементов, так и переходы отказов одних элементов на другие — развитие аварий. Если два параллельно работающих трансформатора или две кабельные линии снабжают электроэнергией потребителя, то отключение одного из этих элементов приводит к перегрузке другого, при длительной перегрузке увеличивается вероятность отказа оставше-

гося в работе элемента. Отказ линейного выключателя на подстанции приводит к отключению секционного или шинносоединительного выключателя, а также выключателя со стороны питания подстанции; число отказов выключателей зависит от числа отключений или повреждений линии. В общем случае, если система содержит элементы, в результате отказа которых изменяется надежность других ее элементов, то такие системы называются системами с зависимыми элементами. Для вычисления показателей надежности таких систем необходимы статистические данные об условиях параметрах потока отказов.

В существующей литературе по надежности сложных технических систем отмечается, что в общем случае задача определения показателей надежности системы с зависимыми элементами в настоящее время не решена. Это вызвано, во-первых, очень громоздкими алгоритмами, которые содержат интегралы типа сверток, и, во-вторых, отсутствием необходимых данных об отказах зависимых элементов системы.

Параметром условного потока отказов $\lambda_{i,j}$ называется параметр потока отказов i -го элемента, определенный при отказе j -го элемента. При этом предполагается, что информация об условных потоках отказов всех элементов схемы известна. Однако в реальных схемах получить такого рода информацию статистическим путем невозможно. В то же время информацию о попарных взаимных связях между потоками отказов соседних элементов можно получить в результате статистических исследований. Если известны параметры условных потоков отказов соседних элементов схемы, то параметр условного потока отказов любых двух элементов схемы (даже не примыкающих к одному и тому же узлу) можно вычислить аналитически.

Зависимость между отказами i -го и j -го элементов системы можно охарактеризовать коэффициентом связи $k_{i,j}$ — отношением параметра условного потока отказов $\lambda_{i,j}$ к параметру потока отказов j -го элемента λ_j :

$$k_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_j}, \quad (4.66)$$

В общем случае

$$k_{i,j} \neq k_{j,i}. \quad (4.67)$$

Связи между отказами могут быть непосредственными или косвенными (через отказы других элементов). Для определения всех возможных связей между отказами и параметра потока условных отказов при известных попарных связях между соседними элементами целесообразно использовать граф переходов отказов. В отличие от ранее рассмотренного расчетного графа по надежности в графе переходов отказов каждая вершина представляет собой зависимый элемент сети, каждое ребро (звено) — связь между отказами двух элементов схемы.

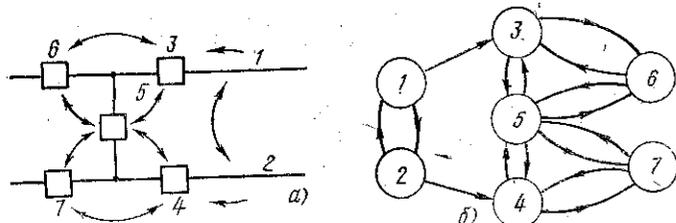


Рис. 4.10. Схема, иллюстрирующая переходы отказов от одних элементов системы электроснабжения к другим элементам (а) и расчетный граф переходов отказов (б).

Например, для участка системы, приведенного на рис. 4.10,а, с известной информацией о попарных связях между соседними элементами можно построить полный граф переходов отказов (рис. 4.10,б).

Граф переходов позволяет составить матрицу непосредственных переходов $K_{i,j}$, элемент которой равен коэффициенту $k_{i,j}$, если отказы i -го и j -го элементов имеют связи, и нулю — в противном случае. Для схемы, приведенной на рис. 4.10,б матрица непосредственных переходов

$$K_{i,j} = \begin{array}{c|ccccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ \hline 1 & 0 & k_{12} & k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & k_{21} & 0 & 0 & k_{24} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{35} & k_{36} & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{45} & 0 & k_{47} & 4 \\ 5 & 0 & 0 & k_{53} & k_{54} & 0 & k_{56} & k_{57} & 5 \\ 6 & 0 & 0 & k_{63} & 0 & k_{65} & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & k_{74} & k_{75} & 0 & 0 & 7 \\ \hline \end{array}$$

По матрице непосредственных переходов, так же как и по матрице непосредственных путей, определяются

например, квазиминорным методом) пути переходов отказов от одного элемента к другому. Так, например, отказы линии 1 (рис. 4.10,а) могут влиять на отказы выключателя 5 следующими путями: $\Pi_1 — [1,2,4,5]$; $\Pi_2 — [1,2,4,7,5]$; $\Pi_3 — [1,3,5]$; $\Pi_4 — [1,3,6,5]$. Отказ перейдет от одного элемента к другому по рассматриваемому пути, если каждое предыдущее звено пути передаст отказ каждому последующему. Применяя теорему умножения для событий передачи отказов от одного звена к другому, получаем коэффициент передачи отказа по пути как произведение коэффициентов связи звеньев пути:

$$k_{n,i} = \sum_{j=1}^{v_i} k_{i,j}, \quad (4.68)$$

где $k_{i,j}$ — коэффициент связи j -го звена пути; v_i — число звеньев в i -м пути.

Передача отказов одного элемента к другому не может развиваться сразу в нескольких направлениях, поэтому гипотезы передачи отказов по отдельным путям следует рассматривать как несовместимые. Результирующий коэффициент передачи отказов от l -го элемента k -му элементу схемы равен сумме вероятностей несовместимых гипотез, т. е. вероятностей передачи по путям:

$$k_{n,\Sigma l \rightarrow k} = \sum_{i=1}^{\mu} k_{n,i}, \quad (4.69)$$

где μ — число путей передачи отказов от l -го элемента к k -му.

Параметр условного потока отказов элемента k , вызванных отказами элемента l ,

$$\lambda_{k,l} = \lambda_l k_{n,\Sigma l \rightarrow k} = \lambda_l \sum_{i=1}^{\mu} k_{n,i}. \quad (4.70)$$

Пример. Для схемы, приведенной на рис. 4.10,а, требуется определить: а) параметр условного потока отказов выключателя 5, вызванных отказами линии 1; б) параметр условного потока отказов выключателя 5, вызванных одновременными отказами линии 1 и выключателя 7. Коэффициент связи между отказами линий 0,25, между линиями и линейными выключателями 0,1,

между различными выключателями 0,075. Параметр потока отказов каждой линии 1,5 1/год, выключателя — 0,2 1/год.

Решение. Матрица непосредственных переходов отказов имеет вид:

$$K_{i,j} = \begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ \hline 0 & 0,25 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,075 & 0,075 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,075 & 0 & 0,075 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0,075 & 0,075 & 0 & 0,075 & 0,075 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0,075 & 0 & 0,075 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0,075 & 0,075 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}$$

Пути передачи отказов от линии 1 к выключателю 5: $P_1 - [1,2,4,5]$; $P_2 - [1,2,4,7,5]$; $P_3 - [1,3,5]$; $P_4 - [1,3,6,5]$. Коэффициент передачи отказов от элемента 1 к элементу 5

$$k_{п, \Sigma 1 \rightarrow 5} = \sum_{i=1}^4 k_{п, i} = \sum_{i=1}^4 \prod_{j=1}^{v_i} k_{i, j} = k_{12}k_{24}k_{45} + k_{12}k_{24}k_{47}k_{75} + k_{13}k_{35} + k_{13}k_{36}k_{65} = k_{12}k_{24}(k_{45} + k_{47}k_{75}) + k_{13}(k_{35} + k_{36}k_{65}).$$

Параметр условного потока отказов выключателя 5, вызванных отказами воздушной линии 1,

$$\lambda_{51} = \lambda_1 \sum_{i=1}^4 k_{п, i} = 1,5 [0,25 \cdot 0,1 (0,075 + 0,075 \cdot 0,075) + 0,1 (0,075 + 0,075 \cdot 0,075)] = 0,015 \text{ 1/год.}$$

Аналогично вычисляется параметр условного потока отказов секционного выключателя 5, вызванного одновременным отказом линии 1 и выключателя 7:

$$\lambda_{5 \rightarrow 1,7} = \lambda_1 \sum_{i=1}^4 \prod_{j=1}^{v_i} k_{i, j} + \lambda_7 \sum_{i=1}^2 \prod_{j=1}^{v_i} k_{i, j} = \lambda_1 [k_{12}k_{24}(k_{45} + k_{47}k_{75}) + k_{13}(k_{35} + k_{36}k_{65})] + \lambda_7 (k_{75} + k_{74}k_{45}) = 0,0311 \text{ 1/год.}$$

Коэффициенты связи между отказами элементов электрических систем достаточно малы. Например, максимальное значение имеют коэффициенты связи двухцепных воздушных линий 220 кВ ($k_{i,j} \approx 0,25$), для двух-

цепных воздушных линий 110 кВ это значение снижается до 0,1—0,15, еще меньше коэффициенты связи между отказами выключателей. Поэтому в практических расчетах длинные пути переходов отказов с числом звеньев больше трех в большинстве случаев можно не учитывать, так как коэффициенты передачи отказов у них пренебрежимо малы. Так, например, если при определении указанных выше значений λ_{51} и $\lambda_{5 \rightarrow 1,7}$ пренебречь влиянием длинных путей с числом звеньев больше трех, то получим $\lambda_{51} = 0,0148$ 1/год, $\lambda_{5 \rightarrow 1,7} = 0,03$ 1/год. Разница в результатах по сравнению с точным расчетом составляет не более 4%.

4.8. Составление расчетных схем по надежности

Современные системы электроснабжения относятся к категориям сложных систем, причем сложность определяется не столько количеством элементов, сколько сложностью функциональных и логических связей между отдельными частями и элементами системы. К тому же, в отличие от многих технических систем эти системы являются системами со многими входами и выходами (т. е. имеют много источников питания и потребителей). Этим определяются высокие требования, предъявляемые к составлению расчетной схемы по надежности той или иной системы. Полный учет всех факторов, влияющих на надежность системы, очевидно, невозможен ввиду их чрезвычайного многообразия. Поэтому в настоящее время получил широкое распространение статистический подход к оценке основных показателей надежности элементов электрических систем.

Перед расчетом надежности системы предварительно составляется логическая схема расчета, которая может отличаться от принципиальной электрической схемы. Например, параллельному включению генераторов на электростанции соответствует их последовательное соединение в расчетной схеме по надежности, если возникает вопрос оценки надежности генерирования всей мощности электростанции.

В последовательные цепи расчетной схемы по надежности кроме элементов последовательной электрической цепи (линии, выключатель, трансформатор и т. д.) вводятся также смежные выключатели, отказ которых может привести к отказу рассматриваемой цепи (например, выключатели всех присоединений, секционные

выключатели шин, к которым подключена анализируемая цепь). Если анализируется магистральная линия с ответвлениями, не оборудованными автоматическими выключателями, то в последовательную цепь включают также показатели надежности ответвлений от этой линии, но вероятность их отказа определяется произведением параметра потока отказов ответвления на среднее время переключения (предполагается, что ответвления оборудованы разъединителями). Это положение справедливо для тех ответвлений, которые электрически включены параллельно относительно анализируемого узла нагрузки. Если определяются показатели надежности узла нагрузки, подключенного к ответвлению от магистрали, то это ответвление вводится в расчет средним временем восстановления.

Расчетная схема по надежности относительно узлов нагрузки должна отражать логику работы исходной электрической схемы, поэтому разнообразие методов составления расчетных схем обуславливается разнообразием применяемых схем электроснабжения и общих рекомендаций для решения всех возможных задач надежности дать невозможно. Следует только подчеркнуть, что особого внимания требуют схемы электроснабжения, в которых автоматическое отключение отдельных участков сочетается с ручным переключением при вводе резерва (например, петлевые схемы в сетях до 1000 В). В этом случае средние вероятности отказов расчетных элементов определяются не только временем восстановления участков линий, но и средним временем переключения на резервное питание.

Обычно целью расчета является определение основных показателей надежности относительно узлов нагрузки или конкретных потребителей. Поэтому система расчленяется на отдельные элементы, характеристики надежности которых легко определяются.

Следующим этапом расчета является формулировка понятий отказа для всей системы и для отдельных элементов. Отказом системы с ограниченной пропускной способностью элементов можно считать, например, то или иное значение ограничения мощности потребителей, а для отдельных потребителей например, сам факт отсутствия напряжения на шинах даже в течение долей секунды (если резервная цепь включается посредством АВР).

Метод расчета надежности выбирается в зависимости от конкретной постановки задачи и интервала времени, в течение которого определяются характеристики надежности. Расчеты выполняются по средним показателям или с учетом начальных состояний элементов на коротких интервалах времени (в последнем случае используется модель случайных процессов).

Для сложных систем электроснабжения составление расчетных схем по надежности является весьма трудоемкой задачей и по трудозатратам может быть соизмеримо с расчетами показателей надежности. Если ставить задачу оценки показателей надежности относительно узлов нагрузки, то этот процесс можно в значительной степени формализовать на ЭВМ, используя методы структурного анализа, в частности метод формирования путей передачи энергии. Рассмотрим более подробно возможную логику работы схемы. Электрическая схема состоит из узлов и ветвей; как правило, узлом являются сборные шины, трехобмоточный трансформатор или секция сборных шин, ветвь может состоять из нескольких элементов: линия, трансформатор, выключатель и др.

Отказ элемента, входящего в ветвь, по-разному влияет на работоспособность всей ветви в целом и примыкающих к ней узлов. Ветвь, содержащая отказавший элемент, теряет способность передавать энергию на время восстановления этого элемента $t_{\text{в}}$. Узлы, примыкающие к этой ветви, могут терять работоспособность на следующие периоды: а) на время автоматического отключения $t_{\text{а}}$ отказавшего элемента от узла, если между узлом и этим элементом находится коммутационный аппарат, на который действует релейная защита (вероятность отказа коммутационного аппарата при этом не учитывается); б) на время ручных переключений $t_{\text{оп}}$, необходимое для отключения отказавшего элемента от узла, если между ними находится разъединитель или коммутационный аппарат, не снабженный релейной защитой; в) на время восстановления $t_{\text{в}}$ отказавшего элемента, если он непосредственно связан с узлом.

Нетрудно видеть, что в первом случае узел останется в работе, а во втором и в третьем — будет в отказовом состоянии соответствующее время. Поэтому элементы всех примыкающих к узлу ветвей, соответствующие условиям «б» и «в», должны вводиться в расчетную схему по надежности последовательно с этим узлом. Эти эле-

менты должны входить во все пути, проходящие через этот узел.

Можно предложить следующий порядок расчета. По электрической схеме системы электроснабжения формируются все пути для данного потребителя. Пути следует дополнить элементами, которые приводят к отключению узла на время $\bar{t}_в$ или $\bar{t}_{оп}$. Получаются минимальные пути, построенные по расчетной схеме по надежности. Следует отметить, что один и тот же элемент может входить в расчетную схему с вероятностью $\lambda_{в}$ и $\lambda_{оп}$, где λ — параметр потока отказов элемента.

При представлении исходной информации в матричном виде в матрицу **B** включают элементы, приводящие к отказу узлов на время $\bar{t}_в$; этим элементам следует присваивать номера от 1 до n , где n — число элементов системы. В матрицу **ПР** включают элементы, приводящие к отказу узлов на время $\bar{t}_{оп}$; этим элементам следует присваивать номера от n до $(n+m)$, где m — число элементов, записанных в матрицу **ПР**. При этом число элементов, вводимых в расчет, увеличивается до $(n+m)$, следовательно, резко увеличивается число сочетаний, анализ которых необходим для выявления минимальных сечений, так как число $(n+m)$ может быть гораздо больше n , к тому же появляется возможность дважды использовать один и тот же элемент при формировании одноэлементных сечений. Однако возникающие трудности можно обойти.

Если в основное минимальное сечение, построенное на основе путей электрической схемы, входит i -й узел, то формируется еще несколько дополнительных сечений путем замены i -го узла элементами из i -й строки матриц **B** и **ПР**. Если в основное сечение входит несколько узлов, то дополнительные сечения формируются из соответствующих строк матриц **B** и **ПР**. Однако в этом случае необходимо проверить, не является ли дополнительное сечение основным, тогда его следует исключить из расчета. Кроме того, один и тот же элемент может быть записан в строках матриц **B** и **ПР**, соответствующих разным узлам, тогда при формальном подходе из одного элемента будет сформировано двухэлементное сечение. В таком случае его следует учитывать как одноэлементное. Элемент из матриц **B** и **ПР** может образовывать дополнительное сечение меньшего порядка (например, двухэлементное) в сочетании с частью эле-

ментов основных сечений более высокого порядка (например, трехэлементных), поэтому для наиболее эффективного построения программы формирования минимальных сечений необходимо выявить подобные элементы, и все минимальные сечения, включающие такие элементы, формировать отдельно, используя для характеристики каждого элемента две строки матриц **B** и **ПР**, а не одну, как для обычных элементов.

Вероятность перехода аварии за коммутационный аппарат равна:

$$q_{к,а} = q_a + q_{р,з}, \quad (4.71)$$

где q_a и $q_{р,з}$ — соответственно вероятности отказа коммутационного аппарата и релейной защиты.

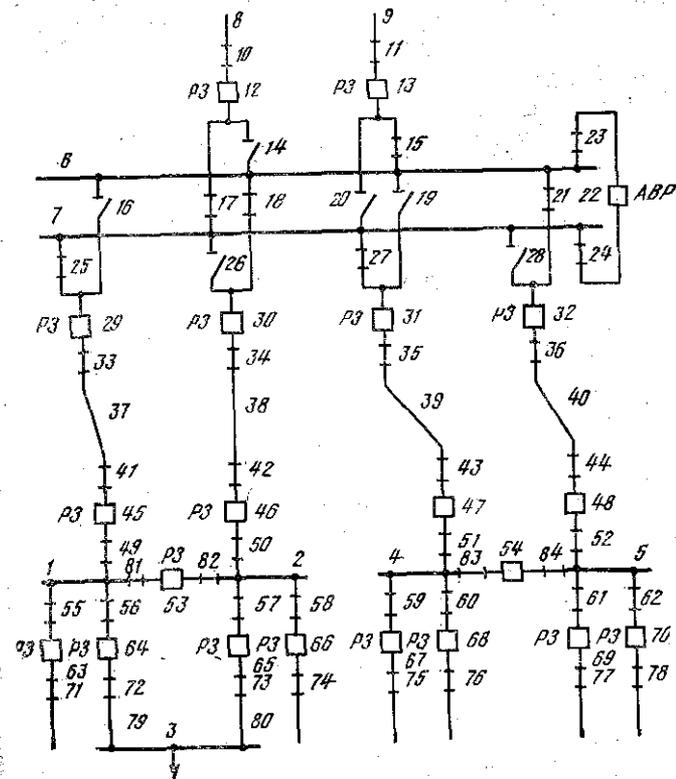


Рис. 4.11. Схема электроснабжения для пояснения методики получения расчетных схем по надежности.

Дополнительные минимальные сечения необходимо формировать, заменяя узлы, входящие в основное минимальное сечение, группой элементов системы, отделенных от соответствующего узла не более чем одним аппаратом, с вероятностями отказов, умноженными на вероятность перехода аварии за аппарат $q_{к,а}$. Такие группы элементов также целесообразно представлять матрицей **К**, строки которой соответствуют узлам. Естественно, этот подход не распространяется на нормально отключенные коммутационные аппараты и те аппараты, на которые не воздействует АВР.

Наличие АПВ на линиях учитывается в основных и дополнительных сечениях, полученных по матрице **В** и **ПР**, в которых отражены устойчивые повреждения; неустойчивые повреждения учитываются также как возможность перехода аварии за коммутационный аппарат.

Формирование матриц **В**, **ПР**, **К** можно осуществлять на ЭВМ, анализируя для каждого узла элементы, расположенные на всех возможных от него ответвлениях,

Таблица 4.1

Номер строки матрицы (узла схемы)	В	ПР	К
1	49, 55, 56, 81	45, 53, 63, 64	41, 37, 33, 29, 82, 2, 50, 46, 57, 65, 58, 66, 71, 72, 79,
2	50, 57, 58, 82	46, 65, 66, 53	42, 38, 34, 30, 74, 73, 80, 81, 1, 49, 45, 55, 63, 56, 64
3*	—	—	79, 72, 64, 80, 73, 65
4	51, 59, 60, 83	47, 43, 39, 35, 31, 67, 68, 54	27, 7, 17, 12, 25, 29, 20, 24, 22, 75, 76, 28, 26
5	52, 61, 62, 84,	48, 44, 40, 36, 32, 69, 70, 54	21, 6, 23, 22, 15, 13, 14, 18, 30, 77, 78, 16, 19
6	15, 18, 21, 23, 14, 16, 19	13, 22, 30, 32	9, 11, 36, 40, 44, 48, 54, 52, 5, 84, 61, 69, 62, 28, 70, 34, 38, 42, 46, 24, 26, 7, 17, 12, 25, 29, 27, 31, 20
7	17, 25, 27, 24, 20, 26, 28	12, 22, 29, 31	8, 10, 33, 37, 41, 45, 54, 35, 39, 43, 47, 51, 4, 14, 59, 67, 60, 68, 83, 23, 16, 6, 15, 13, 21, 32, 18, 30, 19

* Узел 3 — абстрактный узел нагрузки.

до тех пор, пока не будет встречен коммутационный аппарат, снабженный релейной защитой или автоматикой. При этом производится запись элементов каждого ответвления (ответвлений) в матрицу **В**, если еще не был пройден ни один коммутационный аппарат с неавтоматической коммутацией, и в матрицу **ПР** — в противном случае. В матрицу **К** записываются только элементы, отделенные от узлов одним автоматическим коммутационным аппаратом. Для схемы на рис. 4.11 в табл. 4.1 приведено содержание строк матриц **В**, **ПР**, **К**.

В приближенных расчетах каждый узел включается в схему одним эквивалентным элементом, образованным из последовательно соединенных элементов, записанных в строки матриц **В** и **ПР**, и считается, что расчетная схема по надежности совпадает с электрической. Тогда по изложенным методам рассчитываются все показатели надежности. Погрешность по вероятности отказов будет несколько завышена, так как отказы некоторых элементов будут учтены дважды — в показателях надежности ветвей и узлов.

4.9. Особенности инженерных расчетов надежности сложных схем электрических соединений

При оценке показателей надежности в сложных схемах можно выделить два основных подхода с привлечением различных методов.

1. Определение вероятности различных состояний сложной системы и вероятности недоотпуска электроэнергии потребителям или полной потери питания отдельных потребителей. Решение этой задачи связано с анализом режимов работы отдельных элементов в сложной схеме, с нахождением вероятностных характеристик нагрузки в элементах, выделением наиболее загруженных элементов или групп в схеме. Оценка вероятности состояний схемы и показателей надежности при различных комбинациях включенных и отключенных элементов выполняется методом анализа вероятностей основных состояний. Причем состояниями с числом отказавших элементов более двух-трех, как правило, можно пренебречь. При этом необходимо учитывать также наложение аварийных отключений на преднамеренные отключения отдельных цепей.

Этот метод является основным при расчете показателей надежности, ограничения мощности и энергии у потребителей для систем со многими входами (источниками питания) и выходами (узлами нагрузки) и ограничениями по пропускной способности элементов в послеаварийных режимах. Однако недостатками метода являются громоздкость вычислений, необходимость анализа очень большого количества состояний схемы, трудность алгоритмизации при применении для расчетов ЭВМ. Так, например, если число расчетных элементов в сложной схеме n , то даже без учета наложения аварийных отключений на преднамеренные (пренебрегая вероятностью отказа

более трех элементов) необходимо проанализировать и рассчитать режимы для

$$N = \frac{1}{6} (n^2 + 5n) \quad (4.72)$$

состояний схемы. Особенностью этого метода является расчет показателей надежности с системных позиций.

2. Оценка показателей надежности последовательно относительно каждого узла нагрузки с помощью формулы полной вероятности или с представлением схем в виде структурных последовательно-параллельных (схема путей) или параллельно-последовательных (схема сечений). Наиболее пригодным для алгоритмизации является способ представления исходной сложной схемы в виде эквивалентных структурных. Причем, как отмечалось ранее, более простые алгоритмы расчета вероятностей отказовых и безотказовых состояний схемы относительно узлов получаются при представлении схемы в виде эквивалентной параллельно-последовательной (схемы сечения), хотя алгоритмы получения самих сечений несколько сложнее, чем путей.

С увеличением числа элементов в сложной схеме количество путей и сечений относительно каждого узла растет очень быстро. В частности, учет отказов узловых пунктов сети резко увеличивает количество сечений, не увеличивая числа путей схемы относительно узлов. С увеличением числа поперечных связей также увеличивается число путей.

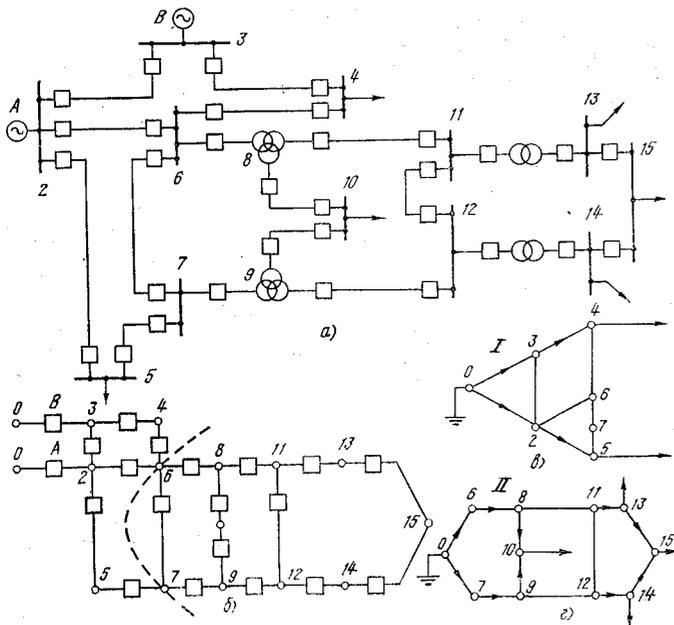


Рис. 4.12. Разделение исходной сложной схемы на подсхемы для сокращения расчетов.

Основной особенностью расчета показателей надежности с использованием структурного анализа относительно узлов является ограниченность возможностей этих методов из-за сложности их реализации при ограничениях по пропускной способности отдельных элементов, т. е. сложности определения частичных ограничений мощности и энергии потребителей.

Реализация всех этих методов, так же как и метода анализа вероятностей состояний схемы, сильно осложняется при увеличении числа расчетных элементов схемы. Поэтому одним из способов сокращения размерности задачи может быть разделение исходной сложной схемы на подсхемы по узловым пунктам сети (узловым подстанциям, система сборных шин, пунктам трансформации энергии и т. д.). Расчет показателей надежности для первой схемы выполняется относительно пунктов разделения схемы со стороны источников питания. Для другой схемы пункты деления являются источниками питания и вводятся в расчетную по надежности схему расчетными элементами с характеристиками, полученными в расчетах первой подсхемы.

Разделение на подсхемы целесообразно выполнять таким образом, чтобы число расчетных элементов в каждой схеме не превышало 130—450. Далее, если пропускная способность элементов любой части схемы ограничена, показатели надежности относительно пунктов деления целесообразно определять с использованием методов структурного анализа. Расчет же подсхем выполняется в зависимости от конкретных условий: либо методом анализа вероятностей состояний, либо с использованием структурного представления схем.

Например, для схемы, приведенной на рис. 4.12, а, в связи с разделением на две подсхемы (рис. 4.12, б—с) уменьшается число расчетных состояний (с отключением не более трех элементов) с 1350 до 506, т. е. более чем в 2 раза. Рациональным выбором пунктов деления и количества рассчитываемых подсхем число расчетных состояний можно снизить до разумных пределов. Например, число возможных состояний можно уменьшить, разделив вторую подсхему на две части по шинам пунктов 11, 12.

Глава пятая

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ

5.1. Постановка задачи и особенности ее конкретных формулировок

В предыдущей главе были рассмотрены методы оценки надежности системы электроснабжения относительно заданного (исследуемого) ее узла. В наиболее общей постановке оценка надежности сложных систем должна сводиться к оценке снижения ее выходного эффекта (недоотпуск энергии W_n или народнохозяйственный ущерб J) по всей системе в целом, т. е. искомый интегральный показатель надежности складывается из локальных показателей, которые характеризуют каждый

j -й узел системы. Кроме того, при любых методах расчета этот показатель является аддитивной функцией, определяемой на множестве заданных (исследуемых) расчетных состояний системы K , и его можно представить в виде

$$W_n = \sum_{k \in K} \sum_j W_{n,j}^{(k)} = T \sum_{k \in K} q^{(k)} \Sigma D_j^{(k)} \quad (5.1)$$

или

$$Y = \sum_{k \in K} \sum_j Y_j^{(k)} = T \sum_{k \in K} q^{(k)} \sum_j y_{0,j} D_j^{(k)}, \quad (5.2)$$

где T — расчетный период времени; $q^{(k)}$ — вероятность появления k -го расчетного состояния системы, характеризуемого ограничением мощности потребителей $\sum_j D_j^{(k)}$ или ущербом $\sum_j Y_j^{(k)}$; $y_{0,j}$ удельный ущерб j -го потребителя. Отметим, что ущерб $y_{0,j}$ может быть задан в виде $a+bt$, т. е. следует учитывать ущерб от самого факта перерыва электроснабжения, при этом выражение (5.2) при соответствующем изменении по-прежнему останется линейным относительно переменных $D_j^{(k)}$.

В этих условиях процесс решения включает три относительно самостоятельных этапа: 1) формирование расчетных состояний, а) анализ последствий, к которым они приводят (оценка состояния системы), 3) расчет соответствующих вероятностных характеристик. При статистическом моделировании реализация первого этапа не встречает ощутимых трудностей и органично связана с определением вероятностных характеристик. При использовании аналитических методов он может быть достаточно просто реализован на базе так называемого перебора состояний системы, при этом легко могут быть отброшены сочетания неработоспособных элементов, вероятности появления которых пренебрежимо малы. На реализации третьего этапа здесь останавливаться не будем, так как возможные упрощенные подходы были рассмотрены в предыдущих главах.

Второй этап расчета, которому в данной главе уделяется основное внимание, является наиболее трудоемким, и, так как число расчетных состояний может быть достаточно велико, именно он обуславливает время расчета и определяет практическую пригодность алгоритмов, используемых для его решения. При выбранной

общей постановке исследуемым последствием k -го расчетного состояния является не только полный перерыв электроснабжения одного или некоторой совокупности узлов системы, но и возможные ограничения потребителей, обусловленные пропускными способностями работоспособных элементов и уровнями напряжения в узлах. Естественно, что искомая оценка состояния должна соответствовать оптимальному обеспечению нагрузок потребителей ($\min W_n^{(k)}$ или $\min Y^{(k)}$), при этом решение должно соответствовать ограничениям, которые с той или иной степенью полноты должны отражать условия существования послеаварийного режима (например, баланс мощностей, первый и второй законы Кирхгофа и т. п.) и возможные пределы изменения параметров режима (X и \bar{X}).

Таким образом, оценка k -го состояния системы сводится к решению задачи

$$\min W_n^{(k)} \text{ или } \min Y^{(k)} \text{ при } A^{(k)} X = b; \quad \underline{X}^{(k)} < X < \bar{X}^{(k)}, \quad (5.3)$$

Трудности, связанные с размерностью задачи, и характер исходной информации служат обоснованием такому фактически общепринятому упрощению, как идеализация по постоянному току ($P_j \approx S_j = \sqrt{3} U_{nj} I_{nj}$; $z = r + jx \approx x$ и т. п.). Это упрощение позволяет представить ограничение задачи (5.3) в линейной форме. В целом задача (5.3) в зависимости от ее конкретной постановки, связанной с имеющейся исходной информацией (в основном по ущербу), может иметь линейную и нелинейную формулировки.

Так, постановка $\min W_n^{(k)} \approx \min \sum_j (\bar{J}_{n,j} - J_{n,j})$, где

J_{nj} — ток нагрузки j -го узла, приводит к линейной формулировке. Однако в этом случае решение дает точное значение лишь интегрального показателя, а определение локальных показателей сопряжено с неоднозначностью решения. Такие особенности решения могут проявиться и при постановке $\min Y^{(k)} \equiv \sum_j y_{0,j} D_j^{(k)}$, если зна-

чения удельных ущербов одинаковы хотя бы для двух узлов расчетной схемы.

Нелинейная формулировка задачи (5.3) позволяет избавиться от неоднозначности решения или получить более точную модель, например модель, учитывающую изменение ущерба от глубины ограничения потребителей, — в обоих случаях целевая функция обычно является квадратичной. Так, развитием постановки $\min W_n^{(k)}$ является минимизация среднеквадратического отклонения нагрузки (или ее ограничения) от некоторого «желаемого» уровня, который, например, может быть выбран по условию ограничения потребителей пропорционально номинальным мощностям. В постановке $\min U^{(k)}$ обычно используется квадратичное приближение для зависимости $U_j = f(D_j)$.

Нелинейные модели значительно увеличивают расчетное время, затрачиваемое на решение, что приводит к хорошо известным последствиям. Нередко уточнение, вызванное применением нелинейной модели, связано с агрегированием других факторов, что может сделать уточнение, скорее, мнимым, чем действительным.

Возможности линейных моделей с точки зрения как выбора алгоритмов повышенной эффективности, так и уточнения решения в настоящее время недостаточно используются.

В последующих параграфах этой главы в рамках линейной постановки задачи оценки состояния системы рассматриваются: а) способы повышения эффективности вычислительных процедур; б) процедуры линейной коррекции, которые дают уточненное решение, приближающееся к решениям, полученным на нелинейных моделях; в) применение аддитивных двойственных оценок, которые позволяют провести анализ полного решения (5.1) или (5.2), точнее, которые позволяют конструктивно подойти к вопросам уже не анализа, а синтеза системы. Кроме того, представлен опыт использования полиномиальных приближений для оценки функции $D_j = f(X)$. Эти приближения конструируются методами теории планирования эксперимента, что открывает перспективные подходы к снятию проблемы размерности при решении задачи за счет аналитической оценки показателей W_n и U , получаемой на основе аппроксимирующего распределения.

При изложении материала принято, что для исследуемой системы электроснабжения получен расчетный граф неизменной структуры, который для анализируе-

мого состояния системы полностью характеризуется допустимыми пределами изменения параметров ветвей и узлов (пропускные способности элементов, номинальные нагрузки и т. п.) и вероятностями их появления. Примем, что в каждом узле может присутствовать и источник питания, и нагрузка.

5.2. Линейные модели и алгоритмы оценки состояния системы

В зависимости от особенностей конкретных постановок могут быть использованы упрощенные сетевые (графовые) модели и более полные модели, базирующиеся на линейном программировании (ЛП).

Сетевые (графовые) модели позволяют получить решение при учете только первого закона Кирхгофа и дают оценку суммарного ограничения $D^{(k)} = \sum_j D_j^{(k)}$, значения $D_j^{(k)}$ могут быть определены лишь приближенно.

Пусть известен расчетный граф $\Gamma(V, H)$, где V — множество вершин (узлов), а H — множество ветвей (ребер). Использование известных алгоритмов нахождения максимального потока через сеть с требованиями приведения исходного графа $\Gamma(V, H)$, у которого в общем случае каждый узел обладает генерацией и потреблением, к эквивалентному графу $\Gamma(V', H')$ с дополнительными и единственными источником и стоком приводит к увеличению числа ветвей графа $\Gamma(V, H)$, т. е. к увеличению размерности задачи. Это увеличение можно несколько сократить, если к стоку присоединить дефицитные узлы (подсистемы), а к источнику — избыточные узлы, что приведет к $n' \leq 2n$. Но присоединение дополнительных ветвей не является строго фиксированным для разных состояний, так как дефицитные и избыточные узлы могут меняться от состояния к состоянию, и поэтому снижение размерности значительно усложнит алгоритм.

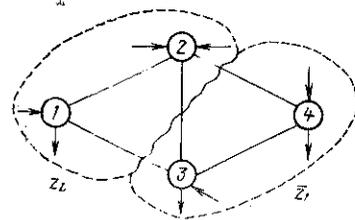


Рис. 5.1. Сечение расчетного графа (z_1, \bar{z}_1) и соответствующие компоненты связности $\bar{z}_1 = \{1, 2\}$ и $\bar{z}_2 = \{3, 4\}$.

Использование сечений и соответствующих им компонент связности (рис. 5.1), конструируемых на неизменном исходном графе, позволяет построить алгоритм, свободный как от увеличения размерности, так и от усложнения, вызванного изменением самого графа.

Таким образом, для любого k -го состояния исследуемой системы мы имеем граф с пропускными способностями ветвей $(\bar{J}_{n,i}^{(k)}, i=1, 2, \dots, m)$, источниками и стоками $(\bar{J}_{r,j}^{(k)}, \bar{J}_{n,j}^{(k)}, j=1, 2, \dots, n)$, причем $\bar{J}_{n,j}^{(k)} - J_{n,j}^{(k)} \sim D_j^{(k)}$ при $\bar{J}_{n,j}^{(k)} - J_{n,j}^{(k)} > 0$.

В этом случае любое сечение (z_i, \bar{z}_i) , $z_i \cup \bar{z}_i = B$, $z_i \cap \bar{z}_i = \emptyset$ делит граф единственным образом на две компоненты связности и поэтому полностью определяет максимальный поток между этими компонентами z_i и \bar{z}_i .

Ограничение $D^{(k)}(z_i, \bar{z}_i)$, обусловленное данным разбиением графа, равно нулю, если обе компоненты связности являются избыточными, или сумме ограничений компонент связности, если обе компоненты являются дефицитными.

В остальных случаях, когда одна компонента избыточна (пусть z_i), а другая является дефицитной (пусть \bar{z}_i), величина $D^{(k)}(z_i, \bar{z}_i)$ легко определится из соотношения величин избытков $\Gamma = \sum_{i \in z_i} (\bar{J}_{r,j}^{(k)} - \bar{J}_{n,j}^{(k)})$, дефицитов $D =$

$$= \left| \sum_{j \in \bar{z}_i} (\bar{J}_{r,j}^{(k)} - \bar{J}_{n,j}^{(k)}) \right| \text{ и пропускной способности сечения}$$

$$\sum_{i \in (z_i, \bar{z}_i)} J_{n,i} = S. \text{ Здесь мы имеем шесть ситуаций, кото-}$$

рые приводят к трем группам результатов:

- 1) при $\Gamma > S > D$ и $S > \Gamma > D$ $D^{(k)} = 0$;
- 2) при $\Gamma > D > S$ и $D > \Gamma > S$ $D^{(k)} = D - S$;
- 3) при $S > D > \Gamma$ и $D > S > \Gamma$ $D^{(k)} = D - \Gamma$.

Раздельная обработка дефицитов, обусловленных мощностями источников питания или пропускными способностями ветвей, позволит более полно проанализировать окончательный результат.

Среди сечений (z_i, \bar{z}_i) обязательно находится одно критическое сечение, которое определяет фактический де-

фицит, анализируемый для k -го состояния системы. Очевидно, что $D_{\text{факт}}^{(k)} = \max\{D^{(k)}(z_i, \bar{z}_i)\}$. Это критическое сечение может меняться от состояния к состоянию.

Таким образом, алгоритм анализа состояний системы включает предварительное однократное определение сечений графа системы и соответствующих компонент связности, вычисление значений $D^{(k)}(z_i, \bar{z}_i)$ и выбора $\max D^{(k)}(z_i, \bar{z}_i)$. Граф $\Gamma(B, H)$ задается первой матрицей инцидентий M .

Напомним, что здесь определение сечений не связано с двумя wybranными узлами графа, как это делается в гл. 4, а рассматривается как некая минимальная совокупность ветвей, приводящая к появлению двух несвязанных подграфов (компонент связности). Определение наряду с сечением компоненты связности приводит к необходимости использовать матричные методы, отличные от представленных в гл. 4.

Формирование сечений и соответствующих компонент связности может быть выполнено следующим образом.

Пусть M — первая матрица инцидентий с $(n-1)$ строками, такая, что $M = \|M_i : M_n\|$, где M_i — подматрица, соответствующая дереву графа $\Gamma(B, H)$, подматрица M_n соответствует хордам. Пусть M_i представляет i -ю строку матрицы M .

Строка M_i является сечением, причем соответствующая ей компонента связности z_i содержит i -й узел, а $\bar{z}_i = B - z_i$. Эти сечения обычно называют каноническими. Известно, что строки M_i составляют базис линейного пространства сечений графа $\Gamma(B, H)$, а все другие сечения являются линейными комбинациями строк матрицы M . Очевидно, что номера строк, участвующие в комбинации, однозначно определяют компоненту связности z_i . При этом сечение (z_i, \bar{z}_i) будет иметь место только в случае, если z_i и \bar{z}_i являются каждая компонентой связности, т. е. процедура отыскания сечений должна для каждой комбинации (суммы) строк иметь блок определения числа компонент связности s , и только при $s=2$ сечение (z_i, \bar{z}_i) является искомым сечением. Определение числа s осуществляется с помощью строки M и матрицы M^t путем постепенного накопления компонент связности. Заметим, что аналогичную процедуру отыскания сечений и компонент связности можно построить с помощью определения всех 2-деревьев графа $\Gamma(B, H)$.

Каждое базисное сечение Q_i , являющееся строкой матрицы базисных сечений Q , содержит только одну ветвь дерева (рис. 5.2), остальные ветви являются хордами. Матрицы M и Q связаны соотношением $Q = M_i^{-1} M = \|E : Q_n\|$, где E — единичная матрица. Наиболее целесообразно матрицу Q получать за счет диагонализации мат-

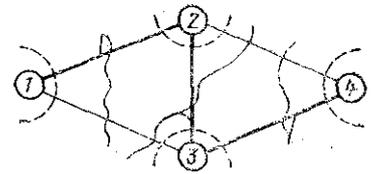


Рис. 5.2. Канонические и базисные сечения графа.

рицы M с помощью элементарных матричных преобразований. Эта операция выполняется довольно просто, если за счет соответствующей нумерации узлов и ветвей графа иметь матрицу M в виде верхней треугольной. Такая нумерация состоит в присвоении возрастающих номеров по каждому пути в дереве графа, при этом ветвь имеет номер узла примыкания. При диагонализации строки матрицы M , участвующие в преобразовании, однозначно определяют компоненту связности z_i , причем всегда $c=2$ и определение числа компонент связности отсутствует.

Процедура поиска сечений может быть сокращена. Вместо полного множества сечений L можно использовать подмножество $L_1 \cap L_2$, где подмножество L_1 включает базисные сечения, а L_2 — канонические сечения. Оба эти подмножества легко могут быть получены из первой матрицы инцидентий без привлечения специальной процедуры определения числа компонент связности. При этом, как показывает практика, получаем заниженный (иногда до 30%) окончательный результат. Однако накопленный опыт работы с базисными сечениями позволяет выбрать дерево графа наилучшим образом, что делает возможную ошибку незначительной и практически допустимой.

Наиболее универсальными являются ЛИ-модели, которые позволяют наиболее полно учитывать условия существования режима (оба закона Кирхгофа, допустимые потери напряжения и т. п.). Кроме того, они открывают возможность корректировки решения и анализа целесообразности изменения параметров системы (мощностей источников питания и пропускных способностей элементов) с помощью двойственных переменных.

В рамках идеализации по постоянному току для рассматриваемого k -го состояния системы задача (5.3) может быть представлена в следующем виде:

$$\min z^{(k)} = a^{(k)} c' (\bar{J}_n^{(k)} - J_n^{(k)}) = \begin{cases} Y^{(k)} & \text{при } c_j = y_{0,j}; \\ W_n^{(k)} & \text{при } c_j = 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

при условии

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline M & & & & 0 & & & & -E & & & & & & 0 & & & & \\ NZ_B & & & & 0 & & & & 0 & & & & & & 0 & & & & \\ PZ & & & & 0 & & & & 0 & & & & & & 0 & & & & -E \end{array} \right] \times \begin{matrix} J_B \\ J_\Gamma \\ J_H \\ U_\Delta \end{matrix} = 0, \quad (5.5)$$

где $a^k = q^{(k)} T V \sqrt{3} U_{\text{ном}}$; $J_n^{(k)} (\bar{J}_n^{(k)})$ — вектор-столбец фактических (номинальных) токов нагрузки узлов ($j = 1, 2, \dots, n$); $y_{0,j}$ — удельный ущерб потребителей j -го узла; M и N — первая и вторая матрицы инцидентий; P — матрица путей; Z_B — матрица сопротивлений ветвей ($z_{B,i} = x_{B,i}$); E — единичная матрица; $J_B, J_\Gamma, J_H, U_\Delta$ — векторы параметров режима (токи ветвей, токи источников питания и нагрузок, отклонения напряжения относительно напряжения базисного узла), имеющие двусторонние ограничения:

$$\begin{aligned} J_B^{(k)} &\leq J_B \leq \bar{J}_B^{(k)}; & 0 &\leq J_\Gamma \leq \bar{J}_\Gamma^{(k)}; & 0 &\leq J_H \leq \bar{J}_H^{(k)}; \\ U_\Delta^{(k)} &\leq U_\Delta \leq \bar{U}_\Delta^{(k)}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Первая строка (5.5) соответствует уравнению баланса. Ограничения (5.5) аналогичным образом можно сформулировать на основе узловых уравнений с последующим использованием матрицы коэффициентов распределения. Но в этом случае для каждого k -го состояния системы с различающимся составом работоспособных ветвей необходимо предварительное обращение матрицы узловых проводимостей, что с очевидностью снижает эффективность такого подхода, несмотря на понижение размерности задачи.

Рассмотрим особенности применения модифицированного симплекс-метода для решения задач (5.4) — (5.6). Так как переменные J_B и U_Δ могут иметь отрицательные нижние пределы, то для них необходимо использовать подстановку вида $x' = x + |x|$. Существующие алгоритмы позволяют не учитывать в симплекс-таблице ограничения (5.6), что ощутимо снижает ее размер и, как следствие, время счета. Анализ «работы» такого алгоритма показал, что основное время счета (до 90%) занимает первый этап оптимизации — поиск допустимого решения. В нашем случае оно тривиально: $J_H = 0$, а исходный базис состоит из векторов J_B, U_Δ и тока генерации в балансирующем узле J_M , причем большинство из указанных переменных сохраняется в оптимальном базисе. Такое свойство процесса решения является основой для отказа от выполнения первого этапа оптимизации, так как необходимая информация имеется,

а требуемое обращение базисной матрицы может быть упрощено, выполняться не для всех состояний или отсутствовать совсем. Проследим за этими возможностями повышения эффективности алгоритма по мере снижения числа ограничений в (5.5).

1. Ограничения (5.5) содержат только оба закона Кирхгофа. В этом случае исходный базис включает вектор $J_{r,1}$ и переменную $J_{r,1}$. Обратная базисная матрица первой итерации второго этапа

$$B_{(1)}^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ \hline M & & 0 \\ NZ_B & & 0 \end{array} \right\|^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 0 & C \\ \hline 1 & 00 \dots 0 \end{array} \right\| \quad (5.7)$$

включает матрицу коэффициентов распределения C , которая неизменна при неизменных параметрах Z_B ветвей. Таким образом, для подмножества состояний, различающихся только уровнями нагрузок и располагаемых мощностей источников питания в узлах, операция обращения может быть выполнена всего только один раз. Если подмножество состояний с изменяющимися параметрами ветвей формировать таким образом, что каждое последующее состояние отличается от предыдущего только параметром $Z_{b,i}$ одной ветви, то операция обращения может быть значительно упрощена. Обратная базисная матрица $B_{(1)}^{-1}$ может быть получена практически за одну итерацию модифицированного симплекс-метода. Так как в (5.5) меняется только один столбец, то можно использовать для этой цели обычную процедуру ввода в базис нового столбца на место старого, имеющего тот же номер, и произвести соответствующий пересчет обратной матрицы.

2. Ограничения (5.5) содержат только первый закон Кирхгофа. В этом случае исходный базис содержит токи ветвей, принадлежащие дереву расчетного графа, и переменную $J_{r,1}$. Обратная базисная матрица

$$B_{(1)}^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ \hline M_t & & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \dots 0 \end{array} \right\|^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & \Pi \\ \hline 1 & 00 \dots 0 \end{array} \right\| \quad (5.8)$$

содержит матрицу собственных путей Π и остается неизменной для всех расчетных состояний системы.

Использование мультипликативного представления обратной матрицы в случае полной системы ограничений (5.5) не дало ощутимого увеличения времени счета.

Наилучшим способом для поиска допустимого решения является использование двойственного симплекс-метода. Здесь можно в качестве допустимого решения для анализа k -го состояния системы использовать оптимальное решение, полученное для $(k-1)$ -го состояния системы. Двойственная допустимость (получение положительных оценок) легко достигается за счет перестановки внебазисных переменных с верхних (нижних) границ на нижние (верхние) границы. Для задачи с тридцатью переменными и десятью ограничениями вида (5.5) время счета в среднем снижается почти в 100 раз (правда, этот результат был получен с помощью программы, в которой использовались специальные методы работы со слабополными матрицами)*. Для задач большей размерности указанное снижение времени счета будет еще большим.

Однако для схем, число элементов которых $n > 100$, использование полной системы ограничений вида (5.5) и (5.6) приводит к тому, что время расчетов резко возрастает и становится практически неприемлемым, к тому же резко возрастает и число расчетных состояний систем. В этих случаях необходим переход на децентрализованные алгоритмы, которые реализуются с помощью метода релаксации. Этот метод позволяет разделить полную задачу оценки состояния системы на последовательность подзадач значительно меньшей размерности. Соответствующие подзадачам линейные программы выводятся из основной за счет удаления ограничений, которые становятся неактивными, и добавления ограничений, которые стали активными. На начальном этапе решения определяется потокораспределение без учета ограничений на пропускные способности элементов схемы. Это позволяет найти сразу по перегруженным элементам соответствующие активные ограничения и на их основе сформировать первую подзадачу, решение которой приведет нагрузки этих элементов (линий, трансформаторов и источников питания) в допустимые пределы. Если потокораспределение, соответствующее этому решению, таково, что появление новых перегруженных элементов отсутствует, то полная задача решена. В противном случае формируется следующая подзадача, в которой учи-

* Разработка программ и расчеты проведены ст. инж. А. М. Орловым.

тываются активные ограничения первой подзадачи и вновь появившиеся при проверке. Расчет продолжается до тех пор, пока i -й этап не приведет к выполнению всех ограничений.

Зарубежный опыт показывает, что для схем с числом элементов более 700 число активных элементов не превышает 20, а время оценки одного состояния в среднем составляет 1 с на ЭВМ типа IBM-370/165.

Очевидно, что реализация релаксационного метода требует, чтобы ограничения ЛП-программы формировались на основе оператора, позволяющего по заданным уровням нагрузок и генераций узлов определять нагрузки ветвей. Для этой цели ограничения типа (5.5) более целесообразно формировать на основе узловых уравнений. Тогда исходная полная линейная программа П1 в рамках аппроксимации по постоянному току примет вид:

$$\min W_{\beta} \text{ или } \min \mathcal{V};$$

$$\Delta U = M^T Y^{-1} (J_{\Gamma} - J_{\Pi}) = B^T (J_{\Gamma} - J_{\Pi});$$

$$\sum_i I_{\Gamma, i} = \sum_j I_{\Pi, j};$$

$$I_{\Gamma} \leq J_{\Gamma} \leq \bar{I}_{\Gamma};$$

$$0 \leq J_{\Pi} \leq \bar{J}_{\Pi};$$

$$\Delta U \leq \Delta U \leq \bar{\Delta U},$$

где $Y = MZ_{\beta}M^T$ — матрица узловых проводимостей размера $(n-1) \times (n-1)$, а потери напряжения ΔU и $\bar{\Delta U}$ фактически однозначно определяют предельные нагрузки ветвей, т. е. $\Delta U \equiv J_{\beta}$, $\bar{\Delta U} \equiv \bar{J}_{\beta}$.

Введем следующие обозначения. Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$ и $M = \{1, 2, \dots, m\}$ обозначают соответственно множества индексов узлов и ветвей, $K \in M$. И пусть, если T — матрица размера $n \times m$, то T^i_j — элемент матрицы T , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца; T_z — подматрица, содержащая строки матрицы T ($i \in Z$); T^k — подматрица, содержащая столбы матрицы T ($j \in K$); и T^k_z — подматрица с элементами T^i_j ($i \in Z, j \in K$). Проиллюстрируем с формальной стороны возможные этапы релаксационного подхода.

Для подзадачи, в которой учитываются не все переменные, соответствующим ветвям, а их совокупность, определяемая подмножеством индексов $K \in M$, ограниченная программа П2(K) примет вид:

$$\min W_{\beta} \text{ или } \min \mathcal{V};$$

$$\Delta U_K = B_K (J_{\Gamma} - J_{\Pi});$$

$$\sum_i J_{\Gamma, i} = \sum_j J_{\Pi, j};$$

$$I_{\Gamma} \leq J_{\Gamma} \leq \bar{I}_{\Gamma};$$

$$0 \leq J_{\Pi} \leq \bar{J}_{\Pi}; \quad \Delta U_K \leq \Delta U_K \leq \bar{\Delta U}_K.$$

Определив подмножества $H = KU \cup N$ и $G = KU(i_0)$ (где i_0 определяет индекс строки, соответствующей уравнению баланса $\sum_i I_{\Gamma, i} =$

$\sum_j I_{\Pi, j}$), перепишем программу П2(K) в более удобной компактной форме:

$$\min f x \text{ или } \min \varphi x;$$

$$T_{G, H}^H x_H = t_G;$$

$$x_H \leq x_H \leq \bar{x}_H.$$

Решение здесь целесообразно осуществлять двойственным симплекс-методом, что упрощает работу координирующей процедуры, ведущей обмен информацией между подзадачами. Пусть $\Delta U(K)$, $J_{\Gamma}(K)$ и $J_{\Pi}(K)$ определяют базис оптимального решения $x_H(K)$, тогда имеем $\Delta U_K(K) = B_K J_{\Gamma}(K) - B_K J_{\Pi}(K)$, а нагрузки ветвей, не учитываемых в рассматриваемой подзадаче, определяются на основе уравнения

$$\Delta U_{\bar{K}} = B_{\bar{K}} J_{\Gamma}(K) - B_{\bar{K}} J_{\Pi}(K),$$

где $\bar{K} = M - K$.

Полученные результаты могут привести к двум ситуациям:

1. $|\Delta U_{\bar{K}}(K)| \leq \Delta \bar{U}_{\bar{K}}$ и $|\Delta U_{\bar{K}}(K)| \leq \Delta \bar{U}_{\bar{K}}$ — что отражает факт отсутствия перегрузок в «нерассмотренных» ветвях, т. е. $x_H(K)$ является также оптимальным решением полной программы П1.

2. Для индексов $i \in \bar{K}$ ограничения п. 1 не соблюдаются, что отражает факт наличия перегрузок в некоторых из «нерассмотренных» ветвей. Пусть эти индексы принадлежат множеству $F(K)$, а $I(K)$ — множество индексов базисных переменных. Образует новое множество индексов $K^* = K \cup I(K) + F(K)$ и перейдем к решению новой подзадачи П2(K*) двойственным симплекс-методом. В качестве начального базиса программы П2(K*) примем вектор $x_{H^*}(K)$, где $H^* = K^* \cup N$, а множество индексов базисных компонент $x_{H^*}(K)$ при этом $I^* = I(K) - K \cap I(K) + F(K)$.

Операция обращения матрицы узловых проводимостей является наиболее «узким» местом рассматриваемого подхода. Ее следует значительно упростить, используя то обстоятельство, что каждое из последующих расчетных состояний системы отличается от предыдущего небольшим количеством неработоспособных ветвей. Это позволяет вместо обращения полной новой матрицы Y^* воспользоваться матрицей Y^{-1} , полученной для предыдущего состояния системы, и дополнительным обращением матрицы значительно меньших размеров:

$$Y^* = Y - MR \{Z_R^R\}^{-1} \{M^R\}^T,$$

откуда

$$[Y^*]^{-1} = Y^{-1} + Y^{-1} M^R \{Z_R^R - [M^R]^T Y^{-1} M^R\}^{-1} [M^R]^T Y^{-1},$$

где множество R определяет множество индексов ветвей, статус которых изменился по сравнению с предыдущим состоянием расчетной схемы.

5.3. Корректировка решения при оценке состояния системы

Корректировка решения является необходимым средством в условиях его неоднозначности, кроме того, она позволяет, используя линейный подход, получить решение, приближающее к решению, даваемому нелинейными моделями. Таким образом, в результате корректировки снимаются некоторые свойства ограниченности линейных моделей, повышается их конкурентоспособность, так как остается основное преимущество, а именно более быстрое, чем у нелинейных методов, отыскание оптимальной точки.

Причины неоднозначности решения были указаны в § 5.1. Геометрическая интерпретация этого факта представлена на рис. 5.3. Отсюда ясно, что неоднозначность решения появляется всегда, когда гиперплоскость, определяемая целевой функцией, параллельна по крайней мере одной из граней, определяемых ограничениями (5.6). При постановке $\min W_n^{(k)}$ таким ограничением является уравнение баланса. Для коррекции решения необходимо исключить параллельность «линий уровня» и граней области допустимых изменений переменных. Этого можно добиться переформированием целевой функции и ограничений пределов изменения переменных в ограничении (5.6). Новые пределы изменения переменных должны формироваться на основе «желаемого решения», для предварительного получения которого могут быть использованы пропорциональное ограничение потребителей, равенство относительных приростов $\partial U(P)/\partial P$ или другие соображения.

Так, пусть для примера, показанного на рис. 5.3, точка C является желаемым решением (x_1^*, x_2^*) , а обычная линейная процедура привела к решению, являющемуся точкой A . Ясно, что показанные на рис. 5.3 измененная допустимая область FEACD и новая целевая функция $y'(x) = c_2 x_2$ приведут к тому, что скорректированное решение совпадает с желаемым. В данном примере корректировка может быть осуществлена за одну итерацию обычной линейной симплекс-процедуры.

Анализ поставленной задачи показывает, что одна итерация требуется в случае, когда в базисе находится

переменная, представляющая ток нагрузки какого-либо j -узла, а остальные переменные (нагрузки) находятся на своих предельных уровнях. В общем случае число итераций определяется числом переменных $J_{n,j}$, находящихся в базисе. Идентификация наличия неоднозначного решения довольно просто определяется по $(m+1)$ -й строке симплекс-таблицы (строка оценок), так как не-

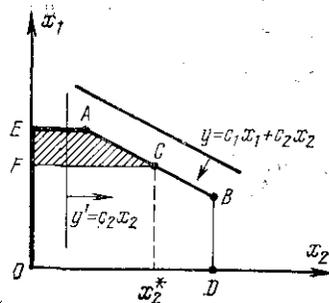


Рис. 5.3. Изменение допустимой области и целевой функции для корректировки решения.

однозначность решения характеризуется наличием нескольких оптимальных базисов с неизменным значением целевой функции. Это происходит тогда, когда в базис вводится переменная с нулевой оценкой. Таким образом, наличие нулевых оценок, например, у переменных $J_{n,j}$ и $J_{n,k}$ указывает, что перераспределение имеющегося дефицита мощности между узлами j и k и поток мощности по ветви или ветвям, связывающим эти узлы, не достигли своего предельного значения.

Очевидно, что основная цель корректировки — повысить значение переменных $J_{n,j}$, которые находятся ниже «желаемого уровня», т. е. скорректированная целевая функция в постановке $\min W_n^{(k)}$ должна иметь вид:

$$\max \sum_{i \in S} J_{n,i}, \quad S = \{j/J_{n,j} < J_{n,j}^*\}, \quad (5.9)$$

где $J_{n,j}^*$ — желаемое значение нагрузки в j -м узле.

В (5.6) ограничение $0 \leq J_n \leq \bar{J}_n$ принимает вид:

$$0 \leq J_{n,i} \leq J_{n,i}^*, \quad i \in S, \quad (5.10)$$

где

$$J_{n,i}^* \leq J_{n,i} \leq \bar{J}_{n,i}, \quad i \in R, \quad R = \{i/J_{n,i} > J_{n,i}^*\}. \quad (5.11)$$

Остающаяся иногда в «бездефицитной» части системы неоднозначность, связанная с переменными $J_{n,k}$, не влияет на результат, так как переменные $J_{n,k} = \bar{J}_{n,k}$. Поэтому, чтобы сохранить на неизменном уровне значение

$D^{(k)} \equiv \sum_j (J_{n,j} - J_{n,j})$, необходимо переменные $J_{r,k}$ оставаться такими, какими они были в условиях исходного неоднозначного оптимального решения.

Исходное неоднозначное решение является всегда допустимым для сформулированной (5.9) — (5.11) процедуры коррекции, что позволяет для первой итерации коррекции использовать оптимальную симплекс-таблицу, полученную до коррекции.

Приведем соотношения для перестройки программы расчета в случае простого двойственного симплекс-метода без включения в матрицу условий двусторонних ограничений $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ на переменные x . Строка оценок Δ определяется по выражению

$$\Delta = c_0 A^{\text{опт}}, \quad (5.12)$$

где c_0 — вектор-строка коэффициентов целевой функции при переменных, вошедших в оптимальный базис; $A^{\text{опт}}$ — оптимальная симплекс-таблица без $(m+1)$ -й строки.

Для получения двойственной допустимости каждая из небазисных переменных должна находиться на одной из своих границ: верхней при $\Delta_j < 0$ и нижней при $\Delta_j > 0$. Правые части (значения базисных переменных) $x_{b,i}$ пересчитываются по формуле

$$x_{b,i} = x_{b,i}^{\text{опт}} - \sum_{j \notin B} \Delta x_j A_{i,j}^{\text{опт}}, \quad (5.13)$$

где B — множество базисных переменных; Δx_j — изменение небазисной переменной при получении двойственной допустимости.

Приведенные соотношения справедливы, когда симплекс-таблица, кроме $(m+1)$ -й строки, остается неизменной. Это имеет место всегда, когда перестройка производится в рамках одного расчетного состояния системы, и при смене расчетного состояния, когда ограничения (5.5) представлены только первым законом Кирхгофа.

В заключение еще раз следует подчеркнуть, что представленная процедура при сохранении линейного подхода позволяет получать решения, близкие к решениям, даваемым нелинейными моделями. Получение «желаемых решений», необходимых для этого случая, не представляет трудностей, не связаных с громоздкими вычисле-

ниями и может быть определено с помощью результатов, даваемых неоднозначным решением, в силу того, что оно дает корректный интегральный показатель.

5.4. Анализ полного решения на основе аддитивных двойственных переменных

Синтез систем — обоснование и выбор параметров системы с учетом фактора надежности — в настоящее время находится в начальной стадии проработок. Попытки решения задачи синтеза путем многократных вариантовых решений задачи анализа из-за самого подхода не могут иметь ощутимого успеха. Разработка аппарата, который не обладал бы указанным выше недостатком — позволял наметить конструктивный подход к решению задачи синтеза, является актуальной задачей.

Возможность создания такого подхода, который позволял бы избежать многократных оценок надежности анализируемых вариантов развития системы, открывает применение двойственных оценок в линейных моделях. В отличие от традиционного использования двойственных переменных для анализа систем со статистическим (детерминированным) режимом функционирования, в этом параграфе развивается подход для систем со стохастически определенным режимом функционирования, для которых реализация выявленных направлений изменения пределов изменения параметров системы (например, пропускных способностей элементов и т. п.) должна оказаться наилучшей с точки зрения всего множества расчетных (последаварийных) состояний системы. Напомним, что оптимальное значение каждой двойственной переменной определяет положительное или отрицательное приращение целевой функции (W_n или Y) за счет единичного приращения (продолжительного или отрицательного) значения правой части ограничения из (5.6), т. е. в нашем случае — пропускных способностей элементов и т. п.) при условии, что рассматриваемый базис остается допустимым.

Представим задачу (5.3) в следующем виде:

$$\max c^{(k)} x^{(k)}; \quad (5.14)$$

$$A^{(k)} x^{(k)} = b^{(k)}; \quad (5.15)$$

$$\alpha^k \leq x^{(k)} \leq \beta^{(k)}, \quad (5.16)$$

где целевая функция определяет оценку фактически доставленной энергии потребителям $W_{\Phi}^{(k)} = \sum_{k \in K} (W^{(k)} - W_n^{(k)})$; $W^{(k)}$ — значение энергии, доставляемой потребителям в абсолютно надежной системе, т. е. при $J_n^{(k)} = J_n^{(k)}$.

В соответствии с теорией двойственности линейного программирования для k -го расчетного состояния можно записать:

$$\max W_{\Phi}^{(k)} = c^{(k)} x^{(k)} = \pi^{(k)} b^{(k)} + \bar{\pi}^{(k)} \beta^{(k)} - \underline{\pi}^{(k)} \alpha^{(k)}, \quad (5.17)$$

где $\pi^{(k)}$, $\bar{\pi}^{(k)}$ и $\underline{\pi}^{(k)}$ — векторы двойственных переменных, соответствующие ограничению (5.15) и границам $\alpha^{(k)}$ и $\beta^{(k)}$.

Заметим, что двойственные переменные остаются неизменными при $b^{(k)} = 0$ и $b^{(k)} \neq 0$, когда используется подстановка $x' = x + |x|$. Поэтому без потери общности можно считать, что $b = 0$, тогда (5.17) примет более простой вид.

Используемый интегральный показатель (5.1) обладает свойством аддитивности. Очевидно, что и показатель W_{Φ} обладает этим же свойством. Поэтому для фактически доставленной потребителям энергии по всем расчетным состояниям $k \in K$ справедливо выражение

$$W_{\Phi} = \sum_{k \in K} W_{\Phi}^{(k)} = \sum_{k \in K} (\bar{\pi}^{(k)} \beta^{(k)} - \underline{\pi}^{(k)} \alpha^{(k)}). \quad (5.18)$$

Изменение пределов $\alpha^{(k)} + \Delta \alpha$ и $\beta^{(k)} + \Delta \beta$ приводит к следующему изменению целевой функции:

$$W_{\Phi} + \Delta W_{\Phi} = \sum_{k \in K} [\bar{\pi}^{(k)} (\beta^{(k)} + \Delta \beta) - \underline{\pi}^{(k)} (\alpha^{(k)} + \Delta \alpha)]. \quad (5.19)$$

Относительно небольшие изменения с некоторыми допущениями можно считать постоянными для всех расчетных состояний системы, что видно из следующего примера. Пусть в j -м узле системы источник питания состоит из однотипных генераторов. Легко видеть, что установка дополнительного агрегата приведет к увеличению значения $J_{r,j}$ на значение $\Delta J_{r,j}$, одинаковое для всех значений располагаемой мощности, так как обычно в моделях учитывается одновременный отказ не более

двух-трех агрегатов. Тогда изменение интегрального показателя

$$\Delta W_{\Phi} = |\Delta W_n| = \left(\sum_{k \in K} \bar{\pi}^{(k)} \right) \Delta \beta - \left(\sum_{k \in K} \underline{\pi}^{(k)} \right) \Delta \alpha. \quad (5.20)$$

В большинстве практических случаев для $J_{r,r} = 0$ и $\Delta \alpha_r = 0$, а для ветвей $\alpha = -\beta$ и $\Delta \alpha = -\Delta \beta$, что приводит фактически к одному вектору π_{Σ} и

$$\Delta W_{\Phi} = |\Delta W_n| = \left\| \begin{matrix} \Delta \beta_1 \\ \Delta \beta_2 \\ \vdots \\ \Delta \beta_N \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \pi_{\Sigma 1} \\ \pi_{\Sigma 2} \\ \dots \\ \pi_{\Sigma N} \end{matrix} \right\|. \quad (5.21)$$

Таким образом, показана возможность получения аддитивного двойственного критерия $\pi_{\Sigma i}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), значение которого определяет степень влияния i -го параметра системы на ее выходной эффект. Это позволяет проанжировать элементы системы, т. е. найти среди них определяющие. Экономическая целесообразность изменения i -го параметра системы (например, пропускной способности i -й ветви) легко может быть оценена сравнением затрат, требуемых на изменение параметра, с величиной $y_0 \Delta W_n$, где y_0 — усредненное значение ущерба от недоотпуска электрической энергии.

Аналогичный анализ можно проводить и в случае, когда используется постановка задачи вида $\min y$.

Используемые линейные процедуры обычно не содержат в симплекс-таблицах ограничения (5.16). В этом случае получение векторов двойственных переменных представляет небольшую дополнительную задачу. Используя условия Куна-Таккера о дополняющей нежесткости, легко можно получить, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{\pi}_j &= -(\pi A_j - c_j) = -\Delta_j \quad \text{для } x_j = \beta_j; \\ \bar{\pi}_j &= 0 \quad \text{для } x_j \neq \beta_j; \\ \underline{\pi}_j &= \pi A_j - c_j = \Delta_j \quad \text{для } x_j = \alpha_j; \\ \underline{\pi}_j &= 0 \quad \text{для } x_j \neq \alpha_j, \end{aligned} \right\} \quad (5.22)^*$$

Δ_j — двойственная оценка j -го столбца ($j = 1, 2, \dots, N$), которая находится из последней строки симплекс-таблицы. В общем случае для любого вида симплекс-таблицы вектор двойственных переменных

$$\pi = c_0 B^{-1}; \quad (5.23)$$

* В выражениях (5.22) и (5.23) для простоты написания опущен индекс k , означающий k -е состояние системы.

здесь c_0 — вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; B^{-1} — обратная базисная матрица.

Корректность предложенного подхода обусловлена поведением двойственных оценок, связанных со свойствами как самой прямой задачи, так и ее решения (вырожденность, неоднозначность).

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Прежде всего отметим, что вырожденность самой задачи ($b=0$) не оказывает влияния на двойственную оценку, а имеет чисто алгоритмический аспект.

Способы устранения неоднозначности в решении прямой задачи были рассмотрены в § 5.3. К тому же, если эти решения не все являются вырожденными (что практически всегда имеет место в наших задачах), то двойственные оценки всегда однозначны.

Представим ситуацию, когда среди множества оптимальных решений прямой задачи не удается найти невырожденный план, т. е. двойственное решение неоднозначно. Рассмотрим, к чему может привести такая ситуация. Неоднозначность получения двойственных оценок в нашем анализе говорит о том, что одно и то же изменение выходного эффекта может быть достигнуто разными способами. Эти способы равноправны по отношению к критерию оптимизации (5.14), и поэтому корректность анализа сохраняется. Но такая ситуация может встретиться крайне редко, когда расчетное состояние системы характеризуется значительным числом неработоспособных элементов и, в силу этого, обладает чрезвычайно малой вероятностью появления, что приводит к исчезающе-малым значениям $\pi_j^{(k)}$,

которые практически не влияют на $\sum_{k \in K} \pi_j^{(k)}$. Стремление сократить

размерность задачи за счет уменьшения числа ограничений приводит к уменьшению возможности появления вырожденных решений. Проверочные расчеты подтвердили устойчивость определения аддитивных двойственных критериев при вариации пределов изменения параметров системы до 10%. Однако и при большей вариации такой подход будет правильно указывать на критические элементы.

Применение в практике проектирования полученных аддитивных двойственных оценок позволяет проранжировать элементы системы с точки зрения влияния их на выходной эффект и оценить технико-экономическую целесообразность возможного изменения параметров без проведения вариантных расчетов.

5.5. Полиномиальные модели и возможности аналитического решения задачи *

Как было показано выше, любое k -е состояние системы электроснабжения полностью характеризуется величиной ограничения потребителей, т. е. оценками $D^{(k)}$ или $D_j^{(k)}$, которые соответствуют минимуму недоотпуска электроэнергии или ущерба. При принятых допущениях величины $D^{(k)}$ и $D_j^{(k)}$ имели линейную зависимость от параметров режима $J_{n,j}^{(k)}$ при фиксированных для этого состояния параметрах систе-

* Этот параграф написан совместно с кандидатами техн. наук Н. К. Круг и Л. В. Ярных.

мы $\Pi^{(k)} = \{ \bar{J}_r^{(k)}, \bar{J}_n^{(k)}, J_B^{(k)}, \bar{J}_B^{(k)} \}$. Так как параметры системы дискретно меняются при смене состояний системы, величины $D^{(k)}$ и $D_j^{(k)}$ являются дискретными функциями параметра $\Pi^{(k)}$, определяемо-

го на множестве расчетных состояний системы K . Зависимость $D^{(k)} = f(\Pi^{(k)})$ имеет сложный характер и не может быть точно представлена в аналитическом виде.

Обобщенные математические модели для рассматриваемого случая можно получить методами теории планирования эксперимента, которые позволяют получить аппроксимирующий полином $D(\Pi)$. Этот полином (естественно, с некоторой погрешностью) позволяет определить оценку $D^{(k)}$ (или $D_j^{(k)}$) для любого k -го состояния системы ($k \in K$).

«Эксперимент» в данном случае представляет собой расчет решения задачи (5.3), которое может быть осуществлено одним из вышепредставленных способов. Количество «экспериментов», обусловленное соответствующим планом, относительно невелико. Так, для системы с числом расчетных состояний более 700 соответствующий план требует всего 27 предварительных расчетов, а для систем, у которых число расчетных состояний составляет десятки тысяч, их число не превышает 2000.

Полученный полином может быть использован для оценки величин $D^{(k)}$ и $D_j^{(k)}$ практически для всего множества расчетных со-

стояний K вместо рассмотренных выше оптимизационных процедур, что резко сократит время решения задач (5.1) или (5.2). Однако теория планирования эксперимента на этапе использования ее результатов представляет другую, еще более привлекательную возможность. Переменные аппроксимирующего полинома, как и исходные параметры системы (уровень располагаемой мощности источника питания в узле, пропускная способность ветви и т. д.), связаны известной оценкой вероятности их появления, т. е. значением $D(\Pi)$ является функцией случайных величин с дискретным законом распределения. Это обстоятельство позволяет определить числовые характеристики для $D(\Pi)$: математическое ожидание, дисперсию и высшие моменты, а по ним построить или подобрать аппроксимативное непрерывное распределение $F(D)$. Переход к непрерывному распределению вполне оправдан, так как число расчетных состояний велико и величины $D^{(k)}$ расположены на оси D достаточно «плотно». Такой прием, как известно, часто используется в практических приложениях теории вероятностей. Наличие такого распределения практически дает возможность аналитического решения задачи по распределению интегральных показателей W_n или U .

Для конкретности рассмотрим постановку, когда в качестве показателя надежности используется оценка математического ожидания недоотпуска энергии $W_n = \sum_{j=1}^N W_{n,j}$.

Заметим, что числовые характеристики определяются на основе вероятностей, представляющих собой средние относительные длительности нахождения каждого из параметров системы на соответствующем уровне, соответственно элемент вероятности имеет смысл средней относительной длительности существования D . Исходный

показатель надежности определится по формуле

$$W_R = c \int_0^{\infty} Df(D) dD, \quad (5.24)$$

где коэффициент c определяется расчетным периодом и размерностью величины D , принятой в расчетах.

Искомое полиномиальное приближение следует представить в следующем виде:

$$D = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=k}^n a_{i,k} x_i x_k, \quad (5.25)$$

где n — число изменяющихся параметров; x_i — параметры системы, характеризующиеся значениями на разных уровнях s и вероятностями $p_{i,s}$ их появления; a_i , $a_{i,i}$, $a_{i,k}$ — коэффициенты, подлежащие определению.

При дискретно-меняющихся исходных параметрах для получения выражения (5.24) теория планирования эксперимента рекомендует применять многоуровневые регулярные планы. Эти планы записываются в виде матрицы, состоящей из чисел натурального ряда $0, 1, 2, \dots, R$ и содержащей N строк, здесь R — порядок полинома. Число уровней s связано с порядком полинома соотношением $s = R + 1$. Каждая строка матрицы планирования соответствует определенной комбинации уровней параметров и определяет условия одного эксперимента расчета.

Матрица регулярного плана, состоящая из N комбинаций уровней факторов, отвечает требованию охвата многофакторного пространства с минимальным количеством рассматриваемых комбинаций уровней и соответствующих расчетов и характеризуется равномерным распределением точек по всему многофакторному пространству. Формализованная процедура позволяет преобразовать эту матрицу в ортогональную матрицу переменных x_i , что дает возможность получить независимые оценки коэффициентов полинома (5.25) и преобразовать его к более удобному виду

$$D = a'_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^l a'_{i(l)} x_l^i + \sum_{i < m}^N \sum_{l=1}^R \sum_{r=1}^R a'_{i(l), m(r)} x_l^i x_m^r. \quad (5.26)$$

Коэффициенты ряда (5.26) определяются с помощью метода наименьших квадратов по результатам N экспериментов и затем для выражения (5.26) преобразуются в соответствии с условиями ортогональности матрицы планирования.

При независимых факторах выражение для математического ожидания величины D , определяемой по формуле (5.25), имеет следующий вид:

$$M[D] = \bar{D} = a'_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^R a'_{i(l)} M[x_l^i] + \sum_{i < m}^N \sum_{l=1}^R \sum_{r=1}^R a'_{i(l), m(r)} M[x_l^i] M[x_m^r],$$

где $M[x_l^i] = \sum_{s=1}^s x_{l,s}^i p_{l,s}$, а для дисперсии

$$\begin{aligned} \sigma_D^2 = M\{D - M[D]\}^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^s (a'_{i(l)})^2 M\{x_l^i - M[x_l^i]\}^2 + \\ &+ \sum_{i < m}^N \sum_{l=1}^R \sum_{r=1}^R [a'_{i(l), m(r)}]^2 \{M[x_l^i] M[x_m^r] - \\ &- M^2[x_l^i] M^2[x_m^r] + 2K_{i,m}\}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

где под $K_{i,m}$ подразумевается сумма математических ожиданий парных произведений всех слагаемых ряда $D - M[D]$.

Аналогичные формулы могут быть получены для третьего и четвертого центральных моментов.

Применение данного подхода показало, что наилучшая полиномиальная аппроксимация достигается тогда, когда для «бездефицитных» в реальных условиях состояний системы в исходе экспериментов принимается не $D=0$, а $D < 0$. Величина D определяется по значению, на которое могла бы быть увеличена нагрузка узлов при рассматриваемых уровнях располагаемой мощности источников питания. Для таких состояний формулировка линейной оптимизационной процедуры требует незначительных переделок. Очевидно, что указанный прием дает возможность наилучшим образом описать зависимость дефицита от значений уровней генераций и нагрузок узлов.

Результаты проверочных расчетов показали, что в качестве аппроксимирующего распределения можно принять нормальное распределение. Его «хвост» достаточно хорошо описывает фактическое распределение величины D , определяемой по непосредственным оценкам последнего для всего множества расчетных состояний. Для нормального распределения формула (5.24) принимает вид:

$$W_R = \frac{c}{\sqrt{2\pi}\sigma_D} \int_0^{\infty} D \exp\left[-\left(\frac{D - \bar{D}}{2\sigma_D^2}\right)^2\right] dD = \frac{c\sigma_D}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\bar{D}^2}{2\sigma_D^2}\right] + c\bar{D} \int_{-\bar{D}/\sigma_D}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = c\sigma_D(A + B). \quad (5.28)$$

Здесь составляющая A вычисляется непосредственно, а составляющая $B < 0$ может быть определена с помощью таблиц нормальной функции распределения $\Phi^*(\bar{D}/\sigma)$. Необходимо отметить требование повышенной точности вычисления, на что указывают следующие численные примеры. Для отношений $\rho = \bar{D}/\sigma_D = 2, 3$ и 4 , что соответствует вероятностям $P(D > 0) = 0,9772; 0,9986$ и $0,9998$, указанные составляющие имеют соответственно значения $0,05400 - 2 \cdot 0,0228; 0,004429 - 3 \cdot 0,00135; 0,0001338 - 4 \cdot 0,0000317$. При пользовании формулой (5.27) необходимо помнить, что даваемая выражением (5.26) величина $\bar{D} < 0$.

Применение рассмотренного подхода в проведенных сравнительных расчетах дало результаты, отличающиеся на 20—30% от результатов, получаемых при непосредственной оценке величин W_n по всему множеству расчетных состояний K . Таким образом, опыт использования полиномиальных моделей можно считать удавшимся, а их применение — перспективным.

Построение полиномиальных моделей для разнообразных практических случаев требует разработки универсального алгоритма построения планов эксперимента для случаев, когда изменяющиеся параметры могут иметь произвольное и неодинаковое число уровней. Как показывают предварительные исследования, на этом пути нет принципиальных трудностей.

Глава шестая

ОЦЕНКА ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ

6.1. Исходная информация и особенности решаемой задачи

При аналитических методах расчетов показатели надежности системы электроснабжения или вероятностные характеристики специально выбранных состояний системы являются вполне определенными функциями показателей надежности (параметров θ_i) элементов. Точное значение последних не известно (мы имеем функцию многих неизвестных параметров), а статистический материал* позволяет найти их точечные оценки и доверительные интервалы, соответствующие заданной (обычно назначаемой произвольно) доверительной вероятности γ_i . Необходимо также учитывать, что утверждение о близости каждой из имеющихся оценок своему неизвестному истинному значению параметра имеет вероятностный характер: чем больше значение γ_i , тем шире доверительный интервал, который с вероятностью, не меньшей γ_i , накроет истинное значение этого параметра. Таким образом, анализ схемной надежности по ретроспективным данным является задачей с вероятностно-заданными исходными данными.

Известно, что когда число отказов элементов невелико, естественная мера разброса случайной величины оценки (коэффициент вариации) велика ($\rho > 1$), поэтому величина оценки не может служить устойчивой характеристикой надежности элементов. Кроме того, в силу

* Сбор и отработка статистического материала обычно соответствуют плану $[N, B, T]$, при котором за неизменным числом восстанавливаемых элементов N ведется наблюдение в течение периода T .

разного объема выборок по различным элементам эти оценки могут быть статистически неравноценны. Точечная оценка показателей надежности системы $\varphi(\theta)$, полученная на основе точечных оценок показателей надежности элементов, имеет относительную ценность и в некоторых случаях может привести к ошибочному завышению надежности.

Указанные свойства исходных данных и стремление к получению результата в более информативной с практической точки зрения форме приводят к необходимости вычисления доверительных границ для показателей надежности системы или вероятностных характеристик ее специально выбранных состояний. В качестве последних обычно используются параметры потоков возникновения состояний системы с заданными последствиями, средние длительности существования состояний и вероятности их появления.

Доверительные границы как основа для последующего принятия технических решений сравнительно давно используются в некоторых областях техники при оценке надежности и эффективности сложных систем. Это положение нашло отражение в ГОСТ 13377-75, где в качестве одного из возможных показателей надежности рекомендуется гамма-процентный ресурс, являющийся ничем иным, как нижней доверительной границей для выработки изделия (системы) до оговоренного предельного состояния. В последнее время возникла потребность в применении подобного рода показателей и для электроэнергетических систем: при нормировании показателей надежности рекомендуется опираться не только на математические ожидания (точнее — их оценки), но и на их предельно допустимые значения с заданной вероятностью.

При сравнительных расчетах надежности различных вариантов выполнения систем электроснабжения с неопределенностью исходной информации можно мириться. При оценке абсолютной надежности системы определение доверительного интервала, характеризующего точность и достоверность результата, является существенно необходимым.

В настоящее время поставленная задача решена для систем из восстанавливаемых элементов. Накопленный теоретический и практический опыт позволяет выполнить сравнительный анализ имеющихся подходов, но

непосредственное использование подходов для восстановления систем, для элементов которых характерна статистика более общего вида, не представляется возможным. Однако идеи общего метода, предложенного Ю. К. Беляевым, безусловно, являются плодотворными и для восстанавливаемых систем.

Прежде чем перейти к рассмотрению этого метода, укажем на некоторые приближенные подходы решения задачи и некоторые дополнительные практические аспекты этой проблемы.

Известные из теории вероятностей правила переноса ошибок позволяют оценить дисперсию функции $\hat{\varphi}(x)$:

$$D[\hat{\varphi}(x)] = \sum_i \left[\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial x_i} \right]^2 D(x_i) \approx \sum_i \left[\frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_i} \right]^2 D(x_i). \quad (6.1)$$

Здесь неизвестный параметр θ заменен оценкой x_i , а формула точна лишь в том случае, когда разложение в ряд Тейлора функции $\hat{\varphi}(x)$ оканчивается членом, содержащим $\hat{\varphi}'(x)$, т. е. когда функция $\varphi(\theta)$ является линейной. В общем случае формула (6.1) дает приближение, справедливое лишь для небольших отклонений θ от x_i , т. е. когда имеется весьма представительная статистика по отказам элементов.

Использование нормальной аппроксимации для распределения вероятности для функции $\hat{\varphi}(x)$ позволит известными методами для заданной доверительной вероятности γ определить границы доверительного интервала на основе выражения

$$|\varphi(\theta) - \hat{\varphi}(x)| \leq t_\gamma \sqrt{D[\hat{\varphi}_i(x)]}, \quad (6.2)$$

где $t_\gamma = \arg \Phi\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$ — функция, обратная нормальной функции распределения, т. е. такое значение аргумента, при котором функция $\Phi^*(t_\gamma) = (1+\gamma)/2$.

Формула (6.1) дает достаточно точное значение дисперсии для показателей надежности последовательных систем. Для резервированных систем определенные по формуле (6.1) результаты полезны лишь в том смысле, что они указывают порядок величины $D[\hat{\varphi}(x)]$.

Окончательный результат, даваемый формулой (6.2), дает значительную погрешность для случая малого количества данных по отказам элементов — в этом заключена существенная ограниченность рассмотренного подхода.

Известно, что в зависимости от установленной доверительной вероятности может быть получено множество различных доверительных интервалов для элементов и, как следствие, для системы. Эти вероятности обычно назначаются произвольно, при этом придерживаются следующего интуитивного правила: чем больше статистический материал или чем ответственнее элемент (система), тем выше доверительная вероятность, и наоборот. Теория вероятностей не располагает критериями для определения предпочтительной величины доверительной вероятности. Один из первых подходов к решению этого важного для расчетов надежности вопроса сделан Я. А. Рипсом. Выбор интервальных оценок конкретизируется (оптимизируется) на основе весьма общей идеи о наличии определенного количества информации, содержащейся в исходных оценках. В гл. 1 именно этот подход был использован при определении доверительных интервалов для показателей надежности элементов.

Исходные посылки конкретизации выбора базируются на основной цели статистического эксперимента (наблюдения), которая заключается в снятии неопределенности, существовавшей до его проведения. Количество получаемой информации (как снятая неопределенность) существенно зависит от выбора статистического решения о доверительном интервале. Отсюда ясно, что этот выбор может быть оптимизирован на основе информационного критерия. Не приводя здесь формулы для отношения полученной информации к априорной энтропии ситуации, остановимся на результатах, имеющих непосредственное отношение к рассматриваемой задаче. Анализ результатов, представленных Я. А. Рипсом, показал, что значение оптимальной доверительной вероятности γ практически не зависит от реализовавшейся в эксперименте оценки вероятности и снижается по мере снижения числа наблюдений. Тогда, распространяя их на случай анализа надежности системы и считая, что число наблюдений равно 1, а число отказов равно 0, следует принять $\gamma_{\text{опт}} \rightarrow 0,8$.

Результаты, которые представлены ниже, правомерны для расчетов эксплуатационной надежности систем электроснабжения при наличии ретроспективных данных по отказам ее элементов, а также для некоторых проектных вариантов, выполняемых на основе элементов, апробированных в эксплуатации.

6.2. Общий метод построения доверительных интервалов и анализ его конкретных реализаций для невозстанавливаемых систем

Общий метод построения доверительного интервала для функций многих неизвестных параметров, предложенный Ю. К. Беляевым, является естественным обобщением методики для случая одного неизвестного параметра — в качестве случайной величины, распределение которой в данном случае зависит от неизвестных значений параметров $\Theta = [\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N]$, выступает оценка $\varphi(x)$ для значения заданной функции $\varphi(\Theta)$, где $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]$ — вектор исходов наблюдений (имеющаяся статистика). Основу этого метода составляет выбор некоторой системы γ — доверительных множеств $H(x)$, такой, что

$$P[\Theta \in H(x)] \geq \gamma. \quad (6.3)$$

После того как множество $H(x)$ построено, границы $\underline{\varphi}(x)$ — доверительного интервала $\varphi(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$ находятся из соотношений

$$\underline{\varphi}(x) = \inf_{\Theta \in H(x)} \varphi(\Theta), \quad \bar{\varphi}(x) = \sup_{\Theta \in H(x)} \varphi(\Theta), \quad (6.4)$$

т. е. в общем случае задача сводится к нелинейному программированию.

Если неравенство (6.3) нельзя усилить, увеличив γ , то γ является коэффициентом доверия для множества $H(x)$. В противном случае следует считать, что коэффициент доверия не хуже γ .

Таким образом, нахождение доверительных границ показателей надежности сложной системы в общем случае состоит из двух этапов: 1) построения γ — доверительного множества $H(x)$, 2) отыскания минимума или максимума функции $\varphi(\Theta)$ по доверительной области $H(x)$ в N -мерном пространстве параметров Θ (рис. 6.1).

Рассмотренный подход к оценке доверительных границ ориентирован на методы математического програм-

мирования, конкретное применение которых, как известно, зависит от вида целевой функции и ограничений. Основным его преимуществом является отсутствие необходимости определения закона распределения для искомого значения функции $\varphi(x)$, что в случае даже не-большого N является чрезвычайно трудоемкой процедурой, а иногда и практически невыполнимой аналитически. Но, следует отметить, что этот подход дает не точную, а приближенную оценку доверительных границ, на что указывают знаки неравенства в выражении (6.3)

Специфика (вид) функции $\varphi(\Theta)$ не влияет на вид доверительных множеств, для которых потенциально существует бесконечное число способов их построения.

При выборе системы доверительного множества необходимо исходить из двух основных положений: 1) система доверительных множеств должна быть достаточно простой для того, чтобы в соответствии с (6.3) и (6.4) найти удобный алгоритм отыскания $\varphi(x)$ или $\bar{\varphi}(x)$; 2) при заданном коэффициенте доверия γ значение $\varphi(x)$ или $\bar{\varphi}(x)$ должно быть возможно ближе к неизвестному значению заданной функции $\varphi(\Theta)$. Отсюда ясно, что выбранная система доверительных множеств наибольшим образом обуславливает метод и конкретный алгоритм определения доверительных границ.

В настоящее время не представляется возможным дать простой и точный критерий для сравнения различных методов построения доверительных границ. Более предпочтительным следует считать тот метод, для которого при заданном значении γ получаемые нижние (верхние) доверительные границы оказываются большими (меньшими), чем при других методах, или при одинаковых границах получается большее значение коэффициента доверия.

Практически приемлемые алгоритмы решения поставленной общей задачи разработаны для невозстанав-

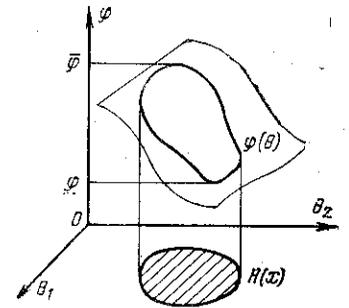


Рис. 6.1. Общая методика построения доверительных границ и доверительного множества $H(x)$ для случая $N=2$.

ливаемых систем со схемами последовательного, параллельно-последовательного и последовательно-параллельно-последовательного типа. Для систем этого класса функция $\varphi(\theta)$ обычно представляет вероятность безотказной работы $P(t)$, показатель $Q(t) = 1 - P(t)$ или интенсивность отказов системы и может быть задана одной из следующих формул:

$$\varphi(\theta) = \sum_{i=1}^N \varphi(\theta_i); \quad (6.5)$$

$$\varphi(\theta) = \prod_{i=1}^N \varphi(\theta_i). \quad (6.6)$$

Роль пространства испытаний (наблюдений) x играют точки $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_N]$ N -мерного пространства, где d_i — число зарегистрированных отказов i -го элемента ($i = 0, 1, 2, \dots, N$). Вероятностная мера на пространстве исходов испытаний X имела вид:

$$P_\theta(d_i = k_i; i = \overline{1, N}) = \prod_{i=1}^N \frac{(c_i \theta_i)^{k_i}}{k_i!} \exp(-c_i \theta_i), \quad (6.7)$$

т. е. было принято, что d_i имеет пуассоновское распределение с параметром $c_i \theta_i$.

Несмотря на то что потенциально существует бесконечное число способов построения систем доверительных множеств $\{H(x)\}$, практическое применение нашли пока γ -доверительные множества, которые являются многогранниками (рис. 6.2). Дадим их описание.

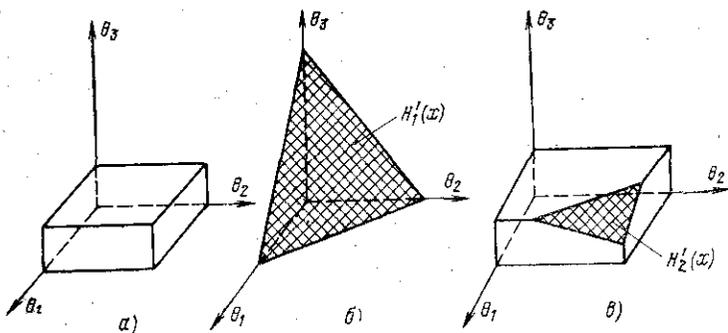


Рис. 6.2. Системы доверительных множеств.

а — многомерные прямоугольники $H_0(x)$; б — система $H_1(x)$ (прямоугольная пирамида, отсекаемая гиперплоскостью); в — система $H_2(x)$ (прямоугольник, усеченный гиперплоскостью).

1. Система $H_0(x)$ строится на основе пересечения доверительных множеств (интервалов), соответствующих каждому из параметров θ_i , в итоге получается многомерный прямоугольник вида

$$H_0(x) = \{\theta_i : 0 \leq c_i \theta_i \leq \Delta_{1-\gamma_0}(d_i), i = \overline{1, N}\}, \quad (6.8)$$

где $\Delta_\alpha(d) = z$ — решение уравнения

$$\sum_{c=0}^d \frac{z^c}{c!} e^{-z} = \alpha,$$

$\Delta_{1-\gamma_0}(d_i)$ является верхней доверительной границей для d_i . Коэффициент доверия для этой системы

$$\gamma = \prod_{i=1}^N \gamma_{0,i}. \quad (6.9)$$

2. Построение системы $H_1(x)$ основано на том факте,

что величина $\sum_{i=1}^N d_i$ также имеет пуассоновское распре-

деление с параметром $\sum_{i=1}^N c_i \theta_i$. Поэтому доверительными

множествами с коэффициентом доверия γ , будут множества вида

$$H_1(x) = \left\{ \theta_i : 0 \leq \sum_{i=1}^N c_i \theta_i \leq \Delta_{1-\gamma} \left(\sum_{i=1}^N d_i \right), i = \overline{1, N} \right\}. \quad (6.10)$$

Эти доверительные множества представляют собой прямоугольные пирамиды, отсекаемые от первого ордината гиперплоскостью вида

$$\sum_{i=1}^N c_i \theta_i = \text{const.} \quad (6.11)$$

3. С помощью объединения множеств $H_0(x)$ и $H_1(x)$ получаем еще одну систему доверительных мно-

жеств, которые представляют собой многомерные прямоугольники, усеченные гиперплоскостями, т. е.

$$H_2(x) = H_0(x) \cap H_1(x) = \left\{ \theta_i : 0 \leq c_i \theta_i \leq \Delta_{1-\gamma_0}(d_i), 0 \leq \sum_{i=1}^N c_i \theta_i \leq \Delta_{1-\gamma_1} \left(\sum_{i=1}^N d_i \right), i=1, N \right\}. \quad (6.12)$$

Системе $H_2(x)$ соответствует коэффициент доверия, не меньший $\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_0 - 1$.

Непосредственное использование доверительных множеств и алгоритмов определения доверительных границ, разработанных для невозстанавливаемых систем, не может быть осуществлено для систем с восстанавливаемыми элементами в силу того, что для последних характерна статистика более общего вида. Но, несмотря на отмеченные отличия, многие принципы, заложенные как в формирование доверительных множеств, так и в разработку алгоритмов расчетов, без сомнения, окажутся действенными при решении поставленной задачи. В этой связи проанализируем проведенные исследования и полученные результаты для невозстанавливаемых систем, которые выполнены на основе общего подхода и других приближенных способов (метод Ллойда и Липова, метод переноса ошибок с использованием нормальной аппроксимации).

Легко понять, что система $H_0(x)$ дает самую пессимистическую оценку, так как в большинстве практических случаев экстремальное значение функции $\varphi(\theta)$ получается подстановкой границ доверительных интервалов $\bar{x}_i = \Delta_{1-\gamma_0}(d_i)$. Именно такой подход был подвергнут критике в предыдущем параграфе. Поэтому дальнейший анализ касается только систем $H_1(x)$ и $H_2(x)$, которые получили названия метода плоскости и метода усеченного прямоугольника.

Для случаев, когда $\varphi(\theta) = \sum_{i=1}^N c_i \theta_i$ (что соответствует

системе с последовательным соединением элементов), метод усеченного прямоугольника приводит к точному значению границы доверительного интервала. При равенстве коэффициентов c_i метод плоскости дает результаты, совпадающие с результатами, полученными мето-

дом усеченного прямоугольника. Когда такое равенство не имеет места, что соответствует отличающимся объемам испытаний (наблюдений), метод плоскости приводит к большему значению $\bar{\varphi}(x)$, при этом, чем больше отношение c_{\max}/c_{\min} , тем в большей степени проигрывает метод плоскости.

Для параллельного соединения элементов функция ненадежности является вогнутой на гиперповерхности, определяющей границы доверительного множества. При равенстве значений d_i оба метода приводят к практически одинаковому результату. В противном случае, чем

сильнее неравенство $\min \{ \Delta_{1-\gamma_0}(d_i) \} < \Delta_{1-\gamma_1} \left(\sum_{i=1}^N d_i \right)$

тем в большей степени проявляется предпочтительность метода усеченного прямоугольника.

Отметим, что при одинаковом числе элементов отношение $\bar{\varphi}(x)/\hat{\varphi}(x)$ [$\varphi(x)$ — функция ненадежности] для параллельной цепи значительно больше, чем для последовательной, и с ростом числа элементов это свойство проявляется сильнее.

Для сложных параллельно-последовательных систем результаты расчетов, проведенных Ю. К. Беляевым для схем с различными числами элементов в сечениях и различных исходных статистических данных, позволяют сделать вывод о предпочтительности использования метода усеченного прямоугольника. С увеличением числа сечений и при возрастании неоднородности в степени резервирования преимущества метода усеченного прямоугольника устойчиво возрастают. Для иллюстрации этого вывода, а также для сравнения рассмотренных методов с возможными другими представим указанные результаты в несколько отличной форме (табл. 6.1), чтобы оценить верхнюю границу доверительного интервала для функции ненадежности с интересующей нас практической точки зрения. В примере 1 расчеты проводились для системы, состоящей из 10 последовательных блоков, 6 из которых имели горячий резерв, $d = \{0, 1, 2, 4, 2, 4, 1, 0, 1, 5\}$, в примере 2 расчетный граф состоял из 20 двухэлементных сечений, $N_i = 100$, $d_i = 1$ ($i=1, 2, \dots, 15$), $d_i = 0$ ($15 < i \leq 20$), $\gamma = 0.9$.

Метод статистических испытаний, в котором наиболее полно может использоваться информация, заклю-

Таблица 6.1

Значения отношения $\bar{Q}(t)/\hat{Q}(t)$

Метод расчета	Метод плоскости	Метод усеченного прямоугольника	Метод Ллойда и Липова	Метод статистических испытаний
Пример 1	5,3	5,3	2,36	2,64
Пример 2	30	10,7	18,7	—

ченная в статистическом материале, позволяет получить более точные значения границ доверительных интервалов. Процедура моделирования для получения плотности вероятности для $\hat{\varphi}(x)$ была предложена С. А. Сенецким и Н. А. Шишонок. На основе этой процедуры был проведен расчет для примера 2. Однако затраты машинного времени, составившие почти 40 часов для ЭВМ «БЭСМ-2м», не позволяют рекомендовать этот метод для инженерной практики.

В отличие от метода усеченного прямоугольника метод плоскости для функций вида (6.5) и (6.6) обеспечивается очень простой алгоритм расчета, пригодный для ручного счета. Именно поэтому была сделана попытка его «улучшения», суть которого заключается в следующем. Каждой точке d присваивается номер $N(d)$ из множества Γ_i , которому эта точка принадлежит. Множества Γ_i формируются из множеств $F_N \in x$. Далее на этой основе строится новая система γ -доверительных множеств и доказывается, что использование предлагаемого метода эквивалентно использованию метода плоскости с заменой суммарного числа отказов на величину $N(d)$, которая равна $\max\{\max(d_1, \dots, d_N), \sum_{i=1}^N d_i - K\}$, где

K — минимальная степень резервирования в системе. Такая замена приводит к более точному и более высокому значению коэффициента доверия (по сравнению с ранее рассмотренным методом плоскости). Выигрыш, даваемый модифицированным методом плоскости, тем выше, чем больше степень резервирования системы K . Количественная оценка такого выигрыша видна из следующего примера: для системы, состоящей из трех трехэлементных сечений $d = \{1, 2, 1\}$, $\{N_i\} = \{50, 80, 25\}$, при $\gamma = 0,9$ метод плоскости дает отношение $\bar{Q}(t)/\hat{Q}(t) = 390$, а модифицированный метод — 44, что практически делает его равноценным методу усеченного прямоугольника.

Но для систем, структура которых содержит последовательные цепочки, рассмотренная модификация не да-

ет выигрыша, так как $K=0$ и $N_d = \sum_{i=1}^N d_i$. Для таких си-

стем основной недостаток метода плоскости проявляется в полной мере. Этот недостаток заключается в том, что функция (6.5), (6.6) достигают экстремума в одной из точек вида $\{0, \dots, 0, \theta_i, 0, \dots, 0\}$, где i соответствует наиболее слабому сечению, т. е. надежность системы оценивается по наиболее слабой ее компоненте, число отказов которой равно суммарному числу отказов элементов.

От указанного недостатка, присущего методу плоскости, можно избавиться, ликвидировав возможность указанного «перераспределения» чисел отказов элементов. Это можно выполнить, используя следующий прием. Рассматриваемая система разбивается на l подсистем, каждая из которых имеет одинаковую степень резервирования K_j . Для каждой отдельной подсистемы используется метод плоскости, и доверительное множество имеет вид:

$$H_j(x) = \left\{ \theta_i : 0 \leq \sum_{i \in M_j} c_i \theta_i \leq \leq \Delta_{1-\gamma_j} \left(\sum_{i \in M_j} d_i \right), j = 1, 2, \dots, l; i = \overline{1, N} \right\}, \quad (6.13)$$

где i — номера типов элементов, принадлежащих M_j подсистеме.

Коэффициент доверия для такой системы доверительных множеств будет равен $\gamma_s = \prod_{j=1}^l \gamma_{j,s}$. Здесь полная за-

дача отыскания экстремума может быть разбита на l подзадач. Для примера 1 использование такого подхода приводит к отношению $\bar{Q}(t)/\hat{Q}(t) = 2,45$, т. е. практически совпадает с наиболее точным результатом, который дает метод статистических испытаний.

Проведенный анализ показывает, что однозначного вывода об абсолютной предпочтительности метода усеченного прямоугольника сделать нельзя. Учет особенностей структуры исследуемой системы часто приводит к тому, что модифицированный метод плоскости или ис-

пользование доверительного множества типа $H_3(x)$ дают более точные значения доверительных границ для функций (6.5), (6.6). Другие приближенные подходы — эвристический метод Ллойда и Липова и метод переноса ошибок — дают приближающиеся к точным результаты для последовательных систем, когда (6.5) является линейной функцией. Чем выше степень резервирования системы, т. е. чем больше нелинейность функции, тем резче завышается верхняя доверительная граница $\bar{Q}(t)$ и эти методы приводят к пессимистическим оценкам.

6.3. Доверительные множества. Случай восстанавливаемой системы

В соответствии с поставленной в § 6.1 задачей сформулируем особенности восстанавливаемых систем. При этом будем ориентироваться на анализ схемной надежности систем электроснабжения. Будем считать, что относительно заданного вида отказа системы нам известна ее эквивалентная расчетная схема, составленная на основе сечений. Основная особенность заключается в том, что статистические данные по отказам элементов кроме дискретной компоненты d_i имеют непрерывную компоненту $\tau_{i,k}$ длительности k -го восстановления i -го элемента. Это позволяет кроме оценок параметра потока

отказов элемента ($\lambda = c_i d_i$) и средней длительности восстановления τ_i получить оценку установившегося значения коэффициента готовности (или вероятности исследуемого состояния):

$$\hat{K}_{r,i} = 1 - \hat{q}_i = 1 - \sum_{k=0}^{d_i} c_i \tau_{i,k}. \quad (6.14)$$

В общем случае сечения эквивалентной схемы могут состоять из полностью разнотипных элементов, а одни и те же элементы могут входить в разные сечения. Все это приводит к тому, что функции принимают более сложную форму, чем (6.5) и (6.6). Например, для системы, состоящей из различных типов элементов, имеем:

$$\varphi(\theta) = q_c = \sum_{i=1}^m \prod_{j \in M_i} \varphi_j(\lambda_j, \tau_j) = \sum_{i=1}^m \prod_{j \in M_i} q_j, \quad (6.15)$$

где m — число сечений расчетного графа схемы, соответствующего исследуемому виду отказа; M_i — подмножество элементов, входящих в i -е сечение.

Так как недоотпуск электрической энергии и ущерб от перерывов электроснабжения пропорциональны средней относительной длительности исследуемого отказового состояния системы q_c , то для практики наибольший интерес представляют верхние доверительные границы для этого показателя.

В качестве независимых переменных целесообразно использовать показатели q_i , а не λ_i и τ_i , так как: а) при этом не увеличивается размерность задачи, б) при построении γ -доверительных множеств остаются в силе рассмотренные выше подходы. Однако такая замена переменных будет действительной, если известен закон распределения величины \hat{q}_i . Для определения закона распределения $F_{q_i}(x)$ воспользуемся тем, что величина

$d_i \sum_{k=0}^{d_i} c_i \tau_{i,k}$ представляет собой сумму случайного числа

случайных величин $x_{i,k} = c_i \tau_{i,k}$ (сумма нулевого числа слагаемых всегда определяется как 0). Таким образом, имеем: 1) $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i,k}$ — независимые случайные величины с одним и тем же распределением вероятностей; 2) k — дискретную случайную величину со спектральными значениями $0, 1, 2, \dots$, причем величина k независима от $\{x_{i,k}\}$. Для определения неизвестных параметров законов распределения величин k и $x_{i,k}$ воспользуемся широко распространенным приближенным приемом, состоящим в замене неизвестных параметров их точечными оценками, после чего получим:

$$p_i(k) = (\alpha^k / k!) e^{-\alpha_i}, \quad \alpha_i \approx d_i; \quad (6.16)$$

$$f_i(x_{i,k}) = \mu_i e^{-\mu_i x}, \quad \mu_i^{-1} \approx c_i \tau_i. \quad (6.17)$$

Известно, что если производящие функции факториальных моментов $G_{x_{i1}}(s)$ и $G_k(s)$ существуют, то распределение суммы $x_i = x_{i1} + \dots + x_{i,k}$ дается производящей функцией

$$G_{x_i}(s) = G_k[G_{x_{i,k}}(s)]. \quad (6.18)$$

С учетом (6.16) и (6.17)

$$G_{x_i}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\mu_i \int_0^{\infty} s^x e^{-\mu_i x} dx \right]^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\mu_i}{\mu_i - \ln s} \right]^k \frac{\alpha_i^k}{k!} e^{-\alpha_i} \quad (6.19)$$

Выражение (6.19) при $s=e^{-p}$ соответствует производящей функции моментов и имеет вид:

$$G_{x_i}(s) = M_{x_i}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\mu_i}{\mu_i + p} \right]^k \frac{\alpha_i^k}{k!} e^{-\alpha_i} = \exp \left\{ -\alpha_i + \frac{\alpha_i \mu_i}{\mu_i + p} \right\}, \quad (6.20)$$

откуда, учитывая общность использованных преобразований с преобразованием Лапласа, получаем выражение для плотности

$$f_{q_i}(x) = F'_{q_i}(x) = e^{-\alpha_i} \delta(x) + e^{-\alpha_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha_i \mu_i)^k}{k!} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu_i x}, \quad (6.21)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

Вычисляя семиварианты

$$\kappa_n = (-1)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial p^n} \log M_{x_i}(p) \right]_{p=0},$$

на основе выражения (6.20) найдем математическое ожидание

$$E[x_i] = \kappa_1 = (-1) \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(-\alpha_i + \frac{\alpha_i \mu_i}{\mu_i + p} \right) \right]_{p=0} = \frac{\alpha_i}{\mu_i} \quad (6.22)$$

и дисперсию величины $x_i = q_i$

$$D[x_i] = \kappa_2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(-\alpha_i + \frac{\alpha_i \mu_i}{\mu_i + p} \right) \right]_{p=0} = 2\alpha_i / \mu_i^2, \quad (6.23)$$

Легко видеть, что функция распределения

$$\begin{aligned} F_{q_i}(x) &= \int_0^x f_{q_i}(t) dt = e^{-\alpha_i} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^k}{k!} \frac{\mu_i^k}{(k-1)!} \int_0^x t^{k-1} e^{-\mu_i t} dt \right] = \\ &= 1 - e^{-\alpha_i} e^{-\mu_i x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^k}{k!} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\mu_i x)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

На рис. 6.3 показана вычисленная по формуле (6.24) функция распределения $F_{q_i}(z)$, $z = \mu_i x$ для $\{\alpha_i\} = \{1, 3, 5, 10\}$.

5, 10}. Там же пунктиром проведены кривые нормального распределения, математические ожидания и дисперсии которых равны соответствующим моментам распределения случайной величины z . Было замечено, что при $\alpha_i \geq 1$ распределение $F_{q_i}(z)$ хорошо совпадает с распределением χ^2 с числом степеней свободы, равным α_i .

Отправной точкой для возможности такого совпадения послужил факт равенства математических ожиданий и дисперсий у распределений χ^2 и $F_{q_i}(z)$. Заметим также,

что распределение с плотностью (6.21) является гиперэрланговским. Для него справедлива теорема, согласно

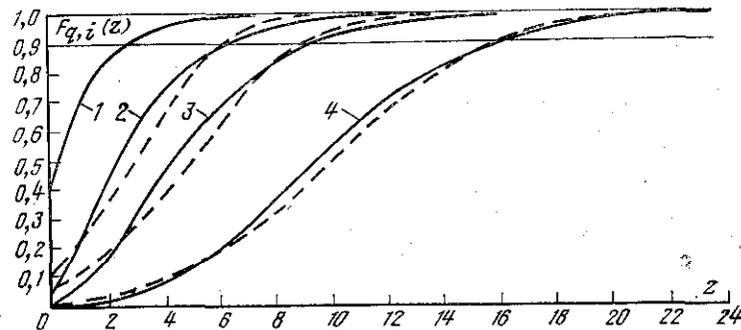


Рис. 6.3. Функции распределения $F_{q_i}(z)$.

1 — при $\alpha_i=1$; 2 — при $\alpha_i=3$; 3 — при $\alpha_i=5$; 4 — при $\alpha_i=10$; — — — нормальная аппроксимация.

которой для функции распределения положительной случайной величины $G(x)$ найдется аппроксимирующее гиперэрланговское распределение $F(x)$ и при этом r первых моментов этого распределения $F(x)$ отличаются не более чем на ε от соответствующих моментов распределения $G(x)$. Таким образом, отмеченное совпадение распределений $G(x)$ и $F_n(\chi^2)$ является вполне закономерным и этот факт позволяет не проводить расчетов по формуле (6.24), а пользоваться имеющимися таблицами распределения $F_n(\chi^2)$. Из рис. 6.3 видно, что точность, достаточную для инженерных расчетов, нормальная аппроксимация обеспечивает при $\alpha_i \geq 10$. При этом погрешность в определении границ доверительных интервалов при $\gamma=0,9$ (0,95 и 0,99) не превышает соответственно 1,57% (3,6 и 5,8% %).

На основе функций распределения (6.24) γ -вероятельные границы $\bar{q}_i(\gamma)$ определяется из соотношения $F_{q_i}(x < \bar{q}_i) = \gamma$. Но для построения вероятельных множеств, аналогичных $H_1(x)$, $H_2(x)$ и $H_3(x)$, необходимо еще получить верхнюю вероятельную границу для $\sum_{i=1}^N q_i = q_\Sigma$, т. е. нужно определить функцию распределения

$$F_{q_1+q_2+\dots+q_N}(x) \text{ случайной величины } \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{d_i} x_{i,k}.$$

Так как величины x_i независимы, то их сумме будет соответствовать произвольная функция

$$M_{q_\Sigma}(p) = \prod_{i=1}^N M_{x_i}(p) = \prod_{i=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_i}{\mu_i + p} \right)^k \frac{p^k}{k!} e^{-\mu_i}. \quad (6.25)$$

Однако переход, подобный тому, который был сделан от (6.20) к (6.21), в данном случае чрезвычайно затруднителен даже при $N=2$. Чтобы обойти это затруднение, воспользуемся отмеченным выше фактом о совпадении $F_{q_i}(z)$ с распределением $F_n(\chi^2)$, тогда

$$f_{q_i}(x) d(x) = \frac{\mu_i}{2^{n/2} (n/2 - 1)!} (\mu_i x)^{(n/2 - 1)} \exp \left\{ -\frac{\mu_i x}{2} \right\} dx; \quad (6.26)$$

здесь $n = d$.

Это выражение намного удобнее в различных преобразованиях, чем $f_{q_i}(x)$, определяемое по (6.21). Теперь определим функцию $F_{q_\Sigma}(x)$ как свертку функции распределения одной из величин q_i с плотностями других:

$$F_{q_\Sigma}(x) = (F_{q_1} * f_{q_2} * \dots * f_{q_N})(x), \quad (6.27)$$

где

$$F_{q_1} * f_{q_2} = \int_0^x F_{q_1}(t) f_{q_2}(x-t) dt, \quad (6.28)$$

при $N \geq 3$ выражение (6.27) определяется по рекуррентной формуле

$$F_{q_1} * f_{q_2} * \dots * f_{q_N} = (F_{q_1} * f_{q_2} * \dots * f_{q_{N-1}}) * f_{q_N}. \quad (6.29)$$

В тех случаях, когда d_i или $d_i + d_j$ являются четными, интеграл (6.27) выражается в конечном виде, функции $F_{q_\Sigma}(x)$ имеют относительно простой вид. Так, например, при $d = \{2, 4, 2\}$, $\mu = \{2000, 1000, 1500\}$ и $c_i = 1$ ($i=1, 2, 3$) получаем:

$$F_{q_1+q_2}(x) = 1 - 1000 x e^{-500x} - e^{-1000x},$$

$$F_{q_1+q_2+q_3}(x) = 1 - 3000 x e^{-500x} - 16 e^{-750x} + 12 e^{-6000x} + 3 e^{-1000x}.$$

На рис. 6.4 представлены эти функции и дана нормальная аппроксимация, которая для $N=2$ ($N=3$) при

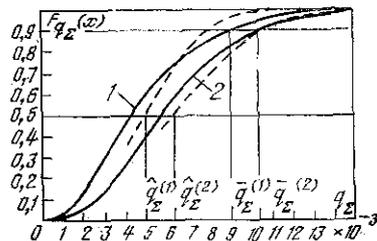


Рис. 6.4. Функции распределения $F_{q_\Sigma}(x)$ и границы вероятельных интервалов. — для $q_\Sigma^{(1)} = q_1 + q_2$; 2 — для $q_\Sigma^{(2)} = q_1 + q_2 + q_3$; 3 — нормальная аппроксимация.

$\gamma = 0,9$ дает погрешность в определении границ вероятельного интервала 12,2% (2%). Заметно, что с ростом величины d_Σ нормальная аппроксимация более точно описывает хвосты распределения. При нечетном d_i и $d_i + d_j$ необходимо использовать численные методы определения интеграла (6.27). Для этой цели может быть использован с небольшими изменениями известный алгоритм решения уравнения Вольтерра с разностным ядром.

Рассмотренная техника определения $F_{q_\Sigma}(x)$ целесообразна при относительно малом N и $d_\Sigma < 10$. При $d_\Sigma \geq 10$, это наиболее вероятно при больших значениях N , в инженерных расчетах можно рекомендовать для $F_{q_\Sigma}(x)$ нормальную аппроксимацию с параметрами $a = \sum_{i=1}^N (a_i / \mu_i)$ и

$$= \sum_{i=1}^N (2a_i / \mu_i^2).$$

Верхняя граница $\bar{q}_\Sigma(\gamma)$ определится из соотношения $F_{q_\Sigma}(x < \bar{q}_\Sigma) = \gamma$. После того как определены значения $\bar{q}_i(\gamma_i)$ и $q_\Sigma(\gamma)$, легко могут быть построены искомые γ -доверительные множества. Например, используя метод плоскости, получаем:

$$H_1(\hat{q}) = \left\{ q_i : 0 \leq \sum_{i=1}^N q_i \leq \bar{q}_\Sigma(\gamma_i), \quad i = \overline{1, N} \right\}. \quad (6.30)$$

По аналогии с (6.10) и (6.13) легко можно получить выражения для $H_2(\hat{q})$ и $H_3(\hat{q})$.

В заключение этого параграфа можно напомнить, что предложенный способ определения распределения $F_{q_i}(x)$ (и, как следствие, рассмотренных доверительных множеств) является приближенным. Это приближение обусловлено выбранным аналитическим подходом и заключено в замене неизвестных параметров α_i и μ_i их точечными оценками, потому что учесть случайный характер оценок при аналитическом подходе не представляется возможным. Так как дисперсия оценки, приближенно обратна пропорциональна величине d_i , то можно считать, что при $d_i \geq 10$ указанная замена правомерна в инженерных расчетах. Но тем не менее выяснение погрешности, которой обладает аналитический подход, весьма желательно как с практической, так и с теоретической точек зрения. Естественно, что для этого надо использовать более точный подход к определению распределения $\mathcal{F}_{q_i}(x)$. Его можно для нашего случая осуществить с помощью статистического моделирования. При этом необходимо смоделировать возможную траекторию функционирования восстанавливаемого элемента, располагая принятой статистикой, таким образом, чтобы обеспечить необходимую статистическую устойчивость результата.

Используемый статистический алгоритм позволял смоделировать функционирование элемента на отрезке $\Delta(T) = 1$ году. В таком опыте фиксировалось суммарное время нахождения в нерабочем состоянии, т. е. определялась сумма случайного числа случайных величин в долях периода ΔT . Серия состояла из 6400 опытов, что позволило построить статистическое распределение $F_{q_i}(x)$ и определить его моменты $E[x_i]$ и $D[x_i]$. Такие серии

были проведены при числе зафиксированных отказов элемента $d_i = 1, 3, 5$.

В основу алгоритма был положен известный факт, что отношение оценки параметра экспоненциального распределения к этому неизвестному параметру является случайной величиной, имеющей распределение χ^2 с чис-

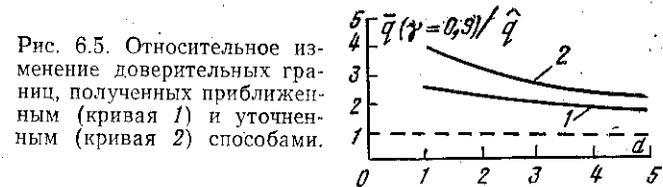


Рис. 6.5. Относительное изменение доверительных границ, полученных приближенным (кривая 1) и уточненным (кривая 2) способами.

лом степеней свободы, равным $2d_i$. Распределение формируется в соответствии с теоремой, согласно которой сумма квадратов n независимых нормальных величин с математическим ожиданием $a=0$ и дисперсией $\sigma^2=1$ имеет распределение χ^2_n . Последовательность нормальных величин легко получается на основе суммы величин, равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$.

Полученные таким образом распределения существенно сдвинуты вправо по сравнению с распределениями, определенными по (6.24), при этом математические ожидания весьма близки, а среднеквадратические отклонения существенно отличаются. Так, для $d_i=5$ аналитический подход при $\alpha_i=5$ и $\hat{\mu}_i=10$ дает $E[x_i]=\hat{q}_i=5 \cdot 10^3$ и $D[x_i]=0,1 \cdot 10^{-4}$, статистическое моделирование — соответственно $5,65 \cdot 10^{-3}$ и $0,35 \cdot 10^{-4}$.

По рис. 6.5 можно оценить относительную погрешность в определении границы доверительного интервала для случая малой статистики. При $\gamma=0,9$ для $d=5$ упрощенный подход дает меньшее (до 25%) значение верхней доверительной границы. Однако, на наш взгляд, такие погрешности при решении данной проблемы для инженерной практики оправданы.

6.4. Определение доверительных границ методами нелинейного программирования

Перейдем ко второму этапу построения доверительных границ, а именно к задаче определения максимума нелинейной функции $\varphi(\Theta) = \varphi(q_1, q_2, \dots, q_N)$, задаваемой на основе формулы (6.15), при линейных ограни-

чениях, которые определяются выбранной системой доверительных множеств $H_1(\hat{q})$, $H_2(\hat{q})$ или $H_3(\hat{q})$.

Аналитическое решение достаточно просто можно получить для последовательных или параллельных систем, т. е. для схем относительно простой структуры. В первом случае при ограничениях, определяемых множествами $H_1(\hat{q})$ и $H_2(\hat{q})$, оно тривиально и имеет вид:

$$\max \varphi(\theta) = \bar{q}_c = \bar{q}_z(\gamma_1). \quad (6.31)$$

Во втором случае функция (6.15) редуцируется к виду

$$q_c = \prod_{i=1}^N q_i. \quad (6.32)$$

Эта частная задача имеет важное значение для решения поставленной основной задачи, поэтому рассмотрим ее более подробно. При ограничениях, определяемых доверительными множествами $H_1(\hat{q})$, назовем эту частную задачу вспомогательной программой 1, а при использовании $H_2(\hat{q})$ — вспомогательной программой 2.

Рассмотрим вспомогательную программу 1. Функция (6.32) не является вогнутой на множества $H_1(\hat{q})$ однако с помощью некоторых приемов традиционной техники нелинейного программирования можно сузить область ее определения и идентифицировать оптимальную точку.

Функция (6.32) является неубывающей по каждому из своих аргументов. Этот факт позволяет перейти к заключению, что вдоль любого возможного в первом ортанте направления L функция $\varphi(\hat{q})$ возрастает, т. е. $\varphi(q + \varepsilon L) > \varphi(q)$. Если мы проведем гиперплоскость, используя (6.30), из приведенных выше рассуждений ясно, что оптимальная точка должна находиться на этой гиперплоскости. Таким образом, нам необходимо найти

$\max \prod_{i=1}^N q_i$ на множестве $H'_1(\hat{q})$, задаваемом уравнением

$$\sum_{i=1}^N q_i = \bar{q}_z(\gamma_1) = c. \quad (6.33)$$

Исследуя поведение функции (6.32) вдоль произвольной прямой, лежащей на плоскости, легко можно пока-

зать, что функция (6.32) достигает максимального значения при равенстве переменных q_i , т. е. координаты оптимальной точки $q_i^{(0)} = c/N$. Отсюда следует, что метод плоскости дает значение доверительной границы.

$$\bar{q}_c = [\bar{q}_z(\gamma_1)/N]^N. \quad (6.34)$$

Прежде чем перейти к вспомогательной программе 2, дадим более наглядную геометрическую интерпретацию положения оптимальной точки во вспомогательной программе 1. Указанная точка находится на «середине» гиперплоскости $H'_1(\hat{q})$ (на рис. 6.2, б она заштрихована). Эта гиперплоскость является границей (гранью) множества $H_1(\hat{q})$ и представляет собой линейное многообразие, которое в данном случае имеет размерность $N-1$.

Во вспомогательной программе 2 многомерные прямоугольники высекают из гиперплоскости $H'_1(\hat{q})$ ее часть $H'_2(\hat{q}) \in H'_1(\hat{q})$ (см. рис. 6.2, в). Если подмножество $H'_2(\hat{q})$ содержит оптимальную точку $\{q_i^{(0)}\}$ вспомогательной программы 1, то метод усеченного прямоугольника в этом случае не изменяет полученного выше результата. Если же подмножество $H'_2(\hat{q})$ не содержит указанной оптимальной точки, то, опираясь на выявленные свойства целевой функции, можно утверждать, что вспомогательная программа 2 приводит к меньшему значению γ -доверительной границы, т. е. метод усеченного прямоугольника проявляет свою предпочтительность. Условие $\{q_i^{(0)}\} \notin H'_2(\hat{q})$ выполняется, если хотя бы для одного i

$$\bar{q}_i(\gamma_0) < \bar{q}_z(\gamma_1)/N. \quad (6.35)$$

Расположим величины $\bar{q}_i(\gamma_0)$ в возрастающем порядке: $\bar{q}_{i_1}(\gamma_0) \leq \dots \leq q_{i_r}(\gamma_0) \leq \dots \leq \bar{q}_{i_N}(\gamma_0)$, где r — индекс, для которого справедливо соотношение $q_{i_r}(\gamma_0) < \bar{q}_z(\gamma_1)/N < q_{i_{r+1}}(\gamma_0)$. Напомним установленный факт, что значение функции — произведения (6.32) на $H'_1(\hat{q})$ [или $H'_2(\hat{q})$] —

тем больше, чем ближе ее сомножители к положению взаимного равенства. После этого легко показать, что координаты оптимальной точки во вспомогательной программе 2 определяются следующим образом:

$$q_i^{(0)} = \begin{cases} \bar{q}_{i_k}(\gamma_0) & \text{для } k < r; \\ \frac{1}{N-r} \left[\bar{q}_z(\gamma_1) - \sum_{k=1}^r \bar{q}_{i_k}(\gamma_0) \right] & \text{для } k > r. \end{cases} \quad (6.36)$$

В основной программе целевая функция

$$q_c = \sum_{i=1}^m q_{c_i} = \sum_{i=1}^m \prod_{j \in M_i} q_j \quad (6.37)$$

соответствует параллельно-последовательным структурам, а каждый член ее суммы представляет вероятность отказового состояния i -го сечения указанной структуры. Как и во вспомогательных программах, в соответствии с видом ограничений ($H_1(\hat{q})$ или $H_2(\hat{q})$) будем различать основные программы 1 и 2.

Основная программа 1. Найти максимальное значение функции (6.37) при $q \in H_1(\hat{q})$; $q_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Функция (6.37) является неубывающей по каждому из своих аргументов. Здесь также легко можно показать, что оптимальная точка находится на гиперплоскости $H_1(\hat{q})$. Однако в данном случае установить свойства функции (6.37) на $N'(\hat{q})$ не представляется возможным.

Для изучения особенностей программы рассмотрим преобразованную программу, которую получим из (6.37) и (6.30) с помощью замены переменных,

$$z_j = \log q_j, \quad j \in M_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.38)$$

Преобразованная целевая функция

$$q_c(z) = \sum_{i=1}^m \exp \left\{ \sum_{j \in M_i} z_j \right\} \quad (6.39)$$

и ограничение

$$\sum_{i=1}^N \exp \{z_i\} = c \quad (6.40)$$

являются положительными показательными функциями.

Известно, что функции вида (6.39) и (6.40) являются выпуклыми, т. е. преобразованная программа 1 является выпуклой. Отсюда следует, что точка глобального максимума выпуклой программы лежит на границе выпуклой области, в нашем случае — на границе области $H'_1(z)$. Но граница области $H'_1(z)$ соответствует границе области $H'(\hat{q})$, откуда становится очевидным, что точка глобального максимума в основной программе 1 находится на границе гиперплоскости $H'_1(\hat{q})$ т. е. на многообразиях, размерность которых по крайней мере меньше, чем $N-1$. Установлением этого факта и ограничивается полезная роль преобразованной программы, так как из-за нелинейности ограничений ее решение окажется более сложным, чем решение основной программы.

Главное значение этого результата заключается в следующем: он показывает, что в оптимальной точке некоторое подмножество независимых переменных равно нулю, т. е. имеется некоторое подмножество $B(q) = \{i/q_i = 0\}$. Естественно, что при этом вид функций (6.37) упрощается и фактически мы переходим к задаче

$$\max q_c \text{ при } q \in H'(\hat{q}), \quad \begin{cases} q_i > 0 & \text{для } i \notin B(q); \\ q_i = 0 & \text{для } i \in B(q). \end{cases} \quad (6.41)$$

В нелинейном программировании такой подход к решению получил название субоптимизации на многообразиях, и он специально рекомендован для задач с линейными ограничениями.

Процедура субоптимизации на многообразиях действует в основном следующим образом. Предположим, что дана $x^{(1)}$ — допустимая точка для исходной основной задачи. Тогда решается задача (6.41) и определяется оптимальная точка $y^{(1)}$. Если $y^{(1)}$ окажется допустимой для основной программы 1, то переходим к $y^{(1)}$ и полагаем $x^{(2)} = y^{(1)}$. Если $y^{(1)}$ окажется еще и оптимальной для основной программы 1, то решение найдено. Если $y^{(1)}$ не является оптимальной точкой, то рассматривается новое многообразие с размерностью, увеличенной на единицу, и процедура продолжается.

Геометрически в процедуре оптимизации на многообразии мы двигаемся по направлению к точке, которая оптимизирует целевую функцию на этом многообразии.

Если оптимальная точка многообразия окажется недопустимой, то в качестве $x^{(i+1)}$ берется ближайшая коптимальной точке многообразия допустимая точка, лежащая на отрезке прямой, соединяющей предыдущую точку с оптимальной. Однако при использовании метода плоскости отмеченная ситуация не будет иметь места.

Таким образом, решение начинается с выбора многообразия (границ многогранника) с наименьшей возможной размерностью, при котором исследуемая конкретная функция вида (6.37) имеет смысл. Эта размерность равна $n_i - 1$, где n_i — число элементов в наименьшем из подмножеств M_i ; более наглядно — на первом шаге исходная схема редуцируется до одного сечения, в котором число элементов является наименьшим. Так как для остальных элементов, не принадлежащих этому сечению, $q_i = 0$, $i \in B(q)$, то эти элементы на данном шаге рассматриваются как абсолютно надежные ($1 - q_i = 1$) и не влияют на показатели надежности схемы. Но случай одного сечения (параллельная система) был рассмотрен во вспомогательной программе 1, и выше было найдено аналитическое решение, которое можно представить в виде

$$\max_{q \in H^1(q)} \prod q_j = [\bar{q}_z(\gamma_1)/n^{(1)}]^{n^{(1)}}, \quad j \in M_i, \quad n^{(1)} = \min\{n_i\}. \quad (6.42)$$

На всех других возможных многообразиях размерности $n^{(1)} - 1$ функция (6.37) будет иметь максимальное значение, определяемое по формуле, аналогичной (6.42). В этом случае структурная схема системы содержит несколько сечений с числом элементов, равным $n^{(1)}$.

В соответствии с описанной выше процедурой прежде чем перейти к следующему шагу, необходимо выяснить, будет ли (6.42) являться решением основной программы 1. Так как $\bar{q}_z(\gamma_1) < 1$ и $q_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, N$, то

$$[\bar{q}_z(\gamma_1)/n^{(1)}]^{n^{(1)}} > [\bar{q}_z(\gamma_1)/(n^{(1)} + 1)]^{n^{(1)} + 1}. \quad (6.43)$$

Отсюда следует, что на многообразиях, размерность которых больше, чем $n^{(1)} - 1$, при использовании метода плоскости не удастся получить локального максимума, который был бы больше максимума, полученного на первом шаге на многообразии размерности $n^{(1)}$, т. е. вы-

ражение (6.42) определяет глобальный максимум. Таким образом, доказано следующее утверждение: функция (6.37) при использовании метода плоскости достигает максимального значения на многообразии размерности $n^{(1)} - 1$, $n^{(1)} = \min\{n_i\}$; это максимальное значение определяется по формуле (6.42).

Проиллюстрируем рассмотренный подход решения основной программы 1 на ставшем уже традиционным примере сложной системы (см. рис. 6.6), для чего получим расчетный граф, составленный на основе сечений, для которого целевая функция (6.37), как известно, имеет вид:

$$q_c = q_1 q_2 + q_4 q_5 + q_2 q_3 q_4 + q_1 q_3 q_5 \quad (6.44)$$

$$q_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^5 q_i = c < 1. \quad (6.45)$$

1. На первом шаге выбираем многообразия размерности 1:

а) Пусть $B(q) = \{q_3, q_4, q_5\}$, т. е. $q_3 = q_4 = q_5 = 0$, тогда $q_c = q_1 q_2$ и в соответствии со вспомогательной программой на многообразии $q_1 + q_2 = c$ максимум функции (6.44) равен $(c/2)^2$.

б) Здесь также возможен случай, когда $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, тогда $q_c = q_4 q_5$, и так же как и в предыдущем пункте, максимум функции (6.44) равен $(c/2)^2$.

2. Рассмотрим многообразия размерности 2:

а) Очевидно, что при выборе подмножества $B_2(q) = \{q_4, q_5\}$, $q_c = q_1 q_2$. Этот случай был рассмотрен в пункте 1, а. Аналогичный результат имеем при $B_2(q) = \{q_1, q_2\}$ и т. д.

б) Пусть $B_2(q) = \{q_1, q_5\}$, тогда $q_c = q_2 q_3 q_4$ и в соответствии с вспомогательной программой 1 при $q_2 + q_3 + q_4 = c$ максимальное значение функции (6.44) равно $(c/3)^3$. Аналогичный результат имеем при $B_2(q) = \{q_2, q_4\}$. Но так как $c = \bar{q}_z(\gamma_1) < 1$, то $(c/2)^2 > (c/3)^3$. Таким образом, глобальный максимум находится на многообразии размерности 1. В данном примере мы имеем две оптимальные точки: первая с координатами $q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = (c/2)$, $q_3^{(0)} = q_4^{(0)} = q_5^{(0)} = 0$, вторая — $q_4^{(0)} = q_5^{(0)} = c/2$, $q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = q_3^{(0)} = 0$.

Легко показать, что при решении основной программы 2, в которой используется метод усеченного прямоугольника, функция (6.37) достигает максимума на многообразии несколько большей размерности. Идентификация оптимальной точки в этом случае выполняется с помощью вспомогательной программы 2.

Комбинированная система γ -доверительных множеств $H_3(\hat{q})$, для которой выполняется деление системы на подсистемы с сечениями одинаковой размерности, не требует дополнительных исследований. Для каждой подсистемы решение легко может быть получено на основе решения одной из рассмотренных выше программ.

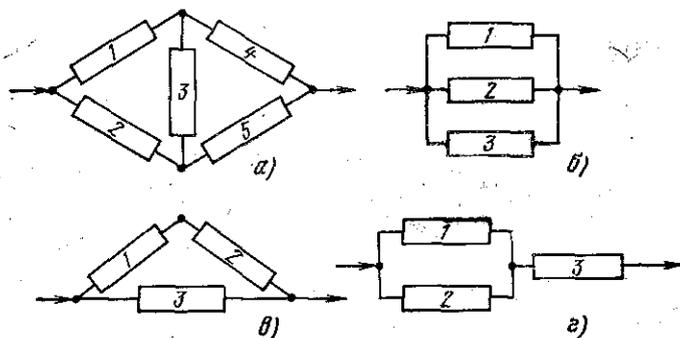


Рис. 6.6. Расчетные схемы систем электроснабжения.

В заключение рассмотрим вопрос о том, насколько сделанные в § 6.2 выводы о предпочтительности той или иной системы γ -доверительных множеств справедливы для случая восстанавливаемой системы. Используя полученные выше результаты, можем заключить, что решение этого вопроса не требует анализа громоздких схем с большим числом сечений. Для расчетных схем, представленных на рис. 6.6, б—г, были приняты следующие исходные данные: $d_1=2$, $d_2=4$, $d_3=2$, $\hat{\mu}_1=2000$, $\hat{\mu}_2=1000$, $\hat{\mu}_3=1500$, $c_i=1$. Значения $\bar{q}_i(\gamma_0)$ и $\bar{q}_\Sigma(\gamma_1)$ определялись с помощью функций распределений, представленных на рис. 6.3, 6.4. Результаты расчетов (отношения \bar{q}_c/\hat{q}_c) при применении различных γ -доверительных множеств сведены в табл. 6.2. В комбинированном методе для подсистемы, состоящей из элементов 1 и 2, использовался метод плоскости ($\gamma_1=0,95$).

Чтобы сделать понятными результаты и проиллюстрировать особенности применения рассмотренных γ -доверительных множеств, приведем необходимые расчеты.

Таблица 6.2

Значения отношения \bar{q}_c/\hat{q}_c

Схемы на рис. 6.6	Метод плоскости ($\gamma=0,8$)	Метод усеченного прямоугольника ($\gamma \approx 0,88$)	Комбинированный метод ($\gamma \approx 0,9$)
б	7,91	7,91	—
в	4,11	4,11	—
г	7,97	4,55	2,99

Оценки вероятностей \hat{q}_i для элементов равны:

$$\hat{q}_1 = \frac{2}{2000} = 10^{-3};$$

$$\hat{q}_2 = \frac{4}{1000} = 4 \cdot 10^{-3};$$

$$\hat{q}_3 = \frac{2}{1500} = 1,33 \cdot 10^{-3};$$

Схема б. Оценка показателя

$$\bar{q}_c^{(b)} = \hat{q}_1 \hat{q}_2 \hat{q}_3 = 5,32 \cdot 10^{-9}.$$

Метод плоскости. Используя вспомогательную программу 1, по-

лучаем: $\max q_c^i$ находится на плоскости $\sum_{i=1}^3 q_i = \bar{q}_\Sigma(\gamma=0,9) = c$. Эту

величину определяем на кривой 2 (см. рис. 6.4), являющейся функцией распределения $F_{q_1+q_2+q_3}(x)$, и получаем $c = 10,45 \cdot 10^{-3}$, тогда

$$\bar{q}_c^{(g)} = \left[\frac{\bar{q}_\Sigma(\gamma=0,9)}{3} \right]^3 = \left(\frac{10,45 \cdot 10^{-3}}{3} \right)^3 = (3,49 \cdot 10^{-3})^3 = 42 \cdot 10^{-9}$$

и

$$\frac{\bar{q}_c^{(g)}}{\hat{q}_c^{(b)}} = \frac{42 \cdot 10^{-9}}{5,32 \cdot 10^{-9}} = 7,91.$$

Метод усеченного прямоугольника. Принятое значение $\gamma_2 = \gamma_1 - \gamma_0 = 1 - 0,88 = 0,12$, откуда $\gamma_0 \approx 0,99$ и значения $q_i(\gamma_0)$, ($i=1, 2, 3$), определенные с помощью таблиц распределения χ^2 , соответственно равны $4,6 \cdot 10^{-3}$; $13,27 \cdot 10^{-3}$; $6,07 \cdot 10^{-3}$. Соотношение (6.35) соблюдается для всех $i=1, 2, 3$, так как координаты оптимальной точки метода плоскости $q^{(0)} = \{3,4 \cdot 9 \cdot 10^{-3}, 3,49 \cdot 10^{-3}, 3,49 \cdot 10^{-3}\}$. Отсюда ясно, что оптимальная точка вспомогательной программы 2 лежит в «середине» плоскости, а не на ее ребре, образуемом пересечением прямоугольника с границами $q_i = \bar{q}_i(\gamma_0) = \text{const}$. Таким образом, метод усеченного прямоугольника дает результат, совпадающий с предыдущим.

Комбинированный метод для этой схемы неприменим, так как мы имеем только одно сечение.

Схема в. Оценка показателя

$$\widehat{q}_c^{(в)} = \widehat{q}_1 \widehat{q}_3 + \widehat{q}_2 \widehat{q}_3 = 1,33 \cdot 10^{-6} + 5,32 \cdot 10^{-6} = 6,65 \cdot 10^{-6}$$

Методы плоскости и прямоугольника по причинам, отмеченным выше, дают одинаковый результат, равный:

$$\overline{q}_c^{(в)} = \left(\frac{10,45 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 = 27,3 \cdot 10^{-6}$$

и

$$\overline{q}_c^{(в)} / \widehat{q}_c^{(в)} = 4,11.$$

Комбинированный метод для этой схемы не имеет смысла применять, так как сечения {1, 3} и {2, 3} в эквивалентной схеме имеют одинаковое число элементов. В случае использования этого метода он дает результат $q_c^{(6)} = 28,6 \cdot 10^{-6}$, который является менее предпочтительным, чем приведенные выше.

Схема г. Оценка показателя

$$\widehat{q}_c^{(2)} = \widehat{q}_1 \widehat{q}_2 + \widehat{q}_3 = 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3} + 1,33 \cdot 10^{-3} \approx 1,33 \cdot 10^{-3}$$

т. е. надежность фактически определяется элементом 3.

Соответственно и максимум q_c достигается в точке $q^{(0)} = \{0, 0, \overline{q}_3$ ($\gamma = 0,9$) $\} = \{0, 0, 10,45 \cdot 10^{-3}\}$, т. е. в точке пересечения плоскости с осью q_3 , откуда $\overline{q}_c^{(2)} = 10,45 \cdot 10^{-3}$, т. е. недостаток метода плоскости проявляется здесь в полной мере.

Условием (6.35) в данном случае пользоваться нельзя, так как мы имеем не одно, а два сечения. Анализ координат оптимальной точки, получаемой методом плоскости, показывает, что она не принадлежит усеченному прямоугольнику, так как $q_3^{(0)} = 10,45 \cdot 10^{-3} > \overline{q}_3(\gamma_0) = 6,07 \cdot 10^{-3}$.

Допустимая точка должна иметь координату $q_3 \leq 6,07 \cdot 10^{-3}$. Ясно, что максимум $q_c^{(r)}$ будет при $q_3^{(0)} = 6,07 \cdot 10^{-3}$, а член $q_1 q_2$ даст наибольшую прибавку при равенстве координат $q_1^{(0)}$ и $q_2^{(0)}$. Учитывая условия

$$q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = \left(\frac{\overline{q}_\Sigma(\gamma_1) - q_3^{(0)}}{2} \right) = \frac{(10,45 - 6,07) \cdot 10^{-3}}{2} = 4,4 \cdot 10^{-3}$$

после чего

$$\overline{q}_c^{(r)} = (4,4 \cdot 10^{-3})^2 + 6,07 \cdot 10^{-3} \approx 6,07 \cdot 10^{-3}$$

и

$$\overline{q}_c^{(r)} / \widehat{q}_c^{(r)} = \frac{6,07 \cdot 10^{-3}}{1,33 \cdot 10^{-3}} = 4,55,$$

е. метод усеченного прямоугольника дал более предпочтительную оценку.

Для получения комбинированной системы доверительных множеств выделяем две подсистемы: сечение {1, 2} и сечение {3}. Пусть $\gamma_{12} = 0,95$, тогда $\gamma_3 = 0,9025$.

Так как число отказов элементов первой подсистемы равно 6, то, пользуясь распределение $F_{q_1}(x)$ (см. рис. 6.5), получаем: $\overline{q}_{\Sigma 1}^{(2)}(\gamma_{12} = 0,95) = 10,5 \cdot 10^{-3}$, а с помощью таблицы распределения χ^2 найдем $(\gamma = 0,95) = \overline{q}_{\Sigma 2}^{(r)}(\gamma_{12} = 0,95) = 5,99/1500 = 3,99 \cdot 10^{-3}$. После чего, пользуясь методом плоскости, для каждой из подсистем получаем:

$$\overline{q}_c^{(r)}(\gamma_3 = 0,9) = \left(\frac{10,5 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 + 3,99 \cdot 10^{-3} \approx 3,57 \cdot 10^{-3}$$

$$\overline{q}_c^{(r)} / \widehat{q}_c^{(r)} = 3,57 \cdot 10^{-3} / 1,33 \cdot 10^{-3} = 2,68,$$

что подтверждает наибольшую предпочтительность комбинированного метода для систем с сечениями, содержащими различное число элементов в сечениях.

Результаты расчетов показывают, что, как и для восстанавливаемых систем для расчетных схем, содержащих сечения с неодинаковым числом элементов, предложенный комбинированный метод является более предпочтительным. Отметим также, что деление на подсистемы заметно упрощает решение задачи за счет снижения ее размерности.

Список литературы

1. Герцбах И. Б., Кордонский Х. Б. Модели отказов. — М.: Советское радио, 1966. — 250 с.
2. Туфанов В. А. Характеристики эксплуатационной надежности силовых трансформаторов 110 кВ. — Электричество, 1971, № 12, с. 33—37.
3. Рипс Я. А. Информационный аспект статистических оценок надежности. — Автоматика и телемеханика, 1967, № 7, с. 140—145.
- 2.1. Калитвянский В. И. Общие закономерности теплового старения полимерных диэлектриков. — Электричество, 1955, № 3, с. 57—61.
- 2.2. Фокин Ю. А., Мунанинга Д. Определение расчетных нагрузок элементов систем электроснабжения с учетом их функциональной надежности. — Электричество, 1974, № 7, с. 9—14.
- 2.3. Сотсков Б. С. Основы теории и расчета надежности элементов и устройств автоматики и вычислительной техники. — М.: Высшая школа, 1970. — 270 с.
- 2.4. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. — М.: Стройиздат, 1965. — 279 с.

2.5. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. — М.: Машиностроение, 1975. — 488 с.

2.6. Ермолин Н. П., Жерихин И. П. Надежность электрических машин. — Л.: Энергия, 1976. — 248 с.

2.7. Белова Л. А., Мамиконянц Л. Г., Татубалин В. Н. Сравнение повреждаемости корпусной изоляции турбогенераторов с воздушным и водородным охлаждением. — Электрические станции 1972, № 5, с. 49—52.

2.8. Болотин В. В., Макаров Б. П., Курянов Б. А. Прочность и жесткость внутренних обмоток трансформаторов. — Электричество 1974, № 1, с. 57—58.

2.9. Третьяков С. И., Чернышев М. И. Анализ повреждений силовых трансформаторов. — Электричество, 1974, № 1, с. 57—58.

2.10. Фокин Ю. А., Третьяков Н. В. О функциональной надежности силовых трансформаторов в системах электроснабжения. — Электричество, 1979, № 2, с. 26—31.

3.1. Гнеденко Б. В. Асимптотические методы в вопросах исследования операций. — В кн.: Исследование операций. Методологические аспекты. — М.: Наука, 1972, с. 29—42.

3.2. Васильев Ю. А., Козлов Б. А. О влиянии вида закона распределения времени восстановления на надежность дублированной системы. — В кн.: Теория надежности и массовое обслуживание. — М.: Наука, 1969, с. 123—139.

3.3. Туфанов В. А. Асимптотическая устойчивость решения для групп отказов с профилактикой. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1974, № 6, с. 19—25.

4.1. Нечипоренко В. И. Структурный анализ и методы построения надежных систем. — М.: Советское радио, 1968. — 254 с.

4.2. Поспелов Г. Е., Гурский С. К., Шур Е. В. Структурный анализ и методы оценки надежности сложных схем электроснабжения. — Электричество, 1975, № 2, с. 85—91.

4.3. Фокин Ю. А., Харченко А. М. Метод построения расчетной схемы и расчета показателей надежности сложных систем с большим числом элементов. — Изв. вузов. Энергетика, 1978, № 9, с. 35—39.

5.1. Сешу С., Рид М. Б. Линейные графы и электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1971. — 395 с.

5.2. Ласдон Л. С. Оптимизация больших систем. — М.: Наука, 1975. — 431 с.

6.1. Павлов И. В. Оценка надежности систем по результатам исследований их компонентов. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, № 1, с. 84—86.

6.2. Павлов И. В. Вычисление доверительных границ для функций многих неизвестных параметров. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, № 2, с. 89—92.

6.3. Ллойд Д., Липов М. Надежность. — М.: Советское радио, 1964. — 686 с.

6.4. Зангвилл У. И. Нелинейное программирование. — М.: Советское радио, 1973. — 311 с.

Оглавление

числовые	3
ление	5
глава первая. Показатели и характеристики надежности элементов систем электроснабжения	10
1.1. Основные показатели надежности элементов	10
1.2. Характеристики эксплуатационной надежности воздушных линий электропередачи 110 кВ. Стационарная модель	16
1.3. Характеристики эксплуатационной надежности силовых трансформаторов 110 кВ. Нестационарная модель	21
1.4. Характеристики надежности кабельных линий 110 и 35 кВ. Случай малых выборок, совместное действие внезапных и постепенных отказов	28
глава вторая. Модели отказов элементов систем электроснабжения. Определение показателей функциональной надежности	34
2.1. Внезапные и постепенные отказы элементов систем электроснабжения	34
2.2. Формирование схемы внезапных повреждений	36
2.3. Формирование схемы постепенных повреждений	39
2.4. Формирование законов распределения сроков службы изоляции элементов	46
2.5. Общие принципы получения показателей функциональной надежности силовых трансформаторов и кабельных линий	55
2.6. Количественные характеристики показателей функциональной надежности силовых трансформаторов	57
2.7. Определение расчетных нагрузок силовых трансформаторов и кабельных линий	63
глава третья. Методы расчета показателей надежности систем электроснабжения с использованием моделей случайных процессов	73
3.1. Основные задачи надежности, решаемые с использованием теории случайных процессов	73
3.2. Одноэлементная схема	74
3.3. Система, состоящая из последовательных восстанавливаемых элементов	80
3.4. Система, состоящая из параллельно соединенных восстанавливаемых элементов	81
3.5. Система с произвольным соединением элементов	86
3.6. Расчет показателей надежности с учетом ремонтных состояний и преднамеренных отключений элементов	87
	223

3.7. Использование марковских и полумарковских процессов	93
3.8. Однородные марковские модели для систем с зависимыми элементами и учет задержки ввода в эксплуатацию элемента группы	97
3.9. Характеристики надежности при нестационарных потоках отказов	102
3.10. Асимптотическая устойчивость решения для групп отказов, обусловленных преднамеренными отключениями	105
3.11. Характеристики длительности пребывания систем в отказовых состояниях	11
Глава четвертая. Методы расчета показателей надежности схем электрических соединений	11
4.1. Относительность понятий «элемент» и «система» в расчетах надежности электрических систем	11
4.2. Основные допущения, принимаемые при расчетах показателей надежности. Понятие отказа системы	11
4.3. Метод анализа вероятностей состояний системы	12
4.4. Метод с использованием формулы полной вероятности	12
4.5. Методы структурного анализа сложных схем и использование их для оценки надежности	12
4.6. Расчет показателей надежности по структурным схемам	144
4.7. Влияние зависимых отказов элементов на надежность схем электрических соединений	156
4.8. Составление расчетных схем по надежности	161
4.9. Особенности инженерных расчетов надежности сложных схем электрических соединений	166
Глава пятая. Интегральные показатели надежности систем электроснабжения	169
5.1. Постановка задач и особенности ее конкретных формулировок	169
5.2. Линейные модели и алгоритмы оценки состояния системы	173
5.3. Корректировка решения при оценке состояния системы	182
5.4. Анализ полного решения на основе аддитивных двояственных переменных	183
5.5. Полиномиальные модели и возможности аналитического решения задачи	189
Глава шестая. Оценка доверительных границ	192
6.1. Исходная информация и особенности решаемой задачи	192
6.2. Общий метод построения доверительных интервалов и анализ его конкретных реализаций для восстанавливаемых систем	196
6.3. Доверительные множества. Случай восстанавливаемой системы	201
6.4. Определение доверительных границ методами нелинейного программирования	21
Список литературы	22